Brøkforståelse og holdninger til matematikk hos elever som starter på videregående skole

En kvantitativ studie om elever som starter i den videregående skole og deres brøkkunnskaper og misoppfatninger de har knyttet til brøk, samt hvilken holdning til de har til matematikkfaget

av

Elisabeth Refvem Kuvåssæter

Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk

Matematisk institutt

Universitetet i Bergen

Våren 2021

Sammendrag

Denne masteroppgaven handler om hvilke kunnskaper elever som starter på videregående skole har om grunnleggende brøk og deres holdninger til matematikkfaget. Formålet med oppgaven er å finne ut av hvilke kompetanse elevene har til brøk, og avdekke hvilke av de vanligste misoppfatningene innen brøk elevene gjør. Disse kan ikke ha blitt oppdaget og korrigert underveis i skoleløpet, og jeg vil videre se på om elevenes holdninger til matematikk har en innvirkning på elevens resultat når det gjelder brøkkunnskaper.

Til prosjektet ble det valgt en kvantitativ metode i form av spørreundersøkelse, og dataene ble samlet inn på papirbasert spørreskjema. 233 elever deltok i undersøkelsen. Deltakerne var både fra yrkesfag og studiespesialiserende studieretninger, og representerte fagene 1P-Y, 1P og 1T.

Hovedfunnene i denne undersøkelsen er, at selv om mange elever har en god matematisk kompetanse innen brøk og brøkregning, er det fortsatt en del elever som har noe å gå på før den matematiske kompetansen i brøk og brøkregning er på et tilfredsstillende nivå når de starter på den videregående skolen. Selv etter ti år med skolegang, er det fortsatt en del misoppfatninger rundt brøk, som fortsatt henger igjen. Jeg har også funnet ut at det er en sammenheng mellom resultat når det gjelder emnet brøk og holdninger til matematikk.

Håpet er at studien kan gi økt kunnskap om hva man som lærer bør være oppmerksom på i planlegging og gjennomføring av undervisningen. Da for å avdekke, motvirke og forhindre nye misoppfatninger. Jeg har også ett håp om at studien skal kunne øke kunnskapen om hvordan man som lærer kan påvirke/motvirke visse holdninger hos elevene, slik at de får et mer positivt syn på matematikkfaget.

Forord

Etter mange år som lærer i den videregående skole, hadde jeg behov for litt påfyll, og deltidsstudiet: Erfaringsbasert master med fordypning i matematikk på UIB, fanget min interesse. Når jeg skulle velge emne til denne oppgaven, gikk jeg mange runder med meg selv, men jeg kom stadig tilbake til at det er en ting som alltid har forundret meg. Hvorfor er det så mange elever, både lavt, men også høyt presterende, som har ett anstrengt forhold til brøk?

Jeg var så heldig at skolen min la til rette for dette studiet, og sammen med vikarordningen fra «Utdanningsdirektoratets kompetanse for kvalitet» startet jeg på det fire år lange studiet. De første årene ble det en del pendling til Bergen, der jeg fikk faglig påfyll og stiftet nye bekjentskaper med lærere (ikke bare matematikklærere) fra hele landet. Men så kom Covid-19. Da ble det undervisningen lagt til nettbaserte samlinger. Jeg er for så vidt glad for at jeg da var kommet til slutten av studiene mine, og ikke var i begynnelsen, for jeg har savnet det sosiale og den faglige samtalen under samlingene.

Nå nærmer vi oss slutten og målstreken er like rundt hjørnet. Mange fortjener en takk for at jeg kunne klare å ferdigstille dette prosjektet:

Først og fremst vil jeg rette en stor takk til alle elever som var villig til å være informanter, uten dem ville ikke prosjektet være mulig å gjennomføre.

En stor takk også til arbeidsgiver for god tilrettelegging av arbeidstid slik at det har vært mulig å kombinere studie med jobb.

Ektemann og barn fortjener også en stor takk for tålmodighet og hjelp med oppmuntrende ord og positiv hjelp i hjemmet.

En stor takk må jeg også rette til veilederen min, professor Ove Gunnar Drageset for uvurderlig god hjelp og konstruktive innspill underveis i prosessen.

En stor takk vil jeg også si til korrekturleserne for hjelp med språkvask.

Innhold

1. Innledning

1.1 Bakgrunn av valg av tema

I min tid som lærer har jeg ofte undret meg over hvorfor en så stor del av elevene sliter med brøk. Mange elever, både faglig lavt og høyt presterende, kvier seg med en gang de ser en brøk. Derfor har jeg valgt å se nærmere på brøk. Når jeg går inn i litteraturen (Bjerke et al. 2013; Brow & Quinn, 2006, Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Kerslake, 1986; Lamon, 2012; McIntosh, 2007; Steffe & John, 2010; van Galen et al. 2008), ser jeg at mange er av samme oppfatting som meg.

> «The field of fractions, percentages, decimals and proportions is a complex and difficult one»(van Galen et al., 2008)

I boken «Teaching fractions and Ratios for understanding» av Susan J Lamon, sier hun i forordet:

> « Understanding fractions marks only the beginning of the journey toward rational number understanding. By the end of the middle school years, as a result of maturation, experience, and fraction instruction, it is assumed that students are capable of a formal thought process called *proportional reasoning*. This form of reasoning opens the door to high-school mathematics and science, and eventually, to careers in the mathematical sciences. The losses that occur because of the gaps in conceptual understanding about fractions, ratios, and related topic are incalculable. The consequences of *doing*, rather than understanding, directly or indirectly affect a person's attitudes toward mathematics, enjoyment and motivation in learning, course selection in mathematics and science, achievement, career flexibility, and even the ability to fully appreciate some of the simplest phenomena in everyday life»(Lamon, 2012, p. xi).

Da jeg satte meg inn i dette temaet, begynte nye spørsmål å dukke opp. Hva er matematisk kompetanse? Hva legger vi i «holdninger til matematikk»? Ett nytt dypdykk i litteraturen (Di Martino & Zan 2010, 2020; Hannula, 2006, 2012; Liljedal & Oesterle, 2020; Lipnevich, MacCann et al. 2011, Kilpatrick, Swafford et al. 2001, Niss og Højgaard Jensen, 2002; Ma & Kishor, 1997, 1997b; MeLeod, 1992; Ryan 2001; Ryan & Deci, 2002) og jeg finner ut at det er forskjellige måter å definere matematisk kompetanse og at det ikke er en entydig definisjon på holdninger i matematikk. Noen mener de to emnene hører sammen, andre deler dem opp i to forskjellige kategorier.

1.2 Mål for oppgaven

Formålet med denne oppgaven er å få bedre kjennskap til forståelsen av brøk og brøkregning elever som starter på videregående skole har. Jeg ønsker å undersøke hvordan elevene løser ulike oppgaver som involverer brøk. Hvilke metoder de bruker, og hvilke misoppfatninger de eventuelt har. Jeg ønsker å få ett helhetlig bilde av brøkforståelsen til elevene, og vil derfor gå ut med et bredt sett med oppgaver i en kartleggingstest som jeg utfører på alle vg1-elevene ved en videregående skole på sør-vest landet.

Målet vil da være at dette skal gi meg informasjon om hva elevene mestrer, og peke på noen misoppfatninger knyttet til brøk og brøkregning. Kanskje finne misoppfatninger som er mest vanlig for elever som starter i den videregående skolen. Ved å undersøke elevenes feilmønster, og bruk av feil strategi kan det øke lærerens forståelse av elevenes resonnering og misoppfatninger når det kommer til brøk (Zhang et al., 2017).

Jeg ønsker også å se på om holdninger til matematikk opp mot resultatet av brøktesten. Jeg deler holdninger inn i fem undergrupper; *indre motivasjon, instrumentell motivasjon, oppfattet kontroll, subjektiv norm – venner og subjektiv norm – foreldre*. Hvilke innvirkninger har de forskjellige motivasjonene opp mot resultat av brøktesten, mot fagvalg, programfag og kjønn. Er det slik at elever som er faglig lavt presterende har dårligere holdninger til matematikk og at elever som er faglig høyt presterende har en mer positiv holdning til matematikk? Er det en forbindelse mellom holdninger, misoppfatninger og resultat på brøktesten? Hva klarer jeg å finne?

Jeg har valgt å kun utføre en kvantitativ metode for å få inn mye data til å kunne finne de mest vanlige misoppfattelsene. Jeg kunne også ha utført noen utdypende intervjuer for å komme litt lenger ned i misoppfattelsene, men på grunn av tidsaspektet og på grunn av at jeg selv er lærer ved denne skolen som jeg utfører kartleggingstesten på, vil jeg være minst mulig involvert for å ha høyest mulig relabilitet.

Brøk og brøkregning er ett stort emne og jeg vil ikke kunne teste utfyllende alle sider ved brøkaspektet. Målet er likevel at jeg med oppgavesettet skal ha ett grunnlag for å reflektere rundt den generelle forståelsen av brøkbegrepet og noen av de mest vanlige misoppfattelsene elevene som starter i den videregående skolen har. For å synliggjøre ulike aspekter ved brøkbegrepet vil den matematiske konteksten bli brukt til å strukturere testen og analysen, og misoppfatninger vil bli brukt som et verktøy for å finne manglende begrepsforståelse.

For å se om holdninger til matematikk har noe å si på kompetansen til elevene, har jeg i starten av testen ett sett med påstander. Disse påstandene er det jeg har laget fem undergrupper av, som skal gjøre det mulig for meg å kunne se på holdninger opp mot resultat, fagvalg, programfag og kjønn.

1.3 Forskningsspørsmål

Så med tanke på formålene med denne oppgaven har jeg kommet fram til følgende problemstillinger:

Hvordan står det det til med kunnskapen om brøk og holdninger til matematikk for elever som starter på den videregående skolen?

I denne oppgaven vil jeg prøve å svare på denne problemstillingen ved hjelp av forskningsspørsmålene:

- *Hvilke forståelser i brøk og brøkregning kan man finne hos elever som starter i den videregående skolen?*
- *Hvilke misoppfattelser rundt begrepet brøk og brøkregning kan man finne hos elevene?*
- *Har holdning til matematikk en sammenheng med hvordan elevene gjør det i brøkregning og forståelsen av brøk?*

Hvorfor er disse spørsmålene viktige? Creswell (2014) hevder at utdanningsforskning er viktig fordi den kan gi opplysninger som kan forberede praksis ved å adressere problemene.

For at jeg skal få en dypere forståelse for hvorfor elevene tenker som de gjør, er det viktig å svare på forskningsspørsmålene med å diskutere mine funn opp mot relevant forskningslitteratur rettet mot holdninger, kompetanse og misoppfatninger.

2. Teori

Dette kapittelet inneholder teori som er relevant for oppgave min. Jeg skriver først litt om brøk og de ulike aspektene ved brøk. For å få en solid begrepsforståelse av brøk, er det viktig å se på alle aspektene innenfor brøk (Bjerke et al., 2013). Jeg prøver også å gi en oversikt over historien til brøk.

Videre i kapittelet ser jeg på matematisk kompetanse ved hjelp av KOM-Prosjektet (Niss & Højgaard Jensen, 2002) og trådmodellen (Kilpatrick et al., 2001), for så å se på læreplanen og hvilke misoppfatninger som kan dukke opp.

Jeg avslutter dette kapittelet med å se på holdninger til matematikk. Det finnes ingen entydig definisjon på holdninger til matematikk, så jeg har sett på tre modeller som skal hjelpe meg for å få ett overblikk på dette.

2.1 Brøk

2.1.1 Hva er en brøk?

I følge det store norske leksikon (2020, 6. oktober) er «Brøk et matematisk uttrykk for en del eller flere like store deler av en enhet. En brøk skrives vanligvis som $\frac{a}{b}$ (eller a/b) hvor b kalles nevneren, og uttrykker hvor mange deler enheten er delt inn i ($b \neq 0$), mens teller a angir hvor mange slike deler brøken inneholder.

For eksempel er brøken $\frac{3}{5}$ uttrykket for tre femdeler.

I en ekte brøk er telleren mindre enn nevneren, for eksempel $\frac{2}{7}$, mens i en uekte brøk er telleren større eller lik nevneren. En uekte brøk skrives av og til som et blandet tall, det vil si som et helt tall og en ekte brøk(*Store Norske Leksikon*)(*Store Norske Leksikon*)(*Store Norske Leksikon*)(*Store Norske Leksikon*). Eksempel: $\frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$.

Bruken av brøkstrek finnes først hos Leonardo Pisano Fibonaaci (ca. 1200). Brøker og heltall utgjør til sammen de rasjonale tallene «(*Store Norske Leksikon*)(*Store Norske Leksikon*)(*Store Norske Leksikon*)(*Store Norske Leksikon*).

I kunnskapsforlaget sitt matematikkleksikon (2006) finn en følgende definisjon av brøk: " Et uttrykk av formen $\frac{a}{b}$. Streken kalles brøkstrek. *a* kalles teller og *b* nevner.

Ut fra kunnskapsforlaget sin definisjon er tallet $\frac{\sqrt{2}}{7}$ også en brøk, men siden slike tall er lite kjent i grunnskolen, har jeg valgt å følge Det store norske leksikon (2020,6 oktober) sin definisjon, og begrense brøk til de som inngår under rasjonale tall. Ett rasjonalt tall er et tall som kan skrives på formen $\frac{a}{b}$, der a og b er hele tall og $b \neq 0$. Det latinske navnet ratio indikerer hvor ordet rasjonal stammer fra, og betyr forhold (Thompsen, 2006)

Sfard (1991) sier at en brøk kan bli oppfattet på to fundamentalt forskjellige måter: Strukturelt – som et objekt, og operativt – som en prosess. La oss ta for oss brøken $\frac{17}{4}$. Oppfattes denne brøken som et objekt, er det det rasjonale tallet «sytten fjerdedeler» vi snakker om. Oppfattes brøken som en prosess, representerer brøkstreken divisjonstegnet: sytten delt på fire.

Det er flere grunner til at vi har behov for brøkbegrepet. Brekke et al. (2011) sier vi trenger å kunne angi størrelser som er mindre enn enheten, og størrelser mellom de hele tallene. Vi har behov for svar (uten rest) ved divisjon, og vi må ha uttrykk for forhold mellom størrelser (Birkeland et al., 2011).

Brøk er basis i flere emner i realfag i skolen. I matematikk er brøk bl.a. basis for forståelse av trigonometri og algebra. En må forstå forhold i geometrien, det er også en stor fordel å forstå brøk når en skal lære om prosent. For å forstå og håndtere utvidelser/forkortelser av algebraiske uttrykk, er også brøk ett sentralt begrep. I kjemi kommer forståelsen av brøk inn angående forhold, i forståelsen av konsentrasjoner. I fysikk er brøk basis for bl.a. forståelsen av trykk, legering, og tetthet.

2.1.2 Brøkens historie

Brøk har vært en del av matematikken i flere tusen år, men symbolbruken har endret og utviklet seg over tid.

Fra leirtavler funnet i ruiner i Babylon har vi lært mye om den høyt utviklet matematikken de hadde ca. 2000 år f.Kr. Babylonerne hadde ett posisjonssystem med 60 som grunntall, men bestående av kun to symboler: en «kile», 𒁹, for 1, og en «vinkelhake», 𒌋, for 10 (Katz, 2018; Holme, 2008).

Tallene ble skrevet med å addere disse tegningene.

Eks:

Når de kom til 60 startet de på nytt.

$$46\_40 \rightarrow 40 \cdot 60^0 + 46 \cdot 60^1 = 2800$$

Holme (2008) påpeker at siden de ikke hadde symbol for 0 og ikke komma, kan dette skape tvetydigheter. Det kan jo være at det er «to mellomrom» mellom 46 og 40, slik at regnestykket egentlig var: $46\_\_40 \rightarrow 40 \cdot 60^0 + 46 \cdot 60^2 = 165640$

Vi kan altså ikke vite om 𒁹 betyr 1, 60, 60^2 eller $\frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}$ osv. Men utfra teksten som fulgte med, kunne vi som regel tolke betydningen ut fra sammenhengen (Katz, 2018; Holme, 2008).

Vi bruker fortsatt en del av dette systemet når det kommer til tid. 1 time = 60 min., 1 min. = 60 sekund. Og en av årsakene til det, er fordelen når vi skal «dele» tid i mindre deler:

$\frac{1}{2}$ time = 30 min.

$\frac{1}{3}$ time = 20 min.

$\frac{1}{4}$ time = 15 min.

$\frac{1}{5}$ time = 12 min.

$\frac{1}{6}$ time = 10 min.

Holme (2008) og Katz (2018) sier begge at den aller viktigste forståelse og kunnskap vi har av matematikk fra det gamle Egypt, har vi fra Rhind-papyrusen. Rhind-Papyrusen er fra ca. 1650 f.kr, men det er en kopi av Ahmose-papyrusen som vi antar stammer fra perioden fra 2000 – 1800 f.Kr. Rhind-papyrusen beskriver hvilke metoder de hadde for multiplikasjon, divisjon og behandling av stambrøker. Egypterne hadde ett titallsystem, men ikke noe posisjonssystem. Sifrene 1 – 9 var bare streker, men de hadde egne symboler for 10, 100, 1000 osv. (Holme, 2008; Katz, 2018).

Når det kom til regning med brøker, brukte de konsekvent stambrøker (brøker på formen $\frac{1}{n}$), med unntak av $\frac{2}{3}$, som hadde sin egen betegnelse. Fordelen med stambrøker var at det var lett å sammenligne størrelser av tall, men den har også blitt oppfattet som «klossete», siden de bruker «mer tegn» på å skrive en enkel brøk (Katz, 2018): Hvis vi ser på brøken $\frac{37}{44}$, ville den ha blitt skrevet (på vår notasjon) som $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{11}$.

En av kildene vi har fra Kina og kjennskapen de hadde om matematikk er «Ni bøker om matematikkens kunst». Her finner vi en oppsummering av matematikken som var kjent fram til ca. år 100 f.Kr. Dette var nok en lærebok, som inneholdt 246 problemer fra dagliglivet med generelle løsningsmetoder. Kineserne hadde en velutviklet brøkregning, der de blant annet sammenliknet brøker med samme nevner. De benyttet blant annet desimalbrøk med grunntallet 10 (Holme, 2008).

På 800-tallet e.Kr. skrev al-Khwarizmis (arabisk matematiker) ned store deler av matematikken som var kjent da. Han har et eget kapittel som omhandler brøk i boka Dixit algorizmi. Brøkene var kalt for «broken numbers». Han viser her én metode for multiplikasjon av stambrøker og vanlige brøker. Al -Khwarizmis introduserte de 9 symboler for de første 9 sifrene og en sirkel for å betegne null. Al-Khwarizmis brukte av og til den egyptiske metoden, summer av stambrøker, og av og til det babyloniske 60-tallssystemet. al-Khwarizmis blir også regnet som algebraens far (Katz, 2018).

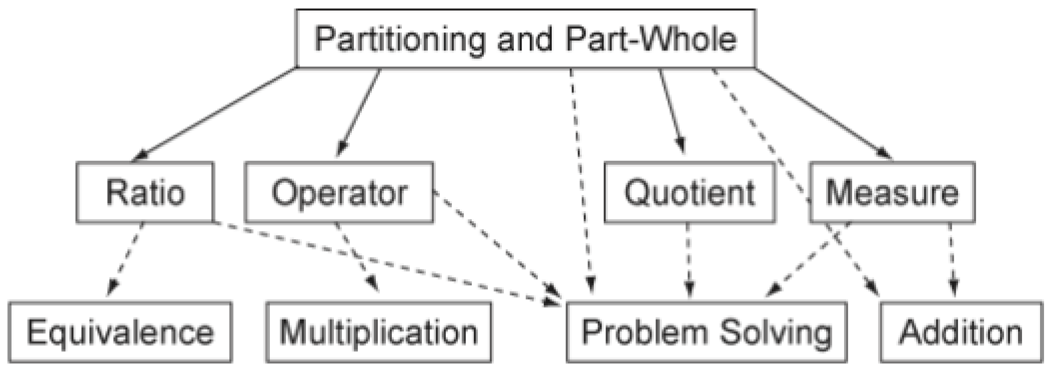
Den moderne algebraen oppsto på 1600-tallet, og det var da de mer abstrakte symbolene ble tatt i bruk, i stedet for ord og setninger. Simon Stevin (1548 – 1620) var skaperen av den gjennomtenkte notasjonen av desimalbrøker. Han spilte også en stor rolle i å skille tall med størrelser. I boka «De Thiende» innførte han desimaltall og notasjon for å regne med desimaltall. Han anbefalte også at desimaltallsystemet burde innføres for lengder og vekter, noe som ikke ble gjort før ca. 200 år senere (Katz, 2018).

Desimaltallene er spesialtilfeller av brøk, nevneren er potenser av 10. Enhver brøk kan skrives som et endelig eller som et periodiske, desimaltall. Og omvendt: Ethvert endelig desimaltall og ethvert periodisk desimaltall kan skrives som en vanlig brøk (Birkeland et al., 2011).

Utviklingen av tallinjen har vært en lang prosess. Selv om vi kan finne spor etter tallinjer tilbake til babylonerne og egypterne ca. 2000 f.Kr. så dukket ikke tallinjen, slik vi kjenner den i dag, opp før på slutten av 1800-tallet. I matematikken fram til Euklid, hadde vi seperasjon av tall og linjer. Fram til 1500 tallet fikk vi fundamentet på heltall, rasjonale tall og empirisk geometri. Fra 1600-tallet til begynnelsen av 1800 tallet, ved hjelp av Stevin, Wallis og Decartes sine arbeider, begynte man å se sammenhengen mellom tall og geometriske linje. Arbeidet til blant annet Wierstrass, Cantor og Dedekind ble fundamentet laget på tallinjen slik vi kjenner den i dag (Lemonidis & Golfos, 2020).

2.1.3 Ulike aspekter ved brøkbegrepet

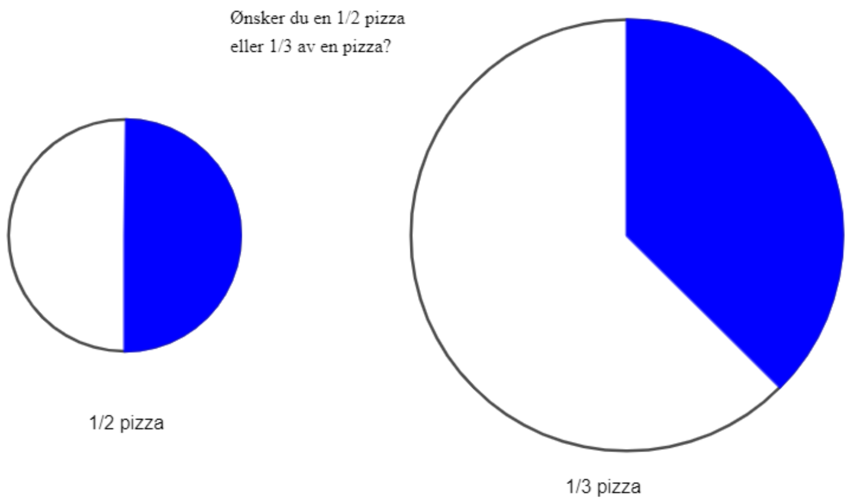
I 1976 la Kieren fram en teori om at begrepet brøk består av fire sammenhengende underkonstruksjoner: «brøk som forhold», «brøk som operator», «brøk som kvotient» og «brøk som målestørrelser». Med «brøk som en del av en hel» mente han gjennomsyret de fire andre delkonstruksjonene, og han unngikk å identifisere helheten som en femte underkonstruksjon. Han foreslo blant annet at forståelse av brøker avhenger av å få en forståelse av hver av disse forskjellige betydningene, så vel som sammenhengen mellom de fire. Senere videreutviklet Behr (Behr et al., 1983) Kirens ideer der disse fem aspektene ved brøk ble lenket opp mot operasjoner på brøk, ekvivalente brøker og problemløsning (Charalombous & Pitta-Pantazi, 2007). I Behr sin teoretiske modell, er «Brøk som en del av en hel» selve fundamentet for å utvikle en forståelse for hvert delbegrep for seg, og for integreringen av disse (se figur 1).



Figur 1: Teoretisk modell der de fem aspektene ved brøkbegrepet er relatert til ulike operasjoner på brøk og problemløsning. (Behr et al.,1983)

Brøk som en del av en helhet

Elever som blir introdusert for brøk første gang, er vant med å telle objekter. Men hva om vi har 3 pizzaer som er helheten (enheten)? Da blir 1 pizza $\frac{1}{3}$ av alle pizzaene (Lamon, 2012). Det er viktig at elevene forstår at en brøk alene beskriver ikke størrelsen av helheten. En brøk forteller oss bare forholdet mellom delen og helheten (Van de Walle, 2015).



Figur 2: Hva er enheten?

Lamon (2012) understreker viktigheten av å identifisere enheten og være sikker på at hver brøk blir tolket med betingelsen av enheten, først da kan vi sammenligne brøker, det kan man ikke hvis de er basert på forskjellige enheter.

Brøk som forholdstall

Brøk som forhold, gir oss muligheten til å sammenligne to mengder. En betongblanding består av sement og sand i forholdet 1 til 3. Det skrives ofte 1:3 eller $\frac{1}{3}$. Det betyr at 1 del sement og 3 deler sand, totalt 4 deler. Vi trenger $\frac{1}{4}$ sement og $\frac{3}{4}$ sand. Dette kan fort forvirre elever (Lamon, 2012). En annen ting er at her snakker vi om forhold som har samme mål (kg, antall spadetak osv.). Snakker vi om forhold som binder sammen størrelser av ulik slag, 9 kr. per hg smågodt, kaller vi det en rate. En rate er altså et tall med en sammensetninger av enheter (for eksempel kr/kg, m/s osv) (Lamon, 2012).

Brøk som operator

Brøk som operasjon innebærer at selve brøken beskrives som en operasjon som må gjøres. Brøk blir altså betraktet som funksjoner brukt på tall, objekter eller mengde. En operator kan altså endre mengden til en brøkdel av den opprinnelige mengden. Dette kan utføres på ulikt vis. $\frac{2}{3}$ av 6 kan for eksempel vise som en multiplikasjon av en divisjon av en mengde (2 kopier av 6:3) eller som en divisjon av en multiplikasjon av en mengde (2 kopier av 6 skal deles på 3). Når brøken blir brukt som en operator, skjer det en økning eller minking (Lamon, 2012).

Dersom en operasjon blir gjort på resultatet av en annen operasjon, kaller vi det for en sammensetning. Disse operasjonene kan en slå sammen til en enkel operasjon.

Brøk som operator kan være med på å øke forståelsen for multiplikasjon av brøk. Mange elever er kjent med modellen for multiplikasjon som «gjentatt addisjon». Det kan gi mening når man arbeider med naturlige tall, men det er ikke en god nok forståelse av operasjonen på brøk (Lamon, 2012). Ved operasjonen $3 \cdot \frac{1}{4}$ kan dette sees på gjentatt addisjon $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, men med operasjonen $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ gir ikke denne metoden mening. Multiplikasjonstegnet må tolkes som «av». Vi har altså $\frac{2}{5}$ av $\frac{3}{4}$. Vi må se på hvor mye $\frac{2}{5}$ er av det hele, for å så ta $\frac{3}{4}$ av dette.

I mange situasjoner vil oversettelsen av multiplikasjonstegnet med «av» plutselig gi intuitiv mening til oppgaver som i starten kan være vanskelig å forstå (Bjørnstad, 2011). Elevene må få presisert tolkningen av multiplikasjonstegnet som «gjentatt addisjon» til «av».

For å forstå brøk som en operator, må elevene kunne blant annet tolke brøken på ulike måter (Lamon, 2012) $\frac{3}{4}$ kan sees på som $3 \cdot \frac{1}{4}$ av en helhet, eller som $\frac{1}{4}$ av 3 enheter. Det er også viktig at eleven må vite at å dele enheten på 4 for så å multiplisere med 3, er det samme som å multiplisere enheten med $\frac{3}{4}$.

Brøk som kvotient

«Any fraction can be seen as the result of a division situation» (Charalombous & Pitta-Pantazi, 2007). Det vil si at 3:4 eller $\frac{3}{4}$ både kan representere en regneprosess, noe som skal regnes ut, og gi et svar.

Svaret på divisjonen a:b = a/b. Her er a dividenden, b divisoren og a/b kvotienten.

For å mestre brøk som kvotient, må en elev blant annet forstå at én snakker om lik/rettferdig deling, og han må vite at det ikke fins avgrensninger på størrelse til brøken. Telleren kan være mindre, lik eller større enn nevneren, og størrelsen på svaret kan være mindre, lik eller større en størrelse vi startet med (Charalombous & Pitta-Pantazi, 2007). Eleven må også kunne kjenne igjen brøk som divisjon, og én må ha en forståelse for de to modellene for divisjon: Delingsdivisjon og målingsdivisjon (Charalombous & Pitta-Pantazi, 2007).

Ved delingsdivisjon vet vi hvor mange det skal fordeles på, og svaret forteller hvor mye det blir til hver. Ved målingsdivisjon sier divisoren hvor mange det skal være i hver mengde, og svaret vil angi hvor mange det er totalt (Charalombous & Pitta-Pantazi, 2007).

Eksempel på delingsdivisjon: 2 pizza skal deles likt på 3 personer. Hver person får da 2/3 av en pizza.

Eksempel på målingsdivisjon: 4 liter saft fordelt på flasker som tar 1/3 liter. Hvor mange flasker trenger du? Til sammen trenger du 12 flasker.

Birkeland (2011) mener at ved konkretisering av divisjon, vil det kanskje være mest naturlig å bruke delingsdivisjon når divisoren er et helt tall, mens målingsdivisjon kan være mer aktuelt når divisoren er en brøk.

Brøk som måling

Dette aspektet ved brøk skildrer tallstørrelsen, som for eksempel $\frac{3}{4}$ eller noe som én vil måle, som for eksempel $\frac{3}{4}$ liter. Brøk som måling er relatert til en helhet. Denne helheten kan være en fysisk størrelse som for eksempel et avgrenset område. Eller det kan være ei tallinje (Birkeland et al., 2011).

Forskning viser at bruk av tallinje kan hjelpe elevene til å få en forståelse av størrelsen på brøker, og kan bli brukt til å bygge på begrepene ekvivalens og tetthet av rasjonelle tall.

Lærere har funnet ut at spesielt bruk av tallinjer hjelper elevene til å tenke på en brøk som et antall, slik at de kunne sammenligne og finne ekvivalente brøker og fjerne dem fra å bruke resonnementer når de jobber med brøker (Petit, 2010).

Det er viktige egenskaper som skiller tallinjen fra andre brøkmodeller:

1. Enheten er representert med en lengde i motsetning til et område eller ett sett med objekter.
2. En tallinje krever symboler for å definere enheten, mens enheten i et område eller en mengde med objekter er underforstått i modellen.
3. Det er ingen visuelle skiller mellom iterasjoner av enhetene. Enhetene er kontinuerlige, i motsetning til et område eller en mengde objekter der enheten er en fysisk del.
4. Enheter på tallinjer kan deles opp uten begrensninger.

(Petit, 2010).

Bruk av tallinjer kan være til hjelp for å utvikle en solid forståelse av tall generelt, og for brøk som tallstørrelser. Her kan man blant annet få fram verdien til en brøk, og vi kan se ulike brøker plassert i forhold til hverandre (Dahl & Nohr, 2010). Det kan også være med på å hjelpe elevene til å se at mange symboler kan ha samme tallverdier.

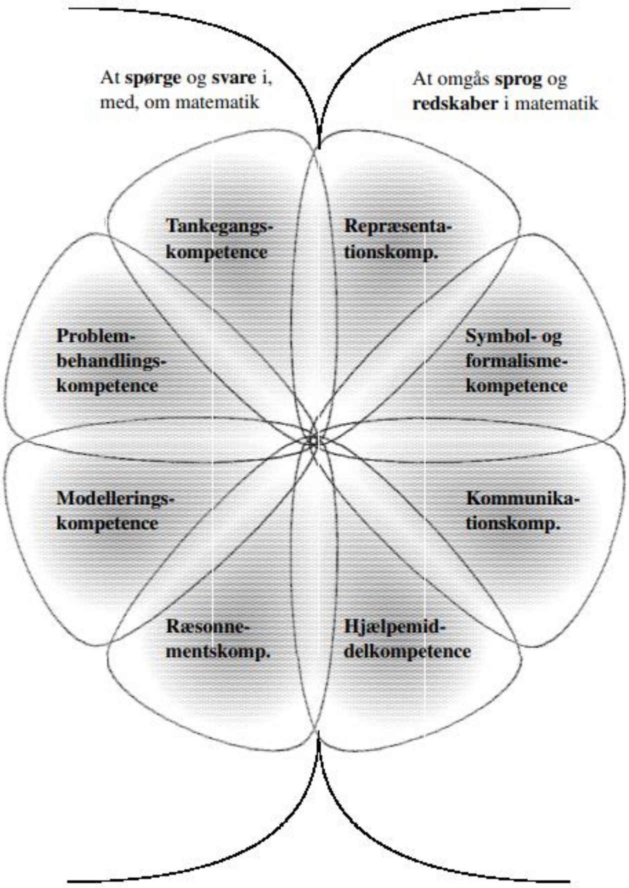
Lamon (2012) sier at for å mestre brøk som måling, må en elev kunne plassere tall på tallinjen, både der selve linja utgjør en helhet og der tallinja inneholder flere helheter. En elev må forstå tettheten i de rasjonale tallene. Det vil si at det er uendelig mange tall mellom to jevne brøker, han må kunne sammenlikne to brøker, og han må kunne dele det hele i mer enn kun halveringer (Lamon, 2012).

2.2 Matematisk kompetanse

Matematisk kompetanse er et sentralt begrep når det gjelder å systematisere og analysere hva det vil si å være god eller flink i matematikk. Niss og Højgaard Jensen (2002) ledet et dansk prosjekt, KOM-prosjektet (Kompetaencer og matematiklæring) som har fått stor betydning for skolematematikken i Norge. Målet med rapporten er blant annet å forstå og analysere elevers kompetanse i matematikk på en utvidet og helhetlig måte (Botten, 2016). Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) utviklet en «Trådmodell» for matematisk kompetanse som er beskrevet og brukt av Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen i artikler og oppslag på nettet, blant annet i «Teoretisk bakgrunnsdokument for arbeid med regning på ungdomstrinnet» (Matematikksenteret, 2014).

2.2.1 KOM-prosjektet

KOM-prosjektet presenterer åtte delkompetanser (figur 3) og skal illustrere at delkompetansene henger sammen og delvis overlapper hverandre (Botten, 2016).



Figur 3:Visuell representasjon av de åtte matematiske kompetanser (Niss & Højgaard Jensen, 2002, p. 45).

Som figur 3 viser, deler Niss & Højgaard Jensen (2002) matematisk kompetanse inn i to hovedkategorier. Hver av disse inneholder fire underkategorier. De to hovedkategoriene, å kunne «spørre og svare i, med og om matematikk» og «om matematikk og håndtere matematikkens språk og redskaper» er en inndeling etter innholdet i kompetanse. Hver av de åtte kompetansene er sammenfattende og generell i natur, noe som betyr at kompetansene er uavhengige av ethvert konkret matematisk emne. Tilsvarende er de også uavhengige av hvilket utdanningsnivå matematikken man er på. Likevel er disse kompetansene spesifikke for matematikk, noe som gir denne kompetansemodellen en generaliserbar tyngde og relevans (Niss & Højgaard Jensen, 2002).

Førstnevnte kategori inneholder underkategoriene: *Tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse og resonnementskompetanse*.

Tankegangskompetansen (Niss & Højgaard Jensen, 2002) har flere aspekter ved seg. Det innebærer blant annet å være klar over hvilke spørsmål som er karakteristiske for matematikk, kunne stille slike spørsmål selv og vite hvilke svar som kan forventes av disse spørsmålene.

Dersom en er ute etter et spesifikt svar, er dette nært knyttet opp mot formuleringen av spørsmålene. I tillegg består kompetansen i å kjenne, forstå og håndtere gitte matematiske begrepers rekkevidde og deres forankringer i diverse domener. Eleven må kunne utvidet et begrep ved abstraksjoner av egenskaper i begreper og å kunne forstå hva det ligger i generalisering av matematiske begreper. Kompetansen inneholder også det at en kan skille, både passivt og aktiv mellom forskjellige matematiske utsagn og påstander, for eksempel definisjoner og betingende utsagn (Niss & Højgaard Jensen, 2002).

Problembehandlingskompetansen (Niss & Højgaard Jensen, 2002) går ut på å finne, formulere, oppstille, avgrense og presisere ulike matematiske problemer, både når oppgavene er lukkede og åpne, rene og anvendte, samt egne og andres problemer. I denne konteksten er et matematisk problem et matematisk spørsmål som krever bruk av matematisk undersøkelse for å få en løsning. Det vil si at prosedyreferdigheter ikke kommer under denne kompetansen. Om et matematisk spørsmål er et matematisk problem, avhenger av den som skal løse det; dersom det krever undersøkelse, er det et matematisk problem, men ikke dersom det kun krever prosedyreferdigheter. En kan ha kompetanse i å stille matematiske problemer, men ikke i besvarelsen av dem – og omvendt (Niss & Højgaard Jensen, 2002).

Modelleringskompetansen (Niss & Højgaard Jensen, 2002) går ut på å tolke og analysere eksisterende modeller. I tillegg skal en kunne konstruere slike modeller selv, basert på en annen representasjon. Disse representasjonene kan for eksempel være en setningsbasert, formell utledning, eller et regnestykke som har blitt presentert. Analysen og tolkningen av modeller består ofte av geometriske figurer, hjelpetegninger, tabeller og grafer, noe som viser til et stort mangfold og kompleksitet i denne kompetansen. De praktiske ferdighetene som fortolkning og konstruksjon av modeller er viktig, men det å kunne validere informasjonen, altså stille seg kritisk til modellens representasjon, er også et ledd i moderlingskompetansen.

Resonnementskompetanse (Niss & Højgaard Jensen, 2002) går for det første ut på å bedømme og følge et matematisk resonnement, både muntlig og skriftlig, samt skille mellom hva et bevis er, og hvordan det skiller seg fra andre resonnementer. For det andre består denne kompetansen i å tenke ut og gjennomføre formelle og uformelle resonnementer, og innebærer å omforme heuristiske argumenter om til matematiske, formelle beviser.

Representasjonskompetansen (Niss & Højgaard Jensen, 2002) tilhører kategorien å *håndtere matematikkens språk og redskaper,* og innebærer å håndtere ulike representasjoner av matematiske forhold. Her må en kunne avkode og fortolke ulike representasjoner og man må kunne formulere og konstruere ulike representasjoner. Eksempler på noen av de ulike formene som kan benyttes, er verbale representasjoner, diagrammer, geometriske figurer og algebraiske utledninger.

