

# Norsk lakseoppdrett:

## Optimal investering med hensyn til eksogen oppdrettsformue

av

Torhild Østenå Larsen

**Masteroppgave**

Masteroppgaven er levert for å fullføre graden

Master i samfunnsøkonomi

Universitetet i Bergen, Institutt for Økonomi

Desember 2014

UNIVERSITETET I BERGEN



## **Forord**

Denne oppgaven markerer slutten på mine fem år som student ved Universitetet i Bergen. Arbeidet med masteroppgaven har vært en spennende, frustrerende og utfordrende prosess.

Jeg vil takke min veileder Bjørn Sandvik for forslag av oppgave. Bjørn har utvist tålmodighet og kommet med gode tilbakemeldinger under fullførelsen av denne oppgaven. Dette har styrket oppgaven og min egen evne til kritisk tenkning.

Jeg vil også takke mine foreldre, Thor Magne og Anne Tove, og min bror, Thor Kristian, som har bidratt med korrekturlesning og moralsk støtte når arbeidet med oppgaven har vært utfordrende.

*Torhild Østenå Larsen*

---

Torhild Østenå Larsen, Stavanger 1. desember 2014

# Sammendrag

---

**Norsk lakseoppdrett: Optimal investering med hensyn til eksogen oppdrettsformue**

av

**Torhild Østenå Larsen, Masterstudie i Samfunnsøkonomi**

Universitetet i Bergen, 2014

Veileder: Bjørn Sandvik

---

Mange investorer fokuserer kun på forventet avkastning tilknyttet sin disponible formue når de skal investere i usikre verdipapirer, og tar ikke hensyn til sin totalformue. Totalformue består gjerne av en disponibel investeringsformue og en fastlåst formue man beholder uavhengig risiko og forventet avkastning. Denne oppgaven viser hvordan man reduserer risikoen til totalformuen for en gitt forventet avkastning ved å ta hensyn til eksogen formue i investeringsbeslutningen.

Oppgaven ser spesifikt på norsk lakseoppdrett. Man betrakter et individ med en totalformue som inkluderer usikre verdipapirinvesteringer og en oppdrettsformue. Verdien på oppdrettsformuen er usikker og individet ønsker å opprettholde sin eierposisjon i oppdrettsforetaket uavhengig av forventet avkastning og risiko. Denne oppgaven viser at individet oppnår en gevinst i form av økt meravkastning ved å holde en portefølje som tar hensyn til oppdrettsformuen fremfor en portefølje uten hensyn til oppdrettsformuen. Noe som indikerer at individet risikerer å gå glipp av en risikofri gevinst ved og ikke ta hensyn til oppdrettsformuen i investeringsbeslutninger.

Optimeringsproblemene i oppgaven er løst ved hjelp av Microsoft Excel.

# Innholdsfortegnelse

Forord .....	ii
Sammendrag .....	iii
Innholdsfortegnelse .....	iv
Figurer .....	vi
Tabeller .....	vii
1.0 Innledning .....	1
1.1 Bakgrunn for oppgaven .....	1
1.2 Oppgavens oppbygning .....	2
2.0 Oslo Børs .....	4
2.1 Sektorinndeling på Oslo Børs .....	4
3.0 Moderne porteføljeteori .....	9
3.1 Porteføljevalgsmodellen .....	9
3.1.1 Logikken bak porteføljevalgsmodellen .....	10
3.2 Porteføljevalgsmodellen med eksogen formue .....	13
3.2.1 Innledning og notasjon .....	14
3.2.2 Individets sluttformue .....	14
3.2.3 Individets tilpasning .....	16
3.2.4 Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue .....	19
3.3 Samvariasjon .....	22
4.0 Datagrunnlag og antakelser .....	23
4.1 Antakelser .....	23
4.1.1 Verdimål på oppdrettsformuen .....	23
4.1.2 Risikofri rente .....	27

4.2 Datagrunnlag .....	28
5.0 Samvariasjon .....	31
5.1 Samvariasjon mellom sektorinvesteringene .....	31
5.2 Samvariasjon mellom sektorinvesteringene og oppdrettsformuen .....	33
6.0 Forventede avkastning .....	36
6.1 Kapitalverdimodellen .....	37
6.2 Empirisk testing av kapitalverdimodellen .....	39
6.3 Estimering .....	41
6.3.1 Statistiske begreper .....	43
6.3.2 Estimerte beta-koeffisienter og forventet avkastningsrater .....	44
6.3.3 Forventet avkastningsrater for sektorene og den eksogene formue .....	45
7.0 Markedsporteføljen .....	47
8.1 Optimale porteføljer uten restriksjoner .....	50
8.1.1 Optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue .....	50
8.1.2 Optimal portefølje med eksogen formue .....	52
8.1.3 Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue .....	56
8.2 Optimale porteføljer med restriksjoner .....	57
8.2.1 Optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue .....	58
8.2.2 Optimal portefølje med hensyn til eksogen formue .....	59
8.2.3 Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue ved fravær av kort-salg .....	62
9.0 Oppsummering og avsluttende kommentar .....	64
9.1 Veien videre .....	64

## Figurer

Figur 1: Valg av optimal portefølje med to usikre verdipapirer .....	11
Figur 2: Valg av portefølje med to usikre og ett sikker verdipapir .....	12
Figur 3: Inndeling av sjømatsektoren på Oslo Børs .....	24
Figur 4: Historisk utvikling i aksjekursen til Grieg Seafood .....	26
Figur 5: Historisk utvikling i OSEAX fra juni 2007 til desember 2013 .....	29
Figur 6: Markedsporteføljen.....	48
Figur 7: Totale investeringer i usikre verdipapirer for ulike størrelser på eksogen formue.....	55
Figur 8: Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue .....	56
Figur 9: Totalt investert i usikre verdipapirer for ulike størrelser på eksogen formue ved fravær av kort-salg.....	61
Figur 10: Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue ved fravær av kort-salg.....	63

## Tabeller

Tabell 1: Offisiell sektorinndeling på Oslo Børs i henhold til GICS .....	5
Tabell 2: Sektorenes prosentvise andel av OSEAX i henhold til GICS.....	7
Tabell 3: Oppgavens sektorinndeling av Oslo Børs .....	8
Tabell 4: Korrelasjonsmatrise .....	32
Tabell 5: Korrelasjonsvektor mellom oppdrettsformuen og sektorinvesteringene .....	34
Tabell 6: Forutsetninger ved bruk av MKM .....	42
Tabell 7: Estimerte beta-koeffisienter .....	44
Tabell 8: Forventet avkastningsrater .....	46
Tabell 9: Optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue.....	51
Tabell 10: Optimal portefølje med hensyn til eksogen formue.....	53
Tabell 11: Optimal portefølje uten eksogen formue ved fravær av kort-salg .....	58
Tabell 12: Optimal portefølje med hensyn til eksogen formue ved fravær av kort-salg.....	60

## 1.0 Innledning

Moderne porteføljeteori bygger på forutsetningen om at et rasjonelt individ er interessert i avkastning og risiko tilknyttet sin totalformue ved valg av optimal portefølje. Det antas til vanlig at individets investerbare formue tilsvarer individets totalformue. Spørsmålet en stiller er hva som er individets optimale portefølje – hvordan skal individet investere en gitt initialformue og hvordan skal porteføljen verdsettes. Det fremkommer at individet bør holde en bred sammensatt portefølje av ulike verdipapirer. Grunnideen er at det å spre formuen over flere verdipapirer gir mindre risiko for en gitt forventet avkastning.

I praksis er det lite trolig at hele individets formue er investerbar, da verdier kan være bundet opp i objekter slik at andel av formue som er tilgjengelig for investeringer i verdipapirmarkedet reduseres. En utvidelse av porteføljeteorien som inkluderer individets fastlåste formue, er mer hensiktsmessig for å undersøke individets valg av optimal portefølje når det eksisterer en slik formue. Denne oppgaven betrakter et individ med en eksogen oppdrettsformue og sammenligner individets optimale porteføljer med og uten hensyn til oppdrettsformuen. Videre tar oppgaven for seg hvordan individets optimale tilpasning endrer seg når det tas hensyn til oppdrettsformuen og tilhørende gevinst potensiale.

## 1.1 Bakgrunn for oppgaven

På grunn av naturlige fortrinn som lang kystlinje og dype fjorder har Norge alltid vært en fiskerinasjon. På 1980-tallet startet man med oppdrett av laks i storskala og i dag står Norge for mer enn 50 prosent av det globale tilbudet av laks. I denne sammenheng kan det være interessant å undersøke hvorvidt eiere av oppdrettsforetak er tjent med å ta hensyn til oppdrettsformuen ved valg av optimal investering i usikre verdipapirer. Verdien på oppdrettsformuen er usikker. Den påvirkes av den øvrige markedsutviklingen og produksjonsforhold som til en viss grad ligger utenfor individets kontroll. Dermed avhenger ikke risikoen til individets totalformue av verdipapirinvesteringene alene, men risikoen til sluttformuen avhenger også av usikkerheten tilknyttet oppdrettsformuen. Ved valg av optimal investeringsprofil kan det derfor tenkes at



individet går glipp av en mulig gevinst dersom det kun tar hensyn til investerbar formue fremfor totalformue.

## 1.2 Oppgavens oppbygning

Oppgaven undersøker hvilken gevinst individet oppnår av å ta hensyn til oppdrettsformuen og analysen begrenses til det norske verdipapirmarkedet. Kapittel 2 gir en presentasjon av Oslo Børs, som forklarer børsens rolle i det norske verdipapirmarkedet og inndelingen av selskaper og sektorer på Oslo Børs.

Kapittel 3 gir en teoretisk fremstilling av porteføljevalgmodellen med og uten hensyn til eksogen formue. Fremstillingen viser hvordan individets optimale portefølje endres når det tas hensyn til en eksogen formue, og hvilken gevinst individet oppnår av å ta hensyn til en eksogen formue. Ved valg av portefølje er man avhengig av å vite hvordan verdien til ulike verdipapirer varierer med hverandre. Dette forklares nærmere i kapittel 3. Kapittel 3 danner fundamentet for analysen i oppgaven, da modellen anvendes til å beregne individets optimale porteføljer.

Kapittel 4 gjennomgår oppgavens valg av tidsperiode og datagrunnlag. Videre presenteres antakelsene som ligger til grunn for analysen.

I kapittel 5 presenteres oppgavens beregner av samvariasjonen mellom sektorene på Oslo Børs, samt samvariasjonen mellom oppdrettsformuen og sektorene.

Oppgaven anvender kapitalverdimodellen til å verdsette individets investeringsmuligheter og oppdrettsformue. Kapittel 6 presenterer kapitalverdimodellen og oppgavens estimering av forventet avkastning. Kapittel 7 beregner markedsporteføljen som brukes i beregningen av individets optimale porteføljer.

Resultatene av oppgavens analyse presenteres i kapittel 8. Kapittel 8.1 angir individets optimale porteføljer med og uten hensyn til oppdrettsformuen uten restriksjoner. Videre beregnes individets gevinst av å ta hensyn til oppdrettsformuen for ulike størrelser på oppdrettsformuen. Kapittel 8.2 viser hvordan individets optimale porteføljer endres når det legges restriksjoner som forhindrer individet å holde korte posisjoner. Deretter undersøkes hvilken gevinst individet

oppnår av å ta hensyn til oppdrettsformuen. Resultatene i kapittel 8.1 og 8.2 sammenlignes slik at man ser hvordan restriksjoner påvirker individets optimale porteføljer.

Kapittel 9 avrunder oppgaven ved å oppsummere hovedresultatene i oppgaven. Videre diskuteres svakheter med datagrunnlaget og modellene i oppgaven.

## 2.0 Oslo Børs

Oslo Børs er Norges eneste regulerte markedsplass for handel av verdipapirer. Børsen har som hovedformål å være den sentrale markedsplassen for notering og omsetning av finansielle instrumenter i Norge (Oslo Børs, 2013a). Norges rolle innen shipping, energi og sjømat gjenspeiles på Oslo Børs. Målt i antall noterte selskaper er Oslo Børs den største shipping-børsen i Europa og nest størst i verden (Oslo Børs, 2013b), mens den er nest størst i Europa på energi generelt og nest størst i verden på oljeservice spesielt (Oslo Børs, 2013c). Videre har Oslo Børs vokst frem som verdens største og viktigste finansielle markedsplass for sjømatsektoren (Oslo Børs, 2013d).

Selv om handel av verdipapirer i praksis foregår på tvers av landegrensener antar oppgaven at Oslo Børs utgjør hele verdipapirmarkedet. Dette er en streng antakelse, men den gjør det mulig å gjennomføre analysen basert på tilgjengelig data. Til fordel for antakelsen argumenterer Næs, Skjeltrops og Ødegaard (2008:19) at analyse av ett marked bør ta utgangspunkt i en markedsportefølje for det nasjonale verdipapirmarkedet fremfor en internasjonal markedsportefølje. Av den grunn bør det benyttes en bred markedsindeks for det aktuelle markedet til å definere markedsporteføljen. *Markedsporteføljen* er en verdiveid portefølje bestående av alle verdipapirer i et marked (ibid). Vektingen av verdipapirene bestemmes av verdien på verdipapiret relativt til verdien av markedsporteføljen.

## 2.1 Sektorinndeling på Oslo Børs

Alle selskapene på Oslo Børs klassifiseres med en sektortilhørighet basert på *Global Industry Classification Standard (GICS)* (Oslo Børs; 2013e). Klassifiseringen gjøres på 4 nivåer, hvor det er 10 sektorer, 24 industrigrupper, 62 bransjer og 132 undernivåer på bransjer (ibid). Et selskap blir tilordnet en GICS-klassifisering basert på sin viktigste forretningsaktivitet, og det er selskapets salgssinntekter som avgjør forretningsaktivitet (Næs, Skjeltrops og Ødegaard, 2008:6). Oslo Børs innførte den offisielle GICS-klassifiseringen i 1997 og det eksisterer ingen klassifisering før dette (ibid). Implementeringen av GICS-klassifiseringen gikk ikke knirkefritt og markedtsdata for en del av sektorene er noe mangelfull for perioden rett etter 1997. For å unngå

problemer som følge av mangelfullt datagrunnlag vil det være hensiktsmessig å ta bort markededata for perioden rett etter 1997. I denne oppgaven benyttes klassifisering på sektornivå. Navn, kode og tilhørende bransjegrupper for de 10 GICS-sektorene er gitt i tabell 1.

Tabell 1: Offisiell sektorinndeling på Oslo Børs i henhold til GICS

Kode	Sektor	Bransjegrupper
10	Energi	Energi
15	Materialer	Materialer
20	Industri	Kapitalvarer, Kommersielle tjenester og leveranser, Transport
25	Forbrukervarer	Biler og komponenter, Forbruksvarer og klær, Konsumenttjenester, Media, Detaljhandel
30	Konsumentvarer	Mat og apotekhandel, Drikkevarer, mat og tobakk, Husholdningsvarer og personlige produkter
35	Helsevern	Helsevernutstyr og tjenester, Farmasi og bioteknologi
40	Finans	Banker, Finansieringsselskaper, Forsikring, Eiendomsselskaper
45	Informasjonsteknologi (IT)	Programvare og tjenester, Teknologisk utstyr, Halvledere og -utstyr
50	Telekommunikasjon og tjenester	Telekommunikasjon og tjenester
55	Forsyningsselskaper	Forsyningsselskaper

*Tabell 1: Offisiell sektorinndeling av selskaper notert på Oslo Børs i henhold til Global Industry Classification Standard. Selskaper tilknyttet fiskerinæringen inngår i sektoren for konsumvarer.*

Et naturlig utgangspunkt for å definere markedsporteføljen er hovedindeksen på Oslo Børs, Oslo Stock Exchange Benchmark Index (OSEBX). OSEBX er en investerbar indeks som inneholder et representativt utvalg av alle noterte aksjer på Oslo Børs (Oslo Børs, 2013f). Dette er imidlertid problematisk dersom markedsporteføljen er definert som en verdiveid portefølje bestående av *alle* verdipapirer i markedet. Av den grunn er det uheldig å bruke OSEBX til å definere markedsporteføljen da den bare inkluderer et representativt utvalg av de børsnoterte selskapene på Oslo Børs.

Totalindeksen på Oslo Børs kalles *Oslo Stock Exchange All-Share Index (OSEAX)* og inkluderer alle selskapene på børsen (Oslo Børs, 2013g). Dette taler for at OSEAX er egnet til å definere markedsporteføljen. Den statlige eierandel av verdipapirer på Oslo Børs er høy og i løpet av 2014 økte eierandelen til den norske stat til 37,1 prosent. Dermed har den norske stat passert utenlandske investorer som den største aksjonærgruppen på Oslo Børs (Oslo Børs, 2014a). Dette taler for at OSEBX bør brukes fremfor OSEAX som referanseindeks for Oslo Børs, da OSEBX er *friflytjustert*, dvs. at aksjer som ikke er tilgjengelige for markedet er fjernet. Benyttes OSEAX til å definere markedsporteføljen inkluderer porteføljen verdipapirer som i utgangspunktet ikke er tilgjengelig i markedet. Dette er uheldig dersom oppgaven løses for et individ som har anledning til å gjennomføre betydelige investeringer. Da denne oppgaven betrakter et individ som en liten aktør, er problematikken tilknyttet utilgjengelige verdipapirer i markedsporteføljen av mindre betydning. Individet har ikke anledning til å kjøpe større andeler av en sektor eller selskap. Av den grunn er det mindre relevant at OSEAX ikke er friflytjustert.

Ved hjelp av GISC kan sektorene uttrykkes som en andel av OSEAX. Sektorenes andel av OSEAX avhenger av verdien til verdipapirene som inngår i sektoren. Tabell 2 viser sektorenes prosentvise andel av OSEAX.

Tabell 2: Sektorenes prosentvise andel av OSEAX i henhold til GICS

Sektor	Prosentvis andel
Energi	45,40
Materialer	7,79
Industri	4,90
Forbruksvarer	5,88
Konsumvarer	7,13
Helsevern	0,18
Finans	15,11
IT	2,54
Telekommunikasjon	10,40
Forsyninger	0,67
Totalportefølje	100

Tabell 2: Offisiell sektorinndeling på Oslo Børs

Tabell 2 viser at energisektoren utgjør i underkant av femti prosent av markedsverdien for selskaper notert på Oslo Børs. Dette er uheldig for resultatene i den videre analysen, da energisektoren vil dominere enhver portefølje uavhengig av sektorens egenskaper i kraft av dens relative størrelse. Statoil er det største selskapet på Oslo Børs, og utgjør alene nærmere tretti prosent av den totale markedsverdien. For å redusere energisektorens relative størrelse, trekkes Statoil (STL) ut av energisektoren og behandles som en egen sektor. Dette resulterer i at energisektorens relative størrelse reduseres, mens Statoil nå er den største enkeltsektoren. Videre gjør oppgaven en ytterlig endring i den offisielle sektorinndelingen. Med tanke på oppgavens problemstilling er det interessant å observere fiskerinæringen som en egen sektor. Det vil gjøre det mulig å observere hvordan investeringer i fiskerinæringen varierer med den eksogene oppdrettsformuen i en optimal portefølje. På bakgrunn av dette trekkes alle selskaper tilknyttet fiskerinæringen ut av konsumvaresektoren og behandles som en egen sjømatsektor.<sup>1</sup> Når fiskerinæringen trekkes ut av konsumvaresektoren er det kun Orkla som utgjør konsumvaresektoren. Av den grunn refererer oppgaven til Orkla fremfor konsumvaresektoren.

<sup>1</sup> Grieg Seafood trekkes ut av sjømatsektoren. Årsaken til dette forklares nærmere i kapittel 4.

Tabell 3 angir oppgavens endelig sektorinndeling av individets investeringsmuligheter på Oslo Børs.

Tabell 3: Oppgavens sektorinndeling av Oslo Børs

Sektor	Markedsandel
Statoil	23,80
Energi (u. Statoil)	20,16
Finans	15,52
Telekommunikasjon	12,19
Materialer	6,93
Forbruksvarer	5,46
Industri	5,43
Sjømat (u. Grieg) <sup>2</sup>	4,12
Orkla	2,54
IT	2,38
Helsevern	0,70
Forsyninger	0,66
<b>Totalt</b>	<b>99,90</b>

*Tabell 3: Oppgavens endelig sektorinndeling når Statoil og fiskerinæringen (eksklusive Grieg Seafood) behandles som individuelle sektorer. Sektorene er gitt som prosentvise andel av OSEAX.*

<sup>2</sup> Fordi Grieg Seafood trekkes ut av sjømatsektoren og behandles ikke som en egen sektor, refererer man kun til sjømatsektoren i den videre analysen.

### 3.0 Moderne porteføljeteori

Moderne porteføljeteori tar utgangspunkt i arbeidet til Harry Markowitz (1952). Her trekkes det frem at valg av portefølje kan deles inn i to faser. Først observerer man markedet og bygger forventninger til ulike verdipapirer, som gir relevante forventinger om fremtidig verdi. Deretter avgjør forventningene hvilke verdipapirer som inkluderes i porteføljen (Markowitz, 1952:77).

