

Estimering av permeabilitet
med bruk av
adaptiv parameterisering

Masteroppgave i anvend og utrekningsorientert matematikk

Ingvild Lid

Matematisk institutt
Universitetet i Bergen



27. mars 2009

Føreord

Eg vil takke rettleiaren min, Inga Berre, for god oppfølging gjennom heile studiet, for gode råd og smittande iver. Eg vil også takke Sigurd Aanonsen for å stille til disposisjon programvare, og for å svare på spørsmål som har dukka opp undervegs. Takk til IRIS som lét meg nytte deira kode for å lese ECLIPSE-filer i Matlab. Eg vil takke tidlegare masterstudent Norunn Træland Stene, som hjalp meg med å komme i gong med ECLIPSE. Ein stor takk må også rettast til skrivegruppa (Anders, Hanne, Tor Harald og Inga) som hjalp meg med å komme tidleg i gong med skrivinga. Takk til mine nynorskkyndige foreldre Britt og Knut Rage for hjelp med korrekturlesing, også takk til min ektemann Øystein for språkleg hjelp.

Innhald

Føreord	i
Innleiing	iv
1 Strøyming i porøse media	1
1.1 Porøsitet	1
1.2 Væskeegenskapar	2
1.2.1 Tettleik	2
1.2.2 Viskositet	2
1.3 Permeabilitet	3
1.4 Konserveringslover	4
1.5 Straum av ein fase	4
1.6 Straum av to fasar	5
1.7 Straum av fleire fasar	7
1.7.1 Daud olje-modellen	8
2 Estimering av permeabilitet	10
2.1 Invers-problem	10
2.2 Objektivfunksjonen	11
2.2.1 Regulariseringsledd	12
2.3 Parameterisering	12
2.3.1 Radielle basisfunksjonar	14
2.3.2 Diskret cosinus-transformasjon	14
2.3.3 Pilot-punkt metoden	17
2.4 Løysingskrav	18
2.5 Adaptiv parameterisering	18
2.5.1 Første-ordens ytingsmål	21
2.5.2 Andre-ordens ytingsmål	22

3	BFGS-metoden og gradientutrekning med den adjungerte metoden	25
3.1	Optimalisering	25
3.2	Linjesøk-metoden	26
3.3	Kvasi-Newton metoden	26
3.4	BFGS-metoden	27
3.4.1	LBFSG-algoritmen	29
3.5	Numeriske gradientar	29
3.5.1	Den adjungerte metoden	30
3.5.2	Sensitivitetsutrekningar med den adjungerte metoden i ECLIPSE 300	31
4	Numeriske resultat	35
4.1	Oppsett	35
4.2	Første døme	37
4.3	Andre døme	43
4.4	Tredje døme	48
4.5	Diskusjon	52
5	Oppsummering og vidare arbeid	56
	Litteratur	58

Innleiing

Eit oljereservoar er hydrokarbon lagra i porøse bergartar. Olje og gass vert danna når organisk materiale vert brote ned og modna i avleiringar på havbotnen. I løpet av ein lengre tidsperiode vert lagvise avleiringar danna, og pressa saman til faste bergartar. Samstundes fortset nedbrytinga av organisk materiale. Etter kvart som tida går siv olje og gass ut av kjeldebergarten og inn i meir porøse bergartar. Noko siv ut på jordoverflata, medan noko vert fanga under ei ugjennomtrengelig bergartskappe, og dannar eit oljereservoar [26].

Oljereservoar har vorte til i ei rekkje ulike geologiske formasjonar. I Nord-sjøen vart dei fleste oljereservoara danna ved at sand og anna materiale som elver førte med seg vart avsett på havbotnen. Samansetjinga av sand og anna materiale varierte mellom tidsperiodane, noko som resulterte i at bergartane vart avsett lagvis på havbotnen. Rørsler i jordskorpa førte til at laga vart folda og deformerte [20]. Kvart lag har ei eiga leiingsevne for straum av væske og gass.

Permeabilitet er eit uttrykk for kor lett fluid strøymer gjennom ein bergart, og er avhengig av blant anna porøsitet og sprekkar i bergarten. Permeabiliteten kan også variere med retninga på straumen, til dømes når fluid strøymer på tvers av lag med ulik leiingsevne. I denne oppgåva skal vi sjå på korleis vi kan estimere permeabiliteten, og kva utfordringar som knyttar seg til det.

Utvinning av olje er risikofylt og krev stor kapital, men er også svært inntektsbringande. På verdsbasis aukar utvinninga aukar år til år, men vi veit at olje er ein ikkje-fornybar ressurs, og at ein gong i framtida kjem produksjonstoppen til å verte nådd. Ein stor del av oljereserva ligg under havbotnen, og mykje av leitinga og produksjonen går føre seg til havs. Boring gjennom havbotnen skjer frå oljeplattformer. I kvart oljereservoar vert det bora ei rekkje brønnar avhengig av storleiken på feltet. Straumen frå brønnane vert ført til prosessanlegget, der vatn og gass vert skild ut. Olja vert ført i land enten på skip eller gjennom røyrleidningar.

Sjølv om utslepp av karbondioksid utgjer ein trussel for miljøet, kjem vi

ikkje utanom at det moderne samfunnet slik vi kjenner det er fullstendig avhengig av energi frå fossilt brensel. Like fullt er det viktig å gjennomføre utvinninga på ein måte som i størst mogleg grad skåner miljøet. Moderne teknikkar har gjort det mogleg å auke utvinningsgraden frå oljereservoara. Numeriske simuleringar av straum i porøse media er eit effektivt verktøy som alle store oljeselskap gjer nytte av. Oljesimulatorar byggjer på ein diskret modell av oljereservoaret, sett saman av eit endeleg tal gitterceller. Kvar gittercelle får tildelt verdiar for geologiske eigenskapar som porøsitet og permeabilitet.

Kjerneprøvar frå brønnar er ei kjelde til informasjon om permeabiliteten. I tillegg kan målingar frå brønnane under produksjonen nyttast til å estimere permeabiliteten ved hjelp av matematiske metodar. Dette er spesielt nyttig når det eksisterer lite førehandsinformasjon om permeabilitetsfeltet.

Estimering av permeabilitet er eit utfordrande problem fordi tilgjengelege målingar ofte er få og spreidd utover eit stort område. Like fullt er det eit viktig problem, sidan nytteverdien til numeriske simuleringar er avhengig av kjennskapen til geologiske eigenskapar. I denne oppgåva er fokuset på estimering av permeabilitet for straum i eit oljereservoar, men metoden som vert skildra her kan like gjerne nyttast i samband med problem knytte til grunnvatn eller spreining av radioaktivt avfall i grunnen, for å nemne nokre.

Estimering av permeabilitet kan ofte kjenneteiknast ved at det finst fleire sett parameterar som passar observasjonane like bra. Ved å redusere talet på parameterar kan problemet gjerast betre stilt. Dei ukjende parameterane til ein matematisk modell vert definert ved parameteriseringa. Permeabiliteten i ein diskret reservoarmodell kan parameteriserast ved ein lineær ekspansjon. I eit klassisk estimeringsproblem er talet på grader av fridom fastsett på førehand. Fastsetjing av permeabilitet med bruk av adaptiv parameterisering er eit utvida estimeringsproblem, der alle komponentane i parameteriseringa vert identifiserte undervegs. Utfordringa ligg i å finne dei basisfunksjonane som kan gje ein best mogleg representasjon av permeabiliteten.

Adaptiv parameterisering er i denne samanhengen kjenneteikna ved at vi trinnvist veljer nye parameteriseringar på grunnlag av oppdatert informasjon frå brønnane; det kan til dømes vere trykk og produksjonsrate. I denne oppgåva skal vi sjå på to ytingsmål for å oppdatere parameteriseringa. Med det første ytingsmålet vert passende basisfunksjonar skilde ut ved å samanlikne gradientane til objektivfunksjonen. Det andre ytingsmålet byggjer på ein linearisering av den matematiske modellen for straum i eit oljereservoar. Foreløpige resultat kan tyde på at det andre ytingsmålet presterer best [4], men dette er også generelt det mest tidkrevjande ytingsmålet.

Hovudarbeidet i denne oppgåva er numeriske studiar av estimering av permeabilitet. Vi skal sjå på kva fordelar vi oppnår ved å nytte adaptiv

parameterisering framfor å løyse eit klassisk invers-problem. Målet er å samanlikne dei to ytingsmåla for radielle basisfunksjonar, samt å studere diskret cosinus-transformasjon som eit alternativ for parameterisering av permeabilitet. Diskret cosinus-transformasjon vert først og fremst nytta til komprimering av bilete, men har også vist seg å vere ein effektiv måte å parameterisere permeabilitet på [13, 12]. Diskret cosinus-transformasjon har så langt vi kjenner til ikkje vorte studert i samband med adaptiv parameterisering.

Oppbyggjinga av teksten er som følgjer: Kapittel 1 tek føre seg den matematiske modellen for strøyming i eit porøst medium. I kapittel 2 ser vi på estimering av permeabilitet som eit invers-problem, med fokus på parameterisering av permeabiliteten. Ein løysingsmetode vert presentert i kapittel 3, samt metodar for gradientutrekning. Nokre numeriske døme vert gjeve i kapittel 4. Kapittel 5 er ei oppsummering av resultata.

Kapittel 1

Strøyming i porøse media

I eit oljereservoar vert hydrokarbon lagra under høgt trykk. I den første produksjonsfasen driv trykkskilnaden olje mot brønnane. Denne utvinningsstrategien vert kalla primærutvinning. Når trykkskilnaden åleine ikkje lenger er nok til å drive olje mot brønnane, går produksjonen over i ei ny etappe. Det vert forsøkt å oppretthalde trykkskilnaden ved injisere vatn i oljereservoaret. Dette trinnet i oljeutvinninga vert kalla sekundærutvinning.

Modellering av strøyming i eit oljereservoar handlar om å skildre dei dynamiske prosessane som går føre seg når fluid strøymer i porøse bergartar. Vi vil her gje ei kort framstilling av modellering på eit makroskopisk nivå. For vidare lesing sjå til dømes [20], [2] eller [17].

1.1 Porøsitet

Eit porøst medium er sett saman av fast stoff og holrom. Med eit porøst medium vil vi her meine at holromma er samankopla på ein slik måte at fluid kan strøyme uavbrote gjennom mediet, sjå til dømes [2]. I nokre porøse bergartar, som til dømes kalkstein, tek holromma form som samanhengjande porer. Tomrommet mellom sandkorn kan også utgjere eit porerom. Diameteren til ei pore er liten, maksimalt 0.1 mm. Den matematiske definisjonen av porøsitet er

$$\phi = \frac{V_P}{V_B},$$

der V_P er porevolumet og V_B er totalvolumet til mediet. I ein bergart der holromma har form som samanhengjande porer, vil nokre kanalar vere blindveggar. Enkelte porer kan vere isolerte frå resten av poresystemet slik at fluid ikkje kan trengje inn. Det effektive porevolumet V_{Pe} kan derfor vere mindre

enn det totale porevolumet. Til praktisk bruk er det den effektive porøsiteten,

$$\phi_e = \frac{V_{Pe}}{V_B},$$

som er interessant. I resten av teksten vil vi med notasjonen ϕ meine effektiv porøsitet.

1.2 Væskeeigenskapar

1.2.1 Tettleik

Tettleiken til eit homogent fluid er definert som masse per volumeining. Generelt vil tettleiken variere med trykk og temperatur. Her studerer vi berre isotermske prosessar, det vil seie prosessar der temperaturen er konstant. Tettleiken vert då ein funksjon av trykket:

$$\rho = \rho(p). \quad (1.1)$$

Når tettleiken til ei væske er konstant, seier vi at væska er inkompressibel.

1.2.2 Viskositet

Viskositet er eit mål på evna eit fluid har til å motstå deformasjon. Når det verkar friksjonskrefter på eit fluid som er i rørsle relativt til eit anna fluid eller fast stoff, seier vi at fluidet er viskøst. Sidan vi berre studerer isotermske prosessar skriv vi viskositeten til eit fluid som ein funksjon av trykket:

$$\mu = \mu(p). \quad (1.2)$$

For reine væsker kan vi som regel gjere den føresetnaden at viskositeten er konstant.

Ei tilstandslikning seier noko om relasjonen mellom tilstandsvariablar, til dømes tettleik, trykk, temperatur og volum. Vi vil vise til likning (1.1) og (1.2) som tilstandslikningar, sjølv om den siste strengt tatt ikkje høyrer til denne kategorien.

1.3 Permeabilitet

I 1856 utførte den franske ingeniøren Henry Darcy ei rekkje empiriske forsøk med strøyming av væske gjennom ulike typar sand. Han fylte sand i ein behaldar med lengde L og tversnittareal A , og lét vatn renne vertikalt gjennom sandprøva. Resultatet er kjent som Darcys lov, og seier at strøymingsraten Q til vatnet gjennom sandprøva er gjeve ved

$$Q = \kappa A \Delta p / L,$$

der $\Delta p = p_1 - p_2$ er skilnaden mellom trykket på toppen og botnen av prøva, og konstanten κ er avhengig av bergarten. Darcys lov er gyldig for kvervelfri straum med låg snøggleik. La g notere gravitasjonskonstanten. Proporsjonalitetskonstanten i Darcys lov kan etter [2] uttrykkast som

$$\kappa = \frac{K \rho g}{\mu},$$

der K definerer permeabilitet. Eininga for permeabilitet er Darcy, der 1 Darcy tilsvarar om lag $0.987 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$. Verdien til permeabiliteten er avhengig av eigenskapane til det porøse mediet, og kan tolkast som eit mål på kor lett fluid strøymar gjennom dette. Generelt vil eit medium som er meir porøst enn eit anna, også vere meir permeabelt. I dei opphavelige forsøka til Darcy strøymde væska loddrett nedover. Den generaliserte forma av Darcys lov,

$$u = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho g \cos \theta \right), \quad (1.3)$$

er utvida til å gjelde for skrå strøymingsretningar med vinkel θ til loddlinja. Snøggleiken u tilsvarar væska si filtreringsnøggleik.

Når eigenskapane til mediet varierer frå stad til stad, er permeabiliteten avhengig av posisjonen:

$$K = K(x, y, z),$$

og vi seier at mediet er heterogent. I det motsette tilfellet, når K er konstant, vert mediet kalla homogent. Permeabiliteten kan også variere med strøymingsretning. Eit typisk døme er strøyming i eit område der bergartar med ulik permeabilitet ligg lagvis oppå kvarandre. Vi seier at mediet er anisotrop, og uttrykkjer permeabiliteten som ein tensor \mathbf{K} . Når permeabiliteten er den same i alle retningar, vert mediet kalla isotropt.

Nyttar vi (1.3) på eit referansevolum og lèt lengda gå mot null, får vi Darcys lov på differensialform:

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu}[\nabla p + \rho g \mathbf{k}],$$

der \mathbf{k} er einingsvektoren i z -retninga.

1.4 Konserveringslover

Ein modell av eit dynamisk system inkluderer som regel ei lov for korleis ein fysisk storleik, som til dømes masse eller rørslemengd, vert konservert i eit lukka system. Her lèt vi den konserverte storleiken vere massetettleiken. Uttrykka vil vere tilsvarande for andre storleikar. Endringa av massetettleik over eit område Ω skuldast fluks gjennom randa, samt eventuelle kjelder eller sluk. La \mathbf{f} vere fluksen gjennom randa $\partial\Omega$. Konservering av massetettleik kan formulerast matematisk som

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} q dV, \quad (1.4)$$

der normalvektoren \mathbf{n} peiker ut frå området og q noterer kjelder og sluk. Med hjelp frå divergensteoremet kan vi skrive (1.4) på forma

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} \right) dV = \int_{\Omega} q dV. \quad (1.5)$$

Konserveringslova for massetettleik er gyldig for eit vilkårleg område. Dette, saman med at endring i masse er kontinuerleg, gjer at (1.5) kan skrivast på differensialform:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = q.$$

På denne forma vert konserveringslova også kalla kontinuitetslikninga.

1.5 Straum av ein fase

Når eit system består av ei homogen blanding av ulike kjemiske komponentar, seier vi at systemet består av ein fase [10]. Dei fysiske eigenskapane til ein fase, som t.d. tettleik og viskositet, er avhengige av trykk, temperatur og

den kjemiske samansetninga av fasen. Eit system som består av saltvatn er eit døme på eit einfase-system. I denne samanhengen er det først og fremst oljefasen vi har i tankane, men modellen for straum av ein fase er gyldig for alle typar fluid.

Massetettleik er konserverert i systemet, men sidan berre ein del av volumet er fylt med fluid, er den eigentlege massetettleiken i reservoaret $\phi\rho$. Fluksen er $\mathbf{f} = \rho\mathbf{u}$. Det er ein føresetnad at porøsiteten er konstant. Likninga for konservering av massetettleik vert:

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = q.$$

Når væska er inkompressibel, forenkler kontinuitetslikninga seg til

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Det er sett bort frå kjelder og sluk, sidan desse vanlegvis vert modellert som randkrav. Farten \mathbf{u} er gjeve ved Darcys lov. Tilstandslikningane lukkar likningssystemet, som kan løysast for passande initial- og randkrav.

Det viktigaste bruksområdet til modellen for straum av ein fase er trykk-testing, som går ut på å måle trykk og produksjonsrate i brønnane i startfasen av utvinninga. Informasjon om korleis trykk og produksjonsrate utviklar seg gjev nyttig informasjon om eigenskapane til oljereservoaret.

1.6 Straum av to fasar

Vi ser på eit system som består av to fasar som ikkje kan blandast. Metninga S_l til fase l fortel kor mykje av fasen som er til stades i systemet til einkvar tid, og er definert som volumet av fasen dividert med effektivt porevolum. La dei to fasane vere olje og vatn. Summen av metningane i ein fullstendig væskefylt stein er

$$S_o + S_w = 1, \quad (1.6)$$

der S_o er oljemetninga og S_w er vassmetninga. Kontinuitetslikninga for fase l er

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_l S_l) + \nabla \cdot (\rho_l \mathbf{u}_l) = 0, \quad l = o, w.$$

At olje og vatn ikkje kan løysast opp i kvarandre er kjent for dei fleste. Når to fasar som ikkje kan blandast er i kontakt med fast stoff, til dømes

poreveggane, vil det alltid vere ein fase som har størst tendens til å klebe seg til det faste stoffet. Vi seier at denne fasen er den fuktande fasen og kallar den andre fasen for ikkje-fuktande. Til dømes er vatn fuktande relativt olje, og olje er fuktande relativt gass. Ikkje-blandbare fasar som kjem i kontakt med kvarandre vil vere skilt av ei skarp skiljeflate. Dersom trykket ved skiljeflata er diskontinuerleg, vil trykkskilnaden mellom fasane skape ei krum skiljeflate. Trykkskilnaden mellom to fasar vert kalla kapillartrykket, og er definert som

$$p_c = p_n - p_w,$$

der p_n og p_w er trykket til den ikkje-fuktande og fuktande fasen i same følgd. Kapillartrykket lèt seg ikkje måle i praksis, men i laboratorium er det råd å undersøkje korleis kapillartrykket varierer med metning ved å til dømes la vatn fløyne ei oljefylt steinprøve.