Symbol – og formalismekompetansen (Niss & Højgaard Jensen, 2002) er nært knyttet opp mot *representasjonskompetansen*. Denne kompetansen har som basis den skriftlige kommunikasjonen og innebærer å kunne avkode symbol – og formelspråk, oversette frem og tilbake mellom symbolholdig og naturlig språk. Den innebærer også å kunne behandle og bruke symbolholdige utsagn og uttrykk. I tillegg må en kunne ha innsikt i karakteren og spillereglene i formelle matematiske systemer.

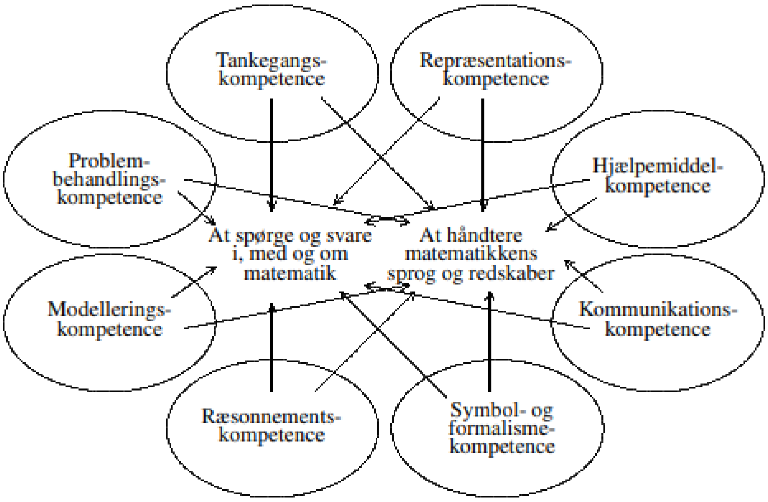
Hjelpemiddelkompetansen (Niss & Højgaard Jensen, 2002) er tilknyttet bruk av og det å forholde seg til både tekniske og analoge hjelpemidler i matematiske sammenhenger. Her må en vite mulighetene og begrensinger for de forskjellige hjelpemidlene i ulike situasjoner. Man må være i stand til å reflektere og bruke hjelpemidlene.

Kommunikasjonskompetansen (Niss & Højgaard Jensen, 2002) består i å kunne sette seg inn i og forstå andres muntlige, visuelle og skriftlige utsagn og tekster, samt å kunne uttrykke seg muntlig, visuelt og skriftlig ovenfor ulike kategorier av mottakere. Ulike kategorier av mottaker vil kunne være medelever, foreldre og lærere. Kommunikasjonene natur, hvor all skriftlig kommunikasjon har en eller annen representasjonsform, gjerne ved bruk av matematisk notasjon og symboler, gjør at det er en særlig sterk tilknytning mellom *kommunikasjonskompetansen, representasjonskompetansen* og *symbol- og formalismekompetansen*. Essensen i kommunikasjon er å formidle informasjon mellom to parter, noe som understreker tilknytningen mellom avsender og mottaker.

Et av de momentene som er meget interessant i kompetanseteorien til Niss og Højgaard Jensen (2002), er tolkningen som har blitt gjort rundt den utøvende og passive kompetansen. I den utøvende kompetansen finner vi blant annet kommunikasjon med andre, å kunne formulere egne tanker, og selv være i stand til å presentere og modellere informasjon. Motstående handler den passive kompetansen om å følge andres resonnementer, tolke modeller og utføre andre analytiske og kognitive prosesser. Denne inndelingen viser til den uttrykkende og mottakende siden som aktør i matematikken. Samtidig hentyder dette at kompetansen hos et individ, kan være skjult for andre. Vi kan ta som eksempel en elev som ikke presentere godt på skriftlige prøver fordi eleven ikke mestrer den utøvende siden ved matematikken. Dette betyr ikke nødvendigvis at eleven ikke forstår eller ikke er i stand til å tenke matematisk, men at kompetansen kan være mer passiv, eller at de verbale formuleringsevnene kanskje er bedre.

Niss og Højgaard Jensen (2002) poengterer at en kan besitte delkompetanse på ulike nivå. En seksåring vil ha en langt mer elementær forståelse enn en elev på videregående, men de kan likevel besitte samme delkompetanse ved ulik grad av oppnåelse. Det er dermed ikke et spørsmål om hvorvidt en besitter en delkompetanse eller ikke, spesielt med tanke på hvor mange aspekter hver delkompetanse har. Jo flere aspekter av en delkompetanse en besitter, desto flere situasjoner kan en ta i bruk delkompetansen (Niss & Højgaard Jensen, 2002). Niss og Højgaard Jensen (2002) bruker begrepet *dekningsgrad* for å måle hvor mange aspekter en besitter av en kompetanse. Videre vil dette si at det å erverve seg en delkompetanse, er en konstant prosess, som gjør at en aldri kan besitte en kompetanse fullt og helt. Delkompetansene kan brukes på tvers av årstrinn og matematiske emner, men kan ikke direkte overføres til andre fagområder (Niss & Højgaard Jensen, 2002).

Selv om modellen i figur 3 har delt den matematiske kompetansen inn i to hovedkategorier, viser det seg som sagt at underkategoriene kan overlappe hverandre på tvers av hovedkategoriene (figur 4).



Figur 4:Visuell framstilling at underkategoriene av matematiske kompetanser alle bidrar til de to hovedkategorien. Niss og Jensen,2002, s.46

Innen kompetansebegrepet, slik det er presentert i rapporten til KOM-prosjektet, ser en tydelig at sentrale felt innenfor matematikklæring ikke er inkludert. Det gjelder blant annet holdninger og affektive sider ved læring (Botten, 2016).

2.2.2 Trådmodellen

Kilpatrick, Swaffor og Findell (2001) utviklet en modell som viser at delkompetansene henger tett sammen. De bruker begrepet *mathematical proficiency*, og ikke *mathematical competence*, og inkluderer også holdninger til faget i dette begrepet (Botten, 2016). Siden matematikksenteret i sin rapport «Teoretisk bakgrunnsdokument for arbeid med regning på ungdomstrinnet» (Matematikksenteret, 2014) bruker begrepet «matematisk kompetanse» når de oversetter *mathematical proficiency* til norsk, har jeg også valgt å oversette dette til matematisk kompetanse.

Kilpatrick et al. (2001) (norsk oversettelse av Botten, 2016) deler matematisk kompetanse inn i fem delkompetanser, *Fleksibel tenking* (Adaptive reasoning), *strategisk kompetanse (*Strategic competence), *Begrepsforståelse* (Conceptual understanding), *Produktiv holdning* (productive disposition) og *Prosedyrekunnskap* (Procedural fluency).

Komponentene er tett sammenflettet og avhengige av hverandre og det er viktig at elever får mulighet til å utvikle alle fem komponentene samtidig (Stedøy, 2018).

Figur 5: Trådmodellen. (Kilpatrick et al. 2001, s.117)

Begrepsforståelse (Conceptual understanding) går på å kunne gjenkjenne og formulere matematiske problemstillinger og utvikle strategier for å løse problemene. *Begrepsforståelse* innebærer å lære et økende antall regler og formler, som medfører at elever bruker prosedyrebegrunnelser i stedet for begrunnelser som bygger på matematiske resonnementer (Kilpatrick et al., 2001). *Begrepsforståelser* støtter seg på at elever kan tolke, forstå og benytte ulike representasjoner, oversette og veksle mellom ulike representasjoner ut fra hva som kan være nyttig for et gitt formål. Dette betyr at hvis en elev behersker denne ferdigheten, vil han trolig kunne se helheten i matematikken, og vil ofte kunne rekonstruere glemt kunnskap (Kilpatrick et al., 2001).

I følge Kilpatrick et al. (2001) vil elever med *begrepsforståelse* se dypere likheter mellom overfladisk urelaterte situasjoner og dermed ha mindre å lære. Vi kan på en måte si at forståelsen til elever med *begrepsforståelse*r har store omfattende kunnskapsgrupper som ser sammenhenger av fakta og prinsipper. Men - de kan også dele kunnskapsgruppene opp i mindre grupper for å utvide med nye ideer, reflektere over et konsept eller rett og slett for å forklare et prinsipp. Kilpatrick et al. (2001) kaller dette for en hierarkisk forståelse.

Kilpatrick et al. (2001) mener at en god indikator på om en innehar denne kompetansen, er at man tar reflekterte valg rundt matematiske representasjoner. Et eksempel kan være at å addere brøker, kan regnes ut aritmetisk, ved hjelp av tegning eller ved bruk av konkreter.

Niss og Højgaard Jensen (2002) sin *representasjonskompetanse* har en del likheter som Kilpatrick (2001) sin *begrepsforståelse*. Begge kompetansene sier blant annet at elever skal kunne benytte/håndtere ulike representasjoner, tolke og oversette og veksle mellom ulike representasjoner. *Tankegangskompetansen* til Niss og Højgaard Jensen (2002) har ett aspekt som går på å kjenne, forstå og håndtere gitte matematiske begrepers rekkevidde og deres forankringer i diverse domener. Ett annet aspekt denne kompetansen har, er at elevene må kunne utvide begreper ved abstraksjoner av egenskaper i begreper og å kunne forstå hva det ligger i generalisering av matematiske begrep. Dette kan vi finne igjen i Kilpatrick et al. (2001) sin *begrepsforståelse* med det han kaller en hierarkisk forståelse. Elever med god *begrepsforståelse* har ofte store omfattende kunnskapsgrupper. De ser sammenhenger av fakta og prinsipper, og kan dele disse opp i mindre grupper for å utvide med nye ideer. De kan reflektere over et konsept, eller rett og slett makte å forklare ett prinsipp.

Prosedyrekunnskap (Procedural Fluency) går på utføre prosedyrer effektiv, nøyaktig og fleksibelt (Kilpatrick et al., 2001). *Prosedyrekunnskap* går altså på evnen til å kunne benytte seg av og vite når matematiske operasjoner skal benyttes. Hvis elevene behersker prosedyreflyten, kan de benytte disse operasjonene på en effektiv og nøyaktig måte (Kilpatrick et al., 2001). Å ha denne kompetansen mener Kilpatrick et al. (2001) gir elevene en dypere matematisk forståelse fordi de ser at prosedyrer kan være kraftige hjelpemidler og at matematikk er et velsmurt maskineri. Har man ikke denne kompetansen, kan det føre til feilaktig læring av prosedyrer som over lang tid kan være vanskelig å fjerne. Dette mener Kilpatrick et al. (2001) kan påvirke elevers syn på relevans av det de lærer, og at man mister sammenhengen mellom det som læres på skolen og det man møter i hverdagen. Det kan dermed påvirke hva elever søker etter å lære på skolen. Kunnskap og bruk av ulike hjelpemidler er et annet aspekt ved denne kompetansen, og uten vil en ikke kunne gjennomføre prosedyrer like fleksibelt, effektivt eller nøyaktig (Kilpatrick et al., 2001).

Evnen til å kunne benytte seg av og vite når matematiske operasjoner skal benyttes slik som Kilpatrick et al. (2001) nevner under *prosedyrekunnskap* ligner på beskrivelsen Niss og Højgaard Jensen (2002) har for *symbol og formalismekompetanse* der man skal kunne avkode symbol og formelspråk, og gjennomføre matematiske utregninger. *Hjelpemiddelkompetansen* til Niss og Højgaard Jensen (2002) er tilknyttet å gjøre bruk av og forholde seg til hjelpemidler (både tekniske og analoge) i matematiske sammenhenger. Dette finner vi også igjen i Kilpatrick et al. (2001) sin *prosedyrekunnskap* der det skrives at uten kunnskap og bruk av ulike hjelpemidler, vil en ikke kunne gjennomføre prosedyrer like fleksibelt, effektivt eller nøyaktig.

Strategisk kompetanse (Strategic competence) går på å kunne gjenkjenne og formulere matematiske problemstillinger og utvikle strategier for å løse problemene (Botten, 2016). Kilpatrick et al. (2001) sier at kompetansen øker for hver erfaring man får, det betyr at elevene må møte et bredt spekter av matematiske problemer for å utvikle denne kompetansen. Å representere et problem, innebærer forståelse for den gitte situasjon for å kunne identifisere dens nøkkelelementer, og dermed bruke dem til å lage en mental modell. En må da kjenne til ulike matematiske representasjoner og se hvordan de deler like matematiske strukturer. For å løse matematiske problemer, er ofte nøkkelbegrepet - fleksibilitet. Man må kunne ta i bruk ulike problemløsningsstrategier ved ukjente situasjoner og kunne bruke flere strategier for samme problem (Kilpatrick et al., 2001). Kompetansen innebærer både prosedyreproblemer og ikke- prosedyreproblemer. Å ha denne kompetansen gjør at man kan overvåke egen løsningsprosess og endre strategi for å effektivisere prosessen (Kilpatrick et al., 2001).

Strategisk kompetanse omfavner mye og vi kan finne mange forskjellige kompetanser til Niss og Højgaard Jensen (2002) inne i denne kompetansen. Det å kunne formulere og løse matematiske problemstillinger som Kilpatrick et al. (2001) nevner her, kan vi finne igjen i *problembehandlingskompetansen* til Niss og Højgaard Jensen (2002) ved at elevene blant annet skal kunne finne og formulere ulike matematiske problemer ut fra forskjellige typer oppgaver. *Modelleringskompetansen* til Niss og Højgaard Jensen (2002) sier blant annet at elevene skal kunne konstruere modeller, som har likheter med s*trategisk kompetanse* til Kilpatrick et al. (2001) som sier at elevene skal kunne lage mentale modeller. Det at elevene skal i *strategisk kompetanse* kunne kjenne til ulike matematiske representasjoner, finner vi igjen i Niss og Højgaard Jensen (2002) sin *representasjonskompetanse* der det påpekes at elevene skal kunne håndtere ulike representasjoner av matematiske forhold, og kunne avkode og fortolke dem.

Fleksibel tenkning (Adaptive reasoning) går på å kunne forklare og begrunne løsningsstrategiene man har brukt for å løse problemet (Botten, 2016). Kilpatrick et al. (2001) sier:

> «Adaptive reasoning refers to the capacity to think logically about relationships among concepts and situations» (Kilpatrick et al., 2001, p. 129).

Kunnskap om hvordan vi begrunner og rettferdiggjør svarene våre er også ett aspekt vi finner under *fleksibel tenkning.*

> «Many conceptions of mathematical reasoning have been confined to formal proof and other forms of deductive reasoning» (Kilpatrick et al., 2001, p. 129).

Kilpatrick et al. (2001) følger opp dette med å si at de ser på *fleksibel tekning* med et bredere perspektiv, der ikke kun formelle bevis hører til, men at også andre forklaringer passer inn. Intuitive- og induktive resonnement basert på mønster og metaforer nevnes her (Kilpatrick et al., 2001). Analoge resonnementer, metaforer og imaginære og fysiske objekter knyttes opp mot denne typen resonnementer. Kilpatrick et al. (2001) viser til at en kan så langt ned som i 4-årsalderen, vise sofistikerte resonnementer dersom en støtter seg opp mot representasjonsbyggende erfaringer. Denne kompetansen fungerer som limet i matematikk. Å ha denne kompetansen, gir en mulighet til å navigere gjennom fakta, prosedyrer, begreper og metoder og se en forbindelse mellom dem (Kilpatrick et al., 2001).

Fleksibel tenkning er en kompetanse som er veldig lik *resonnementskompetansen* til Niss og Højgaard Jensen (2002) i og med at man i *resonnementskompetansen* skal kunne bedømme og følge matematiske resonnement, og tenke ut og gjennomføre formelle og uformelle resonnementer. Vi kan også finne elementer av *fleksibel tenkning* hos Kilpatrick et al. (2001) hos Niss og Højgaard Jensen (2002) sin *tankegangskompetanse,* blant annet ved at man skal kunne stille spørsmål og vite hvilke svar som kan forventes. *Fleksibel tenkning* og *strategisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001)* er to sider av å løse ett matematisk problem, og dermed kan vi også her finne elementer fra Niss og Højgaard Jensen (2002) sine *modelleringskompetanse* og *problembehandlingskompetanse* som for eksempel det å kunne formulere matematiske bevis og lage mentale modeller.

Produktiv holdning (Productive disposition) innebærer å se på matematikk som nyttig, verdifullt og fornuftig, og at god og jevn innsats i faget vil lønne seg. Kilpatrick et al. (2001) mener at en slik holdning til faget vil gi en økt motivasjon, da en har forståelse for faget og en ser viktige matematiske sammenhenger. Selvtilliten for egne evner og kunnskap vil øke dersom eleven ser at innsats lønner seg, og det er en viktig motivasjonsfaktor. Kilpatrick et. al (2001) hevder at mangel på denne kompetansen, dette at man ikke ser matematikk som noe forståelig, der ikke noe er tilfeldig, gjør det utfordrende å utvikle matematisk kompetanse.

Niss og Højgaard Jensen (2002) har ingen delkompetanse som inkluderer holdningsaspektet. På den andre siden kan man argumentere med at Trådmodellen ikke har noen delkompetanse som eksplisitt tar med seg Niss og Højgaard Jensens (2002) *kommunikasjonskompetanse.*

Kilpatrick et al. (2001) påpeker at det er viktig at læreplanene er organisert slik at alle de fem trådene blir inkludert på trinnet og på tvers av trinnene, slik elevene får anledning til å gjennomgå og styrke kunnskapen de allerede har.

Kilpatrick begrep *mathematical proficiency* og kompetansebegrepet fra KOM-prosjektet fokuserer begge på evnen, kunnskapen eller kapabiliteten i matematikk hos enkelteleven. Selv om flere tråder og delkompetansene handler om elementer som kommunikasjon, samarbeid og samhandling som er nødvending når en arbeider med matematikk er det i svært begrenset grad inkludert i kompetanse – eller proficiencybegrepet. (Botten, 2016)

Det er som sagt mange likhetstrekk mellom de to modellene, men det finnes strukturelle ulikheter også. Niss og Højgaard Jensen (2002) bruker begrepet *dekningsgrad* som et verktøy for å måle besittelsen av de ulike delkompetanse, ved å se på hvor mange aspekter ved en delkompetanse en besitter. Et lignende begrep finner man ikke i Kilpatrick et al. (2001). Kilpatrick et al. (2001) framstiller delkompetansene sine som tråder som er vevd sammen, noe som gir et bilde av en sterk forbindelse mellom delkompetanse og at det ikke er en klar avgrensning mellom dem. Beskrivelsene av delkompetansene viser felles aspekter på tvers av dem (Kilpatrick et al., 2001). Niss og Højgaard Jensen (2002) framstiller sitt rammeverk som en rose der delkompetansene er roseblader. Framstillingen deres viser at rosebladene overlapper hverandre noe, men at det allikevel er en klar avgrensning mellom dem. Beskrivelsene av delkompetansene viser få likhetstrekk på tvers (Niss & Højgaard Jensen, 2002).

2.2.3 Felleskapets betydning

Walshaw og Antony (2008) tilføyer områder for å få med seg felleskapets betydning for elevene, kulturell identitet og identitet som samfunnsborger, tilhørighet til et felleskap, deltakelse i et felleskap, tilfredshet, utforskning, allmennmenneskelige verdier som respekt for andre, toleranse, rettferdighet, omsorg, flid, ikke-rasistisk oppførelse og uselviskhet.

For å legge til rette for at elevene engasjerer seg i handlinger, som kan føre til utvikling av læringsfellesskap og derved danne grunnlag for utvikling av kunnskap både for enkelteleven og læringsfelleskapet, fokuserte Gresalfi, Martin, Hand og Greeno (2009) på elementer fra virksomhetsteori. De inkluderte begreper som «sosiale normer» og hva som kjennetegner læringsmiljøer som stimulerer til utvikling.

Negotiation of	Participation structure	How an idea caters the common ground (*i.e. standards of evidence*)	*Leads to definiton of*	What students are accountable for
		Who is expected to author or critique mathematical ideas		
		Norms of argumentation (*how students are encouraged to talk each other*)		Who students are accountable to
	Task as realized	Requirements for sensemaking		
		Openness of the task (*opportunities to use different methods, find solutions*)		What kind of agency students can excercise
		Requirements for successful completion		

Figur 6: "En modell om hvordan kompetanse konstrueres sosialt» (Gresalfi et al., 2009, p. 54)

Figur 6 viser en modell om hvordan kompetanse kan konstrueres sosialt ifølge Gredafli et al. (2009). Forskerne prøver her å vise at i ett klasserom der elever er forventet til å måtte overbevise andre medelever (og ikke bare læreren, som allerede forstår den matematiske konteksten) hvordan en forstår og hvorfor løsningen deres gir mening, vil føre til økt kompetanse. I et slikt klasserom vil elevene ha flere muligheter til å respondere til spørsmål og revurdere løsningene. Det vil føre til at elevene må kunne forklare ett problem eller en løsning slik at flere kan forstå det, elevene lærer å argumentere og stille kritiske spørsmål (Gresalfi et al., 2009).

2.2.4 Læreplan

I den nye læreplanen i matematikk 1.- 10. trinn (2020) viser kompetansemålene i at brøk er et gjennomgående tema i grunnskolen, og selv om det ikke står spesifikt brøk i læreplanen i den videregående skolen (1P, 1P-Y og 1T) bygger en god del av matematikken her på at kompetansemålene fra grunnskolen ligger til grunn.

Ifølge kompetansemålene i den nye læreplanen skal elevene i 3. og 4. klasse blant annet jobbe med divisjon og utforske, bruke og beskrive ulike divisjonsstrategier. Så her starter de å se litt på «brøk som kvotient». I femte klasse kommer brøk inn for alvor. Her skal de innom alle de fire aspektene til Kieren.

Kompetansemålene «beskrive brøk som del av en hel, som del av en mengde og som tall på tallinje og vurdere og navngi størrelsene» og «utforske og forklare sammenhenger mellom brøker, desimaltall og prosent og bruke det i hoderegning» kommer man innom både brøk som forhold, kvotient og måling. Kompetansemålene skisseres opp slik; «Representere brøker på ulike måter og oversette mellom de ulike representasjonen. Utvikle og bruke ulike strategier for regning med positive tall og brøk og forklare tankemåtene sine. Formulere og løse problemer fra egen hverdag som har med brøk å gjøre og diskutere tilfeldighet og sannsynlighet i spill og praktiske situasjoner og knytte det til brøk». De tar for seg både brøk som forhold, kvotient, måling og operasjon. Kompetansemålene etter 6. til 10. trinn bygger videre på det som elevene skal kunne etter 5. trinn.

Det er mulig for læreren å kunne bruke både resultatet av KOM-prosjektet (Niss & Højgaard Jensen, 2002), Kilpatricks trådmodell (2001) og å iverksette Gresalfi, Martin, Hand og Greeno (2009) sin modell for å få et godt læringsmiljø.

2.2.5 Diagnostisk undervisning

Ifølge Brekke (2002) er diagnostisk undervisning en arbeidsmåte som bygger på læringssynet til konstruktivismen. Konstruktivismen har sitt utspring i teoretikere som Lev Vygotskij, Jan Piaget, Jerome Bruner og John Dewey. Et sentralt element i konstruktivismen er at mennesker tilegner seg kunnskap gjennom aktivitet og subjektive prosesser. Dewey sitt begrep «Learning by doing» er knyttet mot dette læringssynet.

Piaget blir tradisjonelt sett plassert i den kognitive konstruktivismen. Piaget var spesielt opptatt av innlæringsfasen. Han så på den tankemessige strukturen som skjema, og i møte med nye begreper vil eksisterende erfaringer være viktig i begrepsdannelsen. Han mente at nye begreper dannes på to måter. Ved at skjemaene assimileres eller ved at de akkomoderes. Ved assimilasjon vil vi bygge det nye begrepet på tidligere erfaringer. Ved akkomodasjon vil det si at eksisterende skjema må modifiseres og tilpasses for å kunne ta opp i seg det nye begrepet (Birkeland et al., 2011).

I forkant av akkomodasjon skjer det en kognitiv konflikt. Ifølge Piaget vil det oppstå en kognitiv konflikt når det ikke er likevekt mellom eksisterende skjema og ny erfaring, noe som vil motivere til læring (Tetzchner, 2001). Elevene vil gjerne først prøve å tilpasse det nye begrepet inn i eksisterende skjema, og i mange tilfeller oppstår det her misoppfatninger, fordi tankene omkring begrepet er ufullstendige. Etter hvert vil man forstå at de kognitive strukturene (her: skjema) må endres for å tilpasses nye begrep (Imsen, 2008).

Piaget mente at læreren skal legge til rette for kunnskap, ved veiledning og stimulering, men at man må tillate elevene å feile, og lære av sine feil. Læreren skal forsyne elevene med oppgaver og situasjoner som stimulerer til oppdagelse av ny kunnskap (Tetzchner, 2001). Mange av disse prinsippene finner man igjen i de diagnostiske oppgavene, og i den kognitive konflikten som dannes når elevenes tanker ikke samsvarer med de nye opplevelsene.

Vygotskij legger i likhet med Piaget vekt på det selvstendige og aktive barnet, men han mener at barnet alene ikke kan utvikle høyere mentale funksjoner. Barnet er avhengig av andre mennesker til å formidle de redskaper og kunnskaper som de trenger, og hjelpe dem å anvende disse. Her har språket en sentralrolle (Tetzchner, 2001).

Det er mange definisjoner på hva diagnostisk undervisning er. Cowie & Bell (1999) definerer formative assessment som

> «the process used by teachers and students to recognize and respond to student learning in order to enhance that learning, during the learning» (Cowie & Bell, 1999, p. 101).

Shepard (2005, gjengitt i Wiliam 2011, s. 37) definerer formative assessment som

> «assessment carried out during the instructional process for the purpose of improving teaching or learning.»

En gjennomgang av undervisningspraksis av OECD på tvers av åtte land, definerte formative assessment som

> «frequent, interactive assessments of students' progress and understanding, to identify learning needs and adjust teaching appropriately» (OECD, 2005, p. 21).

Brekke (2002) har en skjematisk framstilling av diagnostisk undervisning:

1. Identifiserer misoppfatninger og delvis utviklede begreper hos elevene.
2. Tilrettelegge undervisningen slik at eventuelle misoppfatninger eller delvise begreper blir framhevet. (Skape en kognitiv konflikt).
3. Løse den kognitive konflikten gjennom diskusjoner og refleksjoner i undervisningen.
4. Bruke det utvidede (eller nye) begreper i andre sammenhenger.

Ifølge Brekke (2002) viser en rekke studier at undervisning som legger vekt på konfliktdiskusjoner, har bedre langtidseffekt, hva angår læringsutbyttet, enn tradisjonell undervisning. Her må læreren være mer aktiv veileder, enn ved en tradisjonell undervisningsform. Noen ser på diagnostisk undervisning som en prosess, mens andre ser på det som ett verktøy. Uansett hvilken definisjon av diagnostisk undervisning som er korrekt, er det den essensielle ideen enkel. Undervisning er en betinget aktivitet (Wiliam, 2011).

Wiliam (2011), snakker om formativ vurdering, mens Brekke (2002) snakker om diagnostisk undervisningen. Den egentlige forskjellen er at en diagnostisk undervisning er noe man gjør i starten av undervisningen, for å finne ut hvor elevene er, mens en formativ vurdering er noe man gjør underveis i undervisningen for å sjekke om elevene har forstått det man har undervist. Begge metodene bygger på en formativ tankegang.

Wiliam (2014) bruker denne definisjonen på formativ vurdering:

> «We use the general term assessment to refer to all those activities undertaken by teachers—and by their students in assessing themselves—that provide information to be used as feedback to modify teaching and learning activities. Such assessment becomes formative assessment when the evidence is actually used to adapt the teaching to meet student needs» (Wiliam, 2014, s.3).

Wiliam (2011) har en liknende skjematisk framstilling av formativ undervisning som Brekke (2002) har om diagnostisk undervisning (se figur 7). Han mener det er fem hovedstrategier. Det første er at læreren må tydeliggjøre intensjonene med læringen. Læreren må legge til rette for klasseromdiskusjoner, oppgaver og aktiviteter som synliggjør hvor elevene er i læringssprossen. Læreren må gi elevene tilbakemelding som får eleven framover. En må aktivisere elevene som ressurs for hverandre, og aktivere elevene til å eie sin egen læring.

<table>
<tr><td></td><td>Where the learner is going</td><td>Where the learner is now</td><td>How to get there</td></tr>
<tr><td>Teacher</td><td rowspan="3">Clarifying, sharing and understanding learning intentions and success criteria</td><td>Engineering effective discussions, tasks and activities that elicit evidence of learning</td><td>Providing feedback that moves learning forward</td></tr>
<tr><td>Peer</td><td colspan="2">Activating students as learning resources for one another</td></tr>
<tr><td>Learner</td><td colspan="2">Activating students as owners of their own learning</td></tr>
</table>

Figur 7:Five "key strategies" of formative assessment (William, 2014)

Et viktig moment i det Wiliam (2018) sier om formativ undervisning, er at i ett klasserom er det mange elever, og for å vite neste «steg» læreren skal ta, må han få tilbakemelding fra alle elevene og ikke bare de «flinke vel artikulerende elevene». Elevene kan for eksempel bruke White Board til å svare på ett spørsmål til hele klassen. Da er det to ting som er viktige, det ene er at spørsmålet som stilles, ikke kan bli riktig med feil tankemåte (du vil ikke ha tid, til å spørre hver enkelt elev om hvordan de har tenkt), og det skal være mulig for læreren å se svarene og vite hva neste steg er på ca. 30 sekunder (Wiliam, 2018).

2.2.6 Misoppfatninger

Alle feil er ikke like, forskere deler som ofte feil inn i to typer. De som er tilfeldige og de som er konsekvente (gjentakende feil i like oppgaver), misoppfatninger. For en lærer er det viktig å forstå forskjellen på de tilfeldige feilene og misoppfatninger. Feil kan skyldes hastverk, en dårlig dag, unøyaktighet i lesing av oppgaveteksten, manglende konsentrasjon og feiltolkning av oppgaven.

Ett feilsvar kan oppstå av ulike årsaker. Swan (2002) sier følgende:

> «Some may be simply due to lapses in concentration, hasty reasoning, memory overload or a failure to notice salient features of a situation. Others, however, may be symptoms of deeper misunderstandings or may not be mistakes at all – they may be the result of alternative interpretations of situation » (Swan, 2002, p. 147).

Matematikksenteret (2019) sier at misoppfatninger bygger på en bestemt tenkning som elever bruker nokså konsekvent, og er noe annet enn tilfeldige feil og misforståelser. Misoppfatninger er ufullstendige tanker knyttet til et begrep og er en del av barns normale utvikling. Barn tolker nye ideer ut fra erfaring de allerede har. Det medfører at de av og til trekker ugyldige slutninger og generaliserer på sviktende grunnlag. Ofte oppstår misoppfatninger som et resultat av overgeneraliseringer. Et eksempel på overgeneralisering er: «Når vi ganger, blir svaret større, og når vi deler blir svaret mindre». Dette stemmer med heltall, men ikke alltid med desimaltall og brøk. Når forståelsen av et begrep er ufullstendig kan det hindre den videre faglige utviklingen (Matematikksenteret, 2019).

Ifølge Brekke (2002) kan det å få elevene til å innse at de ideer og begreper de har dannet, ikke alltid gjelder i alle situasjoner. Dette er et sentralt problem i matematikkundervisningen. Et begrep er sjelden fullstendig utviklet ved at en har gjort erfaringer på et avgrenset felt. Vi kaller ufullstendige tanker knyttet til et begrep for misoppfatninger (Brekke, 2002).

Bak misoppfatningene ligger det en bestemt tanke – en idé – som en bruker nokså konsekvent. Misoppfatninger kan være et resultat av at eleven prøver å forstå situasjonen, men tenker på en måte som ikke er hensiktsmessig. Det er ofte et resultat av overgeneralisering av tidligere kunnskaper over til områder hvor disse kunnskapene ikke gjelder fullt ut (Brekke, 2002).

Swan mener en misoppfatning i matematikk er et begrep i ett tidlig stadium.

> «Concepts are essentially organic; that is, they are an individual to attempt to make sense of the world and such they constantly change and evolve» (Swan, 2002, p. 152).

Swan (2002) mener at for å få bort misoppfatninger, må vi la elevene forme eksisterende konsept eksplisitte, samt dele metoder og produsere konfliktdiskusjoner slik, at gjennom diskusjon kan elevene formulere nye konsepter.

Noen av de vanligste misoppfatningene når det kommer til brøk er at nevneren representerer antall deler, uavhengig av størrelsen. At jo større nevneren (eller teller) er, jo større er brøken. $\frac{13}{15}$ må være mindre enn $\frac{24}{28}$, fordi neveren og telleren i dette tilfelle er større i den andre brøken, noe som i dette tilfelle ikke stemmer.

Et annet tilfelle er at differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken. Hvis vi ser på brøkene $\frac{13}{15}$ og $\frac{20}{23}$ skulle den første brøken være størst for her har vi en differanse på to, mens i den andre brøken er differansen tre, men $\frac{13}{15} < \frac{20}{23}$ (Matematikksenteret, 2018; Lamon, 2012).

2.3 Holdninger

Selv om det er forsket mye på holdninger i matematikk, er man likevel ikke blitt enige om en felles definisjon av begrepet. Holdningsbegrepet har imidlertid sitt opphav i sosialpsykologien, og beskrives da som forutsetningene for å respondere på en positiv eller negativ måte i en viss situasjon (Di Martino & Zan, 2010). I følge Hannula (2006) sees holdninger i matematikkdidaktikken vanligvis på som en del av det affektive området som inkluderer følelsesmessige og motivasjonelle fenomen. Det affektive område kan som regel deles i to faktorer, stabile og ustabile faktorer (Liljedahl & Oesterle, 2020). Følelser er ofte kortvarige og ustabile, mens oppfatninger er varige og stabile.

Varierte definisjoner trenger nødvendigvis ikke være begrensende, men kan i stedet være berikende siden ulike problemer krever ulike definisjoner (Di Martino & Zan, 2010)

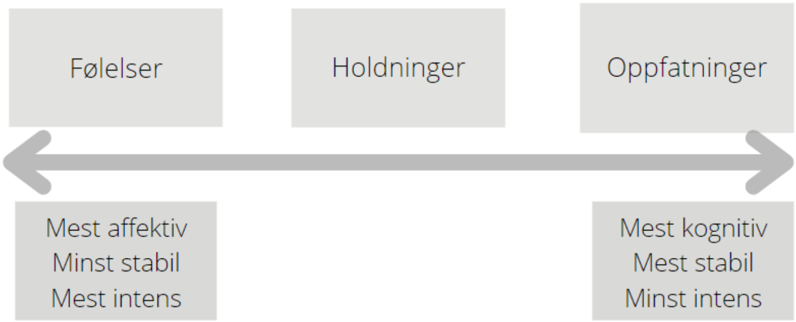
Det er vanskelig å finne en tydelig definisjon av holdninger som teoretisk sett kan tydeliggjøre konstruktet, Di Martino og Zan (2010) viser til tre ulike definisjoner som imidlertid kan gjenkjennes:

1. En enkel definisjon som beskriver holdning som en positiv eller en negativ grad av affekt assosiert med matematikk (Haladyna et al. 1983, gjengitt i Di Martino &Zan, 2010, s. 29).
2. En tredelt definisjon som gjenkjenner tre komponenter i holdninger, følelsesmessig respons til matematikk, oppfatninger angående matematikk og matematikkrelatert atferd (Hart, 1989, gjengitt i Di Martino & Zan, 2010, s. 29).
3. En todelt definisjon: får vi hvis de tre komponentene som nevnt i punkt 2 gjenkjennes, bortsett fra at atferd ikke vises eksplisitt (Daskalogianni & Simpson, 2000, gjengitt i Di Martino & Zan, 2010, s. 29).

Jeg vil nå gå nærmere inn på 3 modeller for definisjoner av holdning til matematikk.

2.3.1 McLeods modell

En representant for en enkel definisjon, finner man i McLeods (1992) modell for det affektive planet. Ifølge McLeod består det affektive av oppfatninger, holdninger og følelser. Modellen kan illustreres slik:



Figur 8:McLeods modell av det affektive planet, gjengitt som i Hannula (2006, s.213)

Holdninger til matematikk kan, ifølge McLeod (1992), oppstå på to ulike måter. Den første er ved å overføre en allerede eksisterende holdning til liknende oppgaver. Har elevene allerede negative holdninger til for eksempel algebraiske bevis, kan denne negative holdningen overføres til geometriske bevis. Den andre måten holdninger til matematikk kan oppstå på, er ved gjentakende følelsesmessige reaksjoner på matematikk. Eksempelvis kan negative holdninger til algebra oppstå dersom elever ved flere anledninger har blitt frustrert, oppgitte eller sinte i arbeid med algebraoppgaver (Skaalvik & Skaalvik, 2013).

Av modellen kan vi se at det er grad av stabilitet, intensitet og hvilke indre prosesser som hovedsakelig virker, som er de avgjørende faktorene for hvor på aksen McLeod plasserer de ulike hovedkategoriene. Lengst til venstre finner vi følelser som er regnet som de mest ustabile og intensive av disse tre. Ifølge McLeod (1992) er følelser også hovedsakelig et resultat av affektive fremfor kognitive prosesser. I den andre enden finner vi oppfatninger som er stabile, lite intense og i større grad drives av kognitive prosesser. Holdninger befinner seg midt mellom disse to. Oppfatninger har en innflytelse på tolkningen av matematikkrelaterte hendelser, og dermed også på elevens følelsesmessige erfaringer. Slike gjentatte følelsesmessige erfaringer vil etter hvert stabiliseres og danne en mer generell følelsesmessig tilnærming til enten matematikk eller deler av matematikkundervisningen. Det er denne følelsesmessige tilnærmingen McLeod kaller holdninger (Hannula, 2012; McLeod,1992).

Kritikk av McLeod holdingmodell

McLeods modell har tidligere vært mye brukt innenfor forskningsfeltet, men i dag møter den mye kritikk (Hannula, 2012). McLeod prøvde å utvikle et generelt rammeverk for forsknings på matematikkrelatert affekt. Hannula (2012) påpeker blant annet at McLeod ser på følelser som ustabile, noe det er mange som er uenig i. Andre hevder at man kan ha ulike følelser som går igjen på tvers av situasjoner, og at det er disse følelsene som danner basisen for konseptet holdninger. I flere av de nyere forskningsprosjektene innenfor matematikkdidaktikk trekkes det i tillegg fram affektive begreper som ikke er inkludert i modellen til McLeod. Begreper som verdier, identitet, motivasjon og normer har i senere tid blitt trukket fram som relevant for affekt i matematikk (Hannula, 2012). Di Martino og Zan (2010) hevder likevel at McLeods modell er nyttig hvis man for eksempel skal predikere elevers valg i visse situasjoner, som i fremtidig utdanning.

