Matematisk problemløsning med integraler i R2

«Problemløsning er oppgaver som får deg til å tenke»

En kvalitativ studie av fire R2-læreres forståelser og bruk av begrepene problemløsning og problemløsningsoppgaver sammenlignet med deres utforming av problemløsningsoppgaver med integraler.

Chris André M. Lygre

Masteroppgave i matematikkdidaktikk MAT399K

Universitetet i Bergen

Matematisk institutt

Juni 2021

Forord

Denne oppgaven er utarbeidet ved lektorprogrammet ved det matematiske institutt ved Universitetet i Bergen og markerer slutten på min tid som student og starten på min tid som lektor. Arbeidet med masteroppgaven har gitt meg både glede og frustrasjon, men ved å se tilbake på arbeidet opplever jeg at det var vel verdt det, og uten hjelp fra flere personer, hadde jeg ikke kommet i mål.

Jeg vil starte med å gi den største takken til mine fire informanter, som valgte å sette av tid og energi til å delta i masterprosjektet mitt. Dette hadde ikke vært mulig uten dere! Jeg har kanskje krevd litt av dere med tanke på tid, samt innsats i forberedelse av oppgaver, men dere har ikke skuffet meg. Deres historier, erfaringer, eksempler, tanker og meninger har vært grunnlaget for masteroppgaven, men også en inspirasjon til meg som fremtidig lærer. Tusen takk!

I et semester bestående av selvstendighet og uten gitt struktur, har det vært betryggende å ha min veileder som inspirasjonskilde og støtte. Jeg vil derfor takke Bettina Dahl Søndergaard for din veiledning, ekspertise og konstruktive tilbakemeldinger på mine altfor lange og fargerike utkast. Gjennom flere mailutvekslinger og Zoom-møter, bestående av gode diskusjoner og hyppige Google-søk, har du ledet meg frem til en oppgave jeg kan være stolt av. Tusen takk Bettina!

Jeg anser meg selv som heldig, siden jeg har fått være en del av både kull 16 og 17. Jeg har derfor som student fått mulighet til å møte mange ulike personligheter, og takk til alle dere som har gjort min studietid til en minnerik opplevelse! Gjennom faglig samarbeid og med det sosiale miljøet som vi har fått, har jeg nå vennskap for livet.

Sist, men ikke minst, vil jeg takke min familie og nære venner som har hatt tålmodighet med mitt engasjement for fag og min tid som student i alle disse årene! Sånn, nå er min tid som student over!

Sammendrag

Formålet med denne oppgaven er å undersøke sammenhengen mellom fire R2-læreres forståelse av problemløsning med deres utforming av to problemløsningsoppgaver med integraler. Dette kan være relevante å undersøke ettersom læreplanene fra Fagfornyelsen (LK20), som trer i kraft for R2 i 2022, tydelig presenterer problemløsning i kjerneelementene for matematikk. For å samle inn data gjennomføres to intervjuer med hver lærer over Zoom, der lærerne forbereder oppgavene til det andre intervjuet. Etter transkripsjon av intervjuene blir uttalelser meningsfortettet og systematisert etter oppgavens hovedtemaer: undervisning av integraler, problemløsning, problemløsningsoppgaver og problemløsning med integraler. Lærernes forståelser blir dermed sammenlignet ved å undersøke deres eksplisitte forklaringer og utforming av problemløsningsoppgaver. Videre trekkes relevant teori og forskningslitteratur inn i sammenligningen. Funnene viser varierende, men få eksplisitte, forståelser av problemløsningsbegrepet, hvor det finnes at flere av lærerne knytter problemløsningsbegrepet til de oppgaver som skal løses. Videre finnes det derimot at alle lærerne forstår problemløsningsoppgaver i likhet med litteratur på temaet, der et matematisk problem er en oppgave uten gitt fremgangsmåte og som tillater flere løsningsveier og løsninger. Flere av lærerne ser på matematiske problemer som tekstoppgaver og praktisk orienterte oppgaver, der et funn er at problemløsningsoppgaver i skolen ikke alltid kan kalles for ekte problemer. Det kommer også frem eksplisitt i løpet av intervjuene og i utformingen av problemløsningsoppgavene at lærerne vektlegger integralets mulige bruksområder, samt en mulighet for at elever kan anvende kjent matematikk i problemløsningsprosessen. En tilrettelegging for muntlige diskusjoner om løsningsmetoder og strategier er også funnet hos flere av lærerne som en nødvendig og viktig faktor i undervisning med problemløsning, samt for elevers utvikling av problemløsningskompetansen og bruk av strategier.

Innholdsfortegnelse

Liste med Bokser og Tabeller

1 Innledning

Gjennom min lektorutdanning har jeg oppdaget en stor interesse for problemløsning hos meg selv, men jeg har ikke sett eller fått erfaring med problemløsningsoppgaver med integraler. De presenterte eksemplene på problemløsningsoppgaver har vært interessante og utfordrende å arbeide med, men de krever som oftest kun generell tall- eller algebraforståelse og er gjerne ikke alltid tydelig rettet mot spesifikke kunnskapsområder innenfor matematikk på høyere nivå. Det eksisterer derfor et behov for å finne ut hvordan problemløsningsoppgaver med integraler kan se ut, noe som kan være relevant for R2-matematikk siden integraler er en stor del av faget. Det kan derfor være relevant å undersøke hvordan en lærer forstår problemløsning og hvordan en lærer kan utforme slike problemer. Grunnen til dette er siden lærerens rolle i undervisning av problemløsning kan være viktig for å forbedre elevers matematiske kunnskaper og prosedyrer (Leong & Janjaruporn, 2015, s. 646).

Jeg ønsker derfor å undersøke læreres tanker, erfaringer og meninger om temaet, fremfor elevers. Grunnen til dette er fordi jeg gjennom min lektorutdanning har lest mye litteratur om elevers arbeid, strategier, misoppfatninger, begrepsbruk og lignende, men ikke like mye litteratur om lærere. Jeg oppfatter derfor en mangel på innsikt i en lærers perspektiv på temaer som undervisning av integraler, problemløsning og problemløsningsoppgaver. En annen grunn til å undersøke og se hvordan problemløsningsoppgaver kan utformes med integraler, er at elever bør kunne løse varierende typer problemer på en vanlig basis. Elevene bør gjerne få arbeide med ulike typer problemer over lengre tid, for at de skal få erfaring med problemløsning (Leong & Janjaruporn, 2015, s. 647), hvor integralproblemer vil være en slik type.

1.1 Bakgrunn for oppgaven

På et mer overliggende plan enn min egen interesse, har problemløsning lenge blitt sett på som et viktig aspekt med matematikk, både med tanke på undervisning av og læring i matematikk (Björkqvist, 2003; Botten, 2016; Leong & Janjaruporn, 2015; Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina & Bruder, 2016; Pólya, 2009; Schoenfeld, 1992) og kan anses som en viktig del av den matematiske kompetansen (Niss & Jensen, 2002; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Spesielt på 1980-tallet med Pólyas (2009) arbeid med problemløsning ble det tydelig at det å undervise problemløsning burde vektlegge problemløsningsstrategier og heuristikker, men blant annet Leong og Janjaruporn (2015) hevder at dette gjerne ikke er den samme typen tankemåten matematikere har. Det eksisterer altså en diskusjon rundt begrepet problemløsning, ettersom det det kan anses som komplekst, som ikke vil passe inn med en enkel definisjon eller beskrivelse (Barkatsas & Hunting, 1996; Schoenfeld, 1992).

Problemløsning har på lik linje vært en del av matematikkopplæringen i Norge etter blant annet Mønsterplanen for grunnskolen (M87) og Kunnskapsløftet (LK06) (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987; Utdanningsdirektoratet [Udir], 2013) og inngår nå som et av kjerneelementene fra Fagfornyelsen (LK20) (Udir, 2018, 2021). Læreplanene fra LK20 har tredd i kraft for fag på første og andre trinn på videregående skoler, VG1 og VG2, men skal i 2022 også tre i kraft for fag på tredje trinn, VG3, hvor R2 inngår (Udir, 2019). Dette betyr at R2 følger læreplanen fra LK06 når denne oppgaven skrives. En endring fra tidligere læreplaner er at med LK20 er det tydeligere vektlegging av dybdelæring, og fagets kjerneelementer er sentrale. I matematikk beskriver kjerneelementene tenke- og arbeidsmåter, samt metoder og kunnskapsområder i matematikk (Udir, 2018). Det kan derfor være nødvendig å undersøke hvordan problemløsning og tilhørende oppgaver blir oppfattet, forstått og brukt av R2-lærere.

Jeg ønsker også å rette oppgaven mot mulige utforminger av matematiske problemer innenfor integraltemaet, ettersom flere hevder at det gjerne ikke er helt enighet om hva et matematisk problem er (Barkatsas & Hunting, 1996; Schoenfeld, 1992). Flere viser også til forskning som kan indikere at elever sliter med å løse problemløsningsoppgaver innenfor kalkulus, hvor integraler inngår (Dawkins & Epperson, 2014, s. 840; A. Selden, Selden, Hauk & Mason, 2000; J. Selden, Mason & Selden, 1989; J. Selden, Selden & Mason, 1994). Siden R2 foreløpig følger læreplaner for LK06 og ikke LK20, kan jeg derfor komme inn på relevante drøftinger av problemløsning i R2 for den nye læreplanen trer i kraft for faget. Det rettes også spesielt inn mot integraler, som kan anses som en rød tråd i faget. Slike drøftinger kan være aktuelle ettersom en felles forståelse av hva problemløsning er blant lærere og skoler kan være viktig for å kunne tilrettelegge og planlegge problemløsning og problemløsningsoppgaver i fremtidig undervisning.

1.2 Problemstilling

Med utgangspunkt i begrunnelsene lagt frem i denne innledningen, vil derfor hensikten med denne oppgaven være å forsøke å besvare problemstillingen: *Hvordan er sammenhengen mellom fire R2-læreres forståelse av problemløsning og deres utforming av problemløsningsoppgaver med integraler?*

Oppgavens fremstilling av lærernes forståelse av problemløsning vil i hovedsak rette seg mot deres forståelse av en problemløsningsoppgave. Selv om lærernes forståelse av problemløsningsbegrepet skal etterspørres og presenteres, så vil lærernes forståelse av en problemløsningsoppgave være nødvendig og kritisk for en sammenligning med deres utforming av oppgavene. For å kunne drøfte denne sammenhengen vil jeg derfor undersøke og gjøre rede for de fire lærernes eksplisitte uttalelser og forståelser av problemløsning og problemløsningsoppgaver, som et grunnlag for å kunne sammenligne med hvordan de begrunner at deres forberedte oppgaver er problemløsningsoppgaver. I drøftingen av sammenhengen vil det tas utgangspunkt i å bestemme eventuelle likheter og mulige utdypninger eller ulikheter og motstridelser.

For å kunne besvare problemstillingen vil jeg ta utgangspunkt i litteratur og to intervjuer av hver lærer og benytte tre underspørsmål som kan hjelpe meg i besvarelsen:

- Hva kan være viktige faktorer i undervisning av integraler?
- Hva er problemløsning og problemløsningsoppgaver?
- Hva kjennetegner lærernes forberedte oppgaver som problemløsningsoppgaver?

Det første underspørsmålet er rettet mot integraldelen av oppgaven, ettersom lærerne forbereder problemer med integraler. Det andre spørsmålet er rettet mot oppgavens hovedtema, problemløsning, og hvordan et matematisk problem kan forstås. Det siste spørsmålet omhandler oppgavens «spesialisering» eller avgrensning, som er lærernes forberedte problemløsningsoppgaver, og vil være direkte knyttet til oppgavens problemstilling

1.3 Oppgavens struktur

I kapittel 2 presentere og drøftes det teoretiske grunnlaget for denne oppgaven. Her vil jeg først ta for meg to ulike læringssyn, typer forståelse og presentere ulike rammeverk for matematisk kompetanse, før jeg gjør rede for kompetanse i LK20 og legger til grunn en avgrensing av begrepet. Videre vil litteratur om integraler legges frem, ved å først presentere hvordan det er gjort rede for i læreplanene, deretter vil jeg se på viktigheten av derivasjon som forkunnskap, ulike forståelse av og tilnærming av undervisning av integraler. Til slutt vil jeg også presentere litteratur om problemløsning og matematiske problemer, før jeg avslutter kapittelet ved å gjøre rede for forskning på problemløsning med integraler.

Videre i kapittel 3 gjøres det rede for prosjektet metodiske tilnærming og intervju som metode. Valg jeg har tatt vil presenteres og begrunnes, med tanke på utforming av intervjuguide, innhenting av informanter, kontekst for og gjennomføring av datainnsamling og hvordan transkripsjonsprosessen foregikk. Jeg vil også legge frem hvordan jeg analyserte intervjuene og til slutt drøfte kvaliteten på forskningsprosjektet, ved å også reflektere over etiske implikasjoner.

I kapittel 4 presenteres utvalget som en gruppe, samt deres forklaringer, uttalelser og meninger om oppgavens temaer: undervisning av integral i R2, problemløsning og problemløsningsoppgaver. Til slutt presenteres også de forberedte oppgavene og utvalgets begrunnelser på hvorfor oppgavene er problemløsningsoppgaver.

I kapittel 5 diskuterer jeg noen av studiens viktigste funn mot teori lagt frem i kapittel 2. Det diskuteres noen faktorer om undervisning av og forståelse av integraler, samt muligheten til å benytte integralets mange bruksområder, som kan være i sammenheng med problemløsning. Videre gjøres det i kapittel 5.2 derfor rede for lærernes eksplisitte forklaringer på problemløsning og problemløsningsoppgaver, før jeg i kapittel 5.3 trekker inn deres begrunnelser med de forberedte oppgavene og knytter inn deres eksplisitte forståelser. Avslutningsvis drøfter jeg også kvaliteten på innsamlet data ved å diskutere mine egne forkunnskaper, intervju- og analyseprosess og lærerne i utvalget.

2 Teoretisk bakgrunn

I denne oppgaven ønsker jeg å undersøke faktorer knyttet til undervisning av integraler, begrepene problemløsning og problemløsningsoppgaver og problemløsning med integraler. Dette kapittelet har derfor som mål å trekke frem begreper og sammenhenger fra vitenskapelig forskning og litteratur som er sentrale for oppgavens temaer, og dens problemstilling. I dette kapittelet vil jeg derfor starte overordnet med å presentere to læringssyn, ulike typer forståelser og hvordan litteraturen og LK20 behandler kompetansebegrepet i kapittel 2.1. I kapittel 2.2 vil jeg jeg se på kompetansemål om integraler i LK06 og LK20, samt presentere hvordan litteraturen vektlegger en nødvendig forkunnskap til integraler, samt forståelser og undervisning av integraler. Videre i kapittel 2.3 belyser jeg ulike forståelser og bruk av begrepene problemløsning og problemløsningsoppgaver, hvor jeg vil komme inn på hvordan læreplanene i Norge behandler begrepet problemløsning, før jeg til oppsummerer og redegjør for hvordan oppgaven kommer til å bruke disse begrepene. Avslutningsvis presenterer jeg i kapittel 2.4 noen interessante og relevante funn fra forskning om problemløsning innenfor integraltemaet.

2.1 Læringssyn og kompetanse

Det kan det være nødvendig å starte litt bredt og overordnet ved å kort legge frem konstruktivistisk og sosiokuluturelt læringssyn som kan være relevante for denne oppgaven. Det vil også gjøres rede for ulike typer forståelse, som instrumentell eller prosedyremessig forståelse og relasjonell eller konseptuell forståelse. Til slutt vil jeg legge frem hvordan kompetanse og matematisk kompetanse blir behandlet, først og fremst hos Niss og Jensen (2002) og NCTM (2000), men også i LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2020).

2.1.1 Konstruktivistisk og sosiokulturelt læringssyn

Innenfor kognitivismen har konstruktivismen har hatt mye å si om læringssyn, og særlig med Piaget sitt arbeid med læring og paralleller til biologi. Konstruktivismen vektlegger individet, eller organismen som Piaget kaller det, og hvordan individet aktivt konstruerer sin forståelse av en situasjon, et begrep eller omverden generelt. Piaget skiller mellom assimilasjon, som er når barnet tilpasser nye situasjoner til seg selv og tolker det i kjente skjemaer, og akkomodasjon, når barnet erfarer noe nytt og når kjente skjemaer må forandres (Skott, Jess & Hansen, 2008, s. 72). Selv om Piaget ser dette i lys av læring hos et barn, vil jeg tolke at dette også kan gjelde for personer i andre aldersgrupper, hvor jeg videre vil henvise til elever. Disse to prosessene kan sies å heller være avhengige av hverandre enn å være to motsatte prosesser. Assimilasjon kan utvikle overensstemmelsen til en elevs innebygde forutsetninger og akkomodasjon kan anses som en reaksjon på omgivelsene, som kan medføre i en endring i tankemønstre eller -måter hos eleven.

I et slags svar på konstruktivismen og dens læringssyn, hevdes det at «læring [ikke kan] isoleres til mentale aktiviteter i individet» (Dysthe, 2013, s. 84). For at elevene skal utvikle ny kunnskap innenfor et fag bør elevene få mulighet til å delta i kontekster eller sammenhenger der faglig språk benyttes (Dysthe, 2013, s. 84; Angell et al., 2019, s. 143). Min tolkning av forfatternes forståelse er at det sosiokulturelle læringssynet handler om hvordan mennesket kan bruke språket til å kommunisere idéer gjennom skrift eller tale. Læring kan oppstå gjennom interaksjon. Med andre ord, læring har en retning fra et sosialt nivå til et individuelt nivå. I sosiale kontekster kan det være mulig å dele tanker og idéer, og dermed kan de bli tilgjengelig for andre. Eksempelvis i en undervisningssituasjon kan en elev reagere på lærers eller andre elevers begrepsbruk eller forklaring. På et senere tidspunkt kan eleven dermed ta i bruk disse begrepene eller forklaringene, gitt at eleven har kommunisert disse i den sosiale konteksten, ofte kalt internalisering (Angell et al., 2019, s. 143).

2.1.2 Ulike typer forståelse

På bakgrunn av det konstruktivistiske læringssynet vil jeg videre bruket begrepet forståelse eller uttrykket «å forstå noe» på lik linje som Skemp (1971, s. 46) bruker begrepet «to understand something». Å forstå noe bli beskrevet som å assimilere noe til et hensiktsmessig skjema, uten å videre drøfte forståelsesbegrepet annet enn ulike typer forståelser. Skemp (2006, s. 89) identifiserte fordelen med å undervise matematikk med noe han kaller relasjonell fremfor instrumentell forståelse. Kort forklart, så er forskjellen at instrumentell forståelse kan tolkes som forståelsen om *hvordan* utføre en matematisk handling og relasjonell forståelse kan tolkes som forståelsen om *hvorfor* handlingen utføres. En som tidlig arbeider med matematikk kan derimot ha vanskeligheter med å skille mellom disse forståelsene (Skemp, 1971, s. 51). Skemp (2006) argumenterer derfor

for at en instrumentell forståelse kan ha fordeler i det korte løp, der det kan brukes mindre tid til å lære teknikker, prosedyrer eller ferdigheter. En relasjonell forståelse er derimot mer tilpasset nye oppgaver og kan være et godt mål i seg selv.

På lik linje skiller Mahir (2009, s. 201) mellom en konseptuell forståelse som «knowledge which is connected to the other pieces of knowledge, and the holder of the knowledge also recognizes the connection» og en prosedyremessig (procedural) forståelse består av «formal language of mathematics, and of rules, algorithms and procedures used to solve mathematical tasks». På lik linje med den relasjonelle forståelsen til Skemp (2006), kan den konseptuelle forståelsen til Mahir (2009) tolkes som at koblingene mellom de ulike kunnskapene er vel så viktig som de ulike kunnskapene, og at konseptuell læring gjerne krever mer mental aktivitet (Mahir, 2009, s. 201). Dette støtter også Skemp (1971) sin bekymring om å ikke kunne skille mellom disse forståelsene.

Jeg tolker derfor en likhet mellom disse begrepene fra Skemp (2006) og Mahir (2009), og at den relasjonelle og konseptuelle forståelsen kan være en viktig faktor for å oppnå en dypere matematisk forståelse. Den instrumentelle eller prosedyremessige forståelsen kan derimot tolkes mer som de formler, regneregler og andre prosedyrer som kan læres eller pugges for å løse en oppgave. Samtidig poengterer Mahir (2009, s. 202) at det ikke er et klart skille mellom disse typer forståelser, noe også Skemp (1971, 2006) påpeker. Mahir (2009, s. 202) viser også til forskning som hevder at elever ofte pugger regler, prosedyrer og generelle algoritmer, men det kan være at elevene ikke oppfatter de underliggende konseptene bak prosedyrene de benytter. Memoriserte prosedyrer som ikke er støttet av konseptuell forståelse kan kun resultere i begrenset suksess, hvor det heller kreves konseptuell forståelse for å oppnå en fleksibilitet for å løse nye og ulike typer problemer.

2.1.3 Matematisk kompetanse

Matematisk kompetanse har i de siste årene blitt et sentralt begrep for å kunne gjøre rede for hva det vil si å være god i matematikk (Botten, 2016, s. 59; Niss & Jensen, 2002). Eksempelvis benyttes begrepet «matematical literacy» i rammeverket for PISA, som Nortvedt og Pettersen (2016, s. 107-108) velger å oversette til matematisk kompetanse. Matematisk kompetanse[1] kan sies å være evnen til å «formulere, bruke og vurdere

[1] Nortvedt og Pettersen (2016) ser også matematisk kompetanse som nødvendig for individer for å bli konstruktive og reflekterte borgere, gjennom å ta velbegrunnede avgjørelser.

matematikk i ulike sammenhenger og gjenkjenne hvilken rolle matematikk spiller i verden» (Nortvedt & Pettersen, 2016, s. 107). På lik linje bruker Niss og Jensen (2002, s. 43) matematisk kompetanse som kunnskapen om å forstå, utøve, anvende eller ta stilling til matematikk og de sammenhenger der matematikk inngår.

Skott et al. (2008, s. 30) hevder at matematikk som en prosess er blitt et mer sentralt tema innenfor matematikkdidaktikk i løpet av de siste årene, der det vektlegges hva matematikkundervisning skal inneholde og derav fagets prosesser. Av den grunn vil jeg kort presentere to av de viktigste bidragene til denne forståelse: Niss og Jensens (2002) åtte delkompetanser i rapporten deres om *Kompetencer og Matematiklæring*, heretter kalt KOM-rapporten, og NCTMs (2000) ti standarder.

KOM-rapporten presenterer en utvidet og helhetlig måte å kunne analysere eller forstå elevers kompetanse i matematikk, som et «analytisk udviklingsprosjekt» (Niss og Jensen, 2002, s. 20). Det poengteres derfor at rapporten ikke er et forskningsprosjekt eller at det overordnet presenterer matematikkdidaktikk. Niss og Jensen (2002, s. 43) påpeker at én matematisk kompetanse er en avgrenset hovedkomponent i den totale matematiske kompetansen, som er en innsiktsfull klarhet til å handle hensiktsmessig i matematiske situasjoner, som omgår en bestemt slags matematisk utfordring. Niss og Jensen (2002, s. 44) deler derfor den matematiske kompetansen inn i åtte delkompetanser og disse åtte videre inn i to grupper, der noen av delkompetansene ikke tidligere har blitt ansett som viktige innenfor matematisk kompetanse (Botten, 2016, s. 61). Den første gruppen er «at kunne spørge og svare i og med matematik», som inkluderer tankegangs-, modellerings- og resonnementskompetanse, samt problembehandlingskompetanse, som videre vil drøftes i kapittel 2.3.2. Den andre gruppen er «at kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber», bestående av representasjons-, symbol- og formalisme-, kommunikasjons- og hjeldemiddelskompetanse (Niss & Jensen, 2002). Det bør påpekes at selv om delkompetansene er delt inn i to hovedgrupper, så er det i hovedsak ikke en klar inndeling, siden delkompetansene i hver av gruppene også kan knyttes til den andre gruppen.

NCTM (2000, s. 29) viser på en annen side til 10 «standarder» for hva som bør foregå i matematikkundervisningen. Standardene beskriver hvordan undervisningen bør muliggjøre det elever skal vite og gjøre, som også dekker ulike nivåer i skolesystemet. Standardene bør ikke forstås som et minstemål for elevers læring (Skott et al., 2008, s.

31), men heller som en beskrivelse av sammenhengen mellom matematisk forståelse og kompetanse, eksempelvis mål for undervisning, ressurser for lærere og guide for pensum (NCTM, 2000, s. 6; Skott et al., 2008, s. 31). NCTM (2000) skiller mellom innholdsstandarder (content standards) og prosesstandarder (process standard). Innholdsstandardene beskriver det matematiske innholdet elever skal lære, som algebra, geometri og tall og operasjoner, og vil ikke bli drøftet noe videre i denne oppgaven. Prosesstandardene belyser derimot de måter å erverve og bruke innholdet i faget, og består av representasjoner, kommunikasjon, resonnering og bevis, samt problemløsning, som også vil drøftes i kapittel 2.3.2.

Ifølge Niss og Jensen (2002, s. 43) impliserer matematisk kompetanse konkrete kunnskaper og konkrete ferdigheter innenfor ulike matematiske områder, hvor eksempelvis disse kunnskapsområdene kan tolkes til de fem innholdsstandardene til NCTM (2000). Samtidig påpeker Niss og Jensen (2002) at matematisk kompetanse ikke kan reduseres ned til disse forutsetningene. Skott et al. (2008, s. 31) hevder det er en slags parallell og det er derfor mulig å se en sammenheng mellom de åtte delkompetansene til Niss og Jensen (2002) og de fem prosesstandardene til NCTM (2000), hvor eksempelvis representasjons- og kommunikasjonskompetansen nevnes hos begge, mens eksempelvis bevis som eksplisitt nevnes som en standard i NCTM (2000) kan implisitt finnes i resonnementskompetansen til Niss og Jensen (2002).

2.1.4 Kompetanse i LK20 og en avgrensing

Læreplanene fra LK20 har fremdeles kompetansemål, men definisjonen på begrepet er fornyet fra tidligere læreplaner: «Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning» (Kunnskapsdepartementet, 2020; Udir, 2019). Det generelle kompetansebegrepet i LK20 gjør rede for hva det vil si å være god i et fag, på samme måte som hvordan matematisk kompetanse sier noe om hva det vil så å være god i matematikk (Botten, 2016; Niss & Jensen, 2002; Nortvedt & Pettersen, 2016). Kompetansen inkluderer også det å løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger, som tydelig er koblet til vektleggingen av dybdelæring i de nye læreplanene fra LK20 (Udir, 2019) samt at kompetanse innebærer kritisk tenkning (Kunnskapsdepartementet, 2002; Udir, 2019).

Videre vil jeg bruke begrepet matematisk kompetanse om hva det vil si å være god i matematikk, på lik linje med Botten (2016) og Niss og Jensen (2002), men også med hensyn til hvordan Kunnskapsdepartementet (2020) omtaler kompetanse. Matematisk kompetanse kan videre forstås som evnen og kunnskapen til å forstå, formulere, anvende og vurdere matematikk i kjente og ukjente sammenhenger der matematikk inngår (Kunnskapsdepartementet, 2020; Niss & Jensen, 2002; Nortvedt & Pettersen, 2016). Implisitt vil dette også inkludere matematikkfagets prosesser (NCTM, 2000) og delkompetanser (Niss & Jensen, 2002). Begrepet «ferdigheter» kan ofte knyttes til kompetansebegrepet, hvor jeg ikke ønsker å drøfte ferdigheter i for stor grad. Jeg kommer derfor til å ta utgangspunkt i definisjonen fra Kunnskapsdepartementet (2020) og på lik linje vise til ferdigheter som de «handlinger eller prosedyrer for å utføre oppgaver eller løse problemer». Selv om Kunnskapsdepartementet viser til ferdigheter uten en henvisning til et spesifikt fag, tolker jeg definisjonen av ferdigheter som relevant for matematikkferdigheter, ettersom det er de handlinger eller prosedyrer som er i fokus.

2.2 Undervisning av integral og integrasjon

I dette delkapittelet vil jeg presentere hvordan integraler er nevnt i nåværende og kommende læreplan for R2, da det kan være en viktig faktor som påvirker hvordan utvalget underviser integraler i R2, samt forbereder problemløsningsoppgaver innenfor temaet. Deretter vil det presenteres litteratur om en viktig forkunnskap til integralregning, ulike forståelser av integral og til slutt et forslag til en praktisk tilnærming av undervisning av integraler. Det bør poengteres at jeg vil avgrense teamet om integraler ved å ikke drøfte i for stor grad hvordan elever forstår, representerer eller arbeider med integraler. Det er fordi denne masteroppgaven undersøker integraler i skolen fra en lærers perspektiv med tanke på forberedelser og undervisning, fremfor fra en elevs perspektiv. Forventede regler, metoder, forkunnskaper, kompetanser eller andre faktorer som kan påvirke undervisningen av integraler kan være mer interessante og relevante for denne oppgaven.

2.2.1 Integraler i R2 fra LK06 og LK20

I tråd med hvordan generell kompetanse i et fag ble definert i kapittel 2.1.4, er kompetansemålene for matematikk R2 mål for hva elevene skal kunne etter opplæring i faget. Under kompetansemålene for R2 i læreplanen fra LK06 skal elever blant annet kunne «gjøre rede for definisjonen av bestemt integral som grense for en sum og ubestemt integral som antiderivert», «beregne integraler av de sentrale funksjonene ved antiderivasjon og ved hjelp av variabelskifte, ved delbrøkoppspalting med lineære nevnere og ved delvis integrasjon» og «tolke det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og bruke det til å beregne arealer av plane områder og volumer av omdreiningslegemer» (Udir, 2006). I læreplanen fra LK06 skilles det mellom bestemt integral som en sum og ubestemt integral som en antiderivert. Det er også egne kompetansemål for differensiallikninger, noe LK20 ikke har.

I kompetansemålene fra LK20 skal elever etter opplæring kunne «gjøre rede for integral som en grenseverdi av en følge av summer, og tolke betydningen av denne grenseverdien i ulike situasjoner», «utvikle algoritmer for å beregne integraler numerisk, og bruke programmering til å utføre algoritmene» og «analysere og tolke ulike funksjoner ved å bruke derivasjon og integrasjon, og anvende integrasjon til å beregne ulike mål av omdreiningslegemer» (Udir, 2022). I både den gjeldende læreplanen for R2 fra LK06 og den kommende fra LK20, er det et fokus på integral som en grenseverdi og dens tolkninger, anvendelse av integrasjon til å analysere og tolke funksjoner og modeller, og anvendelse av integrasjon til beregning av arealer og volum (Udir, 2006, 2022). Noen ulikheter mellom læreplanene er at i LK06 er det eksplisitte kompetansemål om integrasjonsmetodene og differensiallikninger, samt en distinksjon mellom bestemt og ubestemt integral. Andre aspektet knyttet til integrasjon, spesielt henvist i LK20, som fundamentalteoremet, programmering og modellering, er også vektlagt, men kommer ikke til å prioriteres eller drøftet videre i denne oppgaven.

2.2.2 Derivasjon som forventet forkunnskap

Integrasjon er en av de to fundamentale konseptene i kalkulus i lag med derivasjon. På norske skoler introduseres, som oftest, derivasjon før integrasjon, siden derivasjon er et tema i R1 og integrasjon et tema i R2. En grunn til at elever derimot kan oppleve kalkulus som utfordrende kan være grunnet mangel av konseptuell forståelse (Mahir, 2009, s. 201). I kalkulus er nye konsepter bygget opp ved å bruke tidligere etablerte konsepter (Mahir, 2009) og noen aspekter med integrasjon kan oppleves som utfordrende for selv de flinke elevene, hvor eksempelvis integrasjon som en grenseverdi av en sum er et gjengående tema blant Ortons (1983) funn.

Med tanke på forkunnskaper hevder blant annet Mahir (2009, s. 202) at elever ikke kan forstå derivasjon uten å ha kjennskap til grenseverdier og elevene ikke kan forstå integrasjon uten å kjenne til derivasjon. Noen lærere velger derfor å introdusere integrasjon som en regel, som en anti-derivasjon (Orton, 1983, s. 10), for å kunne koble nye konsepter til tidligere kjente konsepter. Jones (2013) finner også at majoriteten av oppmerksomheten rettet mot integraler er at integraler er en anti-derivert, og at integranden i et integraluttrykk er en derivert av en «original» funksjon. Jones (2013, s. 129) hevder også at den symbolske formen til et integral derfor er tett knyttet til antiderivasjonsprosessen og argumenterer for at elever dermed kan gi mening til symbolene i integralet, fremfor å kun se på det som en kalkulasjon.

2.2.3 Forståelse av integral

Orton (1983, s. 10) hevder at flere lærere har akseptert at elever kan oppleve integraler som utfordrende. En introduksjon av integraler kan ikke gjøres lett, dersom det antas at elever skal kunne oppnå noe ytterligere enn evnen til å integrere og finne svar på enkle oppgaver. Med andre ord, det er mulig å tolke Orton (1983) slik at undervisning av integraler kan ha en utfordring med å vektlegge eller få frem den relasjonelle eller konseptuelle forståelsen av integraler fremfor den instrumentelle eller prosedyremessige forståelsen (Skemp, 2006; Mahir, 2009). Det er også mulig å forstå det slik at elever kan lære seg ulike algoritmer for løsning, uten å forstå de underliggende konseptene (Dawkins & Epperson, 2014, s. 842). For å oppnå god matematikkundervisning bør det derfor være en balanse mellom den prosedyremessige og konseptuelle forståelse hos elevene ved å vektlegge konsepter og relasjoner fremfor problemløsningsteknikker, eller heurestikker (Mahir, 2009).

Strang (1990) foreslår en enkel modell for å bygge opp under elevers forståelse av derivasjon og integrasjon ved redusere det ned hovedsakelig to funksjoner, f og v. Det er da to mål, hvor det første er å forstå relasjonen mellom funksjonen f og dens deriverte v, samt relasjonen mellom funksjonen v og dens integral f. Det andre målet til Strang (1974, s. 20) er å la elevene faktisk se at alle funksjoner kommer i par med f og v. Jeg tolker det første målet til Strang (1974) som en slags innføring og forståelse av derivasjon og integrasjon, med de tilhørende regler og metoder. Det andre målet kan tolkes som mer rettet mot erfaringen elever kan få ved å arbeide med flere funksjoner og etter hvert oppdage en kobling mellom den deriverte og den integrerte.

