Visuelle løsningsstrategier til sannsynlighetsoppgaver

En studie av fem videregåendeelevers bruk av ulike visuelle løsningsstrategier i sannsynlighetsregning

Camilla Meidell

Masteroppgave i matematikkdidaktikk MAT399K

Matematisk institutt

UNIVERSITETET I BERGEN

1. juni 2017

Forord

Det å skrive masteroppgave kan på mange måter sammenlignes med en lengre seilas. Enkelte dager hadde jeg medvind og fremgangen var stor. Andre dager var det vindstille og jeg kom ikke fremover uansett hvor mye jeg prøvde. Det var også dager med storm, og på slike dager føltes det som om hele skuta skulle gå under. Det viste seg heldigvis at skuta overlevde stormene og jeg har endelig kommet i havn med masteroppgaven. Det er viktig å poengtere at jeg ikke hadde klart å gjennomføre seilasen uten hjelp og støtte fra de rundt meg:

Først vil jeg gjerne takke veilederen min Inger Elin Liland for gode og konstruktive tilbakemeldinger gjennom hele skriveprosessen. Tusen takk for dine kritiske spørsmål og råd som gjorde at jeg klarte å drive prosjektet fremover.
Jeg vil også takke elevene som stilte opp i spørreundersøkelsen og i intervju.
Familien min fortjener også en enorm takk. De har stilt opp som barnevakter, og med korrekturlesning og motiverende ord. En ekstra takk til mamma og pappa som virkelig har strukket seg langt for at jeg skulle klare å gjennomføre utdannelsen.
Jeg vil også rekke en spesiell takk til datteren min Mira, som har vært tålmodig og forståelsesfull når mamma har vært opptatt på kveldstid og i helger.
Til sist må jeg rekke en takk til de andre lektorstudentene i klassen min. Dere har vært med på å gjøre studietiden minnerik og en tid jeg vil se tilbake på med et smil om munnen. Dere har også vært samarbeidspartnere, kritikere og lærere, og mye av den kunnskapen jeg sitter igjen med i dag kan jeg takke dere for. Spesielt må jeg rekke en takk til Eili Seljeset Ommedal. Uten deg og ditt engasjement hadde jeg aldri klart å gjennomføre eksamene mine det semesteret jeg fikk Mira. Siden den gang har du vært min partner in crime, og sammen har vi regnet utallige oppgaver i kjemi, fysikk og ikke minst i matematikk. Du er flink, strukturert, smilende og omsorgsfull, og de elevene som snart får deg som lærer er veldig heldige.

#Lektorlove

Camilla Meidell
Bergen 31.05.2017

Sammendrag

Denne masteroppgaven handler om elever på videregående sin bruk av visuelle løsningsstrategier i møte med sannsynlighetsoppgaver. Formålet var blant annet å undersøke hvilke ulike visuelle løsningsstrategier elever benytter seg av i møte med slike oppgaver. De andre aspektene jeg ønsket å studere var hvorfor elevene valgte strategiene og hvordan bruken av visuelle løsningsstrategier kan sees i sammenheng med misoppfatninger innenfor sannsynlighet.

I studien er det blitt brukt en blandet metode. Først ble det gjennomført en kvantitativ spørreundersøkelse hvor 38 elever deltok. Resultatene fra denne undersøkelsen ble så brukt til å velge ut fem elever til fokusgruppeintervju. Elevene var hentet fra fellesfaget 1P og programfaget R2 og hadde således ulik matematisk bakgrunn. Spørsmålene som ble presentert for elevene er hentet fra tidligere undersøkelser, dermed kan en anta at spørsmålene har gjennomgått kvalitetssikring.

Resultatet til undersøkelsen viser at elevene bruker noen av de visuelle løsningsstrategiene som omtales i litteraturen. Av de visuelle løsningsstrategiene var det utfallslisting som ble brukt mest. Det kommer frem i intervju med elevene at noen bruker visuelle løsningsstrategier fordi de mener at dette forenkler løsningsprosessen. Andre bruker visuelle løsningsstrategier når de er usikker på oppgaven. Resultatene tyder på at det noen ganger kan hjelpe elevene å unngå de typiske feilene i sannsynlighetsregning om de benytter seg av visuelle løsningsstrategier. Det ser for eksempel ut som om visuelle løsningsstrategier, kan klargjøre utfallsrommet for elevene. Det kommer imidlertid også frem at det er noen utfordringer knyttet til bruken av de visuelle løsningsstrategiene som kan resultere i at elevene til tross for bruk av visuelle løsningsstrategier ikke klarer å se for seg hele utfallsrommet. Disse utfordringene ser ut til å finnes i sammenheng med misoppfatninger så vel som i forbindelse med manglende kunnskaper om strategien i seg selv.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunn

De flinkeste elevene er ofte dårligere i sannsynlighetsregning
enn de middels flinke og de svake elevene.

Lærer i R1

Valget av tema for masteroppgaven min ble tatt med bakgrunn i en situasjon fra da jeg var elev i programfaget R1[1] på videregående. Det overrasket meg at R1 som ble sett på som den vanskelige matematikken, etter læreplanen hadde en "lettere" sannsynlighetsregning på pensumlisten enn programfaget S1[2]. Selv syntes jeg sannsynlighetsregning var veldig vanskelig, og kunne ikke begripe hvorfor elevene i S1 måtte lære så mye om dette vanskelige temaet. Dette tok jeg opp med læreren min i R1 som gav meg svaret som er sitert over. Dette utsagnet overrasket meg og vekket min interesse for sannsynlighetsregning. Hvorfor syntes jeg det var så vanskelig, og hvorfor var de jeg så på som mindre flinke enn meg i matematikk, bedre enn meg i sannsynlighetsregning? I løpet av studieløpet på universitetet har jeg heldigvis fått bedre innsikt i hva kompetanse i matematikk innebærer. Dette har gitt meg en større forståelse av at karakteren i et fag ikke nødvendigvis definerer en persons kunnskaper i alle deler av faget. Likevel har interessen min for sannsynlighetsregning aldri forsvunnet. I møte med andre matematikkstudenter har jeg fått høre utsagn som "Jeg liker ikke sannsynlighetsregning", "Sannsynlighet er vanskelig" og "Sannsynlighetsregning er noe dritt". Disse utsagnene viser at jeg ikke er den eneste som er glad i matematikk, men som har et noe vanskelig forhold til sannsynlighetsregning. Med bakgrunn i dette har jeg lenge visst at jeg ønsket å skrive masteroppgave om sannsynlighetsregning. Både for å utvikle min egen forståelse av temaet, men også for som utdannet lærer, å bedre legge til rette for elevenes læring av sannsynlighet.

[1] Videre i teksten vil programfag R1, forkortes til R1
[2] Videre i teksten vil programfag S1, forkortes til S1

Et annet moment som motiverer meg med temaet sannsynlighet, er at sannsynlighetsregning og usikkerhet har en sentral plass i dagens samfunn (Breiteig, 2002, p. 73). Som privatperson må du for eksempel ta noen avgjørelser når det kommer til din personlige økonomi. For å ta avgjørelser om sparing vil det være nødvendig å vurdere risikoen knyttet til de ulike alternativene, opp mot mulig avkastning og formålet med sparingen. En kan også møte på mennesker eller firma som med vilje vil prøve å anvende sannsynlighet galt for egen vinnings skyld (Kuzmak, 2015, p. 143). I slike situasjoner vil mennesker med dårlige kunnskaper om sannsynlighet være lette offer. Ellers i samfunnet møter vi ifølge Breiteig (2002, p. 73) begreper som sjanse, risiko eller sannsynlighet innenfor felt som forsikring, risikovurdering, medisin, spill, trafikk, prognoser og værvarsling. Videre poengterer Breiteig (2002, p. 74) at om skolematematikken skal kunne brukes i hverdagen, må resonnement og beregning av usikkerhet få en sentral plass.

Som det kommer frem av Tabell 1 kommer sannsynlighetsregning inn som hovedområde i matematikk etter 7. årssteg.

Tabell 1:Hovedområder som inneholder statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk i læreplanen for de ulike årsstegene og fagene i matematikk

Årssteg/Fag	Navn på hovedområde innenfor statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk (Kunnskapsdepartementet, 2006a, 2006c, 2006d)
2. år	Statistikk
4. år	Statistikk
7. år	Statistikk og sannsyn
10. år	Statistikk, sannsyn og kombinatorikk
1P	Sannsyn
1T	Sannsyn
S1	Sannsynlighet
R1	Kombinatorikk og sannsynlighet
S2	Sannsynlighet og statistikk
R2	

Dette samsvarer med resultatene til Fischbein og Gazit (1984, p. 23) som viser at undervisning i sannsynlighetsregning før 6. trinn ikke er særlig fruktbart. Det er rett og slett for vanskelig for elevene. Sannsynlighetsregning kom for alvor inn i læreplanen for videregående med R94 (Leland, 2011, p. 85). Deretter kom det inn i læreplanen for grunnskolen i L97 (Utdanningsdirektoratet, 2012, p. 6). Dette kan tenkes å ha resultert i at norske lærere generelt sett har hatt lite erfaring med undervisning i temaet, og at det er gjort mindre didaktisk forskning på dette området enn på mange andre matematiske områder.

Fischbein (1975) trekker frem at teorien om sannsynlighet krever en kognitiv holdning som er veldig unaturlig. Sannsynlighetsregningen består ikke bare av teknisk informasjon og prosedyrer som leder til et riktig svar. Den krever i tillegg en måte å tenke på som skiller seg fra det meste av annen skolematematikk (Fischbein & Schnarch, 1997, p. 104). Det hevdes av Freudenthal (1970, p. 167) at å følge formler slavisk ikke i noen andre matematiske områder fører til feil like ofte som i sannsynlighetsregning. Det finnes ingen andre områder av matematikk hvor kritisk tenkning er så grunnleggende (ibid.). Dette samsvarer med Breiteig (2002, p. 77) sin bemerkning om at sannsynlighet bygger på en kvalitativt ”ny” tenkemåte. For at elevene skal kunne mestre sannsynlighet vil det således være nødvendig å utvikle deres resoneringskompetanse (Jones & Thoronton, 2005, p. 82). Forskning av elevers resonnement og tenkning i matematikk avdekker tre kvalitativt ulike former for tenkning (Breiteig, 2002, p. 77). Disse er ifølge Breiteig (2002, p. 77) logisk tenkning, årsakstenkning og sannsynlighetstenkning. Elevene er vant til å benytte logisk tenkning når de arbeider med matematikk. Dette går ut på å erstatte utsagn med noe enklere helt til det enkelt kan tolkes (Breiteig, 2002, p. 77). Årsakstenkningen dreier seg om å finne årsaker og virkning. En slik form for tenkning nyttes i hverdagslivet, men også i skolefag som naturfag og samfunnsfag (Breiteig, 2002, p. 77). Sannsynlighetstenkningen dreier seg om å relatere resultatet til en helhet. Videre poengterer Breiteig (2002, p. 77) at elever har en tendens til å velge tenkemåte i rekkefølgen logisk, årsak-virkning, sannsynlighet. Dermed vil ofte en årsakstenkning fortrenge en sannsynlighetstenkning (Breiteig, 2002, p. 77). Sannsynlighetsregning kan således sees på som et viktig emne i matematikkundervisningen. I litteraturen kommer det imidlertid frem at det er en del utfordringer knyttet til sannsynlighetsregning.

Ulike studier viser at elever har en del utfordringer når det kommer til forståelsen av sannsynlighetsregning (Falk & Konold, 1997; Fischbein, 1975; Fischbein & Gazit, 1984; Fischbein, Nello & Marino, 1991; Fischbein & Schnarch, 1997). Det har blant annet vist seg at ungdommer har problemer med å hente ut de matematiske strukturene fra praktiske innpakninger av stokastiske situasjoner[3] (Fischbein et al., 1991, p. 523). Det er også kommet frem at elever gjerne synes det er lettere å løse problem når spørsmålet formuleres på en generell måte (ibid.). Flere av utfordringene elever har i møte med sannsynlighetsoppgaver vil bli gjort rede for i kapittel 2.

1.2 Forskningsspørsmål

Jeg ønsket med bakgrunn i kapittel 1.1 at undersøkelsen min skulle gi meg en innsikt i utfordringene elevene møter i sannsynlighetsregning. Samtidig ønsket jeg å få innblikk i hvordan problemene som omtales i litteraturen kan sees i sammenheng med løsningsstrategier. Jeg ønsket også å studere hvilke løsningsstrategier elevene benytter i møte med sannsynlighetsregning. Zahner og Corter (2010, p. 178) poengterer at det er vanskelig å studere mentale bilder på en god måte. Det kan med bakgrunn i dette tenkes at det er utfordrende for en forsker å få innblikk i løsningsstrategier elever bruker, men som ikke er skrevet ned. Derfor har jeg i min studie valgt å fokusere på visuelle løsningsstrategier. De ulike visuelle løsningsstrategiene vil bli nærmere forklart i kapittel 2.5. Når jeg videre i oppgaven bruker visuelle løsningsstrategier vil jeg i hovedsak henvise til løsningsstrategier der elever har brukt visuelle representasjoner som beskrevet av Zahner og Corter (2010). Dette vil diskuteres nærmere i kapittel 4. Mange av problemene elever møter i sannsynlighetsregning kan sees i sammenheng med misoppfatninger. Derfor har jeg valgt å ha fokus på hvordan elever brukte de visuelle løsningsstrategiene, sett i sammenheng med misoppfatninger. Med bakgrunn i disse betraktningene har jeg valgt følgende forskningsspørsmål:

- *Hvilke ulike visuelle løsningsstrategier benytter elevene seg av i møte med ulike sannsynlighetsoppgaver som omhandler betinget sannsynlighet og enkle og sammensatte hendelser?*
- *Hvorfor benytter de seg av disse strategiene?*
- *Hvordan kan bruk av visuelle løsningsstrategier sees i sammenheng med misoppfatninger?*

[3] Stokastiske situasjoner er situasjoner som styres av sannsynlighetsregler (Aven, 2017).

1.3 Oppbygging av oppgaven

I dette delkapittelet vil det bli gitt en oversikt over innholdet i de kommende kapitlene.

Kapittel 2: Teoretisk bakgrunn

Kapittel 2 starter med en forklaring på hva sannsynlighet og kombinatorikk er og betydningen til et utvalg av begreper tilknyttet emnet sannsynlighet. Videre kommer en beskrivelse av tenkning og hvordan mennesker vurderer sannsynligheten til ulike scenarioer. Deretter blir det lagt vekt på intuisjoner innenfor sannsynlighetsregning og problemer det kan medføre. Det blir også diskutert hvilke typiske misoppfatninger elever har i forbindelse med sannsynlighetsregning. Til sist vil definisjon på løsningsstrategier og visuelle representasjoner presenteres.

Kapittel 3: Forskningsdesign og metode

I det tredje kapittelet vil det bli gitt et lite innblikk i forskning og hvilke ulike forskningsmetoder som finnes. Deretter vil det bli utdypet hva som menes med blandet metode. Det vil i dette kapittelet også diskuteres hvilke valg jeg har tatt i forbindelse med rammene rundt undersøkelsen.

Kapittel 4: Resultater, analyse og diskusjon

I dette kapittelet vil jeg presentere resultatene fra spørreundersøkelsen. Videre vil jeg analysere, tolke og diskutere resultatene til fire av spørsmålene ved å trekke inn relevante utdrag fra intervjuene og henvise til tidligere forskning.

Kapittel 5: Avsluttende kommentarer

I dette kapittelet vil det gis en oppsummering av funnene fra kapittel 4. Funnene indikerer at lærer gjennom sin undervisning kan gjøre det lettere for elevene å løse sannsynlighetsoppgaver. Det vil videre bli gitt forslag til hvilke tiltak lærer kan gjennomføre i sin undervisning. Det vil til sist presenteres noen betraktninger om hva som kan være interessant å studere i senere undersøkelser.

2. Teoretisk bakgrunn

2.1 Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

Opphavet til sannsynlighetsregning har ifølge Devore og Berk (2012, p. 50) en sammenheng med sjansespill. Slike spill karakteriseres av tilfeldigheter og usikkerhet. Dette stemmer overens med Devore og Berk (2012, p. 50) sin kommentar om at sannsynlighetsregning i hovedsak dreier seg om studier som involverer tilfeldighet og usikkerhet. Når en driver med sannsynlighetsregning prøver en å tallfeste sannsynligheten for at bestemte resultat skal inntreffe (Lysø, 2006, p. 34). Denne talfestede sannsynligheten er ifølge Dobrow (2013, p. 3) et tall mellom 0 og 1, som sier noe om hvor sannsynlig en hendelse er. En hendelse med sannsynlighet lik null vil aldri skje, mens det er sikkert at en hendelse med sannsynlighet 1 vil skje (ibid.).

Som det kommer frem i kapittel 2.1.1 er det i forbindelse med sannsynlighetsregning viktig å kunne telle antall gunstige utfall av et forsøk, og antall mulige utfall av forsøket. Dette kan en gjøre ved å liste opp de utfallene som er mulige og se hvor mange av de mulige utfallene det er en ønsker å studere. Noen ganger omhandler forsøket så mange muligheter at det vil være svært krevende og liste dem opp. Et verktøy vi kan benytte i slike tilfeller er kombinatorikk. Ifølge Hole (1999, p. 82) dreier kombinatorikk seg nettopp om å telle slike kombinasjonsmuligheter. Den samlingen av objekter vi trekker utvalget fra omtales gjerne som populasjon (Lysø, 2006, p. 80). Et eksempel på dette er om en skal trekke ut to spillere fra et fotballag, da utgjør de to spillerne utvalget, mens laget er populasjonen. Det finnes ulike måter å finne antall kombinasjonsmuligheter basert på om det er snakk om ordnede eller uordnede utvalg, eller om forsøk med eller uten tilbakelegging. Et ordnet utvalg innebærer at rekkefølgen uttrekket skjer i har betydning (Lysø, 2006, p. 80). Om en fotballtrener skal gi en spiller i oppdrag å fylle vannflasker og en annen spiller i oppdrag å hente baller, vil rekkefølgen på utvalget ha noe å si. Den første spilleren må fylle vann, mens den andre henter baller. Uordnet utvalg dreier seg om utvalg der rekkefølgen på utvalget ikke har noe å si (Lysø, 2006, p. 88). Et eksempel på dette er lottotrekning, syv tall blir trukket ut, og rekkefølgen tallene trekkes i har ingen betydning. I slike tilfeller vil rekken 2, 5, 12, 19, 20, 25, 28 regnes som den samme som 5, 20, 2, 28, 25, 12, 19, og vi må derfor være bevisst på å ikke telle disse kombinasjonene flere ganger. Ifølge Lysø (2006, p. 80) innebærer utvalg med tilbakelegging at objektet som trekkes ut registreres for så å plasseres tilbake i populasjonen. Utvalg uten tilbakelegging innebærer ifølge Lysø (2006, p. 83) derimot at objektet som trekkes ut ikke legges tilbake i populasjonen. Dette medfører dermed at populasjonen reduseres for hvert utvalg (ibid.). De ulike formlene knyttet til de ulike måtene å telle på er illustrert i Tabell 2

Tabell 2: Ulike formler innenfor kombinatorikk. Hentet fra Anderson (2001, p. 13)

Choose r from n	Ordered	Unordered
No repetitions allowed	$\frac{n!}{(n-r)!}$	$\binom{n}{r}$
Repetitions allowed	n^r	$\binom{n+r-1}{r}$

2.1.1 Sannsynlighetsregning og begrepsavklaring

Klassisk sannsynlighet (uniform)

Når vi snakker om en situasjon hvor alle utfallene av et forsøk har lik sannsynlighet for å skje, kan vi finne sannsynligheten ved å dividere antall gunstige utfall på antall mulig utfall. Gunstige utfall er de utfallene vi ønsker å finne sannsynligheten for. Et eksempel er om man skal finne sannsynligheten for at man trekker en knekt ut av en kortstokk. Da vil alle kortene ha lik sannsynlighet for å bli trukket, og vi kan finne sannsynligheten for å trekke en knekt. Fire av kortene i kortstokken er knekter, og antall gunstige er dermed fire mens antall mulige er 52 siden kortstokken totalt består av 52 kort. Sannsynligheten for å trekke en knekt kan dermed finnes ved å dele 4 på 52. Sannsynligheter som kan finnes på denne måten defineres av Rocchi (2014, p. 98) som klassisk. Denne formen for sannsynlighet kan ifølge Lysø (2006, p. 44) også kalles for en uniform sannsynlighetsmodell.

Utfallsrom

En stor del av den klassiske sannsynligheten dreier seg om å se på gunstige utfall og mulige utfall. De mulige utfallene av et forsøk kalles utfallsrommet til forsøket (Dobrow, 2013, p. 1). Det vil si at om man triller en terning, vil utfallsrommet til terningkastet være $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Enkle og sammensatte hendelser

Når vi studerer sannsynlighet, er det slik at vi noen ganger ønsker å studere ett utfall, og andre ganger ønsker å studere flere utfall. For eksempel ønsker vi å studere ett utfall om vi vil finne sannsynligheten for å få 1 når man triller en terning. Et eksempel der man ønsker å studere flere utfall, er om man skal finne sannsynligheten for å få mindre eller lik fire om man triller en terning. I et slikt tilfelle vil 1, 2, 3 og 4 være utfall vi ønsker å studere. Forsøk der vi ønsker å studere ett eller flere utfall, kalles henholdsvis enkle og sammensatte hendelser (Devore & Berk, 2012, p. 52).

Betinget sannsynlighet

$\mathrm{P}(A|B)$ er notasjonen for en sammensatt hendelse som gjerne omtales som betinget sannsynlighet. Betinget sannsynlighet dreier seg i korte trekk om sannsynligheten for en hendelse gitt at en annen hendelse allerede har inntruffet. Et eksempel er; "Hva er sannsynligheten for å få 7 som sum når du triller to terninger gitt at den første terningen viser 2?". Den formelle definisjonen av betinget sannsynlighet er som følger:

For hvilken som helst to hendelser A og B, hvor P(B)>0, er den betingede sannsynligheten av A gitt at B har forekommet definert som $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

(Devore & Berk, 2012, p. 75).

2.2 System 1 tenkning eller system 2 tenkning.

Ifølge Evans (2003, p. 454) finnes det to kognitive system som benyttes til resonnering. Det første systemet (system 1) var det som evolusjonistisk sett kom først. Dette er det systemet vi deler med andre dyr. Ifølge Kahneman (2012, p. 26) og Evans (2003, p. 454) virker system 1 raskt og automatisk. Evans (2003, p. 454) poengterer videre at det bare er det ferdige produktet som kommer frem i vår bevissthet. Dette systemet krever ingen eller lite anstrengelse, og personen vil ikke ha opplevelse av viljekontroll (Kahneman, 2012, p. 26). Det andre systemet (system 2) er noe av det som skiller mennesker fra andre dyr (Evans, 2003, p. 454). Dette systemet blir av Kahneman (2012, p. 27) beskrevet ved at det gir oppmerksomhet til de mentale aktivitetene som er så anstrengende at de krever dette. Aktiviteter som kjennetegner system 2 er gjerne opplevelse av valg og konsentrasjon (ibid.). Forskning har funnet bevis på at de to systemene konkurrerer om kontroll over våre handlinger og avgjørelser (Evans, 2003, p. 457).

System 1 er noe som hele tiden og uanstrengt leverer en strøm av inntrykk og følelser. Det er informasjonen som kommer fra system 1 som danner grunnlaget for overbevisningene og de bevisste valgene til system 2. Selv om system 1 genererer kanskje overraskende komplekse idemønstre, er det viktig å merke seg at bare system 2 kan konstruere tanker i en ordnet og trinnvis serie (Kahneman, 2012, p. 27). Dette stemmer overens med det Evans (2003, p. 454) skriver om at system 2 gjør abstrakt resonnering og hypotetisk tenkning mulig.

Vi kan dele tenkningen i system 1 inn i to kategorier. Noen mentale aktiviteter er, slik Evans (2003, p. 454) beskriver det, felles med dyrene. De er medfødte. Andre mentale aktiviteter blir ifølge Kahneman (2012, p. 28) raske og automatiserte gjennom øvelse. De mentale aktivitetene vi finner i system 1, som er tillærte, varierer gjerne fra person til person, alt ettersom hva vi har brukt tid til å øve på (Kahneman, 2012, p. 28). Det er de tillærte mentale aktivitetene som oftest beskrives av prosessene i system 1 (Evans, 2003, p. 454). Mange av de mentale aktivitetene som kjennetegner system 1 er ufrivillige. Med dette menes at de skjer impulsivt uten at vi klarer å motvirke dem. System 2 har likevel en viss evne til å påvirke måten system 1 virker på. Denne påvirkningen krever imidlertid konsentrasjon og anstrengelse. Slike anstrengende aktiviteter kjennetegnes gjerne ved at du ikke kan gjøre flere av dem samtidig. Dette fører til at vi blokkerer andre inntrykk, selv overraskende elementer når vi er dypt konsentrert om en oppgave. Det at vi blokkerer inntrykk som ikke er relevant for den oppgaven vi nå arbeider med, er noe vi ikke er klar over selv (Kahneman, 2012, pp. 28-29). Kahneman (2012, p. 30) oppsummerer det som om vi kan være blinde for det åpenbare, og vi er også blinde for vår egen blindhet.

2.2.1 Å løse et enklere problem

Det er for det meste system 1 som sitter i førersetet. System 2 overtar først når system 1 møter vanskeligheter (Kahneman, 2012, pp. 30-31). Denne arbeidsdelingen mellom system 1 og system 2 er svært effektiv. Den fører til høyest mulig ytelse med minst mulig arbeid, og den fungerer stort sett ypperlig fordi system 1 er god på sine oppgaver. Det er imidlertid viktig å merke seg at system 1 har skjevheter og systematiske feil. Et eksempel på dette er at en på grunn av system 1 noen ganger velger å tolke spørsmålet som et lettere spørsmål enn det vi egentlig står overfor

(Kahneman, 2012, p. 31). Dette kommer frem i Fischbein et al. (1991, p. 546) sin undersøkelse. På spørsmålet om hva som er mest sannsynlig av å få 2 og 12 som summen av øynene på to terninger, vil mange ignorere begrensningene på muligheter vi har i den gitte situasjonen. De vil svare 12, fordi vi har flere muligheter, og i dette ligger det at for eksempel 10+2 er en av mulighetene for 12. Det kan således tenkes at elevene heller svarer på spørsmålet: ”Når vi adderer to tall, hvilken sum har flest muligheter av 2 og 12?”. Et annet eksempel er at system 1 forstår lite av logikk og statistikk. System 1 kan heller ikke slåes av, noe som også kan være problematisk (Kahneman, 2012, p. 31). Evans (2003, p. 454) trekker frem konflikten mellom hva vi tror og logikk som spesielt viktig. Om det til slutt er logikken som går seirende ut av en slik konflikt, avhenger av personens generelle kognitive evner. System 2 blir begrenset av arbeidsminne og korrelert med mål på generell intelligens (Evans, 2003, p. 454). Dette samsvarer ikke helt med Kahneman (2012, pp. 42-43) som sier at meget intelligente personer anstrenger seg mindre enn andre for å løse de samme problemene. Det kan tenkes at det her er snakk om personer som er bedre trent i å aktivere og bruke system 2, noe som vil føre til mindre anstrengelse.

Når system 1 oversetter et problem til noe som er enklere å løse, vil mange gå for den løsningen uten å sjekke om denne er gyldig. Dette forklarer Kahneman (2012, p. 52) med at mange mennesker er altfor selvsikre og dermed setter de gjerne for stor lit til sine intuisjoner. Det ser ut som om disse synes kognitive anstrengelser i hvert fall er mildt ubehagelig, og vil således unngå dette så mye som mulig. Selvovervåkningen til de som går i disse fellene og deres system 2, kan karakteriseres som umotivert. Mennesker som ikke går i denne fellen, kan vi kalle engasjerte. Det som kjennetegner disse, er at de er mer våkne, mer aktive intellektuelt og de er mindre villige til å slå seg til ro med svar som fremstår som attraktive. De er rett og slett mer kritiske til intuisjonene sine (Kahneman, 2012, p. 54). Dermed kan det hevdes at det å gjøre disse feilene ofte, til en viss grad, sees som et resultat av mangel på motivasjon.

2.2.2 Forhastede slutninger

Det å trekke forhastede slutninger er stort sett effektivt så lenge konklusjonene i hovedsak er riktige. En og annen feil innimellom har som oftest minimal betydning. Problemet oppstår når du er usikker på situasjonen og heller ikke har tid til å hente inn ny informasjon. Om dette er tilfellet, er intuitive feil sannsynlige, og slike feil kan unngås ved å koble inn system 2 (Kahneman, 2012, p. 89). System 1 har en bekreftelsestendens som gjør at en ofte overvurderer sannsynligheten for ekstreme og usannsynlige hendelser (Kahneman, 2012, p. 347).

Dette gjelder for eksempel i land hvor bussbomber har vært "vanlig" de siste årene. Denne informasjonen gjør at vi knytter en emosjonell assosiasjon til bussen. Denne er automatisk og ukontrollert, og den skaper en sterk trang til å beskytte seg selv. Alt dette til tross for at det statistisk sett gjerne er mer sannsynlig å bli påkjørt av en bil enn å bli rammet av en terrorhandling på en buss. Man overvurderer altså i denne situasjonen sannsynligheten for at det skal gå av en bombe i en buss (Kahneman, 2012, p. 347). Et annet eksempel er salg av lottokuponger. Til tross for at sannsynligheten for gevinst er svært liten, fører muligheten om at noe så fantastisk kan skje, til at kupongen blir kjøpt. I disse eksemplene klarer en henholdsvis bare å se for seg de gangene det har gått av en bombe på en buss, eller muligheten for at nettopp du vinner i lottotrekningen. Dette kan sees i sammenheng med tilgjengelighetsheuristikken som blir nærmere forklart i kapittel 2.4.2.

2.3 Intuisjoner

Som nevnt i kapittel 2.1 kan man beskrive utfallet av system 1 som intuisjoner. Ifølge Falk (1992, p. 204) ser det ikke ut som begrepet intuisjon har en tydelig definisjon. De intuitive meningene blir av Fischbein et al. (1991, p. 523) beskrevet som sentrale i elevenes læring av sannsynlighet. Noen ganger stemmer disse meningene overens med løsningene som matematisk sett er korrekte, andre ganger avviker de litt, og noen ganger kan de til og med motsi det som faglig sett er riktig. Eller som Dawes (2001, p. 12083) sier det, "Our intuition about probability are often just plain wrong.". Dermed er det viktig at slike intuitive holdninger ikke ignoreres. Om oppfatningene som ikke stemmer, ikke korrigeres, vil de fortsette å lede elevens tenkning til tross for at det er blitt undervist i temaet (Fischbein & Gazit, 1984, p. 2). Dette støttes av Konold (1991, p. 141) som trekker frem at lærerens suksess i stor grad avhenger av hvordan disse intuisjonene blir behandlet. Dette er spesielt viktig sett i sammenheng med det lærer ønsker at elevene skal sitte igjen med.

Intuisjoner blir av Fischbein (1975) definert som et stabilisert handlingsprogram som er utviklet gjennom erfaringer. Dette handlingsprogrammet er effektivt fordi det har egenskaper som at det er globalt, umiddelbart og fleksibelt. I matematikkundervisningen er intuisjoner viktige. Elever må lære seg å benytte teoremer og andre matematiske sannheter, men de må også lære seg å finne egne løsninger på matematiske problem. Fischbein (1975) understreker videre at relasjonene mellom logikk og intuisjon spiller en viktig rolle innenfor sannsynlighet.