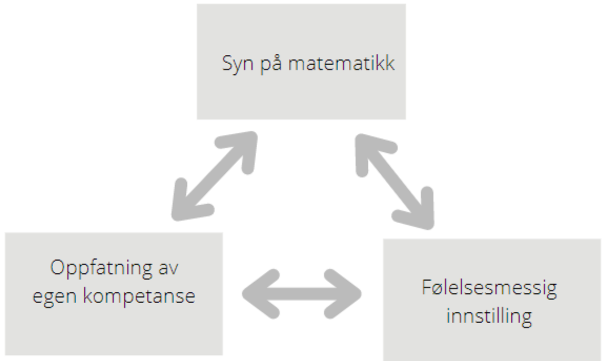
2.3.2 Three-dimensional Model for Attitude (TMA) – en modell basert på elevessays

TMA er en modell basert på arbeid gjort av Di Martino og Zan (2010), hvor de fikk elever (N=1496) til å skrive et essay om sitt forhold til matematikk. Denne modellen er altså drevet av empiri i motsetning til de to andre teoridrevne modellene som er presentert.

Ved å foreta en kvantitativ analyse av elevsvarene (N = 1496) fant de ut hvilke ord, og dermed temaer som var særlig aktuelle i essayene. De tre mest omtalte temaene danner de tre hovedkategoriene i Di Martino og Zans holdningsmodell:

1. Følelsesmessig innstilling - emotional disposition (tilsvarer McLeods enkle definisjon av holdninger).
2. Oppfatning av egen kompetanse – perceived competence.
3. Syn på matematikk – vision of Mathematics.

Modellen kan illustreres slik:



Figur 9:Modell av holdninger, fra Di Martino & Zan (2010)

TMA bidrar til at man får et mer detaljert bilde av hva som kan være faktorer som fører til negative holdning hos elever. Ved å redusere kompleksiteten til modellen, og ifølge forskerne gjør dette at modellen i større grad skal kunnes brukes mer konkret og effektiv når det gjelder å diagnostisere negative holdninger og åpne for tiltak. Da antar man at en holdning er negativ dersom minst én av dimensjonene over er «negativ», altså lav, instrumentell eller negativ (Di Martino & Zan, 2010). På den måten kan man konstruere ulike profiler av negative holdninger som avhenger av hvilken dimensjon de negative holdningene synes å være rotfestet i.

Dette synliggjøres ved at forfatterne åpner opp for å redusere hver av dimensjonene til dikotomier. Følelsesmessige innstillinger: Positiv/negativ. Oppfatning av egen kompetanse: Høy/ lav. Syn på matematikk: Instrumentelt/relasjonelt.

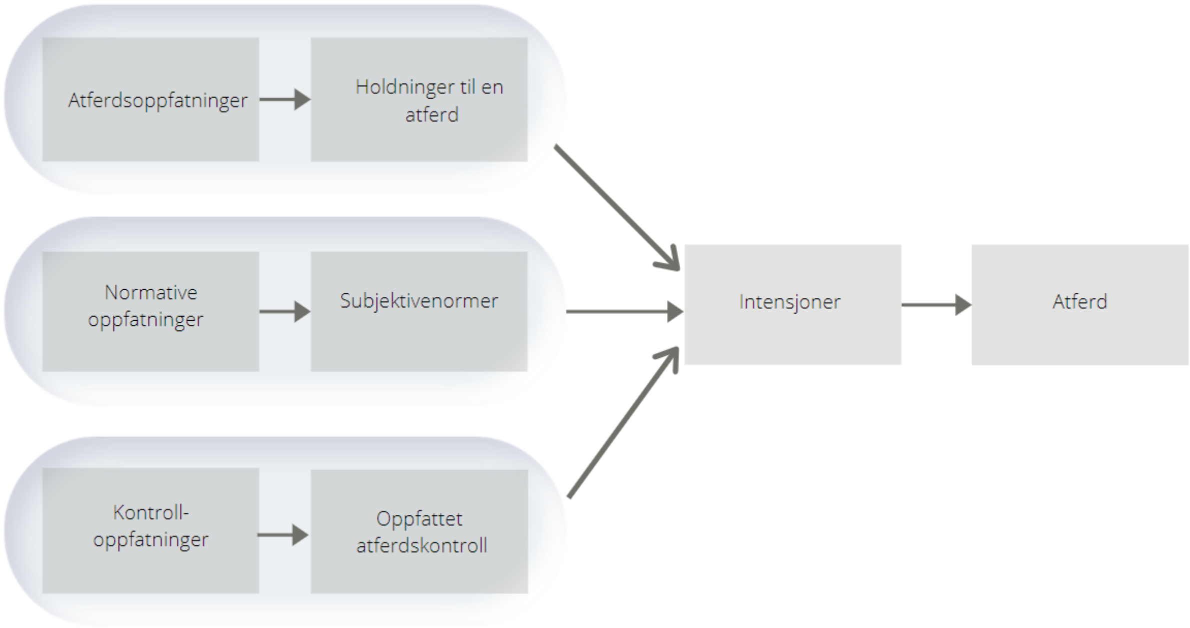
De tre dikotomiene tenkes å stå i et gjensidig forhold til hverandre. Dette vises ved de dobbeltrettede pilene, noe de to andre modellene ikke har med. Det bør også kommenteres at disse tre dikotomiene kunne vært valgt annerledes. Blant annet vil «Syn på matematikk» også kunne omhandle hvorvidt elevere ser på matematikk som nyttig eller ikke (Di Martino & Zan, 2010).

Ved å redusere kompleksiteten gir modellen åtte ulike profiler, hvor syv av dem inneholder minst én negativ komponent. Ved å identifisere elevenes profil i henhold til denne modellen kan lærere, ifølge Di Martino og Zan (2010), gripe inn og forsøke å endre elevenes holdninger ved å ta tak i den eller de negative komponentene i elevens profil. Det kan altså bli lettere å identifisere faktorer som fører til de negative holdningene. At denne modellen er empirisk drevet, samt at den er informativ, gjør at modellen brukes mye i forskning på holdninger til matematikk i dag.

2.3.3 En Teori om Planlagt Atferd (TPA) – Theory of Planned Behavior

TPA er en sosialpsykologisk modell som er designet for å predikere og forklare menneskelig adferd i ulike kontekster, og er en utvidelse av Ajzens og Fishbeins «theory of reasoned action» (1980). Generelt sett sier teorien at atferd er en funksjon av fremtredende oppfatninger som er relevant for atferden (Ajzen, 1991).

I TPA er holdninger definert som den samlede vurderingen av handlinger (Ajzen, 1991). Holdninger er et hypotetisk konstrukt som ikke kan observeres direkte, men som må tolkes ut fra målbare responser (Ajzen, 2005). Disse målbare responsene eller faktorene er «holdninger til en atferd, subjektive normer og oppfattet atferdskontroll» (se figur 10). Her fokuserer man på det personlige, den sosiale påvirkningen og spørsmål om kontroll (Ajzen, 2005). Generelt sett kan man si at jo mer positiv de spesifikke holdningene og de subjektive normene er, og jo større den oppfattede atferdskontrollen er, desto større sannsynlighet er det for at individets intensjoner fører fram til at handlingen kan utføres (Ajzen, 2005). Videre viser modellen til menneskers oppfatninger. Mennesker kan ha mange oppfatninger om enhver handling, men vi kan kun forholde oss til et fåtall, til enhver tid. Det er disse fremtredende oppfatningene som bestemmer personers intensjoner og handlinger ved at de påvirker de tre faktoriene i modellen.



Figur 10:Modell TPA, gjengitt som i Ajzen (2005, s.126)

At holdninger defineres som den samlede vurderingen av handlinger gjør at vi kan snakke om TPA som en generell holdningsmodell. Intensjoner og atferd i TPA kan forstås som handlingers- og kontrolloppfatninger, samt normative oppfatninger ved at disse oppfatningene påvirker hver sin komponent i modellen (se figur 10). Eksempelvis vil elevers oppfatninger om hva foreldre synes om matematikk, påvirke elevens subjektive normer. Ifølge Ajzen (2005) kan generelle holdninger ha en effekt på de tre ulike formene for oppfatninger. På den måten kan den generelle holdningen påvirke atferd indirekte. Har en elev en negativ holdning til matematikkfaget generelt, vil det påvirke elevens oppfatning av for eksempel temaet algebra i en negativ retning. Et slikt syn på denne modellen er støttet av flere studier (Ajzen, 2005). Den generelle holdningen til matematikk, vil i henhold til TPA, kunne påvirke elevens intensjoner og atferd i møte med matematikk.

Denne holdningsmodellen, vil ifølge Ajzan (2005) være et mulig bidrag til forskning som ønsker å se på tiltak for å endre intensjoner eller atferd. I og med at «holdninger til en atferd, subjektive normer og oppfattet atferdskontroll» antas å være basert på ulike oppfatninger, må tiltakene for å endre atferden rettes mot disse oppfatningene. Endringer i disse oppfatningene, vil da påvirke de tre ulike faktorene, og bør føre til en endring i atferdsintensjoner. Forutsatt en relativ god kontroll over situasjonen, vil det kunne resulterer i atferdsendringer (Ajzen, 2005).

2.3.4 Drøfting av modellene

For å kunne velge en passende «arbeidsdefinisjon», må svakheter og styrker ved de enkelte modellene drøftes ut ifra hensikten med oppgaven.

Det finnes flere ulike definisjoner for holdninger generelt og holdninger til matematikk spesielt. Hannula (2006) mener det er så store ulikheter mellom definisjonene at det er lite sannsynlig at vi noen gang vil kunne utvikle én felles modell for holdninger i matematikkdidaktikk som på en god måte kan representere alle relevante aspekter ved holdninger. McLeod enkle modell, er ut fra de den foregående redegjørelsen, noe snevrere enn de andre modellene. En snever definisjon behøver ikke å være negativ. Di Martino & Zan (2010) hevder for eksempel at denne definisjonen trolig vil være egnet til å predikere elevers valg i visse situasjoner, blant annet i fremtidig utdanning. I mer komplekse situasjoner derimot, som for eksempel å tolke elevers handlinger i matematiske problemløsning, vil en slik definisjon ikke være tilstrekkelig. Di Martino & Zan (2010) antyder at en slik definisjon kommer til kort siden det er for mange variabler knyttet til elevenes følelser. For eksempel hevder forskerne at følelser knyttet til erfaringer, vil være med å påvirke av hvor meningsfulle erfaringer oppfattes. Det vil også ha mye å si hvordan man er i stand til å håndtere følelsesmessige reaksjoner

De to sammensatte modellene som er presentert, forsøker i stor grad å skissere et forklarende bilde av hva holdninger er, og det finnes både likheter og forskjeller ved modellene. Begge modellene kan sies å være praksisnære, og de er beskrivende og presises i språket, og det antas at de på bakgrunn av dette, er egnet som teoretisk rammeverk i denne oppgaven.

Når det gjelder begrepet *oppfatninger* knyttet til holdninger, har det i matematikkdidaktisk kontekst lenge vært vanlig å dele oppfatninger inn i oppfatninger om matematikk, individet selv, læring av matematikk og sosial kontekst (McLeod, 1992). TMA og TPA kan sies å ha noe av dette til felles; TMA i form av faktorene «oppfatning av egen kompetanse» og «syn på matematikk», og TPA i form av faktorene «oppfattet atferdskontroll». Begge modellene inkluderer også følelser, hvor de i TPA kan plasseres i faktoren «holdninger til en atferd». Både TMA og TPA kan på bakgrunn av dette sies å være forenlige. Samtidig som det finnes flere likhetstrekk mellom TMA og TPA, ser vi også forskjeller. I TPA finnes det, i motsetning til i TMA, en komponent som inkluderer verdier. Hvilken verdi kan man tillegge andre personers meninger om matematikk, finnes under «subjektive normer». Forskning viser at klasseromskonteksten, med blant annet påvirkninger fra klassekamerater, kan påvirke motivasjon og prestasjoner i matematikk (Ryan, 2001). Også foreldre kan sees på som en faktor som påvirker elevens prestasjoner i matematikk (Khajehpour & Ghazvini, 2011).

Matematikkdidaktisk vs. generell modell

TMA er en matematikkdidaktisk holdningsmodell. I denne modellen er det vektlagt at den skal kunne brukes konkret og effektiv for blant annet å diagnostiere lite hensiktsmessige holdninger til matematikk (Di Martino & Zan, 2020). Dette impliserer at denne modellen tilsynelatende er godt egnet for bruk som teoretisk rammeverk i denne oppgaven.

At TPA er en generell holdningsmodell som skal kunne gjelde for alle fagområder, kan by på utfordringer dersom modellen skal brukes innen matematikkdidaktikk. Elevers møte med matematikk kan skille seg fra deres møte med andre fag, blant annet ved at elevene forventer at det kun finnes ett riktig svar når de løser matematikkoppgaver, og kanskje de tenker at det kun er én måte å komme fram til dette svaret på. I andre skolefag er det mer vanlig med flere mulige svar, hvor elevene da må argumentere for sitt svar. I løsning av for eksempler førstegradslikninger finnes det kun ett riktig svar. Det er mulig elever, særlig lavt presterende elever, kan oppleve dette som truende. Deres oppfatninger og holdninger til matematikkfaget vil altså kunne påvirkes av faktorer som man ikke vil finne i andre fagområder.

Likevel har mye av teoretiseringen av begreper som brukes innen forskning på affekt og matematikk, blitt gjort utenfor matematikkdidaktikken, for så å ha blitt introdusert for den matematikkdidaktiske konteksten (Hannula, 2012). Begreper som verdier, identitet, motivasjon og normer har ofte blitt definert i andre fagfelt, for så å bli tatt i bruk i matematikkdidaktikken (se for eksempel Beijaard, Meijer, Verlopp, 2004). Lipnevich, MacCann, Krumm, Burrus og Roberts (2011) har i et forskningsprosjekt undersøkt om TPA egner seg for bruk i en matematikkdidaktisk kontekst ved at de har undersøkt om det finnes en sammenheng mellom holdninger til matematikk og prestasjoner i faget. Dette hevder de selv ble et vellykket prosjekt, og de skriver at TPA bidro positivt ved å være spesifikk og relevant, samtidig som den har en sterk teoretisk tyngde (Lipnevich et al., 2011).

Ma og Kisho (1997) gjorde en metaanalyse av 113 studier, og denne analysen viste et positiv, men svakt, forhold mellom holdninger til matematikk og prestasjoner i matematikk. Lipnevich et al. (2011) hevder at det teoretiske grunnlaget i flere av studiene Ma og Kishor undersøkte, ikke var sterkt nok. Videre hevder de at TPA fungerer som et sterkt teoretisk rammeverk for å utvikle spørsmål som måler holdninger til matematikk. TPA fokuserer i tillegg mer på holdninger knyttet opp mot prestasjoner enn TMA. Da ett av målene med oppgaven var å se på om holdninger til matematikk har noe å si med tanke på misoppfatninger i brøk, er det naturlig å velge en modell som setter søkelys på relasjoner mellom holdninger og prestasjoner.

2.3.5 Oppgavens modell, TPA, satt inn i en matematikkdidaktisk kontekst

TPA gir en sammensatt definisjon av holdninger, som har vist seg å være en god holdningsmodell i tidligere forskning på holdninger til matematikk (Lipnevich et al., 2011). I tillegg er TPA en mye brukt og anerkjent holdningsmodell i sosialpsykologien, med en sterk teoretisk tyngde. Da de ulike modellene som er presentert, kan sies å være forenlige, vil annen relevant matematikkdidaktisk forskning kunne settes i relasjon til TPA. Videre vil modellens tre faktorer presenteres hver for seg.

Holdning til en atferd

Holdninger til en atferd refererer til i hvilken grad en person har en positiv eller negativ evaluering eller vurdering av atferden det er snakk om (Ajzen, 1991). Holdninger utvikles fra menneskers oppfatning, som generelt sett konstrueres ved å knytte det man skal danne seg en oppfatning om, til visse egenskaper, andre objekter eller karakteristikker. Disse oppfatningene som bestemmer holdningen til en atferd, kalles ofte atferdsoppfatninger (Ajzen, 2005). «Å få en god karakter i matematikk vil gå ut over det sosiale livet mitt utenfor skolen» er et eksempel på en slik atferdsoppfatning. Hver atferdsoppfatning kobler sammen handlingen til et visst utfall, eller til andre attributter som for eksempel kostnadene som påløper ved å utføre handlingen, slik eksempelet over viser. Her vil attributtene som blir koplet til handlingen allerede være vurdert positivt eller negativt, noe som fører til at vi automatisk vil tilegne oss en holdning til atferden eller handlingen (Ajzen, 1991).

Holdninger, indre motivasjon og instrumentell motivasjon

I denne modellen omfatter holdninger både erfaringsbaserte og instrumentelle komponenter, der erfaringsbaserte holdninger har en følelsesmessig betydning (like eller mislike), mens instrumentelle holdninger har en mer evaluerende betydning (viktig eller ikke viktig) (Ajzen, 2002). Tidligere har det blitt hevdet at erfaringsbaserte holdninger og indre motivasjon har visse likhetstrekk, ved at begge omhandler følelsesmessige innstillinger (Lipnevich et al., 2011). Det er vanlig å skille mellom indre og instrumentell motivasjon, der motivasjon kan defineres som en tilstand som forårsaker aktivitet hos individet, styrer aktiviteten i bestemte retninger og holder den gående (Magnar et al., 2013). I følge Wæge og Nosrati (2019) kan ikke motivasjon observeres direkte, men den kan gi utslag i *kognisjoner* (hva man tenker), *følelser* (som glede, engasjement eller angst) og *handlinger* (som konsentrasjon, utholdenhet og innsats) (Wæge & Nosrati, 2019). Indre motivasjon kan i akademiske kontekst defineres som motivasjon for læring i seg selv. For eksempel elever som er indre motivert og deltar i matematikkaktivitet fordi de, ifølge Middelton og Spanias (1999) og Wæge og Nosrati (2019), liker dem. Elever som er enige i utsagnet «jeg ser fram til matematikktimene» kan altså sies å være indre motivert for matematikkfaget (OECD, 2013b). Er en elev indre motivert for matematikk, vil man si at eleven har en positiv, erfaringsbasert holdning til oppgaven (Lipnevich et al., 2011). Her trekkes det altså parallell mellom erfaringsbasert holdning og indre motivasjon. Videre i oppgaven vil erfaringsbasert holdninger, på bakgrunn av dette, undersøkes ved å se på indre motivasjon.

Middelton (1995) fant i sin studie ut at elever som har lite indre motivasjon for matematikk, er mer fokusert på hvorvidt de har kontroll i faget eller ikke, i forhold til elever som er mer indre motivert. Dette kan tolkes som at hvis elever er lite motivert for matematikk, kan de oppleve å mangle kontroll i arbeid med faget, noe som igjen kan føre til redusert indre motivasjon. Skaalvik og Skaalvik (2013), skriver også om indre motivasjon, og sier at følelsen av kompetanse kan ses på som en viktig drivkraft for å la seg engasjere i oppgaver og for å ha utholdenhet når oppgaven blir krevende. Ryan og Deci (2000) påpeker at de tre behovene for kompetanse, autonomi og tilhørighet, er bundet tett sammen og at disse behovene har stor betydning for elevens indre og ytre motivasjon. Elevens indre motivasjon er størst i klasserom hvor de kan få tilfredsstilt alle de tre behovene.

Instrumentell motivasjon handler om elevens oppfattelse av aktivitetens instrumentelle verdi (Magnar et al., 2013). Det vil si at man for eksempel ser på matematikk som noe viktig og nyttig, både for seg selv nå og for fremtidige karrierevalg (OECD, 2013b). Et eksempel her er påstanden «å lære matematikk er viktig for meg, fordi det kan bedre mine yrkesmuligheter» (OECD, 2012). Holdninger til en atferd referer til i hvilken grad en person har en positiv eller negativ evaluering eller vurdering av atferden det er snakk om (Ajzen, 1991). I den instrumentelle faktoren av holdninger, vurdere man da om oppgaven man skal utføre, er viktig eller ikke. Slik jeg forstår instrumentelle holdninger og instrumentell motivasjon er disse svært like. Videre i oppgaven velger jeg derfor å undersøke instrumentelle holdninger ved å se på instrumentell motivasjon.

Subjektive normer

Subjektive normer referer til det oppfattede sosiale presset til å utføre eller ikke utføre arbeid med matematikk. Man kan si at det er snakk om hvorvidt personer eller grupper som er viktige for personen, stiller seg positivt eller negativt til matematikk og matematikkfaget (Ajzen, 1991). «Foreldrene mine synes det er viktig at jeg jobber med matematikkfaget» (OECD, 2012) er et eksempel på slike normative oppfatninger. Elevers subjektive normer påvirkes av deres egen oppfatning av det som spesifikke individer (som foreldre, nære venner, lærere) og grupper (klassen) synes godt om. Det kan være at de godkjenner eller selv arbeider med matematikk – eller at de ikke gjør det. Disse spesifikke oppfatningene omtales ofte som normative oppfatninger (Ajzen, 2005).

Forskning gjort av blant annet Tocci og Engelhard (1991) viser at familien har en signifikant rolle i dannelsen av elevens holdninger til matematikk. Føler en elev et sosialt press til å utføre en viss handling eller atferd, vil han eller hun, ifølge Ajzen (1991), med stor sannsynlighet utføre handlingen. I følge Aiken (1970) kan foreldre påvirke sine barns holdninger til matematikk på tre måter; ved å ha forventninger til barnets prestasjoner, ved oppmuntring, eller gjennom sine egne holdninger til matematikk. En persons motivasjon til å følge andres forventninger, kan altså påvirke de subjektive normene. Eksempelvis kan en elev som har foreldre med høye forventinger om at han eller hun skal arbeide mye med matematikkfaget, la seg påvirke av dette og arbeide mer med matematikk enn hvis foreldrene har holdningen «matematikk ligger ikke for vår familie».

God støtte fra læreren vises seg også, ifølge Mata, Monterio og Peixoto (2012), å ha en påvirkning på elevens holdninger til matematikk. Læreren kan påvirke elevens motivasjon og holdninger, ikke bare gjennom undervisningen, men også gjennom måten de omtaler læring på generelt (Mata et al., 2012). Det fremheves at en lærer som er støttende overfor elevene, som skaper forventning om læring blant elevene på en positiv måte, gir meningsfulle oppgaver på et passende nivå, og fremmer læringsmiljø der samarbeid står i fokus, trolig kan få elevene mer indre motivert. Det kan igjen gi føringer for elevens holdninger (Mata et al. 2012).

> «Tilhørighet gir elevene den tryggheten de trenger for å være autonome. At elevene har en opplevelse av autonomi når de arbeider med oppgaver, fører til økt følelse av kompetanse. Og følelsen av kompetanse gir elevene den nødvendige selvtilliten de trenger for å føle seg akseptert og oppleve tilhørighet med læreren og medelevene. Hvis elevene får positive erfaringer i matematikk. gjennom å mestre passe utfordrende oppgaver, sammen med opplevelser av autonomi og tilhørig, kan det etter hvert få positive forventinger knyttet til arbeid med matematikk» (Wæge & Nosrati, 2019, p. 27).

Oppfattet atferdskontroll

En atferd kan sies å være helt og holdent under en persons kontroll dersom han eller hun kan bestemme ved egen vilje om atferden skal utføres eller ikke (Ajzen & Madden, 1986). Det er likevel de færreste handlinger man til syvende og sist har full kontroll over selv. Å prestere bra i matematikk, er for eksempel noe elever ikke har full kontroll over selv. I tillegg til å være motivert og ha et ønske om å prestere bra, må elevene blant annet ha visse intellektuelle evner. Det er altså mange faktorer som kan påvirke kontrollen over intendert atferd, hvorav noen er indre faktorer, som matematiske evner, kunnskap om matematikk og passende planlegging, mens andre er ytre faktorer (Ajzen & Madden, 1986). Hvor mye tid man har til å arbeide med matematikk og hvorvidt man kan få hjelp av andre, er eksempel på ytre faktorer som kan påvirke kontrollen over atferden. Den faktiske kontrollen elever besitter i arbeid med matematikk er vanskelig å måle, dersom man skal ta hensyn til alle indre og ytre faktorer som påvirker situasjonen. Det man i stedet kan måle, er individers oppfattede kontroll over situasjonen, altså deres *oppfattede atferdskontroll* (Ajzen & Madden, 1986). Sagt på en annen måte; hvordan vår oppfatning om tilstedeværelsen eller fravær av faktorer, som legger til rette for, eller vanskeliggjør utførelsen av handlingen, påvirker den oppfattede atferdskontrollen. For eksempel i en prøvesituasjon der hjelpemidler ikke er tillatt, da kan elever som strever med hoderegning, oppfatte at de har svært lite kontroll i prøvesituasjonen. Ofte vil disse oppfatningene igjen være påvirket av egne og/eller andres erfaringer med atferden. Har elever sett og arbeidet med en type matematikkoppgaver tidligere og mestret den, er det stor sannsynlighet for at han eller hun vil ha en oppfatning om kontroll over situasjonen. Desto flere nødvendige muligheter og forutsetninger individet mener han eller hun har, og færre hindringer forventes, desto større vil individets oppfattede atferdskontroll være (Ajzen, 2005). Oppfattet atferdskontroll kan likevel være lite realistisk dersom en elev har relativt lite informasjon om handlingen, når krav eller tilgjengelige ressurser har blitt endret, eller når ukjente elementer har blitt inkludert i situasjonen (Ajzen, 1991). Den oppfattede atferdskontrollen kan også påvirkes av elevers sammenligninger med seg selv og andre. Elever kan sammenligne sine prestasjoner med egne tidligere prestasjoner eller medelevers prestasjoner, og ut ifra det vurdere sin oppfattede kontroll (Skaalvik & Skaalvik, 2013). Det antas at når det gjelder elevers oppfattede atferdskontroll, vil de reflektere over tidligere erfaringer og opplevelser med matematikk, samt forventede hindringer og utfordringer (Ajzen, 1991). Utfallet av en sosial sammenligning vil alltid være subjektiv, og vil dermed variere fra person til person (Skaalvik & Skaalvik, 2013).

Oppfattet atferdskontroll, mestringsforventning og selvattribusjon

Det er mulig å dele den oppfattede atferdskontrollen inn i to faktorer; evne eller kapasitet og kontrollbarhet. Evne eller kapasitet referer til hvor vanskelig man tror handlingen er. Kontrollbarhet referer til hvorvidt man føler om det å utføre handlingen er opp til en selv eller ikke (Lipnevich et al., 2011). Et eksempel på kontrollbarhet kan være «om jeg gjør det bra eller ikke i matematikk, er helt opp til meg» (OECD, 2012). Det er ifølge Ajzen (1991) mulig å trekke en parallell fra faktoren evne/kapasitet til Banduras konsept om *self-efficacy*, som ofte kalles mestringsforventning (Jensen & Nortvedt, 2013)

Forventingene om at elevene tror de kan lykkes med en matematikkoppgave, kalles elevenes mestringsforventninger (self-efficacy) (Wæge & Nosrati, 2019). Forskning gjort av blant annet Bandura, har vist at menneskers atferd er sterkt påvirket av deres selvsikkerhet når det gjelder deres evne til å prestere. Elevers mestringsforventninger kan påvirke valg av aktiviteter, forberedelse til en aktivitet, innsats lagt i aktiviteten, i tillegg til tankemønster og følelsesmessige reaksjoner (Bandura, 2002). Elever som har lave mestringsforventninger til en oppgave, vil fortere senke innsatsen eller gi opp når de møter problemer. For å beskytte selvbildet eller selvtilliten sin, kan de også velge å unngå å gjøre oppgaven (Wæge & Nosrati, 2019).

Rohrkemper og Bershon (1984) fant i sin studie at flere elever rapporterte om lav selvtillit og en «negativ indre stemme». Forskerne hevder videre at slike negative oppfattelser av selvet, undergraver elevens evner og innsats når de møter utfordrende oppgaver. Dette kan knyttes opp mot teorien om lært hjelpeløshet, hvor mangel på innsats er en følge av lave forventinger (McLeod, 1992; Skaalvik & Skaalvik, 2013). Ved lært hjelpeløshet, vil elever kunne føle at innsats ikke har noen hensikt, og at det derfor er nytteløst å anstrenge seg. «Hvis jeg hadde villet, kunne jeg ha gjort det bra i matematikk» (OECD, 2012), er et eksempel på et spørsmål som har potensial til å avdekke om elever attribuerer til evner eller innsats. Slike spørsmål kan også avdekke eleveres kontrollbarhet med fokus på ytre faktorer, som for eksempel om de mener at de på egenhånd kan mestre matematikk, eller om de er avhengig av hjelp fra andre.

Ifølge Bandura, Usher og Pajares er det fire informasjonskilder som påvirker elevenes mestringsforventninger: 1) mestringserfaringer, 2) vikarierende erfaringer, 3) oppmuntring, støtte og overtalelse fra andre og 4) psykologiske og fysiologiske tilstander (Wæge & Nosrati, 2019). Den viktigste informasjonskilden er elevens *mestringserfaringer*. Med *mestringserfaringer* menes tidligere erfaringer med å mestre tilsvarende oppgaver (Skaalvik & Skaalvik, 2013). Har eleven lyktes i å løse tidligere matematikkoppgaver/aktiviteter eller ikke? Litt forenklet kan vi si at tidligere erfaringer ved å lykkes med matematikkoppgaver, vil øke elevenes mestringsforventninger. Motsatt vil tidligere erfaringer med å mislykkes, reduserer mestringsforventningene deres. Det er imidlertid ikke alltid så enkelt. Graden av innsats vil også fortelle noe om elevenes kompetanse (Wæge & Nosrati, 2019). Elevers kontrollbarhet kan ses i lys av deres selvattribusjon og selvvurdering (Skaalvik & Skaalvik, 2013). Disse *mestringserfaringene* kan ses på som indre kilder til selvoppfatning. Elever som har opplevd å mestre matematikkoppgaver ser ofte mer nytteverdi av matematikken enn elever som ikke har opplevd mestring i matematikk. Elever med tidligere mestringserfaringer i matematikk, kan altså sies å være mer instrumentelt motivert i faget (Wæge & Nosrati, 2019).

Vikarierende erfaringer vil si å ha sett andre som det er naturlig å sammenligne seg med, utføre samme oppgave. Å observere elever som strever med en oppgave før de lykkes, bidrar ofte til større mestringsforventninger hos dem som ser på, en observasjon av elever som gir inntrykk av å aldri gjøre feil (Usher & Pajares, 2008).

Når en oppgave er ny for eleven, *vil oppmuntringer, støtte og overtalelse fra andre* ha spesielt stor betydning. Hvis denne typen overtalelse skal være effektiv, må den være realistisk og forstekes gjennom positive erfaringer (Bong & Skaalvik, 2003; Stipek, 2002, sitert i Wæge & Nosrati, 2019, s.47).

Psykologiske og fysiologiske tilstander som stress, matematikkangst, helse, energi og humør er den fjerde informasjonskilden (Bandura, 1994; Usher & Pajares, 2008). Sterke følelsesmessige reaksjoner som angst eller glede relatert til matematikkoppgaver, vil gi elevene indikasjoner på om de kan forvente å lykkes eller ikke (Wæge & Nosrati, 2019). Bandura (1994) påpeker at det ikke er intensiteten av de emosjonelle og fysiske reaksjoner som er avgjørende, men hvordan elevene tolker og lar seg påvirke av dem.

I henhold til TPA kan *oppfattet atferdskontroll* sammen med intensjoner brukes til å predikere atferdsprestasjoner (Ajzen, 1991). Dersom man har intensjoner om å utøve en bestemt handling, vil ikke nødvendigvis disse intensjonene bli satt ut i livet hvis man har liten tro på at man har kontroll over handlingen. Lav mestringsforventninger kan med andre ord hindre utførelse av handlinger. Derfor har Ajzen (1991) foreslått en direkte kobling mellom *oppfattet atferdskontroll* og *atferd*, i tillegg til en direkte kobling mellom *oppfattet atferdskontroll* og intensjoner (se figur 10).

3. Metode

Innenfor temaet som jeg har valgt for mitt forskningsarbeid, er det flere metoder som kunne vært brukt. I dette kapittelet vil jeg redegjøre for valg av metode, forklare hvordan jeg har samlet inn data og bearbeidet dem. Jeg vil også ta en vurdering av reliabilitet og validitet, samt etiske betraktninger.

3.1 Metodevalg og forskningsdesign

Forskning er å bringe fram kunnskap. Et resultat i forskning er at flere mennesker skal oppleve at denne kunnskapen har gyldighet (Postholm & Jacobsen, 2018). Et hovedskille for forskningsmetoder er kvantitative og kvalitative metoder. Både kvantitative og kvalitative metoder kunne ha blitt brukt for å undersøke elevenes brøkkunnskaper og holdninger til matematikkfaget.

I denne studien har jeg valgt å bruke et kvantitativt design med en spørreundersøkelse og en kartleggingstest. Kvantitative metoder er egnet til å kartlegge og skaffe overblikk hos et stort utvalg (Creswell, 2014). Hensikten med denne studien er å undersøke hvordan brøkkunnskapene/misoppfattelser i brøk til elever som starter i den videregående skole, holdninger til matematikkfaget og om det er en sammenheng mellom holdninger og misoppfattelser/brøkkunnskapene. Det er derfor ønskelig å spørre mange elever, og ved kvantitativ metode kan man spørre mange på kort tid. Kvantitative data gir også grunnlag for statistiske analyser som gir oversikt og kartlegging av elevenes holdninger til matematikk og brøkkunnskapene (eventuelle misoppfattelser i brøk) (Creswell, 2014; Postholm & Jacobsen, 2018). Det kan være lettere å analysere ved statistiske metoder i en kvantitativ tilnærming enn ved en kvalitativ tilnærming, fordi man gjennom et stort datamateriale kan se om det er mønster som går igjen hos respondentene, og man kan undersøke om eventuelle sammenhenger er statistisk signifikante (Choen, Manion, Keith & Bell, 2011; Haraldsen, 1999). Ifølge Haraldsen (1999) er spørreskjema et naturlig alternativ når det man skal kartlegge elevers meninger og holdninger.

Jeg har også på grunn av tid og emne valgt å utføre en tverrsnittstudie, som er en studie av et utvalg på ett tidspunkt (Postholm & Jacobsen, 2018). Siden jeg skal se på hvordan holdningene og brøkkunnskapene er i starten av den videregående skolen, er det lite poeng å utføre en tidsseriestudie – som er en studie av to utvalg fra samme populasjon på to ulike tidspunkt, eller en kohortstudie som er en studie av det samme utvalget på ulike tidspunkt (Postholm & Jacobsen, 2018).

Kvantitative metoder er altså egnet til å skaffe overblikk, mens kvalitative metoder er mer egnet til å gå i dybden (Choen, Manion, Keith & Bell, 2011; Postholm & Jacobsen, 2018; Creswell, 2014). Den kvantitative metoden og spørreskjema har både fordeler og ulemper. Ved bruk av spørreskjema har man mulighet til å ivareta respondentens anonymitet i stor grad. Haraldsen (1999) påpeker at det er da viktig å formulere spørsmålene slik at det ikke kan spores tilbake til eleven. Når en undersøkelse er helt anonym, svarer trolig respondentene mer ærlig enn de ville gjort dersom undersøkelsen ikke var anonym. At forskeren kan påvirke informanten, er en fare som pekes på ved kvalitativ forskning (Choen, Manion, et al. 2011; Postholm & Jacobsen, 2018; Creswell, 2014). I et intervju kan forskeren stille ledende spørsmål, eller kan som person påvirke hvordan informanten svarer. Denne faren kan også eksistere ved spørreskjemaundersøkelser. I min studie vil jeg, av ulike hensyn som beskrives senere i oppgaven, være til stede under gjennomføringen av undersøkelsen hos noen av respondentene. Jeg vil derimot ikke interagere i like stor grad med respondentene som jeg ville ha gjort i en kvalitativ studie. At jeg er til stede, kan likevel påvirke studiens validitet, noe som drøftes senere i metodekapittelet.

Samtidig vil forskningens validitet ikke ha like stor påvirkningskraft fra forskeren til respondentene i en kvantitativ metode som i en kvalitativ tilnærming, siden forskeren ikke i like stor grad er i interaksjon med respondenten. På den andre siden er det mulige utfordringer ved å stille spørsmål skriftlig i stedet for muntlig. Misforståelser knyttet til spørsmålene/oppgavene i et spørreskjema kan ikke korrigeres på samme måte som for eksempel i et intervju (Choen, Manion, Keith & Bell, 2011; Postholm & Jacobsen, 2018). Ved eventuelle misforståelser er det fare for at respondenten svarer noe de ikke egentlig ville svart, at de svarer tilfeldig eller lar være å svare. Dette påvirker også forskningens validitet.

Basert på hensikten med studien; å undersøke sammenhenger mellom elevens holdninger i matematikk og deres brøkkunnskaper (samt hvilke misoppfatninger som er vanlige), mener jeg at kvantitativ metode og spørreskjema/kartleggingsprøve er en egnet metode for min oppgave. Det vil være utfordringer og validitetstrusler knyttet til alle metoder. Disse vil diskuteres ytterligere senere i oppgaven. Basert på det som er presentert i dette kapittelet, mener jeg at dette metodevalget er hensiktsmessig for å svare på problemstillingen, innenfor rammen av en masteroppgave.

3.2 Måleinstrumentet

Måleinstrumentet i denne studien er en kartleggingstest og et spørreskjema. De fleste oppgavene brukt i denne kartleggingstesten, har vært brukt i tidligere forskning – noen av dem på litt yngre elever. Oppgavene er blant annet hentet fra «Chelsea Diagnostic Mathematics Test» (Hart et al., 1984), «Alle Teller» (McIntosh, 2007), TIMMS 2011 – 8. trinn, «Kartleggingsprøver i regning VG1» (Utdanningsdirektoratet, 2012) og «Læringsstøttene prøver» (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Spørreskjemaet som går på holdningsspørsmålene, består hovedsakelig av spørsmål hentet fra PISA 2012. Spørreskjemaet mitt har to spørsmålstyper. Den første typen er spørsmål som går på bakgrunnsvariabler. Disse spørsmålene er dikotome og diskrete variabler (Choen et al., 2011). En dikotom variabel har kun to verdier. Min dikotome variabel er kjønn og har de to verdiene jente eller gutt. En diskret variabel er en variabel med bestemt antall verdier. Et eksempel er elevens matematikkfag som må være ett av et bestemt antall svaralternativer. Disse spørsmålene er inkludert fordi det kan være interessant å se på forskjeller i resultatene mellom elever, fordelt på kjønn, studieprogram, matematikkfag eller karakter i matematikk. Resten av spørreskjemaet består av påstander som elevene skal ta stilling til. Målet her er å se om jeg kan finne ut hvordan holdning til matematikk er for elever som starter i den videregående skolen, og om holdninger til matematikk kan ha innvirkning på prestasjoner i matematikk.

Påstandene er på en skala fra 1 til 6. Der 1 er «helt uenig» og 6 er «helt enig». Slike spørsmål og svaralternativer er vanlig å bruke i studier på holdninger i kvantitativ forskning (Choen et al., 2011). En slik skala (LIKERT-SKALA) gjør det mulig å måle ulike uttrykk for holdninger, ved å belyse samme holdning fra ulike vinkler. Det er knyttet både positive og negative formulerte utsagn til enkelte variabler. Dette kan bidra til at man oppdager om elever har lest spørsmålene godt, eller om de har gitt blindt svar (Kleven et al., 2011). Dersom en elev har svar i samme ende av skalaen på en positiv og en negativ formulert påstand knyttet til samme begrep, kan det være grunn til å tro at respondenten ikke har lest påstandene godt nok.