To fasar kan okkupere ei pore samstundes, men berre ein fase kan strøyme gjennom ei pore om gangen. Som ein konsekvens får kvar fase færre kanalar å strøyme gjennom. Dermed vert permeabiliteten til kvar fase redusert. Den effektive permeabiliteten til vass- og oljefasen er

$$k_o = k_{ro} \cdot \mathbf{K} \quad \text{og} \quad k_w = k_{rw} \cdot \mathbf{K},$$

der k_{ro} og k_{rw} dei relative permeabilitetane til olje og vatn i same følgd. Relativ permeabilitet varierer med metning. Darcys lov for fase l er

$$\mathbf{u}_l = -\mathbf{K} \lambda_l (\nabla p_l + \rho_l g \mathbf{k}), \quad l = o, w,$$

der λ_l er mobiliteten til fase l , definert som

$$\lambda_l = \frac{k_{rl}}{\mu_l}, \quad l = o, w.$$

Darcys lov og kontinuitetslikninga utgjer saman med tilstandslikningane, kapillartrykket og føresetnaden om ein fullstendig væskefylt stein eit lukka likningssett, som kan løysast for passande initial- og randkrav.

I modellen for straum av to fasar ser vi bort frå at olje er sett saman av fleire komponentar. Vi ser også bort frå gassfasen, og gjer ei rekkje andre forenklingar som til saman fører til at modellen vert lettare å handtere analytisk og numerisk. Resultata gjev fortsatt nyttig kunnskap om dei prosessar som går føre seg i eit oljereservoar.

1.7 Straum av fleire fasar

Modellen for strøyming i eit oljereservoar vert meir realistisk når fleire fasar vert inkluderte. Det må også takast omsyn til at ein fase kan vere sett saman av fleire kjemiske komponentar. Til dømes kan gass løysast opp i olje. Å gå frå ein tofase-modell til ein fleirfase- og fleirkomponent-modell inneber eit stort sprang i kompleksitet. Sjølv med numeriske metodar er fleirfase-modellar vanskelege å handtere.

Den generelle modellen for straum av fleire fasar, komponentmodellen, tek utgangspunkt i eit system med M fasar og N komponentar. Der er ein føresetnad at ein komponent kan vere til stades i alle fasar, og at komponentar kan transporterast mellom fasar. Samansetjinga av ein fase kan variere, men kvar komponent vil vere konservert. Vi skriv derfor kontinuitetslikninga for kvar komponent, og ikkje for kvar fase som i tofase-modellen. La C_{jl} vere konsentrasjonen av komponent j i fase l . Total masse av komponent j i eit einingsvolum er

$$m_j = \phi \sum_{l=1}^M C_{jl} \rho_l S_l, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Kontinuitetslikninga for komponent j er

$$\frac{\partial m_j}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_j = q_j,$$

der q_j noterer kjelder og sluk for komponent j , og fluksen Γ_j er

$$\Gamma_j = \sum_{l=1}^M C_{jl} \rho_l \mathbf{u}_l,$$

for $j = 1, 2, \dots, N$. Darcys lov for fase l er gjeve ved

$$\mathbf{u}_l = -\mathbf{K} \lambda_l (\nabla p_l + \rho_l g \mathbf{k}), \quad l = 1, 2, \dots, M.$$

Det er ein føresetnad at det porøse mediet er fullstendig væskefylt, slik at summen av metningane til alle fasane er ein. Det same vert summen av konsentrasjonane tilhøyrande komponent j :

$$\sum_{l=1}^M C_{jl} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Kapillartrykkrelasjonen mellom to fasar l_1 og l_2 er

$$P_{cl_1l_2} = p_{l_1} - p_{l_2} = P_{cl_1l_2}(S_1, S_2, \dots, S_{M-1}).$$

Vi studerer fortsatt berre isotermiske prosessar, slik at tettleiken og viskositeten til ein fase er gjeve som funksjonar av trykket i samme fase. Den relative permeabiliteten til fase l er

$$k_{rl} = k_{rl}(S_1, S_2, \dots, S_{M-1}) \quad l = 1, 2, \dots, M.$$

Likningane for transport av masse mellom to fasar l_1 og l_2 lukkar systemet:

$$\frac{C_{jl_1}}{C_{jl_2}} = \Psi_{jl_1l_2}(p_{l_1}, p_{l_2}, C_{jl_1}, C_{jl_2}), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

1.7.1 Daud olje-modellen

Daud olje-modellen er ein av dei mest populære modellane for trefase-straum. Fasane som inngår i daud-olje modellen er olje, vatn og gass. Komponentane som inngår i daud olje-modellen er også olje, vatn og gass. Det er ein føresetnad at olje- og vassfasen ikkje kan blandast, og at berre oljefasen kan ta opp eller frigjere gass. Gassfasen kan ikkje ta opp eller frigjere olje og vatn. Systemet kan oppsummerast med:

$$\begin{array}{lll} C_{oo} = 1 & C_{wo} = 0 & C_{go} > 0 \\ C_{ow} = 0 & C_{ww} = 1 & C_{gw} = 0 \\ C_{og} = 0 & C_{wg} = 0 & C_{gg} > 0 \end{array} .$$

I daud olje-modellen er alle variable gjeve ved overflatevilkår (Standard Conditions - STC). Det er ved overflatevilkår storleikane vert observerte under produksjon og lagring. I modellikningane må det takast omsyn til at volumet til ein fase ikkje er det same ved reservoarvilkår (Reservoir Conditions - RC) som ved overflatevilkår. Dette skuldast at trykket er høgare ved reservoarvilkår enn ved overflatevilkår. Sidan det ikkje skjer nokon endring i masse, er volumendringa einstydig med ei endring i massetettleiken. Volumfaktoren gjev forholdet mellom volumet til fase l ved reservoar- og overflatevilkår:

$$B_l = \frac{V_{l,RC}}{V_{l,STC}}, \quad l = o, w, g,$$

der $V_{l,RC}$ og $V_{l,STC}$ er volumet til fase l ved reservoarvilkår og ved overflatevilkår i same følgd. Oppløysingsfaktoren R_s gjev forholdet mellom det gassvolumet som kan løysast opp i eit einingsvolum olje ved reservoarvilkår og ved overflatevilkår. Volumfaktorane for olje-, vass- og gassfasen er

$$\begin{aligned} B_o &= \frac{\rho_{o,STC} + R_s \rho_{g,STC}}{\rho_{o,RC}} \\ B_w &= \frac{\rho_{w,STC}}{\rho_{w,RC}} \\ B_g &= \frac{\rho_{g,STC}}{\rho_{g,RC}} \end{aligned} \quad , \quad (1.7)$$

der $\rho_{l,RC}$ og $\rho_{l,STC}$ er tettleiken til fase l ved reservoarvilkår og ved overflatevilkår i same følgd. Likningane i (1.7) løyst for tettleik ved reservoarvilkår kan setjast inn i likningsettet tilhøyrande komponentmodellen. Vi antek at tettleiken ved overflatevilkår er konstant. Volumfaktoren erstattar då tettleiken som trykkavhengig variabel i likningane.

Kapittel 2

Estimering av permeabilitet

Modellering og simulering av fysiske prosessar gjer det mogeleg å rekne ut resultatane av faktiske målingar på førehand. Ein fysisk modell er sett saman av modellparameterar og modelllikningar med tilhøyrande initial- og randkrav. Å løyse eit framoverproblem inneber å løyse modelllikningane for kjende modellparameterar. At modellparameterane får rette verdiar er avgjerande for at ei simulering skal samsvare med verkelege observasjonar. Men ofte er ikkje direkte målingar av modellparameterane tilgjengelege. I dette tilfellet må modellparameterane estimerast ved hjelp av indirekte målingar.

Vi skal konsentrere oss om absolutt permeabilitet som ukjend modellparameter. Eit oljereservoar ligg tusenvis av meter under bakken, og sjølv om vi kan måle permeabiliteten i kjerneprøvar henta frå brønnane, er det i praksis umogleg å måle direkte korleis permeabiliteten varierer gjennom heile oljereservoaret. Dynamiske brønndata er målingar av trykk eller rate i brønnane over ein tidsperiode, og fungerer i denne samanhengen som indirekte målingar av permeabilitet. Å tilpasse modellen av eit oljereservoar slik at den samsvarar med oljereservoaret si tidlegare åtferd går under namnet historietilpassing.

2.1 Invers-problem

Eit invers-problem er kort sagt: Gjeve eit sett observasjonsdata, finn modellparameterane. Historietilpassing er eit invers-problem. Tomografi, som blant anna vert nytta til medisinske føremål, er også eit invers-problem. Ein av hovudskilnadene mellom å løyse eit framoverproblem og eit invers-problem er at i det første tilfellet, gjeve at vi har eit deterministisk fysisk problem, er løysinga eintydig, medan det for eit invers-problem kan eksistere mange sett modellparameterar som passar observasjonane. Generelt vil eit invers-

problem vere dårleg stilt, både fordi det kan eksistere fleire løysingar, og fordi problemet kan vere ustabil.

Oppstillinga av invers-problem kan etter [16] samanfattast med diskretisering av framovermodellen, parameterisering, løysingskrav og løysingsmetode. Vi ser på eit heterogent permeabilitetsfelt, og diskretiserer framovermodellen ved å dele området inn i eit endeleg tal gitterceller. I kvar gittercelle er permeabiliteten homogen. Val av diskretisering kan påverke kor dårleg stilt invers-problemet er [1]. Løysingskravet fastset når vi kan seie oss nøgde med estimatet. Kva som er eit passande løysingskrav varierer frå problem til problem. Ein løysingsmetode vil verte omtala i kapittel 3.

Parameterisering tyder å representere ein kontinuerleg parameter omtrentleg ved ein funksjon der talet på grader av fridom er lågt [27]. Hovudfokuset i dette kapittelet vil liggje på parameterisering av permeabilitet ved ein lineær transformasjon av eit endeleg tal ukjende koeffisientar. Gjennom parameteriseringa kan talet på ukjende reduserast, noko som har ein regulariserande effekt på invers-problemet. Parameteriseringa fell saman med diskretiseringa når kvar ukjend koeffisient representerer permeabiliteten i ei fastsatt gittercelle. Vi seier då at parameteriseringa er pikselbasert.

Løysing av dårleg stilte invers-problem krev regularisering for å gjere problemet betre stilt. Sidan regularisering medfører at invers-problemet vert forventingsskeivt, bør regulariseringsteknikken velgjast med omtanke. Ein god regulariseringsteknikk innskrenkar løysingsrommet ein heil del, utan å forkaste den beste løysinga [11]. Vi nemner kjapt eit par døme. Parameteruvissa kan reduserast ved å inkludere prior-informasjon og straffe avvik frå denne. Regularisering ved parameterisering går ut på å gjere problemet betre stilt ved å redusere talet på ukjende.

2.2 Objektivfunksjonen

La observasjonsdata \mathbf{d} vere eit sett med målingar som er spreidde i rom og/eller tid. I samband med oljeutvinning kan det som døme nemnast dynamisk brønndata samla inn under oljeproduksjon, seismisk eller elektromagnetisk data. La modellparameterane $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)^T$ vere parameteriseringa av permeabiliteten, der N er talet på gitterceller og p_i er permeabiliteten i gittercelle i . Framovermodellen \mathbf{m} , i denne samanhengen ikkje-lineær, gjev forholdet mellom \mathbf{p} og \mathbf{d} som

$$\mathbf{m}(\mathbf{p}) + \mathbf{r} = \mathbf{d}, \quad (2.1)$$

der residualen \mathbf{r} omfattar både feil i modellen og målingsfeil. Vi ønskjer å minimere residualen, og definerer ein objektivfunksjon med form som minste

kvadrats estimering med vekting:

$$J(\mathbf{p}) = (\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p}))^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p})), \quad (2.2)$$

der \mathbf{C} er kovariansmatrisa for målingsfeil. Objektivfunksjonen er eit mål på differansen mellom observasjonsdata og resultatata frå løysing av framoverproblemet. Ved å minimere objektivfunksjonen finn vi modellparameterar som passar både observasjonsdata og vonleg dei sanne modellparameterane.

2.2.1 Regulariseringsledd

Eit invers-problem vil generelt vere prega av ustabilitet og fleirtydige løysingar. Det kan eksistere løysingar som passar data, men som er fysisk urealistiske. I det ikkje-lineære tilfellet kan objektivfunksjonen ha lokale minimum. Ein måte å handtere dårleg stilte invers-problem på er å innføre restriksjonar på løysinga ved å leggje eit regulariseringsledd til objektivfunksjonen:

$$J(\mathbf{p}) = (\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p}))^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p})) + R(\mathbf{p}). \quad (2.3)$$

I denne oppgåva set vi $R(\mathbf{p}) = 0$, men av omsyn til heilskapen skal vi gje eit par døme. Innleiingsvis vart det nemnd at invers-problem kan regulariserast ved å inkludere prior-informasjon. La \mathbf{p}_{prior} vere ein prior-modell av permeabilitetsfeltet, basert på til dømes seismisk informasjon eller oppskalert geologisk data. Eit regulariseringsledd som straffar avvik frå priormodellen er på forma:

$$R(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{prior})^T \mathbf{C}_{prior}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{prior}), \quad (2.4)$$

der \mathbf{C}_{prior} er kovariansmatrisa for feilen i priormodellen. Tikhonov-regularisering straffar auke i norma til modellparameterane. Til dømes er første-ordens Tikhonov-regularisering på forma $R(\mathbf{p}) = \alpha \|\mathbf{p}\|^2$. Tikhonov-regularisering kan nyttast både på lineære og ikkje-lineære problem, sjå til dømes [8].

2.3 Parameterisering

La vektoren $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_M)^T$ innehalde $M \leq N$ koeffisientar. Parameteriseringa av permeabiliteten er gjeve ved ein lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ på forma $T(\mathbf{c}) = \mathbf{p}$. Permeabiliteten i gittercelle i kan uttrykkjast som

$$p_i = \sum_{j=1}^M s_{ij}c_j, \quad (2.5)$$

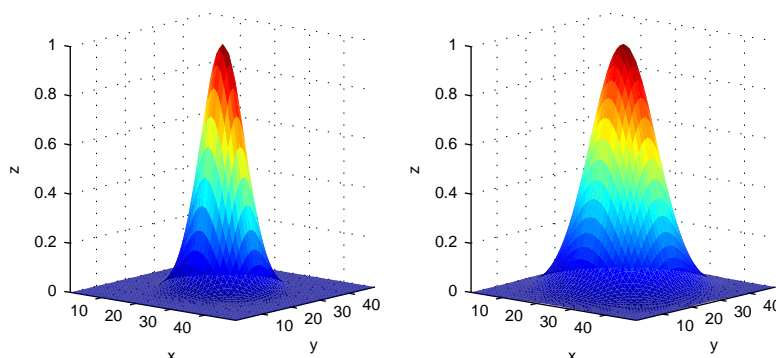
kor s_{ij} er elementa i ein $N \times M$ -matrise med lineært uavhengige kolonner. På matrise-vektor form vert (2.5):

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}\mathbf{c}. \quad (2.6)$$

Matrisa \mathbf{S} vert kalla ei strukturmatrise, og kolonnene til \mathbf{S} basisvektorar. Pikkbasert parameterisering får vi når strukturmatrisa er ei $N \times N$ identitetsmatrise, slik at koeffisienten c_j tilsvarar permeabiliteten i gittercelle j . Når basisvektorane er stykkevis konstante med ein verdi over ein del av området og ein annan verdi elles, kallar vi parameteriseringa for ei sonering [27].

Vi skal også gje nokre døme på meir avanserte parameteriseringsmetodar. Karhunen-Loeve transformasjonen har vist seg å gje eit godt estimat av permeabiliteten når kovariansen er kjend [13]. Ulempen med denne metoden er at han krev mykje utrekningstid, dessutan kjenner vi ikkje alltid kovariansen godt nok. Pilot-punkt metoden har ei anna tilnærming. Permeabiliteten vert estimert i utvalde “pilot-punkt”, og den geostatistiske interpolasjonsmetoden kriging vert nytta til å estimere resten av permeabilitetsfeltet ved hjelp av verdiane i pilot-punkta og målingar av permeabilitet i brønnane, sjå til dømes [14, 21]. I dei numeriske eksperimenta i denne oppgåva skal vi samanlikne radielle basisfunksjonar med diskret cosinus-transformasjon. Sistnemnde har lenge vore i bruk i digital signalhandsaming, men har først nyleg vorte testa i samanheng med estimering av permeabilitet.

To utfordringar knytter seg til val av parameterisering. For det første må vi velje graden av fridom. Fleire ukjende kan føre til større uvisse. Vi kallar det overparameterisering når talet på grader av fridom er for høgt. Eit typisk teikn på overparameterisering er at estimatet av permeabiliteten framstår som fysisk urealistisk [11]. Færre ukjende gjev større stabilitet, men kan medføre tap av informasjon. Utfordringa ligg i å velje det talet på grader av fridom som gjev den rette balansen. Fleirnivå-metodar handterer problemet ved å la talet på grader av fridom vere lite til å byrje med, og så auke det gradvis. Den andre utfordringa er knytt til valet av forma på basisvektorane. Vi skal sjå litt nærare på to typar basisfunksjonar: Radielle basisfunksjonar og diskret cosinus-transformasjon.



Figur 2.1: Gaussisk RBF med $r = 12$ til venstre og $r = 18$ til høyre. I begge tilfelle er $\sigma^2 = 1$.

2.3.1 Radielle basisfunksjonar

Radielle basisfunksjonar (RBF) er kjenneteikna ved at verdien i kvart punkt \mathbf{x} berre er avhengig av avstanden til sentrum \mathbf{x}_i . Ei parameterisering basert på radielle basisfunksjonar er nytta i [4]. I denne oppgåva skal vi nytte den Gaussiske varianten:

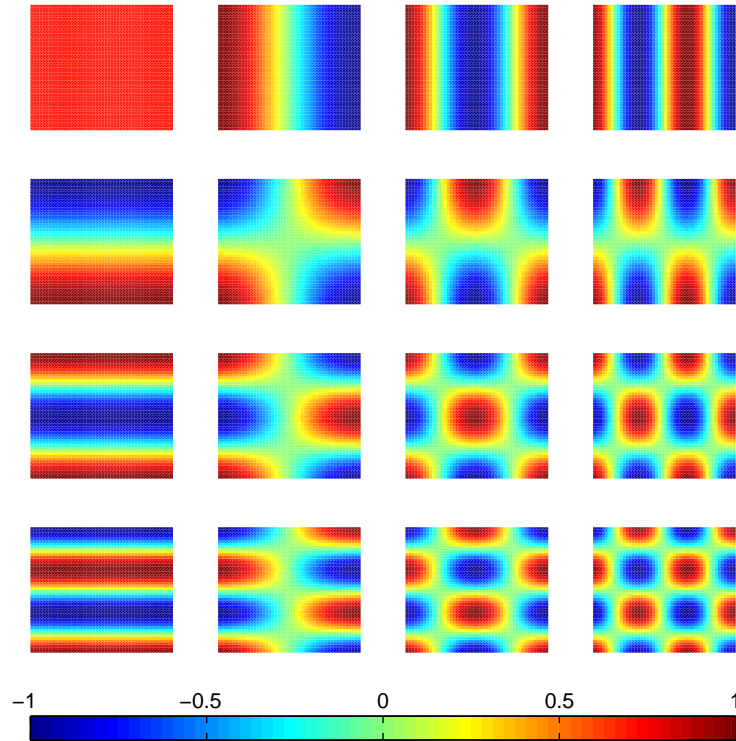
$$\mathbf{b}_i = \sigma^2 \exp \frac{-3(\mathbf{x}_i - \mathbf{x})^2}{r^2} \quad i = 1, \dots, M,$$

der korrelasjonslengda r fastset breidda på basisfunksjonen og σ^2 er standardavviket.