### 3.1 Porteføljevalgmodellen

Markowitz (1952:77-78) argumenterer for at risikoen til en portefølje kan minimeres uten at avkastning reduseres dersom det investeres i ulike verdipapirer. Porteføljevalgmodellen forsøker å konstruere optimale porteføljer basert på ideen om diversifisering og bygger på følgende forutsetninger:

1. Én-periode modell hvor individer holder samme investering gjennom hele perioden.
2. Rasjonelle individer som maksimerer nytte for en gitt initialbeholdning. Individene baserer sine beslutninger på forventet avkastning og varians.
3. Fri tilgang til korrekt informasjon om avkastning og risiko.
4. Effektive markeder som absorberer informasjon raskt og korrekt.
5. Individene er risikoaverse – risikoeksponering må kompenseres med økt forventet avkastning.

(Bowen, 1984:19)

Investeringsbeslutninger avhenger av forventet avkastning og risiko, som måles ved standardavviket til avkastningen. Formålet med porteføljevalgmodellen er å konstruere porteføljer som maksimerer forventet avkastning og minimerer standardavviket. *Forventningen* til en stokastisk variabel,  $x$ , defineres som gjennomsnittet av alle verdiene variabelen kan ta,  $x_i$ , og sannsynlighetsfordelingen,  $p(x_i)$ , som angir sannsynligheten for alle verdiene  $x$  kan ta:

$$E[x] = \sum_i x_i p(x_i)$$



Variansen til en stokastisk variabel  $x$ ,  $\sigma_x^2$ , er et mål på spredning omkring forventningsverdien:

$$\sigma_x^2 = E[x_i - E(x)]^2 = \sum_i [x_i - E(x)]^2 p(x_i)$$

Standardavviket,  $\sigma_x$ , forteller oss hvor mye variabelen i gjennomsnitt avviker fra forventningsverdien, og er gitt ved kvadratroten til variansen. Kovariansen er et mål på den lineære sammenhengen mellom to variabler,  $x$  og  $y$ , og er gitt ved:

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - E(x))(y - E(y))] = \sum_i [x_i - E(x)][y_i - E(y)]p(x_i, y_i)$$

(Thomas:2005,181:216).

### 3.1.1 Logikken bak porteføljevalgsmodellen

La  $V$  være individets sluttformue og anta at man observerer en portefølje med to verdipapirer, notert ved  $i = 1, 2$ . Individet har en gitt formue lik 1 som kan investeres i verdipapir 1 eller verdipapir 2, eller kombinasjoner av verdipapirene, slik at  $1 = a_1 + a_2$ , hvor  $a_i$  er andel av formuen plassert i verdipapir  $i$ . Forventet avkastning til porteføljen er  $\mu_i = E(p_i) = [1 + E(r_i)]$ , hvor  $p_i$  er avkastningen og  $r_i$  er avkastningsraten til verdipapir  $i$ . Risikoen til verdipapir  $i$  er gitt ved variansen,  $\sigma_i^2$ . Forventet avkastning til sluttformuen og risikoen til sluttformuen er da henholdsvis:

$$(3.1) \quad \mu_V = a_1 E(p_1) + (1 - a_1) E(p_2)$$

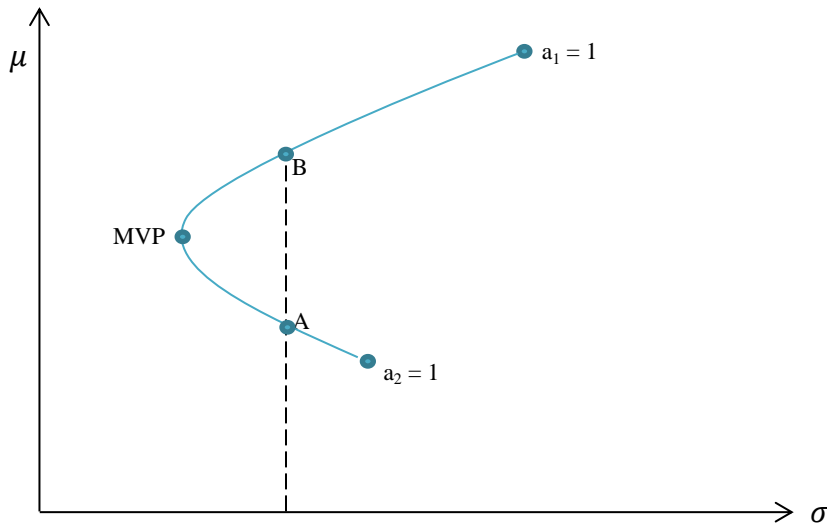
$$(3.2) \quad \sigma_V^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + (1 - a_1)^2 \sigma_2^2 + 2a_1(1 - a_1)\sigma_{12}$$

For en gitt kovarians mellom verdipapir 1 og 2,  $\sigma_{12}$ , kan man ved hjelp av uttrykk (3.1) og (3.2) finne individets optimale portefølje. Figur 1 gir en grafisk fremstilling av individets porteføljevalg.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Fremstillingen av porteføljevalgsmodellen tar utgangspunkt i Statistisk Sentralbyrå (1995:27-28) hvis ingen annen kilde er oppgitt.

Figur 1: Valg av optimal portefølje med to usikre verdipapirer



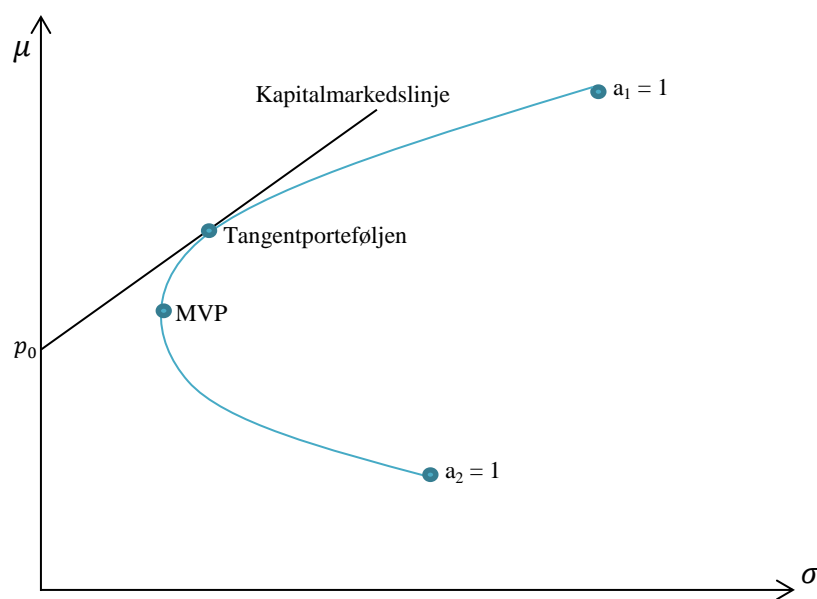
Figur 1: Ved å kombinere to usikre verdipapirer reduserer man risiko og øker forventet avkastning

Forventet avkastning er gitt langs den vertikale linjen og risiko er gitt langs den horisontale linjen. Kurven angir forventet avkastning og risiko for ulike kombinasjoner av verdipapir 1 og 2. Ved å kun investere i verdipapir 1 eller 2 får man en tilpasning i henholdsvis  $a_1$  og  $a_2$ . For ulike kombinasjoner av verdipapir 1 og 2 flyttes tilpasningspunktet langs kurven. Et rasjonelt individ holder ikke porteføljer mellom  $a_2$  og MVP, da man oppnår høyere forventet avkastning og lavere risiko for enhver portefølje til venstre langs kurven. Kurven mellom  $a_1$  og MVP angir individets effektive porteføljer. *Effektive porteføljer* er porteføljer som gir høyest mulig avkastning for en gitt risiko. Dette ser man ved å betrakte portefølje A og B hvor risikoen til porteføljene er lik, men portefølje B gir høyere forventet avkastning enn portefølje A. Derfor vil et rasjonelt individ alltid velge portefølje B fremfor A. *Minimumvariansporteføljen (MVP)* er den effektive porteføljen som gir lavest mulig risiko. Individets endelige valg av effektiv portefølje avhenger av individets grad av risikoaversjon, dvs. individets motvilje for å ta risiko. Et risikoavert individ vil holde minimum varians porteføljen. Når grad av risikoaversjon avtar velger individet å holde en effektiv portefølje til høyre for MVP.

Anta at det introduseres et risikofritt verdipapir med avkastning  $p_0 = 1 + r_0$ , hvor  $r_0$  er risikofri rente. Variansen til sluttformuen i uttrykk (3.2) forblir uendret, mens forventet sluttformue skrives som  $\mu_V = x_0 p_0 + a_1 E(a_1) + (1 - a_1) E(a_2)$ , hvor  $x_0$  er individets plassering i det sikre verdipapiret.  $a_1$  og  $a_2$  er plasseringene i de to usikre verdipapirene. Figur 2 viser

hvordan introduksjonen av et sikkert verdipapir påvirker valg av portefølje. Hvis individet plasserer all sin kapital i det sikre verdipapiret er  $a_1 = a_2 = 0$  og forventet avkastning er lik risikofri rente. Dersom individet ønsker høyere forventet avkastning må investeringen eksponeres for risiko. Uavhengig av risikoaversjon har man en optimal portefølje bestående av markedsporteføljen og det sikre verdipapiret. Den optimale porteføljen befinner seg et sted langs *kapitalmarkedslinjen*, men eksakt hvor avhenger av individets grad av risikoaversjon.<sup>4</sup> Jo høyere grad av risikoaversjon individet har, jo lengre til venstre ligger individets optimale portefølje på kapitalmarkedslinjen (høyere innsalg av det sikre verdipapiret). Tangeringspunktet mellom kapitalmarkedslinjen og den effektive-kurven angir porteføljen hvor individet får best betalt for å ta risiko. Denne porteføljen kalles *tangentporteføljen*.

Figur 2: Valg av portefølje med to usikre og ett sikker verdipapir



Figur 2: Kombinasjon av to usikre og ett sikkert verdipapir.

<sup>4</sup> Kapitalmarkedslinjen representerer effektive porteføljer med sikre og usikre investeringer. Helningen på kapitalmarkedslinjen viser hvor mye individet får igjen for å ta risiko. Jo større helningen er, jo bedre betalt får individet for risikoeksponeringen.

Ved å ta en «kort-posisjon» i det sikre verdipapiret kan individet oppnå en tilpasning til høyre for tangentporteføljen.<sup>5</sup> Da låner individet en andel av det sikre verdipapiret for å selge det videre til dagens kurs, slik at kapital fristilles til å investere i det usikre verdipapirmarkedet. Dersom kursen på det sikre verdipapiret faller kan det kjøpes tilbake for en lavere pris, og individet tilbakebetaler lånet med en gevinst på transaksjonen. En slik transaksjon har et begrenset gevinstpotensial tilsvarende kursverdien på transaksjonstidspunktet, da kursen på et verdipapir ikke kan være negativ. På den andre siden kan et verdipapir stige tilnærmet ubegrenset og en slik kursoppgang vil medføre store tap for individet.

### **3.2 Porteføljevalgsmodellen med eksogen formue**

Porteføljevalgsmodellen skiller ikke mellom disponibel investeringsformue og totalformuen til individet. Porteføljevalgsmodellen med eksogen formue tar hensyn til at individer i tillegg til sin investerbare kapital har en gitt formue man beholder uavhengig av risiko og forventet avkastning. Eksempelvis kan man ha et ønske om å beholde egen bolig uavhengig av forventet gevinst, da bolig anses som en nødvendighet. Det kan tenkes at enkelte velger å beholde investeringer i enkeltforetak for å sikre kontroll over foretaket, mens andre verdier i praksis er vanskelig eller umulig å selge i et fritt marked, som kunnskap og ferdigheter (humankapital).

Porteføljevalgsmodellen med eksogen formue viser hvordan risikoen til totalformuen gitt en fastlåst formue, kan reduseres gjennom kjøp og salg av verdipapirer. Resultatet er en portefølje som er optimal i forhold til å minimere individets samlede risiko for en gitt avkastning, og ikke bare risikoen til verdipapirinvesteringen isolert.<sup>6</sup>

Denne oppgaven betrakter et individ med en eksogen oppdrettsformue. Individet eier et lite oppdrettsforetak og ønsker å opprettholde sin eierposisjon i foretaket. På samme måte som et usikkert verdipapir er verdien på oppdrettsformuen usikker, da verdien påvirkes av markeds- og

---

<sup>5</sup> Lange posisjoner – kjøper og eier et verdipapir i påvente av en verdistigning. Korte posisjoner – låner et verdipapir for en gitt periode i påvente av en verdinedgang.

<sup>6</sup> Fremstillingen av porteføljevalgsmodellen med eksogen formue tar utgangspunkt Sandvik (2013:155-158) dersom ingen annen kilde er oppgitt.

naturkrefter som til en viss grad er utenfor individets kontroll. Forskjellen mellom oppdrettsformuen og usikre verdipapirer er at individet ønsker å beholde oppdrettsformuen uavhengig av verdiendring. Da individet i oppgaven har en fastlåst oppdrettsformue, er det hensiktsmessig å utlede porteføljevalgmodellen som tar høyde for eksogen formue.

### 3.2.1 Innledning og notasjon

Anta et individ med en egenkapital lik 1. Egenkapitalen består av en sikker investering  $x_L$  og oppdrettsformuen med verdi lik  $x_E$ . Den sikre investeringen,  $x_L$ , er typisk en negativ investering og kan betraktes som et risikofritt lån. Oppdrettsformuen har en usikker avkastning  $\tilde{p}_E = 1 + r_E$ , hvor  $r_E$  er den usikre avkastningsraten til oppdrettsformuen. Egenkapitalen er da gitt som:  $x_L + x_E = 1$ . Individet kan bruke egenkapitalen til å investere i det sikre verdipapiret 0 med avkastning  $p_0$  og de usikre verdipapirene 1, ...,  $n$  med priser i dag  $\mathbf{p}_0 = (p_{10}, \dots, p_{n0})$  og usikker avkastning  $\tilde{\mathbf{p}} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$ .<sup>7</sup> Forventet avkastning på oppdrettsformuen er  $x_E \tilde{p}_E$ .

Anta at individet i tillegg til oppdrettsforetaket, holder en verdipapirportefølje lik  $(a_0, \mathbf{a})$ , hvor  $a_0$  er individets plassering i det sikre verdipapiret og  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  er individets plasseringer i usikre verdipapirer. Siden individet allerede har investert sin egenkapital i oppdrettsforetaket og usikre verdipapirer, er budsjettbetingelsen for ytterligere verdipapirinvesteringer  $a_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{1} = 0$ .<sup>8</sup> Budsjettbetingelsen sier at ytterligere investeringer i verdipapirmarkedet må lånefinansieres da  $a_0 = -\mathbf{1}^T \mathbf{a}$ .

### 3.2.2 Individets sluttformue

Individet er interessert i sluttverdien til sin totalformue og oppgaven definerer individets sluttformue,  $\tilde{x}$ , som:

$$(3.3) \quad \tilde{x} = x_E \tilde{p}_E + x_L p_0 + a_0 p_0 + \tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{a}$$

<sup>7</sup> Notasjon i uthevet skrift defineres som en vektor eller en matrise. Vektorene er i utgangspunktet kolonnevektorer.

<sup>8</sup> Her er  $\mathbf{a}^T$  den transponerte vektoren til  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  er en enhetsvektor.

Her er  $x_E \tilde{p}_E + x_L p_0$  den eksogene sluttformuen og  $a_0 p_0 + \tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{a}$  er sluttformuen til verdipapirinvesteringene. Hvis man bruker budsjettbetingelsen til å eliminere  $a_0$  og lar  $x_L = 1 - x_E$ , kan uttrykket for sluttformuen omformuleres til:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\mathbf{a}) &:= x_E \tilde{p}_E + (1 - x_E) p_0 + (-\mathbf{1}^T \mathbf{a}) p_0 + \tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{a} = x_E \tilde{p}_E + p_0 - x_E p_0 - \mathbf{1}^T \mathbf{a} p_0 + \tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{a} \\ (3.4) \qquad &= x_E (\tilde{p}_E - p_0) + p_0 + (\tilde{\mathbf{p}} - p_0 \mathbf{1})^T \mathbf{a} \end{aligned}$$

### Forventet sluttformue

La  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  være forventet avkastning til verdipapirinvesteringene, mens  $\mu_E = E(\tilde{p}_E)$  er forventet avkastning til oppdrettsformuen. Forventet sluttformue med usikre investeringer er da:

$$(3.5) \qquad \mu_{\tilde{x}(\mathbf{a})} = x_E (\mu_E - p_0) + p_0 + (\boldsymbol{\mu} - p_0 \mathbf{1})^T \mathbf{a}$$

Risikopremien for investeringen i oppdrettsanlegget og de usikre verdipapirinvesteringene er henholdsvis  $\varepsilon_E := \mu_E - p_0$  og  $\boldsymbol{\varepsilon} := \boldsymbol{\mu} - p_0 \mathbf{1}$ .<sup>9</sup> Setter inn  $\varepsilon_E$  og  $\boldsymbol{\varepsilon}$  i uttrykk (3.5) og får:

$$(3.6) \qquad \mu_{\tilde{x}(\mathbf{a})} = x_E \varepsilon_E + p_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{a}$$

### Variansen til avkastningen

Variansen til individets sluttformue avhenger av variansen til oppdrettsformuen, variansen til verdipapirinvesteringene, kovariansen mellom verdipapirinvesteringene og kovariansen mellom oppdrettsformuen og verdipapirinvesteringene. Målet til oppgaven er å minimere variansen til sluttformuen for en gitt avkastning. La  $\boldsymbol{\Sigma}$  være kovariansmatrisen mellom avkastningene til individets investeringsmuligheter.<sup>10</sup>

Generelt er variansen til fremtidsverdien til en portefølje med usikre verdipapirer,  $\mathbf{a}$ :

$$(3.7) \qquad \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}$$

<sup>9</sup> Risikopremie er differansen mellom forventet fremtidig verdi og prisen på verdipapiret i dag, og angir meravkastningen som individet oppnår i løpet av en gitt investeringsperiode.

<sup>10</sup> Kovariansmatrisen forklares nærmere i kapittel 5.

Når oppdrettsformuen er en ekstra usikkerhetskilde må uttrykk (3.7) utvides, slik at oppdrettsformuen inkluderes. Dette gjøres ved å la  $\mathbf{c}_E = (c_{E1}, \dots, c_{En})$  være en kolonnevektor av kovarianser mellom avkastningene til oppdrettsformuen og de usikre investeringsmulighetene, hvor  $i = 1, \dots, 12$  angir sektorene i tabell 3. Variansen til fremtidsverdien til sluttformuen er da:

$$(3.8) \quad \sigma_{\tilde{x}(\mathbf{a})}^2 = [x_E \quad \mathbf{a}] \begin{bmatrix} \sigma_E^2 & \mathbf{c}_E \\ \mathbf{c}_E^T & \mathbf{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_E \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{a} + x_E^2 \sigma_E^2 + 2x_E \mathbf{a}^T \mathbf{c}_E$$

### 3.2.3 Individets tilpasning

Ettersom oppdrettsformuen er fastlåst, kan ikke denne delen av individets portefølje endres for å redusere variansen til totalporteføljen. Det er derfor ønskelig å finne verdipapirinvesteringen,  $(a_0, \mathbf{a})$ , som minimerer variansen til totalporteføljen. For en gitt forventet avkastning,  $\mu$ , kan variansen til totalformuen minimeres gjennom et minimeringsproblem.<sup>11</sup> Minimeringsproblemet løses ved hjelp av Lagrange-metode gitt sidevilkåret  $\mu_{\tilde{x}(\mathbf{a})} \geq \mu$ . Gitt uttrykk (3.6) innebærer dette sidevilkåret at  $x_E \varepsilon_E + p_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{a} \geq \mu$ . For å kunne sammenligne analysen med og uten hensyn til oppdrettsformuen innføres en risikopremie til verdipapirinvesteringene med hensyn til oppdrettsformuen  $\varepsilon := \mu - x_E \mu_E - x_0 p_0$ . Sidevilkåret for individet minimeringsproblem kan da skrives som  $\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{a} \geq \varepsilon$ . Individets minimeringsproblem kan da skrives som:

$$(3.9) \quad \min_{\mathbf{a}} \sigma_{\tilde{x}(\mathbf{a})}^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{a} + x_E^2 \sigma_E^2 + 2x_E \mathbf{a}^T \mathbf{c}_E \quad \text{sidevilkår } \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon$$

Lagrange-funksjonen blir da:

$$(3.10) \quad L = \mathbf{a}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{a} + x_E^2 \sigma_E^2 + 2x_E \mathbf{a}^T \mathbf{c}_E - \lambda(\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon)$$

Førsteordensvilkåret for minimering:

$$(3.11) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}} = 2\mathbf{a}^T \mathbf{\Sigma} + 2x_E \mathbf{c}_E^T - \lambda \boldsymbol{\varepsilon}^T = 0$$

Førsteordensvilkåret (3.11) kan nå løses for de usikre verdipapirinvesteringene  $\mathbf{a}$ . Ved transponering får man  $2\mathbf{\Sigma} \mathbf{a} + 2x_E \mathbf{c}_E = \lambda \boldsymbol{\varepsilon}$ . Fordi  $\mathbf{\Sigma}$  er en symmetrisk matrise er  $\mathbf{\Sigma}^T = \mathbf{\Sigma}$ , og siden den er positiv definit har den en invers matrise. Venstre-multipliserer uttrykk (3.11) med  $\mathbf{\Sigma}^{-1}$  og får:

<sup>11</sup> Når oppgaven anvender faktiske markedsdata er  $\mu$  forventet avkastning til markedsporteføljen.

$$\begin{aligned}
(3.12) \quad & \Sigma^{-1}(2\Sigma\mathbf{a} + 2x_E\mathbf{c}_E) = \Sigma^{-1}\lambda\boldsymbol{\varepsilon} \\
& 2\mathbf{a} = \Sigma^{-1}(\lambda\boldsymbol{\varepsilon} - 2x_E\mathbf{c}_E) \\
& \mathbf{a} = \Sigma^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{\varepsilon} - x_E\mathbf{c}_E\right)
\end{aligned}$$

For å finne en endelig løsning for  $\mathbf{a}$  må  $\lambda$  elimineres. Det gjøres ved å sette inn for  $\mathbf{a}$  i det transponerte sidevilkåret:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon}^T\Sigma^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{\varepsilon} - x_E\mathbf{c}_E\right) = \boldsymbol{\varepsilon}^T\Sigma^{-1}\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T\Sigma^{-1}x_E\mathbf{c}_E$$

Uttrykket forenkles ved å la  $b := \boldsymbol{\varepsilon}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$  og  $c := \boldsymbol{\varepsilon}^T\Sigma^{-1}\mathbf{c}_E$ . Da er  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2}b - x_Ec$  og  $\frac{\lambda}{2} = \frac{x_Ec + \boldsymbol{\varepsilon}}{b}$ . Setter uttrykket for  $\frac{\lambda}{2}$  inn i (3.12) og finner den *optimale usikre porteføljen* for en gitt risikopremie til verdipapirinvesteringene  $(a_0, \mathbf{a})$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$(3.13) \quad \mathbf{a}_{x_E}(\boldsymbol{\varepsilon}) := \Sigma^{-1}\left(\frac{x_Ec + \boldsymbol{\varepsilon}}{b}\boldsymbol{\varepsilon} - x_E\mathbf{c}_E\right)$$

Dette er løsningen på minimeringsproblemet i uttrykk (3.9). Uttrykk (3.13) angir porteføljen som minimerer variansen til totalporteføljen for en gitt risikopremie,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , når det tas hensyn til oppdrettsformuen,  $x_E$ . Verdipapirinvesteringene  $\mathbf{a}$  er gitt som andel av individets egenkapital. Når man ikke tar hensyn til den eksogene oppdrettsformuen er  $x_E = 0$ . Dette fører til  $\mathbf{c}_E = 0$  og  $c = 0$ , og individets optimale portefølje er:

$$(3.14) \quad \mathbf{a}_0(\boldsymbol{\varepsilon}) := \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{b}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Dette er individets optimale portefølje uten hensyn til oppdrettsformuen, som er tangentporteføljen.<sup>12</sup>

Oppdrettsformuen er fastlåst og derfor må individet investere slik at variansen til sluttformuen minimeres. Individets optimale portefølje med hensyn til oppdrettsformuen i uttrykk

---

<sup>12</sup> Tangentporteføljen er porteføljen med usikre verdipapirer som gir høyest forventet avkastning per enhet risiko, og ble presentert i kapittel 3.1.1.