Intuisjonene våre baserer seg blant annet på mekanismer som lenge har vært verifisert, og som fortsetter å bli bekreftet av våre erfaringer (Fischbein, 1975). Et resultat av dette kan være at intuisjonene våre er veldig robuste (Lecoutre, 1992, p. 561). Dette kan sees i sammenheng med Fischbein og Gazit (1984, p. 2) sin tro på at vi bare kan utvikle nye intuitive holdninger, gjennom personlig involvering i praktiske situasjoner. Verbale forklaringer vil ikke være nok. Fischbein (1975) trekker frem muligheten for at noen av våre intuisjoner er nedarvet. Han trekker videre frem to måter å kategorisere intuisjon. Vi kan dele intuisjon inn i tre kategorier; pre-operasjonell, operasjonell og post-operasjonell. En annen måte, er å dele intuisjon inn i primære og sekundære intuisjoner. De primære intuisjonene karakteriseres som de intuisjonene som er dannet før opplæring, og av at de er uavhengige av systematisk opplæring. Sekundærintuisjon er intuisjoner som formes etter systematiske instruksjoner (ibid.). Denne inndelingen samsvarer med den Evans (2003) og Kahneman (2012) legger frem for system 1 tenkning.

2.3.1 Intuisjonen om relativ frekvens

Noen intuisjoner baserer seg på en forventning. Intuisjon som for eksempel baserer seg på ”store talls lov”, vil således forvente at når antall forsøk øker, vil relativ frekvens nærme seg deres teoretiske sannsynlighet. Denne intuisjonen karakteriseres av Fischbein (1975) også som en primærintuisjon. Han forklarer dette med at denne intuisjonen kan fungere uten noen eksplisitt resonnering. Intuisjonen om relativ frekvens utvikles naturlig over tid sammen med utviklingen av atferd. Dette sees på som en konsekvens av at mennesker lever i omgivelser som er karakterisert av stokastiske situasjoner (ibid.). Selv om intuisjonen om relativ frekvens i mange tilfeller er riktig, blir den påvirket av flere elementer som gjerne kan føre til feilslutninger.

Fischbein (1975) foreslår å dele slike ”forstyrrende” faktorer inn i to ulike kategorier. Den første inneholder faktorer som ikke har noe med den evolusjonistiske utviklingen av forståelse for sannsynlighet å gjøre. Dette innebærer blant annet feilslutninger med bakgrunn i et sterkt ønske om at noe er sannsynlig. Den andre kategorien inneholder feilslutninger som skyldes den evolusjonistiske utviklingen. Videre poengterer Fischbein (1975) at det viktige med disse feilene er at de ikke er blinde feil. De kommer som et resultat av tendensen mennesker har til å tolke tilfeldighet som om den var styrt av rasjonalitet. Dette kan også sees i sammenheng med misoppfatninger som blant annet dreier seg om at elevene prøver å bruke tidligere kunnskap i situasjoner hvor denne kunnskapen ikke nødvendigvis er gyldig (Brekke, 2002, p. 10).

I forsøk, der noen kan dateres helt tilbake til 1951, viser det seg at etter hyppige sekvenser av et alternativ, har mennesker en tendens til å forutse at det andre alternativet vil inntreffe. Som et eksempel kan vi ta for oss et forsøk hvor personer skal prøve å forutse hvilken av to lyspærer som vil lyse. Resultatet fra slike forsøk er at mennesker etter lange perioder hvor lyspære B har lyst, vil anta at lyspære A vil lyse neste gang. Denne tendensen kalles den negative nyhetseffekten og blir av Fischbein (1975) definert som tendensen til å forutse det som ikke har inntruffet på en stund. Denne effekten blir i litteraturen også omtalt som gamblerens feilslutning (Dawes, 2001; Kahneman, Tversky, & Slovic, 1982).

2.3.2 Intuisjon om utvalg

Studier har vist at barn har en tendens til å variere sine forutsigelser. Tendensen til å gjøre dette er sterkest mellom syv og ni år. Eldre barn klarer å benytte informasjon fra tidligere forsøk som grunnlag for sine antagelser (Fischbein, 1975). Dette stemmer overens med Fischbein et al. (1991, p. 539) sine resultater som sier at intuisjonen om utvalg vil bli bedre, uavhengig av om eleven har fått undervisning i sannsynlighetsregning. Dette kan samsvare med at den negative nyhetseffekten står veldig sterkt hos barn eldre enn syv år (Fischbein, 1975).

Dette baserer seg gjerne på utvalgsintuisjonen. Den forteller oss blant annet at det å trekke tre svarte og tre hvite kuler fra en samling på 60 hvite og 60 svarte kuler, er mer sannsynlig enn å trekke fem hvite kuler og en svart. Dette er en helt riktig antagelse som svarer til den virkelige sannsynligheten. Problemet oppstår når denne intuisjonen også blir gjeldende i ordnede utvalg hvor denne intuisjonen ikke lenger er gyldig (Fischbein, 1975). Om vi for eksempel ser på to ordnede sekvenser av krone og mynt, vil de fleste mene at KMKKM er mer sannsynlig enn KKKKK, til tross for at sannsynligheten til disse ordnete sekvensene er lik. Tversky og Kahneman (1974, p. 1125) forklarer dette med at en i slike tilfeller baserer avgjørelsen på hva som er mest representativt for rettferdigheten til mynten. Dette samsvarer, så lenge vi ikke snakker om ordnet utvalg, med resultatene til Fischbein et al. (1991, p. 539) som blant annet konkluderer med at elever har en intuitiv kapasitet til å evaluere størrelsen på utfallsrommet og dets struktur. Fischbein et al. (1991, p. 539) poengterer videre at elevene imidlertid ikke klarer å få frem denne kapasiteten om ikke spørsmålet blir stilt på en generell måte. Om spørsmålet ikke er formulert på en generell måte, vil elevene basere svarene sine på andre tolkninger.

Om vi ser på elevenes forståelse av sammensatte hendelser, konkluderer Fischbein et al. (1991, p. 542) at det ikke finnes noen naturlig intuitiv forståelse av hvordan man skal bygge opp utfallsrommet. For eksempel har elevene problemer med å se at om man triller to terninger og skal sette opp utfallsrommet, må både 1,6 og 6,1 være med. Studien viser at det bare er et fåtall elever som har denne forståelsen. De fleste elever har imidlertid en intuitiv mening om at det er en relasjon mellom sannsynligheten og størrelsen på utfallsrommet. Disse observasjonene kan sees i sammenheng med Lecoutre, Durand og Cordier (1990) sine resultater i forbindelse med lik sannsynlighetsfeil knyttet til to hendelser. De trekker fram at om man skal avgjøre hvilken av to hendelser som er mest sannsynlig, vil flere ha problemer med å bestemme om en sekser og en femmer er mer sannsynlig enn to seksere. En har imidlertid ikke de samme problemene om sjanse aspektet til oppgaven er skjult. Disse resultatene samsvarer med Fischbein et al. (1991, p. 523) sin konklusjon om at mange sliter med å identifisere identiske matematiske strukturer i ulike praktiske situasjoner. Lecoutre et al. (1990, p. 571) tok forsøket med terningene et skritt lenger og brukte to terninger av ulike farger for å prøve å klargjøre utfallsrommet. Det ble først stilt spørsmål om hva sannsynligheten var for å få en femmer på den blå og en sekser på den røde, motsatt på rød og blå, og hva sannsynligheten var for å få sekser på begge terningene. Disse spørsmålene svarte respondentene korrekt på. Til tross for tiltaket, hadde dette liten påvirkning på respondentenes oppfattelse av utfallsrommet på det mindre spesifikke spørsmålet stilt av Fischbein et al. (1991, p. 542). Problemer med denne forståelsen identifiseres av Fischbein og Schnarch (1997, p. 101) som stabil og uavhengig av alder.

Fischbein (1975) avslutter sitt arbeid med å konkludere at intuisjoner om sannsynlighet i hovedsak ikke utvikles av seg selv. Dette betyr at vi ikke kan overlate forståelsen, tolkningen, evalueringen og bestemmelse av sannsynlighet til de primære intuisjonene.

2.4 Elevers typiske misoppfatninger i sannsynlighet

Det er avdekket en rekke av det som gjerne kalles misoppfatninger innenfor sannsynlighet. Begrepet misoppfatninger defineres av Brekke (2002, p. 10) som ufullstendige tanker knyttet til et begrep. Et av problemene i matematikkundervisningen er å få elevene til å forstå at deres ideer og forståelse av begreper ikke nødvendigvis alltid gjelder i nye situasjoner. Det er viktig at lærer klarer å skille mellom tilfeldige feil elevene gjør og misoppfatninger. Sistnevnte er et resultat av kunnskaper som ikke gjelder i alle situasjoner, og oppstår som oftest ved at eleven har prøvd å se sammenhenger og gi mening til det som er lært (ibid.). Savard (2014, p. 285) poengterer at begrepet misoppfatninger gjerne er misvisende nettopp fordi disse oppfatningene kan være gyldige i noen sammenhenger. Det foreslåes i stedet for å kalle dem for alternative oppfatninger. Jeg velger likevel å holde meg til begrepet misoppfatninger fordi det er dette som er mest benyttet i litteraturen.

Intuitive meninger som ikke stemmer overens med den faglige definisjonen, kan ha en sammenheng med misoppfatninger. Falk (1992, p. 205) konkluderer med at en intuitiv tro blir en misoppfatning når den brukes som en regel for å løse et problem. Et eksempel på en misoppfatning om sjanse er ifølge Kahneman et al. (1982, p. 24) gamblerens feilslutning. Denne dreier seg om at det er rettferdighet i loven om sjanse. Gambleren vil anta at rettferdigheten til for eksempel en mynt, vil gjøre opp for en serie med krone ved at den snart vil vise mynt. Dette er et av flere eksempler på misoppfatninger som er et resultat av representativitetsheuristikk.

2.4.1 Representativitet

Ifølge Tversky og Kahneman (1974, p. 1124) vil mennesker basere seg på representativitetsheuristikken når de stilles ovenfor spørsmål som for eksempel: ”Hva er sannsynligheten for at objekt A tilhører klasse B?". Eller: "Hva er sannsynligheten for at prosess B vil føre til hendelse A?". Denne innebærer at vi baserer sannsynligheten på i hvilken grad A er representativt for B. Et av problemene med at folk baserer seg på representativitetsheuristikken, er at de overser bakgrunnsinformasjon om sannsynlighet. Et eksempel på dette er om man får en beskrivelse av en person, og skal velge hvilket yrke det er størst sannsynlighet for at personen har. I slike situasjoner blir svaret ofte basert på informasjonen om personen. Informasjonen om de mest vanlige yrkene, blir ikke tatt med i vurderingen til tross for at dette vil påvirke sannsynligheten for at personen har et av yrkene. Tversky og Kahneman (1974, p. 1125) poengterer videre at mennesker vil svare ulikt på like sannsynlighetsspørsmål om spørsmålet ikke inneholder tilleggsinformasjon, eller om spørsmålet inneholder irrelevant informasjon. Et eksempel er i en situasjon hvor vi skal avgjøre om Lise er lege, eller lærer på småtrinnet. Informasjonen vi får i det ene tilfellet, er at Lise ble trukket ut blant 40% leger og 60% lærere på småtrinnet. I denne situasjonen vil de aller fleste svare at sannsynligheten for at Lise er lege er 0,4 og 0,6 for lærer på småtrinnet. En kan tenke seg en annen versjon av oppgaven der det i tillegg var gitt informasjon om at Lise var en 40 år gammel gift kvinne uten barn, med høye ambisjoner, hardtarbeidende, lovende på sitt felt og godt likt på arbeidsplassen. En slik beskrivelse kan føre til at en gjør en annen sannsynlighetsvurdering til tross for at informasjonen ikke gir grunnlag for å endre oppfatning av situasjonen. Ifølge Lecoutre et al. (1990, p. 568) vil mennesker i mangel på en spesifikk representasjon av problemet bruke andre representasjoner som fungerer i en annen situasjon. Dette kan sees i sammenheng med Kahneman (2012) sin beskrivelse av system 1 og at en gjerne har en tendens til å svare på enklere problem enn det en egentlig står ovenfor. Ifølge Fischbein og Schnarch (1997, p. 101) vil misoppfatningen knyttet til representasjon falle med alderen. Til tross for dette hevder Jones og Thoronton (2005, p. 74) at mennesker i alle aldre og erfaringer i kompleksiteten til sannsynlighet, er blitt observert i å bruke representativitet. Således er dette et nøkkelaspekt ved undervisning i emnet så vel som læring av emnet (ibid.).

Folk har også en tendens til å feilbedømme størrelsen på utvalget. De tenker gjerne at et utvalg på 15 av en populasjon på 200 er like representativt for populasjonen som et utvalg på 60. Dette karakteriseres av Kahneman et al. (1982, p. 25) som troen på ”loven om små tall”. Denne formen for misoppfatning vil øke med alderen (Fischbein & Schnarch, 1997, p. 101).

En annen del av sannsynligheten folk har misoppfatninger om er ifølge Tversky og Kahneman (1974, p. 1126), regresjon. Med dette menes regresjon mot gjennomsnittet. Det vil si at etter gode prestasjoner på et felt, for eksempel ved landing av et fly, vil neste forsøk mest sannsynlig være dårligere. Om den første landingen derimot var dårlig, vil personens prestasjon forventes å være bedre neste gang. Trenerne til flygerne misforstår dette konseptet og kobler i stedet for responsen deres mot elevenes prestasjoner som årsaken. Det vil si at de tror at en negativ respons fra dem vil forbedre resultatet til flygeren ved neste forsøk, mens en positiv respons vil forverre flygerens prestasjon.

2.4.2 Tilgjengelighet

Denne heuristikken baserer seg på at når vi skal evaluere sjansen for ulike hendelser, baserer vi svaret vårt på det vi klarer å forestille oss (Tversky & Kahneman, 1974, p. 1128). Tar vi for eksempel for oss sannsynligheten for at middelaldrene menn får hjerteinfarkt, vil svaret vårt bli påvirket av hvor mange middelaldrende menn vi kjenner som har fått hjerteinfarkt. Dette kan sees i sammenheng med det Kahneman (2012) trekker frem om at system 1 har en tendens til å oversette vanskelige problemstillinger til noe enklere. Her velger mange å heller svare på spørsmålet: ”Hvor mange menn over 50 kjenner jeg som har fått hjerteinfarkt?”, i stedet for å svare på det egentlige spørsmålet: ”Hva er sannsynligheten for å få hjerteinfarkt om man er en middelaldrene mann?”. Denne sammenkoblingen stemmer overens med Fischbein og Schnarch (1997, p. 97) sine observasjoner om at vi lett integrerer informasjon som er lett tilgjengelig og ignorerer informasjon som krever mer innsats. Erfaringer har vist oss at hendelser som skjer oftere, er lettere å huske enn hendelser som skjer mer sjeldent (Kahneman et al., 1982, p. 163). Med bakgrunn i dette ledes man gjerne til å svare på spørsmål som omhandler sannsynlighet ved å prøve å forestille seg hendelsen. Tilgjengelighetsheuristikken benytter seg av styrken til assosiasjon som base til å bedømme frekvenser. Kahneman et al. (1982, p. 164) poengterer videre at tilgjengelighet også blir påvirket av faktorer som ikke har noe med frekvensen å gjøre. Med bakgrunn i dette vil bedømmelser tatt ut fra denne heuristikken kunne føre til feil. Et eksempel på dette kan være en situasjon der en psykolog skal vurdere om det er grunn for å anta at en pasient vil begå selvmord. I et slikt tilfelle kan det tenkes at psykologen benytter seg av tilgjengelighetsheuristikken og prøver å sammenligne pasienten med tidligere pasienter med lignende bakgrunn. I dette tilfellet er det stor sannsynlighet for at denne heuristikken vil føre til feilslutninger fordi pasienter som til slutt endte opp med å ta sitt eget liv, er mer minneverdig enn de som ikke gjorde det. Dermed kan man anta at psykologen hadde husket flere tilfeller som endte i selvmord uavhengig av om dette faktisk var tilfellet eller ikke.

2.4.3 Ulik begrepsforståelse kan føre til problemer

Fischbein et al. (1991, p. 528) trekker frem at elever ofte har en oppfatning av mange av de matematiske begrepene knyttet til sannsynlighetsregning. Disse oppfatningene baserer seg på erfaringer eleven har med ordet, og er blant annet avhengig av den kulturen de er en del av. Fischbein et al. (1991, pp. 528-529) argumenterer videre for at det dermed kan hjelpe elevene i deres forståelse av sannsynlighetsregning om man tar hensyn til dette i introduksjonen til temaet. Dette kan sees i sammenheng med diagnostiske oppgaver slik det beskrives av Brekke (2002, pp. 15-16). I videre undervisning vil det således være viktig at lærer tar seg tid til å gi elevene de ”riktige” erfaringene knyttet til tema og sette i gang debatt for å klargjøre de matematiske betydningene av begrepene (Brekke, 2002, p. 19). Dette samsvarer med Konold (1991) som indikerer at et av problemene rundt undervisningen av sannsynlighet er at lærer og elever ikke forstår hverandre. Årsaken til dette er gjerne knyttet til ulike tolkninger og forståelser av fagbegreper. Disse problemene kan settes i sammenheng med Piagets konstruktivisme, hvor elever vil prøve å sette ny kunnskap i forbindelse med de kunnskapene de allerede har (Evenshaug & Hallen, 1993). Dette understreker viktigheten av å kartlegge elevenes oppfatninger og dermed ta utgangspunkt i dette for videre undervisning.

Bar-Hillel og Falk (1982, p. 109) diskuterer språkets innvirkning på oppgaven: ”Mr. Smith er far til to. Vi møter ham gående på gaten sammen med en ung gutt som han stolt presenterer som sin sønn. Hva er sannsynligheten for at Mr. Smiths andre barn også er en gutt?”. Bar Hillel og Falk (1982, p. 120) trekker frem at måten oppgaven er formulert på spiller en rolle for hvordan informasjonen den gir blir tolket. Ifølge Bar-Hillel og Falk (1982, p. 120) er hvordan en tolker og modellerer et problem avhengig av svaret på spørsmålet: ”Hvordan fikk jeg denne informasjonen?”, noe som kan antas å enkelte ganger føre til problemer. Det kan for eksempel tenkes at Mr. Smith i oppgaven presentert over er del av en kultur der guttebarn blir favorisert. Om Mr. Smith har ett guttebarn og ett jentebarn vil det i så fall ikke lengre være tilfeldig hvilket av barna han er ute og går tur med. Således kan dette tenkes å påvirke hvordan oppgaveløseren tolker informasjonen gitt. Videre poengterer Bar-Hillel og Falk (1982, p. 120) at spørsmål hvor den betingede hendelsen faktisk oppfattes som informasjonen gitt, bare finnes i skolebøker. For oppgaven presentert over vil en slik formulering ha vært: ”Hva er sannsynligheten for at Smith har to sønner gitt at Smith har minst en sønn?” Denne formuleringen blir av Bar-Hillel og Falk (1982, p. 121) definert som utvetydig. Det kan likevel tenkes at en på norsk bør være obs på bruken av begrepet minst. Minst kan i det norske språket brukes på flere ulike måter (Minst, u.å.). Det kan blant annet beskrive noe eller noen. Minst kan referere til en person som er mindre enn andre i størrelse. Et eksempel er, Lise er minst av oss. Det kan også referere til alder, der den yngste personen gjerne omtales som minst eller minstemann. Sett i sammenheng med poengene til Fischbein et al. (1991) som er presentert tidligere i delkapittelet kan det tenkes at spørsmålet som Bar- Hillel og Falk (1982, p. 121) legger frem ikke er så utvetydig som antatt.

2.4.3.1 Hell

Hell er et eksempel på et begrep mange har et forhold til. Årsaken ligger nok i at dette begrepet ofte benyttes i forbindelse med spill eller gambling. Til tross for at hell er noe som defineres som ukontrollerbart er det mange som syntes å ha den oppfatningen at det er mulig å kontrollere utfall av hendelser basert på sjanse. Dette er spesielt tydelig om vi ser på menneskers atferd i forbindelse med gambling. Hver gambler har sine ”teknikker” for hvordan de for eksempel kan få ønsket antall øyne ved å trille terninger. Videre trekker Kahneman et al. (1982) frem at mennesker ofte ikke klarer å reagere annerledes på kontrollerbare og ukontrollerbare hendelser. Dette fenomenet kommer også frem i Fischbein et al. (1991, p. 542) sine resultater. På spørsmål om hva det er best å satse på av 10 eller 7 som summen av øynene på to terninger, svarer noen av respondentene at det er det samme, det eneste som må til for å satse riktig, er hell (Fischbein et al.1991, p. 542).

2.4.3.2 Sikkert

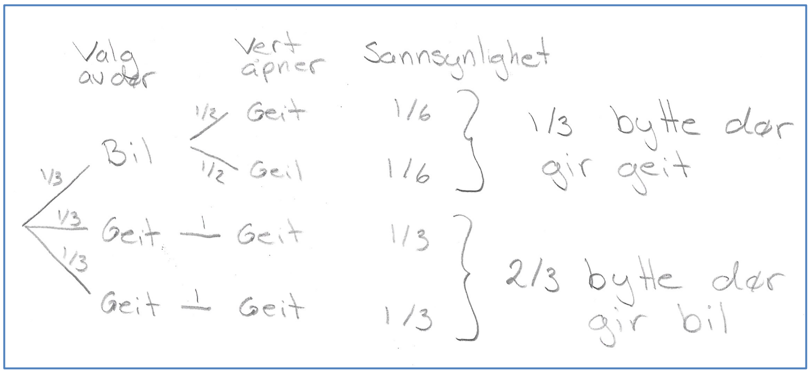
I studien til Fischbein et al. (1991, p. 526) kommer det frem at mange elever også har problemer med å forstå begrepet sikkert. I spørsmålet om det er umulig, mulig eller sikkert å få et tall ≤ 7, når en triller en terning, svarte bare 63%, av elevene på barneskolen riktig (at hendelsen er sikker). Det viser seg at selve konseptet sikkerhet egentlig er mer komplekst enn det som gjerne antas og at betydningen av begrep som mulig, utvikles tidligere. I intervju med elever kom det frem at begrepet "sikkert" i barnets sinn blir delt opp i de mulighetene de klarer å se for seg (Efraim Fischbein et al., 1991, p. 528). Noe som igjen kan knyttes til tilgjengelighetsheuristikken. Barn svarer ifølge Fischbein og Gazit (1984, p. 8) noen ganger at det er sikkert at faren kommer hjem fra arbeid senere den dagen. Årsaken til dette kan tenkes å være at det er den eneste situasjonen de kan se for seg. Det er flere problemer knyttet til spørsmålet i seg selv, for eksempel vil mange barn forveksle umulig med sjeldent. Om noe skjer sjeldent vil barn gjerne svare at hendelsen er umulig. Fischbein et al. (1991, p. 258) konkluderer dermed med at man ikke kan forvente at betydningen av begrepene vil utvikle seg spontant hos barn.

2.4.3.3 Tilfeldig

Det har vist seg at mange sliter med å forstå begrepet tilfeldig (Falk & Konold, 1997, p. 301). Dette til tross for at begrepet ofte blir brukt i mange ulike situasjoner. I studien til Falk and Konold (1997) kommer det frem at en gjerne ser på sekvenser av hvitt og svart som mindre tilfeldige om det er lengre kontinuerlige soner med for eksempel svart. Dette til tross for at disse sonene er et resultat av tilfeldighet. Dette stemmer med Fischbein (1975) sine resultater om at man forventer en endring etter lange perioder med et bestemt utfall. Mennesker viser dermed det vi gjerne ser på som en positiv bias og vil se sekvenser som er i overkant alternerende som tilfeldige. Det blir påstått at denne biasen er en rasjonell mottakelighet for å tidlig oppdage potensielt mer informative sammenhenger. Når det kommer til tilfeldighet innebærer dette fenomenet uforutsigbarhet, mangel på mønster og mangel på kontroll over utfall (Borovicnik, 2011, p. 72). Borovicnik (2011, p. 75) hevder at om det beste alternativet alltid ble belønnet, ville det være mulig å rette på misoppfatninger på denne måten. Problemet er at dette ikke vil være tilfellet når det er snakk om tilfeldige hendelser.

2.4.4 Troen på uniformitet

Falk (1992) beskriver denne misoppfattelsen med bakgrunn i en intuitiv tro innenfor betinget sannsynlighet. Troen på uniformitet defineres av Falk (1992, p. 202) som tilfeller der en vurderer de gjenværende alternativene som like sannsynlige. Et eksempel der denne feilslutningen kommer frem, er Monty Hall-problemet (Falk, 1992, p. 203). I korte trekk er dette et gameshow der deltageren skal velge en av tre dører. Bak en av dørene er det en bil mens bak de to andre er det en geit. Deltageren velger en av dørene. Deretter åpner TV-verten en av dørene som skjuler en geit, og deltageren må vurdere om han vil bytte dør eller beholde den døren han har valgt. Etter at verten har åpnet en dør og vist en geit, vil mange mene at sannsynligheten for at bilen er bak den døren de valgte eller den døren verten ikke åpnet er den samme, altså 50% (Falk, 1992, p. 203). De som mener dette kan sies å benytte misoppfatningen om troen på uniformitet i sin vurdering. Den riktige vurderingen er at det er større sannsynlighet for å vinne bilen om en velger å bytte dør. Den matematiske løsningen bak dette problemet er illustrert i Figur 1.



Figur 1: Matematisk løsning på Monty Hall problemet

Falk (1992, p. 204) beskriver denne misoppfatningen som en primærintuisjon og henviser til Fischbein (1987) som karakteriserer intuisjoner som umiddelbare og selv-forklarende. Falk (1992, p. 204) begrunner videre denne sammenkoblingen med at det sjeldent finnes noen tvil når denne troen på uniformitet blir brukt. Som nent i kapittel 2.3.2 henviser også Lecoutre et al. (1990) til at en har en tendens til å gi to hendelser lik sannsynlighet selv om de to hendelsene ikke er like sannsynlige. Situasjonen Lecoutre et al. (1990) beskriver er imidlertid en sammensatt hendelse. Det kan dermed tenkes at troen på uniformitet, ikke er en misoppfatning som bare sees i sammenheng med betinget sannsynlighet.

2.4.5 Ingen nyhet, ingen endring

Misoppfatningen ingen nyhet ingen endring, er lettest å forklare om man tar utgangspunkt i et eksempel:

> Vi har tre kort, ett av kortene er rødt på begge sider, ett er rødt på en side og hvitt på den andre siden og ett er hvitt på begge sidene. Deretter trekker vi et vilkårlig kort og legger det på et bord uten å se hvilken farge det er på baksiden av kortet. Siden som vender opp er rød. Hva er sannsynligheten for at også den andre siden er rød?

Når man skal besvare denne oppgaven, kan man bli fristet til å tenke at man hele tiden visste at siden som vender opp enten kan være rød eller hvit. Dermed vil informasjonen om at den var hvit ikke karakteriseres som en nyhet av noe slag. Hvis ikke noe nytt er lært vil heller ikke sannsynligheten endre seg (Falk, 1992, p. 202). Kennis og Vogeli (2006, p. 39) karakteriserer dette som at betingelsene blir ignorert. Misoppfattelsen av ”ingen nyhet, ingen endring” karakteriseres av Falk (1992, p. 207) som veldig attraktiv. En slik misoppfattelse kan tenkes å være veldig sentral i forbindelse med betinget sannsynlighet. Grunnen til det er at du i oppgaver innenfor betinget sannsynlighet får vite at en hendelse, som du allerede visste var mulig, har inntruffet.

De neste to typer av misoppfatninger er tatt med for å gi et overblikk over flere misoppfatninger. Det ble imidlertid i løpet av prosessen tatt en del valg, blant annet med tanke på utvelgelse av oppgaver til undersøkelsen, som førte til at disse ikke ble aktuelle i diskusjonen.

2.4.6 Kontingenstabeller og statistiske fakta

Når man skal evaluere hendelser i forhold til informasjonen gitt i slike tabeller, er det viktig at all informasjonen blir tatt hensyn til og vurdert. Kahneman et al. (1982, p. 212) trekker imidlertid frem at mange har en tendens til å overse deler av tabellen og således baserer sine antagelser på bare deler av informasjonen. Dette fører til at mønster som symptom A korrelerer med sykdom, kan virke fremtredende. Dette til tross for at nærmere inspeksjon ville vist at det faktisk er langt flere med symptomet som ikke er syke, enn de som faktisk er syke. Dette kan sees i sammenheng med det Kahneman (2012, p. 184) sier om at statistiske grunnfrekvenser generelt blir undervektet og gjerne ignorert om det er gitt mer spesifikk informasjon. Spesielt blir slik informasjon ignorert om den presenteres som en motvekt til informasjon som leseren lettere kan relatere til, og bruke direkte for å svare på spørsmålet. Dette fordi sistnevnte taler til system 1. Kahneman (2012, pp. 185-186) trekker videre frem at måten informasjonen legges frem på, vil kunne påvirke svaret på en statistisk oppgave. Om vi legger frem all informasjon på en slik måte at den påvirker elevenes følelser, og de umiddelbart klarer å se sammenhengene mellom informasjonen og oppgaven, vil de sannsynligvis ta all informasjonen med i sine beregninger.

2.4.7 Tilpasninger og forankringer

Det viser seg at mennesker som benytter denne heuristikken, setter opp gale sannsynlighetsestimat med utgangspunkt i en startverdi som er blitt tilpasset på bakgrunn av informasjon som er gitt i problemet (Jones & Thoronton, 2005, p. 74). For eksempel vil et estimat på multiplikasjonsstykket 1x2x3x4x5x6x7x8 være betydelig mindre enn et estimat på multiplikasjonsstykket 8x7x6x5x4x3x2x1. Dette til tross for at disse regnestykkene er helt like. Årsaken til dette ligger i at en gjerne regner de første multiplikasjonene for så å gi et estimat basert på dette (Kahneman et al., 1982, p. 15). Mennesker har en tendens til å overestimere sannsynligheten til sammensatte hendelser og underestimere sannsynligheten til disjunkte hendelser. En elev som overestimerer sannsynligheten for sammensatte hendelser, vil mene at det er større sannsynlighet for å få to etterfølgende seksere på en terning, enn en enkel sekser i det neste kastet. En elev som derimot benytter seg av underestimering av disjunkte hendelser, vil mene at det er større sannsynlighet for å få seks når vi triller en terning en gang, enn å få minst en sekser om man triller terningen tre ganger (Jones & Thoronton, 2005, p. 75). Disse feilslutningene kan ifølge Kahneman et al. (1982, pp. 14-15) forklares med effekten av forankring.

2.5 Løsningsstrategier innenfor sannsynlighetsregning

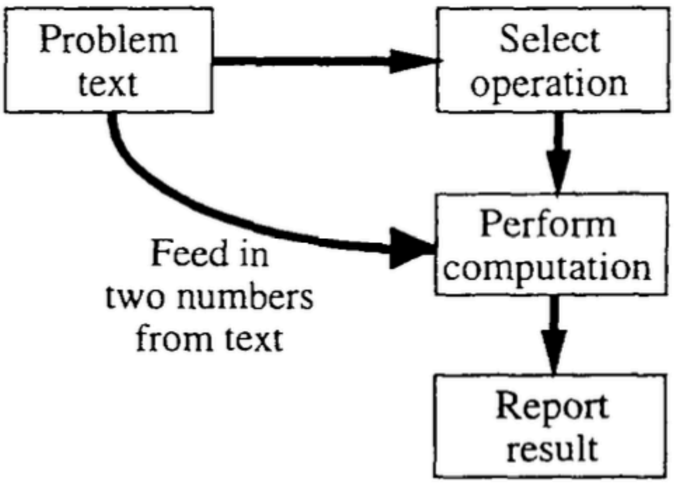
Strategikunnskap er ifølge Mayer (1992, pp. 458-459) en av flere kunnskaper en problemløser trenger for å løse matematiske tekstoppgaver[4]. Strategikunnskap dreier seg om hvordan en kan bruke ulike deler av kunnskapen sin til å planlegge, generere og overvåke løsningen til et problem (Mayer, 1992, p. 459). Ifølge Ostad (2008, p. 15) er strategi et begrep som i matematikk sees i sammenheng med løsningsprosessen.

