Algebra i første klasse

Elin Røkeberg Lid

Erfaringsbasert master i undervisning
med fordypning i matematikk

Matematisk institutt
UNIVERSITETET I BERGEN

Høst 2015

Forord

Jeg vil gjerne takke veilederen min Runar Ile for god og konstruktiv veiledning. Takk for gode diskusjoner og oppmuntring underveis i arbeidet med oppgaven.

Jeg vil også takke alle forelesere og administrativt personell ved matematisk institutt som har gjort dette til en hyggelig og utviklende opplevelse. Dere er positive og på tilbudssiden og jeg har virkelig kjent at dere ønsker studentenes beste.

Jeg vil rette en stor takk til de andre studentene på kull-11. Dere er en fantastisk gjeng og jeg har lært så mye av diskusjonene våre. Jeg kommer til å savne samholdet og galgenhumoren.

Tusen takk til Tone, Jo, Hedda, Sigurd, Ingeborg, Sergio, Nora, Håvard, Ingrid, Brit Jorun, Knut, Sondre, Lukas og Live for husly. Det har vært et stort frynsegode å få tilbringe kvelder og frokoster hos dere på mine mange turer til Bergen.

Jeg vil videre takke mine foreldre Inger og Tore, og min søster Marit for at dere aldri mister troen på at jeg kan få til det jeg vil. Dere har vært en god støtte.

Takk til mine sønner Hallvard, Torbjørn og Eirik for at dere har listet dere rundt når mamma skriver oppgave. Takk for klemmer når dere har hentet meg på flyplassen. Takk for at dere var så sporty og ikke klaget når sommerferien i år ble jobbeferie.

Siste, men ikke minst takk til min tålmodige ektemann Øystein for at du holdt skipet flytende disse fire årene. Jeg hadde aldri klart det uten deg.

Sandnes, oktober 2015

Elin Røkeberg Lid

Innholdsfortegnelse

1 Bakgrunn

1.1 Innledning

Oppgaven handler om tidlig algebra. Jeg har som lærer gjennom 14 år arbeidet mye med matematikk på første trinn. Selv om det ikke har vært et mål i læreplanen på første trinn har jeg allikevel undervist algebra der jeg har sett at elevene var klare for det. I oppgaven vil jeg legge frem forskning på læring og undervisning i algebra i småskolen. Jeg vil med grunnlag i denne forskningen systematisere, eksemplifisere og diskutere hvordan undervisning i algebra kan gjennomføres på første trinn i grunnskolen.

Algebra er et emne som mange elever sliter med i ungdomsskolen og videre i sin utdanning. Dette har ført til at det har vært mye forskning på overgangen fra regning (aritmetikk) til algebra. Tanken er at algebra følger etter aritmetikk. Forskningen har fokusert på å forberede elevene fra mellomtrinnet på algebraen de skal møte gjennom pre-algebra. Forskning rundt tidlig algebra har en annen tilnærming. Litteraturen rundt tidlig algebra beskriver algebra og aritmetikk som avhengige av hverandre og ikke atskilte disipliner. Ved å undervise aritmetikken med fokus på også de generelle strukturene og dermed algebrafisere aritmetikken, så håper man å oppnå at det ikke blir så vanskelig for elevene å forstå formell algebra senere.

Mange studier har eksempler på undervisningsopplegg i tidlig algebra, men ofte bare enkeltleksjoner eller i utvalgte emner. Mitt bidrag vil blant annet være å samle disse oppleggene. Jeg legger også merke til at mye av den forskningen som finnes på tidlig algebra omhandler 2.-3.trinn, mens forskerne samtidig sier at man kan undervise algebra fra første trinn. Der det finnes studier på førsteklassinger vil jeg legge frem dette, men der studiene omhandler 2.-3.klassinger vil jeg forsøke å tilpasse dette til første trinn. Jeg vil da benytte meg av mine egne erfaringer med å undervise på første trinn sammen med forskning for å drøfte hvordan en slik undervisning kan være. I min gjennomgang av undervisningsopplegg vil jeg forsøke å belyse hvordan arbeid med tidlig algebra kan realisere læreplanen. Slik kan tidlig algebra bli en integrert del av læringsarbeidet og ikke noe man gjør i tillegg. Samtidig er tidlig algebra noe mer enn en annen måte å realiserer målene i læreplanen på. Det er en helt ny tilnærming til matematikk i første klasse.

På nasjonalt nivå så er forskning rundt algebra interessant i forbindelse med frafall i videregående utdanning, og også ved utdanninger ved høgskoler og universiteter. Liv Sissel Grønmo viser til NOKUT2008 (2013, s. 22) og sier at "*Vi vet at hovedårsaken til frafall i mange studier, som ingeniørutdanninger, er at elevene mangler grunnleggende ferdigheter i algebra* ". Store internasjonale undersøkelser som PISA og TIMSS viser at norske elever har problemer med algebra (Grønmo, 2013).

1.2 Egen bakgrunn

I oppgaven vil jeg benytte meg av mine egne erfaringer med undervisning i matematikk. Derfor er det nyttig å si litt om mine erfaringer og min bakgrunn. Jeg har alltid vært interessert i matematikk. Etter å ha tatt så mye matematikk som mulig i grunnskole og videregående startet jeg på matematikkstudier ved universitetet i Bergen. Men etter to år ved mat.nat. brøt jeg av studiene og begynte på lærerhøgskole i Bergen i stedet. Hva som gjorde at jeg ikke likte matematikk lenger kan jeg nok ha mange teorier om. Kanskje var det undervisningsformen, kanskje var det miljøet, kanskje var jeg rett og slett gått lei og ville prøve noe annet.

Etter tre år på lærerhøgskolens musikklinje var jeg ferdig utdannet allmennlærer. Men jeg følte meg for ung og uerfaren til å starte på lærergjerningen og søkte meg inn på videre studier ved universitetet i Oslo. Med min matematikk- og lærerbakgrunn så passet det godt å begynne på hovedfag i matematikkdidaktikk. Her ble det mer matematikk og dessuten didaktikk og jeg begynte på en hovedfagsoppgave. Samtidig fikk jeg meg familie og vi flyttet til Sandnes. Det ble behov for førsteklasselærer på min manns skole, og jeg begynte i full jobb der høsten 2001. Hovedfaget ble etter hvert lagt på hylla.

Jobben som lærer var interessant og jeg jobbet flere år med første trinn. Hele tiden hadde jeg med meg det jeg hadde lært av matematikk fra universitetet og i didaktikk fra høgskole og universitet. Jeg engasjerte meg for å gjøre matematikken interessant, morsom og begripelig for elevene (og kollegene). Sandnes kommune hentet inn hjelp fra Matematikksenteret i Trondheim, i form av en kursrekke ved Mona Røsseland. To lærere fra hver skole i kommunen fikk delta, og jeg var en av dem. Mona Røsseland hadde et forhold til matematikken som liknet på mitt, og jeg fikk stort utbytte av disse forelesningene. Hun hadde vært i Singapore og fortalte om metoder brukt der. Hun hadde også mange morsomme oppgaver i algebra. Jeg begynte å bruke tips fra hennes forelesninger, men også ting jeg fant på selv eller bearbeidet fra lærebøker og andre læreres tips. Jeg så at mange av de metodene jeg hadde brukt kunne støtte opp under en mer algebraisk tilnærming til matematikken. Jeg hadde ikke gjort dette med noen gode begrunnelser, men heller av ren intuisjon. En intuisjon som nok var påvirket av mine år med studier. Ofte tenkte jeg at jeg gjorde noe utenom læreplanen, men mente likevel at det jeg gjorde var viktig for elevenes utvikling. Jeg ble derfor engasjert når Mona Røsseland fremla begrunnelser og motivasjoner for å jobbe nettopp slik. Jeg meldte meg på et masterprogram ved universitetet i Bergen for å kunne komme til bunns i dette. Faren kan være at jeg hadde behov for å få bekreftet at det jeg har holdt på med i alle år har hatt noe for seg, og at jeg derfor ikke er nok kritisk til de artiklene som passer med min egen oppfatning. Årene som lærer har også gjort sitt til at jeg er vant til å lese gjennom ting med en pragmatisk tilnærming: jeg tar med det som jeg tenker er nyttig og ser bort fra det som jeg ikke synes passer. Jeg har ikke tid å bruke på ufruktbare tilnærminger. Men i et vitenskapelig arbeid er det viktig å få frem alle sider ved den forskningen man leser og ikke bare plukke med seg det beste. Det er viktig å komme frem med de innsigelser man har og være ærlig med de begrensninger man ser at forskningen på dette feltet kan ha.

1.3 Problemstilling

Mitt mål med oppgaven var å fordype meg i forskning rundt tidlig algebra og finne gode eksempler på hva og hvordan læring og undervisning i algebra kan være. Jeg har forsøkt å formulere to spørsmål som dekker dette.

1) Hva er tidlig algebra i første klasse?
2) Hvordan kan undervisningen i første klasse gjennomføres slik at den støtter en utvikling av elevenes algebraiske tenkning?

Jeg forsøker i oppgaven å gi innsikt i hva tidlig algebra kan være i første klasse. Ved å fordype meg i forskningen rundt undervisning og læring i tidlig algebra har jeg kommet frem til at det er noen komponenter som går igjen i slik undervisning og læring. I tillegg finner jeg mange eksempler i forskningslitteraturen og i egen praksis på aktiviteter som kan passe i første klasse. Jeg forsøker så å vise på hvilken måte de ulike komponentene i undervisningen kommer til uttrykk i de ulike aktivitetene. Jeg forsøker også å vise hvordan de ulike aktivitetene kan gi læring i tråd med målene i den norske læreplanen.

1.4 Oppgavens struktur

Jeg viser først hvilke metodiske valg jeg har tatt (kap 2). Jeg går så i begynnelsen av kapittel 3 gjennom hvilket syn på læring og undervisning jeg legger til grunn for denne oppgaven. Videre legger jeg frem teori rundt hva tidlig algebra er. Jeg sammenfatter teorien rundt tidlig algebra i tre komponenter som bør være tilstede i undervisningen når fokuset er elevenes algebraiske tenkning. I kapittel 4 legger jeg frem Kaputs systematisering og skjematisering av begrepet algebra. I kapittel 5 benytter jeg meg av komponentene i kapittel 3 og definisjonen av algebra fra kapittel 4 til å strukturere en gjennomgang av konkrete undervisningsforløp i tidlig algebra. Jeg viser også til mål fra K-06. I kapittel 6 diskuterer jeg prinsippene bak eksemplene i kapittel 5. Kapittel 7 inneholder en konklusjon. Kapittel 8 viser til hvilke implikasjoner det får dersom man legger konklusjonen i kapittel 7 til grunn. Kapittel 9 inneholder anbefalinger for videre forskning.

2 Metode

Jeg synes det har vært vanskelig å definere hva som er metodene i denne oppgaven. Det er for det første en teoretisk oppgave i den forstand at mye av empirien i denne oppgaven er hentet fra litteraturen. Det er altså eksempler som allerede er analysert og nedskrevet av andre. Jeg har forsøkt å samle disse eksemplene og systematisere dem i Kaputs skjema (nedenfor), for slik å undersøke om det er mulig å arbeide med alle deler av det Kaput definerer som algebra.