(3.13) er optimal i forhold til å minimere individets samlede risiko for en gitt avkastning. Fra ligning (3.13) kan variansen til den optimale usikre porteføljen uttrykkes på følgende måte:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathbf{a}_{x_E(\varepsilon)}}^2 &= \mathbf{a}_{x_E(\varepsilon)}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}_{x_E(\varepsilon)} = \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^T - x_E \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E^T \right) \boldsymbol{\Sigma} \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - x_E \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E \right) \\
&= \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \boldsymbol{\varepsilon}^T - x_E \mathbf{c}_E^T \right) \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - x_E \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E \right) \\
(3.15) \quad &= \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right)^2 \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - 2 \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right) x_E \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + x_E^2 \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E
\end{aligned}$$

Bruker  $b := \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $c := \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E$  og lar  $\gamma := \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E$ . Dette gir:

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right)^2 b - 2 \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right) x_{EC} + x_E^2 \gamma \\
&= \frac{(\varepsilon)^2 + (x_{EC})^2 - 2(x_{EC})^2 + 2(x_{EC}\varepsilon) - 2(x_{EC}\varepsilon)^2}{b} + x_E^2 \gamma \\
(3.16) \quad &= \frac{\varepsilon^2 - x_{EC}^2}{b} + x_E^2 \gamma
\end{aligned}$$

Uttrykk (3.8) gir variansen til investorens sluttformue. Ved å sette inn uttrykk (3.15) i leddet for variansen til verdipapirinvesteringene,  $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}$ , i uttrykk (3.8) og bruker (3.13) får man:

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right)^2 b - 2 \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right) x_{EC} + x_E^2 \gamma + x_E^2 \sigma_E^2 + 2x_E \mathbf{a}^T \mathbf{c}_E \\
&= \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right)^2 b - 2 \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right) x_{EC} + x_E^2 \gamma + x_E^2 \sigma_E^2 + 2x_E \left( \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \boldsymbol{\varepsilon} - x_E \mathbf{c}_E \right) \right) \mathbf{c}_E \\
&= \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right)^2 b - 2 \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right) x_{EC} + x_E^2 \gamma + x_E^2 \sigma_E^2 + 2x_E \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \mathbf{c}_E \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^T - x_E \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E \right) \\
&= \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right)^2 b - 2 \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} \right) x_{EC} + x_E^2 \gamma + x_E^2 \sigma_E^2 + 2x_E \left( \frac{x_{EC} + \varepsilon}{b} c \right) - 2x_E^2 \gamma \\
&= \frac{(x_{EC} + \varepsilon)^2 - 2(x_{EC} + \varepsilon)x_{EC} + 2(x_{EC} + \varepsilon)x_{EC}}{b} + x_E^2 \gamma + x_E^2 \sigma_E^2 - 2x_E^2 \gamma
\end{aligned}$$

$$(3.17) \quad = \frac{(x_E c + \varepsilon)^2}{b} - x_E^2 \gamma + x_E^2 \sigma_E^2$$

Uttrykk (3.17) angir variansen til totalformuen når individet tar hensyn til oppdrettsformuen.

### 3.2.4 Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue

For å finne individets gevinst av å ta hensyn til oppdrettsformue i investeringsbeslutninger, sammenligner oppgaven risikoen til totalformuen når individet holder den optimale porteføljen med oppdrettsformuen  $\mathbf{a}_{x_E}(\varepsilon)$ , i forhold til den optimale porteføljen uten oppdrettsformue  $\mathbf{a}_0(\varepsilon)$ .

Differansen mellom den optimale porteføljen med oppdrettsformuen og tangeringsporteføljen kalles *differanseporteføljen*. Differanseporteføljen angir “feilen” individet gjør hvis det holder tangentporteføljen fremfor den optimale porteføljen med hensyn til oppdrettsformuen. Differanseporteføljen er gitt som:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_{x_E}(\varepsilon) - \mathbf{a}_0(\varepsilon) &= \mathbf{\Sigma}^{-1} \left( \frac{x_E c + \varepsilon}{b} \boldsymbol{\varepsilon} - x_E \mathbf{c}_E \right) - \frac{\varepsilon}{b} \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \mathbf{\Sigma}^{-1} \left( \frac{x_E c}{b} \boldsymbol{\varepsilon} - x_E \mathbf{c}_E \right) = x_E \mathbf{\Sigma}^{-1} \left( \frac{c}{b} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_E \right) \\ &= x_E \mathbf{a}_1(0) \end{aligned}$$

Dersom verdien på oppdrettsformuen er lik 1,  $x_E = 1$ , er differanseporteføljen gitt som  $\mathbf{a}_1(0) := \mathbf{\Sigma}^{-1} \left( \frac{c}{b} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_E \right)$ . Variansen til differanseporteføljen er:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \sigma_{\mathbf{a}_1(0)}^2 &= \mathbf{a}_1(0)^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{a}_1(0) = \left( \frac{c}{b} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_E \right)^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Sigma}^{-1} \left( \frac{c}{b} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_E \right) \\ &= \left( \frac{c}{b} \boldsymbol{\varepsilon}^T - \mathbf{c}_E^T \right) \left( \frac{c}{b} \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E \right) \\ &= \left( \frac{c}{b} \right)^2 \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - 2 \left( \frac{c}{b} \right) \mathbf{c}_E^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{c}_E^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E \end{aligned}$$

Videreføre benevnelsen  $b := \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $c := \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E$  og lar  $\gamma := \mathbf{c}_E^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E \geq 0$ . Uttrykket (3.19) kan da skrives som:

$$(3.20) \quad \sigma_{\mathbf{a}_1(0)}^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 b - 2 \left(\frac{c}{b}\right) c + \gamma = \frac{c^2 - 2c^2}{b} + \gamma = \gamma - \left(\frac{c^2}{b}\right)$$

Intuitivt virker det som om man bør investere mer i verdipapirer som er negativt korrelert med oppdrettsformuen, når man tar hensyn til oppdrettsformuen. Det kan vises at dette holder siden:

$$(3.21) \quad \mathbf{c}_E^T \mathbf{a}_1(0) = \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\frac{c}{b} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_E\right) = \frac{c}{b} c - \gamma = \frac{c^2}{b} - \gamma = -\sigma_{\mathbf{a}_1(0)}^2 \leq 0$$

Resultatet fra (3.21) impliserer at man ikke bør investere i selskaper som er relativt like individets oppdrettsanlegg, eller sektorer som er høyt korrelert med oppdrettsformuen. Basert på dette resultatet bør individet i denne oppgaven unngå å investere i selskaper i sjømatsektoren, og investere i sektorer som har liten samvariasjon med fiskerinæringen.

Uttrykk (3.17) definerer variansen til totalformuen når det tas hensyn til oppdrettsformuen:  $\sigma_{\tilde{x}(a)}^2 = \frac{(x_E c + \varepsilon)^2}{b} + x_E^2 \sigma_E^2 - x_E \gamma$ . Når individet holder tangeringsporteføljen ser det bort i fra den eksogene oppdrettsformuen, og  $c = \gamma = 0$ . Variansen til tangeringsporteføljen:

$$(3.22) \quad \sigma_{\mathbf{a}_0(\varepsilon)}^2 = \frac{\varepsilon^2}{b}$$

Uttrykk (3.8) gir variansen til investorens sluttformue. Benyttes uttrykket for variansen til tangeringsporteføljen i (3.22) og uttrykket for tangeringsporteføljen i uttrykk (3.22), er variansen til totalformuen når man holder tangeringsporteføljen gitt som:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \sigma_{\tilde{x}(\mathbf{a}_0(\varepsilon))}^2 &= \sigma_{\mathbf{a}_0(\varepsilon)}^2 + 2x_E \mathbf{c}_E^T \mathbf{a}_0(\varepsilon) + x_E^2 \sigma_E^2 \\ &= \frac{\varepsilon^2}{b} + 2x_E \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{b}\right) + x_E^2 \sigma_E^2 = \frac{\varepsilon^2}{b} + 2x_E c \frac{\varepsilon}{b} + x_E^2 \sigma_E^2 \\ &= \frac{\varepsilon(\varepsilon + 2x_E c)}{b} + x_E^2 \sigma_E^2 \end{aligned}$$

La  $\varepsilon_{x_E}$  være risikopremien til sluttformuen med hensyn til oppdrettsformuen, mens  $\varepsilon$  er risikopremien til sluttformuen uten hensyn til oppdrettsformuen. For å finne gevinsten av å ta hensyn til oppdrettsformuen sammenlignes variansen til sluttformuen med og uten hensyn til oppdrettsformuen. Dette gjøres ved å sette uttrykk (3.17) og (3.23) lik hverandre og løser ligningssettet for  $\varepsilon_{x_E}$ .

$$\sigma_{\tilde{x}(\varepsilon_{x_E})}^2 = \sigma_{\tilde{x}(\varepsilon)}^2$$

$$\frac{(x_E c + \varepsilon)^2}{b} - x_E^2 \gamma + x_E^2 \sigma_E^2 = \frac{\varepsilon(\varepsilon + 2x_E c)}{b} + x_E^2 \sigma_E^2$$

Deretter løses ligningen for risikopremien når det tas hensyn til oppdrettsformuen  $\varepsilon_{x_E}$ :

$$\frac{(x_E c + \varepsilon_{x_E})^2}{b} = \frac{\varepsilon(\varepsilon + 2x_E c)}{b} + x_E^2 \sigma_E^2 - x_E^2 \sigma_E^2 + x_E^2 \gamma = \frac{\varepsilon(\varepsilon + 2x_E c)}{b} + x_E^2 \gamma$$

$$(x_E c + \varepsilon_{x_E})^2 = \varepsilon(\varepsilon + 2x_E c) + x_E^2 \gamma b$$

$$\sqrt{(x_E c + \varepsilon_{x_E})^2} = \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2x_E c) + x_E^2 \gamma b}$$

$$x_E c + \varepsilon_{x_E} = \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2x_E c) + x_E^2 \gamma b}$$

$$(3.24) \quad \varepsilon_{x_E} = \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2x_E c) + x_E^2 \gamma b} - x_E c$$

Uttrykk (3.24) angir den maksimale risikopremien individet kan oppnå gitt variansen til tangentporteføljen. Dermed blir gevinsten individet oppnår i form av økt risikopremie for en gitt varians til tangentporteføljen,  $\varepsilon$ :

$$(3.25) \quad G_{x_E(\varepsilon)} = \varepsilon_{x_E}(\sigma_{\tilde{x}(\varepsilon)}^2) - \varepsilon = \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2x_E c) + x_E^2 \gamma b} - x_E c - \varepsilon$$

Risikopremien til sluttformuen med hensyn til oppdrettsformuen,  $\varepsilon_{x_E}$ , øker med størrelsen på oppdrettsformuen,  $x_E$ . Dersom størrelsen på oppdrettsformuen er lik null er  $\varepsilon_{x_E} = \varepsilon$  og gevinsten av å ta hensyn til oppdrettsformuen naturligvis lik null. Av den grunn fører  $x_E > 0$  til  $\varepsilon_{x_E} > \varepsilon$ , som gir  $G_{x_E(\varepsilon)} \geq 0$ .

### 3.3 Samvariasjon

Et sentralt punkt i porteføljeteori er behovet for å vite hvordan verdien til ulike verdipapirer varierer med hverandre. Observasjon av historiske avkastningsrater vil kunne gi en formening om samvariasjonen mellom avkastningen til ulike verdipapirer, men det er vanskelig å si noe om den relative samvariasjonen. Av den grunn introduseres begrepene kovarians og korrelasjon.

Den empiriske kovariansen mellom to variabler  $x$  og  $y$  defineres som:

$$Cov(x, y) = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{t - 1}$$

hvor  $x_t$  er størrelsen på den stokastiske variabelen  $x$  i periode  $t$ , mens  $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$  er gjennomsnittet av  $x$  i periode  $t$ .  $Cov(x, x)$  gir kovariansen mellom den samme stokastiske variabelen  $x$ , som gir den estimerte variansen til  $x$ :

$$Var(x) = Cov(x, x)$$

Dersom avkastningen til et verdipapir er høy (lav) samtidig som avkastningen til et annet verdipapir er høy (lav), er kovariansen høy og det er betydelig grad av samvariasjon mellom avkastningen til verdipapirene. Liten grad av samvariasjon innebærer at avkastningen til et verdipapir er høy samtidig som avkastningen til et annet verdipapir er lav. Kovariansen er negativ hvis avkastningen til et verdipapir er positiv samtidig som avkastningen til et annet er negativ (Brealey et al., 2011:199). Med andre ord er kovarians et absolutt mål på samvariasjon og sier lite om den relative samvariasjonen mellom verdipapirer. For å kunne si noe om den relative samvariasjonen introduseres begrepet korrelasjon.

Korrelasjon er et relativt mål på samvariasjon og sier hvor sterk samvariasjonen mellom verdipapirene er. Korrelasjonskoeffisienten ( $\rho$ ) er et tall mellom -1 og 1. Dersom  $\rho = 1$  er det perfekt positiv samvariasjon mellom verdipapirene, mens  $\rho = -1$  indikerer perfekt negativ samvariasjon. Korrelasjonen mellom to verdipapir er gitt ved:

$$\rho_{x,y} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)Var(y)}}$$

## **4.0 Datagrunnlag og antakelser**

I det følgende gjennomgås datagrunnlaget og antakelsene som ligger til grunn for oppgavens analyse av individets optimale porteføljer. Flere av antakelsene følger av presentasjonen av porteføljevalgmodellen med eksogen formue i kapittel 3.

### **4.1 Antakelser**

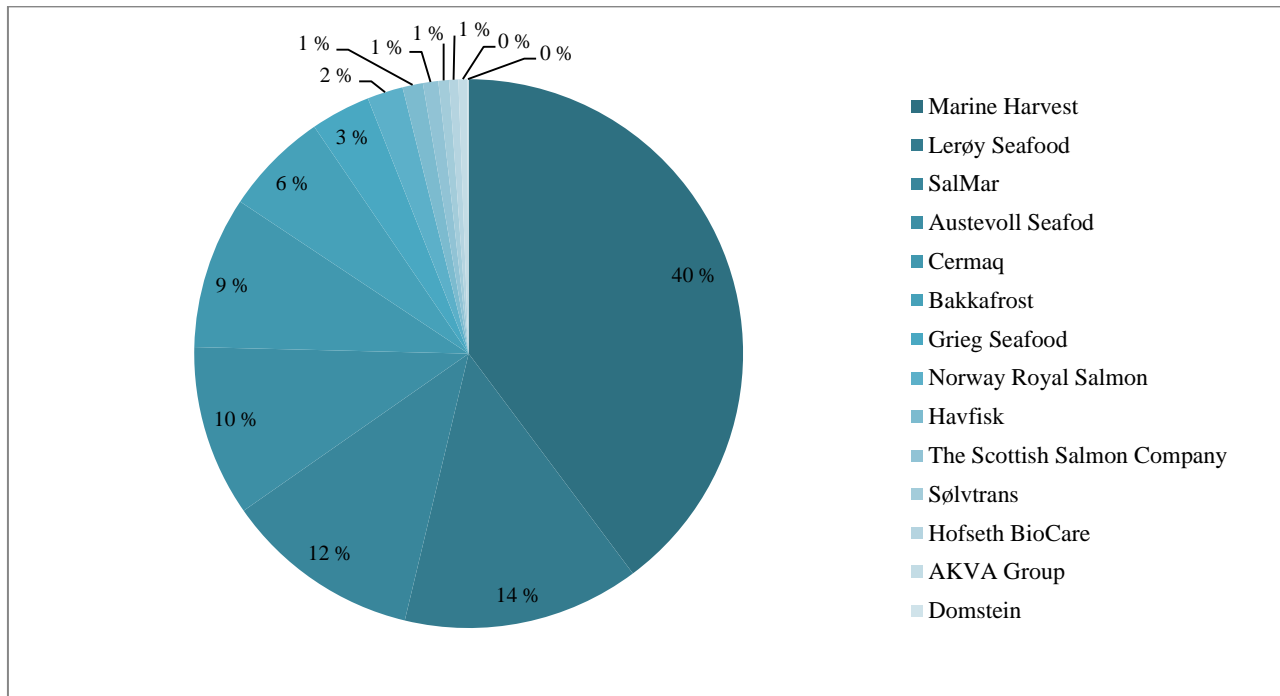
Ideelt sett er det ønskelig at en økonomisk modell gir en nøyaktig beskrivelse av virkeligheten, men en slik modell er meget komplisert. Av den grunn bygger økonomiske modeller ofte på en rekke antakelser, som gir et forenklet bilde av virkeligheten. Dette gjøres ved å fokusere på de trekkene som er mest vesentlige for formålet med modellen, og utelukke de aspektene som antas å være av uvesentlig karakter.

#### **4.1.1 Verdimål på oppdrettsformuen**

Anvendelse av porteføljevalgmodellen med eksogen formue avhenger av data for individets eksogene formue, slik at man finner mål på forventet avkastning og samvariasjon. Oppgaven betrakter et individ med en eksogen oppdrettsformue, hvor oppdrettsformuen er et lite oppdrettsforetak. Oppdrettsforetaket tilhører den norske fiskerinæringen, men er av en slik størrelse at det ikke utgjør en signifikant andel av den norske sjømatsektoren. Det antas at foretaket ikke videreformidler øvrige sjømatprodukter, men er et rendyrket oppdrettsforetak med fokus på laks.

Et mulig verdimål på oppdrettsformuen er den gjennomsnittlige avkastningsraten til sjømatsektoren på Oslo Børs. Figur 3 angir de 14 selskapene som utgjør sjømatsektoren på Oslo Børs.

Figur 3: Inndeling av sjømatsektoren på Oslo Børs



Figur 3: Selskapene i sjømatsektoren som andel av den totale markedsverdien til sjømatsektoren.<sup>13</sup>

Figur 3 viser at fire selskaper alene utgjør i overkant av 70 prosent av markedsverdien til sjømatsektoren. Av den grunn vil gjennomsnittlig sektoravkastning i stor grad reflektere avkastningen til de dominerende selskapene. Gitt oppgavens antagelse om en eksogen formue i form av et lite oppdrettsforetak vil ikke den gjennomsnittlige sektoravkastningen være representativ for dette foretaket. Dette henger sammen med at sektorgjennomsnittet i stor grad er farget av de store selskapene og gjennomsnittsavkastningen vil ikke reflektere risikobildet til et lite oppdrettsforetak på en ønskelig måte. Et mindre oppdrettsforetak har færre oppdrettsanlegg og mindre geografisk spredning, noe som gjør at produksjonen i større grad er sårbar for blant annet sykdommer og miljøendringer. Dette reflekteres ikke i den gjennomsnittlige sektoravkastningen.