Figur 2.1 viser to døme på Gaussiske RBF; den karakteristiske Gaussiske forma er lett å kjenne att. Likning (2.3.1) er den same som likninga for den Gaussiske kovariansmodellen i [6], kor likningane for sfæriske og eksponentielle kovariansmodellar også er sett opp. Dei sistnemnde er spisse på toppen, medan Gaussiske RBF er glatte på toppen. Motivasjonen for å velje den Gaussiske modellen framfor dei andre er at den avrunda forma sørgjer for at det ikkje vert lagt for stor vekt til toppunktet.

2.3.2 Diskret cosinus-transformasjon

Oppdaginga av diskret cosinus-transformasjon (DCT) har hatt mykje å seie for utviklinga av digital signalhandsaming [22]. Blant dei mange bruksområda kan blant anna JPEG- og MPEG-komprimering nemnast. Diskret cosinus-transformasjon har også vist seg å vere eit attraktivt alternativ for parameterisering av permeabilitet samanlikna med den veletablerte



Figur 2.2: Døme på todimensjonale basisfunksjonar for ein 4×4 DCT skalert til intervallet $[-1, 1]$. Talet på gitterceller er 49×49 .

transformasjonen KLT [13]. Jafarpour og McLaughlin [13] syner at estimatet av log-permeabiliteten med DCT er nesten jamngodt med dei tilfella der KLT er nytta, samstundes som DCT har fordelane av å vere uavhengig av data, meir robust, og kostar mindre i utrekningstid. I ein annan artikkel legg dei same forfattarane fram resultatata av DCT i kombinasjon med “Ensamle Kalman Filter” [12] for estimering av permeabilitet.

Vi skal først definere DCT i ein dimensjon. La $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$, og la $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{M-1})$. Vidare, la transformasjonen $T : \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^N$ vere ein eindimensjonal DCT slik at $T(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$. Element n av \mathbf{u} er på forma [22]:

$$u_n = \left(\frac{2}{M}\right)^{1/2} k_n \sum_{m=0}^{M-1} \cos\left[\frac{\pi(2m+1)n}{2M}\right] v_m \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.7)$$

der k_n er definert som:

$$k_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & n = 0 \\ 1 & 1 \leq n \leq N - 1. \end{cases}$$

Likning (2.7) definerer ein av fleire typar DCT, som alle har til felles at basisfunksjonane definert ved transformasjonen er ortonormale. Dette er ein svært gagnleg eigenskap når (2.7) skal utvidast til to dimensjonar. La oss no seie at \mathbf{u} og \mathbf{v} ikkje lenger er vektorar, men $M \times N$ -matriser. Vi følgjer framleis [22]. Element ij i matrisa \mathbf{u} er gjeve ved:

$$u_{ij} = \frac{2k_i k_j}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left[\frac{\pi(2m+1)i}{2M} \right] \cos \left[\frac{\pi(2n+1)j}{2N} \right] v_{nm}, \quad (2.8)$$

der $i = 0, 1, \dots, M - 1$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$ og

$$k_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{for } i = 0 \\ 1 & \text{for } 1 \leq i \leq M - 1, \end{cases}$$

tilsvarande for k_j . Ein av DCT sine nøkkeleigenskapar er at han er separabel [22], slik at (2.8) kan omformast til ein ein-dimensjonal transformasjon som krev mindre utrekningstid.

Når biletet er kjent på førehand, kan koeffisientane i transformasjonen reknast ut direkte. Utfordringa ligg i å finne ein basis som komprimerer biletet ein heil del utan at viktig informasjon går tapt. Vanlegvis vert dette oppnådd ved å velje dei basisvektorane som tilsvarar dei største koeffisientane. For historietilpassing er situasjonen annleis. Kun indirekte målingar er tilgjengelege, og koeffisientane er ikkje kjende på førehand. Andre metodar for å identifisere det optimale settet med basisvektorar må nyttast. Jafarpour og McLaughlin foreslår å velje dei koeffisientane som er størst midla over ei gruppe realisasjonar av eit permeabilitetsfelt [13, 12]. Eit anna alternativ som vert presentert er å velje basisvektorar basert på apriori informasjon. Eksisterer det til dømes kjennskap til at permeabilitetsfeltet primært har vertikale trekk, er det naturleg å representere det hovudsakleg med vertikale basisar. I denne oppgåva har vi ei anna tilnærming. Vi hentar informasjon frå gradientane til objektivfunksjonen og nyttar informasjonen til å gradvis velje fleire og fleire basisfunksjonar til løysingskravet vert nådd.

2.3.3 Pilot-punkt metoden

Pilot-punkt metoden er ein teknikk som har vorte mykje brukt i samband med invers-problem knytte til grunnvatn. Ideen er å approksimere permeabiliteten med ein glatt funksjon som reproduserer tilgjengelege målingar og samtidig passar trykkobservasjonar [16].

Med denne metoden er permeabiliteten i pilot-punkta dei ukjende parameterane; resten av permeabilitetsfeltet vert funne ved å krige mellom permeabiliteten i pilot-punkta og mellom målingar av permeabiliteten i brønnane. Ein liten permutasjon av verdien i eit pilot-punkt fører dermed til at permeabilitetsfeltet endrar seg innanfor korrelasjonslengda til pilot-punktet. Ein av utfordringane med pilot-punkt metoden ligg i å velje passende plasseringar til pilot-punkta.

Dersom vi gjer den føresetnaden at målingane av permeabiliteten ikkje inneheld støy, og at permeabiliteten i pilot-punkta har dei same statistiske eigenskapane som den sanne permeabiliteten i dei same punkta, kan kriging-estimatoren til permeabiliteten på logaritmisk skala etter [16] representerast ved

$$p_i = \hat{p}_i + \sum_{j=1}^M \Phi_{ij} c_j, \quad (2.9)$$

der \hat{p}_i er estimatet av log-permeabiliteten funne ved kriging mellom dei verkelege målingane av permeabiliteten. Koeffesientane \mathbf{c} er verdiane til permeabiliteten i pilot-punkta minus kriging-estimatet i dei same punkta. Vektene Φ_{ij} vert funne ved kriging mellom pilot-punkta. På matrise-vektor form vert (2.9)

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{S}\mathbf{c},$$

der strukturmatrisa er på forma

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}_{\mathbf{p}\mathbf{c}}\mathbf{C}_{\mathbf{c}\mathbf{c}}^{-1}, \quad (2.10)$$

der $\mathbf{C}_{\mathbf{p}\mathbf{c}}$ er prior-kovariansen mellom \mathbf{p} og \mathbf{c} og $\mathbf{C}_{\mathbf{c}\mathbf{c}}$ er prior-kovariansen mellom verdiane til log-permeabiliteten i pilot-punkta.

Tradisjonelt har pilot-punkta vorte plasserte manuelt, basert på empiriske vurderingar. Ein automatisk pilot-punkt metode vert presentert i blant andre [21]. Utgangspunktet er eit kriging-estimat av log-permeabilitetsfeltet. Ein sensitivitetsanalyse avgjer kva pilot-punkt som skal permutterast, slik at verdiane i pilot-punkta vert optimaliserte trinnvist.

2.4 Løysingskrav

La \mathbf{c}' vere koeffisientane der objektivfunksjonen tar sitt minimum. For ein lineær modell med normalfordelte målingsfeil kan vi anta at minimumsverdien til objektivfunksjonen er χ^2 -fordelt med $N_d - M$ grader av fridom, der N_d er talet på observasjonar og M er talet på ukjende koeffisientar i parameteriseringa [11]. Med desse føresetnadane vert forventingsverdien til objektivfunksjonen sitt minimum:

$$E(J(\mathbf{c}')) = N_d - M,$$

og standardavviket:

$$\sigma(J(\mathbf{c}')) = \sqrt{2(N_d - M)}.$$

Vi antar at objektivfunksjonen nesten er lineær rundt \mathbf{c}' , og seier at løysingskravet er nådd når objektivfunksjonen ligg eitt standardavvik frå forventingsverdien [11]:

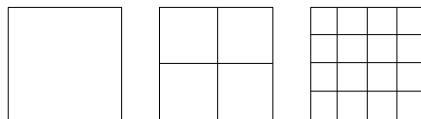
$$J \leq (N_d - M) + \sqrt{2(N_d - M)}.$$

2.5 Adaptiv parameterisering

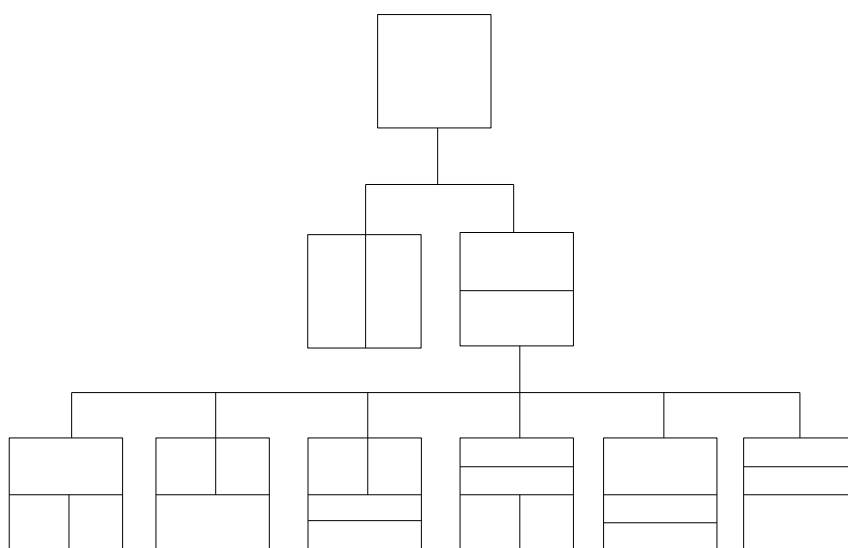
Når vi estimerer eit permeabilitetsfelt for ei valgt parameterisering, inneber det berre å finne dei ukjende koeffisientane i parameteriseringa. I eit utvida invers-problem vert alle komponentane i parameteriseringa rekna som ukjende. Det inneber at vi søker å finne dei basisfunksjonane, med tilhøyrande koeffisientar, som reduserer objektivfunksjonen mest. Det er ein føresetnad at kva slags type parameterisering som skal nyttast, til dømes sonering, er valt på førehand.

I ein fleirnivå-metode vert talet på basisvektorar sett lågt til å byrje med, og vert så gradvis auka. Vi seier at kvar nye parameterisering representerer eit nytt nivå. For kvart nye nivå vert objektivfunksjonen minimert. Målet er å få ein størst mogleg reduksjon i objektivfunksjonen, og samtidig halde talet på basisfunksjonar så lågt som mogleg.

Arbeid med fleirnivå-metodar basert på sonering er skildra i blant anna [28, 11, 3, 27]. Metoden som vert føreslått i [28] går ut på å forfine oppdelinga av eit område på ein hierarkisk måte. Figur 2.3 viser eit døme på hierarkisk oppdeling av eit kvadratisk område. Kvar nye oppdeling tilsvarar eit nytt nivå der objektivfunksjonen vert minimert. Prosessen stoppar når ytterlegare oppdelingar ikkje bidreg til ein vesentleg reduksjon i objektivfunksjonen. Denne strategien reduserer faren for overparameterisering, samt trongen for andre typar regularisering [28]. Ulempa er at talet på grader av fridom veks raskt,



Figur 2.3: Hierarkisk oppdeling av området frå eitt nivå til neste.



Figur 2.4: Moglege oppdelingar frå eitt nivå til det neste.

slik at risikoen for overparameterisering framleis er til stades [11]. Det er ikkje naudsynt å stadig forfine oppdelinga over eit område der berre nokre få, lokale oppdelingar er naudsynt; det gjer berre talet på grader av friedom unødig høgt. Eit smartare val vil vere å berre gjere oppdelinga finare der det er naudsynt.

Adaptiv parameterisering er ein fleirnivå-metode som nyttar informasjon frå observasjonsdata til å endre parameteriseringa frå eitt nivå til neste. Med sonering startar prosessen med å estimere ein konstant verdi over heile området, eventuelt å estimere permeabiliteten for ei grov oppdeling av området. Moglege oppdelingar i neste nivå vert vurdert opp mot kvarandre etter kva oppdeling som potensielt kan føre til den største reduksjonen i objektivfunksjonen. Figur 2.4 viser oppdelingsstrategien som er nytta i [11].

Initielt er verdien konstant over heile området. På neste nivå står valet mellom å dele området vertikalt eller horisontalt. Dersom horisontal oppdeling viser seg å vere det mest attraktive alternativet, finst det på neste nivå igjen seks ulike alternativ som vist nederst på figur 2.4. Kva for ein av desse seks som vert valt, avgjer kva val som vil finnast på neste nivå igjen. I [3] vert det operert med ein førehandsdefinert klasse av oppdelingar, der også diagonale oppdelingar vert tillate.

Radielle basisfunksjonar har også vorte nytta i arbeid med adaptiv parameterisering. I [4], som denne oppgåva byggjer på, vert radielle basisfunksjonar valt etter to ulike kriterium, eller ytingsmål som vi skal kalle det. Diskret cosinus-transformasjon har, så langt vi kjenner til, ikkje vore testa i kombinasjon med adaptiv parameterisering.

Fleirnivå-metodar krev to typar løysingskrav -eitt på kvart nivå og eitt som avgjer kor tid heile prosessen stoppar. For å minske tidskostnadene bør minimeringa på kvart nivå stoppast etter at størstedelen av reduksjonen i objektivfunksjonen har funne stad. Basisfunksjonar som gjev ei auke i objektivfunksjonen frå eitt nivå til det neste skal ikkje godkjennast. Det er ikkje alltid opplagt kva som kan vere eit passande krav. Eitt av ytingsmåla vi presenterer under er basert på ein prediksjon av objektivfunksjonen. Med dette ytingsmålet kan det vere eit alternativ å nytte prediksjonen av objektivfunksjonen som eit stoppkriterium på kvart nivå.

Pilot-punkt metoden. Målsetjinga for dette arbeidet var opprinneleg å studere pilot-punkt metoden i ljuset av adaptiv parameterisering. Vi ville auke talet på grader av fridom gradvist ved å leggje til nye pilot-punkt. Av likningane over går det fram at strukturen på parameteriseringa er avhengig av plasseringa til pilot-punkta. Når vi legg til eitt eller fleire nye pilot-punkt, endrar heile strukturmatrisa seg. Endringane er størst nær dei nye pilot-punkta, slik at dersom avstanden mellom pilot-punkta er stor nok relativt korrelasjonslengda, vil ikkje heile strukturmatrisa verte påverka i like stor grad. Vi konkluderte likevel med at ei strukturmatrise på forma (2.10) ikkje passar direkte inn i denne konteksten. Den eine grunnen er at strukturen på parameteriseringa ikkje opnar for at vi kan velje mellom ulike korrelasjonslengder undervegs. Den andre grunnen er at vi ønsker å fokusere på estimering av permeabilitet i dei tilfella der det eksisterer liten prior-kunnskap om permeabilitetsfeltet, medan suksessen med pilot-punkt metoden nettopp er avhengig av at prior-kunnskap.

2.5.1 Første-ordens ytingsmål

Vi skal sjå nærare på korleis vi kan identifisere kva basisfunksjonar som har potensiale til å gje den største reduksjonen i objektivfunksjonen. Eit førsteordens ytingsmål går kort sagt ut på å velje basisvektorar ved å samanlikne gradienten til objektivfunksjonen for ulike parameteriseringar. Tidlegare arbeid gjort på adaptiv parameterisering der førsteordens ytingsmål er nytta inkluderer blant anna [3] og [4].

La

$$\nabla_p J = \left(\frac{\partial J}{\partial p_1}, \frac{\partial J}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial p_N} \right)^T$$

notere finskala-gradienten til objektivfunksjonen, det vil seie gradienten med omsyn på modellparameterane, og la

$$\nabla_c J = \left(\frac{\partial J}{\partial c_1}, \frac{\partial J}{\partial c_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial c_M} \right)^T$$

notere gradienten til objektivfunksjonen med omsyn på koeffisientane i parameteriseringa. Når finskala-gradienten er kjend, finn vi gradientane raskt ved å multiplisere finskala-gradienten med den transponerte av strukturmatrisa:

$$\nabla_c J = \mathbf{S}^T \nabla_p J. \quad (2.11)$$

Forholdet følgjer av kjerneregelen for funksjonar av fleire variablar. Ei detaljert utleiing er gjeve i [5].

Finskala-gradientar er tidkrevjande å rekne ut, men når det først er gjort går det kjapt å finne gradienten til objektivfunksjonen for ulike parameteriseringar. Dermed har vi høve til å vurdere eit stort tal parameteriseringar opp mot kvarandre. Det andre alternativet ville vore å nytte ein metode som finn gradienten til objektivfunksjonen for kvar parameterisering. Då ville tidskostnadane vere avhengige av kor mange ulike parameteriseringar vi ønskjer å vurdere.

La \mathbf{S}_{gamal} vere strukturmatrisa på førre nivå. Samansetjinga av strukturmatrisa på neste nivå er på forma $\mathbf{S}_{ny} = [\mathbf{S}_{gamal}, \mathbf{S}_{test}]$. Vi søker den eller dei basisvektorarane som svarar til den største norma til gradienten med omsyn på den nye parameteriseringa. Tanken er at den strukturmatrisa som resulterer i den største norma, svarar til parameterrommet kor objektivfunksjonen har potensiale til å falle mest.

Vi følger tankegangen i [4]. Norma til gradienten med omsyn på den nye parameteriseringa er

$$\|\nabla_{\mathbf{c}}J(\mathbf{c}_{ny})\| = \left\| \left[\nabla_{\mathbf{c}}J(\mathbf{c}_{gamal})^T, \nabla_{\mathbf{c}}J(\mathbf{c}_{test})^T \right] \right\|,$$

der

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{c}}J(\mathbf{c}_{gamal}) &= \mathbf{S}_{gamal}^T \nabla_p J, \\ \nabla_{\mathbf{c}}J(\mathbf{c}_{test}) &= \mathbf{S}_{test}^T \nabla_p J. \end{aligned}$$

Det held å finne dei basisvektorane som gjev $\|\nabla_{\mathbf{c}}J(\mathbf{c}_{test})\|$ størst verdi. Vi vurderer berre ein basisvektor om gongen. Norma kan då erstattast med $|\partial J/\partial c_{test}|$.

Talet på basisvektorer kan aukast med ein, eller eit fast tal for kvart nivå. Eit anna alternativ er å velje den basisvektoren som gjev den største verdien for $|\partial J/\partial c_{test}|$, pluss alle som er til dømes minst 95% av denne.

2.5.2 Andre-ordens ytingsmål

Det andre ytingsmålet byggjer på ein linearisering av framovermodellen. Tidlegare arbeid gjort på adaptiv parameterisering der dette ytingsmålet er nytta inkluderer blant anna [11] og [4]. Vi kallar ytingsmålet for andre-ordens fordi det inkluderer ein approksimasjon av dei andre-ordens deriverte til objektivfunksjonen, sjølv om namnet er litt upresist.