De undervisningseksemplene jeg har funnet er sjelden del av longitudinale undersøkelser der man vil måle en effekt av slik undervisning. Det er her mer snakk om eksistensevidens. De viser at det finnes undervisningsforløp som har vært testet ut og som forskerne mener yngre elever kan forholde seg til. Jeg har også tatt med eksempler som jeg selv har brukt i egne klasser og som jeg har opplevd som vellykkede. I tillegg har jeg tilpasset til førsteklassinger opplegg som forskere har testet ut på eldre elever. Da har jeg i tillegg til litteraturen om tidlig algebra bare min egen erfaring som førsteklasselærer og min kunnskap om elevers læring å støtte meg på. Det trengs mer forskning på effektiviteten av en slik tilnærming og hvilken virkning tidlig algebra har på elevenes algebraforståelse på sikt.

I tillegg mener jeg at jeg har benyttet meg av noe som kan likne på ”grounded theory”. Walsh et al. (2015) sier det er tre prinsipper i grounded theory: *emergence, theoretical sampling* og *constant comparison*. Grounded theory er da, slik jeg tolker det, å lytte til det datamaterialet man har uten å ha bestemt seg for på forhånd hva man vil se etter, men heller la det vokse ut av dataene. Slik kan man oppdage kategorier som kan formaliseres og brukes i videre datainnsamling og –analyse. Utvikling av teori skjer samtidig som man samler inn nye data. Man vurderer teorien sin i møte med nye data og man utvikler teorien sin samtidig som man undersøker om nye data passer inn i samme teori. Samtidig bruker man den nye teorien til å analysere og kategorisere dataene. I mitt arbeid med eksemplene i kapittel 5 var det nettopp dette som skjedde, helt uventet (3.4). Jeg gikk ikke inn i materialet med det for øyet å finne noen kategorier, men jeg la merke til at det var tre kategorier som gikk igjen i alle, eller de fleste av de konkrete oppleggene jeg fant i forskningslitteraturen. Kelle, Bryant og Charmaz (2010) trekker fram at slike kategorier ikke skal påtvinges datamaterialet, men vokse frem fra datane. Da jeg ikke var på utkikk etter kategorier, men disse selv presenterte seg underveis, så mener jeg at jeg har oppfylt dette kriteriet. Jeg undersøkte så systematisk om kategoriene var tilstede i nye eksempler jeg fant, og om det stemte med litteraturen rundt tidlig algebra. Jeg brukte så disse tre kategoriene til å analysere og presentere undervisningsoppleggene i oppgaven. Kategoriene jeg fant ble dermed en ny måte for meg å se på materialet mitt. De ble en måte å organisere den videre utforskningen av temaet på. Dette kaller Stern (1980) ”*a fresh perspective in a familiar situation*”. Kategoriene kan fremstå som selvsagte, men jeg mener at et fokus på at disse tre kategoriene er tilstede som komponenter i et undervisningsforløp gjør noe med kvaliteten på undervisningen. Det er også en måte å sikre at gode råd fra litteraturen rundt tidlig algebra blir fulgt. Jeg vil karakterisere disse tre kategoriene som et viktig funn og noe av det jeg kommer til å ta med meg tilbake til min egen praksis som lærer. Stern poengterer at verdien til teorier fremkommet gjennom grounded theory og som gir et nytt perspektiv til kjente situasjoner ligger i at de kan brukes i praksis (Stern, 1980, s. 20).

2.1 Litteratursøk, kriterier og utvalg

Jeg har benyttet meg av skjønnsmessig og formålstjenlig utvalg av litteratur (Befring, 2007). Jeg har hatt et klart fokus underveis og valgt med hård hånd i all den interessante litteraturen. Hele tiden har jeg forsøkt å begrense meg til det som var mest mulig innenfor oppgavens tema og problemstilling. Jeg har mange ganger begynt å lese artikler som jeg etterhvert har sett at er på siden av det jeg vil utforske. Etterhvert har jeg blitt flinkere til å sile bort artikler mer effektivt. Jeg har allikevel lest veldig mange flere artikler enn de som refereres i oppgaven. I dette ligger det selvsagt en risiko for at artikler som kunne ha vært viktige for oppgaven er blitt valgt bort. Slik vil det alltid være, men forhåpentligvis er dette en ferdighet som kan oppøves ved mye trening. Det er mange indikatorer man kan bruke. Først så kan man se på hvilke publikasjoner artiklene er en del av, hvilke databaser og søkemotorer de fremkommer i, man kan se på forfatterne og hvem de er, man kan se på hvilke forskningsmiljøer artiklene er fremkommet i, man kan ved å se på begreper og konstrukter i artiklene vite noe om hvilke områder som vil bli omtalt i artikkelen, man kan se på hvilke nøkkelord som er valgt og man kan se på sammendraget og finne ut hva man kan forvente av artikkelen. Ved å lese mange artikler og gjøre mange søk så vil man etterhvert også kjenne igjen forfatternavn og begreper.

Jeg har også i stor grad brukt lenkeutvalg (Befring, 2007) ved at jeg har sett i litteraturlisten på artikler jeg har vurdert som gode eller sentrale og funnet nye navn og studier der. Dette kan selvsagt føre til at det blir en begrensning i hvilke forskningsmiljø og retninger som blir representert i oppgaven.

Mine kriterier for valg av stoff har vært

1. Stoff som belyser utvikling av algebraisk tenking hos små barn
2. Konkrete opplegg

Etterhvert som jeg lette etter artikler med konkrete opplegg har det også vært naturlig å dykke ned i hvert av de eksemplene jeg valgte og lese forskning rundt det enkelte underliggende begrep, for eksempel likhetstegn eller mønster.
Jeg har brukt mest primære kilder. Jeg foretrekker også å gå til originalartikkelen når jeg ser sitater i andres artikler.

2.2 Validitet og reliabilitet

Vi må i alt vitenskapelig arbeid være bevisste på studiens validitet eller gyldighet, og reliabilitet eller pålitelighet.
Validitet handler om i hvilken grad studien undersøker det den sier den skal undersøke (Kvale & Brinkmann, 2009). For at mine resultater skal være gyldige så må de ha relevans for området tidlig algebra. De eksemplene jeg har valgt bør være sentrale for at elever skal utvikle sin algebraiske tenkning. For å sikre at eksemplene dekker området algebra så støtter jeg meg på Kaputs skjema (Kap. 4). Jeg har jobbet ut fra at dersom jeg kan finne og utvikle undervisningsopplegg innenfor alle delene av hans definisjon av algebra, så har jeg vist at disse til sammen dekker begrepet algebra. For at undervisningsoppleggene jeg velger skal handle om det jeg ønsker, nemlig tidlig algebra, har det vært viktig for meg å finne ut hva som anses i litteraturen å være sentrale ideer i tidlig algebra.

Kvale og Brinkmann (2009) sier at en undersøkelses reliabilitet er definert som hvor pålitelige og konsekvente resultatene er og om de kan reproduseres av andre forskere. Reliabiliteten handler om forskningens kvalitet. Det handler også om at de metodene jeg har brukt skal være mulige å bruke for andre forskere. I denne oppgaven er mye av datamaterialet andre forskeres undersøkelser.
Her blir det viktig hvilke studier jeg støtter meg til og hvor reliable disse er. Det er også viktig å være klar på hva som er andre forskeres funn og hva som er mine egne. Hvilke studier som blir valgt ut er påvirket av min forforståelse og mine kunnskaper

og erfaringer. Det er derfor viktig å være åpen om disse slik at leseren kan ha dette med seg når de leser mine tolkninger. Mye av den forskningen jeg har funnet konsentrerer seg om eksistensevidens. De sier at det finnes elever som er klare for algebra, men ikke om det er mulig å drive slik undervisning for alle barn på første trinn. Heller ikke denne oppgaven påstår å ha funnet svaret på dette. Forskere innen feltet innrømmer at det fremdeles er gjort for lite forskning i klasserommet.

Når det gjelder første trinn så har jeg funnet flere tilfeller der forskerne sier at det er mulig og ønskelig å drive med tidlig algebra fra første stund, men der de eksemplene de legger frem er fra høyere klassetrinn (Kaput, Carraher & Blanton, 2008; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007; Usiskin, 1997). Hva dette skyldes kan man bare spekulere i. Jeg har forsøkt å sannsynliggjøre at det er mulig å legge disse aktivitetene til første trinn. Jeg må da stole på egen erfaring og kunnskap når jeg tolker om et opplegg fungerer i første klasse eller ikke. Jeg har valgt ut opplegg som jeg har vurdert til å fungere, men dette er subjektive vurderinger som ikke er etterprøvd av andre. Samtidig har jeg forsøkt å legge dem frem på en slik måte at de er etterprøvbare. Jeg har forsøkt å gi en detaljert beskrivelse der det er nødvendig, og jeg har forsøkt å holde meg til enkle oppgaver som lett kan brukes og testes ut av andre. Studiene som er brukt til å utvikle de tre komponentene for undervisning er referert gjennom hele kapittel 5. Den som vil undersøke om disse tre komponentene eksisterer i datamaterialet kan gjøre det.

2.3 Etikk

I følge ”De nasjonale forskningsetiske komiteer” er det viktig at forskning skal ha et formål, eller en verdi utover forskerens eget utbytte (hentet fra http://www.etikkom.no, punkt 12, 29.5.2011). Jeg har selv hatt et stort utbytte av å jobbe med denne oppgaven. Samtidig har jeg hatt et ønske om at oppgaven kan brukes av andre. Jeg ønsker at ved å samle sammen gode eksempler fra forskningslitteraturen vil det lette arbeidet for andre som er interessert i samme område. Jeg har også ønsket å løfte frem tidlig algebra som et felt det bør forskes mer på i Norge og kanskje da særlig forskning på førsteklassingers forståelse for algebra.

I alt dette ligger det at jeg selv er engasjert i emnet. Dette engasjementet er viktig og nyttig for fremdriften og motivasjonen i prosjektet, men det er viktig at den informasjonen jeg finner ikke er farget av det jeg håper eller tror at jeg vil finne. Det er viktig at kritiske artikler også blir lest og gjengitt, eller at artikler som gir andre perspektiver ikke siles bort slik at jeg sitter igjen med artikler som bare støtter mine egne mål. Det er umulig å være helt objektiv. Man vil alltid gjøre et utvalg, og alle valg betyr at noe blir valgt bort. Man må være villig til å forkaste eller justere sine egne oppfatninger underveis på bakgrunn av ny kunnskap. Slik kan de resultatene jeg legger frem være med på å øke kunnskapen på området, ikke bare hjelpe meg som lærer videre i mitt arbeid med undervisning av førsteklassinger.

Det er også et viktig etisk prinsipp å være etterrettelig i bruk av andre forskeres artikler. Jeg har vært nøye med å referere til de artiklene jeg henter ideer fra og dersom jeg bruker direkte sitat tar jeg også med sidetallet. For at det skal være lettere å lese oppgaven har jeg noen ganger oversatt til norsk i stedet for å sitere direkte. Da har jeg også satt inn sidetallet i henvisningen slik at leseren selv kan gå til originalteksten.

