

Eivind Reikerås

Oppgave for graden master i statistikk

Finansteori og forsikringsmatematikk

Universitetet i Bergen, Noreg

2. juni 2009

Solvenskontroll ved
skifting mellom ulike
volatilitetsregimer



Denne oppgåva er skriven i $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ med dokumentklassen «uib-mi-master», laga av Karl Ove Hufthammer. Ho vart kompilert med pdfTeX-1.40.3 den 2. juni 2009. Brødteksten er sett i 11 punktts URW Palladio med kapitélar. Matematikken er sett i URW Palladio og Pazo Math, overskrifter i HV Math og programkode i Bera Mono.

Takk

Eg vil rette ein stor takk til min rettleiar, Trygve S. Nilsen, for god hjelp med denne oppgåva.

Vidare vil eg takke min trulova Janne Herfindal og hunden min Jacobi for å vere ei stor inspirasjonskjelde i kvardagen. Dykkar glade andlet gjer alt mykje lettare.

Eg sender òg ein takk til familie og venar som har støtta meg gjennom alle mine år ved Universitetet.

Ein stor takk rettast òg til alle mine medstudentar, med spesielt tanke på Ole Johan og Tor Erik.

Innhald

1	Innleiing	1
2	Solvency II	3
2.1	Tidlegare solvensregelverk	3
2.2	Innføring av nytt solvensregelverk	4
2.3	Oppgåva si innsikt i Solvency II	5
3	Grunnleggjande definisjonar og matematisk verkty	7
3.1	Opsjonar	7
3.1.1	Europeisk Call opsjon	7
3.1.2	Europeisk Put opsjon	7
3.1.3	Amerikansk opsjon	8
3.1.4	Asiatisk opsjon	8
3.1.5	Barriereopsjonar	8
3.2	Grunnleggjande definisjonar	9
3.3	Arbitrasje	13
3.4	Risikonøytral vurdering og arbitrasjefri pris	14
3.4.1	Skifte av sannsynsmål og Radon-Nikodym	14
3.4.2	Eit krav sin arbitrasjefrie pris	15
3.5	Black-Scholes formel for Europeiske opsjonar	17
3.5.1	Europeisk call opsjon	19
4	Absorberte prosessar	20
4.1	Refleksjonsprinsippet for ei Brownsk røyrslé	20
4.2	Absorberte prosessar	23
4.2.1	Sannsynstettleiken til ein absorbert prosess	24
5	Modell	28
5.1	Grosen og Jørgensen: Modellen sin struktur	28

5.2	Nedstenging av selskapet	29
5.3	Defaultsannsyn	32
5.3.1	Tolking av reguleringsparameteren	35
5.3.2	Portefølja evaluert over ein uendeleg long kontraksperiode	37
5.4	Poliseholdaren sitt krav	38
5.4.1	Deltakingskoeffisienten	41
5.5	Kapitalholdaren sitt krav	41
5.6	Forventa utbetaling til poliseholdar	43
5.7	Forventa utbetaling til kapitalholdar	55
6	Utvida modellar	57
6.1	Monte Carlo simulering	57
6.1.1	Monte Carlo simuleringa si grannsemd	58
6.2	Statisk og dynamisk modell	59
6.2.1	I lys av Solvency II	62
6.3	Fleire volatilitetsalternativ	65
6.4	Solvenskontroll med dødelegheit	68
6.4.1	Dødelegheitsmodell	68
6.4.2	Sannsyn for død og default	68
6.4.3	Forventa utbetaling til poliseholdar	69
6.4.4	Forventa utbetaling til kapitalholdar	71
6.5	Modell med barrieredødelegheit	73
6.5.1	Levetidsprosessen evaluert over eit uendeleg tidsrom	78
6.5.2	Deltakingskoeffisienten i barrieredødelegheitsmodell	79
6.5.3	Numeriske og analytiske berekningar	81
6.6	Gompertz-Makeham dødelegheit	83
6.6.1	Accept-reject algoritme	85
6.6.2	Simuleringsresultat	87
6.6.3	Samanlikning av dødelegheitsmodellar	89
6.7	Pensjonskasse	92
6.7.1	Pensjonsutbetalinga	93
6.7.2	Pensjonskassesimulering	94
6.8	Stokastiske tilsyn med administrasjonskostnader	98
7	Avsluttande kommentarar	103

A Programmering	105
A.1 Gompertz-Makeham, Accept-reject algoritme	105
A.2 Simulering av ei GBM	106
A.3 Finne deltakingskoeffisienten i modell utan dødelegheit	106
A.4 Simulering av ei portefølje utan dødelegheit	108
A.5 Portefølje-simulering med Gompertz-Makeham	112
A.6 Simulering med stokastiske tilsyn og administrative kostnader	117
Litteratur	123

1

Innleiing

Utgangspunktet for denne oppgåva er artiklane Jørgensen (2004) , Chen og Bernard (2008) og Grosen og Jørgensen (2002). Oppgåva tek for seg solvenskontroll av pengeforvaltning. Det pågår for tida eit arbeid med eit nytt regelverk, Solvency II. Det nye regelverket skal blant anna syte for større kontroll av liv- og skadeforsikringsselskap sin kapital. Oppgåva byrjar med å skildre tidlegare solvensregelverk og bakgrunnen for innføringa av Solvency II. Vidare vil det bli gått gjennom grunnleggjande matematisk verkty, nokre finansielle kontraktar og prising av desse. Det vil så bli presentert ulike modellar og resultat.

Europeiske forsikringsselskap er ottefull for at innføringa av eit nytt solvensregelverk vil føre til at forsikringsselskapa vert tvungen til å investere meir konservativt. Oppgåva sitt interesseområde er såleis å estimere solvensrisikoar i ulike modellar, til dømes med kva sannsyn eit forsikringsselskap går konkurs, og kva pengebeløp dei set igjen med etter at ein har tatt omsyn til forsikraren sin konkurs-risiko. Selskapet prøver å maksimere profitt for deira kapitalholdarar, medan ei reguleringsmyndigheit er ansvarleg for å verne om poliseholdarane gjennom å påleggje selskapet avgrensingar på kor stor risiko dei kan ta. Tidlegare litteratur innanfor dette fagfeltet har antatt at forsikringsselskap nyttar risikostyring med *konstant* volatilitet. For ein langsiktig kontrakt

som ein livsforsikringskontrakt er det ikkje realistisk å anta at selskapa nyttar same volatiliteten i heile kontraktsperioden. Det vil vere meir realistisk å anta at selskapa har ein investeringsstrategi, og byter mellom ulike volatilitetsnivå i ulike tider.

2

Solvency II

2.1 Tidlegare solvensregelverk

Solvenskontroll av liv- og skadeselskaper er særskild dagsaktuell då det i dei næraste åra vil bli innført eit nytt regelverk, «Solvency II», som omhandlar solvenskontroll av forsikringsselskap. Dei noverande EU/EØS solvensregelverka («Solvency I») vart innført i 1973 (skadeforsikring) og 1979 (livsforsikring). Den siste oppdateringa av regelverket kom i 2002. Berekning av kapitalkrav under «Solvency I» er relativt enkelt: Ein prosentandel av premiane og krava i skadeforsikring og reassurans, og ein prosentandel av tekniske føresegn og risikokapital i livsforsikring.

«Solvency I» regelverket har fungert greit, og dei relativt få gongane det har gått gale har grunnen helst vore svikt i leiinga framføre mangel på kapital eller tekniske føresegn. Ein studie gjennomført av CEIPOS (*Committee of European Pensions and Insurance Supervisions*) viser allikevel at dei noverande solvensmarginreglane ikkje har gitt signifikant tidleg varsel om framtidige problem, samt at tilsyn var tiltrengt. Mangel på slik varsel kan ha hindra tilsynsmyndigheiter frå å bli kople inn på eit tidleg nok tidspunkt. Det har av denne grunn vore stor tvil om «Solvency I» kan fortsetje å vere det gjeldande regelverket for forsikringstilsyn i dei komande åra.

2.2 Innføring av nytt solvensregelverk

I EU/EØS har det i fleire år vore arbeida med eit nytt rammedirektiv for forsikring med nye relevante soliditetskrav, under dette er krav til tekniske avsetjingar og kapitalkrav, som kan erstatte gjeldande solvenskrav i forsikringsdirektiva. Dette arbeidet starta i 1999 og regelverket vert kalla «Solvency II». Eit liknande regelverk eksisterer allereie for bankar og finansinstitusjonar sine kapitalkrav, dette regelverket har fått namnet «Basel II». «Solvency II» vil basere seg på dei same tre hovudpilarane som «Basel II» bygde på under si utarbeiding.

Den første pilaren vil innehalde kvantitative reglar som set krav til tekniske avsetjingar og solvensmargin (kapitalkravet). Krav til plassering og investering av selskapa sine eigendelar, dvs. kapitalforvaltingsreglar vil òg bli satt.

Den andre pilaren vil innehalde reglar for internkontroll, risikohåndtering og tilsynsmyndigheita sin kontroll og overvåking av selskapa.

Den tredje og siste pilaren vil omfatte reglar for marknadsdisiplin, herunder reglar for rapportering og offentleggjering av relevante rekneskapsdata, risikostatistikk mv. Dei nye solvenskrava som er under oppføring strekkjer seg såleis utover dagens solvenskrav i forsikringsdirektiva. Ei oversikt over arbeidet med Solvency II hittil er gitt av Van Hulle (2006).

Det er lagt opp til ein betydeleg større grad av harmonisering av solvensregelverket i Solvency II enn i gjeldande regelverk («Solvency I») som er basert på minimumsharmonisering. Harmonisering av regelverk og berekningsmetodar for forsikringstekniske avsetjingar er sett som eit naudsynt krav for auka harmonisering av solvensmarginkrava og kapitalkrava. Dette har gjort arbeidet med «Solvency II» komplisert og krevjande.

Ved innføringa av «Solvency II» må forsikringsverksemdene gå frå ei regelbasert regulering til ei meir risikobasert regulering. Selskap vert pålagt å måle risikoen dei er eksponert for, og lyt vidare vise til at dei har kapital nok til å dekkje opp for denne risikoen.

Det vil bli innført to sett kapitalkrav, eit absolutt minstekrav til kapital MCR («*Minimum capital requirement*»). Dette kravet vil fungere som eit krav til minste startkapital for et forsikringsselskap og må alltid tilfredsstillast for at eit selskap skal kunne operere i den felleseuropeiske forsikringsmarknaden. Det andre settet med kapitalkrav vil vere krav til såkalla «target capital», også kalla SCR, («*Solvency Capital Requirement*»). Dette kravet vil utgjere det operasjonelle kapitalkravet for eit selskap si kontinuerlege verksemd. «Target

capital» skal i større grad enn gjeldande solvensmarginkrav gjenspegle dei ulike typar risikoar som det enkelte forsikringsselskap er eksponert for. SCR skal i følgje Van Hulle (2006) bli satt til eit slikt nivå at det utgjer mindre enn 1 til 200 sjanse for at kapitalen er utilstrekkeleg i dei påfølgjande 12 månadane. Dersom selskapet sin kapital ikkje oppfyller SCR-kravet må dei framleggje ein plan for korleis dei skal kome seg opp igjen på den solvente sida av SCR. «Target capital» kan bli rekna ut ved hjelp av eit standard formelverk, men selskap står òg fritt til å bruke interne modellar så lenge modellane har vorte godkjend av tilsynsmyndigheita.

EU-kommisjonen la fram forslag til rammedirektiv om Solvency II, den 10. juli 2007 (2007/0143 COD). Tidspunkt for implementering av regelverket er enno usikkert, men det er anslått av regjeringa (ref: regjeringen.no) at det er ein implementeringsfrist tidlegast i 2012.

2.3 Oppgåva si innsikt i Solvency II

I denne oppgåva kjem vi særskilt til å sjå nærare på kapitalkrava og tilsynsmyndigheitas overvåking av selskapet. Vi tek utgangspunkt i artikkelen til Chen og Bernard (2008) der det vert sett på ein forsikringsavtale mellom ein kapitalholder og ein polisholder. Solvency II utarbeidast først og fremst med tanke på å verne om polisholdarane. Solvency I garanterer òg ein viss grad av vern for polisholdarane, men det greier ikkje å utarbeide ein tidleg varsel til kontrollorgana. Ein varsel på eit tidleg nok tidspunkt kan hindre ein eventuell konkurs.

1. januar 2008 vart ei ny forsikringslov innført i Noreg. Den nye lova hadde blant anna eit mål om å få eit klarare skilje mellom selskapet og kunden sine midler. Det vart difor eit klart skilje mellom forsikringstakaren sine midler og selskapet sin eigarkapital, desse vart tidlegare forvalta saman. Chen og Bernard (2008) som ligg til grunn for denne oppgåva, tek ikkje omsyn til den nye forsikringslova som vart innført i Noreg 1.januar 2008. Den ser istaden på eit tilfelle der kapitalen til kunden og selskapet vert forvalta saman.

I følgje Chen *et al.* (2008) er europeiske forsikringsselskap og pensjonsfond ottefull for at dei under den nye solvensreguleringa vert tvungen til å investere svært konservativt for å kunne imøtekome krava frå Solvency II-regelverket. Denne oppgåva vil undersøkje om investerings-strategien til selskapa vert endra som følgje av innføringa av eit kontrollorgan som ser etter at kapitalen til

ei kvar tid er solvent. Viss sannsynet for at selskapet går konkurs er større enn ei gitt toleransegrense vert selskapet tvungen til å rekapitalisere til ei mindre risikofylt portefølje. På denne måten syt kontrollorganet for at sannsynet for at eit selskap skal gå konkurs er tilfredstillande lågt. Blir selskap tvungen til å investere meir konservativt som følgje av eit slikt kontrollorgan? Vert selskapet sitt forventa overskot drastisk redusert som følgje av eit nytt regelverk? Vi vil i denne oppgåva undersøke desse spørsmåla. Vi ser òg på fleire utvida modellar, der vi blant anna tek omsyn til dødelegheit og stokastiske tilsynstidspunkt.

3

Grunnleggjande definisjonar og matematisk verkty

3.1 Opsjonar

3.1.1 Europeisk call opsjon

Ein *Europeisk call opsjon* på X kroner, med utslagspris K kroner og modningsdato T , er ein kontrakt nedteikna ved $t = 0$ med følgjande eigenskapar:

- Kontraktholdaren har, nøyaktig ved tid $t = T$, **retten** til å kjøpe X kroner for utslagsprisen K
- Kontraktholdaren har ingen plikt til å kjøpe X kroner.

3.1.2 Europeisk put opsjon

Ein *Europeisk put opsjon* på X kroner, med utslagspris K kroner og modningsdato T , er ein kontrakt nedteikna ved $t = 0$ med følgjande eigenskapar:

- Kontraktholdaren har, nøyaktig ved tid $t = T$, **retten** til å selje X kroner for utslagsprisen K
- Kontraktholdaren har ingen plikt til å selje X kroner.

3.1.3 Amerikansk opsjon

Ein opsjon med prefikset *amerikansk* tydar at kontraktholdaren har rett til å nytte seg av kjøp/salg kva tid som helst før modningsdatoen T .

3.1.4 Asiatisk opsjon

Ein *asiatisk opsjon*, med modningsdato $t = T$ og utslagspris K , er ein kontrakt der verdien av opsjonen er bestemt av den gjennomsnittlege underliggjande prisen fram til modningsdato T . I det kontinuerlege tilfellet gjev dette utbetalinga:

$$\max\left(\frac{1}{T} \int_0^T (X(t) - K) dt, 0\right)$$

Her er $X(t)$ verdien på det underliggjande verdipapiret ved tid t . I eit diskret tilfelle gjer det utbetalinga:

$$\max\left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N [X(t_i) - K, 0]\right)$$

3.1.5 Barriereopsjonar

Ein barriereopsjon er ein opsjon som først vert aktiv/inaktiv dersom verdien på det underliggjande verdipapiret kryssar eller treffer ei førehandsbestemt barriere. Dersom opsjonen vert aktiv kan den innløysast, vert den inaktiv er den verdiløus. Vi har 4 hovudtypar barriereopsjonar:

- **Up-and-out**
- **Up and-in**
- **Down-and-out**
- **Down-and-in**

Opsjonar med prefikset «Up» startar med spot-pris (verdi på det underliggjande) under si barriere og lyt flytte seg oppover for å nå barrieria.

Opsjonar med prefikset «Down» startar med spot-pris (verdi på det underliggjande) over si barriere og lyt flytte seg nedover for å nå barrieria.

Out-opsjonar startar som aktive opsjonar, men dersom verdien til det underliggjande verdipapiret når si barriere vert opsjonen slått ut og vert verdiløus.

In-opsjonar byrjar som verdiløuse opsjonar. Desse opsjonane vert «slått inn» som aktive dersom verdien til det underliggjande verdipapiret når si barriere.

Pariseropsjon

Ein standard Pariseropsjon er ein barriereopsjon som først vert inaktiv/aktiv når verdien på det underliggjande instrumentet har vore på feil side av barriera eit gitt tal på påfølgjande tidseiningar.

Kumulativ Pariseropsjon

Ein kumulativ Pariseropsjon er ein modifisert standard Pariseropsjon. Modifikasjonen er at verdien på det underliggjande instrumentet vert aktivert/inaktivert dersom den i løpet av heile kontraktperioden tilsaman har oppholdt seg meir enn eit gitt tal på tidseiningar på feil side av barriera.

3.2 Grunnleggjande definisjonar

Definisjon 3.2.1: Normalfordeling

Anta at X er ein normalfordelt variabel med forventning μ og standardavvik σ . Vi skriv $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sannsynstettleiken til X skriv vi $\phi(x; \mu, \sigma)$, som er på forma:

$$\phi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.1)$$
$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$$

Standardnormaltettleiken skriv vi $\phi(x; 0, 1) = \phi(x) = n(x)$. Den kumulative fordelingsfunksjonen til $\phi(x)$ skriv vi $N(x)$ og er på forma:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy, \quad -\infty < x < \infty$$

Definisjon 3.2.2: Martingal

La $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vere eit sannsynsrom, la T vere eit fiksert positivt tal, og la \mathcal{F} , $0 \leq t \leq T$, vere ein filtrasjon av sub- σ -algebra av \mathcal{F} . Vi ser på ein adaptert stokastisk prosess $M(t)$, $0 \leq t \leq T$. Dersom

$$\mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s)] = M(s), \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (3.2)$$

seier vi at prosessen er ein martingal. Den viser ingen tendens til å auke eller avta.

Definisjon 3.2.3: Wiener prosess

Ein stokastisk prosess W vert kalla ein **Wiener prosess** dersom følgjande vilkår er tilfredstilt:

- $W(0) = 0$
- Prosessen W har uavhengige inkrement, det vil sei at viss $r < s \leq t < u$ så er $W(u) - W(t)$ og $W(s) - W(r)$ uavhengige stokastiske variable
- For $s < t$ er den stokastiske variabelen $W(t) - W(s)$ normalfordelt $\mathcal{N}(0, t - s)$
- W har kontinuerlege trajektorier (spor)

Ein Wiener prosess vert òg kalla ei *standard Brownsk røyrsle*

Ein Wiener prosess er både ein martingal og har Markov eigenskapen. For eit enkelt bevis for at Wiener prosessen har Markov eigenskapen sjå til dømes Shreve (2004, side 107). Vi vil her gje eit raskt bevis for at ein Wiener prosess er ein martingal.

Teorem 3.2.4

Ein Wiener prosess er ein martingal.

Bevis: La $0 \leq s \leq t$. Då har vi at

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W(t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[(W(t) - W(s)) + W(s)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s)|\mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + W(s) \\ &= W(s)\end{aligned}$$

Definisjon 3.2.5: Brownsk røyrslle (BM) med drift

Ei Brownsk røyrslle er ein stokastisk prosess gitt ved den stokastiske differensiallikninga:

$$dX_t = \alpha dt + \sigma dW_t, \quad (3.3)$$

$$X_0 = 0 \quad (3.4)$$

Her er W_t er ein Wiener prosess.

Definisjon 3.2.6: Geometrisk Brownsk røyrslle (GBM)

Ei geometrisk Brownsk røyrslle er ei av dei fundamentale byggjeblokkene for prismodellering. Ei GBM er ein stokastisk prosess gitt ved den stokastiske differensiallikninga:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3.5)$$

$$S_0 = s_0 \quad (3.6)$$

Løysinga av denne stokastiske differensiallikninga er velkjend:

$$S_t = s_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (3.7)$$

sjå til dømes Björk (2004) for verifisering av denne løysinga

Definisjon 3.2.7: Treffetid og absorberte prosessar

La $\{X_t; 0 \leq t \leq \infty\}$ vere ein vilkårleg stokastisk prosess med kontinuerlege trajektorier med verdier på den reelle tallaksen. Vi har då at treffetida til y , τ_y er definert ved

$$\tau_y = \inf\{t \geq 0 | X_t = y\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

X -prosessen absorbert i y er definert ved

$$X_y(t) = X(t \wedge \tau)$$

Vi definerer løpande maksimum- og minimumsprosessar som i Björk (2004).

Definisjon 3.2.8: Løpande maksimums- og minimumsprosess

La $\{X_t; 0 \leq t \leq \infty\}$ vere ein vilkårleg stokastisk prosess med kontinuerlege trajektorier med verdier på den reelle tallakse. **Løpande maksimums- og løpande minimumsprosessen** vert definert ved følgjande likningar:

$$M_X(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$$

$$m_X(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s$$

Vi sløyfer nokon gongar underskrifta X .

Korollar 3.2.9: Fordeling til løpande maksimums- og minimumsprosessar

X_β er Wiener prosessen X_t absorbert i β . X_t er definert ved:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dt \quad (3.8)$$

$$X_0 = \alpha \quad (3.9)$$

Sannsynstettleiken $f_\beta(x; t, \alpha)$ til prosessen $X_\beta(t)$ absorbert i β er gitt ved

$$f_\beta(x; t, \alpha) = \phi(x; \mu t + \alpha, \sigma\sqrt{t}) - e^{-\frac{2\mu(\alpha-\beta)}{\sigma^2}} \phi(x; \mu t - \alpha + 2\beta, \sigma\sqrt{t}) \quad (3.10)$$

Definisjonsområdet til tettleiken er $x \in (-\infty, \beta)$ viss $\alpha < \beta$, og $x \in (\beta, \infty)$, viss $\alpha > \beta$.

La M og m vere høvesvis maksimum- og minimumsprosessen til X . Forde-
lingsfunksjonen til $M(t)$ og $m(t)$ er då gitt ved:

$$F_{M(t)} = N\left(\frac{x - \alpha - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2\frac{\mu(x-\alpha)}{\sigma^2}} N\left(-\frac{x - \alpha + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad x \geq \alpha \quad (3.11)$$

$$F_{m(t)} = N\left(\frac{x - \alpha - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{2\frac{\mu(x-\alpha)}{\sigma^2}} N\left(\frac{x - \alpha + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right), \quad x \leq \alpha \quad (3.12)$$

3.3 Arbitrasje

Vi definerer arbitrasje som i Björk (2004)

Definisjon 3.3.1: Arbitrasje

La $V^h(t)$ vere verdiprosessen til ei portefølje h . Ein arbitrasjemoglegheit i ein finansiell marknad eksisterer dersom ei portefølje h har følgjande eigenskapar

$$V^h(0) = 0$$

$$\mathbb{P}(V^h(T) \geq 0) = 1$$

$$\mathbb{P}(V^h(T) > 0) > 0$$

Vi seier at marknaden er *arbitrasjefri* dersom det ikkje fins arbitrasjemog-
legheitar

Arbitrasje kan litt laust seiast å vere ein måte å skaffe seg gratis pengar på, og svarer til ein alvorleg feilprising i marknaden. Eit lite døme som illustrerer arbitrasje: Anta at ein bank opererer med den risikofrie renta r . Anta så at vi har ei risikofri investering som gjer oss avkastning l :

$$dV^h(t) = l \cdot V^h(t) dt$$

Dersom $l > r$ kan vi ved tid t låne pengar i banken til rente r og investere i portefølja V^h som gjer oss avkastning l , med $l > r$. Ved tid t har vi ein netto investering på null. Vi set ved tida $u > t$ igjen med ei positiv formue, og har dermed fått ein sikker gevinst. Motsatt har vi at dersom $r > l$ kan vi ved tid t selje portefølja $V^h(t)$ short og setje pengane i banken til ei rente r . Ved tid u kan vi ta ut pengane frå banken, løyse ut portefølja og sitte igjen med ei positiv formue.

3.4 Risikonøytral vurdering og arbitrasjefri pris

Definisjon 3.4.1: Nesten sikker hending

La (Ω, F, \mathbb{P}) vere eit sannsynsrom. Dersom ei mengd $A \in F$ tilfredstiller $\mathbb{P}(A) = 1$, seier vi at hendinga A opptre *nesten sikkert* (*almost surely*)

Ein viktig samanheng når ein heldt på med finasteori er samanhengen mellom Q-dynamikken i ei risikonøytral verd, og \mathbb{P} -dynamikken i den reelle verda.

3.4.1 Skifte av sannsynsmål og Radon-Nikodym

La (Ω, F, \mathbb{P}) vere eit sannsynsrom og la Z vere ein *nesten sikker*, ikkje-negativ stokastisk variabel med $\mathbb{E}[Z] = 1$. Vi definerer:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad A \in F \quad (3.13)$$

Då er \mathbb{Q} eit sannsynsmål. Vidare, dersom X er ein ikkje-negativ stokastisk variabel, har vi at

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}[XZ]$$

Dersom Z er *nesten sikker og positiv* har vi i tillegg at

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Y}{Z}\right]$$

for ein kvar ikkje-negativ stokastisk variabel Y .

Vi definerer Radon-Nikodyms teorem og Radon-Nikodym derivasjon som i Shreve (2004).

Teorem 3.4.2: Radon-Nikodyms Teorem

La \mathbb{P} og \mathbb{Q} vere ekvivalente sannsynsmål definert på (Ω, \mathcal{F}) . Då eksisterer det ein *nesten sikker* positiv stokastisk variabel Z slik at $\mathbb{E}[Z] = 1$ og

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) , \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad (3.14)$$

Definisjon 3.4.3: Radon-Nikodym derivasjon

La $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vere eit sannsynsrom. La \mathbb{Q} vere eit anna sannsynsmål på (Ω, \mathcal{F}) som er ekvivalent til \mathbb{P} , og la Z vere ein *nesten sikker, positiv* stokastisk variabel Z som relaterer \mathbb{P} og \mathbb{Q} via formel 3.13 på førre side. Då er Z den Radon-Nikodym deriverte av \mathbb{Q} med omsyn på \mathbb{P} . Vi skriv:

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \quad (3.15)$$

Vi ser at Z er eit slags forhold mellom dei to ulike sannsynsmåla.

3.4.2 Eit krav sin arbitrasjefrie pris

Ein viktig byggjestein i finansteori er risikonøytral vurdering som blant anna leiår til den arbitrasjefrie prisen til eit krav. Vi vil som i Björk (2004) og Ross (1993) her utleie denne arbitrasjefrie prisen. Vi ser på ein marknad gitt ved følgjande to likningar:

$$dB_t = rB_t dt \quad (3.16)$$

$$dS_t = S_t \alpha(t, S_t) dt + S_t \sigma(t, S_t) d\bar{W}_t \quad (3.17)$$

samt eit krav på forma $\chi = \Phi(S_T)$. \bar{W} er her ein Wiener prosess. Den einaste arbitrasjefrie prisen gitt ved $\Pi(t) = F(t, S_t)$ er den F som oppfyller *Black-*

Scholes likningane frå Björk (2004) på området $[0, T] \times \mathbb{R}_+$, gitt ved

$$F_t(t, s) + r s F_s(t, s) + \frac{1}{2} s^2 \sigma^2(t, s) F_{ss}(t, s) - r F(t, s) = 0 \quad (3.18)$$

$$F(T, s) = \Phi(s) \quad (3.19)$$

Denne likninga kan løysast ved ein stokastisk representasjonsformel, noko i retning Feynman-Kač. Ved å bruke resultatata frå Feynman-Kač i Björk (2004, side 69) finn vi at løysinga er gitt ved

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,s}[\Phi(X_T)] \quad (3.20)$$

der prosessen X er definert ved

$$dX_u = r X_u du + X_u \sigma(u, X_u) dW_u \quad (3.21)$$

$$X_t = s \quad (3.22)$$

Som vi ser er skilnaden mellom X og S liten, den einaste forskjellen er at S og X har høvesvis α og r som avkastning. Her er r den kortsiktige marknadsrenta. Som i Björk (2004) nyttar vi notasjonen \mathbb{P} for det objektive sannsynsmålet som gjenspeglar den reelle modellen. Vi omtalar altså formel 3.17 på førre side som \mathbb{P} -dynamikken til S -prosessen. Vi definerer no eit nytt sannsynsmål \mathbb{Q} der prosessen S har ei anna sannsynsfordeling. \mathbb{Q} -dynamikken til S er då gitt ved:

$$dS_t = r S_t dt + S_t \sigma(t, S_t) dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (3.23)$$

Her er $W_t^{\mathbb{Q}}$ ein Wiener prosess under det nøytrale sannsynsmålet \mathbb{Q} .

Definisjon 3.4.4: Kravet sin arbitrasjefrie pris

Den arbitrasjefrie prisen til kravet $\Phi(S_T)$ er gitt ved $\Pi(t, \Phi) = F(t, S_t)$, der F er

$$F(t, s) = e^{r(T-t)} \mathbb{E}_{t,s}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S_T)] \quad (3.24)$$

\mathbb{Q} -dynamikken til S er gitt ved formel 3.23

3.5 Black-Scholes formel for Europeiske opsjonar

Vi antar at vi har ein marknad gitt ved

$$\begin{aligned}dB(t) &= rB(t) \\dA(t) &= \alpha A(t) dt + \sigma A(t) dW(t)\end{aligned}$$

der α og σ er konstantar. Den arbitrasjefrie prisen for eit enkelt krav $\Phi(A(T))$ gitt ved:

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,s}^Q[\Phi(A(T))]$$

Her er Q-dynamikken til A er gitt ved

$$\begin{aligned}dA(v) &= rA(v) dv + \sigma A(v) dW(v) \\A(t) &= s\end{aligned}$$

Dette uttrykket kjenner vi igjen frå definisjonen av ei geometrisk Brownsk røyrslé, formel 3.5 på side 11 . Løysinga av denne er gitt ved formel 3.7 på side 11. Vi får då $A(T)$ uttrykt ved:

$$A(T) = se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma[W(T)-W(t)]}$$

Frå tidlegare kapittel veit vi at prisingsformelen er gitt ved:

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(se^Z) f(z) dz \quad (3.25)$$

Her er Z ein stokastisk variabel med fordelinga:

$$Z \sim \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

For ein generell kontraktsfunksjon må prisingsformelen stort sett evaluerast numerisk. For nokre spesielle tilfeller kan vi evaluere formel 3.25 analytisk. Ein av dei mest kjende av kontraktsfunksjonane som lar seg evaluere analytisk er ein Europeisk call opsjon. Kontraktsfunksjonen for denne typen opsjon er gitt ved

$$\Phi(y) = \max[y - K, 0]$$

For ein Europeisk call opsjon er forventinga under det risikonøytrale målet \mathbb{Q} gitt ved:

$$\mathbb{E}_{t,s}^{\mathbb{Q}} \left[\max[se^Z - K, 0] \right] = 0 \cdot \mathbb{Q}(se^Z \leq K) + \int_{\ln(\frac{K}{s})}^{\infty} (se^Z - K) f(z) dz \quad (3.26)$$

Tettleiken $f(z)$ er normaltettleiken

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right]$$

For å kunne løyse integralet i formel 3.26 gjer vi substitusjonen

$$\theta = \frac{z - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d\theta = \frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Kvadratet i eksponentialfunksjonen fullførast og ein sit igjen med følgjande uttrykk

$$\mathbb{E}_{t,s}^{\mathbb{Q}} \left[\max[se^Z - K, 0] \right] =$$

$$\mathbb{E}_{t,s}^{\mathbb{Q}} \left[\Phi(se^Z) \right] = se^{r(T-t)} \int_C^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\theta - \sigma\sqrt{T-t})^2} d\theta - K \int_C^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} d\theta$$

$$\text{der } C = \frac{\ln(\frac{K}{s}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Dette kan skrivast som:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t,s}^{\mathbb{Q}} \left[\Phi(se^Z) \right] &= se^{r(T-t)} \cdot \mathbb{P} \left\{ \mathcal{N}(\sigma\sqrt{T-t}, 1) > C \right\} - K \cdot \mathbb{P} \left\{ \mathcal{N}(0,1) > C \right\} \\ &= se^{r(T-t)} \cdot \mathbb{P} \left\{ \mathcal{N}(0, 1) > C - \sigma\sqrt{T-t} \right\} - K \cdot N(-C) \\ &= se^{r(T-t)} \cdot \mathbb{P} \left\{ \mathcal{N}(0, 1) \leq -(C - \sigma\sqrt{T-t}) \right\} - K \cdot N(-C) \\ &= se^{r(T-t)} \cdot N(\sigma\sqrt{T-t} - C) - K \cdot N(-C) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Her representerer $N(\cdot)$ den kumulative fordelingsfunksjonen til standardnormalfordelinga. $\mathcal{N}(a, b)$ er ein normalfordelt variabel med forventing a og varians b . Ved bruk av formel 3.25 på side 17 finn vi prisen for ein Europeisk call opsjon.