Selv om det er anbefalt å ha et midtpunkt på skalaen, har jeg valgt å ha en skala uten et nøytralt alternativ. Et argument for å ha ett midtpunkt er at mange respondenter stiller seg nøytralt til mye, og da kan det oppleves som ubehagelig å måtte ta stilling til en påstand. Argumentet for å unngå et midtpunkt handler mye om det samme. Cohen et al. (2011) hevder at respondenter har en tendens til å velge det nøytrale alternative dersom det er mulig, og at en måte å unngå dette på er nettopp å droppe å ha alternativer med. Alle elever har en form for holdninger til matematikkfaget (Di Martino & Zan, 2010). Samtidig vil det være lett å svare nøytralt dersom de ikke med en gang var sikker på hva de skulle svare. Derfor har jeg valgt å «tvinge» respondentene til å ta en stilling til påstandene. At jeg unngår et nøytralt alternativ, kan med tanke på forskningens validitet og reliabilitet diskuteres.

Pilotundersøkelse

Høsten 2019 og begynnelsen av 2020 lagde jeg en test som besto av noen bakgrunnsvariabler, noen holdningsspørsmål og ett oppgavesett med brøkoppgaver. Oppgavene skulle avdekke ulike aspekter ved brøk og mulig kjente misoppfatninger innen dette emnet og også se på hvordan holdninger til matematikk eventuelt påvirker elevenes resultat på brøktesten. Formålet med piloteringen var å teste ut metode og verktøy. Pilottesten skulle hjelpe til med å se hvordan oppgavene fungerte, og hvor eventuelle problemer hos elevene lå. Det var oppgaver som inneholdt brøk og illustrasjoner, ekvivalens, brøk på tallinje, sammenligning av brøker, brøk og de fire regneartene. Pilottesten inneholdt 30 oppgaver og ble på grunn av Covid-19 avholdt på slutten av skoleåret 2019/2020, da elevene endelig kom tilbake til skolen. Pilotundersøkelsen ble gjennomført på skolen hvor jeg jobbet, og på grunn av Covid-19 var det elever som gikk i samme klasse (ikke matematikkklasse) og dermed var det både 1T elever og 1P elever. Det var 26 elever (15 jenter og 11 gutter) som deltok.

Oppgavesettet har gjennomgått endringer etter at piloten ble gjennomført. Pilotelevene mine brukte ca. 90 minutter og da var en god del av dem trøtte da de nærmet seg slutten. Mange av tekstoppgavene var ikke besvart, eller bare delvis gjort. I samtale med noen av elevene i etterkant, kunne de bekrefte at de hadde ikke gjort sitt beste når det gjaldt disse oppgavene.

Jeg gjorde også en del endringer til bakgrunnsvariablene, da jeg i pilottesten hadde med spørsmål om foreldres yrke og hvor mye utdanning de selv så for seg at de skulle ta. Disse oppgavene syntes elevene det var vanskelig å svare på, og dataene jeg fikk ut var av variabel kvalitet. På spørsmålene om holdninger økte jeg skalaen fra 1 – 4 (svært uenig til svært enig) til 1 – 6. Dette var også på grunn av tilbakemeldinger fra elevene, da de mente det var for lite valg, og de ønsket å sette «kryss» imellom.

På bakgrunn av tilbakemeldinger fra elevene, og på grunn av at testen var for lang, kuttet jeg en del av oppgavene i selve brøktesten. Det var spesielt tekstoppgaver og oppgaver som var lite informative som ble kuttet. Utenom det, var det litt kosmetiske utforminger som ble bedret. Blant annet på figurer da det gjerne ikke var like «lett» å se hva som var markert eller ikke.

3.3 Utvalg

Populasjonen som forskningsspørsmålene retter seg mot, er elever i starten av VG1 på videregående skoler i Norge. Jeg hadde ikke anledning til å utføre testen på alle elever som starter på vgs. i 2020/2021, men jeg tok et bekvemmelighetsutvalg. Det vil si at utvalget ikke ble gjort tilfeldig, men ettersom respondenter som er lette å få tak i (Creswell, 2014).

I forkant av datainnsamlingen ble rektor, avdelingsleder og matematikklærerne ved en videregående skole spurt om deltakelse i prosjektet. Derfor kommer alle respondentene fra samme videregående skole. Denne skolen har 4 klasser der elevene går på musikk, dans og drama - linjer (2 klasser med musikk, 1 klasse med dans og 1 klasse med drama), 2 klasser med kunst design og arkitektur, 1 klasse media og kommunikasjon, 2 klasser med informasjonsteknologi og medieproduksjon (yrkesfag) og 3 klasser med frisør, blomst, interiør og eksponeringdesign (yrkesfag). Til sammen er det 277 elever på vg1.

Statistikken viser at elevtallet i videregående skole i Norge på de studieretningene jeg har hatt tilgang på, var 9006 elever pr. 17.3.2021. Utfra surveymonkey[1] med 9006 elever totalt, burde jeg ha hatt 260 besvarelser for å ha en 6 % margin of Error med en confidence level 95%. Jeg har litt mindre, så jeg har nok en margin of error rundt 6 – 6,5%.

I studien deltok 233 elever fordelt på 150 gutter og 81 jenter (+ 2 elever som ikke har oppgitt kjønn). På de forskjellige studieretningene (her har jeg samlet musikk, dans og drama i en gruppe, siden det er det Utdanningsdirektoratet gjør) fordelte respondentene seg slik:

[1] *SuveyMonkey*. (2021). https://www.surveymonkey.com/mp/sample-size-calculator/

Tabell 1:Tall for hele landet er hentet fra elevtall i videregående skole (Utdanningsdirektorartet, u.d.)

Studieretningen	Antall elevsvar	Antall elever - hele landet	Undersøkelsen	Hele landet
FBIE	25	1121	11 %	12 %
IM	26	1809	11 %	20 %
MDD	105	2763	45 %	31 %
KDA	53	1467	23 %	16 %
MEK	22	1846	10 %	20 %
SUM	231	9006	100 %	100 %

FBIE = frisør, blomst,interiør og eksponersingsdesign. IM = infomrasjonsteknologi og medieproduksjon, MDD = musikk, dans og drama, KDA = Kunst, design og arkitektur og MEK = Medier og kommunikasjon

Det er 15 elever som ikke har skrevet hvilket programfag de går i, men jeg fant ut av eliminasjonsmetoden at dette var 6 elever på 1T fra MEK -derav 1 jente og 5 gutter og at det var 7 stk. som gikk på musikk, der 3 var jenter og 4 gutter. Disse har jeg telt med her, men ikke i analysen knyttet til programfag, da jeg ikke vet hvilken elev som har svart hva. Det var også 2 elever/jenter som har 1P. Disse har ikke skrevet hvilket programfag de har, men her har jeg ikke klart å finne ut hvilket programfag de representerer, da det var flere elever på 1P som valgte å ikke å delta i undersøkelsen. Det var 44 elever som ikke deltok på undersøkelsen. De var enten ikke på skolen den dagen testen ble gjennomført i klassen, eller de valgte å ikke delta.

Vi ser at fordelingen på studieretningene er litt avvikende med henblikk på fordelingen på de landsdekkende studieretninger. På MDD og KDA har jeg en overrepresentasjon, FBIE viser godt samsvar, mens IM og MEK er jeg underrepresentert.

3.4 Søknader

Den ansvarlige for et forskningsprosjekt har informasjonsplikt overfor deltaker. Samtykke skal skaffes dersom det innhentes personopplysninger som ikke behandles anonymt (*Personvernportalen*, 2020).

Dette prosjektet er ikke meldepliktig til NSD ettersom ingen personopplysninger kan spores tilbake til én person.

Alle deltakerne i prosjektet er over 15 år, som er nedre aldersgrense for når barn selv kan samtykke til deltakelse i mindre forskningsprosjekter med ikke-sensitive data (Norsk senter for forskningsdata, 2019). Dermed trengs ikke foreldresamtykke for å delta i undersøkelsen.

Selv om prosjektet ikke samler inn sensitive data, ble det utarbeidet et informasjonsskriv som ble lagt ved spørreskjemaet med opplysninger om anonymitet (vedlegg 2).

Rektor og avdelingsleder ga tillatelse til at data kunne samles inn, og i samråd med avdelingsleder og lærere ble det besluttet at dette kunne gjennomføres i ordinære matematikktimer.

3.5 Etiske vurderinger

Det er flere etiske hensyn som en forsker må tenke igjennom når han arbeider med et prosjekt. Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) har utarbeidet forskningsetiske retningslinjer og de kan blant annet hjelpe forskeren slik at valg han/hun gjør for vitenskapelig hensyn, også tar etiske hensyn.

Innhenting av samtykker i forbindelse med datainnsamling er etisk praksis (Creswell, 2014). Pedagogisk forskning bruker mennesker som informanter og har derfor relativt detaljerte etiske retningslinjer (NESH, 2016).

De nasjonale forskningsetiske komiteene fastslår at fritt samtykke betyr at det er gitt uten ytre press og at det ikke fører til noen fordeler eller ulemper. Forskerens eget nærvær kan forårsake et slikt ytre press (NESH, 2016). Pilotundersøkelsen ble gjennomført av en klasse (1P- og 1T elever samlet). Noen av disse elevene var mine egne elever og da var det naturlig at jeg var til stede. Det gjorde det også enklere for elevene å komme med tilbakemeldinger på testen som jeg tok hensyn til i selve undersøkelsen. I selve undersøkelsen overlot jeg gjennomføringen til klassens matematikklærer. Jeg gjennomførte også undersøkelsen i min egen klasse, men både her og i de andre klassene ble det presisert at deltagelsen var frivillig og at det ikke ga noen negativ konsekvens for å ikke delta. Det ble informert om hva formålet med undersøkelsen var, og at selve deltakelsen ikke var forbundet med noen form for ulemper, da den verken omhandlet personopplysninger eller følsomme temaer. Å tydeliggjøre studiens formål for deltagerne, er en del av kriteriene for informert samtykke (Creswell, 2014).

For at flest mulig respondenter skulle delta og for å forenkle prosessen for matematikklærerne, måtte alle elevene som var til stede, gjennomføre testen. Men de kunne avgjøre selv om de ville levere og de måtte fysisk sette ett kryss for samtykke på testen (vedlegg 2). Elever kan lett føle at de må delta fordi andre gjør det. Men jeg håpet at når jeg gjorde det på denne måten, ville det være enklere for å elever å trekke seg, uten at andre nødvendigvis så det (lever uten kryss, eller la være å levere). På den andre siden kan det være at elever som følte de gjorde det dårlig, velger å ikke levere. Jeg har et håp at prøvens anonymitet gjør at elevene likevel valgte å levere.

3.6 Datainnsamling og videre arbeid med data.

Siden testen skulle gjøres i matematikktimene, ble testen tatt på forskjellige tidspunkt. Alle studiespesialiserende elevene hadde testen i oktober 2020, mens yrkesfagelevene som på denne skolen «ploget» naturfag og matematikk (ploge: de hadde 5 timer naturfag fram til begynnelsen av desember og startet ikke med matematikk før i uke 50, når naturfag var over) gjennomførte ikke testen før uke to i 2021.

Datamaterialet fra testen ble manuelt ført inn i SPSS. Bakgrunnsvariablene og holdningsspørsmålene ble ført inn og jeg startet med en forenklet koding av selve brøktesten. Først med rett = 1 og galt = 2. Etter hvert gikk jeg inn og så på hvilken feiltype som ble gjort på de forskjellige oppgavene. Her prøvde jeg å kategorisere svaralternativene, skille mellom de ulike strategiene elevene benyttet seg av, og kikke etter eventuelle misoppfatninger. Deretter gav jeg poeng per oppgave 2 p for riktig, 1 p for slurvefeil/regnefeil /delvis riktig, 0 p for feil for å kunne regne ut en prosentscore. Jeg har gitt misoppfattelser en score på 1, hvis jeg har tolket det som en misoppfattelse og 0 for ingen misoppfattelse. Deretter har jeg summert dem opp og laget 3 grupper. Lav (0-3 misoppfattelser – som egentlig kan antyde at det er kun er feil, og ikke misoppfattelser). middels (4 – 6 misoppfattelser) og høy (7-10 misoppfattelser).

Jeg samlet holdningsspørsmålene mine inn i de fem kategoriene: *Indre motivasjon, instrumentell motivasjon, oppfattet kontroll, subjektiv norm venner* og *subjektiv norm foreldre.* For å sjekke reliabiliteten til grupperingen av holdningsspørsmålene benyttet jeg Cronbach alfa (α).

Det er ikke entydig hva som er akseptable nivå for relabilitet. Chohen et al. (2001) gir følgende verdier.

Tabell 2:Sammenheng mellom Cronbachs alfa og styrken på intern konsistens

Cronbachs Alfa	**Styrke på intern konsistens.**
Over 0,90	Svært høy pålitelighet
0,80 – 0,90	Høy pålitelighet
0,70 – 0,79	Pålitelig
0,60 – 0,69	Minimalt pålitelig
Under 0,60	Uakseptabel.

Tallene er hentet fra Resarch methods in education (Choen et al., 2011, p. 506)

For å kunne kjøre en Cronbachs alfa måtte jeg passe på å snu tre av mine spørsmål, da de var negativt stilt. Å «snu» betyr at reverserer «poengscoren» til de negative spørsmålene mine. Slik at alle blir satt i positiv retning.

Prosentscoren ble etter hvert omkodet til fem grupper: 0 % – 20 %, 20 % – 40 %, 40 % – 60%, 60 % – 80 % og 80 % – 100%.

For å sammenligne prosentscore og karater, og prosentscore og holdninger benyttet jeg Perasons korrelasjon (jeg kommer tilbake til resultatet av dette i kapittel 4).

Tabell 3: Pearsons korrelasjonskoeffisient og korrelasjonsstyrke.

Pearsons Korrelasjonskoeffisient, r	**Korrelasjonsstyrke**
Over 0,85	Svært høy
0,65 – 0,85	Høy
0,35 – 0,65	Moderat
0,20 – 0,35	Svak
Under 0,20	Ubetydelig

Tallene er hentet fra Research methods in education (Choen et al., 2011, p. 536).

Tabell 3 viser Pearsons korrelasjonskoeffisient og korrelasjonsstyrke

4. Resultater og analyse

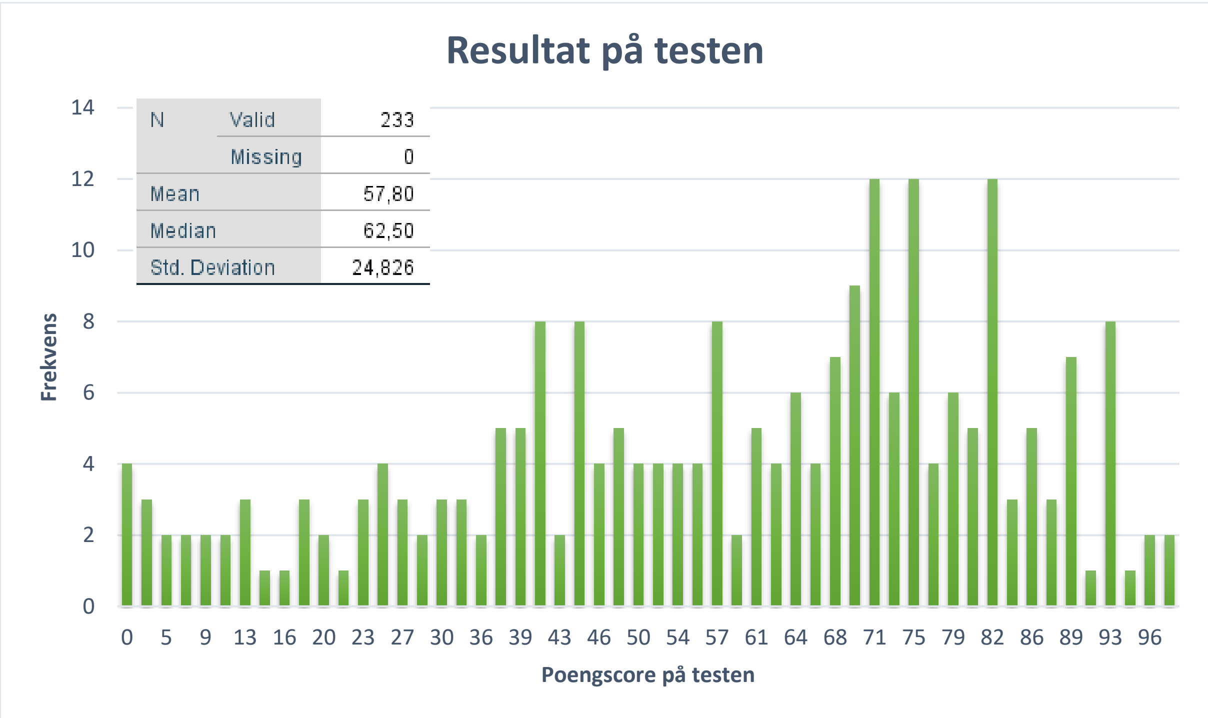
Dette kapittelet vil ta for seg resultatet fra undersøkelsen. Først vil jeg se på gjennomsnittsresultatet på hele testen og sammenligne disse i ulike grupperinger (karakterer, fagvalg, kjønn og holdninger). Deretter analyseres enkeltoppgaver og området som helhet for de ulike temaene: *Brøk som en del av en helhet*, *Brøk som måling* osv.

Det vil også bli sjekket for korrelasjon mellom tema og bakgrunnsvariabler.

Det henvises til spørreskjemaet, vedlegg 3, for fullstendig oppgaveoversikt.

4.1 Testen som helhet.

I dette delkapittelet presenteres resultatene på testen som helhet og i disse ulike grupperingene: Karakter, kjønn, programfag og fagvalg.



Figur 11: Frekvensfordeling av oppnådd poengscore på testen.

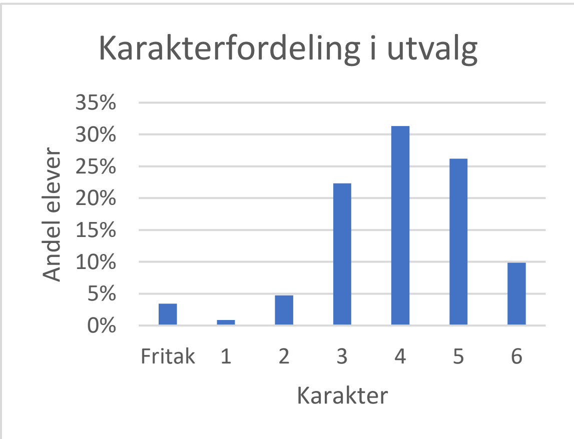
På figur 11 ser vi at vi har stor spredning, men at den er litt tyngre på høyre side. Dette ser vi av at gjennomsnittet er høyere enn medianen. Det betyr altså at i utvalget mitt har jeg en god del som scorer bra på testen.

Tabell 4: Gruppert prosentmaterialet.

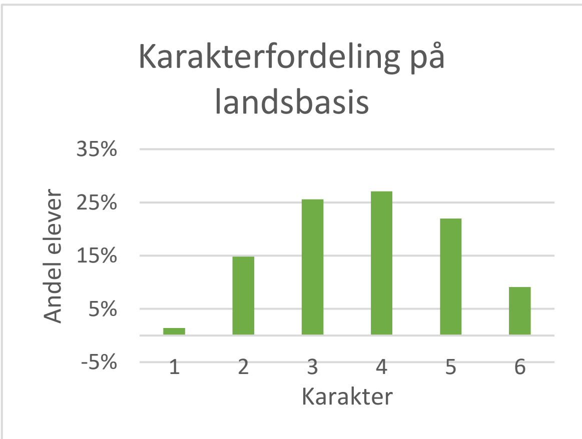
	Frekvens	Prosent	Kumulativ prosent
0-20 %	25	10,7	10,7
20-40 %	31	13,3	24,0
40-50 %	27	11,6	35,6
50-60 %	26	11,2	46,8
60-70 %	35	15,0	61,8
70-80 %	40	17,2	79,0
80-90 %	35	15,0	94,0
90-100 %	14	6,0	100,0
Total	233	100,0	

Tabell 4 viser hvor mange personer og hvor mange prosent av utvalget som har fått mellom 0 % – 20 % riktig på testen, 20 % – 40 % riktig på testen osv. Den kumulative prosenten viser hvor mange prosent som har fått denne scoren eller lavere, for eksempel at i utvalget har ca. 20 % har elevene fått 80 % eller bedre, mens 35,6 % scorer 50 % eller under på testen.

Videre ser vi på hvordan karakterfordelingen i utvalget legger seg opp mot karakterfordelingen på landsbasis. I utvalget ligger gjennomsnittskarakteren i matematikk etter 10. klasse på 3,97, mens på landsbasis (Utdanningsdirektoratet, 2021) ligger gjennomsnittskarakteren i matematikk på 3,8. Utvalget var med andre ord litt høyere gjennomsnittskarakter enn på landsbasis. Figur 12 viser karakterfordelingen på elever som deltok i undersøkelsen sammenlignet med karakterfordelingen på landsbasis (figur 13).



Figur 12: Karakterfordeling i utvalget



Figur 13: Karakterfordeling på landsbasis

Her ser vi at i utvalget er det flere elever enn på landsbasis som har karakter 4 og 5, mens det er flere på landsbasis som har karakter 2 enn i utvalget. Jeg fant ikke hvor mange elever som har fritak fra standpunktkarakter på landsbasis, men jeg har 8 elever i utvalget som har fritak.

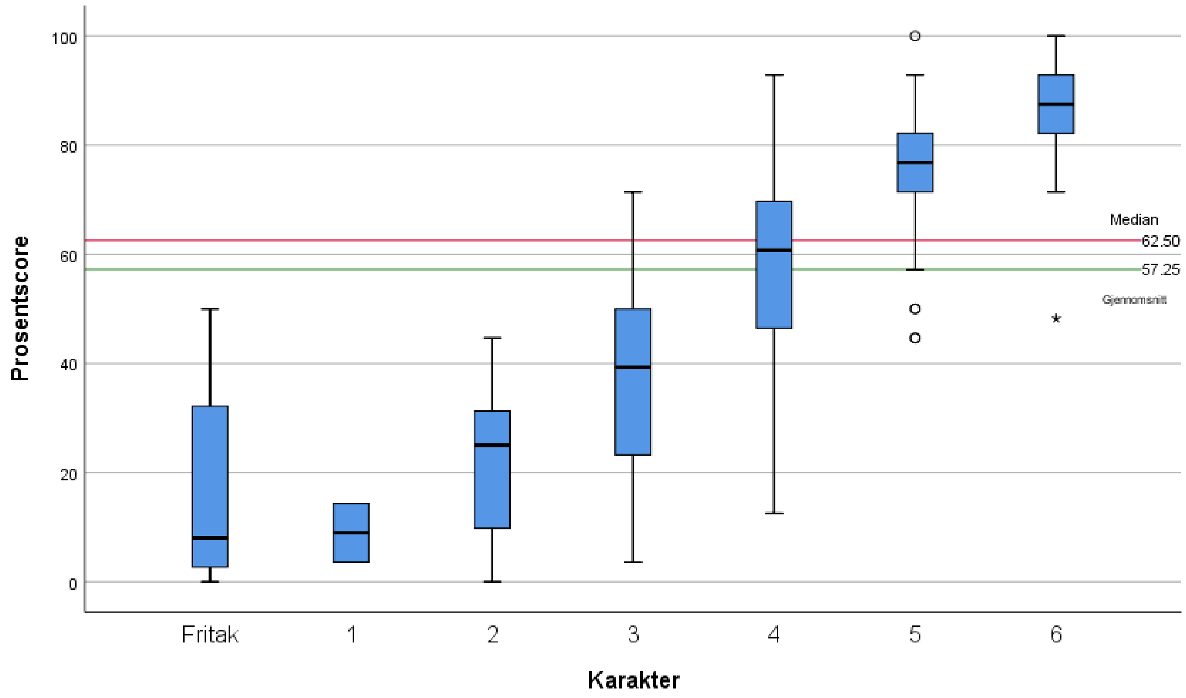
4.1.1 Karakterer og testresultat.

Tabell 5: Oversikt over karakterer og gjennomsnittscore i prosent på testen

Karakter	Gjennomsnittscore i prosent	N	Standardavvik
Fritak	17,0	8	18,8
1	8,9	2	7,6
2	20,6	11	14,5
3	38,4	52	19,4
4	58,3	73	16,8
5	75,6	61	11,6
6	85,4	23	10,9
Total	57,4	230*	25,01

3 elever har ikke ført på karakter.

Fra tabell 5 ser vi at det er en tydelig progresjon i score som samsvarer med progresjon i karakterene. Dette tyder på at testen min samsvarer med karakterene utvalget har fått i standpunkt. Jo høyere karakteren er, desto lavere blir standardavviket, med unntak av karakter 3. Det kan være verdt å merke seg at jeg kun har to elever som har karakter en i standpunkt fra ungdomsskolen. Siden jeg har kun to elever her, ser jeg bort fra dem når jeg tolker resultatet i denne tabellen. Jeg får en korrelasjonsstyrke, r = 0,765 ** når jeg kjører en Pearson korrelasjon på karakter og prosentscore, noe som er signifikant på 0,01. Det vi si (ifølge tabell 3, se 3.6) en høy korrelasjonsstyrke mellom resultat på testen og standpunktkarakter fra ungdomskolen (Choen et al., 2011).



Figur 14: Blokkspott diagram over karakter og prosentscore

For å visualisere spredningen i materialet laget jeg et boksplott over resultatet (figur 14). Boksplottet viser medianen (den svarte linja i hver av de blå boksene) for hver av karaktergruppene. Bunnen og toppen av den blå boksen viser første og tredje kvartil. Differansen mellom disse gir kvartilbredden, som viser spredningen i den halvparten av observasjonene som befinner seg i midten. Figur 14 viser at kvartilbredden er stor for karakteren 2 og karakteren 3, og for de som hadde fritak, noe som tilsier stor spredning. Kvartilbredden er synkende jo høyere karakteren er - spredningen blir mindre ved høyere karakterer. «Halene» på hver boks viser i utgangspunktet laveste og høyeste verdi og differansen mellom disse gir oss variasjonsbredden. Vi ser noen «uteliggere» for karakteren 5. Dette betyr at nedre strek her ikke egentlig representerer minimum, men minimum av de «ikke uvanlige» observasjonene i gruppa. På karakteren 6, er det en * noe som tyder på at dette er et meget uvanlig resultat (kan tyde på feilføring, men dette er sjekket og dette resultatet burde vært en sirkel).

4.1.2 Prosentscore og programfag

I tabell 6 ser vi poenggrensene ved inntaket i 2020 på denne skolen for de forskjellige programfagene.

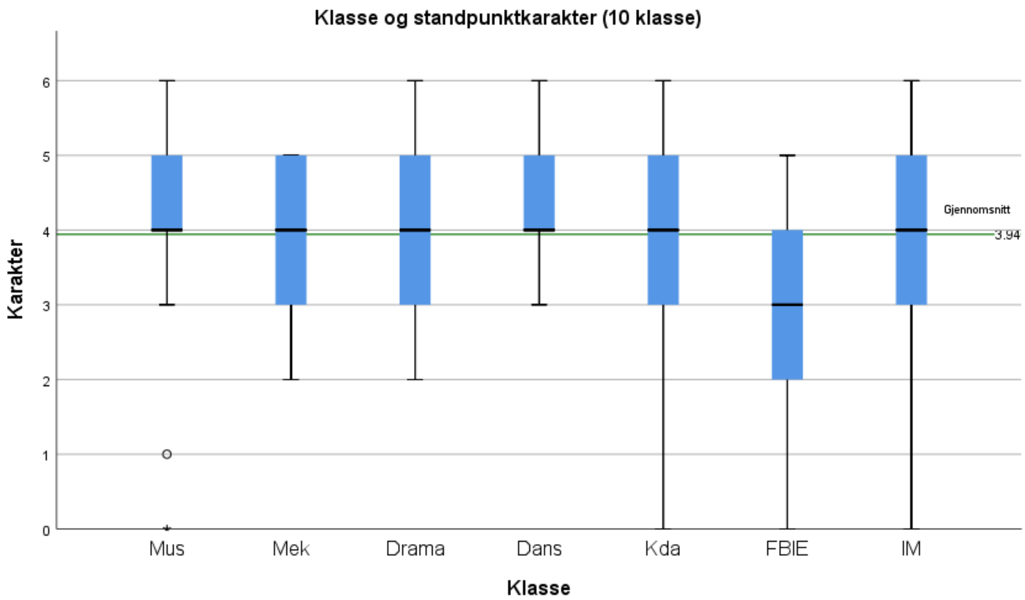
Tabell 6: Poenggrense ved inntak 2020 ved skolen der undersøkelsen ble gjennomført

Progamfag	Forkortelse	Poenggrense
Musikk	Mus	44,3
Dans	Dans	40,3
Drama	Drama	Ingen venteliste
Medier og kommunikasjon	MEK	40
Kunst, design & arkitektur	KDA	38,3
IT og Medieproduksjon	IM	38
Frisør, Bloms, Interiør og eksponeringsdesign	FBIE	30

Kilde: https://www.vilbli.no/nb/nb/rogaland/poenggrense-ved-inntak-til-videregaende-skoler-2020-2021/a/030826

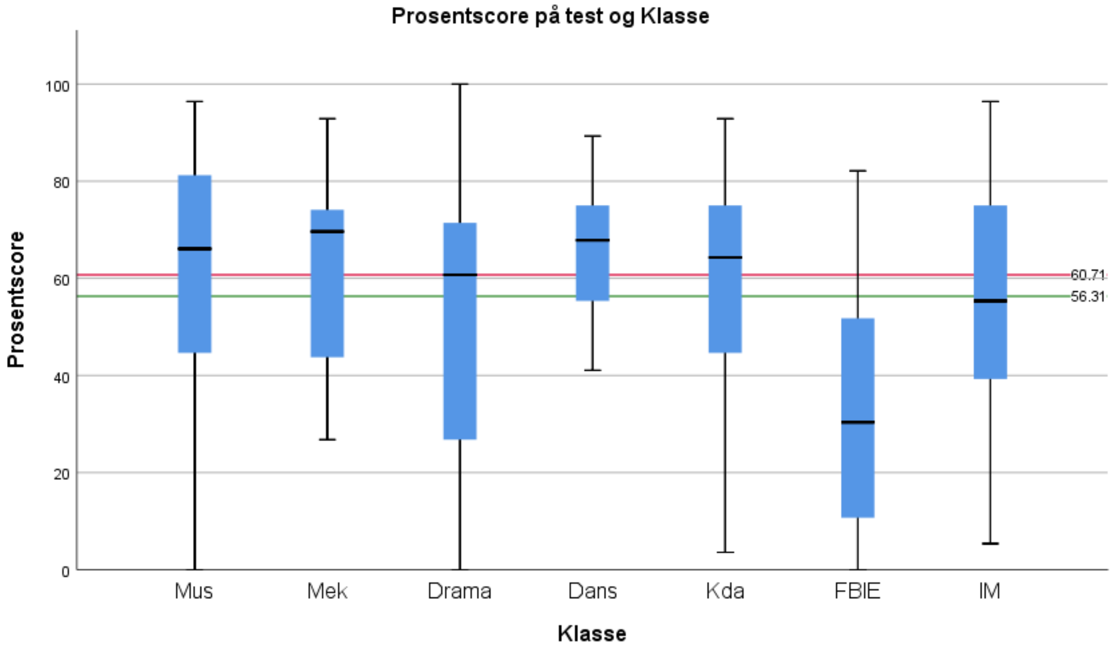
Her ser vi at alle som ønsket det, kom inn på drama, og poenggrensen på FBIE var mye lavere enn for de andre linjene. Dette kan ha betydning for hvordan elevene gjør det på testen.

Figur 15 viser ett boksplottdiagram over karakter og programfag, der vi ser at IM og KDA har en spredning fra 1 – 6 men at flesteparten ligger mellom 3 og 5, mens FBIE har spedning mellom 1 til 5, der flesteparten ligger mellom 2 og 4. Selv om musikk hadde ett høyere snitt for å komme inn, ser vi at spredningen på standpunktkarakterene mellom musikk og dans er veldig like.



Figur 15: Diagrammet viser spredningen av karakter og programfag (0 = fritak) Median her var karakteren 4).

Figur 16 viser den generelle spredningen mellom programfag og prosentscore, mens tabell 8 viser gjennomsnittskarakteren og gjennomsnittsprosentscore per programfag.



Figur 16: Diagrammet viser spredningen på prosentscore og programfagene. Det var som sagt 15 elever som ikke skrev hvilket programfag de gikk, og derfor er utvalget på 218 elever i dette diagrammet.

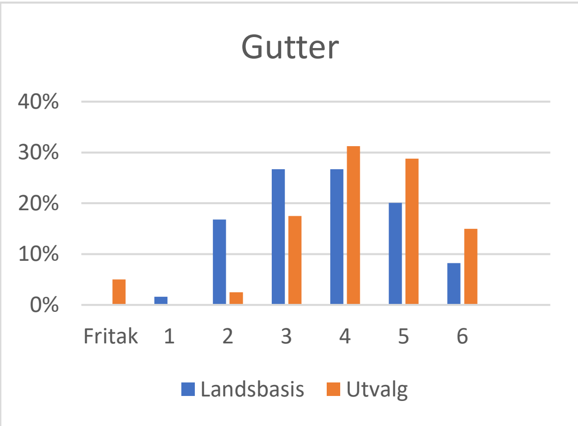
På figur 16 ser vi at hele utvalget ligger jevnt, unntatt FBIE som ligger under på både gjennomsnittet og medianen i denne testen – de gjorde det litt dårligere enn standpunktkarakteren. De fleste på FBIE lå under gjennomsnitt og median på denne testen. De gjorde det litt dårligere enn standpunktkarakteren. Vi ser også at dans har svært liten spredning og at medianen (svarte streken i midten av boksen) i denne klassen ligger høyere enn både medianen og gjennomsnittet på testen. Vi kan også se at den generelle spredningen er større for musikk, drama og IM enn ved karakter og programfag (figur 15).

Figur 16 ga oss et visuelt bilde av spredningen mens tabell 7 gir oss litt mer håndterlige tall og se på. Det mest oppsiktsvekkende resultatet her er at MEK, som har lavere gjennomsnittskarakter enn både IM og KDA, allikevel har en høyere gjennomsnittscore på testen. Ellers er resultatet i samsvar med standpunktkarakteren fra ungdomskolen. En annen ting jeg legger merke til her, er at selv om standardavviket på gjennomsnittskarakteren til drama ikke er så høy, har de det høyeste standardavviket på testen.

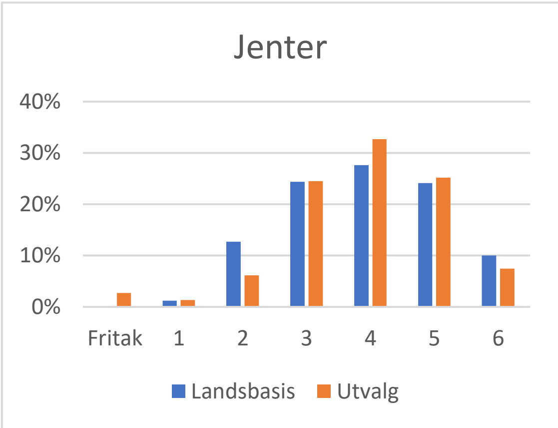
Tabell 7:Gjennomsnitt og standardavvik på karakterer og prosentscore på de forskjellige programfagene.

Progamfag		Gjennomsnitt	Standard avvik	N
Mus	Karakter	4,24	1,159	51
	Prosentscore	62,54	24,313	51
Mek	Karakter	3,88	1,025	16
	Prosentscore	61,05	20,047	16
Drama	Karakter	3,82	1,140	22
	Prosentscore	51,06	27,995	22
Dans	Karakter	4,40	0,957	25
	Prosentscore	65,86	14,279	25
Kda	Karakter	4,08	1,190	53
	Prosentscore	57,95	22,735	53
FBIE	Karakter	2,63	1,583	25
	Prosentscore	33,71	25,198	25
IM	Karakter	4,04	1,429	26
	Prosentscore	55,95	25,918	26

4.1.3 Landsbasis vs. kjønn



Figur 17:Sammenligning av karakterer på landsbasis og utvalg for gutter.

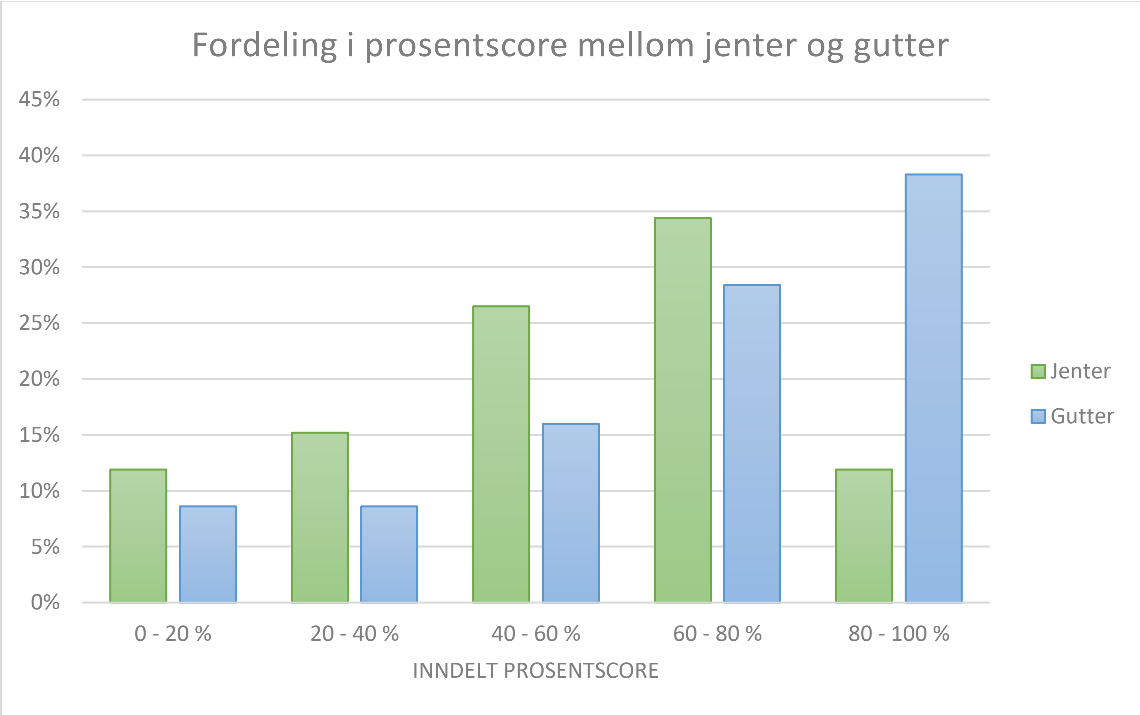


Figur 18: Sammenligning av karakterer på landsbasis og utvalg for jenter.