2.2.4 En praktisk tilnærming av undervisning av integral

Allerede tidlig i grunnskolen lærer elever å finne areal av bestemte geometriske figurer. Da de ankommer R2 på videregående skoler møter de på integrasjon som en måte å beregne mer komplekse arealer, samt volumer. Et spørsmål kan derfor være hvordan integrasjon bør introduseres, siden det har flere generelle egenskaper. Integrasjon kan være en måling av areal, volum og lengde, eller mer presist som grenseverdien til en sum av små størrelser, eller som inversoperasjonen til derivasjon (Bressoud, 1992, s. 296), som også er nevnt tidligere som en anti-derivasjon. Det kan være utfordrende å undervise flere av disse ulike måtene på ulike tidspunkt uten å forvirre elevene. Dragoo (1945, s. 191) hevder at bestemte integral, som en introduksjon til integraler, ofte blir presentert som en summeringsprosess, noe som er mulig å finne igjen i kompetansemålene fra LK06 (Udir, 2006). Dragoo mener derimot at et bestemt integral kan lettere forstås geometrisk (Dragoo, 1945, s. 192). På lik linje foreslår Bressoud (1992, s. 296) en praktisk tilnærming, hvor introduksjon av integraler bør ta utgangspunkt i å finne arealer, siden det da vil følge historien, slik det ble utviklet innen kalkulus. Selv om det er en eldre artikkel tolker jeg artikkelen som relevant, ettersom Dragoo (1945) også hevder at det er den praktiske nytten og meningen som bør komme frem i undervisning av kalkulus, fremfor blant annet bevis.

2.3 Problemløsning

For å kunne forstå hva som kan menes med problemløsning, vil jeg først i dette delkapittelet drøfte ulike forståelser av begrepene problem og problemløsning. Begrepene problem og matematisk problem kommer også til å nevnes synonymt videre i teksten. Til slutt vil det gjøres rede for hvordan problemløsning blir presentert for første gang i et læreplanverk (M87), samt den gjeldende (LK06) og kommende læreplanen (LK20).

2.3.1 Problemløsningsoppgave: Matematisk problem

Schoenfeld (1992, s. 337) drøfter begrepet «problem» i matematikkfaget, der han skiller mellom to måter å forstå et problem på. Det første er problem som en matematisk oppgave som skal utføres, hvor Schoenfeld (1992, s. 337) heller kaller slike problem for «routine exercises», altså rutineoppgaver[2]. Det poengteres at et standard opplegg med slike oppgaver er at oppgaven først benyttes for å introdusere en teknikk og deretter blir teknikken demonstrert. Deretter blir flere slike oppgaver gitt, slik at elever kan øve på denne teknikken og det kan tolkes som at elevene skal etter denne prosessen ha lært en ny teknikk for å løse et matematisk problem (Björkqvist, 2003; Schoenfeld, 1992). På lik linje med Schoenfeld (1992) kommer jeg videre i teksten til å kalle slike innlærende oppgaver eller problemer for tradisjonelle rutineoppgaver, der målet er å lære og øve på en ny løsningsteknikk. Begrepene problem og tekstoppgave er også ofte nevnt synonymt, da det gjerne er forutsatt at en tekstoppgave er et problem, eller at problemer er tekstoppgaver, men Björkqvist (2003, s. 55) poengterer at en tekstoppgave kan være begge deler, altså enten et problem eller ikke et problem. Tekstoppgaver som ikke er problemer kan anses som øvingsoppgaver, mye likt rutineoppgave, bare mer tekstbasert i oppgaveformuleringen.

Den andre måten Schoenfeld (1992, s. 337) påpeker at et problem kan forstås som, er som et spørsmål som er «perplexing or difficult», noe jeg tolker som komplisert eller vanskelig, sammenlignet med en tradisjonell rutineoppgave. NCTM (2014) forklarer at en oppgave på høyt nivå ikke har noen gitte fremgangsmåter og at en elev kan lære mye matematikk fra oppgaven. NCTM (2014, s. 21) hevder at slike oppgaver promoterer problemløsning og vil kreve at elevene må utforske, uten å bli fortalt hva de kan forvente. Videre i teksten kommer jeg også til å bruke begrepene problemer og *problemløsningsoppgaver* synonymt, da jeg tolker problemer som oppgaver som kan promotere problemløsning.

Matematiske problemer[3] kan defineres som matematiske oppgaver hvor det kan være uklart hvilken løsningsmetode som kan brukes (Björkqvist, 2003, s. 54; NCTM, 2000, s. 52), hvor en slik problemløsningsoppgave bør kunne løses på flere måter (NCTM, 2014, s. 24; Niss og Jensen, 2002, s. 49). En problemløsningsoppgave kan dermed muliggjøre mer utforsking enn en tradisjonell rutineoppgave. Samtidig poengterer også Skott et al. (2008, s. 34) at et matematisk problem ikke lengre blir et problem, hvis en lærer først presenterer hvordan løse en oppgavetype og deretter ber elevene øve eller trene på

[2] På tilsvarende måte bruker Angell et al. (2019, s. 246) begrepet regneoppgaver i fysikk om problemer som kan løses på en systematisk måte, men der de også kan være mer problemløsningsorienterte ved å drøfte variabler og deres avhengighet.
[3] Andre alternative begreper for problemer, med samme eller lignende definisjon, er «non-routine problems» (A. Selden et al., 2000; J. Selden et al., 1989; J. Selden et al., 1994) eller «non-template problems» (Allen, 2001).

tilsvarende prosedyre. Dette tolker jeg som at problemet kan bli en rutineoppgave, avhengig av undervisningssituasjonen.

Et problem kan sies å bestå av to komponenter: selve oppgaven og den som løser den (A. Selden et al., 2000; J. Selden et al., 1989; J. Selden et al., 1994). Definisjonen av et matematisk problem kan derfor også anses som individrelatert, fordi det kan være «uklart for problemløseren hvilke løsningsmetoder som kan brukes» (Björkqvist, 2003, s. 54). Et matematisk problem behøver dermed ikke å oppfattes som et problem for alle, men kan oppfattes som en rutineoppgave for noen, og motsatt (Angell et al., 2019, s. 246; Björkqvist, 2003, s. 155; NCTM, 2000; Niss & Jensen, 2002, s. 50; Skott et al., 2008, s. 34).

2.3.2 Problemløsning og kompetanse

Begrepet «problemløsning» kan også ha mange ulike definisjoner og bruksområder, men Björkqvist (2003, s. 51) hevder at problemløsning alltid er forbundet med «muligheter for nye utfordringer i form av nye problemer» og at «problemløsning både er og fremmer utvikling». Björkqvist begrunner dette med en forventning om å kunne løse problemer i fremtiden med kunnskaper fra skolen, hvor Mamona-Downs og Downs (2008, s. 162) også ser på problemløsnings i lys av undervisning, der problemløsning er et fokus på strategier og det å ta i bruk nyttige måter å jobbe på, som er kjent fra tidligere.

Problembehandlingskompetansen er nevnt som en av de åtte delkompetansene i KOM-rapporten og Niss og Jensen (2002, s. 49) hevder at delkompetansen består av å delvis *sette opp* og delvis *løse* problemer. Det å sette opp et matematisk problem kan inkludere å formulere, presisere og avgrense problemet. Det påpekes også at det oppsatte problemet kan være et «rent» problem, samt anvendt, åpent eller lukket problem. Innenfor denne delkompetansen vil det å løse et ferdigformulert problem også muliggjøre å løse problemet på ulike måter. Selv om denne delkompetansen kan sies å bestå av to deler, sette opp og løse et problem, så vil ikke det å kunne formulere problemer være det samme som det å kunne løse ferdigformulerte problemer (Niss og Jensen, 2002, s. 50). Forfatterne poengterer at det er mulig å løse problemer uten å være i stand til å formulere slike problemer, og motsatt.

På lik linje med Mamona-Downs og Downs (2008) som ser problemløsning i forbindelse med undervisning, henviser NCTM (2000, s. 52) til problemløsning som en av standardene for hva elever skal kunne fra førskolen (prekindergarten) til 12. trinnet.

NCTM (2000, s. 52-55) nevner i hovedsak fire aspekter med problemløsning: matematisk kunnskap, løse problemer, strategier og selvmonitorering. Elever skal kunne bygge ny matematisk kunnskap gjennom problemløsning, løse problemer som oppstår i matematikk eller andre kontekster, anvende og tilpasse ulike strategier til å løse problemer og reflektere og monitorere prosessen med matematisk problemløsning.

2.3.3 Ulik bruk av problemløsning

Stanic og Kilpatrick (1988), referert i Schoenfeld (1992, s. 338), påpeker tre hovedtemaer ved bruken av problemløsning. Det første temaet er problemløsning som *kontekst*, hvor problemløsning ikke er et mål i seg selv, men problemløsning kan benyttes for å oppnå andre mål. De viktigste rollene problemløsning kan ha innenfor dette temaet er som en rettferdiggjøring av å undervise matematikk, for å gi motivasjon for ulike temaer i matematikken og som øving, for å utvikle noen visse ferdigheter knyttet til løsningsteknikker.

Det andre temaet er problemløsning som en *«skill»,* hvor problemløsning er et mål i seg selv (Schoenfeld, 1992, s. 338), altså evnen til å finne løsning på et gitt problem. Det kan være usikkert om «skill» henviser til ferdighet eller kompetanse. Jeg velger her å tolke det som en ferdighet med utgangspunkt i slik ferdighet ble definert i kapittel 2.1.4. Det å løse et problem kan derfor anses som en ferdighet, hvor lærere og skoler derfor bør forvente at elevene allerede har noen ferdigheter innen problemløsning, før den teoretiske kunnskapen er på plass (Mamona-Downs & Downs, 2008, s. 162). Med problemløsning som ferdighet tolker jeg de tilhørende matematiske problemene på to måter. Det første er at problemet kan være en rutineoppgave, da problemløsning, som ferdighet, kan være en måte å løse et gitt problem på. Det andre er problemet som en oppgave som er vanskelig, gjerne uten gitt fremgangsmåte, hvor evnen eller ferdigheten for å kunne løse en slik oppgave er i fokus.

Problemløsning bør derfor undervises (Schoenfeld, 1992, s. 338; Liljedahl et al., 2016, s. 3). Med andre ord, problemløsning bør være en del av pensumet til matematikkfaget. På lik linje trekker også Leong og Janjaruporn (2015, s. 646) frem reformdokumenter, fra blant annet NCTM, som hevder at problemløsning ikke skal være en isolert del av matematikkundervisningen, men bør være en integrert del av matematikklæringen. I kapittel 2.3.5 vil det vises at problemløsning har vært en del av matematikkfaget i Norge siden M87 (Björkqvist, 2003; Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987) frem til og med LK20, der det inngår som et av kjerneelementene i matematikkfaget (Udir, 2021). Dette tolker jeg til å støtte blant annet Schoenfeld (1992) sin oppfordring om å undervise problemløsning.

Det tredje temaet er problemløsning som «art» (Schoenfeld, 1992, s. 338), altså problemløsning som en kunst. Dette synspunktet skiller seg litt fra de to forrige, da dette i hovedsak påpeker at ekte problemløsning er kjernen av matematikk. De matematiske problemene innfor dette synspunktet kan anses å være de vanskelige eller utfordrende oppgavene som ble nevnt i kapittel 2.3.1.

2.3.4 Problemløsning og heuristikk

I tråd med hvordan NCTM (2000) nevner bygging av matematisk kunnskap med problemløsning, trekker Liljedahl et al. (2016, s. 12) frem forskning som hevder at også tidligere kunnskap er en viktig faktor i problemløsningsprosessen og at forkunnskapen til en problemløser i stor grad påvirker hvordan et problem forstås og hvilke strategier en problemløser velger. En annen viktig side ved problemløsning er kreativitet, som jeg veldig kort vil presentere, men ikke vil vektlegge i for stor grad i denne oppgaven, ettersom at jeg ikke undersøker elevers arbeid med problemløsningsoppgaver. Hadamard (1945), referert i Liljedahl et al. (2016, s. 8), hevder at kreativitet består av fire faser, der den første fasen kan være relevant for min oppgave. Den første er «the initiation phase», initieringsfasen, som består av bevisst arbeid med eksempelvis et problem. Denne fasen er karakterisert ved at problemløseren oppsøker inspirasjon fra tidligere erfaring. Med andre ord, forkunnskapene og de tidligere erfaringene til en problemløser er grunnlaget når et nytt problem skal angripes og løses. Et resultat av dette er at problemløsning kan knyttes til heuristikk, der det å løse et problem bygger på tidligere erfaringer og forkunnskaper, samt strategier (Mamona-Downs & Downs, 2008).

Det er derfor utfordrende å gjøre rede for problemløsning uten å henvise til Pólyas konseptualisering av matematikk som problemløsning og hans arbeid med å la problemløsning bli et fokus for matematikkundervisning. Det er mulig å tolke Pólyas (2009) forståelse av matematikk som en aktivitet (Schoenfeld, 1992, s. 339), hvor Pólyas idéer og tanker om problemløsning som en ferdighet i matematikk ofte har fått betegnelsen heuristikk (Björkqvist, 2003, s. 154; Liljedahl et al., 2016; Schoenfeld, 1992, s. 339) eller moderne heuristikk, som Pólya (2009) selv kaller det. Pólya (2009, s. 4) hevder at det å løse problemer er en type praktisk ferdighet og at det er mulig å erverve en praktisk ferdighet ved å imitere og øve, på samme måte som eksempelvis svømming. Dersom en lærer skal utvikle problemløsning som en ferdighet hos elevene bør de få flere muligheter for å imitere og øve (Polya, 2009, s. 5).

Kort forklart, så er Pólyas (2009) fire steg i prosessen av hans heuristikk å først forstå problemet og undersøke hva som er det ukjente. Det andre steget er å lage en plan for løsningsmetode, der det letes etter en kobling eller likheter mellom det gitte problemet og andre problemer som er arbeidet med tidligere. Det tredje steget er å gjennomføre planen ved å bruke de metodene fra forrige steg. Det siste steget er å se tilbake ved å undersøke løsningen og stille spørsmål med den, samt løsningsmetoden som er benyttet. Liljedahl et al. (2016) kaller dette prinsippet som problemløsning av design, der design kan forstås som den algoritmiske og deduktive fremgangsmåten for å løse et problem.

Det er mulig å tolke disse stegene eller stadiene i Pólyas prosess som kronologiske, men Botten (2016, s. 155) argumenterer heller for å betrakte dem som «aspekter enn som stadier i problemløsningsprosessen». Med andre ord, problemløsningsprosessen er ikke låst til den rekkefølgen Pólya legger frem, men heller som en prosess hvor man kan gå frem og tilbake mellom stegene. En mulig konsekvens av dette er at problemløsere er opportunistiske, da de følger produktive tankemønstre og er villige til å justere, bytte ut eller endre sine løsningsstrategier uten noe særlig påvirkning (Björkqvist, 2003, s. 60).

2.3.5 Problemløsning i læreplanverkene

I Norge ble problemløsning for første gang et eget emne i matematikkfaget i grunnskolen i M87, der problemløsning skulle være en del av matematikkopplæringen (Botten, 2016, s. 153; Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987). Problemløsning fikk en viktig plass i læreplanen ved at «elevene får trening i selv å finne og formulere oppgaver, [slik at problemløsning kan] motivere dem til å ta i bruk matematikk som redskap og stimulere deres evne til kreativ tenkning» (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987, s. 196). I M87 presenteres det også noen ledd i prosessen for å løse et problem som følger idéene til Pólya (2009), som er å formulere og analysere problemet, komme frem til en løsningsmetode, utføre nødvendige beregninger og til slutt vurdere fremgangsmåte og resultater.

I LK06 var det grunnleggende ferdigheter som ble en prioritet, men problemløsning var fortsatt inkludert i læreplanverket og nevnt under de ulike grunnleggende ferdighetene.

Med de muntlige ferdighetene skulle elevene drøfte problemer og løsningsstrategier med andre og de skriftlige ferdighetene innebar å løse problemer ved hjelp av matematikk. Regneferdighetene handlet også om problemløsning og utforsking med utgangspunkt i problemer, hvor de digitale ferdighetene blant annet innebar å benytte digitale hjelpemidler til problemløsning. Under formålet til læreplanen for matematikk på VG1 knyttes også problemløsning inn som en del av den matematiske kompetansen, der problemløsning defineres som «å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig det er» (Udir, 2013). Problemløsning i LK06 for matematikk som fellesfag følger til en viss grad Polyas idéer, slik som i M87, men det inkluderer også den muntlige delen av problemløsning, der «[det også har] språklege aspekt, som det å resonnere og kommunisere idear» (Udir, 2013). Problemløsning er ikke like direkte nevnt i læreplanen i matematikk for realfag, R1 og R2, ettersom det i formålet for realfagsmatematikk er mer snakk om fordypning og argumentasjon i matematikk, samt utforsking og utvikling av ferdigheter rettet mot fremtiden med et nytteperspektiv (Udir, 2006).

En endring og mer tydeliggjøring i LK20 sammenlignet med tidligere læreplaner er beskrivelsen av matematikkfagets kjerneelementer, der problemløsning fortsatt er et viktig tema og sentralt begrep innenfor matematikken. Kjerneelementene beskriver arbeidsmåter, metoder og tenkemåter i matematikk, samt de sentrale kunnskapsområdene i matematikk (Udir, 2018). Under det første kjerneelementet «Utforsking og problemløsning» for Matematikk R, defineres problemløsning som: «Problemløsing i [matematikk] handler om å utvikle en metode for å løse et ukjent problem (…) analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om og når løsningene er gyldige» (Udir, 2021). På lik linje med M87 og LK06 følger også problemløsning i LK20 til en viss grad Pólyas idéer, med tanke på å løse problemer og vurdere løsning. En interessant ting med problemløsning i LK20 er at problemløsning kan tolkes som en metode, som både inkluderer analysering og omforming av kjente og ukjente problemer.

2.3.6 En oppsummering av problemløsning og problemløsningsoppgave

Før en videre presentasjon ser jeg det nødvendig med en oppsummering, hvor jeg avklarer hvordan jeg kommer til å bruke begrepene problemløsning og problemløsningsoppgave videre i oppgaven, basert på litteratur fra dette kapittelet. Med begrepet *problemløsningsoppgave* henviser jeg til (først og fremst matematiske) oppgaver, hvor det kan være uklart hvilken løsningsmetode som skal brukes og at det kan være flere tillate løsningsveier, samt at oppgaven kan være individrelatert, med tanke på at ulike personer kan oppfatte oppgaven som problem og andre som en mer rutineoppgave (Björkqvist, 2003; NCTM, 2000, 2014; Niss & Jensen, 2002; A. Selden et al., 2000; J. Selden et al., 1989; J. Selden et al., 1994; Skott et al., 2008). Som det også er påpekt tidligere, kommer jeg til å bruke begrepene problemløsningsoppgaver, problemer og matematiske problemer synonymt.

I intervjuene etterspør jeg lærernes tanker om kjennetegn på en god problemløser. Jeg vil gjerne påpeke at jeg derfor kan knytte problemløsning til elevers mulige strategier og at problemløsnings*oppgaver* kan anses som individrelaterte. Jeg kommer derimot til å avgrense denne oppgavens bruk av problemløsning til å ikke diskutere i for stor grad elevers resonneringsprosess, selvmonitorering eller kreativ tenkning, siden det er lærere som er mitt fokusområde. Med andre ord, de kognitive eller metakognitive aspektene med problemløsningsprosessen vil ikke vektlegges, i motsetning til hvordan blant annet Barkatsas og Hunting (1996), Schoenfeld (1992) eller Sengul og Katranci (2015) vektlegger dette. De hevder at elevers bruk av metakognitive ferdigheter er i korrelasjon med suksessfull problemløsning.

En ting som bør påpekes er at jeg kommer i hovedsak til å ta utgangspunkt i hvordan LK06 (Udir, 2013) og LK20 (Udir, 2021) definerer begrepet problemløsning, selv om Udir (2013) viser læreplanen for matematikk som fellesfag og ikke realfag. Grunnen til at jeg tar utgangspunkt i læreplanene er fordi det kan tenkes at det det disse lærerne har arbeidet, arbeider eller kommer til å arbeide etter. En annen ting er at «Problem-posing» eller det å oppstille problemer ikke er vektlagt i læreplanene og vil derfor ikke inngå noe særlig i videre definisjon eller diskusjon av problemløsningskompetansen. Det kan derimot være viktig å poengtere at dette inngår som en del av problembehandlingskompetansen i KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002). I tillegg til å tolke problemløsning som en matematisk kompetanse, vil jeg også delvis ta utgangspunkt i de fire aspektene NCTM (2000) bruker om problemløsning som en standard, samt knytte det til Pólyas (2009) fire steg.

Med begrepet *problemløsning* henviser jeg til den matematiske kompetansen som handler om å utvikle en metode for å analysere og omforme problemer til matematisk form, anvende og tilpasse nyttige strategier for å løse dem og til slutt vurdere og reflektere over prosessen og løsningens gyldighet (NCTM, 2000; Pólya, 2009; Udir, 2013, 2021). Dette impliserer også at forkunnskaper og erfaringer kan anses som et grunnlag i møte med problemene, samt at problemløsning også kan anses som en slags praktisk ferdighet, der problemløsning kan være et mål i seg selv og en måte å bygge ny matematisk kunnskap på (Liljedahl et al., 2016; NCTM, 2000; Pólya, 2009; Schoenfeld, 1992).

2.4 Problemløsning og integraler

I en undersøkelse av litteratur om temaet problemløsning og/med integraler, oppfattet jeg mangler eller lite relevant litteratur på feltet. Det eksisterer en del forskning om integraloppgaver, men færre om problemløsningsoppgaver. Derfor vil jeg i dette delkapittelet presentere noen interessante funn fra noe forskning som inkluderer problemløsning og integraler fra Allen (2001), Dawkins og Epperson (2014), A. Selden et al. (2000), J. Selden et al. (1989), J. Selden et al. (1994) og Sofranos et al. (2011).

Allen (2001) har utviklet flere sett med problemer, som han kaller «non-template problems», som har mye lignende bruk og definisjon som problemløsingsoppgaver. Han benytter problemene i sin undervisning av kalkulus og i disse problemene er det lagt til rette for en problemløsningsstrategi, hvor elevene skal estimere data som en sum av små deler og uttrykke det som et bestemt integral. Noen av funnene til Allen (2001, s. 151) er at elevene opplever arbeid med problemene som utfordrende og alternativt til de rutineoppgavene de er vant til, hvor elevene setter pris på å se anvendelser av integral. Samtidig er det noen elever som opplever frustrasjon og demotivasjon, siden problemene krever mer enn bare kunnskap og evne til å gjøre kalkulus.

Det bør poengteres at fremgangsmåten til Allen (2001, s. 153) er å sette av 20-25% av undervisningen i løpet av 10 uker til slike problemer. Det gjøres over lengre tid, siden de fleste elever muligens ikke vil oppleve suksess ved de første forsøkene, men ved å la elevene forstå at de kan få flere forsøk på å arbeide med slike problemer, kan de utvikle deres ferdigheter og vise deres evner (Allen, 2001, s. 149). Sofranos et al. (2011, s. 144) finner også at noen lærere hevder at det bør lages mer plass til problemløsning i pensum, siden problemløsning kan være en nødvendig faktor for elevenes forståelse av kalkulus. Dette støttes av den tidligere oppfordringen om at problemløsning bør undervises (A. Selden et al., 2000; Schoenfeld, 1992; Leong & Janjaruporn, 2015), og det støtter Allen (2001) i å sette av god tid til slike problemer.

Det har blitt funnet en mulig karakteristikk hos flinke studenter som løser problemløsningsoppgaver innenfor kalkulus. De har god algebraisk kontroll, selv om algebra alene ikke er tilstrekkelig for å løse problemløsningsoppgaver om integraler (Dawkins & Epperson, 2014). Selv om studenter er kjent med konsepter fra kalkulus for å løse slike problemer, så benytter studenter med middels til gode karakterer i faget, heller mer sofistikerte algebraiske metoder fremfor kalkulus for å angripe problemene (A. Selden et al., 2000; J. Selden et al., 1989; J. Selden et al., 1994). Ifølge Dawkins og Epperson (2014) kan mye av grunnen til en algebrapreferanse være fordi derivasjon- og integrasjonsregler, samt deres definisjoner, er ganske algebraisk.

Forskingen til A. Selden et al. (2000), J. Selden et al. (1989) og J. Selden et al. (1994) er mer rettet mot derivasjon, men selv om integrasjon ikke undersøkes eksplisitt, tolker jeg det som interessant og relevant ettersom det er relaterte prosesser. Det hevdes at evnen til å løse «nonroutine problems» er en viktig indikasjon på en dypere forståelse innenfor faget (A. Selden et al., 2000, Sofranos et al., 2011). A. Selden et al. (2000, s. 129) finner derimot at mer enn halvparten av studentene i studiet ikke en gang klarte å løse ett slikt problem, men på en annen side klarte en større andel å løse tilsvarende rutineoppgaver. Dawkins og Epperson (2014, s. 879) hevder at undervisning har en tendens å tilstrebe elevers problemløsningsheuristikker mot algebraiske og numeriske metoder, noe som undertrykker mer grafiske fremstillinger og fremgangsmåter. Samtidig kan nok dette ikke unngås siden mye matematisk resonnering og problemløsning er orientert rundt symbolrepresentasjoner.

3 Metode

I dette kapittelet vil jeg presentere mitt valg av metode og hvordan problemstillingen kan belyses og besvares. Jeg vil også forsøke å argumentere for hvorfor de gjennomførte intervjuene kan frembringe ønskede svar til problemstillingen. I kapittel 3.1 vil jeg først presentere oppgavens metodiske tilnærming. Deretter gjør jeg rede for de valgene jeg har tatt angående datainnsamlingen i kapittel 3.2. Dette har som mål å klargjøre viktige aspekter med intervju som metode, utforming av intervjuguide, kriterier for utvalget, kontekst for datainnsamlingen, samt presentasjon av transkripsjonsprosessen. Videre vil jeg derfor i kapittel 3.3 forklare hvordan jeg analyserte og trakk ut relevante funn. Jeg vil også drøfte kvaliteten på forskningsprosjektet i kapittel 3.4, som kan påvirke resultatene eller oppgavens reliabilitet og validitet. Avslutningsvis vil det gjøres rede for mulige etiske implikasjoner prosjektet kan medføre i kapittel 3.5.

Jeg vil gjerne påpeke at jeg i teksten, og spesielt i dette kapittelet, kommer til å omtale begrep som «intervjuobjekt», «deltaker», «respondent» eller andre lignende begreper fra litteraturen, som «informanten» eller «læreren» der det passer. Jeg kommer også til å benytte «utvalget» synonymt med flertallsbegrepene «lærerne» og «informantene», der det kan være nyttig å vise til lærerne som en gruppe. Begrep som «forsker» og «intervjuer» kommer også til å benyttes synonymt.

3.1 Metodisk tilnærming

I min masteroppgave ønsker jeg å undersøke hvordan R2-lærere forstår problemløsning og problemløsningsoppgaver, samt sammenligne deres forståelse opp mot hvordan de utformer problemløsningsoppgaver om integraler. For å samle inn data til å besvare problemstillingen min velger jeg å gjennomføre intervjuer med fire lærere som har erfaring med å undervise R2. Det gjennomføres to intervjuer av hver lærer, hvor hvert intervju varer i omtrent 45-60 minutter. Til det andre intervjuet får lærerne en oppgave om å forberede to problemløsningsoppgaver om integraler, som vi diskuterer muntlig sammen i det andre intervjuet.

For å kunne svare på problemstillingen min velger jeg en kvalitativ tilnærming på forskningen, fremfor en kvantitativ. En hovedforskjell mellom dem er at «kvalitative metoder søker å gå i dybden, og vektlegger betydning, mens kvantitative metoder vektlegger utbredelse og antall» (Thagaard, 2013, s. 17). Kvantitativ forskning kan forstås som en fremgangsmåte hvor det samles inn data fra en større gruppe med individer, der de kvantitative dataene i hovedsak består av tall (Grønmo, 2004, s. 33). Kvantitativ forskning kan derfor brukes for å teste eller sette opp generelle teorier ved å undersøke variabler og forholdet mellom dem (Creswell, 2014, s. 4).

Kvalitativ forskning kan på en annen side forstås som en fremgangsmåte hvor det kan gås mer i dybden for å innhente data, men fra en mindre gruppe med individer. De kvalitative dataene vil da i hovedsak være i form av tekst, ifølge Grønmo (2004, s. 33), fremfor tall, slik som kvantitativ forskning. Dette tolker jeg som at innsamlet data og den data som vil presenteres, er i form av tekst fra intervju eller transkripsjon, som for eksempelvis sitater, utsagn eller meninger ytret i form av tekst. Dette vil da være grunnlaget for det forsker skal analysere og tolke (Creswell, 2014, s. 4). Med andre ord, kvalitativ forskning undersøker individuelle og personlige meninger og muliggjør en utforsking av en situasjons kompleksitet (Thagaard, 2013, s. 12; Creswell, 2014, s. 4)

Kvalitative metoder kan gå mer i dybden enn de kvantitative og kan derfor innhente mye informasjon fra få informanter, ettersom det gås i dybden på hver informant, mens kvantitative metoder bør omfatte større utvalg, for å samle inn mye data (Thagaard, 2013, s. 17). Dette er en av grunnene til at jeg ønsker å ha en kvalitativ tilnærming i mitt masterprosjekt, siden jeg er interessert i de fire lærernes erfaringer, opplevelser og forståelse av temaet problemløsning og integraler. En kvalitativ tilnærming kan også være nyttig når en som forsker ikke vet hvilke faktorer som kan være viktige å undersøke (Creswell, 2014, s. 20), noe jeg tolker kan være relevant og viktig i min forskning ettersom at jeg på forhånd ikke har noe særlige forventninger til hvilke faktorer som kan påvirke lærernes utforming av problemløsningsoppgaver.

3.2 Datainnsamling

Før jeg hadde kommet i kontakt med informantene og før selve intervjuprosessen var det usikkerheter rundt hva jeg egentlig ønsket å få svar på gjennom intervjuene. Jeg oppfattet det derfor som nødvendig å sette meg inn i de sentrale temaene for dette prosjektet, som i hovedsak er problemløsning, undervisning av integraler og gjerne sentrale idéer i læreplanene fra LK20. I utformingsarbeidet med intervjuguiden ønsket jeg derfor å inneha visse forkunnskaper om disse sentrale temaene, for å kunne utforme relevante spørsmål eller oppdage undertema som kunne undersøkes. I denne prosessen mellom lesing av litteratur og utforming av intervjuguide ble det delvis tydeligere hva jeg faktisk ønsket å få svar på. Jeg oppfattet på en side et behov for å undersøke lærernes erfaring med undervisning av integraler og deres eksplisitte forståelser av begreper som problemløsning og problemløsningsoppgaver. På en annen side fikk jeg derfor en idé om å la lærerne selv utforme integralproblemer og be dem begrunne hvorfor deres forberedte oppgaver er problemløsningsoppgaver. Spørsmålene i intervjuguiden ble derfor utformet rundt disse temaene for å kunne innhente data til å besvare oppgavens problemstilling.

I dette delkapittelet vil jeg gjøre rede for de valg som er tatt, med tanke på utvalg, utforming av intervjuguide, kontekst og gjennomføring av intervjuene, samt transkripsjon. Valgene baseres på de kriterier jeg oppfatter som hensiktsmessig i forhold til den problemstillingen som skal besvares.

3.2.1 Intervju

Et mål med et intervju kan være å få frem en informants forståelse av sine erfaringer og hvordan personen opplever en situasjon (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 20; Thagaard, 2013, s. 13). Som en introduksjon til intervju forklarer Grønmo (2004, s. 159), veldig enkelt, at intervju kan benyttes som en forskningsmetode, ved at «forskeren stiller spørsmål til respondentene om de forholdene som skal studeres, og respondentenes svar utgjør datagrunnlaget for studien». Med andre ord, det er informantenes synspunkter, tanker eller fortalte erfaringer som er det som skal analyseres i prosjektet.

Kvale og Brinkmann (2015) behandler intervju mer som en samtale enn en utspørring, slik det ble introdusert i forrige avsnitt, men hvor det er en tydeligere struktur og hensikt på intervjuet enn en hverdagssamtale. Informanten er delaktig i intervjuet, ved å skape mening og forståelse om det som forsker undersøker. Jeg tolker her at den enkle forklaringen fra Grønmo (2004) oppsummerer kjernen til et intervju. Med andre ord, forsker stiller spørsmål, informanten svarer og svarene blir grunnlaget for studiets datamateriale. Ved å sammenligne et intervju med en samtale slik som Kvale og Brinkmann (2015) gjør, så er gjerne ikke et intervju like rett frem som en utspørring, men mer som en samtale hvor kunnskap konstrueres i samspill mellom forsker og informant. Dette kan være en nyttig metode for å avdekke informantens forståelse, opplevelse eller erfaring med eksempelvis problemløsning, hvor forsker og informant har en strukturert samtale om ulike aspekter ved problemløsning.

Et intervju kan utformes på flere måter, enten det er strukturert, der spørsmålene og rekkefølgen av dem er forhåndsbestemt, eller lite strukturert, hvor temaene er forhåndsbestemt og intervjuet foregår mer lik en samtale (Thaagard, 2013, s. 97-98). En annen måte er mellom de to andre, kalt delvis eller semistrukturert intervju, hvor temaene er forhåndsbestemte og rekkefølgen bestemmes underveis. I denne tilnærmingen er det viktig at forskeren er fleksibel, ved å følge respondentens fortelling, samt sørge for at intervjusamtalen diskuterer de forhåndsbestemte temaene. Det er mulig å forstå Kvale og Brinkmann (2015) sin forståelse av et intervju som en samtale, som delvis strukturert. Det er fordi intervjuet kan forstås som en samtale mellom to personer, samtidig som at samtalen styres av de forhåndsbestemte temaene forskeren ønsker å samle informasjon om (Thagaard, 2013, s. 98), hvor temaet eksempelvis kan være problemløsning eller integralregning.

3.2.2 Intervjuguide

En intervjuguide kan sies å være «forskerens utgangspunkt og rettesnor for intervjuingen» (Grønmo, 2004, s. 161). Med andre ord, en intervjuguide består av spørsmål som dekker de temaer som skal gjennomgås, mens den samtidig ligger til rette for hvordan et intervju kan gjennomføres, ved at den i grove trekk kan veilede forskeren i intervjuprosessen. Det er derfor nødvendig å gjøre en vurdering av hvilken informasjon som skal innhentes gjennom intervjuene, og da gjerne med et utgangspunkt i prosjektets problemstilling (Grønmo, 2004, s. 161). Med andre ord, hva vil jeg ha svar på og hvordan kan jeg få svar på dette?