3.5.1 Europeisk call opsjon

Prisen for ein Europeisk call opsjon med utslagspris K og modningsdato T er gitt ved formelen $\Pi(t) = F(t, A(t))$, der

$$F(t, s) = sN[d_1(t, s)] - e^{-r(T-t)}K N[d_2(t, s)]. \quad (3.28)$$

Her er $N(\cdot)$ den kumulative fordelingsfunksjonen til standardnormalfordelinga og

$$d_1(t, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ \ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right\} \quad (3.29)$$

$$d_2(t, s) = d_1(t, s) - \sigma\sqrt{T-t} \quad (3.30)$$

4

Absorberte prosessar

4.1 Refleksjonsprinsippet for ei Brownsk røyrslle

Refleksjonsprinsippet er eit viktig prinsipp som ligg til grunn for prising av barriereopsjonar. Vi vil i dette delkapittelet, som i Shreve (2004), gå gjennom teorien bak refleksjonsprinsippet.

Vi tek for oss ei Brownsk røyrslle $W(t)$, som startar i X_0 og utviklar seg i tid t . Vi fikserer m som ei horisontal linje og tidspunktet t . Vårt mål er no å finne Brownske spor som treffer m før t . Passasjetida τ_m svarer til tidspunktet for første gong $W(t)$ treffer linja m . Det vil vere to ulike typar spor som treffer linja m på intervallet $[0, t]$: Dei som treffer m før tida t , men på tidspunktet t er i eit punkt w nedanfor m , og dei som er ovanfor m ved tid t . Det kunne òg tenkjast at det var Brownske spor som ved tid t havna presis i punktet m , men sidan $W(t)$ er ein *kontinuerleg* stokastisk prosess er dette sannsynet 0.

For kvart spor frå $W(t)$ som treffer m før tida t , og som ved t er i w , vil det vere eit reflektert spor som ved tid t er i punktet $2m - w$. Dette refleksjonssporet konstruerast ved at ein speglar sporet om linja m frå og med den første passasjetida τ_m . Ved same argumentasjon som over, vil sannsynet for å vere nøyaktig i $2m - w$ ved tid t vere 0. For å unngå problemet med spor som har sannsyn 0 for å opptre ser ein heller på dei spora som treffer m før tid t , og er

i eller under m ved tid t . Vi ser så på refleksjonane deira som er over $2m - w$ ved tid t . Dette leiar vidare til *refleksjonslikninga*

$$\mathbb{P}[\tau_m \leq t, W(t) \leq w] = \mathbb{P}[W(t) \geq 2m - w], \quad w \leq m, m > 0 \quad (4.1)$$

Teorem 4.1.1: Refleksjonsteoremet

Den tilfeldige variabelen τ_m , har, $\forall m \neq 0$, den kumulative fordelingsfunksjonen:

$$\mathbb{P}(\tau_m \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{|m|}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad t \geq 0 \quad (4.2)$$

og sannsynstettleiken til τ_m er

$$f_{\tau_m}(t) = \frac{d}{dt} \mathbb{P}(\tau_m \leq t) = \frac{|m|}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{m^2}{2t}}, \quad t \geq 0 \quad (4.3)$$

Bevis: Vi ser først på tilfellet at $m > 0$, substituerer $w = m$ i formel 4.1 og får fram:

$$\mathbb{P}[\tau_m \leq t, W(t) \leq m] = \mathbb{P}[W(t) \geq m] \quad (4.4)$$

Dersom $W(t) \geq m$, er det gitt at $\tau_m \leq t$, dette medfører

$$\mathbb{P}[\tau_m \leq t, W(t) \geq m] = \mathbb{P}[W(t) \geq m] \quad (4.5)$$

Vi legg saman formel 4.4 og 4.5 og får den kumulative fordelingsfunksjonen for τ_m

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_m \leq t) &= \mathbb{P}[\tau_m \leq t, W(t) \leq m] + \mathbb{P}[\tau_m \leq t, W(t) \geq m] \\ &= 2\mathbb{P}[W(t) \geq m] = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_m^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Vi nyttar substitusjonen $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$, og får

$$\mathbb{P}(\tau_m \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{|m|}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad t \geq 0$$

som ved derivasjon gjer formel 4.3 på førre side:

$$\begin{aligned}
 f_{\tau_m}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbb{P}(\tau_m \leq t) \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2t}} m \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{m}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{m^2}{2t}}, \quad t \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dersom $m < 0$ vil τ_m og $\tau_{|m|}$ ha same fordeling, slik at den kumulative fordelingsfunksjonen til $\tau_{|m|}$ er gitt ved formel 4.2 på førre side.

Refleksjonsprinsippet kan òg nyttast til å finne sannsynstettleiken til første passasjetid gjennom ei barriere K for ei Brownsk røyrslle med drift μ og volatilitet σ . Dette vert gjort ved same framgangsmåte som i Shreve (2004).

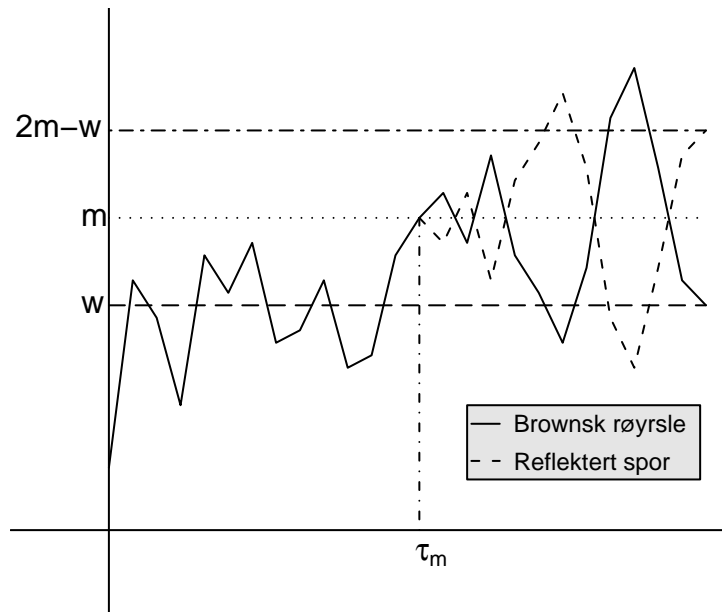
Teorem 4.1.2: Sannsynstettleik for første passasjetid, BM med drift

La X_t vere ei Brownsk røyrslle som utviklar seg etter

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \tag{4.7}$$

Anta at røyrsla har ei barriere i K . Sannsynstettleiken til tidspunkt for første passasjetid τ_x gjennom barrieria K er då gitt ved

$$f_{\tau_x}(t) = \frac{|K|}{\sigma t^{3/2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{-K - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right)^2} \tag{4.8}$$



Figur 4.1: Illustrasjon av refleksjonsprinsippet

4.2 Absorberte prosessar

Barriereopsjonar vert gjerne studert via absorberte stokastiske prosessar. I dette delkapittelet vil vi gå gjennom eit teorem og eit resultat som ligg til grunn for denne oppgåva si studie av solvenskontroll.

Samanhengen mellom ei Brownsk røyrslie under \mathbb{P} -mål og \mathbb{Q} -mål finn vi ved teorem 4.2.1 på neste side. Girsanovs teorem er svært viktig innan finans-teori då det fortel korleis ein konverterer frå det reelle sannsynsmålet \mathbb{P} , som skildrar sannsynet for at eit underliggjande instrument vil ta ein bestemt verdi,

til det risikonøytralet målet \mathbb{Q} . Girsanovs teorem vert definert som i Shreve (2004):

Teorem 4.2.1: Girsanovs Teorem

La $W(t), 0 \leq t \leq T$, vere ei Brownsk røyrslle på sannsynsrommet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, og la $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$, vere ein filtrasjon, for den Brownske røyrsla. La $\Theta(t), 0 \leq t \leq T$ vere ein adaptert prosess. Vi definerer:

$$Z(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \Theta(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(u) du \right\} \quad (4.9)$$

$$W^{\mathbb{Q}}(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u) du \quad (4.10)$$

Anta vidare at

$$E \left[\int_0^T \Theta^2(u) Z^2(u) du \right] < \infty \quad (4.11)$$

Vi set $Z = Z(T)$. Då er $E[Z] = 1$, og under sannsynsmålet \mathbb{Q} gitt ved formel 3.13 på side 14, er prosessen $W^{\mathbb{Q}}(t), 0 \leq t \leq T$, òg ei Brownsk røyrslle.

4.2.1 Sannsynstettleiken til ein absorbert prosess

Målet med dette avsnittet er å etablere ein sannsynstettleik for ei Brownsk røyrslle med ei absorberande barriere i 0. Vi definerte riktignok denne sannsynstettleiken i korollar 3.2.9 på side 13, men vi skal sjå at vi med enkel sannsynsrekning òg kan utleie denne.

Vi byrjar som i korollar 3.2.9 på side 13 med å sjå på ei Brownsk røyrslle $X_t = \mu t + \sigma W_t$ med absorberande barriere i $\beta = 0$, vi har òg at $W_0 = 0$. Her er W_t ein Wiener prosess definert på sannsynsrommet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ for $t \in [0, T]$. Vi dividerer med σ og får

$$\hat{X}_t = \frac{X_t}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} t + W_t = \hat{\mu} t + W_t \quad (4.12)$$

Ved å gjere nytte av teorem 4.2.1 observerast no at vår nye prosess \hat{X}_t er ei standard Brownsk røyrslle under det nye sannsynsmålet \mathbb{Q} , definert ved den

Radon-Nikodym deriverte:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} &= e^{-\hat{\mu}W_T - \frac{1}{2}\hat{\mu}^2T} \\ &= e^{-\hat{\mu}(\hat{X}_T - \hat{\mu}T) - \frac{1}{2}\hat{\mu}^2T} \\ &= e^{-\mu\hat{X}_T + \frac{1}{2}\hat{\mu}^2T}\end{aligned}$$

Vi lyt no finne

$$\mathbb{P}(X_T \geq x, \inf_{s \leq T} X_s > 0 | X_t), \quad 0 \leq t \leq s \leq T, X_t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.13)$$

Sannsynet i formel 4.13 er det same som å finne:

$$\mathbb{P}(\hat{X}_T \geq \frac{x}{\sigma} = \hat{x}, \inf_{s \leq T} \hat{X}_s > 0 | \hat{X}_t), \quad 0 \leq t \leq s \leq T$$

Ved å bruke lova om totalt sannsyn kan vi skrive:

$$\mathbb{P}(\hat{X}_T \geq \hat{x}, \inf_{s \leq T} \hat{X}_s > 0 | \hat{X}_t) = \mathbb{P}(\hat{X}_T \geq \hat{x} | \hat{X}_t) - \mathbb{P}(\hat{X}_T \geq \hat{x}, \inf_{s \leq T} \hat{X}_s \leq 0 | \hat{X}_t) \quad (4.14)$$

Vi veit at $\hat{X}_T | \hat{X}_t$ er normalfordelt $\mathcal{N}(\hat{X}_t + \hat{\mu}(T-t), T-t)$. Slik at det første leddet på høgre side av formel 4.14 er eit enkelt normalfordelingsledd:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\hat{X}_T \geq \hat{x} | \hat{X}_t) &= N\left(\frac{\hat{x} - \hat{X}_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\ &= N\left(\frac{x - X_t - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\end{aligned} \quad (4.15)$$

Det andre leddet på høgre side lyt vi sjå litt nærare på, vi multipliserer inn den Radon-Nikodym deriverte og endrar sannsynsmål:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\hat{X}_T \geq \hat{x}, \inf_{s \leq T} \hat{X}_s \leq 0 | \hat{X}_t) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\hat{X}_T \geq \hat{x}} \cdot \mathbf{1}_{\tau < T} | \hat{X}_t\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbf{1}_{\hat{X}_T \geq \hat{x}} \cdot \mathbf{1}_{\tau < T} \cdot e^{\hat{\mu}(\hat{X}_T - \hat{X}_t) - \frac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t)} | \hat{X}_t\right)\end{aligned} \quad (4.16)$$

Her er τ tidspunkt for første passasjetidspunkt av \hat{X} gjennom 0. For å kome vidare med dette uttrykket nyttar vi *refleksjonsprinsippet*, introdusert i avsnitt 4.1.

Vi kan då skrive

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\hat{X}_T \geq \hat{x}, \inf \hat{X}_s \leq 0 | \hat{X}_t) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\mathbf{1}_{\hat{X}_T \leq -\hat{x}} \cdot e^{\hat{\mu}(-\hat{X}_T - \hat{X}_t) - \frac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t)} | \hat{X}_t \right) \end{aligned}$$

Vi kan no fortsetje med standard kalkuleringer. Vi finn forventinga ved å integrere over det aktuelle definisjonsområdet, fullføre kvadratet i eksponenten, utføre substitusjonen $x = \frac{\rho - (\hat{X}_t - \hat{\mu}(T-t))}{\sqrt{T-t}}$ og til slutt nytte oss av samanhengen i formel 4.12 på side 24:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\mathbf{1}_{\hat{X}_T \leq -\hat{x}} \cdot e^{\hat{\mu}(-\hat{X}_T - \hat{X}_t) - \frac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t)} | \hat{X}_t \right) \\ &= \int_{-\infty}^{-\hat{x}} e^{-\hat{\mu}\rho - \hat{\mu}\hat{X}_t - \frac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(\rho - \hat{X}_t)^2} d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{-\hat{x}} e^{-\hat{\mu}\hat{X}_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(2\hat{\mu}\rho(T-t) + \hat{\mu}^2(T-t)^2 + \rho^2 - 2\rho\hat{X}_t + \hat{X}_t^2)} d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{-\hat{x}} e^{-2\hat{\mu}\hat{X}_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(-2\hat{\mu}\hat{X}_t(T-t) + 2\hat{\mu}\rho(T-t) + \hat{\mu}^2(T-t)^2 + \rho^2 - 2\rho\hat{X}_t + \hat{X}_t^2)} d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{-\hat{x}} e^{-2\hat{\mu}\hat{X}_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(\rho^2 - 2\rho(\hat{X}_t - \hat{\mu}(T-t)) + (\hat{X}_t - \hat{\mu}(T-t))^2)} d\rho \\ &= e^{-2\hat{X}_t\hat{\mu}} \cdot \int_{-\infty}^{-\hat{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(\rho - (\hat{X}_t - \hat{\mu}(T-t)))^2} d\rho \\ &= e^{-\frac{2\hat{X}_t\hat{\mu}}{\sigma^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{-\hat{x} - (\hat{X}_t - \hat{\mu}(T-t))}{\sqrt{T-t}}} n(x) dx \\ &= e^{-\frac{2\hat{X}_t\hat{\mu}}{\sigma^2}} N\left(\frac{-\hat{x} - \hat{X}_t + \hat{\mu}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\ &= e^{-\frac{2\hat{X}_t\hat{\mu}}{\sigma^2}} N\left(\frac{-x - X_t + \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned}$$

Vi set dette resultatet inn i formel 4.14 på førre side og får

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_T \geq x, \inf X_s > 0 | X_t) = \\ &= 1 - N\left(\frac{x - X_t - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{-\frac{2X_t\mu}{\sigma^2}} N\left(\frac{-x - X_t + \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \quad (4.17) \end{aligned}$$

Ved partiell derivasjon får vi no det ynskja resultatet, nemleg sannsynstettleiken til ein prosess som startar i X_t ved tid $t < T$ med drift μ og absorberande

barriere i 0.

$$\begin{aligned} f(x, T; X_t, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \mathbb{P}(X_T \geq x, \inf X_s > 0 | X_t) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \times \\ &\quad \left\{ n\left(\frac{x - X_t - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{-\frac{2X_t\mu}{\sigma^2}} n\left(\frac{x + X_t - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Vi ser at denne sannsynstettleiken er på same form som formel 3.10 på side 13 med $\alpha = X_t$ og $\beta = 0$

5

Modell

I dette kapitlet vil det bli skildra korleis modellen vi skal sjå på er utforma, slik at vi seinare i oppgåva har dette grunnlaget til å byggje ut modellen på. Chen og Bernard (2008) og Grosen og Jørgensen (2002) bruker noko ulik notasjon. Vi vil difor òg gå kort gjennom kva notasjon som vert nytta i denne oppgåva.

5.1 Grosen og Jørgensen: Modellen sin struktur

Vi antar at vi opererer i ein perfekt finansiell marknad. Det vil seie at vi kan ignorere transaksjonskostnadar, skatte-effektar, short-salg avgrensingar og andre element som gjer marknaden imperfekt.

Ved tid 0 vert to partar, poliseholdaren og kapitalholdaren, einige om ei finansiell ordning om å forme eit livsforsikringselskap. Begge partar investerer eit pengebeløp i selskapet slik at dei tilsaman formar selskapet sin grunnleggjande eigenkapital A_0 . Poliseholdaren si grunnleggjande investering er $L_0 \equiv \alpha A_0$ og kapitalholdaren si investering er $E_0 \equiv (1 - \alpha)A_0$. Parameteren α refererast til som *formua sin fordelingskoeffisient*. Partane inngår ein kontrakt med ein varigheit på tid T . Modellen nyttar følgjande notasjon:

Parameter	Tyding
r :	Konstant risikofri rente
T :	Kontrakten sin modningsdato
g :	Garantirente, den renta poliseholdaren har krav på uansett utvikling av portefølja
$L_T = L_0 e^{gT}$:	Garantert utbetaling til poliseholdaren ved modningsdato
L_t :	Garantert beløp for den forsikra si investering ved tid t
A_t :	Verdien av selskapet si portefølje ved tid t
B_t :	ηL_t , reguleringsgrensa, vert òg kalla barrierenivået
η :	Reguleringsparamteren. Seier noko om nivået på barriera
μ :	Driftsparameter til A_t
σ :	Den konstante volatiliteten til A_t
α :	Formua sin fordelingskoeffisient. Den del av portefølja som tilhøyrrer poliseholdaren
τ :	Tidspunkt for nedstenging av selskap, vert òg kalla tidspunkt for default, eller tidspunkt for likvidering av selskap

5.2 Nedstenging av selskapet

Dei fleste livsforsikringar inneheldt ei eksplisitt rentegaranti. Vi antar at partane teiknar avtalen ved tid $t = 0$. Avtalen har då ein varigheit på T år. Selskapet investerer i ei portefølje A_t som utviklar seg som ei geometrisk Brownsk røyrslé over desse åra. Det vil sei

$$dA_t = A_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (5.1)$$

W_t er her ein Wiener prosess under det reelle sannsynsmålet \mathbb{P} .

Poliseholdaren si initielle investering L_0 vil bli akkumulert med minimum ei førehandsbestemt garantirente g . Dette medfører at ved slutten av kontrakten vil poliseholdaren minimum få utbetalt $L_T = L_0 e^{gT}$. Vi antar at det eksisterer ein ekstern regulator som syt for at selskapet til ei kvar tid er solvent. Det medfører at $\forall t \in [0, T]$ har reguleringsmyndigheita oppsyn med at følgjande

ulikskap er opprettholdt:

$$A_t > \eta L_0 e^{gt} \equiv B_t, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5.2)$$

B_t vert referert til som *reguleringsgrensa*. Tolkinga av denne reguleringsgrensa er enkel: $L_0 e^{gt}$ er poliseholdaren si investering akkumulert med garantirenta g fram til tid t . B_t er då $L_0 e^{gt}$ multiplisert med ein førehandsbestemt konstant η , kalla *reguleringsparameteren*. Ved å leggje til dette reguleringselementet vil poliseholdaren sitt krav, gitt ved formel 5.22 på side 39, kun vere gyldig ved modningsdato dersom portefølja A_t til alle tider har vore tilstrekkeleg til å dekkje opp for framtidig skyldnad multiplisert med reguleringsparameteren.

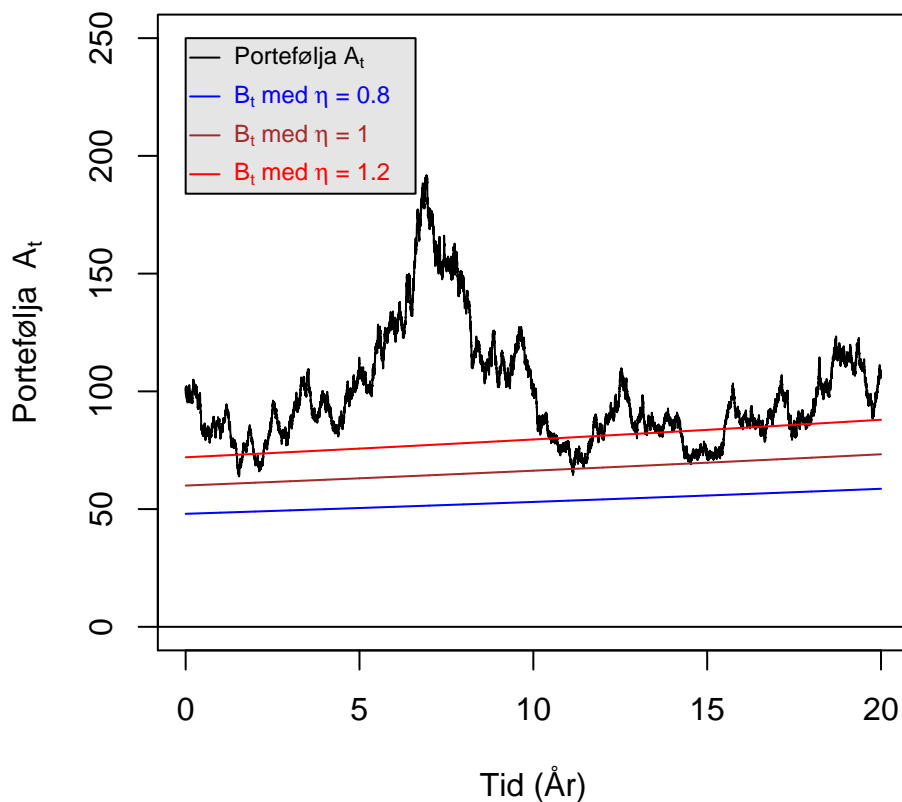
Dersom portefølja A_t ikkje har oppfylt reguleringskravet gitt ved formel 5.2 for ein $t \in [0, T]$ vil reguleringsmyndigheita straks stengje ned selskapet og fordele den resterande formua mellom akjionærane (polise- og kapitalholdar). Vi seier då at portefølja A_t går til *default*.

$\eta \geq 1$ svarer til at myndigheita krev at selskapet har ein «buffer» av ein viss storleik over sin skyldnad til poliseholdaren for at selskapet skal kunne fortsetje si drift. Dersom $A_t \leq B_t$ der $t \in [0, T]$ vil poliseholdaren få $L_\tau e^{r(T-\tau)}$. Kapitalholdaren vil ha rett på $(\eta - 1)L_\tau e^{r(T-\tau)}$ ved modningsdato T .

$\eta < 1$ svarer til ein situasjon der reguleringsmyndigheita tillater at selskapet har mellombelse og avgrensa «underskot» i forhold til sin skyldnad til poliseholdaren. Dersom det skulle skje ein barrierekrysning ved tid $t = \tau$, slik at $A_\tau = B_\tau$ når $\eta < 1$, vil ikkje selskapet kunne dekkje opp for poliseholdaren sitt krav ved tid T . Poliseholdaren overtek den resterande formua akkumulert til T , $B_\tau e^{r(T-\tau)}$. Kapitalholdaren står igjen med skjegget i postkassa utan å få utbetalt noko.

Grafisk vil utviklinga av portefølja A_t , og barriera B_t , sjå slik ut:

Portefølja A_t si utvikling



Figur 5.1: Portefølja A_t utviklar seg i 20 år med *konstant* volatilitet $\sigma = 0,2$. I dette plottet er det skissert 3 ulike barrierer (η mindre, lik og større enn 1). Dersom reguleringsmyndigheita set $\eta = 1,2$ eller $\eta = 1$ vert selskapet stengd ned, høvesvis etter ca. 1,5 og 11 år. Dersom $\eta = 0,8$ vert selskapet ikkje stengd ned.

Sett frå reguleringsmyndigheita sitt synspunkt har dei to mål med omsyn på å bestemme reguleringsparameteren η . Desse to måla er

- η må veljast slik at det vert eit akseptabelt lågt defaultsannsyn
- η må veljast slik at den verner poliseholdarane med tanke på forventa tap

Det første målet er ekvivalent med å maksimere η samstundes med at sannsynet for default er lågare enn ein gitt skranke ϵ . T.d. kan regulerings-

myndigheita setje $\mathbb{P}(\text{default}) \leq 0.04 = \epsilon$ som skranke for defaultsannsynet. Det andre målet er å verne poliseholdaren på den måten at dersom det skjer ein default, skal η vere så stor som mogleg, slik at poliseholdaren får minimert sitt forventa tap.

Matematisk vert dei to måla til reguleringsmyndigheita:

$$\max \{ \eta > 0 ; \mathbb{P}(\tau \leq T) \leq \epsilon \} \quad (5.3)$$

$$\min \left\{ \eta < 0 ; E[\min \{ \eta, 1 \} L_\tau e^{r(T-\tau)} | \tau \leq T] \geq \gamma L_T \right\} \quad (5.4)$$

Gitt nedstenging av selskapet, vil poliseholdaren få rabattbetalinga $\min(\eta, 1)L_\tau$. For at denne betalinga skal kunne samanliknast med den endelege utbetalinga ved tid T , må vi akkumulere utbetalinga med den risikofrie renta r fram til modningsdato T . Vi set $\gamma \in [0, 1]$, dette impliserer at reguleringsmyndigheita set ei avgrensing som i forventning gjer poliseholdaren ein γ -del av den endelege utbetalinga.

5.3 Defaultsannsyn

Dersom portefølja A_t kryssar barriera B_t i kontraktperioden (dvs. $t < T$), seier vi at portefølja går til *default*. Som tidlegare antatt utviklar selskapet si portefølje seg som ei geometrisk Brownsk røyrslle under sannsynsmålet \mathbb{P} :

$$dA_t = A_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (5.5)$$

Her er μ og σ høvesvis instantanrenta og volatiliteten til portefølja. W_t er ei standard Brownsk røyrslle.

Teorem 5.3.1: Defaultsannsynet

Sannsyn for default gitt at A_t utviklar seg som ei GBM er

$$\mathbb{P}(\tau \leq T) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta L_0}{A_0}\right) - \hat{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{A_0}{\eta L_0}\right)^{\frac{-2\hat{\mu}}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta L_0}{A_0}\right) + \hat{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (5.6)$$

der $\hat{\mu} = \mu - g - \frac{\sigma^2}{2}$

Bevis: Vi veit at portefølja utviklar seg som ei geometrisk Brownsk røyrslle. Dersom denne kryssar den eksponensielle barriera $B_t = \eta L_t$, vert selskapet stengd ned. For at selskapet skal kunne halde fram med

si verksemd i heile perioden T må $A_u > B_u$, $\forall u \in [t, T]$. Den eksakte løysinga til ei GBM finn vi i formel 3.7 på side 11. Ein avtale som ikkje går til *default* på $[t, T]$ vil dermed oppfylle følgjande ulikskap:

$$A_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(u-t) + \sigma(W_u - W_t)} > B_t e^{g(u-t)}, \quad \forall u \in [t, T] \quad (5.7)$$

vi tek logaritmen på begge sider og set igjen med følgjande ulikskap:

$$Z_u = (\mu - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(u-t) + \sigma(W_u - W_t) + \ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right) > 0 \quad (5.8)$$

Denne nye Brownske røyrsla kallar vi for Z_u . Ein passasje av A_u gjennom B_u er ekvivalent med ein passasje av Z_u gjennom 0. Vi definerer $\hat{\mu} = \mu - g - \frac{1}{2}\sigma^2$ og $Z_t = \ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right)$, slik at

$$Z_u = \hat{\mu}(u-t) + \sigma(W_u - W_t) + Z_t > 0 \quad (5.9)$$

Vi kallar vi prosessen $Z_0(t) = Z(t \wedge 1)$ for Z -prosessen absorbert i 0. Denne transformasjonen er særst nyttig då vi no har moglegheita til å finne tettleiken for første passasjetid τ for ei Brownsk røyrsla med drift $\hat{\mu}$ og volatilitet σ . Denne tettleiken kan vi òg finne ved *refleksjonsprinsippet* som vi gjorde i avsnitt 2.1. Vi vil i i dette beviset finne tettleiken på ein alternativ måte for å sjå samanhengen mellom tettleik for første passasjetid og tettleiken til ein absorbert prosess. Det gjer vi ved å la $H(\tau; z_t, t)$ vere fordelingsfunksjonen til første passasjetid τ . Vi hugsar at tettleiken til Z -prosessen med start i Z_0 og absorberande barriere i 0 vart definert i formel 4.18 på side 27. Vi nyttar no samanhengen om at sannsynet for at origo enno ikkje har vorte treft er lik sannsynet for at absorpsjon ikkje har skjedd. Vi kan då skrive

$$1 - H(\tau; z_0; 0) = \int_0^\infty f(z_\tau, \tau; z_0; 0) dz_\tau \quad (5.10)$$

Dette gjer oss eit uttrykk for $H(\tau; z_0; 0)$:

$$\begin{aligned} H(\tau; z_0; 0) &= 1 - \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_\tau - z_0 - \hat{\mu}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2} dz_\tau \\ &\quad + e^{-\frac{2z_0\hat{\mu}}{\sigma^2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_\tau - z_0 - \hat{\mu}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2} dz_\tau \end{aligned} \quad (5.11)$$

Vi nyttar så substitusjonen $x = \frac{z_\tau + z_0 - \hat{\mu}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, som medfører

$$dx = \frac{dz_\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\begin{aligned} H(\tau; z_0; 0) &= 1 - \int_{\frac{-z_0 - \hat{\mu}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + e^{-\frac{2z_0\hat{\mu}}{\sigma^2}} \int_{\frac{z_0 - \hat{\mu}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= N\left(\frac{-z_0 - \hat{\mu}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + e^{-\frac{2z_0\hat{\mu}}{\sigma^2}} N\left(\frac{-z_0 + \hat{\mu}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Tettleiken for første passasjetidspunkt τ finn ein då enkelt ved å derivere fordelingsfunksjonen $H(\tau; z_0; 0)$ gitt ved formel 5.12 med omsyn på τ :

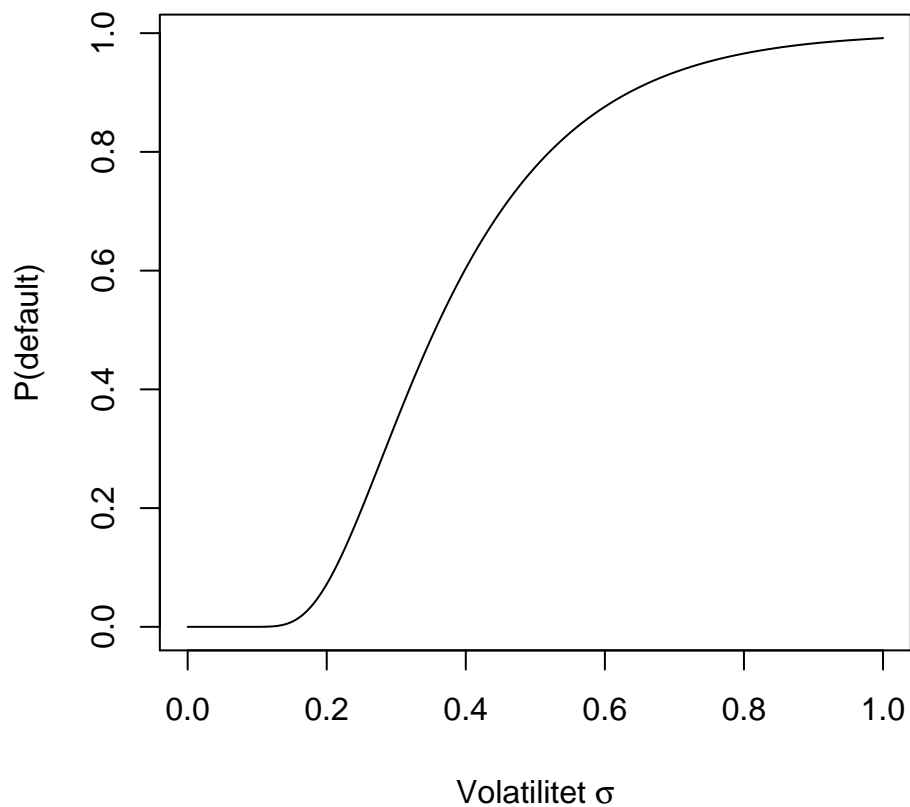
$$h(\tau; z_0, 0) = \frac{|z_0|}{\sigma\tau^{3/2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-z_0 - \hat{\mu}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2} \quad (5.13)$$

Dersom Z_t har drift $\hat{\mu}$ i retning bort fra si barriere, vil ikkje $h(\tau; z_0; 0)$ integrere seg til 1, og kallas difor ein *defekt sannsynstettleik*. For å finne sannsynet for at portefølja skal gå til *default* før utløpsdatoen T på kontrakten treng ein no berre å sjå på den kumulative fordelingsfunksjonen til τ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_z \leq T) &= H(\tau; z_0; 0) \\ &= N\left(\frac{-z_0 - \hat{\mu}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) + e^{-\frac{2z_0\hat{\mu}}{\sigma^2}} N\left(\frac{-z_0 + \hat{\mu}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Defaultsannsynet avhenger av volatiliteten σ . For å ta eit reellt døme set vi $A_0 = 100$, $L_0 = 40$, $\mu = 0,03$, $r = 0,02$, $T = 20$, $g = 0,01$ og $\eta = 0,5$. Vi ser så korleis defaultsannsynet utviklar seg som funksjon av volatiliteten σ

Portefølja sitt defaultsannsyn



Figur 5.2: Defaultsannsynet til portefølja er her vist som ein funksjon av volatiliteten σ

5.3.1 Tolkning av reguleringsparameteren

Formel 5.3 på side 32 og 5.4 på side 32 fortel reguleringsmyndigheita sine 2 mål for reguleringsparameteren η . Det første målet er å finne den η som gjer eit akseptabelt lågt defaultsannsyn. Dette vert gjort ved å finne den maksimale η som gjer at defaultsannsynet er mindre enn ei avgrensing ϵ .