I tillegg har selskapene i sjømatsektoren ulikt fokus når det gjelder fiskeart og plassering i verdikjeden. Noen selskaper driver med rendyrket lakseoppdrett, mens andre driver andre med

<sup>13</sup> Sølvtrans ASA ble kjøpt opp av Silver Holdings og selskapet hadde siste noteringsdag 3.juli 2014. Selskapet var børsnotert i oppgavens valgte periode og er derfor inkludert i sjømatsektoren (Oslo Børs, 2014).

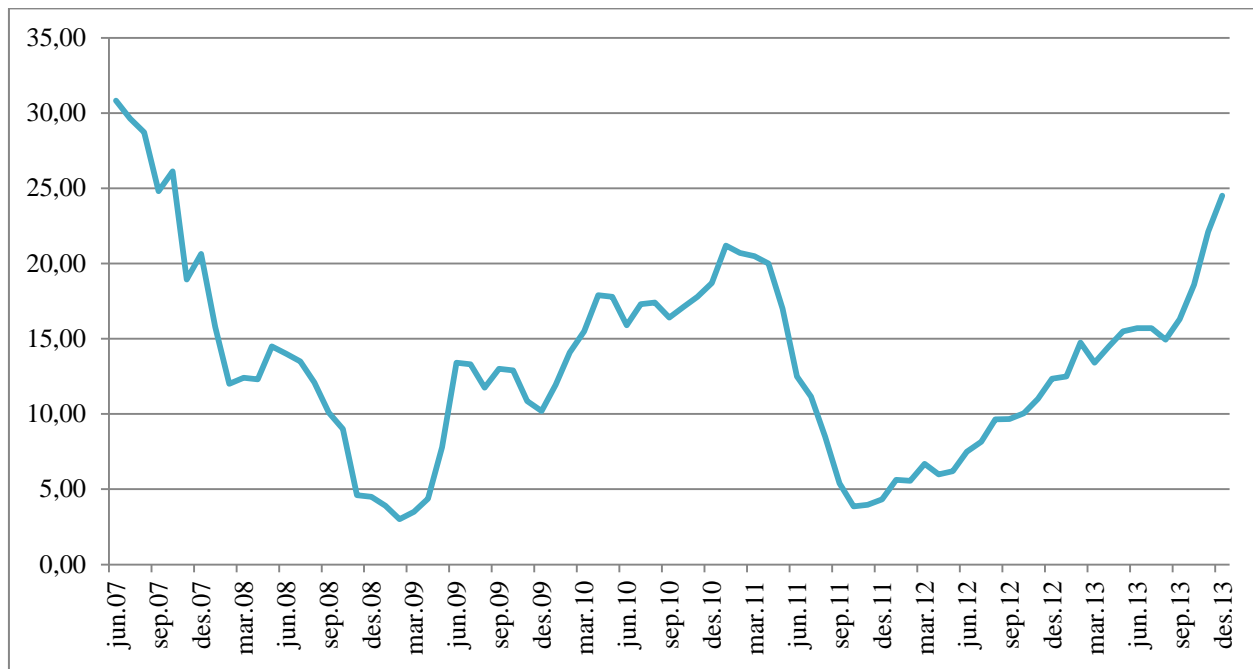
fangst og videreformidling av hvitfisk. Gjennomsnittlig sektoravkastning vil ikke gjenspeile denne forskjellen, noe som er uheldig med tanke på oppgavens oppdrettsforetak.

Et bedre verdimål på oppdrettsformuen er historisk avkastning for et eller flere representative oppdrettsselskaper. Et foretak er representativt dersom det er tilknyttet den norske fiskerinæringen, driver hovedsakelig med lakseoppdrett og utgjør en relativt liten andel av den norske fiskerinæringen. Gitt sektorinndelingen i figur 3 er det Grieg Seafood som best oppfyller kravene til å være et representativt verdimål for oppgavens oppdrettsforetak.

Grieg Seafood ble etablert av Grieg familien i 1988, men selskapet ble ikke børsnotert før i juni 2007. Selskapet startet med lakseoppdrett etter å ha kjøpt opp en rekke små oppdrettsanlegg i Rogaland på starten av 1990-tallet. I dag driver selskapet med lakseoppdrett i fire regioner – Rogaland og Finnmark, samt British Colombia i Canada, og Hjaltland på Shetland. Selskapets geografiske diversifisering er uheldig da oppgaven betrakter et lite foretak med få oppdrettsanlegg. Likevel legger oppgaven historiske avkastningsrater for Grieg Seafood til grunn for å estimere forventet avkastning til oppgavens eksogene oppdrettsformue, da selskapet har de egenskaper som sammenfaller best med oppgavens antakelser tilknyttet sektorstørrelse og fokus på fiskeart. Figur 4 viser den historiske utviklingen i aksjekursen til Grieg Seafood i perioden fra juni 2007 til desember 2013.



Figur 4: Historisk utvikling i aksjekursen til Grieg Seafood



Figur 4: Beregninger er gjort basert på månedlige sluttkursen i perioden 2007 til 2013.

I perioden 2007/2008 hadde Grieg Seafood utfordringer i inntjeningen pga. sykdom i laksebestanden og den oppståtte finanskrisen. Spredning av lakselus bidro til høy dødelighet med tilhørende redusert tilbud, mens finanskrisen bidro til betydelig valutatap (Grieg Seafood, 2008:5). Sterk resultatvekst i perioden 2009/2010 skyldes en reduksjon i det globale tilbudet av laks, noe som førte til økende laksepriser fra andre kvartal 2009. Sammen med bedret drift i Norge, bidro økende laksepriser til resultatforbedringen i perioden (Grieg Seafood, 2009:3). Høye investeringer, utbetalinger av utbytte og fallende laksemarked i andre halvår av 2011 førte til at foretakets finansielle stilling ble svekket i løpet av 2011 (Grieg Seafood, 2011:2). Sterkt global tilbudsvekst førte til at markedsprisen på laks var lave i 2012, samtidig som etterspørselen etter laks var sterk. Lave laksepriser og økt distribusjon, særlig i nye fremvoksende markeder, samt økt fokus på sunn mat var globale drivere bak etterspørselsveksten. Ved slutten av 2012 og inn i 2013 gikk tilbudsveksten ned. Kombinasjonen av sterk etterspørsel og lavere tilbudsvekst har gitt sterk økning i markedsprisene i 2013 (Grieg Seafood, 2012:4).

Gitt historiske avkastningsrater for Grieg Seafood i perioden juni 2007 til desember 2013 estimerer oppgaven forventet avkastningsrate til den eksogene oppdrettsformuen,  $\mu_E$ . Fremgangsmåten og resultatet av denne estimeringen presenteres i kapittel 6.

#### 4.1.2 Risikofri rente

Porteføljevalgmodellen antar at et individ har anledning til å investere i et verdipapir med en risikofri avkastning. I praksis vil det alltid være risiko tilknyttet verdipapirinvesteringer, men grad av risiko varierer for ulike investeringsobjekter. Denne oppgaven definerer risikofri rente som avkastningsraten til et relativt sikkert investeringsobjekt. En statsobligasjon er i de fleste tilfeller et sikkert investeringsobjekt, da statskonkurser inntreffer sjeldnere enn selskapskonkurser. Statsobligasjoner utstedes av et land eller en stat, og er et rentebærende verdipapir med en pålydende løpetid (Norges Bank, 2014). Ved å investere i en statsobligasjon låner investor kapital til utsteder, som forplikter seg til fremtidige betalinger til investor i henhold til obligasjonens vilkår. Obligasjonsrenten reflekterer utsteders evne til å betjene obligasjonsforpliktelsene, og er et mål på finansiell risiko. Et land med stabil økonomi vil typisk kunne utstede obligasjoner med lavere renter enn land med ustabil økonomi, hvor risikoen for at landet ikke evner å betjene sine obligasjonsforpliktelser øker.

Oppgaven begrenses til det norske verdipapirmarkedet. Av den grunn benyttes renten på norske statsobligasjoner til å definere den risikofrie renten. Norges Bank publiserer daglige, månedlige og årlige observasjoner for renten på statsobligasjoner med 3, 5 og 10 års løpetid. For at den risikofrie renten i størst grad reflekterer de korte rente benyttes månedlige observasjoner for renten på norske statsobligasjoner med tre års løpetid.

Obligasjonsrenten er gitt som rente per år. Fordi det øvrige datasettet i oppgaven er gitt på månedsbasis må data for obligasjonsrenten regnes om til månedsrente. Sammenhengen mellom årlig og månedlig rente kan uttrykkes på følgende måte: la  $R_0$  være sikker etterskuddsrente per år, mens  $r_0$  er sikker gjennomsnittlig månedsrente. Sammenhengen mellom disse to størrelsene er da:

$$R_0 = (1 + r_0)^{12} - 1$$

Ved å løse uttrykket med hensyn på  $r_0$ , får man

$$r_0 = (1 + R_0)^{\frac{1}{12}} - 1$$

Gitt observasjoner for norsk treårig obligasjonsrente for perioden juni 2007 til desember 2013, er den gjennomsnittlige obligasjonsrenten lik 0,21 prosent per måned.<sup>14</sup>

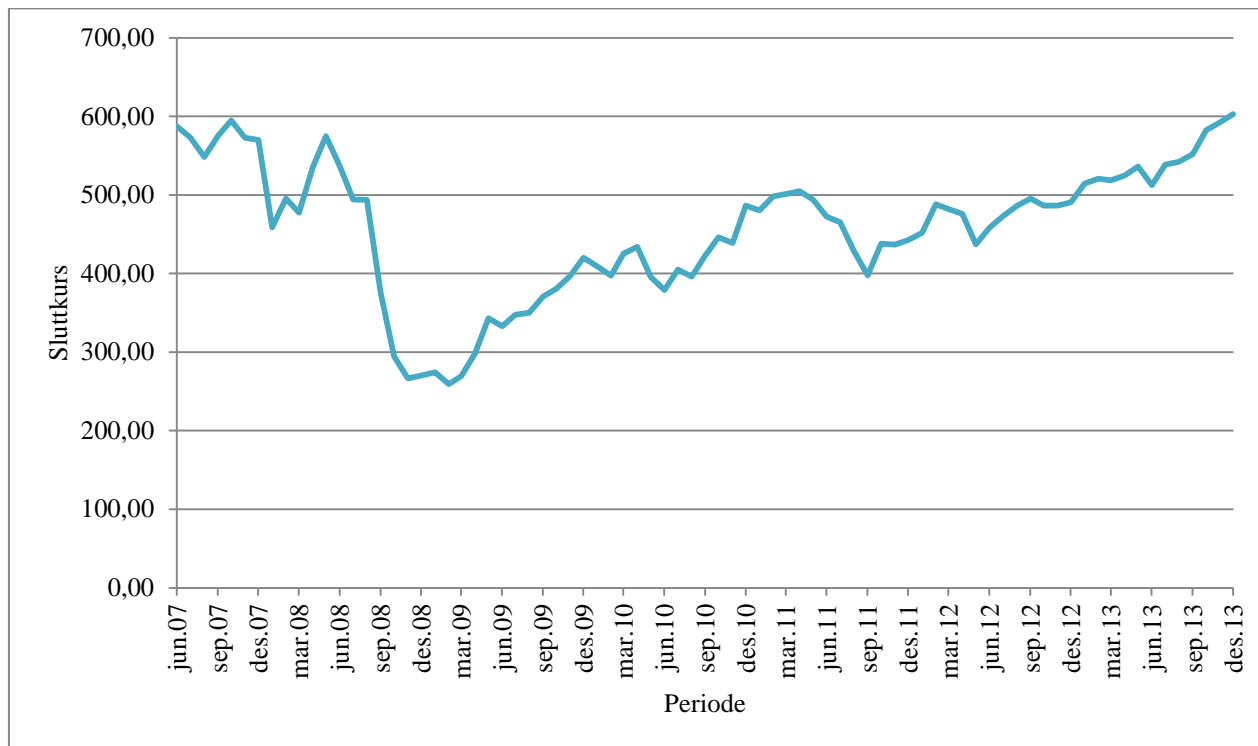
## 4.2 Datagrunnlag

Ved valg av tidsperiode er det ønskelig at den valgte perioden representerer en normalsituasjon. For å hindre at historisk data ikke overestimerer eller underestimerer avkastningsratene i analysen bør datasettet inneholde både kursoppgang og kursnedgang, som i sum gir en normal gjennomsnittsavkastning. Oppgavens valg av tidsperiode er et resultat av at det er de historiske avkastningsratene til Grieg Seafood som legges til grunn for å finne forventet avkastningsrate til oppgavens oppdrettsforetak. Det følger videre at oppgaven benytter historiske avkastningsrater for det norske verdipapirmarkedet i perioden juni 2007 til desember 2013 i den videre analysen. Figur 5 viser historisk utvikling i OSEAX i oppgavens valgte tidsperiode.

---

<sup>14</sup> Videre i oppgaven refererer man til risikofri rente fremfor obligasjonsrente.

Figur 5: Historisk utvikling i OSEAX fra juni 2007 til desember 2013



Med unntak av kortsiktige svingninger har den overordnede kursutviklingen i det norske verdipapirmarkedet vært positiv i den valgte perioden. Finanskrisen i det amerikanske markedet for subprime-lån førte til stor uro i de internasjonale verdipapirmarkedene. Uroen spredde seg til det norske verdipapirmarkedet og i løpet av 2008 ble verdien på OSEAX nærmest halverte. Kursfallet fortsatte i de første månedene av 2009, men avtok utover året slik at den overordnede verdiutviklingen til OSEAX var positiv i 2009. Verdioppgang fortsatte ut den valgte perioden.

I den valgte perioden har den overordnede kursutviklingen vært positiv, noe som gjenspeiles i oppgavens estimering av forventede avkastningsrater. Dette er uheldig da det ikke er gitt at den historiske utviklingen vil fortsette i tiden fremover. Fallende oljepris fører til at man kan forvente en mer ustabil, og til tider negativ, utvikling på Oslo Børs i tiden fremover. Det kan derfor anføres at oppgavens estimerte verdier kan være noe optimistisk gitt dagens situasjon. Likevel legges historisk data for perioden 2007 til 2013 til grunn for oppgavens videre analyse, da det gjør det mulig å undersøke hvorvidt individet oppnår en gevinst av å ta hensyn til oppdrettsformuen ved valg av optimal portefølje.

Data med historiske sluttkurser for sektorer og selskaper på Oslo Børs er oversendt fra Børsprosjektet NHH, og sluttkursene er justert for utbytte.<sup>15</sup> Sluttkurser for OSEAX er oversendt fra databanken til Oslo Børs. Oppgaven bruker de historiske sluttkursene til å beregne avkastningsrater til sektorinvesteringene og oppdrettsformuen. Ved å bruke historisk data til å predikere fremtidige verdier antar man at fortiden til en viss grad kan forklare fremtidig utvikling. Av den grunn ser oppgaven bort fra endringer i markedsstruktur og antar at den er fast i den historiske perioden. Avkastningsratene er gitt som:

$$r_i = \frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}}$$

hvor  $r_i$  er månedlig avkastning for sektor  $i$  fra måned  $t - 1$  til  $t$ .  $K_t$  er sluttkursen i måned  $t$  og  $K_{t-1}$  er sluttkursen i måned  $t - 1$ .

---

<sup>15</sup> Selskap som utbetaler store utbytter vil, alt annet likt, oppleve mindre avkastning i form av kursstigning enn et selskap som ikke utbetaler utbytte. Ved å bruke utbyttejusterte tall korrigerer man for dette.

## 5.0 Samvariasjon

I henhold til fremstillingen av porteføljevalgmodellen anvendes kovariansvektoren mellom oppdrettsformuen og sektorinvesteringene,  $C_E$ , og kovariansmatrisen for investeringsmulighetene,  $\Sigma$ , for å beregne individets optimale portefølje. For å få en intuitiv forklaring på samvariasjon fokuserer man i det følgende nærmere på korrelasjonsmatrisen for investeringsmulighetene og korrelasjonsvektoren for investeringsmulighetene og oppdrettsformuen. Bakgrunnen for dette er diskusjonen i kapittel 3.3 hvor det faktum at kovarians er et absolutt mål på samvariasjon, mens korrelasjon angir den relative samvariasjonen ble diskutert.

### 5.1 Samvariasjon mellom sektorinvesteringene

En korrelasjonsmatrise er en grafisk fremstilling av korrelasjonskoeffisienter for flere verdipapirer. I denne oppgaven angir korrelasjonsmatrisen samvariasjon i avkastningen mellom sektorene på Oslo Børs. Diagonalen til korrelasjonsmatrisen er lik 1, da den angir innbyrdes korrelasjon for én sektor. Tabell 4 viser korrelasjonsmatrisen for oppgavens datasett. I henhold til tabell 3 har oppgaven delt verdipapirmarkedet inn i tolv ulike sektorer, noe som gir en  $12 \times 12$  matrise med 144 ulike korrelasjonskoeffisienter for sektorindeksen.

Tabell 4: Korrelasjonsmatrise<sup>16</sup>

	Energi (u. Statoil)	Telekom.	IT	Forbruks- varer	Finans	Industri	Statoil	Orkla	Materialer	Helsevern	Forsyninger	Sjømat
Energi (u. Statoil)	1											
Telekommunikasjon	0,3215	1										
IT	0,5449	0,3859	1									
Forbruksvarer	0,3951	0,4549	0,5820	1								
Finans	0,4847	0,5779	0,6812	0,7486	1							
Industri	0,4250	0,3661	0,5901	0,5217	0,6389	1						
Statoil	0,3826	0,4961	0,4689	0,2868	0,4972	0,3201	1					
Orkla	0,3150	0,4988	0,5409	0,4185	0,5517	0,4583	0,4203	1				
Materialer	0,4055	0,3919	0,5642	0,5623	0,5684	0,4425	0,4610	0,3418	1			
Helsevern	0,2835	0,1683	0,4622	0,3055	0,4747	0,3078	0,2857	0,2468	0,4164	1		
Forsyninger	0,3543	0,3799	0,4707	0,3956	0,5522	0,4161	0,5251	0,5422	0,4542	0,3625	1	
Sjømat	0,4534	0,3084	0,6037	0,5358	0,6628	0,4736	0,3975	0,3602	0,4335	0,4866	0,4674	1
Gjennomsnittlig korrelasjon	0,3969	0,3954	0,5359	0,4734	0,5853	0,4509	0,4128	0,4268	0,4583	0,3454	0,4473	0,4712

*Tabell 4: Korrelasjonsmatrisen viser samvariasjonen mellom avkastningene til individets investeringsmuligheter på Oslo Børs, og er basert på månedlige avkastningsrater i perioden juni 2007 til desember 2013. Man har brukt vektet gjennomsnitt for å beregne gjennomsnittlig sektorkorrelasjon*

<sup>16</sup> Se vedlegg A for kovariansmatrise

Gitt oppgavens datagrunnlag finnes høyest korrelasjon mellom finanssektoren og sektoren for forbrukervarer. Begge sektorene består av næringer som påvirkes av konjunktursvingninger. I en oppgangskonjunktur vil man typisk oppleve økt etterspørselen etter varer og tjenester som forbrukervaresektoren leverer, deriblant bil, fritidsutstyr, restauranter og reiser. Finansiering og forsikring av slike aktiviteter tilbys av finanssektoren. Av den grunn kan det anføres at økt etterspørsel i forbrukervaresektoren fører til økt etterspørsel i finanssektoren, som fører til økt avkastning i begge sektorene. Videre er korrelasjonen lavest mellom helsevernsektoren og telekommunikasjonssektoren. Helsevernsektoren er også sektoren med lavest gjennomsnittskorrelasjon, noe som kan skyldes at varer og tjenester i denne sektoren i liten grad avhenger av aktiviteten i de øvrige sektorene. Sykdom forekommer uavhengig av konjunktursituasjon og det kan tenkes at helserelaterte problemer øker i nedgangstider, som følger av blant annet nedsatt livskvalitet. Det er derfor ikke urimelig at kursutviklingen i helsevernsektoren ikke følger den øvrige markedsutviklingen. Finanssektoren har høyest gjennomsnittskorrelasjon med de øvrige sektorene. Det er rimelig å forvente at kursutviklingen til finanssektoren følger markedsutviklingen, da sektoren inneholder selskaper som typisk påvirkes av konjunktursvingninger og aktiviteten i de øvrige sektorene.

Hvilke konsekvenser samvariasjonen mellom investeringsmulighetene har for den optimale porteføljen til individet i denne oppgaven må sees i sammenheng med samvariasjonen mellom oppdrettsformuen og investeringsmulighetene. Denne problemstillingen ses nærmere på i neste kapittel.

## **5.2 Samvariasjon mellom sektorinvesteringene og oppdrettsformuen**

I henhold til sektorinndelingen i tabell 3 består korrelasjonsvektoren av 12 korrelasjonskoeffisienter mellom sektorinvesteringene og oppdrettsformuen. Tabell 5 viser korrelasjonsvektoren for sektorinvesteringene og den eksogene oppdrettsformuen. Nederst i tabellen angis den gjennomsnittlige korrelasjonsvektoren.