Vi tek utgangspunkt i ein objektivfunksjon på forma (2.2). Utleinga for den same objektivfunksjonen med eit regulariseringsledd er tilsvarende [4]. La \mathbf{c} notere koeffisientane med omsyn på parameteriseringa på noverande nivå, og la $\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$ vere koeffisientane med omsyn på parameteriseringa på neste nivå. Taylor-approksimasjonen til objektivfunksjonen for $\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}$ er

$$J(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}) \approx J(\mathbf{c}) + \Delta\mathbf{c}^T \nabla J(\mathbf{c}) + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{c}^T \text{Hess}J(\mathbf{c}) \Delta\mathbf{c}. \quad (2.12)$$

Som tidlegare nemnd ville det koste mykje tid å optimere for alle aktuelle parameteriseringar for så å velje den som reduserte objektivfunksjonen mest. Approksimasjonen av objektivfunksjonen lét oss forutsjå kor stor reduksjon som er oppnåeleg for kvart sett med basisvektorar utan tidkrevjande optimeringar.

Vi skal utleie uttrykket for den minste oppnåelege verdien til objektivfunksjonen for ein gjeve parameterisering. Først skal vi sjå nærare på dei ulike

ledda i (2.12). Objektivfunksjonen i (2.2) kan skrivast på ein meir kompakt form innsett residualen i (2.1):

$$J(\mathbf{p}) = \mathbf{r}(\mathbf{p})^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{p}).$$

La N_d vere talet på observasjonar i framovermodellen, og N talet på modellparameterar. Gradienten til objektivfunksjonen med omsyn på modellparameterane følgjer av kjerneregelen:

$$\nabla_p J = -2\mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{p}),$$

der \mathbf{A} er jacobimatrisa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial p_1} & \frac{\partial m_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial m_1}{\partial p_N} \\ \frac{\partial m_2}{\partial p_1} & \frac{\partial m_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial m_2}{\partial p_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial m_{N_d}}{\partial p_1} & \frac{\partial m_{N_d}}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial m_{N_d}}{\partial p_N} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

I (2.12) inngår imidlertid gradienten til objektivfunksjonen med omsyn på koeffisientane i parameteriseringa. Av relasjonen i (2.11) følgjer:

$$\begin{aligned} \nabla_c J &= \mathbf{S}^T \nabla_p J \\ &= \mathbf{S}^T \cdot (-2)\mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r} \\ &= -2(\mathbf{A}\mathbf{S})^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r} \\ &= -2\mathbf{A}_c^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Det kan visast at $\mathbf{A}_c = \mathbf{A}\mathbf{S}$ er relasjonen som let oss rekne ut jacobimatrisa, også kalt sensitivitetmatrisa, for einkvar parameterisering når vi kjenner \mathbf{A} [5]. Vi gjer ein standard approksimasjon til den hessiske matrisa:

$$\text{Hess}J \approx 2\mathbf{A}_c^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}_c.$$

Vi vil no finne den minste verdien (2.12) kan ta. Strategien er å derivere (2.12) med omsyn på $\Delta \mathbf{c}$, og setje den deriverte lik null. Til slutt løyser vi for $\Delta \mathbf{c}$.

Gradienten til taylor-approksimasjonen til objektivfunksjonen med omsyn på $\Delta \mathbf{c}$ er

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{c}} J(\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) &= \nabla J(\mathbf{c}) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \text{Hess} J(\mathbf{c}) \Delta \mathbf{c} \\ &= -2 \mathbf{A}_c \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{c}) + 2 \mathbf{A}_c^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}_c \Delta \mathbf{c}.\end{aligned}$$

Vi løyser $\nabla J(\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) = 0$ for $\Delta \mathbf{c}$, og finn kvar (2.12) tek sin minste verdi:

$$\Delta \mathbf{c} = (\mathbf{A}_c^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}_c)^{-1} (\mathbf{A}_c^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{c})).$$

Innsatt i (2.12) får vi approksimasjonen av minimumsverdien:

$$\tilde{J}(\mathbf{c} + \Delta \mathbf{c}) = \mathbf{r}(\mathbf{c})^T \left(\mathbf{C}^{-1} - \left[\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}_c (\mathbf{A}_c^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{A}_c^T \mathbf{C}^{-1} \right] \right) \mathbf{r}(\mathbf{c}).$$

Den approksimerte minimumsverdien gjev ein peikepinne for kva basisfunksjonar som vil føre til det største fallet i objektivfunksjonen, og følgjeleg kva basisfunksjonar som vil vere føremålstenleg å leggje til i neste steg. Dersom vi samanliknar dette ytingsmålet med det førre, ser vi at skilnaden ligg i at det her vert gjort nytte av andre-ordensinformasjon ved approksimasjonen til den hessiske matrisa. Resultata i [4] kan tyde på at eit andreordens ytingsmål er betre enn eit førsteordens. Samstundes kostar andreordens ytingsmålet også meir tid, sidan vi lyt rekne ut sensitivitetmatrisa til objektivfunksjonen med omsyn på alle modellparameterane.

Kapittel 3

BFGS-metoden og gradientutrekning med den adjungerte metoden

Dette kapitlet tek føre seg ein numerisk metode for å minimere objektivfunksjonen. Teorien består av to delar: Ein gjennomgang av gradientbasert optimalisering med BFGS-metoden, som er ein kvasi-Newton metode, og utrekning av finskala-gradientane til objektivfunksjonen med den adjungerte metoden. Kombinasjonen av adjungerte gradientar og kvasi-Newton metoden gjev ein svært effektiv algortime for optimaliseringsproblem med eit stort tal ukjende modellparameterar, sjå blant anna [27] og [23].

3.1 Optimalisering

Teorien i dette kapitlet byggjer hovudsakleg på boka om numerisk optimalisering av J. Nocedal og S. J. Wright [19]. Optimaliseringsalgoritmar kan delast inn i to klassar: Dei som nyttar deriverte, som til dømes Newtons metode, Levenberg-Marquardt eller kvasi Newton-metoden, og dei som ikkje nyttar deriverte. Optimaliseringsalgoritmar som nyttar deriverte konvergerer generelt raskare enn dei som ikkje nyttar deriverte.

La $J(\mathbf{p})$ notere objektivfunksjonen, der $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M)$ er ukjende parameterar. Eit ubunde optimaliseringsproblem kan formulerast matematisk som:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^M} J(\mathbf{p}).$$

Ein ikkje-lineær objektivfunksjon vil, dersom han ikkje er konveks, ha lokale minimum. Globale minimum er vanskelege både å finne og å identifisere.

Gradientbaserte metoder er lokale metoder som ikke er i stand til å identifisere globale minimum.

3.2 Linjesøk-metoden

Med linjesøk-metoden vel algoritmen ei retning $\Delta \mathbf{p}$, og søker langs den samme retninga etter ei passende steglengd α . La den initielle parametervektoren i iterasjon k vere \mathbf{p}_k , og la $\Delta \mathbf{p}_k$ og α_k i same følgd vere søkeretning og steglengd funne i iterasjon k . Oppdateringa av parametervektoren med linjesøk-metoden er på forma:

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{p}_k, \quad (3.1)$$

der \mathbf{p}_{k+1} er parametervektoren i iterasjon $k + 1$. Steglengda vert funne ved å løyse minimeringsproblemet:

$$\min_{\alpha_k > 0} J(\mathbf{p}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{p}_k).$$

Algoritmar for linjesøk vil vanlegvis prøve ulike steglengder fram til eitt eller fleire krav vert nådd. BFGS-metoden gjer nytte av Wolfe-krava, der steglengda må tilfredsstill:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{p}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{p}_k) &\leq J(\mathbf{p}_k) + c_1 \alpha_k \nabla J(\mathbf{p}_k)^T \Delta \mathbf{p}_k, \\ \nabla J(\mathbf{p}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{p}_k) \Delta \mathbf{p}_k &\geq c_2 \nabla J(\mathbf{p}_k)^T \Delta \mathbf{p}_k, \end{aligned} \quad (3.2)$$

for $0 < c_1 < c_2 < 1$. Det første kravet sikrar at objektivfunksjonen vert tilstrekkeleg redusert, det andre kravet sikrar at steglengda ikke vert for kort.

3.3 Kvasi-Newton metoden

Kvasi-Newton metoden er basert på Newtons metode. Newtons metode krev kjennskap til både førsteordens- og andreordens-deriverte, der spesielt dei sistnemnde kan vere svært tidkrevjande å rekne ut. Kvasi-Newton metoden nyttar ein approksimasjon til den Hessiske matrisa, slik at det berre er trong for kjennskap til dei førsteordens-deriverte. Approksimasjonen til den Hessiske matrisa vert oppdatert for kvar iterasjon. Til dette føremålet eksisterer det fleire ulike metoder. BFGS-metoden er den mest populære.

La F_k vere ein kvadratisk modell av objektivfunksjonen i iterasjon \mathbf{p}_k :

$$F_k(\Delta\mathbf{p}) = J(\mathbf{p}_k) + \Delta\mathbf{p}^T \nabla J(\mathbf{p}_k) + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}^T \mathbf{B}_k \Delta\mathbf{p},$$

der \mathbf{B}_k er ei symmetrisk og positivt definit $M \times M$ matrise. Gradienten til F_k er:

$$\nabla F_k(\Delta\mathbf{p}) = \nabla J(\mathbf{p}_k) + \mathbf{B}_k \Delta\mathbf{p}.$$

Vi løyser $\nabla F_k(\Delta\mathbf{p}) = 0$ for $\Delta\mathbf{p}$, som gjev retninga i iterasjon \mathbf{p}_k :

$$\Delta\mathbf{p}_k = -\mathbf{B}_k^{-1} \nabla J(\mathbf{p}_k), \quad (3.3)$$

og set (3.3) inn i (3.1). Parametervektoren i neste iterasjon er gjevne ved

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - \alpha_k \mathbf{B}_k^{-1} \nabla J(\mathbf{p}_k),$$

der α_k vert funne ved å utføre eit linjesøk i retninga $\Delta\mathbf{p}_k$, og \mathbf{B}_k er approksimasjonen til den Hessiske matrisa i iterasjon \mathbf{p}_k . Forutan BFGS er ofte brukte metodar for å approksimere \mathbf{B}_k Broyden, DFP og SR1, for å nemne nokre. I “steepest descent”-metoden vert \mathbf{B}_k sett til identitetsmatrisa.

3.4 BFGS-metoden

BFGS-metoden har namnet sitt etter Broyden, Fletcher, Goldfarb og Shanno, og er ein metode for å oppdatere approksimasjonen til den Hessiske matrisa i Kvasi-newton metoden.

Sett at det med Kvasi-newton metoden er generert ein ny iterasjon \mathbf{p}_{k+1} . La F_{k+1} vere ein kvadratisk modell av objektivfunksjonen i iterasjon \mathbf{p}_{k+1} :

$$F_{k+1}(\Delta\mathbf{p}) = J(\mathbf{p}_{k+1}) + \Delta\mathbf{p}^T \nabla J(\mathbf{p}_{k+1}) + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}^T \mathbf{B}_{k+1} \Delta\mathbf{p},$$

der \mathbf{B}_{k+1} er ei oppdatering av approksimasjonen til den Hessiske matrisa i førre steg. Utgangspunktet for oppdatering etter BFGS-metoden er krava om at ∇F_{k+1} skal stemme overeins med gradienten til objektivfunksjonen i iterasjon \mathbf{p}_k og \mathbf{p}_{k+1} . Sidan

$$\nabla F_{k+1}(0) = \nabla J(\mathbf{p}_{k+1}),$$

er det siste kravet automatisk oppfylt. Det første kravet kan formulerast som

$$\nabla F(-\alpha_k \Delta \mathbf{p}_k) = \nabla J(\mathbf{p}_{k+1}) - \alpha_k \mathbf{B}_{k+1} \Delta \mathbf{p}_k = \nabla J(\mathbf{p}_k). \quad (3.4)$$

Vi set (3.1) inn i (3.4), skriv om og får uttrykket:

$$\mathbf{B}_{k+1} \mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k, \quad (3.5)$$

der

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k, \text{ og } \mathbf{y}_k = \nabla J(\mathbf{p}_{k+1}) - \nabla J(\mathbf{p}_k).$$

Likning (3.5) vert kalla sekantlikninga. La \mathbf{H}_{k+1} notere den inverse av \mathbf{B}_{k+1} . Sekantlikninga vert då på forma:

$$\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{y}_k = \mathbf{s}_k.$$

Med BFGS-metoden vert det krevd at den oppdaterte matrisa \mathbf{H}_{k+1} er den som er nærast den matrisa i førre iterasjon, og i tillegg oppfyller sekantlikninga og kravet om ei symmetrisk, positivt definit matrise. Dette leiår til minimeringsproblemet:

$$\min_{\mathbf{H}} \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_k\|$$

$$\text{med omsyn på } \mathbf{H} = \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{H} \mathbf{y}_k = \mathbf{s}_k.$$

Minimeringsproblemet har ei eintydig løysing:

$$\mathbf{H}_{k+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k} \right)^T \mathbf{H}_k \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k} \right) + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k},$$

der \mathbf{I} er identitetsmatrisa. Det kan visast at \mathbf{H}_{k+1} er positivt definit når \mathbf{H}_k er positivt definit.

Samanlikna med andre kvasi-Newton metodar vert BFGS-metoden rekna som den mest effektive. BFGS-algoritmen konvergerer ikkje like raskt som Newtons metode, men raskt nok til dei fleste praktiske føremål. Fordelen med å velje BFGS-metoden er at det ikkje er trong for å rekne ut andre-ordens deriverte.

3.4.1 LBFGS-algoritmen

Approximasjonen av den inverse Hessiske matrisa resulterer som regel i ei tett matrise. For eit stort tal ukjende kostar det mykje å lagre og manipulere heile matrisa. I algoritmen L-BFGS (Limited memory BFGS) vert matrisa lagra implisitt gjennom eit sett vektorar $\{\mathbf{s}_i, \mathbf{y}_i\}$ for dei mest nylege iterasjonane, helst eit tal frå 3 – 20 iterasjonar. Når ein iterasjon er fullført, vert det eldste vektorparet erstatta med det som vart rekna ut sist. Resultatet er ein algoritme som er eigna til å løyse problem med eit stort tal ukjende, sjå til dømes [18] og [15]. Ulempa med BFGS-algoritmen er at han konvergerer sakte. LBFGS-algoritmen presterer også dårleg på problem som er svært dårleg stilt. Men alt i alt er LBFGS-algoritmen godt eigna til å løyse problem med mange ukjende der den Hessiske matrisa er vanskeleg tilgjengeleg.

3.5 Numeriske gradientar

La $J(\mathbf{p})$ vere objektivfunksjonen som definert i (2.2). Sidan modellparameterane ikkje inngår direkte i objektivfunksjonen, er det ikkje mogleg å finne gradienten til objektivfunksjonen analytisk. Vi er interesserte i å finne finskala-gradienten til objektivfunksjonen, og deretter finne gradienten som skildra i avsnitt 2.5.1. Ein måte å finne finskala-gradienten til objektivfunksjonen er ved framoverdifferanse-approximasjon:

$$\frac{\partial J}{\partial p_j} \approx \frac{J(\mathbf{p} + h_j \mathbf{e}_j) - J(\mathbf{p})}{h_j} \quad j = 1, \dots, N,$$

der \mathbf{e}_j er ein $N \times 1$ – vektor der alle elementa er null bortsett frå element j som har verdien 1, og h_j er ein parameter som kan veljast vilkårleg liten, avhengig av maskinpresisjon. Med framoverdifferanse-approximasjon av finskala-gradienten trengs det $N + 1$ framoversimuleringar, der N er talet på modellparameterar. Når talet på framoversimuleringar veks lineært med talet på modellparameterar, er det begrensa kor store problem som kan løysast.

3.5.1 Den adjungerte metoden

Gradientutrekning med den adjungerte metoden lét oss rekne ut gradientane til objektivfunksjonen med omsyn på eit stort tal modellparameterar til ein akseptabel tidskostnad. Framstillinga her byggjer på [7] og [9]. Sjå også [27].

La løysingsvariabelen \mathbf{X}_k innehalde trykk og metning for kvar gittercelle i tidssteg k . Dei diskrete reservoarlikningane er avhengige av løysingsvariablane i det noverande og førre tidssteget, samt parameteriseringa av modellparameterane:

$$\mathbf{R}_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{p}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_t. \quad (3.6)$$

Dersom vi reknar med at målefeila er uavhengige, kan vi skrive objektivfunksjonen i (2.2) på forma

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{N_t} J_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{p}),$$

der N_t er det samla talet på tidssteg. I eit historietilpassingsproblem vert (3.5.1) minimert med omsyn på (3.6). Problemet kan reduserast til eit ubunde problem ved å definere Lagrange-funksjonen

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{p}, \Psi) = \sum_{k=1}^{N_t} [J_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{p}) + \Psi_k^T \mathbf{R}_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{p})]. \quad (3.7)$$

Lagrange-multiplikatorane i tidssteg k er gjeve ved

$$\Psi_k = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{N \cdot N_c}),$$

der N er talet på gitterceller og $N \cdot N_c$ er det samla talet på reservoarlikningar. Den totalderiverte av (3.7) med omsyn på modellparameterane er

$$\frac{dL}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{p}} + \frac{\partial L}{\partial \Psi} \frac{d\Psi}{d\mathbf{p}}. \quad (3.8)$$

Dersom vi kan finne alle \mathbf{X}_k og Ψ_k slik at dei to siste ledda vert null, vert den totalderiverte i (3.8) lik den partielle deriverte av Lagrange-funksjonen med omsyn på modellparameterane. Problemet består i å løyse

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi_k} = \mathbf{R}_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{p}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_t, \quad (3.9)$$

og eit sett adjungerte likningar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}_k} &= \frac{\partial J_k}{\partial \mathbf{X}_k} + \Psi_k^T \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial \mathbf{X}_k} + \Psi_{k+1}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{k+1}}{\partial \mathbf{X}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_t - 1, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}_{N_t}} &= \frac{\partial J_{N_t}}{\partial \mathbf{X}_{N_t}} + \Psi_{N_t}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{N_t}}{\partial \mathbf{X}_{N_t}} = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

for Lagrange-multiplikatorane Ψ . Å løyse (3.9) er det same som å løyse det diskrete framoverproblemet. Dei adjungerte likningane utgjer eit lineært likningssett, som vert løyst bakover i tid. Av (3.9) følgjer det at $L(\mathbf{X}, \mathbf{p}) = J(\mathbf{p})$, og vidare at:

$$\frac{dJ}{d\mathbf{p}} = \frac{dL}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} = \sum_{k=1}^{N_t} \left[\frac{\partial J_k}{\partial \mathbf{p}} + \Psi_k^T \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial \mathbf{p}} \right].$$

Vi kan finne gradienten til objektivfunksjonen ved å setje Lagrange-multiplikatorane funne i (3.10) inn i likninga over. Sidan modellparameterane ikkje inngår eksplisitt i objektivfunksjonen i (2.2), vert dei partielle deriverte $\partial J_k / \partial \mathbf{p}$ null.

Men den adjungerte metoden treng vi berre løyse framoverproblemet ein gong. Det adjungerte likningssystemet må løysast N_t gonger, det vil seie like mange gonger som talet på tidssteg. Dersom talet på parameterar er mykje mindre enn talet på tidssteg, $N \ll N_t$, er differansemetoden meir effektiv, sidan vi då kan rekne ut gradientane ved å gjere $N + 1$ framoversimuleringar. Under føresetnaden at $N_t \ll N$ vert den adjungerte metoden meir effektiv.