Det andre målet er å sikre at poliseholdarane ved default ved tid τ minst får ein γ -del av den endelege utbetalinga L_T . Poliseholdarane får ved default

utbetalinga $\min(\eta, 1)L_\tau e^{r(T-\tau)}$ ved tid T . Reguleringsmyndigheita set så η til den minste verdien som oppfyller $E \left[\min(\eta, 1)L_\tau e^{r(T-\tau)} | \tau \leq T \right] \geq \gamma L_T$

Mål 1 På grunn av definisjonen av defaultsannsynet i teorem 5.3 på side 32 ser ein at $\mathbb{P}(\eta)$ er ein aukande funksjon. η^ϵ er difor den unike løysinga av

$$\mathbb{P}(\tau \leq T) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta^\epsilon L_0}{A_0}\right) - \hat{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{A_0}{\eta^\epsilon L_0}\right)^{\frac{-2\hat{\mu}}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta^\epsilon L_0}{A_0}\right) + \hat{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \epsilon \quad (5.15)$$

Når reguleringsmyndigheita set ein reguleringsparameter lågarare enn den kritiske verdien, dvs. $\eta \leq \eta^\epsilon$ vil defaultsannsynet bli mindre enn ϵ .

Mål 2 Reguleringsmyndigheita sitt andre mål, med tanke på reguleringsparameteren η , er å kontrollere den forventa utbetalinga til poliseholdaren, gitt default. I Chen og Bernard (2008, appendix A) er det utleia følgjande uttrykk for forventa utbetaling til poliseholdar, gitt default:

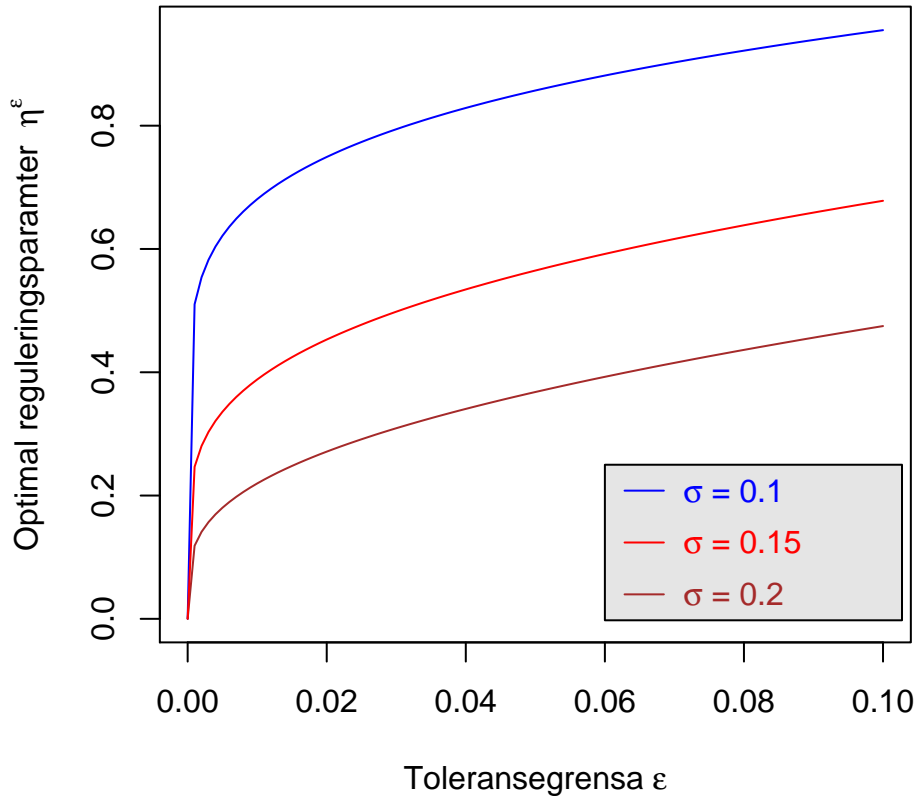
$$\begin{aligned} Y(\eta) &= E \left[(\eta \wedge 1) L_0 e^{g\tau} e^{r(T-\tau)} \mathbf{1}_{\tau < T} | \mathbb{P}(\tau \leq T) \right] \\ &= \frac{(\eta \wedge 1) L_0 e^{rT}}{\mathbb{P}(\tau < T)} \left\{ \left(\frac{\eta L_0}{A_0}\right)^{\frac{\hat{\mu}}{\sigma^2}} \left(\frac{A_0}{\eta L_0}\right)^{\frac{\sqrt{\hat{\mu}^2 + 2(r-g)\sigma^2}}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta L_0}{A_0}\right) - \sqrt{\hat{\mu}^2 + 2(r-g)\sigma^2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\eta L_0}{A_0}\right)^{\frac{\hat{\mu} + \sqrt{\hat{\mu}^2 + 2(r-g)\sigma^2}}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta L_0}{A_0}\right) + \sqrt{\hat{\mu}^2 + 2(r-g)\sigma^2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right\} \quad (5.16) \end{aligned}$$

Her er $\mathbb{P}(\tau \leq T)$ gitt ved teorem 5.3 på side 32. Målet til reguleringsmyndigheita vert her å sikre poliseholdaren ein γ -del av det garanterte beløpet ved default. η^γ er her brukt som notasjon for den kritiske η -verdien som oppfyller $Y(\eta) = \gamma L_T = \gamma L_0 e^{gT}$, der $Y(\eta)$ er gitt ved formel 5.16. Slik at $\eta \geq \eta^\gamma$ syt for at forventa utbetaling gitt default ikkje er mindre enn ein γ -del av den garanterte utbetalinga. Dette medfører at den forventa utbetalinga gitt default aukar når reguleringsparameteren η aukar.

Det er opplagt at reguleringsmyndigheita sine to mål er av motsatt interesse. For å ha eit lite defaultsannsyn trengs det ein låg verdi av η . Men ein låg verdi av η fører òg til ein lågare forventa rabattbetaling. Av denne grunn bør reguleringsmyndigheita velje ein η som ligg i området

$$\eta^\gamma \leq \eta \leq \eta^\epsilon \quad (5.17)$$

Optimal reguleringsparameter



Figur 5.3: Samspel mellom optimal reguleringsparameter η^ϵ og toleransegrensa ϵ for ulike volatilitetsverdier. Parametereverdier er her satt til $A_0 = 100$, $\alpha = 0,8$, $T = 20$, $g = 0,01$ og $\mu = 0,04$

Diverre for reguleringsmyndigheita er det vanskeleg å finne η -verdier som oppfyller formel 5.17 på førre side, og det er difor vanskeleg å trakte etter begge desse måla. Av denne grunn vil dei fleste reguleringsmyndigheiter fokusere på det første målet, gitt ved formel 5.3 på side 32.

5.3.2 Portefølja evaluert over ein uendeleg long kontraksperiode

Portefølja A_t utviklar seg som ei geometrisk Brownsk røyrslé. Substitusjonen vi gjorde i teorem 5.3 på side 32 viste at ein passasje av A_t gjennom B_t var

ekvivalent med ein passasje av Z_t gjennom 0. Z_t har sin absorpsjon i 0, men sidan $Z_0 > 0$ og $\hat{\mu} > 0$ har Z_t ein drift bort frå si barriere vil ikkje alle porteføljer A_t gå til default når $t \rightarrow \infty$.

Frå teorem 4.1.2 på side 22 har vi at sannsynstettleiken til tidspunktet for porteføljedefault er

$$f_{\tau_z}(t) = \frac{|Z_0|}{\sigma t^{3/2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Z_0 + \hat{\mu}t}{\sigma \sqrt{t}} \right)^2} \quad (5.18)$$

Sannsynet for default før T er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_z \leq T) &= \mathbb{P} \left\{ \inf_{0 \leq s \leq T} Z_s \leq 0 \right\} \\ &= F_{m(t)}(0) \\ &= N \left(\frac{-Z_0 - \hat{\mu}T}{\sigma \sqrt{T}} \right) + e^{-\frac{2\hat{\mu}Z_0}{\sigma^2}} \cdot N \left(\frac{-Z_0 + \hat{\mu}T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

$F_{m(t)}(0)$ er her den kumulative fordelingsfunksjonen til minimumsprosessen knytta til Z_t , som i formel 3.12 på side 13.

Ved å sjå nærare på grenseverdien til $\mathbb{P}(\tau_z \leq T)$ kan ein finne sannsynet for at ei portefølje vil gå til default når $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f_{\tau_z}(s) ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ N \left(\frac{-Z_0 - \hat{\mu}t}{\sigma \sqrt{t}} \right) + e^{-\frac{2\hat{\mu}Z_0}{\sigma^2}} \cdot N \left(\frac{-Z_0 + \hat{\mu}t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right\} \\ &= e^{-\frac{2Z_0\hat{\mu}}{\sigma^2}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.4 Poliseholdaren sitt krav

Som nemnt i innleiinga til dette kapittelet har poliseholdarane krav på den garanterte utbetalinga $L_T = L_0 e^{sT}$ ved kontrakten sin slutt. Det antas at det ikkje eksisterer ein ekstern garantist, slik at selskapet sitt løfte om den garanterte utbetalinga L_T kun kan holdast dersom $A_T \geq L_T$, ved tidspunkt T . Dersom $A_T < L_T$ og selskapet ikkje har vorte stengd ned av utanforståande regulatorar, vil poliseholdaren få utbetalt A_T og kapitalholdaren vil ikkje få nokon utbetaling ved tid T .

Poliseholdaren vil i tillegg til den garanterte utbetalinga få utbetalt ein bonus dersom marknadsverdien av selskapet si investering utviklar seg tilstrekkeleg positivt. Denne bonusutbetalinga vert som i Briys og Varenne (1995) og Grosen og Jørgensen (2002) satt til å vere:

$$\delta[\alpha A_T - L_T]^+ \quad (5.21)$$

Formel 5.21 viser at poliseholdaren får ein brøkdel δ av det beløpet hans eigen investering αA_T er over garantisummen L_T . Parameteren δ skildrar i kva grad poliseholdaren tek del i ei eventuell overskotsutbetaling, δ vert difor referert til som *deltakingskoeffisienten*. Koeffisienten δ vert viktig når ein skal studere forventa utbetaling til poliseholdaren. $\hat{\delta}$ svarer til den deltakingskoeffisienten som gjer at kontrakten vert rettferdig og kan såleis finnast ved martingalbetragtningar. Seinare i oppgåva vil det bli vist korleis ein bereknar δ i praksis.

Det totale utbetalingskravet til poliseholdaren ved ingen barriertreff, $\Psi_L(A_T)$ kan uttrykkast:

$$\Psi_L(A_T) = \begin{cases} A_T & \text{viss } A_T < L_T \\ L_T & \text{viss } L_T \leq A_T \leq \frac{L_T}{\alpha} \\ L_T + \delta[\alpha A_T - L_T] & \text{viss } A_T > \frac{L_T}{\alpha} \end{cases}$$

Utbetalingskravet kan òg skrivast på ein meir kompakt form:

$$\Psi_L(A_T) = \delta[\alpha A_T - L_T]^+ + L_T - [L_T - A_T]^+ \quad (5.22)$$

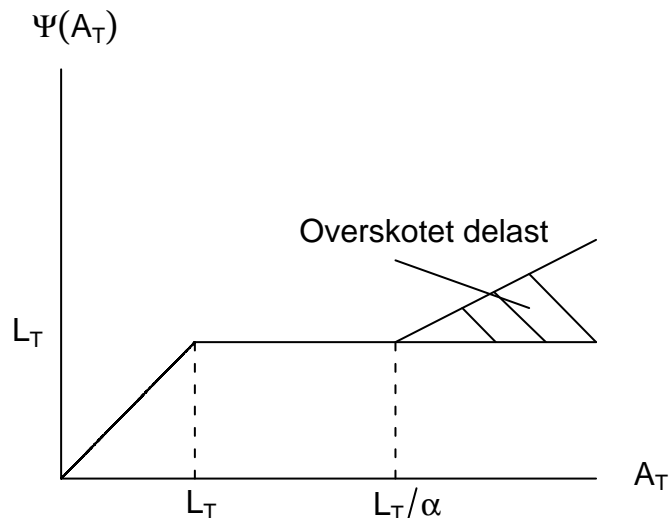
Vi ser at formel 5.22 består av tre ledd. Det første leddet har vi allereie omtalt som bonusutbetalinga poliseholdaren får. Dei to siste ledda svarer til ein fiksert utbetaling ved T , samt ein shorta put opsjon. Formel 5.22 skildrar poliseholdaren si utbetaling ved modningsdatoen T . Sjå figur 5.4 på neste side for illustrasjon av utbetalingskravet.

Dersom formel 5.22 var det einaste kravet til poliseholdaren kunne ein ved standard kalkuleringar for europeiske derivat enkelt rekna ut forventa utbetaling til poliseholdaren. Artiklane til Chen og Bernard (2008), Grosen og Jørgensen (2002) ser i tillegg til dette kravet på ein meir realistisk modell der dei legg på ei regulatorisk avgrensing. Poliseholdaren får kun utbetalt sitt krav gitt ved formel 5.22 dersom formel 5.2 på side 30 heldt, eller sagt på ein annan måte dersom defaulttidspunktet $\tau > T$.

Poliseholdaren har rett på ei rabattutbetaling dersom selskapet si portefølje A_t kryssar barriera B_t på intervallet $[0, T]$. Rabattutbetalinga avhenger av verdien på η . Utbetalingskravet til poliseholdaren ved barrieretreff skriv vi slik:

$$\Theta_L(\tau) = (\eta \wedge 1)L_0e^{\delta\tau} \quad (5.23)$$

Totalt forventa utbetalingskrav til poliseholdaren under det risikonøytrale målet Q , diskontert til tid t , vert kalla $V_L(A_T, t)$



Figur 5.4: Utbetalingskravet $\Psi(A_T)$ til poliseholdaren gitt at det ikkje skjer ein default i løpet av kontraktsperioden.

5.4.1 Deltakingskoeffisienten

I ei risikonøytral verd, der det vert antatt at r er den konstante og positive risikofrie renta, vil A_t utvikle seg etter:

$$dA_t = rA_t dt + \sigma A_t dW_t^Q \quad (5.24)$$

Her er W_t^Q ein Wiener prosess under det risikonøytrale sannsynsmålet Q .

Som nemnt tidlegare vil $\hat{\delta}$ svare til den koeffisienten som gjer at kontrakten vert rettferdig. Vi vidarefører ideen til Chen og Bernard (2008) om at vi vel ein δ som er mindre enn den rettferdige $\hat{\delta}$, slik at vi tek omsyn til ein tryggleiksmargin. Til dømes kan vi velje $\delta = 90\% \hat{\delta}$. Matematisk veljast $\hat{\delta}$ slik at følgjande likskap er oppfylt:

$$V_L(A_T, 0) = \mathbb{E}^Q \left[e^{-rT} \Psi_L(A_T) \mathbf{1}_{\tau \geq T} \right] + \mathbb{E}^Q \left[e^{-r\tau} \Theta_L(\tau) \cdot \mathbf{1}_{\tau < T} \right] = L_0$$

som koker ned til å finne nullpunktet til følgjande funksjon av $\hat{\delta}$:

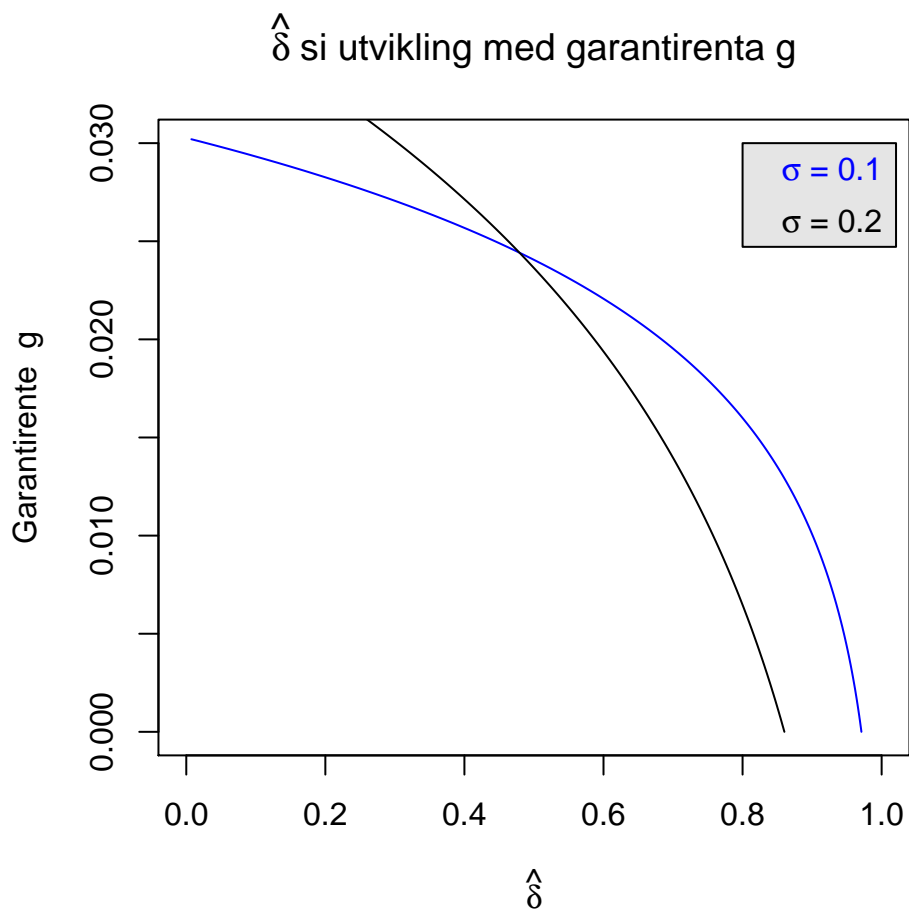
$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^Q \left[e^{-rT} \left(\hat{\delta} [\alpha A_T - L_T]^+ + L_T - [L_T - A_T]^+ \right) \mathbf{1}_{\tau \geq T} \right] \\ & + \mathbb{E}^Q \left[\mathbf{1}_{\tau < T} \cdot e^{-r\tau} \min(\eta, 1) L_0 e^{g\tau} \right] - L_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Forventinga i formel 5.25 vil bli utleia i seinare avsnitt. Nullpunktet til formel 5.25 lyt vi finne numerisk, til dømes ved metoden *Regula Falsi*. Eg har laga eit lite program i **R** som finn $\hat{\delta}$ numerisk, sjå avsnitt A.3. Nedanfor er ein figur som viser korleis $\hat{\delta}$ utviklar seg som følge av endring i garantirenta g .

5.5 Kapitalholdaren sitt krav

Dersom selskapet vert stengd ned av reguleringsmyndigheita før modningsdato T vil kapitalholdarane få utbetalt $\max(\eta - 1, 0) L_\tau e^{g\tau} e^{r(T-\tau)}$. Dersom $\eta < 1$ vil kapitalholdarane ikkje få utbetalt noko i det heile. Viss selskapet ikkje vert stengd ned før T vil dei ha rett på ein del av porteføljeverdien A_T . Kapitalholdaren sitt krav uttrykkast slik:

$$\Psi_E(A_T) = \begin{cases} 0 & \text{viss } A_T < L_T \\ A_T - L_T & \text{viss } L_T \leq A_T \leq \frac{L_T}{\alpha} \\ A_T - L_T - \delta[\alpha A_T - L_T] & \text{viss } A_T > \frac{L_T}{\alpha} \end{cases}$$



Figur 5.5: Denne figuren viser $\hat{\delta}$ si utvikling med garantirenta g . I dette dømet er dei andre parameterverdiane satt til $\alpha = 0,4$, $\eta = 0,4$, $A_0 = 100$, $r = 0,03$ og $T = 20$

Utbetalingskravet på ein meir kompakt form:

$$\Psi_E(A_T) = [A_T - L_T]^+ - \delta[\alpha A_T - L_T]^+ = [A_T - L_T]^+ - \delta\alpha[A_T - \frac{L_T}{\alpha}]^+ \quad (5.26)$$

Viss $\eta > 1$, og portefølja går til default, vil kapitalholdaren ha rett på ein rabattutbetaling $\Theta_E(\tau)$

$$\Theta_E(\tau) = (\eta - 1 \vee 0)L_0 e^{g\tau} \quad (5.27)$$

5.6 Forventa utbetaling til poliseholdar

Vi skriv krava til poliseholdarane og kapitalholdarane i ei risikonøytral verd ved tida t som

$$V_i(A_t, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^Q [\Psi_i(A_T) \cdot \mathbf{1}_{\tau > T}] + \mathbb{E}_t^Q [e^{-r(\tau-t)} \Theta_i(\tau) \mathbf{1}_{\tau < T}] \quad (5.28)$$

Her er $i = L$ utbetalinga til poliseholdarane, og $i = E$ er utbetalinga til kapitalholdarane. $\Psi_i(A_T)$ og $\Theta_i(\tau)$ er gitt ved formel 5.26 på førre side, 5.22 på side 39, 5.23 på side 40 og 5.27 på førre side

Vi er her i ei risikonøytral verd under sannsynsmålet \mathbb{Q} , og antar at A_t utviklar seg som ei geometrisk Brownsk røyrslé:

$$dA_t = A_t \cdot (r dt + \sigma dW_t^Q) \quad (5.29)$$

For poliseholdaren lyt vi finne forventinga gitt ved

$$V_L(A_T, t) = e^{rt} \mathbb{E}_t^Q \left(e^{-rT} \left[\delta [\alpha A_T - L_T]^+ + L_T - [L_T - A_T]^+ \right] \mathbf{1}_{\tau > T} + \mathbf{1}_{\tau < T} (\eta \wedge 1) L_0 e^{(g-r)\tau} \right)$$

Grosen og Jørgensen (2002) set opp fire likningar som tilsaman skildrar forventa utbetaling til poliseholdaren i ei risikonøytral verd. Desse likningane vil i det følgjande bli rettferdiggjort. Vi tek utgangspunkt i uttrykket for risikonøytral vurdering gitt ved formel 3.24 på side 16.

Teorem 5.6.1: Del a

Utbetalinga til poliseholdaren ved modningsdato gitt ingen barrieretreff, formel 5.22 på side 39, er samansatt av tre ledd: eit bonus call-opsjon element, ei fiksert utbetaling, eit shorta put-opsjon element, likning (i - iii). Dersom det skjer eit barrieretreff før modningsdatoen T vil det bli utbetalt eit beløp gitt ved formel 5.23 på side 40 akkumulert fram til modningsdatoen. Løysinga av desse likningane er gitt i Grosen og Jørgensen (2002), og vil i det følgjande bli verifisert.

$$(i) \quad e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^Q [\delta [\alpha A_T - L_T]^+ \cdot \mathbf{1}_{\tau > T}] \quad (5.30)$$

I Grosen og Jørgensen (2002) er svaret oppgitt til å vere:

$$\begin{aligned}
& e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^Q [\delta[\alpha A_T - L_T]^+ \mathbf{1}_{\tau > T}] \\
&= \delta \alpha \left\{ A_t N \left(\frac{\ln(\frac{A_t}{X}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\
&\quad - \frac{L_T}{\alpha} e^{-r(T-t)} \cdot N \left(\frac{\ln(\frac{A_t}{X}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
&\quad - \frac{A_t^{1 - \frac{2(r-g)}{\sigma^2}}}{B_t} \cdot \left[\frac{B_t^2}{A_t} N \left(\frac{\ln(\frac{B_t^2/A_t}{X}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{L_T}{\alpha} e^{-r(T-t)} N \left(\frac{\ln(\frac{B_t^2/A_t}{X}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \right\} \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Der $X = (B_T \vee \frac{L_T}{\alpha})$

Bevis: Portefølja utviklar seg som ei geometrisk Brownsk røyrslé. For at selskapet skal kunne fortsetje si verksemd må den geometrisk Brownske røyrsla ikkje krysse den eksponensielle barrieren $B_t = \eta L_t$. Matematisk må $A_u > B_u, \forall u \in [t, T]$. Dette svarer til

$$A_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(u-t) + \sigma(W_u - W_t)} > B_t e^{g(u-t)} \quad (5.32)$$

Vi tek logaritmen på begge sider, ryddar og får følgjande ulikskap:

$$Z_u = (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(u-t) + \sigma(W_u - W_t) + \ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right) > 0 \quad (5.33)$$

Denne nye Brownske røyrsla kallar vi for Z_u . Ein passasje av A_u gjennom B_u er ekvivalent med ein passasje av Z_u gjennom 0. Definerer $\hat{\mu} = r - g - \frac{1}{2}\sigma^2$ og $Z_t = \ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right)$, slik at vi har

$$Z_u = \hat{\mu}(u-t) + \sigma(W_u - W_t) + Z_t > 0 \quad (5.34)$$

Vi kan no skrive opp forventinga i formel 5.30 på førre side som

$$\begin{aligned}
& e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^Q [\delta[\alpha A_T - L_T]^+ \cdot \mathbf{1}_{\tau > T}] \\
&= e^{-r(T-t)} \cdot \int_{B_T}^{\infty} [\alpha A_T - L_T]^+ \cdot f_{B_u}(A_T, T; A_t, t) dA_T \\
&= \alpha e^{-r(T-t)} \cdot \int_{(B_T \vee \frac{L_T}{\alpha})}^{\infty} [B_t e^{z+g(T-t)} - \frac{L_T}{\alpha}] \cdot f_{B_u}(A_T, T; A_t, t) dA_T
\end{aligned}$$

Her er $f_{B_t}(A_T, T; A_t, t)$ tettleik for A_T med absorberande barriere i B_u , gitt at det ikkje har skjedd absorpsjon fram til tid t , $u \in (t, T)$. Vidare integrerer vi frå B_T sidan den forventa utbetalinga alltid vil vere større eller lik B_T , så lenge A ikkje har kryssa si barriere på intervallet $[t, T]$. Vi skriv dette om til at Z_u ikkje skal krysse si barriere i 0 på det same intervallet. Integrasjonsgrensene vert endra til:

$$\begin{aligned} A_T &> (B_T \vee \frac{L_T}{\alpha}) \\ A_t e^{Z_T + g(T-t) - Z_t} &> (B_T \vee \frac{L_T}{\alpha}) \\ Z_T &> \ln \left(\frac{(B_T \vee \frac{L_T}{\alpha})}{B_t} \right) - g(T-t) \equiv \chi \end{aligned}$$

Forventinga skriv vi no som

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^Q [\delta [\alpha A_T - L_T]^+ \mathbf{1}_{\tau > T}] = \\ \delta \alpha e^{-r(T-t)} \cdot \int_{\chi}^{\infty} [B_t e^{z+g(T-t)} - \frac{L_T}{\alpha}] \cdot f(z, T; Z_t, t) dz \end{aligned}$$

Tettleiken $f(z, T; Z_t, t)$ er gitt ved formel 4.18 på side 27 og ved hjelp av denne tettleiken kan vi skrive uttrykket som:

$$\begin{aligned} &= \delta \alpha e^{-r(T-t)} \cdot \int_{\chi}^{\infty} [B_t e^{z+g(T-t)} - \frac{L_T}{\alpha}] \times \\ &\left[\frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z - Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2} \right. \\ &\left. - e^{-\frac{2Z_t \hat{\mu}}{\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z + Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2} \right] dz \quad (5.35) \end{aligned}$$

Vi ser at det er ein moglegheit til at vi kan fullføre kvadratet i eksponenten. Vi multipliserer ut slik at vi får 4 ledd. Nyttar vidare samanhengen med at $g = r - \hat{\mu} - \frac{1}{2}\sigma^2$. Eksponenten i det første leddet vert då:

$$\begin{aligned}
& z + g(T-t) - \frac{1}{2\sigma^2(T-t)} [(z - Z_t) - \hat{\mu}(T-t)]^2 \\
&= (r - \hat{\mu} - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - \frac{1}{2\sigma^2(T-t)} \times \\
&\quad [-2z\sigma^2(T-t) + (z - Z_t)^2 - 2(z - Z_t)\hat{\mu}(T-t) + \hat{\mu}^2(T-t)^2] \\
&= r(T-t) - \frac{1}{2\sigma^2(T-t)} [2\hat{\mu}\sigma^2(T-t)^2 + \sigma^4(T-t)^2 - 2z\sigma^2(T-t) \\
&\quad + (z - Z_t)^2 - 2(z - Z_t)\hat{\mu}(T-t) + \hat{\mu}^2(T-t)^2]
\end{aligned}$$

Ser at vi får eit fullstendig kvadrat ved å leggje til og trekkje frå Z_t

$$\begin{aligned}
&= r(T-t) + Z_t \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2(T-t)} [(z - Z_t)^2 - 2(z - Z_t)(\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t) + (\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t)^2] \\
&= r(T-t) + Z_t - \frac{1}{2\sigma^2(T-t)} [z - Z_t - (\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t)]^2
\end{aligned}$$

Vi returnerer så til formel 5.35 på førre side, deler uttrykket opp i fire integral og fullfører kvadratet i eksponenten i alle 4 ledda slik at vi får fire integral:

$$\begin{aligned}
&= \delta \alpha e^{-r(T-t)} \left[\int_{\chi}^{\infty} B_t e^{r(T-t)+Z_t} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z - Z_t - (\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2} dz \right. \\
&\quad - \frac{L_T}{\alpha} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z + Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2} dz \\
&\quad - e^{-\frac{2Z_t \hat{\mu}}{\sigma^2}} \int_{\chi}^{\infty} B_t e^{r(T-t)+Z_t} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z + Z_t - (\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2} dz \\
&\quad \left. + \frac{L_T}{\alpha} e^{-\frac{2Z_t \hat{\mu}}{\sigma^2}} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z - Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2} dz \right]
\end{aligned}$$

Vi løser opp disse integrala ved å gjenkjenne dei som normaltettleikar, i tillegg nyttar vi samanhengen $B_t e^{-Z_t} = \frac{B_t^2}{A_t}$

$$\begin{aligned}
&= \delta \alpha e^{-r(T-t)} \left[A_t e^{r(T-t)} \cdot N\left(\frac{-\chi + Z_t + (\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right. \\
&\quad - \frac{L_T}{\alpha} \cdot N\left(\frac{-\chi + Z_t + \hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad - e^{-\frac{2Z_t \hat{\mu}}{\sigma^2}} \frac{B_t^2}{A_t} e^{r(T-t)} \cdot N\left(\frac{-\chi - Z_t + (\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad \left. + \frac{L_T}{\alpha} e^{-\frac{2Z_t \hat{\mu}}{\sigma^2}} \cdot N\left(\frac{-\chi - Z_t + \hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right]
\end{aligned}$$

For å kome fram til resultatet i Grosen og Jørgensen (2002) set vi inn for χ , løser opp $Z_t = \ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right)$ og multipliserer inn $e^{-r(T-t)}$

$$\begin{aligned}
&= \delta \alpha \left\{ A_t N\left(\frac{\ln\left(\frac{A_t}{X}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right. \\
&\quad - \frac{L_T}{\alpha} e^{-r(T-t)} \cdot N\left(\frac{\ln\left(\frac{A_t}{X}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad - \frac{A_t}{B_t} e^{-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} \cdot \left[\frac{B_t^2}{A_t} N\left(\frac{\ln\left(\frac{B_t^2/A_t}{X}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{L_T}{\alpha} e^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln\left(\frac{B_t^2/A_t}{X}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right] \right\} \quad (5.36)
\end{aligned}$$

Der $X = (B_T \vee \frac{L_T}{\alpha})$

Teorem 5.6.2: Del b

Det neste leddet i dette teoremet er

$$\begin{aligned}
&(ii) \quad e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^Q [L_T \cdot \mathbf{1}_{\tau > T}] \\
&= L_T e^{-r(T-t)} \left\{ N\left(\frac{\ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right) + (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{1 - \frac{2(r-g)}{\sigma^2}} \cdot N\left(\frac{\ln\left(\frac{B_t}{A_t}\right) + (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right\} \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Bevis: Vi gjer same variabelbytte som vi gjorde i *del a* av teoremet , formel 5.33 på side 44.