Tabell 5: Korrelasjonsvektor mellom oppdrettsformuen og sektorinvesteringene<sup>17</sup>

Sektor	Korrelasjon med oppdrettsformuen
Sjømat	0,6660
Forbruksvarer	0,5372
Finans	0,5325
Materialer	0,4089
IT	0,4001
Helsevern	0,4001
Industri	0,3959
Forsyninger	0,3629
Energi (u. Statoil)	0,3162
Orkla	0,2264
Statoil	0,1473
Telekommunikasjon	0,1392
Gjennomsnittlig korrelasjon	0,3777

*Tabell 5: Korrelasjonsvektoren viser samvariasjonen mellom avkastningen til oppdrettsformuen og investeringsmulighetene i perioden juni 2007 til desember 2013.*

For å holde en diversifisert portefølje er individet interessert i investeringer som er lite eller negativt korrelert med oppdrettsformuen. Liten grad av samvariasjon indikerer ulik utvikling i avkastningsraten. Derfor er det attraktivt å investere i sektorer som har lav grad av samvariasjon med oppdrettsformuen for å redusere risikoen. For et individ med en eksogen oppdrettsformue innebærer dette at Statoil, telekommunikasjon og Orkla er attraktive sektorinvestering. Gitt oppgavens datasett har utviklingen i avkastningen til de nevnte sektorene avviket mest fra avkastningen til oppdrettsformuen. Dette gjør de nevnte sektorene til attraktive investeringer i en diversifisert portefølje som tar hensyn til oppdrettsformuen.

Korrelasjonen er naturligvis størst mellom oppdrettsformuen og sjømatsektoren. Grieg Seafood opprinnelig inngår i sjømatsektoren, men benyttes i denne oppgaven som et verdimål på den eksogene oppdrettsformuen. Den høye korrelasjonen må derfor sees i sammenheng med

<sup>17</sup> Se vedlegg B for kovariansvektor.

Grieg Seafood og sjømatsektoren i stor grad følger den samme markedsutviklingen. Noe som betyr at man bør unngå investeringer i sjømatsektoren dersom man ønsker å holde en diversifisert portefølje med hensyn til oppdrettsformuen. Videre skiller Statoil, Orkla og telekommunikasjonssektoren seg ut som attraktive investeringer i en portefølje som tar hensyn til oppdrettsformuen. Gitt oppgavens datagrunnlag finner man at utviklingen i avkastningen til Statoil, Orkla og telekommunikasjonssektoren avviker mest fra avkastningen til oppdrettsformuen. Dette er ønskelige egenskaper til investeringer i en diversifisert portefølje.

Den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom oppdrettsformuen og sektorene er lik 0,3853, mens sjømatsektorens gjennomsnittlige korrelasjon med de øvrige sektorene er lik 0,4712. Gitt at Grieg Seafood opprinnelig inngår i sjømatsektoren kunne man forventet at gjennomsnittskorrelasjonen til oppdrettsformuen i større grad gjenspeilet gjennomsnittskorrelasjonen til sjømatsektoren. Avviket i gjennomsnittlig korrelasjon må sees i sammenheng med at sjømatsektoren består av flere ulike selskaper, ikke bare oppdrettsforetak, som i større grad følger den øvrige markedsutviklingen.

Høy grad av samvariasjon mellom enkelte sektorer og oppdrettsformuen indikerer at det kan være et gevinstpotensiale ved å ta hensyn til oppdrettsformuen ved investering i usikre verdipapirer.

## 6.0 Forventede avkastning

For å anvende porteføljevalgmodellen må man finne forventet avkastningsrater for alle investeringsmulighetene og oppdrettsformuen. Historiske avkastningsrater er et naturlig utgangspunkt for å estimere hvilke avkastningsrater man kan forvente. Ved å anvende historiske avkastningsrater antar man at verdipapirer som har prestert bra tidligere også vil prestere bra i fremtiden. Samtidig er ikke historisk avkastning en garanti for fremtidig avkastning.

Black (1993:36-38) hevder at gjennomsnittlige avkastning sier lite om forventet avkastning, spesielt for en begrenset periode. Black argumenterer for at svært lange tidsperioder er nødvendig for at gjennomsnittlig avkastning kan definere forventet avkastning (Black, 1993:36). Derfor hevder Black at man behøver teori fremfor data for å estimere forventet avkastning (Black, 1993:37). Dette synet er knyttet til teorien om *mean-reversion*. Kjernen i teorien går ut på at investeringer med lav avkastning i en periode etterfølges av høy avkastning i neste periode, mens investeringer med høy avkastning etterfølges med lav relativ avkastning. Dersom man baserer investeringsbeslutninger på historiske avkastningsrater risikerer man å investere i verdipapirer med negativ fremtidig avkastning. De Bondt og Thaler (1985:800-804) fant at problemer med mean-reversion er størst i løpet av de første 24 til 36 månedene i et datasett, og konkluderer med at datasettet på over 36 måneder er nok for å unngå problemer med mean reversion. Datasettet i denne oppgaven består av 78 månedlige observasjoner for en periode preget av både kursoppgang og kursnedgang på Oslo Børs. Dermed reflekterer datasettet en varierende utvikling i den historiske avkastningsraten til investeringsmulighetene, noe som reduserer mulige problemer med mean-reversion.

Denne oppgaven bruker kapitalverdimodellen for å finne forventet avkastning til sektorinvesteringene og individets eksogene oppdrettsformue. Kapitalverdimodellen angir en lineær sammenheng mellom avkastning og risiko, basert på historisk datagrunnlag.

## 6.1 Kapitalverdimodellen

Dette kapitlet betrakter teorien for verdisetting av verdipapirer basert på forventet avkastning og risiko, hvor man antar at all kapital investeres i usikre verdipapirer. Hovedresultatet er kapitalverdimodellen, som gir risikopremien til verdipapirene som en funksjon av deres økonomiske risiko (Sandvik, 2013:161). For at kapitalverdimodellen skal gi hensiktsmessige resultater gjøres følgende antagelser:

1. Alle individ er pristakere og har homogene forventninger om verdipapirenes avkastning.
2. Det eksisterer et risikofritt verdipapir med en risikofri rente, og individene står fritt til å låne kapital til en risikofri rente (ingen kredittbegrensninger).
3. Antall verdipapirer er gitt i markedet og alle verdipapirer er omsettelige.
4. Finansmarkedet er uten friksjoner og all markedsinformasjon er tilgjengelig og kostnadsfritt for alle.
5. Nyttens til individer avhenger av forventet avkastning,  $\mu$ , og standardavvik,  $\sigma$ . Nyttefunksjonen til individet,  $U$ , er da gitt som en funksjon av forventet avkastning og standardavvik:  $U = f(\mu, \sigma)$ , hvor  $\frac{\partial U}{\partial \mu} > 0$  og  $\frac{\partial U}{\partial \sigma} < 0$ . Dette betyr at nytten øker når forventet avkastning øker, mens nytten avtar dersom standardavviket (risikoen) øker.

(Statistisk Sentralbyrå, 1995:26)

Forutsetning tre impliserer at det eksisterer et risikofritt verdipapir med sikker rente  $r_0$ , hvor sannsynligheten for tap er ikke-eksisterende. Hvis individet kun investerer i det risikofrie verdipapiret er forventet avkastning lik risikofri rente. For å oppnå høyere forventet avkastning må individet eksponeres for risiko. Det er vanlig å dele total risiko inn i to typer risiko – systematisk og usystematisk risiko (Bøhren, 1993:20). *Usystematisk risiko* er selskapsspesifikk risiko. Risikoen er tilknyttet selskapet alene og kan elimineres med diversifisering. Ved å inkludere ulike verdipapirer i en portefølje forventer man at positive og negative endringer i verdipapirene utligner hverandre, slik at selskapsspesifikk risiko utgjør en liten del av totalrisikoen i en portefølje (ibid). *Systematisk risikoen* reflekterer markedets iboende usikkerhet

og forsvinner ikke. Risikoen er utenfor individets kontroll og kan ikke elimineres med diversifisering (ibid).<sup>18</sup>

Holder forutsetning 1 til 5 angir kapitalverdimodellen et lineært forhold mellom forventet avkastning og risiko:

$$(6.1) \quad E(r_j) = r_0 + \beta_j [E(r_M) - r_0],$$

hvor beta-koeffisienten er gitt som:

$$(6.2) \quad \beta_j = \frac{\text{cov}(r_j, r_M)}{\text{var}(r_M)}.$$

Her er  $E(r_j)$  forventet avkastningsrate til investeringsmulighetene og oppdrettsformuen,  $j$ .  $\beta_j$  er beta-koeffisienten til verdipapir  $j$ ,  $r_M$  er markedsavkastningsraten og  $r_0$  er risikofri rente.<sup>19</sup> Uttrykk  $E(r_M) - r_0$  er risikopremien til markedsporteføljen (Brealey et al., 2011:245).

Beta-koeffisienten måler systematisk risiko (Brealey et al., 2011:202). I følge uttrykk (6.2) er beta-verdien forholdet mellom kovariansen mellom verdipapirets avkastning og markedsavkastningen,  $\text{cov}(r_j, r_M)$ , og variansen til markedsavkastningen,  $\text{var}(r_M)$  (ibid). En beta-verdi lik 1 representerer den gjennomsnittlige, systematiske markedsrisikoen. En beta-verdi større enn 1 indikerer at verdipapiret har større avkastningsvariasjon enn markedsavkastningen, men høyere systematisk risiko enn markedsrisikoen. Et verdipapir med beta mindre enn 1 har i gjennomsnitt lavere avkastningsvariasjon og lavere forventet risiko enn et verdipapir med beta lik 1. Hvis det ikke er samvariasjon mellom verdipapiret og markedsporteføljen er beta lik null (ibid). Summen av beta-koeffisientene til verdipapirene i en portefølje utgjør betaen til markedsporteføljen,  $\beta_M = \sum a_j \beta_j = 1$ , hvor  $a_j$  angir verdipapirenes andel av porteføljen.

Dermed sier uttrykk (6.1) at forventet avkastning øker med størrelsen på beta-koeffisienten. Dette indikerer at markedet premierer risiko med økt forventet avkastning.

---

<sup>18</sup> Kapitalverdimodellen måler systematisk risiko i en beta-verdi. Dette forklares nærmere i påfølgende avsnitt.

<sup>19</sup> I analysen anvendes OSEAX til å definere markedsavkastningsraten, jf. diskusjon i kap. 2.

## 6.2 Empirisk testing av kapitalverdimodellen

Frem til 1970-tallet opplevde kapitalverdimodellen empirisk medgang. Empiriske tester støttet modellens lineære sammenheng mellom avkastning og risiko. Black, Jensen og Scholes (1972:23) fant en klar lineær sammenheng mellom avkastning og risiko for amerikanske verdipapirmarkedet for perioden januar 1926 til mars 1966. Derimot argumenterte Roll (1977:130) for at kapitalverdimodellen ikke lar seg teste empirisk. Modellen forutsetter homogene individer som alle holder markedsporteføljen. I teorien inkluderer markedsporteføljen alle verdipapirer i verdipapirmarkedet – en definisjon som er vanskelig å praktisere. Mindre og større eierandeler i ulike selskaper er utilgjengelige for offentligheten, da investorer holder eierandeler utenfor markedet.<sup>20</sup> Ved empirisk testing må man derfor konstruere en alternativportefølje og deretter teste denne. Av den grunn testes ikke den sanne markedsporteføljen, og Roll kritiserer kapitalverdimodellens forklaringskraft da tester av modellen bygger på alternative porteføljer. Stambaugh (1983) undersøkte i hvilken grad resultatene til kapitalverdimodellen påvirkes av ulike alternativporteføljer for markedsporteføljen. Studien fant at resultatene til kapitalverdimodellen i liten grad påvirkes av alternativporteføljen.

Gjennom 1980-tallet oppdaget man flere empiriske regulariteter i avkastningen til verdipapirer som kapitalverdimodellen ikke kunne forklare. Blant annet fant man at store selskaper gjennomgående hadde lavere avkastning enn små selskaper etter justering for markedsrisiko (Næs, Skjeltop og Ødegaard, 2008:14). Siden slike sammenhenger ikke kunne forklare ut fra teorien ble de karakterisert som ”anomalier” (ibid). Litteraturen trekker særlig frem tre anomalier:

---

<sup>20</sup> Eksempelvis eier den norske stat signifikante eierandeler i Statoil, Telenor og Hydro. Fordi selskapene utgjør en betydelig andel av markedsporteføljen på Oslo Børs, vil store deler av markedsporteføljen til enhver tid være utilgjengelig for resten av markedet.

- *Størrelseseffekten* – investeringer i små selskaper har i gjennomsnitt en risikjustert meravkastning relativt til investeringer i store selskaper.
- *Verdieffekten* – forholdet mellom bokført verdi og markedsverdi gir en spredning i avkastning på tvers av selskaper. Selskaper med høy bokført verdi relativt til markedsverdi har høyere risikjustert avkastning enn selskaper med lav bokført verdi relativt til markedsverdi.
- *Momentumeffekten*. En investeringsstrategi som går ut på å kjøpe selskaper med høy avkastning de siste 3-12 månedene og selge selskaper med lav avkastning i samme periode genererer en risikjustert meravkastning.

De tre anomalier ble først oppdaget i det amerikanske verdipapirmarkedet (Næs, Skjeltorp og Ødegaard, 2008:15). Anomalierne har imidlertid vist seg å være konsekvente på tvers av markeder og over tidsperioder (ibid). Næs, Skjeltorp og Ødegaard undersøker om disse karakteristikene har hatt betydning for avkastningsmønsteret i det norske verdipapirmarkedet. For perioden 2000 – 2006 fant man ikke støtte for at det har vært en signifikant forskjell i avkastningen mellom store og små selskaper. Man fant heller ikke støtte for verdi- og momentumeffekten i det norske verdipapirmarkedet (Næs, Skjeltorp og Ødegaard, 2008:20).

Funn av anomalier har resultert i flere utvidelser av den opprinnelige kapitalverdimodellen. Black (1972:446-450) presenterer nullbeta-kapitalverdimodellen, hvor det vises at risikofri rente ikke er nødvendig for å oppnå resultatet til den opprinnelige kapitalverdimodellen. Modellen antar at det ikke eksisterer sikre lånerenter og man ser bort ifra antakelsen om ikke-eksisterende kredittbegrensinger (Köseoğlu og Mercangöz, 2013:58). Uten tilgang til et risikofritt aktivum bruker individet en null-beta portefølje, en portefølje med usikre verdipapirer hvor kovariansen med markedsporteføljen er lik null (Köseoğlu og Mercangöz, 2013:59). Forventet avkastning til et usikkert verdipapir uttrykkes da:

$$(6.3) \quad E(r_j) = E(r_Z) + \beta_j[E(r_M) - E(r_Z)]$$

Portefølje  $Z$  er den porteføljen som har minst varians av alle usikre porteføljer som er ikke-korrelert med markedsporteføljen,  $M$ . Null-beta kapitalverdimodellen impliserer at betakoeffisienten fortsatt er det korrekte målet på systematisk risiko og modellen er fortsatt på lineær form (ibid).

Avvikene i kapitalverdimodellen ble først identifisert i det amerikanske verdipapirmarkedet og har vist seg å være konsekvente på tvers av markeder og tidshorisonter (Næs, Skjeltorp og Ødegaard, 2008:15). Likevel finner ikke norsk empiri signifikante funn for anomalier i det norske verdipapirmarkedet (Næs, Skjeltorp og Ødegaard, 2008:20). Oppgaven betrakter utelukkende det norske verdipapirmarkedet og norsk empiri utelukker ikke kapitalverdimodellen som en attraktiv prissettingsmodell. Det er dermed grunnlag for å anføre at kapitalverdimodellen kan anvendes for å estimere forventet avkastningsrater for investeringsmuligheter på Oslo Børs.

### 6.3 Estimering

Fra uttrykk (6.1) prises et verdipapir i kapitalverdimodellen etter følgende lineære sammenheng:<sup>21</sup>

$$E(r_j) = r_0 + \beta_j[E(r_M) - r_0]$$

Ved estimeringen av forventet avkastning benytter oppgaven OSEAX for å definere markedsrente per måned,  $r_M = 0,0085$ , mens den risikofrie renten er gitt som gjennomsnittlig rente for tiårige statsobligasjoner per måned,  $r_0 = 0,0021$ .<sup>22</sup> Det som gjenstår er å finne beta-koeffisienten,  $\beta_j$ .

For å estimere en fremtidig verdi er det ønskelig å analysere data og oppdage et mønster som kan brukes til å predikere fremtiden. Den vanligste metoden for dette kalles *lineær regresjon*, hvor man forsøker å estimere sammenhengen mellom en avhengig variabel ( $y$ ) og uavhengige forklaringsvariabler ( $x$ ) (Sydsæter, 2006:484). En ordinær regresjonsfunksjon med én forklaringsvariabel er gitt ved:

$$(6.4) \quad y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t \quad \text{hvor } E(\varepsilon_t) = 0$$

Hvor  $\alpha$  et konstantledd,  $x_t$  er en forklaringsvariabel som skal forklare  $y_t$ , og  $\beta$  er en parameter.  $\varepsilon_t$  er et feilledd med forventning lik null,  $E(\varepsilon_t) = 0$ . Uttrykk (6.4) sier at dersom  $x_t$  øker med én

<sup>21</sup> Definisjonen på variablene ble forklart i kapittel 6.1.

<sup>22</sup> Dette ble forklart i henholdsvis kapittel 2.1 og kapittel 4.2.1.



enhet, vil  $y_t$  øke med verdien til  $\beta$ . Feilleddet  $\varepsilon_t$  legges til for å forklare eventuelle avvik i  $y_t$  som ikke kan forklares av endringer i  $x_t$ .<sup>23</sup>

En populær regresjonsmetode er *minste kvadrats metode (MKM)* (Sydsæter, 2006:484). MKM forsøker å finne den lineære sammenhengen som minimerer de kvadrerte avvikene mellom observert og estimert verdi. For å hindre at negative og positive avvik utligner hverandre bruker man kvadrerte avvik (Sydsæter, 2006:485). For at MKM skal gi hensiktsmessige resultater ligger en rekke forutsetninger til grunn for estimeringen. Den avhengige variabelen uttrykkes som en funksjon av et sett uavhengige variabler og et feilledd. Koeffisientene antas å være konstante, men ukjente. Brudd på denne antakelsen gir en feilspesifisert modell. De uavhengige variablene skal være innbyrdes lineært uavhengige. Videre forutsetninger er gjort med hensyn på feilleddet  $\varepsilon_t$ , og er gitt i tabell 6.

Tabell 6: Forutsetninger ved bruk av MKM

	Antakelser	Tolkning	Konsekvenser ved brudd
1	$E(\varepsilon_t) = 0$	Forventningsverdien til feilleddene er lik null.	
2	$Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$	Variansen til feilleddene er konstant og endelig for alle verdier av $x_t$ .	Heteroskedastisitet – variansen til feilleddet er ikke konstant.
3	$Cov(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = 0, i \neq j$	Feilleddene er uavhengige av hverandre.	Autokorrelasjon – korrelasjon mellom påfølgende verdien på en bestemt variabel.
4	$Cov(\varepsilon_t, x_t) = 0$	Ingen sammenheng mellom feilleddet og de uavhengige variablene.	Endogenitet – korrelasjon mellom de uavhengige variablene og feilleddet.
5	$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$	Feilleddene er normalfordelt	

Tabell 6: Hvis forutsetning oppfylles er MKM-estimatoren den beste lineære forventningsrette estimatoren.

<sup>23</sup> Mulige feilkilder: utelatte variabler (data som har en effekt på  $y$  er utelatt fra modellen), målefeil av den avhengige variabelen, unøyaktig formel og uforutsette hendelser.

For å sette opp kapitalverdimodellen på regresjonsform antar man at  $y = r_{jt} - r_{0t}$  og  $x = r_{Mt} - r_{0t}$ . Da kan regresjon sammenhengen i ligning (6.3) skrives som:<sup>24</sup>

$$r_{jt} - r_{0t} = \alpha_j + \beta_j[r_{Mt} - r_{0t}] + \varepsilon_{jt}$$

Med denne regresjonssammenhengen kan man estimere beta-koeffisientene til individets investeringsmuligheter og oppdrettsformue ved hjelp av minste kvadrats metode.

### 6.3.1 Statistiske begreper

Oppgaven tar i bruk statistiske begreper for å beskrive resultatene i analysedelen. Det er av den grunn informativt å gjennomgå disse begrepene, slik at presentasjonen av oppgavens resultater blir mer oversiktlig.

Når en sammenheng som uttrykk (6.3) estimeres ved regresjon kan man undersøke hvorvidt estimatene er signifikante og standardfeilen til de estimerte verdiene. *Standardfeilen* uttrykker estimatets gjennomsnittlige avvik fra den gjennomsnittlige observasjonen, og angir hvor presist estimatet er. Det er derfor ønskelig at estimatene har lavest mulig standardfeil.

