Undervisning av integrasjon før derivasjon

En masteroppgave av

Håkon Rongevær

Masteroppgaven fullfører graden

Integrert lektorutdanning i matematikk og naturfag

Universitetet i Bergen, Matematisk institutt

Juni 2020

Forord

Da jeg gikk ut fra videregående skole for 8 år siden, var jeg sikker på at jeg skulle bli lektor i matematikk. Denne oppgaven representerer både avslutningen på en femårs utdanning frem mot dette målet og starten på en ny tilværelse som ferdig utdannet lektor.

Jeg kunne ikke vært mer klar.

Det er mange som fortjener takk for at jeg har overlevd disse fem årene, for ikke å snakke om de siste seks månedene:

Først og fremst vil jeg takke min kone, Frida Engeset Løfoll, som både har vært eksepsjonelt tålmodig med meg, samtidig som at hun vet nøyaktig når jeg bare trenger et spark bak. Jeg hadde aldri klart å gjennomføre dette studiet uten hennes støtte.

Jeg vil også takke min andre kone, Øyvind Salvesen Tømmernes, for alt fra lufteturer under masterskriving til å være forloveren min. Du er, og vil alltid være, en kone blant menn.

Veilederen min Bettina Dahl Søndergaard skal også ha en stor takk for alt av idéer og samtaler gjennom denne prosessen.

Til slutt vil jeg rette en takk til Jostein Walle, min matematikklærer på videregående skole. Min interesse for matematikk kan i stor grad spores direkte tilbake til hans timer. I en samtale fortalte han at han alltid følger med på hvem som har gått ut med grader fra universitetet for å se om det er noen av hans tidligere elever. Det har vært en motivasjon disse månedene å tenke på at han nå kan finne mitt navn i den listen.

Innholdsfortegnelse

Introduksjon

Bakgrunn for valg av oppgave

Da jeg begynte å nærme meg dette semesteret med masterskriving, var jeg fremdeles ganske i villrede om hva jeg faktisk skulle skrive om. Jeg hadde en tanke om at jeg ville skrive om noe som hadde med matematikkens historie å gjøre og jeg visste at jeg som regel synes selve matematikken er mer interessant enn all teorien rundt det didaktiske. Som kommende matematikklærer høres det kanskje ille ut, men jeg tror en kommer veldig langt med god kunnskap og forståelse for faget, sammen med et brennende engasjement for faget og et ønske om at andre skal oppfatte det som like interessant som en selv gjør.

Med disse opplysningene gikk jeg til veilederen min som heldigvis har vært så tålmodig som det går an, og tatt seg tiden til å «brainstorme» frem og tilbake til vi fant noe som vi begge syntes virket interessant. Det startet med en diskusjon om i hvor stor grad matematikkundervisningen bør følge den historiske utviklingen av temaet, og at det på den måten kanskje kan være en naturlig progresjon i temaet. Etter noen forsøk på å finne eksempler på områder hvor en ikke følger denne historiske progresjonen i skolen, kom vi inn på kalkulus og hvordan derivasjon undervises før integrasjon. Mens Arkimedes allerede 200-300 år f.kr regnet ut noe veldig tilsvarende bestemte integral (Apostol, 1967, s. 3), var det først på tidlig 1600-tallet at Fermat utviklet metoder for å finne den deriverte (Apostol, 1967, s. 156). Likevel er det i dag mest vanlig å undervise derivasjon før integrasjon.

Etter litt diskusjon så vi ingen god grunn til at en ikke skulle kunne undervise integrasjon først, men vi hadde aldri hørt om noen som gjorde det på denne måte. Dette fikk oss til å tenke at det godt kunne være en god grunn til hvorfor det ikke blir gjort, men at det i så fall hadde vært interessant å finne denne grunnen. Etter litt undersøkinger på internett, kom jeg over boken «Calculus Vol. 1» (1967) av Tom Apostol. Denne boken underviste integrasjon før derivasjon og var blitt brukt på California Institute of Technology, så det fantes folk som har undervist integrasjon først.

Tidlig i prosessen med denne oppgaven hadde jeg mange diskusjoner med medstudenter og venner om hvordan en kunne undervise integrasjon uten å kunne derivasjon. Den første responsen til flertallet var at dette ikke ville være mulig. Sammenligninger som at dette ville være som å undervise subtraksjon før addering eller divisjon før multiplikasjon gikk igjen, og overraskelsen var stor da jeg påpekte at jeg hadde en bok som underviste det i denne rekkefølgen. En av de kommentarene som jeg bet meg mest fast i, var en venn som kommenterte noe lignende av «Den deriverte har en geometrisk beskrivelse og kan vises visuelt. Integrasjon er jo bare det motsatte av derivasjon.» Integralet til en funksjon har i høyeste grad en geometrisk beskrivelse som kan vises visuelt, men dette var av en eller annen grunn glemt av de fleste frem til jeg nevnte det, og fremdeles var det få som husket noe mer enn at det hadde noe med Riemannsummer å gjøre. Dersom jeg er helt ærlig, var dette noe lignende av min første respons da veilederen min påpekte den også, så det var tydelig at de fleste av mine venner både på og utenfor universitetet ikke husket de geometriske beskrivelsen av integralet og at integrasjon bare ble sett på som motstykket til derivasjon.

Samtidig som integrasjon tydeligvis ofte blir sett på som motstykket til derivasjon, er integrasjon på høyere nivåer av matematisk analyse viktigere enn derivasjon (Courant, 1937, s. 136). Det virker dermed logisk at en skulle lagt mer fokus på dette temaet.

Forskningsspørsmål

Selve forskningsspørsmålene har endret seg mye underveis i oppgaven. I begynnelsen var det største spørsmålet om det i det hele tatt går an å undervise integrasjon før derivasjon. Deretter var spørsmålet hvorfor det er mest vanlig at en underviser derivasjon først. Dette ville vært et enormt prosjekt å gjennomføre på bare ett semester, så jeg endte opp med å måtte kutte det ned til noe mer oppnåelig.

Jeg vil i denne oppgaven prøve å finne ut hvordan en kan undervise integrasjon og derivasjon på nivået til en R-matematikklasse på videregående skole, ved å introdusere integrasjon før derivasjon. For å belyse denne problemstillingen, vil jeg i denne oppgaven svare på to spørsmål:

1. Hva kjennetegner lærebøker som underviser integrasjon før derivasjon?
2. Hva ville jeg brukt fra disse bøkene for å legge opp et undervisningsprogram som oppnår relasjonell og strukturell forståelse av både integrasjon og derivasjon?

For å svare på disse spørsmålene vil jeg først se på teori om relasjonell versus instrumentell forståelse og strukturell versus operasjonell forståelse. Deretter vil jeg gjennomgå metoden jeg har brukt for å analysere lærebøkene jeg skal analysere, før jeg faktisk går igjennom hvordan tre kalkulusbøker skrevet med 34 og 18 års mellomrom, som introduserer integrasjon før derivasjon, går frem for å undervise disse konseptene.

Teori

Målet med enhver matematisk undervisning er at studentene skal oppnå forståelse for konseptene som blir diskutert. Det er dermed logisk at dersom en skal analysere tekstbøker for å finne gode undervisningsmetoder, så er teori om forståelse godt å ha i bakhånd. De to tekstene jeg har valgt å se på i teoridelen er «Relational Understanding and Instrumental Understanding» av Richard Skemp og «On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin» av Anna Sfard. Mens Skemp beskriver relasjonell og instrumentell forståelse, beskriver Sfard strukturell og operasjonell forståelse. Ved første øyekast kan dette virke som to sider av samme sak, men en finner av tekstene at det er noen vesentlige forskjeller. Det som derimot er klart er at det ønskede resultatet fra undervisning er ikke bare forståelse, men en relasjonell og strukturell forståelse.

Relasjonell og instrumentell forståelse

Richard Skemp (1987)

I teksten «Relational Understanding and Instrumental Understanding» beskriver Richard R. Skemp fra University of Warwick to forskjellige betydninger av ordet forståelse. Han argumenterer for at det er én forståelse som baserer seg på det instrumentelle og én som baserer seg på det relasjonelle. Det vil si der en kan se sammenhengen, eller relasjonene, mellom de forskjellige matematiske enhetene og metodene. Skemp beskriver forskjellen på disse forståelsene som at relasjonell forståelse er å forstå hva en skal gjøre og hvorfor, mens instrumentell forståelse er «regler uten begrunnelse» (Skemp, 1987, s. 153).

Mange elever, men også mange lærere har en tendens til å fokusere for mye på instrumentell forståelse og si seg fornøyd når det instrumentelle er på plass (Skemp, 1987, s. 153). Dersom en lærer om areal, er det lett å si at arealet av et rektangel er lik høyde multiplisert med bredde og være fornøyd der. Med bare den kunnskapen kan en få gjort de fleste oppgaver uten feil, men en har ikke nødvendigvis fått en relasjonell forståelse av hvorfor en kan bruke denne formelen. Det er lett å unnskylde elevene for å ta denne «snarveien». En kan kjapt lære seg formelen for så å gjennomføre alle oppgavene på planen på kort tid slik at en har mer tid til å finne på noe annet. Uansett om læreren fortsetter å bruke tid på å forklare og vise hvorfor formelen fungerer og hvor den kommer fra, vil mange elever likevel sone ut og si seg fornøyd med å ha lært formelen. Dersom relasjonell forståelse er målet, er det mer urovekkende er at en ofte ser at læreren gjør det samme. Dersom en lærer har undervist om areal og en elev sier at han ikke forstår helt, ser en ofte at læreren refererer tilbake til formelen og forklarer det enkelt med at «du må gange sammen høyden og bredden. Slik finner du arealet.».

De fleste matematikklærere vil argumentere for at relasjonell forståelse er det normative idealet, men ender ofte opp med å undervise en mer instrumentell matematikk. Skemp (1987, s. 158) viser til tre grunner til hvorfor instrumentell forståelse kan være fordelaktig:

1) Instrumentell matematikk kan være lettere å forstå. Noen tema kan være vanskelig å forstå relasjonelt. Eksempler kan være derivasjon av polynomer. En kan fint pugge at $\frac{dy}{dx}\ ax^b = abx^{b-1}$ eller at $\left(f(x) \times g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, men den relasjonelle forklaringen på formlene kan være vanskelig å forstå. Dersom målet er å få riktig svar på alle oppgavene på kortest mulig tid, vil det være lettere å bruke en instrumentell forståelse.
2) Instrumentell matematikk gir en umiddelbar gevinst. Det tar veldig kort tid å lære en formel, og på bare et par minutter er du klar til å kunne løse oppgaver. Mange elever opplever dårlig selvtillit i matematikk og trenger en suksess. Den instrumentelle forståelsen gjør det lettere å få gjort mange oppgaver uten spesielt motstand som kan øke selvtillit og motivasjon.
3) Instrumentell matematikk krever mindre kunnskap og kan dermed gi riktig svar fortere og med større sikkerhet enn med relasjonelle tankemåter. Dette gjør at til og med erfarne matematikere med relasjonell forståelse av en mengde tema ofte bruker instrumentelle tankemåter for å få riktig svar raskere.

Samtidig argumenterer han også for hvorfor relasjonell forståelse er mer gunstig (Skemp, 1987, s.159):

1) Relasjonell matematikk er lettere å adaptere til nye oppgaver. Når en lærer en regel eller formel, gjelder den vanligvis bare for én situasjon, og det kan derfor være at den ikke fungerer i en annen lignende situasjon. Dersom en har en relasjonell forståelse av metoden og forstår hvorfor den virker, vil det være lettere å relatere metoden til problemet og dermed adaptere metoden til nye problemer en skulle møte.
2) Relasjonell matematikk er lettere å huske. Det kan høres ut som en motsetning til punkt 1 for hvorfor instrumentell matematikk kan være gunstig, men samtidig som relasjonell matematikk er vanskeligere å lære, er den lettere å huske. Når en lærer instrumentell matematikk, lærer en nye regler for hvert tema og unntakssituasjon. Relasjonell matematikk tar kanskje lenger tid å lære, men har overføringsverdi til nye utfordringer. Dersom en for eksempel har lært hvordan finne arealet under en kurve ved hjelp av det bestemte integralet, vil det være lettere å overføre den kunnskapen til areal mellom to kurver. Dette kommer av at en ser regler som en del av en større sammenheng.
3) En ser at relasjonell kunnskap kan sees på som et mål i seg selv. Dette reduserer drastisk behovet for ytre belønning og straff. Som lærer gjør dette motivasjonsdelen av jobben mye lettere.
4) Relasjonelle skjemaer har organiske kvaliteter. Dette vil si at relasjonell forståelse bidrar til sin egen vekst. Ettersom at relasjonell forståelse gir en følelse av måloppnåelse i seg selv, vil en som regel ikke bare prøve å oppnå relasjonell forståelse når en blir presentert for nytt materiale, men også selv søke etter nytt materiale og kunnskap.

Det er ingen tvil om at Skemp mener relasjonell forståelse burde være målet med all matematisk undervisning og dermed også for lærebøkene. Samtidig legger han frem gode argumenter for hvorfor en ikke bare kan se vekk fra den instrumentelle forståelsen. Selv om han omtaler relasjonell forståelse og instrumentell forståelse som to separate forståelser og nærmest motstykker til hverandre, virker det som at de kan være vanskelig å skille totalt. Er det i det hele tatt mulig å oppnå relasjonell forståelse uten noen instrumentell forståelse?

Strukturell og operasjonell forståelse

Anna Sfard (1991)

Mens Skemp skriver om relasjonell og instrumentell forståelse, skriver Anna Sfard fra University of Haifa i «On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin» om strukturell og operasjonell forståelse. Det er en del fellestrekk mellom de to teoriene, men det er ingen tvil om at Sfard har et litt annet fokus.

Sfard baserer seg på Piagets forståelse om figurative og operative skjemaer hvor figurative skjemaer handler om å se en tilstand som momentant og statisk, mens operative skjemaer handler om transformasjoner (Sfard, 1991, s. 8). Hun beskriver strukturell forståelse som å kunne se på en matematisk enhet som et objekt. En vil da kunne referere til den som om det var en «ekte» ting – en statisk struktur som eksisterer i sted og tid. En kan gjenkjenne idéen med et raskt blikk og kan manipulere den som en helhet uten å gå inn på detaljer (Sfard, 1991, s. 4).

Mens Skemp enkelt forklarer instrumentell forståelse som regler uten begrunnelse, er det Sfard kaller operasjonell forståelse når en anser en matematisk oppfatning som en prosess. Heller enn å se den som en faktisk enhet, ser en den som et potensiale som bare eksisterer på forespørsel i en sekvens av bestemte handlinger (Sfard, 1991, s. 4). Det vil si at selv om en har forstått hvorfor en bruker reglene og dermed oppnådd relasjonell forståelse, trenger det ikke bety at en har oppnådd strukturell forståelse så lenge en fremdeles ser på det som en prosess heller enn et objekt.

Å snakke om matematiske objekter virker ofte rart for ikke-matematikere, men matematikere snakker ofte om matematiske objekter på lik linje som fysikere ville snakket om for eksempel molekyler og atomer. Det er helt vanlig å si setninger som «Det finnes en funksjon slik at …». I motsetning til i fysikkens verden, er det helt umulig å sanse disse matematiske objektene. Til og med når en tegner en graf eller skriver et tall, er det bare representasjoner av et abstrakt objekt (Sfard, 1991, s. 3). Egenskapen å kunne «se» disse usynlige objektene, virker å være en essensiell komponent i matematiske evner. Denne mangelen kan være grunnen til at matematikk virker så uoverkommelig for ellers «velutviklede hjerner» (Sfard, 1991, s.3).

Selv om det er mest vanlig i matematikken å basere matematiske definisjoner på strukturell forståelse, finnes det aksepterte matematiske definisjoner som viser en annen tilnærming. Funksjoner kan for eksempel sees på som et sett med ordnede par, men også som en bestemt beregnende prosess. Den sistnevnte definisjonen vil dermed heller være basert på operasjonell forståelse (Sfard, 1991, s.4).

For å omtale matematiske objekter, må vi kunne bruke produkter fra noen prosesser uten å bry oss om selve prosessen. Det virker dermed som om den strukturelle tilnærmingen burde bli ansett som et mer avansert stadium i konseptutvikling. Vi har med andre ord gode grunner til å tro at i prosessen for konseptformasjon, vil operasjonelle konsept komme før de strukturelle. Det finnes selvsagt unntak. En kan for eksempel se for seg at mange geometriske idéer hadde en strukturell forståelse før en operasjonell. Oppfatningen av en sirkel som objekt kom nok før en forstod prosessen for å lage den. (Sfard, 1991, s. 10)

Dersom den strukturelle tilnærmingen er mer abstrakt enn den operasjonelle, dersom tall og funksjoner fra et filosofisk synspunkt i bunn og grunn bare er prosesser, dersom utførelse er den eneste måten å virkelig «komme i kontakt med» med abstrakte idéer – dersom alt dette stemmer ville det være like urimelig å forvente at en person skal oppnå strukturell forståelse uten tidligere operasjonell forståelse, som å forvente at denne personen skulle forstå de todimensjonale tegningene av en kube uten å ha sett den virkelige tredimensjonale modellen først (Sfard, 1991, s. 18). Det gir derfor mening at det operasjonelle aspektet vil bli introdusert før det strukturelle. Til og med dersom et nytt konsept blir introdusert strukturelt, er denne tendensen så sterk at en student i utgangspunktet vil tolke definisjonen operasjonelt (Sfard, 1991, s. 23).

Historisk sett ser en at konseptformasjon vanligvis går gjennom tre faser. Først må det være en prosess utført på allerede kjente objekter, så må idéen om å gjøre denne prosessen om til en selvstendig enhet oppstå og til slutt må evnen til å se denne nye enheten som en integrert, objektlignende helhet tilegnes. Disse tre stegene kaller internalisering, kondensering og reifikasjon (Sfard, 1991, s. 18).

I internaliseringsfasen blir studenten kjent med prosessene som til slutt vil være det nye konseptet. Eksempler kan være hvordan telling fører til konseptet naturlige tall, subtraksjon fører til negative tall osv. Disse prosessene er operasjoner som er utført på lavere nivås matematiske objekter. En prosess er blitt internalisert når den kan brukes, analyseres og sammenlignes uten at den faktisk blir gjennomført (Sfard, 1991, s. 18).

I kondenseringsfasen presser en lengre sekvenser av operasjoner inn i mer overkommelige deler. I denne perioden blir personen mer og mer kapabel til å tenke på en gitt prosess som en helhet uten å måtte gå inn på detaljer. En ser prosessene tydeligere som input-outputrelasjoner heller enn å se på selve operasjonene. Som i et dataprogram, gir en denne kondenserte helheten et navn. Det er her et nytt konsept blir født. Kondensering, å kombinere prosesser med andre prosesser, gjør det mye lettere å sammenligne og gjøre generaliseringer. Fremgang i kondensering vil også vise seg i hvor lett det er å alternere mellom representasjoner av et konsept. Kondenseringsfasen varer så lenge en ny enhet er tett koblet til en prosess (Sfard, 1991, s.19).

Bare når personen klarer å se den matematiske enheten som et faktisk objekt, sier vi at konseptet er reifisert. Reifikasjon er dermed et ontologisk skift, en evne til å se noe kjent i et nytt lys (Sfard, 1991, s. 19). Mens internalisering og kondensering er gradvise, kvantitative endringer, er reifikasjon et momentant kvantesprang; en prosess blir et objekt, en statisk struktur. Reifikasjonen er det punktet hvor internaliseringen av høyere nivås konsepter som baseres på prosesser utført på objektet begynner. Altså at en kan utføre prosesser med objektet som input (Sfard, 1991, s. 20).

Dersom en student ikke har oppnådd reifikasjon med et konsept, vil internaliseringsfasen til et nytt konsept som baserer seg på dette tidligere konseptet, lide. En ser dermed at disse tre fasene er et hierarki hvor en fase ikke kan nås før de tidligere stegene er tatt (Sfard, 1991, s. 21).

Metode

Utvalg av bøker

Som nevnt i innledningen, ville jeg i denne oppgaven se på kalkulusbøker som introduserer integrasjon før derivasjon. Det var flere faktorer som gjorde at jeg endte opp med de tre bøkene jeg gjorde.