3 Teoriramme

3.1 Læring

Det finnes mange teorier om hvordan læring skjer. Imsen (1998, s. 49) sier at: ”*Ingen teori alene gir ”hele sannheten”. De fleste teoriene befatter seg med bare en del av læringsfeltet, og vi må orientere oss i mange teorier om vi vil ha en mest mulig helhetlig forståelse av hvordan læring skjer*”. Selv om vi kan ha med oss perspektiver fra mange ulike teorier vil man ofte helle mer mot et perspektiv enn et annet. Til grunn for denne oppgaven ligger en tilnærming der kunnskap bygges fra prosesser til begreper hos den enkelte, men der dette skjer i et fellesskap der elevene sosialiseres inn i en matematisk kultur og et matematisk språk på en slik måte at den lærende påvirkes av samfunnet og samfunnet påvirkes av den lærende. Vi lærer i en sosial kontekst. Kunnskap utvikles i kommunikasjon og samhandling med andre. Vi kan derfor heller ikke studere et menneskes tenkning eller læring løsrevet fra den sosiale konteksten. Individet lærer ved å tilpasse sine private forståelser med de begreper som eksisterer i det sosiale fellesskapet. Dette synet støttes av sosialkonstruktivistiske teorier.

Men et fokus på en sosialkonstruktivistisk tilnærming betyr altså ikke at dette er hele sannheten om hvordan læring foregår. Kognitiv konstruktivisme poengterer at læring skjer hos det enkelte individ og derfor er avhengig av egenskaper hos individet. Konstruktivistisk læringsteori sier at den enkelte lærer blant annet gjennom å møte kognitiv konflikt og så gjenopprette balansen. Vi må altså møte oppgaver som bryter med det vi allerede har lært. Dette kan så innpasses (assimileres) i den kunnskap vi allerede har, eller vi må endre på kunnskapen (akkomodasjon) for å få dette nye til å passe. Behavioristisk teori sier at det kan være effektivt å lære gjennom stimulus og respons. Det er det vi benytter oss av hvis vi bruker drillaktiviteter der det gjelder å automatisere ferdigheter og fakta.

Sosialkonstruktivistisk teori underslår ikke at den individuelle læringsprosessen er viktig, men den sier at det kollektive kommer før det individuelle. Kunnskapen som er tilgjengelig er tilgjengelig gjennom kulturelle uttrykk. Vi tenker og lærer gjennom å bygge begreper om verden. Disse begrepene er avhengige av et språk. Et sosialkonstruktivistisk syn på læring støtter at det blir viktig å utvikle elevenes språk. Ved å ha gode presise ord så kan også tanken lettere bli presis. Dette er ikke minst viktig i matematikken. Dessuten blir det viktig å bygge opp et læringsmiljø i klasserommet som er en god kontekst for å utvikle et felles språk og dermed en felles læring. Det blir viktig å kommunisere og samhandle. Læring blir da hvordan vi bygger opp vår forståelse i samhandling og kommunikasjon med andre.

Sosial konstruktivisme bygger blant annet på tankene til Lev Vygotsky (Imsen, 1998). Hos Vygotsky er altså retningen til læring fra samfunn til individ. Språket har derfor en viktig plass i Vygotskys teorier. Han snakker om to funksjoner språket har for den voksne: et ytre språk til å kommunisere med og et indre språk som støtter tanken. For små barn sier han at disse to funksjonene ikke enda har skilt lag. Det er denne prosessen barnet er i når det begynner å snakke høyt til seg selv om det det gjør. Barnet er i ferd med å utvikle en indre tale til hjelp for tanken. Gjennom å hjelpe barn til å utvikle et godt ordforråd hjelper vi dem til å utvikle tanken. Ordene er tankens byggeklosser. En pedagogikk som gir elevene mulighet for å finne støtte i ordene både ved å snakke høyt for seg selv og med andre kan hjelpe små barn til å utvikle logisk og abstrakt tenkning (Imsen, 1998).

3.1.1 Den proksimale utviklingssone

En annen viktig ide hos Vygotsky er den proksimale utviklingssone (Vygotsky, 1978). Den proksimale utviklingssone er kort fortalt det du kan klare å lære deg ved hjelp av andre. Det skal være så vanskelig at du ikke kan klare å lære det på egen hånd, men det skal samtidig være så lett at du klarer det med litt hjelp. Dersom ingen av elevene kunne lært seg dette på egen hånd, men de klarer å diskutere seg frem til det i fellesskap så er de begge i den proksimale utviklingssonen. Det gjelder altså å legge undervisningen litt foran det elevene mestrer slik at de har noe å strekke seg etter. Samtidig må det være oppnåelig for eleven å lære det med støtte. Vygotsky ser det ikke som et problem om undervisningen ligger i forkant av elevenes læring. Han mener at så lenge det er kontakt mellom lærestoffet og elevenes proksimale utviklingssone så vil det virke aktiverende på elevens læring (Imsen, 1998). Her hviler det et stort ansvar på lærer. Vi kan ikke bare finne ut hvor elevene står akkurat nå i forhold til individuelt kunnskapsnivå. Vi må også vite noe om hvor langt eleven kan strekke seg ved hjelp av støtte fra lærer og medelever. To elever som har samme kunnskapsnivå kan ha helt ulik størrelse på sin proksimale utviklingssone.

En elevs proksimale utviklingssone vil også være avhengig av hvilken støtte som er tilgjengelig. "*Størrelsen på utviklingssonen vil derfor kunne variere alt etter hvilken lærer eleven har og hva slags lærestoff det arbeides med*" (Imsen, 1998, s.

160). Den støtten som en lærer kan gi for at elevene skal kunne være i den proksimale utviklingssone kalles ofte ”skaffolding” eller stillasbygging (Wood, Bruner & Ross, 1976). Vi vil ikke gi elevene svaret, men hele tiden tilpasse stoffet slik at det blir vanskelig nok til at det skjer læring, men ikke for vanskelig. Den voksne (eller kompetente medelev) gir støtte på de delene av oppgaven som eleven ikke enda mestrer. Etter hvert som eleven mestrer mer og mer av det oppgaven krever, så tas stillasene ned og flyttes til andre områder. I tillegg til kunnskap om elevens proksimale utviklingssone, er det sentralt for elevens læring hvilken forståelse lærer legger til grunn for sin tilnærming til undervisning.

3.1.2 Instrumentell og relasjonell forståelse

Dersom vi forholder oss til matematikk som en samling regler som skal pugges og drilles så har vi det Stieg Mellin-Olsen kalte et instrumentelt syn på matematikken (Star, 2014). Skemp kaller dette ”*rules without reasons*” (Star, 2014). Skemp sier at dersom man har en instrumentell forståelse så memorerer man hvilke problem de ulike metodene fungerer for og hvilke de ikke fungerer for. For hver nye klasse problemer må man så lære seg en ny løsningsmetode. Skemp sammenligner dette med å være i en ny by og så lære seg veien mellom de stedene man trenger å gå til. Dersom man så går feil på veien, så blir man nødt til å gå samme vei tilbake til man kjenner seg igjen. Relasjonell forståelse kan sammenlignes med å gå rundt i byen og kikke og danne seg et mentalt kart over hvordan byen ser ut og hvor de ulike stedene man trenger å gå til ligger på dette kartet. Dersom man så skal forflytte seg fra A til B så har man mange mulige ruter. Dersom man går feil på veien og tar til høyre en gate for tidlig, så vet man allikevel hvor man er og kan fortsette mot B, selv om man ikke går den tidligere tillærte veien. På samme måte krever relasjonell forståelse at man legger ned en større innsats i innlæringen (man trenger lenger tid på å lære bygge et mentalt kart av en by enn på å lære seg retningsbeskrivelser fra A til B).

Noen emner kan være vanskeligere å forstå relasjonelt eller krever at man forholder seg til flere emner. For eksempel så kan man raskt lære seg instrumentelt at $2 \cdot \pi \cdot r$ er omkretsen til en sirkel. Dersom man skal lære seg dette relasjonelt så er man avhengig av å først vite noe om forholdstall. Omkretsen forholder seg til radien med en faktor pi. Dessuten kan man trenge å bruke matematikk som det er for vanskelig å skjønne relasjonelt før man har lært mer matematikk. For eksempel kan man ha behov for metoder for å regne ut størrelser i fysikktimene som er for komplisert å skjønne relasjonelt på samme klassetrinn. Hva er så fordelen med å utvikle en relasjonell forståelse dersom den instrumentelle er enklere å lære, kan brukes til komplekse fysiske beregninger og gjør at man får mange riktige svar? Skemp nevner fire punkter som taler til den relasjonelle forståelsens fordel:

1) *Lettere å løse nye oppgavetyper.*
   Dette kan være når du kan nok matematikk til å løse oppgaven, men ikke vet hvilke metoder du kan bruke. Dette gjelder typisk problemløsning. Problemløsning er definert som oppgaver der man ikke kan følge en bestemt oppskrift, men må kombinere kunnskap man har for å løse problemet.
2) *Det er lettere å huske.*
   Dette kaller Skemp et paradoks: det er vanskeligere å lære, men lettere å huske. Man husker alt i en sammenheng. Man får hjelp av den sammenhengen begrepet inngår i til å gjenkalle regneregler eller nyttige relasjoner.
3) *Relasjonell kunnskap kan være et mål i seg selv.*
   Det er motiverende å forstå hvordan ting henger sammen.
4) *Relasjonelle skjema har en organisk kvalitet.*
   Dette betyr at hvis man har glede av å forstå hvordan ting henger sammen, så kan man være tilbøyelig til å søke ny informasjon, også utover det som er forventet ut fra fag og pensum.

(Skemp, 1978, s. 12-13)

Dersom vi har en relasjonell forståelse for matematikk så betyr det at relasjoner og strukturer i matematikken blir det interessante. Det er disse relasjonene og strukturene vi fokuserer på når vi vil utvikle elevenes algebraiske tenkning. Hvis vi skal arbeide med strukturene og relasjonene i matematikken er algebraen et effektivt verktøy.

3.1.3 Strukturell og operasjonell forståelse

Sfard og Linchevski (1994) sier at det ikke er en enkel vei til strukturell forståelse i matematikk. Matematiske begreper har ofte en dualistisk natur. For eksempel kan en funksjon defineres som et sett av ordnede par, men også som en metode for å komme fra et system til et annet. Vi kan altså se på y=2x som parene av y og x som oppfyller uttrykket, men også som den utregningen som tar et system y til et system x. I dette tilfellet vil vi kunne kalle denne metoden for dobling. De tallene vi setter inn for x dobles for å gi y. Vi kan altså se for oss en liste med ordnede par, eller en prosess der vi regner ut disse parene. Dersom vi fokuserer på prosessen og utregningen sier Sfard og Linchevski at vi har et operasjonelt begrep. Dersom vi ser på y=2x som en funksjon, som en likning eller som en verdi så ser vi hele uttrykket som et objekt. Dette kaller de *reifikasjon* (Sfard & Linchevski, 1994) eller tingliggjøring. Da forholder vi oss til y=2x som et strukturelt begrep. Vi kan sammenligne dette med andre uttrykk, vi kan forholde oss til det som et tall og vi kan manipulere med det og si at y/x=2. Motsatt vil et operasjonelt begrep kun bety at vi setter inn et tall for x og regner ut y. Sfard og Linchevski mener at det alltid eksisterer en slik dualitet i alle begreper i matematikken. Det kan være vanskelig å skille mellom de to forståelsene.