I figur 17 og 18 har jeg sammenlignet karakter på landsbasis (Utdanningsdirektoratet, 2021) og karakterer av utvalget opp mot kjønn. I utvalget har jeg 80 gutter og 149 jenter (det var to personer som ikke har ført opp kjønn, og 2 jenter og 1 gutt som ikke har oppgitt karakter).

Her ser vi at karakterene på gutter i utvalget er høyere enn på landsbasis. Gjennomsnittskarakteren for guttene er på landsbasis 3,7 mens i utvalget er den på 4,2.

Karakterene for jenter i utvalget sett mot landsbasis er ganske likt, begge har ett gjennomsnitt på 3,9.



Figur 19: Prosent av inndelt prosentscore for jenter og gutter.

Figur 19 viser at andel gutter som scorer mellom 80 % – 100 % er markant større enn andel jenter som har denne scoren. Dette kan ha noe med at gjennomsnittskarakteren var noe høyere for gutter enn jenter. Det er allikevel et interessant funn, da gjennomsnittskarakteren ikke var så mye høyere for gutter enn jenter. En annen funn som er interessant, er at guttene dominerer såpass mye blant de som scorer best, mens andel jenter er størst i alle de andre intervallene.

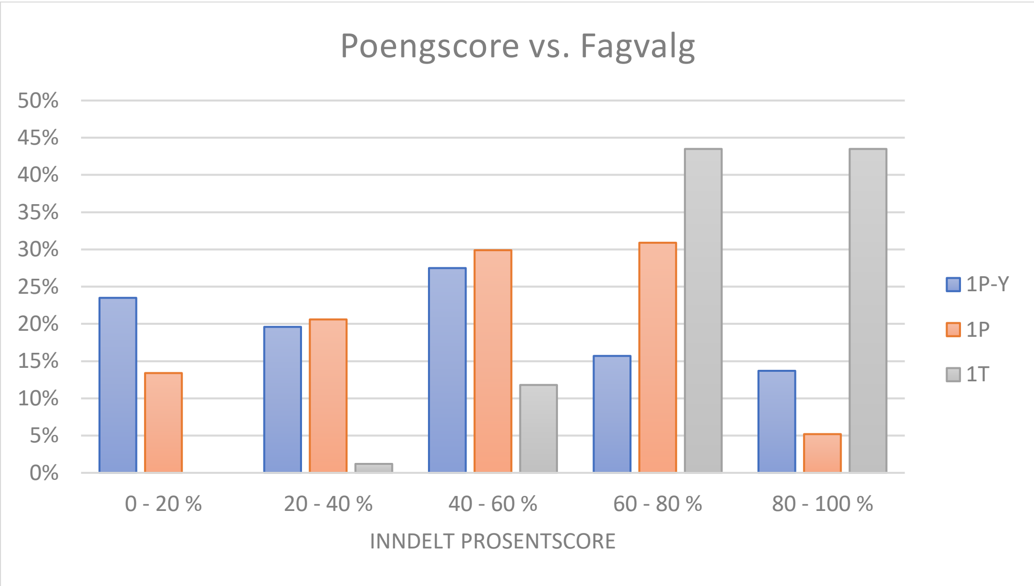
Tabell 8: Statistikk over forskjellen på prosentscoren for jenter og gutter.

	N	**Gjennomsnitt**	**Median**	**St.avvik**	**Variasjonsbredde**
Jenter	151	54,20	57,14	24,043	100
Gutter	81	63,87	69,64	25,713	96

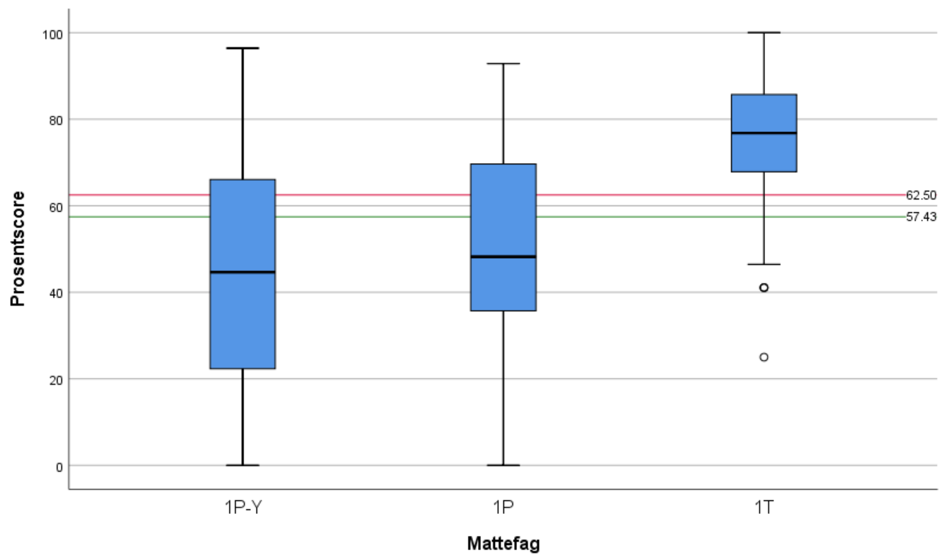
Tabell 8 viser at guttene hadde ett høyere gjennomsnitt og median enn jentene. Men forskjellen på standardavviket mellom gutter og jenter er ganske liten.

4.1.4 Fagvalg og testresultat

Figur 20 viser resultat på testen opp mot ulike fagvalg. Her ser vi at andelen som scorer høyest, har valgt 1T, mens de som scorer lavest har valgt yrkesfag matematikk (1P-Y) og 1P. Det er allikevel en større andel av 1P-Y- elever som scorer mellom 80 % – 100 % på testen enn 1P. En årsak til dette kan være at elever som går yrkesfag, ikke har noen fagvalg i matematikk på denne skolen. De må ha 1P-Y, mens de som har høye karakterer i matematikk fra ungdomsskolen velger, etter min erfaring, som regel 1T framfor 1P på studiespesialiserende.



Figur 20: Inndelt prosentscore opp mot fagvalg.



Figur 21: Spredningen på resultatet av test vs. fagvalg

Spredningen på resultatet av brøktesten og fagvalget (figur 21) viser at det er størst spredning i 1P-Y. Noe som er ganske naturlig da denne skolen ikke tilbyr 1P-T. Alle elever som går på yrkesfag, må ha 1P-Y. Ser vi på de som går studieforberedende, har mange av de faglig høyt presterende elevene valgt i 1T, i stedet for 1P. At spredningen blant 1T – elevene er mye lavere enn de andre fagene, er også naturlig. Har elevene fra ungdomskolen en lav karakter i standpunkt, blir de ofte oppmuntret til å ikke velge 1T. Dette fordi man i 1T kjører ett raskere tempo, og det ligger til grunn at elevene har relativt god oversikt over de matematiske emnene som de har jobbet med i grunnskolen.

4.1.5 Holdninger

Jeg har fem kategorier av påstandene som gikk på holdning. *Indre motivasjon, instrumentell motivasjon, oppfattet kontroll, subjektiv norm venner* og *subjektiv norm foreldre* (se kap. 3.6). For å sjekke reliabiliteten til grupperingene, benyttet jeg Cronbach alfa (α). Cronbach α er et mål på indre konsistens på flere spørsmål som omhandler samme begrep, og siden jeg delte påstandene mine inn i fem grupper, med flere spørsmål til hver gruppe, bør disse korrelere med hverandre.

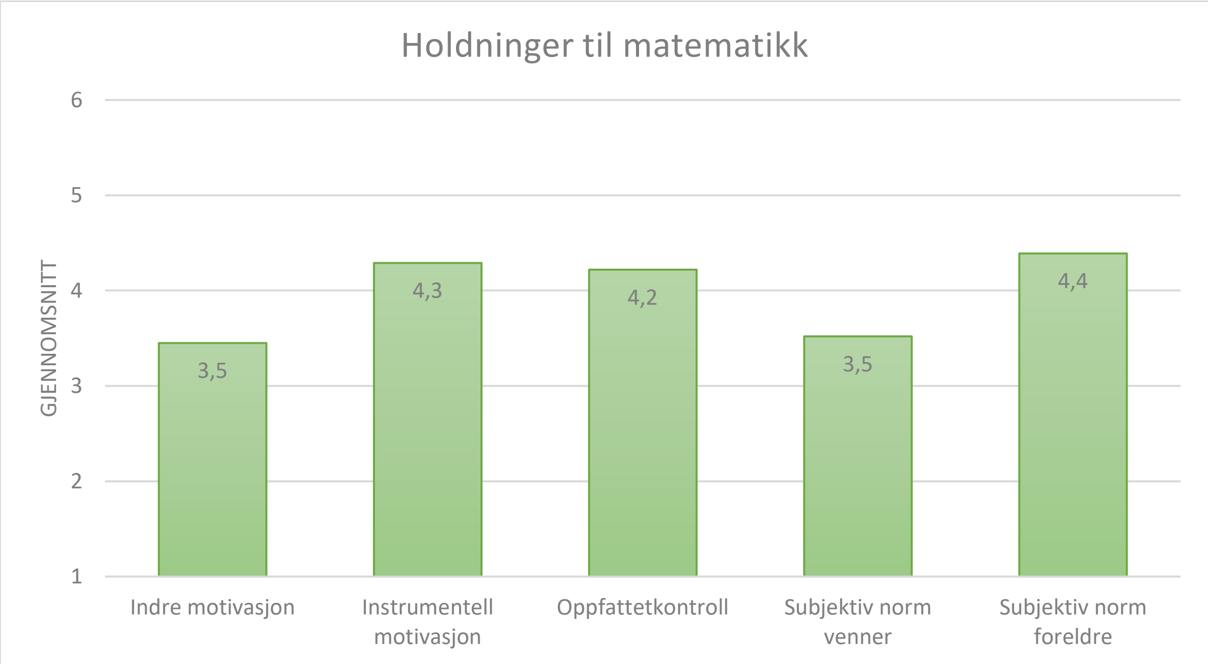
Tabell 9:Oversikt over intern konsistens på konstruktene

	Cronbachs α
Indre motivasjon	0,884
Instrumentell motivasjon	0,727
Oppfattet kontroll	0,640 (abc – 0,766)
Subjektiv norm venner	0,714
Subjektiv norm foreldre	0,774

Ut fra tabell 2 (se kap. 3.6) og tabell 9 ser vi at $\alpha = 0{,}884$ for indre motivasjonspåstandene tilsier høy grad av intern konsistens. $\alpha = 0{,}727$ for instrumentell motivasjon tilsvarer høy intern konsistens (Choen et al., 2011). På oppfattet kontroll ble $\alpha = 0{,}640$, som er minimalt pålitelig. Når jeg tok bort spørsmålene som gikk på plikter hjemme og andre lærere, fikk jeg en $\alpha = 0{,}766$. Jeg mener allikevel at påstandene «Plikter som jeg har hjemme, eller andre problemer, hindrer meg i å bruke mye tid på matematikk» og «Hvis jeg hadde hatt andre lærer, ville jeg jobbet hardere i matematikk» inngår i oppfattet kontroll. Dette er faktorer som vanskeliggjør utførelsen og dermed påvirker den oppfattede atferdskontrollen (se 2.3.5) jeg har derfor valgt å beholde disse påstandene i konstruktet «oppfattet kontroll».

Subjektiv norm har jeg derimot valgt å dele opp i subjektiv norm venner og subjektiv norm familie, da det førte til at jeg fikk en bedre intern konsistens. Subjektiv norm i sin helhet fikk jeg en $\alpha = 0.651$ som tilsvarer mindre pålitelig. Men - hvis jeg delte dem opp, fikk subjektiv norm venner en α=0,713 og subjektiv norm foreldre en α=0,774 noe som sees på som nokså pålitelig på intern konsistens. Ved å dele opp subjektiv norm i to konstrukt, fikk jeg fram to aspekt som begge var meningsfulle istedenfor ett aspekt som var mindre klart.

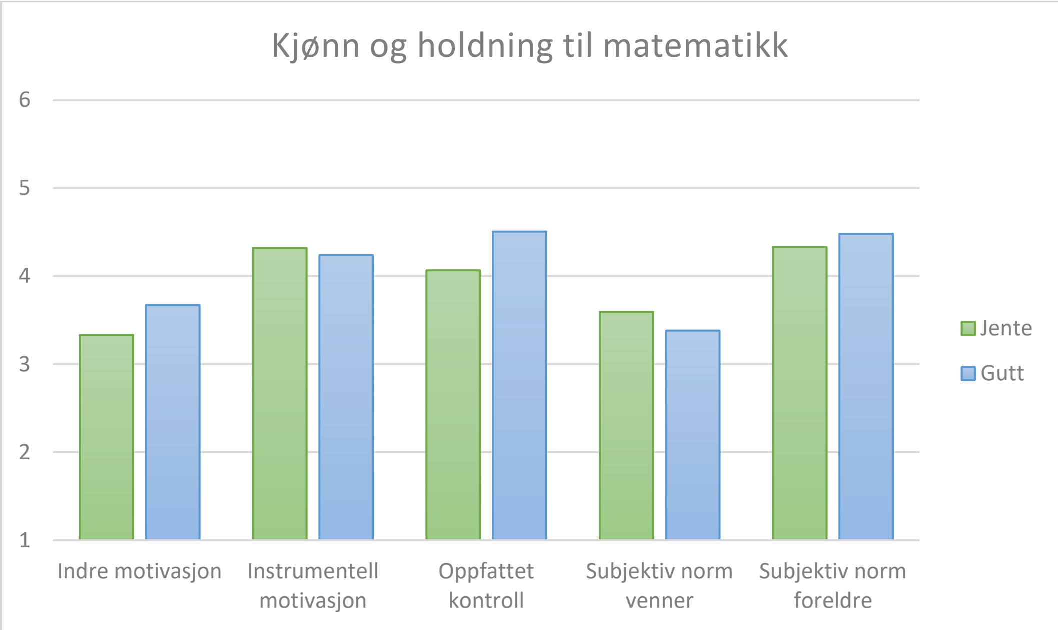
Figur 22 viser en samlet oversikt i hvordan holdninger i matematikk, basert på påstandene i undersøkelsen er for utvalget.



Figur 22:Oversikt over gjennomsnittsholdninger til matematikk.

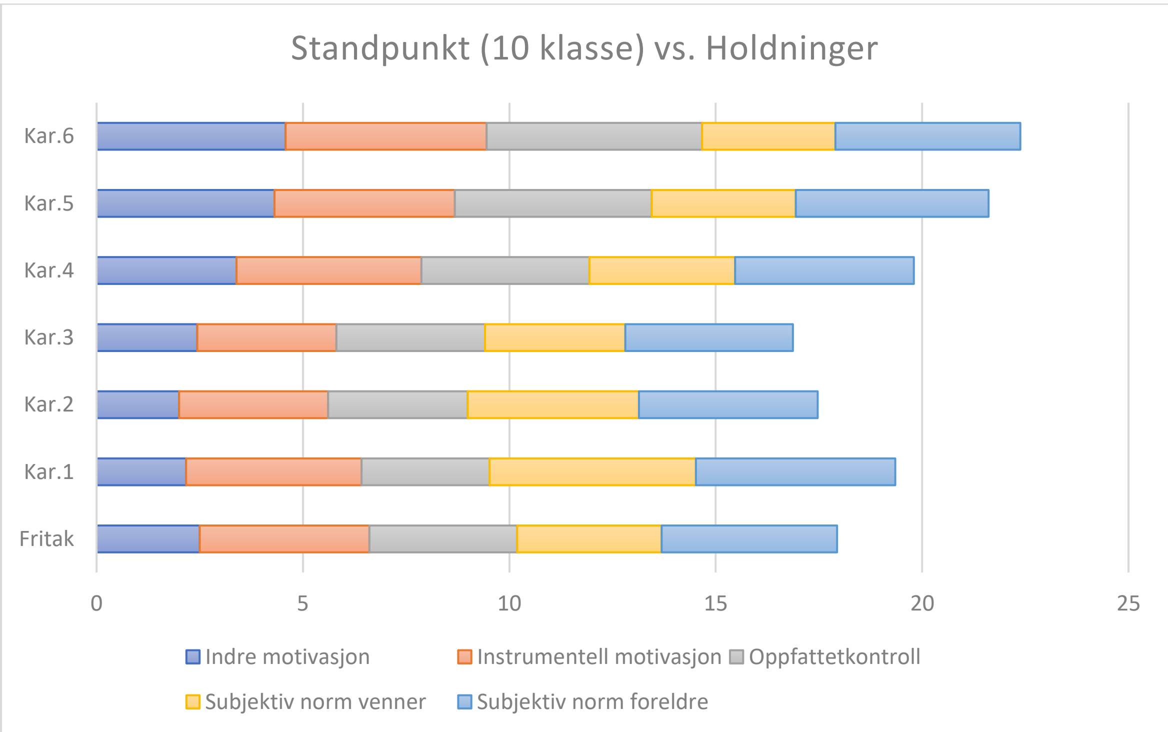
Det tyder på at elevene som deltok i undersøkelsen, er forholdsvis positive til matematikk, alle konstruktene er 3,5 eller over. Her ser vi at den subjektive norm, når det kommer til foreldre, får en ganske høy score i sammenligning med venner. (Dette tyder på at det var lurt å dele de to gruppene opp i to). Det viser også at elevene mener at foreldrene er positive, eller synes matematikk er viktig for elevene. Indre motivasjon er betydelig lavere enn instrumentell motivasjon. Elevene ser nytten av matematikken, men liker nødvendigvis ikke matematikk like mye.

Videre ser jeg på konstruktene på holdninger opp mot kjønn, karakter, poengscore, fagvalg og programfag.



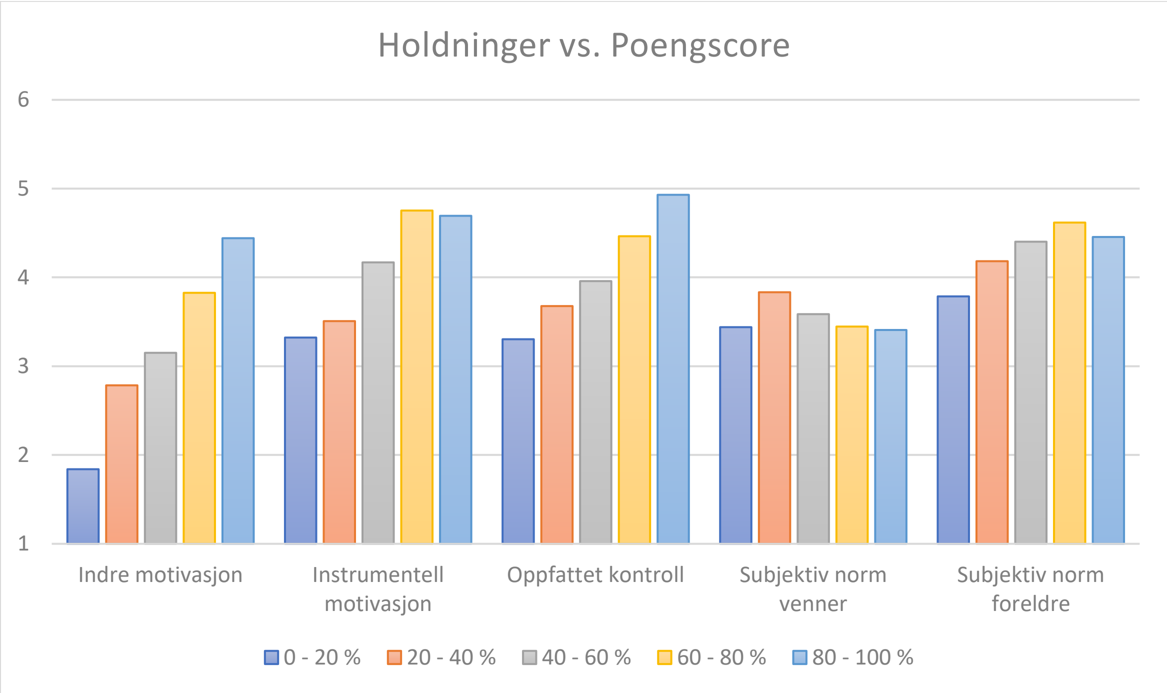
Figur 23: Oversikt over sammenhengen mellom kjønn og holdninger til matematikk.

Figur 23 viser at det ikke er så stor forskjell på elevers holdning til matematikk, sortert etter kjønn. Gutter oppfatter at de har litt mer oppfattet kontroll og litt mer indre motivasjon enn jentene. Og jentene har ett litt høyere gjennomsnitt enn guttene, når det gjelder subjektiv norm venner.



Figur 24: Oversikt over standpunktkarakterer og holdninger til matematikk

Av figur 24 ser vi at elever som har høyere karakter, har mer positiv holdning når det gjelder indre motivasjon og oppfattet kontroll. Subjekt norm for venner er noe høyere for elever med karakter 1 og 2 (men antall med elever som har karakter 1 er veldig lav, så jeg kan ikke si om dette er representativt for elever med karakter 1). Elever som ligger på karakter 3 har generelt litt lavere positiv holdning til matematikkfaget.



Figur 25:Oversikt over sammenheng mellom inndelt poengscore og holdninger til matematikk

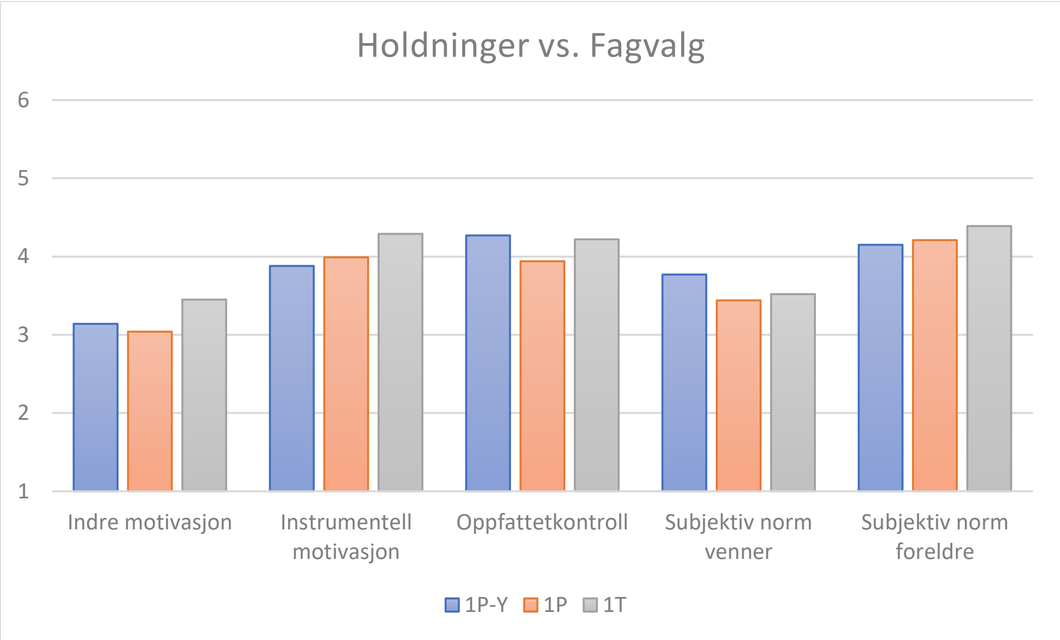
På figur 25 ser vi at det er en viss sammenheng mellom holdninger til matematikk og poengscore. Jo lavere prosentscore, desto mindre positive er holdningene. Unntaket ser ut til å være subjektiv norm venner, som er ganske likt om du scorer lavt eller høyt på testen.

Tabell 10: Korrelasjon mellom prosentscore og holdninger.

		Pearsons korrelasjonskoeffisient ®
Indre motivasjon		**0,584****
	Jeg ser fram til matematikktimene	0,474**
	Jeg arbeider med matematikk fordi jeg liker det	0,544**
	Jeg er interessert i det jeg lærer i matematikk	0,562**
Instrumentell motivasjon		**0,374****
	Å gjøre en innsats i matematikk er vel verdt fordi det vil hjelpe meg i det arbeidet jeg vil gjøre senere	0,325**
	Å lære matematikk er viktig for meg fordi det vil bedre mine yrkesmuligheter	0,429**
	Matematikk er viktig fag for meg fordi jeg trenger det når jeg skal studere videre.	0,321**
	Mye av det jeg lærer i matematikk, vil hjelpe meg til å få jobb	0,229**
Oppfattet kontroll		**0,543****
	Hvis jeg hadde villet, kunne jeg gjort det bra i matematikk	0,502**
	Jeg gjør det dårlig i matematikk uansett om jeg forbereder meg eller ikke. (snudd)	0,571**
	Jeg har alltid ment at matematikk er et av mine beste fag	0,573**
	Plikter som jeg har hjemme, eller andre problemer, hindrer meg i å bruke mye tid på matematikk (snudd)	-0,083
	Hvis jeg hadde hatt andre lærere, ville jeg jobbet hardere i matematikk (snudd)	0,005
Subjektiv norm venner		**-0,062**
	De fleste vennene mine gjør det bra i matematikk	-0,147*
	De fleste vennene mine jobber hardt i matematikk	0,079
Subjektiv norm foreldre		**0,193****
	Foreldrene mine synes det er viktig at jeg jobber med matematikkfaget	0,080
	Foreldrene mine mener at matematikk er viktig for mine studie – og yrkesmuligheter	0,182**
	Foreldrene mine liker matematikk	0,336**

**. korrelasjonen er signifikant på 0,05 **. Korrelasjonen er signifikant på 0,01*

I tabell 10 ser vi at Pearsons korrelasjonskoeffisient r mellom holdninger til matematikk og prosentscore, viser det samme. Indre motivasjon, instrumentell motivasjon, oppfattet kontroll har alle en moderat korrelasjon, mens subjektiv norm venner og subjektiv norm foreldre har ubetydelig korrelasjon. Hvis vi ser på enkeltpåstandene fra skjemaet, ser vi at påstanden «Foreldrene mine liker matematikk» er det eneste i kategorien subjektiv norm som har en korrelasjonskoeffisient som tyder på at det er en svak (opp mot moderat) korrelasjon til prosentscore.



Figur 26: Oversikt over sammenhengen mellom fagvalg og holdninger til matematikk

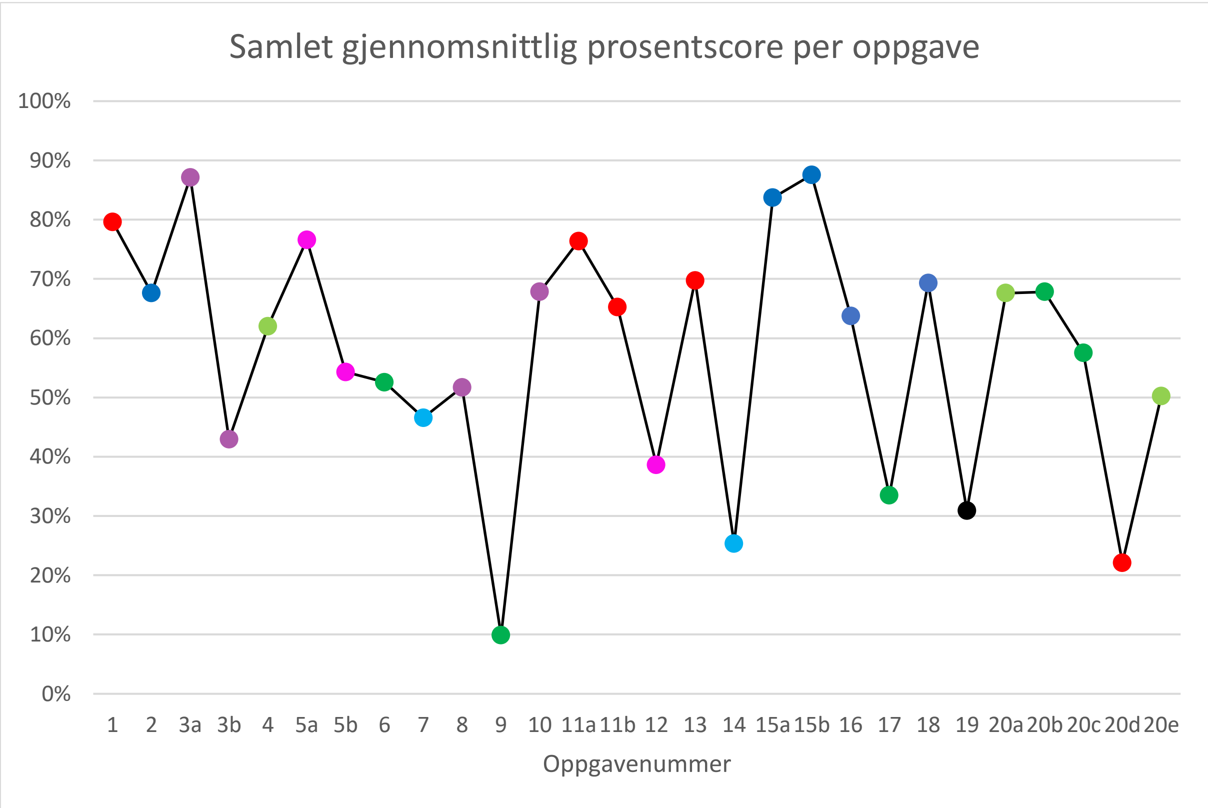
Her ser vi at 1T elever har en litt mer positiv holdning til matematikkfaget, enn 1P-Y og 1P. Eneste konstruktet som er motsatt er subjektiv norm venner, der vi ser at 1P-Y er den som scorer høyest. Det ser ut til at 1P har en litt mindre oppfattetkontroll, enn de to andre gruppene. Mine erfaringer om at høyt presterende elever ofte velger 1T i stedet for 1P kan være en årsak til dette. 1P-Y har ikke dette valget, da skolen denne undersøkelsen ble gjort på, ikke har 1P-T som et valg for de som går yrkesfag. Oppfattet kontroll kan ha noe å si på hvordan elevene gjør det på testen. Som vi så på figur 26.

Tabell 11: Oversikt over Programfag vs. Holdninger til matematikk

	Mus	Mek	Drama	Dans	KDA	FBIE	IM	Gjennomsnitt
Indre motivasjon	3,52	3,77	3,23	3,57	3,52	2,75	3,51	3,41
Instrumentell motivasjon	4,03	4,13	4,01	4,52	4,87	3,65	4,10	4,19
Oppfattetkontroll	4,20	4,49	4,26	4,22	4,05	4,00	4,53	4,25
Subjektiv norm venner	3,47	3,53	3,11	3,60	3,51	3,83	3,70	3,54
Subjektiv norm foreldre	4,22	4,38	4,29	4,91	4,50	3,67	4,62	4,37
Sum	3,89	4,06	3,78	4,16	4,09	3,58	4,09	3,95

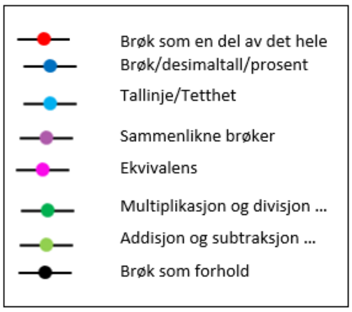
Tabell 11 viser at linjen dans har høyest holdning til matematikk, mens FBIE har lavest. FBIE har lavest gjennomsnittsholdning på alt utenom subjektiv norm venner, her har de høyest score. Den indre motivasjonen gir MEK høyest score. Dans scorer høyest på instrumentell motivasjon og subjektiv norm foreldre. IM har høyest score på oppfattet kontroll.

4.2 Enkelte oppgaver vs. testresultat



Figur 27: Oversikt over gjennomsnittlig prosentscore per oppgave.

Forklaring til figur 27:

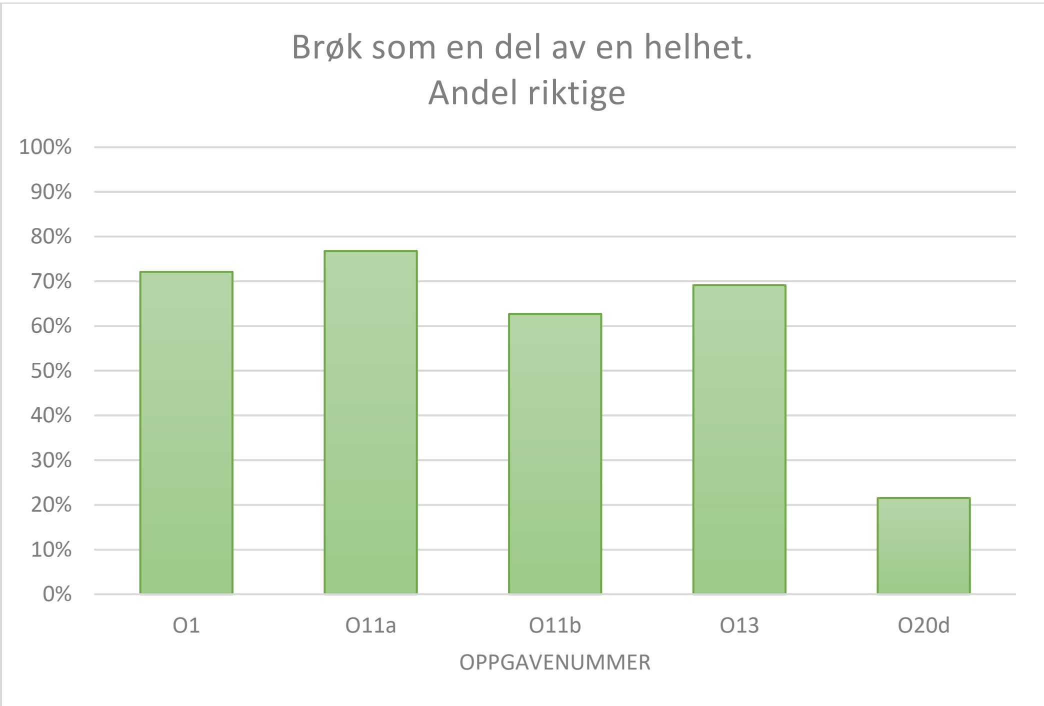


Figur 27 viser gjennomsnittlig prosentscore på hver av oppgavene. Vi har sett at gjennomsnittsscoren på testen i sin helhet var 57,25. Vi ser her at blant annet oppgave 9 trekker gjennomsnittet kraftig ned.

Jeg vil se på enkeltoppgavene knyttet til samme testmål; *brøk som en del av det hele, brøk som måling, brøk som forhold og operasjoner på brøk.*

4.2.1 Brøk som en del av en helhet

Noen av oppgavene i testen tar for seg brøk som en del av en kontinuerlig helhet. Disse oppgavene tester forståelse. Elevene må kunne se sammenhengen mellom en illustrasjon for brøk og et skriftlig symbol.



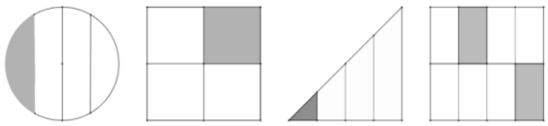
Figur 28: Diagram over frekvens per oppgaver som går på Brøk som en del av en helhet

Figur 28 viser en oversikt over oppgaver og hvor mange som svarer riktig på oppgavene som går på brøk som en del av en helhet.

Oppgave 1

Sett ring rundt figurene som har $\frac{1}{4}$ av arealet fargelagt.

a) b) c) d)



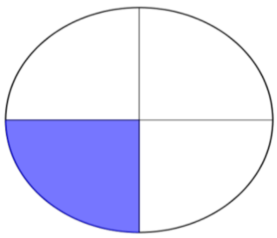
Rett svar: b og d	168
a	1
b	34
a og b	5
a, b og c	14
a, b og d	5
a, b, c og d	4
Ikke besvart	2

Figur 29: Oppgave 1

Oppgave 1 (figur 29) er hentet fra rettledning til «Kartlegging i regning for VG1» (Utdanningsdirektoratet, 2012), og tester blant annet om en elev har forstått at brøk betyr deling i like store deler og om eleven forstår at ulike brøker kan ha samme verdi. 166 av elevene svarte riktig på denne oppgaven. 32 elever svarer at dette gjelder kun figur b. Figur b er nok den figuren de kjenner igjen og er den som er mest brukt når elevene lærer om brøk. Jeg har kodet det slik at elever som svarer alternativ b sammen med et eller flere av de andre alternativene (utenom d), kan ha en misoppfattelse om at du ikke trenger å ha like store deler.

Oppgave 11

a) Fargelegg $\frac{1}{6}$ av det hvite området i sirkelen.



b) Hvor stor del av hele sirkelen har **du nå** fargelagt?

Svar: ______________________

A, Rett fargelegging av det hvite område	**179**
Fargelegger $\frac{2}{6}$	5
Fargelegger $\frac{2}{9}$	11
Deler ikke fra radius, mens vannrett	3
Andre feil	4
Ikke besvart	31
B, Rett svar på den fargelagte delen: $\frac{1}{8}$	**146**
Følgefeil av 11a	10
$\frac{1}{6}$	16
$\frac{5}{12}$ eller $\frac{3}{12}$	12
Annet	8
Ikke besvart	41

Figur 30:Oppgave 11

Oppgave 11 er hentet fra Hart et al. (1984). Denne oppgaven krever i tillegg til å kunne oversette fra brøk til illustrasjon, en fleksibilitet i hva som blir oppfattet som en enhet. Eleven må kunne vite at han først jobber med $\frac{3}{4}$ av en sirkel som en helhet, og deretter hele sirkelen.

Det var mange elever som scoret riktig på a - oppgaven, men når de skulle «bytte» enhet ble det straks vanskeligere.

Jeg har kodet det slik at elever som fargelegger $\frac{2}{6}$ og $\frac{2}{9}$ har en mulig misoppfattelse om at brøkdelene ikke trenger å være like i størrelsen. De elevene som har delt $\frac{1}{4}$ i to, men ikke har kunnskap om hvordan man deler en sirkelsektor i to, har jeg ikke tolket som om de gjør en misoppfatning.

I oppgave 11b har jeg kodet det slik at alle som har svart $\frac{1}{6}$ som en mulig misoppfattelse. Dette tyder på at elevene ikke klarer å bytte helhet fra $\frac{3}{4}$ sirkel til en hel sirkel. Jeg har derimot ikke tatt med de som har svart $\frac{5}{12}$ eller $\frac{3}{12}$. Det kan ha med feil fra oppgave a) å gjøre.