3.5.2 Sensitivitetsutrekningar med den adjungerte metoden i ECLIPSE 300

Oljesimulatoren ECLIPSE 300 tilbyr gradientutrekning med den adjungerte metoden, sjå [25] og [24]. Implementeringa er først og fremst meint å nyttast internt i ECLIPSE 300 i samband med optimal kontroll av brønningar. Sensitivitetane til ein dynamisk brønnparameter med omsyn på statiske parameterar (porøsitet, permeabilitet...) vert rekna ut for kvar gittercelle, slik at vi får ut den fulle sensitivitetsmatrisa i (2.13). Når vi ønskjer å estimere permeabiliteten ved å nytte ei parameterisering der talet på grader

av fridom er lågt, er denne måten å implementere den adjungerte metoden noko tungvint, sidan det då ikkje er trong for den fulle sensitivitetmatrisa.

Av kjerneregelen følgjer det at finskala-gradienten til objektivfunksjonen i (2.2) er:

$$\nabla_p J = \mathbf{A} \cdot \frac{\partial J}{\partial \mathbf{m}},$$

der

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{m}} = \left(\frac{\partial J}{\partial m_1}, \frac{\partial J}{\partial m_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial m_{N_d}} \right),$$

og \mathbf{A} er jacobimatrisa (også kalla sensitivitetmatrisa) gjeve ved (2.13). I ECLIPSE 300 vert sensitivitetane rekna ut for ein brønn om gongen. La

$$\mathbf{W} = (W_1, W_2, \dots, W_{N_t})$$

vere ein dynamisk brønnparameter der N_t er talet på tidssteg. Brønnparameteren kan bestå av til dømes trykket eller produksjonsraten i ein brønn. ECLIPSE 300 reknar ut og lagrar sensitivitetane for brønnparameteren med omsyn på dei valde modellparameterane \mathbf{p} i ei matrise:

$$\mathbf{A}_W = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial p_1} & \frac{\partial W_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial W_1}{\partial p_N} \\ \frac{\partial W_2}{\partial p_1} & \frac{\partial W_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial W_2}{\partial p_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial W_{N_t}}{\partial p_1} & \frac{\partial W_{N_t}}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial W_{N_t}}{\partial p_N} \end{pmatrix}.$$

Den fulle sensitivitetmatrisa finn vi ved å samle alle relevante sensitivitatar i ei $N_d \times N$ -matrise.

Vi forutset at ein modellparameter p , som vanlegvis er konstant i likningane for strøyming i porøse media, kan variere slik at den dynamiske brønnparameteren er avhengig både av tilstandsvariable og løysingsvariable:

$$W_k = W_k(p, X_k), \quad k = 1, 2, \dots, N_t,$$

og vidare at p er den einaste uavhengige variabelen, slik at $X_k = X_k(p)$. Den totalderiverte av brønnparameterene vert då

$$\frac{d\mathbf{W}}{dp} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial p}, \quad (3.11)$$

der $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{N_t})$. ECLIPSE 300 er ein endeleg differanse-simulator som nyttar Newtons metode til å løyse dei ikkje-lineære reservoarlikningane $R_k(X_k, X_{k-1}, p) = 0$ for $k = 1, 2, \dots, N_t$. Følgjeleg må

$$\frac{d\mathbf{R}}{dp} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial p} = 0. \quad (3.12)$$

også vere tilfredsstilt. Vi gongar (3.12) med Lagrange-multiplikatorar Ψ og adderer med (3.11):

$$\frac{d\mathbf{W}}{dp} = \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial p} + \Psi \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial p} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{X}} + \Psi \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right) \frac{d\mathbf{X}}{dp}. \quad (3.13)$$

Dersom vi kan finne Ψ slik at

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{X}} + \Psi \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} = 0, \quad (3.14)$$

er det ikkje trong for å rekne ut det tidkrevjande leddet $d\mathbf{X}/dp$. Det første leddet i (3.14) er ei diagonal matrise, Lagrange-multiplikatorane kan representerast ved ei triangulær matrise:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \Psi_{2,1} & \Psi_{2,2} & 0 & 0 & \dots \\ \Psi_{3,1} & \Psi_{3,2} & \Psi_{3,3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{N_t,1} & \Psi_{N_t,2} & \Psi_{N_t,3} & \dots & \Psi_{N_t,N_t} \end{pmatrix},$$

og

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\partial R_2}{\partial X_1} & \frac{\partial R_2}{\partial X_2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial R_3}{\partial X_2} & \frac{\partial R_3}{\partial X_3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{\partial R_{N_t}}{\partial X_{N_t-1}} & \frac{\partial R_{N_t}}{\partial X_{N_t}} \end{pmatrix}.$$

Likningane i (3.14) utgjer eit lineært likningssett. For å finne sensitivitetane i tidssteg k lyt vi løyse eit sett adjungerte likningar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k}{\partial X_k} + \Psi_{k,k} \frac{\partial R_k}{\partial X_k} &= 0 \\ \Psi_{k,i} \frac{\partial R_i}{\partial X_i} + \Psi_{k,i+1} \frac{\partial R_{i+1}}{\partial X_i} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Lagrange-multiplikatorane i (3.15) sett inn i (3.13) gjev sensitivitetane for ein valt modellparameter. Dei deriverte som inngår i (3.15) er allereie rekna ut i framoversimuleringa. Talet på likningar som må løysast aukar kvadratisk med talet på tidssteg, men tidskostnaden aukar ikkje særleg av å leggje til fleire gitterceller ettersom dei deriverte som inngår i (3.13) er relativt rimelege å rekne ut.

Kapittel 4

Numeriske resultat

4.1 Oppsett

Vi ser på syntetisk estimering av absolutt permeabilitet for straum av to fasar i eit oljereservoar. Modellen av oljereservoaret er horisontal og todimensjonal. Lengda til modellen er 522.7 m, breidda er 522.7 m og høgda er 140.0 m. Området er delt opp i $49 \times 49 \times 1$ gitterceller. Initiell oljemetning er 0.8, porøsiteten er 0.15 i alle gitterceller og permeabiliteten er isotrop. I modellen er det plassert 9 vertikale brønnar som produserer med konstant botnholstrykk på 137.9 Barsa, samt 16 vertikale injeksjonsbrønnar. Alle brønnane er opne i heile produksjonsperioden. Vatn vert injisert med konstant rate. Trykket i injeksjonsbrønnane utgjer datasettet vårt.

Framovermodellen vår er daud olje-modellen slik den er implementert i ECLIPSE 300 (E300). Daud olje-modellen er i utgangspunktet ein trefase-modell, men så lenge trykket vert halde høgt nok vert det ikkje frigjeve gass frå oljefasen. Når det i tillegg berre vert injisert vatn i oljereservoaret, vert daud olje-modellen redusert til eit tofase-system.

E300 lét brukaren velje kva tidspunkt data skal skrivast til rapport. Tidsstega som E300 nyttar framoversimuleringa er uavhengige av rapportstega, men under utrekning av adjungerte gradientar (bakoversimulering) vert rapportstega nytta som tidssteg. I ECLIPSE Technical Description [25] vert det råda til å ikkje nytte for lange rapportsteg ved bakoversimulering. Det opplagte valet er å nytte dei same tidsstega i bakoversimuleringa som i framoversimuleringa. Sidan tidsstega i framoversimuleringa kan endre seg når det i optimaliseringsprosessen skjer endringar i permeabilitetsfeltet, er ikkje dette eit alternativ i vårt tilfelle. Vi har i staden valt å setje rapportstega til å vere dei same som tidsstega i framoversimuleringa av referansetilfellet.

Negativ permeabilitet er fysisk urealistisk. Innføring av logaritmisk skala

under optimalisering sikrar at permeabiliteten ikkje tek negative verdier. Ulempa ved å innføre logaritmisk permeabilitet er at det fins fare for at feilen veks som følgje av logaritme-transformasjonen, sjå [12].

Objektivfunksjonen vår er den definert i avsnitt 2.2:

$$J(\mathbf{p}) = (\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p}))^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{m}(\mathbf{p})),$$

der observasjonsdata \mathbf{d} er syntetisk trykkdata generert av ei framoversimulering i E300 med eit referansepermeabilitetsfelt, \mathbf{m} er trykket i injeksjonsbrønnane og \mathbf{C} er kovariansmatrisa for målingsfeil. Med føresetnaden at målingsfeila er uavhengige vert \mathbf{C} ei diagonal matrise. Elementa på diagonalen er standardavviket, her valt som kvadratet av 1% av differansen mellom det maksimale trykket i injeksjonsbrønnane og det konstante trykket i produksjonsbrønnane. Vi har lagt 1% Gaussisk støy til data.

Parameteriseringane som er nytta i døma er pikselbasert parameterisering, karakteristiske basisfunksjonar (sonering), radielle basisfunksjonar og diskret cosinus-transformasjon (DCT). Pikselbasert parameterisering er teke med for å illustrere kor dårleg stilt problemet vårt er. Vi har ikkje inkludert noko regulariseringsledd i objektivfunksjonen vår, slik at med pikselbasert parameterisering, der kvar koeffisient svarar til permeabiliteten i ei gittercelle, står vi utan nokon slags form for regularisering. Sonering vert utført ved å dele permeabilitetsfeltet inn i 16 kvadratiske område. Kvart område vert representert av ein basisvektor.

Hovuddelen av arbeidet er knytt til radielle basisfunksjonar og diskret cosinus-transformasjon. Vi ser på korleis resultatet kan betrast ved å nytte adaptiv parameterisering saman med første- eller andre-ordens ytingsmål. I døma med adaptiv parameterisering er dei radielle basisfunksjonane definerte med sentrum i knutepunkta på eit regulært 16×16 gitter for korrelasjonslengdene 12 og 18. Vi startar med ein basisvektor som har verdien 1 over heile området. På første nivå har vi då 578 basisvektorar å velje mellom. Vi legg til ein og ein basisvektor om gongen, og seier at invers-problemet er løyst når objektivfunksjonen tilfredsstillar løysingskravet i avsnitt 2.4.

Optimaliseringsrutinen vi nyttar heiter LBFGS-B, sjå [29]. Han byggjer på LBFGS-aloritmen, som er skildra kort i avsnitt 3.4.1. Som inndata trengs objektivfunksjonen med tilhøyrande gradientar, begge delar hentar vi frå E300. I LBFGS-B er det høve til å gje koeffisientane øvre og/eller nedre skranke. I døma som er gjeve i dette kapitlet har vi skrudd av denne funksjonaliteten, og late dei ukjende koeffisientane vere frie. Med førsteordens ytingsmål er det berre nytta ein iterasjon på kvart nivå. Vi tek vare på approksimasjonen til den Hessiske matrisa, og går vidare til neste nivå når

steglengda oppfyller krava. Dette var mest for å spare tid, men det naturlege vil vere å starte optimaliseringa på nytt og nytte fleire iterasjonar på kvart nivå. Med andre-ordens ytingsmål er nytta fleire iterasjonar på kvart nivå.

Optimaliseringa vert avslutta dersom verdien til objektivfunksjonen frå ein iterasjon til neste tilfredsstillar

$$\frac{J^k - J^{k+1}}{\max\{|J^k|, |J^{k+1}|, 1\}} \leq \Phi * \epsilon,$$

der J^k er verdien til objektivfunksjonen i iterasjon k , ϵ er maskinpresisjonen, og Φ må setjast av brukar. Vi avbryt optimaliseringa dersom det ikkje skjer nokon oppdatering av objektivfunksjonen frå ein iterasjon til den neste. I kvar iterasjon vert det gjennomført eit linjesøk ved å gjere ei rekkje funksjonsevalueringar for ulike steglengder. Iterasjonen er fullført når steglengda tilfredsstillar Wolfe-krava i avsnitt 3.2.

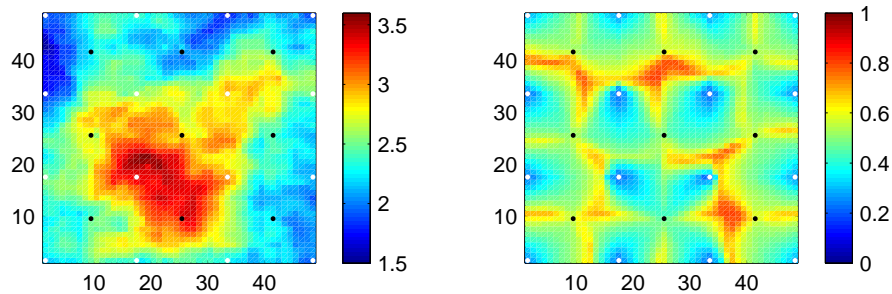
4.2 Første døme

Figur 4.1 syner log-permeabilitetsfeltet som er referanse for det første dømet. Referansepermeabilitetsfeltet er sterkt heterogent, men samstundes glatt. Mot sentrum av området er det ein høgpermeabel sone. Langs rendene er log-permeabiliteten låg. Injeksjonsbrønnane er markerte med kvite sirkelar på figurane, produksjonsbrønnane med svarte. Injeksjonsraten for vatn er $3.4 \text{ m}^3/\text{dag}$ ved overflatevilkår i dei brønnane som er plasserte i hjørnene, $6.8 \text{ m}^3/\text{dag}$ ved overflatevilkår i dei brønnane som er plasserte langs kanten av området og $13.6 \text{ m}^3/\text{dag}$ ved overflatevilkår i dei resterande brønnane. Løysing av framoverproblemet i E300 med referansepermeabilitetsfeltet til venstre på figur 4.1 genererer eit sett med referansedata. Rapportstega er gjeve i tabell 4.1. Den totale produksjonsperioden er på 1889.09 dagar.

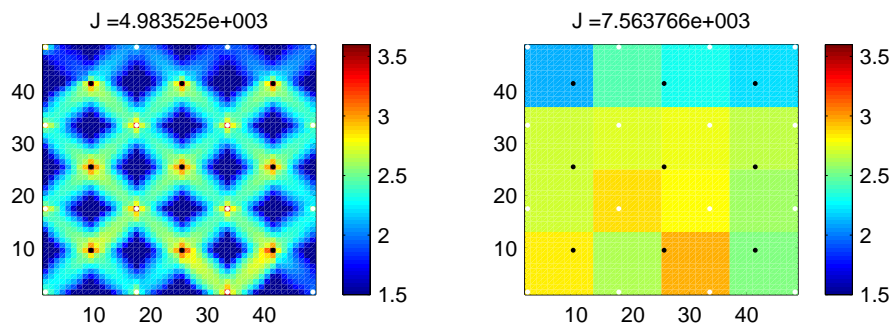
Oljemetninga etter det siste rapportstegget er vist til høgre på figur 4.1. Mesteparten av området er vassfløymd, men delar av området har framleis høg oljemetning. Trykkdata inneheld lite informasjon om område som ikkje er vassfløymde. Sidan resultatet av estimeringa er avhengig av informasjon frå data, kan vi derfor ikkje vente like gode resultat som viss heile hadde vore området var vassfløymd.

Tidssteg nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9-100
Lengde/dag	1.0	0.74	1.48	2.69	4.89	8.29	12.0	18.0	20.0

Tabell 4.1: Rapportstega i det første dømet.

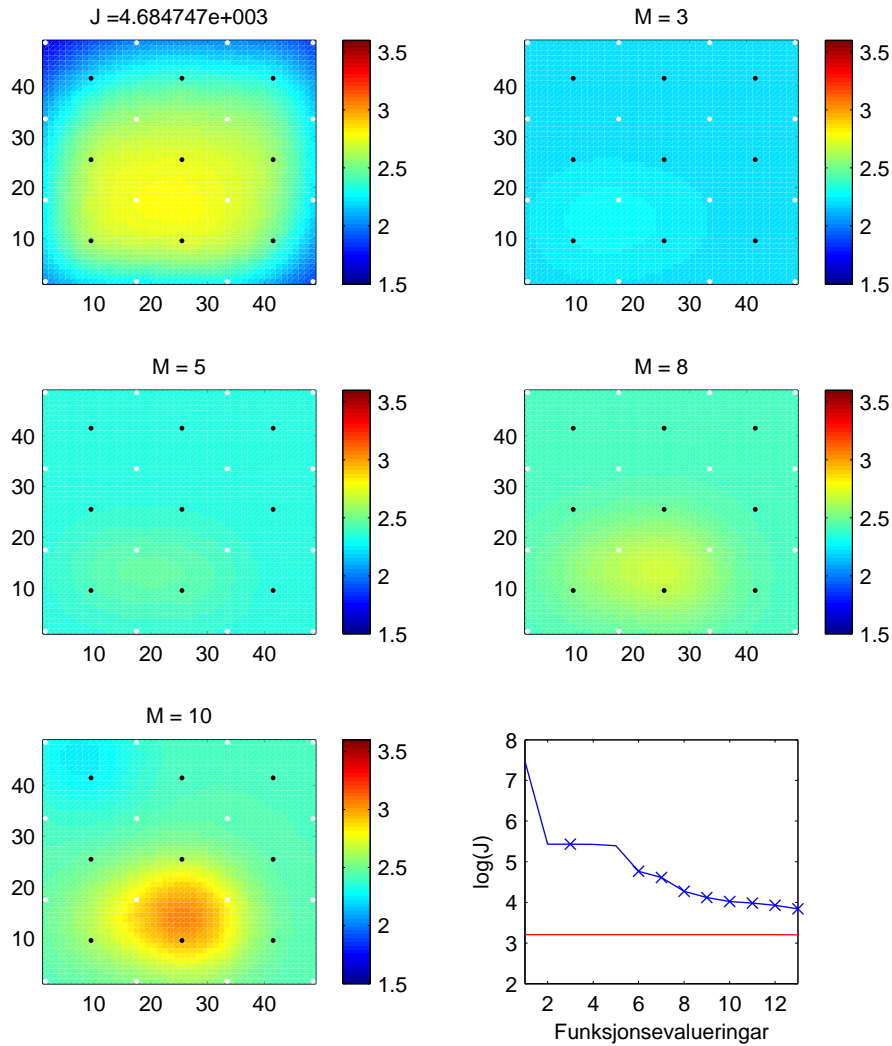


Figur 4.1: Referanseverdi for log-permeabiliteten til venstre. Oljemetning etter siste rapportsteg til høgre.

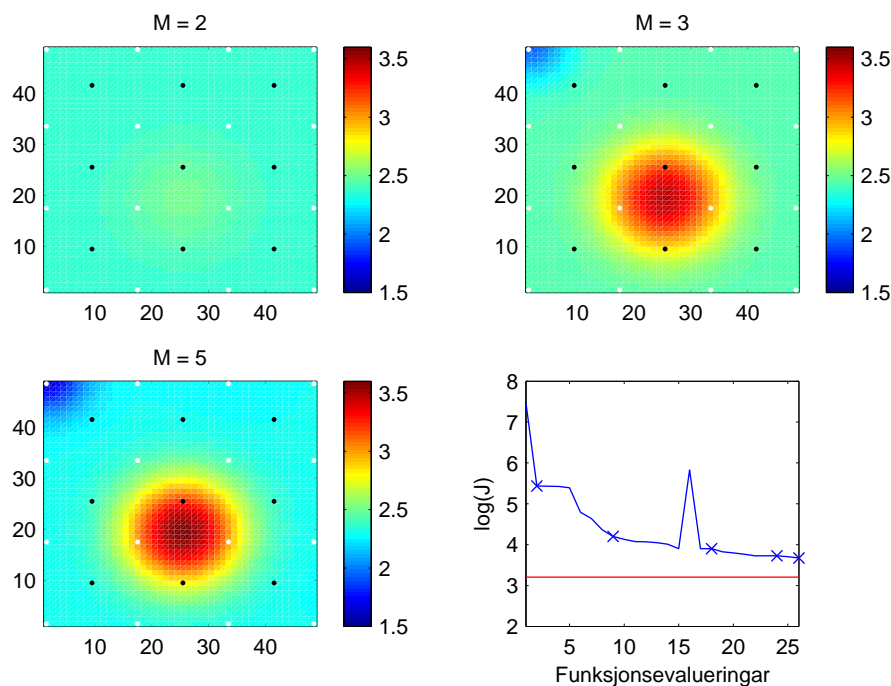


Figur 4.2: Estimat av log-permeabiliteten med pikselbasert parameterisering til venstre og karakteristiske basisfunksjonar til høgre. Tala øvst på figurane er verdien til objektivfunksjonen.