Det er mange gode argumenter for å si at operasjonelle begrep kommer først og så følger de strukturelle begrepene. Det som sees på som en prosess på et nivå oppfattes som et objekt på et høyere nivå. Sfard sier at det å se en matematisk enhet som et objekt betyr at man refererer til den som om den var en virkelig ting – en statisk struktur som eksisterer et sted i tid og rom. Det betyr også at man kan gjenkjenne en ide "*at a glance*" og manipulere med den som et hele uten å gå inn i detaljene (Sfard, 1991, s. 4). I vårt eksempel med y=2x vil det si å straks gjenkjenne dette som en lineær funksjon. De to sidene ved begrepet, den operasjonelle og den strukturelle er komplementære, sier Sfard. Vi trenger å ha begge disse forståelsene for et begrep samtidig, på samme måte som vi trenger å forstå lys både som bølger og som partikler for å få et fullstendig bilde.

Denne oppgaven legger til grunn av vi lærer i samhandling og kommunikasjon med andre. Vår forståelse for matematikk bygges gjennom at vi får erfaringer med prosesser som vi så gjennom reifikasjon danner begreper om. Disse begrepene er objekter som vi kan bruke når vi skal lære begreper på høyere nivåer. Det legges også til grunn at syn på forståelse der det er viktig å nå en strukturell forståelse i matematikken.

Sfard og Linchevski (1994) mener at ungdomsskoleelevenes problemer med å innta et strukturelt syn på matematikken stammer fra at man tradisjonelt hopper over algebraen som prosess og lærer elevene den som struktur helt fra starten. Historisk og begrepsmessig så bygges algebraen opp fra prosesser som så abstraheres til begreper og strukturer. Prosessene blir i seg selv til objekter vi kan studere og gruppere. Vi kan tenke oss at mange lærere har et strukturelt syn på algebra fra sin egen opplæring og ser på algebra som et sett regler. Dette advarer Sfard og Linchevski mot. Dette betyr ikke at vi må unngå å lære elevene å finne strukturene i aritmetikken og utvikle et strukturelt syn på matematikken fra første stund. Men denne strukturen må bygge på gode eksempler (Skemp, 1971) og erfaring med prosessene som inngår i strukturene. Dersom vi skal lære addisjon så må vi få erfaringer med ulike situasjoner der vi legger sammen og ulike måter å legge sammen på. Vi må utsette elevene for mange ulike eksempler og problemer. Her inngår addisjon i helt ulike kontekster og vi vil kanskje bruke litt ulike måter for å finne ut av situasjonene. De ulike erfaringene er med på å gi rikhet til begrepet. Vi kan telle opp hvor mange vi har, vi kan telle videre, vi kan telle den første mengden og så telle videre den andre mengden. Ut fra disse eksemplene kan vi diskutere hva addisjon egentlig er og fokusere på tenkning rundt strukturene som vokser ut av prosessene. Sfard og Linchevski (1994) anbefaler at elevene får mye trening på prosessnivå før de blir utfordret til å tenke på prosessen som et objekt. Hvis elevene har bygget seg et begrep om addisjon som ikke bare handler om aktiviteten å legge sammen så kan de bruke dette til å diskutere forskjeller på subtraksjon og addisjon.

Sfard (1991) sier at utviklingen av begreper går gjennom internalisering, kondensering og reifikasjon. Internalisering betyr i dette tilfellet at addisjon som prosess er naturlig for elevene. De vet hvordan det gjøres. Kondensering betyr at de ikke trenger å utføre en addisjon for å tenke på addisjon. Den indre modellen er ikke avhengig av spesifikke tall og detaljer. Det kan ta tid fra et begrep er kondensert til det blir tingliggjort. Selve reifikasjonen, tingliggjøringen kan det ta tid før inntreffer. Internalisering og kondensering ser Sfard på som en gradvis prosess som skjer mens man gjør mange oppgaver i emnet. Reifikasjonen kan skje plutselig og er ikke så lett å forutsi. Noen ganger krever en slik reifikasjon at man har begynt å bruke begrepet som om man forsto det til å løse nye oppgaver. I møte med begrepet brukt på høyere nivå så kan man plutselig oppdage hva det handler om. I addisjon kan dette bety at elevene kan addere, de har internalisert addisjon og har kondensert addisjon, men har ikke full forståelse for hva det er før de møter subtraksjon. Dette kaller Sfard en ond sirkel: det er vanskelig å lære subtraksjon uten å kunne addisjon først, samtidig forstår man ikke fullstendig addisjon før man har lært subtraksjon. Dette fører til at man må tåle å ikke skjønne alt i perioder, men med visshet om at man vil forstå det etter hvert bare man jobber videre i faget. Vi må altså ikke være redde for at elevene ikke forstår alt hele tiden. Vi må fortsette å gi dem gode eksempler for å bygge begrepene og hjelpe dem til å holde ut perioder med usikkerhet. Slik at de fortsetter å lete etter mening til de har forstått det. Spørsmålet er hvordan vi kan hjelpe elevene til å videreutvikle de erfaringene de har til strukturelle objekter. Sfard mener at det ikke er noen automatikk i at mange gode erfaringer fører til at elevene danner slike objekter. Vi må altså finne ut hvordan vi kan hjelpe elevene til å generalisere til strukturer fra eksemplene. I denne oppgaven vil jeg vise til forskning som sier at gjennom å *representere* og *diskutere* generalitet så kan elevene lettere oppdage strukturene i aritmetikken, funksjonene og modellene.

3.2 Undervisning

I det foregående har jeg redegjort for denne oppgavens syn på læring og utvikling av forståelse i matematikk. I det følgende vil jeg kort si noe om undervisning generelt før jeg i neste kapittel legger frem hva forskningen sier om undervisning og læring i tidlig algebra spesielt.

3.2.1 Lærers rolle

Teorier om undervisning kan ha ulike fokus. Noen teorier fokuserer mest på lærerens rolle, mens andre teorier er mer interessert i elevenes bidrag. I denne oppgaven legges til grunn et syn som både sier at læreren er viktig, men at elevens egen aktivitet er avgjørende.

1) Læreren skal støtte elevenes læring slik at de kan oppholde seg så mye som mulig i det Vygotsky kaller den proksimale utviklingssonen. Som tidligere nevnt legger oppgaven til grunn et sosiokulturelt læringssyn og Vygotskys tanker om språk og begrepsdannelse. Det blir altså viktig å legge opp undervisningen slik at elevene er aktive språklig, at de hjelper hverandre og at stoffet blir vanskelig nok.

2) Samtidig legges til grunn et syn på læreren som en god rollemodell. Lærer tar i bruk begreper og prosedyrer som elevene ikke selv er klare for å bruke, slik at elevene gradvis kan prøve dem ut og gjøre dem til sine egne. Blanton og Kaput (2011) snakker om pseudobegreper. De sier at dersom elevene begynner å bruke begreper de ikke kjenner betydningen av i sammenhenger som er meningsfulle for dem så vil de etter hvert få mening. Målet er at de skal bruke begrepene i sammenhenger der de passer og så oppdage meningen til begrepene gjennom konteksten og i kommunikasjon med læreren og andre elever.

3) Læreren må skape et inkluderende læringsmiljø der det er lov å teste ut sine tanker og uferdige begreper. Det kan være utfordrende å oppholde seg i den proksimale utviklingssonen. Da er det viktig å oppleve støtte fra dem rundt seg. Dessuten er det viktig for utvikling av begrepene at alle misoppfatninger og ufullstendige begrep tas

frem i lyset og diskuteres. Dersom man er redd for å gjøre feil så vil man ikke lufte det man er usikker på.

3.2.2 Metoder

Denne oppgaven vil ikke ta for seg alle de ulike undervisningsmetodene som finnes. Her er det ulike tradisjoner og trender. Det kommer stadig nye "revolusjonerende" metoder. Jeg går ikke inn på læring ved hjelp av data, utforskende læring, dialogbasert læring, problembasert læring og liknende. Det betyr ikke at disse ikke kan være veldig gode tilnærminger til undervisning. Det gjøres mye forskning på hvilke metoder som er de mest effektive. Noen av metodene er klart bedre egnet til å gjennomføre de aktivitetene som foreslås i denne oppgaven enn andre. Samtidig vet jeg av erfaring at metoder kan tolkes og tilpasses i det enkelte klasserom. Det er også viktig at metodene ikke blir målet eller innholdet i undervisningen. En metode er bare gyldig så lenge den fører til læring hos elevene. Ludvigsenutvalget sier i sin rapport: "*Det krever også en fleksibel gjennomføring av undervisningen ved at lærerne kan gjøre endringer dersom metodene eller arbeidsmåtene de har valgt, ikke gir ønskede resultater for elevenes læring*" (Ludvigsen-utvalget, 2015).

Vi må altså ha elevenes læring i fokus og velge metoder etter hvilke resultater vi ønsker. Vi trenger da et grunnlag for å velge hvilke metoder vi skal bruke. Dette bestemmes av hvilke mål vi har med opplæringen. Dersom målet er å huske flest mulig algoritmer på kortest mulig tid vil ikke metoder som fremmer refleksjon være det mest effektive. Men dersom elevene skal kunne bruke kunnskapen sin fleksibelt og i nye sammenhenger så kreves metoder som gir mulighet for refleksjon og modning. Dersom vi skal oppnå en strukturell forståelse så må vi ha et fokus på strukturene. Dersom vi skal kunne gå fra prosess til objekt så må vi møte mange gode eksempler. Det er derfor avgjørende at vi vet hva som er målet med undervisningen når vi skal velge metoder. Det er også greit å kjenne til teori om hvordan vi lærer og ulike komponenter som bør være tilstede i undervisningen.

3.3 Undervisning i algebra

I det følgende kapittelet vil jeg ta for meg ulike syn på algebra, algebraisk tenkning og hvilke konsekvenser dette har for undervisningen.

Det finnes mange definisjoner og tilnærminger til hva algebra er. Disse definisjonene vil påvirke hvordan vi tilnærmer oss algebraen didaktisk.

Thompson og Smith legger i begrepet algebra *"…the expression, manipulation, and formalization of mathematical concepts and structures mediated by explicit, rule-governed notational systems*" (J. Smith & Thompson, 2008, s. 95).
Det noen vil godta som uttrykk for algebraisk tenkning, vil andre kanskje hevde ikke oppfyller kravene til hva som er algebra. Kaput sier at tidlig algebra har blitt kritisert for å gi for liten oppmerksomhet til syntaktiske regler og symbolmanipulasjon (Kaput, Carraher, et al., 2008, s. xx). De som forsker på tidlig algebra har som regel et videre syn på hva som kan gjelde som symbolsk resonnering. De begrenser ikke det symbolske til formelle algebraiske symboler. Bruk av elevenes naturlige språk gir elevene en mulighet til å lære algebra gjennom et språk de allerede kan. Tidlig algebra fokuserer på elevenes algebraiske tenkning og på å utvikle denne.

