En komparativ studie av 2P-elevers og 10.klassingers bruk av strategier og begrunnelsesnivå i figurmønsteroppgaver

Ine Bjerke Saksvik

Integrert lektorutdanning i matematikk og naturvitenskap

Matematisk institutt

Universitetet i Bergen

Vår 2020

Sammendrag

Bakgrunnen for valg av tema i denne masteroppgaven er at mange elever har vansker knyttet til algebra. Elevenes pensumbøker fokuserer lite på generalisering av aritmetikk (Kongelf, 2015, s. 104), og har et stort fokus på spesielle eksempler. Jeg ønsket å undersøke hvordan elevene besvarer algebraoppgaver med fokus på generalisering.

I denne masteroppgaven har 10.klassingers og 2P elevers valg av strategi og begrunnelsesnivå i figurmønsteroppgaver blitt sammenliknet og hvilke utfordringer disse elevene møter i figurmønsteroppgaver har blitt undersøkt. Figurmønsteroppgaver er en type generaliseringsoppgaver som anbefales for å arbeide med variabelbegrepet, og for å lære elevene å danne generaliseringer. Oppgavene gir en visuell representasjon av to variabler, og kan varieres på mange ulike måter. Dette gjør slike oppgaver aktuelle med tanke på den nye læreplanen som trer i kraft i 2020, hvor abstraksjon og generalisering er et kjerneelement. Hensikten med dette prosjektet var å undersøke om det har skjedd en progresjon hos elevene på de to årene som skiller dem, og om elevene bruker forskjellige strategier og begrunnelsesnivå for å løse oppgavene. Funnene kan være nyttige observasjoner i en diskusjon om en tidligere plassering av algebra i skoleløpet, slik den nye læreplanen foreslår.

Prosjektet ble gjennomført ved at elevene først fikk en introduksjonstime hvor de arbeidet med figurmønsteroppgaver og fikk hjelp hvis de trengte det. Deretter fikk elevene utdelt nye oppgaver de skulle arbeide med uten hjelp. I etterkant av testen ble tre elever på hvert trinn plukket ut til intervju. Besvarelsene ble kategorisert ved hjelp av to rammeverk som tar for seg ulike strategier og begrunnelsesnivå. Det er altså brukt både kvalitative og kvantitative metoder i dette prosjektet, men det er en hovedvekt på kvalitative data.

Funnene viser at elevene på de to trinnene stort sett bruker like strategier for å løse de ulike oppgavene. Ulike fremstillinger av oppgaven gir ulik hyppighet av hvilken strategi som er mest brukt. Dette kan tyde på at oppgavens formulering påvirker elevenes tenkemåte. På begge trinn var det få elever som klarte å gi en generalisering av mønstrene, men de fleste elevene klarte å fortsette mønstrene. Elevene på begge trinn begrunner svarene sine i liten grad. Når elevene begrunner svarene gis det ofte en empirisk begrunnelse. Funnene viser også at elever på begge trinn hadde like store utfordringer med å oppfatte sammenhengen mellom de to variablene i figurmønsteroppgaver og uttrykke generaliseringen med symboler.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på lektorutdannelsen min på Universitetet i Bergen. Det har vært fem lærerike og spennende år, men det har også vært noen krevende stunder underveis. Jeg er glad og stolt over meg selv for å ha fullført utdanningen, og stolt over å endelig kunne kalle meg lektor.

Arbeidet med masteroppgaven har vært utrolig interessant og givende. Jeg har lært mye om hvordan generaliseringsoppgaver kan brukes i undervisning, og hvor viktig det er at elevene har forståelse for fremgangsmetodene de bruker. Dette vil jeg ta med meg videre når jeg skal undervise egne elever. Det er mange som har bidratt til at denne masteroppgaven ble til, og disse har jeg lyst å takke.

Først og fremst vil jeg takke lærerne som stilte klassene sine til disposisjon, og elevene som deltok på prosjektet. Uten dem hadde det ikke blitt noen masteroppgave.

Takk til veilederen min, Christoph Kirfel, for gode innspill og konstruktiv kritikk underveis i skrivingen. Det satte jeg stor pris på.

Sist, men ikke minst, vil jeg takke min samboer og familie for støtte underveis i arbeidet med denne oppgaven.

Ine Bjerke Saksvik
Universitetet i Bergen

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Gjennom praksis i lektorutdannelsen har jeg lagt merke til at en del elever strever med å forstå algebra. Elevene synes å ha utfordringer med å forstå variabelbegrepet og regler knyttet til hvordan ulike regneoperasjoner skal utføres i algebra. Dette samsvarer med resultatene fra TIMSS, en undersøkelse som gjennomføres hvert fjerde år og måler elevenes kompetanse i matematikk og naturfag. I 2015 deltok elever på videregående skole med valgfag i matematikk og fysikk (Grønmo, Hole & Onstad, 2016) og elever på 4.,5.,8. og 9. trinn i Norge (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016, s. 6). Resultatene fra undersøkelsen i 2015 viser at norske elever, på både ungdomstrinnet og i videregående, presterer svakest i algebra sammenliknet med referanselandene (Grønmo et al., 2016, s. 37: Bergem, 2016, s. 36). Jeg har lurt på årsaken til at elever synes algebra er utfordrende, samt om det finnes et alternativ til måten algebra læres vekk i skolen i dag og hvordan emnet presenteres i lærebøkene. Da spesielt med tanke på om man kan fremme generalisering og argumentasjon i arbeid med algebra, istedenfor å presentere regler for hvordan ulike regneoperasjoner utføres.

Høsten 2020 kommer det nye læreplaner i Norge. Hvert fag vil få kjerneelementer, som skal prege innholdet og progresjon i læreplanen. Et av kjerneelementene i matematikk er «Abstraksjon og generalisering» (Utdanningsdirektoratet, 2019). Beskrivelsen av dette kjerneelementet er at «Generalisering i matematikk handlar om at elevane oppdagar samanhengar og strukturar og ikkje blir presenterte for ei ferdig løysing. Det vil seie at elevane kan utforske tal, utrekningar og figurar for å finne samanhengar og deretter formalisere ved å bruke algebra og formålstenlege representasjonar.» (Utdanningsdirektoratet, 2019). En måte å lære å oppdage sammenhenger og strukturer er gjennom figurmønsteroppgaver. I slike oppgaver presenteres et voksende mønster, og elevene skal komme fram til en formel som gir en sammenheng mellom de to variablene man finner i slike mønstre.

Generalisering- og figurmønsteroppgaver er svært aktuelle med tanke på den nye læreplanen. I den nye læreplanen er det stort fokus på at elevene skal bli gode problemløsere og oppdage sammenhenger i og mellom fagets kunnskapsområder, og andre fags kunnskapsområder (Utdanningsdirektoratet, 2019). I tillegg til å fremme generalisering, kan oppgavene brukes som en introduksjon til problemløsning, og kan brukes til å introdusere begreper og utvikle ferdigheter som også er sentrale innenfor andre områder i matematikk enn algebra. Generalisering- og figurmønsteroppgaver kan også tilpasses ulike trinn etter vanskelighetsgrad.

Studier (Lee,1996: Lannin, 2005) har vist at elever har utfordringer knyttet til figurmønsteroppgaver. Med bakgrunn i det jeg har skrevet over, ønsker jeg å sammenligne to trinn for å finne ut hvilke utfordringer elevene støter på, og om det er de samme utfordringene som går igjen på begge trinn. Motivasjonen for å gjøre dette er å finne ut om elevene har progresjon i forståelsen av ulike begreper og ferdigheter man må ha i generaliseringsoppgaver. Det innebærer blant annet forståelse for variabelbegrepet, se sammenhenger mellom to variabler og evne til å formulere en generalisering.

1.2 Tidligere forskning og eget forskningsspørsmål

Norske elever presterer svakt i algebra sammenlignet med referanselandene, ifølge resultatene fra TIMSS (Grønmo et al., 2016, s. 37: Bergem, 2016, s. 36). Det kan være flere årsaker til at elever presterer svakt i algebra. Noen av disse er beskrevet at Stacey & MacGregor (1997, s.1), som skriver at vanskeligheter med å lære å bruke algebraisk notasjon har flere opprinnelser deriblant analogier med symbolsystem brukt i hverdagslivet, misforståelser fra ny læring i matematikk, dårlig designet og misledende undervisningsmateriale.

I en analyse (Kongelf, 2015, s. 104) av introduksjonen til algebra i matematikkbøker på ungdomstrinnet i Norge kommer det fram at lærebøkene i liten grad bygger videre på og drar sammenligninger til aritmetikk og generalisering av aritmetikk. Innholdet er i hovedsak algebramanipulasjon, hvor det i liten grad legges opp til begrunnelser for notasjon og hvorfor en kan bedrive manipulasjon (Kongelf, 2015, s. 104). Dette kan være med på å danne misoppfatninger hos elevene, fordi de lager egne forklaringer på hvorfor man kan utføre de operasjonene man gjør i algebra. En måte som foreslås av litteraturen er å introdusere algebra gjennom å bruke figurmønsteroppgaver (Lannin, 2005, s. 231). Dette er oppgaver hvor elevene får presentert et voksende mønster, og elevene blir bedt om å avgjøre hvordan neste figur vil se ut og bestemme en formel for å avgjøre hvordan den $n - te$ figuren ser ut. Denne type oppgave har ofte en dynamisk representasjon av variablene og anbefales derfor for å introdusere variabelbegrepet og andre begreper innen algebra. Ulike måter å presentere figurmønsteroppgaver på og hvordan elever løser disse oppgavene blir tatt opp videre i teorikapittelet (Kapittel 2).

Resultatene fra TIMSS gir grunn til bekymring om norske elevers algebrakunnskaper. Resultatene kan ha sammenheng med at man i Norge introduserer elevene for algebra senere i skoleløpet sammenlignet med andre land hvor elevene gjør det godt i algebra, som for eksempel Singapore (Bergem, 2016, s. 27: Karimzadeh, 2014, s. 24). I en studie gjort av Tellefsen & Haugli (2019) viser funnene at barn helt ned til første klasse på barnetrinnet kan arbeide med mønster- og generaliseringsoppgaver. I studien (Tellefsen & Haugli, 2019, s. 5) finner man også at det er mulig å innføre generalisering ved bruk av variabler på femte til syvende trinn. Et annet interessant funn fra studien er at noen av elevene som oppfattes som lavpresterende fikk til mest (Tellefsen & Haugli, 2019, s. 7). Denne studien viser at yngre elever også kan arbeide med generaliseringsoppgaver og oppgaver som fremmer algebraisk tenkning.

Studien til Tellefsen & Haugli (2019) inspirerte meg til å gjennomføre et prosjekt hvor jeg sammenligninger hvordan elever på to trinn arbeider med figurmønsteroppgaver. I masteroppgaven min har jeg valgt å undersøke hvordan 10.klassinger og 2P – elever besvarer generaliseringsoppgaver. I prosjektet arbeidet elevene med figurmønsteroppgaver. Dette er elever som allerede er blitt introdusert for algebra, og oppgavene vil derfor ikke bli en introduksjon til algebra for disse elevene. Likevel er det interessant å undersøke om algebrakunnskapene disse elevene besitter gjør dem i stand til å se sammenhenger mellom variablene i mønsteret og beskrive disse generelt. Jeg vil sammenligne elevenes besvarelser ved å se på valg av strategi og begrunnelsesnivå, samt undersøke hvilke utfordringer elevene støter på. Jeg har formulert følgende forskningsspørsmål:

Hvilke forskjeller finner vi når vi sammenligner 10.klassingers og 2P-elevers valg av strategier og begrunnelsesnivå i figurmønsteroppgaver, og hvilke utfordringer møter elevene i disse oppgavene?

1.3 Metodisk tilnærming

For å kunne svare på forskningsspørsmålet ville jeg undersøke hvordan elevene arbeider med figurmønsteroppgaver, og hvordan de tenker underveis i arbeidet. Jeg valgte å kombinere kvantitative og kvalitative metoder for å svare på forskningsspørsmålet. Kvantitative data, i form av tabeller, blir brukt for å gi et overblikk over hvilke strategi og begrunnelse elevene har brukt i besvarelsene. De kvantitative dataene i prosjektet er basert på mine tolkninger av de kvalitative dataene. Kvalitative data som er brukt i dette forskningsprosjektet er elevbesvarelser og intervju. For å gjøre elevene kjente med oppgavetypen og for å sikre nok data, fikk elevene en introduksjonstime hvor et eksempel og hensikten med denne type oppgave ble presentert. Elevene fikk også øve seg på ulike oppgaver før undersøkelsen ble satt i gang. Besvarelsene ble så gjennomgått, og til sammen seks elever ble plukket ut til intervju. I intervju ble det gått mer i dybden på hva elevene tenkte da oppgavene ble løst. Deretter har besvarelsene blitt analysert i henhold til ulike rammeverk som er beskrevet i teorikapittelet (Kapittel 2).

1.4 Oppbygging av oppgaven

Masteroppgaven er bygd opp av seks hovedkapitler. Disse er innledning, teori, metode, funn og analyse, hovedfunn og konklusjon, og avsluttende refleksjoner. I teorikapittelet legger jeg fram teori som danner grunnlaget for oppgaven min, og presenterer rammeverkene som er brukt i analysen av resultatene. I teorikapittelet blir det tatt opp hva algebra og tidlig algebra er, samt hva som menes med begrepet «algebraisk tenkning». Videre går jeg inn på hva figurmønsteroppgaver er, og det presenteres to rammeverk som omhandler elevenes valg av strategier og begrunnelsesnivå i generaliseringsoppgaver. Deretter presenteres utfordringer elever har knyttet til figurmønsteroppgaver og det diskuteres om oppgavens formulering kan påvirke elevenes tenkemåte.

Metodekapittelet tar for seg hvilken metodologi jeg har brukt for å samle inn data, og hvorfor denne metoden egner seg for å besvare forskningsspørsmålet jeg har valgt. Det blir også redegjort for hvordan utvalget i undersøkelsen er gjort, og hvordan analysen av resultatene er blitt gjennomført. Metodiske utfordringer og etiske betraktninger knyttet til prosjektet diskuteres, og en presentasjon av oppgavene elevene har gjort kommer til slutt.

Funn og analysedelen tar for seg resultatene i prosjektet. De ulike strategiene og begrunnelsesnivå elevene har brukt sammenlignes og analyseres. Det hele vil oppsummeres i kapittelet hovedfunn og konklusjon. Dette kapittelet tar for seg hovedfunnene i prosjektet som brukes til å svare på forskningsspørsmålet. Til slutt vil jeg reflektere rundt svakheter med prosjektet, og veien videre.

2 Teori

2.1 Hva er algebra?

Mange elever forbinder algebra med å bruke bokstaver. Til tross for dette er det flere elever som ikke lærer hva bokstavene står for, eller hvorfor de blir brukt. Det er vesentlig for elevene å forstå hvorfor det er viktig å kunne snakke om og manipulere ethvert tall, selv om det ikke enda er kjent (Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2014, s. 28). Lins & Kaput (2004, s. 48) skriver at det er vanskelig å definere algebra, spesielt hvis man forventer en konsis og epistemologisk definisjon. Grunnen er at hva den enkelte oppfatter algebra som, avhenger av kulturelle faktorer og andre faktorer som varierer fra samfunn til samfunn, og til og med i samfunn (Lins & Kaput, 2004, s. 48). Hva vi mener algebra er har en stor innvirkning på hvordan vi tilnærmer oss det – som lærere, forskere, professorer, læreplanutviklere, osv. (Kaput, 2008, s. 8). Det finnes flere forklaringer på hva som ligger i kjernen av algebra. I denne delen vil jeg presentere Kaput (2008) sitt syn på hva algebra er, og hvordan Kaput & Blantons (2001) deler algebra inn i fem grener.

Kaput (2008, s. 8) hevder at man i hovedsak kan tenke på algebra på to ulike måter. Den ene måten er å tenke på algebra som en kulturell gjenstand, noe som vi mottar som en del av vår kulturelle arv. Denne kulturelle gjenstanden er inkludert på forskjellige måter i utdanningssystem over hele verden, både med tanke på hvordan den blir introdusert og hvordan den er satt i sammenheng med andre matematiske emner (Kaput, 2008, s.8). Den andre måten er å tenke på algebra som et sett av aktiviteter, noe man gjør. For eksempel produsere representasjoner for å uttrykke generaliseringer, og transformasjon av disse representasjonene (Kaput, 2008, s. 8).

Kaput & Blanton (2001, s. 346) beskriver algebra ut fra det de mener er en utviklet algebraisk tenkning, som de hevder er en kompleks sammensetning organisert rundt fem grener. Disse grenene er:

1. Algebra som generalisering og formalisering av mønstre og betingelser. Å bruke aritmetikk for å danne, uttrykke og begrunne generaliseringer. Denne type aktivitet kan være generalisering av aritmetiske operasjoner og danne generaliseringer om spesielle tallegenskaper eller forhold.
2. Algebra som syntaktisk styrt manipulasjon.

3. Algebra som studien av strukturer og system abstrahert fra utregninger og relasjoner. Dette inkluderer å tenke med og generalisere med mer abstrakte objekter og systemer. Dette er en av røttene til abstrakt algebra og algebra som en matematisk disiplin.
4. Algebra som studien av funksjoner, relasjoner og samvariasjon. Generalisering fra numeriske mønstre eller figurmønstre for å gi beskrivelser av funksjoner. Beskrivelsen kan også inkludere hvordan neste figur eller tall kan beskrives ut ifra gjeldene figur eller tall. Begge typer beskrivelse er viktig for å bygge funksjonsbegrepet, og er en viktig del av algebraisk tenkning i skolen.
5. Algebra som en samling av språk for å kontrollere modellering av fenomener. Fokuserer på å bruke modellering for å danne, uttrykke og argumentere for generaliseringer.

(Kaput & Blanton, 2001, s. 347)

Kaput & Blanton (2001, s. 346) mener at generalisering og det å uttrykke generaliseringer systematisk er viktig for alt arbeid vi gjør i matematikken, spesielt i arbeid som inneholder matematikkens symbolspråk. Det er underliggende i alle grenene over, bortsett fra gren nummer 2, men selv der er det essensielt for å gi mening for symbolobjektene som blir manipulert (Kaput & Blanton, 2001, s. 346). De fem grenene er essensielle for å gjøre skolematematikken dypere, og å bygge tankeganger som kan støtte læringen av de mer komplekse og abstrakte matematiske emnene (Kaput & Blanton, 2001, s. 346).

I denne oppgaven vil jeg bygge min forståelse av algebra på Kaput & Blanton (2001) sine fem grener. Spesielt vil gren nummer 1 og 4 være viktig for denne oppgaven, generalisering og formalisering av mønstre, og generalisering av figurmønstre for å bygge funksjonsbeskrivelser. I denne oppgaven vil jeg finne ut hvordan elevene generaliserer og begrunner figurmønsteroppgaver, og det vil dermed være viktig hvordan elevene tenker og snakker om disse oppgavene. Dette vil være å se på algebra som noe vi gjør (Kaput, 2008, s. 9). Kaput & Blanton (2001, s. 347) skriver at den fjerde grenen er en viktig del av algebraisk tenkning i skolen, og jeg vil nå forklare hva som menes med begrepet algebraisk tenkning.

2.2 Algebraisk tenkning

Algebraisk tenkning er et begrep som er godt kjent for matematikkdidaktikere, og som nevnes i mange artikler om elevers forståelse for algebra. Denne type tenkning handler om å lære elevene en evne til å tenke kritisk (Kriegler, 2008, s.1), noe som er essensielt for å kunne delta i et demokratisk samfunn. Man må kunne gjenkjenne og bruke generelle metoder, teste og utfordre generaliseringer og stille spørsmål ved antakelsene slike generaliseringer ofte er begrunnet med (Mason, 2008, s. 79). Til tross for at «algebraisk tenkning» er et velkjent begrep, finnes det ulike definisjoner på hva algebraisk tenkning er.

Radford (2013, s. 261) mener at bruk av notasjon alene ikke kan karakterisere algebraisk tenkning, heller ikke bruk av variabler eller ukjente tall. Han begrunner dette med et eksempel, og sier at mange elever løser ligninger med en prøve-og-feile-strategi. Elevenes ligninger inneholder notasjon, og hensikten er å finne det ukjente tallet. Likevel tenker ikke elevene algebraisk i et slikt tilfelle (Radford, 2013, s. 261). De bruker kun aritmetiske konsepter og tenker dermed aritmetisk. Radford (2013, s. 261) karakteriserer algebraisk tenkning på denne måten:

1. Ubestemthet: Elevene oppmuntres til å bruke ikke-kjente tall (ukjente, variabler, parametere, osv.)
2. Betegnelse: de ubestemte tallene som er involvert i oppgaven må ha et navn eller symbol. Denne symbolismen kan oppnås på ulike måter. Man kan bruke alfanumeriske tegn – men ikke nødvendigvis. Betegnelsen av ubestemte størrelse kan også symboliseres gjennom naturlig språk, gester, ukonvensjonelle tegn eller en blanding av disse.
3. Behandling: De ubestemte størrelsene blir behandlet som om de var kjente tall. Det vil si, selv om de ikke er kjent, starter man fra de ubestemte størrelsene og utfører operasjoner på dem (dvs. adderer, subtraherer, multipliserer, dividerer).

(Radford, 2013, s. 261)

John Mason er en annen forsker som har skrevet bøker og artikler om algebraisk tenkning. Mason (1996 s. 83) hevder at det å oppdage likheter og ulikheter, gjøre antakelser, klassifisere og benevne, er uttrykk for drivkraften til å forberede seg på fremtiden. Dette er grunnlaget i hva Mason (1996, s. 83) betrakter som algebraisk tenkning. Mason, Graham & Johnston-Wilder (2014, s. 365) mener at algebraisk tenkning har røtter i og oppstår fra elevenes naturlige evner til å gi matematisk mening, og algebraiske symboler er språket som blir brukt for å uttrykke generaliteter.

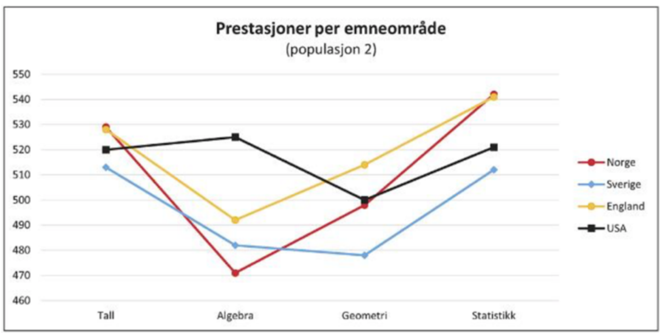
Det kan se ut til at det er mangel på konsensus angående bruk av formelle symboler i læringen av algebra. Kieran (1989, s. 165) mener at i tillegg til å kunne oppdage det generelle, må man være i stand til å uttrykke det generelle algebraisk. Dette begrunner hun med at vi ellers kan ende opp med å beskrive evnen til å generalisere, og ikke tenke algebraisk (Kieran, 1989, s. 165). Generalisering er ikke ekvivalent med algebraisk tenkning, og det krever heller ikke algebra (Kieran, 1989, s. 165). Dette viser også Radford (2013) når han beskriver hvordan elever bruker prøve-og-feile strategier til å løse generaliseringsoppgaver. For å skille algebraisk tenkning fra generalisering foreslår Kieran (1989, s.165) at det er nødvendig å bruke algebraisk symbolisme til å resonnere rundt og å uttrykke generaliseringen. På en annen side mener Kaput, Carraher & Blanton (2008, s. xxi) at det virker urimelig å begrense uttrykket algebraisk tenkning til tilfeller hvor elevene bruker notasjon som «$f(n) = 3n - 7$,» altså algebraisk symbolisme. Kaput, Carraher & Blanton (2008, s. xxi) mener at en smal oppfatning av algebraisk aktivitet skjuler relasjonen mellom algebra og tidlig matematisk tenkning. I dette prosjektet vil jeg bruke Radford og Mason sine definisjoner av algebraisk tenkning. Det innebærer at elevene må bruke en symbolisme for å betegne de ubestemte tallene i oppgaven. Denne symbolismen trenger ikke å være formell algebraisk notasjon, men kan for eksempel være naturlig språk eller ukonvensjonelle tegn.

At elever kan lære å tenke algebraisk betyr ikke at de skal eller bør gjøre det, men det anbefales at de gjør det (Carpenter, Levi, Berman & Pligge, 2005, s. 96). Hvis elevene ikke får utvikle den algebraiske tenkningen fra tidlige år på skolen, kan dette føre til misoppfatninger om for eksempel ekvivalens og variabler (Carpenter, et al., 2005, s. 96). Carpenter, et al. (2005, s. 97) hevder at alle elever drar fordeler av å engasjere seg i aktiviteter hvor de må lage generaliseringer eksplisitt, representere dem nøyaktig med naturlig språk og symboler, og begrunne at de er gyldige for alle tall. Algebraisk tenking må utvikles over en lang periode i elevens matematiske erfaring, og må begynne i de tidlige trinnene (Blanton & Kaput, 2005, s, 100). At elevene begynner tidlig med algebraisk tenkning er en tilnærming til undervisning og læring i matematikk som kommer mer og mer inn i skolen. Tilnærmingen kalles tidlig algebra, og blir en del av den nye læreplanen i 2020 (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 16).

2.3 Algebra i skolen og tidlig algebra

Det eksisterer ikke kun én måte å undervise og nærme seg algebra på, og det er ikke mulig å lage en liste over innhold som beskriver skolealgebra (Kongelf, 2015, s. 86). Algebra er for stort til å passe i læreplanen, og det er derfor helt nødvendig at hvert land velger ut hvilket innhold emnet skal ha (Kongelf, 2015, s. 86). Hva skolealgebraen oppfattes som har variert over tid og i læreplaner. Den har blitt beskrevet som et eget emne, som en del av den moderne matematikken, som et verktøy i problemløsning og som en kompetanse (Kongelf, 2015, s. 86).

I 2020 kommer det en ny læreplan i Norge, og hvert av fagene i skolen får sine egne kjerneelementer. Disse kjerneelementene er det viktigste elevene skal lære i hvert fag, og det elevene må lære for å kunne mestre, og bruke faget (Utdanningsdirektoratet, 2017). Et av de nye kjerneelementene er matematiske kunnskapsområder. Under dette kjerneelementet står det at tall og tallforståelse er det mest sentrale i skolematematikk, og elevene må tidlig få et godt tallbegrep og varierte regnestrategier (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 16). Videre står det at algebra i grunnskolen vil si å arbeide med strukturer, mønster og relasjoner. Elevene skal gjennom hele skoleløpet arbeide med algebraisk tenkemåte – om hvordan algebra er en generalisering av tallregning, hvordan algebra kan brukes til å finne ukjente størrelser, og hvordan algebra kan brukes til å uttrykke sammenhenger mellom størrelser (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 16). Generalisering og abstraksjon gis stor plass i den nye læreplanen, og dermed blir det viktig at elevene behersker algebra for å kunne danne generaliseringer i for eksempel modelleringsoppgaver. TIMSS undersøkelsen fra 2015 (Bergem, 2016, s. 36: Grønmo et al., 2016, s. 37) viser derimot at norske elever både på videregående og ungdomsskolen presterer svakt i algebra. Figur 1 viser hvordan norske ungdomsskoleelever presterer på ulike emneområder innen matematikk som testes i TIMSS undersøkelsen.



Figur 1: Prestasjoner på emneområder i matematikk for Norge og referanselandene, ungdomstrinnet (Bergem, 2016, s. 36).

Sammenlignet med referanselandene presterer norske elever svakest i algebra, men vi ser at norske elever presterer sterkt i tall og statistikk. Man kan da stille spørsmål ved om algebraundervisningen norske elever får i dag er god nok, eller om man må gjøre endringer slik at elevene kan bruke kunnskapen om algebra til å finne løsninger på ulike problemer og danne generaliseringer. Landene som skårer høyest på TIMSS undersøkelsen er land i Øst-Asia, og Singapore ligger på topp (Bergem, 2016, s. 27). Det kan delvis forklares med at elever i Singapore introduseres til formell algebra to år tidligere enn norske elever (Karimzadeh, 2014, s. 66). I tillegg arbeider elever i Singapore med aritmetiske og algebraiske tekstoppgaver fra første og andre trinn ved hjelp av problemløsningsverktøy (Karimzadeh, 2014, s. 25). Det kan se ut til at en lignende tilnærming til algebra skal tas i bruk i Norge når den nye læreplanen trer i kraft.

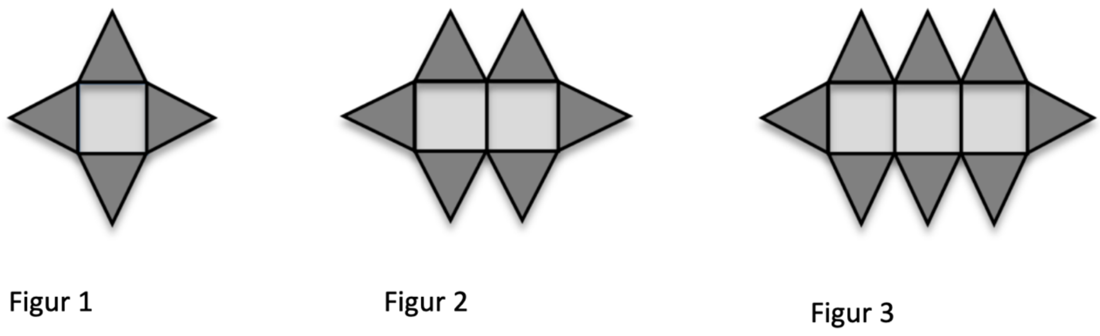
I beskrivelsen av kjerneelementet matematiske kunnskapsområder står det at elevene gjennom hele skoleløpet skal arbeide med algebraisk tenkning. Det betyr at dette også skal arbeides med før elevene introduseres til formell algebra. Dette kalles tidlig algebra, og er en tilnærming for undervisning og læring i matematikk. Blanton & Kaput (2011, s. 6) beskriver fellesnevnere for tidlig algebraisk tenkning som å kunne generalisere matematiske ideer, bruke symbolske representasjoner og representere funksjonelle forhold. Tidlig algebra er ulik den algebraen man normalt møter på ungdomsskolen og videregående skole. Ideen bak tidlig algebra handler ikke om å flytte den formelle algebraen til tidligere trinn (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008, s. 235), men at elevene skal øve på å analysere forhold mellom størrelser, legge merke til strukturer, begrunne og generalisere (Kieran, 2004, s. 149). Tidlig algebra handler også om å se sammenhengen mellom aritmetikk og algebra (Carraher, Schliemann & Brizuela, 2000, s. 14).