Videre beregnes *p-verdien* til hver koeffisient. P-verdien er knyttet opp mot en nullhypotese om at den aktuelle populasjonskoeffisienten er lik null. Er koeffisientene lik null har ikke den tilhørende variabelen en systematisk påvirkning på den avhengige variabelen. P-verdien er sannsynligheten for at koeffisienten er lik null. For denne oppgaven innebærer dette at konstantleddene har nullhypotesen  $H_0: \alpha_j = 0$  og alternativhypotesen  $H_1: \alpha_j \neq 0$ , mens beta-koeffisientene har nullhypotesen  $H_0: \beta_j = 0$  og alternativhypotesen  $H_1: \beta_j \neq 0$ . *Signifikansnivået* angir den maksimale p-verdien man er villig til å akseptere. Det er normalt å velge et signifikansnivå på 5 prosent. Har estimatet en p-verdi mindre enn 0,05 kan man med 95 prosent sikkerhet kan si at estimatet er forskjellig fra null. Med andre ord forkaster man nullhypotesen hvis p-verdien er mindre eller lik 0,05 og beholder nullhypotesen hvis p-verdien er større enn 0,05. Hvis kapitalverdimodellen holder har man ikke-signifikante konstantledd, dvs.  $\alpha_j = 0$ , og signifikante beta-koeffisienter for alle investeringsmulighetene og oppdrettsformuen.

---

<sup>24</sup> Definisjonen på variablene ble forklart i kapittel 6.1.

### 6.3.2 Estimerte beta-koeffisienter og forventet avkastningsrater

Tabell 7 angir oppgavens estimerte beta-koeffisienter for individets investeringsmuligheter og oppdrettsformuen.

Tabell 7: Estimerte beta-koeffisienter

Sektor	P-verdi		P-verdi		St.feil (Beta)
	Alpha	(Alpha)	Beta	(Beta)	
Energi	0,0154	0,1347	1,5222	0	0,1887
Telekommunikasjon	0,0168	0,1821	1,3460	0	1,3460
Materialer	-0,0104	0,1719	1,3093	0	0,1394
Forbruksvarer	0,0000	0,9981	1,2512	0	0,1244
IT	-0,0060	0,2207	1,0875	0	0,0896
Sjømat	0,0040	0,5332	1,0657	0	0,1191
Finans	-0,0073	0,1249	0,9358	0	0,0593
Industri	0,0034	0,5267	0,8316	0	0,0984
Orkla	-0,0064	0,2427	0,7599	0	0,1009
Helsevern	-0,0028	0,6829	0,7372	0	0,1267
Statoil	-0,0014	0,7750	0,6218	0	0,0877
Forsyninger	-0,0077	0,1488	0,5514	0	0,0715
Oppdrettsformuen	0,0055	0,6793	0,1191	0	0,2309

*Tabell 7: Estimerte beta-koeffisienter basert på 78 observasjoner for månedlig avkastningsrater i perioden juni 2007 til desember 2013.*

Resultatene i tabell 7 viser at samtlige konstantledd,  $\alpha$ , er ikke-signifikante på 5 prosentnivå, og man kan ikke forkaste nullhypotesen. Samtlige beta-verdier er signifikante på 5 prosentnivå og man kan med 95 prosent sikkerhets si at de estimerte beta-verdiene ikke er lik null. Dermed har estimatene egenskapene man ønsker.

Sektorer med betaverdier nær 1 har en risiko lik markedsrisikoen. Tatt i betraktning forbruksvaresektoren omfatter næringer som i særlig grad påvirkes av konjunktursvingninger, er det naturlig at risikoen tilknyttet forbrukervaresektoren er tilnærmet lik markedsrisikoen. Høyest

beta-verdi har energisektoren (uten Statoil). Sektoren omfatter selskaper engasjert i produksjon, leting og transport av olje- og gassprodukter. Den viktigste usikkerhetsfaktoren for disse selskapene er oljeprisen, som til tider er svært fluktuerende. Usikkerhet tilknyttet utviklingen i oljeprisen, i tillegg til den i boende markedsrisikoen, bidrar til at risikoen i energisektoren er større enn markedsrisikoen. Videre ser man at forsyningssektoren, som omfatter kraftselskaper, har lavest beta-verdi. Gjennom året har kraftselskaper anledning til å fylle opp sine magasiner når etterspørselen er lav, slik at lagrene er relativt fulle når etterspørselen etter elektrisitet øker, samt selge unna overskuddslagre når det er anledning til det. Kraftmarkedet kan derfor oppleves som relativt stabil, noe som gjenspeiles i en lav beta-verdi.

### **6.3.3 Forventet avkastningsrater for sektorene og den eksogene formue**

Gitt beta-verdiene i tabell 7 kan man nå finne forventet avkastning til individets investeringsmuligheter og oppdrettsformuen ved hjelp av kapitalverdimodellen. Oppgaven benytter månedlige observasjoner for OSEAX til å definere markedsrenten,  $r_M = 0,0085$ , mens risikofri rente er gitt som gjennomsnittlig månedsrente på norske statsobligasjoner,  $r_0 = 0,0021$ . Dette gir en  $1 \times 12$  vektor  $\mu$  med månedlige avkastningsrater for sektorene på Oslo Børs, i tillegg til forventet avkastningsrate for oppdrettsformuen. Tabell 8 angir viser resultatene av oppgavens estimering av forventet avkastningsrater.

Tabell 8: Forventet avkastningsrater

Sektor	Avkastning (måned)	Avkastning (år)
Energi (u. Statoil)	1,18	15,17
Telekommunikasjon	1,07	13,64
Materialer	1,05	13,33
Forbruksvarer	1,01	12,83
IT	0,91	11,43
Sjømat	0,88	11,08
Finans	0,81	10,15
Industri	0,74	9,28
Orkla	0,70	8,68
Helsevern	0,68	8,50
Statoil	0,61	7,54
Forsyninger	0,56	6,97
Oppdrett	0,29	0,03

*Tabell 8: Forventet månedlig og årlig avkastning basert på estimerte beta-koeffisienter fra tabell 7.*

Sammenlignes resultatene i tabell 8 med beta-verdiene i tabell 7, har sektoravkastningene de ønskede egenskapene. Markedet premierer risiko med høy forventet avkastning. I henhold til tabell 9 har energisektoren (uten Statoil) høyest beta-verdi, mens forsyningssektoren har lavest beta-verdi. Dette gjenspeiles i sektorenes forventede avkastningsrater.

## 7.0 Markedsporteføljen

I henhold til fremstillingen av porteføljevalgmodellen med eksogen formue i kapittel 3, er det nødvendig med et mål på forventet avkastning og risiko til markedsporteføljen. Fra kapittel 2 antas det at oppgaven anvender totalindeksen på Oslo Børs (OSEAX) for å definere markedsporteføljen, og markedsporteføljen er vektet i henhold til sektorinndelingen i tabell 3.

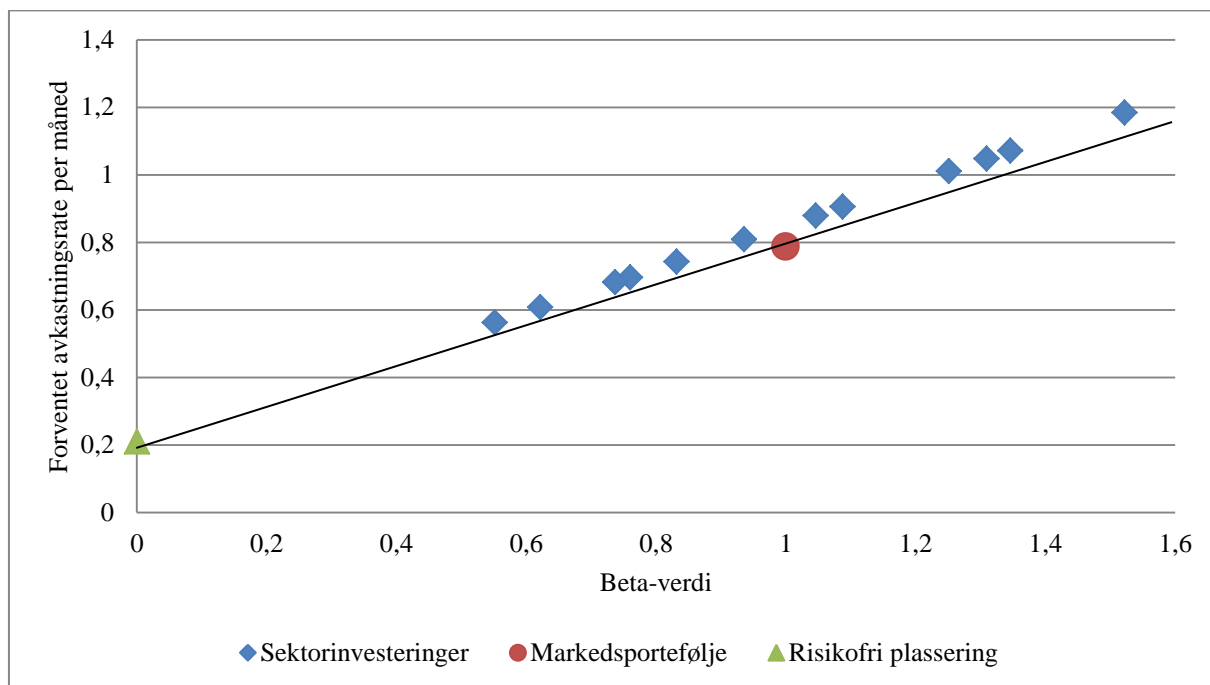
La  $\mathbf{a}_M = (a_{M1}, \dots, a_{M12})$  være en vektor med markedsvektene til sektorinvesteringene, mens  $\boldsymbol{\mu}^T = (\mu_1, \dots, \mu_{12})$  er en vektor med forventet avkastningsrater for sektorinvesteringene. Forventet avkastningsrate til markedsporteføljen er da gitt som:

$$\mu_M = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{a}_M$$

Gitt markedsvektene i tabell 3 og månedlig sektoravkastning i tabell 8 er forventet avkastning til markedsporteføljen lik 0,78 prosent per måned. Standardavviket til markedsporteføljen,  $\sigma_M$ , er lik 0,081.

Det kan anføres at beregningen baseres på historiske avkastningsrater og historisk avkastning er ingen garanti for fremtidig verdi. De siste årene har den overordnede kursutviklingen på Oslo Børs vært positiv og hovedindeksen har ved flere anledninger satt all time high, jf. figur 3. En slik utvikling er det ikke gitt at man kan forvente i tiden fremover. Likevel legges oppgavens funn til grunn for den videre analyse for å undersøke hvorvidt det eksistere en gevinst av å ta hensyn til eksogen formue ved valg av optimal portefølje. Figur 6 illustrerer individets sektorinvesteringer, markedsporteføljen og den sikre investeringen.

Figur 6: Markedsporteføljen



Figur 6 indikerer at forventet avkastning er lik risikofri rente, som er 0,21 prosent per måned, dersom individet kun investerer i det sikre verdipapiret. For å oppnå høyere forventet avkastning må investeringene eksponeres for risiko. Samtlige sektorinvesteringer og markedsporteføljen gir høyere forventet avkastning, men investeringene er usikre. Individet velger selv om det ønsker å kombinere det sikre verdipapiret og de usikre verdipapirene i en portefølje. Hvilken portefølje individet holder, avhenger av individets grad av risikoaversjon. Porteføljer nær punktet for det sikre verdipapiret indikerer at individet investerer mer i det sikre enn de usikre verdipapirene, mens individets investeringer i de usikre verdipapirene øker for tilpasninger nær markedsporteføljen. Markedsporteføljen angir tilpasningen hvor individet kun investerer i usikre verdipapirer og oppnår en forventet avkastning lik 0,78 prosent per måned.

Linjen som går mellom den risikofrie plasseringen og markedsporteføljen kalles verdipapirmarkedslinjen. Verdipapirmarkedslinjen representerer markedslikevekten for verdipapirene i et effektivt kapitalmarked (Brealey et al., 2011:223). Hvilken tilpasning de ulike sektorinvesteringene tar langs verdipapirmarkedslinjen avhenger sektorenes beta-verdier. Beta-verdien til markedsporteføljen er lik 1, mens beta-verdien til den risikofrie investeringen er lik 0. Dersom sektoren har en beta mindre enn 1, vil sektoren ta en tilpasning til venstre for

markedsporteføljen. Noe som indikerer at systematisk risiko tilknyttet sektoren er lavere enn markedsrisikoen, og forventet sektoravkastning er av den grunn lavere enn forventet markedsavkastning. Sektorer med beta større enn 1 ligger til høyre for markedsporteføljen langs verdipapirmarkedslinjen og forventet sektoravkastning er høyere enn markedsavkastningen.



## 8.0 Optimal portefølje

Dette kapittelet undersøker individets optimale porteføljer med og uten hensyn til den eksogene oppdrettsformuen, og forsøker å finne eventuell gevinst ved å inkludere oppdrettsformuen i valg av optimal portefølje. Først gjennomgås individets optimeringsproblem i lys av at individet ikke har noen begrensninger i sine investeringsmuligheter. Det er ingen begrensninger på kort-salg og individet kan investere slik det ønsker i enkelt posisjoner.<sup>25</sup> Videre undersøker oppgaven hvordan begrensninger i form av fravær av kort-salg påvirker valg av optimal portefølje.

## 8.1 Optimale porteføljer uten restriksjoner

I det følgende beregnes individets optimale porteføljer med og uten hensyn til oppdrettsformuen under forutsetningen at individet har mulighet for kort-salg. Dette innebærer at individet har anledning til å holde negative posisjoner. Videre kan individet investere så mye det ønsker i alle sektorene. Den påfølgende analysen gjennomføres i to trinn: først identifiseres individets optimale portefølje med og uten hensyn til oppdrettsformuen. Deretter sammenlignes porteføljene for å kunne si noe om hvilken gevinst individet oppnår av å ta hensyn til oppdrettsformuen i valg av optimal portefølje.

### 8.1.1 Optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue

Individets minimeringsproblem er gitt i uttrykk (3.9). Fra tidligere er forventet avkastningsrate til markedsporteføljen,  $\mu$ , lik 0,78 prosent per måned, mens risikofri rente,  $p_0$ , er lik 0,21 prosent per måned. Når man ikke tar hensyn til individets oppdrettsformue er  $x_E = 0$ , og individets risikopremie er lik  $\varepsilon := \mu - x_0 p_0 = 0,0078 - 0,0021 = 0,0057$ .<sup>26</sup>

Tabell 9 angir oppgavens beregning av individets optimale portefølje uten hensyn til oppdrettsformuen,  $\mathbf{a}_0$ . Sektorinvesteringene er gitt som prosentvis andel av individets egenkapital. For sammenligning presenteres også sektorallokeringen i markedsporteføljen,  $\mathbf{a}_M$ .

---

<sup>25</sup> Kortsalg ble forklart i kapittel 3.

<sup>26</sup> Det antas at individets initial formue,  $x_0$ , er lik 1.

Tabell 9: Optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue

Sektor	Tangentportefølje, $\mathbf{a}_0$	Markedsporteføljen, $\mathbf{a}_M$
Forsyninger	9,75	0,66
Finans	8,66	15,52
Forbruksvarer	8,33	5,46
Helsevern	8,31	0,7
Energi (u. Statoil)	7,81	20,16
IT	7,72	2,38
Telekommunikasjon	7,57	12,19
Industri	7,46	5,43
Orkla	7,28	2,54
Materialer	7,17	6,93
Statoil	6,93	23,8
Sjømat	4,01	4,12
Totalt investert i usikre verdipapirer		
	91,00	99,99

Tabell 9: Individets optimale portefølje uten hensyn til oppdrettsformuen kalles tangentporteføljen. Denne definisjonen ble presentert i fremstillingen av porteføljevalgsmodellen i kapittel 3.

Sammenlignet med markedsporteføljen reduseres individets totale investeringer i det usikre verdipapirmarkedet når tangentporteføljen følges. Når individet holder tangentporteføljen investerer det 91 prosent av egenkapitalen i det usikre verdipapirmarkedet.

Noe overraskende er reduksjonen i Statoil. Statoil er den største sektoren på Oslo Børs og har relativt lav korrelasjon med de øvrige sektorene, jf. tabell 4. Av den grunn skulle man tro at Statoil ville utgjøre en større andel av tangentporteføljen enn hva sektoren faktisk gjør.

Når avkastningsraten til markedsporteføljen definerer den gitte avkastningsraten,  $\mu$ , i minimeringsproblemet (3.9), er variansen til tangentporteføljen  $\sigma_{\mathbf{a}_0}^2(0,0078) = 0,0040$ . Variansen til markedsporteføljen er  $\sigma_{\mathbf{a}_M}^2 = 0,0066$ . Dette indikerer at individet for samme forventet avkastning eksponeres for mindre risiko ved å holde tangentporteføljen fremfor

markedsporteføljen. Dette tyder på at markedsporteføljen ikke er en effektiv portefølje. Videre kan det anføres at alle individer må ha homogene oppfatninger for at markedsporteføljen skal være en effektiv portefølje. I praksis vil ulike individer har ulike oppfatninger noe som bidrar til at markedsporteføljen ikke er en effektiv portefølje.

### 8.1.2 Optimal portefølje med eksogen formue

For å beregne individets optimale portefølje med hensyn til oppdrettsformuen, tar man utgangspunkt i minimeringsproblemet i uttrykk (3.9). Fra tidligere er forventet avkastning til markedsporteføljen,  $\mu$ , lik 0,78 prosent per måned, risikofri rente,  $p_0$ , er 0,21 prosent per måned og forventet avkastningsrate til oppdrettsformuen,  $\mu_E$ , er 0,29 prosent per måned. Individets risikopremie med hensyn til oppdrettsformuen kan da skrives som  $\varepsilon := \mu - x_o p_0 - x_E \mu_E = 0,0057 - 0,0029 x_E$ . Initialformuen,  $x_o$ , antas å være lik 1. Videre vil individets optimale portefølje med hensyn til oppdrettsformuen,  $\mathbf{a}_{x_E}$ , variere med størrelsen på oppdrettsformuen,  $x_E$ , da denne størrelsen inngår i  $c$  og  $\varepsilon$ . I det følgende beregnes allokeringen i den optimale porteføljen for  $x_E = 1$ . Dette innebærer at individets oppdrettsformue finansieres med 100 prosent egenkapital, og at individets investeringer i usikre verdipapirer må lånefinansieres.<sup>27</sup>

I tillegg til den optimale porteføljen beregner oppgaven differanseporteføljen,  $\mathbf{a}_1$ . Differanseporteføljen angir hvor mye individets investeringer i hver sektor bør endres når oppdrettsformuen hensyn tas. Med andre ord er differanseporteføljen differansen mellom den optimale porteføljen med hensyn til oppdrettsformuen og tangentporteføljen med risikopremie  $\varepsilon = 0,0057 - 0,0029 x_E$  når  $x_E = 1$ .

Tabell 10 viser individets tangent-, hoved- og differanseportefølje. Sektorinvesteringene er gitt som prosentvis andel av individets egenkapital. Sektorene er rangert fra høyest til lavest korrelasjon med oppdrettsformuen og deretter delt inn i tre grupper; høy, middels og lav korrelasjon med oppdrettsformuen.

---

<sup>27</sup> Senere undersøker oppgaven hvordan ulike størrelser på oppdrettsformuen påvirker individets investeringer.

Tabell 10: Optimal portefølje med hensyn til eksogen formue

Sektor	Hovedporteføljen, $\mathbf{a}_{x_E}$	Tangentportefølje, $\mathbf{a}_0$	Differanseportefølje, $\mathbf{a}_1$
Sjømat	-11,35	2,02	-13,37
Forbruksvarer	1,88	4,19	-2,31
Finans	4,78	4,36	0,42
Materialer	2,59	3,61	-1,02
IT	9,35	3,89	5,45
Helsevern	4,76	4,19	0,57
Industri	4,03	3,76	0,27
Forsyninger	4,09	4,93	-0,84
Energi (u. Statoil)	5,37	3,94	1,44
Orkla	4,93	3,66	1,27
Statoil	10,01	3,49	6,53
Telekommunikasjon	7,16	3,82	3,34
Totalt investert i usikre verdipapirer	47,6	45,86	1,75

Tabell 10: Hovedporteføljen angir individets optimale portefølje med hensyn til oppdrettsformuen.

Individet totale investeringer i det usikre verdipapirmarkedet øker når oppdrettsformuen tas hensyn til. Økningen sees i sammenheng med at hovedporteføljen tar hensyn til korrelasjonen mellom sektorene og oppdrettsformuen i tillegg til korrelasjonen mellom sektorene. Dette gjenspeiles i differanseporteføljen. Sektorene som er lavt korrelert med oppdrettsformuen har positivt fortegn i differanseporteføljen. Dette indikerer at individet bør øke sine investeringer i disse sektorene når det tar hensyn til oppdrettsformuen. Negativt fortegn i differanseporteføljen indikerer at individet bør redusere sine investeringer i de aktuelle sektorene.

Differanseporteføljen viser at individet bør øke sine plasseringer i samtlige sektorer som er lavt korrelert med oppdrettsformuen. Dette sees i sammenheng med at individet ønsker å spre risiko ved å holde en vel-diversifisert portefølje, noe som innebærer å unngå sektorer som er høyt korrelert med oppdrettsformuen. Statoil utgjør størst andel av både hoved- og tangentporteføljen. Dette henger sammen med at Statoil er lavt korrelert med de øvrige sektorene, samt

oppdrettsformuen. I tillegg til lav korrelasjon indikerer markedsstørrelsen til Statoil at sektoren normalt inkluderes i enhver portefølje.