Hva legger vi så i algebraisk tenkning? Hvordan er det forskjellig fra matematisk tenkning eller bare tenkning? Fokus i min tilnærming til begrepet er generalisering. Algebraisk tenkning for meg betyr at man er på jakt etter strukturene og mønstrene i matematikken, uavhengig av om disse så kommuniseres i symboler, tabeller, grafer, tegninger eller ord.

Et annet spørsmål som kan stilles er hvorfor vi skal lære algebra i første klasse. Vi kommer her tilbake til at hvilket syn man har på algebra har påvirkning på de didaktiske valgene. Tidlig algebra ser på algebra og aritmetikk som to sider av samme sak heller enn to distinkte disipliner. "*Arithmetic is a part of algebra. As such, arithmetic topics should be approached as instances of more abstract ideas and concepts. This will not only enrich children's understanding of arithmetic, but will build the foundations for the meaningful learning of more advanced algebra in later years*" (Schliemann et al., 2007, s. 80).

Bakgrunnen for at det er blitt mye forskning på tidlig algebra springer ut av dette synet. Man tenker seg at de problemene som elevene har med algebra stammer fra at algebra og aritmetikk er blitt holdt atskilt og dermed ikke har kunnet støtte hverandre. Carraher og Schliemann sier at "*Although there is some agreement that algebra has a place in the elementary school curriculum, the research basis needed for integrating algebra into the early mathematics curriculum is still emerging, little known, and far from consolidated*"(Carraher & Schliemann, 2007, s. 671).

I denne oppgaven vil jeg prøve å gjøre noe med det at forskningen er lite kjent på dette området. Jeg vil forsøke å samle råd for implementering av algebra fra ulike studier. Jeg vil i neste kapittel vise frem noen av de aktivitetene og oppgavene som forskerne har brukt i sine studier. Samtidig vil jeg forsøke å tilpasse dette til bruk i første klasse. Mange av forskerne nevner at algebra har en plass fra første klasse, men de fleste studier handler som tidligere nevnt om elever fra 2. trinn eller eldre. Jeg vil derfor forsøke å finne ut hvilke aktiviteter som kan passe for de yngste elevene. Men først vil jeg legge frem hva forskningen sier generelt om tidlig algebra.

3.3.1 Tidlig algebra er ikke algebra tidlig

Som nevnt tidligere skårer norske elever dårlig i algebra. Det er mye forskning som tyder på at overgangen mellom aritmetikk i barneskolen og algebra i ungdomsskolen byr på problemer for elevene. Carraher, Schliemann og Brizuela (2000) trekker frem Booth, 1984; Da Rocha Falcão, 1993; Filloy & Rojano, 1989; Kieran, 1985, 1989; Laborde, 1982; Resnick, Cauzinille-Marmeche, & Mathieu, 1987; Sfard & Linchevsky, 1994; Steinberg, Sleeman & Ktorza, 1990; Vergnaud, 1985; Vergnaud, Cortes, & Favre-Artigue, 1987; Wagner, 1981. Forskningen dreier seg om hvordan man kan hjelpe elevene til en så god overgang som mulig mellom aritmetikk og algebra.

Kieran (Cai & Knuth, 2011, s. 37) nevner fem punkter som kan hjelpe elever til å gå fra en aritmetisk til en algebraisk tenkning:

1. *Focus on relations and not merely on the calculation of a numerical answer,*
2. *Focus on inverses of operations, not merely the operations themselves, and on the related idea of doing/undoing,*
3. *Focus on both representing and solving a problem rather than on merely solving it,*
4. *Focus on both numbers and letters, rather than on numbers alone,*
5. *Refocus on the meaning of the equal sign.*

Kierans liste er ment som en oversikt over hva hun mener det er viktig å jobbe med hos elever før de starter i 8.klasse i USA og får algebrakurs der. Det er på disse områdene de største problemene oppstår i følge Kieran.

Det kan være en ide å forsøke å inkorporere de fem punktene allerede fra første klasse i skolen, slik at man ikke må avlære noe (likhetstegnet som ekvivalens heller enn et signal for å regne) og heller ikke skifte fokus (fra utregning til relasjonell forståelse) eller lære seg nye ting på kort tid slik at man er klar for algebraen (algebraiske symboler, inverse operasjoner, ulike representasjoner). Dersom elevene allerede fra starten har et relasjonelt fokus der man bruker mange ulike representasjoner inkludert bokstaver, så trenger man ikke være så redd for at de ikke skal klare overgangen til algebra på et senere tidspunkt. En slik tilnærming til matematikkundervisningen kan gjøre diskusjonen om et skille irrelevant. Det krever det Cai og Knuth (2011) kaller en endring i "habits of mind" eller tankegang, slik at vi tenker algebraisk fra første stund. Slik kan ferdigheter og forståelse for algebra og aritmetikk utvikles parallelt hos elevene. De sier at utviklingen av algebraisk tenkning på lavere klassetrinn krever at man utvikler spesifikke måter å tenke på, inkludert å analysere relasjoner mellom størrelser, å legge merke til struktur, studere endring, generalisere, løse problemer, modellere, argumentere, bevise og fremsette hypoteser. Tidlig algebra utvikler altså ikke bare nye verktøy for å forstå matematiske sammenhenger, men også nye "habits of mind" (Cai & Knuth, 2011, s. ix). De vil endre undervisningen til å inkludere algebraisk tankegang helt fra første klasse. Dette er et annet syn på algebra enn vi er vant til (og det er ikke sikkert alle vil godta at dette er algebra). De ser her på algebra mer som en måte å forholde seg til matematikken på, enn som et av emnene i skolematematikken. Algebra blir da det vi bruker for å tenke og kommunisere om de strukturer vi ser i matematikken. Det er altså ikke snakk om å flytte algebraen fra ungdomsskolen ned i barneskolen, men om en ny måte å forholde seg til matematikk på.

Guri A. Nortvedt beskriver den tenkningen som har vært rundt algebra presist i et intervju i "Bedre skole": "*I dag har vi en tendens til å heller prøve å reparere på det som er gått galt: vi tilfører algebra i ungdomstrinnet for at elever ikke skal ryke ut i videregående. Men så ser vi at de ikke kan nok algebra når de kommer til ungdomstrinnet, så da må vi ha mer på mellomtrinnet. Hvis vi hadde tilført tilstrekkelig med ressurser på de første trinnene, så ville vi unngå denne formen for reparasjonsvirksomhet*" (Nortvedt, 2013). Man har prøvd å flytte noe av algebraen ned til tidligere trinn for at elevene skal få bedre tid på overgangen mellom aritmetikk og algebra. Dette kaller Nortvedt reparasjonsvirksomhet.

Cai og Knuth (2011) påstår at det gradvis har utviklet seg en konsensus i forskningsfeltet om at elevene kan lære og bør blir eksponert for algebraiske ideer samtidig som de utvikler ferdigheter i aritmetikk. I tillegg er det enighet om at måten å utvikle algebraiske ideer på lavere klassetrinn ikke er ved å dytte ungdomsskole-pensum ned i småskolen. I stedet handler det om gjøre en fundamental endring i hvordan aritmetikken sees på og undervises i (Cai & Knuth, 2011, s. viii). De mener altså at vi må endre vårt syn på aritmetikken. Det hjelper ikke å bare sette de mest kompetente lærerne i 1.klasse dersom disse så underviser på samme måte som det har blitt undervist på tidligere. Det er heller ikke snakk om å innføre et nytt pensum. Det er snakk om å undervise i aritmetikken på en slik måte at man også utvikler algebraisk tenkning.

Cai, Ng og Moyer (2011) sier at mange elever har liten motivasjon for å lære algebra. De tror at denne motstanden mot algebra kan minskes ved å hjelpe elevene til å utvikle algebraisk tenkning allerede fra barneskolen. "*If students and teachers routinely spent the first five or six years of elementary school simultaneously developing arithmetic and algebraic thinking (with differing emphases on both at different stages of learning), arithmetic and algebra would come to be viewed as being inextricably interconnected. We believe an important outcome would be that the study of algebra in secondary school would become a natural and non-threatening extension of the mathematics of the elementary school curriculum*" (Cai et al., 2011, s. 35). Rivera (2006) mener dette kan oppnås ved det han kaller å algebrafisere aritmetikken. Det er altså ikke snakk om et nytt pensum, men om å få frem aritmetikkens algebraiske natur. Rivera sier at forskningen på området gir noen anbefalinger om hvordan slik undervisning bør være:

1) Undervis aritmetikken på en slik måte at elevene gjøres oppmerksomme på at det finnes relasjoner og sammenhenger som må kommuniseres matematisk.
2) Lær elevene å sette pris på uformelle og formelle representasjoner. Et mål for undervisningen er å føre sammen elevenes egne symboler med det formelle matematiske systemet.
3) Lær elevene funksjoner så de kan begynne å utvikle et anlegg for algebraisk modellering.
4) Gi dem problemer der de må tenke gjennom de matematiske relasjonene først før de kan regne noe.
5) Gi dem problemer som har mange ulike løsninger.
   (Rivera, 2006, s. 306-309).

I en oppsummering av boken "Early algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives" (Cai & Knuth, 2011) lister Kieran opp følgende tenkning som et mål:

- *Å tenke på det generelle i det spesielle*
- *Å tenke på regler i mønstre*
- *Å tenke relasjonelt om størrelser, tall og operasjoner*

- *Å tenke på hvordan man kan representere sammenhenger i problemer*
- *Å tenke på prosesser som begreper*
- *Å forvente, stille hypoteser, grunngi*
- *Å visualisere, gestikulere, formulere*

  (Kieran, 2011, s. 579).

Radford (2014) mener det er viktig å ha et bevisst forhold til om det er algebra eller aritmetikk vi holder på med. Dersom man vil arbeide med elevenes algebraiske tenkning er det viktig at det faktisk er det vi gjør og at vi ikke egentlig holder på med aritmetikk. Han sier at siden algebra og aritmetikk ikke er det samme så må det være noen forskjeller mellom dem. "*Finding these differences, I want to argue, is important from an educational viewpoint. Otherwise we might be teaching arithmetic while thinking that we are teaching algebra. In doing so, we might be failing to promote genuine elementary forms of algebraic thinking in the students*" (Radford, 2014, s. 258). Radford (2014) legger til grunn tre forutsetninger for å kalle noe algebraisk tenkning:

1. *indeterminacy: the problem involves not-known numbers (unknowns, variables, parameters, etc.);*
2. *denotation: the indeterminate numbers involved in the problem have to be named or symbolized. Now this symbolization may be accomplished in various ways. One can use alphanumeric signs—but not necessarily. The denotation of indeterminate quantities can also be symbolised through natural language, gestures, unconventional signs, or even a mixture of these;*
3. *analyticity: the indeterminate quantities are treated as if they were known numbers. That is, although they are not known, one starts from the indeterminate quantities and operates on them (i.e., adds, subtracts, multiplies, divides them) as if they were known.* (Radford, 2014, s. 260-261)

Kort oversatt så legger jeg i dette at algebra handler om ukjente størrelser som vi må representere på en eller annen måte slik at vi kan behandle dem analytisk.