Ved å gjere dette kan vi skrive forventinga som

$$\begin{aligned}
 & e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [L_T \cdot \mathbf{1}_{\tau > T}] \\
 &= L_T e^{-r(T-t)} \cdot \int_{B_T} f_{B_u}(A_T, T; Z_t, t) dA_T \\
 &= L_T e^{-r(T-t)} \cdot \int_0^\infty f(z, T; Z_t, t) dz \\
 &= L_T e^{-r(T-t)} \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z - Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2} \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\frac{2\hat{\mu}Z_t}{\sigma^2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z + Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2} \right\} dz
 \end{aligned}$$

Vi kjenner igjen dette som to normalintegral, og har dermed vist del b av teoremet.

$$\begin{aligned}
 & e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [L_T \cdot \mathbf{1}_{\tau > T}] \\
 &= L_T e^{-r(T-t)} \left\{ N \left(\frac{\ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right) + (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{1 - \frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln\left(\frac{B_t}{A_t}\right) + (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right\} \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

Teorem 5.6.3: Del c

(iii)

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_t^Q \left[\mathbf{1}_{\tau > T} \cdot e^{-r(T-t)} [L_T - A_T]^+ \right] \\
 &= \mathbf{1}_{\eta < 1} e^{-r(T-t)} \int_{B_T}^{\infty} (L_T - A_T)^+ \cdot f_{B_u}(A_T, T; A_t, t) dA_T \\
 &= \mathbf{1}_{\eta < 1} \left\{ L_T e^{-r(T-t)} \right. \\
 & \left[N \left(\frac{\ln(\frac{L_T}{A_t}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - N \left(\frac{\ln(\frac{B_t}{A_t}) - (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \\
 & - A_t \times \\
 & \left[N \left(\frac{\ln(\frac{L_T}{A_t}) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - N \left(\frac{\ln(\frac{B_t}{A_t}) - (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \\
 & - \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{1 - \frac{2(r-g)}{\sigma^2}} \cdot \left[L_T e^{-r(T-t)} \left(N \left(\frac{\ln(\frac{L_T A_t}{B_t^2}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - N \left(\frac{\ln(\frac{A_t}{B_t}) - (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right) \right] \\
 & - \frac{B_t^2}{A_t} \cdot \left(N \left(\frac{\ln(\frac{L_T A_t}{B_t^2}) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\
 & \left. \left. - N \left(\frac{\ln(\frac{A_t}{B_t}) - (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Bevis: For å rettferdiggjere del c av teoremet nyttar vi her same variabelbyte som i del a, formel 5.33 på side 44. I tillegg set vi $\chi = \ln(\frac{L_T}{B_t}) - g(T-t)$. Vi legg òg merke til at dette utbetalingselementet kun er positivt når barrieren er under kurva L_u , med andre ord for $\eta < 1$. Vi får då:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_t^Q \left[\mathbf{1}_{\tau > T} \cdot e^{-r(T-t)} [L_T - A_T]^+ \right] \\
&= \mathbf{1}_{\eta < 1} e^{-r(T-t)} \int_{B_T}^{\infty} (L_T - A_T)^+ \cdot f_{B_u}(A_T, T; A_t, t) dA_T \\
&= \mathbf{1}_{\eta < 1} e^{-r(T-t)} \int_{B_T}^{L_T} (L_T - A_T) \cdot f_{B_u}(A_T, T; A_t, t) dA_T \\
&= \mathbf{1}_{\eta < 1} e^{-r(T-t)} \int_0^{\chi} (L_T - A_t e^{z+g(T-t)-Z_t}) \cdot f(z, T; Z_t, t) dz
\end{aligned}$$

Set inn for tettleiken $f(z, T; Z_t, t)$:

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{\eta < 1} \cdot e^{-r(T-t)} \int_0^{\chi} (L_T - B_t e^{z+g(T-t)}) \cdot \\
&\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot n\left(\frac{z - Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right. \\
&\left. - e^{-\frac{2\hat{\mu}Z_t}{\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot n\left(\frac{z - Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) dz \right] \\
&= \mathbf{1}_{\eta < 1} \cdot e^{-r(T-t)} \left\{ \int_0^{\chi} L_T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-Z_t-\hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2} dz \right. \\
&\left. - \int_0^{\chi} B_t e^{Z_t+r(T-t)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-Z_t-(\hat{\mu}+\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2} dz \right. \\
&\left. - e^{-\frac{2\hat{\mu}z}{\sigma^2}} \left[\int_0^{\chi} L_T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z+Z_t-\hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2} dz \right. \right. \\
&\left. \left. - \int_0^{\chi} B_t e^{r(T-t)-Z_t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z+Z_t-(\hat{\mu}+\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2} dz \right] \right\}
\end{aligned}$$

Vidare nyttast same framgangsmåte som i del a, fullfører kvadratet og kjenner igjen normalintegral. Det som er litt annleis her er integrasjonsgrensene. Vi har her både øvre og nedre integrasjonsgrense som

gjer oss verdiar, dermed får vi $N(\cdot) - N(\cdot)$.

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{\eta < 1} \cdot e^{-r(T-t)} \left\{ L_T \left[N\left(\frac{\chi - Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - N\left(\frac{-Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right] \right. \\
&\quad - A_t e^{r(T-t)} \times \\
&\quad \left[N\left(\frac{\chi - Z_t - (\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - N\left(\frac{-Z_t - (\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right] \\
&\quad - e^{-\frac{2\hat{\mu}Z}{\sigma^2}} \left(L_T \left[N\left(\frac{\chi + Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - N\left(\frac{Z_t - \hat{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right] \right) \\
&\quad - e^{-r(T-t)} \frac{B_t^2}{A_t} \times \\
&\quad \left. \left[N\left(\frac{\chi + Z_t - (\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - N\left(\frac{Z_t - (\hat{\mu} + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Då gjenstår det berre å reinskripe dei ulike ledda for å få det ynska resultatet:

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{\eta < 1} \cdot \left\{ e^{-r(T-t)} L_T \times \left[\right. \right. \\
&\quad N\left(\frac{\ln\left(\frac{L_T}{A_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - N\left(\frac{\ln\left(\frac{B_t}{A_t}\right) - (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \left. \right] \\
&\quad - A_t \times \left[\right. \\
&\quad N\left(\frac{\ln\left(\frac{L_T}{A_t}\right) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - N\left(\frac{\ln\left(\frac{B_t}{A_t}\right) - (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \left. \right] \\
&\quad - \left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{(1 - \frac{2(r-g)}{\sigma^2})} \left[L_T e^{-r(T-t)} \left[N\left(\frac{\ln\left(\frac{L_T A_t}{B_t^2}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - N\left(\frac{\ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right) - (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right] \right] \\
&\quad - \frac{B_t^2}{A_t} \times \left[N\left(\frac{\ln\left(\frac{L_T A_t}{B_t^2}\right) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right. \\
&\quad \left. - N\left(\frac{\ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right) - (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right] \left. \right\} \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Teorem 5.6.4: Del d

Det fjerde og siste leddet av teoremet er forventet utbetaling til poliseholderen dersom selskapet vert stengt ned. Dette leddet svarer til porteføljeverdien ved default, diskontert til tid t . Likskapen som skal visast er:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t^Q \left[\mathbf{1}_{\tau < T} \cdot e^{-r(\tau-t)} (\eta \wedge 1) L_0 e^{g\tau} \right] \\ &= \int_t^T e^{-r(\tau-t)} (\eta \wedge 1) L_0 e^{g\tau} \cdot f(\tau; Z_t, t) \, d\tau \\ &= \frac{(\eta \wedge 1)}{\eta} A_t \left\{ N \left(\frac{-\ln(\frac{A_t}{B_t}) - (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{-1 - \frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N \left(\frac{-\ln(\frac{A_t}{B_t}) + (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right\} \end{aligned}$$

Bevis: Denne verifiseringa nyttar seg av sannsynstettleiken til treffpunktet τ , $f(\tau; Z_t, t)$, som vi utleia ved refleksjonsprinsippet avsnitt 4.1 tidlegare i oppgåva. Vi tek no i bruk formel 4.8 på side 22:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t^Q \left[\mathbf{1}_{\tau < T} \cdot e^{-r(\tau-t)} (\eta \wedge 1) L_0 e^{g\tau} \right] \\ &= \int_t^T e^{-r(\tau-t)} (\eta \wedge 1) L_0 e^{g\tau} \cdot f(\tau; Z_t, t) \, d\tau \\ &= (\eta \wedge 1) \int_t^T e^{-r(\tau-t)} L_t e^{g(\tau-t)} \frac{Z_t}{\sigma(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Z_t + \hat{\mu}(\tau-t)}{\sigma\sqrt{\tau-t}} \right)^2} \, d\tau \end{aligned}$$

Vi nyttar samanhengen med at $r = \hat{\mu} + g + \frac{1}{2}\sigma^2$. Vi starter så med å manipulere uttrykket i eksponenten:

$$\begin{aligned} &= (\eta \wedge 1) L_t \times \\ & \int_t^T \frac{Z_t}{\sigma(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\sigma^2)(\tau-t) - \frac{1}{2\sigma^2(\tau-t)} (Z_t^2 + 2Z_t\hat{\mu}(\tau-t) + \hat{\mu}^2(\tau-t)^2)} \, d\tau \\ &= (\eta \wedge 1) L_t \times \\ & \int_t^T \frac{Z_t}{\sigma(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(\tau-t)} (2\hat{\mu}\sigma^2(\tau-t)^2 + \sigma^4(\tau-t)^2 + Z_t^2 + 2Z_t\hat{\mu}(\tau-t) + \hat{\mu}^2(\tau-t)^2)} \, d\tau \end{aligned}$$

Vi ser at vi mangler Z_t for å få eit fullstendig kvadrat i eksponenten, dermed legg vi til og trekk fra Z_t her:

$$\begin{aligned}
 &= (\eta \wedge 1)L_t \times \\
 &\int_t^T \frac{Z_t}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau-t)^{\frac{3}{2}}}} e^{Z_t - \frac{1}{2\sigma^2(\tau-t)}(2Z_t\sigma^2(\tau-t) + 2\hat{\mu}\sigma^2(\tau-t)^2 + \sigma^4(\tau-t)^2 + Z_t^2 + 2Z_t\hat{\mu}(\tau-t) + \hat{\mu}^2(\tau-t)^2)} d\tau \\
 &= (\eta \wedge 1)L_t \int_t^T e^{Z_t} \frac{Z_t}{\sigma(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z_t + (\hat{\mu} + \sigma^2)(\tau-t)}{\sigma\sqrt{\tau-t}}\right)^2} d\tau \\
 &= (\eta \wedge 1)L_t \frac{A_t}{B_t} \int_t^T \underbrace{f^{\hat{\mu} + \sigma^2}(\tau; Z_t, t)}_{\text{Tettleik med } \hat{\mu} \Rightarrow \hat{\mu} + \sigma^2} d\tau
 \end{aligned}$$

Vi ser at vi får eit uttrykk som integrerer over sannsynstettleiken for første passasjetid τ for ei BM som utviklar seg med drift $\hat{\mu} + \sigma^2 = r - g + \frac{1}{2}\sigma^2$. Vi kjenner samanhengen med at integralet over tettleik for absorpsjon vert dei 2 normalintegrala:

$$\begin{aligned}
 &\int_t^T e^{-r(\tau-t)} (\eta \wedge 1) L_0 e^{g\tau} \cdot f(\tau; Z_t, t) d\tau \\
 &= \frac{(\eta \wedge 1)}{\eta} A_t \left\{ N\left(\frac{-\ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right) - (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{A_t}{B_t}\right)^{-1 - \frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N\left(\frac{-\ln\left(\frac{A_t}{B_t}\right) + (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \right\} \quad (5.40)
 \end{aligned}$$

For å oppsummere har vi no funne $V_L(A_T, t)$, gitt ved formel 5.28 på side 43

$$\begin{aligned}
V_L(A_T, t) &= \mathbb{E}_t^Q \left(e^{-r(T-t)} \Psi_L(A_T) \mathbf{1}_{\tau > T} \right) + \mathbb{E}_t^Q \left(e^{-r(\tau-t)} \Theta_L(\tau) \mathbf{1}_{\tau < T} \right) \\
&= \delta \alpha \left\{ A_t N \left(\frac{\ln(\frac{A_t}{X}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\
&\quad - \frac{L_T}{\alpha} e^{-r(T-t)} \cdot N \left(\frac{\ln(\frac{A_t}{X}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
&\quad - \frac{A_t^{1-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}}}{B_t} \cdot \left[\frac{B_t^2}{A_t} N \left(\frac{\ln(\frac{B_t^2/A_t}{X})(r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{L_T}{\alpha} e^{-r(T-t)} N \left(\frac{\ln(\frac{B_t^2/A_t}{X})(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \right\} \\
&\quad + L_T e^{-r(T-t)} \left\{ N \left(\frac{\ln(\frac{A_t}{B_t}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{A_t^{1-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}}}{B_t} \cdot N \left(\frac{\ln(\frac{B_t}{A_t})(r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right\} \\
&\quad - \mathbf{1}_{\eta < 1} \cdot \left\{ e^{-r(T-t)} L_T \right. \\
&\quad \left[N \left(\frac{\ln(\frac{L_T}{A_t}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - N \left(\frac{\ln(\frac{B_t}{A_t}) - (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \\
&\quad - A_t \left[N \left(\frac{\ln(\frac{L_T}{A_t}) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - N \left(\frac{\ln(\frac{B_t}{A_t}) - (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \\
&\quad - \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{(1-\frac{2(r-g)}{\sigma^2})} \left[L_T e^{-r(T-t)} \right. \\
&\quad \left. \left[N \left(\frac{\ln(\frac{L_T A_t}{B_t^2}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - N \left(\frac{\ln(\frac{A_t}{B_t}) - (r - g - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \right] \\
&\quad - \frac{B_t^2}{A_t} \left[\right. \\
&\quad \left. N \left(\frac{\ln(\frac{L_T A_t}{B_t^2}) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - N \left(\frac{\ln(\frac{A_t}{B_t}) - (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \left. \right\} \\
&\quad + \frac{(\eta \wedge 1)}{\eta} A_t \left\{ N \left(\frac{-\ln(\frac{A_t}{B_t}) - (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{-1-\frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N \left(\frac{-\ln(\frac{A_t}{B_t}) + (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right\} \tag{5.41}
\end{aligned}$$

5.7 Forventa utbetaling til kapitalholdar

Ved ingen barrieretreff har kapitalholdaren rett på utbetalinga $\Psi_E(A_T)$ gitt ved formel 5.26 på side 42. Ved barrieretreff på intervallet $[0, T]$ har kapitalholdaren rett på ein rabattutbetaling gitt ved formel 5.27 på side 42. Oppsummert kan vi skrive kapitalholdaren si totale forventa utbetaling i ei risikonøytral verd ved tid t som

$$\begin{aligned} V_E(A_T, t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\tau > T} \cdot e^{-r(T-t)} [A_T - L_T]^+ \right] \\ &\quad - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\tau > T} \cdot e^{-r(T-t)} \delta [\alpha A_T - L_T]^+ \right] \\ &\quad + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\tau < T} \cdot e^{-r(T-t)} \mathbf{1}_{\eta > 1} (\eta - 1) L_0 e^{\delta T} \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

Vi ser at dei to første ledda er differansen mellom to call-opsjonar. Vi legg òg merke til at det andre leddet er nøyaktig det same leddet som vi viste i teorem 5.6.1 på side 43. Det første og andre leddet i formel 5.42 er det same som å vise teorem 5.6.1 på side 43. I det andre leddet set ein $\delta = \alpha = 1$. Det tredje leddet, rabattutbetalinga, vert omtrent det same som det vi viste i teorem 5.6.4 på side 52. Diforer det berre resultatata som vert presentert her:

Teorem 5.7.1: Kapitalholdaren si forventa utbetaling

Kapitalholdaren si forventa utbetaling i ei risikonøytral verd ved tida t kan uttrykkast ved tre likningar gitt ved formel 5.42 og har løysinga:

(i)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\tau > T} \cdot e^{-r(T-t)} [A_T - L_T]^+ \right] \\ &A_t N \left(\frac{\ln\left(\frac{A_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\ &- \frac{L_T}{\alpha} e^{-r(T-t)} \cdot N \left(\frac{\ln\left(\frac{A_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\ &- \frac{A_t}{B_t} 1^{-\frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}} \cdot \left[\frac{B_t^2}{A_t} N \left(\frac{\ln\left(\frac{B_t^2/A_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\ &\left. - \frac{L_T}{\alpha} e^{-r(T-t)} N \left(\frac{\ln\left(\frac{B_t^2/A_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \} \end{aligned}$$

Her er $K = \eta(L_T \vee \frac{L_T}{\eta})$

(ii) Sjä teorem 5.6.1 på side 43

(iii)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q \left[\mathbf{1}_{\tau > T} \cdot e^{-r(T-t)} \mathbf{1}(\eta > 1) (\eta - 1) L_0 e^{g\tau} \right] = \\ \frac{(\eta - 1 \vee 0)}{\eta} A_t \left\{ N \left(\frac{-\ln(\frac{A_t}{B_t}) - (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{A_t}{B_t} \right)^{-1 - \frac{2(r-g)}{\sigma^2}} N \left(\frac{-\ln(\frac{A_t}{B_t}) + (r - g + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right\} \end{aligned}$$

6

Utvida modellar

I det komande vil det bli presentert ein del ulike variantar av rammeverket som vart skildra i kapittel 5.

6.1 Monte Carlo simulering

For å kunne kome fram til forventa avkastning til polise- og kapitalholdar er det i ein del tilfeller naudsynt å nytte Monte Carlo simulering. Monte Carlo simulering er etterkvart vorte eit mykje brukt og nyttig verktøy i finansverda. Det vert tatt i bruk for å handsame situasjonar som er så komplekse at dei ikkje lar seg løyse analytisk, eller fordi det ikkje fins nokon «closed form solution». Nokon bruksområder er realopsjonar, value-at-risk og generell modellering av situasjonar med usikkerheit. Monte Carlo simulering vart for første gong nytta i 1930 av Enrico Fermi, innan faget fysikk for å berekne nøytrona sine eigenskapar, i 1977 vart det for første gong brukt til å prise opsjonar.

Eit finansielt derivat prisast utifrå korleis det underliggjande aktivum utviklar seg. Ved å nytte Monte Carlo simulering tek vi ein føresetnad om sannsynsfordelinga til prisane og simulerer prisbaner utifrå dette. Opsjonsprisane bereknast vidare ved hjelp av risikonøytral verdsetjing.

For å simulere ei prisbane over ein periode T , deler ein perioden opp i fleire delintervaller med lengd h . Gitt at ein aksjepris ved start er verd S_0 og utviklar seg som ei GBM, (sjå formel 3.5 på side 11 og 3.7 på side 11). Aksjeprisen på tidspunktet h , $2h$ og nh kan då simulerast ved

$$\begin{aligned} S_h &= S_0 \cdot e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot h + \sigma \epsilon_1 \sqrt{h}} \\ S_{2h} &= S_{2h} \cdot e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot h + \sigma \epsilon_2 \sqrt{h}} \\ S_{nh} &= S_{(n-1)h} \cdot e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot h + \sigma \epsilon_n \sqrt{h}} \end{aligned}$$

Her er $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Å verdsetje ein opsjon basert på Monte Carlo metoden er ein prosess med fleire steg:

- 1 Simuler ei prisbane, basert på S_h til S_{nh} .
- 2 Berekne utbetaling på det aktuelle tidspunkt i høve til derivatet sine spesifikasjonar. Deretter diskonterer ein utbetalingsverdien med den risikofrie renta r til dagens verdi. Ein har då funne opsjonsverdien ved *ein* simulering
- 3 Gjenta steg 1 og 2 m gongar. Jo fleire simuleringar, desto betre estimat.

Utbetaling ved tid T er ein funksjon av aksjeprisen S og representerast ved $V(S_T, T)$. Monte Carlo prisen ved tid 0 er då gitt ved

$$\bar{V}(S_0, 0) = \frac{1}{m} e^{-rT} \sum_{i=1}^m V(S_T, T)^i \quad (6.1)$$

Her estimerer vi m prisbaner som gjer oss ei forventa utbetaling i ei risikofri verd. For å finne dagens verdi av denne utbetalinga diskonterer vi med den risikofrie renta r .

6.1.1 Monte Carlo simuleringa si grannsemd

Eit viktig punkt når ein gjer Monte Carlo simulering er å finne eit uttrykk for kor godt estimat ein får. Det seier seg sjølv at jo fleire simuleringar ein gjer, dess meir grannsam estimat får ein. Men den datakraften som krevjast for sær mange simuleringar aukar raskt, og går på kostnad av kor raskt ein kan kome fram til estimatet. Standardavviket til ein enkelt Monte Carlo simulering

kan uttrykkast ved

$$q_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (V(S_0,0)^i - \bar{V}(S_0,0))^2}{m-1}} \quad (6.2)$$

der $\bar{V}(S_0,0)$ er uttrykk for middelværdien til alle simuleringane. $V(S_0,0)^i$ er prisverdien frå prisbane i . Standardavviket til heile simuleringa er då gitt ved:

$$q_m = \frac{q_v}{\sqrt{m}} \quad (6.3)$$

Vidare kan ein lage eit 95 % konfidensintervall for opsjonsprisen ved

$$\bar{V}(S_0,0) - 1,96 \cdot \frac{q_v}{\sqrt{m}} < V < \bar{V}(S_0,0) + 1,96 \cdot \frac{q_v}{\sqrt{m}} \quad (6.4)$$

Vi ser at usikkerheita på estimatet er omvendt proporsjonal med rota av talet på simuleringar. Dersom vi ynskjer å doble grannsemda må vi difor firedoble talet på simuleringar. Det fins òg fleire variansreducerande teknikkar som gjer at ein kan få estimat med fornuftig grannsemd utan at det er like tidkrevjande som i metoden skildra her. Desse teknikkane kjem vi ikkje nærare inn på i denne oppgåva.

6.2 Statisk og dynamisk modell

Vi ynskjer å studere verknaden på defaultsannsynet og forventet overskot til kapital- og poliseholdar ved at reguleringsmyndigheita kjem inn og kontrollerer selskapet. Kontrollen skjer periodevis ved at kontrollorganet bereknar om defaultsannsynet er lågare enn ei toleransegrense ϵ . Vi studerer dette ved å samanlikne to modellar, ein statisk, og ein dynamisk modell. I den statiske modellen nyttar selskapet den same volatiliteten gjennom heile kontraktsperioden. I den dynamiske modellen antar vi at kontrollorganet regulerer selskapet mellom fleire ulike volatilitetsnivå, alt etter kva konkurs-risiko (defaultsannsyn) selskapet har ved ein kontroll.

Mykje av den tidlegare litteraturen innanfor dette fagfeltet har antatt at forsikringsselskap nyttar risikostyring med *konstant* volatilitet. For ein langsiktig kontrakt som ei livsforsikring er det ikkje realistisk å anta at forsikringsselskapa nyttar same volatiliteten i heile kontraktsperioden. Det vil vere meir realistisk å anta at selskapa har ein investeringsstrategi og skiftar mellom ulike

volatilitetsnivå i ulike tider. I tillegg vil kontrollorganet regulere selskapet mellom ulike volatilitetsnivå, alt etter kva konkurs-risiko (defaultsannsyn) selskapet har ved ein kontroll.

I dette kapittelet studerer vi effekten av ein meir *dynamisk* modell. Den dynamiske modellen antar at selskap vekslar mellom fleire ulike volatilitetsnivå i løpet av kontraktsperioden. Vi antar vidare at selskapa nyttar det mest volatile porteføljealternativet så lenge reguleringsmyndigheita tillet dette. Kontrollorganet gjennomfører periodiske kontrollar på at defaultsannsynet er over toleransegrensa ϵ . Dersom selskapet ved eit høve har eit defaultsannsyn under ϵ vert selskapet tvungen til å velje det minst volatile porteføljealternativet. Dette vil sei at dei må rekapitulere portefølja si slik at volatiliteten vert redusert. Dette er ein forenkla modell av røynda, men skal kunne gje eit reelt inntrykk av korleis reguleringsmyndigheita kjem til å påverke defaultsannsynet og forventa overskot til kapital- og poliseholdar.

Innføring av Solvency II-regelverket skal medføre større vern overfor poliseholdarane enn tidlegare. Dette har skapt diskusjonar om at selskap kan bli tvungen til å investere veldig konservativt. Denne tvangen kan føre med seg at selskap ikkje lenger vil ha moglegheit til å få høg fortjeneste på sine investeringar. For å undersøkje om dette er tilfellet ser vi på ein statisk modell (med konstant volatilitet) der selskapet si portefølje A_t følgjer ei GBM med fast drift μ , og fast volatilitet σ . Vidare ser vi på ein dynamisk modell der reguleringsmyndigheita har moglegheit til å regulere selskapet mellom fleire ulike gradar av risiko. Chen og Bernard (2008) gjer det same, men i denne artikkelen vert det kun veksla mellom 2 ulike risikoalternativ (høg - låg volatilitet).

For å måle forventa overskot til poliseholdar nyttar vi forholdstalet κ_L , mellom initiell investering αA_0 og forventa utbetaling ved tid T , gitt ved formel 6.5.

$$\kappa_L = \frac{\text{Forventa utbetaling til poliseholdar} - \alpha \cdot A_0}{\alpha \cdot A_0} \quad (6.5)$$

For å måle overskotet til kapitalholdar nyttar vi κ_E , gitt ved formel 6.6.

$$\kappa_E = \frac{\text{Forventa utbetaling til kapitalholdar} - (1 - \alpha) \cdot A_0}{(1 - \alpha) \cdot A_0} \quad (6.6)$$

Eksempel 6.2.1: Chen sitt døme

I dette første dømet vil vi som i Chen og Bernard (2008) kun sjå på to ulike volatilitetsalternativ. Vi handsamar statisk og dynamisk modell og analyserer skilnadane mellom desse. Den statiske modellen ser på ein modell med konstant volatilitet σ . Portefølja utviklar seg på $[0, T]$. Dersom $A_t < B_t$ på intervallet $[0, T]$ går portefølja til default. Den dynamiske modellen skal gjenspegle at reguleringsmyndigheita kontrollerer at selskapet ikkje investerer i for risikofylte porteføljer. Den dynamiske modellen vert så ei veksling mellom dei to statiske modellane.

Reguleringsmyndigheita kontrollerer årleg at $\mathbb{P}(\text{default før } T) < \epsilon = 0,04$ er tilfredstilt både i statisk og dynamisk modell. Dersom kravet ikkje er oppfylt vert selskapet i den dynamiske modellen tvunget til å investere i den minst risikable portefølja ($\sigma = 0,1$). Deltakingskoeffisienten $\delta = 0,9\hat{\delta}$ finn vi ved å leite nullpunkt i formel 5.25 på side 41 ved bruk av koden i avsnitt A.3. Vi antar at $\hat{\delta}$ i den dynamiske modellen vert rekna ut på førehand der ein nyttar den initielle σ i utrekninga.

I dømet nyttar vi følgjande verdiar: $T = 20$, $\eta = 0,5$, $\alpha = 0,5$, $r = 0,03$, $g = 0,01$ og $A_0 = 100$. Vi gjer 100 000 simuleringar med koden lagt ved i avsnitt A.4 og får følgjande resultat:

Modell	σ_i	μ_i	$\hat{\delta}$	$\mathbb{P}(\text{default})$	κ_L	κ_E
Statisk	0,1	0,04	0,813	$3 \cdot 10^{-3} \%$	1,063	1,392
Dynamisk	0,1	0,04	0,813	1,06 %	1,475	1,837
					($\uparrow 38,76 \%$)	($\uparrow 31,97 \%$)
Statisk	0,2	0,05	0,712	5,55 %	1,362	2,096
Dynamisk	0,2	0,05	0,712	1,20 %	1,324	2,009
					($\downarrow 2,79 \%$)	($\downarrow 4,15 \%$)

Merk at valet av μ og σ leiar til same sharp-ratio $\frac{\mu-r}{\sigma}$. Talet i parentes er endringa ved innføring av ein dynamisk modell. 100 000 simuleringar gjer eit standardavvik på utbetalinga til poliseholdar på $q_m(A_{T_p}) = 0,353$ og kapitalholdar $q_{A_{T_k}} = 0,538$. Dette medfører at overskotet κ_L til poliseholdarane vil i den dynamiske modellen ha eit standardavvik på $SD(\kappa_L) = 0,0035$. Standardavviket til kapitalholdarane sitt overskot, κ_E , er $SD(\kappa_E) = 0,0108$. Dette er tilstrekkeleg grannsamnt til å kunne dra fornuftige konklusjonar

ut frå simuleringsresultata. Vi kan t.d. sjå på 95 %-konfidensintervall for κ_E og κ_L i den dynamiske modellen med initiell $\sigma = 0,1$:

$$1,462 < \kappa_L < 1,489$$

$$1,816 < \kappa_E < 1,858$$

Ser vi på modellen med initiell $\sigma = 0,2$, finn vi følgjande 95 %-konfidensintervall

$$1,311 < \kappa_L < 1,337$$

$$1,985 < \kappa_E < 2,033$$

For å få betre estimat enn dette må det enno fleire simuleringar til. Dette er allikvel ein god nok peikepinn på korleis ein dynamisk modell påverkar forventa overskot og defaultsannsyn.

Innføringa av ein dynamisk modell på ei portefølje som opprinneleg følgjer $\sigma = 0,1$ fører til at poliseholdare og kapitalholdare får ein kraftig oppgang i forventa overskot (ca. 39 % og 32 %). Samstundes vert sannsynet for default holdt på eit respektabelt lågt nivå (ca. 1 %). For porteføljer som opprinneleg følgjer ein statisk modell med $\sigma = 0,2$ er verknaden av innføring av ein dynamisk modell, at polise og kapitalholdarane opprettheldt relativt høge overskot, medan defaultsannsynet vert pressa ned.