[4] Mayer (1992) bruker begrepet mathematical story problems, dette har jeg oversatt til matematiske tekstoppgaver.

Videre trekker han frem at strategibegrepet både har en vid og en trang betydning. I den vide betydningen blir strategier betraktet som store enheter satt sammen av forskjellige kognitive og metakognitive deler. Videre trekkes det frem at strategi involverer alle prosessene som er involvert når en oppgave innenfor matematikkfaget skal løses (ibid.). Den trange betydningen henviser til de fremgangsmåtene som brukes for å løse en gitt oppgave (Ostad, 2008, p. 15). Dette kan tolkes til å være alle bevisste valg en elev tar for å finne svaret på en matematikkoppgave. Det er den trange betydningen jeg vil benytte når jeg videre i oppgaven snakker om løsningsstrategier.

Strategiene elevene benytter seg av, kan være knyttet til ulike oppgaver. Slike strategier karakteriseres av Ostad (2008, p. 16) som oppgavespesifikke strategier. Oppgavespesifikke strategier inneholder alle de ulike alternativene elevene har tilgjengelig når de skal løse oppgaver i matematikk (Ostad, 2008, p. 16). Slike strategier finnes i mange ulike former og kan være et enkelt trinn eller en prosess satt sammen av flere steg. Videre deles gjerne slike strategier i Backupstrategier og retrievalstrategier. Retrievalstrategier er når elevene bruker enheter fra lageret sitt av kunnskapsenheter (Ostad, 2008, p. 16). Backupstrategier defineres som strategier som benyttes når eleven ikke tidligere har løst lignende problem. Disse kjennetegnes dermed av at eleven ikke kan hente frem en løsningsmetode som passer perfekt til akkurat den oppgaven (Ostad, 2008, p. 16). Videre poengterer Ostad (2008, p. 20) at valg av strategi kan være assosiativt. Dette baserer seg på at en person har et sett av mulige løsningsstrategier tilgjengelig. Hver av disse løsningsstrategiene er assosiert med en selvsikkerhet som henger sammen med sannsynligheten for å lykkes, sett i sammenheng med personens erfaringer.

Valg av løsningsstrategi kan også tenkes å bli påvirket av den didaktiske kontrakten. Den didaktiske kontrakten beskrives av Brousseau (2002, pp. 31-32) som et sett av hovedsakelig implisitte, men noen ganger eksplisitte regler. Disse reglene har både elevene og lærer ansvar for. I dette ligger det at elevene har noen forventinger til lærer om hvordan undervisningen skal foregå, på samme måte som lærer har forventinger om hva elevene selv må ta ansvar for. Den didaktiske kontrakten blir påvirket av lærer, elever og situasjonen Man kan derfor ikke snakke om en bestemt kontrakt. Når den didaktiske kontrakten brytes ved for eksempel at lærer endrer undervisningsmønster, poengterer Jensen (2005, p. 130) at man kan møte motstand fra elevene. Dette kan være fordi endringen ikke passer inn i det elevene ser på som god matematikkundervisning, og de oppfatter derfor at lærer ikke oppfyller sin del av den didaktiske kontrakten. Videre poengterer Jensen (2005, p. 130) at det kan ta tid før eleven godtar endringen. Deliyianni, Monoyiou, Elia, Georgiou, and Zannettou (2009, p. 99) trekker frem at når elever løser problemoppgaver eller prinsipielt uvanlige matematiske problem, kan deres måte å angripe oppgaven på forklares av deres respons på den didaktiske kontrakten. For eksempel kan den didaktiske kontrakten diktere at tall skal inkluderes i alle løsninger av matematiske problem. Greer (1997, p. 294) forklarer at barn i problemløsningsprosessen leser oppgaven overfladisk og velger regneoperasjon basert på funn av enkelte ord eller beskrivelser i oppgaveteksten. Etter at utregningen er gjennomført, vil de sjeldent gå tilbake for å sjekke svarets gyldighet (ibid.). Denne fremgangsmåten er beskrevet i Figur 2.



Figur 2: Overfladisk løsning til tekstoppgaver. Hentet fra Greer (1997, p. 295)

Deliyianni et al. (2009, p. 99) poengterer at tendensen beskrevet av Greer (1997, p. 294) kan sees i sammenheng med den didaktiske kontrakten. Dette forklarer Deliyianni et al. (2009, p. 99) med at denne mekaniske løsningsstrategien blir forsterket av den vanlige måten å arbeide med aritmetiske operasjoner i undervisningen. På samme måte kan det tenkes at elevenes løsning av sannsynlighetsoppgaver blir påvirket av den didaktiske kontrakten og hvilke løsningsstrategier elever forbinder med det å løse matematikkoppgaver. Greer (1997) sin forklaring av hvordan problemløsningsprosessen er hos barn, kan på noen områder minne om beskrivelsen Zahner og Corter (2010, p. 181) gir av elevers løsning av problemoppgaver i sannsynlighetsregning. Først tolker elevene oppgaveteksten og danner et mentalt bilde av situasjonen. Deretter prøver de å gjengi problemet i matematiske termer og om mulig relatere det til kjente matematiske formler. Etter dette vil elevene utvikle en plan for å løse problemet, og til slutt vil de utføre strategien (Zahner & Corter, 2010, p. 181). Videre poengterer Zahner og Corter (2010, p. 181) at etter disse stegene blir det noen ganger sjekket om svaret er gyldig.

Zahner og Corter (2010, p. 179) henviser til forskning utført av Spelke og de Hevia (2009), Edens og Potter (2008) og Uesaka, Manalo og Ichikawa (2007) og sier at disse studiene antyder at ytre representasjoner forenkler problemløsningsprosessen. Zahner og Corter (2010, p. 179) understreker at de var interessert i å studere romlige termer som diagrammer, tabeller og bilder og ikke utregninger og formler. For å karakterisere den delen av ytre representasjoner som de benytter seg av, valgte de å bruke termen visuelle representasjoner. For å løse tekstoppgaver i matematikk må man først lage seg en indre representasjon av problemet. Visuelle representasjoner kan være til hjelp i dette steget av problemløsingen. Ved å bruke visuelle representasjoner trenger ikke eleven å holde all informasjonen fast i minnet, men kan strukturere problemet på for eksempel et papir. Studiene nevnt over har imidlertid ikke fokusert på problemløsning innenfor sannsynlighetsregning. Ifølge Zahner og Corter (2010, p. 179) er det bare et fåtall med studier som har tatt for seg visuelle strategier innenfor problemløsning i sannsynlighetsregning. Som følge av dette er ikke bruk av visuelle strategier i sannsynlighetsregning undersøkt så godt at vi har en fullstendig forståelse av effekten til visuelle strategier i dette emnet (ibid.). Zahner og Corter (2010, p. 184) kategoriserer de visuelle representasjonene på følgende måte: En visuell representasjon blir betraktet som bilde om den prøver å representere den virkelige situasjonen, uten å bruke symboler. Om eleven gir en liste av utfall i et relevant utfallsrom, vil denne visuelle representasjonen karakteriseres som utfallslisting. En visuell representasjon blir karakterisert som et valgtre om elevene prøver å strukturere informasjonen i et valgtre. Dersom elevene presenterte informasjonen fra oppgaven som frekvenser eller sannsynligheter i en kontingenstabell, vil denne visuelle representasjonen karakteriseres som kontingenstabell. Visuelle representasjoner blir karakterisert som venndiagram om elevene brukte et venndiagram for å representere relasjonene mellom flere sett (ibid.).

Zahner og Corter (2010, p. 185) ønsket spesielt å undersøke de strategiene som var blitt undervist. De definerte derfor en kategori av visuelle løsningsstrategier, som de kalte for ”ny grafisk representasjon”. Denne kategorien skulle inneholde strategier som ikke var presentert i undervisningen, men som elevene brukte i undersøkelsen. Zahner og Corter (2010, p. 185) poengterer imidlertid at noen av strategiene som i deres studie falt inn i denne kategorien, kunne ha blitt undervist i andre kurs. Den siste kategorien Zahner og Corter (2010, p. 187) definerte som visuell løsningsstrategi, kalte de for ”delvis reorganisering av den gitte informasjonen”. Reorganisering gjør det blant annet lettere for nybegynnere i problemløsningsprosessen å sjekke hvilken informasjon som trengs eller mangler (ibid.).

2.6 Avsluttende kommentarer

I dette kapittelet er det blitt presentert ulike problemer knyttet til sannsynlighetsregning. Noen problemer vi møter er knyttet til hvordan vi som mennesker tenker. System 1 karakteriseres av Kahneman (2012) som at det virker raskt og intuitivt og det er dermed gjennom dette systemet at våre intuitive meninger kommer frem. Det har kommet frem i dette kapittelet at de intuitive meningene mange har knyttet til sannsynlighet, ofte er gale. Intuitive meninger som ikke stemmer overens med den faglige definisjonen kan føre til misoppfatninger (Falk, 1992, p. 205). Noen av misoppfatningene som er blitt presentert baserer seg på representasjonsheuristikken og tilgjengelighetsheuristikken. Ellers er også misoppfatninger som ingen nyhet ingen endring og troen på uniformitet blitt presentert. Et annet problem som trekkes frem i forbindelse med sannsynlighet er at lærer og elever gjerne ikke forstår hverandre (Konold, 1991).

3. Forskningsdesign og metode

I dette kapittelet vil jeg diskutere de ulike valgene jeg har tatt med tanke på hvordan jeg ønsket å gjennomføre studien. Jeg vil dermed diskutere valg av metode, rammene rundt datainnsamling og hvordan analysen foregikk.

De viktigste kjennetegnene på forskningsmetode er i følge Christoffersen og Johannessen (2012, p. 16) systematikk, åpenhet, dokumentasjon og grundighet. Normalt skilles det mellom tre forskningstyper (Christoffersen & Johannessen, 2012, p. 17). De tre forskningstypene er naturvitenskap, humaniora og samfunnsvitenskap. Om man skal forske på det som skjer i skolen må man ifølge Christoffersen og Johannessen (2012, p. 16) benytte den samfunnsvitenskapelige forskningsmetoden. Denne innebærer hvordan vi må gå frem for å få informasjon om virkeligheten, hvordan analysere informasjonen, og hva informasjonen forteller om samfunnsmessige forhold. Elever er en del av et samfunn og et slikt samfunn kjennetegnes ved at det består av kommuniserende og tolkende mennesker (Christoffersen & Johannessen, 2012, p. 17). Videre poengterer Christoffersen og Johannessen (2012, p. 17) at forskning på samfunnsfenomener krever et mangfold av fremgangsmåter og metoder.

Forskningsprosessen går ifølge Christoffersen og Johannessen (2012, p. 18) vanligvis over de fire fasene forberedelse, datainnsamling, dataanalyse og rapportering. I korte trekk kan man si at forberedelsen dreier seg om å lese seg opp på relevant forskning til det emnet du ønsker å studere. Deretter presiserer man hva en ønsker å undersøke og hvorfor. Datainnsamling dreier seg i hovedsak om å samle inn data og rammene rundt denne innsamlingen. Dataanalyse går ut på å tolke og analysere innsamlet data. Rapportering dreier seg om å presentere resultatet av forskningen i en skriftlig rapport. Det skilles ofte mellom kvalitativ og kvantitativ forskning. (Christoffersen & Johannessen, 2012, pp. 18-19)

Den kvalitative forskningen kan ifølge Christoffersen og Johannessen (2012, p. 17) karakteriseres som mer fleksibel og med større grad av spontanitet enn den kvantitative forskningen. I kvalitativ forskning stilles det åpne spørsmål, og spørsmålsstillingen kan variere. De åpne spørsmålene åpner opp for at deltagere kan formulere svar med egne ord. Dermed gir metoden mulighet for mer utfyllende og detaljerte svar. Forskeren har i kvalitativ forskning mulighet til å reagere på svar og tilpasse neste spørsmål. En kvalitativ forskning krever at forsker er i stand til å stille spørsmål, tolke svaret og respondere ut fra spørsmålene. Svarene er heller ikke nødvendigvis sammenlignbare. (Christoffersen & Johannessen, 2012, p. 17)

Kvantitativ forskning er normalt sett lite fleksible. Når det kommer til spørreskjema er de laget på forhånd og alle respondentene får de samme spørsmålene i den samme rekkefølgen og med de samme svaralternativene. På grunn av den lille fleksibiliteten til slike studier kan resultatet i større grad sammenlignes på tvers av deltagere og settinger. En slik form for forskning krever at forskeren har gode kunnskaper om hvilke spørsmål som er viktige, hvordan spørsmålene bør stilles og mulige svar respondentene kan gi. (Christoffersen & Johannessen, 2012, p. 17)

Det er mulig å kombinere kvantitative og kvalitative metoder i en og samme undersøkelse. Dette kalles gjerne for blandet metode og er den metoden jeg har valgt å bruke i studien om elevers visuelle løsningsstrategier til sannsynlighetsoppgaver.

3.1 Blandet metode

Blandet metodeforskning defineres av Johnson og Onwuegbuzie (2004, p. 17) som klassen av forskning hvor forskeren blander og kombinerer kvantitative og kvalitative forskningsteknikker, metoder, tilnærminger, konsept eller språk i en og samme studie. Dette samsvarer med Creswell og Garretts (2008, p. 322) definisjon. Denne sier i grove trekk at blandet metode er en tilnærming til undersøkelse hvor forskeren på en eller annen måte sammenkobler både kvantitative og kvalitative data for å få en sammensatt forståelse av forskningsspørsmålet. Om man ser på kvalitative metoder som en ende av en skala og kvantitative metoder som den andre enden av skalaen, vil blandet metode være hele spekteret mellom (Johnson & Onwuegbuzie, 2004, p. 15). Målet med å benytte en blandet metode er ifølge Johnson og Onwuegbuzie (2004, p. 15), å utnytte styrkene og minimere svakhetene til både kvantitative og kvalitative metoder. Det er viktig at forskeren blander metodene på en slik måte at det er mest hensiktsmessig for den studien som skal gjennomføres (Johnson & Onwuegbuzie, 2004, p. 16). Dette åpner opp for et vidt spekter av ulike former for undersøkelser, der de kvalitative og kvantitative metodene vektlegges og blandes i ulik grad.

Sammenlignet med kvalitative og kvantitative metoder, er blandete metoder ganske nyetablert (Lund, 2012, p. 255). Dette til tross for at det gjerne er blitt benyttet blandete metoder i tidligere forskning uten at det er referert til som en blandet metode. Creswell og Garrett (2008, p. 325) trekker frem en del utfordringer, blant annet med tanke på forskningsspråket som hverken er kvalitativt eller kvantitativt, og utfordringene i forbindelse med forskningsdesignene som er tilgjengelig for å gjennomføre en studie med blandet metode.

3.2 Valg av metode og design

Jeg har i min studie valgt å benytte en blandet metode som er beskrevet i kapittel 3.1. Når en bestemmer seg for å gjennomføre en blandet metodeforskning, er det viktig at denne blandingen av metoder har et klart formål (Creswell & Plano Clark, 2011, p. 61). Jeg valgte blandet metode fordi jeg først ønsket å samle inn data om hvilke ulike løsningsstrategier elevene benyttet seg av i møte med ulike sannsynlighetsoppgaver. Deretter ønsket jeg å gå mer i dybden på hvorfor disse strategiene ble valgt, for så å se valgene i lys av misoppfatninger. For å klare dette måtte jeg først samle inn kvantitativ data i form av et oppgavebasert spørreskjema. Deretter kunne jeg bruke resultatet fra spørreskjemaet til å velge ut respondenter til et dybdeintervju. I dette tilfellet kan en si at resultatet fra spørreskjemaet gjorde det lettere å velge ut respondenter til det kvalitative intervjuet. En slik form for argumentasjon for å drive blandet metode karakteriseres av Bryman (2006, p. 106) som stikkprøveutvalg. Intervjuet med de utvalgte elevene, kunne gitt meg dypere innblikk i strategivalg og se dem i lys av misoppfatninger. De kvalitative intervjuene kan altså brukes for å forklare noen av de funnene som kom frem fra den kvantitative undersøkelsen. Denne argumentasjonen for å drive blandet metode karakteriseres av Bryman (2006, p. 106) som forklaring. Det kan også tenkes at de kvalitative dataene kunne gi litt mer utfyllende informasjontil de kvantitative funnene. En slik argumentasjon for å drive blandet metode forskning karakteriseres av Bryman (2006, p. 106) som illustrasjon.

Metoden jeg valgte er knyttet til forskningsspørsmålene mine, noe som samsvarer med Rasinger (2013, p. 62) sin kommentar om at forskningsspørsmålet bestemmer metoden. For å få et bredere innblikk i hvilke strategier elever benytter seg av, kunne jeg brukt et oppgavebasert intervju med alle elevene, i likhet med Zahner og Corter

(2010). Denne informasjonen valgte jeg imidlertid å hente inn i form av et oppgavebasert spørreskjema på grunn av tidsbegrensningene til prosjektet. Hensikten med intervjuet var at det kunne gi meg en dypere innsikt i hvorfor elevene valgte de ulike løsningsstrategiene, og hvordan de stiller seg til andre løsninger. Det kunne også gi meg svar på om elevene hadde kjennskap til andre løsningsstrategier enn de løsningsstrategiene elevene valgte å bruke, og hvorfor de valgte akkurat den strategien. For å besvare spørsmålet hvordan dette kan sees i sammenheng med misoppfatninger, fant jeg det mest hensiktsmessig å benytte intervju med elevene. Dette samsvarer med Kvale og Brinkmanns (2015, p. 135) poeng om at forskningsspørsmål formulert med ordet *hvordan* ofte besvares best av kvalitative intervjuer. Kvalitative intervjuer ville gi meg mulighet til å presentere andre løsningsmetoder, og se hvordan dette påvirker elevenes refleksjon rundt oppgaver og diskutere dette opp mot typiske misoppfatninger. Disse betraktningene er årsaken til at jeg i min studie har valgt å benytte blandet metode.

Det hadde på mange måter vært en fordel å gjennomføre en pilottest i forkant av undersøkelsen. Den kunne hjulpet meg med å teste verktøyene jeg benytter meg av, som spørreskjema og intervjuguide, noe som ville ha økt deres reliabilitet og validitet (Rasinger, 2013, p. 12). Til tross for at dette kanskje er ekstra viktig for masterstudenter som har lite erfaring fra forskningsfeltet, ble dette nedprioritert. Årsaken til det er at masteroppgaven er en 30 studiepoengs oppgave og en pilottest var vanskelig å gjennomføre innenfor tidsrammen.

3.3 Meldeplikt

Prosjektet mitt var meldepliktig etter Personopplysningsloven (2000, §31) og ble meldt til Norsk senter for forskningsdata (NSD). Tillatelse fra NSD ble hentet inn, og kan leses i vedlegg 1.

3.4 Datainnsamling

I forkant av undersøkelsen ble det formulert og utlevert et skriftlig samtykkeskjema i tråd med Norsk senter for forskningsdata (u.å) sine retningslinjer (vedlegg 2). Dette ble gjort for å innhente samtykke av respondentene, og av etiske hensyn. Det ble blant annet forklart bakgrunnen for prosjektet, hva deltagelse i undersøkelsen innebar, hvordan informasjonen om dem vil bli behandlet, hva de kunne forvente av meg, og at de til enhver tid kunne trekke sitt samtykke. I informasjonsskrivet ble det også gitt informasjon til elevene om at jeg ønsket å hente ut informasjon om deres karakterer. Denne delen av prosjektet ble imidlertid tatt bort av etiske hensyn, som vil bli nærmere forklart i kapittel 3.4.3.

Innsamlingen ble utført i to trinn. Først ble det hentet informasjon i form at et oppgavebasert spørreskjema fra 38 respondenter. Disse respondentene var hentet fra 1. klasse og 3.klasse på videregående trinn. Deretter ble det gjennomført to fokusgruppeintervju, ett med tre respondenter og ett med to respondenter. Begrunnelse for valg av respondenter til det oppgavebaserte spørreskjemaet og fokusgruppe intervjuet vil bli presentert i kapittel 3.4.3.

3.4.1 Kartleggingstest, kvantitativ metode

Å utarbeide spørsmålene til et spørreskjema er utfordrende på flere måter. Det er blant annet viktig at respondentene ikke misforstår spørsmålet, og at de besvarer dem så godt de kan med deres kunnskaper (Rasinger, 2013, p. 61). Oppgavene til spørreskjemaet ble valgt ut med bakgrunn i forskningsspørsmålet. Jeg ønsket å få innblikk i ulike visuelle løsningsstrategier som elever benytter seg av, i tillegg til at jeg ønsket å se på dem i sammenheng med misoppfatninger. Jeg valgte å ta med diagnostiske oppgaver som omhandlet flere misoppfatninger fordi ulike spørsmål gjerne krever ulike løsningsstrategier, og dermed kan det tenkes å åpne opp for flere ulike visuelle løsningsstrategier. Inspirasjon for utvalget av oppgaver fant jeg i Handegård (2016)[5]. Handegård (2016) så blant annet på hvordan resultatet på de ulike oppgavene var sammenlignet med karakterer. Siden jeg i startfasen ønsket å se på resultatene i forbindelse med elevenes karakterer, tok jeg utgangspunkt i noen av oppgavene Handegård (2016) hadde benyttet. Jeg valgte å benytte de oppgavene som hadde fått negativ korrelasjon mellom karakter og oppgaver, noen der hun hadde fått positiv korrelasjon og noen hvor det ikke var noen korrelasjon mellom resultat og karakterer. Som nevnt er ikke dette lenger en del av min masteroppgave, men siden disse oppgavene er hentet fra andre studier og er designet for å ta for seg misoppfatninger, valgte jeg likevel å benytte disse oppgavene. Oppgaven i spørsmål

[5] Oppgavene som er brukt av Handegård (2016) er blant annet hentet fra Fischbein et al. (1991), Kahneman (2012), Madsen (1995) og Thorsen (2009),

13 er inspirert av Bar-Hill og Falk (1982) og Gardner (1959, p. 51)[6]. Denne oppgaven ble valgt ut for å få inn enda en oppgave i spørreskjemaet som kunne ta for seg misoppfatninger knyttet til betinget sannsynlighet.

Oppgave er et ord som er mye brukt i matematikkundervisning. Jeg ønsket at elevene skulle svare på spørsmålene i spørreskjemaet uten å se på det som det de vanligvis gjør når de løser matematikkoppgaver. Årsaken til dette var at jeg ønsket at den didaktiske kontrakten som beskrevet av Brousseau (2002) i minst mulig grad skulle påvirke elevenes løsning av oppgavene. Derfor valgte jeg i det oppgavebaserte spørreskjemaet (vedlegg 3) å benytte notasjonen spørsmål 1, spørsmål 2 osv. Tabell 3 viser hvilke spørsmål som er knyttet til hvilken kategori innenfor sannsynlighet.

Tabell 3: Spørsmål knyttet til kategori

Kategori innenfor sannsynlighet	Hvilke spørsmål
Enkle hendelser	2, 6, 11, 12, 14, 16, 17
Sammensatte hendelser	3, 4, 5, 7, 8, 10, 15
Betinget sannsynlighet	9, 13

Kategorien *enkle hendelser* baserer seg på Devore og Berks (2012) beskrivelse av enkle hendelser. For denne kategorien skal elevene bare vurdere sannsynligheten for et utfall. Kategorien *sammensatte hendelser* baserer seg på hendelser hvor elevene må vurdere flere utfall, noe som samsvarer med Devore og Berks (2012) beskrivelse av sammensatte hendelser. For eksempel vil spørsmål 2 som dreier seg om å trekke en kule fra en samling på fem, karakteriseres som en enkel hendelse. Spørsmål 5 derimot, hvor elevene skal vurdere hva som er mest sannsynlig å få som sum av to terninger av partall og oddetall, karakteriseres som en sammensatt hendelse. Nettopp fordi hendelsene som skal vurderes, inneholder mer enn ett utfall.
Kategorien ”betinget sannsynlighet” inneholder oppgaver som passer inn i Devore og Berks (2012) beskrivelse av betinget sannsynlighet. Det vil si spørsmål hvor man skal vurdere sannsynligheten for at en hendelse skjer, gitt at en annen hendelse allerede har skjedd.

[6] Oppgaven var opprinnelig fra Gardner (1959), men oppgaveformuleringen ble kritisert av Bar-Hill og Falk (1982). Bar-Hill og Falk (1982) kom i sin konklusjon med forslag til en formulering som ville gjøre oppgaven utvetydig. Det er dette forslaget jeg har valgt å basere oppgaven min på.

I og med at oppgavene er benyttet tidligere, kan det tenkes at valg av oppgaver vil øke undersøkelsens reliabilitet og validitet. Dette samsvarer med Rasinger (2013, pp. 59-60) sitt poeng om at hvis vi skal teste det samme som en tidligere undersøkelse har testet, må vi benytte de samme spørsmålene for å bevare undersøkelsens reliabilitet. Det kan antas at dette veier noe opp for manglende pilotundersøkelse, selv om pilotundersøkelse hadde vært å foretrekke. Det var også viktig at alle elevene skulle ha relevante bakgrunnskunnskaper for å svare på oppgavene, noe som også samsvarer med Rasinger (2013, p. 61) sine poeng. Rasinger (2013, p. 61) hevder at man alltid må ta hensyn til respondentenes kunnskaper. Oppgavene måtte derfor velges ut slik at det var mulig å løse dem med den kunnskapen elevene, ifølge (Kunnskapsdepartementet, 2006b), skal sitte igjen med etter 10. trinn.

Det er viktig at man som forsker prøver å lage spørreskjema med færrest mulig spørsmål, men samtidig ha et tilstrekkelig antall (Christoffersen & Johannessen, 2012, p. 136). Det oppgavebaserte spørreskjemaet endte til slutt opp med 17 spørsmål. Årsaken til at jeg valgte dette antallet, var at det var viktig at elevene ikke gikk lei underveis, og at de skulle kunne svare på oppgavene innenfor en skoletime. Samtidig så jeg på disse spørsmålene som tilstrekkelig for å få svar på det jeg ønsket. Ifølge Rasinger (2013, p. 75) bør spørsmål som omhandler det samme temaet presenteres sammen i spørreskjemaet. Denne anbefalingen valgte jeg å gå bort i fra fordi jeg ønsket å se om det ble brukt ulike løsningsstrategier på forskjellige oppgaver som omhandlet det samme problemet. Om slike oppgaver hadde kommet rett etter hverandre, kan det tenkes at elevene hadde blitt ”låst” i sin første løsningsstrategi og at dette hadde økt sannsynligheten for at de hadde benyttet samme strategi.

To av spørsmålene i skjemaet er åpne spørsmål. De andre spørsmålene vil jeg definere som lukkede til tross for at det ble spurt om begrunnelse for svaret, og at dette kan sees på som mer åpent. Rasinger (2013, p. 62) advarer mot bruk av åpne spørsmål i spørreskjema og begrunner dette blant annet med at det kreves mer av respondentene å svare på slike spørsmål. Dette kan føre til at de hopper over spørsmålene (Rasinger, 2013, p. 62). Jeg var med bakgrunn i dette, forberedt på at jeg kunne ende opp med at ingen, eller de færreste av elevene faktisk begrunnet svaret sitt. Dette ville vært problematisk for oppgaven min i og med at jeg ikke hadde fått tilgang til deres løsningsstrategier om de bare hadde krysset av på det alternativet de mente var riktig. For å forebygge dette ble blant annet antall spørsmål holdt til et minimum slik at ikke respondentene skulle gå lei underveis. Et annet tiltak var å tydeliggjøre formålet med studien overfor respondentene. Dette kom frem i samtykkeskjemaet som ble sendt ut til elevene i forkant av undersøkelsen. I tillegg hadde jeg en prat med elevene før spørreskjemaet ble utlevert, hvor jeg understreket hvor viktig det var at de viste tydelig hvordan de hadde tenkt. Jeg sa blant annet at et svar som; ”jeg vet ikke” ville fortelle meg mye mer enn et blankt svar. Det viste seg at elevene tok oppfordringen min på alvor og var detaljerte og grundige i sine begrunnelser. Om dette ikke hadde vært tilfelle, var jeg forberedt på å måtte gjennomføre flere intervju.

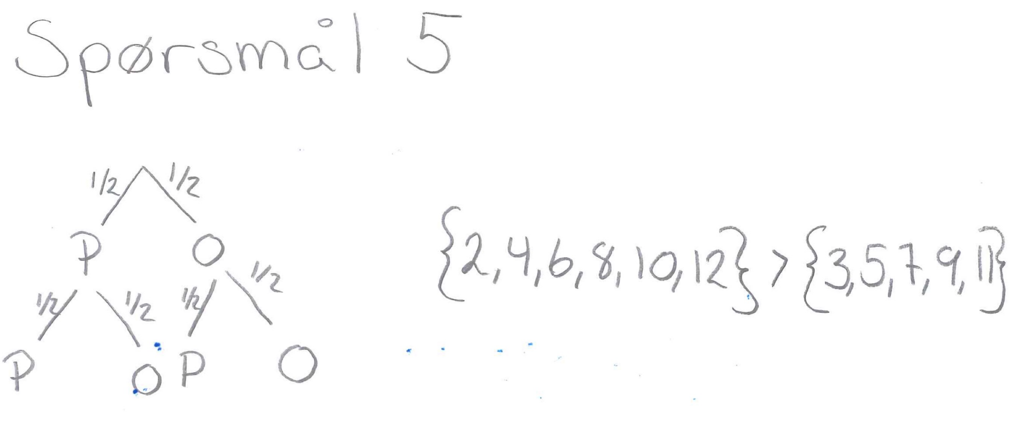
For å øke muligheten for svar fra alle elevene, la jeg opp til flervalgsoppgaver. Årsaken til dette er at terskelen for å svare på oppgaven gjerne senkes om det skal krysses av på et alternativ. Usikre elever kan også finne en viss trygghet i at det svaret de har landet på, er et av alternativene, og dermed bli mer selvsikre og tydelig i sin forklaring. I tillegg åpner alternativene opp for andre måter å resonnere på, noe som jeg ikke tror ville kommet frem om ikke alternativene var der. Et eksempel kan tenkes å være at dersom en vet at sannsynligheten må være mer enn $\frac{1}{2}$, må svaret på oppgaven være $\frac{3}{4}$ dersom dette er det eneste alternativet større enn $\frac{1}{2}$.

3.4.2 Fokusgruppeintervju, kvalitativ metode

Jeg valgte fokusgruppeintervju fordi det kunne innfri ønsket mitt om å få i gang diskusjoner mellom respondentene rundt oppgavene. Diskusjon mellom respondentene kunne ha ført til en rikere meningsutveksling. En annen årsak var at jeg ønsket å se om respondentene ville endre oppfatning når de ble presentert for andres løsninger. Dette kan sees i sammenheng med det Kvale og Brinkmann (2015, p. 180) sier om at en kollektiv ordveksling kan bringe frem flere spontane og ekspressive synspunkter. Med flere respondenter til stede kunne de diskutere med hverandre uten at forskeren trengte å ta del i denne diskusjonen og muligens ikke påvirke den. I tillegg vil det kunne sees på som betryggende for elevene å få være sammen med andre elever de kjenner godt (Eder & Fingerson, 2001, p. 183). Gruppesituasjonen kan føre til at intervjuer får mer presise og utfyllende svar fordi respondentene må forsvare sin respons ovenfor de andre respondentene i gruppen. Dette gjelder spesielt i grupper som kjenner hverandre og daglig interagerer (Eder & Fingerson, 2001, p. 183).