I tidlig algebra så møter elevene oppgaver der det ofte er vel så enkelt å bruke aritmetiske løsningsmetoder. Det er da viktig at lærer er bevisst på hva som er algebra og hva som er aritmetikk. Benytter elevene seg av analyse eller bare gjetter og sjekker de? Gjennom å diskutere generaliteten i oppgavene så kan vi få sikret at elevene får tilgang til det algebraiske. Det å representere mønstre og regler symbolsk trenger ikke å være algebraisk dersom denne symboliseringen blir til ved gjett og sjekk, fremfor ved bruk av analytiske metoder (Howe, 2005; Radford, 2006).

3.3.2 Kompetanse

For å kunne endre undervisningen i første klasse til en algebrafisert aritmetikk så trenger vi lærere som har kompetanse i matematikk, men minst like viktig kan endre egen oppfatning av hvordan matematikk skal undervises og som kan utvikle elevenes tenkemåter (habits of mind). Nortvedt sier: "*Jeg ville uten tvil ha latt de mest kompetente lærerne undervise på 1. til 4. trinn. Da ville man kunne gi elevene den grunnleggende forståelsen som er nødvendig (for senere læring), det vil si tallbegrepene og de grunnleggende algoritmene*" (Nortvedt, 2013). Her er det to poeng som kan kommenteres. For det første at man skal la de mest kompetente lærerne undervise på 1.-4.trinn og for det andre at tallbegrep og algoritmer er det viktigste elevene lærer på 1. til 4.trinn.

3.3.2.1 Elevenes kompetanse

Det er viktig at elevene har en god tallforståelse og kan bruke de fire regnearter. Denne oppgaven underkjenner ikke at dette er viktig kompetanse for elevene å ha. Men den diskuterer om måten denne kompetansen bygges på kan ha konsekvenser for elevenes videre matematikklæring. Vi vil utvikle elevenes algebraiske tankegang *samtidig* som det bygges en solid forståelse for regneartene og tallsystemet. Dersom vi vil at elevene skal utvikle sin kompetanse i algebra parallelt med sin kompetanse i aritmetikk så er ikke kompetanse i regnearter nok. Ingen av Kierans fem punkter (ovenfor) sier noe om at elevene skal være godt drillet i algoritmene. Hun sier derimot at vi bør ha et fokus på relasjoner og ikke på å finne det rette svaret. Ved å arbeide med aritmetikkens syntaks slik at elevene får en bedre forståelse for operasjonene så vil arbeid med aritmetikk og algoritmer også bidra til en bedre forståelse for algebra. Denne forståelsen vil i sin tur støtte læringen av algoritmer og dermed regneferdighetene.

3.3.2.2 Undervisningskompetanse

Nortvedts første poeng var å sette de mest kompetente lærerne i 1.-4. trinn. Hun går ikke inn på hva som utgjør denne kompetansen. Er det antall studiepoeng i matematikk som er viktigst? Er det år med erfaring fra matematikkundervisning? Mye forskning har vært gjort for å forsøke å finne hva lærerkompetanse er og bør være og hvordan den kan defineres. Wu (2011) sier at det er en annen matematikk lærerstudenter trenger enn de som skal bli matematikere. De trenger en grundigere forståelse for det som ligger til grunn for de ulike begrepene og hvordan begrepene utvikles videre gjennom opplæringen. Det er også viktig at ”*what a teacher teaches in the primary grades may be simple, but it should still be a simplified version of correct mathematic*s” (Wu, 2011, s. 31).

Undersøkelser har vist at det ikke er en entydig sammenheng mellom lærers fagkompetanse og elevenes læring (Rowland, 2014). Man har til og med funnet en negativ sammenheng for noen av elevene. Dette kaller Rowland (2014) ”counter intuitiv”. Intuitivt vil man tenke at en lærer som har tatt mange kurs i matematikk vil være bedre skikket enn en med få kurs. Man skulle tro at det å kjenne matematikken bedre ville hjelpe læreren og i hvert fall ikke skade evnen til å undervise. At dette ikke alltid er tilfelle skyldes kanskje at lærere som har tatt mange kurs i matematikk også har vært utsatt for og dermed har mer erfaring med undervisningsmetoder i matematikk som ikke passer for de minste barna. Når det gjelder å lære elevene en algebraisk tankegang så sier Blanton og Kaput (2005) at de fleste grunnskolelærere har liten erfaring med den type algebraisk tenkning som burde bli normen i skolene. De er selv produkter av den type matematikkundervisning vi forsøker å erstatte.

En annen teori handler om komprimering. Vi komprimerer den tidligere kunnskapen når vi lærer mer komplekse ting. Det en lærer trenger er det motsatte: å pakke ut begrepene for elevene. I tillegg til fagkunnskap trenger derfor lærere å kjenne til det Shulman kaller *pedagogical content knowledge* (Shulman, 1986). I det legger han kunnskap om hvordan lærestoffet kan legges frem for elevene. Hva er de beste illustrasjonene, analogiene, eksemplene, forklaringene og demonstrasjonene? Hvordan gjør man ideene forståelige for elevene? Og siden det ikke finnes én bestemt måte å representere på som passer for alle elever så mener han at en lærer bør ha et arsenal av alternative representasjoner både fra forskning og fra egne erfaringer i praksis. I *pedagogical content knowledge* inngår også en forståelse for hva som er vanlige misoppfatninger og forforståelser hos elevene og hvordan man kan hjelpe elevene med å endre på sine oppfatninger (Shulman, 1986, s. 9).

Det er utarbeidet mange og etter hvert ganske omfattende modeller for undervisningskompetanse. En viktig slik modell er ”the Knowledge Quartet” eller kunnskapskvartetten. Den består av fire dimensjoner:

1) foundation,

2) transformation,

3) connection og

4) contingency.

1) *Foundation* består av lærerens matematikkrelaterte kunnskaper, fordommer og forståelser. 2) *Transformation* handler om kunnskapen i bruk i praksis, både i planlegging og gjennomføring av timer. Sentralt her er representasjoner, analogier, forklaringer og demonstrasjoner. 3) *Connection* handler om hvordan læreren binder sammen stoffet med tidligere undervisning og bygger lærestoffet opp i en rekkefølge. 4) *Contingency* er de tilfeldige læringsmulighetene som oppstår i klasserommet. Dette er hendelser som man ikke har planlagt, men som det er viktig å ta tak i (Rowland, 2014).

De mest kompetente lærerne blir da de lærerne som både kan fagstoffet og generell pedagogikk, men som minst like viktig har kunnskap om ulike måter å hjelpe elevene til forståelse. Det er da ikke bare snakk om de lærerne som selv har flest studiepoeng i matematikk, men som mest effektivt kan bruke forskning og egne erfaringer til å finne de beste måtene å undervise på.

3.3.3 Kognitiv utvikling

Det er helt sikkert at mye av algebraen er utilgjengelig for små barn. Hvis vi ser for oss, slik Skemp (1971) skriver, at alle begreper bygges opp av begreper på et lavere nivå som vi har lært oss tidligere, så sier det seg selv at små barn ikke har denne begrepsbasen å trekke på. Samtidig er det feil å si at de ikke har begreper i matematikk, selv om de ikke har gått på skole før. Mason (2005) sier at alle elever som begynner på skolen har dannet seg mening om verden rundt seg ved hjelp av abstrahering og generalisering fra enkelttilfeller. Denne generaliseringen er algebraens kjerne. Poenget blir da ikke *om* elever kan lære seg algebra, men hvilke begreper, metoder eller ideer det kan være mulig og ønskelig å lære dem (Kaput, Carraher, et al., 2008).

Rivera skriver at studier (f.eks. Dougherty 2005; Schliemann et al. 2003) har vist at elever i barneskolen kan:

1. forstå intuitivt grunnleggende algebraiske egenskaper de trenger for å løse likninger, slik som at man kan addere begge sider i en likning med det samme tallet uten at det påvirker likheten
2. utvikle konsistente former for algebraisk notasjon og regler
3. løse enkle likninger ved å bruke ulike empiriske stategier som prøve og feile
4. generalisere enkle lineære mønstre fra tabeller
5. forstå grafen til en lineær funksjon
6. utvikle en intuitiv forståelse for funksjoner som regler for korrespondanse som involverer objekter eller elementer i en sekvens

(Rivera, 2006, s. 306).

Piaget snakket om fire stadier for kognitiv utvikling: Det sansemotoriske stadiet, det pre-operasjonelle stadiet, det konkret-operasjonelle stadiet og det formelt-operasjonelle stadiet (Bjørnestad, 2004). Det kan være ulike syn på Piagets stadier, særlig når det kommer til aldersangivelser for de ulike stadiene. Uansett hvordan vi forholder oss til stadietenkning så bør vi være oppmerksomme på at det kan være utviklingsmessige hinder for hvor komplisert elevene kan tenke. Vi må være bevisste på hvordan vi tolker det vi ser hos elevene slik at vi ikke blir lurt til å tro at de har en dypere forståelse enn det de har. For eksempel kan vi ha elever som ikke enda konserverer mengde. Dersom de ikke har noen forståelse for at en mengde er konstant, så vil ikke begrepet sum ha noen mening for dem. Det betyr ikke at vi ikke kan holde på med addisjon, men at vi må være klar over hva disse elevene får ut av en slik aktivitet. Dette vil være noe annet enn hva en elev som konserverer får ut av samme oppgave.

Betyr dette at vi ikke kan arbeide med operasjoner i første klasse? Elevene i første klasse er i en utvikling mot å konservere. Dersom vi skal høre på Piaget er denne utviklingen avhengig av fysisk utvikling i hjernen til elevene. Men dette er ikke spesielt for algebra. Det samme kan vi si i lesing. Her er det også en fysisk utviklingsmessig grense for når vi kan lære å lese. Som i alle andre fag og temaer i skolen må lærer differensiere og hele tiden vite hvor den enkelte elev er. Selv om en elev ikke konserverer mengde så er det gode grunner for å si at han eller hun allikevel kan mye om hvilke strukturer aritmetikken bygger på. De vet at de får mer når noe legges til. De kan sammenligne mengder og se hva som er mest. De kan ha en forståelse for en kvalitatitiv eller kvantitativ endring. Men vi bør altså være ekstra oppmerksomme i oppgaver som krever at elevene konserverer mengde, som i oppgaven med x-boks (5.1.5) og i oppgaver som inneholder operasjoner (5.1.9.1.1). Dette gjelder også i aller høyeste grad en matematikk-undervisning som bygger på kun aritmetikk og aritmetiske regler. Så i den grad noen vil påstå at elever er for unge til å bedrive algebra i første klasse, så er de i hvert fall for unge til regning i matematikkboka. Tidlig algebra handler heller ikke om å lære elever algebra så tidlig som mulig. Det handler om å lære elevene algebraisk tenkning parallelt med aritmetisk tenkning når de er klar for dette.

Carraher et al. (2000) sier at de ikke vil avvise at det finnes utviklingsmessige grenser for hva elevene kan lære seg, men at vi ved å skape et skarpt, unaturlig skille mellom algebra og aritmetikk vil forlenge og forstørre elevenes problemer.
Rivera (2006) mener at elever har problemer med overgangen fra aritmetikk til algebra fordi den aritmetikken de har lært har fokusert på spesifikke tall og algoritmer, mens algebra fokuserer på variabler, funksjoner og sammenhenger og strukturer. Herscovics og Linchevski fremholder at det finnes forskjeller mellom algebra og aritmetikk som man bør kjenne til dersom man vil arbeide med å gjøre elevene klare til å forstå algebra. Dersom man ikke kjenner til hvor disse bruddene er så står man i fare for å lære elevene algebra tidlig i stedet for tidlig algebra (Herscovics & Linchevski, 1994). Riveras tolkning av dette er at Herscovics og Linchevski mener at algebra krever en annen modenhet og abstraksjon som ikke pensum i aritmetikk forholder seg til å utvikle (Rivera, 2006).