I mitt prosjekt er intervjuguiden utformet i tråd med oppgavens problemstilling og underspørsmål, om sentral temaer som undervisning av integraler i R2, problemløsning, problemløsningsoppgaver og lærernes utforming av problemløsningsoppgaver om integral. Vedlegg I viser til intervjuguiden for begge intervjuene, samt oppgavene som lærerne fikk. Intervjuguiden for første intervju er delt inn i tre hovedkategorier, samt informasjon om oppgaven til neste intervju:

- **Bakgrunnsinformasjon**: En kartlegging av lærers bakgrunn med R2.
- **Opplysninger om integraler**: Innhenting av informasjon om undervisning av integraler i R2, samt mulige kjennetegn på integraloppgaver.
- **Opplysninger om problemløsning**: En kartlegging om lærers forståelse av problemløsning, problemløsningsoppgaver og kjennetegn på undervisning med problemløsning, samt lærers oppfatning av kjennetegn på en «god» problemløser.
- **Oppgave til neste gang**: En beskrivelse av to oppgaver lærer skal forberede til andre intervju.

Intervjuguiden for andre intervju er delt inn i fire kategorier:

- **Repetisjonsspørsmål**: Spørsmål som gjenopptar tidligere spørsmål og muliggjør nye fortolkende spørsmål om tema eller utsagn fra forrige intervju.
- **Problemløsning og integraler**: En kartlegging av hvordan forberede og utforme en problemløsningsoppgave, hvordan lærer erfarer kombinasjonen av problemløsning og integraler og hvordan problemløsning kan ta hensyn til at elever er ulike.
- **Den første forberedte oppgaven**: Informasjon om lærers forberedelser, tanker om matematisk innhold og begrunnelser for hvorfor oppgaven kan kjennetegne som en problemløsningsoppgave.
- **Den andre forberedte oppgaven**: Informasjon om lærers forberedelser, tanker om matematisk innhold og begrunnelser for hvorfor oppgaven kan kjennetegnes som en problemløsningsoppgave, samt en sammenligning av problemløsningsoppgaven med den originale oppgaven.

Det er mulig å se at spørsmålene i det andre intervjuet er tydeligere rettet mot oppgavens problemstilling, hvor de viktigste spørsmålene fra det første intervjuet trekkes inn igjen. Det andre intervjuet undersøker også tydeligere lærernes erfaringer og tanker om koblingen mellom problemløsning og integraler, både direkte som spørsmål, men også indirekte gjennom de forberedte oppgavene. Jeg tolker derfor at spørsmål som direkte og tydeligere kan knyttes til problemstillingen derfor kan anses som mer relevant eller viktig. Eksempelvis er spørsmålet «Hva vil du si gjør dette til en problemløsningsoppgave?» mer relevant til problemstillingen enn «Når i R2 kommer integraler?».

Det bør også påpekes at i perioden fra det første intervjuet og frem til det siste intervjuet ble gjennomført, så har intervjuguiden gjennomgått små endringer. Jeg tolker at disse endringene ikke vil ha stor påvirkning på prosjektets validitet, ettersom spørsmålene fortsatt etterstreber å besvare de samme temaene. Noen av spørsmålene har blitt omformulert eller fjernet ettersom jeg opplevde at lærerne svarer på dette gjennom andre spørsmål eller at spørsmålet ikke leder samtalen i en interessant retning. Noen få oppfølgingsspørsmål i den endelige intervjuguiden har blitt lagt til underveis, hvor det var behov for å etterspørre informasjon i visse sammenhenger.

3.2.3 Kontekst for utvalg og datainnsamling

For å kunne undersøke hvordan lærere forstår og forbereder problemløsning om integraler velger jeg å komme i kontakt med lærere som underviser R2, selv om pensum i S2-matematikk også inneholder integralregning. Jeg ønsker også R2-lærere som har undervist dette faget mer enn én gang, da mer erfarte lærere kan ha mer kjennskap til faget. Jeg velger kun å ha R2-lærere som mitt utvalg og ikke en kombinasjon av lærere fra både R2 og S2. Hovedgrunnen til dette er at det dermed kan identifiseres ulikheter eller likheter innad i en gruppe med lærere fra samme fag, uten å ta hensyn til ulikheter eller likheter mellom de ulike fagene.

Et av de tidligste spørsmålene som må besvares i dette prosjektet, er hvor mange informanter som er nødvendig. I en veldig tidlig fase var et mål å ha 4-8 informanter. Dersom antall informanter er for lite kan det bli vanskelig å generalisere ut fra innsamlet data, og dersom antallet er for stort kan det blir utfordrende å gå i dybden i analysen av intervjuene (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 148). Selv om jeg nevner generalisering, så kan ikke målet med kvalitative studier være å oppsøke ekstern validitet eller generalisering, men heller å forstå de valgte informantene i dybden. I dette prosjektet sitt tilfelle vil det være mer interessant å muligens generalisere blant lærerne, som er et utvalg og en liten populasjon sammenlignet med alle Norges R2-lærere. Jeg ønsker også at prosjektet skal ha en viss grad av «stratification» (Creswell, 2014, s. 158) for å delvis representere populasjonen av R2-lærere. Med andre ord, ulike karakteristikker hos lærerne, som kjønn, ansettelse i privat eller offentlig sektor, skal være representert i utvalget så langt det lar seg gjennomføre. I dette masterprosjektet består utvalget av fire lærere, der hver av de fire intervjues to ganger, for å samle inn mer data fra hver lærer, se også kapittel 4.1 for nærmere beskrivelse av utvalget.

For å komme i kontakt med mulige informanter sendes e-post til flere videregående skoler i Bergens område og det etterspørres kontaktinformasjon til nåværende eller tidligere R2-lærere ved deres skole. Med hensyn til smittevern, grunnet Covid-19, unngås fysisk oppmøte på de ulike skolene. Kommunikasjonen består derfor for det meste av mailutveksling med skolene og etter hvert lærerne. Det resulterer i generelt lavere respons med denne metoden enn forventet og derav utfordrende å oppfylle mine krav. Jeg kom i kontakt med flere lærere (enn mitt nåværende utvalg) og informerte om min masteroppgave, hvor noen lærere takket nei, grunnet manglende erfaring med R2, ikke et ønske om å delta eller andre personlige grunner. Det opprettes deretter kontakt med de som ønsker å delta, hvor selve gjennomføringen av datainnsamlingen beskrives nærmere i neste delkapittel.

3.2.4 Gjennomføring og dokumentasjon av datainnsamling

Før selve intervjuprosessen ble lærerne bedt om å lese gjennom og signere dokumentet om samtykke til deltakelse, se Vedlegg II. Dette ble gjennomført av to grunner. For det første for å innhente samtykke til deltakelse i prosjektet og for det andre som et kortfattet informasjonsskriv om hvilke tema intervjuene kom til å berøre. Informantene ble ikke tildelt noe litteratur, som de skulle lese før intervjuene, ettersom jeg i løpet av intervjuene ønsker å samle inn deres forståelse og kjennskap til oppgavens temaer uten at de baserer denne forståelse på en gitt litteratur.

Gjennomføringen av intervjuene gjøres gjennom Zoom, hvor video- og lydopptak av intervjuet benyttes for å same inn datamateriale til senere transkripsjon. Intervjuene utføres gjennom Zoom mye grunnet hensyn til smittevern grunnet Covid-19. En av hovedgrunnene til at jeg valgte å benytte meg av opptak er fordi jeg dermed kan konsentrere meg om samtalens emne og dynamikk, fremfor å være avhengig av hukommelse av intervjuet eller være oppmerksom på å skrive notater under selve intervjuet (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 205-206).

Mulige ulemper ved bruk av intervju over Zoom kan være de tekniske utfordringene, som problemer med internett, lyd, bilde eller den generelle brukervennligheten til Zoom (Archibald, Ambagtsheer, Casey & Lawless, 2019). Archibald et al. (2019) finner derimot at fordelene ved å bruke Zoom kan overveie ulempene. De hevder at bruk av Zoom kan være nyttig i etablering av rapport eller tidlig kontakt med informantene (Archibald et al., 2019), på lik linje som fysiske intervju. Mye av grunnen til dette er fordi informantene kan se og høre intervjueren, sammenlignet med ikke-visuell kommunikasjon, som en telefonsamtale. Dette kan være viktig å ta i betraktning, ettersom de første minuttene av det første intervjuet med hver lærer kan være kritiske. Denne delen av intervjuet består for det meste av en «bli-kjent»-samtale med introduksjonsspørsmål, se eksempelvis Vedlegg I. De første minuttene kan være avgjørende for hvor vidt informanten senere kan snakke fritt og legge frem sine opplevelser, siden intervjuer og informant i starten av en slik prosess er fremmede for hverandre (Kvale og Brinkmann, 2015, s. 160).

Ettersom intervjuene kan kategoriseres som delvis strukturerte eller semistrukturerte intervju (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 162), lot jeg informantene snakke ganske fritt om de stilte spørsmålene. Samtidig benyttet jeg intervjuguiden som en mal for de temaer som skulle dekkes og de spørsmål som kunne stilles. Kvale og Brinkmann (2015, s. 170) hevder at det ikke finnes ett «riktig» oppfølgingsspørsmål eller respons på en informants svar. En mulig respons en intervjuer kan komme med er for eksempel et uttrykk av at svaret er mottatt. Da kan intervjuer si «mhm», «okei» eller «ja sånn ja», for å vise informanten at vedkommende kan fortsette. Dette benyttet jeg aktivt for å la informanten snakke fritt.

I tillegg til planlagte spørsmål, som de funnet i intervjuguiden, er det mulig å benytte seg av andre typer spørsmål underveis i intervjuet. Kvale og Brinkmann (2015, s. 166-167) trekker frem ni kategorier på nyttige intervjuspørsmål, hvor det er trukket frem introduks- og oppfølgingsspørsmål i de forrige avsnittene. Jeg vil også kort trekke frem spesifiserende, fortolkende og strukturelle spørsmål. De spesifiserende spørsmålene kan benyttes når intervjuer ønsker en mer presis beskrivelse av en generell uttalelse, som: «Hvorfor gjorde du det slik?». Fortolkende spørsmål er delvis like, da intervjuer kan komme med en fortolkning eller omformulering av et gitt svar og be informanten om å klargjøre ytterligere, som: «Så du mener at elever bør …?». Strukturelle spørsmål tillater derimot intervjuer til å styre intervjuets retning. Ved å benytte spørsmål eller kommentarer som indikere at intervjuer er fornøyd med svaret eller at emnet er ferdigbehandlet, kan intervjuer lede samtalen inn på et nytt tema. For eksempel benyttet jeg kommentarer som: «Vi har nå snakket litt om integraler, men jeg vil nå at vi beveger oss inn på problemløsning». Slike strukturelle spørsmål eller kommentarer ble ofte benyttet i løpet av intervjuene for å lede samtalen inn på et nytt tema, ettersom intervjuene tok for seg ulike temaer.

3.2.5 Transkripsjon av intervjuene

Som tidligere nevnt er de kvalitative dataene ofte i form av tekst. I intervjuet kommer informasjon i form av en muntlig samtale mellom to personer, mens det er i transkripsjonen at denne samtalen blir «abstrahert og fiksert i skriftlig form» (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 204). Det er på dette stadiet, med informasjonen i skriftlig form, det er mulig å hevde at man har data fra intervjuene. Kvale og Brinkmann (2015, s. 205) definerer det å transkribere som å transformere, altså å «skifte fra en form til en annen». I mitt masterprosjekt vil dette bety å transformere fra talespråk til skriftspråk, ved å gå gjennom opptak av intervjuene og skriftlig føre ned samtalen.

I prosessen med transkripsjon bør det svares på problemstillinger om samtalene skal transkribere så detaljert og ordrett som mulig, eller om kun det viktigste skal tas med og transkribere i en mer formell stil (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 208). Jeg valgte en slags kombinasjon. Intervjusamtalene ble transkribert ordrett slik at jeg fikk med mest mulig, ofte kalt verbatim. For å ikke avsløre eventuelle dialekter, ble transkripsjonen av hvert ord derimot gjennomført på bokmål, med hensyn til anonymitet og konfidensialitet. På grunn av formen på det muntlige språket, ble noen ganger «[et ord]» inkludert i transkripsjonen for å tydelig vise en oppfatning om at «et ord» er manglende i setningen. Selv om samtalene ble transkriberte mer eller mindre ordrett, utelot jeg å transkribere ordrett første del av intervjuet. Det var for det meste en bli-kjent-samtale med noen personlige opplysninger i form av svar på introduksjons- eller bakgrunnsspørsmål. Istedenfor ble tidsrammen notert ned og informasjonen ble formulert som en oppsummering i et eget avsnitt, som også er grunnlaget for presentasjonen av utvalget i kapittel 4.1.

En svakhet ved transkripsjon av en intervjusamtale er at transkripsjonen kan anses som en dekontekstualisert gjengivelse av samtalen (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 205). Med andre ord, den skriftlige formen av samtalen kan mangle tegn eller indikasjoner på eksempelvis stemmeleie, ironi eller kroppsspråk. Derfor ble parenteser i transkripsjonen benyttet for å gi en forklaring til det fysiske eller kroppslige som skjedde. For eksempel benyttet jeg «(ler)» da informanten lo av noe som ble sagt og «(viser med hendene opp og ned)» da informanten brukte en opp-og-ned-bevegelse med hendene, mens informanten snakket om en fjærbevegelse. Nedenfor vil jeg derfor vise et eksempel fra et utdrag fra det første intervjuet med Lærer 1. Utdraget viser noen teknikker jeg brukte for å illustrere sider ved hvordan den muntlige samtalen foregikk, samt hvordan jeg benyttet linjenumre i transkripsjonene for å kunne henvise til deler av transkripsjonen senere i oppgaven. Andre koder til transkripsjonen er mulig å finne i Vedlegg III. Indikasjonen på at Lærer 1 snakker er markert med «L:», for lærer, og indikasjonen på at jeg selv snakker er markert med «F:», for forsker.

Boks 1: Et utdrag fra transkripsjon av det første intervjuet av Lærer 1.

676. integralregning og bruken av integralregning – og det er det som gjør at du har bedre tid i R2 fordi at
677. det henger så mye mer sammen – emnemessig enn hva det gjør i R1
678. F: Mhm
679. L1: Fordi at – det bygger på at integral er den store røde tråden – // i R2
680. F: I R2 ja//
681. L1: Sånn som det har vært

Det første er at jeg unnlot å transkribere pause- eller tenkeord, som «eh» eller «øhm», og heller viste denne pausen med en bindestrek med mellomrom. Bindestrek ble også benyttet for å vise at informantene tok en pause fra å snakke. Bindestrek uten mellomrom viser at lærer «stammer» eller skifter retning på setningen, som er mulig å se i utdraget i neste delkapittel. Utdraget viser også hvordan jeg tok hensyn til de gangene hvor vi snakket samtidig, ved å ha to skråstreker hvor dette starter og slutter.

3.3 Å analysere intervjuene

Ved å transkribere de muntlige samtalene til skriftlig tekst blir intervjuet først og fremst konstruert for å kunne analyseres, og det er mulig å hevde at selve transkripsjonen er begynnelsen på analysen (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 206). For min egen del fortsatte analysen ved å fargekode de ulike spørsmålene i transkripsjonene, se fargekodene i Vedlegg III. Ettersom spørsmålene, og derav informantenes svar, er fargekodet var neste steg å kategorisere og systematisere svarene etter temaene i oppgaven. Denne strukturen er også utgangspunktet for strukturen kapittel 4 er delt inn etter. Deretter bestod prosessen i å skrive om deler av transkripsjonen til mer formell tekst, enten i form av sitater eller ved å meningsfortette og oppsummere en eller flere av informantenes utsagn til enkle setninger eller avsnitt. Dette ble gjort for at jeg senere kunne sammenligne informantenes utsagn og trekke frem likheter eller ulikheter.

I omgjøringen fra transkripsjon til sitat benyttet jeg delvis meningsfortetting, som er å forkorte uttalelser fra informantene til kortere formuleringer (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 232). Utvalgte deler og tilhørende linjer i transkripsjonen ble meningsfortettet og skrevet om til enklere setninger (som flere plasser er presentert som sitater i kapittel 4). Dette inkluderer «(...)» for å indikere at andre tanker, meninger eller eksempler blir utelatt og «[ord]» som legges inn i sitatene for å få flyt i setningen, samt for å gi mening til sitatet om hva det omhandler. Nedenfor er et utdrag fra transkripsjonen av det første intervjuet med Lærer 4, og boksen viser fra linje 153 til 162.

Boks 2: Et utdrag fra transkripsjon av det første intervjuet av Lærer 4.

153. integral i vårt pensum fordi du må kombinere – og ta en – en-en variabelskifte – og så da får du en
154. repetisjon av det der og så nå på slutten av kurset så kommer differensialligning hvor alt jo teknikken
155. er integrasjon
156. F: Mhm
157. L: Fra A til Å – så da får vi en ny repetisjon av det
158. F: Mhm
159. L: Og det – synes faktisk det der er helt topp jeg
160. F: Mhm
161. L: At du får denne – serien med integrasjonsting da
162. F: **Men når elever møter på integral for første gang – hvilke forkunnskaper mener du de bør ha på**

Utdraget viser slutten av svaret på et spørsmål stilt på linje 123 og starten på det neste spørsmålet, markert i gult på linje 162. Fra linje 154 til linje 161 kommer Lærer 4 med noe interessant, som jeg anser som relevant å trekke frem. Nedenfor viser jeg hvordan denne delen av transkripsjonen ble omgjort til et sitat. Det er mulig å se at jeg ikke inkluderer mine egne uttalelser i sitatet når jeg eksempelvis kommer med bekreftende ord eller setninger, som «Mhm».

Boks 3: Et eksempel på et sitat fra Lærer 4, som er meningsfortettet fra utdraget i Boks 2.

«På slutten av kurset kommer jo differensiallikninger, hvor all teknikk er integrasjon. (...) Da får vi en repetisjon av [de ulike reglene og metodene for integraler]. Jeg synes det er helt topp at du får denne serien med integrasjon.» (Lærer 4, Intervju 1, linje 154-161).

Det å hente ut relevante sitater består av en subjektiv prosess, hvor jeg forsøker å finne interessante og relevante uttalelser som tydelig kan knyttes til de spørsmålene som ble stilt og de tilhørende temaene. Sitatene ble sortert etter tema og deretter underkategorisert etter lærere. Dette gjøres for å senere kunne identifisere likheter eller ulikheter blant lærernes ulike utsagn, ved sammenligne sitater fra lærerne basert på temaene de uttaler seg om. Noe som derfor bør påpekes om utformingen av kapittel 4 og presentasjonen av resultatene, er dersom flere lærere uttaler seg noenlunde likt, velger jeg heller å parafrasere det som en egen setning eller utdype det i et avsnitt, uten å vise til noe sitat.

3.4 Kvaliteten på forskningsprosjektet

En konsekvens av at intervju er basert på et subjekt-subjekt-forhold kan være at både forsker og informant påvirker forskningsprosessen (Thagaard, 2013, s. 19). Med andre ord, parametere som forskerens nærvær eller forskers relasjon med informant kan påvirke den informasjonen informanten er villig til å bidra med. En forsker kan eksempelvis stille ledende spørsmål og forvente bestemte svar (Grønmo, 2004, s. 165). En av tingene jeg derfor var bevisst på intervjuprosessen var at jeg har min egen forståelse av begreper knyttet til prosjektet, som eksempelvis problemløsning, og at informantene kan ha det samme eller et annet syn på dette. Som forsker og intervjuer burde jeg derfor unngå å stille ledende spørsmål som kan få informantene til å bekrefte min egen forståelse, ettersom informantene kanskje ikke hadde oppgitt denne informasjonen uten at jeg hadde spurt.

I de tilfeller hvor jeg oppfattet at det var ulikheter i min egen og informantenes forståelse av et begrep, valgte jeg å først akseptere informantens forståelse og heller ta det videre. Jeg valgte også å akseptere deres forståelse i de tilfeller hvor det var overensstemmelse med min egen forståelse. Samtidig kan dårlig kommunikasjon mellom forsker og informant resultere i misforståelser, ettersom at forsker kan mistolke de svarene informantene gir (Grønmo, 2004, s. 165). I både tilfeller hvor det var enighet eller uenighet ble det derfor ofte stilt fortolkende eller oppfølgende spørsmål, slik at lærerne kunne forsvare, begrunne, utdype eller klargjøre deres forståelse, for å unngå eventuelle misforståelser.

Et annet problem som Grønmo (2004, s. 165) trekker frem er at informanten kan gi feilaktige opplysninger om sine synspunkt eller handlinger «for å fremstille seg selv i et spesielt gunstig lys ovenfor forskeren». Med andre ord, i et intervju med en lærer om eksempelvis problemløsning kan det hende at vedkommende for eksempel kun trekker frem de positive erfaringene sine med problemløsning, for å bekrefte det vedkommende tror forsker leter etter. På en side kan dette påvirke prosjektets resultater og feilaktig fremstille utvalgets egentlige forståelse eller erfaring med eksempelvis problemløsning. På en annen side vil jeg ikke påstå at dette er et kritisk problem da temaet er problemløsning. Grønmo (2004, s. 165) hevder at noe slikt kan være et problem hvis intervjuet gjelder kontroversielle eller belastende temaer, noe jeg tolker at verken problemløsning eller undervisning av integraler er.

For å kunne kort drøfte kvaliteten på forskningsprosjektet og innsamlet data vil jeg kort gjøre rede for begrepene reliabilitet og validitet. Reliabilitet «referer til datamaterialets pålitelighet» (Grønmo, 2004, s. 220) og i tråd med begrepet «pålitelighet» behandles derfor reliabilitet ofte i sammenheng med spørsmål om det kan reproduseres like resultat dersom forskningen gjennomføres av andre forskere på andre tidspunkt (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). Med andre ord, spørsmål om datamaterialets pålitelighet handler om resultatene er til å stole på. Det kan være høy reliabilitet dersom det forekommer like resultat hvis man gjennomfører den samme forskningen flere ganger om de samme fenomenene, og lav reliabilitet hvis ikke. Jeg vil tørre å påstå at intervjuer kan ha lav reliabilitet, ettersom hvert intervju av en informant kan være unikt og preget av de ulike informantenes bakgrunn, dagsform, formulering av svar eller andre faktorer. På en annen side kan det oppnås høy reliabilitet ved transkripsjonen, dersom det er utformet en tydelig transkripsjonsguide, eller koder til transkripsjon, se også Vedlegg III.

Validitet «dreier seg om datamaterialets gyldighet for de problemstillingene som skal belyses» (Grønmo, 2004, s. 221). Med andre ord, validitet viser til hvorvidt en valgt metode undersøker det den skal undersøke (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). Det bør også påpekes at validitet ikke kun gjelder metodene, men også forskeren som benytter dem (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 277). I selve planleggingen av intervjuguiden vil en drøfting av validitet eksempelvis inkludere at jeg stiller spørsmål om hvorvidt planlagte spørsmål etterspør det de skal etterspørre. Under selve intervjuprosessen kan validiteten gjelde spørsmål om i hvilken grad jeg gjør en kontroll av den informasjonen som gis, ved å spørre ytterligere oppfølgingsspørsmål eller fortolkende spørsmål (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 278).

Grønmo (2004, s. 221) hevder at validitetsgraden i praksis kan være vanskelig å anslå, men jeg tolker at det også være avhengig av hvordan datamaterialet blir analysert. Med andre ord, validiteten kan avhenge av hvordan informantenes svar tolkes og knyttes til prosjektets problemstilling. Jeg tolker at det vil forekommer først og fremst under og etter transkripsjonen i mitt prosjekt. En forsker er derfor ikke en nøytral person som har et objektivt blikk, men er heller med i interaksjon med informanter og kan dermed påvirke både intervjukonteksten og datamaterialet (Nilssen, 2012, s. 139). Nilssen hevder derimot at det kan være mulig å håndtere denne subjektiviteten ved at forsker bør være bevisst på sin rolle, interaksjoner eller teoretiske ståsted, noe jeg tolker kan bidra til å øke prosjektets validitet. Eksempelvis var jeg bevisst på mine egne forståelser av ulike begreper og forstod at informantene kunne ha et annet teoretisk ståsted. Jeg var også bevisst på at min rolle først og fremst var intervjuer og opptrådte dermed som nysgjerrig, undersøkende og kritisk, men også empatisk og aksepterende i møte med lærerne.

3.5 Etiske implikasjoner og refleksjon

Prosjektet er meldt til Norsk Senter for Forskningsdata (NSD). Jeg transkriberte også opptakene uten internettilgang, for å unngå en eventuell opplastning til skylagring, og at opptakene ble lagret på en separat minnepenn. Datamaterialet til prosjektet er også anonymisert og vil ikke være personidentifiserbart. Det anonymiseres navn på informantene i ulike filnavn, transkripsjon og i selve masteroppgaven, samt anonymisering av skolen de jobber på og de spesifikke fagene de underviser. Jeg har også unnlat å tilegne eller presentere kjønnene til lærerne i denne oppgaven for å ytterligere anonymisere, ettersom lærernes kjønn ikke er et fokusområde i min oppgave. Det er en forutsetning at informantene gir samtykke og tillatelse til deltakelse og oppbevaring av deres mulige personlige opplysninger og at informantene kan trekke seg når de ønsker. I løpet av intervjuene ble også informantene informert om deres taushetsplikt som lærere. Samtidig anser jeg ikke temaet i dette prosjektet til å inneholde noe særlig sårbar eller sensitiv informasjon, men en anonymisering er uansett nødvendig.

Det kan derimot hende at læreren gjenkjenner seg selv, noe som kan være vanskelig å hindre, spesielt siden deres forberedte oppgaver er unike. Med tanke på de forberedte oppgave, og muligens benyttede lærebøker, er det en risiko for at lærer kan bli gjenkjent. Eksempelvis har en av lærerne forberedt en oppgave som også var vedkommende sin innlevering i et videreutdanningsfag. Grunnet konfidensialitet oppgir jeg ikke hvilket emne eller utdanningsinstitusjon det gjelder. For å ytterligere øke anonymiteten har jeg også, med muntlig samtykke fra lærerne, delvis omformulert de fleste oppgavetekstene i ettertid uten å endre innholdet i stor grad. Jeg presiserer heller ikke hvilken lærebok lærerne i utvalget har, spesielt med tanke på den andre forberedte oppgaven.

4 Analyse og funn

I dette kapittelet vil jeg presentere de viktigste funnene fra de åtte intervjuene med lærerne, som kan være viktig for å besvare oppgavens problemstilling: *Hvordan er sammenhengen mellom fire R2-læreres forståelse av problemløsning og deres utforming av problemløsningsoppgaver med integraler?* For å kunne besvare problemstillingen velger jeg å sortere mulige funn etter oppgavens underspørsmål for å lettere analyseres. En analyse av datamaterialet er en prosess hvor jeg som forsker kan få mening ut av datamaterialet. Det er samlet inn en rekke data gjennom video- og lydopptak fra intervjuer og etter transkripsjonsarbeidet handlet analyseprosessen i hovedsak om å få kategorisert og deretter systematisert de funnene jeg fant. Som tidligere nevnt i kapittel 3 ble utsagnene til lærerne meningsfortettet og sortert etter de ulike temaene innenfor problemløsning og integralregning. Denne prosessen ble gjort i flere steg, ved å gå frem og tilbake mellom de ulike delene i datamaterialet.

På det andre intervjuet ble informantene stilt noen av de samme spørsmålene som på det første intervjuet, se «2.1 Repetisjonsspørsmål» i Vedlegg I. I de tilfeller hvor informantene ga mer utdypende, alternative eller motstridende svar på det andre intervjuet enn det de gjorde på det første intervjuet, så har jeg valgt å presentere sitat fra begge intervju. I de tilfeller hvor avgitte svar i stor grad var samstemte, har jeg valgt å kun presentere sitat fra det intervjuet hvor jeg oppfattet at svaret var mest velbegrunnet. Dette gjøres for å unngå å trekke inn for mange like uttalelser eller sitater fra samme lærer i dette kapittelet. Det bør derfor påpekes at jeg i dette kapittelet ikke vil knytte inn teori i for stor grad før videre diskusjon i kapittel 5. Lærernes uttalelser vil derfor ikke diskuteres i detaljer mot teori, underveis i dette kapittelet. Jeg vil også poengtere at jeg kun henviser til spesifikke linjer i transkripsjonen når jeg gjengir lærernes meninger i form av sitater. Andre meninger, påstander eller eksempler lærerne kommer med, som ikke er i sitat-form, vil gjengis som parafrasering uten direkte henvisning til transkripsjonene.

I dette kapittelet presenteres kort bakgrunnen til lærerne i utvalget. Deretter legges det frem hva lærerne kan fortelle om undervisning av integraler i R2, begrepet problemløsning, problemløsningsoppgaver, problemløsning i undervisning og elever som problemløsere. Til slutt gjøres det rede for utvalgets tanker og erfaring med problemløsning *og* integraler. Utvalgets forberedelser og utforming av problemløsningsoppgavene med integraler vil også presenteres, se også oppgavene i Vedlegg IV, V, VI og VII. Eventuelle løsninger til disse oppgavene vil ikke vektlegges, da det er lærernes tanker rundt forberedelse av oppgavene og gjennomføring av oppgavene i undervisning som kan være relevant for denne masteroppgaven.

4.1 Lærerne i utvalget

Utvalget består av fire lærere som underviser eller har undervist R2 ved tre videregående skoler i Bergen og omegn, der to av lærerne jobber ved samme skole. Utvalget representerer begge kjønn, samt lærere fra privat og offentlige skoler. I søk etter lærere ble det etterspurt lærere som underviser R2 eller som tidligere har undervist R2. Alle lærerne i utvalget har undervist R2 i flere år, men kun Lærer 4 underviser R2 skoleåret 2020/2021. Det var ulikheter blant lærerne på hvor ofte de vanligvis underviser R2. Lærer 1 underviser hvert andre eller tredje år, Lærer 4 har undervist faget omtrent 8 år på rad og for både Lærer 2 og 3 er det noen år siden sist de underviste R2, men de har begge undervist R2 flere år tidligere. Det var stor enighet blant lærerne om at R2 var et fag som det var stort ønske om å undervise på de ulike skolene blant matematikklærerne. Dette kunne skyldes at lærerne hadde en positiv oppfatning av R2-elever og at nivået på matematikken kan være høyt og utfordrende, for både elevene og lærerne.

Lærerne brukte ulike lærebøker og derav var rekkefølgen på når temaer, i eksempelvis integralregning, introduseres litt avhengig av hvilken lærebok skolen og lærerne brukte, men det var minimale forskjeller. Lærerne benyttet «SINUS R2» fra Cappelen Damm, nettportalen «LOKUS» og boken «Matematikk R2» fra Cappelen Damm eller den digitale læringsressursen «Nasjonal Digital Læringsarena [NDLA]». Videre kommer jeg til å henvise til disse læringsressursene som lærebok eller lærebøker. Med tanke på hvordan lærerne forbereder undervisning av R2 var det for det meste forberedelser knyttet til GeoGebra, som noen i utvalget kunne trekke frem som kunne ta tid. Forberedelsene til lærerne er mye rettet mot fagets kompetansemål og derav implisitt rettet mot eksamen. Flere av lærerne kan fortelle at undervisning etter ny læreplan fra LK20 som trer i kraft i 2022 kan medføre lengre forberedelser, mye grunnet at programmering skal inn i fag og at det gjerne kan være ukjent for lærerne.

4.2 Undervisning av integral i R2

Ettersom lærerne i dette denne oppgaven forbereder oppgaver med integraler og siden integraler er en stor del av R2 ønsker jeg å presentere hvordan lærerne introduserer og underviser integraler i faget, hvor flere trekker inn derivasjon som en nyttig og nødvendig forkunnskap til integraltemaet. Videre vil jeg også presentere hvordan flere lærere trekker frem differensiallikninger og andre bruksområder til integraler. Til slutt vil jeg også kort legge frem hvilke erfaringer lærerne har med integraloppgaver som brukes i R2.

4.2.1 Introduksjon og undervisning av integraler

Lærer 1 poengterer at lærerstilen *kan* være en faktor som påvirker undervisning av integraler, hvor det kan variere hvor instrumentell, utforskende eller praktisk orientert læreren er. Et mulig særtrekk ved undervisning av integraler som Lærer 2 trekker frem er at selve temaet kan anses som et algebraisk og delvis geometrisk tema:

> Du må jo ha en arbeidsmetode basert på det du jobber med selvfølgelig, men det gjelder jo alle temaer, så om det skiller seg ut fra andre, nei. (…) Vanligvis er det mer algebraisk, ville jeg sagt, (…) spesielt i begynnelsen. Siden vi har den delingen mellom med og uten [digitale verktøy], så må elevene da kunne jobbe algebraisk på del 1 av eksamen. Det kan også være litt geometrisk, med tanke på tolkning av areal under kurven. (Lærer 2, Intervju 1, linje 497-506)

Integraler kan delvis bære preg av at det er algebraisk, og da med tanke på de funksjonsuttrykkene elevene må arbeide med, men Lærer 2 poengterer også, i lag med resten av utvalget, at undervisning av integralregning i hovedsak ikke skiller seg særlig ut fra andre temaer i matematikk.

Undervisningsmessig, er utvalget samstemte i at integralregning og tilhørende regler introduseres tidlig i R2, mens integrasjonsmetoder presenteres litt senere i faget. Denne rekkefølgen i faget er, som nevnt i kapittel 4.1, delvis avhengig av hvilken lærebok læreren benytter. Generelt starter lærerne med å repetere derivasjonsreglene og introduserer så regler for integraler som det første i R2. Det var derfor enighet om at derivasjon er en viktig forkunnskap de forventer hos elevene da de ankommer R2:

> En mester i derivasjon, klarer integrasjon. Når det gjelder forkunnskaper, så må du kjøre på derivasjon hele tiden, det er enormt viktig. (…) De som ikke kan derivere, de kan ha problemer med å integrere. (Lærer 3, Intervju 2, linje 52-55)

Utvalget forteller at integraler gjerne introduseres og knyttes til derivasjon. Mye av grunnen til dette er at integrasjonsreglene kan bli presentert og utledet fra derivasjonsreglene elevene har lært i R1. Utvalget, og spesielt Lærer 3 i sitatet ovenfor, mener derfor at derivasjon bør øves godt inn når elevene tar R1. Lærer 4 hevder også noe lignende: «Hvis du kan derivere, så ligger du godt an. Da skal vi bare lære deg å derivere baklengs» (Lærer 4, Intervju 1, linje 166-167). Integrasjon kan bli sett på som en «baklengs prosess» eller «motsatt» av derivasjon, ifølge noen av lærerne. Lærer 1 har eksempelvis erfaring med en introduksjonsmetode, som kan minne om det Lærer 4 nevner om «å derivere baklengs»:

> Før vi faktisk introduserer hva integral er, så kan elevene få et sett med funksjoner og så skal de prøve å finne funksjonsuttrykket som ender opp med å bli derivert slik. (…) Vi prøver å la dem finne noen generelle formler, med prøving og feiling, før vi gir dem den generelle formelen vi skal bruke videre i faget. (Lærer 1, Intervju 1, linje 579-597)

Lærer 1 lar elevene oppdage integralregler ved å finne ut hvilken funksjon man må derivere for å få et gitt funksjonsuttrykket, gjerne ved å prøve og feile. Flere av lærerne i utvalget har erfaring med lignende metode og de opplever at elevene fort kan finne generelle regler for polynomfunksjoner og trigonometriske funksjoner, mens mer sammensatte funksjoner og eksempelvis metodene delbrøksoppspaltning og variabelskifte kan oppfattes som mer utfordrende å oppdage på egenhånd. Flere av lærerne erfarer også at elever forveksler regler for derivasjon og integrasjon, noe som kan ende opp med å ta mye tid.