Den åpenbare faktoren er at det er ikke overflod av bøker som introduserer integrasjon før derivasjon. Det er tross alt derivasjon før integrasjon som er standarden. I tillegg til de tre jeg har sett på vet jeg bare om to andre bøker som introduserer integrasjon først, og to som introduserer begge temaene nesten samtidig. «Much Ado about Calculus» (1979) av R. L. Wilson og «Calculus and Analytic Geometry» (1970) av B. Rodin er de eneste andre bøkene jeg fant som introduserer integrasjon først, men det finnes helt sikkert andre bøker der ute som jeg ikke har oppdaget. «Calculus in Context, The Five College Calculus Project» (1995) av J. Callahan et. al. introduserer både integrasjon og derivasjon omtrent samtidig, men når de kommer til den grundigere matematiske diskusjonen, blir derivasjon diskutert først. «Calculus, Single and Multivariable» (1998) av D. Hughes-Hallet et. al. introduserer derivasjon først, men går i mer i dybden på det bestemte integralet før metodene for finne den deriverte blir introdusert.

Så når jeg bare klarte å finne fem bøker som faktisk introduserer integrasjon før derivasjon, var det heldigvis ikke så mange bøker som potensielt måtte kuttes. Å begrense det ned til tre bøker ble imidlertid mye lettere enn forventet, da det brøt ut pandemi og bibliotekene ble stengt. De tre bøkene jeg har valgt å analysere er ganske enkelt de tre bøkene jeg klarte å få tak i online. Om jeg hadde hatt full frihet, tror jeg fremdeles jeg ville valgt Courant og Apostol, men kanskje byttet ut Henle & Kleinberg med enten Rodin eller Wilson. Jeg syntes det var interessant å se på hvordan metodene eventuelt har utviklet seg fra 1927 da Courant først ble publisert, til 1961 da Apostol først ble publisert, til 70-tallet hvor de tre siste bøkene ble publisert.

Alle tre bøkene har innhold som strekker seg langt forbi pensum til R-matematikk på videregående skole. Jeg har prøvd å begrense meg til å bare se på de relevante delene av bøkene, men har også med en oppsummering av hvilke forkunnskaper som introduseres før en kommer til integrasjon- og derivasjonsdelene.

Metode for analyse

Når en skal analysere lærebøker, må en følge en slags struktur. Dersom en ikke gjør det, kan det fort bli ens egne tilfeldige inntrykk som blir vektlagt. Jeg har ikke nødvendigvis lagt skjul på hvordan jeg har oppfattet bøkene som leser, men for å holde det strukturert har jeg lent meg på metodene for tekstbokanalyse som er beskrevet i «A Framework for Textbook Analysis» (2012) av Lisa O'keefe.

Jeg kommer altså til å analysere struktur, innhold og forventninger til lærebøkene jeg skal se på videre i oppgaven med base i rammeverket lagt frem av O'keefe. I tillegg vil jeg med bakgrunn i teoriene til Skemp og Sfard, se hvordan bøkene legger opp til relasjonell forståelse og overgangen fra operasjonell forståelse til strukturell forståelse.

Rammeverk for tekstbokanalyse

Lisa O’keefe (2012)

Lisa O’keefe fra University of South Australia har skrevet «A Framework for Textbook Analysis» for å gi et rammeverk for analyse av matematiske tekstbøker. Hun henviser først til Gelfman, Podstrigich og Losinkaya (2004) sine retningslinjer for rollen til en tekstbok (O’keefe, 2012, s. 2):

- Å lære og oppmuntre studenter til å tilegne seg ny kunnskap,
- Å balansere detaljer og informasjonens presisjon,
- Å legge frem logiske og konsekvente matematiske system,
- Å oppfordre til nye spørsmål,
- Å tilegne studenten aktiv, kreativ og flersidig informasjon.

Da hun begynte å analysere tekstbøker, tok hun utgangspunkt i The Third International Mathematics and Science Study (1995) sine tre hovedelementer (O’keefe, 2012, s. 5): Faginnhold, prestasjonsforventninger og perspektiv.

O’keefe argumenterer for at perspektiv-elementet er basert på studentdata, så det er ikke med i bokanalyse. Faginnhold-elementet deles heller inn i to underkategorier: Struktur og innhold. Dermed er de tre hovedelementene som analyseres:

- Struktur
- Innhold
- Prestasjonsforventninger

Analyse av struktur

Strukturen i en tekstbok kan forbedre eller ødelegge for forståelsen den vil gi, så rekkefølge og sammenheng mellom tekstelementer må analyseres nøye (O’keefe, 2012, s. 6).

Her inngår både selve strukturen i teksten, som hvordan en refererer til objekter, sammenligninger, utbyttinger av ord, gjentagelser og generell ordflyt, men også den fysiske strukturen til teksten. Selv om kunnskapen i teksten er viktig, bestemmer den fysiske strukturen om målgruppen i det hele tatt vil lese den (O’keefe, 2012, s. 6). O’keefe refererer til Valverde et al (2002) som legger frem følgende aspekter: Plassbruk og innramming, elementer (bilder, tekst, design), farge og ikke-farge, informasjonsnivå, sammenslåinger og separasjon.

Analyse av innhold

Innholdet i en tekstbok er naturlig nok utrolig viktig. Innholdet i en tekstbok spiller inn på hvilke valg læreren og studenten gjør og hvor de legger fokuset, som igjen spiller inn på læringsutbyttet. For å analysere innholdet i en tekstbok viser O’keefe til Rivers (1990) sine fire aspekter for innholdsanalyse (O’keefe, 2012, s. 6):

- **Motivasjonsfaktorer**
  Dette inkluderer historiske bemerkninger, biografier til matematikere eller vitenskapsfolk, relevant karriereinformasjon, applikasjoner og fotografier.

- **Pekepinner for forståelse**
  Fokus på farge og grafikk.
- **Tekniske hjelpemidler**
  Dette inkluderer alt materiale som er relevant for kalkulatorer og datamaskiner.
- **Filosofisk posisjon**
  Hva som vektlegges og predominant filosofi.

Målene til en tekstbok er ifølge Wittlin (1978) å først få studentens oppmerksomhet, presentere beskjeden klart og tydelig og til slutt holde på oppmerksomheten. Følgende tabell kan brukes for å analysere om en tekstbok når disse målene (O'keefe, 2012, s. 6):

Mål:	Fare:	Hvordan unngå faren:
Få oppmerksomheten	Undervurdering	Relevans, interesse, dissonans, appell til sanser og appell til effekt.
Formidle beskjeden	Overvurdering	Tomme flater, planlagt gjentaking, bruk av flere kanaler og hierarkisk organisasjon av nøkkeltema.
Holde på oppmerksomheten	Ensformighet	Endre modalitet, legge inn spørsmål, variere hvilke sanser som brukes og dramatisering av tema.

Analyse av forventning

Forventninger til studentenes prestasjoner er innebygget i lærebøker og bestemmer i stor grad hvordan studenter velger å behandle problemene de møter (O'keefe, 2012, s. 7). Dersom boken for eksempel omtaler en oppgave som repetisjon, vil studenten oppsøke tidligere metoder for å løse oppgaven heller enn å gå til problemløsning. I tillegg kan en se for seg at dersom en oppgave omtales som repetisjon, men studenten ikke husker hvordan oppgaven skal løses, kan studenten føle at hen ikke henger med. En bør også se på hva som vektlegges og hvilken filosofi som ligger til grunnen i tekstboken, da begge deler har en direkte effekt på studentens forventninger.

Analyse

Courant 1937

Den første boken ut er «Differential and Integral Calculus Vol 1» av Richard Courant. Den spesifikke versjonen jeg har er andre utgave av boken publisert i 1937. Boken ble i utgangspunktet gitt ut på tysk mens Courant jobbet på universitetet i Göttingen i 1927. Da Hitler kom til makten i 1933, ble alle professorer med jødisk opphav sparket. Ettersom at Courant kom fra en jødisk familie, gjaldt dette han også. Etter et kjapt opphold i England, endte han opp i universitetet i New York hvor han fra 1953 til 1958 var direktør for «Institute of Mathematical Sciences». I 1964 ble dette instituttet omdøpt til «Courant Institute».

Første utgave av boken ble trykket på engelsk i 1934, og andre utgaven ble trykket i 1937. I ettertid er den blitt gjentrykket hvert år fra 1940 til 1961. Apostol forteller også om at han brukte Courant sine lærebøker da han startet å undervise kalkulus, så det er uten tvil en veldig innflytelsesrik bok.

Innhold

1. Introduksjon
2. De fundamentale idéene om integrasjon og derivasjon
    - 2.1. Det bestemte integralet
    - 2.2. Eksempler
    - 2.3. Den deriverte
    - 2.4. Det ubestemte integralet, den antideriverte og fundamentalteoremet
    - 2.5. Enkle metoder for grafisk integrasjon
    - 2.6. Videre bemerkninger og sammenhengen mellom integralet og den deriverte
    - 2.7. Estimering av integral og middelverdisetningen for integrasjon

    Appendiks

    1. Eksistensen til det bestemte integralet til en kontinuerlig funksjon
    2. Forholdet mellom middelverdisetningen for derivasjon og middelverdisetningen for integrasjon

3. Derivasjon og integrasjon av grunnleggende funksjoner
    - 3.1. De enkleste reglene for derivasjon og deres bruksområder
    - 3.2. De tilsvarende integrasjonsreglene
    - 3.3. Den inverse funksjonen og dens deriverte
    - 3.4. Derivasjon av en funksjon av en funksjon
    - 3.5. Maksima og minima
    - 3.6. Logaritmen eksponensialfunksjonen
    - 3.7. Noen bruksområder til eksponensialfunksjonen
    - 3.8. De hyperbolske funksjonene
    - 3.9. Størrelsesorden for funksjoner

    Appendiks

    1. Noen spesielle funksjoner

Forord

I forordet til den første tyske utgaven av boken skriver Courant at det ikke er noen mangel på bøker om kalkulus, men at det er vanskelig å finne bøker for nybegynnere som tar en rett til poenget slik at en kan bruke det på en fornuftig måte. Selv om han mener han ikke nødvendigvis har skrevet den ideelle lærebok, sier han den ikke er overflødig og at den vil skille seg ut fra litteratur fra samtiden.

Den største forskjellen han trekker frem er at han ikke vil behandle derivasjon og integrasjon separat. «This separation, a mere result of historical accident, with no good foundation either in theory or in practical convenience in teaching, hinders the student from grasping the central point of the calculus, namely, the connexion between definite integral, indefinite integral and derivative» (s. v)

Videre forklarer han at oppbygningen av kapitlene er slik at en blir ledet rett til den nyttige informasjonen og at det er appendikser i slutten av kapitlene for studenter som vil dykke dypere i teorien. Disse appendiksene er ikke nødvendig for studenter som ønsker å gå direkte til de praktiske bruksområdene (s. vii). Det virker dermed som at appendiksene skal støtte det Skemp (1987) kaller en mer relasjonell forståelse mens målet med hoveddelen av kapitlene er å oppnå instrumentell forståelse.

Introduksjon

Kapittel 1 er for å bygge bakgrunnsinformasjon til neste kapittel om integrasjon og derivasjon. Courant sier selv at derivasjon og integrasjon baseres på de to viktige konseptene funksjoner og grenser (s. 5). Som Sfard (1991) sier at for å kunne starte internaliseringsfasen av de nye konseptene integrasjon og derivasjon, må en først ha oppnådd reifikasjon av de grunnleggende konseptene som de nye konseptene baseres på. For å oppnå strukturell forståelse av integrasjon og derivasjon, mener altså Courant at konseptene en må reifisere på forhånd er funksjoner og grenser. Dette er også de to temaene kapittel 1 omhandler.

Den første delen av kapittelet er satt av til funksjonskonseptet og starter med tallrekken. Her går en gjennom de rasjonelle tallene og hvorfor en måtte utvide dem, reelle tall og uendelige desimaler, og til slutt litt om ulikheter. Videre kommer en inn på selve funksjonskonseptet. Boken starter med definisjonen av en funksjon før den viser den grafiske representasjonen til funksjonen. I tillegg gjennomgås det sentrale begrepet kontinuitet, før en går mer i dybden på elementære funksjoner som de rasjonelle, algebraiske og trigonometriske funksjonene i tillegg til eksponensialfunksjonen og logaritmen.

Neste del av kapittelet handler hovedsakelig om grenser. Her introduseres følger som konsept, før en ser på grenser til følger. Deretter ser en på geometriske representasjoner og videre diskusjon rundt grensekonseptet. Tema som diskuteres er konvergens, monotone følger og regning med grenser.

Til slutt bindes de to konseptene sammen ved å se på grensekonseptet til funksjoner hvor variabelen er kontinuerlig og på nytt se på kontinuitet.

Strukturanalyse

II] THE DERIVATIVE 89

limiting position of the secant is the tangent, and the statement that such a limiting position of the secant exists is equivalent to the assumption that the curve has a definite tangent or a definite direction at the point P. (We have used the word "assumption" because we have actually made one. The hypothesis that the tangent exists is valid for most simple curves, but is by no means true for all curves, or even for all continuous curves.)

Once we have represented our curve by means of a function $y=f(x)$ the problem arises of representing our geometrical limiting process analytically, using the function $f(x)$. We take the angle which a straight line l makes with the x-axis as being the angle through which the positive x-axis must be turned in the positive direction* in order to become for the first time parallel to the line l. Let a_1 be the angle which the secant PP_1 forms with the positive x-axis (cf. fig. 7) and a the angle which the tangent forms with the positive x-axis. Then if we disregard the case of a perpendicular tangent we obviously have

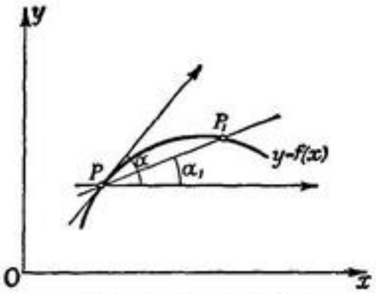


Fig. 7.—Chord and Tangent

$$\lim_{P_1 \to P} a_1 = a,$$

where the meaning of the symbols is perfectly clear. If $x, y(=f(x))$ and $x_1, y_1(=f(x_1))$ are the co-ordinates of the points P and P_1 respectively, we immediately have †

$$\tan a_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x};$$

and thus our limiting process is represented by the equation

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \tan a.$$

* That is, in such a direction that a rotation of $\pi/2$ brings it into coincidence with the positive y-axis; in other words, counter-clockwise.

† In order that this equation may have a meaning, we must assume that $0 < |x - x_1| < \delta$, δ being chosen sufficiently small. In what follows, corresponding assumptions will often be made tacitly in the steps leading up to limiting processes.

4* (E 798)

Figur 1: Illustrasjon av oppsett i Courant 1937

Av de tre bøkene jeg analyserer, er nok dette den vanskeligste å lese. Dette skyldes strukturen til boken. Det som skiller seg mest ut, er at alle sidene er tettpakket med innhold, og det er veldig få tomme flater. All teksten i boken er veldig kompakt med lite bruk av luft for å lage god visuell oversikt. I stedet for å ha mellomrom mellom avsnitt, er det et lite innhopp. Dette fører til at all teksten er i store blokker som kun er brutt opp av figurer eller formler. Det er ikke noen farger i boken og de fleste illustrasjonene er så små som mulig og innfelt i tekstblokkene. Når det blir introdusert teoremer eller regneregler som ikke bare er en formel, er disse fremdeles inne i tekstblokkene uten å være skilt ut på noe vis annet enn å være i kursiv.

På veldig mange av sidene er det fotnoter markert med «*» hvor forfatteren kommer med forslag til studieteknikker og arbeidsmetoder, videre tanker rundt temaet, eller tilbakeblikk eller frempek til relaterte tema som er diskutert et annet sted i boken. Dette kan være fint for å knytte nye konsept til tidligere tema for å styrke internaliseringsprosessen, men det kan også være en motivasjonsfaktor for elever som vil «se inn i fremtiden» og får en smakebit på hva som kommer.

Boken bruker tre forskjellige typer hovedoverskrifter (figur 2). Hvert kapittel er markert fint og tydelig med kapittelnummer og tittel, deretter er kapittelet delt inn i nummererte underkapittel som igjen ofte er delt inn i nummererte underkapittel på nytt. De første underkapitlene er markert med midtstilt tittel i tillegg til nummerering. Neste nivå med undertitler er markert med tittel og nummerering i omtrent samme størrelse og med samme symboler, bare sidestilt og med fet skrift. Som observant leser, vil en nok over tid venne seg til hvilke overskrifter som er for underkapitler og hvilke som hører til undertitler, men det opplevdes til tider forvirrende for min del.

Som forfatteren nevner i forordet, velger han å starte kapitlene med det instrumentelle eller operative og legger den tyngste, mer relasjonelle teorien i appendikser på slutten av kapitlene. Ut ifra Sfard (1991) sin teori om internalisering, kondensering og reifikasjon, gir dette mening da hun argumenterer for at en ikke vil oppnå strukturell forståelse uten instrumentell forståelse i bunn. Både Sfard og Skemp (1987) ville sikkert vært mer skeptiske til det faktum at forfatteren av boken selv sier i forordet at studenter står fritt til å hoppe over appendiksene dersom de bare vil ha den operasjonelle forståelsen av konseptene.

CHAPTER III

Differentiation and Integration of the Elementary Functions

1. The Simplest Rules for Differentiation and their Applications

In higher analysis and its applications it is usually the case that the problems of integration are more important than those of differentiation, but that differentiation offers less difficulty than integration. Consequently the natural method of building up the integral and differential calculus is first to learn to differentiate the widest possible classes of functions and then by virtue of the fundamental theorem (Chap. II, § 4, p. 116) to make the results thus obtained available for the solution of integration problems. In the following sections it will be our task to carry out this programme. To a certain extent we shall make a fresh start, since we shall work out the most important differentiations and integrations systematically without calling upon the results of last chapter. In this development of the subject certain rules for differentiation, with the first of which we are already acquainted (p. 96), will play an important part.

1. Rules for Differentiation.

We assume that in the interval which we are considering the functions $f(x)$ and $g(x)$ are differentiable; our rules then run as follows:

Rule 1. *Multiplication by a constant.*

If c is a constant and $\phi(x) = cf(x)$, then $\phi(x)$ is differentiable, and

$$\phi'(x) = cf'(x).$$

136

Figur 2: De tre typene overskrifter i Courant 1937

Forventningsanalyse

En ting som skiller seg ut ifra andre tekstbøker jeg har lest tidligere, er at det ikke er noen oppgaveseksjoner i boken. I noen av delkapitlene er det en eksempeldel hvor det ikke er løsningsforslag, men de fleste eksempeldelene er mer typisk hvor forfatteren tar en gjennom løsningsprosessen. Det er en veldig tydelig forventning til studenten om at han skal gjøre mer arbeid enn bare disse eksempeloppgavene. Ofte er det spesifisert arbeid som oppfordres for studenten enten i fotnoter eller i selve teksten. På side 82 gir boken en rekke eksempler hvor boken bare bruker øvre eller nedre sum, men i en fotnote oppfordrer studenten å jobbe videre selv:

«*We leave it as a useful exercise for the reader to prove that in the following examples we actually arrive at the same result, whether we use the upper sum or the lower.»

Andre ganger, som for eksempel på side 87, er det mer et forslag enn en oppfordring. Boken viser først at $\int_a^b \sin x \ dx = -(\cos b - \cos a)$, og foreslår:

«In the same way, as the reader may verify for himself, we obtain the formula $\int_a^b \cos x \, dx = \sin b - \sin a$.»

Jeg fant også et eksempel på side 82, på at forfatteren indirekte oppfordrer til at studenten skal finne bevis selv ved å informere om at beviset er enkelt, men uten å gi noen videre forklaring:

«If $f(x) = \varphi(x) + \omega(x)$, then $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \varphi(x) \, dx + \int_a^b \omega(x) \, dx$. The proof is quite simple.»

Det er ofte en forventning til at studenten husker hva som har skjedd tidligere og klarer å se sammenhengen. Eksempelvis på side 137:

«We may pass over the proof, which after chapter II is fairly obvious»

I tillegg til forventninger til hvordan en skal jobbe med boken, virker det også som om forfatteren forventer at studenten også har generelle forkunnskaper innenfor fysikk. Mange av eksemplene som brukes innenfor derivasjon og integrasjon har base i fysikk, og selv om det gis en forklaring på temaene som diskuteres, er det veldig kjapt og gir inntrykk av at det forventes at studenten har kjennskap til dette fra før.

Innholdsanalyse

Bestemt integral

Kapittel to starter med en kort historisk introduksjon. Forfatteren forklarer at isolerte eksempler på både integrasjon og derivasjon ble sett på i «klassiske tider», men at det ikke var før en så sammenhengen mellom disse og begynte å utvikle nye metodiske prosedyrer at en kan si at integrasjons- og derivasjonsregning virkelig startet. Denne utviklingen krediterer han likt til Newton og Leibniz, og påpeker at mens Newton beskrev sine konsepter mer tydelig, er Leibniz sin notasjon og hans metoder mer velutviklede og i større grad brukes i dag.