Resultatet til venstre på figur 4.2 syner kvifor regularisering er naudsynt. Problemet vårt er så dårleg stilt, at utan regularisering endar vi opp med eit log-permeabilitetsfelt som har få fellestrekk med referansepermeabilitetsfeltet. Symmetrien i mønsteret skuldast at absoluttverdien til finskala-gradienten til objektivfunksjonen er stor i og rundt gittercellene der brønnane er plasserte. Dette kjem av at trykket endrar seg eksponensielt inn mot brønnane, noko som er ei utfordring for framoverløysaren. Løysinga vert dermed sensitiv for endringar i permeabilitet nær brønnen.



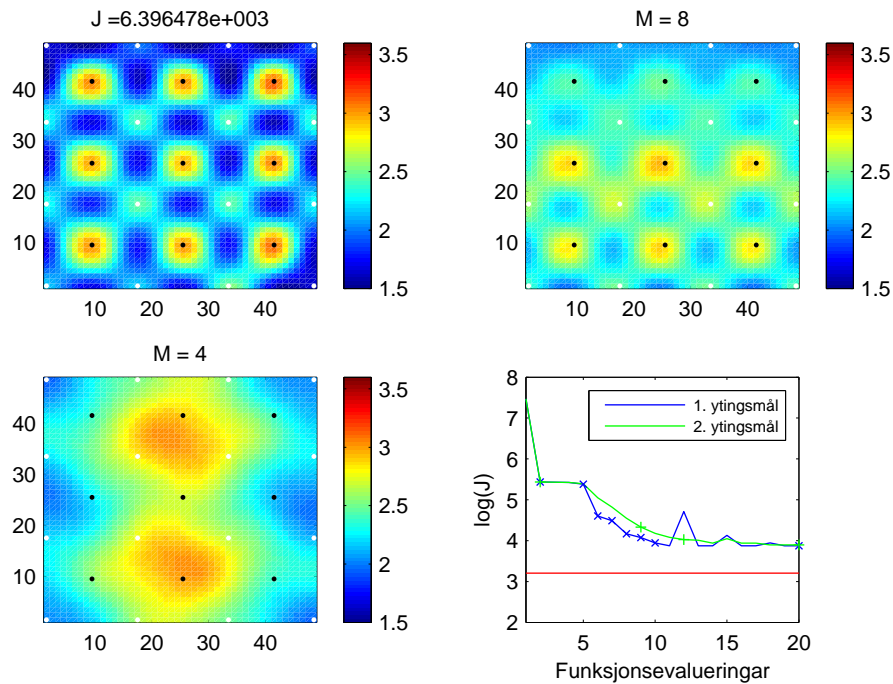
Figur 4.3: Frå øvst til venstre mot nedst til høgre: Estimert av log-permeabiliteten med heile settet av radielle basisvektorar, estimert av log-permeabiliteten med første-ordens yttingsmål for 3, 5, 8 og 10 basisvektorar, og verdien til objektivfunksjonen for kvar funksjonsevaluering. Kryssa markerer overgangen til eit nytt nivå. Løysingskravet er vist som ei horisontal linje.



Figur 4.4: Frå øvst til venstre mot nedst til høgre: Estimat av log-permeabiliteten med andre-ordens ytingsmål for 2, 3 og 5 basisvektorar, verdien til objektivfunksjonen for kvar funksjonsevaluering. Kryssa markerer overgangen til eit nytt nivå. Løysingskravet er vist som ei horisontal linje.

Små justeringar, til dømes i rapportstega, eller å setje *Well Connection Factor* [24] manuelt kan hjelpe, men for å verte kvitt problemet heilt måtte vi ha nytta data for permeabilitet i brønnane, som ofte er tilgjengeleg.

Den grove oppdelinga vi ser til høgre på figur 4.2 gjev eit stabilt resultat, men diskontinuitetane mellom områda stemmer lite overens med det glatte referansepermeabilitetsfeltet. Objektivfunksjonen konvergerer før løysingskravet på $1.6403 \cdot 10^3$ vert nådd. Radiale basisfunksjonar er glatte, og skulle vere betre eigna til å representere eit glatt permeabilitetsfelt. Figur 4.3 og 4.4 syner resultatata for radiale basisfunksjonar. I resultatet øvst til høgre på figur 4.3, der alle basisvektorar er teke med, er talet på grader av fridom 129. Den endelege verdien til objektivfunksjonen er større enn løysingskravet på $1.5252 \cdot 10^3$. Med første-ordens ytingsmål får vi konvergens etter å ha teke med 11 basisvektorar. Sidan det ikkje skjer nokon oppdatering av objektivfunksjonen for den 11. basisvektoren, viser figur 4.3 resultatata fram til og med den 10. basisvektoren. Den endelege verdien til objektivfunksjonen med første-ordens ytingsmål er $6.9465 \cdot 10^3$. Løysingskravet på $1.6464 \cdot 10^3$



Figur 4.5: Frå øvst til venstre mot nedst til høgre: Estimat av log-permeabiliteten med heile settet av DCT-basisvektorar, estimat av log-permeabiliteten med førsteordens ytingsmål for DCT-basisvektorar, estimat av log-permeabiliteten med andreordens ytingsmål for DCT-basisvektorar og verdien til objektivfunksjonane for kvar funksjonsevaluering. Kryssa markerer overgangen til eit nytt nivå. Løysingskravet er vist som ei horisontal linje.

vert ikkje nådd. Resultatet er betre enn det øvst til venstre på figur 4.3, men har fortsatt manglar. Spesielt er området øvst til høgre dårleg gjengjeve. Ingen av dei radielle basisvektorane vart plasserte med sentrum i dette området med førsteordens ytingsmål.

Resultata med andreordens ytingsmål er oppsummerte i figur 4.4. Objektivfunksjonen konvergerer allereie etter seks basisvektorar. Sidan det ikkje skjer nokon oppdatering av objektivfunksjonen for den sjette basisvektoren, viser figur 4.4 resultata fram til og med den femte basisvektoren. Området øvst til høgre er dårleg gjengjeve også med andreordens ytingsmål. Elles ser vi at plasseringa av basisfunksjonane er nokonlunde den same med begge ytingsmåla. Den endelege verdien til objektivfunksjonen med andreordens ytingsmål er $4.7256 \cdot 10^3$, som er mindre enn den endelege verdien til objektivfunksjonen med førsteordens ytingsmål.

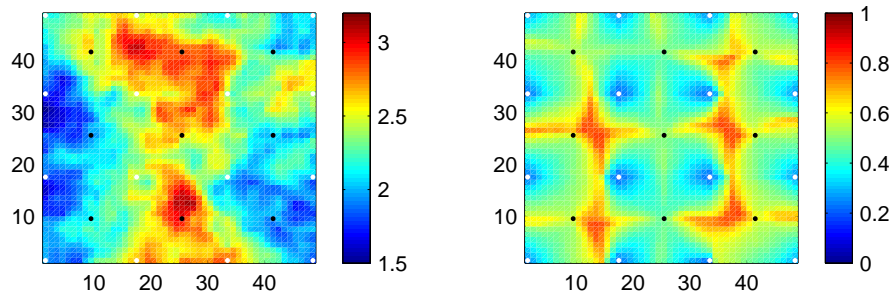
Med førsteordens ytingsmål nyttar vi ein iterasjon på kvart nivå. Det

har med vårt oppsett vist seg naudsynt med fleire iterasjonar på kvart nivå med andre-ordens ytingsmål. Kravet for å gå vidare til neste nivå er at objektivfunksjonen må vere mindre enn to gonger den minste predikerte objektivfunksjonen på gjeldande nivå. Grafen nedst til høgre på figur 4.4 viser verdien til objektivfunksjonen for kvar funksjonsevaluering. Hoppet i objektivfunksjonen skuldast at linjesøk-algoritmen har nytta for lang steglengd.

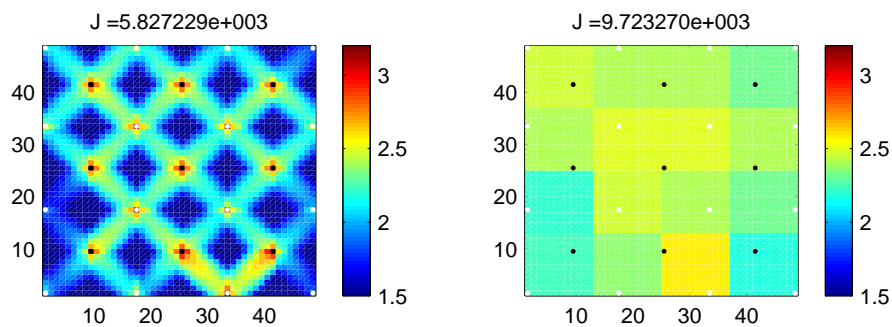
Figur 4.5 viser resultatata for diskret cosinus-transformasjon. Det er nytta eit sett med 8×8 basisvektorar. Ein basisvektor med konstant verdi over det heile er innebygd i settet. Øvst til høgre på figur 4.5 ser vi resultatet av å inkludere alle dei 64 basisvektorane. Objektivfunksjonen konvergerer før løysingskravet på $1.5914 \cdot 10^3$ er nådd. Igjen ser vi at dei store absoluttverdiane til gradientane nær og i brønnane har stor innverknad på korleis løysinga vert sjåande ut. Det same er synleg i estimatet øvst til høgre på figur 4.5, der det er nytta første-ordens ytingsmål. Forklaringa er at eit første-ordens ytingsmål går etter storleiken på absoluttverdien til gradienten til objektivfunksjonen. Med diskret cosinus transformasjon er strukturen på nokre av basisvektorane samanfallande med plasseringa av brønnane. Når absoluttverdien til finskala-gradientane er størst rundt brønnane, vil desse basisfunksjonane verte valde. Utfallet kunne ha vore annleis om plasseringa brønnane ikkje hadde vore regulær. Resultatet med andre-ordens ytingsmål har ei heilt anna form. Vi ser ingen teikn til at estimatet er prega av plasseringa til brønnane.

Dersom vi gjorde den føresetnaden at permeabiliteten i gittercellene der brønnane er plasserte var kjent, ville det ha løyst problema knytt til brønndominans. Føresetnaden kan rettferdiggjeras ved at det er mogleg å måle permeabiliteten i kjerneprøvar henta frå brønnane. Motargumentet er at i røynda kan den målte permeabiliteten avvike frå den totale permeabiliteten i gittercella der brønnen er plassert, sidan diameteren på brønnen ofte er mykje mindre enn storleiken på gittercella. Til dømes måler brønnen i vår modell 0.5 ft i diameter, medan gittercellene måler 35.0 ft gonger 35.0 ft i det horisontale planet.

Vi oppsummerer resultatata i figur 4.5. I alle tilfella oppnår vi konvergens før løysingskravet er nådd. Verdien til endelege objektivfunksjonen er $7.4816 \cdot 10^3$ med første-ordens ytingsmål og åtte basisvektorar. Med andre-ordens ytingsmål er den endelege verdien til objektivfunksjonen $7.8842 \cdot 10^3$, og talet på basisvektorar er fire. Symmetrien i dei to første resultatata skuldast brønndominans, medan symmetrien i resultatet nedst til høgre primært skuldast eit lågt tal symmetriske basisfunksjonar. Det var naudsynt å nytte fleire iterasjonar på kvart nivå med andre-ordens ytingsmål. Skilnaden mellom første- og andre-ordens ytingsmål kjem klarare fram i figur 4.5 enn i resultatata med radielle basisfunksjonar.



Figur 4.6: Referanseverdi for log-permeabiliteten til venstre. Oljemetning etter siste rapportsteg til høgre.



Figur 4.7: Estimat av log-permeabiliteten med pikselbasert parameterisering til venstre og karakteristiske basisfunksjonar til høgre. Tala øvst på figurane gjev verdien til objektifunksjonen.

4.3 Andre døme

Figur 4.6 syner log-permeabilitetsfeltet som er referanse for det andre dømet. Log-permeabilitetsfeltet er sterkt heterogent, men samstundes glatt. Injeksjonsraten for vatn er $3.4 \text{ m}^3/\text{dag}$ ved overflatevilkår i dei brønnane som er plasserte i hjørnene, $6.8 \text{ m}^3/\text{dag}$ ved overflatevilkår i dei brønnane som er plasserte langs kanten av området og $13.6 \text{ m}^3/\text{dag}$ ved overflatevilkår i dei resterande brønnane. Løysing av framoverproblemet i E300 for log-permeabilitetsfeltet til venstre på figur 4.6 genererer eit sett referansedata.

Tidssteg nr.	1	2	3	4	5	6	7	8-100
Lengde/dag	1.0	0.74	1.48	2.73	4.97	8.36	13.0	20.0

Tabell 4.2: Rapportstega i det andre dømet.

Rapportstega er oppgjeve i tabell 4.2. Den totale produksjonsperioden er på 1892.28 dagar.

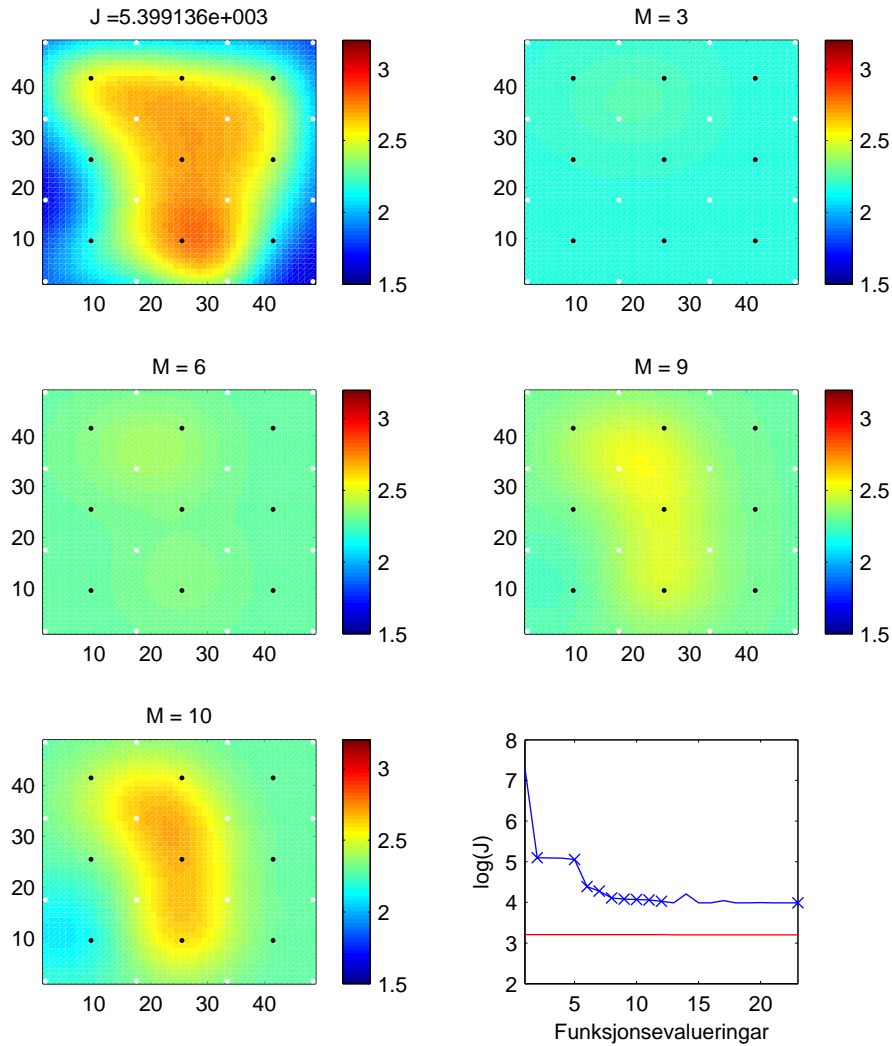
Oljemetninga etter det siste rapportsteget er vist til høgre på figur 4.6. Store delar av området har framleis høg oljemetning, og vi kan på førehand sjå at informasjonen frå data er såpass mangelfull at vi kan vente eit langt dårlegare resultat enn viss heile området hadde vore vassfløymd.

Til venstre på figur 4.2 er resultatet av estimering utan regularisering, og til høgre på same figur ser vi resultatet av estimering der det er nytta 16 karakteristiske basisfunksjonar. Ingen av desse resultatata inneheld særleg informasjon om referansepermeabilitetsfeltet. Løysingskravet på $1.6403 \cdot 10^3$ for dei 16 karakteristiske basisfunksjonane er heller ikkje nådd.

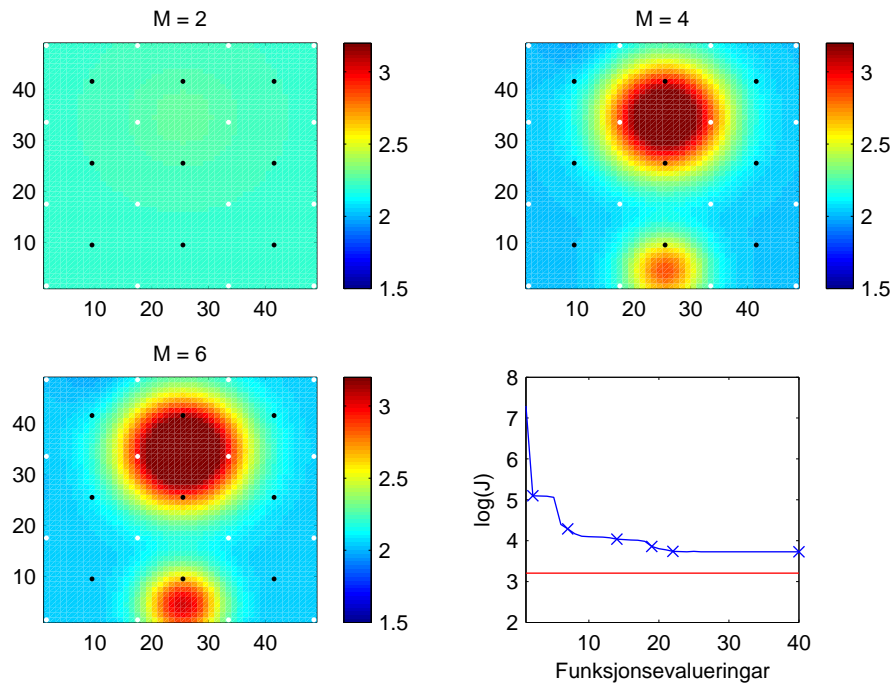
Figur 4.8 syner resultatata for radielle basisfunksjonar med heile settet med basisvektorar på ein gong, og resultatata for første-ordens ytingsmål. I resultatet øvst til venstre på figur 4.8, der alle basisvektorar er teke med, er det nytta radielle basisfunksjonar med sentrum i knutepunkta til eit 8×8 gitter, med korrelasjonslengde 12 og 18. Til saman inneheld settet 128 radielle basisvektorar, pluss ein basisvektor som er konstant over heile området. Den endelege verdien til objektivfunksjonen er større enn løysingskravet på $1.5252 \cdot 10^3$.