6.2.1 I lys av Solvency II

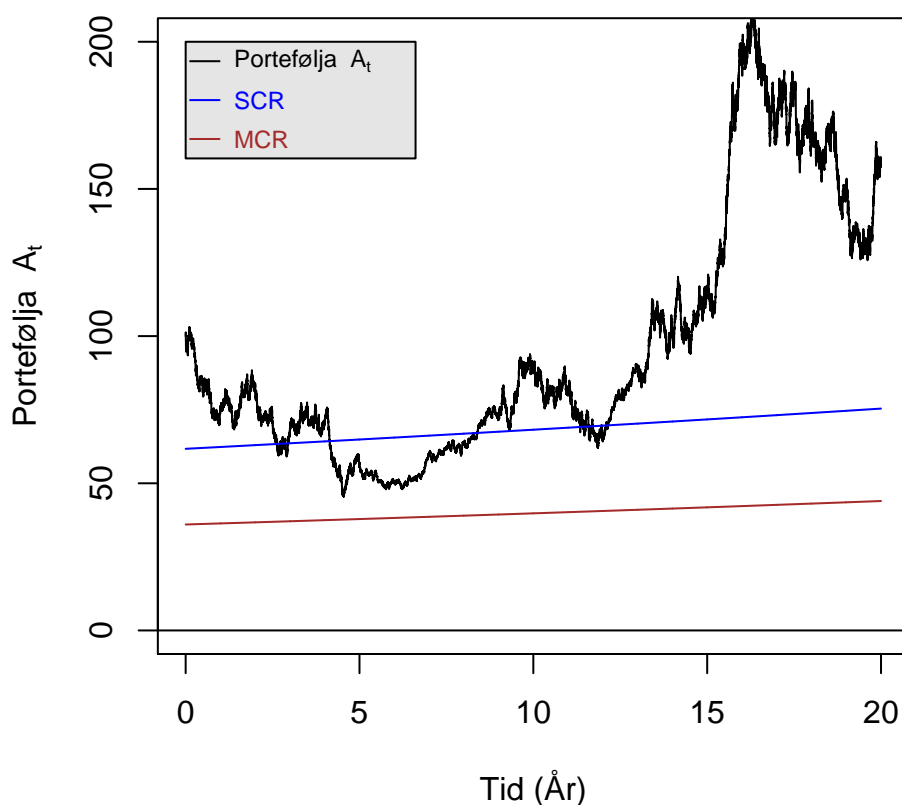
Som nemnd i avsnitt 2.1 vil innføringa av Solvency II medføre at selskapa får to kapitalgrenser å forholde seg til: Ei absolutt minimumsgrense, *MCR* (Minimum capital requirement) og ei solvensgrense *SCR*, (Solvency capital requirement). Dersom selskapet skal kunne fortsetje si drift må kapitalen på ei kvar tid vere over *MCR*. Selskapet skal òg i utgangpunktet halde kapitalen over *SCR*. Dersom selskapet sin kapital kjem under *SCR*, må selskapet framleggje ein plan for korleis dei skal kome seg over *SCR*. Kapitalen skal på ei kvar tid vere så stor at det er mindre enn 1 til 200 sjanse for at kapitalen er utilstrekkeleg i dei påfølgjande 12 månadane. Vi set som i formel 5.2 på side 30 MCR til å vere $B_t = \eta\alpha A_0 e^{\delta t}$. Vidare finn vi *SCR* ved å finne den A_t

som oppfyller formel 5.6 på side 32 for sannsynet $\frac{1}{200}$.

$$\mathbb{P}(\tau \leq t+1 | \tau > t) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta L_t}{A_t}\right) - \hat{\mu} \cdot 1}{\sigma\sqrt{1}}\right) + \left(\frac{A_t}{\eta L_t}\right)^{\frac{-2\hat{\mu}}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta L_t}{A_t}\right) + \hat{\mu} \cdot 1}{\sigma\sqrt{1}}\right) = \frac{1}{200} \quad (6.7)$$

Her er tida t er målt i år. Ved å nytte oss av numeriske rutiner som Regula Falsi etc., finn vi den ynskja A_t for $t \in [0, T]$. I vårt døme set vi $\sigma = 0,2$ i berekninga av SCR.

Portefølja A_t si utvikling



Figur 6.1: Selskapet si portefølje A_t er i dette dømet under solvenskapitalkravet (SCR) og vert tvunget til å investere meir konservativt ($\sigma = 0,1$) i år 4 – 8 av kontraktperioden.

Vidare samanliknar vi statisk og dynamisk modell og ser om det er skilnader frå eksempel 6.2.1 på side 61

Modell	σ	$\hat{\delta}$	Default-sannsyn	Poliseholdar sitt overskot	Kapitalholdar sitt overskot
Statisk	0,1	0,811	0,127 %	1,062	1,460
Dynamisk	0,1	0,811	3,342 %	1,462 (↑ 37,66 %)	1,966 (↑ 34,66 %)
Statisk	0,2	0,729	14,085 %	1,240	2,398
Dynamisk	0,2	0,729	3,850 %	1,338 (↑ 7,90 %)	2,232 (↓ 6,92 %)

Tabell 6.1: Samanlikning av statisk og dynamisk modell. I den dynamiske modellen må selskapet velje $\sigma = 0,1$ dersom $A_t < \text{SCR}$. For å rekne ut SCR nyttast $\sigma = 0,2$.

Vi følgjer regelen om at kapitalen til ei kvar tid skal vere så stor at det er mindre enn 1 til 200 sjanse for at kapitalen er utilstrekkeleg i dei påfølgjande 12 månadane. Vi ser at innføringa av ein dynamisk modell gjer at selskapet i kortare periodar må investere meir konservativt. Dette gjer allikevel ikkje at kapitalholdarane får særleg mindre forventa overskot, men defaultsannsynet vert pressa ganske mykje ned. Poliseholdarane vil få ei auking i forventa utbetaling ved bruk av ein dynamisk modell.

6.3 Fleire volatilitetsalternativ

Ein får i eksempel 6.2.1 på side 61 eit greit innsyn i endringa i defaultsannsyn og overskot ved innføring av ein dynamisk modell. Vi vil vidare utvide denne modellen ved at vi ser på ein modell der selskapet kan ha 3 ulike risikonivåer. Vi forutsetter at alle selskap er såkalla risk-loving. Det vil sei at kvart selskap har lyst å maksimere si fortjeneste ved å ta størst mogleg risiko. $\mathbb{P}(\tau < T)$ er definert ved teorem 5.3 på side 32, og volatiliteten σ_i kan i den dynamiske modellen veljast frå tabell 6.2.

Alternativ i	Volatilitet σ_i	Drift μ_i
1	0,1	0,04
2	0,2	0,05
3	0,3	0,06

Tabell 6.2: Tabell over ulike volatilitetsalternativ. Merk at $\frac{\mu_i - r}{\sigma_i} = 0,1$ for alle alternativa.

Reguleringsmyndigheita vil kontinuerleg kontrollere at selskapet er solvent ved at $A_t > B_t \forall t \in [0, T]$. Tidspunkt for *default* kallar vi som tidlegare τ . Årleg utfører kontrollorganet ein sjekk på at selskapet ikkje investerer for risikofyllt. Ved den årlege kontrollen følgjer selskapet ei portefølje med volatilitet σ_i som veljast frå tabell 6.2. Under kontrollen ved tid t kan følgjande 3 ting skje:

- Selskapet er solvent, dvs. $A_t > B_t$, og $\mathbb{P}(\tau < T | \tau > t) < \epsilon$. Dersom $i < 3$ byter selskapet volatilitet til σ_{i+1} . Dersom $i = 3$ forblir $\sigma = \sigma_3$
- Selskapet er solvent, men $\mathbb{P}(\tau < T | \tau > t) > \epsilon$. Kontrollorganet gjer påbod om at selskapet skal investere mindre risikofyllt. Dette gjer dei ved å å endre selskapet sin volatilitet til den største σ_i som gjer $\mathbb{P}(\tau < T | \tau > t) < \epsilon$. Dersom $\mathbb{P}(\tau < T | \tau > t) > \epsilon, \forall \sigma_i$, set kontrollorganet $\sigma = \sigma_1$
- Selskapet er ikkje solvent, dvs. $A_t \leq B_t$. Selskapet vert då straks stengd ned og resten av porteføljeverdien går til poliseholdaren.

I ein statisk modell kan ein finne forventa overskot til polise- og kapitalholdar ved både simulering og direkte rekning. Det er mogleg å finne det ved direkte

rekning, ein lyt då utføre same rekning som vi gjorde i teorem 5.6.1 på side 43, 5.6.2 på side 47, 5.6.3 på side 49 og 5.6.4 på side 52, der ein ikkje lenger er i ei risikonøytral verd. I det komande dømet vert det presentert simuleringsresultat.

Eksempel 6.3.1

Vi vil her samanlikne to modellar. Den første er ein statisk modell kvar selskapet investerer i ei portefølje som utviklar seg som ei geometrisk Brownsk røyrslé med drift μ og volatilitet σ . Kalkulering av defaultsannsyn og overskot til polise- og kapitalholdar er her rett fram.

Den andre modellen er ein dynamisk modell, som skildra i innleiinga av dette delkapittelet, der selskapet i utgangspunktet har lyst til å ta så mykje risiko som mogleg for å maksimere sin profitt. I denne modellen tas det òg omsyn til at kontrollorganet kjem inn og ser til at selskapet er på den solvente sida, dvs. at selskapet si portefølje har eit defaultsannsyn mindre enn $\epsilon = 0,04$.

Defaultsannsynet vert som i dei tidlegare kapitla rekna ut ved hjelp av teorem 5.3 på side 32. Viss ingen av volatilitetsalternativa leiar til $\mathbb{P}(\tau < T) < \epsilon$ vil den minste σ -verdien bli nytta.

Vi set $\alpha = \eta = 0,4$, $T = 20$, $r = 0,03$, $g = 0,01$ og $A_t = 100$.

I den dynamiske modellen vert $\hat{\delta}$ bestemt på førehand, og satt lik tilsvarende $\hat{\delta}$ -verdi i den statiske modellen. Den statiske modellen gav følgjande resultat for 100 000 simuleringar:

σ	$\hat{\delta}$	Defaultsannsyn	Poliseholdar sitt overskot	Kapitalholdar sitt overskot
0,1	0,819	$3 \cdot 10^{-3} \%$	1,07	1,46
0,2	0,751	4,16 %	1,60	2,58
0,3	0,754	18,54 %	3,04	5,21

Den dynamiske modellen ga følgjande resultat med 100 000 simuleringar:

Initiell σ	$\hat{\delta}$	Defaultsannsyn	Poliseholdar sitt overskot κ_L	Kapitalholdar sitt overskot κ_E
0,1	0,819	2,44 %	1,77 (↑ 65,4 %)	2,36 (↑ 61,6 %)
0,2	0,751	2,47 %	1,71 (↑ 6,9 %)	2,69 (↑ 4,3 %)
0,3	0,754	2,78 %	1,74 (↓ 42,8 %)	2,72 (↓ 47,8 %)

Det generelle resultatet er at ved å innføre ein dynamisk modell klarar vi å presse ned defaultsannsynet, medan forventa overskot til polise- og kapitalholdar samstundes vert holdt på eit akseptabelt høgt nivå. Defaultsannsynet er i statisk modell større enn $\epsilon = 4\%$ for $\sigma = 0,2$ og $\sigma = 0,3$. Ved å innføre modellen med reguleringsmyndigheita ser vi at alle dei 3 ulike volatilitetsalternativa pressar defaultsannsynet under $\epsilon = 4\%$. Den dynamiske modellen med $\sigma = 0,1$ viser til ein oppgang i defaultsannsynet i forhold til den statiske modellen. Defaultsannsynet vert allikevel ikkje urovekkjande høgt, då det heldt seg under $\epsilon = 4\%$. Samstundes får vi ein kraftig oppgang i overskotet til polise- og kapitalholdar.

Den dynamiske modellen med initiell $\sigma = 0,2$ har eit defaultsannsyn lik 2,47%, dette er ein nedgang på 40,6% i forhold til den statiske modellen med $\sigma = 0,2$. Vidare har den dynamiske modellen samstundes større estimert overskot til polise- og kapitalholdar enn den statiske modellen.

Modell med initiell $\sigma = 0,3$ viser til ein kraftig nedgang i defaultsannsyn frå dynamisk til statisk modell. Overskotet vert òg holdt på eit akseptabelt nivå.

6.4 Solvenskontroll med dødelegheit

6.4.1 Dødelegheitsmodell

I dette delkapittelet vil vi gå gjennom ein modell som tek utgangspunkt i modellen skildra i avsnitt 5.1, men som òg tek omsyn til at poliseholdare kan dø. Ved dødsfall vil premieinntaket gå til investorane/kapitalholdarane. Vi antar at dersom ein poliseholdar dør, vert portefølja sin verdi fryst ved dødstidspunktet og akkumulert med den risikofrie renta r fram til utløp av kontraksperioden.

Val av levetidsfordeling vert her kritisk for å kunne få til berekningar av forventa utbetaling til kapital- og poliseholdar. Før vi går nærare inn på sjølve levetidsfordelinga vil vi gå gjennom noko generell teori som vil gjelde uansett kva levetidsfordeling ein nyttar.

6.4.2 Sannsyn for død og default

Vi ser no på kontraksperioden $[0, T]$. På dette tidsintervallet er det to konkurrerande tidspunkt; dødstidspunktet τ_y , og defaulttidspunktet τ_z . Vi antar at vi kjenner sannsynstettleiken $f_{\tau_y}(t)$ til dødstidspunktet τ_y .

Dersom $\tau_y < T \cap \tau_y < \tau_z$ vil kapitalholdaren ha rett på heile portefølja sin verdi.

Dersom $\tau_z < T \cap \tau_z < \tau_y$ har poliseholdaren rett på $\min(\eta, 1)L_0e^{g\tau_z+r(T-\tau_z)}$, medan kapitalholdaren har rett på $\max(\eta - 1, 0)L_0e^{g\tau_z+r(T-\tau_z)}$, heilt analog til avsnitt 5.1. For å kunne finne defaultsannsyn og forventa utbetalingar må vi berekne $\mathbb{P}(\tau_y < \tau_z, \tau_y < T)$ og $\mathbb{P}(\tau_z < \tau_y, \tau_z < T)$. Desse sannsyna kan vi finne ved å gjere bruk av elementær sannsynsrekning.

Teorem 6.4.1

Anta at ein kontraksperiode eksisterer på intervallet $[0, T]$. Dei to uavhengige tidspunkta τ_y og τ_z representerer tidspunkt for død og default. Sannsynstettleikane deira er gitt ved høvesvis $f_{\tau_y}(t)$ og $f_{\tau_z}(t)$ på intervallet

$[0, \infty]$. Vi har då at

$$\mathbb{P}(\tau_z < T, \tau_z < \tau_y) = \mathbb{P}(\tau_z < T) \cdot \mathbb{P}(\tau_y > T) + \int_0^T \mathbb{P}(\tau_z \leq t) \cdot f_{\tau_y}(t) dt$$

og

$$\mathbb{P}(\tau_y < T, \tau_y < \tau_z) = \mathbb{P}(\tau_y < T) \cdot \mathbb{P}(\tau_z > T) + \int_0^T \mathbb{P}(\tau_y \leq t) \cdot f_{\tau_z}(t) dt$$

Bevis: Vi tek utgangspunkt i uttrykket for $\mathbb{P}(\tau_z < \tau_y, \tau_z < T)$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau_z < \tau_y, \tau_z < T) \\ &= \mathbb{P}(\tau_z < T, \tau_y > T) + \mathbb{P}(0 < \tau_z < \tau_y < T) \\ &= \mathbb{P}(\tau_z < T) \mathbb{P}(\tau_y > T) + \int_0^T \mathbb{P}(\tau_z \leq t) f_{\tau_y}(t) dt \end{aligned} \quad (6.8)$$

Beviset vert heilt ekvivalent for $\mathbb{P}(\tau_y < T, \tau_y < \tau_z)$.

Innbyrdes fordeling mellom døds- og defaulttidspunkt Anta at det skjer ei hending, enten eit dødsfall eller ein porteføljedefault i perioden $[0, T]$. Det kan då vere av interesse å berekne sannsynet for kva av hendingane som inntraff.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_z < \tau_y | \text{hending på } [0, T]) &= \frac{\mathbb{P}(\tau_z < \tau_y, \text{ hending på } [0, T])}{\mathbb{P}(\text{hending på } [0, T])} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\tau_z < T) \cdot \mathbb{P}(\tau_y > T) + \int_0^T \mathbb{P}(\tau_z \leq t) \cdot f_{\tau_y}(t) dt}{\mathbb{P}(\min(\tau_z, \tau_y) < T)} \end{aligned}$$

Heilt tilsvarande vert det å finne $\mathbb{P}(\tau_y < \tau_z | \text{hending på } [0, T])$

6.4.3 Forventa utbetaling til poliseholder

Vi skal her finne Λ_L^Q , den forventa diskonterte verdien av poliseholdaren si utbetaling i ei risikonøytral verd. Poliseholdaren kan få utbetaling på to måtar. Den eine måten er at han overlever kontraktperioden T og portefølja heldt seg over barrieren i heile kontraktperioden. Den andre måten er at portefølja A_t kryssar barrieren B_t før utløp av kontraktperioden T og poliseholdaren er i live på det tidspunktet portefølja går til default.

Vi hugsar at dersom selskapet ikkje vert stengd ned, var poliseholdaren sitt krav $\Psi_L(A_T)$. gitt ved formel 5.22 på side 39. Forventa diskontert verdi av

poliseholdaren si utbetaling i ei risikonøytral verd kan vi skrive slik

$$\begin{aligned}\Lambda_L^Q &= \mathbb{E}_0^Q \left[e^{-rT} \mathbf{1}(\tau_y > T, \tau_z > T) \Psi_L(A_T) \right] + \\ &\quad \mathbb{E}_0^Q \left[\mathbf{1}(\tau_z < T, \tau_z < \tau_y) \cdot (\eta \wedge 1) L_0 e^{(g-r)\tau_z} \right]\end{aligned}\quad (6.9)$$

Sidan τ_z og τ_y er uavhengige kan vi skrive:

$$\begin{aligned}\Lambda_L^Q &= \mathbb{P}(\tau_y > T) \cdot \mathbb{E}_0^Q \left[e^{-rT} \mathbf{1}(\tau_z > T) \Psi_L(A_T) \right] + \\ &\quad \mathbb{E}_0^Q \left[\left(\mathbf{1}(\tau_z < T) \mathbf{1}(\tau_y > T) + \mathbf{1}(\tau_z < \tau_y, \tau_y < T) \right) \cdot (\eta \wedge 1) L_0 e^{(g-r)\tau_z} \right] \\ &= \mathbb{P}(\tau_y > T) \cdot \mathbb{E}_0^Q \left[e^{-rT} \mathbf{1}(\tau_z > T) \Psi_L(A_T) \right] \\ &\quad + \mathbb{P}(\tau_y > T) \cdot \mathbb{E}_0^Q \left[\mathbf{1}(\tau_z < T) \cdot (\eta \wedge 1) L_0 e^{(g-r)\tau_z} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_0^Q \left[\mathbf{1}(\tau_z < \tau_y, \tau_y < T) \cdot (\eta \wedge 1) L_0 e^{(g-r)\tau_z} \right] \\ &= \mathbb{P}(\tau_y > T) \mathbb{E}_0^Q \left[e^{-rT} \mathbf{1}(\tau_z > T) \Psi_L(A_T) + \mathbf{1}(\tau_z < T) \cdot (\eta \wedge 1) L_0 e^{(g-r)\tau_z} \right] \\ &\quad + \int_0^T \mathbb{P}(\tau_z \leq t) f_{\tau_y}(t) (\eta \wedge 1) L_0 e^{(g-r)t} dt\end{aligned}\quad (6.10)$$

Vi observerer at det første leddet er $\mathbb{P}(\tau_y > T)$ multiplisert med ein faktor som vart rekna ut i modellen utan dødelegheita. Denne faktoren fann vi i teorem 5.6.1 på side 43, 5.6.2 på side 47, 5.6.3 på side 49 og 5.6.4 på side 52. $\mathbb{P}(\tau_y > T)$ kan vi finne ut ifrå den aktuelle dødelegheitsfordelinga.

$\mathbb{P}(\tau_y > T) = 1 - \mathbb{P}(\tau_y \leq T) = 1 - \mathbb{P}(\tau_y < T)$ sidan punktsannsyn er 0 for kontinuerlege stokastiske variable.

Det siste leddet eit integral som kan løysast (analytisk eller numerisk) når vi har definert dødelegheitsfordelinga.

Deltakingskoeffisienten

Deltakingskoeffisienten $\delta = 0,9 \cdot \hat{\delta}$ finn vi ved å søkje etter nullpunkt i funksjonen

$$\Lambda_L^Q(\hat{\delta}) - L_0 = 0 \quad (6.11)$$

$\Lambda_L^Q(\hat{\delta})$ er her gitt ved formel 6.9. Vi finn enkelt den ynskja $\hat{\delta}$ ved numeriske metodar for berekning av nullpunkt. Legg merke til at $\hat{\delta}$ i modell med døde-

legheit som regel vert større enn i modell utan dødelegheit. δ kan òg bli større enn 1 i modell med dødelegheit. Dette er fordi at når poliseholdaren døyr vil heile porteføljeverdien gå til kapitalholdaren. For å kompensere for dette må deltakingskoeffisienten aukast for at kontrakten framleis skal vere rettferdig. For å måle forventa overskot til poliseholdaren under sannsynsmålet \mathbb{P} nyttar vi κ_L , gitt ved formel 6.5 på side 60

6.4.4 Forventa utbetaling til kapitalholdar

Kapitalholdaren vil få utbetalt $\Psi_E(A_T)$, gitt ved formel 5.26 på side 42, dersom poliseholdaren er i live ved T , samt at portefølja ikkje har gått til default før T . Kapitalholdaren får òg utbetalt $\Theta_E(\tau_z)$, gitt ved formel 5.27 på side 42 viss portefølja går til default før $\min(T, \tau_y)$. Dersom poliseholdaren døyr før $\min(T, \tau_z)$, vil kapitalholdaren få utbetalt verdien av portefølja ved tid T . Forventa utbetaling Λ_E^Q til kapitalholdaren i ei risikonøytral verd kan vi då skrive som:

$$\begin{aligned}\Lambda_E^Q &= \mathbb{E}_0^Q \left[e^{-rT} \mathbf{1}(\tau_z > T, \tau_y > T) \Psi_E(A_T) \right] + \\ &\quad \mathbb{E}_0^Q \left[\mathbf{1}_{\eta > 1} (\eta - 1) L_0 e^{(g-r)\tau_z} \cdot \mathbf{1}(\tau_z < T, \tau_z < \tau_y) \right] + \\ &\quad \mathbb{E}_0^Q \left[e^{-rT} \mathbf{1}(\tau_y < T, \tau_y < \tau_z) \cdot A_T \right]\end{aligned}$$

Vi gjer nytte av teorem 6.4.1 på side 68

$$\begin{aligned}\Lambda_E^Q &= \mathbb{P}(\tau_y > T) \cdot \mathbb{E}_0^Q \left[e^{-rT} \mathbf{1}(\tau_z > T) \Psi_E(A_T) \right] + \\ &\quad \mathbb{P}(\tau_y > T) \cdot \mathbb{E}_0^Q \left[\mathbf{1}(\tau_z < T) \cdot \mathbf{1}_{\eta > 1} (\eta - 1) L_0 e^{(g-r)\tau_z} \right] + \\ &\quad \cdot \mathbb{E}_0^Q \left[\mathbf{1}(\tau_z < \tau_y, \tau_y < T) \cdot \mathbf{1}_{\eta > 1} (\eta - 1) L_0 e^{(g-r)\tau_z} \right] + \\ &\quad \left(\mathbb{P}(\tau_z < T) \cdot \mathbb{P}(\tau_y > T) + \int_0^T \mathbb{P}(\tau_z \leq t) f_{\tau_y}(t) dt \right) \mathbb{E}_0^Q [e^{-rT} A_T] \quad (6.12)\end{aligned}$$

Vidare gjer vi som tidlegare og midlar over alle moglegheiter

$$\begin{aligned}
\Lambda_E^Q &= \mathbb{P}(\tau_y > T) \cdot \mathbb{E}_0^Q \left[e^{-rT} \mathbf{1}(\tau_z > T) \Psi_E(A_T) \right] + \\
&\quad \mathbb{P}(\tau_y > T) \mathbb{E}_0^Q \left[\mathbf{1}(\tau_z < T) \Theta_E(\tau_z) \right] + \\
&\quad \mathbf{1}_{\eta > 1} (\eta - 1) \cdot \int_0^T \mathbb{P}(\tau_z < t) f_{\tau_y < T}(t) \cdot L_0 e^{(s-r)t} dt + \\
&\quad A_0 \left(\mathbb{P}(\tau_z < T) \cdot \mathbb{P}(\tau_y > T) + \int_0^T \mathbb{P}(\tau_z \leq t) f_{\tau_y}(t) dt \right) \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Her er Θ_E gitt ved formel 5.27 på side 42

$$\begin{aligned}
\Lambda_E^Q &= \mathbb{P}(\tau_y > T) \cdot \mathbb{E}_0^Q \left[e^{-rT} \mathbf{1}(\tau_z > T) \Psi_E(A_T) + \mathbf{1}(\tau_z < T) \Theta_E(\tau_z) \right] + \\
&\quad \mathbf{1}(\eta > 1) (\eta - 1) \cdot \int_0^T \mathbb{P}(\tau_z < t) f_{\tau_y < T}(t) \cdot L_0 e^{(s-r)t} dt + \\
&\quad A_0 \left(\mathbb{P}(\tau_z < T) \cdot \mathbb{P}(\tau_y > T) + \int_0^T \mathbb{P}(\tau_z \leq t) f_{\tau_y}(t) dt \right) \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Det første leddet er $\mathbb{P}(\tau_y > T)$ multiplisert med ein faktor som vart rekna ut i modellen utan dødelegheit. Vidare får vi 2 integral som kan løysast, analytisk eller numerisk, når dødelegheitsfordelinga er definert. Når vi er interessert i den reelle utbetalinga må vi gjere dei same berekningane under sannsynsmålet \mathbb{P} . Utrekninga vert mykje den same, men driftsledet vert endra frå r til μ . Når vi skal måle forventa overskot til kapitalholdaren under sannsynsmålet \mathbb{P} nyttast κ_E , som i formel 6.6 på side 60. Vi møter her på uttrykk som kan vere vanskelege å handsame analytisk, og det kan difor vere enklast å berekne forventa utbetaling ved simulering.

6.5 Modell med barrieredødelegheit

For å simulere levetidsfordelinga startar vi ei ny geometrisk Brownsk røyrslé X_t , som er uavhengig av prosessen A_t som representerer selskapet si portefølje. Ein seier så at det inntreffer eit dødsfall når X_t kryssar si barriere $X_0 < D$. Det vil sei at vi har $\tau_y = \inf\{t : X_t = D\}$. Ein slik dødelegheitsmodell er gjerne ikkje heilt realistisk, men den gjer eit greit nok bilete av dødelegheita, samt at den passar til matematikken i denne oppgåva. Ved å velje ei slik levetidsfordeling er det håp om at ein kan få til analytiske uttrykk for forventta utbetaling til kapital- og poliseholdar. Levetidsfordelinga vert òg nytta av ein del andre innanfor bransjen, t.d. i Aalen og Gjessing (2001).

For å kunne rekne eksplisitt på dødsansyn transformerer vi X_t til ei ny Brownsk røyrslé Y_t . Vi antar at den nye røyrsla har ei drift mot si barriere. Ved å anta dette vil sannsynet for å treffe barrieren gå mot 1 når tida går mot uendeleg. Denne dødelegheitsmodellen har òg den ynskja eigenskapen at sannsynet for å døy vil auke med alderen.

Vi ynskjer å tilpasse parametre slik at dødelegheita vert tilfredstillande realistisk. Den Brownske røyrsla Z_t representerer portefølja A_t , og Y_t representerer dødelegheita, desse vil no bli evaluert samstundes.

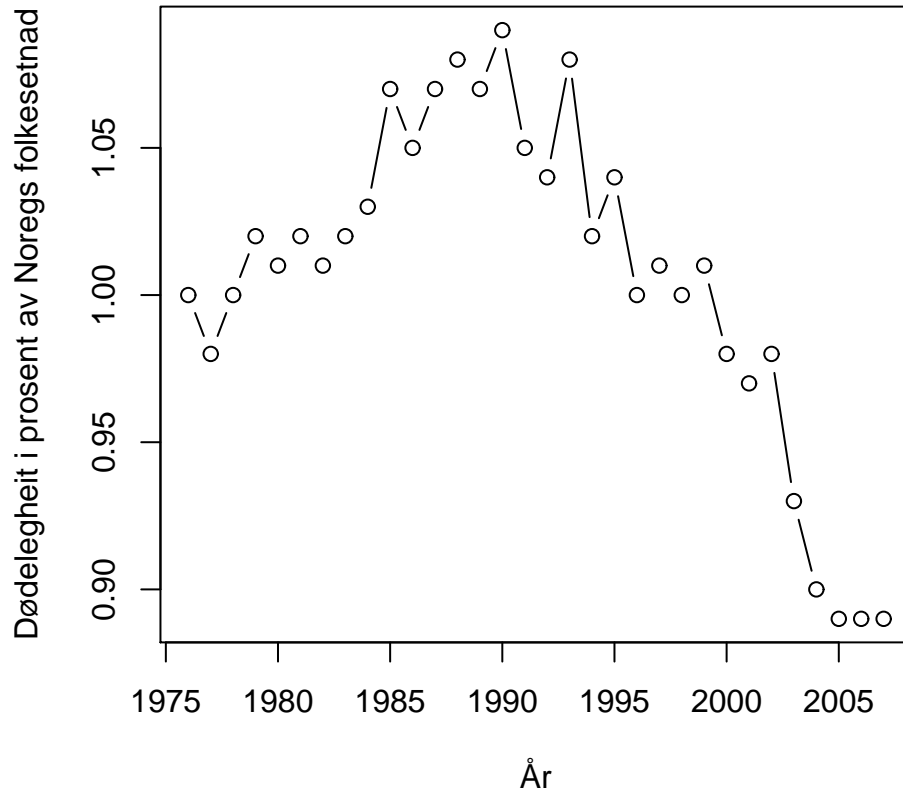
Vi kallar tidspunkt for porteføljedefault for τ_z , og dødstidspunktet kallar vi τ_y . Dersom poliseholdaren døyr før utløpet av kontraktperioden T , samt at det ikkje har skjedd ein default på portefølja før dødstidspunktet τ_y , antar vi i vårt rammeverk at verdien av portefølja A_t vil tilfalle kapitalholdaren. Verdien av portefølja vert fryst på dødstidspunktet τ_y og akkumulert fram til tid T , dvs. at kapitalholdaren får utbetalt $A_{\tau_y} e^{r(T-\tau_y)}$. Dersom portefølja går til default før dødsfall og utløp av kontraktperioden, får poliseholdaren $\min(\eta, 1)L_{\tau_z} e^{rT}$ og kapitalholdaren har rett på $\max(\eta - 1, 0)L_{\tau_z} e^{rT}$, dette vert sett nærare på i eit seinare avsnitt.

$\mathbb{P}(\tau_z < T, \tau_z < \tau_y)$ er sannsynet for at portefølja A_t går til default før utløp av kontraktperioden T , samt at τ_z inntreffer før eit evt. dødsfall.

$\mathbb{P}(\tau_y < T, \tau_y < \tau_z)$ er sannsynet for at det skjer eit dødsfall i kontraktperioden, og at dødsfallet samstundes inntreffer før ein evt. porteføljedefault.

Statistisk Sentralbyrå fører statistikk over dødelegheita i Noreg. Ut frå desse dataene vert det presentert eit plott som viser utviklinga i dødelegheita i Norge frå 1976 til 2007.