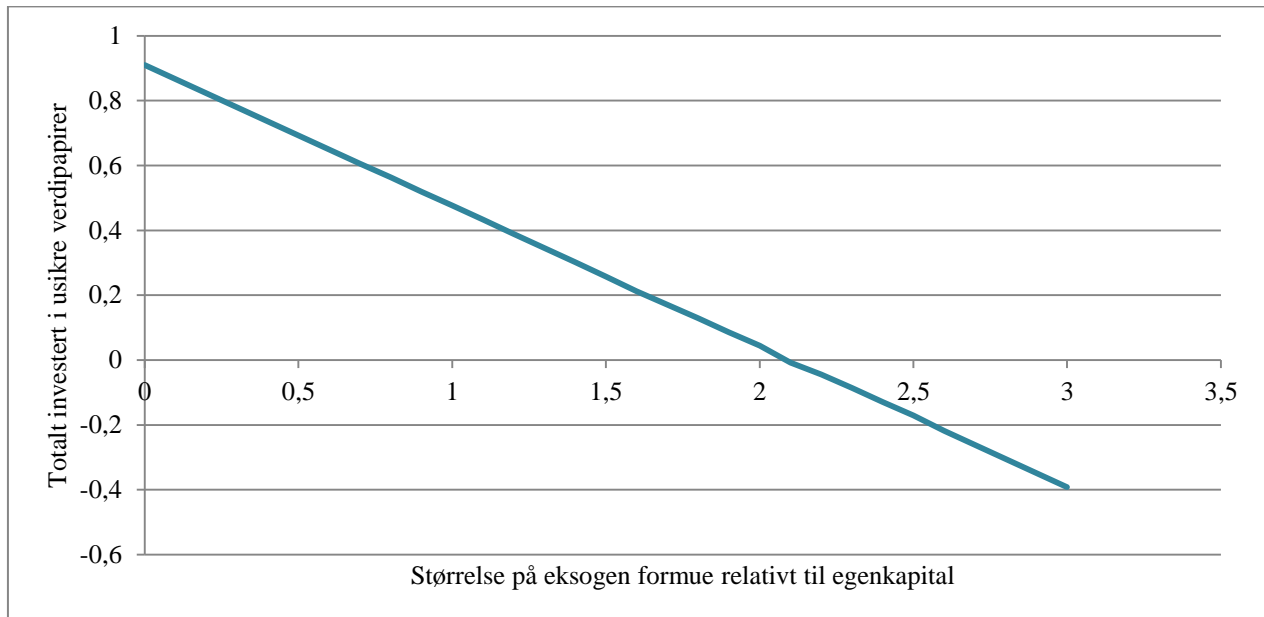
Med unntak av en marginal økning i finanssektoren, reduserer individet samtlige plasseringer i sektorer som er høyt korrelert med oppdrettsformuen i hovedporteføljen. Sjømatsektoren er den neste sektoren individet holder en negativ posisjon i. Dette sees i sammenheng med at sjømatsektoren og individets oppdrettsforetak i stor grad følger samme markedsutvikling. Av den grunn er ikke sjømatsektoren en attraktiv investering gitt ønsket om å spre risiko. Dette gjenspeiles i en relativt høy korrelasjon mellom sjømatsektoren og oppdrettsformuen i tabell 4.

Endringen fra tangent- til hovedporteføljen i sektorgruppen med middels korrelasjon har ingen klar sammenheng som kan forklares på bakgrunn av korrelasjonen med oppdrettsformuen eller sektorstørrelse.

Når avkastningsraten til markedsporteføljen definerer den gitte avkastningsraten,  $\mu$ , i minimeringsproblemet (3.9) er variansen til hovedporteføljen  $\sigma_{a_{x_E}}^2(0,0078) = 0,0017$ . Variansen til tangentporteføljen var  $\sigma_{a_1}^2 = 0,0040$ . For samme forventet avkastning eksponeres individet for mindre risiko ved å holde hovedporteføljen fremfor tangentporteføljen, og tangentporteføljen er ikke en effektiv portefølje sammenlignet med hovedporteføljen.

Fra uttrykk (3.13) varierer investeringene i hovedporteføljen med størrelsen på oppdrettsformuen. Frem til nå har oppgaven antatt at størrelsen på individets oppdrettsformue er lik 1, som impliserer at oppdrettsforetaket er finansiert med 100 prosent egenkapital. En antakelse som er uheldig med tanke på individet som betraktes i denne oppgaven. For en liten aktør er det rimelig å anta at vekst av et oppdrettsforetak krever lånefinansiering. Det er derfor ønskelig å finne individets optimale investeringer i usikre verdipapirer for ulike verdier av den eksogene oppdrettsformuen,  $x_E$ . Figur 7 viser individets totale investeringer i usikre verdipapirer for ulike verdier av  $x_E$ .

Figur 7: Totale investeringer i usikre verdipapirer for ulike størrelser på eksogen formue



Figur 7: Beregningen av individets usikre investeringer for ulike størrelser på eksogen formue tar utgangspunkt i minimeringsproblemet (3.7).

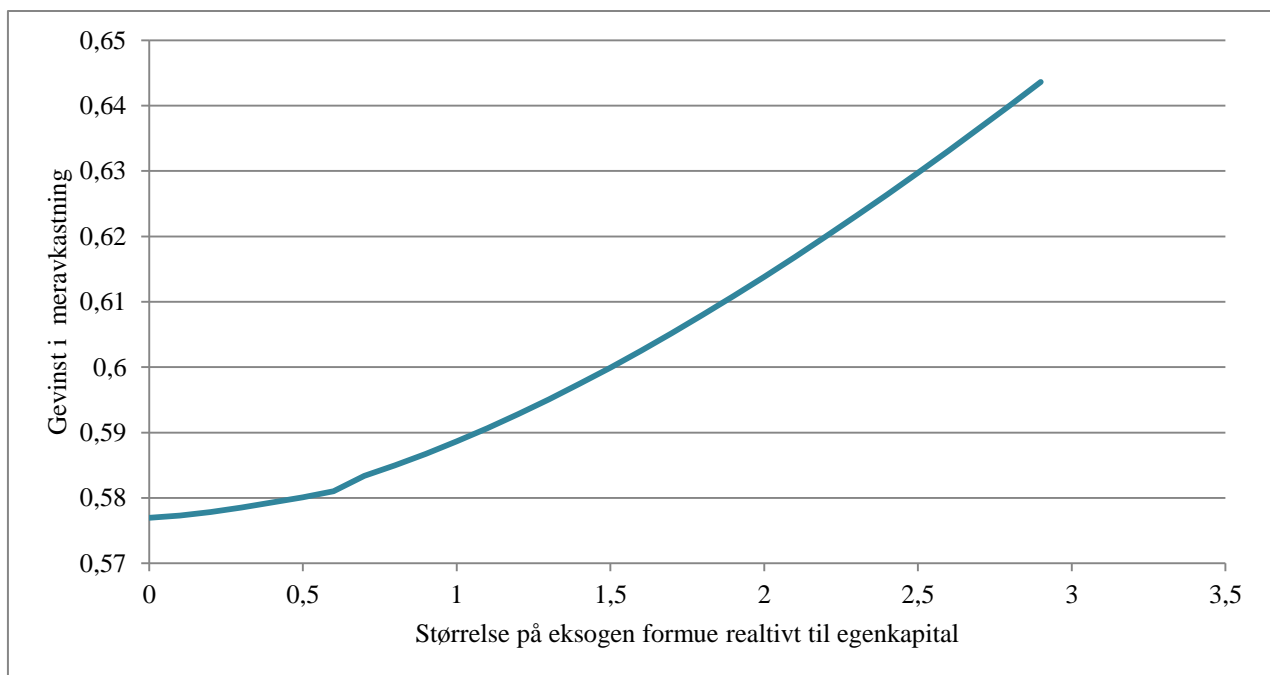
Ved å observere individets totale investeringer for ulike størrelser på oppdrettsformuen, kan man undersøke om det er forskjeller i investeringsprofilen til formuende individer sett opp mot individer med gjeld. Figur 7 angir en negativ sammenheng mellom individets totale investeringer i usikre verdipapirer og størrelsen på oppdrettsformuen. Når størrelsen på oppdrettsformuen øker har individet investert mer kapital i oppdrettsforetaket og investeringer i usikre verdipapirer faller på grunn av redusert disponibel investeringskapital.

Hvis verdien på oppdrettsformuen er lik null viser grafen at individets totale investeringer i usikre verdipapirer tilsvarer tilpasningen i tangentporteføljen fra kapittel 8.1.1. For relativt høye verdier på oppdrettsformuen holder individet negative posisjoner i verdipapirmarkedet. Dette innebærer at individet låner kapital i det usikre markedet for å nedbetale gjeld tilknyttet oppdrettsforetaket. En løsning som er svært risikabel. Dersom kursen på det lånte verdipapiret faller kan lånet tilbakebetales med en gevinst på transaksjonen, men gevinstpotensialet er begrenset da kursen på et verdipapir aldri er mindre enn null. På den andre siden kan et verdipapir stige tilnærmet ubegrenset og en slik kursoppgang medfører store tap. Av den grunn vil man senere undersøke hvordan individets optimale porteføljer endres ved fravær av kort salg.

### 8.1.3 Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue

Oppgaven finner at variansen til totalformuen er mindre dersom individet holder hovedporteføljen,  $\mathbf{a}_{x_E}$ , fremfor tangentporteføljen,  $\mathbf{a}_0$ . Gitt variansen til totalformuen ved å holde tangentporteføljen,  $\sigma_{x(\mathbf{a}_0(\varepsilon))}^2$ , kan man finne gevinst i form av økt meravkastning ved å ta hensyn til oppdrettsformuen. Denne gevinsten er gitt i uttrykk (3.25). Figur 8 viser individets gevinst av å ta hensyn til oppdrettsformuen for ulike størrelser på oppdrettsformuen når risikopremien er  $\varepsilon = 0,0057 - 0,0021x_E$ . Gevinsten er gitt som økt forventet meravkastning i prosent per år.

Figur 8: Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue



Figur 8: Data for risikofri rente og forventet avkastning til markedsporteføljen og oppdrettsformuen følger forklaringen i innledningen av kapittel 8.1.2.

Figur 8 angir en positiv sammenheng mellom størrelsen på oppdrettsformuen og meravkastningen individet oppnår av å ta hensyn til oppdrettsformuen ved valg av optimal portefølje. Dersom størrelsen på oppdrettsformuen er lik null, er det ingen eksogen formue å ta hensyn til og gevinsten er naturligvis lik null. Gevinsten er størst for høyere verdier på

oppdrettsformuen. Det er imidlertid grunn for å tro at gevinsten for de høyeste verdiene på oppdrettsformuen ikke er realistiske. Dersom oppdrettsformuen,  $x_E$ , har en høy verdi, er individets egenkapital lav og ytterligere investeringer i usikre verdipapirer må lånefinansieres. En finansinstitusjon vil trolig ikke godkjenne ubegrenset finansiering av usikre investeringer når egenkapitalen reduseres. Ved å lånefinansiere verdipapirinvesteringene risikerer individet å tape det investerte beløpet, mens lånet forblir uendret. Dersom individet ikke har egenkapital til å innfri lånet med, er det risikabelt for banken å tilby finansiering. Derfor er det rimelig å anta at det ikke tilbys ubegrenset finansiering av usikre investeringer. Av den grunn kan det tenkes at gevinsten for de høyeste verdiene på oppdrettsformuen er uopnåelige.

Opgaven har ikke spesifisert størrelsen på individets eksogene oppdrettsformue,  $x_E$ . For å illustrere hvilken reel gevinst individet oppnår av å ta hensyn til oppdrettsformuen i sine investeringsbeslutninger antas følgende: la  $x_E = 2$  og oppdrettsforetaket være verdt kr 20 000 000. For  $x_E = 2$  er individets egenkapital 50 prosent av verdien til oppdrettsforetaket, den årlige risikofrie gevinsten av å ta hensyn til oppdrettsformuen er lik 0,61 prosent. Dette innebærer en risikofri gevinst på kr 61 000.

## 8.2 Optimale porteføljer med restriksjoner

Frem til nå har oppgaven betraktet individets optimale porteføljer uten restriksjoner. Når individet holder korte posisjoner er gevinstpotensialet begrenset, mens tapspotensialet er tilnærmet ubegrenset uten restriksjoner.<sup>28</sup> Av den grunn fjernes muligheten for kort-salg og individet kan maksimalt tape det investerte beløpet.

Den påfølgende analysen gjennomføres i to trinn: først identifiseres individets optimale portefølje med og uten hensyn til oppdrettsformuen ved fravær av kort-salg. Deretter sammenlignes porteføljene for å finne hvilken gevinst individet oppnår av å ta hensyn til oppdrettsformuen ved valg av optimal portefølje.

---

<sup>28</sup> Kort-salg ble forklart i kapittel 3.1.1.



### 8.2.1 Optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue

Individets minimeringsproblem er gitt i uttrykk (3.9). Fra tidligere er forventet avkastningsrate til markedsporteføljen 0,78 prosent per måned og risikofri rente er lik 0,21 prosent per måned. Når man ikke tar hensyn til individets oppdrettsformue er  $x_E = 0$ , og individets risikopremie er lik  $\varepsilon := \mu - x_o p_0 = 0,0057$ . Antakelsen om fravær av kort-salg indikerer at individet ikke kan holde negative posisjoner og minimeringsproblemet i uttrykk (3.9) løses under restriksjonen  $\mathbf{a} \geq 0$ .

Tabell 11 angir oppgavens beregning av individets optimale portefølje uten hensyn til oppdrettsformuen,  $\mathbf{a}_0$ . Sektorinvesteringene er gitt som prosentvise plasseringer av individets egenkapital.

Tabell 11: Optimal portefølje uten eksogen formue ved fravær av kort-salg

Sektor	Tangentportefølje
Energi (u. Statoil)	7,84
Telekommunikasjon	7,67
IT	7,84
Forbruksvarer	8,39
Finans	8,59
Industri	7,37
Statoil	6,93
Orkla	6,83
Materialer	7,09
Helsevern	8,55
Forsyninger	9,95
Sjømat	3,93
Totalt investert i usikre verdipapirer	90,98

*Tabell 11: Individets optimale portefølje uten hensyn til oppdrettsformuen kalles tangentporteføljen. Denne definisjonen ble presentert i fremstillingen av porteføljevalgmodellen i kapittel 3.*

Med restriksjoner på kort-salg plasserer individet i overkant av 90 prosent av egenkapitalen i det usikre verdipapirmarkedet. Sektorinvesteringene er noe endret fra tangentporteføljen med kort-

salg, men den totale investeringen er relativt uendret. Dette skyldes trolig at individet ikke holdt negative posisjoner i tangentporteføljen med kort-salg.

Når avkastningsraten til markedsporteføljen definerer den gitte avkastningsraten,  $\mu$ , i minimeringsproblem (3.9), er variansen til tangentporteføljen uten kort salg  $\sigma_{a_0}^2(0,0078) = 0,0024$ .

### 8.2.2 Optimal portefølje med hensyn til eksogen formue

Individet minimeringsproblem er gitt i uttrykk (3.9). Fra tidligere er forventet avkastning til markedsporteføljen lik 0,78 prosent per måned, risikofri rente er 0,21 prosent per måned og forventet avkastningsrate til oppdrettsformuen er 0,29 prosent per måned. Dette gir risikopremie  $\varepsilon := \mu - x_o p_0 - x_E \mu_E = 0,0057 - 0,0029 x_E$ . Antakelsen om fravær av kort-salg indikerer at individet ikke kan holde negative posisjoner og minimeringsproblemet i uttrykk (3.9) løses under restriksjonen  $\mathbf{a} \geq 0$ . Videre vil individets optimale portefølje med hensyn til oppdrettsformuen,  $\mathbf{a}_{x_E}$ , variere med størrelsen på oppdrettsformuen,  $x_E$ , da denne størrelsen inngår i  $c$  og  $\varepsilon$ . I det følgende beregnes allokeringen i den optimale porteføljen for  $x_E = 1$ .<sup>29</sup>

Tabell 12 viser individets hoved- og tangentportefølje med fravær av kort-salg. Sektorinvesteringene er gitt som prosentvise plasseringer av individets egenkapital. Sektorene er rangert fra høyest til lavest korrelasjon med oppdrettsformuen og deretter delt inn i tre grupper; lav, middels og høy korrelasjon med oppdrettsformuen.

---

<sup>29</sup> Senere undersøker oppgaven hvordan ulike størrelser på oppdrettsformuen påvirker individets investeringer.

Tabell 12: Optimal portefølje med hensyn til eksogen formue ved fravær av kort-salg

Sektor	Hovedporteføljen,	Tangentporteføljen,
	$\mathbf{a}_{x_E}$	$\mathbf{a}_0$
Sjømat	0	3,93
Forbruksvarer	0,45	8,40
Finans	0	8,60
Materialer	3,30	7,10
IT	6,94	7,84
Helsevern	2,58	8,55
Industri	3,44	7,37
Forsyninger	1,25	9,95
Energi (u. Statoil)	4,50	7,84
Orkla	6,83	6,25
Statoil	9,00	6,93
Telekommunikasjon	7,69	7,67
Totalt investert i usikre verdipapirer	45,98	90,43

Tabell 12: Hovedporteføljen tilsvarer individets optimale portefølje med hensyn til oppdrettsformuen.

Ved fravær av kort-salg halveres individets totale investeringer i det usikre verdipapirmarkedet når oppdrettsformuen hensyntas. Individets investeringer begrenses til 10 av 12 mulige sektorinvesteringer.

I hovedporteføljen reduseres individets plasseringer i samtlige sektorer som er høyt korrelert med oppdrettsformuen. Ved fravær av kort-salg investerer ikke individet i sjømat- og finanssektoren, og holder relativt lave plasseringer i forbruksvare- og materialesektoren.

Individet både øker og reduserer sine investeringer i sektorene som har lav korrelasjon med oppdrettsformuen. Reduksjonen skyldes trolig at individet generelt investerer mindre i usikre verdipapirer når oppdrettsformuen hensyntas. Videre utgjør Statoil den største plasseringen i hovedporteføljen, selv ved fravær av kort-salg.

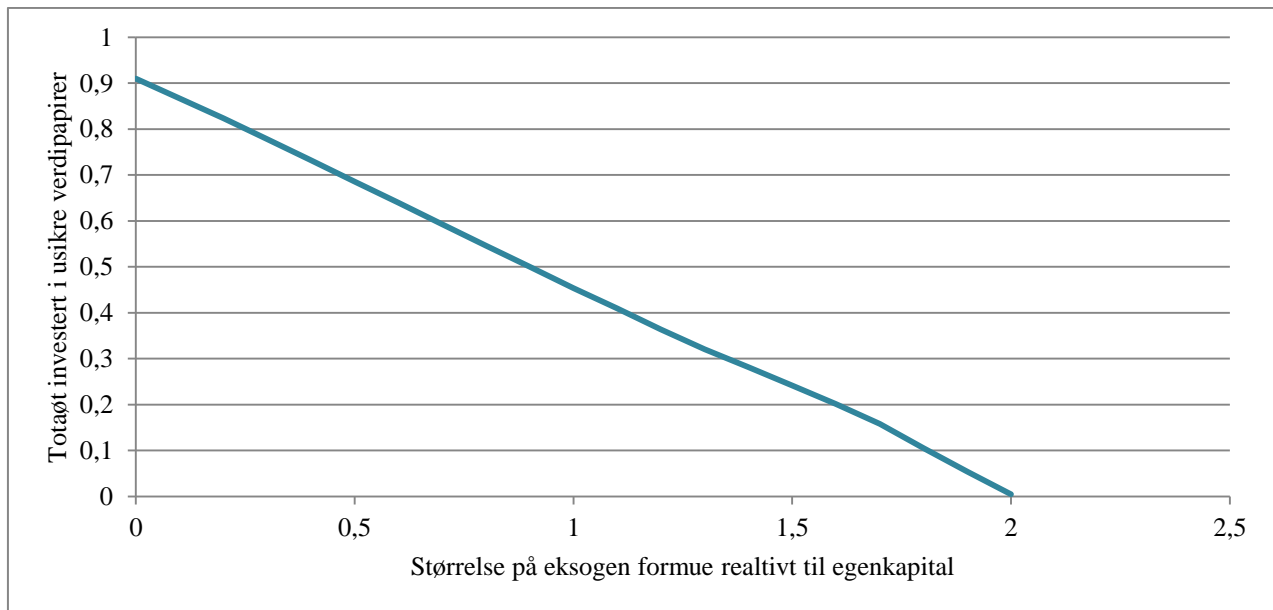
Individets investeringer i sektorgruppen som har middels korrelasjon med oppdrettsformuen, reduseres i hovedporteføljen. Det er ingen klar sammenheng ut ifra korrelasjon og sektorstørrelse

som kan forklare denne reduksjonen, den må sees i sammenheng med at individets totale investeringer faller.

Når avkastningsraten til markedsporteføljen definerer den gitte avkastningsraten,  $\mu$ , i minimeringsproblem (3.9) er variansen til hovedporteføljen  $\sigma_{a_{x_E}}^2(0,0078) = 0,0017$ .<sup>30</sup> Variansen til tangentporteføljen var  $\sigma_{a_1}^2 = 0,0024$ . For samme forventet avkastning eksponeres individet for mindre risiko ved å holde hovedporteføljen fremfor tangentporteføljen, og tangentporteføljen er ikke en effektiv portefølje sammenlignet med hovedporteføljen.