Lærer 4 er den eneste læreren i utvalget som eksplisitt påpeker viktigheten av Riemann sum i intervjuene. Flere i utvalget trekker også inn at elever ofte ser på integral som arealet under en kurve, men Lærer 4 hevder at det å gjenkjenne integraler som arealet under grafen kan være en for simpel definisjon. Elever bør vite at integraler er en Riemann sum. Lærer 4 hevder at elever gjerne kan lære at integrasjon er koblet til derivasjon og at det kan forstås som arealet under kurven, men at de også bør forstå at et integral er en sum av uendelig mange uendelig smale rektangler. Lærer 4 trekker derfor inn GeoGebra som et nyttig visuelt verktøy for å vise Riemann summen, som muligens kan skape forståelse hos elevene. Det bør poengteres at Lærer 4 selv hevder at vedkommende kanskje vektlegger Riemann sum mer enn det pensum gjør.

4.2.2 Integralets bruksområder og sammenhengen i R2

Alle lærerne forteller at undervisningen bør prøve å relatere integrasjon, som kan bli sett på som rent matematisk, til hverdagslige situasjoner eller problemer, som kan løses ved hjelp av integraler. Lærer 3 poengterer også at integralregning er helt grunnleggende i kalkulus og at elever får sett nytteverdien av integraler flere steder i R2:

> Det er jo nesten hele tiden. Du samler opp over tid og summerer. (…) De lærer jo om arealer på ungdomsskolen, men nå kan de regne ut mer avanserte arealer og mer avanserte volum. (…) Vi har også differensiallikningene som er viktig å trekke inn. (…) Det er for eksempel vanskelig å måle hvor mye vann som strømmer fra det ene område til det andre, men du kan beregne det. (…) Det kan være vanskelig å finne akkurat det du har lyst til, men så finner du andre ting som beregner det du har lyst å finne. (Lærer 3, Intervju 2, linje 22-38)

Lærer 3 mener at integralregning, og gjerne differensiallikninger, åpner opp nye løsningsveier for elevene, hvor eksempelvis det er vanskelig å måle farten til en bil direkte, men det å måle strekning og tid er enkelt. Elever bør derfor se viktigheten av integralregning, da det forekommer mange steder i det virkelige verden, noe også Lærer 2 påpeker:

> Integral er jo et viktig verktøy i matematikken. Det er til stadig brukt til forskjellige ting i alle mulige sammenhenger. For eksempel fartskurven i fysikk, Feynman-likningene (…) og økonomi. (…) Alle ting som endrer seg har vel egentlig involvert noe med integral eller derivasjon. (Lærer 2, Intervju 2, linje 102-123)

Lærer 2 hevder at det er mulig å tenke derivasjon eller integrasjon dersom noe har med endring å gjøre. For å knytte integraler til virkeligheten pleier eksempelvis Lærer 4 å trekke inn meteorologi og værmeldinger i undervisningen sin for å vise nytten av differensiallikninger til elevene og påpeker at integraler kan resultere i aha-opplevelser for elever da det kommer til mekanikk i fysikk, med eksempelvis kurven for vei-fart-tid. Lærer 1 trekker også inn fysikkproblemer inn i matematikken for å vise flere bruksområder og problemer som kan løses matematisk, men poengterer at derivasjon gjerne kan ha flere bruksområder enn integrasjon for elevene i forhold til hva man kan møte på i hverdagen:

> Den deriverte har på en måte flere bruksområder enn integraler. I fysikk er det mye som er integraler. (…) Når du introduserer og ser på veksthastigheten er jo det kanskje et viktigere begrep enn integral, i et allmenndanningsbilde, altså det å forstå at ting endrer seg og at man da kan bruke den deriverte. Det er nok lettere. (Lærer 1, Intervju 1, linje 628-638)

Det kan gjerne være enklere å introdusere og trekke inn eksempler for derivasjon enn det er for integrasjon, ifølge Lærer 1, og da med tanke på endringer av størrelser, som også kan knyttes til det Lærer 2 nevnte tidligere. På en annen side forekommer integraler flere steder i R2 og derfor anser Lærer 4 faget som et ganske sammenhengende fag:

> På slutten av kurset kommer jo differensiallikninger, hvor all teknikk er integrasjon. (…) Da får vi en repetisjon av [de ulike reglene og metodene for integraler]. Jeg synes derfor det er helt topp at du får denne serien med integrasjon. (Lærer 4, Intervju 1, linje 154-161).

Lærer 1 poengterer også noe lignende: «Det er derfor man har bedre tid i R2 enn i R1, fordi R2 henger så mye mer sammen enn hva det gjør i R1. Det bygger på at integral er den store røde tråden i R2» (Lærer 1, Intervju 1, linje 667-679). Senere i det første intervjuet nevner også Lærer 1 en mulig positiv konsekvens av dette: «Integral vil for veldig mange elever [derfor] falle på plass i løpet av året (…) og min erfaring er at det skjer på en helt annen måte, enn hva kanskje derivasjon gjør i R1» (Lærer 1, Intervju 1, linje 932-937). Ifølge Lærer 1 og 4 møter elever på integraler flere ganger i R2, noe som gjør integraler til den røde tråden i faget, som igjen gir elevene bedre tid til å arbeide med og lære integralregning. Dette er da spesielt viktig med tanke på differensiallikninger, som er et av de avsluttende temaene i R2 og som har integralregning som løsningsteknikker.

4.2.3 Integraloppgaver i R2

Lærerne opplever også mye likt med formuleringer av integraloppgaver i faget og da gjerne basert på de oppgavene som er gitt i lærebøkene. De aller fleste av oppgavene er innlærende, altså tradisjonelle rutineoppgaver, og ofte formulert abstrakt og instrumentelt. Oppgavene er også presentert i de ulike delkapitlene, noe som kan være en veiledning for elevene om hvilken regel eller metode som kreves for å løse den gitte oppgaven, da det er det som er temaet for delkapittelet i læreboken. Lærer 4 kommer derfor med en bekymring: «Jeg er litt redd for at det blir litt indoktrinerende, altså 'lær deg en type løsningsteknikk'. (...) Vi lærer dem teknikkene, men det er ikke garantert at vi lærer dem forståelse» (Lærer 4, Intervju 1, linje 275-278). Selv om det er en god del rutineoppgaver om integraler, så påpeker Lærer 4 at det også finnes flere oppgaver som viser elevene hvor integralregning kan dukke opp i den virkelige verden, slik det også ble presentert i kapittel 4.2.2. Det er gjerne oppgaver koblet til produksjon, pris eller salg.

Etter hvert som en elev jobber i faget og blir kjent med de ulike reglene og metodene, så påstår Lærer 2 at det blir tydeligere for eleven hva som skal gjøres, selv om det ikke står en gitt metode i oppgaveteksten, ettersom eleven kan kjenne igjen oppgavetypen.

> Tekstoppgaver lager jo en sånn klassisk problemstilling, hvor elever ikke helt skjønner hva de skal gjøre. (...) Derfor er det greit å ha noen abstrakte oppgaver også (...), og så kan du ha noen tekstoppgaver mot slutten. Da er det mulig for de å vise hva de kan, altså hvordan tolke en tekst og så beregne seg frem til hva svaret blir i den sammenhengen, selv om det ikke er tydelig gitt hvilken metode de skal bruke.» (Lærer 2, Intervju 1, linje 635-642)

Lærer 2 mener at elever bør ha de abstrakte og vanlige rutineoppgavene, men samtidig bør elevene utfordres med tekstoppgaver mot slutten av faget. Lærer 2 hevder også at man kan på denne måten justere vanskelighetsgraden på integraloppgaver: «Hvis du ønsker å gjøre det lett, så kan du fortelle hvilke regler de skal bruke, men du kan også gjøre det slik at de må finne det ut selv» (Lærer 2, Intervju 1, linje 537-539). Lærer 2 hevder altså at en integraloppgave kan gjøres mer utfordrende for en elev ved å ikke informere eller presentere hvilken metode som er nødvendig for å løse den. Jeg vil tørre å påstå at denne utelatelsen av informasjon kan minne om min tidligere definisjon av en problemløsningsoppgave, der løsningsmetode er ukjent.

På lik linje med Lærer 2, forteller Lærer 3 at vedkommende noen ganger gir oppgaver fra flere delkapitler samtidig for å gi elevene mer utfordring og for å unngå denne inndelingen der ulike regler og metoder «tilhører» ulike delkapitler i lærebøkene: «Hvis du for eksempel har integralet av $\sin(x) \cdot \cos(x)$, (...) så kan jeg si til elevene at de må løse denne på tre måter» (Lærer 3, Intervju 1, linje 275-278). Ved å formulere en oppgave på en slik måte som Lærer 3 presenterer, er det mulig å unngå at elever kun jobber med oppgaver som spesifiserer metoder eller regler. En konsekvens kan dermed være at elevene må tenke mer og Lærer 3 erfarer derfor at ved å formulere det slik tilrettelegges det for at elevene kan utforske og diskutere.

Lærer 3 hevder også at lærebøker bør tidlig knytte integral og areal. Med andre ord, få tidlig inn den praktiske bruken og nytten av integraler fremfor å be elever lære seg regler og metoder for integralregning. Ifølge Lærer 3 er det ikke så mange tekstoppgaver om integral, og det er ofte deloppgaver på de aller fleste oppgaver som elever arbeider med:

> Det er ikke så mange av de lange [tekstoppgavene om integraler]. Det finner du kanskje i noen eksamensoppgaver, men det er ganske fraværende der også. (...) Istedenfor å kutte ut a, b og c og kun spørre om e, (...) så guider du elevene (...) og til slutt kan de svare på det du egentlig hadde lyst å spørre de om, som da er e-oppgaven. (Lærer 3, Intervju 1, linje 314-335)

Istedenfor å veilede elevene i for stor grad, kan en rutineoppgave omgjøres ved å fjerne de første deloppgavene og heller beholde den siste deloppgaven. Det er gjerne i denne deloppgaven elevene kan ta i bruk integralregning på en interessant eller lærerik måte.

4.3 Lærernes forståelse av problemløsning

Da informantene ikke ble tildelt noe litteratur om problemløsning de skulle lese seg opp på, så var det forventet at det kom til å være ulikheter i lærernes forståelse av problemløsning og problemløsningsoppgaver. Begrepene «problemløsning» og «problemløsningsoppgaver» ble noen ganger brukt synonymt i intervjuene av informantene. Av den grunn velger jeg å først presentere lærernes forståelse og bruk av disse to begrepene, deretter lærernes tanker og erfaringer med problemløsning i undervisning og til slutt hvordan lærerne oppfatter elever som gode problemløsere.

4.3.1 Problemløsning

Begrepene problemløsning og problemløsningsoppgaver ble flere ganger brukt synonymt i løpet av intervjuene. Lærer 3 forteller at problemløsning først og fremst er å anvende kjent matematikk og at et problem, og derav problemløsning, ikke nødvendigvis trenger å være matematisk, det kan også være andre virkelighetsnære problemer som må løses:

> [Problemløsning] er å anvende den matematikken du har lært, kanskje se noe nytt fremover og løse et problem som en eller annen har beskrevet. Det blir mange slike skriveboksproblemer i matematikk, men de kan fort bli reelle [problemer]. Du kan jo for eksempel sitte i et kommunestyre eller regjering, som har gjort noen dårlige investeringer. Da har du et problem fremfor deg. Det må løses. (Lærer 3, Intervju 2, linje 157-166)

På lik linje påpeker Lærer 4 at problemløsning er «en måte å aktivere læringen på» (Lærer, 4, Intervju 2, linje 9), sammenlignet med de tilfeller hvor man får oppgitt nødvendige formler og bedt om å løse en oppgave:

> Problemløsning handler mye mer om at matematikken blir et støttefag, eksempelvis for andre viktige vitenskaper. (…) [Målet med problemløsning] var primært å løse problemer. Ta Newton for eksempel. Målet hans var å finne ut at en stein som faller, faller etter samme prinsipp som at månen sirkulerer om jorden, noe som var revolusjonerende. Mens for oss i en faglig setting handler det om å sette matematikken inn i en bredere sammenheng, slik at det nesten blir en oppdagelsesreise. Det er mye gøyere enn en guidet tur, hvor det er en slags turist-virkelighet, altså kunstig. Reiser du på tur selv, så kan det være at du oppdager ting på veien som er mye mer ekte. (Lærer 4, Intervju 2, linje 15-30)

Lærer 4 skiller mellom ekte problemløsning, som foregår på et høyere nivå enn det elever møter på, og problemløsning i skolen. Som ordet problemløsning tilsier, så er målet å løse et problem og Lærer 4 hevder at problemløsning i skolen kan nesten sees på som en oppdagelsesreise, fordi man da kan utforske mer og man ikke blir låst til en «rute». Med andre ord, så vil problemløsning tillatte å bruke flere strategier og løsningsveier for å komme frem til en løsning på et problem og det er ikke kun én angitt løsningsmetode. Lærer 4 trekker også inn at problemløsning bygger på et konstruktivistisk læringssyn:

> En vellykket problemløsningsoppgave understøtter eller bygger opp konstruktivistisk læringssyn. (…) Målet med problemløsningslæring er at elevene kan bygge opp grunnleggende forståelse og dybdelæring. (…) De prøver å aktivere latent læring, gjerne en formel de har pugget eller noen teknikker de har sett. De aner noen strukturer. (…) Når du da setter trykket på og ber de løse et problem, så [vurderer de hvilke strukturer] som kan brukes. (…) Plutselig er det noe der og

> dermed, for å bruke Piagetisk språk, bygges det skjemaer (…) og du får akkomodasjon og assimilasjon i skjemaene. (…) Da skjer det en læring i en Piagetisk forstand. (Lærer 4, Intervju 1, linje 429-447)

Lærer 4 påpeker mye det samme som Skott et al. (2008) om at elever bygger kognitive skjemaer og endrer eller tilføyer de gjennom assimilasjon eller akkomodasjon Elevene er altså aktivt med i å konstruere sin kunnskap, gjennom å måtte lete etter forkunnskaper for å kunne løse et problem, noe både Lærer 3 og 4 påpeker ovenfor.

> Jeg forstår problemløsning i et litt videre perspektiv. [Det er] med tanke på at det er flere steg du skal gjøre. Det er ikke bare å få et problem og løse det. Det er mer en A til Å oppgave. (Lærer 3, Intervju 2, linje 140-141)

Det er mulig å forstå Lærer 3 sin forståelse på to ulike måter. Det første er problemløsning som en metode for å løse et problem, som krever en algoritmisk tenking at du må dele opp problemet i flere mindre deler og dermed løse problemet i flere steg (Udir, 2018, 2021). Det andre er at problemløsning kan forstås i sammenheng med en oppgave som har mange deloppgaver, hvor lærernes forståelse av problemløsningsoppgaver legges frem i neste delkapittel.

4.3.2 Problemløsningsoppgaver

Lærer 2 hevder at tekstoppgaver kan minne om problemløsningsoppgaver, og da spesielt de oppgavene som blir gitt i temaet differensiallikninger i R2. Ifølge Lærer 1 var problemløsningsoppgaver gitt under lærerplan fra M87 veldig tekstbaserte, men ikke i like stor grad i dag:

> Jeg tenker at problemløsningsoppgaver ofte er oppgaver hvor du skal introdusere noe som ikke er 100 % kjent. (…) Hvis jeg da bruker definisjonen på en problemløsningsoppgave, så skal det jo ikke være kjent, men i et klasserom med en varierende forsamling med ferdigheter og forkunnskaper, så liker jeg at det også skal være et element av kjent. (…) Det er gjerne flere måter å komme frem til svaret på, hvor det ikke må være en spesifikk fremgangsmåte. (…) Det åpner gjerne for flere mulige varianter å angripe problemet på. (Lærer 1, Intervju 1, linje 229-241)

Ifølge Lærer 1 bør problemløsningsoppgaver bestå av både elementer som er kjente for elevene, men kan samtidig introdusere noe ukjent. Det bør også være flere fremgangsmåter og ulike måter å angripe problemet på. Ifølge Lærer 1 kan en løsningsstrategi være å bruke det som er kjent og prøve å finne en sammenheng, slik at man gå videre til noe som er ukjent og som ikke nødvendigvis er presentert i full grad. Lærer 3 erfarer derimot at det kan ta tid før elever kommer i gang med slike oppgaver: «Det er den inngangsterskelen. De er ikke vant til at den er så høy (…) eller hvis den ikke er høy, men lav, så oppdager de det ikke» (Lærer 3, Intervju 1, linje 130-138). Dette kan tolkes, som tidligere nevnt, at et matematisk problem ikke behøver å oppfattes som et problem for alle (Angell et al., 2019; Björkqvist, 2003; Niss & Jensen, 2002; Skott et al., 2008; NCTM, 2000). Lærer 3 poengterer at elever kan være utålmodige hvis de ikke får kommet i gang med oppgaven så tidlig som de er vant til. Lærere kan dermed også bli utålmodige, siden læreren allerede vet om en eller flere strategier for å komme i gang, og mener at eleven bør se den.

Lærer 2 hevder derfor at formuleringer av oppgaven kan være en viktig faktor for at elevene skal kunne knytte det til noe kjent og komme i gang med oppgaven:

> For min del er en problemløsningsoppgave en oppgave som er mer praktisk rettet. Det krever kanskje litt mer tid for elevene å sette seg inn i et problem og tenke gjennom hvordan de kan løse det. Det kan minne mer om en prosjektoppgave enn en kort oppgave i timen. (…) De trenger tid (…) for å tenke gjennom hva problemstillingen er og hvordan de kan sette seg inn i det. Når de har skjønt problemstillingen, så er det ikke sikkert at de har verktøyene til å løse problemet. De har kanskje et skjelett av hvordan de skal løse det og så må de sette det inn i en viss sammenheng og se om de klarer å få det til. (Lærer 2, Intervju 1, linje 85-102)

Etter at elevene har forstått problemstillingen er det ikke sikkert at elevene har lært alle de nødvendige teknikkene eller metodene for å løse problemet direkte. Ved å lete etter en sammenheng med noe de har lært tidligere, så kan de løse problemet ifølge Lærer 2. Vedkommende knytter også problemløsningsoppgaver til oppgaver som er mer praktisk rettet og gjerne mer tidkrevende enn en tradisjonell rutineoppgave. På lik linje forstår også Lærer 3 og 4 problemløsningsoppgaver som praktisk orienterte og gjerne virkelighetsnære oppgaver, hvor blant annet Lærer 3 hevder å ha mindre erfaring med mer abstrakte eller teoretisk orienterte problemløsningsoppgaver. Praktisk orienterte oppgaver kan forstås som en oppgave med en kontekst, som eksempelvis omhandler produksjon på en fabrikk, medisin i kroppen eller gift i en demning. Denne forståelsen kommer tydeligere frem når Lærer 4 skiller mellom begrepene oppgave og problem:

> Slik jeg bruker ordet oppgave, betyr en slik repetisjonsoppgave i læreboken, hvor formel er gitt (…) og kompleksiteten kan økes gjennom minimale endringer [i oppgaveteksten]. Det kan være litt kunstig. Mens et problem kanskje [omhandler] en situasjon. Det er det som er kult med differensiallikninger i R2, fordi de spør «hvor lang tid tar det å fylle opp bassenget når det lekker?». Det er et faktisk problem folk kan ha i løpet av sommeren. (Lærer 4, Intervju 2, linje 46-55)

Slik Lærer 4 bruker begrepet oppgave, kan tolkes til å være en rutineoppgave med en hensikt om å trene en løsningsteknikk, slik som jeg selv bruker begrepet i denne oppgaven. Lærer 4 hevder videre at ideelle problemløsningsoppgaver bør være åpne oppgaver og ha mer enn én løsning, da en problemløsningsoppgave «må gjerne ha en åpen slutt» (Lærer 4, Intervju 1, linje 354). Med andre ord, dersom elever klarer å løse en slik oppgave, så bør oppgaven tilby utvidelse hvor problemet kan løftes til et ytterligere nivå. Lærer 2 påpeker noe lignende, da det finnes ulike typer problemløsningsoppgaver, som kan variere ut ifra hvilken grad læreren vet svaret på forhånd eller ikke:

> Du har jo alt fra problemløsningsoppgaver hvor svaret er helt ukjent til mer stilistiske problemstillinger, som er de du gjerne finner i mattetimene. Da har gjerne læreren et tiltenkt svar, men for elevene kan det virke ganske kryptisk om hvordan komme frem til noe. (Lærer 2, Intervju 2, linje 9-13)

Utvalget hadde derfor noen tanker om hvordan problemløsningsoppgaver gjerne skiller seg fra en tradisjonell rutineoppgave, hvor Lærer 1 forklarer noen forskjeller:

> Det som er forskjellen [fra en tradisjonell rutineoppgave] er at det ikke er en kjent innfallsvinkel. Du har flere metoder som kan fungere. Du kan bruke tidligere kunnskap til å løse det, slik at man ikke [bør] ligge problemet for høyt opp, (…) og gjerne at det finnes mer enn én løsning [på problemet]. (Lærer 1, Intervju 2, linje 86-92).

Lærer 1 hevder at problemløsningsoppgaver skiller seg fra tradisjonelle rutineoppgaver ved at de åpner for flere løsningsmetoder, men at de samtidig tillater bruk av tidligere kunnskap til å løse problemet. Ellers ville oppgaven kreve at elevene må lære noe nytt for å kunne løse oppgaven. I likhet med Lærer 1 poengterer Lærer 3 at rutineoppgaver ofte oppgir hvilken metode som skal brukes for å kunne komme frem til en løsning.

> [Tidligere lærebøker] er så instrumentelle at de mer eller mindre forteller deg hva du skal gjøre og når du skal gjøre det. Men problemløsning er (…) ikke sånn «finn det og det» og så har du svaret. Det er mer at du må lete litt, kanskje med noen hint, for å finne ut hvor du skal begynne. (…) Jeg var mot de gamle bøkene, fordi [elever] slipper å tenke. (…) Det var minimalt med læring. Har du [som elev] hatt de tidligere lærebøkene og skal møte på problemløsningsoppgaver, så tror jeg [eleven] kommer til å slite, fordi det ikke er noe som forteller hvor [eleven] skal starte. (Lærer 3, Intervju 1, linje 91-104)

Ifølge Lærer 3, bør problemløsningsoppgaver åpne opp for mer utforsking og åpne for at elevene skal tenke mer, noe også Lærer 4 har påpekt tidligere. Elever bør derfor frigjøre seg, tenke over hva de har lært og utnytte det, ifølge Lærer 3. Det å kunne øve elever opp til å utnytte forkunnskaper på en ny måte kan derfor være en viktig grunn for å ha problemløsning i skolen. Samtidig nevner Lærer 3 en interessant erfaring med problemløsningsoppgaver i skolen i dag: «De problemløsningsoppgaver vi har nå er kanskje ikke så mye problemløsningsoppgaver, fordi du [som elev] egentlig får forklart hva du skal gjøre likevel» (Lærer 3, Intervju 1, linje 112-114). Lærer 3 hevder med andre ord at de problemløsningsoppgaver elever møter på i skolen egentlig er en slags hybrid mellom problemløsningsoppgave og en tradisjonell rutineoppgave. De kan derfor ikke kalles «ekte» problemløsningsoppgaver:

> Det som vi holder på med nå, der er det ikke tid til å undersøke. Det er ikke tid til å løse problemer. Derfor mener jeg det er litt hybrid. Det er et godt og dekkende ord på det som vi kaller problemløsningsoppgaver i dag. (Lærer 3, Intervju 1, linje 123-125)

I lag med Lærer 3, trekker også flere lærere frem tid som en utfordrende faktor med problemløsning i skolen, ettersom det er et fokus på innlæring fremfor utforsking. Senere i det første intervjuet utdyper Lærer 3 vedkommende sin erfaring med problemløsningsoppgaver i skolen: «Det er mer en oppgave med en tvist, enn en problemløsningsoppgave. (…) Vi kan fremstille det som et problem, men det er kanskje ikke det likevel» (Lærer 3, Intervju 2, linje 209-211). Lærer 3 er bevisst på at problemløsningsoppgaver i skolen i dag kan anses som en hybrid mellom en problemløsningsoppgave og en rutineoppgave. Det poengteres derimot at det fortsatt er mulig å benytte slike oppgaver i undervisningen som problemløsningsoppgaver.

4.3.3 Utfordringer med å forberede problemløsningsoppgaver

Flere av lærerne i utvalget poengterer at selv om de til en viss grad forstår hva en problemløsningsoppgave er, hevder flere av lærerne at det kan være vanskelig å lage gode problemløsningsoppgaver. Lærer 4 erfarte dette da vedkommende skulle forberede oppgaven til det andre intervjuet: «For å få laget problemløsningsoppgaver som treffer pensum veldig bra, da må du jobbe litt mer, så jeg synes det var arbeidsomt [å forberede problemløsningsoppgaver til den andre intervjuet]» (Lærer 4, Intervju 2, linje 41-43). Lærer 2 påpeker også noe lignende og knytter vanskelighetsgraden på oppgaven til elevenes modenhet i faget:

> Hva lærer elevene av [problemløsningsoppgaver]? Basert på hvor gamle og modne de er, i hvor stor grad er det da mulig for de å få noe tydelig ut av det, som kanskje er i grenseland for det som de er i stand til på det aldersnivået? (…) Problemløsning kan, avhengig av hva problemet er og hvor avansert det gjøres, i noen tilfeller blir for banalt, bli for avansert eller det kan ta for mye tid. Jeg tror det [derfor] er vanskelig å lage gode problemløsningsoppgaver som tar hensyn til det nivået elevene er på, samtidig som at det ikke skal ta for mye tid. (Lærer 2, Intervju 1, linje 234-255)

Et forslag Lærer 4 derimot har om hvordan man kan forberede eller lage en problemløsningsoppgave er å fjerne støttehjulene i en rutineoppgave, altså de første deloppgavene. Da fjernes noen av støttestrukturene elevene er vant til, men oppgaven kan fortsatt knyttes til pensum. Lærer 2 poengterer også at nivået på oppgavene og elevenes modenhet kan spille en viktig rolle, hvor elever ikke alltid begrenser problemet eller så begrenser de det for mye. Ifølge Lærer 2, kan elever ha en mening om at det er enkelt å løse en oppgave som er abstrakt definert, som en rutineoppgave ofte er. Derfor hevder vedkommende at når man forbereder en problemløsningsoppgave, så bør ikke problemet fremstilles unødvendig komplisert:

> Du må fremstille problemet slik at du ikke gjør det mer komplekst enn hva den nødvendigvis er ment for å være. Det tror jeg er veldig vanskelig. (…) Ha oversikt over hva du ønsker å gi informasjon om, og tenk tydelig gjennom hva som kan være vanskelig med oppgaven. Prøv å se det fra elevenes side. (Lærer 2, Intervju 2, linje 228-253)

For å lage eller forberede en god problemløsningsoppgave bør oppgaveteksten være tydelig formulert og helst kun inneholde nødvendig informasjon for å løse oppgaven, ifølge Lærer 2. Oppgaveteksten bør ikke formuleres slik at elevene blir forvirret og oppgaven bør ikke utformes vanskeligere enn det den er ment til å være. Dersom man ikke prøver å se oppgaven fra en elev sitt ståsted, så kan noen en elev falle fra og man kan ikke klare å forutsi hvor eleven stopper opp. Det er mulig å ta hensyn til elever på ulike faglige nivå ved å bruke en problemløsningsoppgave, hvor Lærer 2 nevner at dette kan være mulig siden oppgaven kan være åpent formulert og dermed tillatte ulike innfallsvinkler. Ved å planlegge hvordan oppgaven kan gjøres mer utfordrende, kan man legge til rette for de elever som løser oppgaver på kort tid. For å hjelpe noen av elevene med stegene på veien mot en løsning, kan man som lærer ha forberedt noen deloppgaver i bakhånd som hint. Det er derimot en liten fallgruve ved å ha forberedt slike deloppgaver, der man som lærer opplever at det er én løsningsvei, ettersom det kan hemme andre løsningsveier. Lærer 4 trekker inn igjen at den ideelle problemløsningsoppgaven bør ha en åpen slutt, og flere løsningsveier:

> Det er jo det dumme når jeg lager en oppgave, hvor jeg føler at det er én naturlig sti. Det mest ideelle er å jo å ha en problemløsningsoppgave, hvor du selv [som lærer] ikke vet hvilken sti [som er naturlig å velge]. (…) Men da er vi kanskje over på ekte problemer. (Lærer 4, Intervju 2, linje 277-284)

For å lettere kunne trekke frem lærernes ulike forståelser av problemløsningsoppgaver senere i diskusjonen, har jeg nedenfor i Tabell 1 oppsummert i korte trekk hvordan lærerne forstår problemløsningsoppgaver. Jeg vil gjerne påpeke at begreper som løsningsmetode, metode, løsningsvei, løsningssti og fremgangsmåte noen ganger er nevnt synonymt hos lærerne. Dette gjelder først i deres forståelse av en problemløsningsoppgave, men også videre i deres begrunnelser fra den første og andre oppgaven, som presenteres nærmere i kapittel 4.4.

Tabell 1: En kort oppsummering av lærernes eksplisitte forståelse av problemløsningsoppgaver.

	Lærer 1	**Lærer 2**	**Lærer 3**	**Lærer 4**
Kjent versus ukjent	Introdusere noe ukjent, men bør kunne knyttes til noe kjent eller tidligere kunnskap.	Må kunne settes inn i kjente sammenhenger. Bør derfor ta hensyn til nivået eller modenheten til elever.	Mulig å kunne anvende kjent matematikk.	Oppgaver som får elev til å tenke og aktiverer læring, med et konstruktivistisk læringssyn.
Løsningsmetode og løsning	Ikke en gitt løsningsmetode og flere mulige måter å løse problemet på. Gjerne mer enn én løsning.	Problemstilling må være tydelig, men formulering bør også være åpen. Det finnes ulike typer matematiske problemer, avhengig om det er et tiltenkt svar eller ikke.	Ikke en gitt løsningsmetode. Inngangsterskel kan oppfattes ulikt av elever. Mer undersøkende, og ikke like instrumentell som rutineoppgaver.	Ideelt er det åpne oppgaver med åpen slutt, for å tilby utvidelse og et nytt nivå. Ulike formuleringer, avhengig av mulighet til videre arbeid etter funnet løsning, men bør treffe pensum. Rutineoppgave uten deloppgavene er mer problemløsningsoppgave.
Typer problemer eller oppgaver	Tidligere som tekstoppgaver i M87, men ikke like mye nå.	Kan minne om tekstoppgaver. Praktisk rettede oppgaver.	Reelle problem, og ikke nødvendigvis kun funnet i matematikk. Hybrid, altså ikke ekte problemer i skolen. Praktisk orienterte oppgaver.	Ofte praktiske problem, som omhandler en situasjon, kontra en oppgave som er en rutineoppgave med oppgitte formler.

4.3.4 Problemløsning i undervisning

Lærer 3 mener at problemløsningsoppgaver bør bli gitt i starten av gjennomgang av et nytt tema. Et argument for å bruke problemløsningsoppgaver tidlig i et tema er å gi elevene et innblikk i hvilke oppgaver eller problemer de kan være i stand til å løse etter at de har vært gjennom temaet:

> Jeg sier ikke dermed at vi har løsningen på [problemløsningsoppgaven], men du kan presentere problemet og så kan du heller komme tilbake til den senere. (…) Målet med den oppgaven vil være å vise at i løpet av dette kapittelet, så får vi muligens noen verktøy som kan løse slike problemer. (…) [Et argument for å bruke det i slutten av et tema] er at du da kan løse flere problemer, men ikke noe annet enn det. (…) Hvis jeg starter med et tema, så kan jeg si hvor vi skal komme i løpet av dette kapittelet og hvilke problemer som kan løses. (Lærer 3, Intervju 2, linje 171-180).

Ved å gi elevene et innblikk i kapittelet de starter på, så vil det ikke alltid være nødvendig å komme frem til en løsning i denne introduksjonsfasen. Lærer 3 mener heller at de kan komme tilbake til oppgaven når elevene har lært de nødvendige verktøyene de må ha for å kunne løse den. På en annen side argumenterer Lærer 4 for at problemløsningsoppgaver ikke bør presenteres i starten av et tema, men heller mot midten av gjennomgangen: «Det er fordi jeg tror det er utrolig vanskelig å se for seg at [elevene] skal kunne finne opp [eksempelvis] integralregningen bare ved å få et problem, der løsningen er arealet under grafen» (Lærer 4, Intervju 1, linje 464-465). Lærer 4 poengterer at det var genier, som Newton og Leibniz, som kom frem til integralregning slik vi kjenner det i dag. Man kan ikke derfor forvente at elever kommer frem til det samme før de har de nødvendige verktøyene. Lærer 4 frykter at det å gi elever problemløsningsoppgaver om et tema for tidlige kan skape frustrasjon blant elevene. Grunnen til dette er fordi elevene ikke har forutsetningene til å løse et slikt problem. Ifølge Lærer 4 er det altså et behov for noe teoretisk innføring før en problemløsningsoppgave presenteres. Lærer 3 påpeker noe lignende i sitatet ovenfor, hvor man som lærer kan og bør trekke inn ting som elever har lært i tidligere kapitler.