Dødelegheit i Noreg 1976 – 2007



Figur 6.2: Dødelegheit i Noreg 1976-2007 oppgitt i prosent av norsk middel-folkemengd. Det er ikkje tatt omsyn til kjønnskilnader. Data er henta frå www.ssb.no

Vi ser at dødssannsynet har vore jamnt over avtakande sidan 1990-talet. Dei siste åra har dødelegheita holdt seg rundt 0,9 %. Vi vil difor i det første dømet prøve å få ein årleg dødelegheit kring 0,9 %. Sjølv om dødelegheita som regel auker med alderen, antar vi for å gjere det enkelt at årleg dødelegheit er konstant lik 0,9 %. Talet på levande M_T ved tid T av ein folkesetnad på $M_0 = M$ finn vi ved formelen

$$M_T = M \cdot (1 - 0,009)^T \quad (6.15)$$

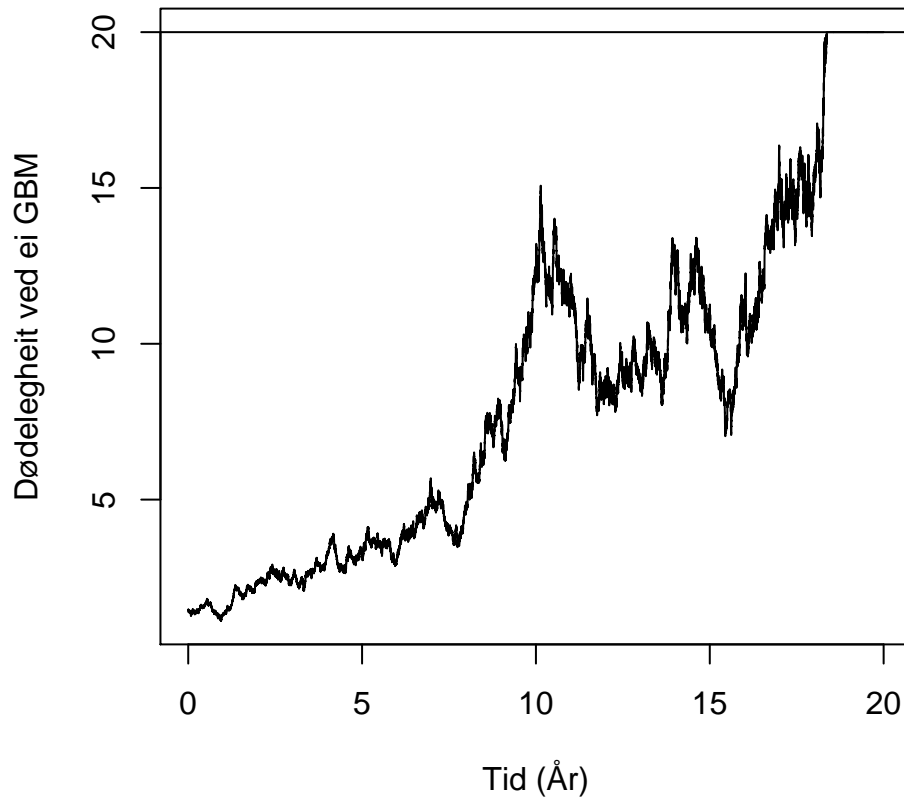
Viss ein til dømes ser på eit tidsperspektiv på 20 år vil det vere $M_{20} = 0,8346 \cdot M$ overlevande etter 20 år. Dette svarer til ei dødelegheit på 16,54 % på 20 år.

Vi antar at den nye levetidsprosessen X_t startar i punktet $X_0 > 0$ og utviklar seg over tidsintervallet $[0, T]$ etter ei geometrisk Brownsk røyrslé:

$$dX_t = \nu X_t dt + \zeta X_t dW_t \quad (6.16)$$

Ved prøving og feiling finn vi at parameterverdiane $X_0 = 1,4615$, $\nu = 0,09142$, $\zeta = 0,3$ og $D = 20$ gjer oss ei dødelegheit på 16,54 %.

Dødelegheit simulert ved GBM



Figur 6.3: Simulering av ei GBM som treffer si barriere i $D = 20$. I dette tilfellet vil poliseholdaren døy rundt år 18 av kontraktstida på $T = 20$ år.

Det første vi ynskjer å finne uttrykk for er sannsynstettleiken til tidspunkt for første passasjetid av X_t gjennom barriera D . Vidare kan dette nyttast til å finne sannsynet for at ein poliseholdar vil døy i løpet av kontraktstida T . Dette sannsynet kan ein seinare påverke ved å setje inn ulike verdiar for ν , ξ , D og X_0 .

For å gjere uttrykket enklare å arbeide med vel vi å gjere ein transformasjon slik at vi set igjen med ei Brownsk røyrslé istaden for ei geometrisk Brownsk

røyrslé. Den eksakte løysinga av denne GBM er gitt ved formel 3.7 på side 11:

$$X_t = X_0 \cdot e^{(\nu - \frac{1}{2}\zeta^2)t + \zeta W_t} \quad (6.17)$$

Det skjer eit dødsfall dersom

$$X_t = D, \quad t \in [0, T] \quad (6.18)$$

Vidare får vi då:

$$\begin{aligned} X_0 \cdot e^{(\nu - \frac{1}{2}\zeta^2)t + \zeta W_t} &= D \\ \Downarrow \\ \log X_0 + (\nu - \frac{1}{2}\zeta^2)t + \zeta W_t - \log D &= 0 \\ \Downarrow \\ (\nu - \frac{1}{2}\zeta^2)t + \zeta W_t + \log\left(\frac{X_0}{D}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Definerer den nye Brownske røyrsla Y_t :

$$Y_t = Y_0 + \hat{\nu}t + \zeta W_t \quad (6.20)$$

Her er

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &= \nu - \frac{1}{2}\zeta^2 \\ Y_0 &= \log\left(\frac{X_0}{D}\right) \end{aligned}$$

Vi antar at $0 < X_0 < D$. Dette medfører igjen at $Y_0 < 0$. For at modellen skal ta omsyn til at alle personar vil døy ein eller annan gong må parameterane ν og ζ veljast slik at $\hat{\nu} > 0$. Ein passasje av X_t gjennom D er det same som ein passasje av Y_t gjennom 0. Frå teorem 4.1.2 på side 22 veit vi at sannsynstettleiken til tidspunkt for første passasje τ_y er

$$f_{\tau_y}(t) = \frac{|Y_0|}{\zeta t^{3/2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{-Y_0 - \hat{\nu}t}{\zeta \sqrt{t}} \right)^2} \quad (6.21)$$

Sannsyn for dødsfall i kontraksperioden

Med omsyn på dødelegheitsmodellen som er skildra i avsnitt 6.4.1 kan vi no finne sannsynet for at ein poliseholdar vil døy i kontraksperioden $[0, T]$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_y \leq T) &= 1 - \mathbb{P}(\tau_y \geq T) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} Y_s < 0\right) \\ &= 1 - F_{M(T)} \\ &= 1 - \left\{ N\left(\frac{-Y_0 - \hat{\nu}T}{\xi\sqrt{T}}\right) - e^{-2\frac{\hat{\nu}Y_0}{\xi^2}} \cdot N\left(\frac{Y_0 - \hat{\nu}T}{\xi\sqrt{T}}\right) \right\} \quad (6.22)\end{aligned}$$

Her er $F_{M(T)}$ er den kumulative fordelinga til maksimumprosessen $\sup_{0 \leq s \leq T} Y_s$, definert ved formel 3.11 på side 13. Eventuelt kan dødssannsynet òg finnast ved integrasjon av $f_{\tau_y}(s)$:

6.5.1 Levetidsprosessen evaluert over eit uendeleg tidsrom

Vi observerer at modellen for dødelegheita (med $\hat{\nu} > 0$) har den ynskja eigenskapen at alle poliseholdarane vil døy ein eller annan gong. Dette kan ein sei fordi sannsynet er 1 for å døy når tida t går mot uendeleg:

$$\begin{aligned}&\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f_{\tau_y}(s) ds \\ &= 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ N\left(\frac{-Y_0 - \hat{\nu}t}{\xi\sqrt{t}}\right) - e^{-2\frac{\hat{\nu}Y_0}{\xi^2}} \cdot N\left(\frac{Y_0 - \hat{\nu}t}{\xi\sqrt{t}}\right) \right\} \\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

Sannsyn for første barrieretreff

Sannsynet for at ein default frå portefølja vil skje før eit dødsfall finn vi ved å nytte teorem 6.4.1 på side 69

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_z < \tau_y) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_z < t) \cdot f_{\tau_y}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ N\left(\frac{-Z_0 - \hat{\mu}t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{-\frac{2\hat{\mu}Z_0}{\sigma^2}} \cdot N\left(\frac{-Z_0 + \hat{\mu}t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right\} \\ &\quad \cdot \frac{|Y_0|}{\xi t^{3/2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-Y_0 - \hat{\nu}t}{\xi\sqrt{t}}\right)^2} dt\end{aligned}\quad (6.23)$$

Numeriske rutiner klarar fint å løyse dette integralet når det vert satt inn verdiar for dei aktuelle parametrane. Heilt ekvivalent kan vi finne $\mathbb{P}(\tau_y < \tau_z)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_y < \tau_z) &= \int_0^\infty \left(1 - \left\{ N\left(\frac{-Y_0 - \hat{\nu}t}{\xi\sqrt{t}}\right) - e^{-2\frac{\hat{\nu}Y_0}{\xi^2}} \cdot N\left(\frac{Y_0 - \hat{\nu}t}{\xi\sqrt{t}}\right) \right\} \right) \\ &\quad \cdot \frac{|Z_0|}{\sigma t^{3/2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Z_0 + \hat{\mu}t}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2} dt\end{aligned}\quad (6.24)$$

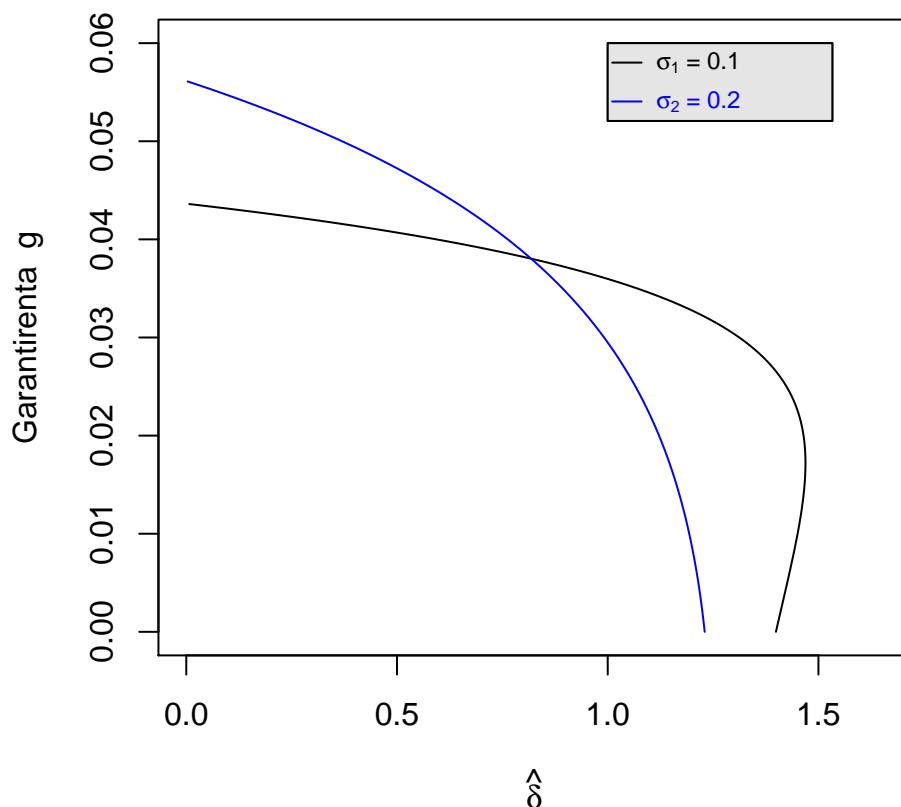
Prosessane Z_t og Y_t er uavhengige og vi kan finne $\mathbb{P}(\min(\tau_z, \tau_y) \leq T)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(\tau_z, \tau_y) \leq T) &= 1 - \mathbb{P}(\min(\tau_z, \tau_y) \geq T) = 1 - \mathbb{P}(\tau_z \geq T) \cdot \mathbb{P}(\tau_y \geq T) \\ &= 1 - \left(1 - \left\{ N\left(\frac{-Z_0 - \hat{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + e^{-\frac{2\hat{\mu}Z_0}{\sigma^2}} \cdot N\left(\frac{-Z_0 + \hat{\mu}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right\} \right) \\ &\quad \cdot \left\{ N\left(\frac{-Y_0 - \hat{\nu}T}{\xi\sqrt{T}}\right) - e^{-2\frac{\hat{\nu}Y_0}{\xi^2}} \cdot N\left(\frac{Y_0 - \hat{\nu}T}{\xi\sqrt{T}}\right) \right\}\end{aligned}\quad (6.25)$$

6.5.2 Deltakingskoeffisienten i barrieredødelegheitsmodell

Vi nyttar formel 6.11 på side 70 og søker etter nullpunkt i funksjonen. I figur 6.4 på neste side presenteres to grafar som viser utviklinga av deltakingskoeffisienten og garantirenta g i ein rettferdig kontrakt.

$\hat{\delta}$ og garantirenta g



Figur 6.4: Deltakingskoeffisienten si utvikling med garantirenta g sett i lys av den aktuelle dødelegheitsmodellen. Her er $\sigma_1 = 0,1$ og $\sigma_2 = 0,2$.

Eksempel 6.5.1: Dødelegheit og portefølje

Vi ser på ein kontrakt på $T = 20$ år. Vi tilpasser ν , ζ , D og X_0 slik at omlag 16,5% av poliseholdarane døyr iløpet av 20 år. Dette er det same som vart diskuterte i byrjinga av kapittelet. Vidare reknar vi ut sannsyna vi har funne uttrykk for. Parameterverdiane vert satt til: $\mu = 0,05$, $\sigma = 0,2$, $g = 0,01$, $A_0 = 100$, $\alpha = 0,6$, $\eta = 0,6$, $\nu = 0,09142$, $\zeta = 0,3$, $X_0 = 1,4615$, $D = 20$, $T = 20$. Merk at valet av ν og ζ fører til at $\hat{\nu} > 0$. Vi nyttar no dei ulike formlane for sannsyn som vi har utleia:

Berekning	Resultat
$\mathbb{P}(\text{Porteføljedefault før } T)$	14,36 %
$\mathbb{P}(\tau_z < \tau_y, \min(\tau_z, \tau_y) < T)$	13,68 %
$\mathbb{P}(\text{Død før } T)$	16,54 %
$\mathbb{P}(\tau_y < \tau_z, \min(\tau_z, \tau_y) < T)$	14,86 %
$\mathbb{P}(\min(\tau_z, \tau_y) \leq T)$	28,54 %
$\mathbb{P}(\text{Porteføljedefault hending på } [0,T])$	47,93 %
$\mathbb{P}(\text{Død hending } [0,T])$	52,07 %

Ei hending er her definert som enten eit dødsfall eller ein porteføljedefault.

6.5.3 Numeriske og analytiske berekningar

Som i artikkelen til Chen og Bernard (2008) ynskjer vi å undersøkje skilnaden på ein statisk og ein dynamisk modell. Skilnaden frå Chen og Bernard (2008) er at vi her tek omsyn til at poliseholdarane kan døy. Når ein poliseholdar døyr er det kapitalholdaren som har rett på heile verdien av portefølja A_t . Denne verdien vert fryst ved tid t og akkumulert med den risikonøytrale renta r fram til utløp av kontraktperioden.

Vi ynskjer å undersøkje om ein kan seie noko om selskap vert tvungen til å investere meir konservativt som følgje av innføringa av eit nytt solvensregelverk. På denne måten undersøker vi, i ein sær s forenkla modell, verknaden av innføringa av Solvency II.

I den dynamiske modellen er det vanskeleg å berekne deltakingskoeffisienten δ nøyaktig. Dette fordi kapitalholdarane vil variere mellom kva volatilitetsnivå dei nyttar. Som ein føresetnad for den dynamiske modellen set vi δ til å vere same verdien som i den statiske modellen. Vi kan då samanlikne skilnader mellom dynamisk og statisk modell.

Parameterverdiane vert som i eksempel 6.5.1 på førre side satt til å vere $\mu = 0,05$, $\sigma = 0,2$, $g = 0,01$, $A_0 = 100$, $\alpha = 0,6$, $\eta = 0,6$, $\nu = 0,09142$, $\xi = 0,3$, $X_0 = 1,4615$, $D = 20$ og $T = 20$.

Ved innsetjing i formlar for forventa utbetaling for polise- og kapitalholdar får vi følgjande resultat, der overskotet κ_i ($i \in E, L$) er gitt ved formel 6.5 på side 60 og 6.6 på side 60

Modell	σ	δ	Polise κ_L	Kapital κ_E	PD	PM
Statisk	0,1	1,306	1,155	1,277	0,097 %	16,467 %
Dynamisk	0,1	1,306	1,648	1,416	3,176 %	16,120 %
			(\uparrow 42,68 %)	(\uparrow 10,88 %)		
Statisk	0,2	1,074	1,457	1,930	13,506 %	14,844 %
Dynamisk	0,2	1,074	1,357	1,858	3,347 %	16,103 %
			(\downarrow 6,86 %)	(\downarrow 3,73 %)		

Tabell 6.3: (Brownsk) statistisk barrieredødelegheitsmodell. $PD = \mathbb{P}(\text{default})$, $PM = \mathbb{P}(\text{Død})$, $\kappa_L = \text{Overskot til poliseholdar}$, $\kappa_E = \text{Overskot til kapitalholdar}$

I den dynamiske modellen kan reguleringsmyndigheita variere volatiliteten mellom $\sigma_L = 0,1$ og $\sigma_H = 0,2$. Vi antar at den dynamiske modellen nyttar dei same δ -verdiene som i den statiske modellen.

Ved å ta omsyn til at reguleringsmyndigheita legg restriksjonar på selskapet, og at selskapa har ein investeringsstrategi vil modellen oppretthalde respektable overskot til poliseholdar og kapitalholdar. Samstundes vert defaultsannsynet holdt på eit akseptabelt lågt nivå.

For eit selskap som opprinneleg følgjer ei portefølje med konstant volatilitet $\sigma_L = 0,1$ er verknaden av innføringa av ein dynamisk modell at overskotet til poliseholdar og kapitalholdar går kraftig opp, samstundes vert defaultsannsynet holdt på eit akseptabelt lågt nivå.

Eit selskap som opprinneleg følgjer ei portefølje med konstant volatilitet $\sigma_H = 0,2$ er verknaden av innføringa av ein dynamisk modell at overskotet til poliseholdar og kapitalholdar går litt ned, men den relative nedgangen er låg. Samstundes vert defaultsannsynet kraftig redusert.

Grunnen til valet av dødelegheitsmodellen som følgde ei GBM var blant anna at det var håp om at ein skulle få til analytiske uttrykk for forventa utbetaling til kapital- og poliseholdar. Det viste seg at dette ikkje var rett fram. Ved å nytte Monte Carlo simulering fekk vi allikevel fram interessante resultat. I neste kapittel vil sjå nærare på ei meir reell levetidsfordeling som er nytta mykje innanfor livsforsikringsbransjen, Gompertz-Makehams levetidsfordeling. Denne levetidsfordelinga vil så bli knytta opp mot den same modellen vi har sett på i dette kapitlet.

6.6 Gompertz-Makeham dødelegheit

Vi tek utgangspunkt i Gompertz-Makeham fordelinga slik den er definert i Norberg (1998). Gompertz-Makeham fordelinga er mykje brukt som ein modell for overleving blant menneskeliv, dette gjeld spesielt i tilfellet for livsforsikring. Dødsintensiteten er på forma

$$\theta_t = a + bc^t \quad a, b, c > 0 \quad (6.26)$$

Den tilsvarende overlevingsfunksjonen er $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$. Dødsintensiteten har to ledd som i lag bestemmer θ_t . Tolkninga av a vil her vere aldersuavhengige dødsårsaker som ulukker og epedemiar. bc^t vil skildre alle moglege aldersavhengige dødsårsaker. Denne intensiteten vil auke med alderen. Den tilhøyrande overlevingsfunksjonen er på forma

$$\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t (a+bc^s) ds} = e^{-at - \frac{b(c^t-1)}{\log c}} \quad (6.27)$$

Samanhengen $\theta_{x+t} = a + bc^x c^t$, og formel 6.26 viser at $\bar{F}(t|x)$ òg er ein Gompertz-Makeham overlevingsfunksjon med parametre a , bc^x , c . Vi kan då sjå på sannsynet for at ein x -åring vil overleve dei t påfølgjande åra. Dette skriv vi

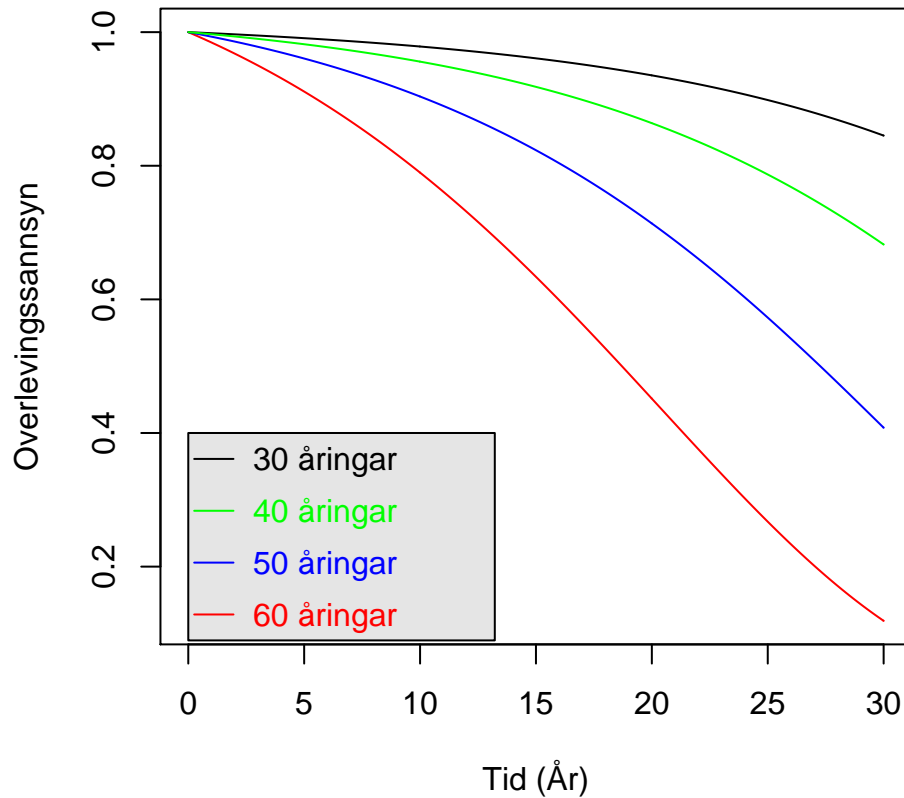
$${}_t p_x = \bar{F}(t|x) = e^{-\int_0^t \theta_{x+\rho} d\rho} \quad (6.28)$$

der vi har sannsynstettleiken

$$f_{GM}(t|x) = {}_t p_x \cdot \theta_{x+t} \quad (6.29)$$

Spesialtilfellet med $a = 0$ er referert til som ein rein Gompertz-lov. Det er vanleg å anta at maksimal levetid er $\omega = 120$ år. I denne oppgåva vil vi i Gompertz-Makeham fordelinga nytte G82M-dødelegheit, som i Norberg (1998), med parametre $a = 5 \cdot 10^{-4}$, $b = 7,5858 \cdot 10^{-5}$, $c = 1,09144$.

Kumulativt sannsyn for å overleve i 30 år



Figur 6.5: Kumulativ overleving for 30, 40, 50 og 60-åringar som følgjer Gompertz-Makehams overlevingsmodell

Vi ynskjer å knytte denne overlevingsmodellen opp mot livsforsikringskontrakten skildra i avsnitt 5.1. Tidlegare har vi funne uttrykk for sannsynet for kva hending som skjer først av dødsfall og porteføljedefault på intervallet $[0, T]$, (sjå teorem 6.4.1 på side 69). I denne modellen vil vi, som tidlegare, anta at poliseholdarane skyt inn med $L_0 = \alpha A_0$ og kapitalholdarane skyt inn $E_0 = (1 - \alpha)A_0$. Portefølja vil så heilt ekvivalent med Chen *et al.* (2008) utvikle seg som ei geometrisk Brownsk røyrslé på intervallet $[0, T]$. Vi får default dersom $A_t \leq B_t = \eta L_0 e^{gt}$.

Tabellen nedanfor viser dødelegheit og porteføljedefault ved ein kontraktsperiode på $T = 20$ år, for 40, 50 og 60 åringar. Vi har i dømet satt $\alpha = 0,6$ og $\eta = 0,6$

σ	x (år)	$\mathbb{P}(\tau_z < \tau_y, \min(\tau_z, \tau_y) < T)$	$\mathbb{P}(\tau_y < \tau_z, \min(\tau_z, \tau_y) < T)$
0,1	40	$9,5 \cdot 10^{-2} \%$	13,612 %
0,1	50	$8,1 \cdot 10^{-2} \%$	28,608 %
0,1	60	$5,8 \cdot 10^{-2} \%$	54,801 %
0,2	40	12,889 %	11,694 %
0,2	50	11,694 %	24,578 %
0,2	60	8,631 %	47,033 %

Tabell 6.4: Sannsyn for dødsfall og default i eit statistisk rammeverk, der $T = 20$ år for ein Gompertz-Makehams dødelegheitsmodell

Ser vi på ein kontraktsperiode på $T = 30$ år får vi

σ	x (år)	$\mathbb{P}(\tau_z < \tau_y, \min(\tau_z, \tau_y) < T)$	$\mathbb{P}(\tau_y < \tau_z, \min(\tau_z, \tau_y) < T)$
0,1	40	0,208 %	31,710 %
0,1	50	0,167 %	59,063 %
0,1	60	0,128 %	87,879 %
0,2	40	17,617 %	25,641 %
0,2	50	15,571 %	47,762 %
0,2	60	13,632 %	71,020 %

Tabell 6.5: Sannsyn for dødsfall og default i eit statistisk rammeverk, der $T = 30$ år for Gompertz-Makehams dødelegheitsmodell

Vidare ynskjer vi å simulere Gompertz-Makehams levetidsfordeling samstundes med portefølja. For å unngå å gjere simuleringprosessen svært tidkrevjande vel vi å simulere G-M med ein «Accept-reject algoritme»

6.6.1 Accept-reject algoritme

Vi tek utgangspunkt i Accept-reject metoden slik den er skildra i P. Robert og Casella (2004).

Teorem 6.6.1: Accept-reject

La $X \sim f(x)$ og la $g(x)$ vere ein sannsynstettleik som tilfredstillar majoreringskravet $f(x) \leq M \cdot g(x)$ for ein konstant $M \geq 1$. For å simulere $X \sim f$

er det tilstrekkeleg å generere

$$Y \sim g \quad \text{og} \quad U|Y = y \sim U(0, Mg(y)) \quad (6.30)$$

fram til $0 < u < f(y)$

Vi nyttar oss av teorem 6.6.1 for å simulere G-M's levetidsfordeling. Vårt første mål er å finne ei passende fordeling for g og ein passende verdi for M . Ved derivering av formel 6.29 på side 83 finn vi toppunktet til $f_{GM}(t|x = 40)$:

$$t \simeq 40,447$$

$$f_{GM}(40,447|x = 40) \simeq 0,033$$

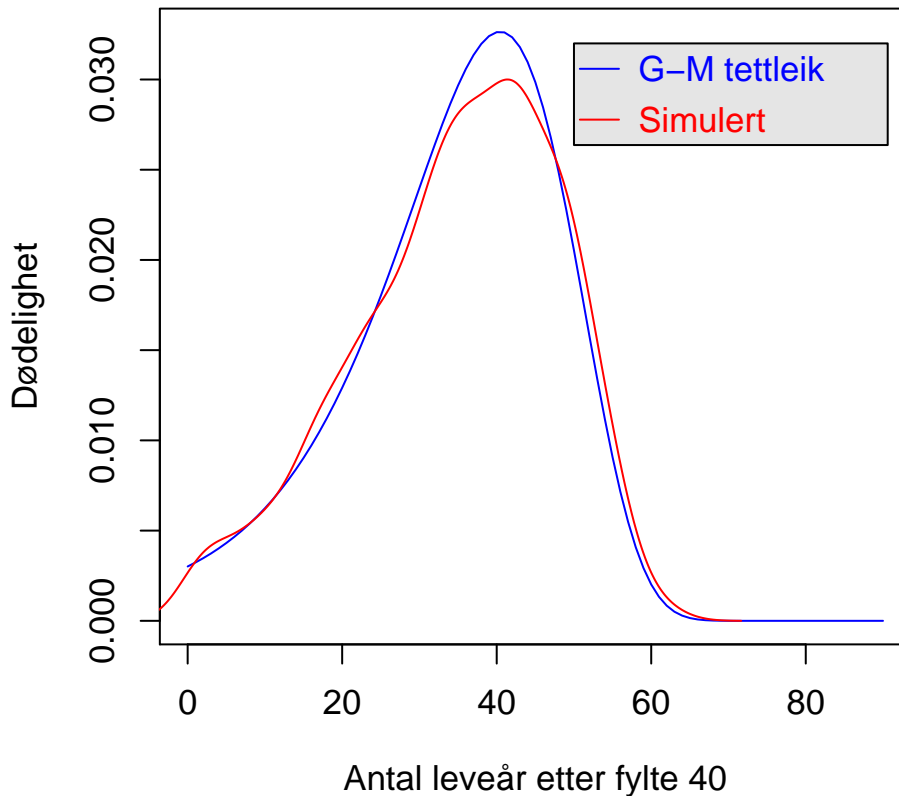
Dette passar bra med å velje $M = 4$ og $g(x) = g = \frac{1}{120}$ (g er uniformtettleiken på $[0,120]$). Vi ser då at vi har oppfylt majoreringskravet

$$f_{GM}(t|x = 40) \leq 0,033 < \frac{4}{120} = M \cdot g(t)$$

Inspirert av Aasmundsen (2004) har eg laga eit program i **R** som simulerer dødsfall trekt frå G-M's levetidsfordeling (sjå avsnitt A.1). For å simulere 1000 dødsfall for 40-åringar nyttar vi denne vi denne Accept-reject algoritmen.

Figur 6.6 på neste side viser 1000 simuleringar som er glatta og samanlikna med sannsynstettleiken til G-M fordelinga, formel 6.29 på side 83.

Simulering vs. fordeling



Figur 6.6: Simulert vs. sannsynsfordelinga i G-M's levetidsfordeling. Det er i dette tilfellet gjort 1000 simuleringar

6.6.2 Simuleringsresultat

Vidare ser vi på ein livsforsikringskontrakt mellom polise- og kapitalholdar heilt ekvivalent til den som vart sett på i avsnitt 6.5. Einaste skilnaden er at vi byter ut barrieredødelegheitsmodellen med Gompertz-Makehams modell for død. Formel 6.11 på side 70 vert nytta for å fastsetje den rettferdige deltakingskoeffisienten δ . Følgjande parameterverdiar vert nytta: $\alpha = 0,6$, $\eta = 0,6$, $T = 20$, $A_0 = 100$, $\mu_H = 0,05$, $\mu_L = 0,04$, $\sigma_H = 0,2$, $\sigma_L = 0,1$. For å finne forventa overskot til høvesvis polise- og kapitalholdar gjer vi 100 000

simuleringar med programmet lagt ved i avsnitt A.5. I dette dømet ser vi først på ein statisk modell der kontrollorgan ikkje regulerer volatiliteten til selskapet. Vidare ser ein på ein dynamisk modell der reguleringsmyndigheita regulerer selskapet mellom høg/låg volatilitet alt etter om $P(\text{default})$ er over eller under toleransegrensa ϵ . Vidare stengjer kontrollorganet ned selskapet dersom $A_t < B_t$ i begge modellane. Vi ser kun på 40-åringar:

Modell	σ	x (år)	δ	κ_L	κ_E	PD	PM
Statisk	0,1	40	1,21	1,13	1,31	0,1 %	13,6 %
Dynamisk	0,1	40	1,21	1,61 (\uparrow 42,5 %)	1,47 (\uparrow 12,2 %)	3,1 %	13,5 %
Statisk	0,2	40	1,01	1,45	1,93	13,36 %	12,43 %
Dynamisk	0,2	40	1,01	1,36 (\downarrow 6,2 %)	1,88 (\downarrow 2,6 %)	3,3 %	13,5 %

Tabell 6.6: Resultat med statisk og dynamisk modell for 40-åringar. PD = $\mathbb{P}(\text{default})$, PM = $\mathbb{P}(\text{Død})$, κ_L = Overskot til poliseholder, κ_E = Overskot til kapitalholder. δ = Deltakingskoeffisienten.