Første del av kapitlet er tilegnet det begrensede integralet. Boken forklarer at en først møter integralet i det teoretiske problemet med å måle arealet mellom buede linjer, og at en ved hjelp av mer raffinerte metoder kan separere integralregning fra dette naive, intuitive arealproblemet til å uttrykke det analytisk ved hjelp av rein regning.

En ser først på integralet som areal ved å konstruere rektangulære søyler hvor toppen av rektangelet treffer grafen til funksjonen. Dette er hva vi kaller Riemannsummer, men dette er ikke nevnt i boken. Ved å la rektanglene treffe de høyeste punktene i intervallet en ser på, finner en den øvre summen, altså den høyeste verdien integralet kan ha. For å finne den nedre summen, gjør en det motsatte. Boken argumenterer intuitivt for at ved å la bredden til rektanglene minske grenseløst, vil den øvre summen og den nedre summen begge være lik integralet. Videre gir boken den analytiske definisjonen av integralet ved formelen $F_n = \sum_{\gamma=1}^{n} f(\xi_\gamma)\Delta x_\gamma$, hvor ξ_γ er et punkt på x-aksen mellom x_γ og $x_{\gamma-1}$ og gir et teorem som sier at denne formelen vil gi integralet dersom en lar n øke grenseløst og lar det lengste subintervallet gå mot null. Før en går videre i boken, informerer den om at dette integralet kan bevises analytisk, men at det spares til appendikset slik at studenten har fått brukt integralet og dette har stimulert studentens interesse for å ha en nøyaktig begrunnelse for det. Dette faller igjen fint inn i Sfard (1991) sine argumenter om at en bør starte med det operasjonelle før en introduserer det strukturelle.

Videre introduseres en for notasjonen $\int_a^b f(x)dx$, og forfatteren forteller hvordan dette kommer fra Leibniz og at det er en modifikasjon av et summetegn som i utgangspunktet var en utstrukket S. En annen interessant bemerkning som gjøres i boken er hvordan en tenker rundt dx:

«We must however, guard ourselves against thinking of dx as an “infinitely small quantity” or “infinitesimal”, or of the integral as the “sum of an infinite number of infinitely small quantities”. Such a conception would be devoid of any clear meaning; it is only a naïve befogging of what we have previously carried out with precision.» (s. 80-81)

Forfatteren sier derimot ikke noe om hvordan en skal tenke på dx. Det virker som han her oppfordrer til en relasjonell forståelse over en instrumentell forståelse. Det fungerer selvsagt å se på dx som en infinitesimal, og det er etter at boken ble gitt ut bevist matematisk at en kan gjøre det slik (som vi kommer litt inn på i *Infinitesimal Calculus* (1979) senere), men på denne tiden var det ikke bevist på en tilstrekkelig grundig måte.

Videre introduseres de additive egenskapene til integraler og det gis en pekepinn for forståelse rundt den uavhengige variabelen i et integral. Her påpeker boken at selv om en til nå har brukt x som uavhengig variabel, vil det fungere likt om en skriver $\int_a^b f(t)dt$ eller $\int_a^b f(u)du$ eller lignende.

Til slutt i denne delen av kapitlet er det nesten seks sider med regneeksempler hvor boken viser analytisk hvordan en integrerer funksjonene $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^\alpha$, $f(x) = \sin x$ og

$f(x) = \cos x$. Alle disse regneeksemplene er rene demonstrasjoner (figur 3), men det er en side til slutt som også kalles eksempel, men hvor det gis oppgaver uten svar eller fremgangsmetode.

3. Integration of x^α, where α is any Positive Integer.

As a third example we consider the integration of the function

$$y = f(x) = x^\alpha,$$

where α is any positive integer. For the computation of the integral

$$\int_a^b x^\alpha \, dx$$

(where we assume $0 < a < b$) it would be inconvenient to divide the interval into n equal parts.* The passage to the limit may, however, be accomplished very easily if we effect a subdivision in "geometric progression" in the following manner. We put $\sqrt[n]{b/a} = q$ and subdivide the interval by the points

$$a, \; aq, \; aq^2, \; \ldots, \; aq^{n-1}, \; aq^n = b.$$

* We should then be obliged to base the evaluation of the integral upon the calculation of the limit of $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ $(1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha)$ as $n \to \infty$; the reader may work this out for himself as indicated in the footnote on p. 27.

The required integral is then the limit of the following sum:

$$\begin{aligned} &a^\alpha (aq - a) + (aq)^\alpha (aq^2 - aq) + (aq^2)^\alpha (aq^3 - aq^2) + \ldots \\ &\qquad + (aq^{n-1})^\alpha (aq^n - aq^{n-1}) \\ &= a^{\alpha+1} (q-1) \{1 + q^{\alpha+1} + q^{2(\alpha+1)} + q^{3(\alpha+1)} + \ldots + q^{(n-1)(\alpha+1)}\}. \end{aligned}$$

The terms in the last bracket form a geometric progression with common ratio $q^{\alpha+1} \neq 1$. If we sum this progression, we obtain for the whole expression the value

$$a^{\alpha+1}(q-1)\frac{q^{n(\alpha+1)} - 1}{q^{\alpha+1} - 1}.$$

We now replace q by its value $(b/a)^{1/n}$; our sum then takes the form

$$(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})\frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1}.$$

If we now let n increase without limit, the first factor retains its value. Since $q \neq 1$ we can use the formula for the sum of a geometric progression and write the second factor in the form

$$\frac{1}{q^\alpha + q^{\alpha-1} + \ldots + 1};$$

and as the equation $q = (b/a)^{1/n}$ shows that q tends to 1 as $n \to \infty$, the second factor will have the limit $1/(\alpha + 1)$. Thus finally the value of our integral is given by the formula

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha + 1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

The above calculation is simple in principle, but somewhat complicated in detail. We shall later find that it can be entirely avoided, once we are better acquainted with integration theory.

Figur 3: Hvordan boken integrerer x^α når α er ethvert positivt heltall.

Derivasjon
Neste del av kapittelet er viet til derivasjon. Etter eksemplene i delen om det bestemte integralet er det en del som bygger opp til derivasjonsdelen, men også til videre regning med integraler:

«Almost every one of these examples has been attacked by means of some special method or particular device. The essential point of the systematic integral and differential calculus is the very fact that instead of such special devices we utilize considerations of a general character which leads us directly to the desired result. In order to arrive at these methods we must now turn our attention to the other fundamental concept of higher analysis, the derivative.» (s. 87)

Derivasjonsdelen introduseres med en forklaring om de intuitive bakgrunnene til derivasjon som tangent og hastighet. Boken starter med den deriverte som tangent og viser at $f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ før den introduserer Leibniz' notasjon som $\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Deretter viser den hvordan en kan se på den deriverte som en hastighet. Om en definerer $f(t)$ som posisjonen til et punkt etter t tidsenheter, er gjennomsnittshastigheten lik $\frac{f(t_1)-f(t)}{t_1-t}$. Om en vil finne hastigheten i en bestemt posisjon, lar en endringen i tid gå mot null og finner at hastheten $c = f'(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{f(t_1)-f(t)}{t_1-t}$. Etter å ha vist dette argumenterer forfatteren for denne mer analytiske metoden over en ren geometrisk metode:

«From this new meaning of the derivative, which in itself has nothing to do with the tangent problem, we see that it really is appropriate to define the limiting process of differentiation as a purely analytical operation independent of geometrical intuitions.» (s. 93-94)

Videre introduseres og bevises forskjellige regneregler for derivasjon, som derivasjon av konstante funksjoner, førstegradsuttrykk, n'tegradsuttrykk og de trigonometriske funksjonene, sin x og cos x. Deretter introduseres og bevises de additive egenskapene til den deriverte og hvordan en kan vite at en funksjon er kontinuerlig dersom den er deriverbar før en kommer til et avsnitt om høyere deriverte. Her introduseres disse som når en deriverer en funksjon flere ganger. Det blir ikke forklart noe om hvordan dette kan brukes annet enn for eksemplet hvor $f(t)$ er posisjonen til et punkt etter t tidsenheter. Her blir da $f'(t)$ hvordan posisjonen endrer seg i t, altså hastigheten, og $f''(t)$ blir hvordan hastigheten endrer seg i t, altså akselerasjonen. Det blir også nevnt, uten noe bevis eller demonstrasjon, at dersom $f''(x)$ er positiv øker $f'(x)$ når x øker, og motsatt når $f''(x)$ er negativ.

Før en begynner å se på sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon introduseres middelverdisetningen for derivasjon. Først vises det at $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(\xi)$ hvor ξ er en x-verdi mellom x_1 og x_2. Middelverdisetningen bevises ved hjelp av Rolles teorem og en bruker igjen middelverdisetningen til å bevise monotoniegenskaper til funksjoner basert på fortegnet til den deriverte i intervallet.

Sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon
Etter å ha sett på både det bestemte integralet og derivasjon, handler den neste delen om sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon. Forfatteren starter dette delkapittelet ved å kalle denne sammenhengen selve grunnsteinen i derivasjons- og integrasjonsregning.

En starter med å se på integralet som en funksjon av den øvre grensen for å finne et ubestemt integral. Boken viser at dersom en setter $\int_a^x f(u)du = \Phi(x)$ hvor a er et konstant tall og lar den øvre grensen, x, variere, og deretter setter $\Psi(x) = \int_{\alpha}^{x} f(u)du$ hvor α er et annet konstant tall, så vil $\Psi(x) - \Phi(x) = \int_{\alpha}^{a} f(u)du = konstant$. Da ser en også at $\Psi(x) = \Phi(x) + konstant$ som vil si at ulike integral av samme funksjon bare skilles av en tilleggskonstant.

Videre ser en på den deriverte av det ubestemte integralet. Her introduseres et teorem som sier at det ubestemte integralet, $\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(u)du$, av en kontinuerlig funksjon, f(x), alltid har en derivert og $\Phi'(x) = f(x)$. Derivasjon av det ubestemte integralet av en gitt kontinuerlig funksjon gir oss alltid tilbake den samme funksjonen. Dette er den grunnleggende idéen for derivasjon- og integrasjonsregning som en helhet. Boken beviser dette teoremet både med base i geometri i tillegg til analytisk.

Boken bygger videre på dette ved å gå inn på den antideriverte og den generelle definisjonen av det ubestemte integralet. Den antideriverte introduseres med en problemstilling hvor en har en funksjon $f(x)$ og må finne en funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$. For å løse dette problemet er en nødt til å gjøre det motsatte av å derivere. $F(x)$ vil da være den antideriverte til $f(x)$. Ettersom at differansen mellom to antideriverte alltid er en konstant, kan en alltid finne alle andre antideriverte ut fra én antiderivert ved $F(x) + c$. Etter dette viser boken at en kan skrive alle antideriverte på formen $F(x) = c + \Phi(x) = c + \int_{a}^{x} f(u)du$ og innfører notasjonen $F(x) = \int f(x)dx$.

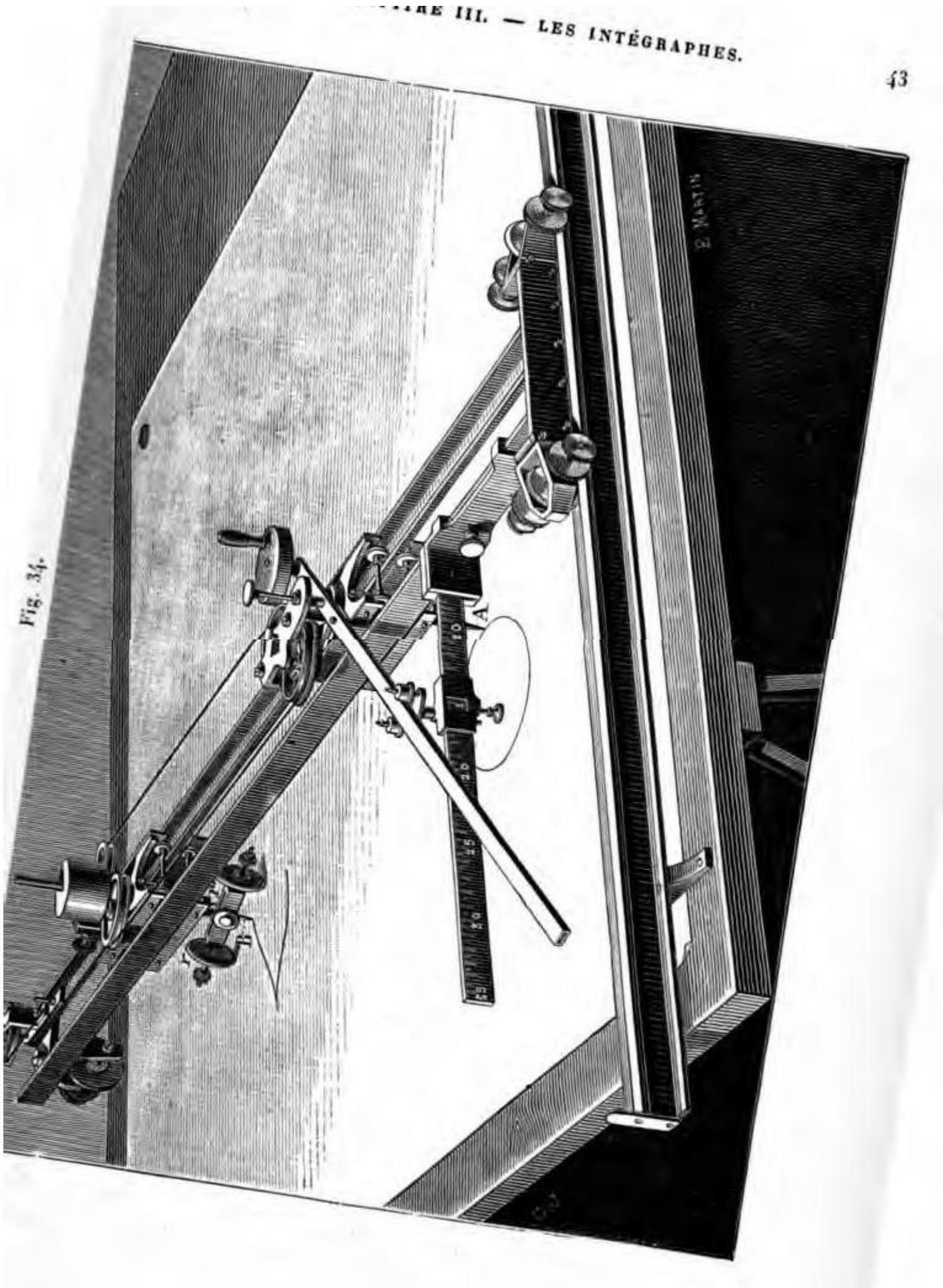
«We shall no longer make any distinction between the primitive function and the indefinite integral. Nevertheless, if the reader is to have a proper understanding of the interrelations of these concepts it is absolutely necessary that he should clearly bear in mind that in the first instance integration and inversion of differentiation are two entirely different things, and that it is only the knowledge of the relationship between them that gives us the right to apply the term "indefinite integral" to the primitive function also» (s. 116)

Her virker det som om forfatteren uttrykker et ønske om at studenten skal oppnå det Skemp (1987) ville kalt en relasjonell forståelse av ubestemt integral og den antideriverte. Han skriver at de kan ansees som det samme rent instrumentelt, men om en skal ha full relasjonell forståelse, må en forstå at de ikke er det samme og forstå sammenhengen mellom dem.

Etter dette kommer boken til hvordan en bruker den antideriverte til å evaluere bestemte integral. En tenker at en vet den antideriverte $F(x)$ av en funksjon $f(x)$ og vil finne $\int_{a}^{b} f(u)du$. Boken refererer til at det tidligere er vist at et hvert ubestemt integral $\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(u)du$ bare vil være ulik fra $F(x)$ med en tilleggskonstant, så $\Phi(x) = F(x) + c$. En kan finne c ved å se på $\Phi(a) = \int_{a}^{a} f(u)du = 0 = F(a) + c$ som fører til at $c = -F(a)$. Dermed vil $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Om en setter x=b, blir da $\int_{a}^{b} f(u)du = F(b) - F(a) = F(x)|_{a}^{b}$.

Det er et delkapittel om hvordan en grafisk kan tegne funksjonen en får av å integrere en funksjon, $y = F(x)$. Denne metoden er med dagens hjelpemiddel utdatert, men i en fotnote fant jeg et interessant teknisk hjelpemiddel (figur 4):

«We may mention in passing that graphical integration (that is, the finding of the graph of a primitive F(x) of a function f(x) which itself is given by a graph) can also be performed by means of a mechanical device, the so-called "integraph". In this mechanism a pointer is moved along the given curve and a pen automatically traces one of the curves y=F(x) for which F'(x)=f(x). The indeterminacy of the constant of integration is expressed by a certain arbitrariness in the initial position of the instrument.» (s. 121)



Figur 4: Illustrasjon av en integraf hentet fra Les Intégraphes(s. 43) av Bruno Abdank-Abakanowicz (1886). Paris: Gauthier-Villars.

På slutten av kapittelet før appendikset, er det noen deler om bruksområder for derivasjon og integrasjon. Først er det et eksempel på en gass-søyle hvor F(x) er en summefunksjon som sier hvor mye den totale vekten av gassen er fra bakken og opp til x. En ser først at gjennomsnittsmassen mellom to høyder x_1 og x_2 er lik $\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}$ og at dersom en lar $x_2 \to x_1$, så vil får en $F'(x_1) = f(x_1)$

som er spesifikk masse, også kalt tetthet, i høyde x_1. Summefunksjonen F(x) er den antideriverte til f(x), altså er massen er den integrerte til tettheten og tettheten er den deriverte til massen.

Det vises et lignende eksempel til hvor Q(t) er total mengde varme som trengs for å øke temperaturen til en masse fra t_0 til t. På samme måte som i det første eksemplet vises det at $q(t) = Q'(t)$ er spesifikk varme for materialet. Boken forteller at en møter ofte tilfeller hvor total og spesifikk mengde er kontraster til hverandre. I naturen er det mest vanlig at en ikke vet tetthet eller spesifikk mengde, men at en vet den totale mengden. Da starter en med den antideriverte ("primitive function") og gjennom derivasjon finner en den spesifikke mengden.

Etter eksemplene er det en del om hvordan kalkulus kan brukes i vitenskap. Her endrer forfatteren skrivemåte og bruker mye mindre symboler og formler til fordel for mer tekst. I følge Wittlin (1978, sitert i O'keefe, 2012) er det en måte å holde på oppmerksomheten til studenten. I teksten skiver forfatteren om hvordan kalkulus ikke er nøyaktig i naturen, men at det er en idealistisk versjon av virkeligheten. Ettersom at målinger aldri blir helt nøyaktig og en har dermed alltid en begrenset nøyaktighet. Våre idealiseringer er som regel innenfor den eksperimentelle nøyaktigheten identisk med virkeligheten. Som et eksempel er ikke summefunksjonen til gass-søylen fra det tidligere eksempelet egentlig en lineær funksjon. Det er en stegfunksjon hvor en legger til massen til et molekyl for hvert molekyl en passerer oppover, men siden dette er en så liten masseendring, kan en se på det lineært, og da fungerer idealiseringene våre utmerket.

Før appendikset utledes også middelverdisetningen for integrasjonsregning. Boken viser to hoved-varianter av det: $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$ hvor $a \leq \xi \leq b$ og $\int_a^b f(x)p(x)dx = f(\xi)\int_a^b p(x)dx$ hvor $f(x)$ og $p(x)$ er kontinuerlige funksjoner i $a \leq x \leq b$ og $p(x) \geq 0$. Som et eksempel på bruksområder til middelverdisetningen for integrasjon bruker boken den til å integrere $x^\alpha$for enhver irrasjonell verdi av α. Ved hjelp av middelverdisetningen utledes formelen $\int_a^b x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$ når $0 < a < b$.

I appendikset går boken mer i dybden på enkelte temaer. Spesifikt beviser boken at det alltid finnes et bestemt integral til en kontinuerlig funksjon mellom grensene a og b. Deretter demonstrerer den sammenhengen mellom middelverdisetningen for derivasjon og integrasjon på følgende vis:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

$$F(b) - F(b) = (b-a)F'(\xi)$$

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(\xi)$$

Regneregler for derivasjon og integrasjon

I kapittel tre skal jeg hovedsakelig se på regneregler for derivasjon og integrasjon. Forfatteren velger her å introdusere regnereglene for derivasjon først og ta reglene for integrasjon etterpå.