I en undervisningsøkt med problemløsning mener Lærer 2 at en tydelig presentasjon og forståelsen av problemstillingen er noen av de viktigste første stegene i problemløsning (som er påpekt tidligere):

> Deretter slipper jeg de mer eller mindre fritt til å gjøre som de vil og helst få de til å arbeide i grupper. Jeg kan hjelpe grupper hver for seg, samt snakke litt i fellesskap, men først og fremst se hva hver gruppe eller person får til eller ikke. (Lærer 2, Intervju 1, linje 205-209)

Etter at problemet er presenterert og forstått, hevder Lærer 2 at en viktig faktor kan være å la elevene få fritt spillerom og helst arbeide i grupper, noe også Lærer 3 påpeker:

> I stikkord, så hadde jeg for det første overlatt mye til dem. Du må hele tiden diskutere med dem, som en prosess underveis (…) og kanskje lede de litt på rett vei. (…) Du kan kanskje gi dem noen moteksempler til den veien de går. Jeg ville nok ikke gitt dem veien videre, men jeg ville ha argumentert mot den veien de gikk på. (Lærer 3, Intervju 2, linje 267-274)

Både Lærer 2 og 3 trekker frem at å hjelpe, snakke eller diskutere med elevene underveis kan være nyttige støttestrukturer for elevene, som vil støtte et sosiokulturelt læringssyn (Skott et al., 2008). En løsning på utfordringen med tid kan være å gi elevene en tidsfrist, og dermed be dem presentere og diskutere løsningene i plenum, noe Lærer 1 som oftest pleier å gjøre:

> [I en slik plenumssituasjon] er det viktig å si at det ikke er noe rett eller feil. (…) Jeg jobber med det at alle skal komme til ordet og at det er flere måter [å løse problemet på]. Altså, det er ikke ett rett svar. (…) Derfor går jeg gjerne systematisk gjennom alle. Etterpå prøver jeg å få dem til å lete etter innspill som hadde noe fellestrekk eller noe som skiller seg ut. (…) Etter hvert kan jeg velge å gå inn og overstyre for å trekke frem minst to til tre måter å løse problemet på. (Lærer 1, Intervju 1, linje 357-387)

I en slik delingskultur setter Lærer 1 pris på alle innspill og verdsetter dem, for å unngå at noen elevers svar skal oppfatte som en fasit, hvor vedkommende senere i det første intervjuet utdyper dette:

> Jeg tenker jo at en av grunnene [til at vi bør bruke problemløsning] er å lære å akseptere at matematikk og fysikk er mer enn å bare få rett svar. Det er viktig. (…) [Tradisjonelle rutineoppgaver] er ikke så mye ute etter forklaringen bak, og det er derfor jeg tenker at det er viktig at det bør av og til settes av tid til samtalen rundt det å løse oppgaven. (Lærer 1, Intervju 1, linje 485-494)

Lærer 1 mener altså at i slike diskusjonssituasjoner hvor alle sine innspill blir tatt opp, så er det den muntlige matematikken som forekommer et aspekt i strategien elever kan ta nytte av, der fokuset på forklaring overveier løsning. Dette kan også minne om det Angell et al. (2019) kaller internalisering, hvor elever kan benytte begreper etter å ha brukt de i en sosial kontekst. Lærer 3 poengterer at selv om vedkommende er usikker på hvilke krav eller forventninger som settes til elevene, så er det først og fremst elevene som skal drive arbeidet frem mot en løsning: «Jeg må jo kanskje stille ledende spørsmål, men de må komme med tallene. De må lage diskusjonen. Jeg kan stille spørsmål (…) og da må de diskutere» (Lærer 3, Intervju 2, linje 234-240). Lærer 3 har erfaring med at interessen til elevene kan øke når de møter på et hinder i en oppgave. Vedkommende forklarer ikke hvorfor, men jeg tolker økningen av interesse kan være et slags behov for mestringsfølelse. Lærer 3 har erfaring med de ganger vedkommende har tilbudt elevene en slags problemløsningsoppgave når de arbeider med oppgaver, så er det ikke alle som gjør den: «Det handler om den individuelle tilpasningen i klassen. Mange har mer enn nok med å gjøre de syv første oppgavene» (Lærer 3, Intervju 2, linje 474-475). Samtidig påpeker Lærer 3 at en problemløsningsoppgave skal kunne løses av alle typer elever, men avhengig av graden av veiledning fra lærer:

> De vil ikke alltid klare seg på egenhånd. Alle kan klare det med litt hjelp. Det er graden av hjelp underveis som vil variere. (…) Noen har mer enn nok med sitt. Avstanden fra der de er nå til der de skal komme, bør ikke være for stor. Da kan de miste motet. (Lærer 3, Intervju 2, linje 484-498)

Lærer 3 poengterer at dersom man opplever at den faglige avstanden fra der eleven er nå og til der eleven skal komme til er for stor, så kan eleven få færre eller enklere problemløsningsoppgaver.

Med tanke på problemløsning i undervisning, vil jeg gjerne poengtere et tema som jeg og Lærer 4 snakket mye om i vedkommende sitt første intervju. Ikke lenge før det første intervjuet med Lærer 4, gjennomførte vedkommende for første gang noe kalt «Thinking Classroom» i sin R2-klasse og hadde veldige positive erfaringer med opplegget. Uten å gå i dybden på aktiviteten, så er hovedprinsippet til Thinking Classroom av Peter Liljedahl[4] å la elevene stå oppreist og løse problemløsende oppgaver på en tavle, hvor det er lett å viske ut dersom man skriver feil. Grunnen til dette er fordi Liljedahl hevder at det er lite tenking når lærer først foreleser og deretter lar elever arbeide med oppgaver. Lærer 4 påpekte at problemet bør presenteres muntlig og elevene bør være delt inn i tilfeldige små grupper, og denne gruppesammensetningen bør endres for hver gang. Selve

[4] Se blant annet https://www.peterliljedahl.com/btc eller https://modernlearners.com/thinking-classrooms/#respond for ytterligere informasjon.

aktiviteten vil derimot ikke drøftes noe særlig videre i teksten, men kan være relevant å opplyse om, da det kan være en faktor som har påvirket svarene til Lærer 4.

4.3.5 Elever som problemløsere

Lærer 4 mener at en egenskap hos en elev som er en god problemløser er «evnen til å aktivere annen kunnskap litt raskt» (Lærer 4, Intervju 2, linje 64), og knytter denne egenskapen til dybdelæring. Med andre ord, hvis en elev møter på noe ukjent så kan en god problemløser kjapt knytte det til noe kjent, slik at eleven blir i stand til å løse det. Lærer 1 trekker også inn raske elever, som tidlig spør seg selv om hva problemet kan minne dem om og om de har vært borti noe lignende før. Slike elever kobler gjerne og setter kunnskap sammen på nye måter for å løse problemet på, ved å finne nye sammenhenger eller lete etter dem:

> Det er en rask elev, men det er ikke nødvendigvis en god problemløser. Dersom den eleven ikke ser sammenhengen og ikke kan bruke de gamle metodene og kjapt sette de sammen til en ny metode, så er det ikke nødvendigvis slik at den eleven har en god strategi for å kunne lete seg frem til fullstendig nye metoder og kunne utprøve dem. (Lærer 1, Intervju 1, linje 313-318)

Det er altså ikke lett å klassifisere hva som utgjør en god problemløser basert på om eleven en rask eller treg, faglig sterke eller svak, noe Lærer 3 også poengterer:

> De som er veldig teoretiske hater sånne [problemløsningsoppgaver] (…) Samtidig kan du finne [gode problemløsere] overalt. Jeg vil helle mot de litt flinke og genuint interesserte, som ikke bare tenker på karakter. (…) [En god problemløser] besitter nok et bedre overblikk. De ser at det er et problem og de ser kanskje mulighetene for å løse problemet også. Mange av de andre vil nok oppleve det som uoverstigelig og gi for lett opp. (Lærer 3, Intervju 1, linje 149-156)

I første omgang vil de elever, som kan beskrives som flink i et fag, muligens lettere se en løsningsvei, hvor andre kan oppfatte problemløsning som utfordrende. Det er derimot ikke et så klart skille mellom elever som er god i problemløsning og de som ikke er det. I det andre intervjuet med Lærer 3, oppklarer vedkommende ytterligere:

> Jeg vil nesten si at av de som liker teoretisk matematikk, så finnes det en god del som ikke er interessert i problemløsning. (…) [Et kjennetegn på en god problemløser] vil være de som ikke er så teoretisk bundet, altså bundet av regler.

> En annen vil derimot være på jakt etter nye regler og det er ikke det at de ikke utvider horisonten, men de har mest lyst å lage en regel for seg selv. (Lærer 3, Intervju 2, linje 365-376).

Lærer 3, i lag med flere av lærerne fra utvalget, poengterer at elever ofte er avhengig av å vite hvilken regel eller formel som skal brukes, hvor Lærer 1 erfarer at grunnen er for å komme raskt i gang med utregningen. Slike teoretiske elever er gjerne ikke like interessert i problemløsning sammenlignet med en som ikke er så regelbundet. Derfor kan en utfordring med problemløsning i undervisningen være at en elev eller en gruppe med elever ikke aksepterer at det ikke er et fasitsvar på problemet. Lærer 4 påpeker en mulig grunn bak det:

> Jeg forventer at det er flere som gir opp på en problemløsningsoppgave, fordi de er usikre på hvilken formel som skal brukes. Du får flere spørsmål om «hvordan skal jeg». (…) De lengter etter den lille trappen eller støttehjulet, som de vant til å få. (…) Det går på en slags modenhet i faget også. (Lærer 4, Intervju 2, linje 259-266)

Det er mulig å tolke Lærer 4 som at noen elever oppfatter regler eller kjente metoder som en veiledning eller støtte i arbeid med oppgaver. Det eksisterer elever som kan være mer avhengig av støttestrukturer, som det deloppgaver eller gitte formler tilbyr. Lærer 4 trekker også inn modenhet i faget, noe Lærer 2 har påpekt tidligere.

Strategien hvor elever kan dele opp et problem i mindre deler, og dermed gjøre problemet mer overkommelig å løse, er nevnt i kjerneelementet «Utforsking og problemløsning», som en del av prosessen i algoritmisk tenkning (Udir, 2018, 2021). Både Lærer 1 og 2 trekker denne strategien frem i sin forklaring på en god problemløser. Lærer 2 hevder at det dermed kan være enklere for eleven å få et klart bilde av hva som skal gjøres: «[Etter å ha brutt oppgaven ned i mindre steg] formuleres en idé om hvordan de ønsker å løse problemet på, kanskje ved å prosjektere litt og lage en liste over de tingene som må gjøres» (Lærer 2, Intervju 1, linje 129-130). Lærer 1 utdyper også og mener derfor at det er disse stegene eller prosessen som er det viktige, og ikke formelen eller løsningen eleven kommer frem til: «Det er ikke bare å komme frem til en formel, men de skal prøve å argumentere og forklare for hvorfor det skal være slik. Her kan også svakere matematiske elever tenke på en litt annen måte» (Lærer 1, Intervju 1, linje 327-329). Det kan altså være viktig å formulere en plan før løsning etter å ha forstått problemet, mye likt Pólyas (2009) sitt andre steg, og at det er løsningsmetoden som bør være i fokus, ikke selve løsningen.

Ifølge Lærer 1, kan en elev som er en god problemløser bruke tidligere lærte metoder, som er grunnen til at stegene som gjøres underveis kan være vel så viktig som selve løsningen. Et viktig steg videre ifølge Lærer 2 er dermed å sortere hva man skjønner, og hva man ikke skjønner. En god problemløser gir ikke opp med det første, men har en villighet til å kunne jobbe videre med noe som eleven kanskje ikke forstår helt:

> Man forventer jo at elevene er villig til å sette seg ned og gjøre det som trengs for å løse problemene. De må jo ha litt kreativ tenkning. De må klare å se for seg hva som skal skje og planlegge, samt være selvstendig og jobbe på egenhånd. Du kan ikke som lærer holde alle i hånden mens de gjør dette, spesielt ikke hvis du har 20 elever. (Lærer 2, Intervju 2, linje 29-36)

Kreativ tenkning og selvstendighet kan være to andre kjennetegn på en god problemløser, ifølge Lærer 2, som kan knyttes til en villighet i elevene.

4.4 Problemløsning med integraler

I dette delkapittelet vil funn presenteres rettet mot problemløsning med integraler og spesielt oppgavens tredje underspørsmål. Temaet vil introduseres ved å kort presentere tankene til Lærer 2 og 4 om problemløsning med integraler, ettersom Lærer 1 og 3 ikke hadde noen eksplisitte tanker om dette. Deretter vil jeg ta for meg lærernes forberedte oppgaver, ved å først presentere bakgrunnen til oppgavene, lærernes begrunnelser for hvorfor deres oppgaver er problemløsningsoppgaver og legge frem eventuelle endringer av oppgavene som kunne gjort oppgavene mer til problemløsningsoppgaver.

Lærer 4 hevder at problemløsning ikke er noe annerledes innenfor integralregning enn andre temaer, men påpeker derimot noe interessant: «Jeg har en følelse av at integralregning, sånn som det er i R2, legger veldig til rette for at det blir 'lær en teknikk'. Det ligger veldig til rette for [at det blir rutineoppgaver fremfor problemløsning]» (Lærer 4, Intervju 2, linje 246-251). På en annen side mener Lærer 2 at det burde være enkelt å lage problemløsningsoppgaver med integraler, da integralregning kan dekke så mye:

> [Integraler] er jo i prinsippet et tema hvor det burde være relativt enkelt å lage noe rimelig, med andre ord, relevant problemløsning. Det finnes nok av

> problemstillinger som vil ligne på eller der man kan bruke den matematikken de bruker i R2. (…) Integrasjon er på en måte et mer generelt overbyggende tema, der du kan integrere nærmest alle matematiske funksjoner[5], ikke alltid analytisk, men hvert fall numerisk integrere alle funksjoner. (Lærer 2, Intervju 2, linje 162-176)

Lærer 2 mener at integraler er grunnleggende matematikk og derfor burde det enkelt kunne lages problemløsningsoppgaver om det, hvor Lærer 4 hevder at R2 legger mest til rette for rutineoppgaver.

4.4.1 Lærernes forberedte problemløsningsoppgaver

Alle lærerne ble muntlig informert på slutten av første intervju og skriftlig informert etter intervjuet om å forberede to problemløsningsoppgaver til neste intervju, om integraler, se «1.4 Oppgave til neste gang» i Vedlegg I. Den første oppgave er den mest åpne av de to oppgavene de skulle forberede, hvor de fritt kunne finne eller lage selv en problemløsningsoppgave om integraler. Alle lærerne forberedte denne oppgaven, hvor Lærer 3 forberedte to separate. Den andre oppgaven var tydeligere definert ved at de skulle ta utgangspunkt i en rutineoppgave om integraler fra en lærebok og omgjøre den til en problemløsningsoppgave. Det var kun Lærer 2, 3 og 4 som forberedte denne. I slutten av kapittel 4.4.4 oppsummerer jeg lærernes begrunnelser for hvorfor deres første oppgave er en problemløsningsoppgave i en tabell. På tilsvarende måte vil jeg også oppsummere om den andre oppgaven i slutten av kapittel 4.4.7.

4.4.2 Den første oppgaven: Introduksjon og bakgrunn

Det var fire litt ulike fremgangsmåter lærerne hadde da de skulle forberede denne oppgaven. Lærer 1 og Lærer 3 forberedte to oppgaver. Lærer 1 strukturerte det som to deloppgaver (se Vedlegg IV), inspirert av en innlevering vedkommende har benyttet i videreutdanning innenfor matematikk og programmering. Lærer 1 hevder at ved å la elevene arbeide med oppgaver knyttet programmering som en algoritmisk måte å tenke på, så kan det styrke elevene sin evne til å løse problemløsningsoppgaver. Lærer 3 strukturerte det som to separate oppgaver (se Vedlegg VI), og har benyttet disse, og flere lignende oppgaver, tidligere i sin undervisning. Både Lærer 1 og 3 forberedte oppgaver

[5]Et eksempel er normalfordeling, som ikke inngår i pensum til den nåværende R2, men statistiske fordelinger var en del av den tidligere versjonen av R2, kalt 3MX.

som kan oppfattes som virkelighetsnære, reelle, praktiske og relevante til verdensbilde, og ikke bare abstrakte og teoretiske.

Lærer 2 og 4 hentet sine oppgaver fra tilgjengelige ressurser, hvor Lærer 2 fant en oppgave fra del 2 på en tidligere prøve som vedkommende har brukt, som derav tillater digitale hjelpemidler (se Vedlegg V). Lærer 4 fant en oppgave som tidligere har blitt gitt i den Nordiske Matematiske Olympiaden eller Abelkonkurransen (se Vedlegg VII). Lærer 2 har erfart at det ikke er alle elever som er i stand til å sette opp en differensiallikning ut fra en tekstoppgave, så derfor er digitale hjelpemidler som GeoGebra og CAS, men også kunnskap om asymptoter eller egenskapen til en logistisk funksjon, ansett som viktige faktorer. Hintet som er oppgitt i oppgaven til Lærer 4 ble ikke gitt i konkurransen, så det er noe Lærer 4 har inkludert i denne sammenheng. Det er kanskje dette integralet i hintet som originalt kan være utfordrende for en elev å finne, da en sammenligning av summen av en rekke med et integral kan være en løsningsvei.

4.4.3 Den første oppgaven: Kjennetegn på problemløsningsoppgave

Et av hovedargumentene til noen av lærerne på hvorfor deres første forberedte oppgave kan kjennetegnes som en problemløsningsoppgave er at oppgaven ikke ber om en bestemt fremgangsmåte eller at oppgaven ikke kan løses med en gitt formel eller regel. Målet med Lærer 3 sin «Oppgave 2» er å komme frem til en formel, hvor det er flere måter å komme frem til denne formelen på og det er mulig å benytte andre løsningsmetoder enn integralregning. I en litt annen retning ber oppgaveteksten til Lærer 4 elevene eksplisitt om å bruke integralregning for å vise ulikheten. Lærer 4 ser dette som nødvendig, fordi en oppgavetekst uten dette oppgitt hadde ikke gjort det åpenbart for elevene at dette er en oppgave om integral. Grunnen til at Lærer 4 ønsket å presisere at det var krevd integralregning er også fordi jeg eksplisitt etterspurte en problemløsningsoppgave med *integraler*.

Ifølge Lærer 3, er det ikke nødvendigvis vanskelighetsgraden som er en indikasjon på om det er et problem eller ikke: «Det er ikke et problem fordi det er vanskelig. Det er et problem fordi det er flere veier til målet. Det at 'et problem er lik vanskelig', det er jo ikke sånn det er» (Lærer 3, Intervju 2, linje 556-560). Et matematisk problem kan gjenkjennes ved at det er flere løsningsmåter (Björkqvist, 2003; NCTM, 2000, 2014; Niss & Jensen, 2002).

Lærer 1 argumenterer også for at sine to deloppgaver er problemløsningsoppgaver da de tillater flere løsningsveier, men trekker også inn at oppgaven åpner for å trekke inn kjente metoder for elevene:

> [Elevene] har i utgangspunktet ikke en gitt metode og det finnes flere måter å komme frem til et svar på. Jeg tenker det er de to viktigste tingene i forhold til problemløsning, altså at de kan bruke kjente metoder og at det finnes flere veier. (Lærer 1, Intervju 2, linje 355-360)

Lærer 1 og 3 påpeker at tilrettelegging for diskusjon i grupper, samt diskusjon rundt presentasjonene av løsningene i plenum også er viktig. Lærer 1 ville i tillegg bedt elevene skrive sine løsninger på tavlen, slik at alle idéene kommer frem. Dermed kan lærer og elever diskutere og trekke frem ulike deler av hver metode. Dette støtter et sosiokulturelt læringssyn (Skott et al., 2008), samt det språklige aspektet fra definisjonen av problemløsning i LK06 (Udir, 2013). På lik linje påpeker Lærer 3: «Det er bra at de diskuterer, for hvis ikke de diskuterer, så er det ikke sikkert at de ulike løsningsmetodene dukker opp» (Lærer 3, Intervju 2, linje 688-678). I slike diskusjoner bør metodene være i fokus og ikke de ulike løsningene.

Lærer 4 hevder at dersom en elev blir stående fast, da det ikke er en oppgitt hvilken formel eller regel som skal benyttes, så er det mulig å veilede elevene. Eksempelvis på oppgaven til Lærer 4 er det mulig å knytte inn en kobling mellom rekker og integraler: «Det er ikke så lett å finne det integralet. Derfor trodde jeg det kunne være en virkelig vanskelig, men spennende, problemløsningsoppgave, som bygger opp forståelse mellom integral og summen av en rekke» (Lærer 4, Intervju 2, linje 336-338). Lærer 4 hevder også at en slik forståelse, koblingen mellom integral og summen av en rekke, kan knyttes til dybdelæring i R2.

Ifølge Lærer 2, så er det spesifikt d-oppgaven som gjør vedkommende sin oppgave til en problemløsningsoppgave, fordi det er et praktisk problem, som er virkelighetsnært med tanke på overdose. Lære 2 forstår her problemløsningsoppgaver som praktiske og virkelighetsnære problemer. Det som muligens skiller denne oppgaven fra en tradisjonell rutineoppgave er at det ikke er spesifisert hvordan man skal løse deloppgaven, som flere i utvalget også påpeker er en viktig faktor. En rutineoppgave hadde derimot eksplisitt etterspurt noe, ifølge Lærer 2.

Lærer 3 nevner i en begrunnelse av hva som gjør «Oppgave 1» til en problemløsningsoppgave at det forventet at elevene selv lager en modell og finner tall. Elever kan med andre ord lage en modell hvor de undersøker og finner endring av befolkningsvekst over tid fremfor å undersøke endring av folketallet. Avhengig av hvor langt man er kommet i R2, så påpeker Lærer 3 at denne problemløsningsoppgaven kan brukes som en argumentasjon for det temaet som undervises. Med andre ord, oppgaven kan vise elevene hvordan integraler eller differensiallikninger kan brukes i den virkelige verden til å løse reelle problemer. Dette er ikke urimelig, ettersom Lærer 3 først og fremst forstår problemløsningsoppgaver som praktisk orienterte oppgaver (slik det også ble nevnt i kapittel 4.3.2), hvor matematikken har en kontekst, fremfor en teoretisk orientert oppgave.

4.4.4 Den første oppgaven: Eventuelle endringer

Alle lærerne ble spurt om hvordan de kunne gjort oppgavene bedre på noen måte. Dette ble spurt ettersom lærerne kanskje hadde dårlig tid til å forberede oppgavene, noe manglende forståelse for problemløsning eller kom på nye idéer etter at oppgaven ble sendt inn. Svarene de da gir tolker jeg som endringer som gjør oppgaven til mer problemløsningsoppgaver enn den allerede er. Det var i hovedsak tre ulike typer endringer utvalget foreslo til sine oppgaver – fjerne noe fra oppgaven, omformulere oppgaven eller legge til eller forberede noe ekstra til oppgaven.

Det var kun Lærer 1 og 4 som foreslo at noe kunne fjernes fra oppgaven deres. Lærer 1 ville muligens ha fjernet «Oppgave 2», siden en diskusjon rundt enhetene langs førsteaksen kan forekomme i «Oppgave 1», se også Vedlegg IV. Alt dette er avhengig av tiden som er avsatt. Lærer 4 poengterer at vedkommende i utgangspunktet ikke ville gitt hintet til elevene, da den kan «avsløre løsningsveien veldig sterkt» (Lærer 4, Intervju 2, linje 371). Med andre ord, Lærer 4 foreslår å fjerne hintet hvis oppgave skal gis til elevene, siden en fjerning av hintet kan gjøre oppgaven mer åpen og derav mer som en problemløsningsoppgave, se også Vedlegg VII. Lærer 4 påstår at det kan være noen elever som kan klare oppgaven uten hintet. Selv faglig sterke elever kan oppleve frustrasjon med denne eller lignende oppgaver. Grunnen til dette er fordi det ikke er en gitt løsningsvei eller oppgitte formler å ta i bruk for akkurat denne oppgaven, noe flere i utvalget trekker frem i sine begrunnelser.

Lærer 2 og 3 foreslår endring i oppgaveteksten for å forbedre oppgaven. Lærer 2 mener at oppgaven kan forbedres ved å endre a-oppgaven slik at elevene må finne differensiallikningen selv, se Vedlegg V. Vanskelighetsgraden på oppgaven kan derimot varieres avhengig om oppgaven skal brukes på en prøve eller i undervisning. Lærer 3 foreslår å endre problemstillingen på «Oppgave 2» til: «Finn en bedre formel for volumet på to ulike måter» (Lærer 3, Intervju 2, linje 612), se også Vedlegg VI. Ifølge Lærer 3, kan dermed elevene muligens oppleve oppgaven som enklere, da de ikke hadde undret seg og trodd at det kun var én skjult løsningsvei. Ved å be dem finne en formel på to ulike måter indikeres det at det er minst to måter å løse oppgaven på.

Det var kun Lærer 3 som foreslo noe spesifikt å legge til for å forbedre oppgaven, nemlig at elevene burde få tildelt et bilde av en pungstein, for å se at formen er en ellipsoide, som et visuelt hjelpemiddel til «Oppgave 2». På en litt annen side foreslår Lærer 3, i lag med Lærer 1 og 4, å forberede noen ledende spørsmål eller hint som kan gis underveis til elevene når de arbeider med oppgaven. Lærer 1 foreslår eksempelvis tre hint eller ekstraoppgaver, som å lede dem inn på arealbegrepet, å ha en eller flere funksjoner i bakhånd til de elever som blir tidlig ferdig eller be elevene teste ut hverandres metoder og be dem lete eller sammenhenger mellom metodene. Selv om for mange hint eller ledende spørsmål kan redusere graden av problemløsningsoppgave, tolker jeg lærernes tanker om å forberede hint som en veiledning til elever som blir stående fast eller opplever oppgaven som for utfordrende.

Ifølge noen av lærerne i utvalget kan deloppgaver oppfattes som en slags tilrettelegging for elevene, men Lærer 3 og 4 har ingen deloppgaver i sine forberedte oppgaver. Uten deloppgaver kan oppgavene til Lærer 3 og 4 uansett bli ansett som tydelig formulerte og det er klart hva sluttproduktet skal være. Selv hevder både Lærer 3 og 4 at de kunne lagt til noen deloppgaver for å unngå at oppgaven skal bli for utfordrende. Lærer 3 påpeker at deloppgaver kan bli gitt dersom det er forventet at de skal arbeide alene, og ikke i grupper.

En oppsummering av lærernes begrunnelse for hvorfor deres første forberedte oppgave er en problemløsningsoppgave er inkludert i Tabell 2 nedenfor, hvor Lærer 3 sine to separate oppgaver er markert som (1) og (2).

Tabell 2: En kort oppsummering av hvordan lærerne begrunner at deres første forberedte oppgave er en problemløsningsoppgave, samt deres forslag til mulige forbedringer.

	Lærer 1	Lærer 2	Lærer 3	Lærer 4
Begrunnelse	Ikke gitt metode og flere måter å løse den på, men elever kan bruke kjente metoder. Kan knytte inn algoritmisk tenkning, og problemløsning som verktøy.	Ikke spesifisert løsningsmetode og ikke for avslørende, med tanke på fremgangsmåte. d-oppgaven er det praktiske problemet, som er virkelighetsnært. Krever kunnskap om differensial-likninger.	(1) Tillater flere løsningsveier, hvor noen er mer effektive enn andre. Reelt problem og praktisk orientert oppgave – kan også vise anvendelse av differensiallikninger i virkelig verden. (2) Åpen formulert oppgave uten deloppgaver, som tillater mer enn én løsningsvei. Åpen for å løses i flere steg, og flere elementer kan trekkes inn (regresjon, integral, volum osv.). Tillatter antagelser og forenklinger, som strategi.	Flere måter å løse oppgaven på og ikke noe standard formel for å løse oppgaven. Bygger opp under elevers forståelse av integraler og hint, og kan knyttes videre til Riemann sum.
Mulige forbedringer	Forberede flere funksjoner. Be elever teste ut andres metoder. Hint eller veiledning om arealbegrepet. Fjerne «Oppgave 2».	Endre a-oppgaven, til å finne funksjon selv.	(1) Ingen forslag. (2) Endre problemstilling til «Finn formel på to ulike måter», for å hindre én skjult løsningsvei. Inkludere et bilde som visuelt hjelpemiddel.	Fjerne hintet, da dette kan «avsløre» løsningsveien.

4.4.5 Den andre oppgaven: Den originale oppgaven og omgjøringen

Det var i hovedsak to ulike måter Lærer 2, 3 og 4 fant frem den originale oppgaven. Lærer 2 og 3 tok utgangspunkt en vilkårlig oppgave fra læreboken. Prosessen videre bestod i å plotte og se formen på kurven, observere noen av egenskapene som funksjonen hadde og knytte det til noe kjent, hvor for eksempel Lærer 2 knyttet det til koronaviruspandemien som startet i 2019. En liten forskjell mellom Lærer 2 og 3 er at Lærer 2 tar utgangspunkt i en oppgave med tilhørende oppgaveformulering (se Vedlegg V), mens Lærer 3 tar utgangspunkt i et funksjonsuttrykk (se Vedlegg VI). Lærer 4 undersøkte derimot tidligere prøver fra R2 og hadde en idé og ønske om hvilken oppgavetype som kunne passe. Det var nemlig en oppgave som var interessant og der deloppgavene lett kunne fjernes for å kunne lage en problemløsningsoppgave, samt hvor utregning med rekker ville gi et mer eksakt svar i kontekst av oppgaven enn integralregning.

I selve omformuleringen fra en abstrakt definert rutineoppgave valgte Lærer 2 å etterspørre til en viss grad den samme informasjonen som den originale oppgaven. Omdreining og dens geometriske tolkning, samt vendepunktet og dens tolkning, oppfattet Lærer 2 som utfordrende å knytte til en smittesituasjon og ekskluderte dette. På en annen side valgte Lærer 4 å fjerne alle deloppgaver i sin omgjøring, men på lik linje som Lærer 2, valgte også Lærer 4 å rette oppgaven mot en smittesituasjon. Deretter fjernet Lærer 4 selve funksjonsuttrykket og la til «Alternativ», for å kunne bygge en bro til logistisk vekst i R2, se også Vedlegg VII.

Lærer 3 har ingen original oppgave å vise til, da vedkommende opplever at de fleste integraloppgaver er ganske likt utformet og etterspør det samme. Ifølge Lærer 3, er integraloppgaver med slike funksjoner ofte formulert slik at eleven skal arbeide med en funksjon som passer til virkeligheten. Lærer 3 poengterer at på grunn av formen på kurven, så har den mange mulige bruksområder og kan representere flere ulike elementer av virkeligheten, og dermed kan det lages mange ulike typer oppgaver eller problemer. Ved å enten endre konstantene i selve funksjonsuttrykket eller endre verdiene langs aksene, så er det mulig å få kurven til å passe til en situasjon i den virkelige verden.

4.4.6 Den andre oppgaven: Kjennetegn på problemløsningsoppgave

Det er en del usikkerhet blant Lærer 3 og 4 på hva som gjør deres omgjorte oppgave til en problemløsningsoppgave, der eksempelvis Lærer 4 begrunner dette med at vedkommende muligens ikke benyttet nok tid til å forberede oppgaven. Lærer 4 forventer også at noen elever muligens ville problematisert oppgaveteksten. Grunnen til dette er siden oppgaven etterspør en forklaring på en *sammenheng* mellom to størrelser fremfor noe mer spesifikt, som elevene kanskje er mer vant til. Samtidig forventer Lærer 4 at oppgaven gjør det mulig for elevene å gjøre noen forenklinger eller antagelser, ved å eksempelvis finne et stigningstall eller en vekstfaktor, for prosentvis endring hver uke, måned eller år. Lærer 3 hevder at slik oppgaven er presentert nå, så er det ikke så mye som gjør dette til en problemløsningsoppgave, men vedkommende poengterer at noe som kan gjøre det til en problemløsningsoppgave er ved å la elevene finne en funksjon selv. Lærer 3 påpeker at lignende oppgaver i læreboken ofte oppgir funksjonsuttrykket og det er mer tilrettelagt for elevene, mens vedkommende sin oppgave kunne tilbudt en mer utforskende fremgangsmåte.

Lærer 2 hevder at det som gjør vedkommende sin oppgave til en mer problemløsningsoppgave enn den originale oppgaven, er at den originale oppgave er ganske abstrakt, mens nå er oppgaven mer en tekstoppgave. Selv argumenterer Lærer 2 delvis for at den originale oppgaven kan oppleves litt mer utfordrende enn den forberedte oppgaven, da den består av flere deloppgaver og etterspør flere konsepter.

4.4.7 Den andre oppgaven: Eventuelle endringer og utfordringer

For å vurdere om dette er en god oppgave trekker Lærer 2 blant annet inn spørsmål om hvorvidt elevene kan forstå oppgaven og utbytte de kan få av oppgaven:

> Skjønner elevene hva de skal gjøre? Det er punkt nummer en. Får de noe ut av det? Det er punkt nummer to. Ser de hva sammenhengen er mellom matematikken og det som står i oppgaveteksten? Det er kanskje også et punkt. Til slutt, lærer de noe nytt? Altså, forstår de noe videre ut ifra det de har gjort? (Lærer 2, Intervju 2, linje 675-678)

Videre påpeker Lærer 2 at oppgaven er ganske rett frem og ikke krever noe ny kunnskap eller ferdigheter fra elevene. Lærer 2 kommer med to forslag til forbedring, dersom vedkommende skulle gjort dette uten et utgangspunkt i en oppgave. Det første hadde vært å velge en annen funksjon som hadde passet bedre overens med den situasjonen som oppgaven skulle presentere. Det andre er at oppgaven kunne vært gitt som en modelleringsoppgave, der elevene selv kan simulere et forenklet sykdomsutbrudd, og muligens løst det ved differensiallikninger.

Selv om Lærer 3 ikke har en spesifikk oppgavetekst, så hadde det muligens blitt inkludert noen deloppgaver, dersom denne oppgaven skulle gis i en undervisningsøkt. Vedkommende forklarer også at istedenfor å gi elevene et funksjonsuttrykk eller graf, så kunne oppgaven heller vist mange stolper, som i et stolpediagram, som eksempelvis viser daglige eller ukentlige salgstall. Da hadde det blitt et mer reelt problem, ifølge Lærer 3, og det kunne det vært mulig å be elevene bestemme en kurve som passer overens med stolpene. Selv om det ikke er et eksplisitt forslag til endring, så påpeker Lærer 4 en utfordring med å forberede problemløsningsoppgaver. Både den originale oppgaven og problemløsningsversjonen har en «hemmelig» eller skjult fasit:

> Likhetene er jo at jeg har en hemmelig fasit, og kanskje en ekte problemløsningsoppgave ikke skal ha det. (…) Det kan finnes en løsningssti som jeg egentlig ønsker at de bør finne, hvor det finnes en formel eller et uttrykk, mens med en ekte problemløsningsoppgave kan det være usikkert om du finner en løsning når det kanskje er 17 forskjellige løsninger. (…) Derfor synes jeg det ofte er litt vanskelig å lage en problemløsningsoppgave. (Lærer 4, Intervju 2, linje 604-614)

Både den originale oppgaven og problemløsningsversjonen som Lærer 4 har forberedt har i utgangspunktet én gitt løsning. En ekte problemløsningsoppgave burde har flere løsninger og derfor opplever Lærer 4 det som utfordrende å lage problemløsningsoppgaver. En oppsummering av de tre lærernes begrunnelser for hvorfor deres andre forberedte oppgave er en problemløsningsoppgave er inkludert i Tabell 3 nedenfor.