Oppgave 20d

Regn ut og forklar eller vis ved regning hvordan du har tenkt:

d) $\frac{1}{6}$ av $\frac{3}{4}$

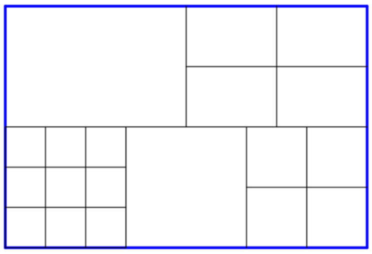
D, Rett svar: $\frac{1}{8}$	**50**
Gjør om til prosent og er på vei, men fullfører ikke	1
Dividerer	15
Prøver mange metoder, noe riktig, men fullfører ikke	4
$\frac{7}{12} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6}$	5
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$	1
Finner felles nevner og adderer	2
Oppgir feil svar, uten utregning:	11
Ikke besvart	144

Figur 31:Oppgave 20d

I oppgave 20d er den samme oppgaven som oppgave 11a, men da uten kontekst. Her er svarprosenten betraktelig lavere. En av årsaken til dette kan være at denne oppgaven kom i slutten av oppgavesettet. Men enkelte elever skriver at de ikke forstår hva de skal gjøre. Dette kan tyde på at oppgaven ble vanskeligere uten kontekst. De som svarer feil på denne oppgaven, kan vi se ikke har kontroll på hvilken algoritme som skal brukes og at «av» ikke tolkes som multiplikasjon. Her har jeg kodet at det kan være en mulig misoppfattelse ved at de blander prosedyrer (altså hvis de for eksempel utfører divisjon eller subtraksjon).

Oppgave 13

Fargelegg $\frac{1}{3}$ av det blå rektangelet.



Rett fargelegging av rektangelet	**161**
Feil	38
Ikke besvart	34

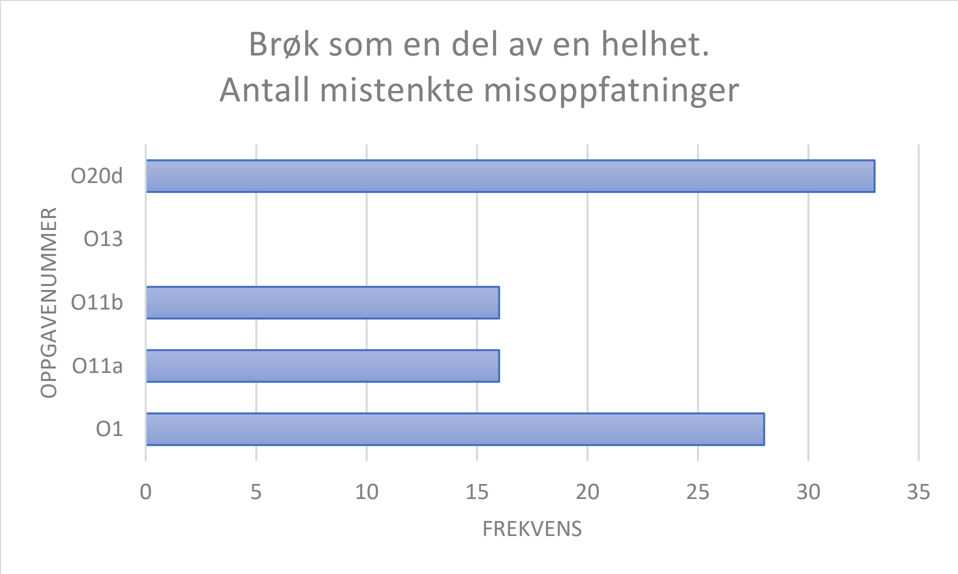
Figur 32:Oppgave 13

Oppgave 13 er hentet fra Lamon (2012). Oppgaven illustrer ulike størrelser. Manglende trygghet på hva en helhet er, kan gjøre denne oppgaven vanskelig. Denne oppgaven er laget slik at det ikke skal være rett fram for elevene å dele hele figuren opp i små like deler, men her gjelder det for elevene å kunne se helheten, før de kan dele den opp. En del elever fargela $\frac{1}{6}$ av figuren, mens noen fargela $\frac{1}{2}$ av figuren. Noen gjorde det veldig vanskelig for seg selv og fargela noen ruter her og der, og mistet oversikten over hvor mye de egentlig fargela. Her var det vanskelig å tolke hva som var misoppfattelser, og hva som ikke var det. Jeg har derfor ikke lagt inn noen misoppfattelser på denne oppgaven.

De tre oppgavene med figur, tester mer eller mindre det samme. Allikevel er variasjonsbredden på gjennomsnittscoren på 20 %. Elevene strever med å identifisere enheten, noe som ifølge Lamon (2012), er grunnleggende forståelse av brøk.

Mellom oppgave 11a) og oppgave 20d) er variasjonsbredden på over 60 %. Selv om svarprosenten på oppgave 20d), var betraktelig dårligere enn oppgave 11a), finner jeg flere mulige misoppfattelser her. Av dem som svarer på oppgave 20d, fant jeg en andel på 37,1 % mulige misoppfattelser, mens i oppgave 11a var andelen av dem som svarer kun 7,9 % som ble kodet til mulige misoppfatninger.

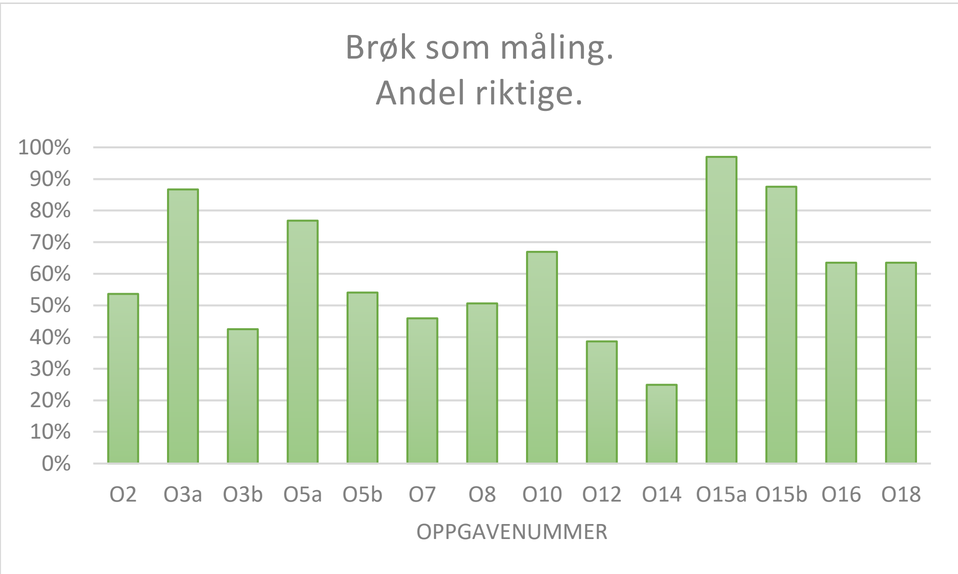
Hvis vi ser på misoppfattelsene samlet, får vi diagrammet som figur 33 viser.



Figur 33: Diagram over mistenkte misoppfatninger til oppgaver som går på Brøk som en del av en helhet.

4.2.2 Brøk som måling

Testen inneholder oppgaver som undersøker om elevene har forståelse for ekvivalente brøker, størrelser på brøker, tettheten til rasjonale tall, brøker på tallinje og sammenhengen mellom brøk, desimaltall og prosent.



Figur 34: Diagram over oppgaver som går på Brøk som måling

Figur 34 viser en oversikt over oppgaver og hvor mange som svarer riktig på oppgavene som går på brøk som måling. Disse oppgavene har jeg delt videre inn i mindre undergrupper.

Ekvivalens

Oppgave 5

$\frac{2}{9} = \frac{\square}{18} = \frac{10}{\Delta}$

a) Hvilket tall skal det stå i $\square$?________________________

b) Hvilket tall skal det stå i Δ ? ________________________

Rett svar på a: 4	**179**
5	5
6	10
8	8
Annet	2
Ikke besvart	29
Rett svar på b:45	**126**
27	12
36	11
Andre feil	35
Ikke besvart	49

Figur 35:Oppgave 5

Denne oppgaven er i utgangspunktet hentet fra Hart et. al (1984), men det er gjort litt endringer på tallene. Oppgaven tester forståelse for ekvivalente brøker. Det er flere elever som klarer oppgave a, og har benyttet seg av standardprosedyre med å multiplisere teller og nevner med to. 5b er noe vanskeligere, da må elevene overse $\frac{\square}{18}$ og se på $\frac{2}{9}$ og $\frac{10}{\Delta}$. Litt under $\frac{1}{3}$ av elevene som har besvart denne oppgaven, får problemer her. De fleste ser på $\frac{\square}{18}$ og tenker at det må være noe med faktorene 18, 9 eller 3. En annen årsak til at det kan stoppe opp for elevene, kan være likhetstegnet; at det er bare relevant mellom uttrykket som står på hver side av tegnet (Hart et al., 1984)

Her har jeg kodet de som svarer 27 og 36 som en misoppfatning (fordi de kan se ut som de ikke får til å veksle mellom prosedyrene og veksle mellom ulike representasjoner – altså ikke så høy *prosedyrekunnskap* (se kap. 2.2.2).

Det kan også se ut som noen elever ser på de tre brøkene som ett regnestykke, der de to første brøkene skal bli den tredje brøken. De ser da på teller og nevner som to forskjellige tall og prøver å få 2 til å bli 10, enten ved å addere 8, eller å gange med 5.

Oppgave 12

Fullfør, og forklar hva du gjør.

$\frac{9}{12} = \frac{12}{\square}$

Rett svar: 16	**90**
9	15
15 (lik differanse mellom teller og nevner)	25
Andre feil	12
Ikke besvart	91

Figur 36:Oppgave 12

Denne oppgaven er hentet fra Kerslake (1986) og tester også forståelsen for ekvivalente brøker. Det er ca. 64 % av elevene som besvarer denne oppgaven som svarer korrekt. Tar vi med alle elevene, er det kun 39 % som har rett. Halvparten av de som svarer feil på denne oppgaven, svarer at nevneren må være lik 15, fordi differansen mellom tellerne er tre, og da må differansen mellom nevneren også være tre. Dette tyder på at eleven ikke ser på brøk som en enhet, men som to uavhengige tall som behandles hver for seg.

Det er også 15 elever som skriver at $\frac{9}{12}=\frac{12}{9}$. Dette kan tyde på at de tyr til metoder de har lært, men som de ikke har forstått. Her kommer det tydelig fram at de har lært mange prosedyrer som de ikke har forstått. Når metoden de har lært ikke fører fram, trekker de fram andre metoder, og prøver seg med en del av divisjonsalgoritmen. «Det var en eller annen plass, vi bare snur brøken – la oss prøve det.»

Å kunne lage ekvivalente brøker trenger ikke å bety at du forstår hva det er (McIntosh, 2007). En del av disse elevene, som ikke får det til her, fikk det til i oppgave 5a.

Her har jeg kodet det som en mulig misoppfatning, hvis de svarer enten 9 eller 15.

Sammenligning av brøker

Å kunne sammenlikne to brøker og vurdere hvilken av de som er størst, kan ifølge Hallet et al. (2010) være en oppgave som tester *begrepsforståelse.* Men man må være oppmerksom på at for elever som benytter seg av algoritmer, som for eksempel å utvide brøkene slik at de får samme nevner, så kan dette dreie seg om prosedyreforståelse.

Misoppfatninger som kan komme til syne i slike oppgaver kan for eksempel være «en stor nevner gir en stor brøk», «jo større summen av teller og nevner er, dess større er brøken» (McIntosh, 2007), «to brøker er av lik verdi dersom differansen mellom nevner og teller i hver brøk er lik» eller «en liten nevner gir en stor brøk» (Pearn & Stephens, 2004).

Oppgave 3

Sett en ring rundt den største brøken i hvert par.

a) $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{11}$ Begrunn svaret:____________________

b) $\frac{89}{90}$ $\frac{90}{91}$ Begrunn svaret:____________________

Rett svar på a: $\frac{1}{5}$	**202**
$\frac{2}{11}$	18
Ikke besvart	13
Rett svar på b: $\frac{90}{91}$	**99**
Like store	19
$\frac{89}{90}$	89
Ikke besvart	26

Figur 37: Oppgave 3

I oppgave 3 svarer 88 % av alle elevene riktig (ca. 94 % av alle som svarer). Her ser jeg at en del svarer at de utvider den første brøken til 10, og 2/10 er større enn 2/11.

Problemet oppstår når de da kommer til 3b. Her er det store tall, og ikke fullt så lett å utvide brøkene (når de ikke har kalkulator). Her er det en litt høyere ikke-besvart andel, men det er 89 % som svare, men under halvparten av dem som svarer, har korrekt svar. Hele 19 elever (8 %) mener at disse to brøkene er like store siden nevner og teller har samme differanse. Dette er en ganske vanlig misoppfattelse (Brekke, 2002).

Oppgave 8

Sett ring rundt en brøk som er større enn $\frac{3}{4}$ men mindre enn 1.

$\frac{2}{3}$ $\quad \frac{5}{8}$ $\quad \frac{4}{5}$ $\quad \frac{7}{10}$ $\quad \frac{4}{3}$

Rett svar: $\frac{4}{5}$	**118**
$\frac{2}{3}$	40
$\frac{4}{3}$	6
$\frac{7}{10}$	10
$\frac{5}{8}$	8
$\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{5}$	10
$\frac{4}{3}$ og $\frac{4}{5}$	3
Andre kombinasjoner	14
Ikke besvart	24

Figur 38: Oppgave 8

I oppgave 8 ser jeg at det er 6 elever som svarer at $\frac{4}{3}$ er mindre enn 1, men større enn $\frac{3}{4}$.

Denne oppgaven kunne jeg ha tenkt meg å undersøke litt mer, for å se om de elevene som svarer $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{5}$ og eventuelt $\frac{4}{3}$ tenker at det skal være likt $\frac{3}{4}$ eller mindre enn 1. Det kan se ut som de ser på differansen mellom teller og nevner. Men her blir det kun spekulasjoner, siden jeg ikke har bedt elevene om å forklare hva de gjør/tenker. Jeg har kodet det som en mulig misoppfatning, hvis elevene har svart $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ eller en kombinasjon med en av disse brøkene og det korrekte svaret.

Oppgave 10

Skriv ett tall i telleren av brøken slik at brøken er større enn 2 men mindre enn 3.

$\frac{\square}{7}$

Rett svar:18	**156**
14	5
2,5	10
Lavere enn 1	17
Lavere enn 2	2
Høyere enn 3	2
Ikke besvart	41

Figur 39:Oppgave 10

I oppgave 10 var det vanskelig å tyde hva som egentlig er en mulig misoppfattelse. Jeg tenker at de som svarer 14, egentlig tenker rett, men glemmer at det skulle være større enn 2. Jeg er litt mer bekymret for de som svarer lavere enn 1. Her var det en del elever som skrev 2,5 i teller (fordi da er telleren ett tall mellom 2 og 3). Jeg har derfor valgt å kode de som svarer 2,5 som en misoppfatning.

Tallinjen

For å hjelpe elever til å få en bedre forståelse av størrelsen på en brøk, ekvivalens, addisjon og subtraksjon av brøker og tettheten i de rasjonale tallene, kan blant annet tallinjen være til hjelp (Petit, 2010). I pilottesten hadde jeg litt flere oppgaver som gikk på dette, men de ble tatt bort da jeg fikk litt lite utslag. Jeg beholdt den som det var mest utslag på. (I ettertid, ser jeg at jeg burde kanskje også beholdt en av de lettere oppgavene).

Oppgave 14

Skriv den riktige brøken i boksen under.

Rett svar: $\frac{1}{6}$	**58**
$\frac{1}{8}$	27
$\frac{1}{2}$	9
$\frac{1}{4}$	26
Andre feil	32
Ikke besvart	81

Figur 40:Oppgave 14

Oppgave 14 tester om elevene forstår den relative størrelsen på en brøk, og plasseringen deres på tallinjen. Oppgaven er hentet fra Pantziaea & Philippou (2012), og de mener at for å lykkes med denne oppgaven, må en forstå brøk som et objekt løsrevet fra en prosess, med generelle egenskaper som for eksempel ekvivalens, tetthet og relativ størrelse på en brøk.

Gjennomsnittsprosentscore på denne oppgaven var 26,2 %. Av de som besvarte oppgaven, var det ca. 40 % som hadde rett. 25 elever svarer at de mener det skal stå $\frac{1}{8}$. Her kan det tyde på at de halverer brøken for hver strek på tallinja (først til $\frac{1}{4}$ så til $\frac{1}{8}$). Det kan tyde på at de har en misoppfattelse, og ikke har forstått at brøken de skal finne, må kunne brukes gjentatte ganger for å bestemme avstanden fra et startpunkt. Jeg har derfor kodet dette som en mulig misoppfattelse.

Mange elever har erfaringer med rettferdig deling, men de klarer ikke overføre dette til tallinjemodellen. Pantaziara & Philippou (2012) viser til undersøkelser som konkluderer med at tallinjen kan være vanskelig for mange elever. Det kan være at elevene som svarer feil her, blander sammen det å måle en brøkdel av en linje og brøk som et punkt på ei linje. Kerslake (1986) mener at en årsak til denne forvirringen kan være at elever har en for snever tankemodell for brøk; brøk blir sett på som en del av en hel. Da kan det være vanskelig å justere den mentale konstruksjon slik at den passer med notasjonen brøk som tall.

Tetthet

Oppgave 7

Hvor mange ulike brøker fins det mellom $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$?

Sett ring rundt a, b eller c og fullfør svaret.

a) Ingen, fordi______________________________

b) En, fordi______________________________

c) Mange, to av de er______________________________

Rett svar: c	**107**
Ingen	60
ett	18
Ikke besvart	48

Figur 41:Oppgave 7

Denne oppgaven (hentet fra McIntosh, 2007) tester om eleven har en god forståelse for brøk og forstår at mellom to vilkårlige brøker fins det uendelig mange brøker. En mulig misoppfatning her kan være at elevene tror at det ikke finnes brøker mellom $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$. Her må elevene overføre kunnskap om de naturlige tall (som har påfølgende tall) til brøk (som ikke har påfølgende tall). Dette kan skyldes manglende erfaringer med likeverdige brøker (McIntosh, 2007).

På svararkene til elevene kan jeg se at det som greide å gi eksempler på brøker mellom de oppgitte brøkene, har kunnet utvide $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$. Fire av elevene har skrevet $\frac{2,3}{5}$ og $\frac{2,4}{5}$. Disse elevene har forstått at det finnes mange, men klarer ikke å utvide brøkene.

Jeg hadde 19 elever som mente det var en brøk imellom, de har brukt sin kunnskap om at $\frac{2}{5} = 0,4$ og $\frac{3}{5} = 0,6$ og kommet til konklusjonen at $\frac{1}{2}$ ligger mellom disse to.

De 62 elevene som svarer «ingen», har blant annet sagt at det er ingen tall mellom to og tre. En misoppfatning om at det ikke finnes brøker mellom to vilkårlige brøker - kan, ifølge McIntosh (2007), skyldes manglende erfaringer med likeverdige brøker.

Brøk/desimaltall/prosent

Noen av oppgavene i testen tar for seg sammenhengen mellom brøk, desimaltall og prosent.

McIntosh (2007, s.33) poengterer at det er viktig å se på disse representasjonene som forholdstall, der enheten for brøk og desimaltall er en, mens den er 100 for prosent. Å se sammenhengen mellom brøk og divisjon, samt å kunne multiplisere en brøk med et helt tall, er viktig for å forstå omgjøringen av brøk og desimaltall/prosent (McIntosh, 2007)

Oppgave 2, 15, 16 og 18 tester om en elev har forståelse for brøk, desimaltall, prosent og sammenhengen mellom dem. Et tall kan uttrykkes på ulike måter, og elevene må her kunne veksle mellom representasjonsformene. De fleste elevene har god kontroll på akkurat dette, men vi kan se at noen elever synes det er lettere å gå fra prosent til desimaltall og omvendt, enn det er å kunne oversette til brøk. Dette kan tyde på mulige misoppfatninger, der blant annet misoppfatningen om at brøkstreken blir oppfattet som ett komma.

Fra oppgave 2, ser vi at hele 18 personer mener at $\frac{2}{5} = 2{,}5$. Jeg har derfor kodet alle som svarer b eller b i kombinasjon med noen av de andre svaralternativene, som en mulig misoppfattelse.

Oppgave 2

Sett ring rundt de påstandene som er sanne om tallet $\frac{2}{5}$

a) Det er større enn $\frac{1}{2}$

b) Det er det samme som 2,5

c) Det er lik 0,4

d) Det er større enn $\frac{1}{3}$

Rett svar: c og d	**125**
c	**50**
d	**15**
b	18
a og b	3
b og c	1
b og d	6
a, b og d	1
b, c og d	1
a og c	2
a og d	1
Ikke besvart	10

Figur 42:Oppgave 2

Oppgave 15

Gjør om 60 % til

a) En brøk: ____________________

b) Ett desimaltall: ____________________

A, Rett svar: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$	**196**
$\frac{1}{6}$ eller $\frac{1}{60}$	6
Andre svar	5
Ikke besvart	26
B, Rett svar: 0,6	**204**
0,06	4
1,6	2
6,0	1
Ikke besvart	22

Figur 43:Oppgave 15

Oppgave 16

Gjør om brøken $\frac{1}{20}$ til prosent, og sett ring rundt det riktige svaralternativet.

a) 0,20 b) 20 % c) 5% d) 0,05%

Rett svar: c	**148**
a: 0,20	8
b: 20 %	22
d: 0,05%	31
c og d	1
Ikke besvart	23

Figur 44:Oppgave 16

Oppgave 15 er hentet fra McIntosh (2007) og oppgave 16 er hentet fra Utdanningsdirektoratet (2012). De tester om elevene ser sammenhengen mellom brøk, desimaltall og prosent og klarer å veksle mellom disse. Her kan det være prosedyreforståelse for elever som bare har lært seg oppskriften mellom de ulike skrivemåtene. I oppgave 15a har jeg kodet det slik at de som svarer $\frac{1}{6}$ eller $\frac{1}{60}$ muligens har en misoppfatning. Og i oppgave 15b har jeg tolket det slik at de som svarer 0,06 muligens har en misoppfatning. I oppgave 16 har jeg sett det slik at det kan være en mulig misoppfatning hos elever som svarer alle alternativer som ikke er korrekte.

I oppgave 18 skulle elevene plassere tall (skrevet på de ulike måtene) i stigende rekkefølge.

Oppgave 18

Sett disse tallene i stigende rekkefølge, det minste tallet først.

$\frac{1}{3}$ $0{,}3$ 35% $\frac{1}{10}$

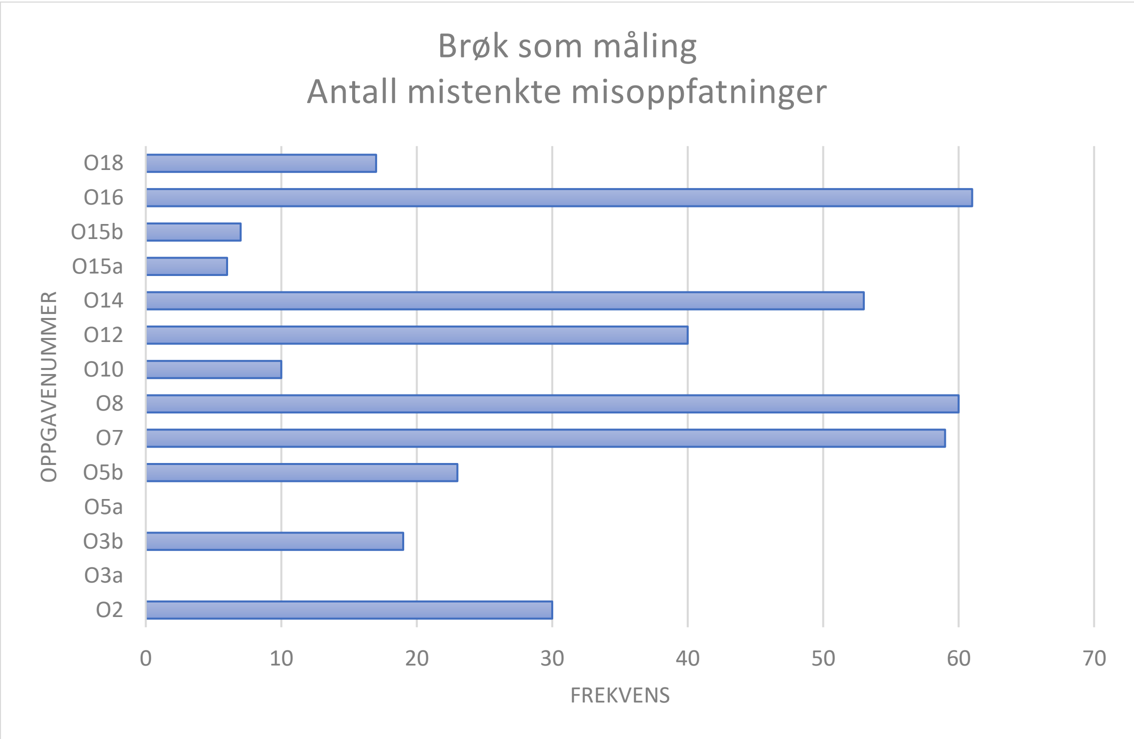
Svar: ____

Rett rekkefølge: $\frac{1}{10}$ 0.3 $\frac{1}{3}$ 35%	**148**
$\frac{1}{10}$ er satt bakerst, ellers er det korrekt	4
$\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{10}$ har byttet plass	3
$\frac{1}{3}$ og 0,3 har byttet plass	9
0,3 35% $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{3}$	3
35 % og $\frac{1}{3}$ har byttet plass	25
$\frac{1}{10}$ og 0,3 har byttet plass	3
Alle tall er plassert feil	11
Ikke besvart	27

Figur 45:Oppgave 18

Her er det ca.17 % av respondentene som bytter plass på to av tallene. Mens 4 % plasserer alle tallene på feil plass.

Denne oppgaven skal i tillegg til det som testes i oppgave 15 og 16 undersøke om elevene greier å sortere tallene i stigende verdier. Her har jeg sett det slik at elevene som har satt opp rekkefølgen 0,3, 35 %, $\frac{1}{10}$ og $\frac{1}{3}$ har en muligens misoppfattelse, fordi det kan se ut som de tolker $\frac{1}{10}$ og $\frac{1}{3}$ som 1,1 og 1,3. Jeg har videre kodet det slik at de som bytter plass på $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{10}$ også kan ha en misoppfatning om at $\frac{1}{3}$ er mindre enn $\frac{1}{10}$ fordi nevneren er større i den sist nevnte. (De ser på teller og nevner som uavhengige av hverandre.) Noen plasserer alle tall feil, og det tyder også på at det kan finnes misoppfatninger.



Figur 46: Oversikt over antall mistenkte misoppfatninger på oppgaver som går på Brøk som måling.

Diagrammet i figur 46 viser en oversikt over antall mistenkte misoppfatninger på de oppgavene vi har sett på her.

4.2.3 Brøk som forhold

En av oppgavene på testen tar for seg brøk som forhold. Den kan gi informasjon om en elev blant annet forstår hva det vil si at det er en relasjon mellom to mengder; at to størrelser i et forhold kan endre seg dem imellom uten at forholdet mellom de blir endret(Charalombous & Pitta-Pantazi, 2007).

Oppgave 19

15 liter bær veier 10 kg. Hvor mange kg veier 6 liter av de samme bærene?
Forklar eller vis ved regning hvordan du har tenkt:

Svar: ______________________

Rett svar: 4 kg.	**67**
9 kg	44
På vei, men fullfører ikke	7
3 kg, 4.2 kg eller 3.75 kg	12
Mellom 0 – 3 kg. (0.5 kg- 2.5 kg)	9
Over 10 kg (11 kg – 90 kg)	5
Ikke besvart	89

Figur 47: Oppgave 19

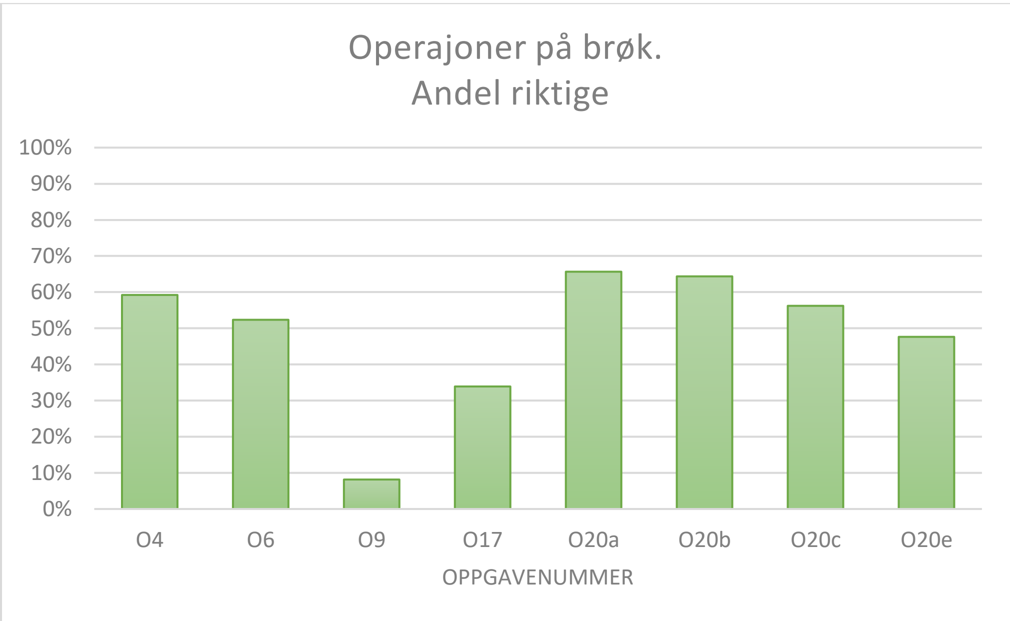
Oppgave 19 er hentet fra Brekke & Tinnes (2001) og tester om eleven har en forståelse av forhold som binder sammen størrelser av ulik rate. Elevene kan enten se på forholdet innenfor samme mål (mellom 15 liter og 6 liter) for å finne skalarfaktoren, eller de kan se på forholdet mellom de to ulike målene (15 liter og 10 kg bær) for å finne funksjonsoperatoren. En funksjonsoperator eller en skalarfaktor mindre enn én, kan for noen elever by på vanskeligheter i sammenlikning med om han var større enn én (Brekke & Tinnes, 2001). Mulige misoppfatninger kan være at elever snur funksjonsoperatoren, da en ikke kan dele et lite tall på et stort tall, eller at de bruker ukorrekt addisjonsstrategi der de ser på differansen mellom liter og kilo som en konstant og adderer denne med seks.

76 elever svarer rett på denne oppgaven, noe som utgjør 32,6 % av respondentene. En del av disse har kommet fram til svaret 3,996. Disse elevene har forstått den proporsjonale strukturen i oppgaven, men har rundet av funksjonsoperatoren til tre desimaler (10:15 = 0,6666 og $0,666 \cdot 6 = 3,996$). De andre som svarer riktig på denne oppgaven, har ulike strategier. Noen setter opp forholdslikningen $\frac{10}{15} = \frac{x}{6}$, og løser deretter denne. Dette er en typisk skoleprosedyre, og er effektiv for å finne svar på oppgaven (Brekke & Tinnes, 2001). Noen «snur» funksjonsoperatoren ved å finne forholdet 15:10 = 1,5 og regner deretter ut 6:1,5. Andre elever ser på forholdet innenfor samme mål, men også denne «snur» skalaroperatoren ved at de finner at forholdet mellom 15 og 6 er 2,5, og deretter regner ut at 10:2,5 = 4. Den siste metoden de har brukt er å forenkle forholdene ved at de skalerer ned for deretter å skalere opp igjen. Tre liter bær veier to kilo (15:5 = 3 og 10:5 = 2). Dette fører til at seks liter bær veier fire kilo ($3 \cdot 2 = 6$ og $2 \cdot 2 = 4$). Denne strategien kan være effektiv når tallene man får etter at man har skalert, kan benyttes til å skalere opp igjen mot den ukjente proporsjonen (Brekke & Tinnes, 2001). 44 elver får svaret ni. Disse elevene snur funksjonsoperatoren ved at de finner forholdet 15:10 = 1,5. Dette blir så multiplisert med seks for å få svaret ni. En årsak til dette kan være en misoppfatning om at en ikke kan dele et lite tall med et stort tall. En annen årsak kan være at de oppfatter dette som kg per liter og ikke liter per kg, da en del

elever kan være lite bevisst på denne forskjellen (Brekke & Tinnes, 2001). Jeg fant 45 mulige misoppfatninger her.

4.2.4 Operasjoner på brøk

Når en skal regne med brøk, er det vanlig å se på brøk som målestørrelser ved addisjon og subtraksjon, og brøk som operator ved multiplikasjon og divisjon (Birkeland et al., 2001). I testen har jeg noen tekstoppgaver og noen regneoppgaver. Noen av regneoppgavene er koblet sammen med tekstoppgavene for blant annet å kunne sammenlikne elevsvarene og se om det er noen sammenheng mellom tekstoppgavene og regneoppgavene. Regneoppgavene kan lett løses ved hjelp av algoritmer som er lært, og kan blant annet gi informasjon om hvilken prosedyreforståelse en elev har (Hallet et al., 2010). Tekstoppgaver krever en annen type forståelse enn å løse et oppstilt regnestykke. Her må eleven kunne oversette en situasjon til ett regnestykke på symbolform. Disse oppgavene kan så løses ved hjelp av innlært algoritme og ved forståelse.



Figur 48: Oversikt over andel riktige på oppgaver som går på Operasjoner på Brøk

Figur 48 viser oversikten over oppgaver og hvor mange som svarer riktig på oppgavene som går på Operasjoner på brøk. Disse oppgavene har jeg delt videre inn to undergrupper: Addisjon og subtraksjon (brøk som målestørrelser) og Multiplikasjon og divisjon (Brøk som operator).

Addisjon og subtraksjon. Brøk som målestørrelse

En god forståelse for brøk og likeverdige brøker er viktig om en skal forstå addisjon og subtraksjon av brøk. I denne prosessen kan misoppfatninger dannes i flere trinn (McIntosh, 2007). Den mest vanlige misoppfatningen er at elevene adderer, (subtraherer) teller med teller og nevner med nevner. Dette skyldes at de ikke ser på brøk som et tall, teller og nevner opererer uavhengig av hverandre som to tall (slik som de naturlige tallene gjør). Andre typer feil kan oppstå når brøkene skal utvides slik at de har samme nevner (McIntosh, 2007).

Oppgave 4 og oppgave 20a er egentlig like. (Litt andre tall på den ene brøken i oppgave 20a).

Oppgave 4

I et bakeri ble $\frac{3}{8}$ av melet bruk til å bake brød, og $\frac{1}{3}$ av melet ble bruk til å bake kaker. Hvor stor brøkdel av melet har blitt brukt?

Svar: ____________________

Rett svar: $\frac{17}{24}$	**138**
Regnefeil/slurvefeil	9
Adderer teller med teller og nevner med nevner	6
$\frac{1}{2}$	8
Andre svar	30
Ikke besvart	42

Figur 49: Oppgave 4

Oppgave 20a

Regn ut og forklar eller vis ved regning hvordan du har tenkt:

a) $\frac{3}{8}+\frac{1}{5}$

A, Rett svar: $\frac{23}{40}$	**154**
Regnefeil/Slurvefeil	14
$\frac{4}{13}$, adderer teller med teller og nevner med nevner	12
Blander algoritmer, eller oppgir feil svar uten utregning	4
Ikke besvart	49

Figur 50:Oppgave 20a

Her ser vi at det er flere elever som klarer å få rett på denne regneoppgaven enn tekstoppgaven, og det i tillegg til at det er flere elever som svarer på tekstoppgaven. Det er allikevel flere som adderer teller med teller og nevner med nevner i regneoppgaven enn i tekstoppgaven. Det er også flere elever som blander sammen ulike algoritmer i regneoppgaven uten kontekst. Det kan se ut som konteksten hjelper noen elever.

Oppgave 20e

Regn ut og forklar eller vis ved regning hvordan du har tenkt:

e) $1-\frac{1}{10}-\frac{3}{5}$

E, Rett svar: $\frac{3}{10}$	111
Regnefeil/slurvefeil	11
Klarer ikke å gjøre heltall om til brøk	9
Ganger hver ledd med 10 og får 3	3
Setter på fellesbrøkstrek og forkortet før de har trukket sammen	1
Andre metoder/svar	6
Ikke besvart	92

Figur 51:Oppgave 20e

Oppgave 20e er en ren regneoppgave. Det er den siste oppgaven i testen. Det er hele 39 % av elevene som ikke besvarer denne oppgaven. Det kan være flere årsaker til dette, for eksempel at man er gått tom for tid, eller ikke «orker» mer. Her ser vi også at en del elever ikke klarer å gjøre om heltall til brøk.

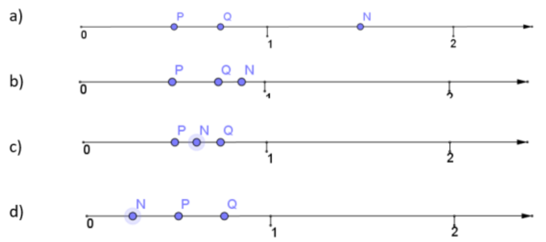
Multiplikasjon og divisjon. Brøk som operator. Brøk som kvotient

Multiplikasjon og divisjon av brøk er kompliserte å forstå. Mange elever har kun *prosedyrekunnskap* om disse brøkoperasjonene, men mangler forståelse av de underliggende begrepene (Petit, 2010). Multiplikasjon og divisjon er inverse operasjoner. Ved en mekanisk utregning uten forståelse, må elevene stole på at de husker reglene. Det kan da være lett for elevene å blande de ulike reglene. Den mest vanlige misoppfatningen er at elvene tror at multiplikasjon gjør tallet større og divisjon gjør tallet mindre. Dette kan skyldes tidligere erfaringer med multiplikasjon, eller at multiplikasjon med naturlige tall er gjentatt addisjon. Altså at de overfører reglene som gjelder for heltall til brøk.

Oppgave 17

P og Q representerer to brøker på tallinja ovenfor. $P \cdot Q = N$

Hvilken av tallinjene under viser hvor N ligger riktig plassert på tallinja? (Sett ring)



Rett svar: d	79
a	58
b	17
c	12
Ikke besvart	67

Figur 52:Oppgave 17

Oppgave 17 er hentet fra TIMSS 2011 – 8. trinn, og krever at elevene greier å abstrahere ved å benytte seg av symbol og ikke tall. Her kan det se ut som at 32 % av respondentene har den misoppfatningen at når vi multipliserer, får vi et større tall. Både i alternativ a og alternativ b er svaret større enn de opprinnelige brøkene. I alternativ a er svaret større enn i alternativ b.

Tekstoppgave 9 tester om eleven kan tenke på en passende realistisk sammenheng, der brøk og regneoperasjoner blir brukt på en korrekt måte. En misoppfatning som kan oppstå, er at divisjon er kommutativ.