«In higher analysis and its applications it is usually the case that the problems of integration are more important than those of differentiation, but that differentiation offers less difficulty than integration. Consequently the natural method of building up the integral and differential calculus is first to learn to differentiate the widest possible classes of functions and then by virtue of the fundamental theorem to make the results thus obtained available for the solution of integration problems.» (s. 136)

Måten reglene legges frem på er at en setter som er forutsetning at i intervallet en ser på er funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ deriverbare og deretter legges reglene frem én etter én og bevises deretter ut ifra definisjonen av en deriverte. Reglene som legges frem er at
for $\Phi(x) = cf(x)$, er $\Phi'(x) = cf'(x)$ hvor c er en konstant,
for $\Phi(x) = f(x) + g(x)$ er $\Phi'(x) = f'(x) + g'(x)$,
for $\Phi(x) = f(x)g(x)$ er $\Phi'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$,
for $\Phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ er $\Phi'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{\{g(x)\}^2}$,
at $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$,
at $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ og at $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$.

For integrasjon vises først formlene for integrasjon av en funksjon multiplisert med en konstant og summen av to funksjoner. Disse blir ikke bevist, men det blir referert til tidligere i boken hvor disse er blitt nevnt. Interessant nok, ble de ikke bevist da heller, men det ble bare nevnt at beviset var «quite simple». De resterende reglene blir bevist med bakgrunn i fundamentalteoremet ved å integrere begge sider av derivasjonsregelen. Reglene som blir vist er
at $\int cf(x)dx = c\int f(x)$ hvor c er en konstant,
at $\int\{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,
at $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + \int g(x)f'(x)\,dx$,
at $\int \cos x\,dx = \sin x$ og at $\int \sin x\,dx = -\cos x$.

Boken går videre igjennom derivasjon og integrasjon av inverse funksjoner før en kommer inn på kjerneregelen. Her diskuterer boken først litt hva en funksjon av en funksjon er før kjerneregelen introduseres som at dersom $f(x) = g\{\Phi(x)\}$ er deriverbar, er dens deriverte lik $f'(x) = g'(\Phi) \times \Phi'(x)$. Regelen bevises og det blir forklart at dette også gjelder i «dypere» sammensatte funksjoner som hvor for eksempel $y = g(u)$, $u = \Phi(v)$ og $v = \Psi(x)$. Da er $\frac{dy}{dx} = y' = g'(u)\Phi'(v)\Psi'(x) = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}$.

Videre utvikling av integrasjon

Kapittel fire handler utelukkende om integrasjonsregning. I introduksjonen til kapittelet sier forfatteren at etter forrige kapittel burde en nå ha muligheten til å derivere tilnærmet alle funksjoner, men at en ikke er helt der med integrasjon enda. Integrasjon er generelt en viktigere del av vitenskapen enn derivasjon er, så det er viktig å mestre det. Kapittelet begynner med en samling formler, men forfatteren advarer mot å bare memorere dem. Her virker det som at forfatteren oppfordrer til det Skemp (1987) kaller relasjonell forståelse over instrumentell forståelse.

«The first part of this chapter will be devoted to the development of devices useful for this purpose (mestre integrasjon). In this connexion we would expressly warn the beginner against merely memorizing the many formulae obtained by using these technical devices. The student should instead direct his efforts towards gaining a clear understanding of the *methods* of integration and learning how to apply them.» (s. 205)

Boken starter med en tabell hvor de tidligere reglene for derivasjon er oppsummert på en slik måte at en både kan lese dem av som derivasjonsregler og som integrasjonsregler (figur 5). Høyresiden inneholder en rekke elementære funksjoner og venstresiden inneholder de tilhørende deriverte.

Dersom en leser den fra venstre mot høyre, har en grunnfunksjonen på venstre side og et udefinert integral på høyre side.

$F'(x) = f(x)$	$F(x) = \int f(x)\,dx$
1. $x^a \; (a \neq -1)$.	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$.
2. $\frac{1}{x}$.	$\log \lvert x \rvert$.
3. e^x.	e^x.
4. $a^x \; (a \neq 1)$.	$\frac{a^x}{\log a}$.
5. $\sin x$.	$-\cos x$.
6. $\cos x$.	$\sin x$.
7. $\frac{1}{\sin^2 x} \; (\equiv \operatorname{cosec}^2 x)$.	$-\cot x$.
8. $\frac{1}{\cos^2 x} \; (\equiv \sec^2 x)$.	$\tan x$.
9. $\sinh x$.	$\cosh x$.
10. $\cosh x$.	$\sinh x$.
11. $\frac{1}{\sinh^2 x} \; (\equiv \operatorname{cosech}^2 x)$.	$-\coth x$.
12. $\frac{1}{\cosh^2 x} \; (\equiv \operatorname{sech}^2 x)$.	$\tanh x$.
13. $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \; (\lvert x \rvert < 1)$.	$\begin{cases} \operatorname{arc} \sin x. \\ -\operatorname{arc} \cos x. \end{cases}$
14. $\frac{1}{1+x^2}$.	$\begin{cases} \operatorname{arc} \tan x. \\ -\operatorname{arc} \cot x. \end{cases}$
15. $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$.	$\operatorname{ar} \sinh x \equiv \log\{x + \sqrt{(1+x^2)}\}$.
16. $\frac{1}{\pm\sqrt{(x^2-1)}} \; (\lvert x \rvert > 1)$.	$\operatorname{ar} \cosh x \equiv \log\{x \pm \sqrt{(x^2-1)}\}$.
17. $\frac{1}{1-x^2} \begin{cases} \lvert x \rvert < 1. \\ \lvert x \rvert > 1 \end{cases}$	$\operatorname{ar} \tanh x \equiv \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$. $\operatorname{ar} \coth x \equiv \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$.

Figur 5: Integrasjonstabell fra Courant 1987, s. 206

Den neste regelen som introduseres er integrasjon ved substitusjon. Dette er regelen for integrasjon som tilsvarer kjerneregelen for derivasjon. Utledningen starter med at en introduserer variabelen u ved hjelp av funksjonen $x = \Phi(u)$ slik at funksjonen $F(x)$ blir en funksjon av u: $F(x) = F\big(\Phi(u)\big) = G(u)$. Kjerneregelen sier at $\frac{dG}{du} = \frac{dF}{dx}\Phi'(x)$. En husker at $G'(u) = g(u)$ og $F'(x) = f(x)$ som fører til at kjerneregelen blir $g(u) = f(x)\Phi'(u)$. Siden $G(u) = F(x)$, som er det samme som at $\int g(u)\,du = \int f(x)\,dx$, blir integralregningens regel som tilsvarer kjerneregelen lik $\int f\big(\Phi(u)\big)\Phi'(u)du = \int f(x)dx, \ \ \{x = \Phi(u)\}$. Dette er den grunnleggende formelen for integrasjon ved substitusjon. Boken viser et par eksempel på hvordan den kan brukes som for eksempel at $\int \frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)}du = \int \frac{dx}{x} = \log|x| = \log|\Phi(u)|$.

Videre introduserer en metode for å regne ut integralet hvor en regner i motsatt rekkefølge der en starter med en funksjon $f(x)$ som skal integreres. Her kan en finne en funksjon $h\{\Psi(x)\}$ hvor en kan sette $u = \Psi(x)$. Da kan en regne $\int h\{\Psi(x)\}dx = \int h(u)\frac{dx}{du}du$. Boken illustrerer dette ved et eksempel hvor $f(x) = \sin 2x$. Da kan en sette $u = \Psi(x) = 2x$, $h(u) = \sin u$ og $\frac{du}{dx} = 2$. Dermed blir $\int \sin 2x\,dx = \int \sin u \times \frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}\cos u = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Det vises også at dersom en skal finne det bestemte integralet i intervallet $a \le x \le b$, må en se på det nye integralet i intervallet $\Psi(a) \le u \le \Psi(b)$. Boken beviser deretter dette teoremet og viser flere sider med eksempler og oppgaver.

Til slutt skal vi se på hvordan boken introduserer delvis integrasjon. Selve formelen for delvis integrasjon er allerede blitt introdusert i kapittel tre ved å integrere kjerneregelen og bytte om litt på leddene slik at formelen er $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)$. Utregningen av et integral er her redusert til utregningen av et annet integral. En må dele et integral $\int \omega(x)\,dx$ til et produkt $\omega(x) = f(x)\Phi(x)$, og finne det ubestemte integralet $g(x) = \int \Phi(x)\,dx$ for en faktor $\Phi(x)$, slik at $\Phi(x) = g'(x)$. Da blir integralet $\int \omega(x)\,dx = \int f(x)\Phi(x)dx = \int f(x)g'(x)$ redusert til at en bare må regne ut integralet $\int g(x)f'(x)\,dx$ som i noen situasjoner er lettere enn den originale formen. Nytten til denne regelen blir demonstrert ved hjelp av noen eksempel som å integrere følgende funksjoner:

$$f(x) = xe^x$$
$$f(x) = x\sin x$$
$$f(x) = x\cos x$$

Oppsummering

Innholdet i boken er i det store og hele ganske tørt og tunglest i forhold til andre kalkulusbøker jeg har lest tidligere og i forbindelse med denne oppgaven. Hovedfokuset ligger på matematisk grundighet og det er lite motivasjonsfaktorer. Det virker som om forfatteren gjør lite innsats for å holde på oppmerksomheten til studenten. Nye tema blir stort sett introdusert på lignende måter hele veien. En blir presentert for et problem en ikke har redskapene til å takle, en utleder formelen for å takle problemet, kanskje blir formelen bevist og til slutt er det kanskje noen eksempler og/eller oppgaver som illustrerer hvordan formelen brukes og som gir litt egentrening.

Apostol 1967

Neste bok vi ser på er «Calculus Vol. 1» av Tom M. Apostol. Jeg har i dette tilfellet andre utgave gitt ut i 1967. Da Apostol begynte å undervise på California Institute of Technology underviste han først avansert kalkulus med volum 2 av Courant sin bok. Dette var en god bok, men passet ikke helt til nivået han ville undervise på, så han endte opp med å sette sammen sitt eget pensum som etter hvert ble gjort til en lærebok. Slik startet karrieren til Apostol som tekstbokforfatter. Det var av lignende grunner han endte opp med å skrive «Calculus»-bøkene. Første utgaven av boken ble gitt ut i 1961 og andre utgaven ble gitt ut i 1967. Denne boken er av mange fremdeles sett på som gullstandarden for kalkulusbøker.

Innhold

I. Introduksjon
    - I.1. Historisk introduksjon
    - I.2. Litt grunnleggende konsepter for sett-teori
    - I.3. Aksiomer for det reelle tallsystemet
    - I.4. Matematisk induksjon, summeringsnotasjon og relaterte tema

1. Konseptet integrasjon
2. Noen bruksområder for integrasjon
3. Kontinuerlige funksjoner
4. Derivasjon
5. Forholdet mellom integrasjon og derivasjon
6. Logaritmer, eksponensialfunksjoner og inverse trigonometriske funksjoner
7. Polynomtilnærminger for funksjoner
8. Introduksjon til differensialligninger
9. Komplekse tall
10. Følger, uendelige rekker og uegentlig integral
11. Følger og funksjonsrekker
12. Vektoralgebra
13. Bruksområder for vektoralgebra i analytisk geometri
14. Kalkulus for funksjoner med vektor-verdi
15. Lineære flater
16. Lineære transformasjoner og matriser

Forord

I forordet skriver Apostol at det er uenigheter rundt hvordan et første kurs i kalkulus bør legges opp. Noen mener at en burde starte med en grundig gjennomgang av den reelle tallinjen og utvikle temaet steg for steg på en logisk og grundig måte, mens andre mener at kalkulus hovedsakelig er et verktøy for ingeniører og fysikere og at en burde ha hovedfokus på bruksområder for kalkulus, henvise til intuisjon og bruke praktiske eksempler.

Han anerkjenner at begge sider har mye riktig. Kalkulus er en deduktiv vitenskap og en gren innenfor ren vitenskap, men den har også sterke røtter i fysiske problem og mye av dens styrke og skjønnhet stammer fra dens bruksområder. Han prøver derfor i denne boken å kombinere begge deler. Samtidig som boken behandler kalkulus som en deduktiv vitenskap, legger den også vekt på de fysiske bruksområdene for kalkulus.

Bevisene til alle viktige teorem i boken er lagt frem for å best mulig stimulere til forståelse av de matematiske idéene. Før bevisene er det ofte en geometrisk eller intuitiv diskusjon for å gi studenten innsikt i hvorfor bevisene tar den formen de gjør. Selv om denne diskusjonen er tilstrekkelig for studentene som ikke er så opptatt av grundige bevis, er også de komplette bevisene inkludert for de som foretrekker den mer grundige gjennomgangen. Dette passer igjen inn i Sfard (1991) sine tanker da en får de mer grunnleggende og intuitive aspektene servert før en får den komplette gjennomgangen for å få et fullt reifisert begrep og dermed strukturell forståelse. Ut ifra Skemp (1987) sine definisjoner på relasjonell og instrumentell forståelse, kan en likevel oppnå relasjonell forståelse uten de fulle bevisene, da de intuitive og grafiske diskusjonene rundt hvorfor formlene ser ut som de gjør nok er nok til at en vet hva en skal gjøre og hvorfor.

Tilnærmingen i boken er basert på historisk og filosofisk utvikling av kalkulus, noe en blant annet ser ved at integrasjon behandles før derivasjon.

«… integration is treated before differentiation. Although to some this may seem unusual, it is historically correct and pedagogically sound. Moreover, it is the best way to make meaningful the true connection between the integral and the derivative.» (s. vii)

Den historiske utviklingen er tydelig viktig for forfatteren. Han skriver også at før et hvert viktig tema er det en historisk introduksjon fra tidlig intuitiv fysisk tolkning til presis matematisk formulering.

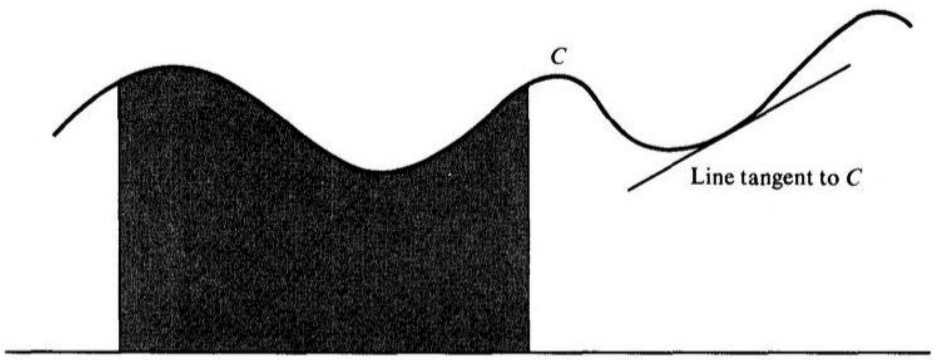
«The student is told something of the struggles of the past and of the triumphs of the men who contributed most to the subject. Thus the student becomes an active participant in the evolution of ideas rather than a passive observer of results.» (s. viii)

Introduksjon

Allerede i introduksjonskapitlet er det en introduksjon, ikke bare av tema en må kunne før en starter på integrasjon og derivasjon, men også av grunntankene i integrasjons- og derivasjonsregning.

Boken forklarer at kalkulus er mer enn et teknisk verktøy, det er en samling idéer. Disse idéene har å gjøre med fart, areal, volum, vekstrate, kontinuitet, tangentlinjer og andre konsepter fra andre felt. De fleste av disse idéene kan formuleres slik at de dreier seg rundt to spesialiserte geometriske problem.

Sett at en har en linje C hvor enhver vertikal linje maksimalt krysser C én gang. Da er det første fundamentale problemet å finne arealet av et skravert område mellom C og grunnlinjen mellom to vertikale linjer som krysser både grunnlinjen og C. Dette er grunntanken bak integrasjon. Det andre fundamentale problemet er å finne stigningstallet til en tangentlinje til C. Dette er grunntanken bak derivasjon.



Figur 6: Figur som demonstrerer de to grunnkonseptene i kalkulus.

Videre er det en historisk introduksjon av integrasjon som hovedsakelig fokuserer på Arkimedes sin «method of exhaustion». Her forklarer boken både litt om hvordan Arkimedes brukte mangekanter til å estimere areal av sirkelbuer, men mest om hvordan han estimerte areal under en parabel. Metoden som vises her er veldig lik det en kaller Riemannsummer, men igjen er det ikke nevnt ved det navnet i boken.

Resten av introduksjonskapitlet er satt av til introduksjon av bakgrunnsinformasjon til kapitlene om integrasjon og derivasjon. Temaene som Apostol ser på som nødvendige reifiserte begrep for å få en strukturell forståelse av integrasjon og derivasjon er teori om sett, aksiomer om det reelle tallsystemet og matematisk induksjon. I teorien om sett, går boken igjennom notasjon, subsett, unioner, interseksjoner og komplementer. I delen om aksiomer for det reelle tallsystemet, går boken gjennom regneregler for de fire store regneartene, ulikheter, øvre og nedre grenser til et sett og litt generell tallteori. Når boken går igjennom matematisk induksjon, går den både igjennom standard matematisk induksjon hvor en beviser en formel for en tilfeldig variabel k og deretter for variabelen $k + 1$, men også for metoden kalt «Reductio ad absurdum» hvor en går ut ifra at en påstand er korrekt og jobber seg frem til en motsigelse og på den måten beviser at påstanden ikke er korrekt.

Strukturanalyse

Det som skiller seg mest ut når en går fra Courant (1937) sin bok til Apostol er hvor mye mer ledig plass det er på sidene. Sidene virker ikke overfylte, og det gjør det mye lettere å holde tråden når en leser. Alt av formler, eksempler og teorem er trukket ut fra teksten som gjør at de skiller seg mer ut. Når det kommer et nytt avsnitt er det fremdeles markert ved et lite innhopp i stedet for et faktisk linjeskift som bryter opp tekstboksene, men siden det er så mange formler og eksempler som lager mellomrom og plass, føles det likevel ikke som de store tekstblokkene som var i Courant (1937).

Ikke bare er teorem og eksempler dratt ut av tekstblokkene, men de er også merket som eksempel og teorem. Både teorem, eksempler og formler underveis er markert med tall som boken kan referere til i tekstdelene.

I likhet med Courant (1937) er det ikke farger på noen av illustrasjonene i boken, men en ser ikke den samme tendensen til å gjøre bildene så små som mulig. De er fremdeles ikke spesielt store, men det føles som om det er større prioritet at bildene skal få den plassen de trenger. Alle bildene er på en egen linje på siden i stedet for å være felt inn i tekstblokkene.

Som nevnt i forordet, starter hvert nytt viktig tema med en historisk introduksjon hvor en får vite om hvem som utviklet metodene rundt temaet, hvordan de gjorde det og utfordringer de møtte. Deretter er det gjerne en introduksjon gjennom et fysisk eksempel før den renere matematiske diskusjonen starter og en utdyper temaet videre.

Forventningsanalyse

Det meste av forventninger jeg finner i denne boken, har med oppgaver å gjøre. I forhold til Courant (1937) er det mye mer oppgaver til studenten underveis. Jeg finner ingen oppfordringer til hvordan studenten kan jobbe med oppgavene, eller oppfordringer til at studenten burde gjøre noe ekstraarbeid utenfor de oppgavene som er gitt direkte. Dersom studenten faktisk gjennomfører alle oppgavene som er gitt i boken, vil jeg kunne argumentere at noe ekstraarbeid ville vært overflødig. Det er veldig hyppige oppgaveseksjoner hvor de fleste oppgaveseksjonene har mellom 10 og 30 oppgaver som studenten kan gjøre.

Mye av oppgavene som gis er beregnet som mengdetrening. Veldig mange av oppgavene er variasjoner av samme problem og gir mye øving i de samme metodene. Det virker for meg litt som en «learning by doing»-tankegang. Dette kan for så vidt gå godt overens med Sfard (1991) sine tanker om internalisering, kondensering og reifikasjon da en ved å jobbe mye med det operasjonelle, vil prøve å finne en mer effektiv metode, og på den måten vil prøve å kondensere det til en oppnår reifikasjon. En mulig fare er kanskje det Skemp (1987) kaller instrumentell forståelse hvor en kan bli mer opptatt av å få krysset av oppgaver enn å oppnå relasjonell forståelse, da den instrumentelle forståelsen ofte er mer effektiv om en prøver å få gjort så mange oppgaver på så kort tid som mulig (Skemp, 1987, s. 158).

I noen av oppgavesettene er det gitt noen oppgaver som er markert som valgfrie. Disse oppgavene baserer seg som regel mer på bevis og renere matematikk. For meg virker dette som en forventning om at ikke alle som tar faget er matematikere. I likhet med Courant (1937) virker det for meg som om det er en forventning om at studentene også tar fysikk i tillegg til matematikk. Som forfatteren nevner i forordet har kalkulus sterke røtter i fysiske problem, og boken er lagt opp på en måte som omfavner dette.