Til estimatet med første-ordens ytingsmål er det valgt frå eit sett med 578 radielle basisfunksjonar. Prosessen startar med ein basisvektor som er konstant over heile området. Konvergens vert oppnådd etter å ha teke med 11 basisvektorar, det vil seie at det ikkje skjer nokon oppdatering av objektivfunksjonen for den 11. basisvektoren. Den endelege verdien til objektivfunksjonen med første-ordens ytingsmål er $9.6960 \cdot 10^3$. Løysingskravet på $1.5955 \cdot 10^3$ er ikkje nådd.

Dersom vi samanliknar estimata i figur 4.8 med referansepermeabilitetsfeltet i figur 4.6 ser vi at estimatet der heile settet med basisvektorar er teke med er det som liknar mest. I resultatet der første-ordens ytingsmål er nytta, er estimatet av permeabiliteten til høgre i øvste halvdel av området dårleg på grunn av at ingen basisfunksjonar har vorte lagt til der. Når objektivfunksjonen i tillegg er nesten dobbelt så stor for første-ordens ytingsmål som for heile settet med basisvektorar, kan vi i dette tilfellet ikkje seie å ha betra resultatet ved å nytte adaptiv parameterisering med første-ordens ytingsmål.



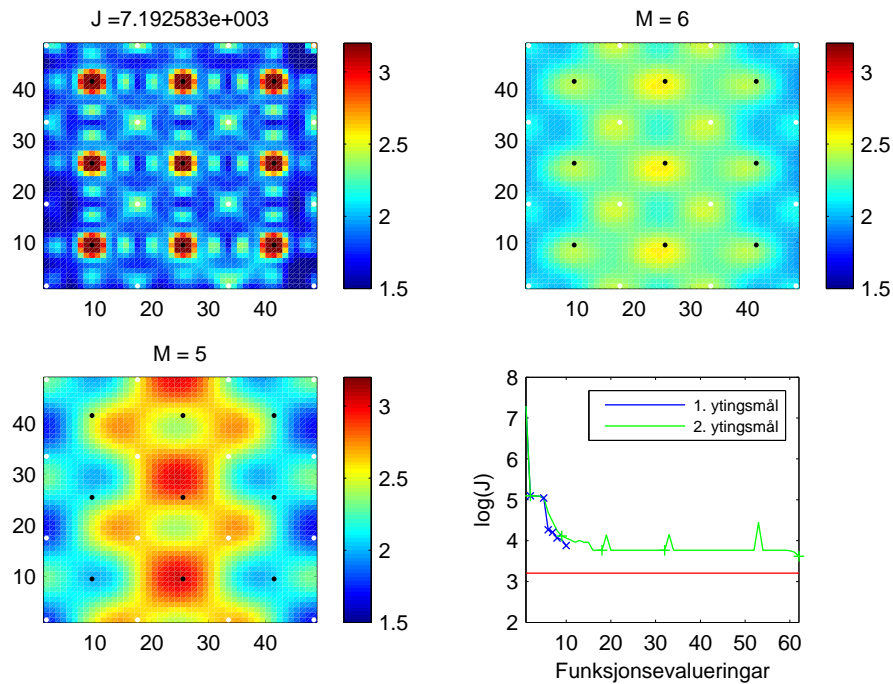
Figur 4.8: Fr  øvst til venstre mot nedst til høgre: Estimert av log-permeabiliteten for heile settet med radielle basisvektorar, estimert av log-permeabiliteten for første-ordens ytingsmål etter 3, 6, 9 og 10 radielle basisvektorar, og verdien til objektivfunksjonen for kvar funksjonsevaluering. Kryssa markerer overgangen til eit nytt nivå. L singskravet er vist som ei horisontal linje.



Figur 4.9: Frå øvst til venstre mot nedst til högre: Estimert av log-permeabiliteten for andre-ordens ytingsmål etter 2, 4 og 6 radielle basisvektorar, verdien til objektivfunksjonen for kvar funksjonsevaluering. Kryssa markerer overgangen til eit nytt nivå. L osingskravet er vist som ei horisontal linje.

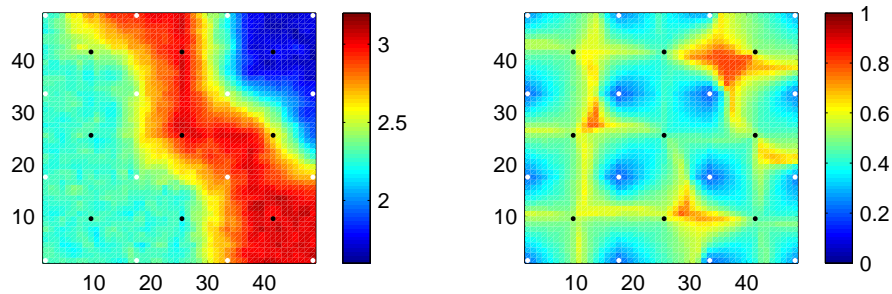
Resultata for andre-ordens ytingsmål er oppsummerte i figur 4.9. I det endelege resultatet har seks basisvektorar vorte inkluderte i paramteriseringa. Kravet for   gå vidare til neste nivå er sett til at objektivfunksjonen må vere mindre enn to gonger den minste predikerte objektivfunksjonen på gjeldande nivå. Den endelege verdien til objektivfunksjonen er $5.3672 \cdot 10^3$, som er større enn l osingskravet på $1.6006 \cdot 10^3$. Ser vi utelukkande på verdien til objektivfunksjonen, har andre-ordens ytingsmålet i dette tilfellet gjort ein betre jobb enn første-ordens ytingsmålet.

Figur 4.10 viser resultata for diskret cosinus-transformasjon, der det er nytta eit sett med 20×20 basisvektorar. Ein basisvektor med konstant verdi over det heile er innebygd i settet. Tanken bak   nytte eit så stort sett med basisvektorar var   auke valmogleikane for dei to ytingsmåla. Øvst til venstre på figur 4.10 ser vi resultatet av   inkludere alle 400 basisvektorar. Objektivfunksjonen konvergerer f r l osingskravet på $1.2490 \cdot 10^3$ er nådd.

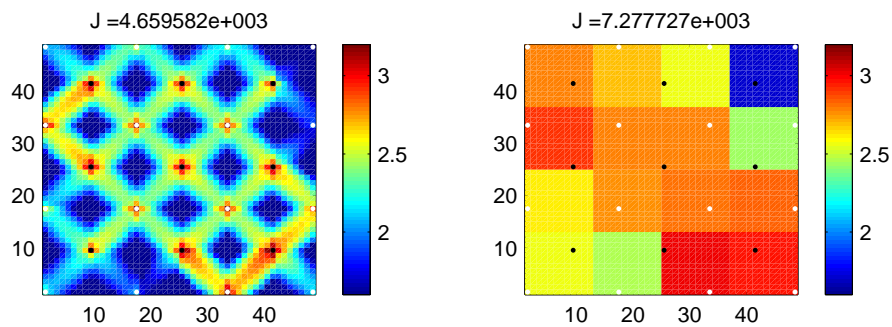


Figur 4.10: Frå øvst til venstre mot nedst til høgre: Estimat av log-permeabiliteten for heile settet med DCT-basisvektorar, estimat av log-permeabiliteten for første-ordens ytingsmål med DCT-basisvektorar, estimat av log-permeabiliteten for andre-ordens ytingsmål med DCT-basisvektorar og verdien til objektivfunksjonen for kvar funksjonsevaluering. Kryssa markerer overgangen til eit nytt nivå. Løysingskrava er vist som ei horisontal linje.

Den endelege verdien til objektivfunksjonen med første-ordens ytingsmål er $7.5935 \cdot 10^3$, som er større enn løysingskravet på $1.5996 \cdot 10^3$. Resultatet kan ikkje seiast å vere eit godt estimat av referansepermeabilitetsfeltet, men dei vertikale trekka har i det minste vorte fanga opp. Med andre-ordens ytingsmål er den endelege verdien til objektivfunksjonen $4.1292 \cdot 10^3$. Løysingskravet på $1.6006 \cdot 10^3$ er ikkje nådd. I estimatet vert både dei vertikale trekka til referansepermeabilitetsfeltet og det høgpermeable området reproduisert, men med eit lågt detaljnivå.



Figur 4.11: Referanseverdi for log-permeabiliteten til venstre. Oljemetning etter siste rapportsteg til høgre.



Figur 4.12: Estimat av log-permeabiliteten med pikselbasert parameterisering til venstre og karakteristiske basisfunksjonar til høgre. Tala øvst på figurane gjev verdien til objektivfunksjonen.

4.4 Tredje dømme

Figur 4.11 syner log-permeabilitetsfeltet som er referanse for det tredje dømet. Log-permeabilitetsfeltet inneheld nærast diskontinuitetar i form av ein høgpermeabel kanal som går diagonalt over området. Injeksjonsraten for vatn er $4.25 \text{ m}^3/\text{dag}$ ved overflatevilkår i dei brønnane som er plasserte i hjørnene, $8.5 \text{ m}^3/\text{dag}$ ved overflatevilkår i dei brønnane som er plasserte langs kanten av området og $17.0 \text{ m}^3/\text{dag}$ ved overflatevilkår i dei resterande

Tidssteg nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9-100
Lengde/dag	1.0	0.74	1.47	2.66	4.90	8.23	12.0	19.0	25.0

Tabell 4.3: Rapportstega i det tredje dømet.

brønnane. Løysing av framoverproblemet i E300 for log-permeabilitetsfeltet til venstre på figur 4.11 genererer eit sett referansedata. Rapportstega er oppgjeve i tabell 4.3. Den totale produksjonsperioden er på 2350 dagar.

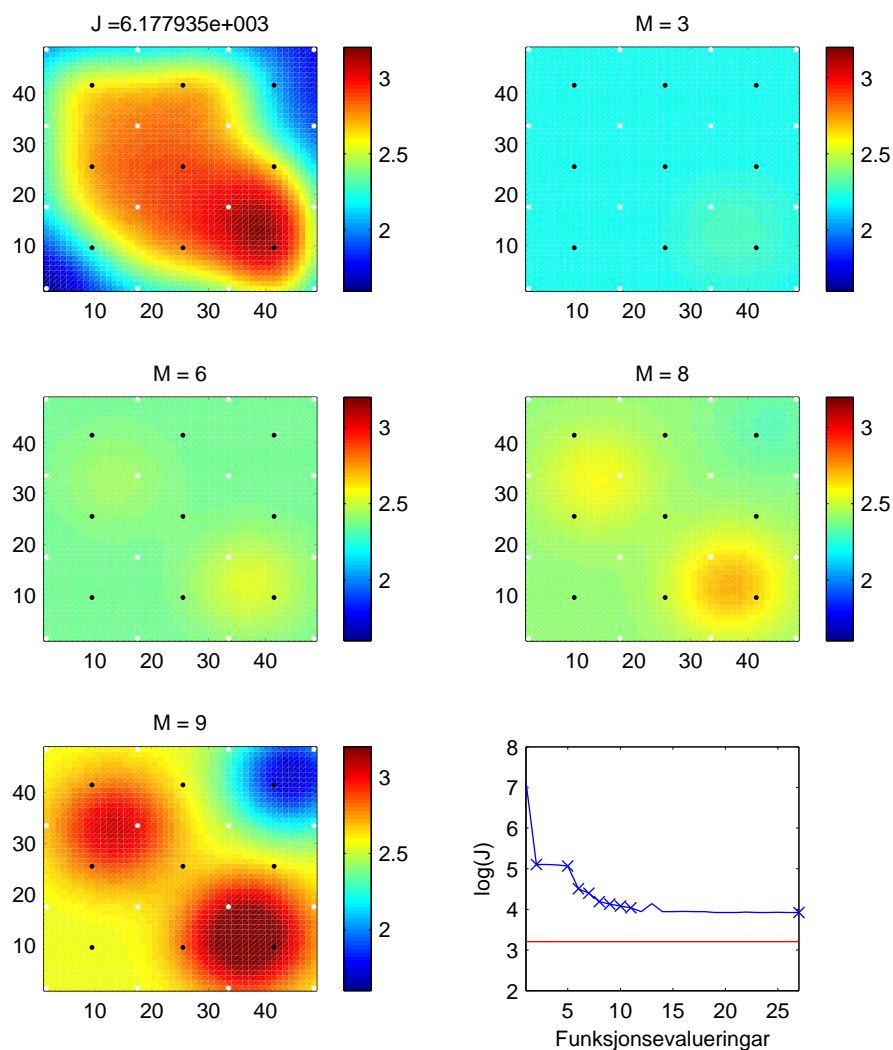
Oljemetninga etter det siste rapportsteget er vist til høgre på figur 4.11. Store delar av området er vassfløymd, men delar av området har framleis høg oljemetning, spesielt til høgre i øvre halvdel. Data vil derfor ikkje innehalde mykje informasjon om dette området.

Til venstre på figur 4.12 er resultatet av estimering utan regularisering, og til høgre på same figur ser vi resultatet av estimering der det er nytta 16 karakteristiske basisvektorar. Løysingskravet på $1.6403 \cdot 10^3$ for dei 16 karakteristiske basisvektorane er ikkje nådd.

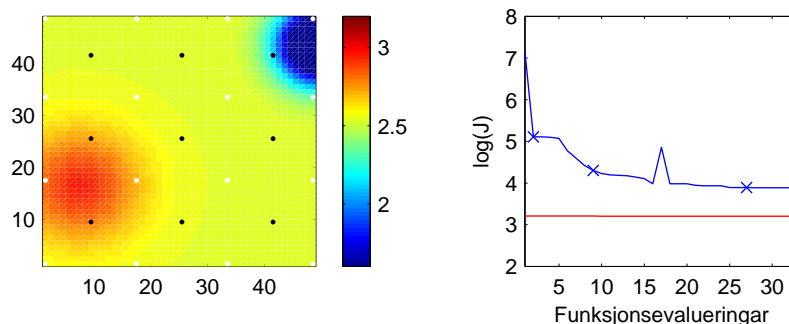
Figur 4.13 syner resultatata for radielle basisfunksjonar med heile settet med basisvektorar på ein gong, og resultatata med første-ordens ytingsmål. I resultatet øvst til venstre på figur 4.13, der alle basisvektorar er teke med, er det nytta radielle basisfunksjonar med sentrum i knutepunkta til eit 8×8 gitter, med korrelasjonslengde 12 og 18. Til saman inneheld settet 128 radielle basisvektorar, pluss ein basisvektor som er konstant over heile området. Den endelege verdien til objektivfunksjonen er større enn løysingskravet på $1.5252 \cdot 10^3$.

Til estimatet med første-ordens ytingsmål er det valt frå eit sett med 578 radielle basisfunksjonar. Prosessen startar med ein basisvektor som er konstant over heile området. Konvergens vert oppnådd etter å ha teke med 10 basisvektorar, det vil seie at det ikkje skjer nokon oppdatering av objektivfunksjonen for den 10. basisvektoren. Den endelege verdien til objektivfunksjonen med første-ordens ytingsmål er $8.0184 \cdot 10^3$. Løysingskravet på $1.5955 \cdot 10^3$ er ikkje nådd.

Estimatet øvst til venstre på figur 4.13 syner eit diagonalt, høgpermeabelt område, men det er for breitt samanlikna med kanalen i referansepermeabilitetsfeltet i figur 4.11. I referansen er dessutan permeabiliteten høgare på den eine sida av kanalen, men det ser vi ikkje teikn til i estimatet der heile settet med basisvektorar er inkludert. Ein mangel ved estimatet nedst til venstre på figur 4.13, der første-ordens ytingsmål er nytta, er at det ikkje har vorte danna ein samanhengjande høgpermeabel kanal. I staden ser det ut som om det fins to høgpermeable område som ikkje er i kontakt med kvarandre. Det seier seg sjølv at glatte radielle basisfunksjonar ikkje er det ideale når det fins nærast diskontinuitetar i referansepermeabilitetsfeltet. Estimatet med dei



Figur 4.13: Frå øvst til venstre mot nedst til høgre: Estimat av log-permeabiliteten for heile settet med radielle basisvektorar, estimat av log-permeabiliteten for første-ordens ytingsmål etter 3, 6, 8 og 9 radielle basisvektorar, og verdien til objektivfunksjonen for kvar funksjonsevaluering. Kryssa markerer overgangen til eit nytt nivå. Løysingskravet er vist som ei horisontal linje.

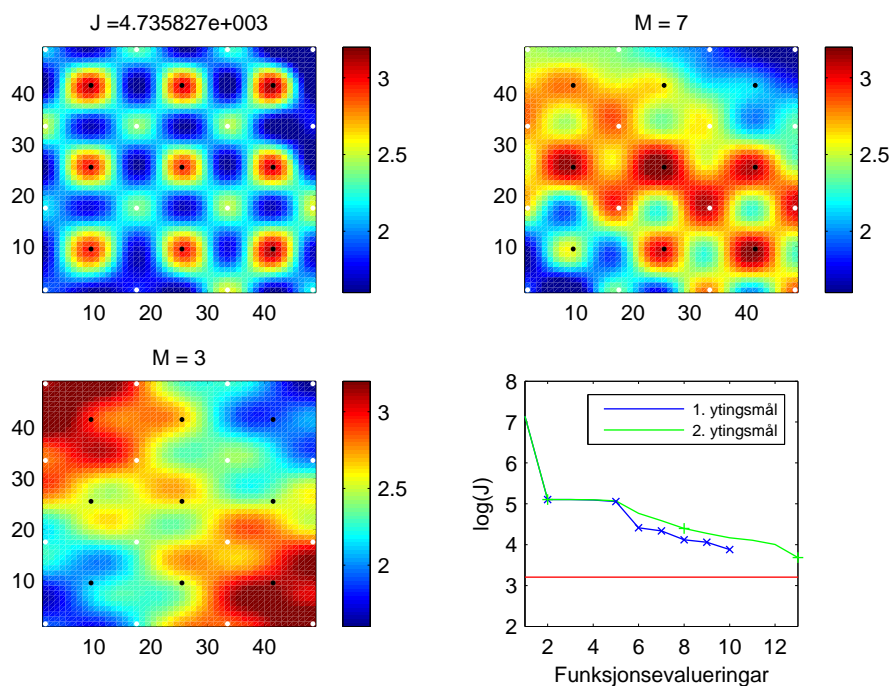


Figur 4.14: Frå venstre mot høgre: Estimert av log-permeabiliteten for andreordens ytingsmål etter 3 radielle basisvektorar, verdien til objektivfunksjonen for kvar funksjonsevaluering. Kryssa markerer overgangen til eit nytt nivå. Løysingskravet er vist som ei horisontal linje.

16 karakteristiske basisvektorane i figur 4.12 kan seiast å vere betre enn dei i figur 4.13, sidan det viser ein samanhengjande høgpermeabel kanal med ulik permeabilitet på sidene.