Oppgave 9

Lag en tekstoppgave som passer til følgende regnestykke: $4 : \frac{1}{3}$

Rett målingsdivisjon: 12	**19**
Fortelling til $\frac{1}{3} : 4$	67
Fortelling til $4 : 3$	5
Ufullstendig informasjon/ urealistisk kontekst	27
Ikke besvart	115

Figur 53:Oppgave 9

Oppgave 9 er den oppgaven som gir dårligst gjennomsnittspoengscore på hele testen. Det er også en av de oppgavene mange ikke besvarer (nesten 50 % av elevene besvarer ikke denne oppgaven). Det er kun 11 % som svarer riktig, og hele 29 % «snur» på regnestykket, noe som kan tyde på misoppfatningen om at divisjon er kommutativ som multiplikasjon, eller at de ikke har forstått forskjellen på målingsdivisjon og delingsdivisjon. Mange av fortellingene til dem som «snur» på regnestykket var av typen 4 personer skal dele 1/3 av en pizza. Hvor mye pizza får hver person? (Her blander de også sammen målingsdivisjon og delingsdivisjon). Andre elever har 3 kaker som skal deles på 4 personer.

Jeg har også 27 elever som lager fortellinger som har urealistisk kontekst og/eller der informasjonen er ufullstendig.

Oppgave 20

Regn ut og forklar eller vis ved regning hvordan du har tenkt:

b) $\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8}$

B, Rett svar: $\frac{5}{36}$	**150**
Regnefeil/slurvefeil	16
Finner fellesnevner og ganger kun teller med teller	3
Snur bakerste brøk og multipliserer	1
Adderer teller med teller og nevner med nevner	2
Andre metoder	4
Ikke besvart	57

Figur 54:Oppgave 20b

I oppgave 20b er det mange elever som husker algoritmen eller forstår hva de skal gjøre. Jeg ser også at det er en del elever som blander algoritmer og begynner å snu den bakerste brøken. Noen finner fellesnevner og ganger kun teller med teller.

Oppgave 20

Regn ut og forklar eller vis ved regning hvordan du har tenkt:

c) $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$

C, Rett svar: $\frac{1}{8}$	**131**
Regnefeil/slurvefeil	8
$\frac{32}{3}$, snur begge brøkene	2
$\frac{3}{32}$, Multipliserer	4
Snur bakerste brøk, men dividerer teller med teller og nevner med nevner	1
$\frac{1}{6}$, snur første brøk	13
Snur bakerste brøk men subtraherer teller fra teller og nevner fra nevner	1
$\frac{3}{4}$, Utvider til felles nevner og dividerer teller med teller	5
Ikke besvart	68

Figur 55:Oppgave 20c

I oppgave 20c, ser vi igjen at mange elever blander de ulike algoritmene. Mange husker at det var noe med at en brøk skulle snus. Men de blander sammen hvilken brøk det var, eller hva de skulle gjøre etter at brøken snudd. Det er også 3 elever som snur begge brøkene. 5 elever utvider til felles nevner og dividerer teller med teller. Dette kan tyde på at forståelsen ikke er til stede, og de stoler på at de skal huske de forskjellige algoritmene, noe de ikke gjør.

Dette går igjen i oppgave 6, der elevene får en tekstoppgave og skal sette ring rundt regnestykke som gir svar.

Oppgave 6

Sunniva har 25 smykker. De veier til sammen $2\frac{1}{2}$ kg. Hvert smykke veier like mye. Hvor mye veier ett smykke?
Sett ring rundt regnestykket som gir rett svar.

a) $25 \cdot 2\frac{1}{2}$ b) $25 : 2\frac{1}{2}$ c) $2\frac{1}{2} : 25$

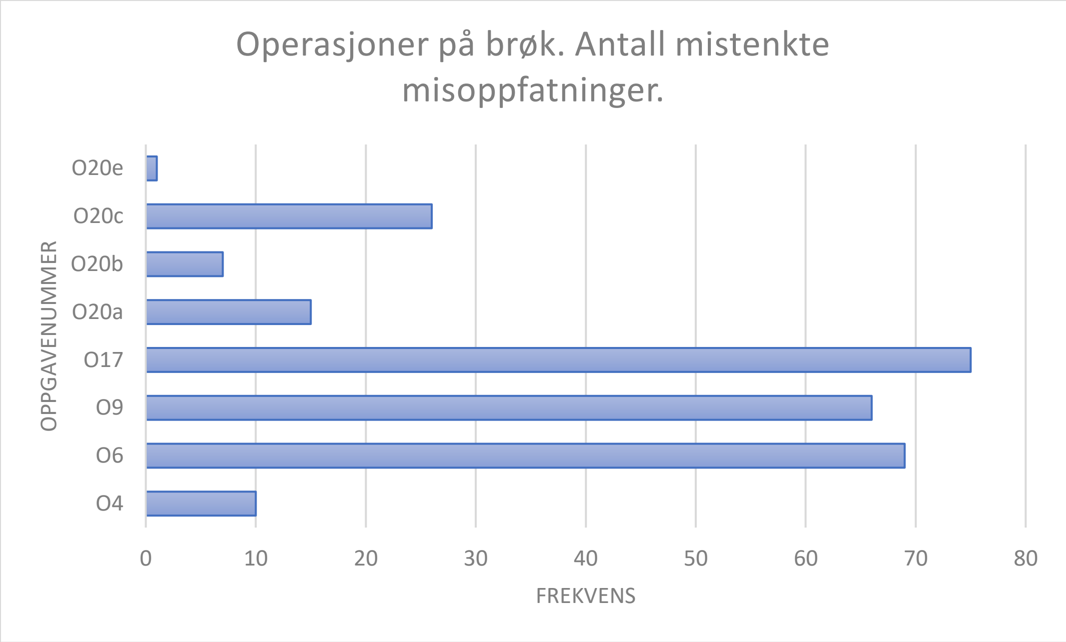
d) $2\frac{1}{2} \cdot 25$ e) $25 - 2\frac{1}{2}$ f) $2\frac{1}{2} + 25$

Rett svar: C	**122**
b	63
b og c	1
d	3
c og a eller d	4
a, d eller a og d	10
e, f eller e og f	2
Ikke besvart	28

Figur 56:Oppgave 6

Her ser vi at 27 % av elevene velger alternativ b. En misoppfatning her kan være at vi kan ikke dele et lite tall med ett stort tall. Det at to elever velger både b og c, tyder på at elevene ikke har klar forståelse hva som skjer når vi skal multipliser og dividere med brøker.

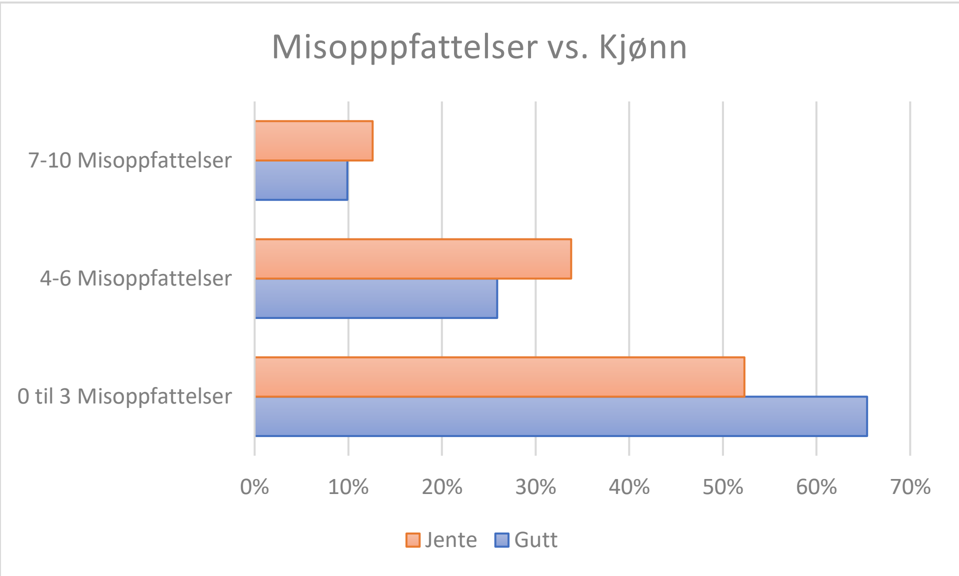
Figur 57 viser ett samlet diagram over mistenkte misoppfatninger i oppgaver som går på operasjoner på brøk.



Figur 57: Oversikt over antall mistenkte misoppfatninger på oppgaver som går på Operasjoner på Brøk

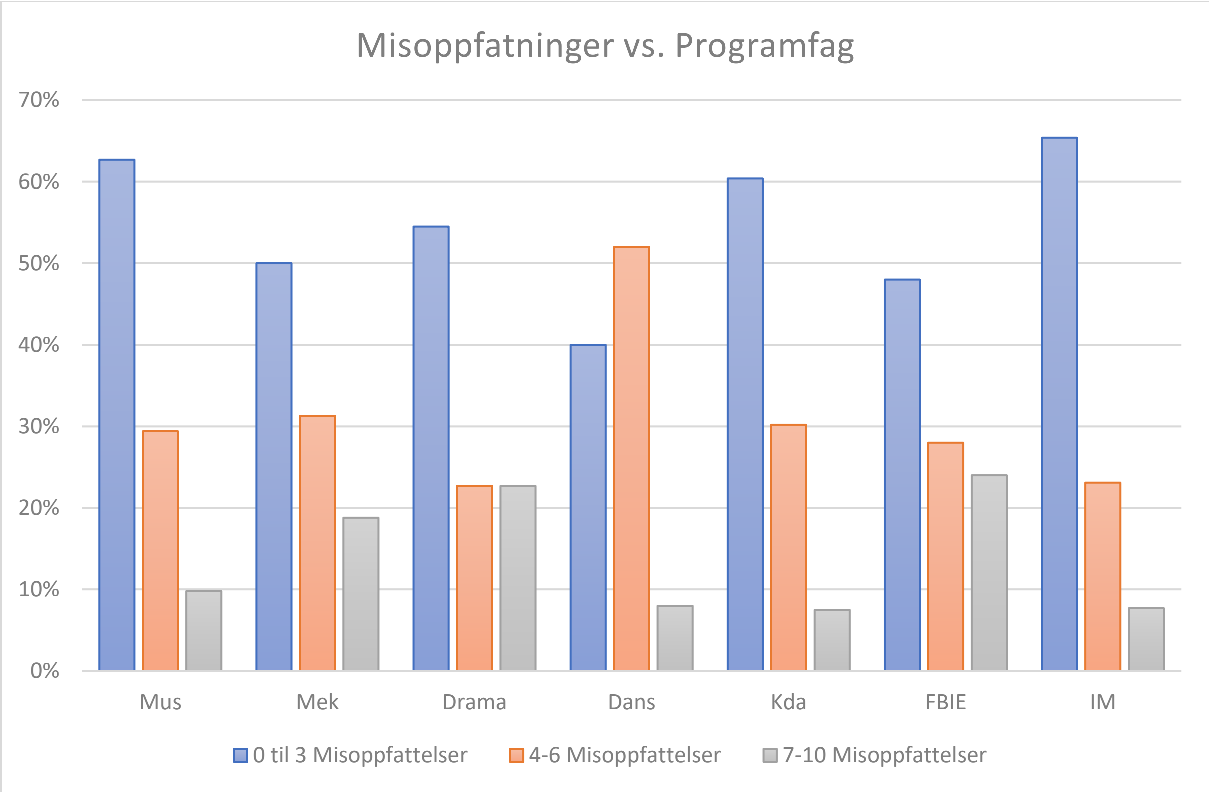
4.3 Misoppfattelser

I dette delkapittelet skal jeg se litt på antall misoppfattelser jeg har funnet opp mot bakgrunnsvariablene, prosentscore og holdninger.



Figur 58: Kjønn vs. Misoppfattelser (lav, middels og høyt antall mistenkte misoppfattelser)

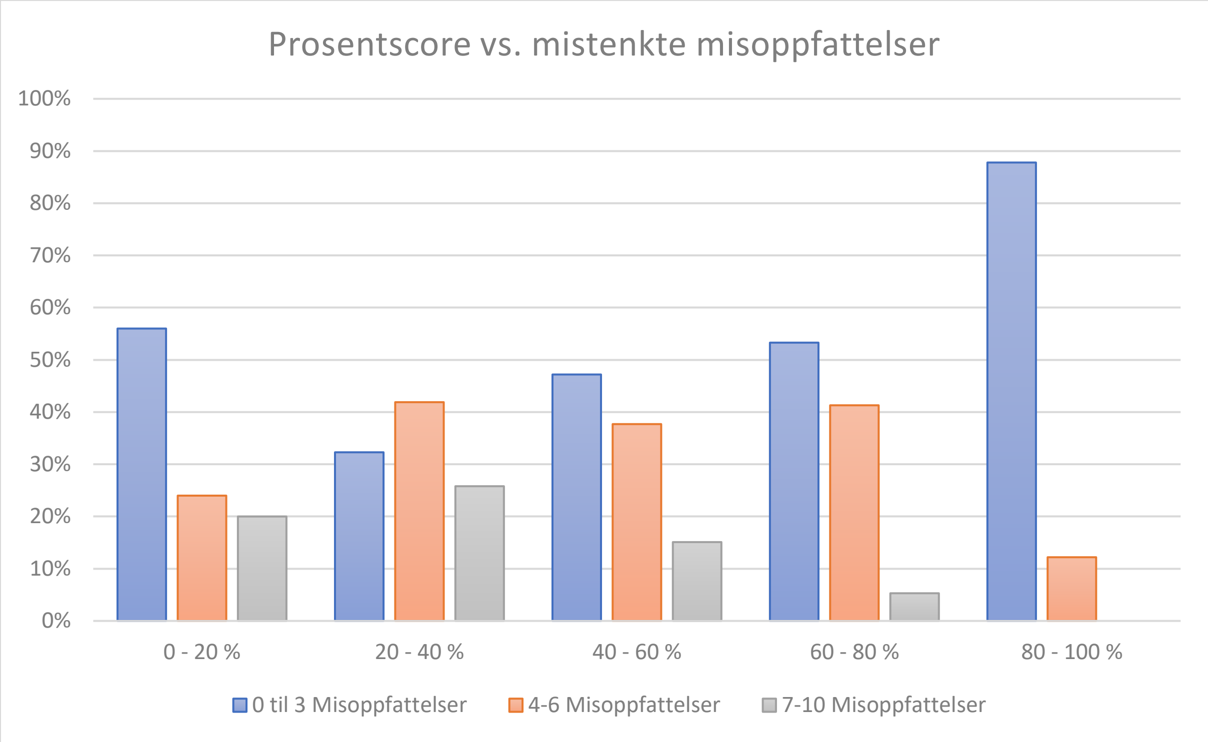
På figur 58 ser vi at det kan se ut som jenter har flere misoppfattelser enn gutter. Dette kan muligens forklare hvorfor guttene har en bedre gjennomsnittscore på testen, enn jentene.



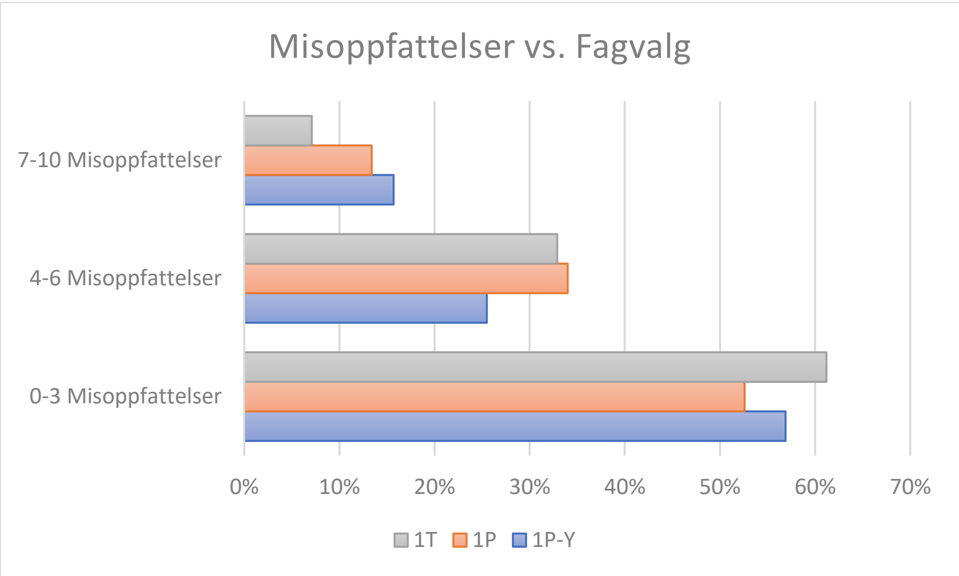
Figur 59: Programfag vs. Misoppfattelser (lav, middels og høyt antall mistenkte misoppfattelser)

Når vi setter programfagene opp mot hverandre (figur 59), så skiller linjen dans seg spesielt ut når det gjelder 4-6 misoppfatninger. Ser vi kun på høy grad av misoppfatninger, er det linjene drama og FBIE som skiller seg ut. I FBIE har 24% av respondentene mellom 7 og 10 misoppfattelser, men det var også de som hadde lavest gjennomsnittscore på testen (se tabell 7).

Hvis vi ser på oversikten over prosentscore (figur 60) opp mot antall mulige misoppfattelser, ser vi at det er 40 % av de som scorer 40 % – 80 % på testen. Dette kan tyde på at det er mange her som har lært seg algoritmer, men mangler forståelse, og når da oppgaver blir stilt litt annerledes, faller de igjennom. Det at «kun» 23,2 % av dem som scorer lavest på testen har høy andel misoppfattelser, betyr at disse elevene har mange oppgaver de ikke besvarer, og da kan jeg ikke avgjøre om det er en misoppfattelse eller ei.



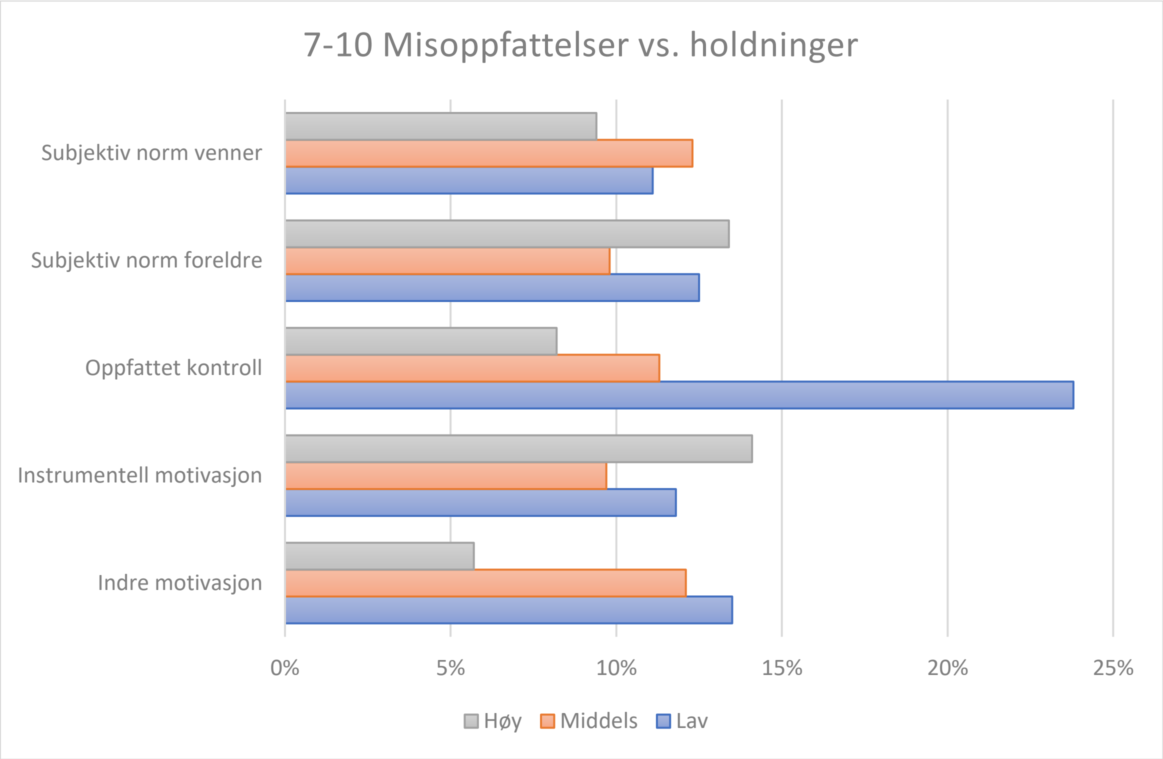
Figur 60: Prosentscore på testen vs. mistenkte misoppfatninger



Figur 61: Matematikk vs. mistenkte misoppfatninger

Ser vi på misoppfattelser opp mot matematikkfag (figur 61), ser vi igjen samme sammenhengen som med prosentscore. 1T har ganske få elever som har mange mulige misoppfattelser, men det er like mange elever som har 4-6 misoppfattelser i 1P som i 1T. Dette tyder som sagt at de har lært algoritmer, men mangler forståelse.

Når jeg skulle se på holdninger vs. misoppfattelser, har jeg delt holdningene inn i 3: Lav (som er de har en gjennomsnittscore på 1-2), Middels (som har en gjennomsnittscore på 3 – 5) og Høy (som har en gjennomsnittscore på 5-6).



Figur 62: Høyt antall mistenkte misoppfattelser opp mot holdninger til matematikk.

I figur 62 ser vi at mange av elevene som har 7-10 mulige misoppfattelser har lav oppfattet kontroll. Vi ser også at færre elever har mange mulige misoppfatninger, hvis de har høy motivasjon. Det som skiller seg ut, er instrumentell motivasjon og subjektiv norm foreldre. Her er det faktisk omvendt. Elever med høy instrumentell motivasjon har flere mulige misoppfattelser enn elever med lav instrumentell motivasjon. Ved subjektiv norm foreldre, er det ganske likt mellom elevers motivasjon og mange mulige misoppfattelser. I disse to konstruktene er det elever med middels motivasjon som har færrest av høyt antall mulige misoppfattelser.

5. Diskusjon og konklusjon

I dette kapittelet skal vi se nærmere på de viktigste funnene fra undersøkelsen, og finne ut om jeg har klart å finne svar på forskningsspørsmålene mine.

Hvilke matematisk kompetanse har elever som starter på videregående skole innen brøk og brøkregning?

Med dette som utgangspunkt har jeg sett litt på hvordan respondentene mine har gjort det med tanke på Kilpatrick et al. (2001) sin trådmodell. I denne testen har jeg ikke målt alle typene av matematisk kompetanse, men hovedfunnene går på *prosedyrekunnskap*, *begrepsforståelse* og *produktiv holdning*. Jeg har ikke fått testet så mye av *fleksibel tenkning* og *strategisk kompetanse* da dette krever blant annet større oppgaver med flere steg, slik at elevene kan vise at de kan tenke flere steg om gangen. Det hadde nok vært enklere å teste i en kvalitativ metode. I gjeldende spørsmål ser jeg på *prosedyrekunnskap* og *begrepsforståelsen* og kommer tilbake til *produktiv holdningskompetansen* i det siste spørsmålet, da jeg har brukt andre modeller for å se nærmere på de forskjellige aspektene innen holdninger. *Prosedyrekunnskap* handler om å utføre standardiserte utregninger, mange av oppgavene i testen min krever dette. Under *begrepsforståelsen* ligger det blant annet at elever kan tolke, forstå og benytte ulike representasjoner, oversette og veksle mellom ulike representasjoner fra det som kan være nyttig for et gitt formål (Kilpatrick et al., 2001). Dette er det tatt høyde for når jeg skulle finne oppgaver til testen, med at testen inneholdt ett bredt spekter av brøkproblemer. En misoppfatning viser at eleven enten har en ufullstendig eller manglende *begrepsforståelse* (Matematikksenteret, 2019). Så når man arbeider med misoppfatninger, arbeider man med *begrepsforståelsen* til elevene. Innenfor formativ vurdering, sier Wiliam (2018) at det er viktig å stille spørsmål slik at man ikke får riktig svar med feil tankemåte. Jeg har også prøvd å legge til rette for dette med oppgavene som er plukket ut til testen.

Stor sett ser jeg at mange av respondentene mine har god matematiske *prosedyrekunnskap* og *begrepsforståelse* innen brøk, men jeg så også at mange elever kunne gjort det bedre på enkelte delkompetanser. Siden jeg fikk en median på 62,5 %, vil jeg si at mange elever har mye av *prosedyrekunnskapen* og *begrepsforståelsen* på plass. Men hadde flere respondenter hatt høye *prosedyrekunnskaper*, ville det vært en høyere score på mange av oppgavene og flere ville blitt ferdig i løpet av de 60 minuttene som var satt av til testen (jeg hadde noen elever som ikke ble ferdig, men jeg har ikke noe data på hvor mange det var). Tidsbruken avspeiler at det i *prosedyrekunnskapen* ligger blant annet inne at elever som har høy *prosedyrekunnskap* skal kunne utføre og løse oppgaver ved hjelp av prosedyrer på en effektiv, nøyaktig og fleksibel måte (Kilpatrick et al., 2001). Oppgave 5b og 12 (utvide brøker) for eksempel, burde hatt en bedre statistikk enn henholdsvis 54 % og 38,6 % riktig, hvis elevene hadde hatt høy *prosedyrekunnskap*. Mange elever har også god *begrepsforståelse*, men en del elever sliter fortsatt med overgang fra naturlige tall til rasjonale tall (og brøk). De ser blant annet på brøkstreken som ett komma. En del av prosedyrene og *begrepsforståelse* kan som sagt skylles misoppfatninger. Misoppfatninger er som Lamon (2012) og Brekke (2002) sier, ikke en tilfeldig feil, men kommer av en konsekvent feiltenkning. Dette kan igjen påvirke *prosedyrekunnskapen* og *begrepsforståelsen* til elevene. Jeg fant blant annet at 27 elever hadde samme type feil på oppgave 6 og 9 (behandler divisjon av brøk som kommutativ), noe som kan tyde på en misoppfattelse.

Hvilke misoppfattelser rundt begrepet brøk og brøkregning kan man finne hos elevene.

Det kan virke som en del misoppfattelser om brøk og brøkregning fortsatt sitter igjen hos noen elever etter ti år på skolen. Siden en misoppfatning er en konsekvent feiltenkning (Brekke, 2002; Matematikksenteret, 2019), måtte jeg se litt mer på hvilke elever som gjør de samme feilene konsekvent. For å få en bedre oversikt, delte jeg opp enkeltoppgavene til testmålene: *Brøk som en del av det hele*, *brøk som måling*, *brøk som forhold* og *operasjoner på brøk.* Av alle de mulige misoppfatningene jeg fant, var det i testmålet *brøk som måling* jeg fant de tydeligste mulige misoppfattelsene. De to mest vanlige misoppfattelsene jeg fant her, var at *brøkstreken oppfattes som komma* og *differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken.*

Oppfatter brøkstreken som komma er ifølge matematikksenteret (2018) en vanlig misoppfattelse. Jeg har elever som behandler teller og nevner som to heltall og betrakter brøkstreken som et skilletegn mellom teller og nevner. Jeg fant blant annet at ti elever gjør den samme feilen på oppgave 2 og oppgave 16.

Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken er også en av de vanlige misoppfattelser elever har til brøk ifølge matematikksenteret (2018). Når jeg ser på feilsvarene til oppgave 3b, 8 og 12, ser jeg at noen elever konsekvent gjør den feilen at de tror at differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken. For eksempel i oppgave 12 der de skal utvide brøken $\frac{9}{12}$ til at teller skal være 12, hva må da nevneren være for at det skal være ekvivalente brøker? Da har elevene kommet fram til at siden differansen mellom 9 og 12 er 3, da må nevneren være 15, når telleren er 12, slik at differansen fortsatt er 3. Mange av de samme elevene sier da at oppgave 3b er like, siden differansen er lik. Av dette må jeg trekke den slutning at det er fortsatt elever som starter i den videregående skolen og innehar denne misoppfatningen.

Under testmålet *operasjoner på brøk* fant jeg noen funn som jeg synes var veldig interessante. Misoppfatningen *divisjon er kommutativ* og misoppfattelse om at *multiplikasjon gir et større svar*, trenger noen ekstra linjer:

Divisjon er kommutativ, denne misoppfatningen nevner ikke matematikksenteret (2018) i sitt dokument om «vanlige misoppfatninger i brøk» eller hos Tokle et al. (2018). Men her fant jeg at 27 elever som ser ut til å ha denne misoppfattelsen. Det kan derimot være en misoppfattelse om at vi ikke kan dividere ett lite tall på ett større tall, og at elevene derfor bytter om på rekkefølgen, slik at de får noe de forstår. Men i hovedtrekk vil jo det egentlig si at de utfører divisjon kommutativt.

Multiplikasjon gir et større svar (Lamon, 2012). Jeg har også en del elever som kan se ut som de har en misoppfattelse om at multiplikasjon gir et svar som er større enn utgangspunktet. Fra naturlige tall har de sett på multiplikasjon som gjentatt addisjon, og det kan de ikke gjøre når det er snakk om å multiplisere to brøker. Men her har jeg for lite data å sammenligne med, og oppgaven jeg har som går på dette, er en oppgave som bruker symboler og ikke tall. Derfor kan jeg ikke si at er en misoppfatning, da jeg ikke kan slå fast om elevene gjør dette konsekvent, eller om det var andre årsaker til at det var 32% som svarte alternativ a eller b på oppgaven 17.

Under testmålene *brøk som en del av en helhet* og *brøk som forhold* fant jeg ikke like klare svar, selv om jeg også her fant mulige misoppfattelser (se 4.2)

Har holdning til matematikk en sammenheng med hvordan elevene gjør det i brøkregning og forståelsen av brøk?

For å svare på dette spørsmålet har jeg tatt utgangspunktet i TPA-modellen for holdninger (Ajzen, 2005). Den er delt i tre: Holdninger til en atferd, subjektivnormer og oppfattet kontroll (se figur 10). Jeg har delt holdninger til atferd i to konstrukt, *indre motivasjon* og *instrumentell motivasjon. Indre motivasjon* forklarer Ajzen (2002) er holdninger som har en følelsesmessig betydning (liker eller misliker) og *instrumentell motivasjon* har mer en evaluerende betydning (viktig eller ikke viktig). Subjektivnormer delte jeg også inn i to konstrukt, *subjektiv norm venner* og *subjektiv norm foreldre.* Subjektive normer referer ifølge Ajzen (1991) på det oppfattede sosiale presset til å utføre eller ikke utføre arbeidet med matematikk. Altså hvorvidt personer eller grupper som er viktige for personer, stiller seg positivt eller negative til matematikk. Jeg har da delt denne i to, én som går på hvordan foreldre stiller seg og hvordan venner stiller seg til matematikk. *Oppfattet kontroll* beholdt jeg som et konstrukt. *Oppfattet kontroll* er hvordan vår oppfatning om tilstedeværelsen eller fravær av faktorer, som det legges til rette for, vanskeliggjør utførelsen av handlingen (Ajzen & Madden, 1986). Jeg fikk en solid relabilitet mellom påstandene i de forskjellige konstruktene (se tabell 9).

Mitt resultat sier at det er sammenheng mellom holdninger og resultat. Elever som oppnår en høy score på testen, har bedre indre motivasjon, instrumentell motivasjon, oppfattet kontroll og subjektiv norm foreldre, enn elever som har lav score på testen (figur 25). Subjektiv norm med gruppen venner har mindre eller liten betydning på resultatene. Jeg vil argumentere med at siden jeg har en høy korrelasjon mellom resultat og standpunktkarakterer fra ungdomskolen ($r = 0{,}765$, med en signifikant på 0,01), og pålitelighet eller høy pålitelighet på intern konsistens (se tabell 9) på de forskjellige konstruktene på holdninger, så er dette et sterkt resultat. Dette henger godt sammen med kompetansen *produktiv holdning* til Kilpatrick et al. (2001) der det pekes på at en positiv holdning til faget, er en viktig motivasjonsfaktor. Den kan føre til bedre forståelse og økt kunnskap.

Jeg undersøkte også holdninger opp mot bakgrunnsvariablene kjønn, matematikkfag og programfag. For holdninger opp mot kjønn, fant jeg at guttene har en anelse mer positiv holdninger til oppfattet kontroll og indre motivasjon. Men dette kan være på grunn av at guttene hadde ett høyere gjennomsnitt på testen, enn jentene. Dermed kan jeg ikke konkludere med at kjønn har noe å si for holdninger til matematikk. Det samme gjelder holdninger opp mot matematikkfag, der jeg fant at elever som hadde 1T og 1P-Y hadde en mer positiv holdning enn elever som hadde 1P. Men også her kan det være på grunn av resultatet på testen. 1P-Y hadde en større variasjonsbredde på resultatet av testen enn de to andre, men som forklart tidligere, kan det ha noe med at yrkesfag ikke har noe valg når det gjelder hvilke matematikkfag elevene skal ha på denne skolen. Når det gjelder programfag opp mot holdninger, klarer jeg heller ikke å slå fast at forskjellene ikke kan skyldes resultat på testen, bortsett fra elevene som går på musikklinjen. Av en eller annen grunn har de, selv om de scorer høyt på testen og har ett høyere gjennomsnittskarakter enn alle (utenom elevene som går på danselinjen), en mindre positiv holdning til matematikk enn elevene på linjene kda, IM og mek. Hvorfor det er slik, har jeg ikke data til å finne ut.

Styrker og svakheter ved undersøkelsen

En av styrkene ved undersøkelsen er, at funnene åpenbart er både interessante og ikke minst relevante for undervisningspraksis. Undersøkelsene fant noen sterke funn, ved at jeg fikk høy korrelasjon mellom resultat og elevenes standpunktkarakterer, og holdningskonstruktene mine hadde pålitelig eller høy pålitelig intern konsistens. Studien hadde også et relativt stort antall respondenter og variert programfagområde.

En svakhet er at undersøkelsen ble gjort på én skole, muligens kunne vi tenke at dette var en regional sak. En annen svakhet er jo utvilsom at dette er forsket på av en forsker som ikke har forsket tidligere. Jeg brukte oppgaver som var brukt i tidligere undersøkelser og jeg kjørte en pilotundersøkelse for å veie opp for lite erfaringer. Om en undersøkelse er god, vet man egentlig ikke før man har vært igjennom en analyseprosess. Etter å ha vært igjennom en grundig analyseprosess, ser jeg at jeg ville nok ha byttet ut noen av oppgavene med andre. Enten for å konsentrere meg om litt færre misoppfatninger, eller at jeg kunne fått litt flere oppgaver som gikk på samme emne. Dermed kunne jeg kanskje med mer sikkerhet kommet fram til om det var en misoppfattelse eller ei. Det er allikevel ikke tvil om gjennomføringen av denne undersøkelsen har gitt meg en mye bedre innsikt i dette emnet.

Hvilke bidrag kan disse funnene gi til undervisningen?

Lamon (2012) sier at det er viktig at elevene har en god *begrepsforståelse* innen brøk og relaterte emner fordi det vil øke motivasjon, holdning og glede ved å lære i matematikk i framtiden. Mange av kompetansemålene i den videregående skolen bygger videre på brøkbegrepet, både direkte og indirekte. Det at en del elever fortsatt har begrenset matematisk kompetanse, og at det fortsatt finnes misoppfatninger når det kommer til brøk når elevene starter i den videregående skolen, viser at vi som lærere på dette trinnet bør vie dette emnet større oppmerksomhet i undervisningen.

Med innføring av ny læreplan (Fagfornyelsen 2020) har begrepet brøk kommet tydeligere frem på mellomtrinnet. Den nye læreplanen legger opp til mindre oppskriftsbasert aktivitet og mer utforskende aktiviteter. Dette kan gi grunnlag for diskusjoner, noe forskning fremhever som viktig for å få elevene til å tenke. Tenkningen hos elever viser seg viktig for læringsutbytte (Brekke, 2002; Wiliam, 2011). Vi kan håpe og tro at dette vil øke den matematiske kompetansen for brøk framover. Det betyr likevel ikke at resultatet fra denne studien ville ha blitt annerledes hvis jeg hadde kjørt den neste år, eller kanskje noen år til inn i framtiden. Endring i læreplanene tar tid å overføre til elevene. Tiendeklassingene i 2020/2021 – som skal starte på den videregående skolen til høsten, har kjørt «gammel» læreplan. Elevene som når går på mellomtrinnet, begynner ikke i den videregående skolen før 3-5 år.

I starten av studien skrev jeg, at jeg ofte har lurt på hvorfor så mange elever ser på brøk som vanskelig. Jeg har nå med denne forskningen fått et forskningsresultat som jeg kan støtte meg på, i stedet for synsing. Jeg har satt meg inn i de forskjellige misoppfattelsene og vet nå bedre hvordan jeg skal avdekke dem, og hva jeg kan gjøre for å rydde dem vekk.

Veien videre

Her er det uendelig mange muligheter.

Et nytt og spennende prosjekt i videre forskning kan være å se på om du får samme resultat mellom holdning og resultat, med et annet emne? Hva hadde skjedd med resultatet hvis emnet hadde for eksempel vært geometri eller funksjoner?

Man kan også se videre på misoppfatningene. Her kan man se grundigere inn på hver enkelt misoppfatning som viser seg vedvarende. Eller man kunne bruke en kvalitativ metode for å avdekke enda grundigere om en mulig misoppfatning i virkeligheten er en misoppfatning, eller ikke.

En tidsstudie som tar for seg hvordan respondentene hadde svart på testen tidligere på året, mot det de svarte mot slutten, kunne også vært interessant. Da kunne vi sett om det hadde vært en framgang i brøkkunnskapene, og om vi hadde klart å oppklare en del av misoppfatningene i løpet av året. Vi kunne kanskje også sett om vi maktet å endre «dårlige» holdninger til matematikkfaget i løpet av første året på den videregående skolen.

6. Litteraturliste

Aiken, L. (1970). Attitudes toward Mathematics. *Review of Educational Research. 40(4)*, ss. 551-596. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/1169746

Ajzen, I. (1991). The Theory of planned behavior. *Organitzational Behavior and Human decision process*, ss. Vol. 50, issue 2, 179-211.

Ajzen, I. (2002). *Constructing a TPB questionnaire: Conceptual and methodological considerations.* Hentet fra http://chuang.epage.au.edu.tw/ezfiles/168/1168/attach/20/pta_41176_7688352_57138

Ajzen, I. (2005). *Attitudes, Personality and Behavior.* Open University Press.

Ajzen, I., & Fishbein, M. (c1980). *Understanding attitudes and predicting social behavior.* Upper Saddle River, N.J: Prentice-Hall.

Ajzen, I., & Madden, T. J. (1986). Prediction of Goal-Directed Behavior: Attiudes, Intentions, and Perveived Behavioral Control. *Journal of Experimental Social Psychology*, ss. 453- 474.

Bandura, A. (1994). Self-Efficacy. I I. V. Ramachaurdran(Ed.), *Encyclopedia of human behavior* (ss. Vol. 4, s.71-81). San Diego: Academic Press.

Bandura, A. (2002). Social foundations of thought and action. I D. Marks, *The Health Psychology reader* (ss. 94 - 106). Sage Pubication Ltd.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational-Number Concepts. (R. Lesh, & M. Landau, Red.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, ss. 91-126.

Beijaard, D., Meijer, P., & Verloop, N. (2004). Reconsidering resarch on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education*, ss. Vol.20, issue 2, s. 107-218. doi:https://doi.org/10.1016/j.tate.2003.07.001.