Tabell 3: En kort oppsummering av hvordan lærerne begrunner at deres andre forberedte oppgave er en problemløsningsoppgave, samt deres forslag til mulige forbedringer.

	Lærer 2	**Lærer 3**	**Lærer 4**
Begrunnelse	Den originale oppgaven er ganske abstrakt, mens nå er den mer en tekstoppgave, selv om oppgaven fortsatt etterspør mye av den samme informasjonen. Den har nå færre deloppgaver, og derfor kan den originale anses som vanskeligere, siden det er mer som skal finnes/løses.	Det er ikke så mye som gjør dette til en problemløsningsoppgave. En rutineoppgaveversjon av en slik oppgave er mer veiledende for elever, mens denne krever mer utforsking. Elever kan arbeide med funksjon som passer til virkeligheten, spesielt siden formen av kurven kan knyttes til flere bruksområder.	Ingen deloppgaver. Det er ikke spesifisert fremgangsmåte eller spesifisert hva elever skal finne. Oppgaven omhandler en dagsaktuell situasjon. Forventes at elever bør gjøre antagelser for å løse den.
Mulige forbedringer	Velge en annen funksjon som bedre representerer et sykdomsutbrudd. Oppgaven kunne også blitt gjennomført som en modelleringsoppgave. Det viktigste er om elevene forstår oppgaven, at de får et utbytte og om de knytte oppgaveteksten til matematikk.	Inkludere flere deloppgaver. Be elevene finne en funksjon selv. Presentere situasjonen med stolper, med eksempelvis salgstall, for å gjøre det til et mer reelt problem.	Både den originale oppgaven og problemløsningsversjonen har en skjult fasit, noe ekte problemløsnings-oppgaver kanskje ikke burde ha. Oppgaven burde derfor tillatt flere løsninger.

5 Diskusjon

Hensikten med denne oppgaven er å forsøke å besvare problemstillingen: *Hvordan er sammenhengen mellom fire R2-læreres forståelse av problemløsning og deres utforming av problemløsningsoppgaver med integraler?* Med utgangspunkt i to intervjuer av hver lærer har jeg også undersøkt tre underspørsmål for å lettere kunne besvare problemstillingen:

- Hva kan være viktige faktorer i undervisning av integraler?
- Hva er problemløsning og problemløsningsoppgaver?
- Hva kjennetegner lærernes forberedte oppgaver som problemløsningsoppgaver?

I dette kapittelet vil det trekkes frem noen av de viktigste funnene fra prosjektet og ved å benytte begreper og sammenhenger fra litteraturen på datamaterialet er ønske å kunne besvare oppgavens problemstilling. Først vil jeg presentere de viktigste funnene fra analysen av utvalgets tanker og erfaring med undervisning av integraler i R2 og deretter drøfte det mot første underspørsmål. Utvalgets forståelse av problemløsning og problemløsningsoppgaver vil deretter diskuteres, først og fremst mot min avgrensning av begrepene (se kapittel 2.3.5), knyttet til det andre underspørsmålet og som et hovedgrunnlag for å besvare problemstillingen. Deretter vil utvalgets forståelse av problemløsningsoppgaver, i lys av deres forberedte problemløsningsoppgaver med integraler, diskuteres mot oppgavens siste underspørsmål og knyttes til problemstillingen. Selv om det i resultatene presenteres hvordan lærerne gjenkjenner en god problemløser, så vil ikke dette bli eksplisitt diskutert. Det vil heller bli trukket inn mot lærernes forståelse av problemløsning og mulige problemløsningsstrategier, samt som et mulig mål med problemløsning i skolen. Avslutningsvis ser jeg det nødvendig å drøfte mine valgte metoder og hvordan prosessen, samt kvaliteten på innsamlede data fra lærerne gjennom metodene, kan ha påvirket oppgavens analyse og resultater.

5.1 Undervisning av integraler i R2

Utvalgets refleksjoner rundt undervisning av integraler i R2 er belyst ved å undersøke hvilke forkunnskaper lærerne forventer av elevene i møte med integraler og hvordan dette kan påvirke elevenes forståelse av integraler. Videre vil det derfor diskuteres hvordan lærerne ser på derivasjon som en forventet forkunnskap i møte med integrasjon og hvordan arbeid med integraler ofte bærer preg av å være algebraisk. Til slutt drøftes det hvordan lærerne anser R2 som et sammenhengende fag og hvordan lærerne knytter inn bruksområder i gjennomgangen av temaet.

5.1.1 Derivasjon som forventet forkunnskap i R2

Med tanke på forkunnskaper hevdes det at elever ikke kan forventes å forstå derivasjon uten å ha kjennskap til grenseverdier og elevene ikke kan forventes å forstå integrasjon uten å kjenne til derivasjon (Mahir, 2009, s. 202). Derfor kan derivasjon anses som en viktig forkunnskap i møte med integraler (Dragoo, 1945), noe også utvalget var samstemte i. Lærerne hevder derfor at en repetisjon og kobling til derivasjon er nyttig i starten av integraltemaet, der blant annet Lærer 3 og 4 påpeker at en elev som behersker derivasjonsreglene kan enklere beherske integrasjonreglene, hvor de forstår integrasjonsprosessen som en «baklengs» derivasjon.

For elever kan dermed integrasjon også forstås som en inversoperasjon til derivasjon (Bressoud, 1992, s. 296), hvor eksempelvis Lærer 1, i starten av integraltemaet, gir elevene sine et sett med funksjoner som de skal arbeide med for å finne ut hvilken funksjon som kan ha blitt derivert for å ende opp slik. Dette tolker jeg til å være direkte knyttet til hvordan Jones (2013, s. 130) påpeker at flere elever kan oppleve integranden som en ferdig derivert funksjon, og at målet med integral dermed kan være å «match it back to the *original* function from whence it came». Med andre ord, sett fra et konstruktivistisk læringssyn kan elever spesielt i en introduksjonsfase benytte kjente skjemaer (Skott et al., 2008) for å koble integraluttrykket til kjente deriverte funksjoner de har sett før.

Både Orton (1983, s. 10) og Bressoud (1992, s. 296) påpeker at noen lærere dermed velger å introdusere integrasjon som en regel, som en anti-derivasjon, der integrasjonsprosessen kan forstås som utførelsen av regler. I LK06 skilles det også mellom et bestemt integral som en sum og et ubestemt integral som en *antiderivert* (Udir, 2006). Det å kunne se på integrasjon som en antiderivasjon, tolker jeg som en kobling mellom nye konsepter til tidligere kjente konsepter (Orton, 1983, s. 10), ettersom at et kjennetegn med kalkulus er at det bygges nye konsepter opp ved å bruke tidligere etablerte konsepter (Mahir, 2009).

Derivasjon som en forkunnskap til integrasjon eller integrasjon som en inversoperasjon til derivasjon er ofte med i introduksjonsfasen av integraler (Bressoud, 1992; Orton, 1983). Det kan derfor være vanskelig å trekke noen slutninger om hvordan derivasjon som en forkunnskap kan henge sammen med hvordan lærerne forbereder og forventer at elever senere løser problemløsningsoppgaver innenfor temaet. Grunnen til dette er at jeg jeg ikke tolker det passende å gi elevene lærernes forberedte oppgaver i en introduksjonsfase. Flere av oppgavene etterspør teknikker og konsepter som gjerne introduseres etter integrasjon, slik som differensiallikninger og muligens rekkesum. Det er derimot mulig å tolke det slik at eksempelvis Lærer 1 sin forberedte oppgave kan benyttes tidlig i undervisning av integraler, ettersom det er en enkel lineær funksjon, som kan rettes mot arealbegrepet og knyttes til virkeligheten.

På en side hevder blant annet Lærer 3 at problemløsningsoppgaver bør gis i starten av et tema for å gi elevene et innblikk i hvilke problemer de kan være i stand til å løse etter hvert. Dette tolker jeg derfor som en situasjon hvor derivasjon som forkunnskap kan trekkes inn. En tidlig kobling mellom derivasjon og integrasjon kan være viktig, ettersom problemløsning også kan knyttes til heuristikk, der det å løse et problem bygger på tidligere erfaringer, forkunnskaper og utviklede strategier (Mamona-Downs & Downs, 2008; Pólya, 2009). På en annen side hevder Lærer 4 at en for tidlig introduksjon av problemløsningsoppgaver kan skape frustrasjon hos elevene. Jeg tolker Lærer 4 sin uttalelse som at elever muligens ikke har utviklet strategier for å løse integralproblemer eller ikke klarer å knytte problemer til forkunnskaper, som derivasjon.

5.1.2 En algebraisk fremfor grafisk tilnærming

Et problem med introduksjon av integral og vektleggingen av det som en anti-derivasjon er at undervisningen dermed kan etterstrebe en algebraisk tilnærming i for stor grad fremfor en mer grafisk fremstilling (Dawkins & Epperson, 2014, s. 879). Dette er også noe Lærer 2 påpeker, hvor vedkommende (er den eneste) som ytret et mulig kjennetegn på integral som tema, hvor det delvis kan bære preg av at det er algebraisk, og da med tanke på de funksjonsuttrykkene elevene må arbeide med. Flere i utvalget impliserer lignende erfaring med det samme problemet, hvor de erfarer at elever kan forveksle regler for derivasjon og integrasjon. Grunnen til denne forvekslingen tolker jeg kommer av hvordan integraltemaet kan introduseres algebraisk, og at det dermed kan være et større fokus på regler og formler fremfor en grafisk eller geometrisk tolkning. Elever kan derfor enklere utvikle en instrumentell forståelse (Skemp, 2006) med tanke på integrasjonsteknikker, fremfor en mer konseptuell forståelse av selve prosessen og konseptet (Mahir, 2009; Orton, 1983).

Denne utviklingen av instrumentell fremfor konseptuell forståelse innenfor integraltemaet kan være rimelig å anta, ettersom Lærer 1 forteller om en annen utfordring elever kan møte på med integraler. Det er ikke ofte elever tenker over løsningen de kommer frem til etter en integrasjonsprosess. Med andre ord, elever gjør ikke en vurdering og undersøker om den deriverte av løsningen de får gir det originale funksjonsuttrykket. Dette er i tråd med hvordan elever kan se integranden som en derivert av et originalt uttrykk (Jones, 2013). Dette tolker jeg kan være en mulig viktig faktor som bør tas hensyn til med problemløsning i undervisningen. Grunnen til dette er spesielt med tanke på hvordan Polya (2009) i sitt fjerde steg vektlegger det å se tilbake på problemet, ved å undersøke løsningen og være kritisk til løsningen og løsningsmetoden som er benyttet. Det er altså mulig å tolke det slik at lærerne oppfatter elever til å forvirre integrasjons- og derivasjonsregler, og ikke vurdere løsningen, som et vanlig problem innenfor integrasjonstemaet. Dette kan derfor påvirke hvordan elever senere arbeider med problemløsningsoppgaver innenfor temaet, hvor det å se tilbake og vurdere løsningen er en viktig del av problemløsningskompetansen (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987; Pólya, 2009; Udir, 2013, 2021).

Flinke elever benytter heller mer algebraiske metoder fremfor metoder fra kalkulus for å angripe problemer, selv om elevene er kjent med konsepter fra kalkulus for å løse problemer (A. Selden et al., 2000; J. Selden et al., 1989; J. Selden et al., 1994). Jeg tolker derfor at forberedelser og utforming av en problemløsningsoppgave om integraler bør ta hensyn til at elever i en problemløsningsprosess kan være mer oppmerksomme på å utføre utregninger eller generelle prosedyrer på riktig måte, fremfor å knytte problemet til kjente konsepter og senere vurdere løsningen. Dette stemmer også overens med Krueger et al. (2008) som finner at elever som løser oppgaver om mer sofistikerte matematiske konsepter, som integral, ofte bruker løsningsalgoritmer og grunnleggende utregninger.

På en annen siden vil jeg gjerne påpeke at oppgaver fra blant annet Lærer 1, 2 og 3 eksplisitt etterspør grafiske tolkninger, og ikke kun algebraiske løsningsmetoder. Det kan derfor tolkes som at disse lærerne kan ha tatt hensyn til denne algebrapreferansen hos elever, og heller tilrettelagt for en mer grafisk tilnærming knyttet til virkeligheten. Derfor vil jeg i de to neste delkapitlene også drøfte to viktige faktorer. Den første er hvordan R2 kan anses som et sammenhengende fag og den andre er ulike bruksområder til integral. Dette kan være muligheter for å la elevene se nytten av integral, fremfor å kun lære å bruke løsningsteknikker som kan være algebraisk preget.

5.1.3 R2 er et sammenhengende fag

I både den gjeldende læreplanen for R2 fra LK06 og den kommende fra LK20, er det et fokus på integral som en grenseverdi og dens tolkninger, anvendelse av integrasjon til å analysere og tolke funksjoner og modeller og anvendelse av integrasjon til beregning av arealer og volum (Udir, 2006, 2021). Differensiallikninger er også gitte kompetansemål i R2 fra LK06 (Udir, 2006) der integralregning er løsningsteknikker. Integrasjon innehar altså flere egenskaper, som også blant annet Bressoud (1992) og Dragoo (1945) påpeker. Bressoud (1992) hevder derfor at elever kan bli forvirret, siden de møter på de ulike aspektene med integraler på ulike tidspunkt.

På en annen side hevder Lærer 1 og 4 at R2 er et sammenhengende fag, spesielt sammenlignet med R1, mye grunnet at integraler er et gjennomgående og sentralt tema i R2. I R2 blir elever trinnvis introdusert og kjent med integraler, hvor de først blir opplært i ulike integrasjonsregler for ulike funksjoner, deretter integrasjonsmetoder og etter hvert ulike bruksområder til integraler, som eksempelvis differensiallikninger. Slik jeg tolker det kan det hende at R2 i Norge, som i stor grad omhandler integraler, er et mer sammenhengende fag eller annerledes bygget opp, sammenlignet med noen av de kalkulusfagene som flere i litteraturen henviser til (Allen, 2001; Bressoud, 1992; Dawkins & Epperson, 2014; Dragoo, 1945; Jones, 2013; Mahir, 2009; Orton, 1983; A. Selden et al., 2000; J. Selden et al, 1989; J. Selden et al., 1994; Sofranos et al., 2011; Strang, 1990).

Slik jeg forstår utvalget er det, til en viss grad, mulig å forvente at de fleste elever behersker integralregning i slutten av faget, grunnet sammenhengen i faget. Jeg tolker også at dette kan påvirke hvordan lærerne forbereder problemløsningsoppgaver i temaet, da de forventer at elever har en viss kontroll i faget, spesielt dersom oppgavene gis senere i faget. Det er derimot usikkert om Lærer 1 og 4 viser til sammenhengen i faget med tanke på en utvikling av instrumentell forståelse eller om elevene også kan oppnå en mer konseptuell forståelse. Med tanke på hvordan lærerne utformer en problemløsningsoppgave, kan en viktig faktor være hvorvidt oppgaven krever konseptuell fremfor instrumentell forståelse, spesielt siden undervisning av integraler ofte vektlegger instrumentell fremfor konseptuell forståelse (Mahir, 2009; Skemp, 2006; Orton, 1983). Et eksempel, som jeg også vil drøfte i kapittel 5.3.3, er hvordan flere av lærerne fjernet deloppgaver fra den originale oppgaven for å omgjøre den til en problemløsningsoppgave. Dette tolker jeg kan tilrettelegge mer for en konseptuell forståelse, ettersom oppgavene i mindre grad etterspør å regne ut noe spesifikt, hvor en instrumentell forståelse kunne vært avgjørende.

5.1.4 Integralets bruksområder og relasjoner til virkeligheten

Med tanke på integralets ulike egenskaper og bruksområder, kan det være relevant å drøfte hvordan undervisning knytter inn integralets bruksområder ettersom det kan være noe som påvirker innholdet i problemløsningsoppgaver om temaet. Lærer 3 mener at det er lettere å knytte integrasjon til virkeligheten ved å se på det som en summeringsprosess ved å summere noe over tid, som kan forstås om en kobling fra v til f ifølge Strang (1990). Samtidig kan også bestemte integral lettere forstås geometrisk enn som en summeringsprosess (Dragoo, 1945, s. 192). Lærer 3 nevner også at det kan være nyttig å koble integraler til beregninger av mer avanserte areal eller volum, selv om det også kan bli sett på som en summeringsprosess. På en litt annen side nevner Lærer 1 at det kan være enklere å knytte derivasjon enn integrasjon til virkeligheten, ettersom elever kan ha mer erfaring med fart eller akselerasjon, som er direkte knyttet til Strang (1990) sin relasjon mellom f og v. Utvalget hevder uansett at undervisning bør relatere integrasjon til hverdagslige eller virkelighetsnære situasjoner eller problemer, som kan løses ved hjelp av integrasjon. På lik linje med utvalget har Bressoud (1992, s. 296) et forslag om en mer praktisk tilnærming, der introduksjon av integraler bør ta utgangspunkt i å først finne arealer. Det er eksempelvis mulig å se i den forberedte oppgaven til Lærer 1 i Vedlegg IV at vedkommende legger til rette for at elever skal finne et areal i tråd med Bressouds (1992) anbefaling.

I en bekymring om undervisning av kalkulus, og derav integraler, stiller derfor Bressoud (1992, s. 296) spørsmål om hvordan elevene vil bruke de ulike konseptene utenfor skolen, og hvordan lærere og skolen kan forberede dem på den nødvendige overføringen. Bressoud poengterer at integral som en grenseverdi av en Riemann sum ikke kommer til å være en prioritet, men at elevene kommer til å bruke integralregning til å løse differensiallikninger. Med andre ord, elevers bruk av integraler vil inkludere en retning fra kunnskap om den deriverte av en funksjon tilbake til det den er derivert fra (Bressoud, 1992; Jones, 2013). Det er her Bressoud (1992) hevder at prioriteten bør være i undervisningen. Ved å prioritere undervisning av integraler i en retning av bruksområder utenfor skolen, tolker jeg det som at undervisning av integraler også kan tilrettelegge for problemløsning. Grunnen til dette er fordi Björkqvist (2013) forbinder problemløsning med muligheter for å løse fremtidige problemer med kunnskaper fra skolen. En undervisning av integralets bruksområder kan derfor inkludere problemløsning og problemløsningsoppgaver rettet mer mot virkeligheten og fremtiden, ettersom problemløsning bør være en integrert del av matematikklæringen fremfor en isolert del (Leong & Janjaruporn, 2015, s. 646).

Flere av lærerne i utvalget trekker også inn fagfelt som kan knyttes til integraler, som eksempelvis økonomi, meteorologi eller fysikk. Dette er noe jeg tolker Bressoud (1992) hadde vært enig i, da det er den praktiske nytten og meningen som bør komme frem i undervisning av kalkulus. Noe interessant jeg også vil trekke frem er at alle lærerne i sine forberedte oppgaver trekker inn en praktisk nytte med integraler gjennom virkelighetsnære problemer knyttet til sykdomsutbrudd, smittetall eller vaksinering. På lik linje med Bressouds (1992) spørsmål om elevers bruk av integral utenfor skolen trekker flere i utvalget, både før og underveis i gjennomgangen av de forberedte problemløsningsoppgavene, differensiallikninger inn som et hovedeksempel på et bruksområde elever bør vite om integraler. Flere hevder også at differensiallikninger til en viss grad er sluttproduktet i R2, som også kan knyttes til den klare sammenhengen i faget som flere i utvalget påpeker. Differensiallikninger kan derfor være en mulig faktor som påvirker flere i utvalget sine forberedelser av problemløsningsoppgavene. Eksempelvis er noen oppgaver, fra blant annet Lærer 2 og 3, eksplisitt gitte som differensiallikningsoppgaver knyttet til den virkelige verden, se Vedlegg V og VI. Det kan være positivt, ettersom at elever kan sette pris på å se anvendelser av integraler (Allen, 2001).

5.2 Problemløsning og problemløsningsoppgaver

For å kunne vurdere hvordan utvalgets forståelse av problemløsning henger sammen med deres forberedte problemløsningsoppgaver, vil jeg først diskutere et utgangspunkt i hvordan utvalget forstår og eksplisitt forklarer begrepet problemløsning. Deretter vil jeg diskutere hvordan de forstår en problemløsningsoppgave, hvor jeg også vil kort knytte inn hvordan lærerne oppfatter integrasjonsoppgaver i R2. Før kapittel 5.3 om «Problemløsning og integraler» vil det derfor diskuteres hvordan utvalget eksplisitt forklarer disse begrepene i det første intervjuet, samt i løpet av repetisjonsspørsmålene i det andre intervjuet *før* de forklarer og presenterer de forberedte problemløsningsoppgavene. Se også oppsummeringen i Tabell 1 som et utgangspunkt for deres forståelse av problemløsningsoppgave.

5.2.1 Begrepet problemløsning

Problemløsning kan knyttes til de strategier, forkunnskaper eller tidligere erfaringer som er nødvendige eller tidligere brukt for å løse problemer (Liljedahl et al., 2016; Mamona-Down & Downs, 2008; Pólya, 2009). Lærer 3 forstår på lik linje problemløsning først og fremst som å anvende kjent matematikk, som kan forstås som å aktivere forkunnskaper og Lærer 4 påpeker noe lignende om at problemløsning er en måte å aktivere læring på. Tankene til Lærer 3 og 4 om aktivering av tidligere kunnskap og læring kan passe inn med Pólyas (2009) heuristikk, samt en kobling til matematisk kompetanse og hvordan problemløsning bli behandlet i LK20, som blant annet inkluderer å bruke matematikk i ulike sammenhenger (Kunnskapsdepartementet, 2020; Nortvedt & Pettersen, 2016; Udir, 2019, 2021). Lærer 4 hevder mer generelt at problemløsning kan støttes av et konstruktivistisk læringssyn. Slik jeg tolker Lærer 4 er dette fordi eleven aktivt i problemløsningsprosessen må enten bruke tidligere kjente skjemaer og knytte problemet til tidligere erfaringer eller forkunnskaper, som en assimilasjon, eller bygge nye skjemaer som en akkomodasjon i møte med nye og ukjente problemer (Skott et al., 2008).

Både lærer 3 og 4 poengterer direkte at problemløsning ikke kun finnes i matematikk, men at andre fagfelt, vitenskaper eller situasjoner også kan ha problemer som må løses, der også Lærer 3 poengterer at problemløsning heller ikke er et særnorsk fenomen. Lærer 3 trekker eksempelvis inn problemer som kan oppstå i politikken og Lærer 4 nevner Newton og tyngdekraften. Slik problemløsning med tilhørende reelle problemer kan tolkes inn i det tredje temaet til Stanic og Kilpatrick (1988), referert i Schoenfeld (1992,

s. 338), hvor problemløsning kan anses som kjernen i matematikk og at tilhørende problemer kan være vanskelige eller utfordrende (Schoenfeld, 1992, s. 337), noe Lærer 4 kaller ekte problemløsning.

Lærer 3 påpeker også at problemløsning er en mer «A til Å oppgave» (Lærer 3, Intervju 2, linje 141), der jeg tolket dette kort i kapittel 4.3.1, men vil gjerne trekke det frem igjen. På en side tolker jeg Lærer 3 sin uttalelse som at problemløsning er en matematisk kompetanse og indikerer flere steg enn å bare være en ferdighet, men at et problem kan deles opp og løses i flere steg (Udir, 2018, 2021). Jeg tolker det slik ettersom Pólya (2009, s. 8) hevder at idéen eller planen om hvordan løse et problem bør være et mål med å løse et problem. På en annen side er det også mulig å tolke Lærer 3 i en retning av at vedkommende forstår problemløsning i lys av de problemer som skal løses, der jeg i det neste delkapittelet vil diskutere et relevant og interessant funn.

5.2.2 Problemløsning som en oppgave

Da lærerne ble spurt om deres forståelse av begrepet problemløsning, var det flere som svarte og kom med eksempler oppgaver eller forklarte problemløsning synonymt med en problemløsningsoppgave. Dette oppfatter jeg som et interessant funn som muligens ikke kan knyttes direkte til problemstillingen, men som indirekte kan si noe om hvordan de forstår problemløsning. På lik linje med Lærer 3 sin uttalelse fra forrige avsnitt, er et annet eksempel Lærer 4 som sier at «Problemløsning er oppgaver som får deg til å tenke» (Lærer 4, Intervju 1, linje 296). Dette er et interessant og tydelig sitat fra Lærer 4 som har inspirert min undertittel på masteroppgaven.

Det kan også være interessant å påpeke at noe litteratur om temaet også beskriver eller definerer et problem for å kunne beskrive eller drøfte hva problemløsning er (se eksempelvis Barkatsas & Hunting, 1996; Björkqvist, 2003; Niss & Jensen, 2002; Schoenfeld, 1992). Det er dermed ikke urimelig at lærerne også først og fremst forstår problemløsning med utgangspunkt i problemene. Dette er kanskje ikke et overraskende funn ettersom problemløsning ofte kan sees i en kontekst og kan benyttes for å oppnå andre mål, som en rettferdiggjøring av å undervise matematikk eller for å utvikle noen ferdigheter knyttet til løsningsteknikker (Schoenfeld, 1992, s. 338). Derfor er det rimelig at flere i utvalget derfor knytter begrepet problemløsning til de problemene som skal løses.

Det er også mulig å tolke lærernes forståelse av «problemløsning som en oppgave» i forbindelse med de de strategier, forkunnskaper eller tidligere erfaringer som er brukt for å løse problemer, som kan være grunnlaget i en problemløsningsprosess (Liljedahl et al., 2016; Mamona-Down & Downs, 2008; Pólya, 2009). Dersom man sier seg enig med Pólyas (2009) forståelse av matematikk som en aktivitet er det heller ikke urimelig at lærerne ser problemløsning i lys av problemene. Siden problemløsning kan bli sett på som en praktisk ferdighet som kan erverves ved å imitere og øve, kan det jo tolkes som at oppgavene som skal løses er sentralt i denne prosessen. Selv i læreplanene er problemløsning knyttet til det å finne, formulere, analysere eller omforme og til slutt løse et problem (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1984; Udir, 2013, 2021). Med andre ord, selve det matematiske problemet kan tolkes som sentralt i problemløsning som kompetanse, metode eller ferdighet.

På en annen side bør det poengteres at problemløsning er mer enn bare de problemene som skal løses og at jeg gjerne legger for mye i det at noen av lærerne sier at «problemløsning er en oppgave». Problemløsning er som sagt en matematisk kompetanse, samt at det kan bli ansett som en ferdighet (Niss & Jensen, 2002; NCTM, 2000; Pólya, 2009; Schoenfeld, 1992; Udir, 2021). Problemløsning kan også forstås til å være på et høyere nivå enn bare det å løse et problem, ettersom elever også kan bygge, utvide og bekrefte matematisk kunnskap gjennom problemløsning (NCTM, 2000, s. 52), der også eksempler til matematiske konsepter kan introduseres gjennom problemløsning (NCTM, 2000, s. 52; Schoenfeld, 1992, s. 338).

Det bør poengteres at denne forståelsen lærerne uttrykker, ikke vil være så lett å drøfte i sammenheng med deres utforming av deres problemløsningsoppgaver. Grunnen til dette er fordi lærerne har fått eksplisitt beskjed om å utforme en problemløsnings*oppgave*. Det kan dermed være utfordrende å trekke noen slutninger om hvordan deres tidlige forståelse av problemløsning kan være i sammenheng med deres forståelse av et problem, selv om det har relevant som et innblikk i deres forståelse av problemløsning. Jeg velger derfor å ikke trekke noe videre slutning om lærernes ytterligere forståelse av begrepet problemløsning som et utgangspunkt til videre diskusjon, ettersom datamaterialet kun er basert på to intervju med hver lærer, som varte i omtrent 45-60 minutter hver. Flere eller lengre intervju kunne resultert i mer utdypende eller ytterligere forklaringer på problemløsning fra informantene. Jeg vil derfor i de neste delkapitlene ta for meg deres forståelse av problemløsningsoppgaver.

5.2.3 Utvalgets forståelse av problemløsningsoppgaver

I motsetning til at få lærere kom med eksplisitt forklaring på begrepet problemløsning, var det derimot flere tanker om problemløsningsoppgaver. Med utgangspunkt i definisjonen av problemløsningsoppgave som ble lagt frem i kapittel 2.3.5, tolker jeg at de fleste i utvalget til en viss grad forstår det på lik måte. Eksempelvis nevner Lærer 1 at problemløsningsoppgaver skal inkludere noe ukjent og at det ikke skal være en spesifikk fremgangsmåte, som jeg tolker som at problemet også tillater flere løsningsmetoder- eller veier. Selv om jeg forstår Lærer 1 som at problemløsningsoppgaver er oppgaver med uklar løsningsmetode og at det kan dermed være flere løsningsveier, erfarer derimot Lærer 3 at inngangsterskelen på slike problemer dermed kan oppfattes ulikt blant ulike elever. Erfaringen til Lærer 3 er rimelig, ettersom at oppfattelsen av et problem som et problem eller rutineoppgave kan variere mellom ulike elever (Angell et al., 2019; Björkqvist, 2003; Niss & Jensen, 2002; Skott et al., 2008; NCTM, 2000).

På en litt annen side har Lærer 4 erfaring med at elever *kan* akseptere at problemløsningsoppgaver ikke har én standard formel eller regel som kan løse oppgaven. I arbeid med Thinking Classroom, erfarte Lærer 4 at elevene aksepterte at oppgaven ikke hadde en gitt løsningsvei, ettersom Lærer 4 introduserte og ga forventninger om at det er slik. Samtidig er jeg usikker på om dette alltid vil gjelde, ettersom Lærer 4 baserer det på én økt i R2, hvor parameterne for denne aktiviteten kan være avgjørende eller viktige faktorer. Eksempelvis kaller Lærer 4 Liljedahl sine problemer for «enhjørninger», ettersom vedkommende oppfatter Liljedahl sine problemer som virkelige gode og sjeldne problemløsningsoppgaver. Videre poengterer Lærer 4 at problemer kan presenteres muntlig til elevene for å sikre at elevene har forstått oppgaven, men at dette ikke nødvendigvis er et krav for problemløsningsoppgaver dersom oppgaven kan bli for kompleks å legge frem muntlig. Det bør poengteres igjen at Lærer 4 henviser til vedkommendes erfaring med problemløsningsoppgavene gjennom «Thinking Classroom», som krever en muntlig presentasjon av oppgaven.

I grenseland mellom begrepene problemløsning og problemløsningsoppgaver var Lærer 2 ganske opptatt av at elevene burde forstå problemløsningsoppgaven og at den skriftlige formuleringen av oppgaven dermed er noe av det viktigste i starten. Dette er direkte knyttet til det første steget til Pólya (2009), som er å forstå problemet og bestemme det ukjente. Samtidig argumenterer Schoenfeld (1992) for at Pólyas heuristikk er for enkel, hvor problemløsningsheuristikker er personlige og avhengig av problemløserens forkunnskaper og forståelse av problemet (Liljedahl et al., 2016, s. 15). Med andre ord, problemene en person kan løse gjennom heuristikk er begrenset. Det er derfor mulig å tolke Lærer 2 som at en tydelig skriftlig formulering av en problemløsningsoppgave kan og bør muliggjøre at flest mulig forstår problemet og kan angripe det, selv om eleven kanskje ikke er i stand til å løse problemet.

Videre poengterer Lærer 2 at selv om elevene har forstått oppgaven, så er det ikke sikkert at elevene kommer på eller har lært en løsningsstrategi for et slikt problem. Etter at problemet er forstått, må de kjente matematiske begrepene eller prosedyrene tas i bruk for å løse problemet (Nortvedt & Pettersen, 2016, s. 109), og slik jeg tolker Lærer 2 kan det hende at det er på dette punktet elever kan stoppe opp. Lærer 1 påpeker også, på lik linje med Pólyas (2009) andre steg, at en løsningsstrategi derfor bør være å knytte problemet til en kjent sammenheng. Dette kan også knyttes til det lærerne hevder er en god problemløser, hvor Lærer 4 nevnte at et kjennetegn kan være evnen til å aktivere kunnskap. Dette indikerer at formuleringen av en problemløsningsoppgave og dens mulige løsningsmetoder bør være kjent for elevene og kunne knyttes til elevers forkunnskaper om begreper, fakta eller prosedyrer.

5.2.4 Rutineoppgave og problemløsningsoppgave

For å kunne tydeligere få frem lærernes forståelse av en problemløsningsoppgave, ble lærerne spurt om deres oppfatning av ulikhetene mellom en problemløsningsoppgave og en rutineoppgave, samt at den andre forberedte oppgaven skulle ta utgangspunkt i en oppgave fra boken som kan tolkes som en rutineoppgave. Her vil jeg også trekke inn deres oppfatning av integraloppgaver i R2, ettersom lærerne i hovedsak trekker frem to ulike typer integrasjonsoppgaver: abstrakte rutineoppgaver og tekstoppgaver. Flere i utvalget hevder at problemløsningsoppgaver skiller seg fra tradisjonelle rutineoppgaver først og fremst ved at oppgaven åpner for flere løsningsveier, som nevnt tidligere. Lærer 3 poengterer også at tradisjonelle rutineoppgaver, som ofte er funnet i lærebøker, krever mer instrumentell forståelse, mens problemløsningsoppgaver krever mer utforskning.

Rutineoppgaver kan som sagt bli sett på som innlærende oppgaver som kan lære en løsningsteknikk, hvor vanlige opplegg er å introdusere en type oppgave, vise hvordan den kan løses og deretter be elever utføre den samme prosedyren på flere like oppgaver (Björkqvist, 2003; Schoenfeld, 1992, s. 337). Ifølge lærerne vil et kjennetegn på slike abstrakte eller tradisjonelle rutineoppgaver, spesielt om integraler, være at oppgavene består av flere deloppgaver, som veileder elevene på en løsningsvei. Lærer 3 påpeker blant annet en mulig konsekvens ved å kun arbeide med rutineoppgaver. Elever som kun arbeider med rutineoppgaver, kan finne det utfordrende i møtet med problemløsningsoppgaver. Denne konsekvensen tolker jeg som at elever ikke har hatt mulighet til å utarbeide strategier for å løse ukjente problemer, som kan være en viktig del av problemløsning (NCTM, 2000), ettersom rutineoppgaver ofte oppgir hvilke metoder eller regler som skal benyttes.