Ifølge Eder og Fingerson (2001, p. 183) er gruppesituasjonen viktig for å minimere maktforskjellen mellom respondentene og forskeren. Videre poengterer Eder og Fingerson (2001, p. 183) at denne maktforskjellen er spesielt fremtredende i intervju av barn. Elevene på videregående er fortsatt en del av skolesystemet og er vant til at voksne har mer makt enn dem. Derfor ser jeg på disse poengene som overførbare til min forskning og noe som har vært viktig for meg i valg av intervjuform. Eder og Fingerson (2001, p. 185) trekker også frem at intervjuer må unngå at respondentene ser på situasjonen som om det blir stilt spørsmål hvor det finnes et riktig svar. Dette var spesielt utfordrende i min undersøkelse, nettopp fordi jeg baserte meg på oppgaver de kunne fått av læreren i en undervisningssituasjon. Det var derfor viktig for meg å tydeliggjøre for elevene at det var valg av metode for å komme frem til et svar som hadde størst betydning. Svaret på oppgaven hadde mindre betydning. Jeg informerte om dette i briefingen til intervjuet. For å understreke poenget, ble det ikke oppgitt til elevene hva som var de riktige svarene på oppgavene. Intervjueren bør unngå all atferd som kan minne om lærerrollen (Eder & Fingerson, 2001, p. 185). Dette så jeg på som veldig utfordrende, nettopp fordi jeg snart er ferdig utdannet lærer og er mer vant til lærerrollen enn forskerrollen. For å minimere denne utfordringen hadde et pilotintervju vært det beste. Som nevnt tidligere ble dette nedprioritert på grunn av tid. Det jeg imidlertid gjorde var å gjennomføre intervjuet med en venninne. Da fikk jeg testet båndopptakeren og meg selv i intervjusituasjonen. Dette hjalp meg et stykke på vei. I ettertid ser jeg imidlertid at jeg burde gjennomført flere slike intervju for å få bedre tak på rollen som intervjuer, og dette har hatt betydning for min forskerrolle. Jeg ser at jeg ikke helt evnet å gi slipp på rollen som underviser i det første intervjuet jeg gjennomførte. Intervjuet med den andre gruppen gikk mye bedre fordi jeg hadde fått testet ut intervjusituasjonen. Et eksempel er at jeg i det andre intervjuet i større grad klarte å være komfortabel med stillheten. Dermed klarte jeg bedre å gi elevene nok tid, før jeg som intervjuer gikk videre til nye spørsmål.

Eder og Fingerson (2001, p. 186) trekker frem at det er viktig med fleksibilitet i fokusgruppeintervju når man intervjuer barn og unge. Det å la elevene ta initiativ og stille sine egne spørsmål kan føre til at intervjueren unngår å bli assosiert med respondentenes lærer (Eder & Fingerson, 2001, p. 185). Dette bygger opp under mitt valg av fokusgruppeintervju. Noen hovedpunkter er bestemt, og i intervjuguiden er det noen spørsmål som kan benyttes. Samtidig er det rom for andre spørsmål, og for at respondentene kan ta initiativ til samtaleemne i intervjuet (Kvale & Brinkmann, 2015, pp. 156-157). Det er viktig at intervjuer er observant på spørsmålene som kan føles naturlige i løpet av seansen. Intervjuer må hele tiden vurdere om det vil være etisk forsvarlig å stille spørsmålet, spesielt siden det er flere elever tilstede i intervjuet. Siden jeg ønsket at elevene skulle diskutere sine ulike løsningsstrategier i intervjuet var det viktig at elevene faktisk turte å presentere sin løsning. Jeg var oppmerksom på at noen elever kanskje ikke ønsket å legge ut sin løsning med de andre elevene tilstede i intervjuet. Dermed måtte jeg på forhånd vurdere om det ville være etisk forsvarlig av meg å henvende meg til en elev, påpeke hvilken løsning eleven hadde brukt, og deretter spørre hvorfor. Siden eleven bevisst kan ha valgt å holde informasjonen om sin løsning tilbake, har jeg tatt en avgjørelse om at jeg ikke vil trekke frem en løsning eleven har brukt med henvisning til hvem som har brukt den. Det jeg imidlertid har valgt å gjøre, er å på forhånd forberede eksempler på løsninger som jeg presenterer for elevene i intervjusituasjonen. Et slikt eksempel er illustrert i Figur 3.



Figur 3: Eksempel på løsninger som kunne blitt presentert for elevene i intervjuet

Disse eksemplene på løsninger er hentet fra spørreskjemaene og trenger ikke å være løsninger elevene jeg intervjuet hadde brukt. Dette ville gi meg mulighet til å få diskusjon rundt løsningsstrategier elevene i intervjuet hadde benyttet. Selv om de ikke selv hadde valgt å presentere disse. Samtidig ville ikke eleven føle seg utsatt på noe vis. Jeg ville også få mulighet til å skape diskusjon rundt løsningsstrategier elevene i intervjuet ikke hadde brukt, noe som kan tenkes å berike diskusjonen om valg av løsningsstrategi.

Jeg valgte to fokusgruppeintervju. Valget baserte seg på at jeg ønsket å snakke med en gruppe av elever fra fellesfaget 1P[7] og en gruppe fra programfaget R2[8]. For å få elevene til å diskutere og snakke mest mulig, var det viktig at de kjente de andre respondentene og var komfortable med deres nærvær (Eder & Fingerson, 2001, p. 183). De fleste elever har nok en oppfatning av at elever fra R2 er flinkere i matematikk enn elever fra 1P, noe som kunne ført til at elevene fra 1P ikke like fritt hadde gitt utrykk for sine faktiske meninger, men heller spilt på lag med elevene fra R2. Det ble altså ut fra etiske hensyn, men også på grunn av undersøkelsens reliabilitet, tatt en vurdering om at elevene fra 1P og elevene fra R2 ikke burde intervjues samtidig. Dermed var det gitt at det minst måtte være to intervjuer. Jeg vurderte om det ville være nødvendig med flere enn to fokusgruppeintervjuer, men det viste seg at to intervjuer holdt for å snakke med dem jeg ønsket å snakke med, basert på svarene fra spørreundersøkelsen. Det er imidlertid viktig å poengtere at det ikke er sikkert elevene jeg valgte ut til intervju hadde gitt meg den innsikten jeg håpet på. Det kan være at de ikke hadde hatt lyst til å fortelle meg hva de egentlig hadde tenkt, eller ikke klarte å diskutere andre løsninger i intervjusituasjonen. Det kan også tenkes at noen av de utvalgte respondentene ville ta en større plass enn andre som dermed ikke ville ha fått kommet til ordet. Derfor var antall intervju åpent og jeg kunne ha gjennomført flere om de intervjuene jeg gjennomførte ikke hadde gitt meg den innsikten jeg håpet på.

Valg av antall respondenter i gruppen dreier seg i hovedsak om hvilket antall som ville gi de positive effektene av gruppeintervju som tidligere forklart. Basert på svarene fra spørreundersøkelsen var det enkelte elever jeg gjerne ville ha utdypelse fra. Hadde gruppene blitt for store, kan det tenkes at ikke alle hadde deltatt i like stor grad og at jeg da hadde mistet verdifull innsikt. Det er også et viktig poeng at datamengden måtte være håndterbar for forskeren. Store grupper hadde økt behovet for båndopptakere, og transkripsjonsarbeidet i ettertid av intervjuet hadde blitt svært

[7] Videre i teksten vil fellesfag 1P, forkortes til 1P
[8] Videre i teksten vil programfag R2, forkortes til R2

omfattende. Derfor landet jeg i et utgangspunkt på tre respondenter i hvert intervju. Jeg var inne i to 1P klasser der hver av disse bestod av rundt 12 elever. De ønsket ikke å bli intervjuet på tvers av klassene, og basert på resultatene fra spørreundersøkelsen, ble det vurdert at det var unødvendig å utføre et intervju fra hver gruppe. Basert på sine løsningsstrategier var det to av respondentene jeg ønsket å snakke mer med. Resten av respondentene fra den gruppen viste i mindre grad til visuelle løsningsstrategier, og er derfor ikke aktuelle sett i lys av mine forskningsspørsmål. Dermed ble dette intervjuet fullført med kun to respondenter.

Intervjuet ble utført på et av skolens grupperom og var dermed i et miljø respondentene kjente til og var komfortable i. Det ble benyttet en lydopptaker under intervjuene.

3.4.3 Utvelgelse av respondenter

Utvelgelse av respondenter til spørreundersøkelsen, ble foretatt tidlig i prosessen fordi det kan ta tid å få til et samarbeid med skoler og lærere. Utvelgelsen fant derfor sted på et tidspunkt i planleggingen hvor problemstillingen min ikke var fastsatt. Problemstillingen inneholdt i startfasen et delspørsmål som dreide seg om å sammenligne misoppfatninger i sannsynlighet med elevenes matematiske bakgrunn. Dette var i utgangspunktet hovedgrunnen til at jeg valgte elever fra en 1P-klasse og elever fra en R2-klasse. Prosjektet ble imidlertid endret, blant annet med bakgrunn i etiske hensyn, og denne delen ble da tatt vekk. Det ble blant annet etter råd fra NSD vurdert som lite etisk forsvarlig å sammenligne faglig svake elever med faglig sterke elever i analysen av prosjektet, fordi noen elever kan oppleve dette som belastende. Fokuset til oppgaven ble derfor endret til å utelukkende fokusere på elevers bruk av visuelle løsningsstrategier og se på disse i lys av misoppfatninger, uavhengig av elevenes matematiske bakgrunn.

Til tross for dette har jeg kommet frem til at å gjøre undersøkelsen i disse to klassene likevel kan argumenteres for i lys av de forskningsspørsmålene jeg nå har landet på. Det å gå inn i to klasser med ulik matematisk bakgrunn, sett i sammenheng med mengde matematikkundervisning og hvilken type matematikk de har fått undervisning i, åpner opp for muligheter for at de vil benytte ulike strategier i møte med sannsynlighetsoppgaver. Om jeg bare hadde studert en klasse kunne studien min endt opp med å bare studere tendenser i denne ene klassen. Elever fra R2 har i stor grad hatt det samme pensumet gjennom opplæringen. Om jeg da hadde gått inn i to ulike R2 klasser kunne jeg endt opp med å studere tendenser som er typiske R2 elever, men ikke nødvendigvis elever i samfunnsmatematikk eller praktisk matematikk. Å gå inn i to ulike klasser, R2 og 1P tenkte jeg dermed at kunne gi meg et bredere utvalg av strategier elever benytter. Det er imidlertid viktig å nevne at en klasse med R2 elever og en klasse med 1P elever ikke kan sees som representativt for alle 1P og R2 elever, eller for elever generelt. Det eneste denne undersøkelsen kan gi, er et innblikk i noen elevers løsningsstrategier når de løser sannsynlighetsoppgaver. Med bakgrunn i det kan undersøkelsen være med som inspirasjon til undersøkelser med nærliggende problemstillinger.

Jeg valgte ut respondentene til intervjuet basert på de visuelle løsningsstrategiene de benyttet i den kvantitative undersøkelsen, grunnet studiens fokus på bruk av visuelle løsningsstrategier. Derfor valgte jeg ut respondenter slik at de til sammen hadde brukt en stor andel av de visuelle løsningsstrategiene, som elevene hadde brukt i sin besvarelse av det oppgavebaserte spørreskjemaet. Siden det var ulike spørsmål jeg ønsket å diskutere med de ulike elevene ble det utarbeidet en intervjuguide til hvert av intervjuene. De to intervjuguidene har noen forskjeller og kan leses i Vedlegg 4 og Vedlegg 5. Det var viktig for meg at elevene jeg valgte likte å snakke, og at de var villige til å gi meg det innblikket jeg trengte. Derfor rådførte jeg meg med læreren om de elevene jeg ønsket å snakke med og om læreren trodde at et intervju ville gå fint basert på mine krav. Læreren mente at det ville gå helt fint å intervjue de elevene jeg hadde valgt ut. Etter dette klarsignalet ble elevene kontaktet med spørsmål om å delta på intervjuet. Intervjuet ble gjennomført etter at bekreftelsen på ønske om å delta var mottatt.

3.4.4 Dataanalyse

Datamaterialet som ble samlet inn består av 38 besvarelser på det oppgavebaserte spørreskjemaet og 90 minutter fokusgruppeintervju. I tillegg har jeg tatt vare på elevenes tegninger og notater i forbindelse med intervjusekvensene. Intervjuene ble transkribert i sin helhet. Når en skal transkribere et intervju er det ifølge Kvale og Brinkmann (2015, p. 208) noen standardvalg som må tas. Jeg har valgt å skrive transkriptet på bokmål og ikke dialekt fordi det jeg studerer ikke vil påvirkes av respondentenes dialekt. Jeg har imidlertid valgt å la de engelske kommentarene bli værende på engelsk. Årsaken til dette er at om respondenten har valgt å utrykke seg på engelsk, er nok dette fordi respondenten føler at de engelske begrepene representerer hans tanker på en bedre måte enn norske utrykk. I tillegg kan det være vanskelig å oversette fra engelsk til norsk uten å miste noe av innholdet i ytringen. Etter transkriberingen har jeg bearbeidet og smalnet utvalget som jeg ønsker å analysere. Utvalgene jeg har endt opp med å presentere i kapittel 4, er valgt ut med bakgrunn i forskningsspørsmålene, og i utvelgelsesprosessen er det innholdet som har vært det viktige. Dermed er det ikke tatt hensyn til om elevene snakker etter tur, eller om de avbryter hverandre underveis. Elevene som har deltatt i intervjuet er blitt anonymisert med E1, E2 osv. Dette illustrerer henholdsvis elev 1 og elev 2. Når jeg i analysen har henvist til de ulike elevene, har jeg valgt å gi alle pronomenet "han", uavhengig av om eleven var en gutt eller en jente. I intervjusekvensen karakteriseres intervjuer som I. Jeg har diskutert utdragene med andre masterstudenter for å få et nytt blikk på sekvensene. Dette har hjulpet meg i prosessen med å velge ut de mest treffende utdragene og i analysen av dem.

3.5 Reliabilitet og validitet

3.5.1 Kvantitative undersøkelser

Kvantitativ reliabilitet betyr ifølge Creswell og Plano Clark (2011, p. 211) at resultatet av undersøkelsen er stabil over tid. Dette stemmer overens med Kvale og Brinkmann (2015, p. 137) sin kommentar om at reliabilitet viser til resultatets pålitelighet. Ifølge Christoffersen og Johannessen (2012, p. 23) kan en teste undersøkelsens reliabilitet ved å gjenta den samme undersøkelsen på samme gruppe, men ved ulike tidspunkt. Dette ble ikke gjort i min studie da det som nevnt tidligere var begrenset med tid tilgjengelig. En annen måte å teste undersøkelsens reliabilitet på er ifølge Christoffersen og Johannessen (2012, p. 23) interreliabilitet. Interreliabilitet dreier seg om at andre forskere undersøker samme fenomen. Om flere forskere får samme resultat kan dette tyde på høy reliabilitet. Siden jeg har valgt spørsmål som tidligere er benyttet i forbindelse med elevers misoppfatning kan det med bakgrunn i interreliabilitet tenkes at dette har økt undersøkelsens reliabilitet. Jeg ønsket å se på elevers visuelle løsningsstrategier i forbindelse med misoppfatninger. Spørsmålene jeg har valgt basert på tidligere forskning har blitt brukt så mange ganger at det kan antas at de har gjennomgått flere reliabilitetstester. Dette er imidlertid bare i forbindelse med misoppfatningene som kommer frem av spørsmålene i det oppgavebaserte spørreskjemaet. Forskningen jeg har hentet spørsmålene fra har ikke studert elevers valg av løsningsstrategier og en kan således anta at reliabiliteten ikke er økt på dette punktet.

Validitet av de kvantitative dataene dreier seg om resultatene som hentes fra respondentene er indikatorer på det som studeres (Creswell & Plano Clark, 2011, p. 210). Ifølge Creswell og Plano Clark (2011, p. 210) må en forsker se etter for eksempel innholdsvaliditet og oppbyggningsvaliditet. Innholdsvaliditet dreier seg om spørsmålene er representativ for mulige scenarioer. Oppbyggningsvaliditeten dreier seg om spørsmålene tester det de er ment å teste (ibid.). Det kan tenkes at siden jeg har flere spørsmål som tar for seg samme misoppfatning økes innholdsvaliditeten til studien. Det er meningen at spørsmålene skal teste elevenes misoppfatninger. Spørsmålene er derfor hentet fra tidligere studier som har studert elevers misoppfatninger. Med bakgrunn i dette kan det tenkes at studiens oppbygningsvaliditet har økt.

3.5.2 Kvalitative undersøkelser

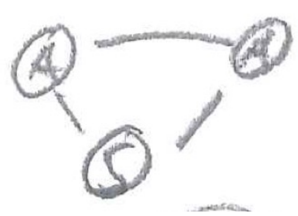
Creswell og Plano Clark (2011, p. 211) trekker frem at det i kvalitative studier legges mer vekt på validiteten enn reliabiliteten. Reliabilitet har en mindre rolle i kvalitativ forskning og er ofte begrenset til reliabilitet i kodingen. Det vil si at flere koder transkriptet. En forsker vil ifølge Postholm (2010, p. 57) møte forskningsfeltet med et filter av sine antagelser og sin teoretiske bakgrunn. En slik forforståelse kan farge observasjonene, men også blende dem (ibid.). Johannessen, Christoffersen og Tufte (2016, p. 35) poengterer at forforståelsen en forsker har vil kunne påvirke hva forskeren observerer og også hvordan forskeren vektlegger og tolker observasjonene. Dette kan tenkes å være noe av årsaken til at Creswell og Plano Clark (2011, p. 211) hevder at undersøkelsens reliabilitet vil øke om kodingen er konsekvent og uavhengig av koderen. Dette kan imidlertid være veldig krevende arbeid spesielt om følelsesaspektet også skal tas med i evalueringen (Kvale & Brinkmann, 2015, p. 211). I denne undersøkelsen er det bare intervjueren selv som har transkribert intervjuene. For å sikre at transkriberingen ble så nøyaktig som mulig, ble denne gjort rett i etterkant av intervjuene. Dette førte til at intervjueren fortsatt hadde det hele ferskt i minnet når transkriberingen ble gjennomført. Det kan dermed tenkes at dette har økt undersøkelsens reliabilitet, til tross for at transkriptet fortsatt kan være farget av forskerens forforståelse. Det er også viktig å nevne utfordringene det er å transkribere intervju med flere respondenter som gjerne snakker i munnen på hverandre. Dette kan ha ført til unøyaktigheter i transkriptet. Reliabiliteten til studien baserer seg også på om respondentene hadde svart det samme i et intervju med en annen forsker (Kvale & Brinkmann, 2015, p. 276). Ledende spørsmål kan derfor tenkes å senke reliabiliteten og bør derfor unngås. I noen tilfeller klarte jeg som intervjuer ikke å la være å bli for ledende. Seansene der dette inntraff vil derfor ikke legges vekt på under tolkningen av resultatene.

Validitet dreier seg om undersøkelsens gyldighet (Kvale & Brinkmann, 2015, p. 212). Ifølge Kvale og Brinkmann (2015, p. 276) er det to måter å tolke dette på. Man kan se på det som om undersøkelsen tester det den er ment å teste, eller om de observasjonene forsker gjør reflekterer det forsker ønsker å vite noe om. I løpet av intervjuet kan forskeren øke validiteten til undersøkelsen ved å utspørre respondentene grundig om deres meninger. Det er også viktig å kontrollere at det inntrykket og den fortolkningen intervjueren får, faktisk er slik personen mente det (Kvale & Brinkmann, 2015, p. 278). Under intervjuet av elevene tok jeg, som intervjuer, blant annet i bruk to virkemidler: For det første gjentagelse av ord det som også kalles parafrasering for å åpne opp for mer utdypning fra elevens sin side. For det andre brukte jeg bevisst pauser for at elevene skulle få tid og ro til å tenke. Intervjuer må i dette tilfellet tåle en viss stillhet. For det tredje ble det der det var hensiktsmessig brukt direkte spørsmål om hva elevene egentlig mente med det de nettopp hadde sagt.

4. Resultater, analyse og diskusjon

Dette kapittelet vil ta for seg resultatene fra undersøkelsen sett i sammenheng med forskningsspørsmålene presentert i kapittel 1.2. Delkapittelet 4.1 vil ta for seg det første forskningsspørsmålet, mens forskningsspørsmål 2 og 3, vil bli diskutert om hverandre i de påfølgende delkapitlene. Jeg vil gå i dybden på fire av spørsmålene fra det oppgavebaserte spørreskjemaet, da ikke alle spørsmålene ble diskutert i intervju med elevene. De fire spørsmålene som blir diskutert er spørsmål 5,9,13 og 15. Begrunnelsen for valg av spørsmål er gitt i kapittel 4.2. De ulike visuelle løsningsstrategiene på de fire utvalgte spørsmålene blir presentert i tabeller. Tabellene gir informasjon om antall ganger elevene har brukt de ulike løsningsstrategiene, hvor mange prosent som svarte riktig ved bruk av de bestemte løsningsstrategiene og eksempler på løsning. Noen ganger er eksemplene gitt i figurer. Der dette er tilfelle vil figurnummer og sidetall være gitt i tabellen. Figurene vil plasseres der de diskuteres i teksten, fordi det da vil bli lettere for leser å følge argumentasjonen.

Oppgaven handler om visuelle løsningsstrategier. Det jeg mener med visuelle løsningsstrategier er inspirert av det som Zahner og Corter (2010) kaller for visuelle representasjoner. Jeg har imidlertid gjort noen endringer. *Ny grafisk representasjon* slik det beskrives av Zahner og Corter (2010) var ikke aktuell for min oppgave. Årsaken er at jeg blant annet har sett på et hvert forsøk på utfallslisting som nettopp dette, uavhengig av om det er en undervist metode eller ikke. Et eksempel på et tilfelle som Zahner og Corter (2010, p. 186) har karakterisert som ”ny grafisk representasjon”, men som jeg har karakterisert som utfallslisting er illustrert i Figur 4.



Figur 4: Eksempel på visuell representasjon Zahner og Corter (2010) har karakterisert som ”ny grafisk representasjon” men som jeg har valgt å karakterisere som utfallslisting. Årsaken er at strekene illustrerer de kombinasjonene som er mulige. Eleven skulle vurdere hvilke kombinasjoner av A og S som var mulige om to objekter ble trukket ut av samlingen på tre.

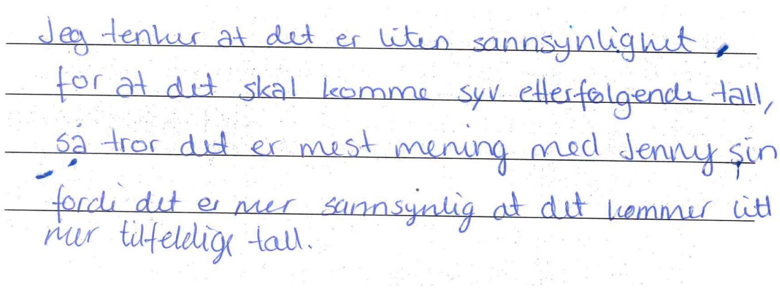
Undersøkelsen til Zahner og Corter (2010) studerte respondentenes svar etter undervisning, mens mitt fokus ikke er knyttet til metoder elevene er blitt undervist i.

Siden jeg ikke utelukkende ønsket å studere underviste metoder slik som Zahner og Corter (2010), har jeg valgt å ikke benytte meg av *ny grafisk representasjon*. Kategoriene *kontingenstabeller* og *venndiagram* er heller ikke presentert i de kommende tabellene, fordi ingen av elevene har benyttet seg av visuelle løsningsstrategier som faller inn under disse kategoriene, slik de er beskrevet av Zahner and Corter (2010). Jeg har valgt å ha med to ekstra kategorier. Den ene har jeg kalt for algebraisk. Kategorien algebraisk innebærer alle løsningsstrategier der elevene benytter seg av algebra, uten å bruke noen av de andre kategoriene. Kategorien algebraisk skiller seg fra de tidligere nevnte kategoriene med at den ikke kan karakteriseres som en visuell representasjon. Løsningsstrategier blir bare karakterisert som algebraisk om noen av de andre nevnte visuelle løsningsstrategiene ikke er benyttet. Figur 5 viser et eksempel på en løsningsstrategi som er karakterisert som algebraisk.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}$$
$$=\frac{1}{2}$$

Figur 5: Eksempel på løsningsstrategi som karakteriseres som algebraisk

Den siste løsningsstrategien jeg har valgt å presentere, kan heller ikke sees på som en visuell representasjon, fordi den ikke baserer seg på visuelle representasjoner, og er i denne oppgaven kalt for abstrakt. Kategorien abstrakt inneholder alle løsningsstrategier som ikke karakteriseres som visuelle løsningsstrategier og hvor eleven heller ikke har benyttet seg av algebra i løsningen av oppgaven. Dette innebærer at også besvarelser uten begrunnelser blir plassert i denne kategorien. Eksempel på elevbesvarelse som vil karakteriseres som abstrakt er vist i Figur 6


Jeg tenker at det er liten sannsynlighet
for at det skal komme syv etterfølgende tall,
så tror det er mest mening med Jenny sin
fordi det er mer sannsynlig at det kommer litt
mer tilfeldige tall.

Figur 6: Eksempel på løsning som karakteriseres som abstrakt

Et av forskningsspørsmålene dreier seg om å se på valg av visuelle løsningsstrategier i sammenheng med misoppfatninger. For å svare på dette kan det være nyttig å undersøke hvilke misoppfatninger elevene viser om de ikke har brukt visuelle løsningsstrategier. Kategoriene abstrakt og algebraisk er derfor presentert for sammenligning, med tanke på misoppfatningene. Jeg har valgt å ha to sammenligningsgrupper fordi sammenligningsgruppen ellers hadde blitt veldig stor, sett i forhold til de visuelle løsningsstrategiene. Samtidig er det mulig å skille mellom algebraiske løsninger fra løsninger basert på setninger.

Spørsmålene fra det oppgavebaserte spørreskjemaet jeg velger å diskutere resultatene av, vil bli presentert, men i en mindre utgave enn fra det opprinnelige spørreskjemaet. Målet med å presentere spørsmålene i en mindre form er å minimere plassbruken i selve oppgaven. Det opprinnelige spørreskjemaet er lagt ved oppgaven og finnes i Vedlegg 3. I dette kapittelet vil det bli utført en analyse av de ulike visuelle løsningsstrategiene elevene har valgt å benytte, samtidig som resultatene vil diskuteres nærmere opp mot de ulike misoppfatningene.

4.1 Hvilke ulike visuelle løsningsstrategier benytter elevene seg av og i hvilke sammenhenger?

De ulike visuelle løsningsstrategiene som ble benyttet av elevene i oppgaveløsningen er presentert i Tabell 4. Tabell 4 viser hvor mange ganger de ulike strategiene ble brukt og antallet for de ulike kategoriene. Det er viktig å poengtere at antall ganger strategien er brukt innenfor de ulike kategoriene av oppgaver, må sees i sammenheng med hvor mange oppgaver som faller innunder kategorien. Av tallene i parentes i Tabell 4, ser en at bare to oppgave faller inn under betinget sannsynlighet og syv oppgaver faller inn under kategoriene enkle hendelser og sammensatte hendelser.

Tabell 4: Antall ganger elevene har brukt de ulike visuelle løsningsstrategiene innenfor de ulike kategoriene. Tallene i parentes illustrerer antall spørsmål innenfor de ulike kategoriene.

Løsnings-strategi	Antall ganger benyttet av elevene totalt	Enkle hendelser (7)	Sammensatte hendelser (7)	Betinget sannsynlighet (2)
Reorganisasjon	2	0	0	2
Utfallslisting	144	70	72	3
Valgtre	8	0	7	1
Bilde	8	0	1	7
Algebraisk	127	64	52	11
Abstrakt	312	126	133	53

Det kommer fram av Tabell 4 at en abstrakt form for løsningsstrategi er den som er benyttet flest ganger. Utfallslisting er den visuelle løsningsstrategien som er brukt mest og ble brukt totalt 144 ganger. Algebraiske løsningsstrategier ble brukt totalt 127 ganger. Reorganisasjon, valgtre og bilder ble totalt brukt i betydelig mindre grad enn abstrakt, utfallslisting og algebra. I Tabell 4 kommer det frem at det totalt ble nyttet flest ulike visuelle løsningsstrategier innenfor oppgavene som omhandlet betinget sannsynlighet. Deretter kommer oppgavene som omhandler sammensatte hendelser, med totalt fire ulike typer visuelle løsningsstrategier. Det blir i kategorien enkle hendelser totalt benyttet fire strategier. Årsaken til alle de ulike løsningsstrategiene innenfor kategorien betinget sannsynlighet, kan være at elevene ikke hadde noen løsningsstrategier tilgjengelig som de kunne assosiere med høy sannsynlighet for å lykkes, slik som beskrevet av Ostad (2008). Tabell 5 viser at det innenfor betinget sannsynlighet bare en gang ble gitt riktig svar. Denne informasjonen kan tenkes å forsterke antagelsen om at elevene ikke hadde noen løsningsstrategier tilgjengelig som de kunne assosiere med høy sannsynlighet for å lykkes. Dette vil bli diskutert nærmere i kapittel 4.2.2.

Tabell 5: Antall riktige svar totalt og innenfor hver kategori.

Løsnings-strategier	Antall riktige svar	Enkle hendelser	Sammensatte hendelser	Betinget sannsynlighet
Reorganisasjon	0	0	0	0
Utfallslisting	127	67	60	0
Valgtre	5	0	5	0
Bilde	2	0	1	1
Algebraisk	74	59	15	0
Abstrakt	143	79	64	0

Innenfor kategorien sammensatte hendelser ble det også funnet flere ulike visuelle løsningsstrategier. Dette kan antyde at noen elever syntes disse oppgavene inneholder mange komponenter. Som beskrevet av Zahner og Corter (2010) er det gjerne lettere å holde styr på komponentene om situasjonen blir strukturert på en mer oversiktlig måte, som for eksempel i et valgtre eller ved et bilde av situasjonen. Det kan også tenkes at elevene har ulik oppfatning av selvsikkerhet slik det beskrives av Ostad (2008) til de ulike løsningsstrategiene med oppgaver som omhandler sammensatte hendelser. Som eksempel ser vi at mange har stor tro på sine intuitive tanker, og går for en abstrakt strategi, mens andre har en større selvsikkerhet knyttet til utfallslisting på slike oppgaver. Det kommer frem i Tabell 3 at det var flest oppgaver innenfor kategoriene enkle- og sammensatte hendelser. Dermed er datasettet hentet innenfor disse kategorien, større enn datasettet innenfor betinget sannsynlighet. Resultatet av dette kan være at det ble åpnet opp for bruk av enda flere visuelle løsningsstrategier i enkle- og sammensatte hendelser enn innenfor betinget sannsynlighet. Resultatet i Tabell 4 viser imidlertid at dette ikke var tilfellet. Med bakgrunn i bruk av flere ulike løsningsstrategier på oppgaver innenfor betinget sannsynlighet og sammensatte hendelser, ble oppgaver innenfor disse kategoriene tatt opp i intervju med elevene. Kategoriene sammensatte hendelser og betinget sannsynlighet, blir derfor diskutert nærmere i henholdsvis kapittel 4.2.1 og 4.2.2.