Resultata for andreordens ytingsmål er oppsummerte i figur 4.14. I det endelege resultatet har fire basisvektorar vorte inkludert i parametriseringa. Kravet for å gå vidare til neste nivå er sett til at objektivfunksjonen må vere mindre enn tre gonger den minste predikerte objektivfunksjonen på gjeldande nivå. Den endelege verdien til objektivfunksjonen med andreordens ytingsmål er $7.6404 \cdot 10^3$, som er større enn løysingskravet på $1.6026 \cdot 10^3$. Det som har gått gale her er at objektivfunksjonen har konvertert etter berre fire basisvektorar, der ein basisvektor er konstant over heile området. Plasseringa av dei radielle basisfunksjonane er i tråd med referansepermeabilitetsfeltet, men sidan ingen radielle basisvektorar har vorte plassert der den høgpermeable kanalen i referansepermeabilitetsfeltet er, har vektinga av basisvektorane vorte skeiv.

Figur 4.15 viser resultata for diskret cosinus-transformasjon, der det er nytta eit sett med 8×8 basisvektorar. Øvst til venstre på figur 4.15 ser vi resultatet av å inkludere alle dei 64 basisvektorane. Objektivfunksjonen konvergerer før løysingskravet på $1.5914 \cdot 10^3$ er nådd. Den endelege verdien til objektivfunksjonen med eit førsteordens ytingsmål er $8.6654 \cdot 10^3$, som er større enn løysingskravet på $1.5986 \cdot 10^3$. Med andreordens ytingsmål er den endelege verdien til objektivfunksjonen $4.8200 \cdot 10^3$. Løysingskravet på $1.6026 \cdot 10^3$ er ikkje nådd. I estimatet øvst til høgre på figur 4.15 ser vi tydeleg at det er valt basisfunksjonar som fell saman med plasseringa av brønnane.



Figur 4.15: Frå øvst til venstre mot nedst til høgre: Estimat av log-permeabiliteten for heile settet med DCT-basisvektorar, estimat av log-permeabiliteten for første-ordens ytingsmål med DCT-basisvektorar, estimat av log-permeabiliteten for andre-ordens ytingsmål med DCT-basisvektorar og verdien til objektivfunksjonen for kvar funksjonsevaluering. Kryssa markerer overgangen til eit nytt nivå. Løysingskrava er vist som ei horisontal linje.

4.5 Diskusjon

Teorien seier at diskret cosinus-transformasjon er overlegen dei fleste andre transformasjonar når problemet går ut på å innføre ei ny parameterisering av eit kjent bilete. Eit diskret permeabilitetsfelt kan sjåast på som eit slags bilete. I dei numeriske eksperimenta i dette arbeidet dukka det imidlertid opp eit problem i samband med diskret cosinus-transformasjon, nemleg påverknaden frå dei store absoluttverdiane til gradientane til objektivfunksjonen nær og i brønnane. Samtidig veit vi at parameterisering med diskret cosinus-transformasjon har vist lovande resultat i [13] og [12]. Vi har ikkje undersøkt kva som hender når injeksjonsbrønnane ikkje er plasserte i eit regulært mønster. Som tidlegare nemnd ville det heller ikkje vore urimeleg å anta at permeabiliteten er kjent i dei gittercellene der brønnane er plasserte.

LBFSGS-algoritmen er effektiv på store problem, men konvergerer relativt sakte. Talet på funksjonsevalueringar med adaptiv parameterisering låg i dei fleste tilfella mellom 12 og 30, medan i tilfella der heile settet med basisvektorar er inkludert har det gått med mellom 20 og 30 funksjonsevalueringar. Tidsmessig har vi ikkje tapt på å nytte adaptiv parameterisering. Når vi først er inne på tids-spørsmålet må det nemnast at det i vårt tilfelle er ei ulempe med LBFSGS-B-rutinen at gradienten til objektivfunksjonen er trunge for kvar funksjonsevaluering, sidan sensitivitetsutrekningane er svært tidkrevjande. Årsaken til at gradienten til objektivfunksjonen alltid vert kalla, er at den inngår i kravet relatert til kurving i (3.2).

Når det vart forsøkt å nytte berre ein iterasjon på kvart nivå med andre-ordens ytingsmål, som med første-ordens ytingsmål, vart estimatet nærast konstant (prosessen startar med ein basisvektor som er konstant over det heile). Vi kan tolke det som at når nye basisfunksjonar har vert lagt til med andre-ordens ytingsmål, er ikkje steget etter berre ein iterasjon langt nok. Dette er ikkje urimeleg, sidan det naturlege er ha fleire iterasjonar på kvart nivå for å kunne seie at vi har konvergens. Men kvifor fungerer det tilsynelatande med berre ein iterasjon på kvart nivå med første-ordens ytingsmål?

I den første iterasjonen på kvart nivå vert det for begge ytingsmål ofte berre nytta ein funksjonsevaluering. Ein iterasjon er fullført når steglengda tilfredsstiller Wolfe-krava i avsnitt 3.2:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{p}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{p}_k) &\leq J(\mathbf{p}_k) + c_1 \alpha_k \nabla J(\mathbf{p}_k)^T \Delta \mathbf{p}_k, \\ \nabla J(\mathbf{p}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{p}_k) \Delta \mathbf{p}_k &\geq c_2 \nabla J(\mathbf{p}_k)^T \Delta \mathbf{p}_k, \end{aligned}$$

Når iterasjonen vert fullført etter berre ein funksjonsevaluering, er det fordi Wolfe-krava vert tilfredsstilte av den initielle steglengda. For å sikre konvergens bør initiell steglengde med BFGS-metoden vere $\alpha = 1$ [19]. Med $\alpha_k = 1$ som endeleg steglengd vert norma til steget i iterasjon k etter likningane (3.1) og (3.3):

$$\|\alpha_k \Delta \mathbf{p}_k\| = \|\Delta \mathbf{p}_k\| = \|\mathbf{B}_k^{-1} \nabla J(\mathbf{p}_k)\|. \quad (4.1)$$

Utskriftar frå LBFSGS-B-rutinen for andre-ordens ytingsmål stadfestar at $\alpha = 1$ er nytta som initiell, og ofte endeleg steglengd.

Av (4.1) går det fram at når steglengda er den same, i dette tilfellet $\alpha_k = 1$, er norma til steget avhengig av approksimasjonen til den Hessiske

matrisa og gradienten til objektivfunksjonen. Når vi opplever at stega generelt vert kortare med andre-ordens ytingsmål, verkar ikkje det urimeleg sidan vi i det minste veit frå avsnitt 2.5.1 og 2.5.2 at norma til gradienten med andre-ordens ytingsmål aldri er større enn norma til gradienten med første-ordens ytingsmål, fordi eit første-ordens ytingsmål alltid veljer den parameteriseringa med den største norma på gradienten. Ei samanlikning av utskriftene frå LBFGS-B-rutinen for første- og andre-ordens ytingsmål vil mest truleg kunne stadfeste at norma til stega er lengre med første-ordens ytingsmål. Truleg er dette grunnen til vi kjem unna med å berre nytte ein iterasjon med første-ordens ytingsmål, men ikkje med andre-ordens ytingsmål.

LBFGS-B-rutinen er først og fremst tenkt for problem med eit stort tal ukjende, og fungerer også etter vår erfaring tilfredsstillande når vi har mange nok ukjende. Det er mogleg å justere verdien på konstantane c_1 og c_2 i Wolfekrava innanfor visse retningslinjar, framlegga i [19] lyder på $c_1 = 1.0 \cdot 10^{-4}$ og $c_2 = 0.9$. I LBFGS-B-rutinen er konstantane sett til $c_1 = 1.0 \cdot 10^{-2}$ og $c_2 = 0.9$. Vi ser at det i LBFGS-B-rutinen vert stilt eit strengare krav til reduksjon av objektivfunksjonen enn i framlegget til Nocedal, medan kravet relatert til kurving er det same. Dersom der er ønskeleg å gjere endringar i steglengda, kan det best gjerast å justere desse konstantane, sidan den initielle steglengda som sagt bør haldas til 1. Passande verdiar til vårt problem er dei som fører til fleire funksjonsevalueringar per iterasjon, men heller ikkje for mange, for å halde tidskostnadane nede.

	Heile settet med basisvektorar	Første-ordens ytingsmål	Andre-ordens ytingsmål
Første døme	$4.6847 \cdot 10^3$	$6.9465 \cdot 10^3$	$4.7256 \cdot 10^3$
Andre døme	$5.3991 \cdot 10^3$	$9.6960 \cdot 10^3$	$5.3672 \cdot 10^3$
Tredje døme	$6.1779 \cdot 10^3$	$8.0184 \cdot 10^3$	$7.6404 \cdot 10^3$

Tabell 4.4: Verdien til objektivfunksjonen med radielle basisfunksjonar.

	Heile settet med basisvektorar	Første-ordens ytingsmål	Andre-ordens ytingsmål
Første døme	$6.3965 \cdot 10^3$	$7.4816 \cdot 10^3$	$7.8842 \cdot 10^3$
Andre døme	$7.1926 \cdot 10^3$	$7.5935 \cdot 10^3$	$4.1292 \cdot 10^3$
Tredje døme	$4.7358 \cdot 10^3$	$8.6654 \cdot 10^3$	$4.8200 \cdot 10^3$

Tabell 4.5: Verdien til objektivfunksjonen med diskret cosinus-transformasjon.

Verdien til objektivfunksjonen for alle døma er oppsummert i tabell 4.4 og 4.5. Ser vi utelukkande på verdien til objektivfunksjonen, presterer andre-ordens ytingsmålet best i alle tilfella utanom eitt. Det kan tyde på at basisvektorane valt med andre-ordens ytingsmål er dei som har potensiale til å redusere objektivfunksjonen mest, men det kan også ha samanheng med at det er nytta fleire iterasjonar på kvart nivå, medan det med første-ordens ytingsmål berre er nytta ein. Legg merke til at verdien til objektivfunksjonen i dei tilfella der heile settet med basisvektorar er teke med i alle døma er mindre enn verdien til objektivfunksjonen med første-ordens ytingsmål, endå resultata med første-ordens ytingsmål i dei fleste tilfelle gjev eit visuelt betre resultat. At estimatet køyrer seg fast i eit lokalt minimum med første- og andre-ordens ytingsmål kan skuldast dårleg kvalitet på data, både på grunn av manglande vassfløyning og problemet med store absoluttverdiar på gradienten i brønnane.

Kapittel 5

Oppsummering og vidare arbeid

I denne oppgåva har vi sett på estimering av absolutt permeabilitet for straum av to fasar i eit porøst medium, med fokus på adaptiv parameterisering av permeabilitet. Metoden går ut på å trinnvist søkje den parameteriseringa som fører til den største reduksjonen i objektivfunksjonen.

Ei parameterisering der talet på grader av fridom er lågt har ein regulariserande effekt på invers-problemet, men det er vanskelig å fastsetje talet på grader av fridom på førehand når permeabilitetsfeltet ikkje er kjent. Overparameterisering kan lett føre til at estimatet hamnar i eit lokalt minimum. Adaptiv parameterisering handterer problemet ved å gradvis auke talet på grader av fridom. Valet av ny parameterisering vert teke på grunnlag av informasjon frå data.

Alternative nye parameteriseringar vert samanlikna ved hjelp av ytingsmål. Med eit første-ordens ytingsmål vert gradienten til objektivfunksjonen samanlikna for alternative nye parameteriseringar. Eit andre-ordens ytingsmål baserer seg på ein linearisering av framovermodellen. Ei av målsetjingane for denne oppgåva har vore å samanlikne dei to ytingsmåla. Tidlegare arbeid med adaptiv parameterisering tyder på at eit andre-ordens ytingsmål er å føretrekkje. Samstundes er dette ytingsmålet generelt det mest tidkrevjande.

Opprinneleg var det tenkt at vi skulle nytte ei parameterisering basert på pilot-punkt metoden, men som det vert drøfta i avsnitt 2.5, passar ikkje pilot-punkt metoden utan vidare inn i denne samanhengen. I staden har vi studert adaptiv parameterisering med radielle basisfunksjonar og diskret cosinus-transformasjon.

Metoden har vorte nytta i syntetisk estimasjon av absolutt log-permeabilitet for straum av to fasar i eit porøst medium. Ei kopling mellom ECLIPSE 300 og optimaliseringsrutinen LBFGS-B vart tilpassa problem-

stillinga. Implementeringa av sensitivitetstreknningar med den adjungerte metoden i ECLIPSE 300 lét oss studere ein relativt stor horisontal modell, sidan tidskostnadane først og fremst er avhengige av talet på rapportsteg. Sensitivitetstreknningar i ECLIPSE 300 er tidkrevjande, men når vi først kjenner finskala-gradienten til objektivfunksjonen er det mogleg å vurdere eit vilkårleg stort tal basisvektorar.

I døma er det nytta tre ulike permeabilitetsfelt. Objektivfunksjonen er utan regulariseringsledd. Estimasjon med pikselbasert parameterisering viste kvifor regularisering er naudsynt. Vi viste at karakteristiske basisfunksjonar er dårleg eigna til å representere eit glatt, heterogent permeabilitetsfelt. Når vi inkluderte eit heilt sett med basisvektorar på ein gong, kunne estimata vise teikn på ustabilitetar og overparameterisering. I dei fleste tilfella fekk vi eit visuelt betre resultat ved å nytte adaptiv parameterisering med første- eller andre-ordens ytingsmål. Vi greidde ikkje å møte løysingskravet i nokon av tilfella.

Med dei framoversimuleringane som vart gjort, vart ikkje områda fullstendig vassfløynde. Konsekvensen vart at data innehaldt lite informasjon om dei områda som ikkje var vassfløynde. Resultatet av estimeringa er avhengig av kvaliteten på informasjonen frå data. Dersom områda hadde vore fullstendig vassfløynde kunne vi derfor ha venta betre resultat.

Vi støytte på fleire problem i arbeidet med dei numeriske eksperimenta. Det kanskje største problemet gjaldt høge absoluttverdiar på gradienten til objektivfunksjonen nær brønnane. Å inkludere data for permeabiliteten i brønnane, som ofte er kjent, kan løyse dette problemet. Høge absoluttverdiar på gradienten nær brønnane saman med at områda ikkje var fullstendig vassfløynde resulterte i låg kvalitet på data, noko som gav eit estimasjonen eit vanskeleg utgangspunkt. Med diskret cosinus-transformasjon opplevde vi eit problem med at geometrien til basisfunksjonane fall saman med brønngeometrien, noko som forsterka effekten av problemet nemnt over.

Vi greidde likevel å vise korleis estimata i dei fleste tilfella kunne betrast ved å nytte adaptiv parameterisering med både første- og andre-ordens ytingsmål. Problemet med høge absoluttverdiar på gradienten til objektivfunksjonen nær brønnane gjer det imidlertid vanskeleg å trekke sterke konklusjonar. Å ta tak i dette problemet ved å inkludere data for permeabilitet i brønnane er eit naturleg utgangspunkt for vidare arbeid.

Litteratur

- [1] Richard C. Aster, Clifford H. Thurber, and Brian Borchers. *Parameter estimation and inverse problems*. Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2005.
- [2] Jacob Bear. *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier Publishing Company, 1972.
- [3] H. Ben Ameer, G. Chavent, and J. Jaffre. Refinement and coarsening indicators for adaptive parametrization: application to the estimation of hydraulic transmissivities. *Inverse Problems*, 18(3):775–794, 2002.
- [4] I. Berre, F. Clément, M. Lien, and T. Mannseth. Data driven reparameterization structure for estimation of fluid conductivity. In *Calibration and Reliability in Groundwater Modelling: Credibility of Modelling*, volume 320, pages 310–315. IAHS publ., 2008.
- [5] Inga Berre. *Fast simulation of transport and adaptive permeability estimation in porous media*. PhD thesis, University of Bergen, 2005.
- [6] Noel A.C. Cressie. *Statistics for spatial data*. Wiley, 1991.
- [7] Daniel Christopher Doublet. *Optimisation of production from an oil-reservoir using augmented Lagrangian methods*. PhD thesis, Department of Mathematics, University of Bergen, 2007.
- [8] Heinz W. Engl, Martin Hanke, and Andreas Neubauer. *Regularization of inverse problems*. Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [9] Dmitry Eydinov, Sigurd Ivar Aanonsen, Jarle Haukås, and Ivar Aavatsmark. A method for automatic history matching of a compositional reservoir simulator with multipoint flux approximation. *Computational Geosciences*, 12(2):209–225, 2008.
- [10] Enrico Fermi. *Thermodynamics*. Courier Dover Publications, 1956.

-
- [11] A. A. Grimstad, T. Mannseth, G. Naevdal, and H. Urkedal. Adaptive multiscale permeability estimation. *Computational Geosciences*, 7(1):1–25, 2003.
- [12] B. Jafarpour and D. B. McLaughlin. History matching with an ensemble kalman filter and discrete cosine parameterization. *Computational Geosciences*, 12(2):227–244, 2008.
- [13] B. Jafarpour and D.B. McLaughlin. Efficient Permeability Parameterization With the Discrete Cosine Transform. In *SPE Reservoir Simulation Symposium (Houston, Texas)*, SPE 106453. Soc. Petr. Eng., 2007.
- [14] A. M. Lavenue and J. F. Pickens. Application of a coupled adjoint sensitivity and kriging approach to calibrate a groundwater-flow model. *Water Resources Research*, 28(6):1543–1569, 1992.
- [15] D.C. Liu and J. Nocedal. On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Mathematical programming*, 45(1-3):503–528, 1989.
- [16] D. McLaughlin and L. R. Townley. A reassessment of the groundwater inverse problem. *Water Resources Research*, 32(5):1131–1161, 1996.
- [17] Morris Muskat. *Physical principles of oil production*. International Human Resources Development Corporation, 1981.
- [18] J. Nocedal. Updating Quasi-Newton Matrices with Limited Storage. *Mathematics of Computation*, 35(151):773–782, 1980.
- [19] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical optimization*. Springer, New York, 2006.
- [20] Øystein Pettersen. *Grunnkurs i reservoarmekanikk*. Matematisk institutt, Universitetet i Bergen, 1990.
- [21] B. S. Ramarao, A. M. Lavenue, G. Demarsily, and M. G. Marietta. Pilot point methodology for automated calibration of an ensemble of conditionally simulated transmissivity fields. 1. theory and computational experiments. *Water Resources Research*, 31(3):475–493, 1995.
- [22] K. R. Rao and Ping Yip. *Discrete cosine transform: algorithms, advantages, applications*. Academic Press, Boston, 1990.

-
- [23] J.R.P. Rodrigues, A. Wächter, A. Conn, R.J. de Moraes, and F.P.T. da Silva. Combining Adjoint Calculations and Quasi-Newton Methods for Automatic History Matching. In *SPE Europec/EAGE Annual Conference and Exhibition (Vienna, Austria)*, SPE 99996. Soc. Petr. Eng., 2006.
- [24] Schlumberger. *ECLIPSE Reference Manual*, 2007.
- [25] Schlumberger. *ECLIPSE Technical Description*, 2007.
- [26] Store norske leksikon, 25.02.2009. <http://www.snl.no/petroleum>.
- [27] N-Z Sun and A. Y. Sun. Parameter identification of environmental systems. In H. H Shen and A. Cheng, editors, *Environmental Fluid Mechanics*, pages 297–337. ASCE Publications, 2002.
- [28] S. Yoon, A.H. Malallah, and A. Datta-Gupta. A Multiscale Approach to Production Data Integration Using Streamline Models. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition (Houston, Texas)*, SPE 56653. Soc. Petr. Eng., 1999.
- [29] C. Y. Zhu, R. H. Byrd, P. H. Lu, and J. Nocedal. Algorithm 778: L-BFGS-B: Fortran subroutines for large-scale bound-constrained optimization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23(4):550–560, 1997.