Tidligere ble algebra sett på som atskilt fra aritmetikk. Elevene lærte først om aritmetikk, deretter om algebra etter at et solid grunnlag med aritmetikk hadde blitt lagt. I tillegg hadde algebra et dårlig rykte. Mange elever så på introduksjonen til algebra som slutten på resonnering og starten på vilkårlige regler og manipulasjon av x-er og y-er, uten at de hadde forståelse for hva de holdt på med (Carraher, Schliemann & Brizuela, 2000, s. 1). For å hjelpe elevene med å overvinne utfordringene knyttet til algebra, ble det foreslått at algebra skulle bli introdusert som en generalisering av aritmetikk på tidligere trinn (Carraher, Schliemann & Brizuela, 2000, s. 2). Studier (Tellefsen & Haugli, 2019) har vist at unge elever kan finne regler for voksende mønstre fra talltabeller og visuelle strukturer. For å kunne gjøre dette må elevene være i stand til å kunne generalisere og identifisere sammenhenger i mønstrene (Cooper & Warren, 2011, s. 197).

2.4 Figurmønsteroppgaver

For å introdusere elever til algebra har figurmønsteroppgaver blitt anbefalt, på grunn av den dynamiske representasjonen av variabler (Lannin, 2005, s. 233). En mønstertilnærming til algebra lar elevene arbeide med ukjente som variabler, og gir elevene mulighet til å observere, verbalisere og symbolisere generaliseringer (Warren, 2006, s. 377). I tillegg til å bruke en mønstertilnærming for å introdusere variabelbegrepet, kan slike oppgaver brukes for å trene på det symbolske språket i algebra, inkludert ekvivalens av algebraiske uttrykk (English & Warren, 1998, s. 170). Å generalisere numeriske situasjoner blir sett på som en måte å introdusere elevene til formell algebra. Denne type generalisering kan hjelpe elevenes forståelse av symbolske representasjoner, og koble den til elevenes kunnskap om aritmetikk (Lannin, 2005, s. 233). Bäckman & Attorps (2012, s. 3) skriver at et matematisk mønster kan defineres som en forutsigbar regelmessighet som involverer tall. Måten et mønster er organisert på kalles mønsterets struktur (Bäckman & Attorps 2012, s. 3).

Forskningslitteratur skiller ofte mellom ulike typer mønster: repeterende mønstre, voksende mønstre, tallmønstre og geometriske mønstre eller figurmønstre (Bäckman & Attorps, 2012, s.3). Denne oppgaven vil ta for seg voksende figurmønstre, og jeg vil derfor kun gå inn på hva som menes med denne type mønster. Et voksende figurmønster er et mønster som består av sekvenser av figurer som endrer seg fra ett ledd til det neste på en forutsigbar måte (Leavy & Hourigan, 2015, s. 31). Tradisjonelt presenteres figurmønstre som et sett av tre eller fire etterfølgende tilfeller av mønsteret, som elevene skal bruke til å lage en generalisering (Rivera, 2008, s. 17). Det vil si at elevene skal finne en sammenheng mellom det voksende mønsteret og figurens posisjon i mønsteret (Warren, 2005, s. 306). Dette er en vanlig måte å presentere en slik oppgave på. I kapittel 2.4.5 vil jeg vise en annen måte å presentere figurmønstre på. På neste side vises et eksempel på en figurmønsteroppgave hvor tre etterfølgende tilfeller presenteres (Figur 2).



Figur 2: En typisk figurmønsteroppgave med voksende mønster.

I en slik oppgave vil elevene bli bedt om å tegne figur 4, gjerne finne antall trekanter i en figur med figurnummer høyere enn 5 og til slutt gi et generelt uttrykk for antall trekanter i den $n - te$ figuren, hvor n representerer figurnummeret.

I voksende mønstre kan man ofte identifisere en avhengig og en uavhengig variabel. Den uavhengige variabelen identifiserer posisjonen til figuren i mønsteret, mens den avhengige variabelen er de kvantifiserbare egenskapene ved komponentene i figuren gitt figurens posisjon i mønsteret (Johannessen, 2019, s. 9). For eksempel i Figur 2 vil man se at antall trekanter i figuren er gitt ved 2 multiplisert med figurens posisjon pluss to trekanter. Det vil gi generaliseringen $T(n) = 2n + 2$, hvor T(n) er antall trekanter gitt figurens posisjon, n. Dette er et generelt uttrykk for mønstret i figuren og uttrykket beskriver en sammenheng mellom de to variablene i mønsteret, som er målet i en slik oppgave. For å kunne finne et slikt uttrykk må elevene være i stand til å generalisere, og forskning har vist at generaliseringsprosessen kan være utfordrende for elevene (Lannin, 2005).

2.4.1 Generaliseringsprosessen i figurmønstre

Abstraksjon og generalisering er et av de nye kjerneelementene i læreplanen som kommer i 2020, og elevene skal etterhvert kunne formalisere tanker, strategier og matematisk språk (Utdanningsdirektoratet, 2019). For å oppnå dette kan elevene arbeide med figurmønsteroppgaver og finne sammenhenger som de beskriver med ord, og etterhvert symbolspråk. Det vil gi elevene trening i å generalisere matematiske situasjoner. Mason (1996, s. 65) påstår at når oppmerksomheten i klasserommet flyttes mot generalisering, vil algebra opphøre å være et problem for de fleste personer. Generalitet er hjertet av matematikk, og viser seg i mange former (Mason, 1996, s. 65). En måte å vinkle oppmerksomheten mot generalisering er å se det generelle gjennom det spesielle (Mason, 1996, s. 65). Oppgaver som kan løses ved å undersøke spesialtilfeller, organisere resultatet systematisk, og finne et mønster man kan bruke til å få svaret, kalles generaliseringsoppgaver (Stacey, 1989, s. 147).

Radford (1996, s. 108) skriver at generalisering av figurmønstre er en prosedyre hvor målet er å komme fram til et nytt resultat. En generaliseringsprosedyre starter med et sett av observasjoner, og ender med en konklusjon som representerer observasjonene. Målet med disse generaliseringene er å finne et uttrykk som representerer konklusjonen. Uttrykket er en formel og er dannet på grunnlaget av ideen om et generelt tall, og ikke de konkrete tallene som er inkludert i observasjonene. Det er dette Mason (1996) mener når han sier at man må se det generelle i det spesielle. De generelle tallene i figurmønsteroppgaver viser seg som en måte å forberede elevene på variabelkonseptet (Radford, 1996, s. 110).

Både Mason og Radford argumenterer for at ikke all generalisering er algebraisk generalisering. Radford (2013) mener at det ikke er noe algebraisk ved å bruke prøve-og-feile-strategier, mens Mason mener at algebra er et språk for å systematisk handle med den ukjente (Mason, 1996, s. 66). Radford (2013, s. 5) har foreslått en definisjon for algebraisk generalisering av figurmønstre som jeg vil bruke i denne oppgaven: Å generalisere et mønster algebraisk vil si å ha evne til å oppdage likheter i noen elementer i en sekvens S, være oppmerksom på at disse likhetene gjelder *alle* leddene i S og være i stand til å gi et direkte uttrykk for et hvilket som helst ledd i S (Radford, 2006, s. 5).

2.4.2 Strategier elever bruker for å generalisere figurmønstre

For å utvikle elevenes algebraiske tenkning foreslår Blanton & Kaput (2001, s. 344) en tilnærming til algebra som forbedrer elevenes forståelse av grunnleggende matematikk ved å utvikle ferdigheter innen danning av generaliseringer, og uttrykke og begrunne matematiske generaliseringer. For å danne generaliseringer av figurmønstre bruker elever flere ulike strategier. Lannin (2005, s. 234) har beskrevet et rammeverk for hvordan elever generaliserer numeriske mønstre. Strategiene deles inn i eksplisitte og ikke-eksplisitte strategier. At en strategi er eksplisitt vil si at den gir direkte utregning av den avhengige variabelen, gitt den uavhengige variabelen. De ikke-eksplisitte strategiene kan ikke brukes til en slik direkte utregning, men kan gi neste ledd i mønsteret gitt den forrige figuren. Lannins (2005, s. 234) rammeverk for de ulike strategiene presenteres under (Tabell 1).

Tabell 1:Generaliseringsstrategier elever bruker for å generalisere numeriske mønstre.

Strategier	Forklaring
Ikke - eksplisitt	
Telling	Eleven lager en tegning eller en modell som representerer situasjonen. Dette bruker eleven til å telle den ønskede Egenskapen.
Rekursiv	Eleven bruker tidligere figurer i mønsteret til å bestemme det neste leddet i mønsteret.
Eksplisitt	
Hel - objekt	Eleven bruker en del av mønsteret til å danne en større del ved å multiplisere.
Prøve og feile	Eleven gjetter en formel uten å tenke gjennom om den fungerer. Elevene eksperimenterer ofte med operasjoner og tall gitt i oppgaveteksten.
Kontekstuell	Eleven danner en generalisering basert på informasjon gitt i situasjonen, og ser en sammenheng mellom egenskaper i mønsteret og generaliseringen som dannes.

Av de eksplisitte strategiene er det kun den kontekstuelle strategien som beskriver en sammenheng med oppgavens situasjon. Hel-objekt strategien kan gi en sammenheng med situasjonen, men elever bruker ofte denne strategien feil – noe som viser deres mangel på forståelse for proporsjonal resonnering (Lannin, 2005, s. 234). Det vil også kun være den kontekstuelle strategien som oppfyller Radfords (2006, s. 5) krav til en algebraisk generalisering av figurmønsteret. Formler og generaliseringer dannet på bakgrunn av en prøve-og-feile-strategi vil være hypoteser, og dermed en type induksjon (Radford, 2006, s. 5). For å skille denne type induksjon fra mer sofistikerte typer induksjon, kaller Radford (2006, s. 5) det for naiv induksjon. Den rekursive strategien vil heller ikke være en algebraisk strategi ifølge definisjonen. Årsaken til det er at elevene vil ha generalisert en lokal likhet i noen figurer, uten å være i stand til å bruke denne informasjonen til å gi et uttrykk for hvilken som helst figur. Radford (2006, s.9) kaller denne type generalisering for aritmetisk. På bakgrunn av dette vil det kun være den kontekstuelle strategien som utvikler elevenes algebraiske tenkning. Dermed er det viktig at lærere er årvåken, og ikke blander algebraiske generaliseringer med andre typer generalisering, som aritmetisk generalisering og naiv induksjon (Radford, 2006, s. 4). Læreren må også være oppmerksom på hvordan elevene engasjerer seg i oppgavene, og legge merke til hvordan elevene begrunner generaliseringene sine. Det kan gi innsikt i hvordan eleven har tenkt under generaliseringsprosessen, og hva eleven mener er en akseptabel begrunnelse (Lannin, 2005, s 235).

2.4.3 Elevers begrunnelse for generaliseringer

Resonnering og argumentasjon er et av kjerneelementene i den nye læreplanen som kommer i 2020 (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15). Dette innebærer at elevene må lære å formulere sine egne begrunnelser for å løse problemer og argumentere for fremgangsmetodene sine. De må også forstå at matematiske resultater og begrunnelser ikke er tilfeldige (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15). I tillegg skal elevene være i stand til å vurdere gyldigheten til begrunnelser og fremgangsmåter (Utdanningsdirektoratet, 2018).

En av de mest signifikante karakteristikkene til generalisering er dens logiske natur, som gjør at man kan trekke en konklusjon og danne en formel (Radford, 1996, s.9). Den underliggende logikken til en generalisering kan være varierende, avhengig av elevens matematiske tenkning. Noen elever mener at et par eksempler er nok for å begrunne en generalisering, mens andre elever mener at å gjette resultatet fra de første leddene er nok (Radford, 1996, s. 109). Dette hevder Lannin (2005, s. 235) skyldes at elevene er vante med et tradisjonelt fokus på å finne spesielle eksempler, istedenfor å fokusere på det generelle. I følge Radford (1996, s. 109) er generalisering et didaktisk verktøy som ikke kan unngå problemet med validitet, og validitet i seg selv er en svært kompleks idé. Dette betyr ikke at man skal unngå å bruke generalisering som en introduksjon til algebra, men at lærere må være forberedt på å jobbe med det logiske elementet av generaliseringsprosessen i klasserommet.

Når man begrunner en algebraisk modell, er et argument ansett som gyldig dersom det kobler generaliseringen til et generelt forhold som eksisterer i oppgavesituasjonen (Lannin, 2005, s. 235). Lannin (2005, s. 236) hevder at generalisering ikke kan separeres fra begrunnelse, og har utarbeidet et rammeverk med fem nivåer som beskriver hvordan elever begrunner generaliseringene sine. Disse nivåene er beskrevet under (Tabell 2).

Tabell 2: Rammeverk for beskrivelse av elevers begrunnelse av generaliseringer.

Begrunnelsenivå	Forklaring
Nivå 0: Ingen begrunnelse	Ingen begrunnelse i svaret
Nivå 1: Henvisning til en autoritet	Eleven begrunner det generelle utsagnet på bakgrunn av det en annen person har sagt, for eksempel læreren.
Nivå 2: Empirisk begrunnelse	En generalisering er riktig fordi den stemmer for spesielle eksempler.
Nivå 3: Generisk begrunnelse	Deduktiv begrunnelse er uttrykk for et spesielt tilfelle som inneholder det generiske eller generelle.
Nivå 4: Deduktiv begrunnelse	Begrunnelse er gitt gjennom et deduktivt argument som er uavhengig av spesielle tilfeller.

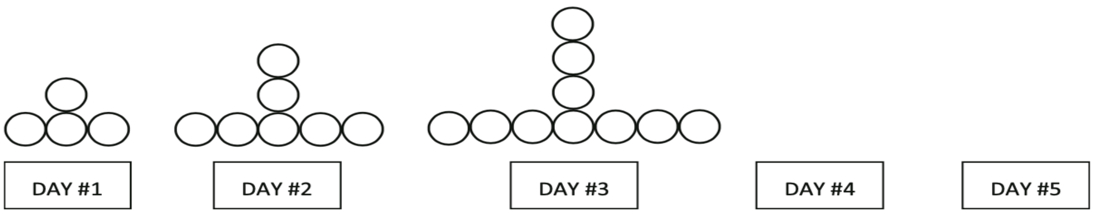
Med utgangspunkt i mønsteret i Figur 2 vil en elev på nivå 1 si at figur 4 har ti trekanter fordi eleven hørte læreren si det. På nivå 2 kan eleven for eksempel si at antall trekanter er gitt ved $T = 2n + 2$, fordi dette stemmer for figur 3. Et eksempel på nivå 3 er at eleven sier at i figur 4 har du fire kvadrat med en trekant over og under hvert kvadrat, i tillegg til en trekant på hver av endene. Nivå 4 er uavhengig av spesielle eksempler, og et eksempel på Nivå 4 kunne vært «Figur n består av en rekke med n kvadrat. Kvadratene vil da ha to ledige sider hvor det plasseres trekanter. I tillegg vil de to kvadratene på endene ha en trekant på siden som ikke står inntil et annet kvadrat. Derfor er antall trekanter gitt ved T $= 2n + 2$».

Målet med å la elevene begrunne generaliseringene sine er å få de til å bruke den type begrunnelse som er beskrevet i nivå 3 og 4, og oppmuntre dem til å se generelle forhold som eksisterer i oppgaven som blir gitt (Lannin, 2005, s. 237). Dette er noe elevene finner utfordrende og som kan skyldes flere faktorer, som vi nå skal se på.

2.4.4 Elevers utfordringer i arbeid med generalisering av figurmønstre

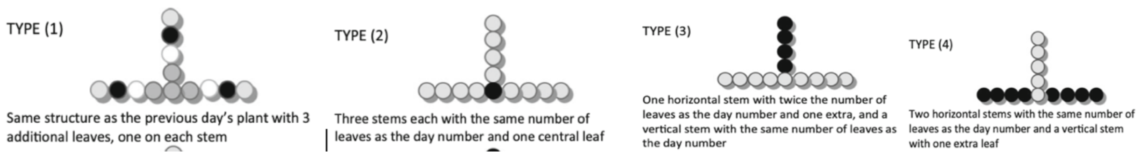
Forskning (Lannin, 2005: Stacey, 1989: Lee, 1996) har vist at elever har utfordringer med å finne forholdet mellom det voksende mønsteret og figurens posisjon i mønsteret. Disse utfordringene kan ha flere forklaringer, blant annet mangelen på passende språk for å beskrive forholdet, tilbøyelighet til å bruke additiv eller multiplikativ strategi for å beskrive generaliseringer, og manglende evne til å visualisere mønstre (Warren, 2005, s. 306). Lee (1996, s. 105) har identifisert tre utfordringer elever har med generalisering av figurmønstre. Disser utfordringene er knyttet til oppfattelsesnivået, verbaliseringsnivået og symboliseringsnivået (Lee, 1996, s. 105). De ulike nivåene har hver sine kjennetegn, men det er også en sammenheng mellom dem. Disse tre utfordringene vil jeg også bruke i kapittel 4, hvor jeg analyserer hvilke utfordringer elevene som deltar i prosjektet støter på i arbeidet med figurmønsteroppgavene.

Utfordringer med oppfattelsesnivået er knyttet til hvordan elevene visualiserer og oppfatter et mønster (Lee, 1996, s. 105). I figurmønsteroppgaver er det vanligvis ikke et problem for elevene å se et mønster i figuren, men å se et algebraisk nyttig mønster (Lee, 1996, s. 95). Det vil si at elevene har utfordringer med å bruke det de har oppfattet når de skal generalisere mønsteret. Wilkie & Clarke (2014) har gjennomført en studie hvor de undersøkte hvordan elever visualiserer figurmønstre. I undersøkelsen ble elevene bedt om å fargelegge mønsteret i oppgaven (Figur 3) slik de oppfattet det. Figur 3 skal forestille en voksende plante som har fire blader på dag én, og elevene skal tilslutt finne en formel for antall blader på dag n.



Figur 3: Figurmønsteroppgave fra Wilkie & Clarke (2014) sin undersøkelse.

Resultatet av undersøkelsen viser at elevene visualiserer mønstrene på ulike måter. Visualiseringene kunne klassifiseres i fire ulike typer, som vist i Figur 4.



Figur 4: Elevers visualisering av figurmønsteret (Wilkie & Clarke, 2014, s. 233).

Av Figur 4 ser vi at Type 1 gir en rekursiv visualisering, og det var denne visualiseringen som ble mest brukt av elevene i undersøkelsen (Wilkie & Clarke, 2014, s. 234). Flesteparten av elevene som brukte Type 1 i visualiseringsoppgaven, brukte også en rekursiv strategi for å løse generaliseringsoppgaven (Wilkie & Clarke, 2014, s. 234). Selv om Type 2, 3 og 4 kan gi et eksplisitt uttrykk for forholdet mellom antall blader og antall dager var det flere elever som likevel brukte en rekursiv strategi for å finne forholdet mellom variablene (Wilkie & Clarke, 2014, s. 235). Her ser vi at selv om elevene har funnet et algebraisk nyttig mønster, kan det være utfordrende for dem å lage en eksplisitt generalisering. Det vil derfor være viktig at elevene får undervisning spesifikt i visualiseringsstrategier og erfaring med å visualisere strukturen til ulike voksende mønstre, og se sammenhenger mellom variablene (Wilkie & Clarke, 2014, s. 234). Lee (1996, s. 95) påpeker også at det er vanskelig for elever å endre oppfatningen av et mønster dersom de først har oppfattet det på en bestemt måte. For eksempel ser vi at det kan være vanskelig å finne en eksplisitt formel for dag n dersom eleven har oppfattet mønsteret (Figur 3) slik som i Type 1 (Figur 4), og ikke endrer oppfatningen av visualiseringen sin. Derfor er det også viktig at elevene har en fleksibel tankegang, som vil si at elevene må være i stand til å visualisere mønstrene på ulike måter, og forkaste visualiseringene som ikke bærer fram (Lee, 1995, s. 95). Elevene trenger tid til å diskutere hvorfor noen mønstre og forhold er mer hensiktsmessig enn andre, og på den måten øves til å velge vekk mønstre som ikke er hensiktsmessige (Stacey & MacGregor, 1995, s. 82).

Utfordringer med verbaliseringsnivået handler om hvorvidt elevene klarer å uttrykke mønsteret presist (Lee, 1996, s. 105). Flere elever har utfordringer med å utrykke forholdet mellom variablene i et mønster på en presis måte (Warren, 2005, s. 311). For eksempel klarer flere elever å regne ut det neste steget i et mønster, og kanskje også det n-te steget, men de klarer ikke å forklare hva de gjør (Stacey & Macgregor, 1995, s. 82). Dette kan skyldes at elevene ikke har forståelse for de nødvendige faguttrykkene som må benyttes for å forklare mønsteret (Warren, 2005, s. 11). I arbeid med figurmønsteroppgaver kan dette være ord som rad, kolonne, formel, variabel, og voksende mønster. Det er derfor viktig at læreren har fokus på disse begrepene i undervisning, og oppfordrer elevene til å bruke disse begrepene i diskusjoner og eget arbeid (Johannessen, 2019, s. 16).

Elevene trenger også mer erfaring med å gjenkjenne og beskrive aritmetiske prosesser og forhold mellom variabler, slik at de kan uttrykke formelen sin presist (Stacey & MacGregor, 1995, s. 82). Det er essensielt at elevene kan omgjøre sin uformelle kunnskap om aritmetikk til formell aritmetikk, for eksempel vite at dobling er å multiplisere med 2, eller at «tre tall mangler» mellom to tall formelt uttrykkes ved en differanse på 4 (Stacey & MacGregor, 1995, s. 82). En nødvendig forutsetning for at elevene skal bruke algebraisk notasjon når de uttrykker mønsteret, er derfor at de får bruke naturlig språk til å utrykke generaliteten først (Warren, 2006, s. 378). Stacey & MacGregor (1995, s.82) har funnet at korrekte verbale beskrivelser ofte fører til korrekte algebraiske formler, og at elever som finner et riktig forhold mellom de to variablene i et mønster ofte klarer å formulere dette forholdet verbalt.

Utfordringer med symboliseringsnivået handler om utfordringer som kan oppstå når elevene skal bruke symboler til å uttrykke formelen, altså bruke n til å uttrykke det n-te steget i mønsteret (Lee, 1996, s. 105). Dette er noe som kan være svært utfordrende for elever, fordi de må ta utgangspunkt i den muntlige beskrivelsen av mønsterets struktur og prøve å transformere innholdet i det muntlige språket til symbolspråket (Johannessen, 2019, s. 17). Studier har vist at elever ofte baserer sin tolkning av bokstaver og algebraiske uttrykk på intuisjon og gjetting, på andre symbolspråk de kan, og misoppfatninger som har oppstått gjennom bruk av misledende lærebøker (Stacey & MacGregor, 1997, s. 15). Disse feilaktige tolkningene leder til vansker med å forstå algebra, og kan vare over mange år dersom de ikke gjenkjennes og rettes opp i (Stacey & MacGregor, 1997, s. 15).

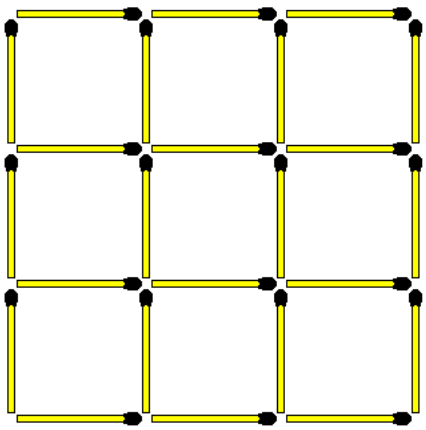
Tradisjonelt har elevens første møte med variabler vært i forbindelse med løsning av likninger, hvor variabelen representerer et ukjent tall (English & Warren, 1998, s. 166). Dette står i kontrast til situasjoner med voksende mønstre, hvor variabelen vil representere en størrelse som endrer seg (Ely & Adams, 2010, s. 21). Overgangen fra å tenke på en variabel som et ukjent tall til en størrelse som endrer seg, kan være krevende for elevene. Det kan være utfordrende for elevene å forstå at en variabel er en størrelse som kan variere, og at det er en annen størrelse som varierer sammen med den (Ely & Adams, 2010, s. 21). For eksempel i Figur 3, der antall dager varierer sammen med antall blader på planten. Elevene synes det er enklere å verbalisere en generalisering, enn det er å uttrykke den symbolsk. Dette kan skyldes at en generalisering kan uttrykkes på mange ulike måter, både symbolsk og verbalt (English & Warren, 1998, s. 169). Det anbefales derfor å la elevene få erfaring med å beskrive numeriske forhold på ulike måter og relatere disse måtene til de korrekte symbolske notasjonene, før elevene begynner å arbeide med figurmønstre (English & Warren,1998, s. 169).

2.4.5 Oppgavens formulering kan påvirke elevenes tenkemåte

Tidligere i oppgaven har jeg presentert hvordan tradisjonelle eksempler på figurmønsteroppgaver ser ut (Figur 2 & Figur 3). I disse oppgavene presenteres etterfølgende ledd i mønsteret, og eleven skal generalisere mønsteret ved å lage en formel med den avhengige og den uavhengige variabelen (Rivera, 2008, s. 17). I dette delkapittelet vil jeg introdusere en annen måte å presentere figurmønstre på, hvor mønsteret ikke vises som etterfølgende ledd. Istedenfor fokuseres det på et individuelt element av mønsteret som behandles som en prototype for resten av mønsteret (Küchemann, 2010, s. 233). Det vil si å fokusere på et generisk eksempel av mønsteret (Küchemann, 2010, s. 233).

Målet i figurmønsteroppgaver er å identifisere strukturen til mønsteret gjennom den konteksten det oppstår i (Küchemann, 2010, s. 234). Den klassiske figurmønsteroppgaven løses ofte ved å sette de første verdiene i en tabell (Küchemann, 2010, s. 233). Dette distanserer elevene fra strukturen i mønsteret, og fører til at elevene ser etter en empirisk regel for tallene de har funnet, istedenfor en strukturell generalisering. Regelen som blir funnet er ofte en rekursiv generalisering, istedenfor en funksjonell generalisering (Küchemann, 2010, s. 234). Det vil si at regelen baserer seg på det forrige leddet for å gi neste ledd, istedenfor å beskrive forholdet mellom den avhengige og uavhengige variabelen (Wilkie & Clarke, 2014, s. 225). Swafford & Langrall (2000, s. 105) har funnet at rekursive strategier, som å bruke en tabell, ofte hindrer elevenes evne til å gjenkjenne og beskrive forholdet mellom den avhengige og uavhengige variabelen.

Rivera & Becker (2008, s. 71) hevder at elever bruker rekursjon som et inngangsstseg, og noen ganger endelig steg, i generaliseringsprosessen. De begrunner dette med at det er enklere å først oppfatte den avhengige variabelen som økes med en lik differanse i voksende mønstre. Dette leder til en rekursiv formel, som noen elever utvikler videre til en funksjonell generalisering (Becker & Rivera, 2008, s. 71). På en annen side, hevder Küchemann (2010, s. 239) at det er tvilsomt at rekursjon er et steg i generaliseringsprosessen, og at dette er noe som skyldes hvordan figurmønsteret presenteres. En oppgave som kan presenteres generisk er oppgaven i Figur 5. Denne oppgaven inviterer til å lete etter strukturene i mønsteret, istedenfor å fokusere på differansen mellom den avhengige variabelen i hvert ledd av mønsteret. I slike oppgaver blir ikke eleven bedt om å finne den neste figuren, men en figur som har høyere figurnummer. Figur 5 viser ett tilfelle av mønsteret, et 3x3 kvadrat laget av fyrstikker. Elevene må så finne ut hvor mange fyrstikker som trengs for å lage en 20x20 kvadrat, og et nxn kvadrat (Küchemann, 2010, s. 242).



Figur 5: Et generisk eksempel på et mønster.

En utfordring med de generiske eksemplene er at det er vanskelig å karakterisere hvilke egenskaper en figurmønsteroppgave som kan presenteres generisk har (Küchemann, 2010, s. 243). Det er nyttig om den uavhengige variabelen er en direkte synlig egenskap i det individuelle elementet som presenteres, istedenfor at den må bestemmes av posisjonen til elementet i mønsteret. Det er også nyttig om variablene er distinkte, slik som i Figur 5 hvor man har kvadrater og fyrstikker (Küchemann, 2010, s. 243). Küchemann (2010, s. 243) påpeker at er dette ønskelige egenskaper, men de er hverken nødvendige eller tilstrekkelige.