Birkeland, P. A., Breiteig, T., & Venheim, R. (2011). *Matematikk for lærere 1.* Oslo: Universitetsforlaget.

Bjerke, A., Eriksen, E., Rodal, C., & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er tall - Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. *FoU i praksisk 2012, conference proceedings* (ss. 28-36). Trondheim: Akademia forlag.

Bjørnstad, Ø. (2011). Kan multiplikasjon innføres på en enhetlig måte. *Tangenten*(Nr.3), ss. 6-8;39.

Bong, M., & Skaalvik, E. (2003). Academic Self-Concept and Self-Efficacy: How Different Are They Really? *Educational Psychology Review*, *15(1)*, ss. 1-40. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/23361533

Botten, G. (2016). *Matematikk med mening - mening for alle.* Caspar Forlag AS.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til Diagnostisk undervisning i matematikk.* Utdanningsdirektoratet.

Brekke, G., & Tinnes, M. (2001). *Kartlegging av matematikkforståing. Rettleiing til tal og talrekning. Grunnkurs Videregående opplæring.* Oslo: Læringssenteret (LS).

Brown, G., & Quinn, R. J. (2006). Algebra Students' Difficulty with Fractions: An Error Analysis. *Australian Mathematics Teacher*, ss. 28-40.

Charalombous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2007, Mars). Drawing on a Theoretical model to stude students' understanding of fractions. *Educational studies in matematics*, ss. 293-316.

Choen, L., Manion, L., Keith, M., & Bell, R. (2011). *Resarche methods in education* (7 th. ed. utg.). London: Rouledge.

Cowie, B., & Bell, B. (1999, Mars). A model of formative assessment in science education. *Assessment in Education*, ss. 101 - 116.

Creswell, J. W. (2014). *Educational Research: Planning, conduating and Evaluating Quantitative and Qualtiative Research.* Harlow: Pearson Education Limited.

Dahl, H. H., & Nohr, M. E. (2010). Perlesnor og tom tallinje. *Tangenten*, ss. 2-6.

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). 'Me and maths':towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of matematics teacher education*, *2010-02*, ss. 27-48.

Di Martino, P., & Zan, R. (2020, 02 23). Students' Attitude in Mathematics Education. *Encyclpedia of Mathematics Education*, ss. 813-817.

Gresalfi, M., Martin, T., Hand, V., & Greeno, J. (2009, Jan). Constructing Competence: An Analysis of Student Participation in the Activity. *Educational Studies in Mathematics*, ss. 49-70.

Hallet, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual Differences in Conceptual and Procedural KnowledgeWhen Learning Fractions. *Journal of Educational Psychology*, ss. 395-406.

Hannula, M. (2006). Affect in mathematical thinking and learning: Towards integration of emotion, motivation, and cognition. I J. Maasz, & W. Schloeglmann, *New Mathematics education research and practice* (ss. 209-232). Brill Sense.

Hannula, M. (2012, July). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social therories. *Research in Mathematics Education*(Vol.14, nr.2), ss. 137-161.

Haraldsen, G. (1999). *Spørreskjemametodikk: etter kokebokmetoden.* Oslo: Ad Notam Gyldendal.

Hart, K., Brown, M., Kerslake, D., Küchemann, D., & Ruddock, G. (1984). *Chelsa Diagnostic Matematics Test.* The NFER-NELSON Publishing Company .

Holme, A. (2008). *Matematikkens historie 1. Fra Babylon til mordet på Hypatia.* Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Imsen, G. (2008). *Elevens verden: innføring i pedagogisk psykologi.* Oslo: Universitetsforlaget.

Jensen, F., & Nortvedt, G. (2013). Holdninger til matematikk. I *Fortsatt en vei å gå: norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012* (ss. 97 - 120). Oslo: Universitetsforlaget.

Katz, V. J. (2018). *A histroy of Mathematics an introduction.* Pearson Education.

Kerslake, D. (1986). *Fraction: Children's Stategies and Error. A Report of the strategies and errors in secondary Mathematics project.* The NFER-NELSON Publishing Company Ltd.

Khajehpour, M., & Ghazvini, S. (2011). The role of parental involment affect in children's academic performance. *Procedia - Soscial and Behavioral Sciences,* ss. 15, 1204-1208. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.03.263

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kleven, T., Tveit, K., & Hjardemaal, F. (2011). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: en hjelp til kritisk tolkning og vurdering.* Oslo: Oslo Unipub.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratioes for Understanding.* New York and London: Routledge.

Lemonidis, H., & Golfos, A. (2020). Number line in the histroy and the education of mathematics. *Inovacije u nastavi:casopis za savremenu nastavu*, ss. 36-56.

Liljedahl, P., & Oesterle, S. (2020). Teacher Beliefs, Attitudes, and Self-Efficacy in Mathematics Education. (S. (. Lerman, Red.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Hentet fra Encyclopedia of Mathematics Education: https://doi-org.pva.uib.no/10.1007/978-3-030-15789-0_149

Lipnevich, A. A., MacCann, C., Krumm, S., Burrus, J., & Roberts, D. (2011). Mathematics Attitudes and Mathematics Outcomes of U.S. and Belarusian Middle School Students. *Journal of Educational Psychology*, ss. Vol.103, No. 1 s.105 - 118.

Ma, X., & Kishor, N. (1997b). Attitude Toward Self, Social Factors, and Acheievement in Mathematics: A Meta-Analytic Review. *Educational Psychology Review, 9(2)*, ss. 89-120.

Ma, X., & Kishor.N. (1997). Assessing the Relationship between Attitude toward Mathematics and Achievemnt in Matematics: A Meta-Analysis. *Jorunal for Resarch in Matematics Education, 28(1)*, ss. 26-47. doi:doi:10.2307/749662

Magnar, T., Lillejord, S., Nordahl, T., & Helland, T. (2013). *Livet i skolen 1. Grunnbok i pedagogikk og elevkunnskap: Undervisning og læring.* Fagbokforlaget.

Mata, M. d., Monteiro, V., & Peixoto, F. (2012). Attitudes toward Mathematics: Effects of Individual, Motivational, and Social Support Factors. *Child Development Research, vol. 2012*, ss. Atical ID 876028, 10 pages. doi:doi: 10.1155/2012/876028

Matematikksenteret. (2014). *Teoretisk bakgrunnsdokument for arbeid med regning på ungdomstrinnet.*

Matematikksenteret. (2018). *Vanlige misoppfatninger knyttet til Brøk og prosent*. Hentet fra Matematikksenteret: https://www.matematikksenteret.no/eksamen-pr%C3%B8ver-og-kartlegging/misoppfatninger-i-matematikk/vanlige-misoppfatninger-knyttet-til-br%C3%B8k

Matematikksenteret. (2019, August 15). *Matematikksenteret*. Hentet fra Hvordan identifisere og jobbe med misoppfatninger i matematatikk?: https://www.matematikksenteret.no/nyheter/hvordan-identifisere-og-jobbe-med-misoppfatninger-i-matematikk

McIntosh, A. (2007). *Alle Teller!* Trondheim: Matematikksenteret.

McLeod, D. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. I D. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the national council of theachers of mathematics* (ss. 575 - 596). New York: Macmillan publiching company.

Middelton, J., & Spanias, P. (1999). Motivation of Acheivement in Mathematics: Findings, Generalization, and Criticisms of the Research. *Jorunal for Research in Mathematics Education, 30(1)*, ss. 65-88. doi:doi:10.2307/749630

NESH. (2016). *Hensyn til personer.* . Hentet fra https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi/

Niss, M., & Højgaard Jensen, T. (2002). Kompetencer og matematiklæring. *Utdannelsesstyrelsens temahefter*.(Nr 18).

OECD. (2005). *Formative assessment: Improving Learning in Secondary Classrooms.* Paris: OECD Publishing.

OECD. (2012). *Elevspørreskjema B.* Hentet fra https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/pisa/sporreskjemaer/dokumenter/120131_pisa2012ms_stdq_b_bm.pdf

OECD. (2013a). *Pisa 2012 Assesment and Analytical Frameword: Mathematics, Readning, Science, Problem Solving and Financial Literatys.* Hentet fra http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

OECD. (2013b). *PISA 2012 Results: Ready to Learn: Students' Engagement, Drive and Self-Belifs(VolumIII).* Hentet fra PISA: http://dx.doi.org/10.1787/9789264201170-en

Pantziaea, M., & Philippou, G. (2012). Level of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics* , ss. 61-83.

Pearn, C., & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. ss. 430-437.

Personvernportalen. (2020, Mars). Hentet fra https://www.uib.no/personvern/124111/rutiner-ved-oppstart-av-forskningsprosjekter#samtykke-i-forskningsprosjekter

Petit, M. M. (2010). Number Lines and Fractions. I M. M. Petit, *A focus on Fractions: Bringin Research to the Classrom* (ss. 99-117). New York: Routledge.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Rohrkemper, M., & Bershon, B. (1984). Elementary School Students' Reports of the Causes and Effects of Problem Difficulty in Mathematics. *The Elementary School Journal. 85(1)*, s. 127.147. doi:http://dx.doi.org/10.1086/461396

Ryan, A. (2001). The Peer Group as a Context for the Development of Young Adolescent Motivation and Achievemnt. *Child Development*, ss. 72(4), 1134-1150. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/1132433

Ryan, R., & Deci, E. (2000). Intrinsic and Extrinsic Motivations: Classic Definitions and New Directions. *Contemporary Educational Psychology*, ss. 54-67.

Ryan, R., & Deci, E. (2002). *Overview of self-deremination theroy: An organismic dialectial perspective*. Hentet fra https://www.semanticscholar.org/paper/Overview-of-self-determination-theory%3A-An-Ryan-Deci/530b3aa97f6e3937c529e14e8165820cbf50d601

Sfard, A. (1991, Februar). On the dual Nature of Matematical Conceptions: Reflections on Processes and Objevts as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, ss. 1-36.

Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2013). *Skolen som læringsarena: selvoppfatning, motivasjon og læring.* Oslo: Universitetsforlaget.

Stedøy, I. M. (2018). *Matematisk kompetanse.* Hentet fra Realgfagsløyper: http://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-09/T1.P2.M2A%20Sted%C3%B8y%20Matematisk%20kompetanse%20vg_sept_18_0.pdf

Steffe, L. P., & John, O. (2010). *Children's Fractional Knowledge.* Springer.

Store Norske Leksikon. (u.d.). Hentet Oktober 6, 2020 fra Brøk: https://snl.no/br%C3%B8k_-_matematikk

SuveyMonkey. (2021). Hentet fra https://www.surveymonkey.com/mp/sample-size-calculator/

Swan, M. (2002). Dealing with misconceptions in mathematics. I P. Gates, *Issues in Mathematics Teaching* (ss. 147 - 165). Talyor & Francis Group.

Tetzchner, S. v. (2001). *Utviklingspsykologi: barne- og ungdomsalder.* Oslo: Gyldendal akademisk.

Thompsen, J. (2006). *Matematikkleksikon.* Oslo: Kunnskapsforlaget.

Tocci, C., & Engelhard, G. (1991). Acheivement, Parental Supprot, and Gender Difference in Attitudes toward Mathematics. *The Journal of Educational Research, 84(5),* ss. 280-286. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/40539696

Tokle, O. D., Bondø, A., & Åsenhus, R. (2018). *Misoppfatninger knyttet til brøk.* Trondheim: Matematikksenteret og naturfagssenteret.

Usher, E. L., & Pajares, F. (2008). Sources of Self-Efficacy in School: Critical Review of the Literature and Future Directions. *Review of Educational Research, Vol. 78. No. 4*, ss. 751 - 796.

Utdanningsdirektorartet. (u.d.). *Elevtall i videregående skole - utdanningsprogram og trinn*. Hentet fra Hentet: 17.03.2021: https://www.udir.no/tall-og-forskning/statistikk/statistikk-videregaende-skole/elevtall-i-videregaende-skole/elevtall-vgo-utdanningsprogram/

Utdanningsdirektoratet. (2012). *Kartlegging i rekning for VG1. Rettleiing*. Hentet fra https://pas.udir.no/AuthenticationWeb/?RequestApplication=https%3a%2f%2fpas.udir.no%3a443%2fWeb%2fDefault.aspx&returnURL=%2fWeb%2fDefault.aspx

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læringsstøtteande prøver. Tal og Talrekning.Matematikk 5 - 10. årssteg. Ressurshefte*. Hentet fra https://pas.udir.no/AuthenticationWeb/?RequestApplication=https%3a%2f%2fpas.udir.no%3a443%2fWeb%2fDefault.aspx&returnURL=%2fWeb%2fDefault.aspx

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Grunnskolekarakterer*. Hentet fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/statistikk/statistikk-grunnskole/grunnskolekarakterer/

Van de Walle, J. (2015). *Elementary and middle school mathematics: teaching development.* Harlow, England: Pearson.

van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K. v., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions. A Learning-Teaching Trajector for Grade 4,5 and 6.* Brill | Sense.

Walshaw, M., & Anthony, G. (2008). The Teacher's Role in Classroom Discource: A Review of Recent Reserch into mathematics Classrooms. *Review of Educational Research*(Vol 78, Nr 3), ss. 516 - 551.

Wiliam, D. (2011). *EMBEDDED formative assessment.* Solution Tree Press.

Wiliam, D. (2014, April). *Formative assessment and contigency in the regulation of learning processes.* Hentet 2021 fra Dylan Wiliam's webside: https://www.dylanwiliam.org/Dylan_Wiliams_website/Papers.html

Wiliam, D. (2018, Mai 10). Creating the schools our children need. (C. Barton, Intervjuer) Mr Barton Maths Podcast. Hentet fra http://www.mrbartonmaths.com/blog/dylan-wiliam-the-return-creating-the-schools-our-children-need/

Wæge, K., & Nosrati, M. (2019). *Motivasjon i matematikk.* Oslo: Universitetsforlaget.

Zhang, D., Stecker, P., & Beqiri, K. (2017, May 6). Strategies Students With and Without Mathematicis Disabilities Use When Estimating Fractions on Number Lines. *Learning Disability Quartely*, ss. 225-236.

7. Vedlegg

Kodebok

Variabel	Kategori	Kode
Karakter	F	0
	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
Kjønn	Jente	1
	Gutt	2
Klasse	Mus	1
	Mek	2
	Drama	3
	Dans	4
	Kda	5
	Fbie	6
	Im	7
Matematikkfag	1P-Y	1
	1P	2
	1T	3
Påstander	Helt uenig - helt enig	1-6
Oppgaver*	Ikke besvart	0
	Rett	1
	Galt	2
Misoppfatninger		1
Inndelt prosentscore	0-20 %	1
	20 - 40%	2
	40 - 60%	3
	60 - 80%	4
	80 - 100%	5

Gradert misoppfattelser	Lav: 0 – 3	1
	Middels: 4 – 6	2
	Høy: 7 – 10	3
*** De fleste oppgaver har i tillegg tilleggskoder ved galt svar.**		

Informasjonsskriv til elever

Forespørsel om å delta i forskningsprosjekt i forbindelse med en masteroppgave

Mitt navn er Elisabeth R Kuvåssæter og dette skoleåret skal jeg skrive ferdig masteroppgaven min i matematikkdidaktikk ved universitetet i Bergen.

Temaet for oppgaven er brøk, samt litt holdningsspørsmål til matematikk generelt. Jeg vil altså undersøke generelt holdninger elever i vg1 har til matematikk og forståelse elever har for brøk.

Jeg ønsker å få en bedre innsikt i hvorfor en del elever synes brøk er vanskelig å forstå. Det er viktig å ha en solid kunnskap om hvorfor dette er så vanskelig da brøk og brøkregning inngår i mange emner i matematikk.

Jeg ønsker å gjennomføre en kartleggingstest hvor jeg tester ulike aspekter ved brøk og med dette prøve å avdekke om elevene har misoppfatninger om brøkbegrepet og feilstrategier ved brøkregning.

Det er frivillig å delta på denne testen. Det vil ikke bli registret sensitive opplysninger i prosjektet og dermed kan elever over 15 år selv samtykke til å delta. Det vil ikke få noen konsekvenser for ditt forhold til skolen eller undervisningen om du velger å delta eller ikke.

Siden jeg ikke har noen mulighet til å vite hvilken elev som svarer på hvilke oppgaver, kan eleven dessverre ikke trekke tilbake samtykke etter at testen er levert.

Dersom det er noen spørsmål, kan de ta kontakt ved å ringe meg på tlf. [redacted]

Med vennlig hilsen
Elisabeth Refvem Kuvåssæter
Lærer ved [redacted].

Samtykke til å delta i prosjektet

Jeg har mottatt informasjon om forskningsprosjektet, og ønsker å delta:

Sett kryss.

_______ Jeg samtykker til å delta på denne skriftlige testen.

Spørreskjema/Test

KLASSE:_________________

Om deg

1. **Er du jente eller gutt?**

Jente ◯ Gutt ◯

2. **Hvilket matematikkfag tar du nå?**

1P-Y ◯ 1P ◯ 1T ◯

3. **Hvilken karakter fikk du i standpunkt i matematikk på ungdomskolen?**

F (Fritak)	1	2	3	4	5	6
◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯

Matematikk i skolen

*Kryss av i **én** av rutene i hver linje.*

4.		Helt uenig 1	2	3	4	5	Helt enig 6
a)	Jeg ser fram til matematikktimene						
b)	Jeg arbeider med matematikk fordi jeg liker det.						
c)	Jeg er interessert i det jeg lærer i matematikk.						

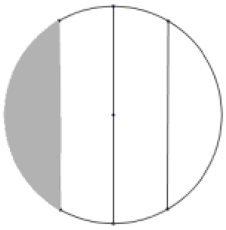
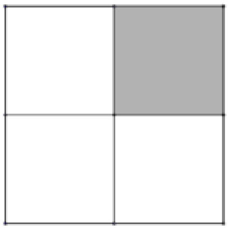
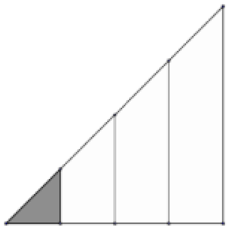
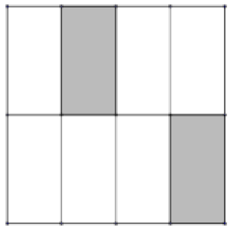
5.		Helt uenig 1	2	3	4	5	Helt enig 6
a)	Å gjøre en innsats i matematikk er vel verdt fordi det vil hjelpe meg i det arbeidet jeg vil gjøre senere.						
b)	Å lære matematikk er viktig for meg fordi det vil bedre mine yrkesmuligheter.						
c)	Matematikk er et viktig fag for meg fordi jeg trenger det når jeg skal studerer videre.						
d)	Mye av det jeg lærer i matematikk, vil hjelpe meg til å få jobb.						

6.		**Helt uenig 1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Helt enig 6**
a)	Hvis jeg hadde villet, kunne jeg gjort det bra i matematikk.						
b)	Jeg gjør det dårlig i matematikk uansett om jeg forbereder meg eller ikke.						
c)	Jeg har alltid ment at matematikk er et av mine beste fag.						
d)	Plikter som jeg har hjemme, eller andre problemer, hindrer meg i å bruke mye tid på matematikk.						
e)	Hvis jeg hadde hatt andre lærere, ville jeg jobbet hardere i matematikk.						

7.		**Helt uenig 1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Helt enig 6**
a)	De fleste vennene mine gjør det bra i matematikk.						
b)	De fleste vennene mine jobber hardt i matematikk.						
c)	Foreldrene mine synes det er viktig at jeg jobber med matematikkfaget.						
d)	Foreldrene mine mener at matematikk er viktig for mine studie – og yrkesmuligheter.						
e)	Foreldrene mine liker matematikk.						

Brøktest

<table>
<tr><td>1</td><td>Sett ring rundt figurene som har $\frac{1}{4}$ av arealet fargelagt.

a) 
b) 
c) 
d) </td></tr>
<tr><td>2</td><td>Sett ring rundt de påstandene som er sanne om tallet $\frac{2}{5}$

a) Det er større enn $\frac{1}{2}$

b) Det er det samme som 2,5

c) Det er lik 0,4

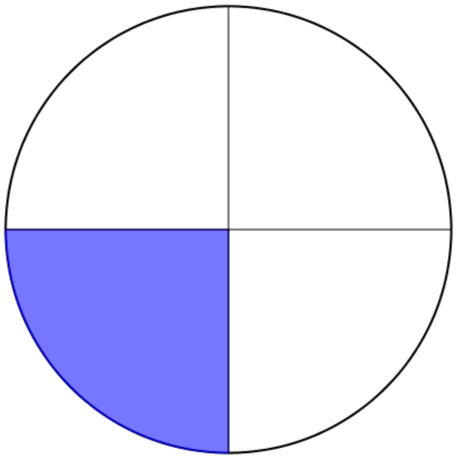
d) Det er større enn $\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Sett en ring rundt den største brøken i hvert par.

a) $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{11}$ Begrunn svaret:_______________________

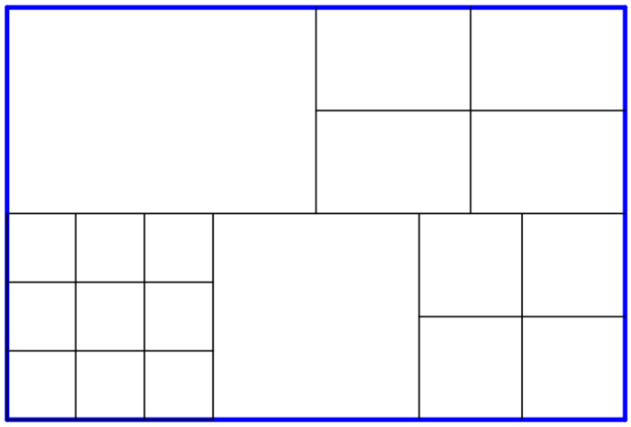
b) $\frac{89}{90}$ $\frac{90}{91}$ Begrunn svaret:_______________________</td></tr>
</table>

4	I et bakeri ble $\frac{3}{8}$ av melet bruk til å bake brød, og $\frac{1}{3}$ av melet ble bruk til å bake kaker. Hvor stor brøkdel av melet har blitt brukt? Svar: ______________________________
5	$\frac{2}{9} = \frac{\square}{18} = \frac{10}{\Delta}$ a) Hvilket tall skal det stå i $\square$?______________________ b) Hvilket tall skal det stå i Δ ? ______________________
6	Sunniva har 25 smykker. De veier til sammen $2\frac{1}{2}$ kg. Hvert smykke veier like mye. Hvor mye veier ett smykke? Sett ring rundt regnestykket som gir rett svar. a) $25 \cdot 2\frac{1}{2}$ b) $25 : 2\frac{1}{2}$ c) $2\frac{1}{2} : 25$ d) $2\frac{1}{2} \cdot 25$ e) $25 - 2\frac{1}{2}$ f) $2\frac{1}{2} + 25$

7	Hvor mange ulike brøker fins det mellom $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$? Sett ring rundt a, b eller c og fullfør svaret. a) Ingen, fordi____ b) En, fordi____ c) Mange, to av de er____
8	Sett ring rundt en brøk som er større enn $\frac{3}{4}$ men mindre enn 1. $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{4}{3}$
9	Lag en tekstoppgave som passer til følgende regnestykke: $4:\frac{1}{3}$

10	Skriv ett tall i telleren av brøken slik at brøken er større enn 2 men mindre enn 3. $\frac{\boxed{}}{7}$
11	a) Fargelegg $\frac{1}{6}$ av det hvite området i sirkelen.  b) Hvor stor del av hele sirkelen har **du nå** fargelagt? Svar: ________________________________
12	Fullfør, og forklar hva du gjør. $\frac{9}{12} = \frac{12}{\boxed{}}$

13 Fargelegg $\frac{1}{3}$ av det blå rektangelet.



14 Skriv den riktige brøken i boksen under.

15 Gjør om 60 % til

a) En brøk: ______________________

b) Ett desimaltall: _______________________

16 Gjør om brøken $\frac{1}{20}$ til prosent, og sett ring rundt det riktige svaralternativet.

a) 0,20 b) 20 % c) 5% d) 0,05%

17

P og Q representerer to brøker på tallinja ovenfor. $P \cdot Q = N$

Hvilken av tallinjene under viser hvor N ligger riktig plassert på tallinja? (Sett ring)

a) 

b) 

c) 

18 Sett disse tallene i stigende rekkefølge, det minste tallet først.

$\frac{1}{3}$ $\quad$ 0,3 $\quad$ 35% $\quad$ $\frac{1}{10}$

Svar: ____

19 15 liter bær veier 10 kg. Hvor mange kg veier 6 liter av de samme bærene?

Forklar eller vis ved regning hvordan du har tenkt:

Svar: ______________________

20	Regn ut og forklar eller vis ved regning hvordan du har tenkt: a) $\frac{3}{8}+\frac{1}{5}$
	b) $\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{8}$
	c) $\frac{3}{4}:\frac{1}{8}$
	d) $\frac{1}{6}$ av $\frac{3}{4}$
	e) $1-\frac{1}{10}-\frac{3}{5}$

Oversikt over oppgaver, kategorisering, mulige misoppfattelser og resultat.

Oppg.	Kommentar	Mulig misoppfattelse	Resultat	Antall
1	Brøk som en del av en hel. Brøk og illustrasjon. Begrepsforståelse: Tester om eleven har forstått at brøk betyr deling i like store deler og at ulike brøker kan ha samme verdi.	Brøkdelene trenger ikke ha samme størrelse	**Rett svar: b og d**	**168**
			a	1
			b	34
			a og b	5
			a, b og c	14
			a, b og d	5
			a, b, c og d	4
			Ikke besvart	2
2	Brøk som måling. Brøk som tall. Begrepsforståelse: Tester elevens forståelse for brøk, desimaltall og forholdet mellom dem.	Oppfatter brøkstreken som komma: $\frac{2}{5} = 2,5$	**Rett svar: c og d**	**125**
			c	**50**
			d	**15**
			b	18
			a og b	3
			b og c	1
			b og d	6
			a, b og d	1
			b, c og d	1
			a og c	2
			a og d	1
			Ikke besvart	10
3	Brøk som måling. Sammenlikning av brøker. Begrepsforståelse: Tester om eleven forstår den relative størrelsen på en brøk. Kan være prosedyreforståelse for elever som benytter seg	• En stor nevner gir en stor brøk. • Dess større summen av telleren og nevner er, dess større er brøken. • To brøker er av lik verdi dersom differansen mellom nevner og teller er den samme. • En liten nevner gir en stor brøk.	**Rett svar på a:** $\frac{1}{5}$	**202**
			$\frac{2}{11}$	18
			Ikke besvart	13
			Rett svar på b: $\frac{90}{91}$	**99**
			Like store	19
			$\frac{89}{90}$	89

	av algoritmer, f.eks. å utvide brøkene slik at de får samme nevner		Ikke besvart	26
4	Brøk som måling. Addisjon. Tekstoppgave. Oppgaven tester om en elev kan addere to brøker med ulik nevner, og i denne oppgaven kan både begrepsforståelse og prosedyreforståelse komme fram.	• En adderer teller med teller og nevner med nevner. • Forstår ikke hvorfor vi setter brøkene på samme nevner.	**Rett svar:** $\frac{17}{24}$	**138**
			Regnefeil/slurvefeil	9
			Adderer teller med teller og nevner med nevner	6
			$\frac{1}{2}$	8
			Andre svar	30
			Ikke besvart	42
5	Brøk som måling. Ekvivalens Begrepsforståelse: Tester forståelsen av ekvivalente brøker der eleven må kunne veksle mellom ulike skrivemåter for samme tall. Oppgave a kan løses ved prosedyreforståelse, mens oppgave b kan gjøre det vanskeligere siden en må overse svaret i a og se på den første og siste brøken	• Forstår ikke at likeverdige brøker utrykker samme størrelse. • Tror at å multiplisere en brøk med f.eks. $\frac{2}{2}$ er det samme som å multiplisere brøken med to.	**Rett svar på a: 4**	**179**
			5	5
			6	10
			8	8
			Annet	2
			Ikke besvart	29
			Rett svar på b:45	**126**
			27	12
			36	11
			Andre feil	35
			Ikke besvart	49
6	Brøk som kvotient. Tekstoppgave Begrepsforståelse: Tester hvordan eleven forstår regneoperasjonene, og om han har en	• Kan ikke dele et lite tall med et stort tall. • Divisjon er kommutativ.	**Rett svar: C**	**122**
			b	63
			b og c	1
			d	3
			c og a eller d	4
			a, d eller a og d	10
			e, f eller e og f	2
			Ikke besvart	28

	tankemodell for delingsdivisjon.			
7	Brøk som måling. Tetthet Begrepsforståelse: Tester om eleven forstår at mellom to vilkårlige brøker fins det alltid uendelig mange brøker. Eleven må forstå og kunne bruken kunnskap om likeverdige brøker for å svare på denne oppgaven.	• Det fins ikke brøker mellom to «påfølgende brøker. • Eleven forstår ikke poenget med å utvide brøkene, og ser ikke på likeverdige brøker som ulike representasjoner av samme tall.	**Rett svar: c**	**107**
			Ingen	60
			ett	18
			Ikke besvart	48
8	Brøk som måling. Brøk som tall. Oppgaven tester om eleven forstår den relative størrelsen på brøk. Oppgaven kan løses ved prosedyreforståelse, ved at en utvider brøkene slik at de får samme nevner.	• To brøker er av lik verdi dersom differansen mellom nevner og teller er den samme. • En liten nevner gir en stor brøk.	**Rett svar:** $\frac{4}{5}$	**118**
			$\frac{2}{3}$	40
			$\frac{4}{3}$	6
			$\frac{7}{10}$	10
			$\frac{5}{8}$	8
			$\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{5}$	10
			$\frac{4}{3}$ og $\frac{4}{5}$	3
			Andre kombinasjoner	14
			Ikke besvart	24
9	Brøk som kvotient. Brøk som operator Begrepsforståelse: Tester om eleven kan	Divisjon er kommutativ	**Rett målingsdivisjon: 12**	**19**
			Fortelling til $\frac{1}{3}:4$	67
			Fortelling til $4:3$	5

	tenke på en passende, realistisk sammenheng der brøk og regneoperasjoner blir brukt på en korrekt måte.		Ufullstendig informasjon/urealistisk kontekst	27
			Ikke besvart	115
10	Brøk som måling Brøk som tall. Begrepsforståelse: Tester om eleven kan skrive et tall større enn en som en uekte brøk.		**Rett svar:18**	**156**
			14	5
			2,5	10
			Lavere enn 1	17
			Lavere enn 2	2
			Høyere enn 3	2
			Ikke besvart	41
11	Brøk som del av en hel. Brøk og illustrasjoner Begrepsforståelse: Eleven må kunne oversette en illustrasjon for brøk til et skriftlig symbol. Oppgaven krever fleksibilitet i hva som blir oppfattet som en enhet. Eleven må vite at han arbeider med brøker av ¾ av sirkelen og hele sirkelen. Eleven må aktive skape en oppdeling.	De ulike delene trenger ikke å være like store.	**A, Rett fargelegging av det hvite område**	**179**
			Fargelegger $\frac{2}{6}$	5
			Fargelegger $\frac{2}{9}$	11
			Deler ikke fra radius, mens vannrett	3
			Andre feil	4
			Ikke besvart	31
			B, Rett svar på den fargelagte delen: $\frac{1}{8}$	**146**
			Følgefeil av 11a	10
			$\frac{1}{6}$	16
			$\frac{5}{12}$ eller $\frac{3}{12}$	12
			Annet	8
			Ikke besvart	41
12	Brøk som måling. Ekvivalens	• Forstår ikke at likeverdige brøker utrykker samme størrelse.	**Rett svar: 16**	**90**
			9	15

	Begrepsforståelse: Tester forståelsen av ekvivalente brøker., Eleven må kunne veksle mellom ulike skrivemåter for samme tall	• Tror at å multiplisere en brøk med f.eks. $\frac{2}{2}$ er det samme som å multiplisere brøken med to. • Ser på forskjellen mellom teller og nevner.	15 (lik differanse mellom teller og nevner)	25
			Andre feil	12
			Ikke besvart	91
13	Brøk som del av en hel. Brøk og illustrasjoner Begrepsforståelse: Eleven må kunne oversette en illustrasjon for brøk til et skriftlig symbol.	De ulike delene trenger ikke å være like store.	**Rett fargelegging av rektangelet**	**161**
			Feil	38
			Ikke besvart	34
14	Brøk som måling. Tallinje. Brøk som tall. Begrepsforståelse: Tester om eleven forstår den relative størrelsen på brøker, og plasseringen deres på tallinja.	• Teller hver strek på tallinja i stedet for rammet mellom markeringene. • Forstår ikke at en enhetsbrøk skal kunne brukes gjentatte ganger for å bestemme en avstand fra et punkt.	**Rett svar:** $\frac{1}{6}$	**58**
			$\frac{1}{8}$	27
			$\frac{1}{2}$	9
			$\frac{1}{4}$	26
			Andre feil	32
			Ikke besvart	81
15	Brøk som måling Brøk/desimaltall/prosent Brøk som tall. Begrepsforståelse: Tester om eleven ser sammenheng mellom brøk, desimaltall og prosent og klarer å veksle mellom disse. Kan være prosedyreforståelse for elever som bare har lært seg algoritmen på	• Brøkstreken blir sett på som komma. • Tolkningsfeil av noen prosenter: 0,01 = 1/100	**A, Rett svar:** $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$	**196**
			$\frac{1}{6}$ eller $\frac{1}{60}$	6
			Andre svar	5
			Ikke besvart	26
			B, Rett svar: 0,6	**204**
			0,06	4
			1,6	2
			6,0	1
			Ikke besvart	22

<table>
<tr><td></td><td>hvordan de skal veksle mellom disse ulike skrivemåtene.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">16</td><td rowspan="6">Brøk som måling
Brøk/desimaltall/prosent.
Brøk som tall.
Begrepsforståelse:
Tester om eleven ser sammenheng mellom brøk og prosent. Kan avsløre om en elev har manglende forståelse av prosent som hundredel.
Kan være prosedyreforståelse for elever som bare har lært seg algoritmen på hvordan man skal veksle mellom disse ulike skrivemåtene.</td><td rowspan="6">Brøkstrek blir satt på som komma.
Tolkningsfeil av noen prosenter: 0,01 % = 1/100.</td><td>Rett svar: c</td><td>148</td></tr>
<tr><td>a: 0,20</td><td>8</td></tr>
<tr><td>b: 20 %</td><td>22</td></tr>
<tr><td>d: 0,05%</td><td>31</td></tr>
<tr><td>c og d</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ikke besvart</td><td>23</td></tr>
<tr><td rowspan="5">17</td><td rowspan="5">Brøk som operator
Begrepsforståelse:
Tester om eleven greier å abstrahere ved å benytte symbol og ikke tall, og om han tror at multiplikasjon fører til ett større tall.</td><td rowspan="5">Multiplikasjon gjør svaret større.</td><td>Rett svar: d</td><td>79</td></tr>
<tr><td>a</td><td>58</td></tr>
<tr><td>b</td><td>17</td></tr>
<tr><td>c</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Ikke besvart</td><td>67</td></tr>
<tr><td rowspan="2">18</td><td rowspan="2">Brøk som måling.
Brøk/desimaltall/prosent.
Brøk som tall.
Begrepsforståelse:
Tester om eleven kan</td><td rowspan="2">Brøkstreken blir sett på som komma.</td><td>Rett rekkefølge:
$\frac{1}{10}$ 0.3 $\frac{1}{3}$ 35%</td><td>148</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{10}$ er satt bakerst,
ellers er det korrekt</td><td>4</td></tr>
</table>

	veksle mellom brøk, desimaltall og prosent, og klare å sortere dem etter stigende verdier.		$\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{10}$ har byttet plass	3
			$\frac{1}{3}$ og 0,3 har byttet plass	9
			$0,3 \quad 35\% \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{3}$	3
			35 % og $\frac{1}{3}$ har byttet plass	25
			$\frac{1}{10}$ og 0,3 har byttet plass	3
			Alle tall er plassert feil	11
			Ikke besvart	27
19	Brøk som forhold. Tekstoppgave Begrepsforståelse: Tester om eleven har forståelse av forhold som binder sammen størrelser av ulik rate.	• Snur funksjonsoperatoren, da en ikke kan dele ett lite tall med ett stort tall. • Ukorrekt addisjonsstrategi. Eleven bruker differansen mellom liter og kilo som en konstant og adderer denne med seks	**Rett svar: 4 kg.**	**67**
			9 kg	44
			På vei, men fullfører ikke	7
			3 kg, 4.2 kg eller 3.75 kg	12
			Mellom 0 – 3 kg. (0.5 kg- 2.5 kg)	9
			Over 10 kg (11 kg – 90 kg)	5
			Ikke besvart	89
20	Brøk og de fire regneartene Brøk som måling, Brøk som operator. Brøk som kvotient. Prosedyreforståelse:	• En adderer teller med teller og en nevner med nevner. • Snur den første brøken ved divisjon av to brøker. • Blander sammen ulike prosedyrer.	**A, Rett svar:** $\frac{23}{40}$	**154**
			Regnefeil/Slurvefeil	14
			$\frac{4}{13}$, adderer teller med teller og nevner med nevner	12

	ferdighetsoppgaver, noen av de skal gjenspeile tekstoppgaver tidligere i testen.		Blander algoritmer, eller oppgir feil svar uten utregning	4
			Ikke besvart	49
			B, Rett svar: $\frac{5}{36}$	**150**
			Regnefeil/slurvefeil	16
			Finner fellesnevner og ganger kun teller med teller	3
			Snur bakerste brøk og multipliserer	1
			Adderer teller med teller og nevner med nevner	2
			Andre metoder	4
			Ikke besvart	57
			C, Rett svar: $\frac{1}{8}$	**131**
			Regnefeil/slurvefeil	8
			$\frac{32}{3}$, snur begge brøkene	2
			$\frac{3}{32}$, Multipliserer	4
			Snur bakerste brøk, men dividerer teller med teller og nevner med nevner	1
			$\frac{1}{6}$, snur første brøk	13
			Snur bakerste brøk men subtraherer teller fra teller og nevner fra nevner	1

			$\frac{3}{4}$, Utvider til felles nevner og dividerer teller med teller	5
			Ikke besvart	68
			D, Rett svar: $\frac{1}{8}$	**50**
			Gjør om til prosent og er på vei, men fullfører ikke	1
			Dividerer	15
			Prøver mange metoder, noe riktig, men fullfører ikke	4
			$\frac{7}{12} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6}$	5
			$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$	1
			Finner felles nevner og adderer	2
			Oppgir feil svar, uten utregning:	11
			Ikke besvart	144
			E, Rett svar: $\frac{3}{10}$	**111**
			Regnefeil/slurvefeil	11
			Klarer ikke å gjøre heltall om til brøk	9
			Ganger hver ledd med 10 og får 3	3
			Setter på fellesbrøkstrek og forkortet før de har trukket sammen	1
			Andre metoder/svar	6
			Ikke besvart	92