Ved bruk av Gompertz-Makehams dødelegheitsmodell viser ein dynamisk modell at ved å anta at selskapet har ein investeringsstrategi vil ein kunne holde defaultsannsynet relativt lågt, medan ein samstundes opprettheldt respektable overskot til både polise- og kapitalholder.

For eit selskap som opprinneleg følgjer ei portefølje med konstant volatilitet $\sigma_L = 0,1$ er verknaden av innføringa av ein dynamisk modell at overskotet til polise- og kapitalholder går kraftig opp, samstundes vert defaultsannsynet holdt på eit akseptabelt lågt nivå.

Eit selskap som opprinneleg følgjer ei portefølje med konstant volatilitet $\sigma_H = 0,2$ er verknaden av innføringa av ein dynamisk modell at overskotet til polise- og kapitalholder går litt ned, men den relative nedgangen er låg. Samstundes vert defaultsannsynet kraftig redusert.

Skilnaden ved bruk av Gompertz-Makehams levetidsfordeling kontra ein barrieredødelegheitsmodell er ikkje særleg stor, men den er tilstades. Det neste avsnittet vil samanlikne bruken av desse to ulike dødelegheitsmodellane.

6.6.3 Samanlikning av dødelegheitsmodellar

I dette delkapittelet samanliknar vi, innanfor oppgåva sitt rammeverk, verk-
naden av å nytte Gompertz-Makehams dødelegheitsmodell istadenfor ein
barrieredødelegheitsmodell. I Gompertz-Makeham-modellen ser vi på 40-
åringar og nyttar følgjande parameterverdiar: $a = 5 \cdot 10^{-4}$, $b = 7,5858 \cdot 10^{-5}$
og $c = 1,09144$. Dette fører til at $\mathbb{P}(40\text{åring døyr før han er } 60) = 13,63\%$.

Vidare set vi i barrieredødelegheitsmodellen $\xi = 0,2$, $\nu = 0,093391$, $X_0 = 1,4615$ og $D = 20$. Desse parameterverdiane fører òg til at $\mathbb{P}(\text{død før } T) = 13,63\%$.

Sidan sannsynet for å dø i løpet av kontraktperioden er 13,63 % i begge
modellar har vi eit godt samanlikningsgrunnlag.

Tabell 6.7 viser resultatata frå simulering av statisk og dynamisk modell, ved
bruk av Gompertz-Makehams dødelegheitsmodell og Brownsk barrieredøde-
legheitsmodell.

	M	σ	Polise κ_L	Kapital κ_E	PD	PM
Gompertz	Statisk	0,1	1,13	1,31	0,1 %	13,6 %
	Statisk	0,2	1,45	1,93	13,4 %	12,4 %
	Dyna.	0,1	1,61 (↑ 42,5 %)	1,47 (↑ 12,2 %)	3,1 %	13,5 %
	Dyna.	0,2	1,36 (↓ 6,2 %)	1,88 (↓ 2,6 %)	3,3 %	13,5 %
Brownsk	Statisk	0,1	1,13	1,32	0,1 %	13,7 %
	Statisk	0,2	1,43	2,00	13,8 %	11,9 %
	Dyna.	0,1	1,60 (↑ 41,6 %)	1,53 (↑ 15,9 %)	3,2 %	13,4 %
	Dyna.	0,2	1,34 (↓ 6,7 %)	1,95 (↓ 2,6 %)	3,3 %	13,6 %

Tabell 6.7: Resultat ved bruk av Gompertz-Makehams dødelegheitsmodell og
Brownsk barrieredødelegheitsmodell. I parentes er det oppgitt pro-
sentvis opp- og nedgang målt opp mot statisk modell. M =Modell,
PD = $\mathbb{P}(\text{default})$, PM = $\mathbb{P}(\text{Død})$, Polise κ_L = Poliseholder sitt
overskot, Kapital κ_E = Kapitalholder sitt overskot. δ = Deltakingsko-
effisienten

Frå tabell 6.7 ser vi at i ein statisk modell med $\sigma = 0,1$ er det liten eller ingen
skilnad på å bruke dei ulike dødelegheitsmodellane. Dette har samanheng
med at forventa overskot til polise- og kapitalholder er såpass lite at det ikkje
utgjør store skilnader i modellvalet. Det skjer òg svært få default på portefølja

i denne modellen, slik at tala på døde i løpet av kontraktperioden nesten er like i dei ulike dødelegheitsmodellane.

Den statiske modellen med $\sigma = 0,2$ og dei dynamiske modellane viser noko større skilnader ved bruk av dei ulike dødelegheitsmodellane. Kapitalholdarane vil få større overskot, og poliseholdarane vil få mindre overskot ved ein Brownsk dødelegheitsmodell istadenfor ein Gompertz-Makeham modell. Dette har samband med dei ulike utformingane på sannsynstettleikane til dødstidspunktet. Begge dødelegheitsmodellane tilfredstiller $\mathbb{P}(\tau_y \leq T) = 0,1363$, men sannsynstettleikane på $[0, T]$ er ulike.

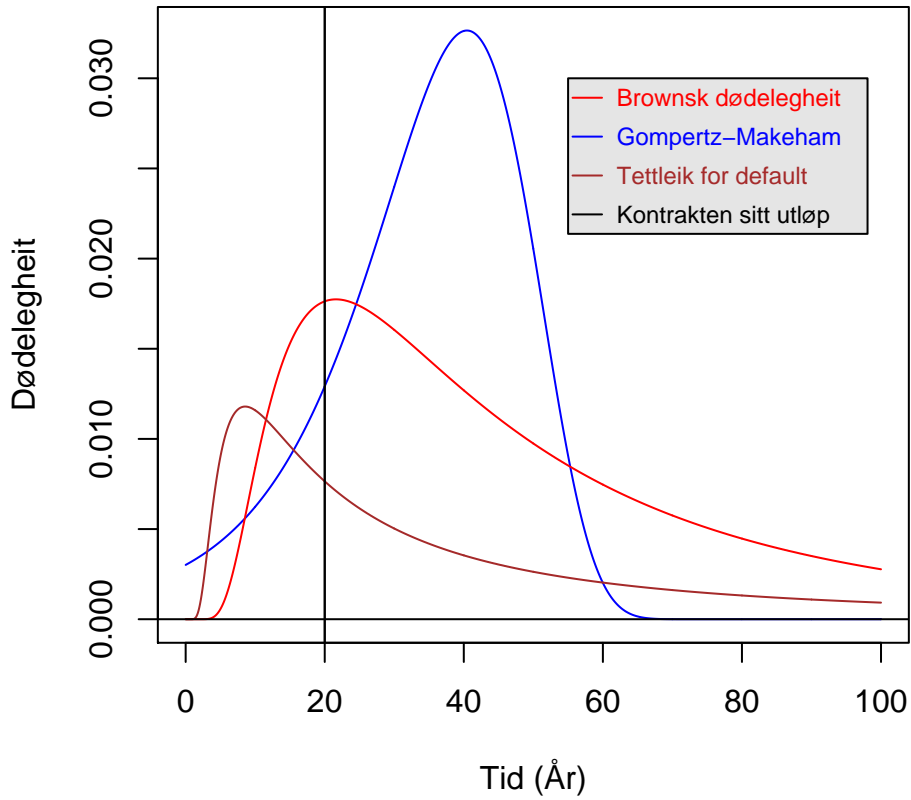
Figur 6.7 på neste side viser at sannsynstettleikane til dødstidspunkta i G-M og Brownsk modell har eit krysningsspunkt på tidsintervallet $[0,20]$. Ved å nytte funksjonsdrøfting på $f_{GM}(t|x = 40) - f_{\tau_y}(t) = 0$, finn vi at krysningsspunktet er ved $t \simeq 12,99$. Det vert observert at

$$\begin{aligned} f_{GM}(t|x = 40) \cdot dt &> f_{\tau_y}(t) \cdot dt && \text{for } t < 12,99 \\ f_{GM}(t|x = 40) \cdot dt &< f_{\tau_y}(t) \cdot dt && \text{for } t > 12,99 \end{aligned}$$

Vi hugsar at kapitalholdarane ved dødsfall har rett på heile verdien til portefølja, akkumulert fram til $t = T$. Portefølja A_t vil i ein Brownsk dødelegheitsmodell generelt ha lengre tid på å utvikle seg før eit evt. dødsfall inntreffer, enn i ein G-M modell. I lys av dette vil kapitalholdarane ha eit større forventet overskot ved bruk av ein Brownsk modell kontra ein G-M modell.

Begge dødelegheitsmodellane som har vorte undersøkt viser same verknad av den statiske og den dynamiske modellen. For eit selskap som i utgangspunktet følgjer ein statisk modell med $\sigma = 0,1$ er verknaden av å innføre ein dynamisk modell: Poliseholdarane og kapitalholdarane får auka overskot, samstundes vert defaultsannsynet holdt på eit akseptabelt lågt nivå. For eit selskap som følgjer ein statisk modell med $\sigma = 0,2$ er defaultsannsynet i utgangspunktet ganske høgt (over 13 %). Samstundes er også forventet overskot til polise- og kapitalholdar relativt stort. Verknaden av innføringen av ein dynamisk modell er at polise- og kapitalholdarane får eit noko mindre overskot, men den prosentvise nedgangen er låg. Defaultsannsynet vert pressa ned på eit akseptabelt lågt nivå (frå ca. 13 % til ca. 3 %).

Samanlikning av tettleikar



Figur 6.7: Dette plottet viser sannsynstettleiken til Gompertz-Makehams levetidsfordeling for 40-åringar, tettleiken til barrieredødelegheiten (Brownsk dødelegheit), og den defekte sannsynstettleiken for porteføljedefault med $\sigma = 0,2$.

6.7 Pensjonskasse

Chen og Bernard (2008) ser berre på ein forsikringsavtale med ein mogleg default på $[0, T]$. Ein alternativ situasjon er at ein tenkjer seg at dette er ein pensjonskasse, og at A_u er den einskilde pensjonsavtalen si behaldning. Vi kunne ha sett på $V_L(A_u; u)$ som eit uttrykk for den einskilde poliseholdar sin forventa reserve ved tid u , men vi kjem til å gjere nokre andre forutsetninger for denne modellen. Notasjon for poliseholdaren sin reserve ved tid u før pensjonsalder vert difor $S_L(A_u; u)$. Reserven til poliseholdaren ved tid t etter pensjonsalder vert V_t^P . Vi antar heilt analogt til artikkelen at formua A_u utviklar seg som ei GBM på tidsintervallet $[0, T]$. I Chen og Bernard (2008) startar ein med A_0 konstant. Vi vil no innføre ein stokastisk start $A_s > B_s$, og så sjå på default og død på intervallet $[s, s + T]$. Antek at $A_s \sim \mathcal{N}(100, 10^2)$. Ved dødsfall i kontraksperioden $[0, T]$ vil halvparten av reserven gå til kapitalholdarane og den andre halvparten vil gå til fordeling blant dei resterande poliseholdarane. Ved dødsfall *etter* kontraksperioden T går heile den resterande reserve til dei gjenlevande poliseholdarane. Vidare forutset vi at poliseholdarane vert pensjonert ved utløp av kontrakten, dvs. ved tid T . Dei har då krav på sin reserve utbetalt med eit kontinuerleg beløp K så lenge poliseholdaren er i live.

Vi nyttar Gompertz-Makehams modell for dødelegheit. Forventa utbetaling til polise- og kapitalholdar finn vi nokså analogt til artikkelen, jamfør formel 5.41 på side 54 og teorem 5.7.1 på side 55. Poliseholdarane sitt krav frå portefølja A_u , gitt ingen default, er som tidlegare

$$\Psi_L(A_T) = \delta[\alpha A_T - L_T]^+ + L_T - [L_T - A_T]^+$$

Kapitalholdarane sitt krav frå A_u , gitt ingen default er

$$\begin{aligned} \Psi_E(A_T) &= [A_T - L_T]^+ - \delta[\alpha A_T - L_T]^+ \\ &= [A_T - L_T]^+ - \delta\alpha[A_T - \frac{L_T}{\alpha}]^+ \end{aligned}$$

Poliseholdaren sin reserve ved tid T er gitt ved:

$$\begin{aligned} S_L(A_T; T) &= \Psi_L(A_T) \cdot \mathbf{1}(\tau_z > T, \tau_y > T) + \\ &\quad \mathbf{1}(\tau_z < T, \tau_z < \tau_y) \cdot \Theta_L(\tau_z) + \frac{1}{2}\Xi(A_T; T) \end{aligned}$$

Her er $\Xi(A_T; T)$ eit uttrykk for summen av reservane til poliseholdarane som døydde i intervallet $[0, T]$, akkumulert fram til tid T . $\Theta_L(\tau_z)$ er som i tidlegare kapittel utbetalinga $\min(\eta, 1)L_0e^{\delta\tau_z}$.

Kapitalholdaren sin reserve/utbetaling ved tid T (nådd pensjonsalder) er gitt ved

$$S_E(A_T; T) = \Psi_E(A_T) \cdot \mathbf{1}(\tau_z > T, \tau_y > T) + \quad (6.31)$$

$$\mathbf{1}(\tau_z < T, \tau_z < \tau_y) \cdot \Theta_E(\tau_z) + \frac{1}{2}\Xi(A_T; T) \quad (6.32)$$

Som i tidlegare kapittel er $\Theta_E(\tau_z)$ utbetalinga $\max(\eta - 1, 0)L_0e^{\delta\tau_z}$.

6.7.1 Pensjonsutbetalinga

Vi antar poliseholdaren vert pensjonert ved kontrakten sin slutt T og har rett på reserven $S_L(A_T; T)$. utbetalt med eit kontinuerleg beløp K fram til død. Vi ser på $S_L(A_T; T) = V_0^P$ som poliseholdaren sin reserve ved tid 0 etter pensjonsalder. Ved dødsfall etter pensjonsalder går heile reserven til dei andre poliseholdarane. Poliseholdaren vil ha rett på ei *kontinuerleg* utbetaling på K så lenge han er i live etter pensjonsalder. Notasjonsmessig skriv vi ζ for renteintensiteten og θ_{x+t} som notasjon for dødsintensiteten til ein $(x + t)$ -åring. Vidare er $\omega = 120$ maksimal levealder og V_t^P er poliseholdaren sin reserve ved tid t etter pensjonsalder. Vi antar at alle poliseholdarane er like gamle og har pensjonsalderen $x + T = \dot{x}$. Vi gjer bruk av Thieles differensiallikning for å finne eit uttrykk for K :

$$V_{t+dt}^P = (1 + \zeta dt)V_t^P + \theta_{\dot{x}+t}V_t^P \cdot dt - K \cdot dt \quad (6.33)$$

Ryddar litt og dividerer med $1 \cdot dt$ på kvar side av likskapsteiknet:

$$\frac{V_{t+dt}^P - V_t^P}{dt} = (\zeta + \theta_{\dot{x}+t}) - K$$

lar $dt \rightarrow 0$

$$\frac{dV_t^P}{dt} - (\zeta + \theta_{\dot{x}+t}) = -K$$

Det neste steget er å multiplisere inn integrerande faktor $e^{-\int_0^t \zeta + \theta_{\dot{x}+s} ds}$

$$\frac{d}{dt} \left(V_t^P \cdot e^{-\int_0^t \zeta + \theta_{\dot{x}+s} ds} \right) = -K e^{-\int_0^t \zeta + \theta_{\dot{x}+s} ds}$$

Integrerer på begge sider av likskapsteiknet frå 0 til $\omega - \dot{x}$, med omsyn på t . Nyttar oss av grensebetingelsane $V_{\omega-\dot{x}}^P = 0$ og $V_0^P = S_L(A_T; T)$

$$V_{\omega-\dot{x}}^P \cdot e^{-\int_0^{\omega-\dot{x}} \zeta + \theta_{\dot{x}+s} ds} - V_0^P e^0 = -K \int_0^{\omega-\dot{x}} e^{-\int_0^t \zeta + \theta_{\dot{x}+s} ds} dt$$

Dette medfører at

$$S_L(A_T; T) = K \int_0^{\omega-\dot{x}} e^{-\int_0^t \zeta + \theta_{\dot{x}+s} ds} dt \quad (6.31)$$

Vi snur på likninga over og får eit uttrykk for K :

$$K = \frac{S_L(A_T; T)}{\int_0^{\omega-\dot{x}} e^{-\int_0^t \zeta + \theta_{\dot{x}+s} ds} dt} = \frac{S_L(A_T; T)}{\int_0^{\omega-\dot{x}} t p_{\dot{x}} \cdot e^{-\zeta t} dt} \quad (6.31)$$

Poliseholderane får kontinuerleg utbetalt K .

Integralet $\int_0^{\omega-\dot{x}} e^{-(a+\zeta)t - \frac{b}{\ln(c)} \cdot (c^t - 1)c^{\dot{x}}} dt$ lar seg ikkje løyse analytisk. Vi kan bruke ulike framgangsmåtar for å approksimere dette integralet. Ved bruk av *trapesmetoden* kan vi finne ein grei approksimasjon. Vi deler tida t opp i intervaller på eit år og trekkjer så ei rett linje frå funksjonverdi til funksjonverdi. Integralet under kurva tilpassast på denne måten av mange små trapesar. I endepunkta nyttast kun halve funksjonverdien. Integralapproksimasjonen vert

$$\int_0^{\omega-\dot{x}} e^{-(a+\zeta)t - \frac{b}{\ln(c)} \cdot (c^t - 1)c^{\dot{x}}} dt \approx \frac{1}{2}D_0 + \frac{1}{2}D_{\omega-\dot{x}} + \sum_{i=1}^{\omega-\dot{x}-1} D_i$$

Her er D_i kommutasjonsfunksjonen:

$$D_i = e^{-(a+\zeta)i - \frac{b}{\ln(c)} \cdot (c^i - 1)c^{\dot{x}}} \quad (6.31)$$

Ved å nytte denne integralapproksimasjonen kan vi seie at pensjonen vert utbetalt med K kroner årleg.

6.7.2 Pensjonskassesimulering

Vi gjer $N = 100\,000$ simuleringar. Startverdien til formua er $A_s \sim \mathcal{N}(100, 10^2)$. I denne modellen tek vi som føresetnad at δ -verdien vert berekna på same måte som i modell med Gompertz-Makeham dødelegheit. Det er mogleg å rekne ut ein δ -verdi for kvar simulerte A_s , men for å gjere det enkelt nyttast

same δ -verdi i alle simuleringar med same initielle σ -verdi. Vi set som tidlegare $\delta = 90\% \cdot \hat{\delta}$, der $\hat{\delta}$ er løysinga av formel 6.11 på side 70. Pensjonsavtalane har ein kontraktperiode på T år, og alle poliseholdarane betaler eingongspremien $L_0 = \alpha A_0$. Vi antar at alle poliseholdare har alder $x_0 = 47$ ved starten av kontrakten, varigheita på kontrakten vert satt til $T = 20$ år. På denne måten vert poliseholdarane pensjonert ved nådde 67 år. Dersom poliseholdaren døyr ved tid $\tau_y \in [0, T]$ før pensjonsalder går $\frac{1}{2}S_L(A_{\tau_y}; \tau_y)$ til kapitalholdarane, medan den resterande reserven $\frac{1}{2}S_L(A_{\tau_y}; \tau_y)$ vert fordelt på dei gjenlevande poliseholdarane. Ved dødsfall etter kontraktperioden T går heile den resterande reserve til dei gjenlevande poliseholdarane.

Først ser vi på ein statisk modell der ein bereknar årlege pensjonsutbetalingar K til poliseholdarane, og overskotet κ_E til kapitalholdarane. Vi innfører så ein dynamisk modell som skal reflektere at reguleringsmyndigheita regulerer selskapet mellom ulike volatilitetsalternativ. Dersom $\mathbb{P}(\tau_z < T) > 0,04$ gjer reguleringsmyndigheita påbod om at selskapet skal velje det minst risikofylte volatilitetalternativet ($\sigma = 0,1$). Dersom $\mathbb{P}(\tau_z < T) < 0,04$ kan selskapet velje det mest volatile alternativet ($\sigma = 0,2$). Vidare undersøker vi korleis storleikane på pensjonsutbetalingane og overskotet til kapitalholdarane vert påverka av innføringa av ein dynamisk modell. Vi gjer $N = 100\,000$ simuleringar, for kvar simulering lyt vi no berekne

$S_L^i(A_T; T) =$ Poliseholdar i sin reserve ved pensjonsalder

$$\kappa_{\text{kapitalholdar}_i} = \frac{(\text{Kapitalholdar si forventa utbetaling ved tid } T) - (1 - \alpha) \cdot A_0}{(1 - \alpha) \cdot A_0}$$

$$\zeta_i = 1_{(A_t < B_t)} \quad , t \in [s, T]$$

For kvart dødsfall i $[0, T]$ akkumulerer vi $S_L(A_{\tau_y}; \tau_y)$ fram til tid T og fordeler halvparten på poliseholdarane som er i live ved tid T , den andre halvparten går til kapitalholdarane.

Vi nyttar følgjande estimatorar for den årlege pensjonsutbetalinga K , overskotet κ_E til kapitalholdarane og sannsynet χ for at portefølja skal gå til

default:

$$\hat{K} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N S_L^i(A_T; T)}{\frac{1}{2}(D_0 + D_{\omega-(\hat{x}+T)}) + \sum_{i=1}^{\omega-(\hat{x}+T)-1} e^{-(a+\zeta)i - \frac{b}{\ln(c)} \cdot (c^i - 1)c^{\hat{x}}}}$$

$$\hat{\kappa}_E = \frac{\sum_{i=0}^N \kappa_{\text{kapitalholder}_i}}{N}$$

$$\hat{\chi} = \frac{\sum_{i=0}^N \zeta_i}{N}$$

Vi vil no samanlikne dynamisk og statisk modell for ein pensjonskasse med startverdi $A_0 \sim \mathcal{N}(100,10)$. Vi nyttar parameterverdiane: $r = 0,03$, $\eta = 0,6$, $\alpha = 0,6$, $\mu_L = 0,04$, $\sigma_L = 0,1$, $\mu_H = 0,05$, $\sigma_L = 0,2$, $T = 20$.

100 000 simuleringar gjer følgjande tabell for statisk og dynamisk modell:

Type	σ	PD	$\mathbb{P}(\text{Død})$	PU	PU_H	κ_E
Statisk	0,1	0,16 %	23,07 %	5,21	6,78	1,00
Dynamisk	0,1	3,04 %	22,91 %	6,22 (↑ 19,4 %)	8,06 (↑ 18,9 %)	1,16 (↑ 16,0 %)
Statisk	0,2	13,19 %	21,13 %	5,93	7,52	1,58
Dynamisk	0,2	3,38 %	22,72 %	5,75 (↓ 4,8 %)	7,44 (↓ 1,1 %)	1,52 (↓ 3,8 %)

Tabell 6.8: Tabell som viser resultat frå pensjonskassesimuleringar.

PU =Pensjonsutbetaling til poliseholder.

PU_H =Pensjonsutbetaling gitt at poliseholder er i live ved pensjonsalder $\hat{x} + T$.

κ_E =Overskot til kapitalholder

PD = Sannsynet for at poliseholdaren døyr før T og før eit evt. defaulttidspunkt.

$\mathbb{P}(\text{Død})$ er sannsynet for å døy før pensjonsalder, og før eit evt. defaulttidspunkt.

I parentes er det oppgitt endringa i prosent frå dynamisk til statisk modell.

For ein pensjonskasse får vi det same generelle resultatet at for ein kasse som opprinneleg tek lite risiko ($\sigma = 0,1$), gjer innføringa av ein dynamisk modell at defaultsannsynet går litt opp, men vert holdt på eit respektabelt nivå. Samstundes er det auke i både den årlege pensjonsutbetalinga K og overskotet κ_E til kapitalholdarane. For ein kasse som opprinneleg tek mykje risiko ($\sigma = 0,2$), er verknaden av innføringa av ein dynamisk modell at defaultsannsynet går mykje ned, samstundes vert den årlege pensjonsutbetalinga K og overskotet κ_E til kapitalholdarane holdt på eit respektabelt nivå.

6.8 Stokastiske tilsyn med administrasjonskostnader

I modellane som er gjennomgått til no har vi sett vekk i frå administrasjonskostnader knytta til å rekapitalisere selskapet si portefølje A_t . Vi tek utgangspunkt i modellen skildra i avsnitt 6.6. I lys av Dangl og Lehar (2002) vil den nye modellen i tillegg ta omsyn til administrasjonskostnadene knytta til å byte risikobilete på portefølja (byte frå høg til låg volatilitet, eller omvendt). I tillegg vert det innført stokastiske tidspunkt for tilsyn av portefølja (*Random Audits*). Ved eit *tilsyn* vert portefølja re-evaluert og portefølja byter volatilitet σ dersom defaultsannsynet er tilstrekkeleg høgt/lågt, som i avsnitt 6.6. Dersom portefølja må byte risiko på tidspunkt t (i form av volatilitetsbyte), vil kA_t gå med til administrasjonskostnader knytta til å rekapitalisere portefølja. Vi antar vidare at tilsyn vil opptre som ein homogen Poisson prosess. Verdiprosessen til portefølja kan vi skrive som:

$$dA_t = \begin{cases} (\mu_H - \frac{1}{2}\sigma_H^2)A_t dt + \sigma_H dW_t, & A_t \text{ er ei høg-risiko portefølje} \\ (\mu_L - \frac{1}{2}\sigma_L^2)A_t dt + \sigma_L dW_t, & A_t \text{ er ei låg-risiko portefølje} \\ -kA_t, & \text{ved byte mellom risikobilete} \end{cases}$$

Her er W_t er ein Wiener prosess. Volatilitet og drift er σ_i og μ_i i høvesvis høg-risiko- og låg-risiko portefølje.

På grunn av ikkje-periodiske svingingar i marknaden er det naturleg at tilsyn av porteføljer ikkje skjer periodisk, men at tilsyna opptre uavhengig i tid. Av denne grunn vil det passe bra å simulere at tilsyna inntreffer stokastisk som ein homogen Poisson prosess med intensitet λ . Vi antar at det er forventa at det skjer omlag eitt tilsyn i året og modellerer så ein tilsynsteljar G , definert med den stokastiske differensiallikninga:

$$dG = \begin{cases} 1 & : \text{med sannsyn } \lambda dt \\ 0 & : \text{med sannsyn } (1 - \lambda) dt \end{cases}$$

$$G(0) = 0$$

Poisson prosessen vert definert som i Taylor og Karlin (1998)

Definisjon 6.8.1: Poisson prosess

Ein homogen Poisson prosess med intensitet λ er ein heiltallig stokastisk prosess $\{X(t); t \geq 0\}$ der:

- For kvart tidspunkt $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, er prosessinkrementa $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ uavhengige stokastiske variable

- For $s \geq 0$ og $t > 0$ er $X(s+t) - X(s)$ Poissonfordelt

$$\mathbb{P} \{ X(s+t) - X(s) = k \} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots$$

- $X(0) = 0$

Korollar 6.8.2

Ventetidene S_0, S_1, \dots, S_{n-1} mellom hendingane i Poisson prosessen er uavhengige stokastiske variable, der kvar ventetid er eksponensielt fordelt med sannsynstettleik

$$f_{S_k}(s) = \lambda e^{-\lambda s}, \quad s \geq 0 \quad (6.31)$$

Sjå Taylor og Karlin (1998, side 292) for eit enkelt bevis.

Kontraksperioden varer til tid T . Tidspunktet for det siste tilsynet før slutten på kontrakta kallar vi m . Vi tek som føresetnad at $m < T$, slik at det ikkje er mogleg med tilsyn akkurat på tidspunktet T . Vi modellerer utviklinga av ein volatilitetsbytande-kontrakt på følgjande måte:

- Simulerer dødstidspunktet for poliseholdar med Gompertz-Makehams levetidsfordeling
- Simulerer tilsynstidspunkta med ein Poisson prosess. Simulerer A_t som ei GBM mellom tilsynstidspunkta. Byter frå låg til høg volatilitet dersom $\mathbb{P}(\tau < T | \sigma = 0,1) < \epsilon$. Byter frå høg til låg volatilitet dersom $\mathbb{P}(\tau < T | \sigma = 0,2) > \epsilon$. Dersom det er naudsynt med eit volatilitetsbyte ved tid t må selskapet betale kA_t i administrative kostnader.
- Vurderer korleis verdien av portefølja skal fordelast mellom kapital- og poliseholdar. Ved dødsfall går heile formua til kapitalholdarane. Ved default får poliseholdar ein rabattbetaling på $\min(\eta, 1)L_0 e^{g\tau + r(T-\tau)}$ og kapitalholdaren får $\max(\eta - 1, 0)L_0 e^{g\tau + r(T-\tau)}$. Dersom det ikkje skjer default eller dødsfall i kontraksperioden vil porteføljeverdien bli fordelt

mellom kapital- og poliseholdaren etter same prinsipp som tidlegare, dvs. formel 5.22 på side 39 og 5.26 på side 42.

Eksempel 6.8.3: Tilsyn som Poisson prosess

Dette er eit enkelt døme som illustrerer simuleringa av ein Poisson prosess $\{X(t); t \geq 0\}$. Vi antar at det er forventa at det skjer *eitt* tilsyn av portefølja i året. Forventinga til ein Poisson prosess er

$$\mathbb{E}[X_t] = \lambda t \quad (6.31)$$

Vi deler året opp i eit gitt tal på tidseiningar. Til dømes kan ein seie at $t = 1000$ tidseiningar svarer til eit år. Kontrakta varer så til $T = 20000$. Poisson prosessen får intensiteten $\lambda = \frac{1}{1000}$. Vi modellerer tilsyna med følgjande **R**-kode:

```
>t=1000                # initiering
>T=20000              # initiering
>au=round(rexp(60,1/t)) # trekkjer 60 ventetider
>aud=cumsum(au)       # kumulativ sum av ventetidene
>m=which.max(sign(aud-(T-1)))-1 # siste tilsynstidspunkt
>tilsyn=aud[1:m]      # vektor med tilsynstidspunkter
>tilsyn
 [1] 585 1356 2205 2515 4324 5167 5449 5818 9339 13484 14186
 [12] 14532 15294 15881 19213 19845
```

Gjennomfører så 100 000 simuleringar for statisk og dynamisk modell med stokastiske tilsynstidspunkt som inkluderer administrative kostnader knytta til rekapitalisering av portefølja. Parameterverdier er: $\alpha = 0,6$, $\eta = 0,6$, $T = 20$, $A_0 = 100$, $\mu_H = 0,05$, $\mu_L = 0,04$, $\sigma_H = 0,2$, $\sigma_L = 0,1$, $k = 0,01$.

Modell	σ	δ	κ_L	κ_E	PD	PM
Statisk	0,1	1,21	1,14	1,28	0,10 %	13,74 %
Dynamisk	0,1	1,21	1,60	1,45	4,00 %	13,46 %
			(\uparrow 40,4 %)	(\uparrow 13,3 %)		
Statisk	0,2	1,01	1,45	1,93	13,29 %	12,55 %
Dynamisk	0,2	1,01	1,35	1,84	4,29 %	13,29 %
			(\downarrow 6,9 %)	(\downarrow 4,7 %)		

Tabell 6.9: Resultat frå dynamisk og statisk modell, poliseholdarar antas å vere 40 år ved starten av kontrakta.

PD = $\mathbb{P}(\text{default})$, PM = $\mathbb{P}(\text{Død})$, κ_L = Overskot til poliseholdar,

κ_E = Overskot til kapitalholdar. δ = Deltakingskoeffisienten.