Generiske eksempler er ikke ment til å erstatte bruk av en rekursiv tilnærming. Noen ganger kan en rekursiv tilnærming være den eneste som fungerer. Men elevene må være i stand til å identifisere upassende strategier som en ledd-til-ledd-tilnærming kan gi, og se hvordan ledd-til-ledd og posisjon-til-ledd tilnærminger kan komplementere hverandre (Küchemann, 2010, s. 242). En generisk tilnærming kan fokusere elevenes oppmerksomhet direkte på mønsterets struktur, som de ofte distanseres fra ved bruk av klassiske figurmønsteroppgaver. Det er ønskelig at elevene «ser på oppgaven», istedenfor å gå i gang med å generere data og lage en tabell som ofte leder til en rekursiv formel (Küchemann, 2010, s. 242).

3 Metode

I dette kapittelet vil jeg gjøre rede hvor for hvilken metode jeg har valgt å bruke i prosjektet. Jeg vil først ta utgangspunkt i forskningsspørsmålet mitt, og argumentere for hvorfor metoden jeg har valgt er hensiktsmessig for å svare på spørsmålene. Deretter vil jeg gå inn på hva som kjennetegner kvantitativ og kvalitativ forskning, samt hvordan intervju og elevbesvarelser blir brukt. Videre vil jeg gjøre rede for hvem forskningsobjektene i dette prosjektet er, og hvorfor disse elevene ble valgt. Hvordan datainnhenting og analysen ble gjennomført vil så bli beskrevet, før jeg diskuterer forskningsetikk og metodiske utfordringer. Til slutt kommer en presentasjon av oppgavene elevene har arbeidet med i dette prosjektet.

3.1 Metodisk tilnærming

Formålet med denne masteroppgaven er å undersøke hvilke forskjeller det er mellom to klassetrinn i valg av strategi og begrunnelsesnivå når elevene arbeider med figurmønsteroppgaver. For å belyse dette har jeg formulert følgende forskningsspørsmål:

Hvilke forskjeller finner vi når vi sammenligner 10.klassingers og 2P-elevers valg av strategier og begrunnelsesnivå i figurmønsteroppgaver, og hvilke utfordringer møter elevene i disse oppgavene?

Formålet med prosjektet bestemmer hvilken metode som brukes i forskningen (Cohen, Manion & Morrison, 2011, s. 23). Jeg valgte å bruke en metode som gjorde at jeg kunne svare på forskningsspørsmålene, men samtidig holde meg innenfor rammene denne masteroppgaven tillater. For å besvare forskningsspørsmålet valgte jeg å gjennomføre en test i to 2P-klasser og to 10. klasser. Testen besto av tre figurmønsteroppgaver hvor elevene skulle generalisere mønstre og begrunne svarene sine. Etter gjennomføring av testen ble besvarelsene gjennomgått, og tre elever på hvert trinn ble plukket ut til intervju på bakgrunn av hvordan elevene hadde besvart oppgavene. Formålet med intervjuene var å få et større innblikk i hvordan elevene hadde løst oppgavene.

Metoden jeg har valgt er en kombinasjon av kvalitativ og kvantitativ forskningsmetode. Det gjør at jeg kan kombinere data fra elevbesvarelsene med intervju, og jeg kan transformere skriftlige besvarelser til kvantitative data. Jeg har tre ulike data i dette prosjektet. Det er opptelling på hvor mange elever som har svart Riktig/Feil/Ikke besvart og opptelling på hvilke strategi og begrunnelsesnivå elevene har valgt. Dette er de kvantitative dataene. De kvantitative dataene er et resultat av mine tolkninger, hvor jeg har tolket elevenes besvarelser ut i fra rammeverkene som er presentert i kapittel 2.4.2 og 2.4.3. De kvantitative dataene har derfor visse kvalitative aspekter. Den tredje datatypen er intervju og elevbesvarelser, og er kvalitative data. Hovedfokuset i analysen vil ligge på hvilke strategier og begrunnelsesnivåer elevene brukte, og intervjuene vil fungere som støtte for funnene i besvarelsene, for eksempel støtte oppunder tolkninger om hvilke utfordringer elevene møter med disse oppgavene. Ved hjelp av elevbesvarelser vil jeg vise hvordan kategoriseringen har foregått. Funnene og analysen er i hovedsak basert på elevbesvarelsene. For å kunne sammenligne de to trinnene egner kvantitative data seg bedre enn kvalitative data. De kvantitative dataene gir en oversikt over de to trinnene som gjør at det er enkelt å se forskjeller og likheter mellom de to trinnene i valg av strategi og begrunnelsesnivå, og kvantitative data har derfor fått en større rolle i dette prosjektet enn de kvalitative dataene.

3.2 Kvalitativ og kvantitativ metode

I forskning kan man skille mellom kvalitativ og kvantitativ forskningsmetode. En kvantitativ forskningsmetode gir data i form av målbare enheter, og gjør det mulig å foreta ulike regneoperasjoner (Dalland, 2017, s. 52). En slik metode går i bredden, og innhenter et lite antall opplysninger om mange undersøkelsesenheter. Kvantitative forskningsmetoder får fram det som er felles. Ofte brukes spørreskjema med faste svaralternativer, samt systematiske og strukturerte observasjoner og datainnhentingen skjer uten kontakt med forskningsfeltet. Fremstillingen tar sikte på å formidle forklaringer, og forskeren ser fenomenet utenifra (Dalland, 2017, s. 53).

Kvalitative metoder skiller seg fra kvantitative i den forstand at metodene tar sikte på å fange opp mening og opplevelse som ikke lar seg måle (Dalland, 2017, s. 52). Denne forskningsmetoden går i dybden, og henter inn mange opplysninger om få undersøkelsesenheter. Ofte brukes intervju som er preget av fleksibilitet og ustrukturerte observasjoner (Dalland, 2017, s. 53). Datainnsamlingen skjer i kontakt med feltet, og framstillingen av data tar sikte på å formidle forståelse. I kvalitative metoder ser forskeren fenomenet innenfra, og erkjenner påvirkning og delaktighet (Dalland, 2017, s. 53).

En kombinasjon av de to nevnte metodene kalles «mixed methods research». En slik metode viser at verden ikke er enten kvantitativ eller kvalitativ, men en kombinasjon av de to metodene. Til tross for dette finner man ofte at forskning som kombinerer metoder ofte har en overvekt av enten kvalitative eller kvantitative data (Cohen et al., 2011, s. 22). Ved å bruke mixed methods research kan man besvare forskningsspørsmål som er vanlig for både kvantitativ og kvalitativ metode. Dette er spesielt nyttig dersom forskerens intensjon er å virkelig forstå de ulike forklaringene til utfallene (Cohen et al, 2011, s. 25). Mixed methods research tillater å kombinere numeriske og kvalitative data til å besvare forskningsspørsmålene (Cohen et al., 2011, s. 24). En strategi som kan brukes for å kombinere data er datatransformasjon. Dette vil si at kvalitative data transformeres til tall, for eksempel ved å gi frekvensen av visse svar, koder, data eller temaer for å finne regelmessighet eller særegenheter (Cohen et al., 2011, s. 25). Mixed methods research er en metode som får fram nyanser mellom kvalitative og kvantitative metoder (Cohen et al., 2011, s. 26).

I min masteroppgave har jeg kombinert kvalitative og kvantitative data. Elevenes svar har blitt transformert til tall ved å kategorisere hvilken strategi elevene har brukt og hvilket begrunnelsesnivå elevene ligger på. Fremgangsmetoden som ble brukt for å kategorisere besvarelsene presenteres i kapittel 3.6. Funnene presenteres i tabeller i Kapittel 4, sammen med kvalitative data i form av eksempler på elevbesvarelser og utdrag fra intervju.

3.3 Intervju som metode

Intervju er et fleksibelt verktøy for datainnhenting, og kan brukes til å innhente data om både enkle og komplekse fenomener (Cohen et al., 2011, s. 409). Det finnes ulike former for intervju, og forberedelsen er avgjørende for intervjuets resultat. Før det første intervjuet gjennomføres er det viktig å ha tenkt gjennom sentrale spørsmål som hva intervjuet skal undersøke, hvorfor intervjuet gjennomføres og hvordan intervjuet skal foregå (Kvale, 1997, s. 131). Et intervju kan gjennomføres på ulike måter, og en intervjuguide bestemmer emnene og rekkefølgen i intervjuet. Intervjuene som er gjennomført i dette prosjektet har fulgt en halvstrukturert intervjuguide. Det vil si at guiden inneholdt emnene som skulle diskuteres (Kvale, 1997, s. 133). I mitt prosjekt handlet intervjuene om elevenes besvarelser. Jeg tok med elevbesvarelsene til intervju, og hadde på forhånd laget forslag til spørsmål jeg skulle stille.

Intervjueren selv kan også påvirke intervjuets kvalitet og det kreves trening for å bli en god intervjuer. Intervjueren må hele tiden gjøre raske vurderinger om hvilke spørsmål som skal stilles og hvilke svar som skal tolkes (Kvale, 1997, s.151). Kvaliteten av det opprinnelige intervjuet er avgjørende for kvaliteten av den etterfølgende analysen (Kvale, 1997, s. 148). Kvale (1997, s. 149) har beskrevet seks kvalitetskriterier for intervju. Disse følger under.

1. Omfanget av spontane, rikholdige, spesifikke og relevante svar fra intervjupersonen.
2. Jo kortere intervjuerens spørsmål og jo lengre intervjupersonens svar er, desto bedre.
3. I hvilken grad intervjueren forfølger og avklarer meningen med relevante aspekter av svarene.
4. Det ideelle intervju tolkes i vid utstrekning under intervjuet.
5. Intervjueren forsøker å verifisere sine tolkninger av intervjupersonens svar i løpet av intervjuet.
6. Intervjuet er «selvkommuniserende» - det er en historie som er inneholdt i seg selv, og ikke krever mange ytterligere kommentarer og forklaringer.

I denne masteroppgaven brukes intervjuene til å støtte oppunder tolkninger som gjøres ut ifra elevenes besvarelser. Utdrag fra intervju vil derfor presenteres sammen med tabellene i kapittel 4, der jeg har funnet det naturlig å bruke intervjuene som støtte. Grunnet lite trening i intervjuteknikk, ble det utfordrende å overholde Kvale (1997, s. 149) sine kvalitetskriterier. Dette førte til at intervjuene er blitt brukt i mindre grad enn det som opprinnelig var tenkt. Dette skriver jeg mer om i kapittel 3.9.

3.4 Elevbesvarelser som datagrunnlag

I dette prosjektet fungerer elevenes besvarelser som det viktigste datagrunnlaget. Det er disse besvarelsene som er blitt brukt for å undersøke hvilke strategier elevene bruker på de ulike oppgavene og hvilke begrunnelsesnivå elevene ligger på. Noen av besvarelsene var utførlige med både begrunnelse og et generelt uttrykk, mens andre besvarelser besto kun av en fortsettelse av mønsteret eller tall som ga svaret på oppgaven. For å få et helhetlig bilde av hvordan elevene presterte på oppgavene valgte jeg å inkludere alle besvarelsene fra 2P og gjøre et utvalg av besvarelsene fra 10.trinn som var representativt for hele trinnet. På den måten ble ikke data valgt ut selektivt og både negative og positive aspekter ved elevenes besvarelser er kommet med i prosjektet. I kapittel 3.7 beskrives det hvordan utvalget fra 10.trinn ble plukket ut.

På grunn av besvarelsenes varierende kvalitet var det viktig å ha teoretisk forankrede rammeverk til å analysere besvarelsene. Lannins (2005) rammeverk gjorde at jeg kunne lete etter kjennetegn på de ulike strategiene og begrunnelsesnivåene i elevenes besvarelser. Dette gjorde det mulig å kategorisere besvarelser hvor eleven kun hadde skrevet et generelt uttrykk og ikke begrunnet svaret sitt. I noen tilfeller kom rammeverkene til kort, og det var ikke mulig å vite hvilken strategi elevene hadde brukt. I slike tilfeller ble elevens strategi kategorisert som usynlig. Dette beskrives nøye i kapittel 4. For å vise hvordan jeg har tolket og analysert elevbesvarelsene vil det også komme bilder og forklaring til analysen i kapittel 4. Å inkludere både positive og negative aspekter ved prosjektet og vise åpenhet rundt funnene er to faktorer som øker troverdigheten til forskningen (Cohen, et al., 2011, s. 199), som jeg skriver mer om i kapittel 3.9.

3.5 Utvalg

I en tidlig planleggingsfase av forskningsprosjektet må forskere gjøre en vurdering av hvilket utvalg av personer som skal være med i prosjektet (Cohen et al., 2011, s. 143). Faktorer som kostnad, tid og tilgjengelighet hindrer ofte forskere fra å få informasjon fra hele populasjonen. Derfor er det ofte nødvendig å innhente data fra en mindre gruppe av den totale populasjonen. Den mindre gruppen kalles utvalg (Cohen et al., 2011, s. 143).

Jeg ønsket å sammenligne to trinn for å finne ut om det var forskjeller i hvordan elevene på de to trinnene generaliserer og begrunner figurmønsteroppgaver. På grunn av begrenset tid til å gjennomføre datainnhenting ønsket jeg å velge elever som er kjente med algebra. Grunnen til dette er at tidsbruken da kunne fokuseres på selve figurmønsteroppgavene, og ikke på introduksjon av ulike begreper innen algebra. Jeg hadde ikke egne klasser å gjennomføre datainnhenting i, og det ble nødvendig å kontakte skoler for å høre om de ønsket å være med på prosjektet. Med dette i bakhodet, og for å sikre meg mot at jeg ikke opptok viktig tid av elevenes undervisning, valgte jeg å gjennomføre prosjektet på to trinn hvor figurmønsteroppgaver kunne oppfylle kompetansemål i læreplanen. Valget falt da på elever i matematikk 2P på videregående, og elever på 10.trinn.

Figurmønsteroppgaver dekker følgende kompetansemål på 10.trinn:

- «bruke tal og variablar i utforsking, eksperimentering og praktisk og teoretisk problemløysing og i prosjekt med teknologi og design» (Utdanningsdirektoratet, 2013).

I 2P vil figurmønsteroppgaver dekke følgende kompetansemål:

- «utforske matematiske modellar, samanlikne ulike modellar som beskriv same praktiske situasjon, og vurdere kva for informasjon modellane kan gje, og kva for gyldigheitsområde og avgrensingar dei har» (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Det hadde vært interessant å sammenligne enda tidligere trinn enn det jeg har valgt. For eksempel sammenligne elever på ungdomsskolen og på mellomtrinnet. Det er to grunner til at jeg har valgt å ikke gjennomføre prosjektet på mellomtrinnet. Den ene er at disse elevene ikke har blitt introdusert for algebra, og det er mulig at jeg derfor måtte brukt lengre tid på å introdusere disse elevene for begreper som brukes i generaliseringsoppgaver. Den andre grunnen er at jeg gjennom min utdannelse ikke har erfaring med å lage undervisningsopplegg og undervise elever på lavere trinn enn ungdomsskole, og ville ikke gjøre dette for første gang i et masterprosjekt.

Det kan stilles spørsmål ved om en sammenligning mellom disse to trinnene er rettferdig. Mange elever som velger 2P presterer lavt i matematikk, og det er ikke faget elevene føler høyest mestring i. På 10.trinn finner man elever som presterer både høyt og lavt i matematikk, og noen av disse elevene vil velge mer avansert matematikk på videregående. Et lignende problem kunne imidlertid oppstått dersom jeg hadde valgt å gjennomføre datainnhentingen i en matematikk-R1 klasse, hvor flesteparten av elevene presterer høyt i matematikk. På en annen side dekkes ikke figurmønsteroppgaver av et kompetansemål i læreplanen for matematikk R1 (Utdanningsdirektoratet, 2013), og det er ikke sikkert funnene av en sammenligning mellom R1-elever og 10.klassinger ville gitt et mye annerledes resultat. I tillegg viser også TIMSS undersøkelsen fra 2015 (Grønmo, 2016, s. 37) at elever med valgfag i matematikk på videregående også presterer lavt i algebra. Jeg besluttet derfor å gjennomføre datainnhentingen i 2P og på 10.trinn.

3.6 Gjennomføring av datainnhenting

For å finne deltakere til prosjektet mitt tok jeg kontakt med en videregående skole og en ungdomsskole jeg tidligere har vært i praksis hos. Rektor og lærerne på de aktuelle trinnene ble informert om studien, og takket ja til å være med. I hver klasse ble det holdt to timer hvor elevene arbeidet med figurmønsteroppgaver. Jeg valgte å fungere som lærer i begge timene, for å sikre at elevene fikk den samme informasjonen og at introduksjonstimene ble tilnærmet like for alle elevene. Dette kan ha påvirket elevene i hvordan de besvarte oppgavene og hvordan de oppførte seg i klasserommet. En ny lærer kan være uvant for elevene, og kan gjøre noen elever mer engasjerte, mens andre elever tør mindre i klasserommet.

I starten av den første timen introduserte jeg meg selv, og fortalte at jeg skulle gjennomføre datainnhenting til masteroppgaven og hvordan dette skulle foregå. I introduksjonstimen gikk jeg gjennom et eksempel på tavlen, hvor jeg viste hvordan en figurmønsteroppgave kunne løses. Det ble også formidlet hvorfor generalisering er viktig innenfor matematikk og algebra, samt hva som er formålet med figurmønsteroppgaver. Elevene fikk så utdelt øvingsarket (Vedlegg 2) med figurmønstre. Øvingsarket besto av fire oppgaver. En av de fire oppgavene hadde en generisk framstilling av mønsteret, i likhet med testoppgavene. Elevene jobbet sammen i par med disse oppgavene slik at de kunne diskutere mønstrene sammen, og fikk mulighet til å hjelpe hverandre. I denne timen fikk elevene hjelp av meg og læreren til å besvare eventuelle spørsmål som dukket opp underveis. Elevene arbeidet med disse oppgavene i omtrent 45 minutter før neste time startet. Svarene på disse oppgavene ble ikke samlet inn.

I timen hvor selve testen skulle gjennomføres fikk elevene grundigere informasjon om hensikten med studien, og etiske vurderinger som må foretas når man skal gjennomføre et forskningsprosjekt. Deretter signerte elevene et samtykkeskjema (Vedlegg 1) hvor elevene krysset av om de ønsket å være med på studien og om elevene ønsket å være med på intervju. Da elevene hadde signert, og samtykkeskjemaene var samlet inn, ble testoppgavene utdelt. Testoppgavene besto av tre figurmønsteroppgaver, og blir gjennomgått i kapittel 3.10. Elevene jobbet sammen i par med oppgavene. Dette ble gjort for å unngå at elevene opplevde timen som en prøvesituasjon, og for å sikre nok data. Elevene fikk utdelt hvert sitt ark hvor de skulle besvare oppgavene, og det ble tydeliggjort at elevene måtte formulere sine egne svar og ikke skrive av sidemannen. Elevene fikk ikke hjelp til å løse oppgavene i denne timen. Jeg observerte elevene i denne timen, og hørte på hvordan de snakket med eleven ved siden av.

Det tok elevene på begge trinn 40 til 50 minutter å svare på oppgavene. Ved slutten av timen ble elevenes besvarelser samlet inn.

Etter begge timene var gjennomført, ble besvarelsene fra testen klassifisert etter riktig, feil eller ikke besvart. Dette ga meg et overblikk over besvarelsene, og dannet grunnlaget for hvilke elever som skulle intervjues. Intervjuene foregikk ikke på samme dag som elevene hadde gjennomført testen. Elevene som ble plukket ut til intervju hadde begrunnet svarene sine i liten grad, ikke svart på oppgavene hvor selve generaliseringen skulle formuleres eller brukt strategier på en feil måte. Disse elevene ble plukket ut til intervju fordi jeg ønsket å få mer informasjon om hvordan elevene hadde løst oppgavene. Jeg ville også finne ut om elevene som ikke hadde besvart generaliseringsoppgaven hadde oppfattet mønsteret på en måte som gjorde det vanskelig å formulere en generalisering. Elevene ble intervjuet én og én. Selv om elevene hadde arbeidet sammen i par med oppgavene, var det få besvarelser som var helt like. Jeg fant det derfor naturlig å intervjue elevene enkeltvis. Intervjuene foregikk på et grupperom hvor jeg og eleven satt uten forstyrrelser fra andre. I intervjuene ble elevene spurt om hvordan de hadde tenkt da oppgavene ble løst, og elevene som ikke hadde gitt en generalisering ble spurt om de klarte å formulere dette. Tre intervju på hvert trinn ble gjennomført, og hvert intervju varte mellom 10 og 15 minutter.

3.7 Analyse av data

I analysen av innhentet data, må forskeren være tydelig på hva han eller hun ønsker at analysen skal gjøre, da dette vil bestemme hvilken analyse som brukes (Cohen et al., 2011, s. 538). I mitt prosjekt ønsker jeg å sammenligne hvordan 2P-elever og 10.klassinger generaliserer og begrunner. Jeg valgte å analysere hvilken strategi elevene benyttet for å løse oppgavene fordi dette kan si noe om eleven løser oppgaven algebraisk eller ikke. Som beskrevet i teorikapittelet (Kapittel 2.4.2) er det kun den kontekstuelle strategien som gir en algebraisk generalisering av mønsteret. Jeg valgte også å analysere hvilket begrunnelsesnivå elevene lå på fordi dette kan si noe om hva elevene mener er en gyldig begrunnelse, og i hvilken grad elevene klarer å koble generelle forhold i mønsteret til generaliseringen sin. Før jeg kunne starte på denne analysen ønsket jeg å få en oversikt over besvarelsene. Under følger en beskrivelse av hvordan dette ble gjort.

Mellom undervisningssekvensene og intervjurundene klassifiserte jeg besvarelsene i riktig, feil eller ikke besvart. Deretter ble dette ført i Excel, og det ble notert hvor mange som hadde «Riktig», «Feil», eller «Ikke besvart» på oppgavene. Dette ble gjort uavhengig av hvilken strategi eller begrunnelse elevene hadde brukt. Det vil si at besvarelsene som ble klassifisert som riktig ga et korrekt svar på det oppgaven spurte om. Besvarelsene som ble klassifisert som feil ga ikke et korrekt svar på oppgaven. Et riktig svar på oppgavene hvor elevene skulle formulere en generalisering av mønsteret var uavhengig av om eleven hadde svart med ord eller symboler. Dette er i tråd med definisjonen av algebraisk tenkning jeg har valgt å bruke i dette prosjektet (Kapittel 2.2). Etter å ha klassifisert besvarelsene på denne måten, ble tre elever fra hvert trinn valgt ut til intervju som beskrevet i kapittel 3.6. Etter gjennomført intervju, ble intervjuene transkribert.

Ungdomsskolen som har bidratt til dette prosjektet er en baseskole. Det førte til at antall besvarelser fra 10.trinn var høyere enn antall besvarelser fra 2P. Totalt fikk jeg inn 29 besvarelser fra 2P, og 86 besvarelser fra 10.trinn. Jeg valgte å redusere antall besvarelser fra 10.trinn for å få til en rettferdig sammenlikning. Dette ble gjort ved å plukke ut 29 av 86 besvarelser etter at alle besvarelsene var kategorisert som rett, feil eller ikke besvart. Med unntak av besvarelsene som ble brukt i intervju, var utvelgelsen tilfeldig. Jeg sjekket så om de 29 valgte besvarelsene var representativ for hele utvalget. Dette ble gjort ved å sjekke at antall prosent som hadde riktig, feil eller ikke besvart var omtrent lik for de to utvalgene. Tabell 3 viser at prosentandelen av elever i hver kategori var omtrent lik for oppgavene, og jeg besluttet derfor å fortsette analysen med de 29 besvarelsene. Det finnes andre metoder jeg kunne brukt for å oppnå en rettferdig sammenligning, for eksempel ved å beholde de 86 besvarelsene fra 10.trinn og bruke prosent gjennom hele analysen. Jeg valgte likevel å redusere antall besvarelser for å kunne ha en god oversikt over alle besvarelsene, og ha et like stort utvalg fra begge trinn som jeg kunne plukke ut eksempler fra.

Tabell 3: Prosentandel riktig, feil eller ikke besvart for hele 10.trinn og del av 10.trinn

Oppgave 1	**Rett**		**Feil**		**Ikke besvart**	
	Hele 10.trinn	del av 10.trinn	Hele 10.trinn	Del av 10.trinn	Hele 10.trinn	Del av 10.trinn
a	84.8%	86.2%	10.5%	6.9%	4.7%	6.9%
b	73.3%	75.8%	8.1%	10.3%	18.6%	13.7%
c	23.2%	20.6%	14 %	13.7%	62.8%	65.5%
Oppgave 2	**Rett**		**Feil**		**Ikke besvart**	
	Hele 10.trinn	Del av 10.trinn	Hele 10.trinn	Del av 10.trinn	Hele 10.trinn	Del av 10.trinn
a	93.0%	93.1 %	0.0%	0.0%	7.0%	6.9%
b	81.4%	82.7%	5.8%	6.9%	12.8%	10.3%
c	41.9%	41.3%	8.1%	3.4%	50.0%	55.2%
Oppgave 3	**Rett**		**Feil**		**Ikke besvart**	
	Hele 10.trinn	Del av 10.trinn	Hele 10.trinn	Del av 10.trinn	Hele 10.trinn	Del av 10 trinn
a	46.55	44.8%	10.5%	10.3%	43.0%	44.8%
b	32.5%	34.4%	20.9%	20.6%	46.5%	44.8%
c	20.9%	17.2%	5.8%	10.3%	73.3%	72.4%

Da den første delen av analyseringen var ferdig, startet arbeidet med å analysere hvilken strategi elevene hadde brukt på de ulike oppgavene. Denne analysen ble gjort ved å bruke Lannins (2005, s. 234) rammeverk (Kapittel 2.4.2) for ulike generaliseringsstrategier elevene bruker. De ulike strategiene er følgende:

1. *Rekursiv*
2. *Telling*
3. *Hel Objekt*
4. *Prøve og feile*
5. *Kontekstuell*

De tre oppgavene i testen besto av tre deloppgaver. Hver deloppgave ble analysert i henhold til beskrivelsen av de ulike strategiene (Kapittel 2.4.2). Eksempler på kategoriseringen følger i kapittel 4.3, hvor bilde av elevbesvarelsene og begrunnelse for strategien jeg har kategorisert besvarelsen som blir gitt. Antall elever på hver strategi ble ført i Excel, og jeg laget en tabell for hver oppgave. Disse tabellene presenteres i Kapittel 4.3. Å bruke Lannins (2005, s. 234) rammeverk for strategier til å analysere elevenes besvarelser var i noen tilfeller utfordrende. Mange av elevene hadde ikke begrunnet svarene sine, noe som i flere tilfeller gjorde det umulig å vite med sikkerhet hvilken strategi eleven hadde brukt. Dette skjedde spesielt i oppgavene hvor elevene skulle fortsette de ulike mønstrene. Derfor valgte jeg å legge til enda en kategori, som jeg kalte for «Usynlig strategi». Eksempler på denne strategien, og begrunnelse for hvorfor disse strategiene er usynlig, gis i kapittel 4.3. I oppgave 3 er det lagt til enda en kategori som jeg kalte for «misoppfatning». Det skyldes at noen elever på 10.trinn og i 2P misforsto hvilke sirkler som skulle telles, og løste oppgaven etter den oppfatningen. Dette kommer jeg tilbake til å kapittel 4.3.3.

Etter analysen av elevenes strategier fulgte analysen av elevenes begrunnelsesnivå. Lannins (2005, s. 234) rammeverk for elevers begrunnelsesnivå ble brukt til å analysere elevenes besvarelser. Begrunnelsesnivåene er beskrevet i kapittel 2.4.3, og er som følger:

Nivå 0 – ingen begrunnelse
Nivå 1 – henvisning til autoritet
Nivå 2 – empirisk begrunnelse
Nivå 3 – generisk begrunnelse
Nivå 4 – deduktiv begrunnelse

Hver deloppgave ble analysert i henhold til nivåenes beskrivelse (Kapittel 2.4.3), og antall besvarelser på de ulike nivåene ble ført inn i Excel. Det ble laget en tabell for hver oppgave. Tabellene presenteres i kapittel 4.4 sammen med eksempler på de ulike nivåene.

Funnene fra analysen av elevenes strategi og begrunnelsesnivå ble brukt til å undersøke hvilke utfordringer elevene hadde med figurmønsteroppgaver. For å få undersøke om elevene hadde utfordringer med oppfattelsesnivået ble tabellene for strategivalg brukt. Hvilken strategi elevene har brukt til å løse oppgavene, kan si noe om hvordan de har oppfattet mønsteret. For å undersøke om elevene hadde utfordringer med verbaliseringsnivået ble tabellen for begrunnelsesnivå brukt. Hvilket begrunnelsesnivå elevene bruker kan si noe om elevene klarer å beskrive hva de gjør. For å undersøke om elevene hadde utfordringer med symboliseringsnivået ble besvarelsene på de to trinnene gjennomgått og besvarelser hvor elevene hadde brukt symboler på én eller flere oppgaver ble talt. Videre så jeg gjennom disse besvarelsene og merket hva flest elever hadde utfordringer med. Dette ble ført i Excel og presenteres i kapittel 4. 5. Samlet utgjorde elevenes strategier, begrunnelsesnivå og utfordringer bakgrunnen for sammenligningen mellom de to trinnene.

3.8 Forskningsetikk

Forskningsetikk handler om etiske dilemmaer en forsker kan støte på underveis i prosjektet. I mitt prosjekt er særlig to etiske vurderinger viktig. Disse er elevenes rett til informert samtykke og innsyn i hvordan opplysningene anonymiseres. Informert samtykke vil si at elevene velger å delta eller ikke delta i et forskningsprosjekt etter å ha blitt informert om prosjektets formål og prosedyre. I informert samtykke ligger også deltakerens rett til å trekke seg fra forskningsprosjektet uavhengig av grunn (Cohen et al., 2011, s. 78).