Fra uttrykk (3.13) varierer individets investeringer i hovedporteføljen med størrelsen på oppdrettsformuen. Figur 9 angir individets totale investeringer i usikre verdipapirer for ulike verdier av  $x_E$  ved fravær av kort-salg.

Figur 9: Totalt investert i usikre verdipapirer for ulike størrelser på eksogen formue ved fravær av kort-salg



<sup>30</sup> Det er tilfeldig at variansen til hovedporteføljen (uten kort salg) er lik variansen til hovedporteføljen (med kort-salg), og skyldes avrunding.

Figur 9 viser at den negative sammenhengen mellom individets totale investeringer og størrelsen på oppdrettsformuen forekommer både med og uten restriksjoner på kort-salg. Forskjellen er at individet ikke holder negative posisjoner. Noe som innebærer at individet ikke investerer i det usikre verdipapirmarkedet når  $x_E \geq 2,1$ . Ved fravær av kort-salg fjernes individets mulighet for å låne i verdipapirmarkedet til å nedbetale gjeld tilknyttet oppdrettsforetaket, og individet tapspotensial begrenses til det investerte beløpet.

Egenskapene til individets optimale porteføljer med hensyn til oppdrettsformuen er relativt like med og uten restriksjoner. Gitt individet som betraktes i denne oppgaven kan det tenkes at resultatene med restriksjoner for kort-salg er mer realistiske. Bakgrunnen for dette er at individet allerede eksponeres for risiko ved å eie et oppdrettsforetak. Derfor kan det tenkes at individet foretrekker stabile og langsiktige investeringer fremfor kortsiktige investeringer med ubegrenset tapspotensiale.

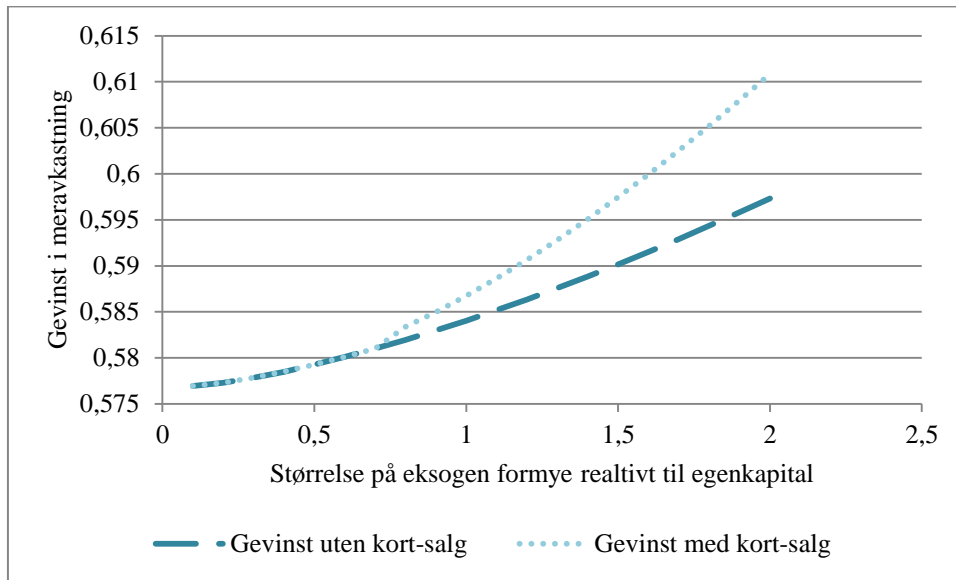
### 8.2.3 Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue ved fravær av kort-salg

Oppgaven finner at variansen til individets totalformue er større dersom individet holder tangentporteføljen,  $\mathbf{a}_0$ , fremfor å holde hovedporteføljen,  $\mathbf{a}_{x_E}$ . Gitt variansen til individets totalformue når tangentporteføljen holdes,  $\sigma_{x(\mathbf{a}_0(\varepsilon))}^2$ , finner man individets maksimale risikopremie med hensyn til oppdrettsformuen med følgende optimeringsproblem:

$$\varepsilon_{x_E(\sigma_{x(\mathbf{a}_0(\varepsilon))}^2)} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{a} \quad \text{gitt} \quad \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + x_E^2 \sigma_E^2 + 2x_E \mathbf{a}^T \mathbf{c}_E \leq \sigma_{x(\mathbf{a}_0(\varepsilon))}^2, \quad \mathbf{a} \geq 0$$

Figur 10 viser individets gevinst av å ta hensyn til oppdrettsformuen for ulike størrelser på oppdrettsformuen når risikopremien er  $\varepsilon = 0,0078 - 0,0021x_E$ . Gevinsten er gitt som økt forventet meravkastning i prosent.

Figur 10: Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue ved fravær av kort-salg



Figur 10: Data for risikofri rente og forventet avkastning til markedsporteføljen og oppdrettsformuen følger forklaringen i innledningen av kapittel 8.1.2.

Utviklingen i gevinsten individet oppnår av å ta hensyn til oppdrettsformuen er relativt lik med og uten restriksjoner. Gevinsten øker etter hvert som størrelsen på oppdrettsformuen øker, men gevinsten er lavere ved fravær av kort-salg for større verdier av  $x_E$ . Grunnen til det er at den maksimale risikopremie individet kan oppnå ved å ta hensyn til oppdrettsformuen er lavere med fravær av kort-slag.

Nøyaktig hvilken gevinst individet oppnår av å ta hensyn til oppdrettsformuen ved fravær av kort-salg avhenger av størrelsen på oppdrettsformuen. For å sette resultatene i perspektiv kan det nevnes at individet oppnår en risikofri meravkastning på 0,59 prosent per år ved å ta hensyn til oppdrettsformuen når  $x_E = 1,5$ . Dette tilsvarer en risikofri gevinst på kr 79 060.<sup>31</sup>

<sup>31</sup>  $1/1,5 = 0,67$  Egenkapitalandel:  $20\,000\,000 \times 0,67 = 13\,400\,000$  Gevinst:  $13\,400\,000 \times 0,0059 = 79\,060$ .

## 9.0 Oppsummering

Under ulike forutsetninger finner oppgaven at individet oppnår en gevinst i form av økt meravkastning dersom oppdrettsformuen hensyntas ved valg av optimal portefølje. Individet oppnår denne gevinsten ved å investere i sektorer som er lavt korrelert med oppdrettsformuen og unngår investeringer som er høyt korrelert med oppdrettsformuen.

I kapittel 8 finner oppgaven individets optimale porteføljer med og uten hensyn til oppdrettsformuen gitt en rekke restriksjoner. Ved muligheter for kort-salg oppnår individet en risikofri meravkastning på 0,59 prosent per år. Dette forutsetter at  $x_E = 1$ . For ulike størrelser på oppdrettsformuen finner oppgaven en positiv sammenheng mellom gevinsten individet oppnår av å ta hensyn til oppdrettsformuen og størrelsen på oppdrettsformuen. Ved fravær av kort-salg oppnår individet en gevinst på 0,58 prosent per år når  $x_E = 1$ .

Individet vil trolig oppnå oppgavens observerte gevinst ved å investere i spesifikke sektorindekser fremfor en bred markedsindeks på Oslo Børs. Ved å investere i sektorindekser fremfor markedsindekser kan individet i større grad hensynta korrelasjonen mellom sektorene og oppdrettsformuen, og oppnå en diversifiseringsgevinst i form av økt avkastning.

## 9.1 Veien videre

Den største utfordringen har vært å finne et godt verdimål på oppgavens oppdrettsformue. Det hadde vært ønskelig om man i større grad kunne definert størrelsen på oppdrettsforetaket og foretakets geografiske spredning, slik at oppgavens resultater tydeligere kunne knyttes opp mot virkelige eksempler.

Opgaven antar at det norske verdipapirmarkedet utgjør hele verdipapirmarkedet individet kan investere i. Av den grunn har oppgaven betraktet korrelasjonen mellom oppdrettsformuen og sektorene på Oslo Børs og oppgavens resultater angir hvordan et individ skal investere i det norske verdipapirmarkedet. En aktuell utvidelse av oppgaven ville vært å anvende en internasjonal markedsindeks, slik at oppgaven også betrakter individets investeringsmuligheter i det internasjonale verdipapirmarkedet.

Videre bør en muligens bruke en lengre tidsperiode for å estimere kovarianser og forventet avkastningsrater for sektorinvesteringene. På grunn av begrensninger på tilgang av data legger oppgaven månedsdata for perioden juni 2007 til 2013 til grunn for analysen. Dermed kan tilfeldigheter i den valgte perioden føre til at de estimerte kovariansene og forventede avkastningsratene ikke er korrekte på lengre sikt. Med unntak av virkningene av finanskrisen i 2008, har det norske verdipapirmarkedet vært preget av en positiv kursutvikling i den observerte perioden. Denne utviklingen kan ikke tas for gitt at fortsetter. I skrivende stund har det vært en markant nedgang på Oslo Børs. Den siste tids børsnedgang kan sees i sammenheng med den svake utviklingen i oljeprisen, som nærmest har vært i fritt fall. Det kan derfor tenkes at oppgavens datasett er for optimistisk når det gjelder utviklingen i det norske verdipapirmarkedet.



## Litteraturliste

**Black, F. (1993)** Estimating Expected Return, *Financial Analyst Journal*, s. 168-170 [internett] Tilgjengelig fra:

[http://jmhommet.free.fr/jmhommet.free.fr/NEWS/Entrees/2014/9/11\\_M1\\_EGRF\\_MESSAGE\\_2\\_files/Black\\_Estimating%20Expected%20Return\\_93.pdf](http://jmhommet.free.fr/jmhommet.free.fr/NEWS/Entrees/2014/9/11_M1_EGRF_MESSAGE_2_files/Black_Estimating%20Expected%20Return_93.pdf)

**Black, F. (1972)** Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing, *The Journal of Finance*, 45, s. 444-445 [internett] Tilgjengelig fra:

[http://www.stat.ucla.edu/~nchristo/statistics\\_c183\\_c283/black\\_1972\\_article.pdf](http://www.stat.ucla.edu/~nchristo/statistics_c183_c283/black_1972_article.pdf)

**Black, F., Jensen, M. C. og Scholes, M. S. (1972)** The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests, s. 1-54 [internett] Tilgjengelig fra:

[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=908569](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=908569)

**Bowen, P. A. (1984)** A hypothesis: Portfolio theory is elegant but useless. *The Investment Analysts Journal*, 17-21 [internett] Tilgjengelig fra:

[http://www.iassa.co.za/articles/024\\_nov1984\\_02.pdf](http://www.iassa.co.za/articles/024_nov1984_02.pdf)

**Brealey, R. A., Myers, S. C. og Allen, F. (2011)** *Principles of Corporate Finance*. New York: McGraw-Hill/Irwin

**Burner, R. F., Eads, K. M., Harris, R. S. og Higgins, R. C (1998)** Best Practices in Estimating the Cost of Capital: Survey and Synthesis, *Financial Practice and Education*, s. 13-28 [internett] Tilgjengelig fra:

[http://faculty.darden.virginia.edu/brunerb/Bruner\\_PDF/Best%20Practices%20Estimating%20Cost%20of%20Capital.pdf](http://faculty.darden.virginia.edu/brunerb/Bruner_PDF/Best%20Practices%20Estimating%20Cost%20of%20Capital.pdf)

**Bøhren, Ø. (1998)** På leting etter god pristeori: Historien om kapitalverdimodellen, *Sosialøkonomien*, 2, s. 20-24 [internett] Tilgjengelig fra: [http://finance.bi.no/~bohren/nat-ref/11-Pa\\_leting\\_etter\\_god\\_pristeori.pdf](http://finance.bi.no/~bohren/nat-ref/11-Pa_leting_etter_god_pristeori.pdf)

**De Bondt, W. F. M. og Thaler, R. (1985)** Does the Stock Market Overreact? *The Journal of Finance*, 40, s. 793-805 [internett] Tilgjengelig fra: [http://www.jasonhsu.org/uploads/1/0/0/7/10075125/debondt\\_and\\_thaler.pdf](http://www.jasonhsu.org/uploads/1/0/0/7/10075125/debondt_and_thaler.pdf)

**Digre, H., Bar, E. M. S., Mathissen, J. R., Standal, D., Grimsmo, I., Henriksen, K., Romsdal, A. og Asche, F. (2014)** Lønnsom foredling av sjømat i Norge, *Sintef Rapport*, A26355, s. 1-94 [internett] Tilgjengelig fra:

[http://www.sintef.no/upload/Fiskeri\\_og\\_havbruk/Publikasjoner/Rapporter/Rapport%20NFD\\_v22\\_rettet%20skrivefeil\\_FINAL%20%282%29.pdf](http://www.sintef.no/upload/Fiskeri_og_havbruk/Publikasjoner/Rapporter/Rapport%20NFD_v22_rettet%20skrivefeil_FINAL%20%282%29.pdf)

**Fama, F. E. og French, K. R. (2004)** The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence, *Journal of Economic Perspectives*, 18, s. 25-46 [internett] Tilgjengelig fra: <http://www-personal.umich.edu/~kathrynd/JEP.FamaandFrench.pdf>

**Grieg Seafood (2008)** Årsrapport 2008 [internett] Tilgjengelig fra:  
<http://hugin.info/138681/R/1338611/319465.pdf>

**Grieg Seafood (2009)** Årsrapport 2009 [internett] Tilgjengelig fra:  
<http://hugin.info/138681/R/1410769/363955.pdf>

**Grieg Seafood (2011)** Årsrapport 2011 [internett] Tilgjengelig fra:  
<http://hugin.info/138681/R/1606308/509118.pdf>

**Grieg Seafood (2012)** Årsrapport 2012 [internett] Tilgjengelig fra:  
<http://hugin.info/138681/R/1696258/558589.pdf>

**Köseoğlu, S. D. og Mercangöz, B. A. (2013)** Testing the Validity of Standard and Zero Beta Capital Asset Pricing Model in Istanbul Stock Exchange, *International Journal of Business, Humanities and Technology*, 3, s. 58-67 [internett] Tilgjengelig fra:  
[http://www.ijbhtnet.com/journals/Vol\\_3\\_No\\_7\\_September\\_2013/8.pdf](http://www.ijbhtnet.com/journals/Vol_3_No_7_September_2013/8.pdf)

**Markowitz, H. (1952)** Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, s. 77-91 [internett] Tilgjengelig fra: [https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz\\_JF.pdf](https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf)

**Norges Bank (2004)** Obligasjonsmarkedet, *Norges Banks Skriftserie*, 34, s. 51-55 [internett] Tilgjengelig fra:

[http://www.norges-bank.no/upload/import/publikasjoner/skriftserie/34/hele\\_heftet\\_34.pdf](http://www.norges-bank.no/upload/import/publikasjoner/skriftserie/34/hele_heftet_34.pdf)

**Næs, R., Skjeltorp, J.A. og Ødegaard, B. A. (2008)** Hvilke faktorer driver kursutviklingen på Oslo Børs? *Norsk Økonomisk tidsskrift*, 123, 36-81 [internett] Tilgjengelig fra:  
[http://www1.uis.no/ansatt/odegaard/publications/2008\\_not\\_faktorer\\_oslo\\_bors/faktorer\\_oslo\\_bors\\_des\\_2008.pdf](http://www1.uis.no/ansatt/odegaard/publications/2008_not_faktorer_oslo_bors/faktorer_oslo_bors_des_2008.pdf)

**Oslo Børs (2013a)** Om Oslo Børs [internett] Tilgjengelig fra:  
<http://www.oslobors.no/Oslo-Boers/Om-oss>

**Oslo Børs (2013b)** Shipping [internett] Tilgjengelig fra: <http://www.oslobors.no/Oslo-Boers/Notering/Energi-shipping-og-sjoemat/Shipping>

**Oslo Børs (2013c)** Energi [internett] Tilgjengelig fra: <http://www.oslobors.no/Oslo-Boers/Notering/Energi-shipping-og-sjoemat/Energi>

**Oslo Børs (2013d)** Sjømat [internett] Tilgjengelig fra: <http://www.oslobors.no/Oslo-Boers/Notering/Energi-shipping-og-sjoemat/Sjoemat>

**Oslo Børs (2013e)** Listestruktur og likviditetsinndeling [internett] Tilgjengelig fra: <http://www.oslobors.no/Oslo-Boers/Notering/Aksjer-egenkapitalbevis-og-retter-til-aksjer/Listestruktur-og-likviditetsinndeling>

**Oslo Børs (2013f)** Oslo Børs Benchmark Index [internett] Tilgjengelig fra: <http://www.oslobors.no/markedsaktivitet/stockIndexOverview?ticker=OSEBX>

**Oslo Børs (2013g)** Oslo Børs All-Share Index [internett] Tilgjengelig fra: [http://www.oslobors.no/markedsaktivitet/stockIndexOverview?newt\\_\\_ticker=OSEAX](http://www.oslobors.no/markedsaktivitet/stockIndexOverview?newt__ticker=OSEAX)

**Oslo Børs (2014a)** Sterkeste første halvår siden 2009 [internett] Tilgjengelig fra: <http://www.oslobors.no/Oslo-Boers/Om-oss/Presserom/Nyheter-fra-Oslo-Boers/Sterkeste-foerste-halvaar-siden-2009>

**Roll, R. (1977)** A Critique Of The Asset Pricing Theory's Test. *Journal of Finance Economics*, 4, s. 129-176 [internett] Tilgjengelig fra:

[http://schwert.ssb.rochester.edu/f532/JFE77\\_RR.pdf](http://schwert.ssb.rochester.edu/f532/JFE77_RR.pdf)

**Sandvik, B. (2013)** Innføring i finans. Ikke-publisert kompendium.

**Stambaugh, R. F. (1983)** Testing the CAPM with broader market indexes: A problem with of mean-deficiency, *The Journal of Banking & Finance*, 7, s. 5-16

**Statistisk Sentralbyrå (1995)** Usikkerhet i oljeprosjekter, *Rapport*, 38, s. 1-74 [internett] Tilgjengelig fra: [https://www.ssb.no/a/histstat/rapp/rapp\\_199538.pdf](https://www.ssb.no/a/histstat/rapp/rapp_199538.pdf)

**Sydsæter, K. (2006)** *Matematisk analyse*. Oslo: Gyldendal Akademiske

**Thomas, L. (2005)** *Using Statistics in Economics*, New York, McGraw-Hill Education

## Vedlegg A: Kovariansmatrise

Vedlegg A inneholder kovariansmatrisen,  $\Sigma$ , som angir kovariansen i avkastningen til sektorene i tabell 3. Kovariansmatrisen anvendes i utledningen av individets optimale porteføljer med og uten hensyn til oppdrettsformuen.

Tabell A: Kovariansmatrise for sektorene

	Sjømat	Energi (u .Statoil)	Telekom.	IT	Forbruks- varer	Finans	Industri	Statoil	Orkla	Materialer	Helsevern	Forsyninger
Energi (u. Statoil)	0,0148	0,0043	0,0048	0,0043	0,0034	0,0034	0,0025	0,0024	0,0048	0,0025	0,0019	0,0045
Telekommunikasjon	0,0043	0,0123	0,0031	0,0045	0,0037	0,0026	0,0029	0,0035	0,0042	0,0013	0,0019	0,0028
IT	0,0048	0,0031	0,0053	0,0038	0,0029	0,0028	0,0018	0,0025	0,004	0,0024	0,0015	0,0035
Forbruksvarer	0,0043	0,0045	0,0038	0,0081	0,0039	0,003	0,0014	0,0024	0,0049	0,002	0,0016	0,0039
Finans	0,0034	0,0037	0,0029	0,0039	0,0034	0,0024	0,0015	0,002	0,0032	0,002	0,0014	0,0031
Industri	0,0034	0,0026	0,0028	0,003	0,0024	0,0042	0,0011	0,0019	0,0028	0,0014	0,0012	0,0025
Statoil	0,0025	0,0029	0,0018	0,0014	0,0015	0,0011	0,0029	0,0014	0,0024	0,0011	0,0013	0,0017
Orkla	0,0024	0,0035	0,0025	0,0024	0,002	0,0019	0,0014	0,004	0,0021	0,0011	0,0015	0,0018
Materialer	0,0048	0,0042	0,004	0,0049	0,0032	0,0028	0,0024	0,0021	0,0094	0,0029	0,002	0,0034
Helsevern	0,0025	0,0013	0,0024	0,002	0,002	0,0014	0,0011	0,0011	0,0029	0,0052	0,0012	0,0028
Forsyninger	0,0019	0,0019	0,0015	0,0016	0,0014	0,0012	0,0013	0,0015	0,002	0,0012	0,002	0,0017
Sjømat	0,0045	0,0028	0,0035	0,0039	0,0031	0,0025	0,0017	0,0018	0,0034	0,0028	0,0017	0,0065

## Vedlegg B: Kovariansvektor

Vedlegg B inneholder kovariansvektoren,  $C_E$ , som angir kovariansen mellom avkastningen til oppdrettsformuen og sektorene i tabell 3. Kovariansvektoren anvendes i utledningen av individets optimale porteføljer med hensyn til oppdrettsformuen.

Tabell B: Kovariansvektor for oppdrettsformuen og sektorene

Sektor	Kovarians
Sjømat	0,0085
Forbruksvarer	0,0077
Materialer	0,0063
Energi (u. Statoil)	0,0061
Finans	0,0049
IT	0,0046
Helsevern	0,0046
Industri	0,0041
Forsyninger	0,0026
Telekommunikasjon	0,0025
Orkla	0,0023
Statoil	0,0013