4.1.1 Enkle hendelser

Av Tabell 4 kommer det frem at det benyttes utfallslisting, og algebraiske og abstrakte løsningsstrategier i kategorien enkle hendelser. De fleste bruker en abstrakt strategi, mens utfallslisting er den som er brukt nest mest. En forklaring kan tenkes å være at de enkle hendelsene var mindre krevende å løse for elevene. Dette støttes opp av resultatet i Tabell 5 som viser at en stor andel hadde svart riktig på disse spørsmålene. Det er likevel viktig å poengtere at innenfor abstrakte løsningsstrategier var det 79 av 126 som hadde svart riktig. Således var mesteparten av de feilvurderingene som ble gjort, innenfor denne kategorien. Antall ganger de ulike løsningsstrategiene ble brukt og antall riktige svar på de ulike spørsmålene som omhandler enkle hendelser er illustrert i Tabell 6.

Tabell 6: Viser antall ganger de ulike løsningsstrategiene ble brukt og antall riktige svar innenfor de ulike oppgavene som omhandler enkle hendelser. L=antall av de ulike løsningsstrategiene, R= antall riktige innenfor de ulike løsningsstrategiene

Enkle hendelser	Spørsmål 2		Spørsmål 6		Spørsmål 11		Spørsmål 12		Spørsmål 14		Spørsmål 16		Spørsmål 17	
	L	R	L	R	L	R	L	R	L	R	L	R	L	R
Reorganisasjon														
Utfallslisting	24	21	21	21							25	25		
Valgtre														
Bilde														
Algebraisk	4	3	3	3	30	27	2	2	1	1	1	1	23	22
Abstrakt	9	4	14	12	8	6	35	26	36	24	12	7	12	0

Tabell 6 viser at de fleste feilene innenfor kategorien abstrakt er gjort i spørsmål 14 og spørsmål 17. Spørsmålene er illustrert i henholdsvis Figur 7 og Figur 8.

Spørsmål 14
Katarina er vegetarianer og veldig opptatt av alle levende individs rettigheter. Hun er nå ferdig på videregående og har flyttet fra Oslo til Bergen. Hva er mest sannsynlig?

- O Katarina er student
- O Katarina er student og medlem i en studentorganisasjon som kjemper for avvikling av pelsindustrien.

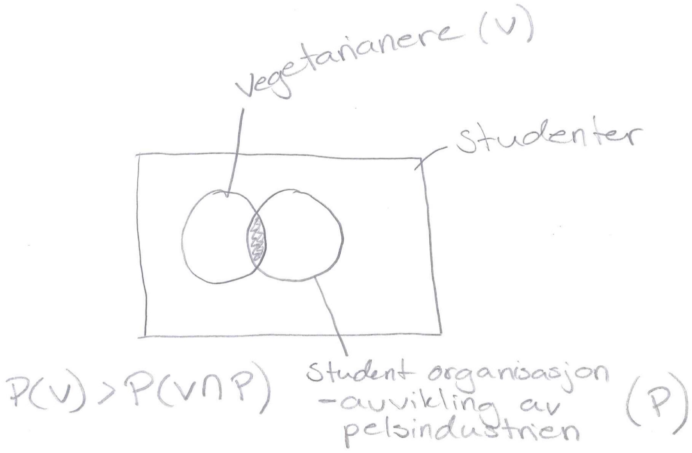
Hvorfor mener du det?

Figur 7: Spørsmål 14

Spørsmål 17
I en gruppe med deltagere er det 70 lærere på småtrinnet og 30 leger. En av deltagerne er Lise. Hun er en 40 år gammel gift kvinne uten barn, med høye ambisjoner, hardtarbeidende og lovende på sitt felt. Hun er også godt likt på arbeidsplassen.
Hva er sannsynligheten for at Lise er lege og hvorfor mener du det?

Figur 8: Spørsmål 17

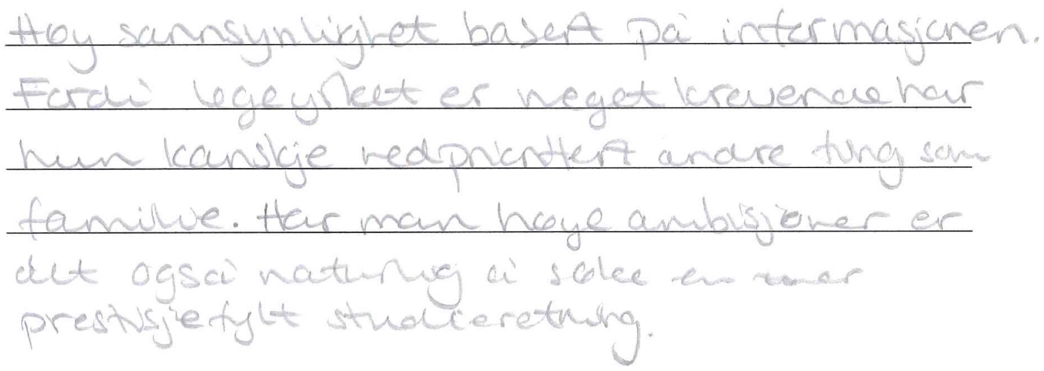
Spørsmål 14 går ut på om elevene forstår at alternativet med minst krav, alltid er mest sannsynlig. Elevene som svarte feil på denne oppgaven, argumenterer for svaret sitt ved å vise til at om hun er veldig opptatt av dyrs rettigheter er det svært vanlig å være med i organisasjoner. En slik argumentasjon kan tenkes å basere seg på tanken om at å være med i organisasjoner som omhandler dyrs rettigheter er representativt for alle som er veldig opptatt av dyrs rettigheter. Dette kan i så fall sees i sammenheng med representasjonsheuristikken slik den er beskrevet av Tversky og Kahneman (1974). På denne oppgaven kan det tenkes at elevene kunne unngått å benytte representasjonsheuristikken ved å bruke venndiagram som beskrevet av Zahner og Corter (2010). En slik løsning er illustrert i Figur 9.



Figur 9: Mulig løsning med venndiagram på spørsmål 14

Venndiagrammet, kunne ha gjort det enklere for elevene å se at studenter som er vegetarianere, ikke nødvendigvis trenger å være medlem i en studentorganisasjon som kjemper for avvikling av pelsindustrien. På den måten kan de resonnere seg fram til at det at hun er student vil være mest sannsynlig av de to alternativene. Denne løsningsstrategien ble imidlertid ikke brukt av elevene. Spørsmål 14 ble ikke diskutert i intervju med elevene fordi det i liten grad var benyttet visuelle strategier på denne oppgaven. Dermed blir det vanskelig å si noe sikkert om en slik løsningsstrategi hadde hatt den effekten som antydet.

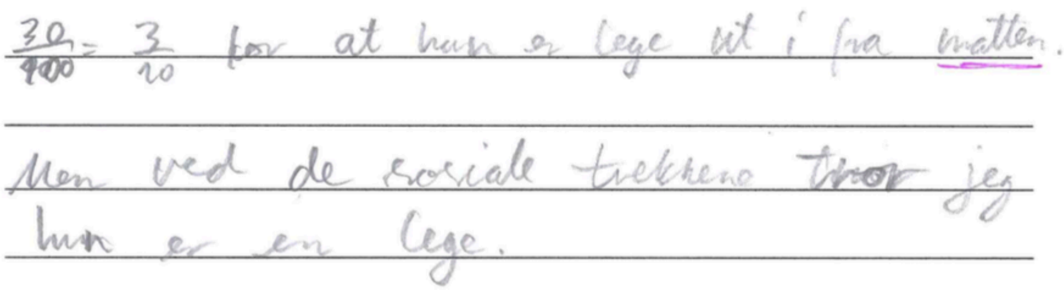
Av Tabell 6 kommer det frem at på spørsmål 17 hadde alle utenom en som har brukt en algebraisk løsningsstrategi besvart spørsmålet korrekt. Tabell 6 viser også at alle som har benyttet en abstrakt tilnærming på spørsmål 17 har besvart oppgaven feil. Elevene som har benyttet en abstrakt løsningsstrategi konkluderer utelukkende at sannsynligheten er størst for at Lise er lege, basert på beskrivelsen av hennes personlighet. De vurderer altså sannsynligheten for om hun er lege ut i fra om beskrivelsen av henne passer inn i den oppfattelsen de har av leger. Noen av elevene velger til og med å poengtere i sin besvarelse at de tror hun er lege basert på beskrivelsen av henne, som illustrert i Figur 10.


Høy sannsynlighet basert på informasjonen. Fordi legeyrket er meget krevende har hun kanskje nedprioritert andre ting som familie. Har man høye ambisjoner er det også naturlig å søke en mer prestisjefylt studieretning.

Figur 10: Eksempel på argumentasjon for lege på spørsmål 17

Dette kan tolkes som at elevene overser bakgrunnsinformasjonen om sannsynligheten. Dette kan sees i sammenheng med representasjonsheuristikken slik den er beskrevet av Tversky og Kahneman (1974). De fleste av de elevene som har benyttet seg av en algebraisk tilnærming har brukt brøken $\frac{30}{100} = 30\%$. Utover dette har flesteparten ikke begrunnet noe mer. Et fåtall av elevene som har brukt en algebraisk argumentasjon har begrunnet at informasjonen om Lise ikke har noe å si for hennes yrke. Med første øyekast kan det tenkes at disse elevene på denne oppgaven ikke har misoppfatningen som dreier seg om representativitet, slik som beskrevet av Tversky og Kahneman (1974). De har ikke ignorert bakgrunnsinformasjonen om sannsynlighet, men heller ignorert tilleggsinformasjonen som er gitt.

Noen av besvarelsene er ikke tatt med i datasettet. De ble utelatt fordi dette var elever som hadde et todelt svar, og således var vanskelige å plassere. Et eksempel er vist i Figur 11.


$\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ for at hun er lege ut i fra matten.

Men ved de sosiale trekkene tror jeg hun er en lege.

Figur 11: Eksempel på todelt argumentasjon på spørsmål 17

I Figur 11 bruker eleven et argument som inneholder ”ut i fra matten” og et argument som inneholder ”de sosiale trekkene”. Denne todelte argumentasjonen som skiller matematikk fra andre argumentasjonsformer kan sees i sammenheng med den didaktiske kontrakten som beskrevet av Brousseau (2002). Den todelte argumentasjonen kan tolkes som om eleven dras mellom to svar på dette spørsmålet. Det ene svaret hvor eleven bruker ”ut fra matten”, kan tenkes å være et resultat av den didaktiske kontrakten. Det andre svaret som inneholder ”de sosiale trekkene”, kan tenkes å ha vært det svaret eleven hadde gitt, om ikke spørsmålet hadde blitt gitt til eleven i sammenheng med matematikkundervisningen. Man kan dermed anta at den didaktiske kontrakten kan ha påvirket elevenes svar på dette spørsmålet. Om vi sammenligner rammene rundt undersøkelsen min med de Tversky og Kahneman (1974) hadde rundt sin, kan man anta at den didaktiske kontrakten bare gir utslag i min undersøkelse. Dette kan blant annet begrunnes med at respondentene i min undersøkelse var skoleelever, mens Tversky og Kahneman (1974) ikke har drevet didaktisk forskning og således ikke har fokusert på skoleelever. I tillegg er min studie gjennomført i matematikktimen til elevene og det er klart for elevene at studien min er gjennomført i forbindelse med matematikk. Dermed kan det tenkes at elevene tar med seg sin didaktiske kontrakt i faget, inn i besvarelsen av det oppgavebaserte spørreskjemaet. Med bakgrunn i argumentasjonen vist i Figur 11, kan man anta at matematikkundervisningen i liten grad består av personlige vurderinger, men i hovedsak legger vekt på nøyaktige utregninger. Dette kan i så fall ha ført til at mange elever valgte å ignorere tilleggsinformasjonen, og kun forholdt seg til tallene gitt i oppgaven. Det kan således tenkes at resultatet av dette spørsmålet kunne sett annerledes ut om spørreundersøkelsen hadde blitt gjennomført i andre omgivelser.

I dette kapittelet er det blitt presentert antall ganger de ulike visuelle løsningsstrategiene ble brukt av elevene i det oppgavebaserte spørreskjemaet. Dette antallet er også blitt presentert innenfor enkle hendelser, sammensatte hendelser og betinget sannsynlighet. Det ble i dette kapittelet gitt et lite innblikk i kategorien enkle hendelser. Det påfølgende kapittelet vil gå dypere inn i kategoriene sammensatte hendelser og betinget sannsynlighet

4.2 Hvorfor bruke visuelle løsningsstrategier og hvordan kan valget sees i sammenheng med misoppfatninger?

Av Tabell 4, som viser antall ganger elevene har benyttet de ulike løsningsstrategiene innenfor de ulike kategoriene, kommer det frem at det var mest variasjon i valg av løsningsstrategier innenfor sammensatte hendelser og betinget sannsynlighet. Derfor fikk sammensatte hendelser og betinget sannsynlighet fokus under intervjuene.

Gjennom intervju med elevene fikk jeg en dypere innsikt i de valgene elevene tok med tanke på visuelle løsningsstrategier. Dette har gitt meg mulighet til å se på deres valg i sammenheng med de typiske misoppfatningene, som er diskutert i kapittel 2. Det viste seg i ettertid av intervjueene at det spesielt var samtalene rundt spørsmål 5, 9, 13 og 15 som var mest relevant med tanke på forskningsspørsmålene i denne studien. Dermed blir henholdsvis spørsmål 5, 15, 9 og 13 diskutert videre i kapittel 4.2.1 og 4.2.2.

4.2.1 Sammensatte hendelser

Innenfor kategorien sammensatte hendelser var det flere oppgaver som skilte seg ut med tanke på bruk av visuelle løsningsstrategier. Disse ble derfor tatt opp i intervjuet med elevene. Innenfor sammensatte hendelser var det spesielt samtalene rundt spørsmål 5 og 15 som viste seg å være av interesse, med tanke på denne studiens forskningsspørsmål. Spørsmål 5 ble valgt fordi det kommer frem av spørreundersøkelsen at utfallslistingen på dette spørsmålet ble gjort på mange ulike måter. Spørsmål 15 kan på mange måter sammenlignes med spørsmål 5. Dette blir diskutert nærmere i kapittel 4.2.1.3. Resultatene som kom frem i det oppgavebaserte spørreskjemaet var imidlertid veldig ulike for spørsmål 15 og spørsmål 5. Derfor ble også spørsmål 15 diskutert med elevene i intervju. Jeg vil komme tilbake til spørsmål 15 i kapittel 4.2.1.2.

4.2.1.1 Spørsmål 5

Spørsmål 5, som er illustrert i Figur 12, tar for seg en sammensatt hendelse. Spørsmålet går ut på at elevene skal vurdere rettferdigheten til et spill hvor man triller to terninger. Den ene deltageren vinner om summen av øyne på terningene er partall mens den andre deltageren vinner om summen er oddetall. Spørsmålet krever at elevene klarer å sette opp utfallsrommet til de to terningene på en mer eller mindre konkret måte. Resultatet av spørsmål 5 er presentert i Tabell 7.

Spørsmål 5
Jannecke og Emilie kaster to terninger. Dersom summen av øyne er partall vinner Jannecke ellers vinner Emilie. Er spillet rettferdig?

- O Ja
- O Nei

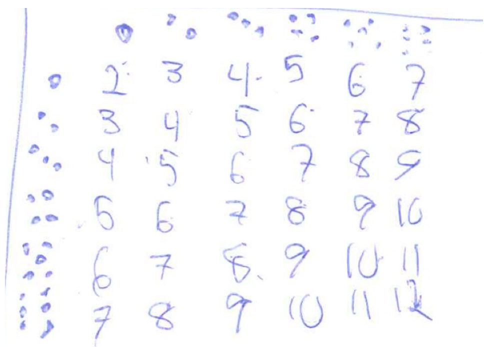
Hvorfor mener du det?

Figur 12: Spørsmål 5

Tabell 7: Løsningsstrategier på spørsmål 5, med eksempler på begrunnelse.

Løsningsstrategi	Antall ganger benyttet av elevene	Prosent riktig	Prosent riktig m/riktig forklaring	Eksempel på begrunnelse
Reorganisasjon				
Utfallslisting	15	40%	20%	P+P, O+P og O+O Se Figur 13
Valgtre	1	100%	100%	Se Figur 14 (s.58)
Bilder				
Algebraisk				
Abstrakt	22	68%	0%	”Samme som oppgave 4”

Når det kommer til utfallslisting, er dette gjort av elevene på ulike måter. En måte er illustrert i Figur 13, og innebærer at alle utfallene du kan få med to terninger er listet opp. En annen metode er litt mindre konkret, og dreier seg om å sette opp ulike kombinasjoner av partall og oddetall som er mulig å få. De fleste av elevene som svarte feil og satt opp mulige kombinasjoner av partall og oddetall, har listet opp P+P, O+P og P+P som de mulige utfallene. Noen av de som hadde brukt denne tilnærmingen hadde satt opp utfallene som P+P, O+P, P+O og O+O, og besvarte således oppgaven korrekt. Andre elever lister opp utfallene på formen {2,4,6,8,10,12} > {3,5,7,9,11} dette fører til en feil besvarelse. Denne argumentasjonen baserer seg på at elevene ser på hvilke summer det er mulig å få når man triller to terninger, men tar ikke hensyn til at noen summer er mer sannsynlig enn andre, noe som kan sees i sammenheng med troen på uniformitet som beskrevet av Falk (1992). Dette fører til en konklusjon om at settet av ulike partall er større enn settet av ulike oddetall. Dermed trekker de feilslutningen om at det er mer sannsynlig å få partall enn oddetall og at spillet derfor er urettferdig.



Figur 13: Eksempel på utfallslisting

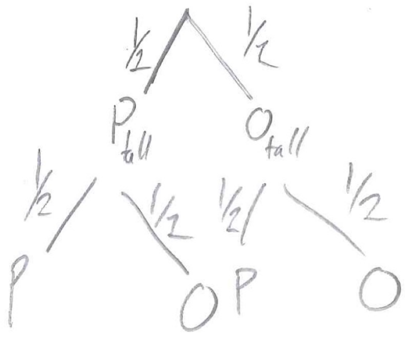
De elevene jeg intervjuet hadde på denne oppgaven benyttet seg av tabellen som vist i Figur 13 og kombinasjonen O+O, P+P og O+P av partall og oddetall. I samtalesekvensen under forklarer elevene E3, E4 og E5 hvorfor de valgte de ulike strategiene.

I:	*Det var veldig mange som, eller det var veldig mange ulike måter å løse denne oppgaven på i forhold til de andre oppgavene, så jeg lurer litt på. Var dere innom andre måter å gjøre det på, eller gjorde dere det første dere tenkte på?*
E3:	*Jeg tenkte noe, jeg kunne lage en sånn (*Figur 13*), eller en sånn (*Figur 14*, s.58), men da måtte jeg jo tegne, det tar jo litt lang tid (ler)*
E4:	*Ja, jeg husker ikke hva jeg gjorde, men jeg tror det var den jeg tenkte på først (oddetall og partallslisting), altså vet ikke om jeg vurderte de andre egentlig.*
I:	*Nei.*
E5:	*Jeg var først på det du sa, at liksom partall partall, oddetall oddetall, men så stolte jeg ikke på det så jeg ville tegne bare for å sjekke.*
I:	*Grunnen til at ikke du stolte på det?*
E5:	*Vet ikke, jeg har aldri hatt sannsynlighetsregning såe.*
E3:	*Ler*
E5:	*Jeg er ikke helt sånn, ja jeg liker ikke det.*
[...]	
E5:	*Jeg bare stolte ikke på det (ler)*
I:	*Nei, men det er bare på grunn av bakgrunnen, du ikke stolte på det? Eller er det en annen grunn til at ikke du stolte på det?*
E5:	*Jeg vet ikke, det gav mening, partall partall, oddetall oddetall også oddetall partall, oddetall partall, men så tenkte jeg... at kombinasjonen st.. Det laveste du kan ha er to og det høyeste du kan ha er tolv og da kan det jo kanskje gi mening at det er flere partall enn oddetall, men så kom jeg på at det er flere altså... ja.*
I:	*Hvordan kom du på det? Visste dere det? At det var flere alternativer som ble syv sånn med en gang?*
E5:	*Jeg har hørt det før, så jeg bare kjente det igjen.*
E4:	*Deet ee vet eg.*
E3:	*Fem og to og tre og fire... ja.*

Når E3 sier; "Jeg tenkte noe, jeg kunne lage en sånn eller en sånn, men da måtte jeg jo tegne, og det tar jo litt tid." og E4 responderer; " Ja, jeg husker ikke hva jeg gjorde, men jeg tror det var den jeg tenkte på først (oddetall og partallslisting), altså vet ikke om jeg vurderte de andre egentlig.*",* kommer det frem at E3 og E4 hadde gått for den første løsningsstrategien de kom på. Den strategien de valgte å benytte førte også frem til konklusjonen om at spillet var urettferdig noe som ikke stemte. Dette kan sees i sammenheng med Fischbein et al. (1991) sine resultater om at man ikke har en intuitiv forståelse av utfallsrommet til sammensatte hendelser. Det kan tenkes at årsaken til at elevene ikke setter opp både O+P og P+O som mulige utfall dreier seg om erfaringene elevene har med å trille terninger. Ofte i spill som involverer terninger vil terningene være identiske. Det vil dermed være vanskelig å skille hvilken av terningene som viser et oddetall og hvilken terning som viser partall. Med bakgrunn i dette kan det tenkes at elevene når de prøver å se for seg situasjonen, ikke får med seg at det er to alternativer som gir partall og oddetall. Dette kan i så fall ha en sammenheng med tilgjengelighetsheuristikken som beskrevet av Tverksy og Kahneman (1974). At elevene har gått for en intuitiv løsning kan således ha ført til at den første løsningen elevene tenkte på ikke var ordentlig gjennomtenkt. Det kan ha ført til feilkonklusjonen at spillet er urettferdig. Dette kan dermed også sees i sammenheng med Kahneman (2012) sin beskrivelse av system 1 tenkning. E3 trekker imidlertid frem at andre løsningsstrategier ble vurdert, men at de ble vurdert til å være for tidkrevende og således ikke ble benyttet. Det er på mange måter riktig at det tar lengre tid å sette opp en tabell som i Figur 13, eller et valgtre som i Figur 14, men det tar ikke veldig mye lengre tid. Dermed kan det tenkes at E3 velger vekk alternativene fordi eleven syntes det er slitsomt å skulle sette opp valgtreet eller liste alle utfallene. Om dette er tilfellet kan det sees i sammenheng med Kahneman (2012) sin konklusjon om umotivert selvovervåking.

I intervjuet ser vi at E5 i flere av sine utsagn har vært mer reflektert i sitt valg av løsningsstrategi. Denne eleven hadde først tenkt det samme som de andre to elevene, men sier at han ikke stolte på dette resultatet. Han tenkte så videre og oppdaget at det er flere ulike partall enn ulike oddetall som er mulig, men kom på at noen summer var mer sannsynlig enn andre. Dette førte til at han bestemte seg for å liste opp alle de mulige utfallene før han avgav sitt svar på oppgaven. Dette førte til at han unngikk den intuitive løsningen, som også ville ha ført til en feilaktig vurdering av rettferdigheten til spillet. Det at eleven måtte gjennom en så omfattende tankerekke kan også sees i sammenheng med resultatene til Fischbein et al. (1991) om at en ikke har en intuitiv forståelse av utfallsrommet til sammensatte hendelser. Eleven klarer imidlertid å overkomme denne utfordringen ved å ha en engasjert selvovervåking som beskrevet av Kahneman (2012).

Når det kommer til kategorien valgtre er det bare en av respondentene som har valgt å benytte denne strategien som er illustrert i Figur 14. Denne respondenten har også kommet frem til riktig svar. I samtalesekvensen under blir valgtre sammen med andre løsningsstrategier diskutert i intervju med elevene.



Figur 14: Eksempel på valgtre

I: *Hvis dere nå har løsningene foran dere, altså hva tenker dere er den greieste som... er lettest å operere med?*
E4: *Jeg tenker jo den da (*Figur 14*)*
E5: *Ja, jeg og ville sagt den*
E3: *(Nikker)*
E4: *Minst å gjøre, men det er jo det å komme på det då, at du kan sette det opp i et sånt diagram*
I: *Ja, det er*
E4: *Vi gjorde jo det i fjor...*
E3: *Og forfjor*
E4: *mhm*

E4 og E5 er klare på at de syntes løsningsstrategien med valgtre er den som virker lettest å operere med av de løsningsstrategiene som var blitt presentert for dem i forbindelse med spørsmål 5. Dette kommer frem når E4 sier; ”Jeg tenker jo den da (Figur 14)” og E5 responderer; ”Ja, jeg og ville sagt den.”. E3 kommenterer ikke direkte hvilken strategi han ville ha valgt, men nikker samtykkende til det de andre sier. Dette kan tyde på at disse tre elevene ville ha valgt denne fremgangsmåten om de hadde kommet på at det var mulig å løse oppgaven på denne måten. Det kommer videre frem når E4 sier; ”Vi gjorde jo det i fjor...” og E3 svarer; ”Og forfjor”, at de var kjent med denne løsningsstrategien fra tidligere år. Dermed burde strategien være tilgjengelig for elevene. Årsaken til at elevene syntes det var utfordrende å komme på denne løsningsstrategien, kan knyttes opp til selvsikkerheten og erfaringene elevene har med de ulike strategiene, slik som beskrevet av Ostad (2008). Valgtre er en strategi som knyttes til sannsynlighetsregning. Som beskrevet i kapittel 2, skiller sannsynlighetsregningen seg fra andre matematiske tema. Siden valgtre i hovedsak benyttes i sammenheng med sannsynlighetsregning, kan det tenkes at elevene har lite erfaring med denne strategien sammenlignet med andre strategier. Dette kan således ha ført til at elevene valgte strategier basert på tidligere erfaringer i matematikkfaget, og ikke nødvendigvis bare deres tidligere erfaringer innenfor sannsynlighetsregning. Dette kan også sees i sammenheng med den didaktiske kontrakten som er beskrevet av Brousseau (2002). Om bruk av disse strategiene har vært knyttet til en liten del av matematikkundervisningen, kan det tenkes at disse strategiene ikke er en del av hva elevene forventer av matematikkundervisningen, og således heller ikke en del av den didaktiske kontrakten. Dette kan ha resultert i at løsningsstrategiene som gjerne er typiske for sannsynlighetsregning, ble oversett av elevene.

Om vi ser nærmere på kategorien abstrakt i Tabell 7,viser den at de fleste elevene har brukt begrunnelsen ”samme som oppgave 4”. For å kunne diskutere denne begrunnelsen nærmere er spørsmål 4 illustrert i Figur 15. Dette til tross for at spørsmål 4 ikke ble tatt opp i intervjuet.

> **Spørsmål 4**
>
> Bettina og Lars kaster en terning. Dersom det blir partall vinner Bettina, ellers vinner Lars. Er spillet rettferdig?
>
> - O Ja
> - O Nei
>
> Hvorfor mener du det?

Figur 15: Spørsmål 4

For å vurdere spillets rettferdighet måtte elevene finne ut om det var like mange oddetall som partall, noe det også var. Dermed kan man tolke utsagnet; ”samme som oppgave 4.”, som at elevene mener at det fortsatt er like mange partall som oddetall i situasjonen beskrevet i spørsmål 5. Denne kommentaren gir riktig svar, at spillet er rettferdig, men med galt grunnlag. Dette fører til at prosent riktig presentert i Tabell 7 blir misvisende. Jeg har derfor valgt å ta med resultatet for riktig svarprosent, hvor blanke begrunnelser er tatt ut av utvalget, og riktig svar er gitt som følge av korrekt argumentasjon, i Tabell 7. Det kommer frem av Tabell 7 at disse resultatene skiller seg fra de som først ble satt opp, og at ingen med en abstrakt løsningsstrategi hadde argumentert riktig. Den abstrakte tilnærmingen ser således ut til å komme til kort når det gjelder denne oppgaven. Dette kan sees i sammenheng med at dette er en diagnostisk oppgave som er designet for å trekke frem ufullstendigheter i elevenes forståelse av sammensatte hendelser. Dermed er det forventet at svar basert på elevenes intuitive forståelse av emnet, i mange tilfeller vil føre til en feilkonklusjon. Det er imidlertid viktig å nevne at jeg vurderte spørsmål 4 og spørsmål 5 til å være så ulike at spørsmål 4 ikke ville påvirke elevenes svar på spørsmål 5. Om vi ser på argumentasjonen elevene gav på spørsmål 5; "samme som oppgave 4" kan dette tyde på at spørsmål 4 likevel påvirket elevenes svar på spørsmål 5. Dette kan således ha påvirket resultatene.

4.2.1.2 Spørsmål 15

Spørsmål 15, illustrert i Figur 16, tar for seg en sammensatt hendelse. Spørsmålet går ut på å vurdere hva som er mest sannsynlig av å få to seksere, og en femmer og en sekser når to terninger trilles. Siden det her er snakk om bestemte utfall på de to terningen, kan dette spørsmålet imidlertid sees på som mer konkret enn spørsmål 5.

Spørsmål 15
Om du triller to terninger, hva er mest sannsynlig?

- O A) Å få en femmer og en sekser
- O B) Å få to seksere
- O De to alternativene A og B er like sannsynlig

Hvorfor mener du dette?

Figur 16: Spørsmål 15

Man trenger ikke å ta hele utfallsrommet til kast med to terninger i betraktning når spørsmål 15 skal besvares, nettopp fordi det er bestemte utfall som skal studeres. Resultatet av spørsmål 15 er presentert i Tabell 8

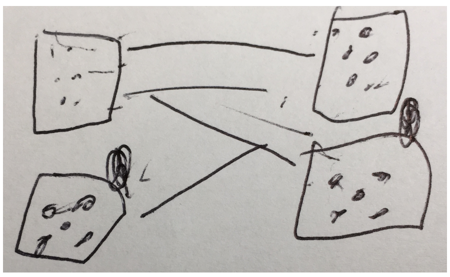
Tabell 8: Løsningsstrategier benyttet av elevene på spørsmål 15 med eksempel på argumentasjon

Løsningsstrategi	Antall ganger benyttet av elevene	Prosent riktig	Eksempel på argumentasjon
Reorganisasjon			
Utfallslisting	4	100%	Man kan få både 5+6 og 6+5 mot 6+6
Valgtre			
Bilde	1	100%	Se Figur 17
Algebraisk	4	0%	Se Figur 19 (s.64)
Abstrakt	29	3%	1. Det blir mindre og mindre sannsynlig å få flere like etter hverandre. 2. Spiller ingen rolle hvilket tall det er, sannsynligheten er like stor for å få et tall som andre.

Når det kommer til utfallslisting, er dette gjort av elevene ved at de lister opp de utfallene som er relevante for spørsmålet. Dette gjør at de kommer frem til at det er to alternativer som gir en femmer og en sekser, og ett alternativ som gir to seksere, som illustrert i Tabell 8. Dermed faller det naturlig ut, med tanke på klassisk sannsynlighet som beskrevet av Rocchi (2014), at sannsynligheten må være størst for å få en femmer og en sekser.

Det var en elev som prøvde å fremstille problemet så realistisk som mulig. Figur 17 illustrerer den visuelle løsningsstrategien som ble benyttet på det oppgavebaserte spørreskjemaet mens Figur 18 viser fremstillingen som ble brukt i intervjuet. Figurene illustrerer det samme problemet, men på litt ulike måter. Forskjellen er at eleven i Figur 17 har brukt tallene fem og seks for å illustrere utfallene til hver terning, mens eleven i Figur 18 faktisk har tegnet opp utfallene på terningen. Det er således tydelig at fremstillingen i Figur 18 er et realistisk bilde, mens fremstillingen i Figur 17 er mer abstrakt. Strekene mellom de ulike utfallene til hver terning kan også minne om utfallslisting. Likevel ble denne løsningsstrategien karakterisert som bilde, med tanke på den realistiske fremstillingen

Figur 17: Eksempel på bilde, spørreskjema



Figur 18: Eksempel på bilde, intervju

av utfallet til hver terning. I samtalesekvensen under diskuterer elevene hvilke strategier de hadde brukt og gyldigheten av de strategiene de hadde valgt å benytte seg av.