Prosjekter som innhenter personopplysninger om deltakerne må meldes til Norsk Senter for Forskningsdata (NSD). I mitt prosjekt ønsket jeg å hente inn navn for å kunne velge ut elever til intervju, og ta lydopptak av intervjuet for å selv kunne ha en aktiv rolle i intervjuet. Prosjektet mitt måtte derfor meldes til NSD, og ble godkjent (Vurdert 06.09.2019). Samtykkeskjema som ble gitt til elevene er lagt ved (Vedlegg 1). Ifølge NSD kan elever over 15 år samtykke selv (NSD, 2018). Datainnhentingen på 10.trinn ble gjennomført i januar 2020, og alle elevene var dermed over 15 år. Der var derfor ikke nødvendig å informere foresatte.

I forkant av prosjektet fikk de aktuelle lærerne og rektor på skolene informasjon om prosjektet via e-post. Der ble det gjort rede for at jeg ønsket å gjennomføre et prosjekt i forbindelse med min masteroppgave, og at jeg trengte elever på 10.trinn og elever i 2P som kunne delta i prosjektet. Før testen ble elevene muntlig informert om at det var frivillig å delta, at de skulle jobbe med figurmønstre, samt at jeg ville plukke ut noen elever til intervju på bakgrunn av besvarelsene. Det ble i tillegg informert om at alle opplysninger anonymiseres i selve masteroppgaven, samt hvordan lydopptak fra intervju og elevbesvarelsene ville oppbevares underveis og ved prosjektslutt. Elevene fikk så utdelt et samtykkeskriv (Vedlegg 2) hvor den samme informasjonen sto, og signerte dersom de ønsket å være med i undersøkelsen og intervju.

3.9 Metodiske utfordringer

Validitet og reliabilitet er to begreper som brukes til å vurdere forskningens kvalitet (Cohen et al., 2011, s. 179). Cohen et al. (2011, s. 179) sier at forskning som ikke er gyldig, er verdiløs. Validitet handler om hvorvidt forskningen undersøker det den var tiltenkt å undersøke (Cohen et al., 2011, s. 179). Dette sier noe om i hvilken grad observasjonene våre reflekterer fenomenet eller variablene som interesserer oss (Kvale, 1989, s. 74). Reliabilitet er et synonym for pålitelighet, og tar for seg presisjon og nøyaktighet i målinger. For at forskning skal være pålitelig må det være åpenhet om hvordan data er samlet inn og bearbeidet. Det skal være mulig å gjennomføre forskningen på et lignende utvalg under lignende omstendigheter, og finne et lignende resultat (Cohen et al., 2011, s. 199).

Validitet kan deles i intern og ekstern validitet. Intern validitet handler om i hvor stor grad forskeren klarer å kontrollere variabler som kan ha en påvirkning på resultatet, og i hvilken grad vi kan si at metoden undersøker det som var ment å undersøke. Ekstern validitet handler om hvorvidt forskningen er generaliserbar (Enerstvedt, 1989, s. 140). Jeg har gjennomført prosjektet mitt i to 10.klasser og to 2P-klasser. Det er derfor hovedsakelig disse gruppene studien min kan si noe om. Jeg kan ikke trekke konklusjoner om andre 10.klasser og 2P-elever, eller andre grupper av elever. Studien min kan derimot være et bidrag til annen forskning på dette feltet, og er dermed ikke uten nytteverdi.

Forskeren kan påvirke validiteten til forskningen under datainnhentingen og analysen av data. Dette kan vise seg ved at forskeren tolker datamaterialet på en subjektiv måte, ved å for eksempel være for generøs eller for lite generøs med hensyn på klassifikasjon av datamaterialet (Cohen et al., 2011, s. 199). Å bruke data selektivt, ved å for eksempel framheve det positive, og overse det negative, kan også påvirke forskningens validitet (Cohen et al., 2011, s. 199). I mitt forskningsprosjekt har jeg vært til stede gjennom alle fasene av datainnhentingen, og har analysert data alene. Det har derfor vært viktig for meg å ha fokus på objektivitet i analysen av datamateriale, og være systematisk i klassifiseringene av strategi og begrunnelsesnivå. Dette har blitt gjort ved å følge beskrivelsene av ulike strategier (Kapittel 2.4.2) og begrunnelsesnivå (Kapittel 2.4.3). Intervjuene har også blitt brukt for å bekrefte eller avkrefte hypoteser underveis i arbeidet med analysen. Det har også vært viktig å gi en åpenhet rundt hvordan jeg har gjennomført analysen, og jeg har derfor valgt å ta med eksempler på elevbesvarelser (Kapittel 4), som gjør det mulig for leseren å se hvordan jeg har analysert og tolket besvarelsene.

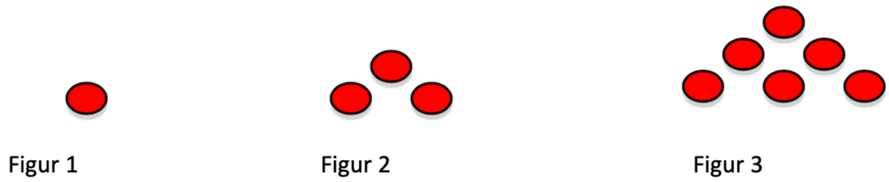
Metoden jeg valgte å bruke i dette prosjektet ga meg en oversikt over hvilke strategier og begrunnelsesnivå elevene i utvalget ligger på, og hvilke utfordringer de støtte på i arbeidet med disse oppgavene. Men metoden ga også noen utfordringer. En utfordring oppstod da jeg så at få elever begrunnet svarene sine. En annen metode kunne kanskje forhindret dette, for eksempel hvis jeg hadde hatt mindre elevgrupper og større fokus på observasjon av elevene under arbeidsøktene. Dersom jeg skulle gjennomført prosjektet på nytt, ville jeg ha notert ned observasjoner underveis og brukt dette som en del av funnene for å ha mer data å støtte meg på i tolkningene av de kvantitative dataene, spesielt for å kunne si noe mer om elevene som har brukt en usynlig strategi.

Intervjuene jeg gjorde har fungert som støtte til tolkninger jeg har gjort, men har blitt brukt i mindre grad enn det som opprinnelig var tenkt. Det kan skyldes at det er første gang jeg bruker intervju som metode, og har dermed lite trening med dette. I kapittel 3.3 skrev jeg om Kvale (1997, s. 149) sine seks kvalitetskriterier for intervju. Punkt 1, 2 og 5 er relevante for min bruk av intervju. Å få spesifikke svar fra intervjupersonen var avgjørende for å kunne stille korte spørsmål. Dette fant jeg vanskelig da jeg i flere av intervjuene følte at jeg måtte forklare oppgavene til intervjupersonene, spesielt oppgaver hvor variabelbegrepet skulle brukes. Det resulterte i lange beskrivelser og spørsmål fra meg, og korte svar fra intervjupersonene. Dette kunne vært unngått ved å gå videre til neste spørsmål med en gang eleven ble usikker eller ikke visste svaret på spørsmålet. Punkt fem følte jeg at jeg klarte å overholde, da jeg stilte kontrollspørsmål for å støtte egne tolkninger under intervjuene. For eksempel mistenkte jeg at elevene hadde vanskeligheter med variabelbegrepet, og ba noen av elevene å beskrive hvordan figur 100 ser ut før jeg spurte om de kunne beskrive hvordan figur n ser ut. Dersom elevene klarte å beskrive figur 100, men ikke figur n, forsterket det mistanken om at elevene hadde en liten forståelse for variabelbegrepet.

3.10 Valg av oppgaver

I denne delen vil jeg presentere oppgavene elevene har arbeidet med i prosjektet. Jeg vil også si litt om hvor jeg har hentet oppgavene fra, forventninger og hva jeg tenkte da jeg valgte oppgavene.

Oppgave 1 - Sirkler



a) Kan du tegne hvordan figur 4 og 5 ser ut?

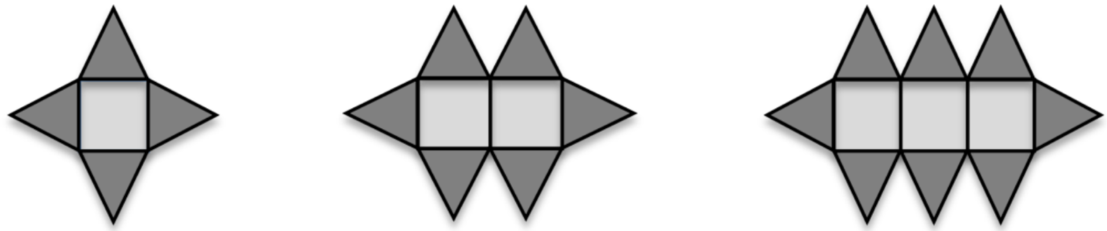
b) Kan du tegne eller beskrive med ord hvordan figur 10 ser ut? Hvordan kan du være sikker på det?

c) Kan du beskrive enten med ord eller symboler hvordan figur n ser ut?

I denne oppgaven blir et voksende mønster presentert. Hver figur vokser med et antall sirkler som er likt figurnummeret, og det er dermed en formel for trekanttallene vi skal fram til. Denne oppgaven er hentet fra en artikkel skrevet av Rivera (2018, s. 16). Formuleringen i oppgave a og b er hentet fra Rivera (2018, s. 16). Oppgave 1c har jeg formulert selv, da oppgaven som presenteres i artikkelen ikke spør etter den generelle figuren. Oppgave 1b spør etter hvordan figur 10 ser ut, og det var derfor forventet at noen elever ville bruke hel-objekt strategi i denne oppgaven, med tanke på at oppgave 1a spør etter figur 5. Det var forventet at elevene på begge trinn klarte å oppfatte at hver figur representerer summen fra 1 til n, altså fra 1 til figurnummeret. Den eksplisitte formelen for trekanttallene kan sies å være avansert for elevene på de to trinnene, derfor forventet jeg ikke at alle elevene skulle komme fram til en eksplisitt formel. En måte å komme fram til den eksplisitte formelen til dette mønsteret er å utvide figurene til parallellogram, finne arealet av figuren og dividere på to. Om noen elever fikk til dette var også en grunn til at jeg tok med denne oppgaven. Elevene må da se forbi den eventuelle rekursive oppfatningen de har av mønsteret, og utforske andre måter å oppfatte mønsteret på.

Jeg har sett i etterkant at formuleringen på oppgavene burde vært endret litt på. Selv om det for noen kan være tydelig at det er antall sirkler som er egenskapen man bør fokusere på i denne oppgaven, er det ikke sikkert alle elevene oppfattet det med tanke på at oppgaven spør etter hvordan figurene ser ut. Konsekvensen av det er at det kan bli utfordrende å bruke en kontekstuell strategi, når man først har tatt i bruk en rekursiv strategi (Radford, 2006, s. 9). Jeg vil komme tilbake til dette i analysen av valg av strategier elevene har gjort i denne oppgaven.

Oppgave 2 - Trekanter



Figur 1 Figur 2 Figur 3

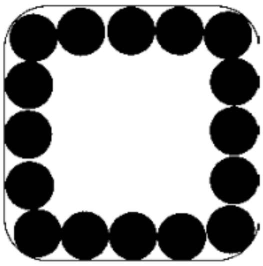
a) Kan du tegne Figur 4?
b) Kan du tegne eller beskrive med ord hvordan Figur 12 ser ut? Hvordan kan du være sikker?
c) Kan du beskrive enten med ord eller med symboler hvor mange trekanter figur n har?

Denne oppgaven er også hentet fra Rivera (2018, s. 15). Oppgaven presenterer i likhet med oppgave 1 et voksende mønster. Deloppgave 2a og 2b er hentet fra Rivera (2018, s. 15), mens jeg selv har formulert oppgave 2c av samme grunn som i oppgave 1. Mønsteret vokser med to trekanter og ett kvadrat fra figur til figur. Antall kvadrater vil være lik figurnummeret. En eksplisitt formel for antall trekanter er gitt ved $T = 2n + 2$, hvor T er antall trekanter og n er figurnummeret. En begrunnelse for formelen er at Figur n består av en rekke med n kvadrat. Kvadratene vil da ha to ledige sider hvor det plasseres trekanter. I tillegg vil de to kvadratene på endene ha en trekant på siden som ikke står inntil et annet kvadrat.

I denne oppgaven er det en tydelig sammenheng mellom figurnummer og antall trekanter i hver figur. Det kan dermed være enklere å komme fram til en eksplisitt formel for antall trekanter, enn det var å komme fram til antall sirkler i oppgave 1. I tillegg gir dette mønsteret et lineært uttrykk for antall trekanter, og det var derfor forventet at elever på begge trinn skulle komme fram til et generelt uttrykk. Denne oppgaven ble valgt for å undersøke om en tydelig sammenheng mellom mønsterets egenskaper og posisjon gjorde at flere elever kom fram til en eksplisitt formel.

Oppgave 3 - Kvadrat

Figur 1 representerer et 5x5 kvadrat. Det er 5 sirkler på hver side. Hjelpefiguren viser en måte å telle sirklene i kvadratet for å kunne finne en generell formel for antall sirkler i et nxn kvadrat.



Figur 1: 5x5 kvadrat

Hjelpefigur: Tellemåte

a) Kan du vise to ulike måter man kan telle sirklene i kvadratet på? (ulikt hjelpefiguren)

b) Kan du tegne eller beskrive hvor mange sirkler det er i et 7x7 og et 20x20 kvadrat?

c) Hvis du ser på hjelpefiguren og det du tegnet i a. Kan du beskrive en formel enten med ord eller symboler som gir antall sirkler i et n x n kvadrat?

Denne oppgaven skiller seg fra oppgave 1 og oppgave 2. Den gir kun ett eksemplar av mønsteret som skal behandles som en prototype for hele mønsteret, og er dermed en generisk oppgave (Kapittel 2.4.5). Mønsteret er hentet fra Küchemann (2010). I artikkelen (Küchemann, 2010) er dette mønsteret presentert som et eksempel på et generisk mønster, og det er ikke formulert oppgaver til mønsteret. Derfor har jeg formulert oppgave 3a, 3b og 3c selv. I oppgave 3a skal elevene vise to ulike måter man kan telle sirklene på. Jeg valgte å ha med en slik oppgave for å undersøke hvordan elevene oppfatter mønsteret, og om de bruker denne oppfatningen videre i oppgave 3b og 3c. Jeg la til hjelpefiguren for at elevene lettere kunne forstå hva de skulle gjøre i oppgave 3a. Det er flere måter å komme fram til en formel for antall sirkler i kvadratet, og jeg synes derfor ikke at det var problematisk å gi elevene et eksempel på en mulig oppfatning. Denne oppgaven ble tatt med for å undersøke om en generisk framstilling av mønsteret kunne påvirke hvilke strategier elevene brukte for å generalisere mønsteret. I denne oppgaven kan man komme fram til flere eksplisitte formler, men alle vil være ekvivalente. Eksempler på slike formler er:

- $S = 4n - 4$
    - Denne formelen oppnås ved å multiplisere antall sirkler på en side i kvadratet med antall sider i kvadratet, og trekke fra hjørnene som vil bli talt to ganger.

- $S = 2n + 2(n - 2)$
  - Denne formelen oppnås ved å dele inn kvadratet slik hjelpefiguren viser.
- $S = 2(n + (n - 2))$
  - Denne formelen oppnås ved å dele figuren i to like deler, og multiplisere antall sirkler i den ene delen med to.

4 Funn & Analyse

4.1 Oppbygging av funn – og analysedel

I denne delen vil funnene fra undersøkelsen bli presentert og analysert. I arbeidet med analysen av funnene har jeg tatt utgangspunkt i rammeverkene som er presentert i kapittel 2.4.2 og 2.4.3. Dette innebærer Lannins (2005) rammeverk for ulike strategier elevene bruker for å løse generaliseringsoppgaver, samt rammeverket for ulike begrunnelsesnivå elevene ligger på. Videre har jeg sett på hvordan de ulike utfordringene beskrevet av Lee (1996) (kapittel 2.4.4) kommer til syne i elevenes besvarelser, det vil si utfordringer knyttet til verbaliseringsnivået, symboliseringsnivået og oppfattelsesnivået.

I den første delen av dette kapittelet vil generelle funn fra undersøkelsen presenteres. Det innebærer antall elever som har svart på undersøkelsen, antall korrekte og gale svar. Jeg vil først vise resultatet fra de 86 besvarelsene i 10.trinn, før jeg sammenligner resultatet fra 2P og utvalget fra 10.trinn. Videre ser jeg på elevens valg av strategier, hvor hver oppgave presenteres i et eget underkapittel. I disse underkapitlene presenteres en tabell som viser antall elever som har brukt de ulike strategiene på hvert trinn, deretter eksempler på strategiene fra både intervju og besvarelser. Det vil følge en diskusjon og sammenligning etter presentasjonen av hver oppgave. Deretter vil jeg se på de ulike begrunnelsesnivåene elevene har brukt, samt utfordringer med verbaliseringsnivået. Denne delen vil følge samme oppsett som kapittel 4.3 – Valg av strategi, men alle oppgavene presenteres sammen grunnet liten forskjell i begrunnelsesnivå på de ulike oppgavene. Til slutt vil jeg se på utfordringer på symboliseringsnivået og oppfattelsesnivået. Delkapittelet om utfordringer på symboliseringsnivået vil følge samme oppsett som de andre delkapitlene, mens utfordringer på oppfattelsesnivået vil være en diskusjon basert på funn som presenteres i de øvrige delkapitlene.

4.2 Generelle funn

Som tidligere nevnt (Kapittel 2.2) vil jeg bruke Radford (2013, s.261) og Mason (1996, s. 83) sine definisjoner på algebraisk tenkning. Det betyr at elever som har beskrevet de generelle elementene av et mønster med ord har fått riktig på oppgaven, på lik linje med de som har beskrevet det generelle med symboler. Under følger resultatene fra hele 10.trinn.

Tabell 4: Resultat fra hele 10.trinn

Oppgave 1	Riktig	Feil	Ikke besvart	Totalt
a	73	9	4	86
b	63	7	16	86
c	20	12	54	86
Oppgave 2	**Riktig**	**Feil**	**Ikke besvart**	**Totalt**
a	80	0	6	86
b	70	5	11	86
c	36	7	43	86
Oppgave 3	**Riktig**	**Feil**	**Ikke besvart**	**Totalt**
a	40	9	37	86
b	28	18	40	86
c	18	5	63	86

Av Tabell 4 ser vi at de fleste elevene har svart på oppgave 1a og 1b, men på oppgave 1c har flertallet ikke svart. Vi ser også at det er flere elever som har svart feil på oppgave 1c, enn det er på oppgave 1a og 1b. Antall elever som ikke har svart på oppgavene øker også fra oppgave 1a til oppgave 1c, mens antall elever som har svart riktig synker betydelig fra 1a til 1c.

På oppgave 2 ser vi at det samme forekommer. Det er derimot flere elever som har svart riktig på alle oppgavene enn i oppgave 1. Antall riktige besvarelser synker også her fra 2a til 2c, mens antall elever som ikke har svart øker. I oppgave 3 skjer det samme. Oppgave 3 er også den oppgaven hvor flest elever ikke har svart, og det er en betydelig forskjell sammenlignet med oppgave 1 og 2. Dette ser vi også i de 29 besvarelsene som ble plukket ut (Tabell 5).

Tabell 5: Resultat fra utvalg 10.trinn og 2P.

Oppgave 1	**Riktig**		**Feil**		**Ikke besvart**		**Totalt**	
	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P
a	25	29	2	0	2	0	29	29
b	22	26	3	2	4	1	29	29
c	6	10	5	8	18	11	29	29
Oppgave 2	**Riktig**		**Feil**		**Ikke besvart**		**Totalt**	
	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P
a	27	26	0	0	2	3	29	29
b	24	24	2	1	3	4	29	29
c	12	8	1	11	16	10	29	29
Oppgave 3	**Riktig**		**Feil**		**Ikke besvart**		**Totalt**	
	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P
a	13	15	3	7	13	7	29	29
b	10	16	6	4	13	9	29	29
c	5	6	3	10	21	13	29	29

Funn fra 10.trinn

Her ser vi også at de fleste elevene har svart på oppgave 1a og 1b, mens antall elever som har svart på 1c er markant lavere. I dette utvalget er det også flere elever som har svart feil på oppgave 1c enn 1a og 1b. Antall elever som ikke svarer på oppgavene øker fra 1a til 1c, mens det motsatte skjer med antall riktige besvarelser.

I oppgave 2 har nesten alle elevene fått til å fortsette mønsteret. Det som skjer i oppgave 1, skjer også i oppgave 2 og 3. Antall riktige besvarelser synker, mens det er flere elever som svarer feil eller ikke svarer på oppgaven. Sammenligner man dette utvalget med hele 10.trinnet (Tabell 4), finner man også her en betydelig forskjell i antall ubesvarte oppgaver fra oppgave 1 til oppgave 3. Lignende tendenser forekommer hos 2P – elevene.

Funn fra 2P

Det er flere elever som svarer på oppgavene i 2P enn det er hos 10.klassingene. Det er likevel de samme tendensene som går igjen, nemlig at antall elever som ikke svarer på oppgavene øker fra oppgave a til oppgave c, og at det motsatte skjer med antall riktige besvarelser. Her er det også en betydelig forskjell i antall elever som har svart på oppgave 3 i forhold til oppgave 1.

Diskusjon og sammenligning

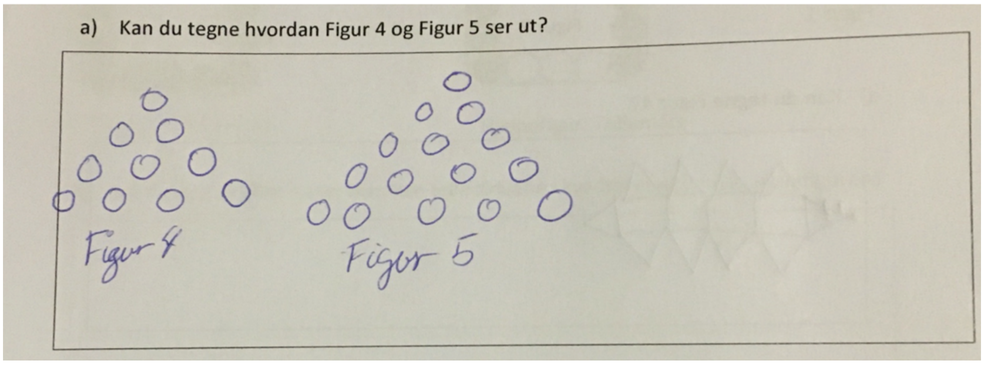
Ingen elever klarte å komme fram til en eksplisitt formel for antall sirkler i hver figur i oppgave 1c. For å komme fram til en slik formel må man enten ha kjennskap til trekanttallene på forhånd eller finne en kreativ måte å se mønsteret på. Funnene viser at elevene har utfordringer med å beskrive dette mønsteret generelt. Det kan forklare den lave svarfrekvensen på oppgave 1c. Dette vil jeg komme tilbake til i funnene som viser elevenes valg av strategi. Noe annet som kan forklare hvorfor få elever valgte å svare på oppgave 1c er at enkelte elever var svært ivrige etter å komme frem til en eksplisitt formel, og ønsket om å komme fram til en formel overskygget elevenes mulighet til å beskrive mønsteret med ord.

I oppgave 2 ser det ut til at elevene på 10.trinn gjør det bedre enn elevene i 2P. Vi ser at det er flere som har riktig på oppgave 2c på 10.trinn. Fem 2P-elever har imidlertid skrevet en formel som gir antall firkanter og trekanter i hver figur, og ikke bare antall trekanter slik oppgaven spurte om. Disse er blitt merket som feil. Det gjør at resultatet er jevnere enn det ser ut til, og den eneste forskjellen på denne oppgaven er at det er flere som ikke har besvart oppgave 2a og 2b i 2P-klassen enn det er på 10.trinn. Flere elever på begge trinn svarte på oppgave 2 enn oppgave 1. Som vi skal se senere (kapittel 4.3.2) klarte flere elever, både i 2P og 10.klasse, å finne en eksplisitt formel for mønsteret i denne oppgaven. Det kan forklares ved at endringen fra en figur til den neste er lik, altså vokser hver figur med to trekanter. Det generelle uttrykket for antall trekanter i denne figuren er lineært, noe som kan gjøre det enklere å oppdage sammenhengen mellom antall trekanter i figuren og figurens posisjon i mønsteret. Elevene skal ha kjennskap til lineære funksjoner, og kan bruke dette til å finne den generelle formelen.

Oppgave 3 skiller seg ut fra oppgave 1 og 2, både i funnene og utformingen av oppgaven. Det er en generisk oppgave som jeg tidligere har beskrevet i kapittel 2.4.5, og den tvinger dermed eleven til å se etter strukturer i mønsteret som kan brukes til å beskrive det (Küchemann, 2010, s. 242). Dette kan forklare hvorfor det er flere elever som ikke har svart på oppgaven, da den blir mer utfordrende når det kun blir gitt ett eksempel. Det er flere elever i 2P som svarer på oppgaven, og flere i 2P som har svart riktig enn på 10.trinn. Vi ser av resultatene at det er flere elever på begge trinn som har svart og fått riktig på oppgave 3a, enn det er på oppgave 3b. Dette skyldes at de fleste elevene som har fått rett svar på 3a har klart å oppfatte mønsteret slik at det er mulig å lage en formel, men flere av disse elevene har ikke klart å bruke dette til å lage formelen.

4.3 Valg av strategi

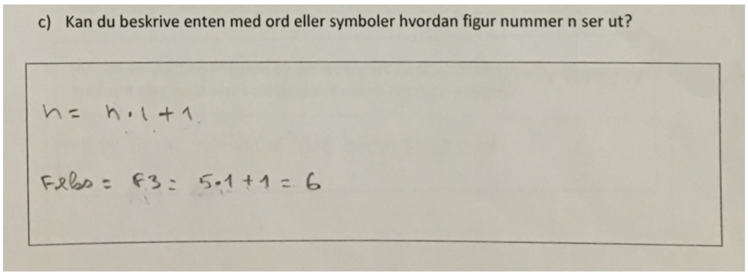
I arbeid med figurmønsteroppgaver bruker elever flere ulike strategier, som har blitt kategorisert av Lannin (2005, s. 234). Disse strategiene har jeg tatt utgangspunkt i når jeg har analysert elevbesvarelsene. Som følge av at mange elever ikke har begrunnet svarene sine har det i flere tilfeller vært utfordrende å klassifisere hvilken strategi eleven har brukt. Derfor har jeg laget en ny kategori, som jeg har kalt «usynlig». Det har jeg gjort for å unngå å plassere de i «Ikke besvart» - kategorien. De fleste svarene som er kategorisert med en usynlig strategi er gitt på oppgavene hvor elevene skal fortsette mønsteret. Et eksempel ser vi under i Bilde 1.



Bilde 1: Eksempel på usynlig strategi, 10.trinn.

Vi ser at eleven har tegnet figur 4 og 5 som oppgaven ber om, men har ikke skrevet noe om hvorfor figuren ser slik ut. Da blir det vanskelig å avgjøre hvilken strategi som er brukt. Oppgave 1 og 2 er klassiske figurmønsteroppgaver, som beskrevet i kapittel 2.4. Slike oppgaver løses ofte med å oppfatte den avhengige variabelen som økes, og dette leder ofte til en rekursiv formel (Rivera & Becker, 2008, s. 71). På grunn av elevenes begrensede erfaring med figurmønsteroppgaver, er det nærliggende å tenke at de fleste elevene har brukt en rekursiv strategi når de har fortsatt mønsteret, slik som i Bilde 1. På en annen side, kan man ikke vite dette med sikkerhet og jeg besluttet derfor å lage en ekstra kategori å plassere disse besvarelsene i.

I oppgavene hvor elevene skal lage en generell formel, har det i noen tilfeller vært nødvendig å kategorisere strategiene elevene har brukt som usynlig. I disse tilfellene har eleven skrevet en formel som er vanskelig å tolke, eller det er utfordrende å bestemme hvilken kategori strategien faller inn under. Et eksempel ser vi i Bilde 2.



Bilde 2: Eksempel på usynlig strategi, 10.trinn.

Eksempelet i Bilde 2 er fra oppgave 1c, og det kan være at eleven har brukt en prøve-og feile strategi. Det er vanskelig å avgjøre med sikkerhet hvilken strategi eleven har brukt, fordi eleven kun har prøvd én formel. Eleven har så testet formelen for figur 3 og sett at det stemmer. Eleven har imidlertid satt inn galt tall for figurnummeret, og vi kan ikke vite hva eleven hadde gjort dersom eleven hadde oppdaget at formelen var feil. Derfor er denne strategien kategorisert som usynlig.

4.3.1 Oppgave 1 – Sirkler

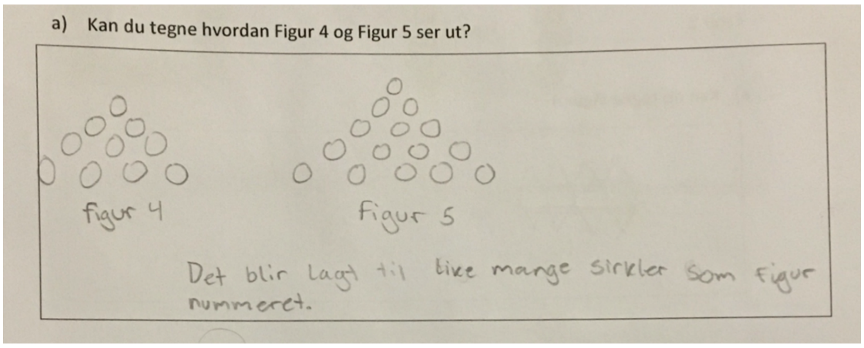
I denne oppgaven skulle elevene beskrive hvordan figur 5 og figur 10 så ut, og komme fram til en generell formel for mønsteret. Tabellen under viser resultatet av hvilke strategier som ble brukt på oppgave 1 av elevene i 10.klasse og i 2P.