1.11 Exercises

In this set of exercises, $[x]$ denotes the greatest integer $\leq$ x.

1. Let $f(x) = [x]$ and letg(x) = [2x] for all real x. In each case, draw the graph of the function h defined over the interval $[-1, 2]$ by the formula given.
   (a) $h(x) = f(x) + g(x)$. (c) $h(x) = f(x)g(x)$.
   (b) $h(x) = f(x) + g(x/2)$. (d) $h(x) = \frac{1}{4}f(2x)g(x/2)$.
2. In each case, f is a function defined over the interval [-2, 2] by the formula given. Draw the graph off. If f is a step function, find a partition **P** of [-2, 2] such thatfis constant on the open subintervals of **P**.
   (a) $f(x) = x + [x]$. (dj $f(x) = 2[x]$.
   (b) $f(x) = x - [x]$. (ej $f(x) = [x + \frac{1}{2}]$.
   (c) $f(x) = [-x]$. (f) $f(x) =$ [xl + $[x + \frac{1}{2}]$.
3. In each case, sketch the graph of the functionfdefined by the formula given.
   (a) $f(x) = [\sqrt{x}]$ for $0 \leq x \leq 10$. (c) $f(x) = \sqrt{[x]}$ for $0 \leq x \leq 10$.
   (b) $f(x) = [x^2]$ for $0 \leq x \leq 3$. (d) $f(x) = [x]^2$ for $0 \leq x \leq 3$.
4. Prove that the greatest-integer function has the properties indicated.
   (a) $[x + n] = [x] + n$ for every integer n.
   (b) $[-x] = \begin{cases} -[x] & \text{if x is an integer,} \\ -[x] - 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$
   (c) $[x + y] = [x] + [y]$ or $[x] + [y] + 1$.
   (dj $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$.
   (e) $[3x] =$ [xl + $[x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$.

Optional exercises.

5. The formulas in Exercises 4(d) and 4(e) suggest a generalization for *[nx]*. State and prove such a generalization.
6. Recall that a lattice point (x, y) in the plane is one whose coordinates are integers. Letfbe a nonnegative function whose domain is the interval [a, b], where a and b are integers, a < b. Let S denote the set of points (x, y) satisfying $a \leq x \leq b, 0 < y \leq f(x)$. Prove that the number of lattice points in S is equal to the sum
$$\sum_{n=a}^{b} [f(n)].$$
7. If a and b are positive integers with no common factor, we have the formula
$$\sum_{n=1}^{b-1}\left[\frac{na}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$
   When $b = 1$, the sum on the left is understood to be 0.
   (a) Derive this result by a geometric argument, counting lattice points in a right triangle.
   (b) Derive the result analytically as follows: By changing the index of summation, note that $\sum_{n=1}^{b-1} [na/b] = \sum_{n=1}^{b-1} [a(b - n)/b]$. Now apply Exercises 4(a) and (b) to the bracket on the right.
8. Let S be a set of points on the real line. The *characteristic function* of S is, by definition, the function χ_S such that $\chi_S(x) = 1$ for every x in S, and $\chi_S(x) = 0$ for those x not in S. Let f be a step function which takes the constant value c_k on the kth open subinterval I_k of some partition of an interval [a, *b]*. Prove that for each x in the union $I_1 \cup I_2 \cup . \cup I_n$ we have
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}(x).$$
   This property is described by saying that every step function is a linear combination of characteristic functions of intervals.

Figur 7: Eksempel på oppgaveseksjon fra Apostol 1967

Innholdsanalyse

Konseptet integrasjonsregning

I introduksjonskapitlet til Courant (1937) sier forfatteren at de to viktigste begrepene en må kunne for å forstå integrasjons- og derivasjonsregning, er grenser og funksjoner. Det kan se ut som om Apostol ville sagt seg enig i den beskrivelsen. Grenser er allerede gjennomgått i introduksjonskapitlet, men kapitlet kalt «The Concepts of Integral Calculus» starter med å gjennomgå nettopp funksjoner.

«In this chapter we present the definition of the integral and some of its basic properties. To understand the definition one must have some acquaintance with the function concept; the next few sections are devoted to an explanation of this and related ideas.» (s. 48)

Kapitlet starter med å introdusere analytisk (Kartesisk) geometri. Dette blir introdusert som et hjelpemiddel for å kunne måle areal. Det blir lagt frem fra et historisk perspektiv hvor en får vite hvordan René Descartes utviklet det kartesiske koordinatsystemet med x- og y-akser. Etter en forklaring om hvordan dette koordinatsystemet fungerer, blir det vist grafisk med et par eksempler før en går videre til funksjoner.

Boken forklarer at den skal starte med en uformell definisjon av en funksjon før den går videre til den formelle definisjonen. Før definisjonen er det noen eksempler som skal illustrere hva en funksjon kan være og en liten historisk introduksjon. Første eksemplet som er gitt er Hookes lov som sier at kraften F som kreves for å strekke en fjær en lengde x forbi dens naturlige lengde er gitt ved funksjonen $F = cx$ hvor c er et tall som er uavhengig av x som kalles fjærkonstanten. Andre eksempel er hvordan en kube er en funksjon av dens kantlengde. Dersom kantene har lengde x er volumet V gitt ved funksjonen $V = x^3$.

I den historiske introduksjonen står det forklart at det var Leibniz som først brukte ordet funksjon i matematisk sammenheng. Han brukte ordet hovedsakelig om en spesifikk type matematisk formel, men det er i ettertid innsett at hans definisjon var altfor begrenset. Den uformelle definisjonen boken gir er at gitt to sett, si X og Y, er en funksjon en korrespondanse som assosierer hvert element i X med ett element i Y. X kalles domenet til funksjonen mens elementene i Y som assosieres med X danner et sett som kalles omfanget til funksjonen. Boken forklarer at funksjonsdefinisjonen ikke legger noen begrensninger på hvilke typer objekter en kan ha i domenet og omfanget, men at i grunnleggende kalkulus er en mest interessert i funksjoner hvor domene og omfang består av reelle tall.

Videre forteller boken at en plotter domenet på x-aksen og over hvert punkt x i X plotter en punktet (x,y) hvor $y = F(x)$. Den samlede mengden slike punkt, (x,y), kalles grafen til funksjonen. Boken viser flere eksempler på funksjoner med grafer eller tabeller før den oppsummerer:

«The reader should note two features that all of the above examples have in common.
(1) For each x in the domain X there is one and only one image y that is paired with that particular x.
(2) Each function generates a set of pairs (x,y), where x is a typical element of the domain X, and y is the unique element of Y that goes with x.» (s. 52)

Den formelle definisjonen av en funksjon starter med et forbehold om at $(a, b) = (c, d)$ bare hvis $a = c$ og $b = d$. Deretter er definisjonen at en funksjon f er et sett med ordnede par (x,y) hvor ingen to par har det samme første elementet. Det blir også introdusert et teorem som sier at to funksjoner f og g er like hvis og bare hvis f og g har samme domene og $f(x) = g(x)$ for enhver x i domenet til f.

Det neste temaet er areal under en graf. Her blir det ikke nevnt noe om integral, men en får en rekke aksiomer som blant annet sier at en kan måle arealet Q under en kurve ved å finne trappeområder inni og utenpå kurven. Om en finner trappeområder S og T, hvor $S \subseteq \mathrm{Q} \subseteq \mathrm{T}$ og det bare er ett tall c hvor $a(S) \leq c \leq a(T)$, så er Q målbar og $a(Q) = c$.

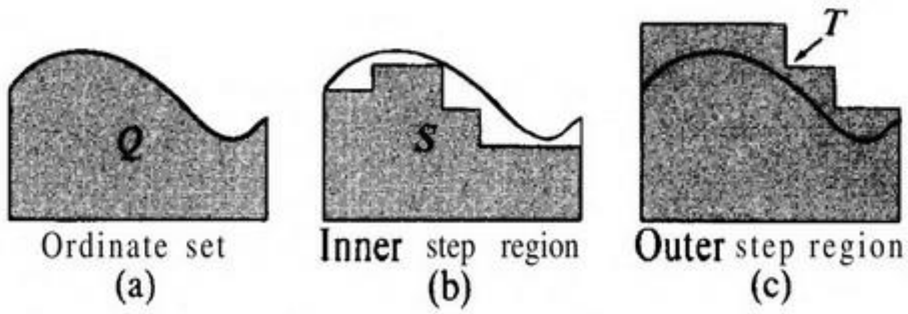


FIGURE 1.15 An ordinate set enclosed by two step regions.

Figur 8: Areal under en kurve i Apostol 1967

Før boken begynner å snakke om faktisk integral, introduseres begrepet trappefunksjon. Det blir definert som en funksjon s hvor domenet til s ligger i det lukkede intervallet [a,b] og det finnes en oppdeling $P = \{x_0, x_1, \cdots, x\}$ av [a,b] slik at s er konstant på hvert åpne subintervall. Det vil si at for hver $k = 1,2, \cdots, n$ er det et reelt tall slik at $s(x) = s_k$ hvis $x_{k-1} < x < x_k$.

Når boken først begynner å snakke om integral er det gjennom integral av trappefunksjoner. Ettersom dette er arealet av et endelig antall rektangler, er det veldig lett å regne ut. Dette gjør at boken tidlig kan introdusere teoremer om egenskapene til integraler og at disse er lett å demonstrere. Boken beviser først ikke disse teoremene annet enn ved geometrisk intuisjon (figur 9), men det gis senere som oppgaver å bevise dem analytisk, hvor to av teoremene er bevist som eksempel. Teoremene som introduseres er:
Additive egenskaper: $\int_a^b [s(x) + t(x)]\,dx = \int_a^b s(x)\,dx + \int_a^b t(x)\,dx$
Homogene egenskaper: $\int_a^b c \times s(x)\,dx = c \int_a^b s(x)\,dx$
Lineære egenskaper: $\int_a^b [c_1 s(x) + c_2 t(x)]\,dx = c_1 \int_a^b s(x)\,dx + c_2 \int_a^b t(x)\,dx$
Additive egenskaper for intervallet: $\int_a^c s(x)\,dx + \int_c^b s(x)\,dx = \int_a^b s(x)\,dx, hvis\ a < c < b$
Uforandret integral under oversettelse: $\int_a^b s(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} s(x-c)\,dx$
Refleksive egenskaper: $\int_a^b s(x)\,dx = \int_{-a}^{-b} s(-x)\,dx$

Ved å både gi bevis ved geometrisk intuisjon og ved å la studenten bevise teoremene analytisk, legger boken opp til relasjonell forståelse på to nivåer. Den geometriske intuisjonen gir forståelse for hvor regelen kommer fra, og det analytiske beviset gir forståelse for hvor formelen kommer fra.

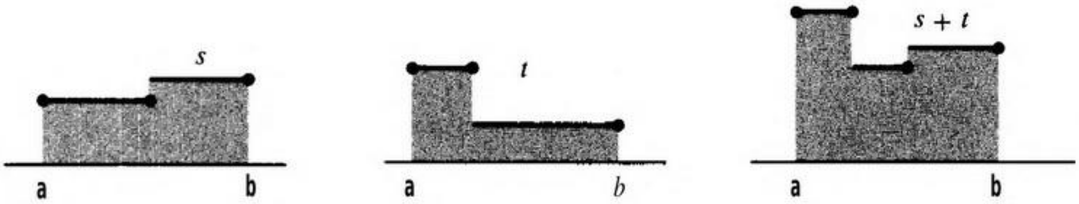


FIGURE 1.24 Illustrating the additive property of the integral.

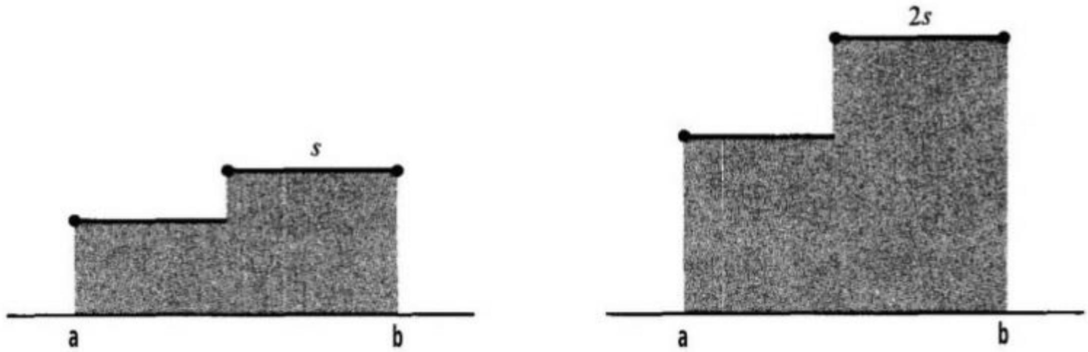


FIGURE 1.25 Illustrating the homogeneous property of the integral (with c = 2).

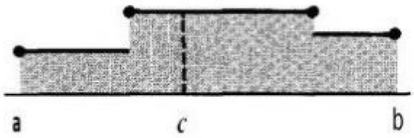


FIGURE 1.26 Additivity with respect to the interval of integration.

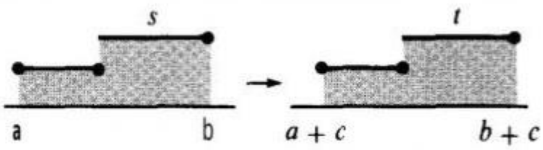


FIGURE 1.27 Illustrating invariance of the integral under translation: t(x) = s(x − c).

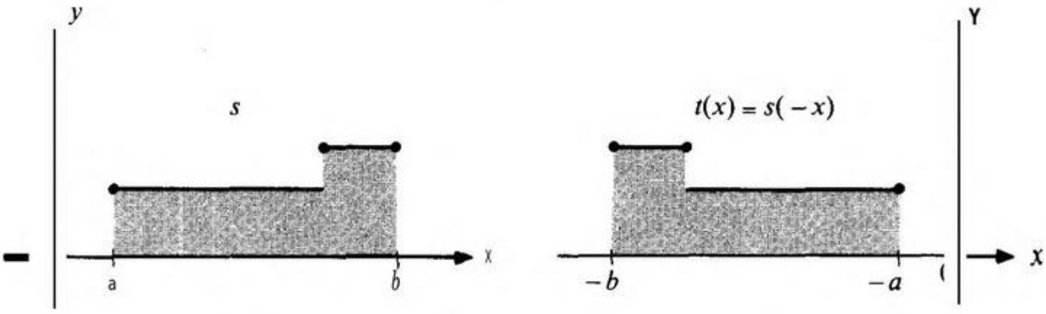


FIGURE 1.29 Illustrating the reflection property of the integral.

Figur 9: Intuitive geometriske demonstrasjoner på teorem for integrasjon

Etter å ha jobbet med integrasjon av trappefunksjoner, introduseres nå det bestemte integralet. Metoden det introduseres på ligner hva som er vist tidligere: en estimerer arealet under kurven ved å legge en trappefunksjon over og under kurven. Det blir påpekt at funksjonen da selvsagt er nødt til å være begrenset både fra oversiden og undersiden. Integralet til denne begrensede funksjonen blir da gitt på følgende vis: La f være en definert og begrenset funksjon på intervallet [a,b]. La s og t være tilfeldige trappefunksjoner definert på [a,b] slik at $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$ for enhver x i [a,b]. Om det finnes ett tall I slik at $\int_a^b s(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b t(x)\,dx$ for et hvert par trappefunksjoner s og t, da er dette tallet I kalt integralet til f fra a til b og er gitt ved symbolet $\int_a^b f(x)\,dx$.

Deretter kommer boken til spørsmålet «Gitt at funksjonen f er integrerbar, hvordan finner en integralet til f?». Her introduseres først monotone funksjoner og en starter med å finne integralet til en begrenset, strengt økende funksjon. Her gjør en det på samme måte som ved bruk av Riemannsummer, hvor en deler integralet inn i n like intervaller og markerer den høyeste og laveste verdien til funksjonen i dette intervallet. En får da igjen to sett med rektangler med grunnlinje $\frac{b-a}{n}$ og høyde er $\{f(x_0 = a), f(x_1), \cdots, f(x_{n-1})\}$ for det nedre estimatet og $\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n = b)\}$ for det øvre. Dersom I tilfredsstiller ulikheten $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ hvor $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ for $k = 0,1,\cdots,n$, så er I integralet $\int_a^b f(x)\,dx$.

Boken bruker denne definisjonen av integralet for å bevise at $\int_0^b x^p\,dx$ hvor p er et positivt heltall, er lik $\frac{b^{p+1}}{p+1}$.

THEOREM 1.15. **If p *is* a positive integer and b > 0, we have**

$$\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}.$$

Proof. We begin with the inequalities

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p$$

valid for every integer $n \geq 1$ and every integer $p \geq 1$. These inequalities may be easily proved by mathematical induction. (A proof is outlined in Exercise 13 of Section 14.10.) Multiplication of these inequalities by b^{p+1}/n^{p+1} gives us

$$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^p < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^p.$$

If we let $f(x) = x^p$ and $x_k = kb/n$, for $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, these inequalities become

$$\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) < \frac{b^{p+1}}{p+1} < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Therefore, the inequalities (1.9) of Theorem 1.13 are satisfied with $f(x) = x^p$, $a = 0$, and $I = b^{p+1}/(p+1)$. It follows that $\int_0^b x^p\,dx = b^{p+1}/(p+1)$.

Figur 10: Bevis for integralet av x^p hvor p er et positivt heltall.

Etter dette vises og bevises det at de samme teoremene som gjaldt for integrasjon av trappefunksjoner også gjelder for integrasjon av andre funksjoner. Ved hjelp av disse teoremene viser boken først at $\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_a^b$, og deretter at en kan integrere et hvert polynom ledd for ledd.

Bruksområder for integrasjon

Kapittelet om bruksområder for integrasjon starter med å finne arealet mellom to grafer uttrykt som et integral. Dette vises med et teorem som sier at dersom f og g er integrerbare og tilfredstiller $f \leq g$ i intervallet [a,b], så er området S mellom grafene deres målbart. Arealet dets $a(S)$ er da gitt ved integralet $a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$. Dette teoremet blir først bevist enkelt ved å referere til teoremer for areal under grafer og for additive egenskaper for integral, før boken går igjennom noen eksempler. Det første eksemplet er beint frem bare å følge teoremet, mens i det neste bytter grafene hvilken graf som er høyest halvveis i intervallet. En er da nødt til å dele integralet inn i to mindre intervall hvor en kan bruke teoremet på begge intervallene hver for seg og addere dem sammen til slutt.

Boken går deretter videre til å ta for seg det generelle rundt trigonometriske funksjoner. Her ligger alt fokuset på sinus og cosinus. Det blir forventet at studenten har litt kjennskap til sinus og cosinus fra før, men at en nå skal fokusere på egenskapene til disse som funksjoner heller enn deres egenskaper i trekanter. Boken sier også at det er mange metoder å introdusere de trigonometriske funksjonene. En er ikke egentlig interessert i definisjonene til funksjonene, men heller egenskapene deres. Egenskapene som blir vektlagt er:

- at sinus- og cosinus-funksjonene er definert over hele den reelle linjen,
- spesielle verdier som at $\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ og $\cos\pi = -1$,
- cosinus til en differanse: $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$ og
- fundamentale ulikheter: $0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$ for $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Disse egenskapene fører til følgende egenskaper:

a) Pytagoreisk identitet: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ for alle x.
b) Spesielle verdier: $\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} = \sin\pi = 0$.
c) Jevne og odde egenskaper: Cosinus er en jevn funksjon og sinus er en odd funksjon. Det vil si at for alle x er $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$.
d) Korrelasjoner: for alle x gjelder $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ og $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
e) Periode: for alle x gjelder $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ og $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
f) Addisjonsformler: $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ og $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ for alle x og y.
g) Differanseregler: $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ og $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$.
h) Monotoni: i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ er sinus strengt stigende og cosinus strengt synkende.

Etter dette går boken videre til integrasjon av de trigonometriske funksjonene. Her viser boken at $\int_0^a \cos x\, dx = \sin a$ og at $\int_0^a \sin x\, dx = 1 - \cos a$. Ved hjelp av de additive egenskapene til et integral som gjør at $\int_a^b f(x)\, dx = \int_0^b f(x)\, dx - \int_0^a f(x)\, dx$, viser boken at funksjonene kan integreres $\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a$ og $\int_a^b \sin x\, dx = -(\cos b - \cos a)$. Deretter demonstrerer boken noen eksempler på hvordan en kan integrere trigonometriske funksjoner basert på deres egenskaper. Eksemplene som gis er $\int_0^a \sin^2 x\, dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\sin 2a$ og $\int_0^a \cos^2 x\, dx = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\sin 2a$.