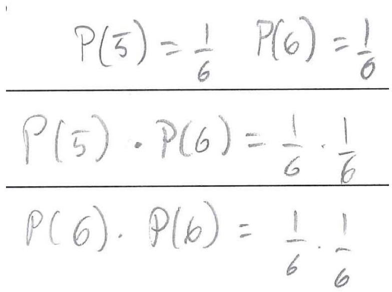
E1:	*Den får du ta nesten for jeg husker ikke.*
E2:	*Få en femmer og en sekser, få to seksere... Jeg tror jeg svarte A. En triller to terninger. Hva er mest sannsynlig, å få en femmer og en sekser? Det er mer sannsynlig tenkte jeg. I´m pretty sure.*
I:	*Hvorfor det?*
E2:	*Eeem,jeg tror jeg tegnet opp... Kan jeg tegne et sted?*
I:	*Ja, det er bare å tegne.*
E2:	*For jeg tenkte at allright(ler) hvis du har... sekser her sant også en sekser her... så har du en femmer... også har du en femmer... Så sannsynligheten for at du får begge to er sånn, du har bare en kombinasjon med de, men på femmerne så kan du få kombinasjon her og her, og her og her det var sånn jeg tenkte, atte...*
E1:	*Kan du, det er jo på en terning liksom det der, du kan jo ikke kombinere den femmeren*
E2:	*Det er ikke tull, se da, eee hold on, hvis du triller to terninger hva er mest sannsynlig... Eee ja fuck it beklager (ler) oki drit i de(streken mellom 5 og 6 som ikke er gyldig). Så jeg tenkte at det er like sannsynlig da blir det ikke? Hvis det er sånn de går fra denne her for denne her. Jeg tenkte at det var fire terninger (ler)*

Som Figur 17 viser, hadde E2 satt opp noen mulige utfall som ikke var mulige. Likevel førte dette bildet til at eleven svarte riktig på oppgaven, at det er mer sannsynlig å få en femmer og en sekser. Den samme feilen gjør E2 i intervjuet, noe som kommer frem i Figur 18 og når E2 sier; ”For jeg tenkte at allright(ler) hvis du har... sekser her sant også en sekser her... så har du en femmer... også har du en femmer... Så sannsynligheten for at du får begge to er sånn, du har bare en kombinasjon med de, men på femmerne så kan du få kombinasjon her og her, og her og her det var sånn jeg tenkte, atte...”. Den feilen som ble gjort er ikke knyttet til misoppfatningen denne oppgaven var ment å ta for seg. Dermed kan det tenkes at det ligger andre faktorer bak denne feilen enn misoppfatninger. På et tidligere tidspunkt i intervjuet forklarte E2 at han hadde blitt stresset av at de andre elevene var ferdig tidligere enn han, og således hadde prøvd å skynde seg. Det kan dermed være naturlig at eleven i en stresset situasjon ikke klarte å følge sin egen tankerekke. Det som var ment å forestille to terninger med to ulike utfall, ble tolket til å være fire ulike terninger, noe som førte til flere kombinasjoner enn det som egentlig var mulig. Dette kommer frem når E2 sier; ” Det er ikke tull, se da, eee hold on, hvis du triller to terninger hva er mest sannsynlig... (...) Jeg tenkte at det var fire terninger (ler).”. Det at den samme feilen ble gjort to ganger, trenger ikke å ha stor betydning. Intervjuet ble gjennomført kort tid etter at elevene hadde besvart det oppgavebaserte spørreskjemaet. Således er det ikke sikkert at E2 reflekterte på nytt når oppgaven ble presentert i intervjusituasjonen, men heller gjenkalte den løsningen han tidligere hadde brukt. Denne feilen blir påpekt av E1 i intervjuet når han sier; ”Kan du, det er jo på en terning liksom det der, du kan jo ikke kombinere den femmeren”, og de bruker videre en del tid på å diskutere dette. Med bakgrunn i at feilen E2 gjør, ikke er knyttet til den misoppfatningen spørsmålet skulle ta for seg, har jeg valgt å ikke presentere diskusjonen mellom elevene i denne teksten.

E2 begrunner tidligere i intervjuet hvorfor han benytter seg av visuelle løsningsstrategier[9]; ”Vanligvis så tegner jeg, fordi det da blir enklere å visuelt forestille meg sannsynligheten. Hvis jeg bare har det i hodet så blir det litt rotete, men hvis jeg tegner det opp blir det litt mer orden.”. Dermed kan det tenkes at eleven velger å tegne opp problemet for å få mer orden og således lettere kunne konsentrere seg om det som er det viktige i oppgaven. E2 har som vane å tegne, og årsaken til dette kan være at hans erfaringer er at dette gjør oppgaver i matematikk lettere å løse. Dette vil i så fall samsvare med Zahner og Corter (2010) sin kommentar om at ytre representasjoner forenkler problemløsningsprosessen. Strategivalget E2 tok, kan i så fall sees i sammenheng med assosiativt strategivalg slik det beskrives av Ostad (2008). Det krever mer av eleven å tegne opp og illustrere problemet. Den ekstra innsatsen kan tenkes å føre til at eleven unngår noen av de typiske intuitive feilene som ble diskutert i kapittel 2. Det kan for eksempel tenkes at en slik illustrasjon kan hindre eleven i å ende opp med å løse et lettere problem, som beskrevet av Kahneman (2012). Illustrasjonen kan føre til at oppgaven studeres nøyere for å få illustrasjonen til å passe nøyaktig til situasjonen. Om illustrasjonen gjengir problemet helt nøyaktig, kan det tenkes at elevene vil få med seg at man kan få femmer på terning 1 og sekser på terning 2, og omvendt. Det kan dermed også tenkes at dette kan hjelpe eleven i sin bedømming av størrelsen på utfallsrommet.

[9] Dette var noe eleven sa i forbindelse med en av de oppgavene som ikke diskuteres nærmere i denne teksten. Derfor er ikke dette utsagnet gjengitt i noen av intervjuutdragene. Likevel svarer eleven på generelt grunnlag og utsagnet sees derfor på som overførbart til andre oppgaver.

Fire av elevene har benyttet seg av en algebraisk løsningsstrategi på spørsmål 15. Den algebraiske løsningsstrategien som ble brukt av elevene er illustrert i Figur 19. Denne metoden kunne ha gitt elevene riktig svar om de også hadde regnet ut sannsynligheten for seks på første terning og fem på andre terning, på formen $\mathrm{P}(6) \cdot P(5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, og tatt dette med i vurderingen. Dette kan tolkes som at årsaken til feilbesvarelsene med den algebraiske løsningsstrategien har sammenheng med Fischbein et al. (1991) sine resultater om at man ikke har en intuitiv forståelse av utfallsrommet til sammensatte hendelser. At de fleste elevene ikke klarer å se for seg hele utfallsrommet kan også tenkes å ha en sammenheng med tilgjengelighetsheuristikken, som beskrevet av Tversky og Kahneman (1974). I de fleste situasjoner hvor elevene faktisk skal trille to terninger og vurdere utfallet av kastet, vil elevene benytte to terninger som ser helt like ut. I slike situasjoner vil det være vanskelig for elevene å vurdere hvilken av terningene som for eksempel viste 5 og hvilken som viste 6. Det kan tenkes at dette vil føre til at elevene ikke klarer å se for seg at utfallet, en femmer og en sekser, faktisk har to alternativer. Dette fordi det i deres erfaringer med terningkast ikke er mulig å skille mellom de to utfallene. Om dette er tilfellet kan man anta at problemet elevene har med å sette opp utfallsrommet, i hovedsak dreier seg om tilgjengelighetsheuristikken slik den beskrives av Tversky og Kahneman (1974). Lecoutre et al. (1990) vurderte også denne problemstillingen og prøvde å klargjøre utfallsrommet med å presisere at terningene hadde ulike farger. Denne presiseringen forbedret ikke resultatet. Resultatene til Lecoutre et al. (1990) kan bygge oppunder at tilgjengelighetsheuristikken og mangel på egne erfaringer med terninger med ulike farger, står sterkt hos elevene. Dette kan igjen sees i sammenheng med de intuitive tankene og system 1 tenkning, som beskrives av Kahneman (2012) som et resultat av erfaringene våre, og av Lecoutre (1992) som veldig robuste. I tillegg til problemene elevene gjerne har med å sette opp utfallsrommet, kan det tenkes at feilen ligger i at elevene på oppgaven velger å løse et enklere problem, slik som forklart av Kahneman (2012). Det kan tenkes at elevene velger å svare på spørsmålet: ”Hva er mest sannsynlig av å få en femmer på første kast og en sekser på



Figur 19: Eksempel på algebraisk løsning

andre kast eller å få en sekser på begge kastene?". Denne antagelsen kan tenkes å underbygges av løsningen vist i Figur 19. Når eleven bruker notasjonen $P(5) \cdot P(6)$ kan dette tolkes som at eleven har tenkt at man først får en femmer og så en sekser. Om eleven her velger å svare på det lettere spørsmålet, som formulert over, vil konklusjonen om at de to hendelsene er like sannsynlig, være riktig. Elevene jeg intervjuet om dette spørsmålet hadde ikke benyttet seg av en slik algebraisk tilnærming og jeg fikk derfor ikke spurt elevene nærmere ut om hvorfor de hadde svart slik de hadde. For å kunne konkludere med en årsak til valg av løsningsstrategi, og svaret på spørsmålet, ville et intervju med den aktuelle eleven ha vært nødvendig.

Av Tabell 8 kommer det frem at de aller fleste elevene hadde benyttet seg av en abstrakt løsningsstrategi på spørsmål 15. De aller fleste av disse har også trukket den gale konklusjonen om at det er like sannsynlig å få en femmer og en sekser som to seksere. Gjennom intervjuet gjengitt på s. 62, kommer det frem at E1 ikke husket hva han tenkte på denne oppgaven. Dette kommer frem når E1 sier; "Den får du ta nesten, for jeg husker ikke.". I det oppgavebaserte spørreskjemaet kommer det frem at tilnærmingen E1 har benyttet seg av, karakteriseres som en abstrakt løsningsstrategi. Med bakgrunn i etiske hensyn ble ikke løsningen til E1 trukket frem av meg i intervjuet, årsaken til dette er forklart i kapittel 3.4.2. Dermed kunne jeg heller ikke få større innblikk i hvorfor E1 hadde besvart oppgaven som han hadde gjort.

4.2.1.3 Sammenligning av spørsmål 5 og spørsmål 15

Som nevnt i innledningen til kapittel 4.2 og som det fremkommer av Tabell 7 og Tabell 8, benyttet elevene ulike løsningsstrategier på spørsmål 5 og spørsmål 15. Dette til tross for at spørsmålene ved første øyekast kan se ganske like ut. Det som i hovedsak skiller de to spørsmålene, er utfallsrommet som må vurderes. På spørsmål 5, som omhandler oddetall og partall, må hele utfallsrommet vurderes, mens på spørsmål 15, som tar for seg det å få femmere og seksere, må bare en liten del av utfallsrommet vurderes. Årsaken til at det ble benyttet flere visuelle løsningsstrategier på spørsmål 5, kan komme av at utfallsrommet ble så stort at elevene følte et behov for å skissere det opp på en eller annen måte. Mer generelle spørsmål virker gjerne mer krevende å løse for elevene, og terskelen for å benytte de visuelle løsningsstrategiene kan således tenkes å bli lavere. Dette kan tenkes å være tilfelle fordi som Zahner og Corter (2010) understreker, kan visuelle representasjoner forenkle problemløsningsprosessen. Det hele kan sees i sammenheng med Fischbein et al. (1991) sitt poeng om at elever ikke klarer å få frem sin intuitive oppfattelse av utfallsrommet om ikke spørsmålet stilles på en generell måte. Dermed kan vi anta at de konkrete rammene rundt spørsmål 15, gjorde spørsmålet spesielt krevende for elevene. Det kan således tenkes at et flertall av elevene klarte å sette i gang system 2 tenkningen som forklart av Kahneman (2012) på spørsmål 5, men ikke på spørsmål 15. Denne oppfatningen kan forsterkes av at elever som hadde svart riktig på spørsmål 5, og dermed viste forståelsen for at O+P og P+O måtte tas med i betraktningen, ikke viste forståelsen av at 5+6 og 6+5 måtte tas med i betraktningen på spørsmål 15, og således besvarte spørsmålet galt. I sammenligningen av disse to spørsmålene, er det viktig å poengtere at spørsmål 5 var ett av de første spørsmålene elevene besvarte, og spørsmål 15 ett av de siste. Det kan således tenkes at elevene var gått lei, ønsket å bli ferdig eller ikke var like fokusert når de besvarte spørsmål 15. Dermed kan det ha vært ekstra fristende å gå for den umiddelbare intuitive løsningen, i stedet for å sette seg ned å koble inn system 2 som beskrevet av Kahneman (2012).

4.2.2 Betinget sannsynlighet

Innenfor kategorien betinget sannsynlighet var det bare to spørsmål. Elevene benyttet et forholdsvis bredt spekter av visuelle løsningsstrategier i sin besvarelse av disse spørsmålene. Til tross for dette var det bare en elev som besvarte spørsmål 9 korrekt, og ingen som besvarte spørsmål 13 riktig. I hovedtrekk var dette årsaken til at jeg ønsket å få dypere innsikt i elevenes valg av løsningsstrategier på spørsmål 9 og spørsmål 13 og således valgte å ta disse med i intervjuene.

4.2.2.1 Spørsmål 9

Figur 20 illustrerer spørsmål 9 som dreier seg om trekk av kort og sannsynligheten for at fargen på baksiden av kortet er rødt. Spørsmålet gir informasjon om hvilken farge det er på oversiden av kortet som er valgt ut. For å løse oppgaven må elevene ta med i betraktningen at informasjonen av hvilken farge det er på oversiden av kortet utelukker noen alternativer. I tillegg må de forstå at når vi skal vurdere antall muligheter og antall gunstige utfall, må vi telle sider og ikke kort. Resultatet på spørsmål 9 er presentert i Tabell 9.

Spørsmål 9

Du har tre kort der ett er rødt på begge sider. Det andre kortet er rødt på en side og hvit på den andre siden. Det tredje kortet er hvitt på begge sider. Anta at du trekker et kort og plasserer det med en tilfeldig side opp. Det viser seg at siden som vender opp er rød. Hva er sannsynligheten for at den andre siden på kortet er rødt?

- 1/2
- 2/3
- 1/3
- 1/6
- Ingen av svarene over er korrekte

Hvorfor mener du det?

Figur 20: Spørsmål 9

Tabell 9: Løsningsstrategier brukt av elevene på spørsmål 9 med eksempler på begrunnelse

Løsningsstrategi	Antall ganger benyttet av elevene	Prosent riktig	Eksempel på argumentasjon
Reorganisasjon	2	0%	Se Figur 21
Utfallslisting			
Valgtre			
Bilde	7	14%	Se Figur 22 (s.68)
Algebraisk	3	0%	Se Figur 24 (s.72)
Abstrakt	26	0%	1. Fordi det var $\frac{1}{3}$ sjangse å trekke det kortet med dobbelt sidet rød til å begynne med 2. Du har utelukket det hvite kortet og sitter igjen med to kort som i hvert fall har en rød side. Da er ½ av disse helt rødt.

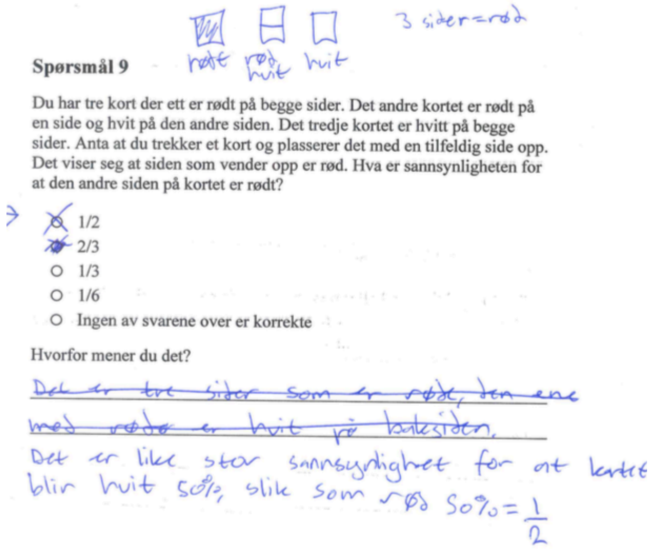
Det kommer frem av Tabell 9 at to av elevene hadde brukt reorganisering i sin besvarelse av spørsmål 9. Dette er gjort ved å streke under deler av teksten som illustrert Figur 21.

Du har tre kort der ett er rødt på begge sider. Det andre kortet er rødt på en side og hvit på den andre siden. Det tredje kortet er hvitt på begge sider. Anta at du trekker et kort og plasserer det med en tilfeldig side opp. Det viser seg at siden som vender opp er rød. Hva er sannsynligheten for at den andre siden på kortet er rødt?

Figur 21: Eksempel på reorganisasjon på spørsmål 9

Denne løsningsstrategien ble ikke diskutert i intervjuet med elevene. Om en studerer understrekingen nærmere, kommer det frem at det er informasjonen om fargen på de ulike sidene som er streket under. Det kan tenkes at eleven har gjort dette for å tydeliggjøre for seg selv hvilke farger sidene hadde, eller forsikre seg om at han hadde lest oppgaven riktig. Kategorien reorganisasjon ble ikke brukt på noen av de andre oppgavene i det oppgavebaserte spørreskjemaet. Dette kan tyde på at elevene syntes det var mer krevende å trekke frem relevant informasjon i dette spørsmålet, enn i de andre spørsmålene i det oppgavebaserte spørreskjemaet.

I Tabell 9 ser en at løsningsstrategier ved bruk av bilde er brukt av 7 elever på dette spørsmålet. Elevene tegner opp kortene og illustrerer på en eller annen måte hvilken farge kortene har på de ulike sidene. Dette er illustrert i Figur 22.


3 sider = rød

rødt rød hvit hvit

Spørsmål 9

Du har tre kort der ett er rødt på begge sider. Det andre kortet er rødt på en side og hvit på den andre siden. Det tredje kortet er hvitt på begge sider. Anta at du trekker et kort og plasserer det med en tilfeldig side opp. Det viser seg at siden som vender opp er rød. Hva er sannsynligheten for at den andre siden på kortet er rødt?

- 1/2
- ~~2/3~~
- 1/3
- 1/6
- Ingen av svarene over er korrekte

Hvorfor mener du det?

~~Det er tre sider som er røde, den ene med røde er hvit på baksiden.~~

Det er like stor sannsynlighet for at kortet blir hvit 50%, slik som rød 50% = 1/2

Figur 22: Eksempel på bruk av bilde på spørsmål 9

Om en sammenligner dette resultatet med Tabell 4, ser en at de fleste gangene elevene har brukt visuelle løsningsstrategier med bilde, er på spørsmål 9. Det var bare en elev som hadde svart riktig på dette spørsmålet, og denne eleven hadde brukt bilde som visuell løsningsstrategi. Det bør også nevnes at flere elever, som hadde benyttet bilde som visuell løsningsstrategi, hadde vært inne på den riktige løsningen, men valgte å gå bort i fra denne løsningen. I Figur 22 ser vi at eleven har strøket over deler av teksten. Av denne teksten kan vi lese at eleven først hadde riktig argumentasjon. Under den ut strøkne teksten står det; "Det er tre sider som er røde, den ene med røde er hvit på baksiden." Deretter har eleven krysset av på 2/3. To av elevene jeg intervjuet hadde gjort dette, men de nevnte ikke denne metoden i intervjuet, det er dermed vanskelig å gå inn på hvorfor elevene valgte å bytte løsning. Det at flere som hadde benyttet bilde, først hadde landet på riktig svar, kan tyde på at det er denne strategien som kanskje gir størst forutsetninger for å klare å besvare dette spørsmålet korrekt. Dette spørsmålet ble tatt opp med elevene i intervju og elevene diskuterte hvordan de hadde tenkt da de skulle svare på spørsmålet.

I:	*Okei, hvis vi går videre til spørsmål 9...*
(...)	
E4:	*Eee, ja da begynte jeg å tegne.*
E3:	*Ja, jeg og. Det var så mye tekst (ler)*
I:	*Hva tegnet dere da?*
E4:	*Eeee tegnet opp de forskjellige scenarioene, ja*
[...]	
E5:	*Det var vel det at det var tre forskjellige også får du vite svaret på den ene da at den er ee, ja den ene siden som vender opp... Da var liksom, det var det som først kom, det var det første jeg tenkte på. Jeg syntes den oppgaven var litt tricky da.*
E3:	*Mhm!*

I dette utdraget av intervjuet kommer det frem at E4 hadde valgt å tegne på dette spørsmålet. Dette kommer frem når E4 sier; ”Eee, ja da begynte jeg å tegne.”. E3 valgte også å tegne fordi det var så mye tekst. Dette kommer frem når E3 responderer; ”Ja, jeg og. Det var jo så mye tekst (ler)”. Det at oppgaven bestod av mye tekst og således mye informasjon, kan ha ført til at elevene ikke følte de klarte å strukturere alt i hodet uten noen form for notater av situasjonen. Det kan dermed tolkes som om elevene valgte å tegne på oppgaven for å få et bedre overblikk av situasjonen beskrevet i spørsmål 9. Det kommer videre frem i intervjuet at E3 og E5 syntes denne oppgaven var vanskelig. Dette kommer frem når E5 i slutten av et utsagn sa at han syntes denne oppgaven var litt tricky og dette bekreftes av E3s samtykkende mhm. Det at elevene ser på denne oppgaven som spesielt utfordrende kan tenkes å utelukke intuitiv tenkning som beskrevet av Fischbein (1975) og system 1 tenkning som beskrevet av Kahneman (2012). De intuitive tankene og system 1 tenkning er løsninger som raskt dukker opp i elevenes bevissthet. Kommentaren om at oppgaven var vanskelig kan tyde på at ingen slike tanker dukket opp umiddelbart. Problemene elevene møter i denne oppgaven kan derfor tenkes å ha andre årsaker. To av elevene i det ene intervjuet og to av elevene i det andre intervjuet hadde benyttet seg av den visuelle løsningsstrategien å prøve og tegne opp problemet i et bilde, slik som vist i Figur 22.

E3 og E4 beskriver i intervju 1 hvordan de hadde brukt bildet, illustrert i Figur 22, til å besvare spørsmålet i intervjuet. Det samme beskriver E1 og E2 i intervju 2

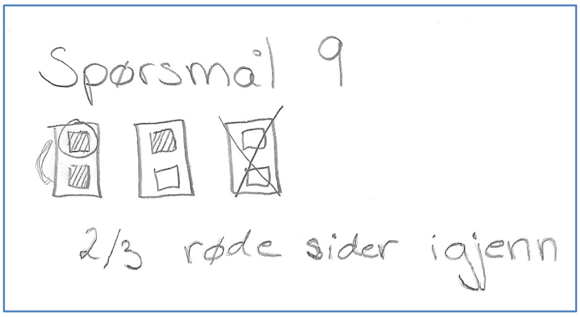
Intervju 1 (Fra intervjuguide 1)

E4:	*Ja, det var dette jeg fant ut her da atte, ee hvis du allerede vet at ene siden er rød.*
I:	*Mhm!*
E4:	*Så kan du fjerne det kortet som (stryker over det hvite kortet)*
I:	*Ja*
E4:	*Eee, ja som er hvitt... Ja og da er det enten rødt på andre siden av det kortet eller så er det hvitt på andre siden av kortet og då blir jo det 50 prosent sannsynlig for det.*
E3:	*Sånn, ja det var jo to kort, som er mulighetene*

Intervju 2 (Fra intervjuguide 2)

E2:	*Her tegnet jeg opp kort faktisk, det husker jeg.*
E1:	*Ja, det gjorde jeg og.*
E2:	*Andre kortet er rød... Da er det, jeg tror jeg konkluderte med...*
E1:	*Ja, for da er det... du trekker opp et.., den ene siden er rød og da er det, siden du vet at det kun er to kort som har rødt på seg og den ene er hvit på baksiden da og det andre er rødt så er det 50% sjanse for at du skal...*
E2:	*(skyter inn) Jupp*
E1:	*Være rød på den.*

Beskrivelsene av hvordan elevene har brukt bildene i sin besvarelse av spørsmålet, viser at elevene hadde fokus på kortene når de vurderte sannsynligheten. Dette kommer spesielt frem når E3 sier; ”Sånn, ja det var jo to kort, som er mulighetene.”, men kommer også frem i flere deler av utdraget. Det kan dermed være naturlig å anta at et problem disse elevene har i sin løsning av spørsmålet, er at de ikke ser på sidene, men fokuserer for mye på kortene som helhet. Dette gjør det vanskelig for dem å liste opp de mulige og gunstige utfallene. Det kommer frem blant annet når E1 sier; ” Ja, for da er det... du trekker opp et.., den ene siden er rød og da er det, siden du vet at det kun er to kort som har rødt på seg og den ene er hvit på baksiden da og det andre er rødt så er det 50% sjanse for at du skal...”, at forståelsen om at det bare er to kort som er mulige fører til at elevene går inn i en enten eller argumentasjon. Dette dreier seg om at elevene tenker at enten er kortet rødt på baksiden eller så er det hvitt. Denne resonneringen leder elevene til konklusjonen om at sannsynligheten for rød bakside er $\frac{1}{2}$. Denne konklusjonen kan sees i sammenheng med troen på uniformitet som beskrevet av Falk (1992). Elevene gir de gjenværende alternativene lik sannsynlighet til tross for at dette ikke er tilfellet. Som nevnt var det en av elevene som hadde besvart spørsmål 9 korrekt, løsningen eleven hadde benyttet er illustrert i Figur 23.



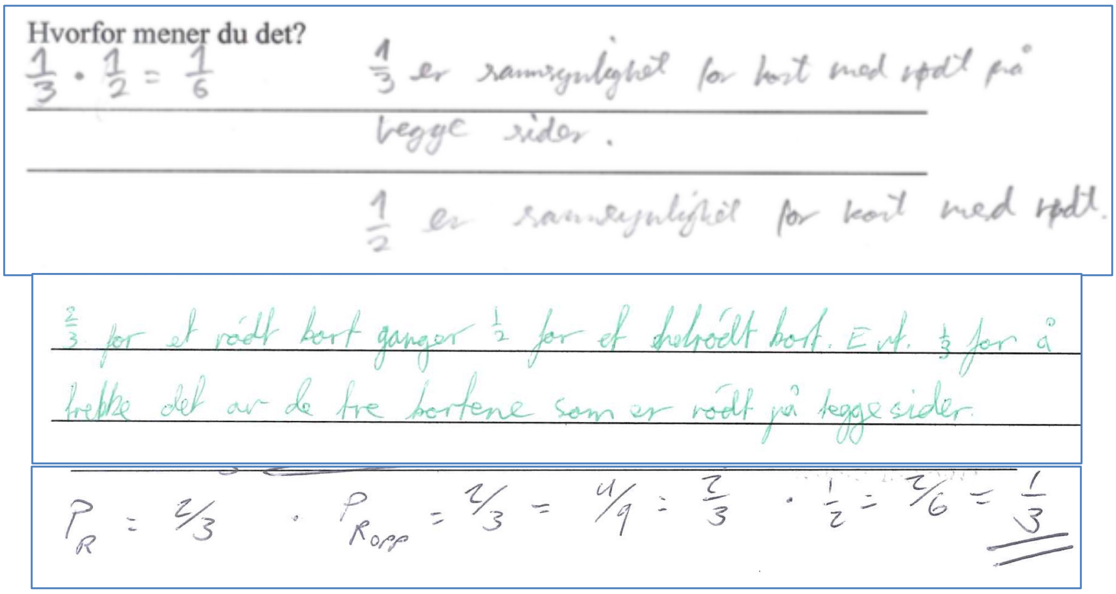
Figur 23: Løsning til spørsmål 9 som ble presentert for elevene i intervjuet

I samtalesekvensen under introduserer jeg løsningen illustrert i Figur 23 for elevene, samtidig som jeg stiller spørsmålet om forskjellen på å tenke antall kort og antall sider. Elevene diskuterte videre i intervjuet hva løsningen illustrert i Figur 23 egentlig dreier seg om.

I:	*Da har jeg en løsning til som jeg vil vise dere... Det er, denne oppgaven blir tolket på to måter. Dere tolker kort, denne personen har tolket sider...*
E4:	*Hva er forskjellen?*
E3:	*Jo, fordi vi har jo tolket at du bare kan trekke, altså hvis du har kan trekke de to kortene så er et av de hvitt på den ene siden, mens her har du liksom... Han har krysset ut. Han har bare tenkt siden liksom som du kan trekke bare en side og ikke et kort. (ler) Tror jeg*
E4:	*Ja, nei...*
(...)	
E4:	*Ja, jeg skjønte ikke helt den*
(...)	
E3:	*Jeg skjønner ikke hvordan han har kommet frem til 2/3*
E5:	*Nei, jeg er ikke sikker på det*
I:	*Det personen her tenker*
E5:	*Ja*
I:	*Er at, okei jeg vet jo ikke, hvis det skulle være dette kortet(det med to røde sider) som lå der, så vet jo ikke jeg allerede hvilken av disse to sidene som ligger opp. Så dette kortet inneholder to muligheter, og dette kortet inneholder en mulighet, og disse to mulighetene vil gi meg rødt på begge sider, mens den vil ikke gjøre det.*
E4:	*Åjaa sånn*
E5:	*Vil det ikke gi ¾ da?... Altså hvis det var fire muligheter.*
I:	*Den har to og den har en*
E5:	*Ja, men hva med den hvite da som ikke*
I:	*For du vet at det er et rødt som ligger opp*
E5:	*Ja okei da*
E3	*Hm.*

Av intervjusekvensen kommer det frem at E4 i starten ikke klarte å se forskjellen på denne løsningen, og den løsningen han selv hadde benyttet. Dette kommer frem når E4 sier; ”Hva er forskjellen?”. Videre er det tydelig at elevene sliter med å forstå hva løsningen som presenteres for dem går ut på, og de bruker lang tid på å studere denne. Når E3 sier; ”Jeg skjønner ikke hvordan han har kommet frem til 2/3.” og E5 responderer; ”Nei, jeg er ikke sikker på det.”, velger intervjuer å gå inn og forklare løsningen nærmere for elevene. Responsen etter forklaringen gav inntrykk av at elevene likevel ikke var helt sikker på hva løsningen gikk ut på. E3 responderer for eksempel på forklaringen med et enkelt, ”hm”. Denne antagelsen underbygges av at elevene idet de forlot intervjusituasjonen spurte hva som egentlig var riktig løsning på spørsmål 9. Dette kan sees i sammenheng med at troen på uniformitet er veldig sterk, slik som beskrevet av Falk (1992).

Tre av elevene hadde ifølge Tabell 9 benyttet seg av en algebraisk løsningsstrategi på spørsmål 9. Figur 24 viser de løsningene elevene brukte i spørreskjemaet.


Hvorfor mener du det?

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ er sannsynlighet for kort med rødt på begge sider. $\frac{1}{2}$ er sannsynlighet for kort med rødt.

$\frac{2}{3}$ for et rødt kort ganger $\frac{1}{2}$ for et helrødt kort. Evt. $\frac{1}{3}$ for å trekke det av de tre kortene som er rødt på begge sider.

$P_R = 2/3 \cdot P_{R og R} = 2/3 = 4/9 : \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 2/6 = \frac{1}{3}$

Figur 24: De tre måtene elevene løste oppgaven på ved å bruke en algebraisk løsningsstrategi.