Tabell 6: Strategier brukt av 10. klasseelever og 2P-elever i oppgave 1

Oppgave 1/ Strategi	Telling		Rekursiv		Hel-objekt		Prøve og feile		Kontekstuell		Usynlig		Ingen svar	
	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P
a			8	5							19	24	2	
b	1		18	20	2						4	8	4	1
c			5	14			2			1	4	4	18	11

Strategier brukt av 10.klassingene i oppgave 1

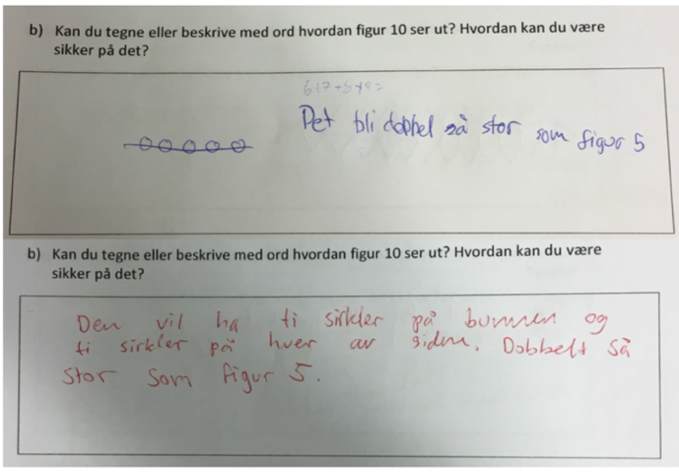
Tabell 6 viser at de fleste besvarelsene fra oppgave 1a er plassert i kategorien «usynlig», mens åtte elever har brukt en rekursiv strategi. Vi har sett et eksempel på en usynlig strategi i oppgave 1a (Bilde 1), mens Bilde 3 viser hvordan en rekursiv strategi ser ut.



Bilde 3: Eksempel på rekursiv strategi, 10. trinn.

Eleven har lagt merke til at den neste figuren i rekken vokser med et antall sirkler som er likt figurnummeret. For å få riktig antall sirkler i figuren man ønsker å finne, må man vite hvor mange sirkler det er i den forrige figuren, dersom man bruker fremgangsmetoden til denne eleven. Ønsker man for eksempel å finne antall sirkler i figur 6 må man vite hvor mange sirkler det er i figur 5, og så legge til antall sirkler likt figurnummeret, som vil være seks. Derfor har denne eleven brukt en rekursiv strategi. I oppgave 1b ser vi at det kun er fire besvarelser som er kategorisert som usynlige, mens 18 er kategorisert som rekursiv. Det vil si at det er fire elever som har tegnet figur 10 uten å kommentere hvorfor den ser slik ut. Elevene som har brukt en rekursiv strategi har kommet med en lignende forklaring til den vi ser i Bilde 3.

Tabell 6 viser at det er to elever som har brukt hel-objekt strategi. Begge elevene skriver at figur 10 er dobbelt så stor som figur 5. En av dem har også beskrevet hvordan figur 10 ser ut, men konkluderer likevel med at figur 10 må være dobbelt så stor som figur 5. De to besvarelsene ser vi i Bilde 4.



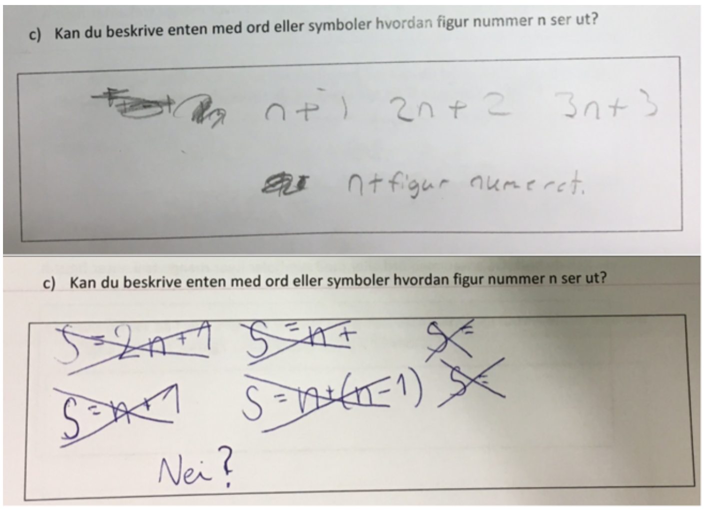
Bilde 4: Besvarelser hvor hel-objekt strategi er brukt, 10.trinn, oppgave 1b.

I besvarelsene har begge elevene skrevet at figur 10 er dobbelt så stor som figur 5. I oppgave 1a ble elevene bedt om å tegne figur 5. Elevene har så brukt figur 5 til å danne en større del av mønsteret, altså figur 10, ved å doble figur 5. Å bruke en del av mønsteret til å lage en større del ved å multiplisere er kjennetegn på en hel-objekt strategi, og disse besvarelsene ble derfor kategorisert som det. De to elevene ble plukket ut til intervju, og de ble spurt om hvordan de vet at figur 10 er dobbelt så stor som figur 5. Begge elevene forsto at det måtte være feil. Under følger utdrag fra intervjuet med en av de to elevene.

19 Intervjuer: Hvordan vet du at figur 10 er dobbelt så stor som figur 5?
20 Elev: Jeg vet ikke om den blir dobbelt så stor, men den blir jo på en måte sånn. Det er jo fra 5, det blir jo fem ekstra, eller ikke fem ekstra sånn... Nei, den blir ikke dobbelt så stor for vi plusser på 6, 7 8 , 9 og 10.

Etter å ha forklart hvordan mønsteret utvikler seg, forstår eleven at mønsteret blir større og større. Følgelig kan ikke figur 10 være dobbelt så stor som figur 5.

To elever brukte en prøve-og feile strategi, og ingen av disse elevene kom fram til riktig svar på oppgaven. De to besvarelsene er kategorisert som prøve-og feile strategi fordi det er tydelig at elevene har prøvd ulike formler for mønsteret. De to besvarelsene ser vi i Bilde 5.

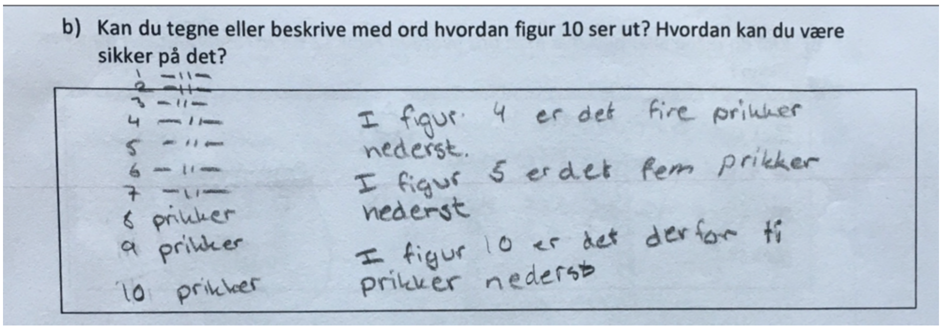


Bilde 5: Besvarelser hvor prøve- og feile strategi er brukt, 10.trinn.

Bilde 5 viser at elevene har prøvd flere ulike formler, og har prøvd seg fram med ulike tall. Dette kjennetegner en prøve-og-feile strategi, som disse besvarelsene ble kategorisert som. Eleven i den øverste besvarelsen har komt frem til fire ulike formler. Det ser ut som eleven har prøvd å finne én formel for hver figur, istedenfor å finne en formel som passer til alle figurene som er vist i oppgaven. Besvarelsen kan også tyde på at eleven ikke har forstått hva n betyr, da n og figurnummer vil være det samme. Eleven i den nederste besvarelsen har også kommet fram til fire formler, og heller ingen av disse er korrekte. Hos 2P – elevene finner vi lignende resultater, men ingen elever har brukt verken hel-objekt eller prøve-og feile strategien.

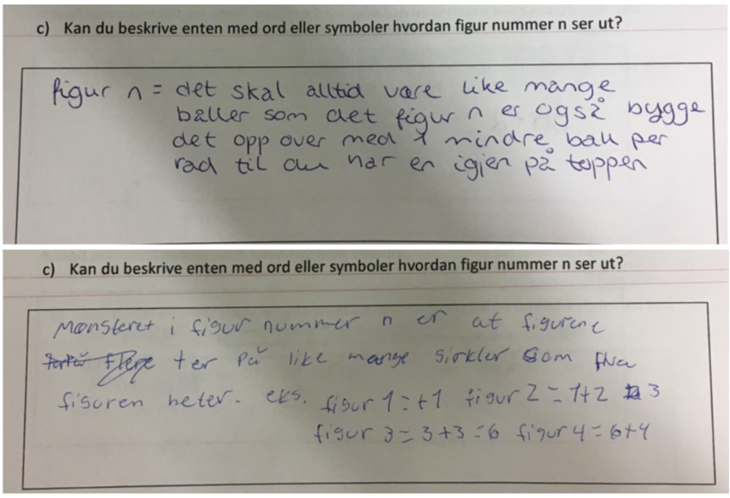
Strategier brukt av 2P-elevene i oppgave 1

Tabell 6 viser at det er flest elever som bruker en usynlig strategi på 1a, mens det er 5 elever som bruker en rekursiv strategi. I oppgave 2b er det 20 elever som bruker en rekursiv strategi, mens det er 14 elever som bruker en rekursiv strategi i 2c. Én besvarelse har blitt kategorisert som både rekursiv og kontekstuell, eksempel følger i Bilde 7. Vi ser også at antall usynlige strategier synker fra oppgave 1a til 1c. Bilde 6 viser en elev som har brukt en rekursiv strategi på oppgave 1b.



Bilde 6: Rekursiv strategi oppgave 1b, 2P.

Denne eleven har tatt utgangspunkt i tidligere figurer for å bestemme hvordan figur 10 ser ut. Eleven fokuserer på antall sirkler i den nederste raden, og det er derfor nødvendig å vite hvordan figuren før ser ut for å bestemme neste figur. På bakgrunn av at eleven har tatt utgangspunkt i tidligere figurer, ble denne strategien kategorisert som rekursiv. Besvarelsene som har blitt kategorisert med en rekursiv strategi i oppgave 1c er lignende til den vi ser i Bilde 6 på neste side.



Bilde 7: Eksempel på rekursiv/kontekstuell og rekursiv strategi i oppgave 1c, 2P.

Eleven i den nederste besvarelsen (Bilde 7) har tatt utgangspunkt i hvor mange sirkler som adderes fra en figur til neste, og har derfor blitt kategorisert som rekursiv. Eleven i den øverste besvarelsen har beskrevet figur n uavhengig av de andre figurene i mønsteret, og lagt merke til at hver rad minker med en sirkel fra bunnen av trekanten. Dette kjennetegner en kontekstuell strategi. Formelen for denne beskrivelsen kan være $S(n) = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$, som er en eksplisitt formel, men krever mye arbeid og man må innom alle de tidligere figurene for å komme fram til riktig antall sirkler. Eleven har svart på det oppgaven spør om, nemlig hvordan figur n ser ut, men formelen for denne fremgangsmetoden krever at man må innom de tidligere figurene. På bakgrunn av dette valgte jeg å kategorisere denne strategien som både rekursiv og kontekstuell.

Diskusjon og sammenligning

På begge trinnene ser vi at elevene hovedsakelig har brukt en rekursiv strategi for å løse oppgave 1b, mens det ikke er mulig å vite hvilken strategi de fleste elevene har brukt på oppgave 1a. Forskjellen mellom de to trinnene på denne oppgaven ligger i at to elever på 10.trinn har brukt hel-objekt strategi og to elever har brukt prøve-og-feile strategi på oppgave 1b. Hel-objekt strategien brukes ofte feil av elever (Lannin, 2005, s. 234), noe som også vises i denne oppgaven (Bilde 4). Vi ser at elevene ikke har tatt hensyn til at figuren vokser med et ulikt antall sirkler hver gang, og svaret blir derfor feil.

Lannin (2005, s. 234) skriver at elever som bruker prøve-og-feile strategi ofte eksperimenterer med operasjoner og tall som er gitt i oppgaveteksten. Spesielt eleven i den nederste besvarelsen (Bilde 5) eksperimenterer med ulike tall og måter å skrive formlene på. Enkelte av formlene elevene har laget stemmer med én figur som er vist i oppgaven, men kan ikke brukes på de resterende. Eleven har strøket ut formlene etterhvert som eleven oppdaget at formelen ikke stemte, og det ser ut som eleven har justert litt på formelen for så å prøve på nytt og se om den nye formelen kan stemme. Eleven i den øverste besvarelsen har ikke strøket ut formlene, og det kan se ut til at eleven har prøvd å lage én formel til hver figur. I oppgaven ble tre figurer i mønsteret presentert, og eleven har laget tre formler hvor forskjellen mellom disse ligger i verdien til konstantleddet og tallet variabelen multipliseres med. Disse tallene følger figurnumrene til figurene som var presentert i mønsteret. Dette kan tyde på at eleven har et ufullstendig begrep om hva en formel er. Det er forventet at en formel i disse oppgavene skal gi en sammenheng mellom den avhengige og uavhengige variabelen, og at én formel skal gjelde for alle figurene. Det kan se ut til at eleven har misforstått dette, og prøver å lage en formel til hver figur.

Flertallet av elevene både i 2P og på 10.trinn bruker altså den rekursive strategien for å løse oppgaven. De fleste elevene på 10.trinn bruker en rekursiv strategi for å løse 1b, men få elever klarer å se for seg hvordan en generell figur i mønsteret ser ut. Det var det flere elever i 2P som fikk til. Ser vi på Bilde 7 har eleven i den nederste besvarelsen oppdaget en lokal likhet i mønsteret (Radford, 2006, s. 9), at neste figur vil vokse med et antall sirkler likt figurnummeret. Det er vanskelig å bruke denne lokale likheten til å se en sammenheng mellom mønsterets avhengige variabel og figurens posisjon i mønsteret (Radford, 2006, s. 9). Dette kan være med på å forklare hvorfor antall elever som bruker en rekursiv strategi i denne oppgaven er høyt.

En svakhet i oppgave 1 er at 1b og 1c er formulert vagt. Oppgaven spør etter hvordan figur nummer 10 og *n ser ut*, istedenfor å spørre etter hvor mange sirkler det er i figurene. Dersom oppgaven hadde spurt om antall sirkler i figurene, kan det tenkes at flere strategier hadde blitt representert. For eksempel kan det tenkes at noen elever hadde brukt telle-strategien for å svare på oppgaven, eller brukt en kontekstuell strategi. Det kan ikke utelukkes at en annen formulering av oppgaven kunne oppmuntret elevene til å tenke på mønsteret på en annen måte, enn å se hvor mange sirkler figuren øker med fra en figur til den neste. Lee (1996, s.5) påpeker at det er utfordrende for elevene å forkaste oppfatningen de har av mønsteret dersom det viser seg å ikke være algebraisk nyttig. I denne oppgaven får ikke elevene noen grunn til å tvile på måten de har oppfattet mønsteret, fordi de kan beskrive hvordan figur 10 og figur n

ser ut ved hjelp av den rekursive strategien og har dermed svart på spørsmålet. Den generelle formelen som elevene skulle frem til i denne oppgaven er også ganske avansert, spesielt for elevene på 10.trinn. Oppgaven kan derfor ha vært for vanskelig for elevene, spesielt med tanke på at dette er en oppgavetype elevene har begrenset erfaring med.

4.3.2 Oppgave 2 – Trekanter

I denne oppgaven skulle elevene fortsette mønsteret, beskrive hvordan figur 12 ser ut og finne en formel for antall trekanter i figur n. Under følger en tabell over de ulike strategiene som ble brukt av elevene på 10. trinn.

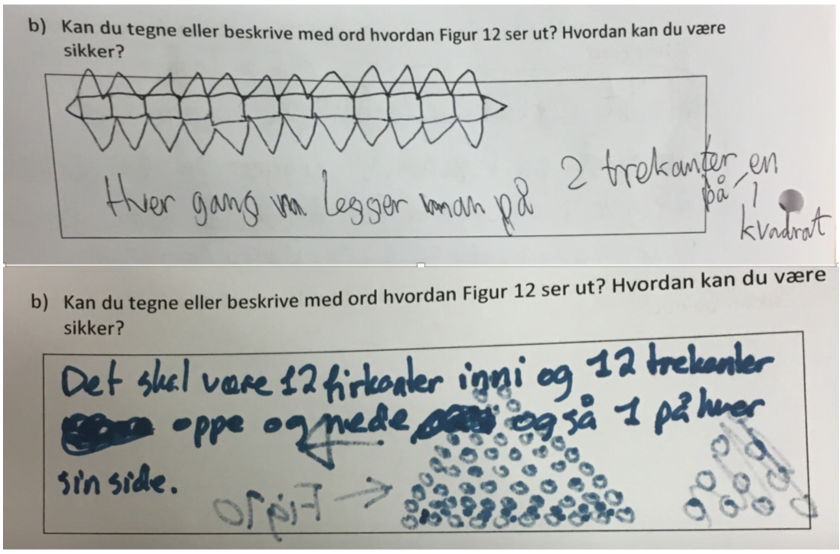
Tabell 7: Strategier brukt av elever på 10.trinn og i 2P, oppgave 2.

Oppgave 2/ Strategi	**Telling**		**Rekursiv**		**Hel-objekt**		**Prøve og feile**		**Kontekstuell**		**Usynlig**		**Ingen svar**	
	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P
a			1								26	26	2	3
b			6	8					10	5	10	12	3	4
c				4			1		11	14	2	1	15	10

Strategier brukt av 10.klassingene i oppgave 2

Tabell 7 viser at på oppgave 2a har de fleste elevene brukt en usynlig strategi. Funnene fra oppgave 2b og 2c skiller seg ut fra oppgave 1 på den måten at det er flere elever som har brukt en kontekstuell strategi på denne oppgaven. Vi ser også at det er én elev som har brukt prøve-og-feile strategi på oppgave 2c, samt én elev som har brukt en rekursiv strategi på 2a. I oppgave 2c er det ingen elever som har brukt en rekursiv strategi, og det er betydelig flere elever som svarer på oppgave 2a og 2b enn oppgave 2c. Det kan se ut til at mange av elevene som brukte en rekursiv og usynlig strategi på 2b ikke har svart på 2c. Det ser også ut til at noen har skiftet strategi underveis i oppgaven.

I denne oppgaven har mange av elevene som har svart på oppgave 2b brukt en kontekstuell strategi. Forskjellen på kontekstuell og rekursiv strategi vises i Bilde 8.



Bilde 8: Kontekstuell og rekursiv strategi i oppgave 2b, 10.trinn.

Eleven i den øverste besvarelsen har lagt merke til at det legges på to trekanter og ett kvadrat for hver gang figuren vokser. Man må derfor vite den forrige figuren for å få korrekt antall kvadrater og trekanter i den neste figuren. Dette vil være en rekursiv strategi. Eleven i den nederste besvarelsen har brukt en kontekstuell strategi. Eleven har lagt merke til at det skal være 12 kvadrat i figur 12, og hvert kvadrat skal ha to trekanter i tillegg til en trekant på hver av de to ytterste kvadratene. Her har eleven tatt utgangspunkt i informasjon gitt i situasjonen, nemlig hvordan trekantene er plassert rundt kvadratene. Informasjonen brukes til å beskrive figur 12 uten at det er nødvendig å ha informasjon om den forrige figuren. Dette kjennetegner en kontekstuell strategi, og besvarelsen ble derfor kategorisert som det.

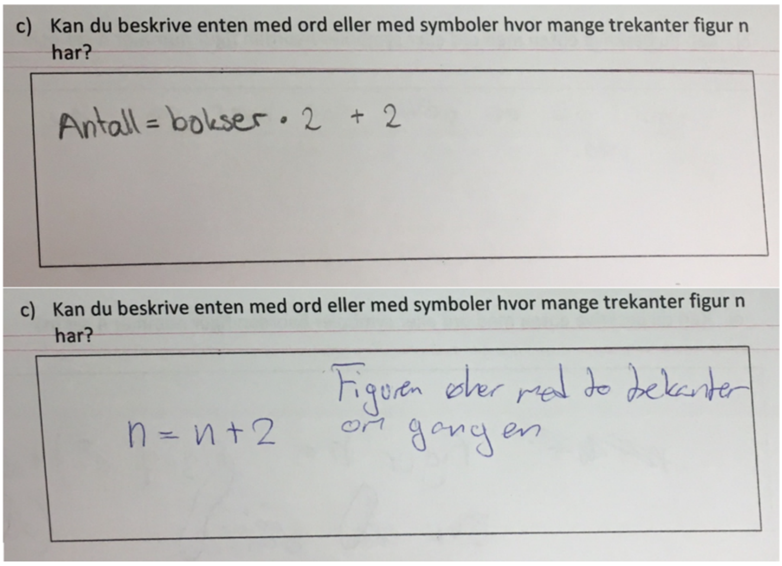
Noen elever har kun lagt merke til at antall kvadrat er likt figurnummeret, eller at det blir lagt på ett kvadrat for hver gang figuren vokser og at alle sidene fylles med trekanter. En av elevene som ble intervjuet hadde løst oppgave 2b på denne måten, som vi kan se i utdraget fra intervjuet under.

Intervjuer: Hva la du merke til i dette mønsteret?
Elev: Det var liksom det samme hele veien, bare at de la på en firkant

Dette vil være en rekursiv strategi som vil bli diskutert videre i diskusjon- og sammenligningsdelen. Funnene hos 2P-elevene viser at det var flere elever som brukte en usynlig strategi på oppgave 2a og 2b enn hos 10.klassinger, mens flere 2P-elever brukte en kontekstuell strategi i 2c.

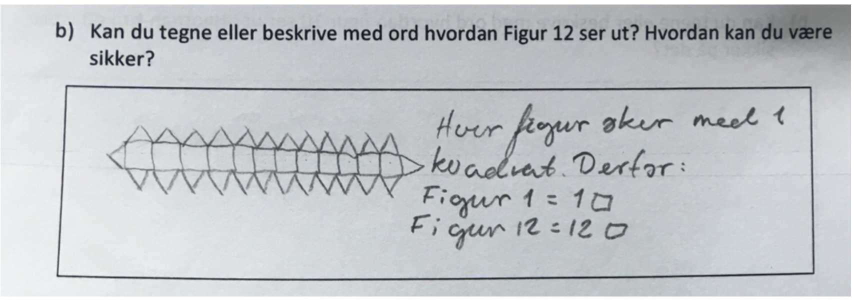
Strategier brukt av 2P-elevene i oppgave 2

Funnene hos 2P-elevene viser at alle elevene brukte en usynlig strategi på 1a. Mange elever bruker en usynlig strategi også i oppgave 2b, men åtte elever bruker en rekursiv strategi og fem elever bruker en kontekstuell strategi. 14 elever bruker en kontekstuell strategi i 2c, mens fire elever bruker en rekursiv strategi. Forskjellen mellom rekursiv og kontekstuell strategi på oppgave 2c illustreres av Bilde 9.



Bilde 9: Forskjell mellom rekursiv og kontekstuell strategi, oppgave 2c, 2P.

Den øverste besvarelsen viser en kontekstuell strategi. Antall trekanter er lik antall bokser multiplisert med 2, deretter adderes 2 for å telle med trekantene på sidene. Eleven har hentet ut informasjon om hvordan trekantene plasseres rundt kvadratene, og ser sammenhengen mellom den avhengige og uavhengige variabelen. Dette bruker eleven til å danne en generalisering, og strategien har derfor blitt kategorisert som kontekstuell. Eleven i den nederste besvarelsen har lagt merke til at figuren øker med to trekanter om gangen og har laget et uttrykk for dette. For å bruke denne fremgangsmetoden er det nødvendig å ha informasjon om de tidligere figurene, dermed er dette en rekursiv strategi. Vi ser at eleven har noen utfordringer med notasjonen, men det er usikkert om eleven har lært å bruke den korrekte notasjonen, som her ville vært $F_n = F_{n-1} + 2$. Hos 2P elevene var det også noen elever som tok utgangspunkt i hvordan antall kvadrater endret seg fra figur til figur, som vi kan se i Bilde 10.



Bilde 10: Rekursiv strategi med fokus på kvadrat, 2P.

Eleven har sett på hvordan antall kvadrat endrer seg fra en figur til neste, og fylt på trekanter rundt. Eleven skriver at hver figur øker med ett kvadrat, og man må derfor vite hvor mange kvadrat forrige figur har for å finne antall kvadrat i neste figur. Derfor vil dette være en rekursiv strategi.

Diskusjon og sammenligning

Oppgave 2 var den oppgaven flest elever fikk til, både på 10.trinn og 2P. På begge trinn har flere elever brukt en kontekstuell strategi på denne oppgaven, men likevel ser vi at det er en god del elever som ikke klarer å beskrive mønsteret generelt eller lage en formel for antall trekanter. På 10.trinn er det ingen elever som bruker en rekursiv strategi på 2c, mens det er fire elever som bruker en rekursiv strategi av elevene i 2P. På begge trinn er det betydelig flere elever som svarer på 2b enn 2c. Det kan tyde på at elevene som brukte en rekursiv strategi i 2b ikke har oppfattet hvordan mønsterets struktur henger sammen med figurens posisjon i mønsteret. Dette samsvarer også med det Radford (2006, s. 9) påpeker, nemlig at det er vanskelig å bruke en lokal likhet til å generalisere mønsteret. Dette vil også gjelde for elevene som kun har lagt merke til at antall kvadrater endrer seg når figuren vokser. I oppgave 2c ønskes et svar på hvor mange trekanter figur n har, noe som er vanskelig å svare på dersom man kun har fokusert på kvadratene. Dette kan igjen tyde på at elevene har utfordringer med å forkaste den oppfatningen de har av mønsteret når de ser at det ikke fører fram.

Det er flere 2P-elever som svarer på oppgaven enn 10.klassinger. Det er en liten forskjell i antall 2P-elever og 10.klasinger som bruker en rekursiv strategi på oppgave 2b, men det er flere 10.klassinger som bruker en kontekstuell strategi på oppgave 2b.

Oppgave 2b har samme svakhet som oppgave 1b og 1c. Hvilken egenskap i mønsteret det er tenkt at elevene skal ta utgangspunkt i er ikke presisert. Dersom oppgaven hadde spurt om antall trekanter i figur 12, kan det være at flere elever hadde brukt en kontekstuell strategi og ikke tatt utgangspunkt i kvadratene. Tidligere har jeg nevnt at flere elever i 2P laget en formel for antall trekanter og kvadrater i mønsteret, dette kunne kanskje vært unngått dersom oppgaven ble formulert annerledes. I Tabell 7 ser vi også at det er flere strategier ingen elever har brukt. Dette kan komme av oppgavens formulering. Oppgave 2a ber elevene om å tegne den neste figuren i mønsteret, og det er da enklere å først oppfatte den avhengige variabelen som økes med en lik differanse fra en figur til neste figur (Rivera & Becker, 2008, s. 71), som i dette tilfelle vil være antall trekanter. En slik fremgangsmåte vil lede til en rekursiv strategi (Rivera & Becker, 2008, s. 71). I oppgave 2b blir elevene bedt om å beskrive Figur 12, dette er gjort bevisst for å unngå at figurnummeret i 2b er dobbelt så stort som figurnummeret i 2a. Dette kan forklare hvorfor ingen elever brukte hel-objekt strategien på denne oppgaven. I oppgave 2c bes elevene om å lage en formel for den generelle figuren. Elevene som har fått til å lage en formel i denne oppgaven, har sett en sammenheng mellom egenskaper i mønsteret og generaliseringen som dannes og bruker dermed en kontekstuell strategi (Lannin, 2005, s. 234).

4.3.3 Oppgave 3 – Kvadrat

I denne oppgaven skulle elevene fargelegge hvordan de oppfattet mønsteret i oppgaven, deretter finne antall sirkler i et $7x7$ og $20x20$ kvadrat før de fant antall sirkler i et nxn kvadrat. I oppgave 3a ble elevene bedt om å tegne to ulike måter å oppfatte mønsteret på. Dersom disse to måtene viser ulike strategier, har den strategien de har løst resten av oppgaven med blitt merket. For oppgave 3 har jeg laget en ny kolonne i tabellen over strategier, kalt misoppfatning. Grunnen til dette er at flere elever hadde en misoppfatning knyttet til hvordan antall sirkler i kvadratet skulle regnes ut. For eksempel skriver noen elever at antall sirkler er gitt ved $S = n * n - 4$, mens andre oppfattet at det skulle være sirkler i midten av kvadratet. Dette kommer jeg tilbake til i diskusjonsdelen som tilhører denne oppgaven. På neste side følger en tabell over de ulike strategiene som ble brukt av elevene på oppgave 3.