Etter integrasjon av trigonometriske funksjoner, går boken videre til polarkoordinater og integrasjon i polarkoordinater. Så kommer en til et delkapittel om arbeid. Til nå i boken har integrasjon vært et geometrisk problem basert på areal, men nå skal en diskutere integrasjon sine bruksområder for det fysiske konseptet arbeid. Først er det en introduksjon til hva arbeid og kraft er.

«Work is a measure of the energy expended by a force in moving a particle from one point to another. In this section we consider only the simplest case, linear motion.» (s. 115)

Boken viser først et eksempel hvor kraften er konstant. I dette eksemplet er det en 3 pund stein som blir kastet 15 fot opp i luften. Kraften $f(x)$ er tre pund hele tiden, så arbeidet som er gjort på vei opp fra for eksempel 6 fot til 15 fot er $-3 \times (15-6) = -27$ fotpund. På vei ned fra 15 fot til 6 fot er arbeidet $-3 \times (6-15) = 27$ fotpund. Deretter spør boken hva som skjer dersom kraften ikke er konstant. Den forklarer først at arbeidet da er likt integralet av kraftfunksjonen. Så gir den noen egenskaper til arbeid. Egenskapene er: additive egenskaper for intervallet, monotone egenskaper som sier at en større kraft gjør et større arbeid, og den elementære formelen som sier at dersom kraften er konstant, multipliseres den med differansen mellom enden og starten på intervallet. Disse egenskapene gjør det veldig lett å bevise at dersom kraften er gitt ved en trappefunksjon, er arbeidet gitt ved integralet av trappefunksjonen.

Deretter bevises det at arbeidet alltid er gitt ved integralet av kraftfunksjonen på følgende vis: La s og t være to trappefunksjoner slik at $s \leq f \leq t$ på [a,b]. De monotone egenskapene til arbeidet gir da at $W_a^b(s) \leq W_a^b(f) \leq W_a^b(t)$, men vi vet at arbeidet til s og t er gitt ved deres integraler. Dermed er $\int_a^b s(x)\,dx \leq W_a^b(f) \leq \int_a^b t(x)\,dx$. Dermed må $W_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$. Til slutt gis et eksempel for arbeidet som trengs for å dra ut en fjær en distanse a. Igjen refererer boken til Hookes lov som sier at kraften er proporsjonal med en konstant c, så $f(x) = cx$. Arbeidet er $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a cx\,dx = \frac{ca^2}{2}$.

Det siste som vises før kapittel 3 er en introduksjon til det ubestemte integralet. Det blir utledet på en ganske lignende måte som i Courant (1937) hvor en starter med et integral $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ og definerer et annet integral til å være $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. Den additive egenskapen til intervallet for integraler forteller oss da at $A(x) - F(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$ som vil si at differansen mellom $A(x)$ og $F(x)$ er uavhengig av x, og dermed er en konstant.

Videre forklares det at dersom en vet et ubestemt integral til f, kan verdien til et bestemt integral regnes ut med en enkel subtraksjon. For eksempel vet vi at $\int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Da er $\int_a^b t^n\,dt = \int_0^b t^n\,dt - \int_0^a t^n\,dt = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$. Generelt dersom $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ er alltid $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

«Many of the functions that occur in various branches of science arise exactly in this way, as indefinite integrals of other functions. This is one of the reasons that a large part of calculus is devoted to the study of indefinite integrals.» (s. 121)

Før kapittelet om derivasjon, er det et kapittel om kontinuerlige funksjoner. Temaene som introduseres her er kontinuitet, grenser, sammensatte funksjoner, Bolzanos teorem og skjæringssetningen, inverse funksjoner og ekstremalpunkt. Til slutt introduseres middelverdisetningen for integrasjon. Den sier at dersom f er kontinuerlig på [a,b], finnes det en c i [a,b] sånn at en har $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Derivasjon

Derivasjonskapitlet starter med en historisk introduksjon. Her får en vite at det er Newton og Leibniz som hovedsakelig står bak utviklingen av derivasjon på det nivået en kjenner det i dag. Dette skyldes hovedsakelig at de så sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon. Det var først Fermat som på 1600-tallet begynte å jobbe med den deriverte til funksjoner. Han prøvde å finne toppunkt og bunnpunkt på grafer og innså at når tangenten til grafen er horisontal, ligger den på et ekstremalpunkt. Dette førte til at han prøvde å utlede en metode for å finne stigningstallet til en tangent på et tilfeldig punkt på grafen. Det var under dette arbeidet han oppdaget noen av de idéene som den deriverte er basert på. Den første personen som så sammenhengen mellom tangenten til en graf og arealet under kurven var tilsynelatende Isaac Barrow som var Newtons lærer, men det var Newton og Leibniz som først så nytten i sammenhengen og startet en utrolig utviklingsperiode i matematikken.

Selve formelen for den deriverte blir i boken først introdusert gjennom det fysiske eksempelet med sammenhengene mellom posisjon og fart. Dersom en har en funksjon $f(t)$ som forteller posisjonen til en gjenstand etter en tid t, er gjennomsnittsfarten til gjenstanden i tidsintervallet $[t, t+h]$ gitt ved $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$. Dersom en tar mindre og mindre tidsintervall og lar h gå mot null, kommer en nærmere og nærmere farten til gjenstanden etter tiden t. Farten etter en viss tid er dermed gitt ved $v(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$.

Deretter forklarer boken at en kan bruke samme grunnleggende formel for å finne ut hvordan en funksjon endrer seg i et punkt. Dette kalles den deriverte og er definert ved formelen $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Boken bruker videre denne definisjonen til å finne en rekke regneregler for den deriverte ved hjelp av eksempel. Eksemplene med løsning er de deriverte til
en konstant funksjon: $f(x) = c$, $f'(x) = 0$
en lineær funksjon: $f(x) = mx + b$, $f'(x) = m$
en eksponentiell funksjon: $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$
sinusfunksjonen: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$
cosinusfunksjonen: $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$
en n'te-rotsfunksjon: $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

Videre introduseres et teorem om algebra for deriverte: dersom en lar f og g være to funksjoner som er definerte på et felles intervall, gjelder følgende:

(i) $(f+g)' = f' + g'$,

(ii) $(f-g)' = f' - g'$,

(iii) $(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$,

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$ *at points x where* $g(x) \neq 0$.

Figur 11: Teorem om algebra for deriverte.

«With the differentiation formulas developed thus far, we can find derivatives of functions f for which $f(x)$ is a finite sum of products or quotients of constant multiples of $\sin x$, $\cos x$, and x^r (r rational). As yet, however, we have not learned to deal with something like $f(x) = \sin(x^2)$ without going back to the definition of the derivative.» (s. 174)

Denne typen problem kan løses ved hjelp av kjerneregelen. Kjerneregelen defineres av følgende teorem: La f være sammensatt av to funksjoner u og v, for eksempel $f(x) = u[v(x)]$. Gå ut ifra at både $v'(x)$ og $u'(y)$ eksisterer hvor $y = v(x)$. Da eksisterer også $f'(x)$ og er gitt ved formelen $f'(x) = u'(y) \times v'(x)$. Kjerneregelen bevises ved hjelp av definisjonen på den deriverte og demonstreres ved hjelp av noen eksempler som det under i figur 12.

EXAMPLE 1. Suppose a gas is pumped into a spherical balloon at a constant rate of 50 cubic centimeters per second. Assume that the gas pressure remains constant and that the balloon always has a spherical shape. How fast is the radius of the balloon increasing when the radius is 5 centimeters?

Solution. Let r denote the radius and V the volume of the balloon at time t. We are given dV/dt, the rate of change of volume with respect to time, and we want to determine dr/dt, the rate of change of the radius with respect to time, at the instant when $r = 5$. The chain rule provides the connection between the given data and the unknown. It states that

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}. \tag{4.19}$$

To compute dV/dr, we use the formula $V = 4\pi r^3/3$ which expresses the volume of the sphere in terms of its radius. Differentiation gives us $dV/dr = 4\pi r^2$, and hence (4.19) becomes

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt},$$

Substituting $dV/dt = 50$ and $r = 5$, we obtain $dr/dt = 1/(2\pi)$. That is to say, the radius is increasing at a rate of $1/(2\pi)$ centimeters per second at the instant when $r = 5$.

The foregoing example is called a problem in *related rates*. Note that it was not necessary to express r as a function of t in order to determine the derivative dr/dt. It is this fact that makes the chain rule especially useful in related-rate problems.

The next two examples show how the chain rule may be used to obtain new differentiation formulas.

Figur 12: Fysikkeksempel på kjerneregelen.

Etter kjerneregelen er mesteparten av kapitlet basert mer på geometri. Først ser en på relative ekstremalpunkter inne i et intervall og ser at dersom det finnes en derivert i ekstremalpunktet er den lik 0. Dette betyr ikke at det er ekstremalpunkter alle plasser hvor den deriverte er lik null. Det betyr heller ikke at den deriverte eksisterer i alle ekstremalpunkter. Deretter ser en på middelverdisetningen for den deriverte. Dersom f er kontinuerlig overalt på det lukkede intervallet [a,b], og har en derivert på hvert punkt i det åpne intervallet (a,b), vet en at det er minst ett internt punkt c i (a,b) slik at $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Etter dette viser boken at en kan sjekke fortegnet til den dobbelderiverte for å sjekke om et ekstremalpunkt er et toppunkt eller bunnpunkt og en ser på hvordan en kan bruke denne informasjonen til å skissere grafer.

Sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon

Kapittelet om sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon går rett på sak ved å starte med fundamentalteoremet. Etter et eksempel hvor en ser at dersom en integrerer $f(x) = x^2$ og deretter deriverer resultatet, ender en opp med den samme funksjonen som i utgangspunktet, introduseres det første fundamentalteoremet i kalkulus:

La f være en funksjon som er integrerbar på [a,x] for enhver x i [a,b]. La c være slik at $a \leq c \leq b$ og definer en ny funksjon $A(x) = \int_c^x f(t)\, dt$. Da eksisterer den deriverte $A'(x)$ på hvert punkt i det åpne intervallet (a,b) hvor f er kontinuerlig og for slike x er $A'(x) = f(x)$.

Dette teoremet bevises både intuitivt grafisk og analytisk før en går videre til definisjonen av en antiderivert. Boken definerer en antiderivert P av en funksjon f på et åpent intervall I som en funksjon hvor den deriverte av funksjonen er f. Altså at $P'(x) = f(x)$ for alle x i intervallet I. Når en vet hva antideriverte er, kan en se på det andre fundamentalteoremet i kalkulus:

Gå ut ifra at f er kontinuerlig over et åpent intervall I, og la P være enhver antiderivert av f på I. Da har vi for enhver c og enhver x i I at $P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)\, dt$. Dette teoremet forteller oss hvordan en kan finne enhver antiderivert for en kontinuerlig funksjon f. En integrerer fra et fast punkt c til et tilfeldig punkt x og legger til konstanten $P(c)$ for å få $P(x)$. Den virkelige kraften i teoremet kommer frem når en skriver det på formen $\int_c^x f(t)\, dt = P(x) - P(c)$. Da kan en finne verdien av et integral ved en enkel subtraksjon.

Videre ser boken på integrasjon ved substitusjon. Her ser en på en sammensatt funksjon $Q(x) = P[g(x)]$ for alle x i et intervall Z. Dersom en vet den deriverte av P, for eksempel $P'(x) = f(x)$, forteller kjerneregelen oss at $Q'(x) = P'[g(x)]g'(x) = f[g(x)]g'(x)$. Mer generelt kan dette skrives som $\int f[g(x)]g'(x)\, dx = P[g(x)] + C$. Dette demonstreres ved flere eksempler som for eksempel $\int x^3 \cos x^4\, dx$. Her lar en $f(x) = \cos x$ og $g(x) = x^4$ sånn at $f[g(x)] = \cos x^4$ og $g'(x) = 4x^3$. Da er $\int x^3 \cos x^4\, dx = \frac{1}{4}\int (\cos x^4)(4x^3 dx) = \frac{1}{4}\int \cos u\, du = \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{4}\sin x^4 + C$.

Det siste temaet i kapittelet er delvis integrasjon. Her refereres det også til tidligere regler som sier at dersom $h(x) = f(x)g(x)$, er $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Dersom en skriver det som antideriverte blir det $\int f(x)g'(x)\, dx + \int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) + C$. Vanligvis skrives det på formen $\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx + C$.

Når en bruker denne metoden for å finne et integral $\int k(x)\, dx$, må en finne to funksjoner f og g slik at $k(x) = f(x)g'(x)$. Dersom en velger gode funksjoner f og g, kan det gjøre integralet lettere å regne ut enn på den originale formen. Som eksempel brukes integralet av $x \cos x$. Her velger en $f(x) = x$ og $g'(x) = \cos x$. Da blir integralet

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx + C = x \sin x + \cos x + C.$$

Oppsummering

Det er veldig tydelig at denne boken legger mer vekt på sammenhengen mellom kalkulus og fysikk enn mange andre kalkulusbøker. Mange av temaene introduseres ved hjelp av historie og fysiske eksempler heller enn å utlede teoremer ved hjelp av ren, analytisk matematikk. Dette kan nok være motiverende for mange studenter som kanskje ikke skal bli matematikere, men trenger matematikk for utdanningen sin eller for å styrke fysikkutdanningen sin.

Integrasjon og derivasjon undervises veldig separat før et ganske kort kapittel mot slutten. Det kan være at dette gjør sammenhengen mellom temaene mindre tydelig enn om de hadde vært undervist mer sammenflettet som i for eksempel Courant (1937).

Henle & Kleinberg 1979

Den siste boken som skal analyseres er «Infinitesimal calculus» som er skrevet av James M. Henle og Eugene M. Kleinberg og gitt ut i 1979. Dette er på ingen måte en klassiker på lik linje med de to tidligere bøkene, men den mest moderne boken jeg kunne finne som introduserer integrasjon før derivasjon. Henle jobber på Smith College i Northampton, Massachusetts og Kleinberg jobber på University at Buffalo i New York. Boken ble ført publisert i 1979 av Massachusetts Institute of Technology og ble trykket igjen i 2003 av Dover, New York.

Innhold

1. Introduksjon
2. Språk og struktur
3. De hyperreelle tallene
4. Den hyperreelle linjen
5. Kontinuerlige funksjoner
6. Integrasjon
7. Derivasjon
8. Fundamentalteoremet
9. Uendelige følger og serier
10. Uendelige polynom
11. Topologien til den reelle linjen
12. Standard kalkulus og funksjonsfølger

Forord

I forordet skriver forfatterne at det rundt århundreskiftet var populært å undervise kalkulus ved hjelp av infinitesimaler. Denne metoden var intuitiv og enkel å forstå, men manglet en grundig matematisk definisjon. Dette fungerte fint på et grunnleggende nivå, men når en skulle opp på høyere nivå, kunne en lett gå seg vill. Dermed ble det mer vanlig med en ε/δ tilnærming. Denne tilnærmingen var presis, men kunne være vanskelig å lære og undervise.

«This active evolution in the teaching of calculus was always prompted by continual dissatisfaction with earlier approaches and had nothing to do with new mathematical insights into calculus itself. Indeed there *were* no such "new insights"; that is, there were none until just recently.» (s. 7)

Tidlig på 1600-tallet gjorde matematikeren Abraham Robinson det intuitive konseptet infinitesimaler matematisk presist og strengt definert i sitt arbeid kalt «ikke-standard analyse».

«A most natural place for Robinson's insight is as a next (and possibly final) point in the evolution of the teaching of calculus. We can now develop calculus using infinitesimals and enjoy all of their simplicity and intuitive power, yet at the same time work in a mathematically precise and rigorous atmosphere. This approach, although quite new, has been used at a number of universities with remarkable success.» (s. 7)

Forfatterne forteller videre at denne boken ikke tar for seg bruksområder for kalkulus, men fokuserer på teorien, da det er dette området som tidligere har vært vanskelig. Eneste forkunnskapene som er forventet før en starter med boken er et godt grunnlag i videregående matematikk.

Introduksjon

Introduksjonskapitlet i boken er i stor grad en historisk introduksjon til kalkulus, infinitesimaler og utvikling av tallsystemet.

Historien til moderne matematikk er i stor grad historien til kalkulus. Dette var den første store matematiske oppdagelsen siden grekerne og startet med koblingen mellom to tilsynelatende urelaterte geometriske problem som umiddelbart hadde innflytelse på massevis av andre tilsynelatende urelaterte områder. Denne utviklingen ga blant annet fysikken en fremgang uten historisk parallell. Gjennom kalkulus ble naturvitenskap født og uten den ville ikke fysikken utviklet seg forbi tankene til Descartes.

I utgangspunktet var kalkulus to separate problem: Den deriverte som var utviklet for å finne tangenten til en kurve og integralet som var utviklet for å finne areal bundet av kurver. Både algebra, geometri og trigonometri falt til kort for å takle disse problemene og kunne i beste fall håndtere noen få spesielle tilfeller.

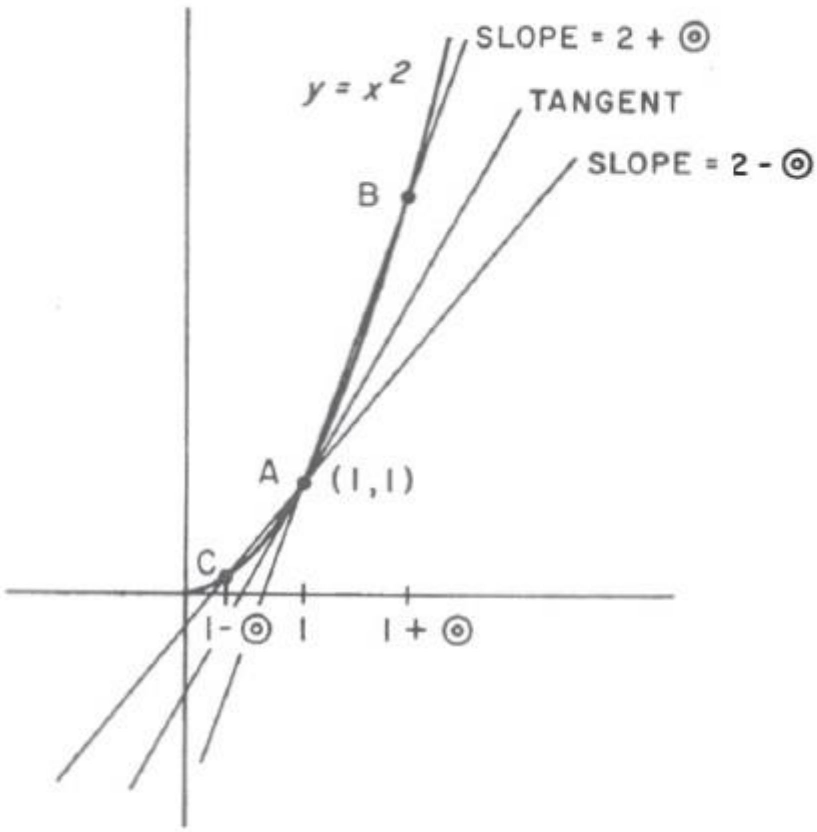
Den generelle idéen om kalkulus, fundamentalteoremet og dets bruksområder for problemer i matematikk og naturvitenskap er uavhengig takket være Newton og Leibniz. Det som er bemerkelsesverdig er at begge løste de samme problemene og utviklet mange av de samme teoremene, men baserte seg på ulik teori. Mens Newton jobbet med grenser, brukte Leibniz infinitesimaler.

I denne boken skal en bruke tilnærmingen basert på Leibniz' idéer videreutviklet av Robinson i 1961 under navnet «ikke-standard analyse». Da må vi utvide det reelle tallsystemet ved å introdusere nye tall kalt «infinitesimaler». Disse er ulik null, men mindre enn ethvert positivt reelt tall og større enn ethvert negativt tall.

«Of course our infinitesimals cannot be themselves be real numbers, but so what?» (s. 13)

Det er ikke uvanlig i matematikken at en introduserer nye tall som ikke har noe tilsvarende i den virkelige verden. Eksempler på dette er negative tall og imaginære tall. Selv om en ikke har noe tilsvarende i den virkelige verden, er de essensielle for å løse problemer nettopp her.