Disse løsningene ser ikke ut til å samsvare med noen av de misoppfatningene eller typiske feilene jeg tok opp i forbindelse med sannsynlighetsregning. Dermed kan man anta at dette ikke er feil som har oppstått med bakgrunn i en misoppfatning, slik det beskrives av Brekke (2002), og således muligens har skjedd helt eller delvis tilfeldig. Dette kan underbygges av at de tre algebraiske løsningene som ble presentert av elevene var ulike. I og med at det er en stund siden elevene fikk undervisning i sannsynlighetsregning, kan det tenkes at de var usikker på hvordan de skulle gå frem i møte med oppgaver som omhandler betinget sannsynlighet. Dermed kan de ha gått for en algebraisk løsning som baserer seg på fraksjoner av det de husker fra undervisningen av emnet. Det er imidlertid vanskelig å si noe mer om dette da elevene jeg intervjuet ikke hadde gått for en slik løsningsstrategi.

De aller fleste av elevene hadde på spørsmål 9 gått for en abstrakt løsningsstrategi som beskrevet i Tabell 9. Det at elevene hadde valgt en abstrakt løsningsstrategi kan tyde på at disse elevene gikk for den første løsningen de tenkte på, noe som i så fall kan sees i sammenheng med system 1 tenkning, som beskrevet av Kahneman (2012). Et av eksemplene gjengitt i Tabell 9 innenfor kategorien abstrakt er; ”Fordi det var $\frac{1}{3}$ sjanse å trekke det kortet med dobbelt side rød til å begynne med.”. Denne begrunnelsen kan tolkes som om elevene ikke mener at informasjonen om fargen på den ene siden, vil påvirke sannsynligheten for at kortet er rødt på begge sider. Om dette er tilfellet kan denne feilen sees i sammenheng med misoppfatningen om ”ingen nyhet ingen endring” som beskrevet av Falk (1992). Eleven visste allerede at siden som vender opp kan være rød eller hvit så det er således ingen nyhet om den viser seg å være rød. Det er imidlertid viktig å poengtere at konklusjonen om $\frac{1}{3}$ for å trekke det kortet som er rødt på begge sider, også kan komme av en slurvete lesing av spørsmålet. Det kan tenkes at ikke alle elevene fikk med seg informasjonen om hvilken farge som vendte opp. Hvis det er tilfellet, vil vi ikke lenger snakke om en misoppfatning, men om en tilfeldig feil som beskrevet av Brekke (2002). I eksempelet presentert, har eleven avsluttet argumentet sitt med ”...til å begynne med.”. Denne avslutningen kan imidlertid indikere at det for denne eleven er snakk om en misoppfatning og ikke en tilfeldig feil. Den andre argumentasjonen som mange elever brukte i denne kategorien er; ” Du har utelukket det hvite kortet og sitter igjen med to kort som i hvert fall har en rød side. Da er ½ av disse helt rødt.”. En slik argumentasjon kan sees i sammenheng med troen på uniformitet som beskrevet av Falk (1992). Elevene har fått med seg informasjonen om at den ene siden på kortet er rød og brukt denne til å utelukke det helt hvite kortet. Videre gir eleven de to gjenværende kortene lik sannsynlighet, selv om dette ikke er tilfellet.

4.2.2.2 Spørsmål 13

Spørsmål 13, som illustrert i Figur 25, dreier seg om å vurdere sannsynligheten for at familien har to jentebarn. Vi har fått vite at minst ett av barna er en jente. For å løse oppgaven må elevene forstå at informasjonen om at ett av barna er jente utelukker noen alternativer. Deretter må de vurdere hvor mange muligheter vi har igjen for å få to jenter og hvor mange ulike sammensetninger av jentebarn og guttebarn som er mulige å ha. Resultatet på spørsmål 13 er presentert i Tabell 10.

Spørsmål 13

Det er to barn i en familie. Vi vet også at minst ett av disse barna er jente.
Hva blir da sannsynligheten for at begge barna er jenter? Ta utgangspunkt i at det er 50% sjanse for å føde en jente og 50% sjanse for å føde en gutt.

- O 1/2
- O 1/3
- O 2/3
- O 1/4
- O Ingen av svarene er korrekte

Hvorfor mener du det?

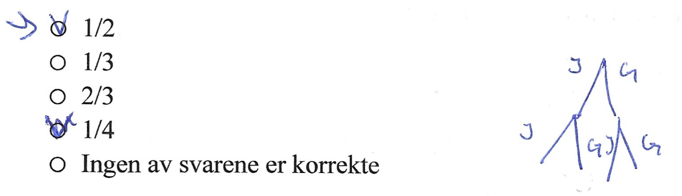
Figur 25: Spørsmål 13

Tabell 10 Løsningsstrategier brukt av elevene på spørsmål 13 med eksempler på begrunnelse

Løsningsstrategi	Antall ganger benyttet av elevene	Prosent riktig	Eksempel på argumentasjon
Reorganisasjon			
Utfallslisting	3	0%	1.Gutt Gutt, Jente Gutt eller Jente Jente 2. Neste utfall har to muligheter jente eller gutt, vi får oppgitt 50/50
Valgtre	1	0%	Se Figur 26 (s.75)
Bilde			
Algebraisk	8	0%	Sjansen for to jenter på rad er $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
Abstrakt	26	0%	1. Vi vet allerede at den første er jente. Sannsynligheten for at den andre er jente er 50%. 2. Fordi dei to hendelsene er uavhengig av kvarandre og at den eine er jente påverkar ikkje sannsynet for at den andre er jente

Tre av elevene har benyttet seg av utfallslisting på denne oppgaven. Dette kommer frem av Tabell 10. Det kommer også frem av Tabell 10 at dette er gjort på to ulike måter. Det første eksempelet på utfallslisting, lister opp gutt gutt, jente gutt og jente jente som mulige utfall. I dette tilfellet ser det ut som eleven ikke har reflektert over at en gutt kunne blitt født først. Om vi tar hensyn til fødselsrekkefølgen har vi utfallene jente jente, jente gutt, gutt jente og gutt gutt. Det at eleven ikke setter opp hele utfallsrommet, kan tolkes som om eleven ikke har forståelse av oppbygningen til utfallsrommet i denne situasjonen. Betinget sannsynlighet som definert i kapitel 2.1.1, dreier seg om sammensatte hendelser. Dermed kan det at eleven ikke klarer å liste opp hele utfallsrommet, sees i sammenheng med Fischbein et al. (1991) sin konklusjon om at elever ikke har en intuitiv forståelse av utfallsrommet til sammensatte hendelser. Det andre eksempelet på utfallslisting illustrert i Tabell 10, dreier seg om å liste opp mulighetene for enkelthendelsen å få en gutt eller en jente. Det kan her se ut som om eleven velger å oversette informasjonen om at det er minst en jente, til å bety at det første barnet er en jente. Dette kan tolkes som om eleven i stedet for å svare på spørsmålet som vist i Figur 25, heller svarer på spørsmålet; ”Det første barnet er jente, hva er sannsynligheten for at også det andre barnet er en jente?”. Om dette er tilfellet, kan det sees i sammenheng med det ”å løse et enklere problem” som beskrevet av Kahneman (2012). Argumentasjonen, det neste utfallet har to muligheter gutt og jente, kan også tenkes å ha opphav i troen på uniformitet som beskrevet av Falk (1992). Eleven vet at de mulige utfallene er gutt og jente og gir disse to alternativene samme sannsynlighet for å inntreffe, selv om dette ikke er tilfellet. For å få større innblikk i hvorfor eleven argumenterte som han gjorde, ville det vært nødvendig med et intervju av eleven.

Av Tabell 10 kommer det frem at bare en av elevene hadde benyttet seg av valgtre for å løse oppgaven. Dette treet er illustrert i Figur 26.



Figur 26: Valgtre på spørsmål 13

Det kommer, slik jeg tolker løsningen i Figur 26, tydelig frem at hvem som blir født først og sist av gutt og jente påvirker utfallsrommet til situasjonen. Det er nevneverdig at eleven først valgte alternativet $\frac{1}{4}$ for så å bytte til $\frac{1}{2}$. Dette kan tolkes som om eleven først ikke har lagt vekt på informasjonen om at minst ett av barna er jente, og bare funnet sannsynligheten for å få to jenter. Etter å ha lest oppgaven bedre kan det tenkes at eleven har oppdaget begrensingen, og således gått over til svaret $\frac{1}{2}$. Eleven som gikk for denne løsningsstrategien ble ikke intervjuet. I intervjuet diskuterte elevene hvordan de kunne besvare dette spørsmålet ved bruk av valgtre, selv om de ikke hadde brukt valgtre på det oppgavebaserte spørreskjemaet. Dette kommer frem i den komprimerte samtalesekvensen under. Det er viktig å nevne at det var en lang diskusjon fra elevene begynte med å sette opp problemet i et valgtre, til de klarte å lande på den riktige konklusjonen. De fikk også underveis noen oppfølgingsspørsmål av meg som gjorde at de leste spørsmålet ekstra nøye.

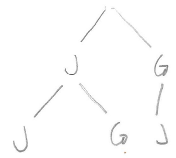
E3: *Da kan du jo bruke sånn valgtre greie.*
[...]
E5: *Deet er vel det at hvis første er jente, hvis første er jente og andre er gutt eller jente så første er gutt så må jo jo den andre være jente... Men det gir jo ikke mening for meg, men det er bare sånn ut ifra tegningen så føler jeg at det er riktig svar.*
[...]
E5: *Nei, vent! En tredjedel, ja en tredjedel er jente, ja en tredjedel.*
E3: *Ja en tredjedel*
E5: *For at begge skal være jenter*

I selve intervjusituasjonen kommer elevene selv frem til ideen å bruke valgtre på dette spørsmålet. Dette kommer frem når E3 sier; ”Da kan du jo bruke sånn valgtre greie.”. Årsaken til dette kan tenkes å være at vi tidligere hadde diskutert løsninger ved bruk av valgtre, og at denne strategien således var mer tilgjengelig for elevene nå enn da de svarte på spørsmålet i det oppgavebaserte spørreskjemaet. Det kom frem av diskusjonen i kapittel 4.2.1.1 (s.58) at elvene hadde fått inntrykk av at valgtre noen ganger er den mest oversiktlige visuelle løsningsstrategien. Dermed kan det tenkes at deres selvsikkerhet på valgtre som løsningsstrategi hadde blitt større. Den økte selvsikkerheten kan i så fall ha ført til at elevene selv valgte denne strategien, slik som beskrevet av Ostad (2008). Til tross for at valgtre som løsningsstrategi tydeliggjør for elevene at fødselsrekkefølgen har noe å si, kom det frem i intervjuet at elevene ikke helt klarte å godta dette. Dette kom blant annet frem gjennom lange diskusjoner mellom elevene. Disse diskusjonene var så omfattende og lange at jeg har valgt å ikke gjengi dem her. Det kommer også frem at elevene ikke helt klarer å godta at fødselsrekkefølgen har noe å si, når E5 sier; ”Deet er vel det at hvis første er jente, hvis første er jente og andre er gutt eller jente så første er gutt så må jo jo den andre være jente... Men det gir jo ikke mening for meg, men det er bare sånn ut ifra tegningen så føler jeg at det er riktig svar.”. Spesielt to faktorer indikerer at elevene ikke hadde klart å komme frem til riktig svar uten å kunne diskutere med hverandre. Den første faktoren er tiden elevene brukte på diskusjonen før de kom frem til riktig svar. Den andre er at elevene ikke helt klarer å godta at fødselsrekkefølgen har innvirkning på svaret. Eleven som benyttet valgtre i sin løsning av spørsmål 13 i det oppgavebaserte spørreskjemaet, hadde ikke noen å diskutere med da han besvarte spørsmålet. Dette kan ha resultert i at eleven som brukte valgtreet på det oppgavebaserte spørreskjemaet, tolket begrensingene i spørsmålet som om det første barnet var jente. Om dette var tilfellet, kan det se ut som eleven heller svarte på spørsmålet; ”Det første barnet er jente, hva er sannsynligheten for at også det andre barnet er en jente?”. Eleven har i så fall oversatt problemet til et enklere problem, slik det beskrives av Kahneman (2012). Under intervjuet diskuterte elevene hvordan valgtreet i Figur 26, kunne brukes med tanke på spørsmålets begrensninger. Elevene var litt usikre på hvordan de skulle tolke informasjonen valgtreet gav opp mot begrensningene i spørsmålet.

E5: *Da kan det jo være da, eller da eliminerer du jo denne (GG)*
E3: *Nei*
E5: *Jo, du kan ikke ha to, du kan ikke ha gutt gutt hvis en av de er jente.*
E3: *Ee, du mener bare den(peker på den siste G i alternativet GG), men det kan være gutt til å begynne med.*
E5: *Ja, men du eliminerer den raden...*
E3: *Nn, eller ja bare siste...*
E5: *Det det*
E3: *Men hvis dette er alle mulighetene så blir det, der er minst en jente, der er minst en jente og der er minst en jente. 3 av 4 da, men det er jo ikke det.*
E5: *Men den er to av tre*
E4: *Den stabelen der er jo...*
E3: *Den vil jo ikke forsvinne fordi at det er jo bare minst et av barna som skal være jente*
E5: *Altså denne raden blir kuttet ut, gutt gutt forsvinner, gutt gutt forsvinner.*

E4: Den er ugyldig, den er gyldig siden minst en skal være jente.
[...]
E3: Så du tegner et amputert valgtre (Figur 27), da får du riktig svar (ler)

Det amputerte valgtreet E5 henviser til i utsagnet ”Så du tegner et amputert valgtre, da får du riktig svar”, er illustrert i Figur 27.



Figur 27: "amputert" valgtre

Elevene var usikre på hvilke grener som kunne tas bort og dermed ikke skulle være en del av vurderingen. Dette kommer frem i flere av meningsutvekslingene mellom elevene. Et eksempel er når E5 sier; ”Da kan det jo være da, eller da eliminerer du jo denne (GG).”, E3 responderer på dette med; ”Nei.” og så fortsetter E5 sitt argument med; ”Jo, du kan ikke ha to, du kan ikke ha gutt gutt hvis en av de er jente.”. Usikkerheten rundt hvilke grener som ikke skulle være en del av vurderingen kan tyde på at elevene ikke hadde en fullstendig forståelse av valgtre som et matematisk verktøy. Denne antagelsen ble forsterket av at E3 avslutter diskusjonen rundt oppgaven med å si; ”Så du tegner et amputert valgtre (Figur 27), da får du riktig svar (ler)”. Dette utsagnet kan tyde på at eleven ikke karakteriserer et valgtre som vist i Figur 27 som et vanlig valgtre. Om elevene har en ufullstendig forståelse av valgtre som et matematisk verktøy, kan det ha ført til at elevene har vært usikre på valgtre som løsningsstrategi. Dette kan videre ha ført til at bare en elev brukte denne strategien på spørsmål 13 i det oppgavebaserte spørreskjemaet. Den ufullstendige forståelsen av valgtre kan tenkes å ha en sammenheng med at elevene ikke har fått så mye øving i denne strategien. Om dette er tilfellet, kan det at de fleste elevene har valgt en annen strategi enn valgtre på spørsmålet, knyttes til den didaktiske kontrakten, som beskrevet av Brousseau (2002).

Innenfor kategorien algebraisk, viser Tabell 10 at åtte av elevene hadde benyttet seg av en slik tilnærming. Disse elevene hadde utelukkende benyttet løsningen som beskrevet i Tabell 10. Denne løsningen kan tolkes som om elevene hadde funnet sannsynligheten for å få to jenter, uavhengig av begrensningene gitt i spørsmålet. Det kan være at elevene tenkte at de visste at barna kunne være både gutt og jente, så det at de får vite at det ene barnet var jente, endret ikke sannsynligheten for at begge barna var jenter. I så fall kan dette knyttes til misoppfatningen om ”ingen nyhet, ingen endring” som beskrevet av Falk (1992). Den algebraiske løsningen ble ikke presentert i intervjuet da ingen av respondentene hadde brukt denne løsningsstrategien. Det er dermed vanskelig å si noe sikkert om hvorfor elevene benyttet en algebraisk løsningsstrategi.

Som det kommer frem av Tabell 10, hadde de aller fleste elevene, inkludert elevene jeg intervjuet, benyttet en abstrakt løsningsstrategi på dette spørsmålet. Noen elever hadde en annen tolkning av oppgaveteksten enn det den var ment å være. Dette kommer frem i Tabell 10, da elevene i sitt argument for at sannsynligheten var $\frac{1}{2}$, refererer til at vi visste at den første var jente. Elevene diskuterte i intervjuet hvordan oppgaveteksten skulle tolkes. Til å begynne med hadde alle elevene jeg intervjuet en annen tolkning av oppgaveteksten enn det den var ment å være. Det tok veldig lang tid før elevene godtok at det ikke var sagt at det første barnet var en jente.

E3: *Ååååja, jo det står jo, det står jo ikke at den jenten er en jente (ler). Det står jo bare at ett av de skal være det...*
E4: *Jammen ja.*
E3: *Da kan du jo bruke sånn valgtre greie.*
E4: *Det ene barnet er jo bestemt.*
E3: *Emm, nei, begge kan være begge deler, men en av de må i hvert fall være jente.*
E4: *Ja, ene barnet er bestemt, minst et barn er bestemt.*
E3: *Nei, nå... ja.., men det blir jo fortsatt en halv, blir det ikke?*
E4: *Jo det st..*
E5: *Jeg føler at, men dette legger jo opp til at et av barna*
E3: *Nei det blir mer, det blir jo ¾*
E4: *Det*
E5: *Da legger ikke du opp at det er jente til å begynne med, en av de er jente.*
E3: *Men det står jo ikke at det er jente til å begynne med.*
E4: *Jo*
E5: *Den ene var jo jente.*
E3: *Det står jo bare*
E5: *Åja*

Elevene i intervjuet hadde oppfatningen om at det første barnet var en jente. Det tok lang tid før de forstod at det ikke var noe i oppgaveteksten som sa at det første barnet var en jente. Dette kan bygge opp under mine antagelser om at mange elever, uavhengig av løsningsstrategi, har oversatt problemet til et enklere et, på formen; ”Det første barnet er jente, hva er sannsynligheten for at også det andre barnet er en jente?”. Dermed kan det være naturlig å anta at mange elever her har gått for å løse et enklere problem slik som beskrevet av Kahneman (2012). Jeg som intervjuer, måtte flere ganger spørre elevene hva de mente når de refererte til det andre barnet før E3 skjønner feilen. Det kommer frem at E3 innser feilen når han sier; ”Ååååja, jo det står jo, det står jo ikke at den jenten er en jente (ler). Det står jo bare at ett av de skal være det...”. E5 forstår det først etter videre diskusjon med E3 og kommer frem når han sier; ”Åja.”. E4 godtok aldri at det ikke var det første barnet som var jente. Dette kommer eksempelvis frem i utsagn som; ”Det ene barnet er jo bestemt.” og ”Ja, ene barnet er bestemt, minst et barn er bestemt.”. Denne motstanden mot å godta det oppgaveteksten egentlig beskrev, kan tenkes å ha en sammenheng med at mange, som poengtert av Kahneman (2012), er alt for selvsikre og setter for stor lit til sine intuisjoner. Det kan også være at elevene svarte feil på spørsmål 13 fordi de ikke leste det godt nok, og mistolket betydningen av ordet minst. Minst kan som beskrevet i kapittel 2.4.3 brukes i det norske språket på flere ulike måter. Det kan blant annet beskrive noe eller noen. Minst kan referere til en person som er mindre enn andre i størrelse. Et eksempel er, Lise er minst av oss. Det kan også referere til alder, der den yngste personen gjerne omtales som minst eller minstemann. Med bakgrunn i dette kan det være at elevene oppfattet minst som beskrivelsen av det ene barnet. Elevene kan for eksempel ha forstått oppgaveteksten som; ”Det er to barn i en familie. Vi vet at den minste av disse barna er jente. Hva blir da sannsynligheten for at begge barna er jenter? Ta utgangspunkt i at det er 50% sjanse for å føde en jente og 50% sjanse for å føde en gutt.”. Om dette er tilfellet vil eleven ha tatt utgangspunkt i at den yngste av barna var jente og sannsynligheten ville således vært ½ for at også det andre barnet er en jente. I så fall kan problemene elevene hadde med å løse denne oppgaven dreie seg om en ulik begrepsforståelse av ordet minst. Dette samsvarer i så fall med Konold (1991) som indikerer at ett av problemene med undervisning i sannsynlighet er at lærer og elever ikke forstår hverandre.

5. Avsluttende refleksjoner

Jeg ønsket at undersøkelsen min skulle gi meg innsikt i utfordringene elevene møter i sannsynlighetsregning. Samtidig ønsket jeg å få innblikk i hvordan problemene som omtales i litteraturen kan sees i sammenheng med løsningsstrategier. Jeg ønsket også å studere hvilke løsningsstrategier elevene benyttet seg av i møte med sannsynlighetsregning. Med bakgrunn i dette valgte jeg følgende forskningsspørsmål.

- *Hvilke ulike visuelle løsningsstrategier benytter elevene seg av i møte med ulike sannsynlighetsoppgaver som omhandler betinget sannsynlighet og enkle og sammensatte hendelser?*
- *Hvorfor benytter de seg av disse strategiene?*
- *Hvordan kan bruk av visuelle løsningsstrategier sees i sammenheng med misoppfatninger?*

5.1 Oppsummering

Mine funn viser at elevene benytter visuelle løsningsstrategier som reorganisasjon, utfallslisting, valgtre og bilde. Det viser seg at av de visuelle løsningsstrategiene var det utfallslisting som ble brukt mest. Det kommer frem i intervju med elevene at de bruker visuelle strategier i tre situasjoner. Den første er når elevene føler de mister oversikten over spørsmålet. Dette skjer gjerne når oppgaven inneholder mye informasjon som må bearbeides. Den andre er når eleven har flere motstridende tanker om hvordan oppgaven kan løses. Da ser elevene det gjerne som best å, på en eller annen måte, visualisere problemet. Dette begrunnes med at en slik visualisering kan gjøre det lettere å avgjøre hvilken intuitiv tanke som er riktig. Den tredje er når eleven har som vane å bruke visuelle løsningsstrategier, fordi eleven syntes det er lettere å forestille seg sannsynligheten om han bruker slike løsningsstrategier. Han peker på at om all informasjonen holdes i hode så blir det gjerne litt rotete, og at en visuell fremstilling kan gi mer orden. Den tredje situasjonen skiller seg fra de to andre med at denne eleven begrunner at han til vanlig benytter visuelle løsningsstrategier. Det kan dermed tenkes at visuelle løsningsstrategier for denne eleven kan karakteriseres som retrievalstrategier, slik det beskrives av (Ostad, 2008). De to andre situasjonene kjennetegnes av at elevene bruker visuelle strategier når de er usikker på andre løsninger, eller ikke klarer å holde styr på all informasjonen uten en visuell fremstilling av problemet. I disse tilfellene blir altså visuelle løsningsstrategier brukt bare om eleven ikke klarer å løse problemet på en annen måte. Dette begrunnes blant annet av elevene med at de ikke likte å tegne eller ikke så på det som nødvendig å bruke en visuell løsningsstrategi. For disse elevene kan det tenkes at bruk av visuelle løsningsstrategier kan karakteriseres som backupstrategier, slik som Ostad (2008) beskriver dem.

Mine resultater tyder på at det noen ganger kan hjelpe elevene å unngå de typiske feilene i sannsynlighetsregning om de benytter seg av visuelle løsningsstrategier. Utfallslisting kan være nyttig for å finne ut hvor mange utfall man har og hvor mange utfall som er gunstige. Det er imidlertid viktig at utfallslistingen blir gjennomført på en korrekt måte. Det viser seg at å gjennomføre utfallslistingen på en korrekt måte er problematisk for noen elever. Problemene med utfallslisting kan i mange tilfeller antas å være knyttet til manglende intuitiv forståelse av utfallsrommet som poengtert av Fischbein et al. (1991). Dette kan igjen knyttes til tilgjengelighetsheuristikken slik den beskrives av Tversky og Kahneman (1974). Det kan derfor være nyttig med andre visuelle strategier som kan klargjøre utfallsrommet. Et eksempel på dette er valgtre. For at valgtre skal kunne klargjøre utfallsrommet for elevene, peker resultatene imidlertid på at det er viktig at elevene klarer å tolke og bruke den informasjonen valgtreet gir. Det viser seg at noen elever har utfordringer med nettopp det å forstå informasjonen valgtreet gir. Noe som således kan føre til at disse elevene mister støtten et valgtre kan gi i å sette opp utfallsrommet.

Når det kommer til misoppfatningen om representativitetsheuristikken som beskrevet av Tversky og Kahneman (1974), viser mine resultater at det noen ganger kan være til hjelp å sette opp situasjonen i et venndiagram eller benytte seg av en algebraisk løsningsstrategi. Venndiagrammet kan visualisere for elevene at det de ser på som representativt for en gruppe ikke nødvendigvis trenger å være gjeldende for alle i gruppen. Slik det fremkommer av denne studien, kan en algebraisk løsning hjelpe elevene med å bruke de statistiske dataene som er presentert i oppgaven og legge mindre vekt på personbeskrivelser. Dette er imidlertid blitt diskutert opp mot den didaktiske kontrakten og hvordan den didaktiske kontrakten kan ha påvirket resultatene.

Mine resultater har ikke gitt noen indikasjoner på at det er sammenheng mellom misoppfatningene ”ingen nyhet, ingen endring” og ”troen på uniformitet”, og bruk av visuelle løsningsstrategier. Dette kan ha en sammenheng med at alle elevene bortsett fra en hadde svart feil på spørsmålene som tok for seg disse misoppfatningene. Elevene svarer altså feil på oppgaven uavhengig av hvilken løsningsstrategi de har valgt å benytte seg av. Mine resultater indikerer derfor at disse misoppfatningene ikke kan overkommes ved valg av en passende visuell løsningsstrategi. På samme måte viser mine resultater at bruk av visuelle løsningsstrategier heller ikke forsterker misoppfatningene.

Det kan se ut som om elevene flere ganger velger å løse et lettere problem enn det de egentlig står overfor slik som beskrevet av Kahneman (2012). I tilfellene der dette forekommer kan det tenkes at bruk av visuelle løsningsstrategier enkelte ganger kan hjelpe elevene. Ved bruk av bilde som visuell løsningsstrategi, kan den ekstra innsatsen eleven legger i å illustrere problemet, føre til at de oppdager at den første tolkningen de hadde av problemet er feil. Dermed kan dette hjelpe dem til å forstå oppgaveteksten korrekt.

Det kommer også frem i min studie at noen av problemene elevene møter når de skal gå i gang med løsning av sannsynlighetsoppgaver, kan dreie seg om at elevene misforstår betydningen av ord som for eksempel minst, i oppgaveteksten. Det kan tenkes at feil som følge av slike misforståelser ikke kan unngås ved bruk av visuelle løsningsstrategier da dette handler om elevers tolkning og forståelse av oppgaveteksten.

I dette delkapittelet er funnene fra denne studien oppsummert. Det er kommet frem at bruk av visuelle løsningsstrategier i noen tilfeller kan hjelpe elevene i løsningen av sannsynlighetsoppgaver. Det er imidlertid også kommet frem noen utfordringer som kan hindre elevene med å få ønsket utbytte ved å bruke visuelle løsningsstrategier. Det kan tenkes at lærer ved å ta tak i disse utfordringene i sin undervisning kan hjelpe elevene med å få fult utbytte av å bruke visuelle løsningsstrategier til å løse sannsynlighetsoppgaver. Det neste delkapittelet vil derfor trekke frem noen forslag til hva lærer kan gjøre i sin undervisning for å hjelpe elevene med å løse sannsynlighetsoppgaver.

5.2 Konsekvenser for undervisning i sannsynlighet

Det er blitt poengtert av Fischbein og Gazit (1984, p. 2) at lærere i sin undervisning bør legge vekt på å gi elevene erfaringer med statistiske forsøk. I tillegg til dette kan det, med bakgrunn i de ulike misoppfatningene innenfor sannsynlighet, være viktig at lærer legger til rette for en diagnostisk undervisning, slik det beskrives av Brekke (2002), innenfor dette emnet. På den måten kan lærer få innsyn i hvilke misoppfatninger elevene har, og utfordre deres forståelse slik at elevene gjerne kan overkomme misoppfatningene.

Mine resultater peker også mot at lærer bør legge større vekt på bruk av de ulike visuelle løsningsstrategiene i sin undervisning i sannsynlighetsregning. Resultatene peker også mot at visuelle løsningsstrategier noen ganger kan hjelpe elevene med å unngå de typiske feilene. Det kan imidlertid se ut som elevene ikke klarer å benytte seg av denne støtten, enten på grunn av den didaktiske kontrakten eller forståelsen av løsningsstrategien. En kan derfor anta at lærer, ved å fokusere mer på bruk av visuelle løsningsstrategier, gir større rom for bruk av disse i den didaktiske kontrakten. Større rom for visuelle løsningsstrategier i den didaktiske kontrakten, kan tenkes å føre til at elevene blir mer selvsikker og komfortable med å bruke visuelle løsningsstrategier. Det kan også tenkes at lærer bør legge vekt på å lære elevene om de ulike visuelle løsningsstrategiene en kan bruke innenfor sannsynlighetsregning. På denne måten kan det være at elevene blir mer bevisst hva de ulike strategiene kan brukes til og hvordan resultatet av dem kan tolkes og forstås. Dette kan gi elevene større selvsikkerhet knyttet til de visuelle løsningsstrategiene i sannsynlighetsregning. Som poengtert av Ostad (2008) vil større selvsikkerhet tilknyttet løsningsstrategier gjerne føre til at elevene benytter disse strategiene.

Lærer bør også være observant på at elever kan tolke ord i oppgaveteksten annerledes enn det ordet var ment som. Dermed kan det tenkes at lærer aktivt må bruke tid på avklaring av matematiske begreper. Dette gjelder spesielt om begrepet har en annen betydning i dagliglivet enn det har i matematisk sammenheng.

5.3 Veien videre

Undersøkelsen min er som nevnt ikke generaliserbar, men gir en pekepinn på hva som kan være interessant å studere videre. Det kunne dermed være nyttig å gjennomføre studien i en større skala. En slik studie ville kunne gi innsikt i om trendene som kommer frem i denne undersøkelsen er generaliserbare eller ikke.

Som forklart i kapittel 5.2 indikerer resultatene fra denne studien at lærer bør legge vekt på de ulike visuelle løsningsstrategiene i sin undervisning av sannsynlighet. Det kunne derfor vært interessant å studere hvilken virkning et slikt undervisningstiltak hadde hatt på elevenes løsning av sannsynlighetsoppgaver. Det hadde i gjennomføringen av en slik studie vært viktig at undervisningen på forhånd åpnet opp for å gi elevene erfaringer med de ulike visuelle løsningsstrategiene. Samtidig måtte undervisningen gitt elevene kunnskap om, og erfaring med de ulike visuelle løsningsstrategiene, hvordan kan de brukes og hvordan kan en tolke informasjonen de gir. En slik studie kunne også ha gitt oss innblikk i hvilken påvirkning den didaktiske kontrakten faktisk har på elevenes bruk av visuelle løsningsstrategier. Som Jensen (2005) påpeker, kan det ta lang tid å få på plass en ny didaktisk kontrakt og et slik prosjekt måtte således ha foregått over lengre tid.