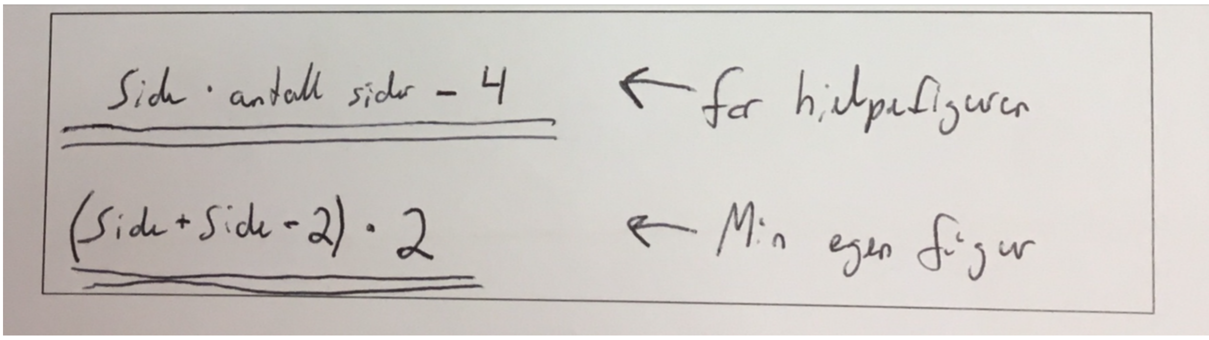
Tabell 8: Strategier brukt av elever på 10.trinn og i 2P, oppgave 3

Oppgave 3/ Strategi	**Telling**		**Rekursiv**		**Hel-objekt**		**Prøve- og feile**		**Kontekstuell**		**Misoppfatning**		**Usynlig**		**Ingen svar**	
	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P
a	2	7				1			11	12	2	2			13	7
b	5	8			1	1			8	5	2	2		4	13	9
c	1	2			1	1			6	4		8		1	21	13

Strategier brukt av 10.klassingene i oppgave 3

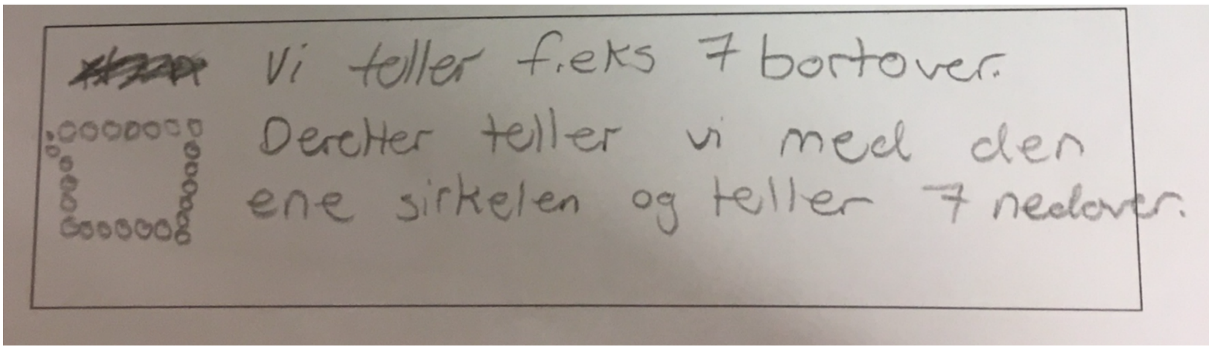
Som påpekt tidligere, skiller denne oppgaven seg ut fra de to forrige. Vi ser av tabellen at det er ingen elever som har brukt en rekursiv strategi på denne oppgaven. Derimot er det flere elever som har brukt en telle-strategi, som også er en ikke-eksplisitt strategi. På oppgave 3a er det en klar overvekt av elever som har brukt en kontekstuell strategi, men vi ser at det kun er åtte og seks elever som har brukt denne strategien videre i oppgave 3b og 3c. Resultatene tyder på at noen elever har endret strategi underveis. Det fremkommer også av tabellen at én elev har brukt hel-objekt strategien på denne oppgaven.

Denne oppgaven ga flere ekvivalente uttrykk som kan gi antall sirkler i figur n. Noen elever klarte å finne flere formler for mønsteret, som vi kan se i besvarelsen under (Bilde 11).



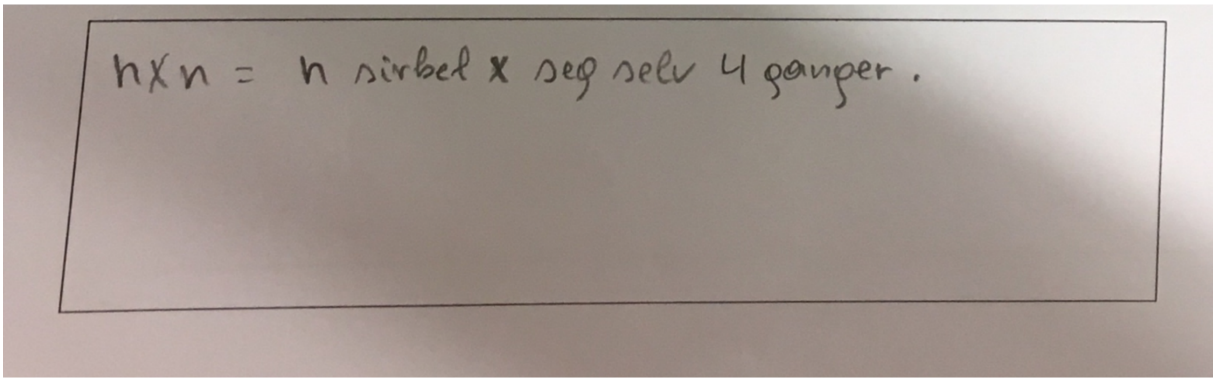
Bilde 11: Eksempel på besvarelse hvor eleven har skrevet flere uttrykk for mønsteret.

Her har eleven funnet en formel for figuren som var avbildet i oppgaven, samt hvordan eleven selv oppfattet mønsteret. Vi ser at eleven velger å bruke «side» istedenfor n, og «antall sider» istedenfor 4. Av Bilde 11 ser vi også at det er mulig å kategorisere denne strategien, selv om eleven ikke har begrunnet formelen sin. Det er tydelig at eleven har tatt utgangspunkt i sammenhengen mellom den avhengige og uavhengige variabelen når eleven har laget formlene, og at det derfor er en kontekstuell strategi. Eleven har derimot ikke begrunnet hvorfor formlene stemmer. For eksempel har ikke eleven skrevet hvorfor man må trekke fra fire i den øverste formelen. Et eksempel på telle-strategi ser vi i Bilde 12.



Bilde 12: Eksempel på telle-strategi.

Bilde 12 viser en besvarelse hvor eleven har brukt en telle-strategi. Eleven skriver at vi skal telle 7 bortover, deretter telle med den ene sirkelen og telle 7 nedover. Kjennetegnene på en telle-strategi er at man lager en tegning av figuren slik eleven har gjort, og teller antall sirkler. Slik eleven har beskrevet hvordan man skal telle vil føre til at man teller hjørnene to ganger, noe som vil gi feil svar.



Bilde 13: Eksempel på hel-objekt strategi.

Bilde 13 viser en besvarelse hvor eleven har brukt en hel-objekt strategi, og at antall sirkler i et nxn kvadrat vil være $S = 4 * n$. Eleven bruker én side av kvadratet og multipliserer for å danne en større del av mønsteret, noe som kjennetegner hel-objekt strategien. Denne løsningen vil gi samme problem som telle-strategien brukt i Bilde 7, nemlig at de fire hjørnene vil bli talt to ganger. Vi kan også se at elevene har utfordringer med symbolene som brukes.

Tabell 8 viser også at det er to elever som har en misoppfatning knyttet til denne oppgaven. Disse elevene har tenkt at kvadratet også har sirkler i midten, og at antall sirkler dermed gis med formelen $S = n * n$.

Hos 2P elevene finner vi også at det er flere strategier som brukes i denne oppgaven enn i de to forrige oppgavene.

Strategier brukt av 2P-elevene i oppgave 3

Av Tabell 8 ser vi at det er ingen elever som har brukt en rekursiv strategi, men det er flere elever som har brukt en telle-strategi. Det er også én elev som har brukt hel-objekt strategi. I oppgave 3a er det 12 elever som har oppfattet mønsteret på en slik måte at det er mulig å bruke en kontekstuell strategi, men det er kun fem elever som bruker denne strategien i oppgave 3b, og fire elever i oppgave 3c. Det tyder på at det er flere elever som har endret strategi underveis i oppgaven.

I oppgave 3c er det fem elever som har en misoppfatning knyttet til hvordan antall sirkler regnes ut. De fleste av disse elevene har svart at antall sirkler kan finnes ved formelen $S = n * n - 4$. En av 2P – eleven som hadde skrevet dette ble plukket ut til intervju, og ble bedt om å forklare formelen. Det ser vi i utdraget fra intervjuet under.

105 Intervjuer: Her har du skrevet at formelen er $n * n - 4$. Kan du forklare den?
106 Elev: Jeg tenkte bare at hvis man ganger på en måte sidene også tar man minus de fire hjørnene rundt.

Det er tydelig at eleven har tenkt riktig på denne oppgaven. De fire hjørnene vil bli talt to ganger, men måten eleven vil multiplisere sidene for å få det korrekte antall sirkler blir feil. Noen av besvarelsene fra 2P-elevene som er kategorisert som misoppfatning, har gjort som elevene på 10.trinn. Altså, tenkt at det er sirkler i midten av kvadratet.

Diskusjon og sammenligning

Oppgave 3 er den mest interessante oppgaven med tanke på hvilke strategier som er brukt. Hos både 10.trinn og 2P-elevene er det fire ulike strategier som er representert i resultatet, og ingen elever har brukt en rekursiv strategi. Dette kan forklares med at oppgave 3 viser et generisk mønster, og man kan ikke umiddelbart se hvor mange sirkler figuren vokser med.

Rivera & Becker (2008, s. 71) hevder at elever bruker rekursjon som et inngangssteg i generaliseringsprosessen, og rekursjon er noen ganger det eneste elevene bruker. I denne oppgaven er det ingen elever som har benyttet seg av rekursjon, og det kan dermed tyde på at Küchemann (2010, s. 239) har rett i at hvilke strategier elevene benytter seg av kan skyldes måten mønsteret er representert på (Kapittel 2.4.5). Likevel ser vi at det flere elever på begge trinn som velger å bruke telle-strategi på denne oppgaven, som i likhet med rekursjon, er en ikke-eksplisitt strategi. Det kan tyde på at i tilfeller hvor det ikke er mulig å bruke rekursjon er elevene som ellers ville brukt denne strategien tilbøyelig til å bruke en telle-strategi. Vi ser også at det er ingen elever som har brukt en prøve-og-feile strategi, noe som var uventet. Det kan være at noen av elevene som har brukt en prøve-og-feile strategi har blitt merket med en usynlig strategi. Som beskrevet i 4.3 har elever som har skrevet en formel som er vanskelig å tolke blitt kategorisert som usynlig, men kan være et eksempel på prøve-og-feile strategi.

I oppgave 3 er det, på begge trinn, flere elever som endrer strategi underveis i oppgaven. Det er vanskelig å si hvorfor dette skjer. En mulig forklaring er at elevene har utfordringer knyttet til oppfattelsesnivået, som beskrives av Lee (1996, s. 105) (Kapittel 2.4.4). Tabell 8 viser at i oppgave 3a er det flere elever som klarer å oppfatte mønsteret på en algebraisk nyttig måte, enn antall elever som bruker en kontekstuell strategi i 3b. Det kan tyde på at elevene har utfordringer med å bruke oppfattelsen av mønsteret videre i oppgaven. En annen forklaring kan være at i oppgave 1b kan elevene enten tegne figuren eller forklare den med ord. Det kan oppleves enklere å tegne figuren og telle antall sirkler, og på den måten bli ferdig med oppgaven. Det er derimot vanskelig å vite om disse elevene hadde tegnet uansett hvordan oppgavens formulering hadde vært.

Sammenligner man de to trinnene på denne oppgaven ser man at det er flere elever som svarer på oppgaven i 2P enn på 10. trinn. Likevel ser vi at det er flere på 10.trinn som har brukt en kontekstuell strategi for å løse denne oppgaven, og at det er flere på 10.trinn som har kommet fram til en generell beskrivelse av mønsteret. Som vi har sett er det åtte elever i 2P som har hatt en misoppfatning i oppgave 2c. Av utdraget fra intervjuet ser vi at eleven forklarer en kontekstuell måte å oppfatte mønsteret på (Linje 106), men klarer ikke å multiplisere sidene på en måte som gir riktig antall sirkler. Dette kan skyldes at eleven har en misoppfatning fra geometri, da vi ser at eleven regner areal og ikke omkrets. Eleven har likevel trukket fra de fire hjørnene, noe som kan tyde på at eleven blander formelen for areal og omkrets. Det var også noen elever på 10.trinn som hadde brukt areal istedenfor omkrets, men disse elevene misforstod oppgaven og tenkte at kvadratet var fylt med sirkler. Elevene som har oppfattet at det er sirkler inne i kvadratet kunne jeg merket som hel-objekt strategi. Jeg valgte derimot å merke det som en misoppfatning, fordi elevene har misforstått hvilke sirkler det er som skal telles. Alt tatt i betraktning, tyder resultatene på at elevene på 10.trinn gjorde det noe bedre enn 2P-elevene på denne oppgaven, med tanke på at vi ønsker at elevene skal benytte en kontekstuell strategi for å utvikle sin algebraiske tenkning.

Oversikt over elevenes strategibruk i de tre oppgavene

Tabell 9 viser en oversikt over de tre tabellene som er blitt presentert i delkapittel 4.3. I oppgave 1 og 2 er det merket x i kategorien «Misoppfatning», dette er for å vise at denne kategorien ikke er aktuell for disse to oppgavene.

Tabell 9: Oversikt over elevenes strategier på de tre oppgavene

Oppgave 1/ strategi	Telling		Rekursiv		Hel-objekt		Prøve og feile		Kontekstuell		Misoppfatning		Usynlig		Ingen svar	
	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P
1a			8	5							x	x	19	24	2	
1b	1		18	20	2						x	x	4	8	4	1
1c			5	14			2				x	x	4	4	18	11
Oppgave 2/strategi	**Telling**		**Rekursiv**		**Hel-objekt**		**Prøve og feile**		**Kontekstuell**		**Misoppfatning**		**Usynlig**		**Ingen svar**	
2a	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P
			1								x	x	26	26	2	3
2b			6	8					10	5	x	x	10	12	3	4
2c				4			1		11	14	x	x	2	1	15	10
Oppgave 3/strategi	**Telling**		**Rekursiv**		**Hel-objekt**		**Prøve og feile**		**Kontekstuell**		**Misoppfatning**		**Usynlig**		**Ingen svar**	
3a	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P	10.tr	2P
	2	7				1			11	12	2	2			13	7
3b	5	8			1	1			8	5	2	2		4	13	9
3c	1	2			1	1			6	4		8		1	21	13

Vi ser at ulike strategier er blitt brukt på de tre oppgavene, dette viser at oppgavens formulering og vanskelighetsgrad kan ha noe å si for hvilken strategi elevene bruker. Vi ser også at elevene på de to trinnene stort sett bruker de samme strategiene for å løse oppgavene. Dette diskuteres videre i kapittel 5.

4.4 Utfordringer med begrunnelsesnivået og verbaliseringsnivået

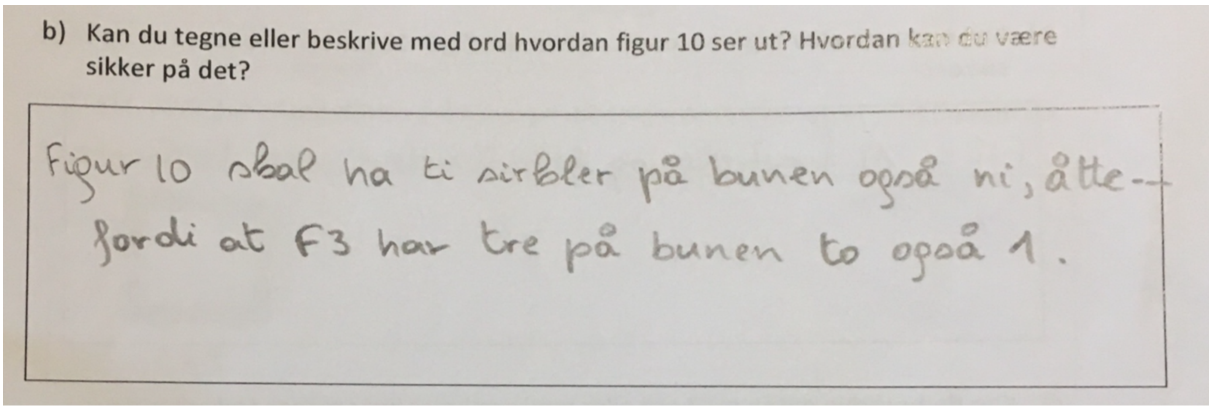
Jeg har tatt utgangspunkt i Lannins (2005) rammeverk for kategorisering av elevenes begrunnelse. Resultatene på de tre oppgavene er nokså like, og jeg vil derfor presentere en oversikt over resultatet på de tre oppgavene sammen.

Tabell 10: Begrunnelsesnivå 10.trinn og 2P.

Oppgave 1 / Begrunnelsesnivå	Nivå 0 – Ingen begrunnelse		Nivå 1 – Henvisning til autoritet		Nivå 2 – Empirisk begrunnelse		Nivå 3 – Generisk begrunnelse		Nivå 4 – Deduktiv begrunnelse		Ingen svar	
	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P
a	19	27			8	2					2	0
b	14	18			11	10					4	1
c	9	14			2	4					18	11
Oppgave 2 / Begrunnelsesnivå	**Nivå 0**		**Nivå 1**		**Nivå 2**		**Nivå 3**		**Nivå 4**		**Ingen svar**	
	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P
a	27	26									2	3
b	13	16			9	7	4	2			3	4
c	12	15			1	2		2	1		15	10
Oppgave 3 / Begrunnelsesnivå	**Nivå 0**		**Nivå 1**		**Nivå 2**		**Nivå 3**		**Nivå 4**		**Ingen svar**	
	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P
a	16	22									13	7
b	16	20									13	9
c	6	15			2	1					21	13

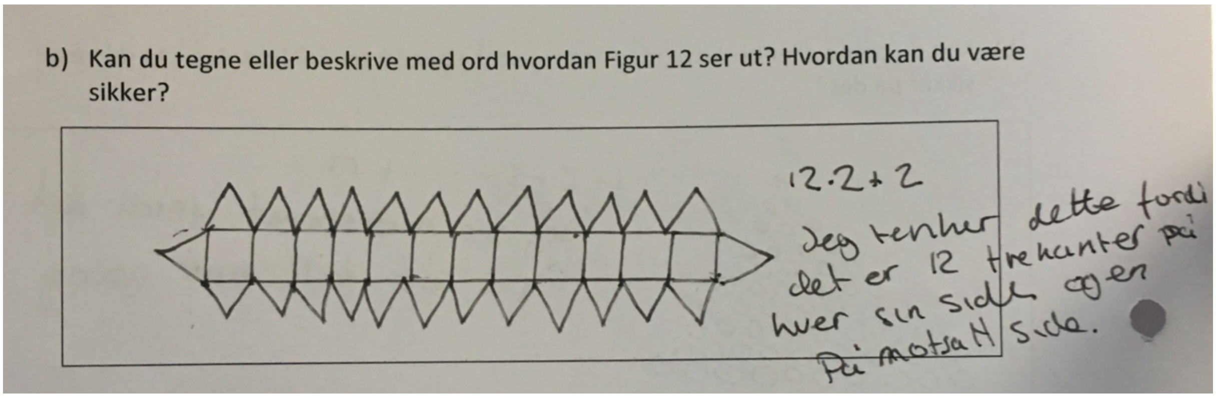
Begrunnelsesnivå på 10.trinn

Av Tabell 10 framkommer det at elevene hovedsakelig ligger på Nivå 0, altså ingen begrunnelse. I oppgave 1 og 2 er det flere elever som ligger på Nivå 2, empirisk begrunnelse. På oppgave 2 er det også noen elever på Nivå 3 og Nivå 4, som er generisk og deduktiv begrunnelse. I oppgave 3 er det få elever på Nivå 2 sammenlignet med de to andre oppgavene. Eksempler på de ulike nivåene følger under.



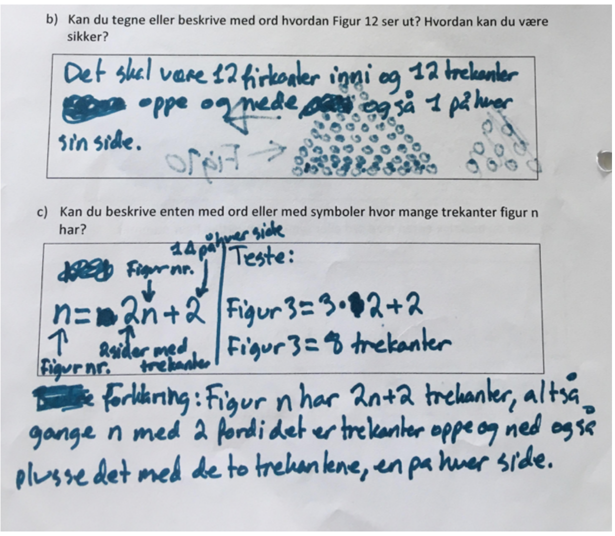
Bilde 14: Eksempel på empirisk begrunnelse, 10.trinn oppgave 1b.

Bilde 14 viser et eksempel på en empirisk begrunnelse hvor eleven har brukt tidligere figurer til å begrunne hvorfor figur 10 ser ut som den gjør i oppgave 1b. Dersom eleven ikke hadde begrunnet en tidligere figur til å begrunne hvorfor figur 10 ser slik ut, ville denne besvarelsen blitt kategorisert som Nivå 0. Vi kan se hvordan Nivå 2 skiller seg fra Nivå 3 ved å sammenligne Bilde 14 med Bilde 15.



Bilde 15: Eksempel på generisk begrunnelse, 10.trinn oppgave 2b.

I besvarelsen i Bilde 15 har eleven brukt en generisk begrunnelse. Vi ser at eleven beskriver det generelle ved å bruke et spesielt eksempel, altså figur 12. Eleven har lagt merke til at det er 12 trekanter på hver side av hvert kvadrat og to på siden. Dette skiller seg fra Nivå 2 ved at eleven begrunner ut i fra strukturer i mønsteret, og ikke bruker tidligere eksempler til å begrunne hvorfor figuren er slik den er. Dersom eleven skulle vært på Nivå 4 må begrunnelsen være helt uavhengig av et spesielt eksempel, som vi kan se på Bilde 16.



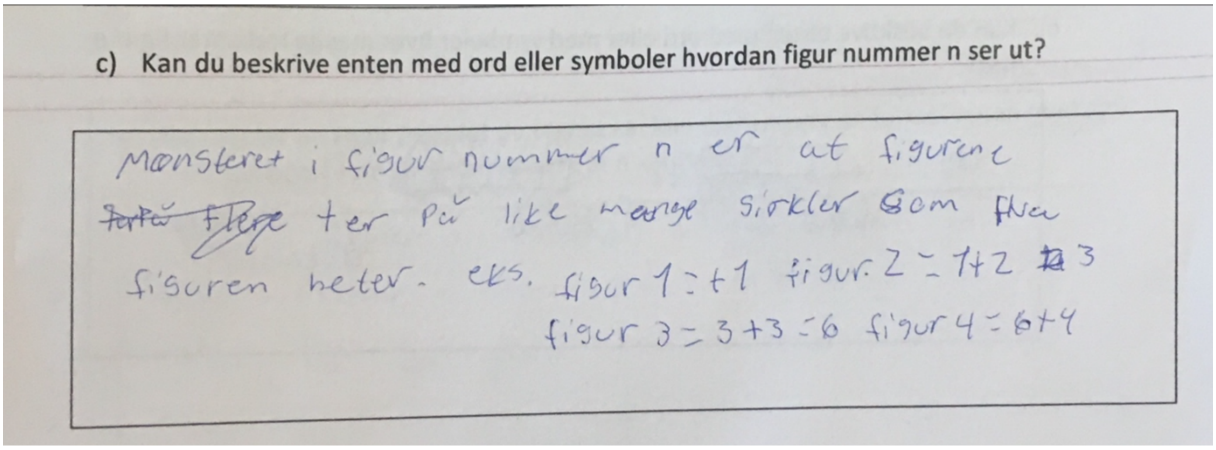
Bilde 16: Eksempel på deduktiv begrunnelse, 10.trinn oppgave 2b og 2c.

Bilde 16 viser at eleven går fra en generisk begrunnelse i oppgave 2b til en deduktiv begrunnelse i oppgave 2c. Dette viser hvordan eleven går fra et spesielt eksempel til det generelle. I oppgave 2c ser vi at eleven forklarer formelen uavhengig av et spesielt eksempel. Eleven forklarer leddene i formelen ved å vise til strukturer i mønsteret. Eleven har skrevet n på venstre side i formelen, men vi ser at eleven har skrevet en pil opp som viser at det er figurnummeret. Vi ser også at eleven har testet formelen for Figur 3. Det kan tyde på at det eleven mener å skrive til venstre i formelen er F_n, men vi kan ikke forvente at eleven har lært denne notasjonen enda.

Begrunnelsesnivå i 2P

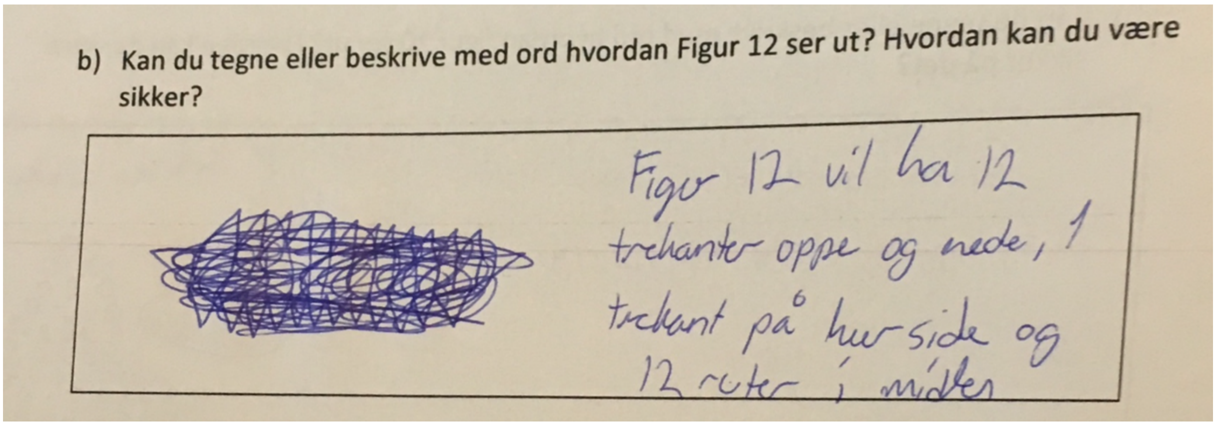
Tabell 10 viser at 2P-elevene ligger på Nivå 0 og Nivå 2 i oppgave 1 og 2, mens de fleste elevene ligger på Nivå 0 i oppgave 3. Nivå 3 finner man kun i oppgave 2, mens det er ingen elever på Nivå 4 i noen av oppgave.

I oppgave 1c er det fire elever som har begrunnet svaret sitt empirisk. Bilde 17 viser én av disse besvarelsene.



Bilde 17: Eksempel på empirisk begrunnelse, 2P oppgave 1c.

Eleven brukt spesielle eksempler til å verifisere svaret sitt. Altså, vil figur n se ut på en viss måte fordi tidligere figurer ser slik ut. Som vi har sett skiller dette seg fra Nivå 3. Et eksempel på Nivå 3 fra 2P-elevene er gitt i Bilde 18 på neste side.



Bilde 18: Eksempel på generisk begrunnelse, 2P oppgave 2b.

Denne begrunnelsen er nokså lik begrunnelsen til eleven på 10.trinn (Bilde 15), og eleven har tatt utgangspunkt i generelle deler av mønsteret. Besvarelsen skiller seg fra besvarelsen i Bilde 15 ved at denne eleven også har merket seg at det vil være 12 kvadrater.

Diskusjon og sammenligning

Resultatene viser at både 2P- elevene og 10.klassingene sjelden begrunner svarene sine. Når elevene begrunner svarene sine blir det ofte gitt en empirisk begrunnelse. Dette kan tyde på at elevene mener at å vise til eksempler er en gyldig begrunnelse for besvarelsen, til tross for at begrunnelsen ikke knyttes til et generelt forhold som vises i det gitte mønsteret. For at et argument skal anses som gyldig må det knyttes til et generelt forhold i mønsteret (Lannin, 2005, s. 235), som vi for eksempel så i Bilde 16.

Flere 10.klassinger begrunner svarene sine enn 2P – elever, men heller ikke her er det store forskjeller. Elevene ligger hovedsakelig på Nivå 0 og Nivå 2, og de andre nivåene står stort sett tomme i tabellene (Tabell 10). Det er ingen elever som begrunner på Nivå 1, som er henvisning til autoritet. Grunnen til dette kan være at elevene måtte løse oppgavene på egenhånd, da oppgavene ble gitt som en test. Elevene hadde derfor ikke mulighet til å spørre lærer om svaret. At det er få elever på Nivå 3 og 4 kan tyde på at elevene ikke er trente i å begrunne svarene sine, eller reflektere rundt hvordan de løser oppgavene. Dette samsvarer med det Stacey & Macgregor (1995, s .82) har funnet om at elevene ofte klarer å fortsette mønstre, men de klarer ikke å forklare hva de gjør. Warren (2005, s. 11) skriver at dette kan skyldes at elevene ikke har forståelse for de nødvendige faguttrykkene som brukes. For eksempel kan vi se dette i Bilde 14 hvor eleven skriver «det vil være 10 sirkler *på bunnen*, også ni, åtte..» istedenfor å referere til hvilken rad i figuren antallet sirkler vil være på. I besvarelsen i Bilde 17 bruker ikke eleven «figurnummer», men refererer til figurens navn. Mangel på forståelse for disse begrepene kan gjøre det utfordrende for elevene å begrunne svarene sine. Det understreker viktigheten av å ha fokus på disse begrepene i undervisning og oppfordre elevene til å bruke dem, som påpekt av Johannessen (2019, s. 16).