Boken viser deretter et eksempel på infinitesimaler i bruk. En vil finne stigningstallet til tangenten til funksjonen $y = x^2$ i punktet $(1,1)$. Det er lett å finne stigningstallet til en linje som går gjennom to punkt på grafen, men vi har bare oppgitt ett. Løsningen er enkel: vi lar ◎ være en infinitesimal og ser på to punkt som ligger uendelig nære hverandre, $(1,1)$ og $(1 + ◎, (1 + ◎)^2)$. Da er stigningstallet $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+◎)^2-1}{(1+◎)-1} = \frac{◎^2+2◎}{◎} = 2 + ◎$. På samme måte er stigningstallet til linjen som går mellom punktene $(1,1)$ og $(1 - ◎, (1 - ◎)^2)$ lik $2 - ◎$. Stigningstallet til tangenten må ligge mellom disse to tallene og være et reelt tall. Siden $0 < ◎ < r$ for ethvert reelt tall $r > 0$ er det ingen reelle tall mellom 2 og 2+◎. På samme måte ser en at siden $-r < ◎ < 0$ finnes det ingen reelle tall mellom 2-◎ og 2. Dermed er 2 det eneste reelle tallet mellom 2-◎ og 2+◎, og er stigningstallet til tangenten.



Figur 63: Eksempel på hvordan finne tangenten til en graf ved hjelp av infinitesimaler.

Videre diskuteres det rundt utvidingen av tallsystemet og at dette har skjedd ofte i matematikkens historie. Det er mange likhetstrekk mellom vårt ønske om en infinitesimal og hvordan en har utvidet tallsystemet til å inneholde negative tall, rasjonelle tall, irrasjonelle tall og komplekse tall. Hver gang en har utvidet tallsystemet har en møtt motstand og tallene må brukes en stund før de blir allment godkjent.

Boken viser også et eksempel på å finne areal under en kurve i innledningskapittelet. Her skal en finne arealet av området A som er bundet av kurven $y = x^2$ og linjene $x = 1, x = 2$ og $y = 0$. Dette gjøres på en enkel måte. En vet hvordan en finner areal av rektangler, så en plasserer mange tynne rektangler over området og plusser sammen arealet av rektanglene for å estimere arealet av området. Dersom rektanglene har bredde h, hvor h er et reelt tall, altså ikke en infinitesimal, har vi formler fra videregående skole som sier at arealet av rektanglene er $\frac{7}{3} + \frac{3h}{2} + \frac{h^2}{6}$. Denne formelen gjelder også dersom $h = ◎$, en infinitesimal. Arealet er da $\frac{7}{3} + \frac{3◎}{2} + \frac{◎^2}{6}$ som er uendelig nære $\frac{7}{3}$. En kan argumentere på samme måte som i eksemplet over for at arealet av A må være lik $\frac{7}{3}$.

Resten av kapittelet er historie om Newton og Leibniz sine konflikter og om hvordan Arkimedes regnet ut både tangenter og arealer ved hjelp av idéer som minner om hvordan en bruker kalkulus i dag.

Strukturanalyse

Det første som skiller seg ut når en åpner Infinitesimal Calculus, er at alle sidene har en hoveddel med tekst, og en marg på venstre side hvor forfatterne har lagt inn ekstra kommentarer, utdypninger, oppgaver og historiske funfacts. Jeg får følelsen av at en kan lese hele boken uten margen og få både relasjonell og strukturell forståelse av boken, men at teksten i margen er forfatternes kommentarer underveis for den ekstra ivrige student. Ofte koste jeg meg med innholdet i margen hvor jeg fikk ekstra innsikt i temaene og den historiske utviklingen av dem. Ulempen med denne struktureringen av sidene er at det kan bli litt uoversiktlig. Spesielt når en har illustrasjoner i margen og i hovedteksten, kan det være vanskelig å holde fokus på riktig plass. Dette blir spesielt tydelig om kommentaren i margen dras ut litt. Noen ganger varer en kommentar i margen over flere sider, så en ender etter hvert med å ha illustrasjoner og informasjon i margen som ikke er relatert til det som står til høyre i hovedteksten (figur 14).

På samme måte som i Apostol (1967) er både illustrasjoner, formler, eksempler, definisjoner, teoremer og oppgaver trukket ut av selve teksten. Dette gjør boken lettlest og det er lett å holde fokus. Til og med i de tidlige kapitlene som handler om historie og logikk, gjør denne oppdelingen av tekstblokkene det lettere å følge med. I likhet med begge de tidligere bøkene, er hele boken i svart-hvitt. Det er derimot flere illustrasjoner enn de andre bøkene, og de får god plass. Nesten hver side i kapitlene om integrasjon og derivasjon har minst én illustrasjon og de tar den fulle bredden av siden, minus plassen som er satt av til marg-kommentarer.

Det siste med strukturen i boken som skiller seg fra de to andre bøkene er selve språket i boken. Mens Courant (1937) var skrevet med veldig komplisert, akademisk språk, var Apostol (1967) litt mer allmennvennlig, men fremdeles veldig grundig og akademisk. Henle og Kleinberg skriver veldig muntlig og nesten som en forelesning. Det er mindre fremmedord i boken enn i de to andre bøkene. En kunne lest de fleste kapitlene for noen totalt uten videre matematikkutdanning, og de ville sannsynligvis forstått det meste. Fraseringen og valget av avsnitt og innhopp, gir teksten en god flyt og muntlig følelse, som gjør at det er lett å følge med.

This is really quite remarkable! $\int_0^1 x^n\,dx$ is a fundamentally infinite object whereas $\sum_1^N i^n$ is finite. Yet a thorough solution to the finite problem yields a solution to the related infinite one. This phenomenon appears throughout mathematics under the general heading *compactness*.

EXERCISES

Find the sum, in terms of n, of:

1. The first n even numbers, that is,

$$\sum_{i=1}^{n} 2i.$$

2. The first n odd numbers, that is,

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1).$$

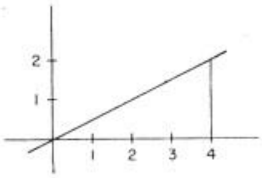
The term "integral" was first used by Jakob Bernoulli in 1690.

Notice that "x" in "$\int_a^b f(x)dx$" is a "dummy" variable. The value of the integral doesn't depend on any value of x. To put it another way,

$$\int_a^b f(q)dq = \int_a^b f(w)\,dw = \int_a^b f(\xi)\,d\xi.$$

Assuming that theorems 6.1 and 6.2 are true, let us attempt a few integrals:

Example 1. $f(x) = \frac{1}{2}x$:



To test our method we will find the area of a triangle, that is, $\int_0^4 f(x)dx$. If our definition is any good at all, we should get $\frac{1}{2}4\cdot 2 = 4$. Since $y = \frac{1}{2}x$ is continuous, theorem 6.2 says we may use any $dx > 0$. We will use $4/N$ for some infinite integer $N > 0$. *Note*: If $\Delta x = 4/n$, $n > 0$, finite, then

$$\mathop{S}_{0}^{4} f(x)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{4i}{n}\right)\frac{4}{n}$$

DEFINITION. A function f defined on $[a, b]$ is said to be *integrable* if $\mathop{S}_a^b f(x)dx$ is finite and always has the same standard part for every positive infinitesimal dx.

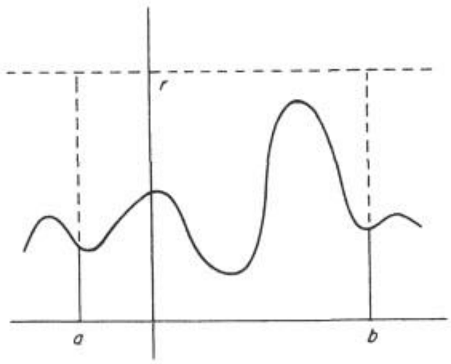
DEFINITION. If $f(x)$ is integrable over $[a, b]$, we define the *integral of f over* $[a, b]$ to be $\boxed{\mathop{S}_a^b f(x)dx}$ where dx is a positive infinitesimal. We denote the integral of f over $[a, b]$ by $\int_a^b f(x)dx$.

DEFINITION. If $f(x)$ is integrable and nonnegative on $[a, b]$, we define the *area under $f(x)$ between a and b* to be $\int_a^b f(x)dx$.

For these definitions to be useful, we would like many functions to be integrable. As it happens, every continuous function is integrable.

THEOREM 6.1. If f is continuous on $[a, b]$, then $\mathop{S}_a^b f(x)\,dx$ is finite for all infinitesimals $dx > 0$.

PROOF: By theorem 5.1, $f(x)$ is bounded, that is, there is a real $r > 0$ such that $-r < f(x) < r$ for all x in $[a, b]$. It is clear then, that for any real Δx,



$$\mathop{S}_a^b f(x)\,\Delta x \le r(b-a).$$

Similarly,

$$-r(b-a) \le \mathop{S}_a^b f(x)\,\Delta x.$$

Since this is true for all real Δx, it is true for all hyperreal dx:

$$-r(b-a) \le \mathop{S}_a^b f(x)dx \le r(b-a).$$

Infinitesimal Calculus 56

Figur 14: Eksempelside fra Henle & Kleinberg 1979. Her ser en både margen til venstre og hovedtekst til høyre. Ettersom at margen kommenterer både ting på tidligere sider og nåværende side, kan det føles litt forvirrende å lese.

Forventningsanalyse

Den tydeligste forventningen jeg ser i boken er at det ikke forventes at leseren nødvendigvis går på universitet eller tar lignende høyere utdanning. Selve språket i boken gjør, som nevnt i strukturanalysen, at dens innhold er tilgjengelig for flere. Selv på R-matematikk på videregående skole, ser jeg for meg at en kunne brukt denne boken med god suksess.

Det er heller ikke en forventning om fysikkunnskaper som i de andre bøkene. Da boken ikke bruker noen eksempler fra fysikken eller nevner noe om bruksområder i naturvitenskap, trengs det heller ingen forkunnskaper innen området. Boken fokuserer helt og holdent på matematisk teori.

Det virker derimot som om det er andre forventninger til forkunnskaper enn i de andre bøkene. Både Courant (1937) og Apostol (1967) la mye vekt på funksjoner tidlig i boken. Allerede i introduksjonskapitlet i denne boken brukes uttrykket «funksjon» som om det er noe alle kjenner til fra før. Dersom en ikke vet hva en funksjon er når en åpner denne boken, vil en mangle et av de matematiske begrepene som burde være reifisert når en skal begynne å internalisere de nye begrepene som baserer seg på dette. Dette vil gjøre det nesten umulig å kunne lære seg integral- og derivasjonsregning frem til en også har lært hva en funksjon er for noe.

Boken virker som er ment for å motivere, og til og med kanskje underholde, og er fylt med motivasjonsfaktorer som historiske fakta, sitat og fortellinger. En kan se på dette som en forventning om at studenten vil la seg motivere av den historiske informasjonen.

Innholdsanalyse

Forkunnskaper

Sfard (1991) beskriver hvordan en starter internaliseringsprosessen av nye konsepter med bakgrunn i tidligere reifisert kunnskap. De er derfor interessant å se på hvilke forkunnskaper som introduseres før en kommer til kapitlene om integrasjon og derivasjon. Mens Courant (1937) og Apostol (1967) er opptatt av konseptene funksjoner og grenser som forkunnskaper, skiller denne boken seg litt ut. Som nevnt i forventningsanalysen, nevnes begrepet funksjon allerede i introduksjonskapitlet. Dette betyr selvsagt ikke at kunnskap om funksjoner ikke anses som nødvendig forkunnskap i denne boken, bare at det forventes at en har kjennskap til dette fra før. I stedet for fokus på grenses, ligger det i stedet stort fokus på infinitesimaler og hyperreelle tall. Til og med det første kapitlet som handler om matematisk språk og logikk, bygger opp til en dypere forståelse av infinitesimaler som senere kan brukes for å forstå integrasjon og derivasjon.

Det første kapitlet etter introduksjonskapitlet er om språk og struktur. Her blir en introdusert til logikk, men mest nevneverdig: Språket L.

DEFINITION. *The language L for the real numbers* will consist of:

constants. A constant symbol "r" for each real number r.

variables. x_1, x_2, x_3, ... and a, b, c, ...

grammatical symbols, connectives, quantifiers.

functions. We certainly want our language to have function symbols for addition, subtraction, multiplication, and division. For these we will use the symbols $+$, $-$, $\times$, $\div$. In addition to these we will need many other function symbols. For example, we will need ones for sine, cosine, logarithms, etc. To play it safe, for every function f on the real numbers, we include a function symbol f in the language L.

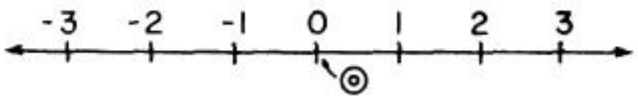
relations. We include the two-place relations $=$ and $<$, of course, but there are others. We will want to express, for example, "x is an integer," and for this we introduce a 1-place relation symbol $I(x)$ meaning "x is an integer." We might also need one saying "x is a rational number," and there are many other relations we might or might not need. To be prepared, for *every* relation R on the real numbers, we throw an associated relation symbol R into L.

Figur 15: Definisjonen av språket L.

Kapittel tre handler om hyperreelle tallsystem. Det defineres på følgende vis: En struktur S er et hyperreelt tallsystem dersom det har de følgende tre egenskapene:

1) S inneholder det reelle tallsystemet. Da mener en ikke bare de reelle tallene, men i tillegg at alle funksjoner og relasjoner som er definert i det reelle tallsystemet, også er definert i S.
2) S inneholder en infinitesimal. Det vil si at det er et tall $\circledcirc$ i S slik at $0 < \circledcirc < r$ for ethvert positivt, reelt tall.
3) De samme setningene av L stemmer i både S og det reelle tallsystemet R. Dersom B er enhver setning i L, da er B sann i S hvis og bare hvis B er sann i R.

Kapittel fire handler om den hyperreelle tallinjen og med det infinitesimaler på tallinjen. En starter med å plassere infinitesimalen $\circledcirc$ på tallinjen.



Figur 16: Den hyperreelle tallinjen.

Videre ser en på om det finnes andre infinitesimaler. Et hvert hyperreelt tall $*$ som tilfredsstiller kravet $0 < * < \circledcirc$ er en infinitesimal. Et åpenbart eksempel er $\frac{\circledcirc}{2}$. Dette fører til teoremet som sier at dersom $\circledcirc_1$ og $\circledcirc_2$ er infinitesimaler og $r \neq 0$ er et reelt tall, så gjelder

1) $\circledcirc_1 \times r$ er en infinitesimal
2) $\circledcirc_1 \times \circledcirc_2$ er en infinitesimal
3) Hvis $\circledcirc_1 + \circledcirc_2 \neq 0$, så er det en infinitesimal.

I det femte kapitelet ser en på kontinuerlige funksjoner. Det introduseres ved koblingen til kalkulus:

«Any rigorous study of calculus begins with one of continuous functions. They are the most fundamental objects of study for the analyst (as they are for most nonfinite mathematicians). It is they that turn approximation into precision and open the doors of calculus to reality.» (s. 51)

En funksjon defineres først som å være kontinuerlig i et punkt r dersom for enhver hyperreell p som er uendelig nære r, er $f(p)$ uendelig nære $f(r)$. Dersom funksjonen er kontinuerlig for alle reelle tall r, kan en si at funksjonen er kontinuerlig.

I neste kapittel skal vi se på arealet under en positiv, kontinuerlig funksjon. For at dette skal gå, må en vite at ikke funksjonen blir så stor i et intervall $[a, b]$ at arealet blir uendelig stort. Derfor er det et teorem som sier at dersom f er en kontinuerlig funksjon for alle reelle tall i intervallet $[a, b]$, så er f begrenset på $[a, b]$. Det vil si at det finnes et reelt tall h slik at $-h < f(x) < h$ for alle x i $[a, b]$.

Integrasjon

Integrasjonskapittelet starter med at det sentrale problemet i integrasjonsregning er å finne arealet til områder begrenset av kurver. I dette kapittelet ser en bare på arealet under en positiv, kontinuerlig funksjon på et lukket intervall. En starter med et helt enkelt tilfelle hvor $f(x)$ er konstant. Da er området et rektangel, som en vet hvordan en regner ut arealet av. Videre ser en på et område bestående av mange rektangler stående inntil hverandre. Arealet til området er helt enkelt summen av arealene til rektanglene. Når en har et område som er begrenset av en kurve, kan en se på det som at området består av rektangler med uendelig smal bredde.

For å gjøre dette formelt, ser en på en funksjon $f(x)$ på et intervall $[a, b]$ og en reell lengde $\Delta x > 0$. En kan bruke Δx til å dele opp intervallet $[a, b]$. Siden lengden av hver subdivisjon er Δx kaller en delingspunktene $x_0(= a), x_1, \cdots, x_n$ hvor $x_i = a + i\Delta x$. Dersom Δx deler $(b - a)$, er $x_n = b$. Om ikke, er det en del på slutten som vi kaller q slik at $b - a = n\Delta x + q$. På hvert subintervall $[x_{i-1}, x_i]$ tegner en et rektangel med høyde $f(x_i)$. La $\int_a^b f(x)\, \Delta x$ være summen av alle rektanglene. Med andre ord er $\int_a^b f(x)\, \Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + f(b)q$. Dette er et estimat for arealet under kurven mellom a og b, men om en vil ha et uendelig nært estimat, må Δx være en infinitesimal. Siden $\int_a^b f(x)\, \Delta x$ er en funksjon for den reelle variabelen Δx, finnes det et tilsvarende funksjonssymbol i språket L og denne funksjonen er også definert på den hyperreelle S. For enhver infinitesimal dx er altså $\int_a^b f(x)\, dx$ en veldefinert hyperreel verdi og er integralet til $f(x)$ over intervallet $[a, b]$.

Videre vises og bevises noen teorem om integralet. Teoremene sier at dersom f er kontinuerlig på $[a, b]$, er integralet $\int_a^b f(x)\, dx$ endelig for alle infinitesimaler > 0, dersom f er integrerbar på $[a, b]$ hvor $b < a$ definerer vi $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$, dersom f er kontinuerlig på $[d, e]$ og a, b, c er i $[d, e]$ så er $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.

Etter dette introduseres den antideriverte $F(x)$ som $F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$. Da har den antideriverte egenskapen at for enhver a og b, er $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

Ved å introdusere integrasjon som et kjent problem, altså som et arealproblem, forteller en studentene allerede en av forkunnskapene som trengs for å starte internaliseringsprosessen av integralkonseptet. Dette styrkes av at en starter med arealet av rektangler som alle studenter på dette nivået er godt kjent med. Alt av metoder blir introdusert ved hjelp av geometri, så en kan se hvor metodene kommer fra. Dette er en fin måte å oppnå hva Skemp (1987) kaller relasjonell forståelse: Å vite hva en skal gjøre og hvorfor.

Derivasjon

«The central problem of differential calculus is to determine tangents to curves. (…) In our development we will place the question in its clearest setting, the analytic geometry by Descartes, and attack it with the hyperreal numbers. Using techniques we have already established, the problem is not difficult at all.» (s. 74)

En vet fra før at for rette linjer er stigningstallet gitt ved $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ og dette er konstant uavhengig av størrelsen på Δx. Dette stemmer ikke for kurver. Intuitivt ser en at om en gjør Δx liten, vil $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ estimere stigningstallet ganske nære. Om en gjør Δx til en infinitesimal, vil $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ estimere stigningstallet uendelig nære. Dette gir oss definisjonen:

Om $y = f(x)$ er en funksjon som er definert i $x = b$ og om $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_b = \frac{f(b+\Delta x)+f(b)}{\Delta x}$ er endelig for enhver infinitesimal Δx, er f deriverbar i $x = b$ og den deriverte av f i b er skrevet som $f'(b)$ og definert som $f'(b) = \boxed{\frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}} = \boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x}}.$ hvor boksene betyr det næreste reelle tallet.

En ser også at dersom $f(x)$ er deriverbar i b, er funksjonen kontinuerlig i b. Dette er fordi for en hver infinitesimal Δx, er $\frac{f(b+\Delta x)+f(b)}{\Delta x}$ endelig, som fører til at $f(b+\Delta x)+f(b)$ må være en infinitesimal eller null.

Videre gis fire teoremer som gjør det veldig lett å derivere ulike funksjoner:

1) Om f og g er deriverbare i b og $h(x) = f(x) + g(x)$, er h deriverbar i b og dens deriverte gitt ved $h'(b) = f'(b) + g'(b)$.
2) Om f og g er deriverbare i b og $h(x) = f(x)g(x)$, er h deriverbar i b og dens deriverte gitt ved $h'(b) = f'(b)g(b) + f(b)g'(b)$.
3) Om f er deriverbar i b og $f(b) \neq 0$, så er funksjonen $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ deriverbar i b og dens deriverte gitt ved $h'(x) = -\frac{f'(b)}{[f(b)]^2}$.
4) Om f er deriverbar i b og g er deriverbar i $f(b)$, er funksjonen $h(x) = g(f(x))$ deriverbar i b og dens deriverte gitt ved $h'(x) = g'(f(b) \times f'(b)$. Dette er kjerneregelen.