Herscovics og Linchevski mener at deres forskning blant annet ”*brings to light the need to more carefully develop and expand the arithmetic notions that will prove to be essential in a later course in algebra*” (Herscovics & Linchevski, 1994, s. 75). Det er altså ikke en naturlig overgang fra aritmetikk til algebra. Tanken er at vi kan endre på vår tradisjonelle tilnærming til aritmetikk slik at elevene kan utvikle en algebraisk tankegang. Da blir ikke algebra noe som følger etter aritmetikk, men aritmetikk og algebra blir to sider av samme sak og noe vi utvikler parallelt.
Slavit (1999) sier at “*Students at the age of 6 and 7 are quite capable of developing deep understandings of mathematical processes and can be well on their way to developing algebraic ways of thinking*”. Jeg oppfatter at disse forskerne har et optimistisk syn på hva som er mulig å få til med yngre elever, men at de mener det krever en annen tilnærming til undervisningen i form av algebraifisert aritmetikk.
Mitt inntrykk er at vi forventer for lite av elevene i første klasse. De langt fleste har allerede mestret det meste av det som er pensum i første klasse. En studie fra

Kindergarten i USA viste at elevene kunne både telle og gjenkjenne geometriske former den første dagen i Kindergarten. Allikevel brukte lærerne i gjennomsnitt 13 dager i måneden på å undervise disse emnene (Engel, Claessens & Finch, 2013). Forskerne mener å ha vist at dette skadet elevenes utvikling og tar til orde for at man i stedet arbeider med mer komplekse matematiske begreper.

Smith og Thompson advarer også mot å undervurdere elevene: "*We must guard against underestimating students' quantitative reasoning abilities. They come to school fully capable of learning to reason with simple additive relationships and that reasoning can develop in impressive ways with thoughtful instruction*" (J. Smith & Thompson, 2008, s. 114). Også Fox (2006) sier at forskningen de siste årene har vist at små barn har evne til matematisk innsikt som langt overgår våre forventninger (Fox, 2006, s. 222). Imsen mener at vi må ta hensyn til begrensninger som kan ligge i elevens intellekt, men at "*vi gjør barnet stor urett om vi antar at disse begrensningene er mer omfattende enn de i realiteten er*" (Imsen, 1998, s. 107).

Taylor-Cox (2003) sier at: "*If early childhood educators are to enhance children's outcomes, encouraging algebraic thinking in the early years is essential*" (Taylor-Cox, 2003, s. 21). Hun trekker frem at elevene bør få erfaring med varierte typer mønstre, matematiske situasjoner og strukturer, modeller for kvantitative sammenhenger og endring. Hun mener at det er viktig å gi utfordringer som stadig øker i kompleksitet og som oppfordrer til matematisk dialog. "*To open future gates and remove potential barriers to academic pursuits, we must build the necessary foundations for young children by not only incorporating more algebraic thinking experiences but also by requiring that these experiences are of high quality"* (Taylor-Cox, 2003, s. 21).

3.3.4 Kvantitativ tenkning

Kvantitativ tenkning, slik J. Smith og Thompson (2008) definerer det, er tenkning rundt ideene og sammenhengene mellom størrelser og mengder. Kvantitet handler om tellbare eller målbare størrelser, selv om vi ikke nødvendigvis måler eller teller dem. Hver gang vi prøver å løse et problem eller en oppgave, vil vi alltid ha noen tanker og ideer som legger føringer når vi skal velge det rette uttrykket eller den rette tilnærmingen til problemet. Før vi kan stille opp et stykke med tall eller med algebraiske symboler må vi ha noen tanker rundt hvordan størrelser henger sammen. Vi kan bruke Smith og Thompsons egen oppgave til å illustrere dette.

En gang i fremtiden vil John være 38 år.

Han vil da være tre ganger så gammel som sin datter Sally.

Sally er nå 7 år gammel. Hvor gammel er John nå?

(J. Smith & Thompson, 2008, s. 107)

For å løse dette problemet trenger vi å vite noe om tid. Aldrene deres øker med samme fart. Vi må også vite hva det betyr at han er tre ganger så gammel. Er han tre ganger så gammel nå også? Dette problemet kunne handlet om å bare finne de rette tallene og operasjonene og så regne ut stykket eller å finne den rette formelen å sette tallene inn i. Dersom vi vil utvikle elevenes kvantitative tenkning så blir ikke dette "svaret" det viktigste, men hvordan de ulike aldrene forholder seg til hverandre.

Smith og Thompson (2008) mener at vi ved å utvikle kompleksiteten i tenkningen til elevene gir dem et behov for å lære algebra. Dersom tenkningen deres er sofistikert nok så vil de se at algebra er et nyttig verktøy. I motsatt fall vil algebraen virke meningsløs. Enten vil de klare å løse oppgavene uten algebra fordi de er for lette, så hva skal de da med algebra. Eller så er oppgavene så vanskelige at elevene ikke forholder seg til dem fordi tankene bak oppgaven er for komplekse i forhold til elevenes tenkning. Vi vil utvikle elevenes algebraiske tenkning slik at de blir mer fokusert på å se etter mønstre og sammenhenger enn de er på å finne det rette svaret. Samtidig kan vi se på kvantitativ tenkning som en tredje "brikke" som utgjør helheten sammen med aritmetikk og algebra.

For å arbeide med å utvikle kvantitativ tenkning må vi bruke komplekse situasjoner. Vi må fokusere på begrepsdannelsen. Alle oppgavene trenger ikke å spørre etter en utregning, og de kan godt ha mange ulike mulige løsninger. Fokuset ligger på å sammen bygge nye ideer og begreper, og da vil kommunikasjon være viktig. Lærere er kanskje for raske til å forenkle oppgavene for elevene slik at de bare kan begynne å regne? Lar vi elevene bruke tid og streve med oppgavene og problemene? J. Smith og Thompson (2008) anbefaler å stille spørsmål som leder til diskusjoner om kvantitet, ikke tall. Vi kan gjerne ha oppgaver uten tall eller der tallene ikke er kjent. For eksempel kan vi sammenligne noens høyder ut fra angivelser som bare går på forholdet mellom høydene, eller hvem som er høyere enn hvem.

Dersom Per er høyere enn Arne og Nina er lavere enn Arne, kan vi da si noe om forholdet mellom Per og Nina sine høyder? Hva vet vi og hva vet vi ikke? De sier også at man bør fokusere på og belønne flere løsninger. Det bør fokuseres på en klar kommunikasjon der man forklarer, oppklarer, argumenterer og svarer på kritikk. Kommunikasjonen bør foregå både skriftlig og muntlig. De understreker også viktigheten av å velge gode oppgaver som gir støtte til elevenes tenkning. I tillegg er det viktig for en lærer å lytte til elevene og gi dem tid til å tenke og argumentere.

Post et al poengterer at "*first-describing-and-then-calculating*" er en av de viktigste egenskapene som skiller algebra fra aritmetikk (Post et al. i (Cai et al., 2011, s. 31)). En av algebraens viktigste trekk er i følge dem å beskrive før man regner. Når vi har tenkt rundt de kvantitative sammenhengene kan vi velge de rette algebraiske uttrykkene og til slutt regne ut et svar. Skemp sier at for å utvikle komplekse ideer så må vi først utsettes for mange ulike eksempler. Generelt mener han at begrep av en høyere orden enn de en person allerede har ikke kan kommuniseres til ham gjennom en definisjon, men bare gjennom å samle sammen passende eksempler som han kan få erfare (Skemp, 1971, s. 26). Hvis vi skal ta Skemp på alvor så må vi gi elevene rike erfaringer som kan tjene som eksempler for å utvikle ideer som vi så kan hjelpe dem til å beskrive med de riktige begrepene og de riktige uttrykkene. Ved å bare lære elevene definisjoner og regler gir vi dem et dårlig grunnlag å bygge sin forståelse for algebraen på.

Gode eksempler og erfaringer kan vi starte med å gi elevene allerede fra første klasse. Ved å bygge opp et språk og en erfaringsbakgrunn hos elevene så vil forhåpentligvis algebraen på høyere trinn bli bare et siste steg i en abstraksjon som vi allerede har gitt elevene god tid til å samle seg eksempler om. Dette kan gi gode argumenter for å innføre algebraisk notasjon og begreper på tidligere klassetrinn. Det viktige er at disse begrepene innføres fordi vi har fått behov for dem etter hvert som ideene våre har utviklet seg. Begrepene er ikke lærestoff i en plan som man skal lære seg definisjonene til. Det er ikke snakk om å plukke ut passende biter fra lærestoffet i ungdomsskolen og så lære seg dette tidligere for at det skal bli mindre å lære i ungdomsskolen. Vi ønsker ikke å undervise *om* matematisk tenkning, men *i* matematisk tenkning. Vi bruker begreper der disse begrepenes meningsinnhold allerede er utviklet eller er i ferd med å utvikles hos elevene. Det er naturlig for mennesker å etterspørre ord for mening de møter. Ved å arbeide med å utvikle elevenes ideer og tanker i matematikk vil deres behov for nye ord eller representasjonsmåter komme naturlig. Håpet er at elevene da vil være motivert for å lære og de vil ha det idegrunnlaget som trengs for å danne solide begrepsstrukturer.

3.3.5 Algebra som språk

Usiskin skriver at algebra er et språk. Han sier at dette språket har fem aspekt:
(1) ukjente
(2) formler
(3) generaliserte mønster
(4) plassholdere
(5) sammenhenger
Han mener at hver gang noen av disse aspektene blir diskutert, fra første klasse og oppover, så er det en mulighet for å introdusere algebraens språk (Usiskin, 1997, s. 346). Lærer må altså være observant på situasjoner der det oppstår muligheter for å bruke det algebraiske språket. Goldenberg, Mark og Cuoco mener at dersom algebraisk symbolspråk er en del av hverdagen og brukes i en kontekst som gir mening, så kan barn bruke sine ekstraordinære språklæringsevner til å bruke det deskriptivt (Goldenberg, Mark & Cuoco, 2010, s. 554). De poengterer at algebraspråket i første klasse brukes deskriptivt. Vi bruker det altså til å kommunisere om noe vi kjenner til. "*The other use of algebra - deriving what we don't know- is a formal syntactic operation on a set of symbols. Children are generally unable to divorce symbols from meanings before roughly age twelve*". Hvorfor de har denne aldersgrensen for å skille symbol fra mening sier de ikke noe om. Kanskje støtter de seg på stadieteori som sier at kognitiv utvikling har visse stadier som nås til en viss tid. Men det kan også tenkes at forskerne har en egen erfaring med at elevene ofte må opp i en alder på rundt 12 år før de begynner å skille symbol fra mening. De bruker også begreper som "roughly" og "generally" som sier noe om at dette ikke gjelder alle elever.