Sammenligner man tabellen for begrunnelsesnivå og tabellene for hvilke strategier som er brukt, ser man at flere besvarelser er kategorisert som Nivå 0 enn det er besvarelser med en usynlig strategi. Grunnen til dette er at det i noen tilfeller er mulig å se hvilken strategi elevene har brukt, til tross for at de ikke har begrunnet svarene sine. Eksempler på dette ser vi blant annet i Bilde 11 og 12 i kapittel 4.3.3. Vi kan også se det i Bilde 4 i kapittel 4.3.1, hvor eleven skriver at figur 10 vil være dobbelt så stor som figur 5, uten å begrunne hvorfor det må være slik.

4.5 Utfordringer med symboliseringsnivået og forståelse av hva n er

En av utfordringene elever har med generalisering av figurmønsteroppgaver er knyttet til symboliseringsnivået, ifølge Lee (1996, s. 105). En gjennomgang av antall besvarelser som bruker symboler presenteres i Tabell 11.

Tabell 11: Antall besvarelser med symboler

Trinn	**Besvarelser med symboler**
10	13
2P	14

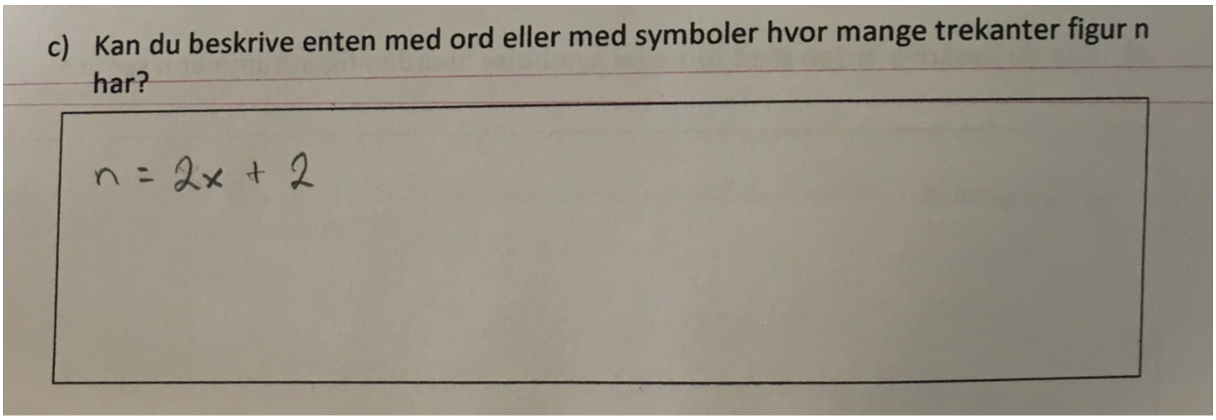
Vi ser at det er omtrent like mange elver i 2P som besvarer minst én oppgave med symboler som det er på 10.trinn. De resterende elevene har enten svart med ord eller ikke besvart oppgaven. Gjennom eksemplene fra elevenes besvarelser som er vist tidligere, ser vi at både elever på 10.trinn og 2P – elever har utfordringer med å lage generelle uttrykk med symboler. For eksempel har vi sett at elever på begge trinn blander ord og symboler i de generelle uttrykkene (Bilde 9 & Bilde 11). En annen utfordring elevene har er at de blander n med x eller andre symboler. Tabell 12 viser en oversikt over de ulike utfordringene elevene har med symbolbruk, og hvor mange på hvert trinn som hadde de ulike utfordringene.

Tabell 12: Ulike vanskeligheter elevene på 10.trinn og i 2P hadde med bruk av symboler

Oppgave/Utfordring	**Korrekt bruk av symboler**		**Mangler likhetstegn**		**Blanding av ord og symboler**		**n på venstre side i formelen**	
	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn	2P	10.trinn
1c		3					3	1
2c	1	7	5	4	3	1	2	
3c	1	3	6	2	3	2	2	

Kategorien «Korrekt bruk av symboler» betyr ikke nødvendigvis at elevene har kommet fram til den riktige formelen. Derimot betyr det at elevene har satt opp en formel på korrekt måte, altså at de har et generelt uttrykk som gir en gitt verdi. Kategorien «Mangler likhetstegn» betyr at eleven har gitt et generelt uttrykk, men ikke hvilken verdi uttrykket gir. «Blanding av ord og symboler» vil si at eleven har blandet ord og symboler i det generelle uttrykket (Bilde 11), mens «n på venstre side i formelen» betyr at eleven setter sammen uttrykk med for eksempel n og x, og har n på venstre side av likhetstegnet.

Av Tabell 12 ser vi at 2P-elevene har brukt symboler på flere oppgaver enn det 10. klassingene har gjort. Tabellen viser at det er flere 10.klassinger enn 2P-elever som klarer å sette opp et korrekt uttrykk. Vi ser at det flest 2P-elever mangler er å skrive hvilken verdi uttrykket gir, samt at det er en del 2P-elever som setter n på venstre side i formelen. Et eksempel vises i Bilde 19.



Bilde 19: Elev setter sammen uttrykk med n og x.

Bilde 19 viser at eleven har forstått sammenhengen mellom den avhengige og uavhengige variabelen i mønsteret, og klarer å sette opp en formel. Som vi ser har eleven gjort mye riktig, og forstår at det må bruke forskjellige symboler for antall trekanter og figurnummer. Problemet med formelen er at n står på venstre side og dermed representerer den avhengige variabelen, mens i oppgaveteksten representerer n den uavhengige variabelen. Dette kan tyde på at eleven ikke helt har forstått hvordan variabelen n skal brukes i oppgaven. Dette ga også elever på begge trinn uttrykk for i intervju.

I intervju gir elever på begge trinn uttrykk for at det er vanskelig å forstå hva n er, og hvordan man skal bruke variabelen. Under følger et utdrag fra intervju med en elev i 2P.

17 Intervjuer: Og det er det samme den veien, så du får 10, 9, 8, ...,1. Hvis du hadde sett på figur 100. Hvor mange ville den hatt i den nederste raden?

18 Elev: Nei, hadde det ikke vært 100 da?

19 Intervjuer: Ja, hvis du har 100 i den rekken her (Peker på nederste rekke i figur 10), så vil du ha en rekke som går over den. Hvor mange sirkler er det i den?

20 Elev: Åja, ja, er det 99?

21 Intervjuer: Ja!

22 Elev: Åja! Sånn ja!

23 Elev: også får du 98

24 Intervjuer: Ja, og så en mindre helt ned til 1.

25 Elev 1: Ja!

26 Intervjuer: Og hvis du da skal skrive det med n. Klarer du å se for deg det?

27 Elev: Jeg skjønte egentlig ikke det der med n, og alt det.

I intervju klarer eleven å beskrive en rekursiv strategi for oppgave 1. Eleven er i stand til å bruke strategien til å beskrive hvordan figur 100 ser ut, men klarer ikke å gi en generell beskrivelse av hvordan en ukjent figur ser ut. For denne eleven var det ikke enkelt å forstå hva som menes med variabelen n. Under følger et utdrag fra intervju med en elev på 10.trinn hvor det samme problemet oppsto.

29 Intervjuer: Ja, hvis du tenker på figur 100. Hvor mange(sirkler) har den i nederste rad?

30 Elev: 100

31 Intervjuer: og raden over?

32 Elev: 99

33 Intervjuer: ja, og hvor mange får den på toppen?

34 Elev: en

35 Intervjuer: ja, og hvis du da tenker på n som et tall. Hvor mange sirkler ville du hatt i bunnen av figur n?

36 Elev: jeg vet ikke helt

I likhet med eleven i 2P klarer denne eleven å beskrive hvordan figur 100 ser ut, men forstår ikke hvordan man skal bruke n til å beskrive en generell figur. I intervju bekrefter en elev i 2P at oppgavene ble vanskelige når de skulle finne et generelt uttrykk, som vi kan se i utdraget under.

127 Intervjuer: Hva synes du om denne type oppgave?
128 Elev: litt nytt og rart
129 Intervjuer: synes du de var gøye eller synes du de var vanskelige?
130 Elev : De var gøye i begynnelsen, helt til vi måtte begynne med n og sånn.

Diskusjon og sammenligning

Funnene viser at elevene på begge trinn finner det utfordrende å lage generelle uttrykk. Det ser ut til at elevene på 10.trinn får det til i litt større grad enn elevene i 2P, men elevene i 2P prøver seg med symboler i flere oppgaver enn det elevene på 10.trinn gjør.

Det er flest 2P-elever som blander n med en annen variabel, slik som vi så i Bilde 19. I oppgavene er elevene nødt til å bruke to variabler, en uavhengig variabel og en avhengig variabel. Det som gjør at denne kategorien er en utfordring for elevene er at elevene setter n til venstre for likhetstegnet, og bruker et annet symbol i uttrykket (Bilde 19). Dermed har variabelen n en annen betydning i det generelle uttrykket elevene lager, enn det variabelen har i oppgaveteksten. Dette kan tyde på at elevene ikke er sikre på hva n er. Stacey & MacGregror (1997, s.15) skriver at elever ofte baserer sin tolkning av bokstaver på intuisjon. Siden oppgavene spør etter figur nummer n, kan det hende at elevene tolker dette som at n egentlig betyr F_n, og de må derfor bruke x eller et annet symbol som variabel for figurnummeret.

Elevene fra de to trinnene har vært kjent med algebra i flere år, og elevene på begge trinn skal være i stand til å behandle, faktorisere og forenkle algebrauttrykk, samt bruke tall og variabler i utforskning (Utdanningsdirektoratet, 2013). Vi ser likevel at dette er et problem for elevene, og omtrent halvparten av elevene på begge trinn velger å ikke bruke symboler til å lage generaliseringer. Dette kan tyde på at elevene oppfatter det som vanskelig å bruke variabler i denne sammenhengen. Elevene møter ofte variabler i likninger, hvor variabelen da representerer et ukjent tall. Det kan derfor være utfordrende for eleven å forstå at en variabel er en størrelse som kan variere, og at det er en annen størrelse som varierer med den (Ely & Adams, 2010, s. 21). På begge trinn er det flere elever som ikke skriver hva det generelle uttrykket er en formel for, og det kan skyldes nettopp det Ely & Adams (s. 21, 2010) påpeker. Det kan være utfordrende for elevene å forstå at det er to variabler, hvor den ene varierer avhengig av den andre. Det vil derfor være viktig at elevene får erfaring med å bruke variabler i ulike situasjoner, slik at elevene kan reflektere rundt hva en variabel er.

4.6 Utfordringer med oppfattelsesnivået og oppgaveformuleringens påvirkning på oppfattelsesnivået

Gjennom analysen av hvilke strategier elevene har brukt på de tre oppgavene ser vi at vanskelighetsgraden på mønsteret og oppgavens formulering kan ha mye å si for hvordan elevene oppfatter strukturene i mønsteret. Vi så at i oppgave 1 oppfatter de fleste elevene mønsteret på en måte som leder til rekursjon. For elevene på de to trinnene var dette et mønster som var vanskelig å lage en generell, eksplisitt formel for. Oppgavens formulering, som er diskutert i kapittel 4.3.1, gjør også at elevene ikke får noen grunn til å utforske og lete etter strukturer i mønsteret som kan lede til en generell, eksplisitt formel. I oppgave 2 er det flere elever, på begge trinn, som oppfatter mønsteret på en kontekstuell måte. Oppgave 2a og 2b kan løses ved å bruke rekursjon, men i 2c blir elevene invitert til å lete etter mønsterets struktur. I dette mønsteret var det en tydelig sammenheng mellom figurens posisjon i mønsteret og egenskapen som endret seg. Dette gjorde at flere elever kom fram til en generell, eksplisitt formel for antall trekanter. Dette var også oppgaven flest elever, på begge trinn, svarte på. Det kan tyde på at mønstre som viser en tydelig sammenheng mellom mønsterets posisjon og den uavhengige variabelen kan være lurt å bruke dersom elevene har liten erfaring med denne type oppgaver.

I oppgave 3 blir elevene spesifikt bedt om å tegne figuren slik de oppfatter mønsteret. På begge trinn klarer de fleste elevene som svarer å oppdage et mønster som kan føre til en generell, eksplisitt formel, altså ser elevene et algebraisk nyttig mønster (Lee, 1996, s. 95). Det er likevel få elever som bruker dette videre, noe som samsvarer med Wilkie & Clarke (2014, s. 235) sine funn om at flere elever bruker en rekursiv strategi til tross for en kontekstuell oppfatning. Det kan skyldes at elevene har liten erfaring med å se sammenhenger mellom variablene, samt at elevene ikke er vante med å tenke på denne måten (Wilkie & Clarke, 2014, s. 234). Som jeg var inne på i kapittel 4.3.3, er oppgave 3 et generisk mønster. Det gjør det vanskelig for elevene å benytte rekursjon, og er en god oppgave for å utfordre elevene til å fokusere på mønsterets struktur (Küchemann, 2010, s. 242).

I alle oppgavene har de fleste elevene, på begge trinn, oppfattet mønstrene på en måte som gjør dem i stand til å tegne den neste figuren i mønsteret og noen elever har kommet fram til en eksplisitt formel. Det som ser ut til å være utfordringen er å se sammenheng mellom posisjonen og egenskapene i mønsteret, og bruke dette til å lage en generell formel. Spesielt i oppgave 1 var dette utfordrende for elevene, men også i oppgave 3. Dette kan være knyttet til om elevene ser etter en empirisk formel, istedenfor å se etter en strukturell formel (Küchemann, 2010, s. 234). Det vil si at elevene leter etter hvordan en figur endrer seg til neste figur, istedenfor å lete etter sammenhengen mellom egenskapene og figurens posisjon i mønsteret. Küchemann (2010, s. 242) påpeker at det noen ganger er nyttig å bruke rekursjon, for eksempel for å bli kjent med et mønster. Men i figurmønsteroppgaver er det viktig at elevene kan gjenkjenne når det er hensiktsmessig å bruke de ulike strategiene (Küchemann, 2010, s. 242). For å gjøre elevene mer oppmerksomme på hvilke strategier de bruker, er det nødvendig at elevene presenteres for ulike generaliseringsoppgaver. Da kan elevene reflektere rundt hvilke strategier som er nyttige å bruke i de ulike tilfellene. Lee (1996, s. 95) påpeker også at det er utfordrende for elevene å se et algebraisk nyttig mønster, og bruke oppfatningen av mønsteret til å generalisere. Dette betyr at utfordringer knyttet til oppfattelsesnivået ligger i å oppfatte et algebraisk nyttig mønster, nemlig å se sammenhengen mellom mønsterets egenskap og posisjon.

5 Hovedfunn og konklusjon

I dette kapittelet vil jeg svare på forskningsspørsmålet i masteroppgaven. Det vil jeg gjøre gjennom å presentere hovedfunnene fra kapittel 4. Forskningsspørsmålet ble presentert i kapittel 1.2 og er følgende:

Hvilke forskjeller finner vi når vi sammenligner 10.klassingers og 2P-elevers valg av strategier og begrunnelsesnivå i figurmønsteroppgaver, og hvilke utfordringer møter elevene i disse oppgavene?

5.1 Strategibruk hos 10.klassinger og 2P- elever

I kapittel 4.3 presenterte jeg de ulike strategiene elevene har brukt på oppgavene. Tabellene presentert i kapittel 4.3 viser at elevene brukte ulike strategier for å løse de tre oppgavene. Elevene på de to trinnene brukte stort sett de samme strategiene på hver av oppgavene. Unntaket er at noen elever på 10.trinn brukte hel-objekt og prøve-og-feile strategi på oppgave 1, noe som ikke ble funnet hos 2P-elevene. Hos begge trinnene ble ikke-eksplisitte strategier brukt i oppgaver hvor elevene ble bedt om å fortsette mønstrene, spesielt i oppgave 1. Dette stemmer overens med det Rivera & Becker (2008, s. 71) har funnet om at elever ofte bruker rekursjon som det første de gjør i figurmønsteroppgaver. I oppgavene hvor elevene ble bedt om å beskrive en generell figur ble både eksplisitte og ikke-eksplisitte strategier brukt på begge trinn.

5.1.1 Ikke-eksplisitte strategier

I Lannins (2005, s. 234) rammeverk for hvilke strategier elevene bruker, er det to strategier som kategoriseres som ikke-eksplisitte. Dette er rekursiv strategi og telle strategi. På begge trinn brukes disse strategiene i hovedsak på enklere oppgaver hvor oppgaven spør etter et lavt figurnummer. Det ser vi for eksempel på oppgave 1a og 2a. Fordi ikke-eksplisitte strategier ofte brukes som inngangssteg i figurmønsteroppgaver (Rivera & Becker, 2008, s.71) er det naturlig å tenke at elevene som har brukt en usynlig strategi, egentlig har brukt en av de to ikke-eksplisitte strategiene. I oppgave 1a og 1b er det en stor overvekt i antall elever som har brukt en rekursiv strategi, på begge trinn. På oppgave 1 er telle-strategien kun brukt av én elev på 10.trinn, mens ingen elever har benyttet denne strategien på oppgave 2. Derimot har flere elever på begge trinn benyttet telle-strategien på oppgave 3. Oppgaven presenteres ikke som et etterfølgende mønster, og det gjør det vanskelig å bruke rekursjon på denne oppgaven. For elevene som har brukt en rekursiv strategi i de tidligere oppgavene, kan denne oppgaven ha vært en utfordring. For å finne et generelt uttrykk må elevene lete etter strukturer i mønsteret (Küchemann, 2010, s. 242). Med tanke på at telle-strategien er en lite effektiv strategi, kan det tyde på at elevene har vansker med å oppfatte sammenhengen mellom de to variablene i mønsteret som presenteres i oppgave 3.

5.1.2 Eksplisitte strategier

I følge Lannins (2005, s. 234) rammeverk er tre strategier eksplisitte. Dette er hel-objekt, prøve-og-feile og kontekstuell strategi. Disse strategiene gjør at man kan regne ut den ønskede egenskapen direkte ut ifra en formel. På forhånd var det forventet at elevene skulle bruke disse strategiene på oppgavene hvor det ble bedt om en formel eller beskrivelse av den generelle figuren. Tabellene i kapittel 4.3 viser at det er i disse tilfellene at eksplisitte strategier er mest brukt.

For å utvikle elevenes algebraiske tenkning er det ønskelig at elevene benytter seg av den kontekstuelle strategien (Radford, 2006, s. 4). Den kontekstuelle strategien kjennetegnes ved at man danner en formel basert på informasjon i oppgaven (Lannin, 2005, s. 234). Spesielt i oppgave 2c er det mange elever, på begge trinn, som har brukt denne strategien. I oppgave 2 var det enkelt å oppdage sammenhengen mellom antall trekanter og figurens posisjon, sammenlignet med antall sirkler og figurens posisjon i oppgave 1. I oppgave 3 er det også flere elever på begge trinn som har brukt en kontekstuell strategi gjennom hele oppgaven, men vi så at det var få elever som hadde kommet fram til en eksplisitt formel på begge trinn.

Hel-objekt strategien går ut på at eleven bruker en del av mønsteret til å lage en større del. Denne strategien brukes ofte feil fordi den ikke tar hensyn til overtelling eller undertelling, men kan i noen tilfeller brukes korrekt (Lannin, 2005, s. 234). I Oppgave 1b så vi at to elever på 10.trinn brukte strategien feil, men oppdaget selv i intervju hvor feilen lå. Strategien er ikke brukt på oppgave 2, men vi finner den igjen på oppgave 3 hvor elever på begge trinn brukte strategien. I oppgave 3 kan hel-objekt strategien brukes korrekt, dersom man deler inn kvadratet i to slik som Figur 6 viser.

Figur 6: Hel-objekt strategi, Oppgave 3

Det var derimot ingen elever på de to trinnene som brukte denne strategien som vist i Figur 6. På begge trinn har noen elever brukt denne strategien på samme måte som eleven i Bilde 13, altså at antall sirkler er gitt ved fire ganger n. I andre tilfeller har elevene regnet ut antall sirkler ved følgende formel $S = (n + n) * 2$. Elevene har ikke oppgitt denne formelen, men brukt denne fremgangsmåten i 3b. Som vi ser, vil det gi samme problem som den andre måten elevene har brukt denne strategien på.

Prøve-og-feile strategien er også en strategi som ofte brukes feil. Elevene eksperimenterer ofte med tall og regneoperasjoner uten å tenke over hvordan dette passer med mønsteret, og tester så om formelen stemmer med figurene i mønsteret (Lannin, 2005, s. 234). Vi ser at denne strategien kun er brukt av elever på 10.trinn, og det er få elever som benytter seg av denne strategien. I kapittel 4.3.1 så vi eksempler på to elever som har brukt denne strategien. Vi ser at de har skrevet opp flere formler, og strøket ut da de oppdaget at formelen ikke stemte. Ingen av disse elevene kom fram til riktig svar, noe som kan tyde på at det er vanskelig å finne en eksplisitt formel dersom man flytter fokuset vekk fra mønsterets struktur.

5.2 Elevenes begrunnelsesnivå

I analysen av elevenes begrunnelsesnivå tok jeg utgangspunkt i Lannins (2005, s. 236) rammeverk for ulike nivåer elevene begrunner på. Disse fire nivåene er:

Nivå 0 – ingen begrunnelse

Nivå 1 – henvisning til autoritet

Nivå 2 – empirisk begrunnelse

Nivå 3 – generisk begrunnelse

Nivå 4 – deduktiv begrunnelse

I dette prosjektet har fire av de fem nivåene blitt representert, men det er nivå 0 og nivå 2 som er mest brukt av elevene. Dette stemmer overens med det Radford (1996, s. 109) skriver om at noen elever ofte synes det er nok å vise et par eksempler for at generaliseringen stemmer.

5.2.1 Empirisk begrunnelse

Empirisk begrunnelse vil si at eleven argumenterer for at generaliseringen er riktig fordi den stemmer for spesielle eksempler. Tabell 10 viser at det på begge trinn er flest elever som benytter seg av empirisk begrunnelse, dersom vi ser bort i fra nivå 0. Dette kan skyldes at elevene er vant til et tradisjonelt fokus på spesielle eksempler, istedenfor å ha et fokus på det generelle (Lannin, 2005, s. 235). Et eksempel på dette er at elevene ofte bes om å regne ut prisen på for eksempel tre epler når ett eple koster 6kr. I slike tilfeller er det mulig å undersøke generalitet, ved å for eksempel undersøke andre tilfeller hvor enten antall epler eller prisen på epler varieres. Men dette forblir ofte i bakgrunnen av slike oppgaver (Lannin, 2005, s. 235).

Tabell 10 viser at empirisk begrunnelse ofte ble brukt til å begrunne oppgaver hvor ikke-eksplisitte strategier ble brukt (oppgave 1a-b, 2b). Men vi ser også at dette begrunnelsesnivået er brukt i oppgave 2c og 3c hvor flere elever brukte en kontekstuell strategi. Radford (1996, s. 109) sier at validitet er noe som må arbeides med som et element av generaliseringsprosessen, og det kan være vanskelig å argumentere for at en empirisk begrunnelse er gyldig. En empirisk begrunnelse kobles ikke til et generelt forhold som eksisterer i oppgavesituasjonen (Lannin, 2005, s. 235), men dobbeltsjekker om eleven har talt riktig. I tilfellene hvor elevene har brukt empiri til å begrunne en eksplisitt strategi, har de gjort dette ved å teste om formlene stemmer. Dette kan være nyttig som en del av generaliseringsprosessen, men det er ønskelig at elevene til slutt gir en begrunnelse på nivå 3 eller 4. Lannin (2005, s. 235) påpeker at et argument er gyldig dersom generaliseringen kobles til et generelt forhold som eksisterer i oppgavesituasjonen. Derfor er det begrunnelser på nivå 3 og 4 som vil anses som gyldige.

5.2.2 Generisk og deduktiv begrunnelse

Generisk begrunnelse vil si at elevene tar utgangspunkt i det generelle i mønsteret og knytter det til et spesielt eksempel, mens en deduktiv begrunnelse er uavhengig av spesielle eksempler (Lannin, 2005, s. 236). Tabell 10 viser at vi finner elever på nivå 3 både i 2P og på 10.trinn, men nivå 4 finner vi kun hos én elev på 10.trinn. Nivå 3 og 4 finner vi i oppgave 2b og 2c. Et eksempel på nivå 4 ble presentert i kapittel 4.4, hvor vi så at eleven hadde begrunnet det generelle uttrykket uavhengig av spesielle eksempler. To eksempler på nivå 3 ble også presentert i kapittel 4.4, og vi så at elevene hadde tatt utgangspunkt i det generelle og knyttet det til et spesielt eksempel, som i dette tilfelle var å finne antall trekanter i figur 12.

Et av kjerneelementene i den nye læreplanen er resonnering og argumentasjon, som vil si at elevene skal lære å formulere sine egne begrunnelser for å løse problemer og argumentere for fremgangsmåtene sine (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15). Det er viktig at elevene får arbeide med begrunnelse og argumentasjon i matematikk, og at gyldigheten av ulike begrunnelser og argumenter diskuteres i klassen. Elevene som gir en begrunnelse på nivå 3 eller 4 viser at de har forstått bakgrunnen for fremgangsmetodene som brukes. Dermed er det tenkelig at elevenes mestringsfølelse med faget øker. Sammen med de andre kjerneelementene, er kjerneelementet «resonnering og argumentasjon» nytt i den nye læreplanen. Elevene som har vært med i dette prosjektet har derfor ikke hatt et slikt kjerneelement å forholde seg til. Den gjeldene læreplanen har ikke et like stort fokus på argumentasjon og resonnering som den nye læreplanen har (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det kan derfor tenkes at elevene som har vært med i prosjektet begrunner fremgangsmåtene sine i liten grad når de ellers arbeider med matematikk.

5.3 Utfordringer med generaliseringsoppgaver

Lee (1996, s. 105) beskriver tre utfordringer elever har med generalisering av figurmønstre. Disse utfordringene er knyttet til oppfattelsesnivået, verbaliseringsnivået og symboliseringsnivået (Lee, 1996, s. 105), som skrevet om i kapittel 2.4.4. Gjennom funnene og analysen har vi sett at elever på begge trinn har utfordringer på disse tre nivået. Det er imidlertid på verbaliseringsnivået og symboliseringsnivået elevene har de største utfordringene.

Kapittel 4.4 tar for seg utfordringer elevene har på verbaliseringsnivået. Funnene tyder på at elevene på begge trinn hadde utfordringer med å verbalisere generaliseringene sine. For eksempel kan man se det i diskusjonen om elevenes begrunnelsesnivå, hvor få elever begrunner det de gjør. Warren (2005, s. 11) skriver at dette kan skyldes at elevene ikke har forståelse for de nødvendige faguttrykkene som brukes i slike oppgaver, og at det dermed blir vanskelig å forklare hva man gjør for å løse oppgaven.

I kapittel 4.5 har jeg skrevet om elevenes utfordringer på symboliseringsnivået. Der kom det fram omtrent halvparten på hvert trinn valgte å bruke symboler til å uttrykke generaliseringen på én eller flere oppgaver. Dette samsvarer med funn gjort av English & Warren (1998, s. 169) hvor det påpekes at elevene synes det er enklere å verbalisere en generalisering, enn det er å uttrykke den symbolsk. Dette kan skyldes at en generalisering kan uttrykkes på mange ulike måter, både symbolsk og verbalt (English & Warren, 1998, s. 169). Intervju og elevbesvarelser tyder på at elevene på begge trinn hadde utfordringer med å forstå variabelbegrepet. Utfordringene elevene hadde med å uttrykke generaliseringen sin symbolsk, som er beskrevet i Tabell 12, kan skyldes vanskeligheter med å forstå variabelbegrepet.

I kapittel 4.6 har jeg skrevet om elevenes utfordringer med oppfattelsesnivået. Det som viste seg å være utfordrende for elevene var å se en sammenheng mellom den avhengige og uavhengige variabelen i mønsteret. Dette stemmer overens med det Lee (1996, s. 105) har funnet om at elever vanligvis ikke har problemer med å oppfatte et mønster, men å oppfatte et algebraisk nyttig mønster. Altså, at elevene har utfordringer med å bruke det de har oppfattet til å generalisere mønsteret. Dette er tydelig i oppgave 3 hvor flere elever har oppfattet mønsteret på en algebraisk nyttig måte, men få elever har klart å formulere en generalisering ut ifra hvordan mønsteret ble oppfattet.

5.4 Konklusjon

I denne masteroppgaven ønsket jeg å finne ut hvilke forskjeller det er mellom elever på 10.trinn og i 2P i arbeid med figurmønsteroppgaver. Det jeg ønsket å se på var hvilke strategier elevene brukte, i hvilken grad elevene begrunner svarene sine, samt hvilke utfordringer de møter. Den største forskjellen mellom trinnene ser ut til å være at flere elever i 2P har svart på oppgavene enn på 10.trinn.

Funnene og analysen av hvilke strategier elevene bruker viser at elevene på de to trinnene i stor grad bruker like strategier til å løse de ulike oppgavene, men det er variasjon i hvilke strategier som brukes mest på de ulike oppgavene. Ser man bort i fra antall elever som ikke har svart eller har brukt en usynlig strategi brukes den rekursive strategien av flest elever i oppgave 1. I oppgave 2 og 3 brukes den kontekstuelle strategien av flest elever. Dette gjelder på begge trinn. Vi ser dermed at hvilken strategi elevene velger å bruke kan variere med tanke på oppgavens vanskelighetsgrad og formulering. I oppgave 1 og 2 er det flere elever som bruker en usynlig strategi, som i hovedsak skyldes at elevene ikke har begrunnet hvordan de kom fram til svaret. På 10.trinn er det noen få elever som har brukt hel-objekt og prøve-og-feile strategi i oppgave 1 og 2. Det er likevel den rekursive og kontekstuelle strategien som brukes i størst grad av elevene. På begge trinn er det få elever som kommer fram til en korrekt generalisering eller formel for den generelle figuren.