Det er også et teorem som sier at for ethvert positivt heltall n, har funksjonen x^n den deriverte nx^{n-1}. Selv om dette er mer som et spesifikt eksempel, trekkes det ut på grunn av polynomers rolle i matematikken.

På slutten av kapittelet introduseres også middelverdisetningen for derivasjon. Her går en ut ifra at $f(x)$ er deriverbar i intervallet (a, b). Da er $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ for en c i (a, b).

Selv om definisjonen av den deriverte blir introdusert geometrisk, blir de andre teoremene i kapitlet bare lagt frem og bevist ved definisjonen. I motsetning til kapitlet om integrasjon er det derimot mange flere oppgaver til studenten. Disse oppgavene er først slik at en må kunne kjenne igjen hvilket teorem en må bruke, og så bare sette det inn i formelen. Mot enden av kapitlet kommer noen litt mer utfordrende oppgaver hvor en skal bevise påstander. Sfard (1991) beskriver hvordan en ved bruk av operasjonell forståelse kan oppnå strukturell forståelse gjennom operasjonelt arbeid. Mens denne typen teoremer kanskje umiddelbart oppfordrer mer til instrumentell forståelse, vil konseptene en jobber med internaliseres og kondenseres, frem til en til slutt oppnår strukturell forståelse.

Fundamentalteoremet

Så langt har boken fokusert på integrasjon og derivasjon separat fra hverandre. Den forteller også at disse to temaene ble studert separat i nesten 2000 år før det på slutten av 1600-tallet ble oppdaget at de faktisk er intimt sammenkoblet. Kort forklart, ble det oppdaget at dersom en integrerte en funksjon og deriverte resultatet, fikk en tilbake den opprinnelige funksjonen. På lignende vis ser en at dersom en deriverer en funksjon, er integralet av resultatet den opprinnelige funksjonen. Ikke bare er dette veldig elegant, men det hjelper oss også å erstatte den tungvinte prosessen med integrasjon med den lettvinte metoden for derivasjon.

Fundamentalteoremet defineres i denne boken på følgende vis: La f være hvilken som helst kontinuerlig funksjon. Da gjelder det for enhver funksjon H at H er en antiderivert av f hvis og bare hvis f er den deriverte av H. I tillegg til bevis, demonstreres også fundamentalteoremet ved hjelp av et eksempel.

Sett at en vil evaluere integralet $\int_{-5}^{2}(7x^6 + 12x^5 + 20x^3 + 7)\,dx$ med de reglene en har fra integrasjonskapittelet, vil det være nesten umulig. Med fundamentalteoremet er det nesten trivielt. En observerer at den deriverte til $x^7 + 2x^6 + 5x^4 + 7x$ er $7x^6 + 12x^5 + 20x^3 + 7$, så ved fundamentalteoremet er $x^7 + 2x^6 + 5x^4 + 7x$ en antiderivert til $7x^6 + 12x^5 + 20x^3 + 7$. Fra definisjonen til den antideriverte er da $\int_{-5}^{2}(7x^6 + 12x^5 + 20x^3 + 7)\,dx$ det samme som $[(2)^7 + 2(2)^6 + 5(2)^4 + 7(2)] - [(-5)^7 + 2(-5)^6 + 5(-5)^4 + 7(-5)] = 350 - (-43785) = 44135$.

Ved hjelp av fundamentalteoremet kan en enkelt gjøre om mange av de enkle teoremene fra derivasjon om til teoremer for integrasjon. Boken gir studenten en tabell med teoremer fra derivasjonsregning og et par tilsvarende teoremer for integrasjon. De manglende teoremene oppfordres studenten til å legge inn selv. Selve teoremene varierer i nytte fra det veldig nyttige teorem 6, til praktisk talt ubrukelige teorem 9.

Differential Calculus	**Integral Calculus***
THEOREM 1. If f is differentiable, then f is continuous.	
THEOREM 2. $(f + g)' = f' + g'$.	$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
THEOREM 3. $(fg)' = f'g + fg'$.	Integration by parts.
THEOREM 4. $(1/f)' = f'/f^2$.	
THEOREM 5. $g(f)' = g'(f)f'$.	Integration by substitution.
THEOREM 6. $(x^n)' = nx^{n-1}$.	
THEOREM 7. The derivative of f is 0 at any maximum or minimum point in an open interval.	
THEOREM 8. The Mean Value Theorem.	
THEOREM 9. If $f'(x) = 0$, then f is a constant function.	
THEOREM 10. If $d(t)$ represents the distance of an object from a fixed point at time t, then $d'(t)$ represents the velocity of that object at time t.	

Figur 17: Tabell med teoremer fra derivasjonsregning og plass til å føre inn tilsvarende teoremer for integrasjonsregning.

Oppsummering

Dette er en mye mindre bok enn de to andre og fokuserer mer på bare integrasjonsregning og derivasjon enn hva disse temaene kan brukes til utenfor ren matematikk. Integrasjon og derivasjon introduseres separat på samme måte som i Apostol (1967), før det bindes sammen ved hjelp av fundamentalteoremet. Siden kapitlene er kortere, føles det likevel ikke like oppdelt ut, og gir en naturlig flyt i hvordan det introduseres.

Denne boken fokuserer selvsagt også mye på infinitesimaler. Infinitesimaler er et veldig nyttig verktøy da det gjør de enkle metodene til Leibniz like velbegrunnede som Newton sine mer kompliserte metoder, uten at metodene kompliseres nevneverdig.

Det er mye historisk informasjon i boken og den er mer motiverende og lettlest enn de to andre bøkene. Dette gjør nok at boken vil være mer anvendelig på lavere nivå, som R-matematikk på videregående skole, men også at boken vil være fin tilleggslitteratur for studenter på universitet som synes kalkulus kan være vanskelig.

Diskusjon og konklusjon

Det som kanskje er mest interessant med disse tre bøkene sett opp mot tekstbøker som introduserer derivasjon før integrasjon, er i hvilken rekkefølge temaene introduseres. Både Courant (1937) og Apostol (1967) starter bøkene med introduksjoner til konseptene grenser og funksjoner. Henle & Kleinberg (1979) snakker fra første kapittel om funksjoner som om det er noe alle vet hva er. Grenser nevnes nesten ikke annet enn at det var noe Newton brukte. Det er fordi boken baserer seg på metoden med infinitesimaler og på den måten i utgangspunktet ikke har behov for grensebegrepet. Sfard (1991) snakker om hvordan en internaliserer nye begreper basert på tidligere reifiserte begreper. Ved metodene til både Courant og Apostol er grenser ett av disse begrepene som må være reifisert før en begynner med integralregning. Ved metodene til Henle & Kleinberg er ikke grenser nødvendig, så det nevnes heller nesten ikke. I stedet brukes den plassen til å introdusere infinitesimaler og matematisk logikk som kan rettferdiggjøre bruken av disse infinitesimalene.

Da jeg selv tok kalkulus-fag på universitet, brukte vi en bok som introduserer derivasjon før integrasjon slik som er mest vanlig i dag. Denne boken var «Calculus» (2014) av Adams & Essex. For sammenligningens skyld vil jeg gjerne se på hva denne boken introduserer som nødvendige forkunnskaper før en kommer inn på derivasjon- og integralregning. Forkunnskapene som introduseres i denne boken er ganske lignende til hva som introduseres i Apostol (1967). En starter med tallinjen og kartesiske koordinater før en kommer inn på funksjoner. Her introduseres hva funksjoner er med domene og omfang før en kommer videre til forskjellige typer funksjoner som sammensatte funksjoner, polynomer og trigonometriske funksjoner. Før boken kommer til derivasjonskapitlene, introduseres også grenser og kontinuitet. Courant introduserer både funksjoner, grenser og kontinuitet i introduksjonskapitlet før de neste to kapitlene er ren kalkulus. Apostol introduserer grenser i introduksjonskapitlet, funksjoner i begynnelsen av integrasjonskapitlet og kontinuitet i et eget kapittel etter det ubestemte integralet og før en kommer inn på derivasjon. Henle & Kleinberg introduserer også kontinuitet, men i et eget kapittel før integrasjon igjen.

Når en faktisk kommer til selve kapitlene om integrasjon og derivasjon, er det flere fellestrekk. Alle tre bøkene starter med det bestemte integralet, går videre til derivasjon og så til ubestemt integral. Når bøkene introduserer det bestemte integralet, bruker alle tre en variant av Riemannsummer. Courant deler x-intervallet inn i n intervaller med tilfeldig lengde og lager to sett søyler hvor det ene settet søyler har høyde lik den minste verdien til funksjonen i det aktuelle intervallet, mens det andre har høyde lik den største verdien til funksjonen i det aktuelle intervallet. Han summerer arealet til alle rektanglene i hvert sett til en nedre og øvre sum og lar deretter bredden på intervallene minske grenseløst ved å la n øke grenseløst. Dermed vil arealet til den øvre summen og arealet til den minste summen gå mot den samme verdien som er det faktiske integralet. Courant er veldig nølende til å bruke ord som «gå mot uendelig» da dette er matematisk unøyaktig. I stedet sier han at han lar en variabel «øke grenseløst». Mens Courant deler intervallet inn i partisjoner med tilfeldig bredde, deler Apostol intervallet i n like deler med bredde $\frac{b-a}{n}$. Deretter bruker han samme metode for å få en øvre og nedre sum. I stedet for å la n gå mot uendelig, viser han heller at dersom en funksjon I tilfredsstiller ulikheten $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq I \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ hvor $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ for $k = 0,1,\cdots,n$, så er I integralet $\int_a^b f(x)\,dx$. Denne metoden er nok mer matematisk nøyaktig, men definitivt mindre intuitiv enn Courant sin metode. Mens både Courant og Apostol har brukt både en øvre og nedre sum, skiller nok en gang Henle & Kleinberg seg ut ved at de bare bruker én sum. I likhet med Apostol deles intervallet i utgangspunktet i intervaller med lik bredde Δx, men det kan være en rest q

på slutten om Δx ikke deler $b - a$. På hvert subintervall $[x_{i-1}, x_i]$ tegner en et rektangel med høyde $f(x_i)$. Dersom $f(x)$ er strengt økende, ville dette da vært en øvre sum og et for stort estimat, men ved å la Δx være en infinitesimal, vil det bli et uendelig nært estimat hvor estimatet er en infinitesimal unna det faktiske integralet. Dermed vil det nærmeste reelle tallet være integralet. På denne måten trenger en ikke bruke et øvre og nedre estimat. En kan argumentere for at en kunne gjort det samme med Courant sin metode, men siden han ikke vil la bredden på rektanglene gå mot uendelig, blir det fremdeles ikke helt nøyaktig før en sier at integralet ligger mellom et estimat som er litt for stort og ett som er litt for lite.

Derivasjon introduseres veldig likt i de tre bøkene, med mindre variasjoner enn for det bestemte integralet. Henle & Kleinberg og Courant utvinner formelen fra problemet med å finne stigningstallet til tangenten til en funksjon, mens Apostol først utvinner formelen for å finne farten til en partikkel ut ifra funksjonen for posisjonen til partikkelen. Mens Henle & Kleinberg og Courant starter med at formelen for stigningstallet er $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ og lar Δx enten minske uten grense eller være en infinitesimal, går Apostol rett til å utlede formelen ved å si at gjennomsnittsfarten til partikkelen i tidsrommet $[t, t+h]$ er $\frac{f(t+h)-f(h)}{h}$ og at punktfarten er når en lar h gå mot null. På denne måten kommer både Courant og Apostol til Leibniz' notasjon for definisjonen av den deriverte: $\frac{d}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, mens Henle & Kleinberg kommer til en nær variant: $f'(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Begge notasjonene betyr akkurat det samme, men sistnevnte kan være tydeligere dersom en jobber med infinitesimaler. Ved å starte med tangentproblemet som Henle & Kleinberg og Courant gjør, vil en ha en god mulighet til å snakke om den matematiske historien rundt derivasjon og koblingen til integrasjon. Ved å bruke et eksempel fra fysikken slik Apostol gjør vil en ha en kobling til andre fag, som kan styrke tverrfaglige kunnskaper og være motiverende for studenter som ikke er rene matematikere.

De tre bøkene har litt forskjellige metoder for å introdusere det ubestemte integralet. Både Henle & Kleinberg og Apostol introduserer den antideriverte (også kalt den primitive funksjonen) og det ubestemte integralet før de introduserer derivasjon. Henle & Kleinberg forteller bare at det finnes en antiderivert $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ som har egenskapen av $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Apostol introduserer det grundigere ved å først definere to ubestemte integral $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ og $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ og så vise at $A(x) - F(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$ som er uavhengig av x og dermed en konstant. Deretter viser han at dersom en har en antiderivert $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, så kan en finne det bestemte integralet ved en enkel subtraksjon: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Deretter har både Henle & Kleinberg og Apostol et kapittel om derivasjon før de kommer til sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon ved fundamentalteoremet som blir brukt til å finne regler for å finne antiderivative og dermed ubestemte integraler. Courant introduserer både antideriverte, ubestemte integral og fundamentalteoremet etter at han har gått igjennom både det bestemte integralet og derivasjon. Han viser på nesten identisk måte som Apostol at differansen mellom to ubestemte integraler er en konstant. Deretter introduseres fundamentalteoremet som sier at dersom en deriverer det ubestemte integralet til en funksjon, vil resultatet være den opprinnelige funksjonen. Før dette teoremet brukes til å utlede flere integrasjonsregler, introduserer han den antideriverte og bruker etter hvert den antideriverte til å finne det bestemte integralet. I motsetning til de andre to bøkene, utledes formelen faktisk. En vet fra før at differansen mellom to ubestemte integraler er en konstant, så en vet at et ubestemt integral $\Phi(x) = \int_a^x f(u)\,du$ er lik $F(x) + c$. Ved å se på $\Phi(a) = \int_a^a f(u)du = 0 = F(a) + c$ som betyr at $c = -F(a)$, kan en se at $\Phi(x) = F(x) - F(a)$ og at dersom $x = b$, så er

$\int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$. Alle tre bøkene bruker fundamentalteoremet til å finne videre regneregler for integralet som blant annet delvis integrasjon og integrasjon ved substitusjon. Dette gjøres ved å ta regneregler for derivasjon og integrere begge sider av ligningen.

Det er med andre ord mange fellestrekk mellom de tre bøkene. Henle & Kleinberg skiller seg ut til tider ved bruken av infinitesimaler, Apostol skiller seg litt ut med fokuset på bruksområder innenfor fysikk og Courant er mer matematisk rigid enn forfatterne av de to andre bøkene. Dersom jeg skulle lagt opp et kurs i kalkulus hvor jeg introduserer integrasjon før derivasjon på videregående skole, ville jeg nok fulgt strukturen til disse tre bøkene og brukt mye av deres virkemiddel for å utlede kalkulus som en helhet.

Siden en starter med det definerte integralet, er det mer fokus på den geometriske betydningen av integrasjon enn i mange kalkuluskurs hvor en allerede har vært igjennom derivasjon. En er nødt til å forstå den geometriske betydningen av integralet før en kan gå videre, noe som ikke nødvendigvis er tilfellet når en følger standardrekkefølgen med derivasjon først. Som nevnt i innledningen, snakket jeg med en venn som sa at han trodde grunnen til at derivasjon blir undervist først er fordi det kan vises geometrisk og at en ikke kan gjøre det med integrasjon. Dette er en person som har vært igjennom kalkuluskurs på universitetet, så det er tydelig at han har kommet seg gjennom integrasjonsdelen av kurset basert hovedsakelig på instrumentell forståelse. Ved hjelp av fundamentalteoremet og en strukturell forståelse av derivasjon, er det fullt mulig å gjennomføre de aller fleste integrasjonsregnestykker uten en relasjonell forståelse av integrasjon. Ved å introdusere integrasjon før derivasjon er en nødt til å ha den relasjonelle forståelsen av et integral for å løse alle oppgaver frem til derivasjon og fundamentalteoremet er introdusert. En kan argumentere for at en fremdeles kan glemme denne forståelsen etter at en har lært fundamentalteoremet og at en fremdeles kan «tvinge» studenter til å oppnå en relasjonell forståelse av integralet ved å vente med å introdusere fundamentalteoremet til etter en har jobbet geometrisk med integralregning en stund. Likevel ser jeg for meg at mange lærere ville vært fristet til å «ta snarveien» med å bruke fundamentalteoremet for at studentene skal «forstå» integrasjon fortere. Som Skemp (1987) sier, er instrumentell forståelse ofte en raskere måte å komme frem til riktig svar på oppgaver (s. 158).

Tanker videre

Det hadde vært veldig interessant å kunne forske videre på både hvorfor en underviser derivasjon før integrasjon og hvordan kunnskapen studenten sitter igjen med på slutten potensielt ville vært annerledes dersom en underviste integrasjon først. Dette hadde utvilsomt vært to store prosjekter. I det første tilfellet ville det nok vært vanskelig å finne svar på hvorfor det er blitt standarden å gjennomføre derivasjon før integrasjon da dette har vært standarden så lenge at forfatterne av tidlige lærebøker som følger denne rekkefølgen er døde for lenge siden. En kunne intervjuet forfattere av moderne lærebøker og hørt om de har tenkt over muligheten for å plassere integrasjon før derivasjon og i så fall hvilke fordeler de ser ved å gjøre det på den vanlige måten.

Det andre prosjektet med å undersøke hva som sitter igjen av kunnskap hos studenter som har fått undervist integrasjon før derivasjon i forhold til de som har fått det undervist i motsatt rekkefølge ville også kreve mye innsats, men hadde vært et veldig interessant forsøk. For det første trenger en minst to klasser som er på noenlunde likt nivå faglig. En vil også trenge pensum til begge klassene som mest sannsynlig måtte blitt laget spesielt for forsøket. Dersom den eneste variabelen skulle vært rekkefølgen integrasjon og derivasjon introduseres i, kan en ikke bruke bøker av forskjellige forfattere fra forskjellige tidsperioder. En måtte sørget for at temaene blir like godt forklart i begge settene med pensum og at det er tilsvarende vanskelighetsgrad på oppgaver og forklaringer.

Jeg ser selv for meg at en ikke ville funnet store variasjoner mellom gruppene i hvor godt de løser oppgaver som bare krever instrumentell forståelse, men dersom en hadde oppgaver som krever relasjonell forståelse for de geometriske grunnproblemene for derivasjon og integrasjon ville en sett en forskjell. Det hadde også vært interessant om en undersøkte forståelse for sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon. En av fordelene med å undervise derivasjon før integrasjon er at en får en mer glidende overgang mellom temaene. I de fleste lærebøker for videregående skole jeg har observert og i kalkulusboken jeg brukte selv på universitetet, introduserer en derivasjon først, så antideriverte, ubestemt integral og en variant av fundamentalteoremet før de kommer til bestemt integral og de mer avanserte integrasjonsmetodene. En kan argumentere for at dette gir en mer flytende overgang fra tema til tema enn dersom en underviser bestemt integral, derivasjon og til slutt knytter de to separate temaene sammen med fundamentalteoremet. Dersom jeg skulle skrevet en større masteroppgave eller en doktorgrad, ser jeg for meg at dette hadde vært noe jeg ville undersøkt videre. Jeg håper at dersom jeg ikke gjør det selv, så gjør noen andre det.

Litteratur

Adams, R. A. & Essex, C. (2014). *Calculus* (8. utg.). Toronto: Pearson Canada Inc.

Apostol, T. M. (1967). *Calculus Vol 1* (2. utg.). USA: John Wiley & Sons, Inc.

Courant, R. (1937). *Differential and Integral Calculus* (2. utg.). Glasgow: Blackie & Son Limited.

Henle, J. M. & Kleinberg, E. M. (1979). *Infinitesimal Calculus.* New York: Dover Publications, Inc.

O'connor, J. J. & Robertson, E. F. (2000, juli). Richard Courant. Hentet fra: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Courant/

O'keefe, L. (2013). A Framework for Textbook Analysis. *International Review of Contemporary Learning Research, 2(nr. 1),* 1-13. https://doi.org/10.12785/irclr/020101.

Richard Courant (2020). I *Encyclopædia Britannica.* Hentet fra: https://www.britannica.com/biography/Richard-Courant

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Skemp, R. (1987). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Psychology of Learning Mathematics, 152-163.* https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_79

Bildekilde:

Abdank-Abakanowicz, B. (1886). *Les Intégraphes.* Paris: Gauthier-Villars