Et annet skille mellom rutine- og problemløsningsoppgaver kommer frem i et forslag fra Lærer 4. Vedkommende hevder at det er mulig å lage en problemløsningsoppgave ved å fjerne støttestrukturene i en rutineoppgave, med andre ord, de første deloppgavene. Da blir oppgaven kortere formulert, men kan kreve like mye arbeid som før, men nå uten den tilretteleggingen som de første deloppgavene vanligvis er. Men om det å gjøre en oppgave mer utfordrende tilsvarer å gjøre den til en problemløsningsoppgave, hadde nok ikke Lærer 3 vært enig i, ettersom vedkommende forteller at vanskelighetsgraden ikke er en indikasjon på om det er et problem eller ikke. Dette er også i tråd med hvordan en problemløsningsoppgave kan anses som individrelatert og kan oppfattes ulikt blant ulike individer (Angell et al., 2019; Björkqvist, 2003; NCTM, 2000; Niss & Jensen, 2002; Skott et al., 2008), hvor jeg også anser vanskelighetsgrad som individrelatert.

Som tidligere nevnt, er et kjennetegn på en problemløsningsoppgave at oppgaven tillater flere løsningsveier, noe utvalget også trekker frem flere ganger. I tråd med uttalelsen til Lærer 3 om vanskelighetsgrad, kan en problemløsningsoppgave baseres på hvordan Schoenfeld (1992, s. 337) påpeker at et problem kan forstås som et spørsmål som er komplisert eller vanskelig, sammenlignet med en tradisjonell rutineoppgave. Ved å fjerne deloppgaver og gjøre oppgaven mer utfordrende, slik som Lærer 4 foreslår, kan dermed en slik oppgave knyttes til de oppgavene NCTM (2014, s. 21) kaller oppgaver på høyt nivå, som NCTM hevder kan promotere problemløsning og at elever kan lære mye matematikk fra slike oppgaver.

5.2.5 Et problem med problemer i skolen

Lærer 3 og 4 hevder at problemløsningsoppgaver i skolen i dag egentlig ikke er ekte problemløsningsoppgaver. Lærer 3 sier at problemløsningsoppgaver i skolen i dag er hovedsakelig en hybrid mellom et problem og en rutineoppgave. På lik linje kan det være utfordrende å finne gode problemløsningsoppgaver til å benytte i skolen, ettersom en problemløsningsoppgave bør ha en åpent slutt, ifølge Lærer 4, der også Lærer 1 hevder at det bør finnes mer enn én løsning. Dette hybrid-perspektivet tolker jeg på to måter. For det første kan lærernes forståelse av en problemløsningsoppgaver bygge på en implisitt forståelse av problemløsning som ekte problemløsning, og derfor må tilhørende problemløsningsoppgaver være åpne eller reelle matematiske problemer. Dette kan minne om det som Schoenfeld (1992, s. 338) trekker frem om problemløsning som en kunst, der ekte problemløsning er kjernen av matematikk og at problemene dermed er ekte problemløsningsoppgaver.

I tråd med min første tolkning av hybrid-perspektivet hevder Lærer 2, 3 og 4 at de forstår problemløsningsoppgaver i skolen som praktisk orienterte oppgaver, eller oppgaver om en situasjon. På lik linje med hvordan Lærer 3 og 4 også trakk frem problemer fra virkeligheten, som politikk og Newton, er det mulig å finne igjen oppgaver i PISA-undersøkelsen som tar utgangspunkt i reelle og konkrete situasjoner (Nortvedt & Pettersen, 2016, s. 108). Selv om det er mer praktisk orienterte oppgaver i PISA-undersøkelsen enn tradisjonelle rutineoppgaver, må elevene likevel bruke sin matematikkfaglige kunnskap til å gjenkjenne og løse slike problemer, noe jeg tolker som inngår i problemløsningskompetansen.

Noen av lærerne forstår også slike praktiske oppgaver, på grunnlag av deres forståelse av problemløsningsoppgaver, som mer tekstoppgaver enn ekte problemløsningsoppgaver, selv med integrasjonsoppgaver. Lærer 1 nevner blant annet at vedkommende oppfattet problemløsningsoppgaver fra M87 som veldig tekstbaserte, og Lærer 2 hevder direkte at tekstoppgaver i dag kan minne om problemløsningsoppgaver. Selv om de praktiske problemløsningsoppgavene kan være tekstoppgaver, forstår jeg ikke utvalgets forståelse som urimelig ettersom at problem og tekstoppgave ofte er nevnt synonymt, der tekstoppgaver kan være et problem eller ikke (Björkqvist, 2003, s. 55). På lik linje med

Björkqvist (2003) sin måte å skille tekstoppgaver på, tolker jeg også at lærerne implisitt skiller mellom tekstoppgaver på samme måte, som kan være en faktor som påvirker hvordan utvalget forbereder problemløsningsoppgaver.

Med tanke på integrasjonsoppgaver i R2, forteller blant annet Lærer 2 og 4 på en side at det finnes tekstoppgaver som viser hvordan integrasjon kan brukes i den virkelige verden, eksempelvis med tanke på bruksområder har blitt nevnt tidligere. Da kan oppgavene omhandle produksjon, salg, pris eller populasjon. Her tolker jeg lærernes forståelse av integrasjonsoppgaver som tekstoppgaver først og fremst som en rutineoppgave, men mer tekstbasert. På en annen side forteller også Lærer 2 om elevers møte med integrasjonsoppgaver som tekstoppgaver der noen elever ikke forstår oppgaven, hvor det i noen tilfeller i tillegg ikke er oppgitt i oppgaveteksten hvilken metode de skal benytte. I dette tilfelle tolker jeg at tekstoppgavene kan oppfattes som mer problemløsningsoppgaver enn rutineoppgaver for noen elever, ettersom matematiske problem kan være individrelatert (Björkqvist, 2003), hvor problemet både består av oppgaven, men også den som løser den (A. Selden et al., 2000; J. Selden et al., 1989; J. Selden et al., 1994).

Den andre måten å tolke hvorfor noen av lærerne erfarer problemløsningsoppgaver som hybridoppgaver, kan være fordi personer kan oppfatte matematiske problemer på ulike vis, enten som et problem eller bare som en rutineoppgave (Björkqvist, 2003, s. 155; Niss & Jensen, 2002, s. 50; Skott et al., 2008, s. 34; NCTM, 2000). Med andre ord, siden et matematisk problem er individrelatert, så kan det derfor være ulikheter mellom hvordan en *lærer* og en elev opplever det samme matematiske problemet. Siden en lærer i R2 kan antas å ha høy matematisk kompetanse og ha erfaring med flere ulike typer oppgaver, så kan det tenkes at en problemløsningsoppgave kan oppleves mer som en rutineoppgave for en lærer, mens en elev kanskje vil oppleve den samme oppgave som en problemløsningsoppgave. Dette kan være en grunn til hybrid-perspektivet. Det samme kan tolkes til å gjelde oppgaver om integraler. En lærer som har erfaring med ulike oppgavetyper kan enklere kan identifisere en mulig løsningsvei enn en elev.

5.3 Problemløsning med integraler

På en side påstår Lærer 2 at integraler er et stort overbyggende tema innenfor matematikk og derav burde ikke problemløsning med integraler være vanskelig å få til. På en annen side hevder Lærer 4 at integralregning, etter den gjeldende læreplanen i R2, først og fremst er tilrettelagt for rutineoppgaver og mindre problemløsningsoppgaver. Med andre ord, integraloppgaver er ofte ment for å innlære regler, metoder eller andre løsningsteknikker. En vektlegging av rutineoppgaver kan videre knyttes inn som en grunn bak den algebraiske preferansen som er funnet hos flere elever som arbeider med integraler (Dawkins & Epperson, 2014; A. Selden et al., 2000; J. Selden et al., 1989; J. Selden et al., 1994), samt en vektlegging av en instrumentell forståelse (Mahir, 2009; Orton, 1983).

På lik linje finner Krueger et al. (2009) i sin forskning blant annet at det å løse problemer om mer sofistikerte matematiske konsepter, som integral, involverer både bruk av løsningsalgoritmer og grunnleggende utregninger. De som deltok i Krueger et al. (2009, s. 5) sin studie ble spurt om hvordan de ville løse integraler og kunne rapportere at de først brukte kunnskap om regler for å løse integraler og deretter utførte de nødvendige grunnleggende beregninger. Selv om Krueger et al. (2009) benyttet grunnleggende integraloppgaver (les rutineoppgaver) og ikke problemløsningsoppgaver, anser jeg forskningen som interessant og relevant. Grunnen til det er med tanke på hvordan Lærer 4 erfarer en større tilrettelegging for rutineoppgaver i R2, for å innlære regler, formler, teknikker eller metoder, enn problemløsningsoppgaver. Det er også mulig å tolke bekymringen til Lærer 4 som at en vektlegging av rutineoppgaver ikke tilrettelegger for å utvikle gode problemløsere. Flere av lærerne har påpekt at elever som er ganske regelbundne gjerne ikke er like gode problemløsere som de elever som ikke er det. Med kontinuerlig arbeid med rutineoppgaver kan derfor elever bli mer avhengig av å vite hvilke regler eller formler som skal brukes.

I tråd med hvordan Lærer 4 anser integraler som et tema som legger mer til rette for rutine- enn problemløsningsoppgaver, så bør ikke rutineoppgaver avfeies, ettersom de kan lære elever nødvendige løsningsalgoritmer som jeg tolker kan komme til nytte i arbeid med problemløsningsoppgaver. Rutineoppgaver om integraler kan være viktig. Samtidig er det flere som hevder at problemløsning også bør undervises (A. Selden et al., 2000; Schoenfeld, 1992; Leong & Janjaruporn, 2015) og gjerne med integraler, ettersom problemløsning også kan være en viktig faktor for elevenes forståelse av kalkulus (Sofranos et al., 2011). Jeg tolker det slik at veien for problemløsning inn i undervisning er gjennom problemløsningsoppgavene elevene kan arbeide med. Dette er også i tråd med hvordan flere av lærerne ser på problemløsning som de oppgaver som skal løses. Dette viser også Allen (2001) til ved å planlegge mange oppgaver og sette av en god andel av undervisningen til problemløsningsoppgaver innen kalkulus.

Videre i de neste delkapitlene før kapittel 5.4 vil jeg trekke frem noen av utvalgets viktigste begrunnelser for hvorfor deres forberedte oppgave kan kjennetegnes som en problemløsningsoppgave og kort sammenligne det med den tidligere forståelsen som er lagt til grunn i dette kapittelet. For å videre diskutere denne sammenhengen i lys av oppgavens problemstilling, vil jeg også trekke frem sammenhenger til utvalgets forslag til mulige forbedringer av deres oppgaver, da dette kan gi en ytterligere indikasjon på hvordan de forstår problemløsningsoppgaver. Siden Lærer 1 ikke forberedte den andre problemløsningsoppgaven, vil ikke vedkommende sitt utgangspunkt knyttes inn mot de andre lærernes forberedelse av den andre oppgaven.

5.3.1 Første oppgave: Bestemte eller ikke bestemte fremgangsmåter

På samme måte som at utvalget først forstår problemløsningsoppgaver som oppgaver som ikke ber om en bestemt fremgangsmåte eller at det ikke kan løses ved en gitt formel eller regel, er det delvis overensstemmelse med hvordan lærerne begrunner at deres første oppgave er en problemløsningsoppgave. Lærer 1 tillater flere løsningsveier i sin formulering og Lærer 3 har en ganske åpen formulering i «Oppgave 2», selv om det bes om å finne én bedre formel, noe også vedkommende foreslår å endre, for å åpne oppgaven mer opp. I begge disse tilfellene tolker jeg at oppgavene kan betraktes som en problemløsningsoppgave, ut fra slik de tidligere forstod begrepet med ubestemte fremgangsmåter, se Tabell 1. Eksempelvis forstår jeg Lærer 1 sin oppgave i tråd med hvordan Stanic og Kilpatrick (1988), referert i Schoenfeld (1992, s. 338), hevder at problemløsning kan brukes som kontekst, hvor problemløsning ikke er et mål i seg selv. Det er fordi Lærer 1 også trekker inn at denne oppgaven også kan knyttes videre til algoritmisk tenkning og programmering, og at problemløsning dermed ikke trenger å være hovedmålet.

På en annen side er det et lite avvik fra deres tidligere forståelse, hvor eksempelvis to av lærerne delvis oppgir fremgangsmåte. Lærer 3 i «Oppgave 1» informerer om differensiallikninger og Lærer 4 ber om å bruke integralregning og i tillegg gir elevene et hint. Det bør også påpekes at i begge tilfeller tillater oppgavetekstene alternative metoder. På en side stemmer ikke dette helt overens med hvordan utvalget forstår problemløsningsoppgaver som oppgaver uten gitte fremgangsmåter. På en annen side tolker jeg det slik at dette er oppgitt for å lettere aktivere forkunnskaper hos elevene, mye likt hvordan lærerne knytter integrasjon til derivasjon som en forkunnskap i undervisning. Det er ikke oppgitt spesifikt hvilken metode eller regel som bør brukes, men ved å informere om at oppgaven kan løses med integralregning eller differensiallikninger, kan elever enklere hente frem tidligere kunnskaper eller strategier for å løse problemet.

En aktivering av forkunnskaper kan være en viktig faktor i problemløsningsprosessen (Liljedahl et al., 2016) eller i utviklingen av en plan for hvordan løse problemet (Pólya, 2009). Noen lærere påpekte tidligere at det å aktivere læring eller kunnskaper er en relevant del av problemløsning, men også som et kjennetegn på en god problemløser. Dette kan også knyttes til lærernes forberedte oppgaver og Pólyas (2009) andre steg, utbredelsen av en plan, hvor man bør prøve å knytte problemet til tidligere oppgaver. Det er også mulig å forstå en oppgave formulert slik, som det Lærer 3 kalte en hybridoppgave, der det ikke er en ekte problemløsningsoppgave, ettersom mulige løsningsmetoder er delvis oppgitt.

5.3.2 Et tydeligere sosiokulturelt læringssyn

I de aller fleste av lærernes eksplisitte forklaringer kom det frem at en muntlig diskusjon kan være en viktig faktor med tanke på problemløsning. Med de forberedte oppgavene forteller derimot flere av lærerne at det er tydeligere tilrettelagt for muntlig diskusjon av løsningsmetodene. Dette kan tolkes som et større og tydeligere fokus på et sosiokulturelt læringssyn når de utformet oppgavene, sammenlignet med blant annet lærer 4 sin opprinnelige forståelse som er rettet mer mot et konstruktivistisk læringssyn på problemløsning, se eksempelvis Tabell 1. Ifølge et sosiokulturelt læringssyn har læring en retning fra det sosiale til det individuelle, fordi det kan være mulig å dele tanker og idéer i en sosial kontekst, slik at tankene og idéene kan de bli tilgjengelig for andre (Dysthe, 2013; Angell et al., 2019). Jeg tolker derfor at noen av lærerne i utvalget kan anse dette læringssynet som relevant med tanke på problemløsning og arbeid med problemløsningsoppgaver, ettersom Lærer 1 og 3 hevder at en plenumssamtale eller diskusjon kan være nødvendig for elevene for å tydeligere få frem deres ulike løsningsmetoder.

Lærer 3 hevder også at oppmerksomheten bør være rettet mot metodene fremfor løsningene i en slik situasjon. I tillegg til at dette støtter et sosiokulturelt læringssyn, er det også et språklig aspekt med problemløsning nevnt i LK06, hvor elever skal kommunisere idéer (Udir, 2013). Den muntlige faktoren er også rimelig at lærerne nå trekker inn, ettersom det kan knyttes til Pólyas (2009) fjerde steg, som er å se tilbake på løsningen, men også vurdere de brukte metodene. Dette vil også kunne hjelpe de elever som ikke ser tilbake på løsningen i en integrasjonsprosess, som det ble drøftet tidligere, ettersom det i en muntlig situasjon er vektlagt løsningsmetodene og deres gyldighet.

I en slik undervisningssituasjon, hvor løsningsmetoder blir presentert og begrunnet, kan en elev reagere på lærers eller andre elevers løsningsmetoder og forklaringer. Deretter kan eleven selv bli i stand til å ta i bruk disse metodene og forklaringene på et senere tidspunkt, gitt at eleven selv får kommunisert disse metodene eller forklaringene i den sosiale konteksten. Angell et al. (2019, s. 143) kaller dette for internalisering og begrepet kan forstås ved at eleven kan bli i stand til å bruke løsningsmetoder eller forklaringer, etter å ha benyttet disse i sosiale kontekster. Dette er en interessant faktor noen av lærerne nå trekker frem. Ettersom utvalget hadde få eksplisitte uttalelser om problemløsningsbegrepet, gir dette nå en dypere innsikt i deres forståelse av problemløsningskompetansen, siden elever skal kunne anvende og tilpasse ulike strategier til å løse problemer (NCTM, 2000, s. 52). Denne muntlige faktoren kan også falle innunder Pólyas (2009) andre steg og ytterligere utvikle elevenes evne til å utforme en plan for å løse et problem, siden de nå kan ha tilgang til flere strategier å velge mellom.

5.3.3 Andre oppgave: Færre eller ingen deloppgaver

Blant annet Lærer 3 og 4 sier at de er usikre på om den andre oppgaven deres er problemløsningsoppgaver, hvor de begrunner med at det ikke er brukt mye tid på forberedning. Et av de viktigste hovedargumentene om hvorfor deres andre forberedte oppgave derimot er en problemløsningsoppgave, er fordi den nå har færre eller ingen deloppgaver, sammenlignet med den originale oppgaven. Dette stemmer eksempelvis overens med hvordan Lærer 4 tidligere påpekte at rutineoppgaver uten deloppgavene er mer problemløsningsoppgaver. Videre kan lærernes begrunnelser støtte opp under slik de tidligere forstod en problemløsningsoppgave som en oppgave uten gitt fremgangsmåte, ved at oppgavene nå har mindre gitte fremgangsmåter. Samtidig hevder Lærer 3 at en mulig forbedring hadde vært å inkludere noen deloppgaver, noe som går litt mot den originale argumentasjonen. Jeg forstår derimot forslaget til Lærer 3 som rimelig, ettersom oppgaven til vedkommende ikke er en spesifikk oppgave, men heller en idé til en oppgave (se også Vedlegg VI).

Flere av lærerne har ansett deloppgaver som en veiledning for elever, og ved å fjerne disse fra den originale oppgaven blir den forberedte oppgaven mer åpen for ulike fremgangsmåter, noe NCTM (2014) kunne kalt en oppgave på høyere nivå enn den originale. Eksempelvis ber Lærer 2 og 3 om en tolkning eller forståelse av en kurve knyttet til en kontekst, uten å spesifisere noe ytterligere. For noen elever kan også Lærer 4 sitt spørsmål om «sammenheng» oppfattes som uspesifikk, med tanke på hva oppgaven egentlig etterspør. På lik linje med de første forberedte oppgavene er det lagt inn noe veiledning i lærernes formulering av oppgaven. Jeg tolker derimot disse oppgavene, på lik linje med de første oppgavene, til å promotere problemløsning. Dette er med utgangspunkt i NCTM (2014, s. 17) sine «kriterier», som er at oppgavene skal tillate flere innganger, bruk av ulike representasjoner og verktøy, samt tilrettelegge for å løse problemer ved bruk av ulike strategier.

Sengul og Katranci (2015) fant at en av hovedutfordringene i problemløsningsprosessen med ubestemte integraler, var å ikke være i stand til å vite hvordan angripe et problem. Andre utfordringer var også å ikke klare å knytte inn relevant tema eller at det ble valgt feil retning for løsning. I tråd med Pólyas (2009) første steg, som er å forstå problemet, kan det derfor stilles spørsmål om i hvilken grad elever kan forstå problemet dersom det nå er få eller ingen deloppgaver. Med andre ord, det er et spørsmål om i hvilken grad elever er i stand til å knytte inn kjente regler, prosedyrer eller annet, på lik linje med utfordringene til Sengul og Katranci (2015). Grunnet til et slikt spørsmål er fordi oppgaven nå inneholder mindre tekst og derav mindre informasjon og veiledning til elevene. Dette er også noe blant annet Lærer 2 tidligere har vært opptatt av – at elever bør forstå oppgaven.

5.3.4 Praktiske problem og integralets bruksområder

En likhet og ytterligere utdypning til deres tidligere forståelse av problemløsningsoppgave er at Lærer 2 kaller sin andre forberedte oppgaven for tekstoppgave, Lærer 3 kaller sin virkelighetsnær og Lærer 4 sin oppgave handler om en dagsaktuell situasjon. Dette stemmer overens med hvordan disse tre lærerne tidligere har knyttet problemløsningsoppgaver til tekstoppgaver, praktisk orienterte oppgaver eller reelle problem. Det er flere ganger i denne oppgaven påpekt at problemløsningsoppgaver og tekstoppgaver nevnes synonymt, og vil derfor ikke drøftes noe videre. Jeg vil derimot trekke frem hvordan lærernes omgjøringer fra en rutineoppgave til en problemløsningsoppgave nå lettere og tydeligere kan knytte inn integralets mulige bruksområder ettersom de er oppgaver knyttet til virkeligheten. Dette kan være viktig ettersom Allen (2001) hevder at elever kan sette pris på å se anvendelser av integraler.

I tråd med hvordan Bressoud (1992, s. 296) stiller spørsmål om hvordan elevene vil bruke ulike konsepter fra kalkulus utenfor skolen, poengteres det at elevene først og fremst kommer til å bruke integralregning til å løse differensiallikninger. Med andre ord, elever kommer til å bruke integral i en retning fra kunnskap om den deriverte av en funksjon eller en endring av en størrelse i en situasjon, tilbake til en funksjon den er derivert fra (Bressoud, 1992; Jones, 2013), altså en relasjon fra v til f, slik Strang (1990) forklarer det. Det er med integralets praktiske nytte og mening Bressoud (1992) hevder at prioriteten bør være i undervisningen, noe flere av lærerne også har påpekt tidligere og har blitt diskutert i kapittel 5.1.4. Jeg tolker at slike virkelighetsnære problemer, som lærerne hevder at de har forberedt, derfor kan promotere problemløsning, ettersom blant annet Björkqvist (2013) forbinder problemløsning med muligheter for å løse fremtidens problemer med kunnskaper fra skolen.

På en annen side bør det stilles spørsmål om hvorvidt elever faktisk kommer til å knytte disse forberedte oppgavene til virkeligheten, både den første og andre forberedte oppgaven. Som Lærer 2 påpeker, bør det også vurderes om elevene kan få et utbytte av oppgaven og knytte oppgaveteksten til matematikk og tilbake. Selv om det er formulert som problemløsningsoppgaver, kan elever se på oppgaven som en litt annerledes og mer utfordrende rutineoppgave. Med andre ord, en fallgruve med problemløsningsoppgavene kan være at elevene heller velger å fokusere på å løse oppgaven uten videre drøfting av løsning. Med andre ord, de gjennomfører ikke tydelig Pólyas (2009) fjerde steg, som er å se tilbake på problemet, ved å undersøke oppnådd løsning og være kritisk til løsningen i den gitte situasjonen, samt kritisk til de løsningsmetoder som er benyttet. Dette er også en utfordring noen av lærerne har påpekt tidligere om integraloppgaver, hvor elever kan la være å gjøre en vurdering av løsning.

En risiko kan derfor være at elever i for stor grad stopper opp etter Pólyas (2009) tredje steg. På en side kan oppgaven aktivere forkunnskaper hos elevene, slik at de faktisk kan komme til det tredje steget og løse problemet med lærte teknikker, prosedyrer eller strategier. Dette er en viktig del av problemløsningsprosessen. På en annen side, kan dette medføre at eleven kun utvikler og bruker en instrumentell forståelse (Skemp, 2006) med tanke på integrasjonsregler og -metoder, fremfor en mer konseptuell forståelse av selve prosessen og konseptet (Mahir, 2009; Orton, 1983) til de virkelighetsnære oppgavene. Jeg tolker det slik ettersom blant annet Lærer 4 poengterer at oppgaven til vedkommende i utgangspunktet har én skjult løsning, som det gjerne er forventet at elevene skal finne. Jeg tolker også denne utviklingen av instrumentell forståelse i tråd med noen av lærerne som forteller at elever som er regelbundet, gjerne ikke er like problemløsere.

5.4 Kvalitet på innsamlede data

Avslutningsvis vil jeg gjerne drøfte noen aspekter ved forskningen som kan ha påvirket mine resultater og derav kvaliteten på oppgaven. Først vil jeg presentere noen av mine refleksjoner rundt intervjuprosessen og hvordan intervjuene kan ha blitt preget av mine egne forkunnskaper. Deretter vil transkripsjonsprosessen og analysen drøftes med tanke på hvordan jeg har forenklet, meningsfortettet og tolket ulike utsagn. Videre vil utvalget kort diskuteres med hensyn til deres utdanning, hensikt med svar og kjennskap til læreplaner, hvor jeg til slutt vil presentere et forslag til en alternativ metode jeg kunne brukt i dette prosjektet.

5.4.1 Intervjuprosessen og mine forkunnskaper

Intervju ble benyttet som min hovedmetode for å samle inn data for å besvare oppgavens problemstilling. Gjennom intervjuene avdekkes informantens forståelser, opplevelser eller erfaringer med undervisning av integraler i R2, problemløsning, problemløsningsoppgaver og hvordan de utformer problemløsningsoppgaver med integraler. Jeg som forsker og intervjuer i lag med lærerne som informanter, har tatt del i en strukturert samtale om ulike aspekter ved disse temaene, hvor deres avgitte svar har vært grunnlaget for datamaterialet for dette prosjektet. Kvale og Brinkmann (2015) hevder at gjennom intervju som en samtale kan kunnskap konstrueres i samspill mellom forsker og informant. Jeg tolker derfor at mine tidlige forkunnskaper om prosjektets temaer kan ha hatt påvirkning på intervjuprosessen, samt innsamlet data, som senere kan påvirke muligheten for å besvare oppgavens problemstilling. Et eksempel jeg vil trekke frem er etter å ha lest gjennom og undersøkt transkripsjonen av intervjuene oppdaget jeg at det ikke bare var noen av lærerne som brukte begrepene problemløsning og problemløsningsoppgaver synonymt, som ble diskutert i kapittel 5.2.2. Jeg brukte også disse begrepene synonymt, noe som kan ha påvirket lærernes svar. Mitt eget synonyme bruk av disse begrepene forstår jeg kan komme av to grunner.

På en side kan det hende at jeg muligens ikke hadde nok kjennskap til eller forståelse av de undersøkte temaene. Kvale og Brinkmann (2015, s. 141) hevder at en forskers kjennskap til prosjektets temaer som nødvendig for å kunne stille relevante spørsmål, samt at slike forkunnskaper kan være et «grunnlag for tilføyelse og integrasjon av ny kunnskap». Med andre ord, i selve intervjuprosessen kan det hende at jeg også til en viss grad tolket problemløsning i lys av de oppgaver som skal løses. Dette betyr at jeg burde lest meg mer opp på teori om prosjektets temaer før intervjuene. På en annen side kan det hende at jeg som intervjuer tok en posisjon som Kvale og Brinkmann (2015, s. 119) kaller en «opinionsundersøker». Fremfor å utfordre lærerne i deres uttalelser, aksepterte jeg heller lærernes uttalelser og behandlet deres meninger som fakta og hadde mer et ønske om å hente frem data i ren form, fremfor å lede dem inn på begrepsbruk jeg anså som «mer rett». Det ble gjort slik for å unngå at jeg som intervjuer skulle påvirke svarene til informantene i for stor grad, noe flere påpeker kan være et problem i intervju- eller forskningsprosessen (Grønmo, 2004; Kvale & Brinkmann, 2015; Thagaard, 2013)

I ettertid oppfatter jeg også et behov for noen små endringer i intervjuguiden og i de gitte oppgavene, som en konsekvens av mine mulige manglende forkunnskaper. Eksempelvis kunne jeg tydeligere knyttet begrepene problemløsning og kompetanse i intervjuene. Samtidig ønsket jeg å ikke utforme for mange ledende spørsmål, ettersom ledende spørsmål eller inntrykk av at informanten skal gi et bestemt svar kan være et problem i intervjuprosessen og kan svekke datamaterialets kvalitet (Grønmo, 2004, s. 165). En unngåelse av ledende spørsmål tolker jeg derfor til å åpne opp for å få frem lærernes faktiske forståelse eller meninger.

Et annet forslag kunne vært å formulere oppgavene jeg ga til lærerne litt annerledes, slik at det kom tydelige frem hva som var forventet av lærerne. For eksempel kunne jeg spesifisert at de må lage og formulere en oppgavetekst som kunne blitt gitt til R2-elever, og kun inkludere oppgaveteksten i det de sendte inn. Da hadde det vært interessant å se hva eksempelvis Lærer 3 hadde forberedt, da vedkommende i dette prosjektet presenterte en idé til oppgave. En konsekvens kunne vært at Lærer 1 også hadde levert den andre oppgaven. På en annen side bør det poengteres at Lærer 2 og 4 forberedte begge oppgavene slik jeg forventet. Det kan derfor være andre faktorer enn formulering av oppgaven, som resulterte i at Lærer 1 og 3 ikke leverte etter mitt behov. Eksempelvis kan dårlig tid eller utfordring med å lage en god problemløsningsoppgave, vært mer relevante faktorer som påvirket lærerne.

Ettersom lærernes gitte svar i intervjuene kan være avhengig av dagsform og eller andre faktorer (Grønmo, 2004; Kvale & Brinkmann, 2015) vil jeg gjerne poengtere at jeg innhentet informasjon fra informantene på to ulike tidspunkt. Jeg innhentet også informasjon fra dem gjennom vår samtale om deres forberedte oppgaver. Jeg tok med andre ord hensyn at lærerne kunne ha glemt å si noe på et av intervjuene, ettersom det var flere muligheter for dem å komme med svar. En konsekvens av dette var at ingen av lærerne kom med *ordrett* de samme forklaringene på de lignende spørsmålene i løpet av de to intervjuene. Enten kom de med nye forklaringer og eksempler, utdypet tidligere uttalelser eller så kom de med mindre informasjon.

Jeg vil derfor trekke frem et eksempel. Lærer 4 var ganske inspirert av Peter Liljedahls «Thinking Classroom» da vedkommende svarte på spørsmål om problemløsning i det første intervjuet, men ikke i like stor grad på det andre intervjuet. I tråd med intervjuets reliabilitet, så er det mulig å stille spørsmål om Lærer 4 sine avgitte svar om problemløsning kunne vært annerledes om jeg hadde foretatt det første intervjuet tidligere, og gjerne før vedkommende hadde gjennomført «Thinking Classroom». Dette kunne ha påvirket innsamlet data fra Lærer 4. Samtidig vil jeg poengtere at Lærer 4 er den eneste i utvalget som underviser R2 nå, og jeg vil påstå at Lærer 4 sin erfaring med aktiviteten resulterte i interessante og reflekterte utsagn, noe som ga vedkommende tyngde i utvalget.

5.4.2 Transkripsjon og analyse

I transkripsjons- og analyseprosessen kan det forstås at ulike tolkninger kan ha lav reliabilitet, ettersom ulike personer kan tolke samme tekst ulikt. Samtidig kan jeg argumentere for at transkripsjonsprosessen min til å ikke ha lav reliabilitet, ettersom transkripsjonen baseres på gitte koder, se Vedlegg III. Samtidig eksisterer det en viss usikkerhet om jeg i denne oppgaven har tolket og deretter presentert en lærers forståelse feilaktig, urettferdig eller misvisende, eller at jeg ikke har presentert deres egentlige mening, ettersom det er kortet ned og delvis tatt ut av kontekst. Kvale og Brinkmann (2015, s. 244) hevder at en diskusjon om denne «egentlige meningen» til informanter kan være utfordrende. Samtidig hevder de at «overgangen fra oppfatningen om et individuelt meningslager til interrasjonelle meninger i den opprinnelige intervjusamtalen [...] tydeliggjør det sosiale forholdet og maktforholdet mellom forskeren og intervjupersonen» (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 244). Det er med andre ord en etisk problemstilling om hvorvidt jeg som forsker kan tilegne andres uttalelser en bestemt mening. Jeg vil uansett tolke det slik at gjennom meningsfortetning av uttalelser knyttet til spesifikke spørsmål, muligens ikke utsetter informantene for feilaktig representasjon.

Med tanke på denne oppgaven kan det derimot drøftes om det har blitt gjort noen forenklinger. Jeg har tatt utgangspunkt i detaljer på hvordan lærerne eksempelvis forklarer problemløsningsoppgaver og kun trukket frem enkle karakteristikker. I flere tilfeller har jeg meningsfortettet deres uttalelser ned til enklere setninger for å kunne sammenligne deres forståelse med både andre læreres og oppgavens definisjon og bruk av samme begreper. En utelatelse av lærernes tilhørende eksempler, lignende erfaringer eller bortforklaringer kan indikere dette maktforholdet Kvale og Brinkmann (2015) nevner. Samtidig vil jeg også påstå at slike avgrensninger og forenklinger er nødvendig for oppgavens formål, ettersom det er tatt hensyn til oppgavens lengde og relevans.

5.4.3 Lærerne i utvalget

Lærerne i utvalget er utdannede og kvalifiserte lærere, som har flere års erfaring som lærere i matematikk og spesielt R2. Det ble ikke etterspurt om lærernes utdannelse eller annen videreutdanning. Grunnen til dette er at jeg oppfatter dette som mindre relevant for min oppgave. Jeg oppfatter heller at deres erfaring med undervisning av matematikk som tilstrekkelig for å kunne delta i dette prosjektet, og ser derav ikke nødvendigheten i å etterspørre om utvalgets utdannelse.

På en side påpeker Grønmo (2004, s. 165) et problem som kan oppstå hos informantene, der de kan gi feilaktig informasjon, fordi de eksempelvis ikke husker noe godt nok, eller at de ønsker å fremstille seg selv i et gunstig lys for intervjueren (Grønmo, 2004; Kvale & Brinkmann, 2015). På en annen side var lærerne ganske åpne om de tilfeller hvor de ikke husket eller ikke hadde særlig erfaring med noe som ble etterspurt. Flere av lærerne i utvalget påpeker flere ganger at de eksempelvis ikke har så mye erfaring med problemløsning, inkludert problemløsning i undervisning eller forberedelse av problemløsningsoppgaver. Dette gjaldt både generelt i fag eller i R2. De som påpekte dette hadde likevel gjort seg noen tanker rundt temaet, hvor eksempelvis Lærer 2 baserer «spekulasjonene» sine på erfaring med blant annet elevøvelser i fysikk. Lærer 3 poengterer også at det kan være vanskelig å si hva vedkommende gjør ettersom det er veldig undervisnings- og personbetingede situasjoner det er snakk om.