Jeg innledet masteroppgaven med et sitat fra en tidligere lærer. Dette var som følger ”De flinkeste elevene er ofte dårligere i sannsynlighetsregning enn de middels flinke og de svake elevene.”. I videre studier kunne det vært spennende å gå inn i dette utsagnet. Det første spørsmålet i et slikt prosjekt måtte ha vært å avklare hva som menes med flinke elever, middels flinke elever og svake elever. Det kan tenkes at inndelingen baserer seg på karakterene elevene har i faget. Om utsagnet baserer seg på tidligere oppnådde karakterer i faget, er det viktig å stille spørsmålstegn med hva som tidligere er blitt testet på prøver. Niss og Jensen (2002) deler matematisk kompetanse inn i åtte ulike kompetanser. Dette er Tankegang-, Resonnement-, Kommunikasjon-, Problembehandling-, Modellering-, Representasjon-, Symbol og formalisme-, og Hjelpemiddelkompetansen (Niss & Jensen, 2002). Jeg vil ikke gjengi hva hver an kompetansene går ut på her, men poenget er at matematisk kompetanse inneholder flere aspekter. Ifølge Røsseland (2005) kan det se ut som om tradisjonell matematikkundervisning i stor grad har basert seg på Symbol- og formalismekompetansen. En slik undervisning kan også tenkes å resultere i at det bare er Symbol- og formalismekompetansen som blir testet i prøvesituasjoner. Om dette er tilfellet, kan det tenkes at elever blir karakterisert som flinke med bakgrunn i sine ferdigheter i symbol og formalismekompetansen. Som nevnt i innledningen hevder

Freudenthal (1970) at å slavisk følge formler ikke i noen andre matematiske områder fører til feil like ofte som i sannsynlighet. Det kan dermed tenkes at dette, kan være en av årsakene til utsagnet over. Det kunne derfor vært interessant å undersøke hvilke av de matematiske kompetansene som trengs for å løse sannsynlighetsoppgaver.

6. Litteraturliste

Anderson, I. (2001). *A first course in discrete mathematics*. London: Springer Forlag.

Aven, T. (2017). Stokastisk *Store norske leksikon*.

Bar-Hillel, M., & Falk, R. (1982). Some teasers concerning conditional probabilities. *Cognition, 11*(2), 109-122. doi:10.1016/0010-0277(82)90021-X

Borovicnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. In C. Batanero & G. R. C. Burrill (Eds.), *New ICMI Study : Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education : A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study* (pp. 71-84). Dordrecht: Dordrecht, NLD: Springer Netherlands Forlag.

Breiteig, T. (2002). *Regn med usikkerhet:Sjanse, risiko og matematikklæring*. Paper presented at the Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU, Trondheim.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* Retrieved from http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/bestillingstorg/pdf/59447_kar_mat_007_innmat.pdf

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* N. Balacheff (Ed.) *Didactique des mathâematiques, 1970-1990* Retrieved from http://ebookcentral.proquest.com/lib/bergen-ebooks/reader.action?docID=3035563

Bryman, A. (2006). Integrating quantitative and qualitative research: how is it done? *Qualitative Research, 6*(1), 97-113. doi:10.1177/1468794106058877

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt Forlag.

Creswell, J. W., & Garrett, A., L. . (2008). The "movement" of mixed methods research and the role of educators. *South African Journal of Education, 28*(3), 321-333.

Creswell, J. W., & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2. ed.). Los Angeles, London, New Delhi, Singapore og Washington DC: Sage Forlag.

Dawes, R. M. (2001). Probabilistic Thinking. In N. J. Smelser & P. B. Baltes (Eds.), *International encyclopedia of the social & behavioral sciences : Vol. 18 : PRI-Q* (Vol. Vol. 18). Amsterdam: Elsevier Forlag.

Deliyianni, E., Monoyiou, A., Elia, I., Georgiou, C., & Zannettou, E. (2009). Pupils' Visual Representations in Standard and Problematic Problem Solving in Mathematics: Their Role in the Breach of the Didactical Contract. *European Early Childhood Education Research Journal, 17*(1), 95-110. doi:10.1080/13502930802689079

Devore, J. L., & Berk, K. N. (2012). *Modern Mathematical Statistics with Applications* (2. ed.). New York: Springer Forlag.

Dobrow, R. P. (2013). *Probability : With Applications and R*. Hoboken: John Wiley & Sons, Incorporated Forlag.

Edens, K., & Potter, E. (2008). How Students "Unpack" the Structure of a Word Problem: Graphic Representations and Problem Solving. *School Science*

and Mathematics, 108(5), 184-196. doi:10.1111/j.1949-8594.2008.tb17827.x
Eder, D., & Fingerson, L. (2001). Interviewing children and adolescents. In F. G. Jaber & A. H. James (Eds.), *Handbook of Interview Research* (pp. 181-201): SAGE Forlag.
Evans, J. S. B. T. (2003). In two minds: dual-process accounts of reasoning. *Trends in Cognitive Sciences, 7*(10), 454-459. doi:10.1016/j.tics.2003.08.012
Evenshaug, O., & Hallen, D. (1993). Tenkning *Barne- og ungdomspsykologi*: Gyldendal Akademisk Forlag.
Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition, 43*(3), 197-223. doi:10.1016/0010-0277(92)90012-7
Falk, R., & Konold, C. (1997). Making sense of randomness: Implicit encoding as a basis for judgment. *Psychological Review, 104*(2), 301-318. doi:10.1037/0033-295X.104.2.301
Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Vol. 85). Dordrecht: Reidel Forlag.
Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? An exploratory research study. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), pp. 1-24.
Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics, 22*(6), 523-549.
Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96-105. doi:10.2307/749665
Freudenthal, H. (1970). The aims of teaching probability. In L. Råde (Ed.), *The Teaching of probability & statistics*. Stockholm: Almqvist & Wiksell Forlag.
Gardner, M. (1959). *The scientific American book of Mathematical Puzzles and diversions*. New York: Simon and Schuster Forlag.
Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 293-307. doi:10.1016/S0959-4752(97)00006-6
Handegård, T. (2016). *Oppfatningar og misoppfatningar i sannsyn. Ein mixed methods-studie av elevar på videregåande trinn - yrkesfagleg retning.* Universitetet i Bergen.
Hole, A. (1999). *Grunnleggende matematikk*. Oslo: Universitetsforlaget.
Jensen, A.-M. (2005). Mia - en taper i matematikk? In C. Kirfel (Ed.), *Tangenten - inspirasjonsbok for matematikklærere* (pp. 129-134). Bergen: Caspar Forlag.
Johannessen, A., Christoffersen, L., & Tufte, P. A. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. ed.). Oslo: Abstrakt Forlag.
Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed Methods Research: A Research Paradigm Whose Time Has Come. *Educational Researcher, 33*(7), 14-26.
Jones, G. A., & Thoronton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (Vol. 40, pp. 96-92). New York: Springer Sciense+Business Media, Inc Forlag.
Kahneman, D. (2012). *Tenke, fort og langsomt*. Oslo: Pax Forlag.

Kahneman, D., Tversky, A., & Slovic, P. (1982). *Judgment under uncertainty : heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
Kennis, J. R. (2006). *Probabilistic misconceptions across age and gender.* (Ph. D.), Columbia University, Ann Arbor.
Konold, C. (1991). Understanding students´ belifes about probability. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156): Kluwer Academic Publishers.
Kunnskapsdepartementet. (2006a). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Oslo Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT1-04.
Kunnskapsdepartementet. (2006b). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)-kompetansemål etter 10. årssteg*. Oslo Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget.
Kunnskapsdepartementet. (2006c). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01)*. Oslo Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT3-01.
Kunnskapsdepartementet. (2006d). *Læreplan i matematikk for samfunnsfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT4-01)*. Oslo Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT4-01.
Kuzmak, S. (2015). A Cognitive Framework for Normative Reasoning under Uncertainty, and Reasoning about Risk, and Implications for Educational Practice. *The Mathematics Enthusiast, 12*(1, 2 & 3), 140-156.
Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. ed.). Oslo: Gyldendal Akademisk Forlag.
Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 557-568. doi:10.1007/bf00540060
Lecoutre, M.-P., Durand, J.-L., & Cordier, J. (1990). A study of two biases in probabilistic judgments: Representativeness and equiprobability. In J.-P. Caverni, J.-M. Fabre, & M. Gonzalez (Eds.), *Advances in Psychology* (Vol. 68). Amsterdam, New York, Oxford & Tokyo: Elsevier Science Publishers B.V.
Leland, Ø. (2011). *Statistikk og sannsynlighetsregning - en skisse av det statistiske miljø i Norge fra ca. 1850 og emnenes plass i den norske skolen i nyere tid.* Universitetet i Agder.
Lund, T. (2012). Combining Qualitative and Quantitative Approaches: Some Arguments for Mixed Methods Research. *Scandinavian Journal of Educational Research, 56*(2), 155-165. doi:10.1080/00313831.2011.568674
Lysø, K. O. (2006). *Sannsynlighetsregning og statistisk metodelære* (3. [rev.] oppl. ed.). Bergen: Caspar Forlag.
Madsen, R. W. (1995). Secondary Students' Concepts of Probability. *Teaching statistics, 17*(3), 90-92.
Mayer, R. E. (1992). Mathematical problem solving. In R. E. Mayer (Ed.), *Thinking, problem solving, cognition* (2. ed.). New York: W. H. Freeman and Company Forlag.
Minst. (u.å.). Ordbøker på nett. Retrieved from https://ordnett.no/search?search=minst&lang=no

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). Matematiske kompetencer på det almene gymnasium. In M. Niss & T. H. Jensen (Eds.), *Kompetencer og matematiklæring - Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. 18, pp. 241-270).

Norsk senter for forskningsdata. (u.å). Informasjon og samtykke. Retrieved from http://www.nsd.uib.no/personvernombud/hjelp/informasjon_samtykke/

Ostad, S. A. (2008). *Strategier, strategiobservasjon og strategiopplæring : med fokus på elever med matematikkvansker*. Trondheim: Læreboka Forlag.

Personopplysningsloven. (2000). *Lov 14. april 2000 nr 31 om behandling av personopplysninger*.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. ed.). Oslo: Universitetsforlaget.

Rasinger, S. M. (2013). *Quantitative Research in Linguistics : An Introduction*. New York: Bloomsbury Publishing.

Rocchi, P. (2014). *Janus-Faced Probability*. Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht & London: Springer International Publishing.

Røsseland, M. (2005). Hva er matematisk kompetanse? - Del 2. *Tangenten*(2).

Savard, A. (2014). Developing Probabilistic thinking: What About People´s Conceptions? . In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspectives*. Dordrecht, Heidelberg, New York & London: Springer Forlag.

Spelke, E. S., & de Hevia, M.-D. (2009). Spontaneous Mapping of Number and Space in Adults and Young Children. *Cognition*. doi:10.1016/j.cognition.2008.11.003

Thorsen, T. (2009). *Misoppfatninger til sannsynlighet : en undersøkelse med diagnostiske oppgaver blant elever på ungdomsskolen.* Universitetet i Oslo, Oslo.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science, 185*(4157), 1124-1131.

Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. i. (2007). What Kinds of Perceptions and Daily Learning Behaviors Promote Students' Use of Diagrams in Mathematics Problem Solving? *Learning and Instruction, 17*(3), 322-335. doi:10.1016/j.learninstruc.2007.02.006

Utdanningsdirektoratet. (2012). *Læringsstøttede prøver - Statistikk, sannsynlighet, kombinatorikk*. Retrieved from http://home.hit.no/~panderse/KIMhefter/ressursheftestat.pdf

Zahner, D., & Corter, J. E. (2010). The Process of Probability Problem Solving: Use of External Visual Representations. *Mathematical thinking and learning, 12*(2), 177-204.

7. Vedlegg

7.1 Vedlegg 1 - Godkjennelse fra NSD

Christoph Kirfel
Matematisk institutt Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 13.02.2017 Vår ref: 52040 / 3 / AGH Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 10.01.2017. Meldingen gjelder prosjektet:

52040	*Løsningstilnærminger til sannsynlighetsoppgaver. Kan det finnes en sammenheng mellom elevers bakgrunnskunnskap i matematikkfaget og hvilken suksess de har i løsningen av ulike problem som omhandler sannsynlighet*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Christoph Kirfel*
Student	*Camilla Meidell*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 31.01.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Agnete Hessevik

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

7.2 Vedlegg 2 - Samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"Løsningstilnærminger til sannsynlighetsoppgaver"

Et masterprosjekt i matematikkdidaktikk

Bakgrunn og formål

Temaet sannsynlighet har vist seg å være et utfordrende emne for mange skoleelever. Masterprosjektet i matematikkdidaktikk vil fokusere på ulike sider med disse utfordringene. Resultatene fra forskningen kan være med på å gi innblikk i elevers utfordringer og hvor eventuelle problemer oppstår. Det kan tenkes at dette kan være nyttig når en senere skal tilpasse opplæringen av emnet til ulike elever.

Masterprosjektet vil gjennomføres av meg, Camilla Meidell, som er student ved lektorutdanningen ved Universitetet i Bergen. Veilederen min er Inger Elin Lilland ved Høgskolen på vestlandet. Jeg har vært i kontakt med deres lærer som er positiv til å la meg utføre datainnsamlingen i denne matematikklassen. Det er ønskelig at du kan delta i forskningsprosjektet slik at det kan samles inn tilstrekkelig med data til prosjektet.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Det vil bli levert ut en liten test med noen sannsynlighetsoppgaver, det vil i hovedsak være svaralternativer og dere velger det svaret dere mener er riktig og svarer kort på hvorfor dere tror svaret er riktig.

I ettertid vil det bli gjennomført et intervjue med elever. Dette vil foregå i ordinær undervisningstid og vil ikke ta mer enn 30 minutter. Spørsmålene i intervjuet vil dreie seg om oppgavene fra spørreskjemaet og det vil åpnes opp for diskusjon med medelever. Det vil bli tatt lydopptak av intervjuene. Dette er fordi det er viktig at jeg får med meg alt som blir sagt noe som vil være vanskelig uten opptak.

Det vil også hentes inn informasjon fra lærer om fagkarakterer.

Dette er et prosjekt som gjennomføres av meg og det er derfor jeg som samler alle dataene. Jeg er underlagt full taushetsplikt, og deltagelse i prosjektet vil ikke ha noe å si for karakter i faget eller ditt forhold til lærer.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. De som vil ha tilgang til personopplysningene er veilederen min Inger Elin Lilland og undertegnede. Lydopptak og personopplysninger vil lagres på eksterne harddisker, som oppbevares innelåst ved Universitetet i Bergen. All bearbeidelse av data foregår direkte via ekstern harddisk, slik at filene aldri lagres på en privat PC. Navnelistene vil også lagres adskilt fra resten av de innsamlede dataene.

Dersom informasjon om dataene skal publiseres, skal det ikke være mulig å knytte dataen direkte til hverken skole, lærer eller elev. I masteroppgaven skal det benyttes pseudonym.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 1. juni 2017. Etter dette vil data og personopplysningene fortsatt være innelåst ved UiB og slettes 31. Januar 2018. Etter denne datoen vil alle opptakene og alle opplysninger bli anonymisert slik at det ikke er mulig å koble datamaterialet til deg.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Dersom du har noen spørsmål kan du ta kontakt med
Camilla.Meidell@student.uib.no
Eller på tlf.: 92408956

Med vennlig hilsen
Camilla Meidell

Samtykke til deltakelse i studien ”Løsningstilnærminger til sannsynlighetsoppgaver”

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta. For elever som er under 18 år må foresatte signere.

Navn på elev:
____

Navn på foresatte:____

Signatur elev/ signatur foresatt/ Dato:

7.3 Vedlegg 3 - Det oppgavebaserte spørreskjemaet.

Spørreundersøkelse-løsningstilnærminger til sannsynlighetsoppgaver

Navn: ______________________________________

Sett kryss over det alternativet du tenker er **riktig** slik som vist her ⊗

Spørsmål 1

Hvilket matematikkfag får du undervisning i dette året?

- ○ R2
- ○ 1P

Spørsmål 2

I de to boksene nedenfor ligger det svarte og hvite kuler. Du trekker en kule uten å kunne se ned i boksene.

Hvilken boks gir størst sjanse for å trekke en svart kule?

- ○ A gir størst sjanse
- ○ B gir størst sjanse
- ○ A og B er like sannsynlige

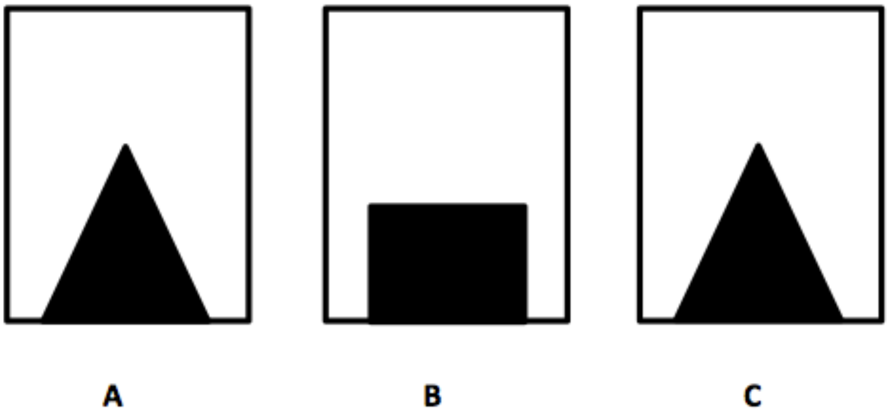
Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 3

Du har 3 kort i en hatt, som vist nedenfor, der to har bilde av en trekant og et kort har bilde av et rektangel. Du kan lage et hus ved å trekke kortet AB eller BC eller du kan lage en diamant/rombe ved å trekke kortene AC.



Du trekker to av kortene fra hatten uten å se hvilke kort du trekker. Hva er sannsynligheten for at du kan lage et hus?

- ○ 1/2
- ○ 2/3
- ○ 1/3
- ○ 1/6
- ○ Ingen av svarene er korrekte.

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 4

Bettina og Lars kaster en terning. Dersom det blir partall vinner Bettina, ellers vinner Lars. Er spillet rettferdig?

- ○ Ja
- ○ Nei

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 5

Jannecke og Emilie kaster to terninger. Dersom summen av øyne er partall vinner Jannecke ellers vinner Emilie. Er spillet rettferdig?

- ○ Ja
- ○ Nei

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 6

En terning har **en** side som er farget svart mens de andre fem sidene er gullfarget. Dersom terningen blir trillet en gang, hvilken farge tror du det er på siden som vender opp?

- ○ Svart
- ○ Gull
- ○ Det er ikke nok informasjon til å kunne svare
- ○ Svart og gull er like sannsynlig

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 7

På et sykehus fører de opp tallet på nyfødte gutter og jenter. Hva er mest sannsynlig av hendelse A og B?

- ○ A) Det blir født 4 eller flere gutter av de neste 5 nyfødte barna?
- ○ B) Det blir født 80 eller flere gutter av de neste 100 nyfødte barna?
- ○ A og B er like sannsynlig.

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 8

Cecilie og Haakon triller to terninger. Dersom begge terningene viser et partall vinner Cecilie ellers vinner Haakon. Er spillet rettferdig?

- ○ Ja
- ○ Nei

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 9

Du har tre kort der ett er rødt på begge sider. Det andre kortet er rødt på en side og hvit på den andre siden. Det tredje kortet er hvitt på begge sider. Anta at du trekker et kort og plasserer det med en tilfeldig side opp. Det viser seg at siden som vender opp er rød. Hva er sannsynligheten for at den andre siden på kortet er rødt?

- ○ 1/2
- ○ 2/3
- ○ 1/3
- ○ 1/6
- ○ Ingen av svarene over er korrekte

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 10

I en boks er det tre biter med godteri. To med smak av appelsin og en med smak av sitron. Om du trekker to biter hva er sannsynligheten for at du trekker et godteri med appelsinsmak og ett med sitronsmak?

- ○ 1/2
- ○ 2/3
- ○ 1/3
- ○ 1/6
- ○ Ingen av svarene er korrekte.

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 11

To bokser kalt A og B er fylt med røde og blå kuler. I boks A er det 100 kuler, 65 røde og 35 blå mens det i boks B er 10 kuler, 6 røde og 4 blå. Du skal først velge boks og så skal du trekke en tilfeldig kule fra den valgte boksen. Dersom du trekker en blå kule, vinner du 100 kr. Hvilken boks gir deg størst vinnersjanse?

- ○ Boks A (med 65 røde og 35 blå)
- ○ Boks B (med 6 røde og 4 blå)
- ○ Det er lik sjanse i hver boks

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 12

Mia foretrekker å velge en rekke med etterfølgende tall når hun spiller lotto. Hun benytter seg av rekken 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Hun påstår at dette øker hennes vinnersjanser. Jenny er derimot ikke enig, hun mener at sjansen for å få syv etterfølgende tall er mindre enn å få en tilfeldig sekvens av tall. Hun sier at lotto er noe som handler om sjanse og det er dermed ingen mulighet å få en sekvens av etterfølgende tall. Hun mener at rekken 2, 5, 10, 15, 23, 27, 34 er mer sannsynlig.

Hva er din mening sett i sammenheng med Mia og Jenny sine?

____

____

____

____

Spørsmål 13

Det er to barn i en familie. Vi vet også at minst ett av disse barna er jente. Hva blir da sannsynligheten for at begge barna er jenter? Ta utgangspunkt i at det er 50% sjanse for å føde en jente og 50% sjanse for å føde en gutt.

- ○ 1/2
- ○ 1/3
- ○ 2/3
- ○ 1/4
- ○ Ingen av svarene er korrekte

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 14

Katarina er vegetarianer og veldig opptatt av alle levende individs rettigheter. Hun er nå ferdig på videregående og har flyttet fra Oslo til Bergen. Hva er mest sannsynlig?

- ○ Katarina er student
- ○ Katarina er student og medlem i en studentorganisasjon som kjemper for avvikling av pelsindustrien.

Hvorfor mener du det?

____

____

Spørsmål 15

Om du triller to terninger, hva er mest sannsynlig?

- ○ A) Å få en femmer og en sekser
- ○ B) Å få to seksere
- ○ De to alternativene A og B er like sannsynlig

Hvorfor mener du dette?

____

____

Spørsmål 16

Hva er mest sannsynlig som summen av øynene på to terninger, av 2 og 12?

- ○ 2
- ○ 12
- ○ 2 og 12 er like sannsynlig

Hvorfor mener du dette?

Spørsmål 17

I en gruppe med deltagere er det 70 lærere på småtrinnet og 30 leger. En av deltagerne er Lise. Hun er en 40 år gammel gift kvinne uten barn, med høye ambisjoner, hardtarbeidende og lovende på sitt felt. Hun er også godt likt på arbeidsplassen.

Hva er sannsynligheten for at Lise er lege og hvorfor mener du det?

7.4 Vedlegg 4 - Intervjuguide 1

Intervjueguide 1

Briefing
Hei, jeg har med meg de oppgavene dere har jobber med. Jeg vil først bare si at målet med undersøkelsen ikke er å se hvor mange riktige dere har klart og jeg vil derfor ikke fortelle dere hvilket alternativ som er riktig. Det som skal skje her inne er at vi skal snakke litt om hvordan dere kom frem til svarene deres. Og igjen finnes det ingen løsningsmåter som er mer riktig enn andre. Det er fint om dere prøver å forklare så detaljert som mulig hva dere tenkte/gjorde. Dere kan godt fortelle hva dere syntes om oppgavene. For eksempel om de var krevende eller enkle. Tok lang tid eller gikk fort osv. Noen ganger vil jeg trekke frem løsninger noen av elevene fra klassen deres har brukt og da ønsker jeg at dere kommenterer denne løsningsstrategien.

Dette er en lydopptaker den kommer til å ta opp det som blir sagt i løpet intervjuet slik at det blir lettere for meg å huske det som blir sagt.
Vil også bare repetere at det bare er meg og veileder som kommer til å ha tilgang på disse opptakene. Navnene deres vil også byttes ut.

Intervjuet
Spørsmål 5

- Hvis vi nå går over til å snakke om spørsmål 5. Hva gjør dere/tenker dere når dere skal løse denne oppgaven?
    - Hva er det denne oppgaven forteller oss/ber oss om å finne ut?
    - Når du skal løse en slik oppgave, hva er det første du gjør? Hva gjør du så? Osv.
    - Var dere innom andre måter å gjøre det på?
        - Hvorfor valgte dere akkurat den metoden dere valgte?
- Hva syntes dere om denne oppgaven?
- På denne oppgaven var det stor variasjon i hvordan dere og de andre i klassen gikk frem for å svare på spørsmålet. I tillegg til det dere nå har diskutert var det noen som gjorde dette, noen andre gjorde dette $\{2,4,6,8,10,12\}>\{3,5,7,9,11\}$. Hva tenker dere om disse løsningene?

Spørsmål 9

- Hvis vi nå går over til å snakke om spørsmål 9. Hva gjør dere/tenker dere når dere skal løse denne oppgaven?
    - Hva er det denne oppgaven forteller oss/ber oss om å finne ut?
    - Når du skal løse en slik oppgave, hva er det første du gjør? Hva gjør du så? Osv.
- Hva syntes dere om denne oppgaven?
- Denne oppgaven ble av noen tenkt på, på en annen måte. Hva tenker dere om denne løsningsmetoden?

Spørsmål 3

- Hvis vi starter med dette spørsmålet. Hva gjør dere/tenker dere når dere skal løse denne oppgaven?

- Hva er det denne oppgaven forteller oss/ber oss om å finne ut?
    - Når du skal løse en slik oppgave, hva er det første du gjør? Hva gjør du så? Osv.
- Hva syntes dere om denne oppgaven?
- Noen andre elever har løst oppgaven på denne måten AB AC BA CA BC, CB. Hva tenker dere om denne løsningen? (Fint og åpent)
    - Elevene jeg snakker med har benyttet seg av å regne ut sannsynligheten direkte. P(feil) og 1-(feil) og siste mann har tenkt seg frem til svaret.
- Hva er forskjellen på spørsmål 10 og spørsmål 3?
    - Noen hadde blukt samme metode mens noen hadde brukt to ulike ulike metoder på de ulike oppgavene. Hvorfor tror dere det?

Spørsmål 13

- Hvis vi nå går over til å snakke om spørsmål 13. Hva gjør dere /tenker dere når dere skal løse denne oppgaven?
    - Hva er det denne oppgaven forteller oss/ber oss om å finne ut?
    - Når du skal løse en slik oppgave, hva er det første du gjør? Hva gjør du så? Osv.
- Hva syntes dere om denne oppgaven?
- Noen av elevene som svarte på spørsmålene hadde tegnet opp dette. Hva tenker dere om denne måten å håndtere oppgaven på?

Spørsmål som kan bli naturlige i løpet av intervjuet er:

- Jeg merker en viss frustrasjon når du snakker om denne oppgaven. Kan du prøve å forklare hvorfor denne oppgaven gjør deg frustrert?
- Det var interessant, kan du utdype litt mer?
- Hva mener du med det?
- Gjenta det de sier. Få de til å utdype.

Debriefing

Da har jeg stilt de spørsmålene jeg hadde og har fått svar på mye. Er det noe dere har lyst å fortelle eller legge til? Nå er jeg ferdig med å samle inn de dataene jeg trenger til prosjektet. Videre vil jeg jobbe med å analysere det som jeg har fått innblikk i gjennom spørreundersøkelsene og det vi har snakket om her i dag. Om dere ønsker det kan jeg sende dere intervjuet når jeg har fått renskrevet dette. Da kan dere lese igjennom det selv og be meg fjerne eventuelle deler dere ikke ønsker at jeg skal ta med i min oppgave. Da kan du også be meg endre på noe om du mener at noe ikke er kommet tydelig frem. Om du ønsker denne muligheten trenger jeg din e-post adresse.

Tusen takk for at dere har deltatt på dette prosjektet.

7.5 Vedlegg 5 - Intervjuguide 2

Intervjueguide 2

Briefing
Hei, jeg har med meg de oppgavene dere har jobber med. Jeg vil først bare si at målet med undersøkelsen ikke er å se hvor mange riktige dere har klart og jeg vil derfor ikke fortelle dere hvilket alternativ som er riktig. Det som skal skje her inne er at vi skal snakke litt om hvordan dere kom frem til svarene deres. Og igjen finnes det ingen løsningsmåter som er mer riktig enn andre. Det er fint om dere forklarer så detaljert som mulig. Dere kan godt fortelle hva dere syntes om oppgavene. For eksempel om de var krevende eller enkle. Tok lang tid eller gikk fort osv. Noen ganger vil jeg trekke frem løsninger noen av elevene fra klassen deres har brukt og da ønsker jeg at dere kommenterer denne løsningsstrategien.

Dette er en lydopptaker den kommer til å ta opp det som blir sagt i løpet intervjuet slik at det blir lettere for meg å huske alt som blir sagt.

Intervjuet
Spørsmål 3

- Hvis vi starter med dette spørsmålet. Hva gjør dere/tenker dere når dere skal løse denne oppgaven?
    - Hva er det denne oppgaven forteller oss/ber oss om å finne ut?
    - Når du skal løse en slik oppgave, hva er det første du gjør? Hva gjør du så? Osv.
- Hva syntes dere om denne oppgaven?
- Noen har gjort sånn. Hva tenker dere om det?
- Sammenligne med oppgave 10.

Spørsmål 5

- Hvis vi nå går over til å snakke om spørsmål 5. Hva gjør dere/tenker dere når dere skal løse denne oppgaven?
    - Hva er det denne oppgaven forteller oss/ber oss om å finne ut?
    - Når du skal løse en slik oppgave, hva er det første du gjør? Hva gjør du så? Osv.
    - Var dere innom andre måter å gjøre det på?
        - Hvorfor valgte dere akkurat den metoden dere valgte?
- Hva syntes dere om denne oppgaven?
- Noen har gjort sånn. Hva tenker dere om det?

Spørsmål 9

- Hvis vi nå går over til å snakke om spørsmål 9. Hva gjør dere/tenker dere når dere skal løse denne oppgaven?
    - Hva er det denne oppgaven forteller oss/ber oss om å finne ut?
    - Når du skal løse en slik oppgave, hva er det første du gjør? Hva gjør du så? Osv.
- Hva syntes dere om denne oppgaven?

- Denne oppgaven ble av noen tenkt på, på en annen måte. Hva tenker dere om denne løsningsmetoden?

Spørsmål 15

- Hvis vi nå går over til å snakke om spørsmål 15. Hva gjør dere /tenker dere når dere skal løse denne oppgaven?
    - Hva er det denne oppgaven forteller oss/ber oss om å finne ut?
    - Når du skal løse en slik oppgave, hva er det første du gjør? Hva gjør du så? Osv.
- Hva syntes dere om denne oppgaven?
- Noen valgte å løse oppgaven på denne måten, hva syntes dere om dette?

Spørsmål 16

- Hvis vi nå går over til å snakke om spørsmål 16. Hva gjør dere /tenker dere når dere skal løse denne oppgaven?
    - Hva er det denne oppgaven forteller oss/ber oss om å finne ut?
    - Når du skal løse en slik oppgave, hva er det første du gjør? Hva gjør du så? Osv.
- Hva syntes dere om denne oppgaven?
- Noen byttet svar fra 12 til like sannsynlig. Hva tror dere var årsaken til det?

Spørsmål som kan bli naturlige i løpet av intervjuet er:

- Jeg merker en viss frustrasjon når du snakker om denne oppgaven. Kan du prøve å forklare hvorfor denne oppgaven gjør deg frustrert?
- Det var interessant, kan du utdype litt mer?
- Hva mener du med det?

Debriefing

Da har jeg stilt de spørsmålene jeg hadde og har fått svar på mye. Er det noe du har lyst å fortelle eller legge til? Nå er jeg ferdig med å samle inn de dataene jeg trenger til prosjektet. Videre vil jeg jobbe med å analysere det som jeg har fått innblikk i gjennom spørreundersøkelsene og det vi har snakket om her i dag. Om dere ønsker det kan jeg sende dere intervjuet når jeg har fått renskrevet dette. Da kan dere lese igjennom det selv og be meg fjerne eventuelle deler dere ikke ønsker at jeg skal ta med i min oppgave. Da kan du også be meg endre på noe om du mener at noe ikke er kommet tydelig frem. Om du ønsker denne muligheten trenger jeg din e-post adresse.

Tusen takk for at dere har deltatt på dette prosjektet.