Analysen av elevenes begrunnelsesnivå viser at elevene på begge trinn hovedsakelig ligger på Nivå 0 – ingen begrunnelse. Det er omtrent like mange elever på hvert trinn som begrunner oppgavene sine på Nivå 2 – empirisk begrunnelse, og det er denne type begrunnelse som brukes i størst grad når elevene begrunner svarene sine. Det er få elever på begge trinn som ligger på nivå 3, og kun én elev på 10.trinn som har begrunnet på nivå 4. Dette viser at det er en liten forskjell i hvilke begrunnelsesnivå elevene på de to trinnene ligger på.

Det var heller ikke stor forskjell i hvilke utfordringer elevene møter i disse oppgavene På begge trinn ser elevene ut til å ha like store utfordringer med å bruke symboler til å uttrykke generaliseringene sine, og å forstå variabeluttrykket. Dette kan henge sammen med utfordringer knyttet til verbaliseringsnivået og oppfattelsesnivået. Dersom elevene ikke klarer å gi en presis beskrivelse av mønsteret med ord, er det vanskelig å oversette dette til symboler. Stacey & MacGregor (1995, s.82) viser til at riktige verbale beskrivelser av et mønster ofte fører til riktige algebraiske symboler. Det er omtrent like mange på hvert trinn som bruker symboler, og elevene på 10.trinn klarer i større grad å komme fram til et korrekt uttrykk enn det elevene i 2P gjør. Dette kan henge sammen med vanskeligheter knyttet til å bruke oppfattelsen av mønsteret til å danne en generalisering. En utfordring vi har sett at elever på begge trinn har.

Til tross for at elevene i 2P har hatt matematikk i to år lengre enn elevene på 10.trinn, er det ikke en stor forskjell mellom disse elevene og lite progresjon. Få elever på begge trinn klarer å danne en generalisering av mønsteret, og elevene på begge trinn har utfordringer knyttet til symbolbruk, og å oppfatte algebraiske nyttige mønstre. Dette kan ha sammenheng med at elevene er vante til å arbeide med spesielle eksempler istedenfor generalisering (Lannin, 2005, s. 235) og at lærebøkene ikke har et stort fokus på generalisering av aritmetikk (Kongelf, 2015, s. 104). Dette kan endre seg når den nye læreplanen trer i kraft. Den nye læreplanen har et stort fokus på abstraksjon og generalisering, samt argumentasjon og resonnering (Utdanningsdirektoratet, 2019). Dette kan føre til en endring i hvilke oppgaver elevene arbeider med, og skifte fokuset fra det spesielle til det generelle. På den måten kan elevene få en større forståelse for variabelbegrepet, og det kan muligens gjøre det enklere for elevene å bruke symboler i generaliseringsoppgaver. Det kan tenkes at dette igjen vil føre til en dypere forståelse for faget matematikk, og øke elevenes engasjement for faget. Slike observasjoner kan brukes i en diskusjon om tidlig algebra, og hvorvidt algebra og generalisering er noe som kan flyttes enda tidligere enn i dag.

6 Avsluttende refleksjoner

6.1 Svakheter med prosjektet

Gjennom de ulike delene av masteroppgaver har jeg pekt på ting som kan ha påvirket resultatene jeg har fått i dette prosjektet. I denne delen vil jeg oppsummere noe av dette.

6.1.1 En rettferdig sammenligning

Det kan diskuteres om en sammenligning av 2P-elever og 10.klassinger er rettferdig. I 10.klasse finner man elever som er meget interesserte og flinke i matematikk og man finner elever som ikke er det. På videregående velger elever som er interesserte og flinke i matematikk ofte teoretisk eller realfaglig matematikk. Det kan derfor hende at jeg har testet interesserte og flinke elever på 10.trinn mot lite interesserte elever i 2P. Besvarelsene jeg har brukt fra 10.trinn er derimot representativ for hele trinnet jeg gjorde undersøkelser i. Dermed har jeg også med besvarelser fra 10.klassinger som er mindre flinke i matematikk. Dessuten er det også elever i 2P som er flinke og interesserte i matematikk, men som velger vekk matematikkfag på høyere nivå fordi det ikke trengs i den videre utdanningen de skal ta. I tillegg viser resultater fra TIMSS Advanced også at elever som velger realfag på videregående presterer svakt i algebra (Grønmo, et al., 2016, s. 37). Begrunnelsen for å velge elever fra 2P og 10.trinn var at figurmønsteroppgaver går inn under kompetansemål disse elevene skal beherske, og jeg står derfor ved at en sammenligning av disse to trinnene ikke er helt urimelig.

6.1.2 Usynlige strategier

Dersom jeg skulle gjennomført prosjektet på nytt er det noen metodiske valg jeg ville gjort annerledes. Noe av dette har jeg pekt på i kapittel 3.8. Det var noen strategier jeg måtte kategorisere som «usynlig» på bakgrunn av at det ikke var mulig å vite hvilken strategi elevene hadde brukt. Denne problemstillingen var ikke noe jeg forutså på forhånd, og derfor ikke noe jeg hadde tatt hensyn til. Dersom jeg skulle gjennomført prosjektet på nytt ville det vært hensiktsmessig å bruke en annen metode og på den måten prøve å unngå dette problemet. Dette ville styrket validiteten til funnene mine. For eksempel kunne jeg ha plassert lydopptaker eller videokamera hos noen elever for å se eller høre hvordan de snakket sammen i arbeidet med oppgavene. Det er mulig at jeg da kunne sagt mer om hvordan elevene som har brukt en usynlig strategi har tenkt. En annen mulighet kunne vært å intervjue flere elever som hadde brukt en usynlig strategi, og på den måten få mer informasjon om hvordan elevene hadde tenkt. Ved å kun intervjue tre elever på hvert trinn kunne jeg ikke generalisere, og hadde dermed kun mulighet til å si noe om elevene som ble intervjuet.

6.1.3 Oppgavenes formulering

Formuleringen på oppgavene er også en svakhet i dette prosjektet. Få av oppgavene elevene jobbet med ba om begrunnelse, men elevene fikk tydelig beskjed om at de måtte begrunne svarene sine, og at det var fremgangsmetoden deres som var interessant. Funnene viser likevel at mange elever ikke begrunnet svarene sine. Dette er også noe som påvirker validiteten til prosjektet, og kan forklare hvorfor mange kategorier står tomme i tabellen som viser begrunnelsesnivå. Flere elever ga en begrunnelse på oppgavene som ba om det, men vi så at det ikke gjaldt alle elevene. I tillegg var det noen elever som begrunnet svarene sine til tross for at det ikke sto i oppgaveteksten. Det gjør det vanskelig å vite hvordan man skal få elevene til å begrunne svarene sine, og noe jeg burde ha tenkt nøyere gjennom. At jeg fungerte som lærer kan også ha vært et usikkerhetsmoment for elevene, og gjort at elevene ikke besvarte oppgavene på samme måte som de ellers ville gjort.

I noen av tabellene som viser hvilke strategier elevene har brukt, er det få strategier som er representert. Dette kan ha sammenheng med oppgavens formulering og vanskelighetsgrad. I oppgave 1 ønskes det et svar på hvordan figur n ser ut, og dette lar seg enkelt beskrive med en rekursiv strategi. Elevene får derfor ikke noen grunn til å revurdere strategien sin. Oppgave 1 viste seg også å være ganske vanskelig for elevene, trolig fordi generaliseringen gir et andregradsuttrykk. Dersom jeg skulle gjennomført prosjektet på nytt, ville jeg valgt en annen oppgave. I oppgave 2 er det også få strategier som er brukt. Dette kan forklares ved at det er enkelt å oppdage et mønster i figurene som kan lede til både en rekursiv og kontekstuell strategi. Dersom jeg skulle gjennomføre prosjektet en gang til, ville jeg ha utført en pilotundersøkelse. Jeg kunne da fått luket ut formuleringene som var uheldige, og fått tilbakemeldinger på om oppgavene enten var for vanskelige eller for enkle. En slik undersøkelse ble ikke gjennomført denne gangen på grunn av begrenset tid til å gjennomføre prosjektet. Med tanke på pandemien som rammer samfunnet vårt i dag, var det nok riktig avgjørelse å ikke gjennomføre en pilotundersøkelse. Jeg kunne da risikert å ikke få gjennomført undersøkelsene mine før skolene stengte.

6.2 Generalisering på tidligere trinn

Innledningsvis skrev jeg at norske elever på ungdomstrinnet og på realfaglig linje presterer svakt i algebra sammenlignet med referanselandene (Grønmo, et al., 2016, s. 37: Bergem, 2016, s. 36). Det gir grunn til bekymring, og man kan stille spørsmål ved om det trengs en annen tilnærming til å lære vekk algebra enn det som brukes i skolen i dag. Lannin (2005, s. 235) peker på at elevene er vante med å ha et fokus på spesielle eksempler, istedenfor å fokusere på det generelle. Kongelf (2015, s. 104) fant også i sin analyse av lærebøker som brukes på ungdomstrinnet at bøkene i liten grad fokuserer på generalisering av aritmetikk. Mason (1996, s. 65) hevder at generalitet er hjertet av matematikk, og at algebra vil opphøre å være et problem for de fleste personer dersom fokuset i klasserommet flyttes mot generalisering. Det er liten tvil om at generalisering er en viktig del av algebra, og for å forstå hvorfor man bruker bokstaver istedenfor tall må man ha forståelse for hva som er meningen med generalisering.

Gjennom arbeidet med dette prosjektet fant jeg ut at det var lite forskjeller mellom 10.klassinger og 2P-elever i hvilke strategier og begrunnelsesnivå de brukte for å løse figurmønsteroppgavene til tross for at to år skiller disse elevene. Oppgavene hvor elevene skulle generalisere mønstrene ba på størst utfordring, og variabelbegrepet var vanskelig å forstå for mange elever. Det gir meg ikke mulighet til å si noe om andre elever på disse trinnene, men det kan være et nyttig funn i diskusjonen om tidlig algebra. Ser man på land hvor elevene introduseres for algebra på et tidligere trinn enn i Norge, skårer disse elevene bedre på TIMSS undersøkelsen (Bergem, 2016, s. 27). Jeg mener derfor at generaliseringsoppgaver kan flyttes til tidligere trinn, og at man kan begynne å arbeide med variabelbegrepet enda tidligere enn det som gjøres i Norge nå. I den nye læreplanen står det at elever skal arbeide med algebraisk tenkemåte gjennom hele skoleløpet, og at algebra i grunnskolen handler om å arbeide med strukturer, mønster og relasjoner (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 16). Vi har sett at figurmønsteroppgaver er en type generaliseringsoppgave som er fin å bruke for å la elever jobbe med generalisering i algebra. I disse oppgavene kan elevene selv oppdage nødvendigheten av å bruke variabler, og se sammenhenger mellom to variabler.

I artikkelen til Tellefsen & Haugli (2019, s. 7) ble det funnet at noen av elevene som oppfattes som lavpresterende fikk til mye i figurmønsteroppgaven som ble brukt i studien. Dette kan tyde på at generaliseringsoppgaver som for eksempel figurmønsteroppgaver kan gjøre matematikk kjekkere for mange elever. I slike oppgaver må man ofte være kreativ og det er sjeldent regler og prosedyrer man følger. Carraher, Schliemann & Brizuela (2000, s. 1) har påpekt at introduksjonen av algebra tidligere ble sett på som slutten på resonnering og starten på vilkårlige regler og manipulasjon. Hvis generaliseringsoppgaver og algebraiske tenkemåter flyttes til tidligere trinn kan det tenkes at færre elever ser på algebra på denne måten, men heller ser det som et nyttig hjelpemiddel til å danne generaliseringer i matematikk. Ved å la elever trene på ulike måter å oppfatte mønstre på og å beskrive sammenhenger mellom variabler, kan elevene selv oppdage betydningen av generalisering og hvorfor det er viktig.

Figurmønsteroppgaver gir også læreren rom til å bestemme hva som skal være fokuset i undervisningsøktene. For eksempel kan de minste elevene arbeide med å finne ulike måter å oppfatte et mønster på og beskrive disse måtene. Eldre elever kan arbeide med å finne en sammenheng mellom den avhengige og uavhengige variabelen i mønsteret, og presenteres for ulike fremstillinger av mønstre. Det kan være som etterfølgende figurer, eller som et generisk eksempel. Det kan også arbeides med ekvivalens, og man kan diskutere linearitet og lineære funksjoner.

6.3 Videre forskning

Funnene i dette masterprosjektet viser at elever på 10.trinn og elever i 2P har utfordringer med å forstå variabelbegrepet i algebra. I tillegg ser det ut til at elevene på begge trinn har utfordringer med finne sammenhengen mellom de to variablene i mønsteret og danne en generalisering ut ifra denne sammenhengen. Det ser ut til at disse utfordringene er like store på begge trinn. En eventuell vei videre kan være å sammenlikne enda tidligere trinn, og gjerne inkludere barneskolen. Dette kan underbygge påstanden om at variabelbegrepet kan innføres enda tidligere enn i dag, og det kan undersøkes om elever som får en tidlig introduksjon til variabelbegrepet får en bedre forståelse for begrepet enn elevene som introduseres for formell algebra i åttende klasse.

Figurmønstre kan varieres på mange ulike måter og gir en visuell representasjon av sammenhengen mellom to variabler. I prosjektet mitt var det ingen elever som brukte en rekursiv strategi på den generiske oppgaven. Det kunne derfor vært interessant å gjennomføre en lignende studie med kun generiske oppgaver, og sett om en slik fremstilling gir opphav til andre generaliseringsstrategier og begrunnelsesnivå.

Litteraturliste

Bäckman, K. & Attorps, I. (2012). Teaching Mathematics in Pre-School Context. *US-China Education Review B, s. 1-16.*

Blanton, M. & Kaput, J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience.Part I: Transforming task structures. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, 1, s. 344-351. Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). A Teacher Approach to Algebrafying Elemantary Mathmematics. I Romberg, T., Carpenter, T. & Dremock, F. (Red.) *Understanding Mathematics And Science Matters* (s. 99-126). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton, M. & Kaput, J.(2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. I Cai J., Knuth E. (red.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education*. Berlin: Springer.

Bergem, O.K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I Bergem, O.K., Kaarstein, H., Nilsen, T. (red.), *Vi kan lykkes i realfag – Resultater og analyser fra TIMSS 2015.* Universitetsforlaget.

Bergem, O.K, Kaarstein, H., Nilsen, T. (2016) TIMSS 2015. I Bergem, O.K., Kaarstein, H., Nilsen, T. (red.), *Vi kan lykkes i realfag – Resultater og analyser fra TIMSS 2015.* Universitetsforlaget.

Carraher, D., Schliemann, A. & Schwartz, J. (2008). Early Algebra is Not the Same as Algebra Early. I Kaput, J., Carraher, D.W. & Blanton, M. (red.), *Algebra in The Early Grades* (s. 235-272*).* New York: Routledge.

Carraher, D., Schliemann, A. & Brizuela, B. (2000). Early Algebra, Early arithmetic: Treating operations as functions. *The twenty-second annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathmeatics education.*

Carpenter, T., Levi, L., Berman, P.W. & Pligge, M. (2005) Developing Algebraic Reasoning in the Elemantary School. *Understanding Mathematics And Science Matters* (s. 81-98). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7. utg). Oxfordshire: Routledge

Cooper, T. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. I Cai, J. & Knuth, E. (red.), *Early algebraization* (s. 187-214). Berling: Springer.

Dalland, O. (2017). *Metode og oppgaveskriving (*6. utg*).* Oslo: Gyldendal Akademisk

Ely, R. & Adams, A. (2010). Unknown, placeholder or variable: what is x? *Mathematics Education Research Journal 41*(1), s. 19-38. Nederland: Springer.

Enerstvedt, R. (1989). The problem of Validity in Social Science. I Kvale,S. (Red.), *Issues of Validity in Qualitative Research* (s. 135 - 175). Sverige: Studentlitteratur

English, D. & Warren, E. (1998). Introducing the Variable Through Patterning Exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2). s. 166- 170. Reston: NCTM.

Grønmo, L.S., Hole, A. & Onstad, T. (2016). Ett skritt fram og ett tilbake. Hentet 12.09.2019 fra https://press.nordicopenaccess.no/index.php/noasp/catalog/view/7/16/67-1

Johannessen, T. (2019). Generalisering av figurmønstre (Masteroppgave). NTNU, Trondheim. Avhandling på nett: https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/bitstream/handle/11250/2610308/no.ntnu:inspera:2315467.pdf?sequence=1

Kaput, J., Carraher, D., Blanton, M. (2008). *Algebra in the Early Grades*. New York: Routledge.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What is Algebraic Reasoning?. I Kaput, J., CarraherD.W. & Blanton, M., (Red.), *Algebra in The Early Grades* (s. 5-17*)*. New York: Routledge.

Karimzadeh, A. (2014). Algebra i norske og singaporske matematikklærebøker (Masteroppgave). UiO, Oslo. Avhandling på nett: https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/41225/Karimzadeh-master.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Kieran, C. (1989) A Perspective on Algebraic Thinking. In G Verand, J. Rogalski, & M. Artige (Red.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 2, s.163 - 171.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Education*, *8*(1), s. 139-151.

Kongelf, T. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20* (3-4), s. 83-109.

Kriegler, S. (2008). Just What Is Algebraic Thinking. Hentet fra: http://www.math.ucla.edu/~kriegler/pub/algebrat.html

Kunnskapsdepartementet (2018). *Kjerneelementer i fag.* Lest 14.10.19. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Küchemann, D. (2010). Using Patterns Generically to See Structure. *Pedagogies: An International Journal 5*(3), s. 233-249. USA: Routledge.

Kvale, S. (1997). *Interview – En introduktion til det kvalitive forskningsinterview.*

København: Hans Reitzels Forlag

Kvale, S. (1989). To Validate is to Question. I Kvale,S. (Red.), *Issues of Validity in Qualitative Research* (s.73 – 93). Sverige: Studentlitteratur

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking And Learning 7*(3), s. 231-258. USA: Routledge.

Leavy, A. & Hourigan, M. (2015). Geometric Growing Patterns: What's the Rule? *Australian Primary Mathematics Classroom 20*(4), s. 31-40.

Lee, L. (1996). An Initiation Into Algebraic Culture Through Generalization Activities. I Kaput, J., Carraher, D.W. & Blanton, M. (Red.) *Algebra in The Early Grades* (s. 87- 106*)*. New York: Routledge.

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. I K. Stacey, H. L. Chick & M. Kendal (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* (s. 45-70). Dordrecht: Springer.

Mason J. (2008). Making Use of Children´s Powers to produce Algebraic Thinking. I Kaput, J., Carraher, D.W. & Blanton, M.(Red.), *Algebra in The Early Grades* (s. 57-94*)*. New York: Routledge.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2014). *Å lære algebraisk tenkning* (2. utg). Bergen: Caspar Forlag

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Red.), *Approaches to algebra* (s. 65-86). Springer, Dordrecht.

Norsk senter for forskningsdata (2018). *Barnehage og skole.* Lest 23.03.20. Hentet fra: https://nsd.no/personvernombud/hjelp/forskningstema/barnehage_skole.html

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics* 20, s. 147-164. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1995). The Effect of Different Approaches to Algebra on Students' Perceptions of Functional Relationships. *Mathematics Education Research Journal 7*(1), s. 69-85. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Students Understanding of Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics* (33), s. 1-19. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Swafford, J. & Langrall, C. (2000). Grade 6 Students' Preinstructional Use of Equations to Describe and Represent Problem Situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), s. 89-112. USA: NCTM.

Radford, L. (2013). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal 26*(2), s. 257-277. Nederland: Springer.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. Paper presented at the 28th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (NA), Merida, Mexico.

Radford, L. (1996). Some Reflections on Teaching Algebra Through Generalization. *Algebra in The Early Grades* (s. 107-11*)*. New York: Routledge.

Rivera, F. & Becker, J. (2008). Middle School Childrens' Cognitive Perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education 40*(1), s. 65 82.

Rivera, F. (2008). On the Pitfalls of Absuction: Compolicities and Complexities in Patterning Activity. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), s. 17-25. Canada: FLM Publishing Association.

Rivera, F. D. (2018). Pattern Generalization Processing of Elementary Students: Cognitive Factors Affecting the Development of Exact Mathematical Structures. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(9). DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/92554

Tellefsen, H.K. & Haugli, M.F. (2019). En rik oppgave. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning 30*(3), s. 2-7.

Utdanningsdirektoratet (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Hentet fra: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Utdanningsdirektoratet (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10.trinn.* Lest 19.12.19. Hentet fra: https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf.

Utdanningsdirektoratet (2017). *Kjerneelementer – fag i grunnskolen og gjennomgående fag i vgs.* Lest 14.10.19. Hentet fra https://hoering.udir.no/Hoering/v2/197?notatId=358

Utdanningsdirektoratet (2018). *Tredje skisser til kjerneelementer.* Lest 12.11.19 Hentet fra: https://hoering.udir.no/Hoering/v2/197?notatId=358

Warren, E. (2005). Young Children's Ability to Generalise the Pattern Rule for Growing Patterns. I Chick, H.L. & Vincent, J.L. (Red.) *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Eduvation* 4, s. 305-312. Melbourne: PME.

Warren, E. (2006). Teacher Actions That Assist Young Students Writing Generalizations in Words and Symbols. I Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Red.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 5, s. 377-384. Praha: PME.

Wilkie, K. & Clarke, D. (2014). Developing Students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal 28*(2), s. 223 – 243. Nederland: Springer.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv til elever på 10.trinn og i 2P

Vil du delta i forskningsprosjektet
***«Matematisk generalisering av figurmønstre»*?**

Hei, jeg heter Ine Bjerke Saksvik og er student ved Universitetet i Bergen. Dette året skal jeg skrive en masteroppgave i matematikkdidaktikk, og skal i den forbindelse gjennomføre et forskningsprosjekt. Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å finne ut om det er forskjeller i hvordan elever på videregående skole og ungdomsskole generaliserer i matematikk. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
I løpet av høsten vil jeg gjennomføre en undersøkelse som er knyttet til algebra og generalisering. Oppgavene i denne undersøkelsen vil være ulike figurmønstre hvor du som elev vil bli bedt om å finne mønsteret til figuren, og bruke mønsterets struktur til å komme frem til en generalisering av mønsteret. Hensikten med prosjektet er å finne ut om det er likheter og ulikheter i hvordan elever fra ulike årstrinn løser disse oppgavene.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Bergen, Matematisk Institutt er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Grunnen til at du som elev på 10.trinn får spørsmål om å delta er at du gjennom årene på ungdomstrinnet har fått en introduksjon til algebra, og skal ha jobbet med figurmønstre tidligere.

Grunnen til at du som elev i 2P får spørsmål om å delta er at du gjennom årene på ungdomstrinnet og vg1 har fått en introduksjon til algebra. I tillegg vil undersøkelsen dekke følgende kompetansemål:

Eleven skal kunne analysere praktiske problemstillingar knytte til daglegliv, økonomi, statistikk og geometri, finne mønster og struktur i ulike situasjonar og beskrive samanhengar mellom storleikar ved hjelp av matematiske modellar

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta på prosjektet innebærer det at du må delta på en undersøkelse som vil ta deg omtrent én time. Undersøkelsen består av 3 figurmønsteroppgaver, med tilsammen 9 deloppgaver. I disse oppgavene må du forklare og begrunne hvordan du løser oppgavene. På bakgrunn av besvarelsene vil jeg plukke ut 3-4 elever til intervju hvor vi skal snakke mer om hvordan du har tenkt når du har løst oppgavene. Det vil bli tatt notater og lydopptak av intervjuet. For å kunne analysere funnene i etterkant vil jeg bruke notater, elevbesvarelse og lydopptak. Resultatet av studien vil bli brukt i masteroppgaven min ved Universitetet i Bergen.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.
Jeg og veileder vil ha tilgang til å diskutere datamaterialet (elevbesvarelser og transkripsjon).
Elevbesvarelser og lydopptak vil oppbevares i et låst skap på UiB som kun jeg har tilgang til.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Prosjektet skal etter planen avsluttes 1.juni 2020. Ved prosjektets slutt blir de skriftlige besvarelsene makulert og lydopptak vil bli slettet.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.
På oppdrag fra Universitetet i Bergen har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
Universitetet i Bergen ved Christoph Kirfel.
Kontakt e-post: Christoph.Kirfel@uib.no
Kontakt telefon: 91 51 07 28

Student Ine Bjerke Saksvik
Kontakt e-post: ine.saksvik@student.uib.no
Kontakt telefon: 41 08 70 26

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Christoph Kirfel	Ine Bjerke Saksvik
Prosjektansvarlig (veileder)	*Student*

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Matematisk generalisering av figurmønstre», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i undersøkelse med figurmønsteroppgaver
☐ å delta i intervju

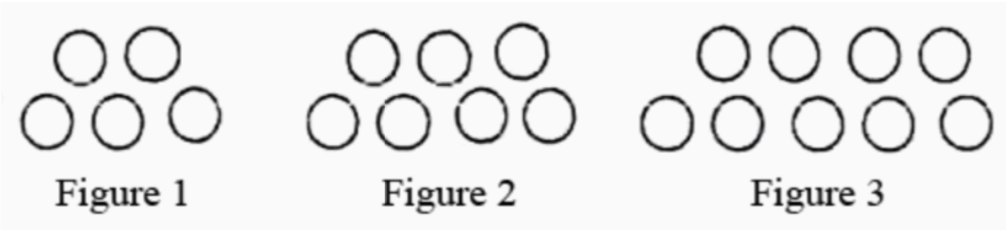
Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. Juni 2020

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 2: Introduksjonsoppgaver

Generalisering av figurmønstre

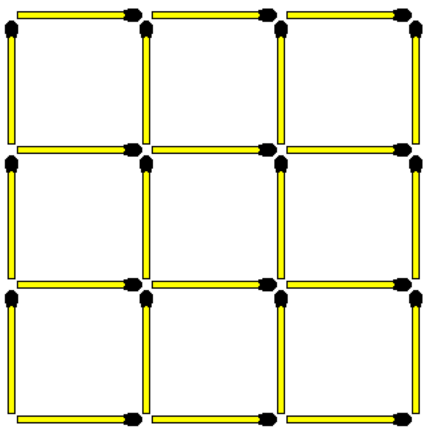
Oppgave 1: Sirkler



a) Fargelegg hvordan du tenker mønsteret er bygd opp. Bruk figur 3 i mønsteret over til å vise.
b) Finn antall sirkler i figur 10 og figur 20.

c) Kan du lage en formel som gir antall sirkler, S, i figur nummer n? Hvor n er et vilkårlig tall.

Oppgave 2: Kvadrat av fyrstikker
Dette er et 3 x 3 kvadrat laget av fyrstikker.



a) Tegn fyrstikkvadratet i ruten under, og bruk farger til å illustrere hvordan du tenker mønsteret er bygd opp.

b) Hvor mange fyrstikker trengs for å lage et 20 x 20 kvadrat? Forklar hvordan du har tenkt.

c) Hvor mange fyrstikker, F, trengs for å lage et *n* x *n* kvadrat? Hvor n er et vilkårlig tall. Forklar hvordan du har tenkt.

Oppgave 3: Kvadrat

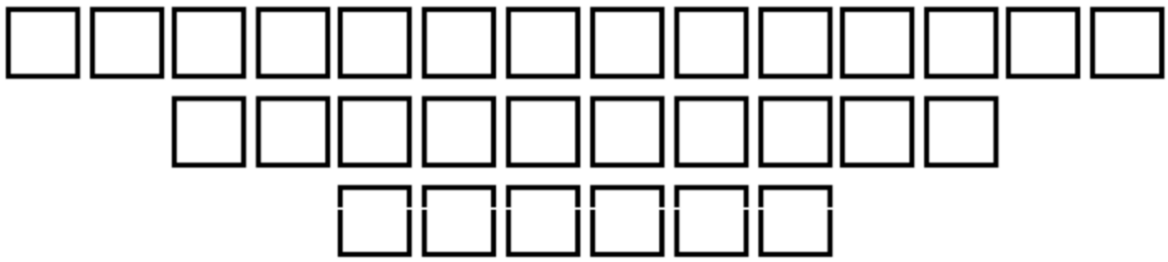
a) Bruk figur nummer 4 til å fargelegg hvordan du tenker mønsteret er bygd opp.

b) Tegn figur nummer 5 i rekken.

c) Hvor mange kvadrat trengs for å lage figur nummer 10? figur nummer 42? Forklar hvordan du har tenkt.

d) Hvordan kan du finne ut hvor mange kvadrat, K, som trengs for å lage figurnummer n? Hvor n er et vilkårlig tall. Forklar hvordan du har tenkt.

Oppgave 4: Kinoseter
I en kinosal er det 6 seter i den første raden. Hver rad etter den første raden inneholder 4 flere seter enn raden foran den. Under er en tegning av de tre første radene i kinosalen.



a) Hvor mange seter er det i den syvende raden i kinosalen? I den 14. raden? Forklar hvordan du har tenkt.

b) Billettselgeren må vite hvor mange seter det er i hver rad. Hvis hun vet nummeret på raden, forklar hvordan hun kan finne ut hvor mange seter det er i den raden.

c) La n være antall rader og la S være antall seter i kinosalen. Kan du gi en formel som gir antall seter, gitt n?