Som det kommer frem kan det tolkes som at lærerne har lite eksplisitt erfaring med problemløsning i eksempelvis R2. Lærerne i utvalget underviser eller har undervist R2 etter læreplanene fra LK06. På en side kan de muligens, på grunn av den erfaringen, ikke har fått mulighet til å sette seg nok inn i læreplanen fra LK20, som tydeligere legger vekt på problemløsning som et av kjerneelementene (Udir, 2018, 2021). På en annen side påpeker flere i utvalget at de har godt kjennskap til LK20, men trekker da først og fremst frem programmeringsdelen som mest relevant og kritisk. Det kan derfor være vanskelig å trekke noen slutninger om hvorfor lærerne ikke kommer med tydeligere forståelse av problemløsningsbegrepet. For å unngå eventuelle misforståelser av min egen diskusjon vil jeg gjerne påpeke at jeg oppfatter det slik at lærerne faktisk forstår problemløsning og viktigheten av det i skolen. Det som jeg derimot oppfatter som interessant er at de ikke i like stor grad forklarer dette direkte. Om dette skyldes intervjusituasjonen, min påvirkning og mine spørsmål i løpet av intervjuene eller lærernes manglende erfaring med begrepet er vanskelig å avgjøre.

5.4.4 Et kort forslag til en alternativ metode

Ettersom jeg ber mine informanter om å forberede og sende 1-2 problemløsningsoppgaver, der datamaterialet er i tekstformat, kan det tenkes at en kvalitativ tekstanalyse kunne vært en ytterligere metode i mitt prosjekt. Jeg har valgt å ikke analysere oppgavetekstene i stor grad, siden oppgavetekstene først og fremst gjennomgås muntlig med lærerne på intervjuene. Det kan være viktig å påpeke at det ikke er eksplisitt formuleringen av oppgavene som har vært grunnlaget eller fokuset til dette prosjektet, men heller mer implisitt, der lærernes tanker rundt oppgavene og hvorfor de mener det er problemløsningsoppgaver har blitt ansett som mer viktig. En tekstanalyse av deres forberedte oppgaver kunne også blitt inkludert som en av prosjektets metoder, for å belyse flere aspekter ved deres utforminger, i lys av oppgavens eller andre problemstillinger.

5.5 Etiske implikasjoner

Avslutningsvis vil jeg også kort drøfte konfidensialitet og mulig feilaktig representasjon, samtykke til opptak og en mulighet for at oppgaven opplyser om noe nytt. Med tanke på konfidensialitet har jeg i denne oppgaven anonymisert navn på informantene, skolen de jobber på, kjønn og lignende. En ting som jeg har påpekt tidligere er at lærerne kan gjenkjenne seg selv, spesielt på grunn av ulikhetene og særtrekkene i de forberedte oppgavene. En mulig konsekvens kan også være at andre lærere på deres skoler gjenkjenner dem, da noen av oppgavene er hentet fra tidligere prøver på den skolen. Dersom en lærer gjenkjenner seg selv er det mulig at læreren kan oppfatte at vedkommende har blitt misforstått, feilaktig representert eller tolket på en annen måte enn forventet. Eksempelvis har jeg noen plasser valgt å komme med egne tolkninger av informantenes utsagn på ulike måter. En anonymisering er derfor nødvendig, spesielt dersom en informant opplever en slik feilaktig representasjon. Læreren skal dermed ikke kunne gjenkjennes av andre eller «henges ut» på noen måte.

Lærerne ble informert om at det kom til å gjøres video- og lydopptak av intervjuene, noe Archibald et al. (2019) hevder er viktig at forskere informerer om. Et samtykke til at intervjuene skulle gjøres opptak av intervjuene inngår i samtykkeskrivet i Vedlegg II. Det er derfor et etisk ansvar som ligger hos meg som forsker ettersom jeg oppbevarer personlige opplysninger om informantene. En utdeling av slik informasjon vil indikere et brudd på avtalen jeg har inngått med informantene.

Til slutt vil jeg også poengtere at det eksisterer en mulighet for at dette prosjektet opplyser om noe nytt eller alternativt om temaer innenfor matematikkdidaktikk. Det har derfor vært nødvendig å dokumentere min metode og prosess med å analysere intervjuene, da prosjektet bør være mulig å replisere. Det er derimot en kvalitativ tilnærming på denne oppgaven og det kan dermed være utfordrende å oppdage eller komme frem til nøyaktig de samme funnene. Det er derimot mulig å gjennomføre et lignende prosjekt for å muligens finne bekreftende, lignende eller alternative funn innenfor temaet.

6 Konklusjon og videre perspektiver

Formålet med denne teksten har vært å undersøke sammenhengen mellom fire R2-læreres forståelse av problemløsning, problemløsningsoppgaver og deres utforming av problemløsningsoppgaver med integraler. Forståelsene har blitt undersøkt og sammenlignet ved trekke inn innsamlet data fra totalt åtte intervju med lærerne og relevant teori. Funnene viser variert forståelse av problemløsningsbegrepet, hvor det er funnet at flere av lærerne knytter problemløsningsbegrepet til de oppgaver som skal løses. Videre funn viser at lærerne forstår problemløsningsoppgaver i likhet med litteratur på temaet. Flere av lærerne ser også på matematiske problemer som tekstoppgaver og praktisk orienterte oppgaver, der et funn er at problemløsningsoppgaver i skolen ikke alltid kan kalles for ekte problemer. Det kommer også frem gjennom intervjuene og i utforming av problemløsningsoppgaver med integraler at lærerne vektlegger integralets mulige bruksområder, samt en mulighet for at elever kan anvende kjent matematikk. En tilrettelegging for muntlige diskusjoner om løsningsmetoder er også funnet hos flere av lærerne som en nødvendig faktor i undervisning med problemløsning og i elevers utvikling av problemløsningskompetansen og bruk av strategier.

6.1 Videre perspektiv

Med tanke på hvordan problemløsning har fått en tydeligere plass i matematikkfaget gjennom læreplanene fra LK20, har jeg sett det nødvendig å undersøke hvordan lærere oppfatter, forstår og bruker begrepet problemløsning, samt problemløsningsoppgaver, og hvordan de selv utformer problemløsningsoppgaver om integraler. Denne masteroppgaven utredes og er ferdigstilt før LK20 trer i kraft i R2-matematikk og trekker derfor frem relevante drøftinger av problemløsning i R2, spesielt rettet mot integraler, som kan anses som en rød tråd i faget. Jeg har også fått et dypere innblikk i hvordan integralproblemer kan se ut, men også hvilke tanker som ligger bak forberedelsene av en slik oppgave. Derivasjon som forkunnskap, elevers algebraiske preferanse i arbeid med integraler og integralets bruksområder kan være viktige faktorer i undervisning av integraler, som videre bør tas hensyn til i arbeid med problemløsning om integraler.

En forståelse av problemløsning som en matematisk kompetanse kommer tydelig frem i LK20, og selv om lærerne oppfatter problemløsning som en mulighet til å anvende matematikk i nye situasjoner oppfatter flere av lærerne mer problemløsning som de oppgavene som skal løses og de strategier elever bruker. Dette kan være interessante diskusjonspunkter å ta videre på skoler og blant R2-lærere etter hvert som LK20 trer i kraft, ettersom en felles forståelse av hva problemløsning er kan være viktig for å kunne tilrettelegge og planlegge problemløsning i undervisningen. Både eksplisitt og gjennom utforming av problemløsningsoppgaver viser prosjektets utvalg at de forstår hva et matematisk problem er. Dette er nødvendig ettersom det bør forventes at lærere forstår hva et matematisk problem er for å kunne promotere og arbeide med problemløsning i blant annet R2. Ettersom LK20 vektlegger dybdelæring, og integraler kan benyttes innenfor flere fagområder i den virkelige verden, kan det være relevant for lærere å la elever få arbeide med reelle og praktiske problemer som kan knytte kunnskaper fra skolen til virkeligheten og fremtiden.

6.2 Veien videre

Ettersom oppgavens utvalg begrunnet muntlig hva som gjorde deres forberedte oppgaver til problemløsningsoppgaver, kan et forslag til videre forskning være å ha en annen tilnærming. Ved å eksempelvis gjennomføre tekstanalyse av flere læreres utformede problemløsningsoppgaver, er det mulig å oppfatte karakteristikker ved de matematiske problem som utformes av norske matematikklærere. Dette kan spesielt være interessant å undersøke innenfor integrasjon eller derivasjon, ettersom det er grunnleggende tema innenfor matematikk, som muliggjør flere løsningsmetoder ved å benytte ulike representasjonsformer. Forventede representasjonsformer i løsning av problemer er noe denne oppgaven ikke har kommet med svar på. Det kunne også vært mulig å gjennomføre en mer kvantitativ tilnærming, enten gjennom en analyse av oppgaver eller spørreundersøkelse, for å kartlegge hvordan problemer og problemløsning forstås i Norge blant lærere. En videre anbefaling vil derfor være å undersøke hvordan utforming av matematiske problemer kan variere og ha særpreg innenfor ulike matematiske temaer.

Denne oppgaven har undersøkt læreres perspektiv på problemløsning innenfor integraltemaet i R2, men en videre undersøkelse av hvordan norske elever arbeider med problemløsningsoppgaver i R2 kan være interessant forskning som kanskje kan belyse interessant funn. Selv om jeg i denne oppgaven har presentert noe relevant litteratur, vil et forslag om ytterligere forskning på problemløsning med integraler være nødvendig, ettersom jeg har oppfattet en mangel på litteratur og forskning på temaet.

7 Referanser

Allen, D. (2001). Learning integral calculus through non-template problem solving. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *11*(2), s. 147-160.

Angell, C., Bungum, B., Henriksen, E. K., Kolstø, S. D., Persson, J. & Renstrøm, R. (2019). *Fysikkdidaktikk* (2. utgave). Oslo: Cappelen damm

Barkatsas, A. N. & Hunting, R. (1996). A review of recent research on cognitive, metacognitive and affective aspects of mathematical problem solving. *Nordisk Matematikkdidaktikk. 4*(4), s. 7-30.

Botten, G. (2016). *Matematikk med mening: mening for alle.* Bergen: Caspar forlag.

Bressoud, D. M. (1992). How should we introduce integration?. *The College Mathematics Journal*, *23*(4), s. 296-298.

Creswell, J. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, & mixed methods approaches* (4. utgave: International student utgave). Los Angeles, California: SAGE.

Dawkins, P. C. & Epperson, J. A. M. (2014). The development and nature of problem-solving among first-semester calculus students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(6), s. 839-862.

Dragoo, R. C. (1945). Teaching the calculus. *National Mathematics Magazine*, *19*(4), s. 186-193.

Dysthe, O. (2013). Dialog, samspill og læring. I: R. J. Krumsvik & R. Säljö (Red.), *Praktisk-pedagogisk utdanning. En antologi* (s. 81-116). Bergen: Fagbokforlaget.

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder*. Fagbokforlaget.

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), s. 122-141.

Kirke- og undervisningsdepartementet. (1987). *Mønsterplan for grunnskolen: M87.* Oslo: Aschehoug: Kirke- og undervisningsdepartementet. https://urn.nb.no/URN:NBN:no-nb_digibok_2007080200101

Krueger, F., Spampinato, M. V., Pardini, M., Pajevic, S., Wood, J. N., Weiss, G. H., Landgraf, S. & Grafman, J. (2008). Integral calculus problem solving: an fMRI investigation. *Neuroreport*, *19*(11), s. 1095-1099.

Kunnskapsdepartementet. (2020). Overordnet del – verdier og prinsipper i grunnopplæringen. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utgave). Gyldendal.

Leong, Y. H., & Janjaruporn, R. (2015). Teaching of problem solving in school mathematics classrooms. I Cho, S. J. (Red.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 645-648). Springer, Cham.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. Springer Nature.

Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(2), s. 201-211.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. L. N. (2008). Advanced mathematical thinking and the role of mathematical structure. I English, L. D. (Red.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2. utgave). (s. 154-175). Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to Actions: Ensuring mathematical success for all.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier: Den skrivende forskeren.* Oslo: Universitetsforlag

Nortvedt, G. A., & Pettersen, A. (2016). 6 Matematikk. I Kjærnsli, M., Jensen, F., Frønes, T. S., Hatlevik, O. E., Nortvedt, G. A., Pettersen, A., & Rohatgi, A. (Red.), *Stø kurs. Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015*. (s. 107-135)

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational studies in mathematics*, *14*(1), s. 1-18.

Pólya, G. (2009). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2. utgave). New York: Ishi Press International.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 334–370). Macmillan Publishing Co, Inc.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S., & Mason, A. (2000). Why can’t calculus students access their knowledge to solve non-routine problems. *Issues in mathematics education*, *8*, s. 128-153.

Selden, J., Mason, A., & Selden, A. (1989). Can average calculus students solve nonroutine problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *8*(1), s. 45-50.

Selden, J., Selden, A., & Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. *MAA notes*, s. 19-28.

Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books.

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School.*, *12*(2), s. 88–95.

Skott, J., Jess, K., & Hansen, H. C. (2008). *Matematik for lærerstuderende. Delta. Fagdidaktik.* Frederiksberg: Forlaget Samfundslitteratur.

Sofronas, K. S., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(2), s. 131-148.

Strang, G. (1990). Sums and differences vs. integrals and derivatives. *The College Mathematics Journal*, *21*(1), s. 20-27.

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse – En innføring i kvalitativ metode* (4. utgave). Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering* (MAT3-01). Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT3-01

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/

Utdanningsdirektoratet. (2018, 4. juni). *Matematikk – oppsummering av innspill*. Hentet 1. januar 2021 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/matematikk--oppsummering-av-innspill/

Utdanningsdirektoratet. (2019, 18. november). *Hva er nytt i læreplanverket?*. Hentet 2. januar 2021 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-nytt-i-lareplanverket/

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Kjerneelementer* (MAT03-02). Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat03-02/om-faget/kjerneelementer

Utdanningsdirektoratet. (2022). *Kompetansemål og vurdering* (MAT03-02). Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat03-02/kompetansemaal-og-vurdering/kv294

Vedlegg I Intervjuguider

Intervju 1

1.1 Bakgrunnsinformasjon

1. Hvor lenge har du vært lærer? - Hvilke fag underviser du nå?
2. Hvor lenge har du undervist R2? / Når underviste du R2 sist, og hvor lenge?
3. Hvordan forbereder du vanligvis en undervisningsøkt i R2? (eller et annet matematikkfag)
    a. Hvordan velger du oppgaver, som du gir elevene eller til gjennomgang?
    b. Hvor lang tid bruker/brukte du på å forberede en økt i R2? Er dette mer eller mindre enn i andre fag du underviser?
    c. Hvordan tror du at LK20 vil endre måten du forbereder deg til timer? Hvorfor? Hva vil være de største endringene?

1.2 Opplysninger om integraler

1. Når i R2 kommer integraler?
    a. Hvilke temaer må være gjennomgått før – hvorfor?
    b. Hvor lang tid settes av til integraler?
2. Hva vil du si kjennetegner undervisningen av integraler? Skiller det seg fra andre temaer?
3. Hva vil du si kjennetegner en oppgave om integraler – som elever må arbeide med i timen, som lekse eller på en prøve?
    a. Hvordan opplever du formulering av integraloppgaver?
    b. Hva kreves av elevene for å løse integraloppgaver? (Formler, tegning, forklaringer osv.)
4. Hva er din erfaring med elevers opplevelse av temaet? Gjerne sammenlign med andre temaer.
    a. Hva er vanlige spørsmål som blir spurt i gjennomgangen av stoffet eller når elever arbeider med oppgaver?

1.3 Opplysninger om problemløsning

1. Hva er din forståelse av begrepet problemløsning?
2. Hva er din forståelse av en problemløsningsoppgave? Hvordan er det annerledes enn en tradisjonell rutineoppgave?
    a. Hva vil du si er målet med en problemløsningsoppgave?
    b. Hvorfor kan det være viktig med problemløsningsoppgaver i undervisningen?
    c. Har du noen grunner til at vi bør unngå problemløsningsoppgaver?
3. Hva mener du kjennetegner en god problemløser? – Strategier, forkunnskap, resonnement, kjønn osv.
4. Har du benyttet problemløsningsoppgaver i din undervisning i R2 (eller andre fag)?
    a. Hvorfor/ hvorfor ikke?
5. Hvordan ser en undervisningsøkt ut med problemløsning?
    a. Hvilke forberedelser gjør du?
    b. Hvilke faser består undervisningen av? Typiske gjøremål?
    c. Tidligere erfaringer (generelt oppfølgingsspørsmål)

1.4 Oppgave til neste gang:

Forbered 2 problemløsningsoppgaver med integraler, som vi kan se på neste gang.

- Den første (åpen): Hvis du vet om en, hvis du finner en eller hvis du vil lage en problemløsningsoppgave med integraler – ta den med.
- Den andre: Lag en problemløsningsoppgave ut fra en «vanlig» oppgave i boken, altså gjør en «vanlig» oppgave i boken med integraler om til en problemløsningsoppgave. Inkluder den originale oppgaven også, slik at vi kan sammenligne likheter/ulikheter.

Intervju 2

2.1 Repetisjonsspørsmål

1. Hvorfor vil du si at det er viktig at elever lærer om integraler?
2. Hva vil du si kjennetegner en oppgave om integraler? (nå siden du har gjort litt forberedelser)
3. Hva erfarer du at elever opplever som lett med integraler? Hva erfarer du at elever kan oppleve som det vanskeligste innenfor integraler? Hvorfor tror du at det er slik?
4. Hvordan forstår du problemløsning?
5. Hva mener du kjennetegner en problemløsningsoppgave? Hvordan vil denne skille seg en tradisjonell rutineoppgave?
6. Hva erfarer du kjennetegner en god problemløser?

2.2 Problemløsning og integraler

1. Hvordan kan du forberede en «god» problemløsningsoppgave?
    a. Hva må du ta hensyn til?
    b. Hvilke forventninger har du til elevene?
    c. Hvor kan hente du inspirasjonen fra?
2. Vil du si at problemløsning er annerledes innenfor integral enn andre tema?
    a. På hvilken måte/ hvilken måte ikke?
    b. Kan en problemløsningsoppgave hjelpe elever med å forstå/beherske det de opplever som vanskelig med integraler? Hvorfor?
3. Elever er forskjellige:
    a. Hvordan kan du ta hensyn til dette i integralregning?
    b. Hvordan man legge til rette for dette med problemløsning?
    c. Har du tenkt på dette når du forberedte oppgavene til i dag?

2.3 Den første forberedte problemløsningsoppgaven

1. Hvordan ser den første oppgaven ut?
2. Hvordan gikk du frem for å forberede oppgaven?
    a. Hvorfor gjorde du det slik?
    b. Hvor lang tid brukte du på å lage/finne denne oppgaven?
3. Hva vil du si gjør dette til en problemløsningsoppgave?
4. Hvilke forskjeller er det mellom denne oppgaven og andre lignende oppgaver i læreboken? Hva er likhetene?
5. Hvordan vil du evaluere om denne oppgaven er en god oppgave?
    a. Hva kunne gjort denne oppgaven bedre?
    b. Ville dine nåværende/tidligere elever kunne løst denne?

2.4 Den andre forberedte problemløsningsoppgaven

1. Hvordan ser den andre oppgaven ut, den hvor du skulle lage en problemløsningsoppgave ut fra en «vanlig» oppgave?
2. Hvordan gikk du frem for å forberede denne?
    a. Hvordan så den originale oppgaven ut?
    b. Hvor mye av den originale oppgaven beholdt du og hvor mye kuttet du?
    c. Hvorfor gjorde du det slik?
    d. Hvor lang tid brukte du på å lage denne oppgaven?
3. Hva er det som gjør dette til en problemløsningsoppgave nå?
    a. Opplever du at oppgaven er lettere eller vanskeligere nå? På hvilken måte?
4. Har du brukt denne eller en lignende oppgave i din egen undervisning?
5. Hva er likheten mellom denne oppgaven og den du hentet denne fra?
6. Hvordan vil du evaluere om denne oppgaven er en god oppgave?
    a. Hva kunne gjort den bedre?
    b. Ville dine nåværende/tidligere elever kunne løst denne?

Vedlegg II Informasjons- og samtykkeskriv

Vil du delta i prosjekt om *"Hvordan forbereder lærere problemløsningsoppgaver om integraler"*?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et prosjekt hvor formålet er å undersøke hvordan problemløsning forberedes og brukes med integralregning. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med prosjektet er å undersøke hvordan problemløsningsoppgaver om integraler ser ut og identifisere hvilke tanker lærere har om å forberede og gjennomføre slike oppgaver i sin undervisning. Prosjektet kommer til å inkludere intervjuer av 4-6 lærere som underviser/har undervist R2-matematikk på videregående skole. Målet er at hver deltaker gjennomfører to (2) intervjuer – et (1) introduksjonsintervju og et (1) oppfølgingsintervju, hvor deltakerne blir bedt om å forberede noen oppgaver til det siste intervjuet.

Noen av problemstillingene som jeg ønsker å undersøke er: «Hvorfor er det viktig med problemløsning i undervisning – og hva er målet med en problemløsningsoppgave?» og «Er problemløsning annerledes innenfor integraler enn andre tema?». Dette er en del av en masteroppgave, som skrives av Chris André M. Lygre, ved lektorprogrammet for Universitet i Bergen (UiB).

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Bettina Dahl Søndergaard ved Matematisk Institutt ved UiB er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Utvalget for dette prosjektet er lærere som underviser/har undervist R2-matematikk på videregående skoler i Bergen og omegn, ettersom integraler er en del av R2. Du er blitt trukket ut til å delta da du tilhører dette utvalget. Det er totalt fire (4) lærere som får denne henvendelsen.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du tar del i to (2) intervjuer over Zoom. Hvert intervju vil vare omtrent 30-60 minutter. I intervjuene vil jeg spørre om hvordan du forbereder problemløsningsoppgaver, hva er viktig med problemløsning, hva er viktig med integraler og generelt om dine tidligere erfaringer med undervisning med integraler og problemløsning. Jeg tar notater, lyd- og videoopptak fra intervjuet. Intervjuet vil bli transkribert, hvor personopplysninger om deg blir anonymisert i transkripsjonen.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Jeg vil bare bruke opplysningene om deg til formålene jeg har fortalt om i dette skrivet. Jeg behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det er kun meg, Chris André M. Lygre, som vil ha tilgang til personopplysninger om deg.
- For å sikre at uvedkommende får tilgang til personopplysninger om deg, så vil navn og andre personopplysninger erstattes med koder. Kodene vil lagres på egen navneliste på ekstern lagringsplass adskilt fra øvrige data. Filen(e) med personopplysninger vil bli låst med kode.

Som deltaker vil du ikke kunne gjenkjennes av andre i publikasjonen.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når oppgaven er godkjent, noe som etter planen er juni 2021. Personopplysninger og opptak vil slettes ved prosjektslutt.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Bettina Dahl Søndergaard ved Matematisk Institutt ved UiB har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Matematisk institutt ved UiB ved Bettina Dahl Søndergaard, Bettina.Dahl.Soendergaard@uib.no
- Chris André M. Lygre, cly003@uib.no, 473 20 436
- Vårt personvernombud: Janecke Helene Veim, Janecke.Veim@uib.no, 55 58 20 29 / 930 30 721

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Veileder Student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Hvordan lærere forbereder problemløsningsoppgaver om integraler,* og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

---

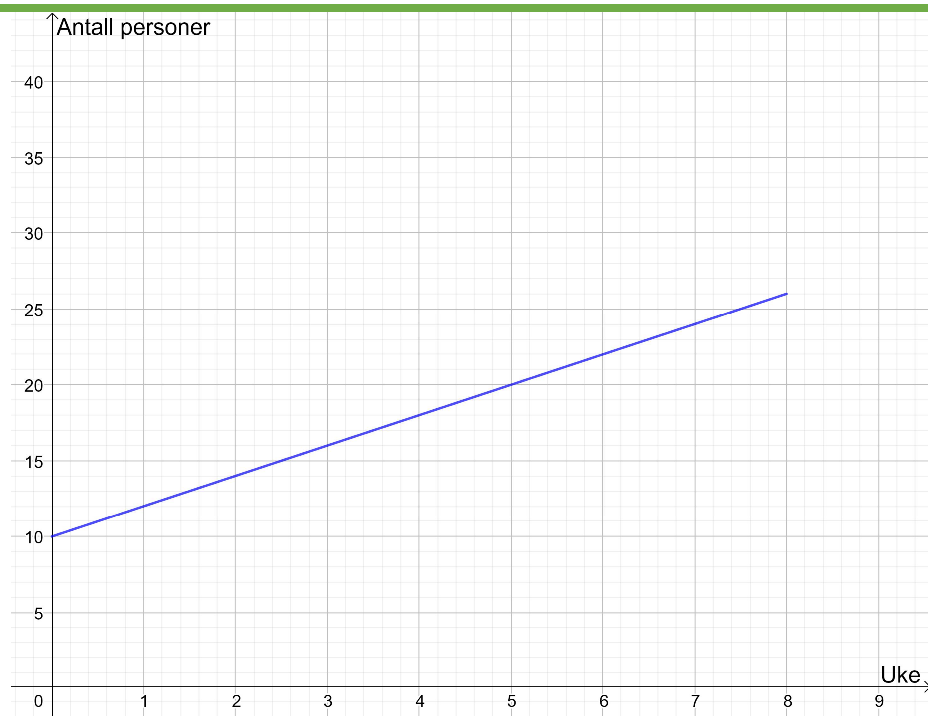
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg III Koder og farger til transkripsjon

Tekst – tekst	Tankestrek betyr kort pause i et sekund eller to, at lærer bruker fyllord som «øhm», «eh» eller lignende eller at lærer stopper å snakke midt i en setning.
Tekst … tekst	Betyr ord en ikke kan høre godt nok til å transkribere, ved for eksempel mumling.
'Tekst'(?)	Betyr tekststreng der en er usikker på om transkribering er korrekt, altså om jeg har hørt riktig.
Tekst/	Når en avbryter en annen så denne slutter å snakke og den som avbryter overtar.
//Tekst	Når informant og intervjuer begynner å snakke i munnen på hverandre.
Tekst//	Når informant og intervjuer slutter å snakke i munnen på hverandre.
[Tekst]	Tekst i klammeparentes er avklarende tekst eller ord som er lagt inn der det oppleves en mangel på et ord eller betydning.
(Tekst)	Tekst i parentes er beskrivelse av situasjonen eller ting en ser eller forstår gitt kjennskap til videoopptaket.
Tekst	Spørsmål fra intervjuguiden om problemløsning og integral (generell).
Tekst	Spørsmål fra intervjuguiden om den første forberedte oppgaven.
Tekst	Spørsmål fra intervjuguiden om den andre forberedte oppgaven.
Tekst	Spørsmål fra intervjuguiden om oppgave 2 på den andre forberedte oppgaver (gjelder kun Lærer 3).

Vedlegg IV Forberedt problemløsningsoppgave fra Lærer 1

Den første oppgaven



FHI har gjennomført modellering og presenterer kurven ovenfor som illustrerer utviklingen av tallet på nye smittede personer per uke.

Oppgave 1

Hvordan kan du gå frem for å bestemme det totale antall personer som ble smittet i løpet av disse 8 ukene?

Forklar kort hvordan du tolker grafen og hvordan du går frem for å finne svaret. Er det mulig å tolke grafen på flere ulike måter? I så fall forklar.

Oppgave 2

Hva hvis grafen viser tallet på smittede personer per uke (anta 1 uke = 5 arbeidsdager)? Hvordan kan du gå frem for å bestemme det totale antallet personer?

Sammenlign med svaret du fikk på oppgave 1.

(Gruppene skal presenterer det de har diskutert)

Vedlegg V Forberedte problemløsningsoppgaver fra Lærer 2

Den første oppgaven

En pasient blir tilført medisin kontinuerlig. Dosen er 2,0 mg per time. Samtidig blir 20 % av den totale medisinmengden skilt ut per time. Pasienten starter uten medisin i kroppen.

a) Forklar at dette gir oss differensiallikningen $y' = -0{,}20y + 2, \quad y(0) = 0$

b) Bruk CAS til å løse denne differensiallikningen

c) Hvor stor blir medisinmengden pasienten har i kroppen etter lang tid?

Pasienten blir ikke fort nok frisk, så legen bestemmer seg for å endre medisin. Denne nye medisinen blir også skilt ut med 20 % per time og pasienten starter uten noe av denne medisinen i kroppen. Pasienten kan ikke ha mer enn 30 mg av den nye medisinen i kroppen på noe som helst tidspunkt.

d) Hvor stor dose kan pasienten få per time?

Den andre oppgaven

Et sykdomsutbrudd i en stor by kan modelleres med formelen $f(x) = 4xe^{-x}$ der x er tiden etter utbruddet startet i måneder og $f(x)$ er antall syke per 100 000. Befolkningen i byen er 5 000 000 personer.

a) Tegn grafen til f og gjør en tolkning av det vi ser

b) Når er utbruddet verst og hvor mange er syke da?

Vi antar at utbruddet er over etter 12 måneder

Hvor mange har blitt rammet av utbruddet i løpet av denne perioden?

Den originale oppgaven

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 4xe^{-x}$$

a) Finn nullpunktet til f ved regning.

b) Finn toppunktet til f digitalt og ved regning.

c) Finn vendepunktet digitalt og ved regning.

d) Tegn grafen til f.

e) Et flatestykke F er avgrenset av x-aksen, grafen til f og linja $x = 1$. Finn digitalt og ved regning arealet av F.

f) Vi dreier flatestykket f 360° om x-aksen. Finn ved regning volumet av den omdreiningsgjenstanden vi nå får fram.

Vedlegg VI Forberedte problemløsningsoppgaver fra Lærer 3

Den første oppgaven

Oppgave 1

På en ferietur til Tyrkia på 90-tallet sa en guide at de ikke hadde kontroll på hvor mange mennesker som bodde i landet. En løsning kunne vært å holde kontroll på endringen av folketallet over en viss periode, slik at man kunne de beregne seg tilbake til populasjonen ved hjelp av integrasjon (og differensialligninger).

Simuler et land og overfør dette til Tyrkia. Du kan selv finne passende tall.

Oppgave 2

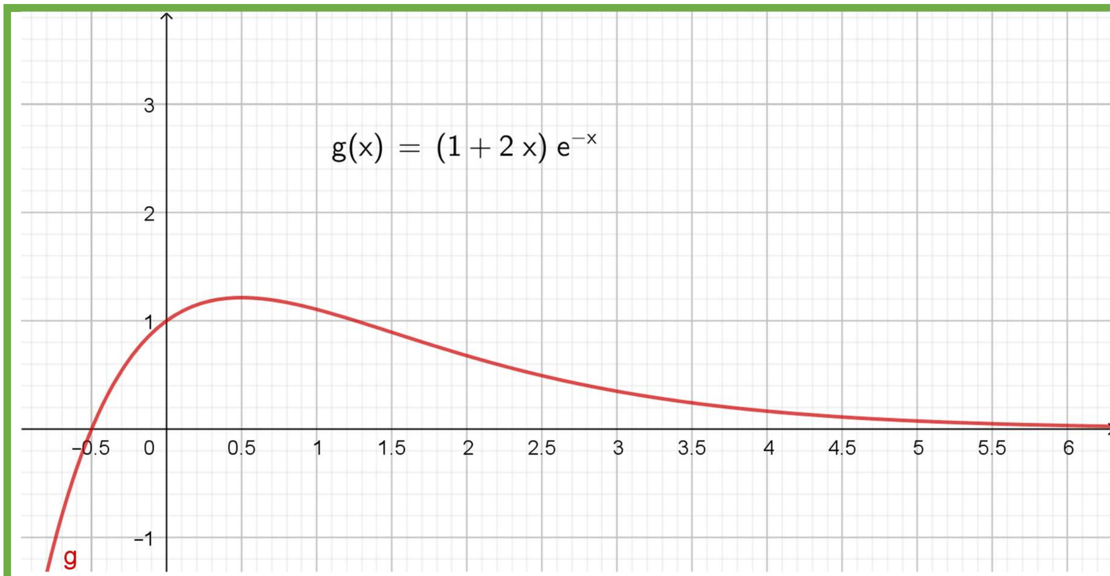
I begynnelsen på 2000-tallet dro rundt 50 leger, fra blant annet Haukeland Universitetssykehus, på en studietur til Portugal for å finne volumet av pungsteiner. De tok pungsteiner fra okser og kastet dem oppi et målebeger.

Dette kan oppfattes som en meget dyr tur for noe som elever enkelt kan finne ut ved hjelp av scanning, regresjon og integrasjon. Legene kom frem til at for å finne volumet V av en pungstein, så kunne man multiplisere prismevolumet med 0,5:

$$V = \tfrac{1}{2} l \cdot b \cdot h$$

Finn en bedre formel for volumet.

Den andre oppgaven



La oss se på en vanlig funksjon fra R2, slik som den ovenfor. Denne kan manipuleres litt slik at tallene passer til den «virkelige» verden og vi kan lage «ekte» oppgaver. Dette kan være veksten av et virus, der arealet er det totalt antall smittede. Det kan være farten til en partikkel som gir oss avstand eller tilbakelagt strekning osv. Ved å forandre på konstanter og koeffisienter blir funksjonene riktige.

Da problemet nesten er servert, som i vanlige norske lærebøker, så vil problemløsningen ligge i å beskrive en kurve som får ønsket fasong (som for eksempel den ovenfor). Deretter kan koeffisienter justeres ved blant annet regresjon, for å løse problemet.

Vedlegg VII Forberedte problemløsningsoppgaver fra Lærer 4

Den første oppgaven

Kan du bruke integralregning (eller en annen metode) for å vise ulikheten

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots<\frac{2}{3}$$

Mulig hint:

Sammenlign rekken som en arealsum av rektangler med $\int_1^\infty \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$

Den andre oppgaven

Helse RettVest skal regne på kostnaden ved mulig kontinuerlig vaksinering mot Covid-19. Kostnaden for en dose i dag er 125 kr. Hvordan vil sammenhengen være mellom prisstigning og samlet dosekostnad per person være det første ti årene?

Alternativ:

Hvordan vil dette utvikle seg om en ser for seg at doseprisen vil utvikle seg med en logistisk vekst?

Den originale oppgaven

Karianne er avhengig av å ta en spesiell medisin hver dag. Vi regner med at prisen på medisinen vil øke med 0,6 % hver måned i årene som kommer. Hun betaler nå 125 kr per måned for medisinen.

Når vi forutsetter at Karianne har det samme medisinforbruket hele tiden, vil utgiftene $U(x)$ i kroner per måned om x måneder være:

$$U(x) = 125 \cdot 1{,}006^x$$

a) Bruk integrasjon og regn ut medisinutgiftene til Karianne de første to årene.

b) Finn en tilnærmet verdi for medisinutgiftene til Karianne de første to årene dersom medisinforbruket øker med 2 % per måned.