I parenetes er det oppgitt endringa frå statisk til dynamisk modell

Det generelle resultatet er at ein dynamisk modell vil også i denne modellen føre med seg at for eit selskap som opprinneleg følgjer ein statisk modell med $\sigma = 0,1$ vil defaultsannsynet gå noko opp, men bli holdt på eit akseptabelt lågt nivå. Overskotet til kapital- og poliseholdarane vil auke med høvesvis 40,4 % og 13,3 %. For eit selskap som opprinneleg følgjer ein statisk modell med $\sigma = 0,1$ vert defaultsannsynet kraftig redusert, medan overskotet til polise- og kapitalholdarane avtar noko, men den relative nedgangen frå ein statisk modell er låg.

I simuleringane har vi nytta same parameterverdiar som vart nytta i avsnitt 6.6 og kan difor samanlikne tabell 6.9 på førre side og tabell 6.6 på side 88. Vi finn i store trekk dei same endringane frå statisk og dynamisk modell i begge tilfella. Om administrasjonskoeffisienten k hadde vore annleis kunne dette ha påverka simuleringresultata.

7

Avsluttande kommentarar

Denne oppgåva tek for seg rammeverket presentert i Grosen og Jørgensen (2002); Chen og Bernard (2008); Chen *et al.* (2008). Vi studerer generelt problemstillinga knytta til om innføringa av eit nytt solvensregelverk vil føre med seg at livsforsikringsselskap vert tvungen til å investere meir konservativt. Mykje av den tidlegare litteraturen innanfor fagfeltet har antatt at forsikringsselskap nyttar risikostyring med *konstant* volatilitet. For ein langsiktig kontrakt som ei livsforsikring er det ikkje realistisk å anta at forsikringsselskapa nyttar same volatiliteten i heile kontraktperioden. Det vil vere meir realistisk å anta at selskapa har ein investeringsstrategi og byter mellom ulike volatilitetsnivå i ulike tider.

Vi studerer fleire ulike modellar der det blant anna vert tatt omsyn til dødelgheit. Modell med stokastiske tilsynstidspunkt og modell med pensjonskasse vert undersøkt. Eit gjennomgåande resultat i oppgåva er at det faktum at selskapa har ein (eller vert pålagt ein) investeringsstrategi, sjølv ein særskild enkel strategi, i stor grad endrar resultat i analysen. Oppgåva har sett på fleire ulike dømer der ein har to ulike statiske modellar, og to dynamiske modellar som vekslar mellom dei to statiske modellane. Generelt har vi funne at ein dynamisk modell vil resultere i eit relativt lågt defaultsannsyn for selskapet, samstundes opprettheldt den dynamiske modellen relative store overskot til

både poliseholdar og kapitalholdar. Kontrollorganet kan påleggje selskapa å investere meir konservativt i periodar, men i det store og heile vert selskapa sine overskot i våre modellar i liten grad redusert.

Innføringa av Solvency II skal gje selskap moglegheiten til å kunne nytte interne modellar til å berekne solvensrisikoar. Ein bør vere merksam på at ein statisk modell, som nyttar konstant volatilitet, vil ignorere at selskapet har (eller vert pålagt) ein investeringsstrategi. Ved å ignorere dette kan kontraktar bli overprisa og risikoen overestimert. Modellane som har vore studert er forenkla modellar av røynda, men gjer allikevel eit reellt bilete av korleis ein dynamisk modell som tek omsyn til varierende volatilitet vil gje endringar frå resultatata i ein statisk modell med konstant volatilitet.

Ein alternativ realistisk modell til Grosen og Jørgensen (2002) sin modell kan vere ein Pariser-modell, som i prinsippet byggjer på den same modellen. I Chen og Suchaneki (2005) vert det generelle barriere-rammeverket utvida til å omhandle eit Pariser-rammeverk. Skilnaden er tidspunktet for når selskapet vert slått konkurs. I rammeverket til Grosen og Jørgensen (2002) blei selskapet stengd ned så snart portefølja A_t kryssa barrieria B_t . I ein *standard* Pariser-modell tenkjer ein seg at myndigheita ikkje stenger ned selskapet før portefølja har vore under barrieria i ein samanhengande periode på d tidseiningar. På denne måten kan selskapet redde seg inn igjen frå ein evt. konkurs, sjølv om dei skulle vere så uheldig å krysse barrieria før utløp av kontraktsperioden T .

I ein *kumulativ* Pariser-modell vert selskapet stengd ned så snart selskapet i sum har tilbrakt meir enn d tidseiningar under barrieria B_t . Ein vil i eit slikt rammeverk møte på utfordringa i å prise kumulative og standard Pariseropsjonar. I tidlegare litteratur er det fleire metodar som vert nytta for å evaluere slike opsjonar. Ein mykje brukt metode for standard Pariseropsjonar er den inverse Laplace-metoden. Denne blei originalt introdusert av Chesney *et al.* (1997). Resultata til Hugonnier (1999) og Moraux (2002) er metodar som gjerne vert brukt til evaluering av kumulative Pariseropsjonar.

A

Programmering

I denne oppgåva er det nytta statistikkprogrammet **R** for å utføre ein del berekningar. Sidan det vil vere for omfattande å leggje ved alle program, vil det i dei følgjande avsnitta bli presentert eit utvalg av dei programma som er nytta i denne oppgåva.

A.1 Gompertz-Makeham, Accept-reject algoritme

Accept-reject-algoritme for å simulere dødsfall som følgjer Gompertz-Makehams levetidsfordeling.

```
u=1/120 #uniform tettleik på [0,120]
T0=rep(0,1000) #initierer vektor for alder ved dødsfall
for(j in 1:1000){ #gjer 1000 simuleringer
  simuler=1
  while(simuler==1){
    U=runif(1) #trekker Uniform fordelt varibael på [0,1]
    V=runif(1) #trekker Uniform fordelt varibael på [0,1]
    Y=120*U #setter levealder
    sjekk=f(Y)/(4*u) #beregner accept kriteriet
```

```

        if(Y>40&V<=sjekk){T0[j]=Y;simuler=0} #sjekker accept-
            kriteriet
    }
}

```

A.2 Simulering av ei GBM

Simulerer ei GBM på $[0,1]$ og plotter den:

```

N=20000          #Definerer antall punkt
A0=100           #Startverdi for GBM
s=0.2           #Volatiliteten
delta=1/T        #Steglengden
drift=0.2        #Driftsparameteren
tider=(1:N)/N    #Tidsvektor
dW=rnorm(N,0,sqrt(delta)) #trekkjer N normalfordelte tal
W=cumsum(dW)     #den kummulative summen av desse tala
Z=my*tider+s*W   #Brownsk røyrsle
A=A0*exp(Z)      #Den geometriske brownske røyrsle
plot(tider,A,'l') #plotter GBM-en på [0,1]

```

A.3 Finne deltakingskoeffisienten i modell utan dødelegheit

```

A0=100 #Startkapital
a=0.4 #Poliseholdar sin del av startkapitalen, formua sin
      fordelingskoeffisient
n=0.4 #regueringsparameteren
L0=a*A0 #Kapitalholdar sin del av startkapitalen
B0=n*L0 #Barriere
r=0.03 #Risikofrirente r
s=0.2 #Volatiliteten til porteføla At
g=seq(0,0.09,0.0001) #Vektor med ulik garantirente g

```



```

T=20 #Kontraktperiode
delta=rep(0,length(g)) #initiering av vektor med
      deltakingskoeffisienter

dp=function(x,r,g,s,T){(log(x) + (r-g+0.5*s^2)*T)/(s*sqrt(T))}
dm=function(x,r,g,s,T){(log(x) + (r-g-0.5*s^2)*T)/(s*sqrt(T))}

E2=function(LT,A0,L0,s,r,g,B0){
  pay=LT*exp(-r*T)*(pnorm(dm(A0/B0,r,g,s,T)) - (A0/B0)^(1 - (2*(r-g)
    )/(s^2) )*pnorm( dm(B0/A0,r,g,s,T) ) )
  return(pay)
}

E3=function(LT,A0,L0,s,r,g,B0){
  -1*( LT*exp(-r*T)*( pnorm(-dm(A0/LT,r,0,s,T) ) - pnorm(-dm(A0/B0,
    r,g,s,T) ) ) -A0*(pnorm( -dp(A0/LT,r,0,s,T) ) - pnorm(-dp(A0/B0
    ,r,g,s,T))) - (A0/B0)^(1 - (2*(r-g))/(s^2) )*(LT*exp(-r*T)*(
    pnorm(-dm(B0^2/(A0*LT),r,0,s,T) ) - pnorm(-dm(B0/A0,r,g,s,T) ) )
    - (B0^2/A0)*( pnorm(-dp(B0^2/(A0*LT),r,0,s,T) ) - pnorm(-dp(B0
    /A0,r,g,s,T) ) ) ) )
}

EQ=function(n,A0,B0,r,g,s){
  pay=((min(n,1))/n)*A0*(pnorm(-dp(A0/B0,r,g,s,T)) + (A0/B0)^( -1 -
    (2*(r-g))/(s^2) )*pnorm(dp(B0/A0,r,g,s,T) ) )
  return(pay)
}

#for-løkke som finner deltakingskoeffisient-vektoren
for(i in 1:length(g)){
  finnd=function(d){
    LT=L0*exp(g[i]*T);
    X=LT*max(n,(1/a));
    pay=(d*a*( A0*pnorm(dp(A0/X,r,0,s,T)) - (LT/a)*exp(-r
      *T)*pnorm(dm(A0/X,r,0,s,T)) - (A0/B0)^(1 - (2*(r-g
      [i]))/(s^2) )*( (B0^2/A0)*pnorm(dp((B0^2/A0)/X,r,0,
      s,T) ) - (LT/a)*exp(-r*T)*pnorm(dm((B0^2/A0)/X,r,0,

```

```

        s,T)) )) + E2(LT,A0,L0,s,r,g[i],B0) + E3(LT,A0,L0,
        s,r,g[i],B0) + EQ(n,A0,B0,r,g[i],s) - L0)
    return(pay)
}
delta[i]=uniroot(finnd,c(0,2))$root #finner null-punkt ved
    uniroot-kommandoen
}

```

A.4 Simulering av ei portefølje utan dødelegheit

```

#Program som Monte-Carlo simulerer x antall kontraktar. Bereknar
    P(default) og overskot til polise- og kapitalholdar.
library(e1071)

my=0.04      # Diff.parameter
s=0.1       # Volatilitet
g=0.01      # Garantiprosent
myhatt= my-g-0.5*s^2 #Driftsparameter for substituert Brownsk
    bevegelse
a=0.6       #
r=0.03      # Risikofri rente
sim=100000  # Tal på simuleringer
ATS=rep(0,sim)
AT1=rep(0,sim)

det=0.8130628 # Deltakingskoeffisienten
n=0.6       # Reguleringsparameteren ( atar her at den er mindre
    enn 1)
A0=100      # Startkapital
L0=a*A0     # Poliseholdaren sin initielle kapital
B0=n*L0     # Barriera

#Funksjon som bereknar default sannsyn
P=function(n,L0,A0,myhatt,T,s){

```

```

sjekk=pnorm((log((n*L0)/A0)-myhatt*T)/(s*sqrt(T)))+(A0/(n*L0))
  ^((-2*myhatt)/(s^2))*pnorm((log((n*L0)/A0)+myhatt*T)/(s*sqrt
    (T)));
return(sjekk)
}
#Initiering :
L=rep(0,21)
A=rep(0,21)
B=rep(0,21)
A[1]=A0 #Startverdi portefølje
B[1]=B0 #Startverdi barriere
L[1]=L0 #Startverdi poliseholdar
prob=rep(0,20)
st=rep(0,20)
dW1=0
W1=0
N=1000 # Tal på punkter N som vi nyttar i eitt år i den eksakte
  løysinga av ein GBM
T=20 # Kontraktperioden
M=T*N # Tal på punkter i heile kontraktperioden
tider=(1:N)/N #Initiering av tidsvektor for eit år
Lttider=(1:M)/N #Initiering av tidsvektor over heile
  kontraktperioden
delta=T/M #Steglengd
mins=0 #Initiering av minimumsverdi til transformert brownsk
  røysle
ruinP=0
ruinD=0
u=seq(0,20,1)
B=B0*exp(g*u) # Årlege barrierreverdiar
L=B/n # Årlege L-verdier
W1=matrix(ncol=1000,nrow=T) #Initiering av Wiener-matrise
for(j in 1:sim){
  k=0
  konk=0
  i=0
  s=0.2 # Volatilitet

```

```

my=0.05 # Drift
A=rep(0,21)
A[1]=A0
for(o in 1:T){ #for-løkke som genererer Wienerprosess over
  heile kontraksperioden.
W1[o,]=rwiener()
}

while(i<T){ While-løkke med avhopp dersom barrieren blir
  kryssa
  i=i+1 # inkrement
  mins=0
  Z=0
  myhatt=my-g-0.5*s^2
  Z=(myhatt)*tider+s*W1[i,]+log(A[i]/B[i]) #
    Transformert brownsk røysle
  mins=min(Z) #Minimum til transformert brownsk
    røysle
  A[i+1]=B[i]*exp(Z[N]+g*tider[N]) #Bereknar siste
    element i A
  prob[i]=P(n,L[i+1],A[i+1],myhatt,T-i,s) # Kallar på
    defaultsannsyn funksjonen
  # Dersom default får poliseholdaren ein
    rabattutbetaling
  if(mins<0&i<T+1){
    ruinP=ruinP+1
    kryss=which.min(sign(sign(Z))-1) #finner
      tidspunkt for barrierekryss
    AT1[j]=B0*exp(g*(i+tider[kryss]))*exp(r*(T-(i+
      tider[kryss])))
    konk=1
    i=T+1
  }
  #Bereknar om P(default) er større eller mindre enn
    0.04, byttar evt. volatilitet og drift. Dersom
    ein ynkjer å simulere ein statisk modell kan ein
    her kommentere ut dei neste 11 linjene.

```

```

    if(mins>0&i<T){
        if(prob[i]>0.04){
            s=0.1
            my=0.04
        }
        if(prob[i]<=0.04){
            s=0.2
            my=0.05
        }
        st[i]=s
    }
}
#Dersom det ikkje skjer default er utbetalinga til poliseholdaren
:
    if(konk==0){
        if(a*A[i+1]-L[i+1] > 0){
            AT1[j]= det*(a*A[i+1]-L[i+1])
        }
        AT1[j]=AT1[j]+L[i+1]
        if(L[i+1] - A[i+1]>0){AT1[j]=AT1[j] - L[i+1] + A[i+1]}
    }
#Dersom det ikkje skjer default er utbetalinga til
kapitalholdaren:
    if(konk==0){
        if(A[i+1]-L[i+1] > 0){ATS[j]= (A[i+1]-L[i+1])}
        if(a*A[i+1]-L[i+1] > 0){ATS[j]=ATS[j] - det*(a*A[i+1]-
            L[i+1])}
    }
}

ruinP/j                # Defaultsannsyn
sum(AT1)/j              # V_L(AT)
((sum(AT1)/j)-L0)/L0   # Overskot til poliseholdar
sum(ATS)/j              # V_E(AT)
((sum(ATS)/j)-(1-a)*A0)/((1-a)*A0) # Overskot til kapitalholdar

```

A.5 Portefølje-simulering med Gompertz-Makeham

```
library(e1071)
my=0.04 #Drift-parameter
s=0.1 #volatilitet
g=0.01 #Garantiprosent
myhatt= my-g-0.5*s^2 #Driftsparameter for substituert Brownsk
    bevegelse
a=0.6 #Polikseholdaren sin andel av portefølja
r=0.03 #Risikofri rente
u=(1/120) #Sannsynstettleik for uniform fordeling
sim=100000 #Antal simuleringar
aa=5*10^(-4) #Gompertz-Makeham parameter
b=7.5858*10^(-5) #Gompertz-Makeham parameter
c=log(1.09144) #Gompertz-Makeham parameter

#Initiering:
ATS=rep(0,sim)
AT1=rep(0,sim)
T0=rep(0,sim)
problsjekk=rep(0,sim)

f=function(x){ #Sannsynstettleik til G-M's levetidsfordeling
exp(-aa*x-b/c*(exp(c*x)-1))*(aa+b*exp(c*x))
}

det=1.20250 #Deltakingskoeffisient

n=0.6 #Reguleringsparamteren
A0=100 #Startverdi til portefølje
L0=a*A0 #Startverdi poliseholdar
B0=n*L0 # Startverdi til barriera

P=function(n,L0,A0,myhatt,T,s){ #Funksjon som bereknar
    defaultsannsynet
```

```

sjekk=pnorm((log((n*L0)/A0)-myhatt*T)/(s*sqrt(T)))+(A0/(n*L0))
  ^((-2*myhatt)/(s^2))*pnorm((log((n*L0)/A0)+myhatt*T)/(s*sqrt
    (T)));
return(sjekk)
}

#initiering:
L=rep(0,21)
A=rep(0,21)
B=rep(0,21)
A[1]=A0
B[1]=B0
L[1]=L0
prob=rep(0,20)
#Tal på punkter N som me nyttar i eit år i den eksakte løysinga
  av ein GBM
N=1000
M=T*N

tider=(1:N)/N
Lttider=(1:M)/N
T=20
delta=T/M
mins=rep(0,1)
ruinP=0
ruinD=0
uu=seq(0,20,1)
B=B0*exp(g*uu)
L=B/n
LT=L[21]
portZ=0
tell=0
W1=matrix(ncol=N,nrow=T

for(j in 1:sim){ # for-løkke som simulerer portefølje og dødsfall
  simuler=1

```

```

mort=0
k=0
konk=0
doed=0
i=0
for(o in 1:T){
  W1[o,]=rwiener()
}
s=0.1
my=0.04
A=rep(0,21)
B0=n*L0
B=B0*exp(g*uu)
A[1]=A0
iii=N+1
ii=N+1 #Initiell verdi for doedstidspunkt. Settes lik N+1
for å passe med if-setningene lengre nede i programmet
defi=N+2
defaulttidspunkt=N #Initiell verdi for defaulttidspunkt.
Settes lik N+1 for å passe med if-setningene lengre nede
i programmet

#Dødelegheitsmodellen:
while(simuler==1){
  U=runif(1)
  V=runif(1)
  Y=120*U
  sjekk=f(Y)/(4*u)
  if(Y>40&V<=sjekk){T0[j]=Y-40;simuler=0;if(T0[j]<20){
    mort=1;tell=tell+1;ii=floor(T0[j]);iii=round((T0[j]
    ]-ii)*N)}}
  }
while(i<T){
  i=i+1
  mins=0
  Z=0
  myhatt=my-g-0.5*s^2

```



```

Z=myhatt*tider+s*W1[i,]+log(A[i]/B[i])
if(mort==1&i==i){AD=B[i];if(iii>0){ZZ=Z[iii]}else{ZZ
  =Z[1]}}
mins=min(Z)
A[i+1]=B[i]*exp(Z[N]+g*tider[N])
prob[i]=P(n,L[i+1],A[i+1],myhatt,T-i,s)

if(i==1){portZ=c(Z)}
if(i>1){portZ=c(portZ,Z)}

#Hvis default, finner vi tidspunkt for default
if(mins<0){defaulttidspunkt=which.min(sign(sign(Z))-1
  );defi=i;i=T+1}

if(mins<0&defi<=ii){
  ruinP=ruinP+1
  AT1[j]=B0*exp(g*(defi+tider[defaulttidspunkt]))
  *exp(r*(T-(defi+tider[defaulttidspunkt])))
  konk=1
  i=T+1
}
}
#Tester om defaultsannsynet er større eller mindre
enn 0.04 og bytter evt. volatilitet og drift
if(mins>0&i<T){
  if(prob[i]>0.04){
    s=0.1
    my=0.04
  }
  if(prob[i]<=0.04){
    s=0.2
    my=0.05
  }
}
#probsjekk[i]=s
}
}

```

```

if(mort==1&i<defi){
    #Dersom poliseholder dør før eller samtidig med
    porteføljedefault får selskapet porteføljeverdien
    ruinD=ruinD+1
    if(ii>0){B0=B[ii];B0=AD}
    if(iii>0){time=tider[iii]}
    if(iii==0){time=0}
    ATS[j]=B0*exp(ZZ+g*time)*exp(r*(T-(ii+time)))
    doed=1
}

#Utbetalinga til poliseholderen:
if(konk==0&doed==0){
    if(a*A[i+1]-L[i+1] > 0){
        AT1[j]= det*(a*A[i+1]-L[i+1])
        #ST[j]= det*(a*A[i+1] - LT)
    }
    AT1[j]=AT1[j]+L[i+1]
    if(L[i+1] - A[i+1]>0){AT1[j]=AT1[j] - L[i+1] + A[i+1]}
}
if(konk==1){AT1[j]=AT4[j]}

#Utbetalinga til shareholderen:
if(konk==0&doed==0){
    if(A[i+1]-L[i+1] > 0){ATS[j]= (A[i+1]-L[i+1])}
    if(a*A[i+1]-L[i+1] > 0){ATS[j]=ATS[j] - det*(a*A[i+1]-
        L[i+1])}
}
if(doed==1){ATS[j]=ATS[j]+ATD[j]}
}
ruinP
ruinD
(sum(AT1)/j)
((sum(AT1)/j)-L0)/L0

```

```
sum(ATS)/j
((sum(ATS)/j) - (1-a)*A0)/((1-a)*A0)
```

A.6 Simulering med stokastiske tilsyn og administrative kostnader

```
library(e1071)
my=0.04 #Drift-parameter
s=0.1 #Volatilitet
myhatt= my-g-0.5*s^2 #Driftsparameter for substituert Brownsk
  bevegelse
g=0.01 #Garantiprocent
a=0.6 #Risikofri rente
r=0.03 g=0.01 #Garantiprocent
u=(1/120) #Sannsynstettleik for uniform fordeling
sim=100000 #Antal simuleringer
aa=5*10^(-4) #Initiering av Gompertz-Makeham
b=7.5858*10^(-5) #Initiering av Gompertz-Makeham
c=log(1.09144) #Initiering av Gompertz-Makeham
kost=0.01 #Administrative kostander i prosent av
  porteføljeverdien

ATS=rep(0,sim) #Initiering
AT1=rep(0,sim) #Initiering
T0=rep(0,sim) #Initiering
problsjekk=rep(0,50) #Initiering

f=function(x){
  exp(-aa*x-b/c*(exp(c*x)-1))*(aa+b*exp(c*x))
}

#40åringar sin deltakingskoeffisient
det=1.206250 #s=0.1
#det=1.007948 #s=0.2
```

```

n=0.6 #Reguleringsparameter
A0=100 #Startvedi for portefølje
L0=a*A0 #Poliseholder sin del av startverdien
B0=n*L0 #Barriere-start

# Funksjon som berekner sannsyn for porteføljedefault
P=function(n,L0,A0,myhatt,T,s){
sjekk=pnorm((log((n*L0)/A0)-myhatt*T)/(s*sqrt(T)))+(A0/(n*L0))
      ^((-2*myhatt)/(s^2))*pnorm((log((n*L0)/(A0))+myhatt*T)/(s*sqrt
      (T)));
return(sjekk)
}

prob=rep(0,20)
N=1000 #Initiering
T=20 #Kontraktperiode
M=T*N
delta=T/M # Steglengde
mins=0 #Initiering
ruinP=0 #Initiering
ruinD=0 #Initiering
portZ=0 #Initiering
tell=0 #Initiering
W1=list(rep(0,N)) #Initiering

for(j in 1:sim){ for-løkke som simulerer portefølje, dødsfall og
tilsynstidspunkt
  au=round(rexp(60,1/1000))
  aud=cumsum(au)
  m=which.max(sign(aud-M+1))-1
  W1=list(rep(0,m))
  A=rep(0,m+1)
  simuler=1
  mort=0
  k=0
  konk=0

```

```

doed=0
i=0
s=0.1
my=0.04
B0=n*L0
B=c(B0,B0*exp(g*(aud[1:m]/1000)))
L=B/n
A[1]=A0
# Dødelegheitsmodellen:
while(simuler==1){
  U=runif(1)
  V=runif(1)
  Y=120*U
  sjekk=f(Y)/(4*u)
  if(Y>40&V<=sjekk){T0[j]=Y-40;simuler=0;if(T0[j]<20){
    mort=1;tell=tell+1;ii=floor(T0[j]);iii=round((T0[j]
    ]-ii)*1000);doedsum=ii*1000+iii;ll=ii}else{doedsum
    =N*20+1;iii=N*20+1;ii=N*20+1}}
}
#Simulerer Wienerprosessen mellom tilsynstidspunkta
for(o in 1:m){
  if(au[o]==0){au[o]=1}
  W1[[o]]=rwiener(au[o]/1000)
  if(o==m){W1[[o]]=rwiener((T*1000-aud[o-1]/1000)}
}
defi=N*20+2
defaulttidspunkt=N*20 #initiell verdi for defaulttidspunkt.
  Settes lik N+1 fordi det passer med if-setningene
  lengre nede i programmet

while(i<m){
  i=i+1
  mins=0
  Z=0
  tider=(1:au[i])/N
  if(i==m){siste=T*1000-aud[i-1];tider=(1:siste)/N}
}

```

```

# rwiener()-kommandoen er ikkje heilt stabil, må
# derfor lage ein sjekk på at tider-vektoren og W1[[
# i]]-vektoren er like lang, viss ikkje må W1[[i]]-
# vektoren jenkes til.
if(length(tider)<length(W1[[i]])){W1[[i]]=W1[[i]][1:(
length(W1[[i]]-1)]]}
if(length(W1[[i]])<length(tider)){W1[[i]]=c(W1[[i]],
W1[[i]][length(W1[[i]])])}
myhatt=my-g-0.5*s^2
if(i<=m){Z=myhatt*tider+s*W1[[i]]+log(A[i]/B[i]);gZ=Z}
# produserer Z-vektoren
if(mort==1&doedsum<sum(au[1:i])){if(i==1){iii=au[1]-
doedsum}else{iii=doedsum-sum(au[1:(i-1)])};FF=B[i]
*exp(Z[iii]+g*tider[iii]);i=m+1}
if(mort==1&doedsum==sum(au[1:i])){iii=0;FF=B[i];i=m+1}

mins=min(Z)
A[i+1]=B[i]*exp(Z[au[i]]+g*tider[au[i]])
if(i==m){A[i+1]=B[i]*exp(Z[siste]+g*tider[siste])}
if(m>i){prob[i]=P(n,L[i+1],A[i+1],myhatt,(aud[m]-aud[
i])/1000,s)}

if(i==1){portZ=c(Z)}
if(i>1){portZ=c(portZ,Z)}

if(mins<0){defaulttidspunkt=which.min(sign(sign(Z)-1)
);defi=defaulttidspunkt+sum(au[1:(i-1)]);i=m+1}

if(mins<0&defi<=doedsum){
ruinP=ruinP+1
AT1[j]=B0*exp(g*(defi/1000))*exp(r*(aud[m]/1000-
defi/1000))
konk=1
i=m+1
}
if(mins>0&i<m){

```

```

        olds=s
        if(prob[i]>0.04){
            s=0.1
            my=0.04
        }
        if(prob[i]<=0.04){
            s=0.2
            my=0.05
        }
        if(s!=olds){A[i+1]=(1-k)*A[i+1]}
        probsjekk[i]=s
    }
}

if(mort==1&doedsum<defi){
    #Dersom poliseholder døyr før eller samtidig med
    porteføljedefault får selskapet porteføljeverdien
    ruinD=ruinD+1
    ATS[j]=FF*exp(r*(aud[m]/1000-(doedsum/1000)))
    doed=1
}

#Utbetalinga til poliseholderen:
if(konk==0&doed==0){
    if(a*A[i+1]-L[i+1] > 0){
        AT1[j]= det*(a*A[i+1]-L[i+1])
        #ST[j]= det*(a*A[i+1] - LT)
    }
    AT1[j]=AT1[j]+L[i+1]
    if(L[i+1] - A[i+1]>0){AT1[j]=AT1[j] - L[i+1] + A[i+1]}
}

#if(konk==1){AT1[j]=AT4[j]}

#Utbetalinga til shareholderen:
if(konk==0&doed==0){
    if(A[i+1]-L[i+1] > 0){ATS[j]= (A[i+1]-L[i+1])}
}

```

```

        if(a*A[i+1]-L[i+1] > 0){ATS[j]=ATS[j] - det*(a*A[i+1]-
            L[i+1])}
    }
    if(doed==1){ATS[j]=ATS[j]+ATD[j]}
}

ruinP/j
ruinD/j
(sum(AT1)/j)
((sum(AT1)/j)-L0)/L0
sum(ATS)/j
((sum(ATS)/j) - (1-a)*A0)/((1-a)*A0)

```


Litteratur

- Aalen O.O. og Gjessing H. (2001). «Understanding the shape of hazard rate: A process point of view». *Institute of Mathematical Statistics*, **volum 16, No.1**, side 1–14. DOI: 10.1214/ss/998929473. Referert til på side 73.
- Aasmundsen S. (2004). «Simulation, week 8: Life insurance». **volum 1**, side 1–7. Referert til på side 86.
- Björk T. (2004). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press. Referert til på side 11, 12, 13, 15 og 16.
- Briys E. og Varenne F.d. (1995). «On the risk of life insurance liabilities: Debunking some common pitfalls». *The Wharton Financial Institution*, side 1–9. URL: <http://www.jstor.org/stable/253891>. Referert til på side 39.
- Chen A. og Bernard C. (2008). «On the regulator-insurer-interaction in a structural model». *Journal of Economic Literature Classification*, **volum 23**, side 1–23. DOI: 10.1016/j.cam.2008.04.026. Referert til på side 1, 5, 28, 36, 39, 41, 60, 61, 81, 92 og 103.
- Chen A., Bernard C. og Palmer A. (2008). «The cost of regulation under Solvency 2». *Journal of Economic Literature Classification*, **volum 7**, side 1–7. URL: <http://www1.fee.uva.nl/pp/bin/761fulltext.pdf>. Referert til på side 5, 84 og 103.
- Chen A. og Suchanec M. (2005). «Default risk, bankruptcy procedures and the market value of life insurance liabilities». side 231–255. DOI: doi:10.1016/j.insmathco.2006.04.005. Referert til på side 104.
- Chesney M., Jeanblanc-Picqu'e M. og Yor M. (1997). «Brownian excursions and Parisian barrier options». *Advances in Applied Probability*, side 165–184. DOI: 10.1239/jap/1067436086. Referert til på side 104.

- Dangl T. og Lehar A. (2002). «Value-at-risk vs. building block regulation in banking». *Journal of Financial Intermediation*, side 1–54. DOI: 10.2139/ssrn.243652. Referert til på side 98.
- Grosen A. og Jørgensen P. (2002). «Life insurance liabilities at market value: An analysis of insolvency risk, bonus policy, and regulatory intervention rules in a barrier option framework». *The Journal of Risk and Insurance*, **volum 69**, **No.1**, side 63–91. URL: <http://www.jstor.org/stable/1558640>. Referert til på side 1, 28, 39, 43, 44, 47, 103 og 104.
- Hugonnier J. (1999). «The Feynman-Kač formula and pricing occupation time derivatives». *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, side 153–178. Referert til på side 104.
- Jørgensen P.L.J. (2004). «On accounting standards and fair valuation of life insurance and pension liabilities». *Journal*, side 372–394. DOI: 10.1080/03461230410000556. Referert til på side 1.
- Morau F. (2002). «On pricing cumulative Parisian options». *Finance*, side 127–132. Referert til på side 104.
- Norberg R. (1998). *Basic Life insurance mathematics*. Referert til på side 83.
- P. Robert C. og Casella G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer Texts in Statistics. Referert til på side 85.
- Ross S.M. (1993). *Probability Models*. Academic Press Limited. Referert til på side 15.
- Shreve S.E. (2004). *Stochastic calculus for finance. II*. Springer Finance. Springer-Verlag. ISBN 0-387-40101-6. Continuous-time models. Referert til på side 10, 15, 20, 22 og 24.
- Taylor H.M. og Karlin S. (1998). *An introduction to stochastic modeling*. Academic Press Inc., tredje utgåve. ISBN 0-12-684887-4. Referert til på side 98 og 99.
- Van Hulle K. (2006). «Aimes and general outlines of Solvency 2». *Kredittilsynets Jubileumsskrift, Erfaringer og Utfordringer, 20 år som integrert finanstillsyn*, **volum 1**, side 90–96. URL: http://www.kredittilsynet.no/archive/stab_pdf/01/03/5Kapi011.pdf. Referert til på side 4 og 5.