Goldenberg et al. mener ikke at elevene er for unge til å forholde seg til symboler eller abstrakte begrep. De forholder seg til bilder og ord som godt kan kalles symboler fra en tidlig alder. Det er symboler uten noen forankring til noe virkelig de har problemer med. Ikke minst er det bruken av symbolene som er annerledes hos de yngste elevene.

> "*Formal operations on strings of algebraic symbols - rearranging them, apart from their semantics, to create other strings of symbols that solve a problem -*

are, well, formal operations, and children are not, by and large, formally operational before eleven, and not reliably so before about thirteen, thus the common need to wait until that age for algebra. However, only the part of algebra that requires deduction by formal rules must wait that long" (Goldenberg et al., 2010, s. 554-555).

Men den delen av algebraen som forholder seg til det vi vet kan vi starte med mye tidligere. Da er det bare et språk å uttrykke seg gjennom. Barn er flinke til å lære seg nye språk. De lærer ikke språk gjennom forklaringer, men gjennom å bruke det i kontekst. Muligens kan det at de har lært seg språket hjelpe dem når de senere skal bruke dette språket deduktivt. De lærer nå bare en ny bruk av språket. Det blir færre nye ting å forholde seg til enn dersom de både må lære seg algebraspråket og samtidig lære seg å bruke det deduktivt (Goldenberg et al., 2010).

Et eksempel på hvordan vi kan lære dem det algebraiske ”språket” kan vi finne i (Goldenberg et al., 2010). Under er en tabell de brukte i en andreklasse der de i første kolonne hadde skrevet uttrykk som beskrev hvordan tabellen kunne fylles ut.

TABLE 1

A pattern indicator gains meaning from context when it accompanies a find-a-rule exercise.

n	10	8	28	18	17			58	57
$n-8$	2	0	20			3	4		

(Goldenberg et al., 2010, s. 554)

Forskerne nevnte ikke bokstavuttrykkene i første kolonne, men lot dem bare stå der. De fokuserte så på å finne ut hvilken regel som gjaldt for tallene i tabellen. En av elevene fortalte hvilket mønster hun så i tallene. Så pekte hun på uttrykkene i første kolonne i tabellen og sa at det sto der. Hun hadde ut fra sammenhengen funnet en mening for n og n-8. Som andreklassing hadde hun ikke fått noen opplæring i hvordan vi lager slike uttrykk eller hva de betyr, men kanskje brukte hun sin naturlige språklæringsevne til å se sammenhengen.

MacGregor og Price (1999) undersøkte om elevers evne til metakognisjon rundt symbolspråket i algebraen hadde innvirkning på hvor godt de gjorde det i algebra. De fant to aspekt de ville se på, og som tilsvarte (i deres mening) to aspekt ved metaspråklig bevissthet. Metaspråklig bevissthet er den bevissthet en leser har om ord og syntaks som gjør at leseren lettere kan tolke teksten. Det første var symbolbevissthet (analogt til ordbevissthet) og det andre syntaksbevissthet. De fant at elever som skårte høyt på symbol- og syntaksbevissthet i matematikk nesten uten unntak også skårte høyt på metaspråklig bevissthet. Dette mener de kan tyde på at en metaspråklig bevissthet er nødvendig for at elevene skal kunne utvikle en symbol- og syntaksbevissthet i matematikken som er så nødvendig for å lære seg algebra. Forskning på sammenhengen mellom leseferdighet og matematikkferdigheter gir grunn til å tro at svake leseferdigheter påvirker læring i matematikk (Reikerås, 2006).

Symbolbevissthet ble av MacGregor og Price (1999) definert som å vite at tall, bokstaver og andre matematiske tegn kan abstraheres fra det de representerer slik at man kan manipulere, forenkle og omorganisere algebraiske uttrykk. Dessuten inkluderte de bevisstheten om at man kan behandle et uttrykk for eksempel (x+5) som én verdi for å kunne manipulere med det algebraisk.

Syntaksbevissthet handler om en korrekt bruk at algebraiske uttrykk. For eksempel kan man skrive 2x=10 => x=5 , mens 2x=10=5 ikke er korrekt. Det handler om å kunne vurdere hvordan syntaks (rekkefølge av tegn, sammensetning av tegn) kontrollerer mening og hva man kan finne ut. For eksempel at man vet at hvis a-b=x er sant så er det vanligvis ikke sant at b-a=x. Her er det viktig hvilke rekkefølge tegnene kommer i.

Ordbevissthet utvikles mens man lærer seg å lese og skrive. Det er i følge MacGregor og Price (1999) sannsynlig at også symbolbevissthet slik det er definert over utvikler seg mens man lærer seg tall, telling og regning i småskolen. Syntaksbevissthet er derimot noe som man bruker lenger tid på å utvikle. I lesing er det heller ikke så viktig å ha riktig syntaks som i algebra. Kun i sjeldne tilfeller endrer feil i syntaks meningen til teksten elevene leser. Elevene benytter seg av kontekst for å avgjøre hva meningen er. I algebra er det derimot kritisk å ha riktig rekkefølge på tegnene i et uttrykk. Elever som ikke har lært seg å bruke syntaksen i aritmetiske uttrykk som hjelp til å forstå uttrykket vil ha problemer med å forstå at tegnenes rekkefølge er viktig i algebraisk notasjon (MacGregor & Price, 1999).

3.3.6 Concreteness fading

Bruk av konkreter er en naturlig del av undervisningen i matematikk på første trinn. Når elever arbeider med konkreter og kan løse ganske kompliserte problemer så er det ikke sikkert de kan overføre dette til andre sammenhenger, verken andre konkrete situasjoner eller til mer generell matematisering av problemtypen. Dowker (2005 i

(Björklund, 2014)) beskriver at det finnes flere studier som viser at elever kan utføre oppgaver med konkretiseringsmateriell, men at de ikke knytter dette til abstrakte uttrykk. Fyfe, McNeil, Son og Goldstone (2014, s. 9) sier at det har vært mange diskusjoner rundt i hvilken grad man skal bruke konkrete eller abstrakte materialer i undervisningen. De mener at det ikke bør være et enten eller. De snakker om "concreteness fading" som de forklarer som å begynne med konkreter mens man samtidig abstraherer mer og mer. De ser mange fordeler med en slik tilnærming og sammenfatter i fire punkter:

1) hjelpe elevene med å tolke flertydige eller uklare abstrakte symboler ved hjelp av konkrete objekter som de kjenner godt
2) gi dem perseptuelle og fysiske erfaringer som kan gi et grunnlag for abstrakt tenkning,
3) gi elevene muligheten til å bygge opp et utvalg av mentale bilder som de kan bruke når abstrakte symboler ikke gir mening og
4) hjelpe elevene til å skrelle bort irrelevante egenskaper ved konkretene og komme frem til generiske, generaliserbare egenskaper.

De sier også at denne måten å jobbe på gir en effekt som er større enn summen av fordelene med konkretiseringer og abstrakte symboler. De refererer til Bruner (1966) og sier at han mente at nye begrep og prosedyrer burde presenteres i tre nivå *:"(1) an enactive form, which is a physical, concrete model of the concept; (2) an iconic form, which is a graphic or pictorial model; and finally (3) a symbolic form, which is an abstract model of the concept*". For eksempel kan 2 først representeres ved mengden av to epler, så av en tegning av to sirkler som representerer disse eplene og til slutt av tallet 2 (Fyfe et al., 2014, s. 11).

Radford (2006) sier at algebraisk generalisering av mønster hviler på at man legger merke til at noe likner lokalt og så generaliserer man dette til alle ledd i sekvensen og det tjener som en oppskrift på å lage nye elementer til sekvensen som ligger utenfor observerbart felt. Man kan også bruke dette "like" til å lage en direkte regel for ethvert ledd i sekvensen. Men vanligvis så krever man at elever kan bruke algebraiske symbol for å uttrykke denne regelen. Radford mener at det å lage slike regler utvikles gjennom flere lag av bevissthet (layers of awareness) uttrykt gjennom ulike semiotiske system: ord, bevegelser, bilder, grafer og symboler.

Hughes (1986 i (Mark-Zigdon & Tirosh, 2008)) beskriver en hierarkisk modell med fire trinn for hvordan barns representasjon av tall utvikler seg. På første trinn så representeres et antall objekter ved en representasjon som ikke henger sammen med antallet. På andre trinn lager barna en grafisk representasjon av situasjonen der de tegner de ulike objektene i mengden. På tredje trinn så kan disse objektene noteres ned som streker eller tilsvarende og det er en en-til-en korrespondanse mellom antall objekter og antall streker de tegner. På fjerde trinn brukes konvensjonelle tallsymboler (Mark-Zigdon & Tirosh, 2008, s. 204).

3.3.7 Algebra som symbolisering

Kaput, Blanton og Moreno-Armella (2008) definerer en symboliseringsaktivtet som algebraisk dersom symboliseringen har til hensikt å uttrykke generalitet i et konvensjonelt algebraisk symbolspråk. I første klasse bruker vi som regel ikke algebraens symbolspråk, men andre representasjoner som tegninger, ord og konkreter. Kaput, Blanton, et al. (2008) kaller dette kvasialgebraisk. De mener at de fleste aktivitene elevene møter i tidlig algebra er kvasialgebraiske. I følge deres definisjon for algebraisk aktivitet så er heller ikke manipulasjon med symboler algebraisk dersom det ikke er for å generalisere. Dersom vi benytter en formel for å løse et problem på en instrumentell måte så driver vi ikke med algebraisk aktivitet. De sammenligner dette med at å spille skalaer ikke kan kalles å spille musikk. Skalaer er viktige å øve på for å bli flink til å spille, men er ikke i seg selv musikk. På samme måte er det viktig for algebraen å være flink til å manipulere med symbolene etter faste regler, men det er ikke i seg selv en algebraisk aktivitet.

Ved å måtte tegne eller skrive ned det de gjør eller observerer i en prosess eller i en oppgave så må elevene gjøre en generalisering. De må skrelle vekk den informasjonen som er irrelevant for oppgaven og de må symbolisere det de ser ved hjelp av ord, tegninger eller andre representasjoner. Dette krever et annet overblikk enn å utføre en operasjon eller gjennomføre en praktisk oppgave. Denne symboliseringen er i følge Kaput, Blanton, et al. (2008, s. 20) nettopp hvor algebra starter. Owen (2005) sier at "*a young child's own language for relating what they notice is the beginning of algebraic language*" (Owen, 2005, s. 124). Gjennom sine nedtegninger har elevene også laget et objekt som de kan kommunisere rundt. Ideene de hadde inne i hodet er satt ned på papiret eller det er formulert i ord. Ideene kan nå kommuniseres til andre og bli gjenstand for kritikk. Ved å utvikle et konsist språk så har vi også mulighet for å kommunisere om ting på en bedre måte. Det er mulighet for flere nyanser.

K-06 sier under muntlige ferdigheter i matematikk (vedlagt nedenfor) at elevenes utvikling bør gå: ”*frå å bruke eit enkelt matematisk språk til å bruke presis fagterminologi og uttrykksmåte og presise omgrep*”. Vygotsky sier at det vi ikke har ord for kan vi heller ikke tenke om. Språket blir en støtte for tanken (Imsen, 1998, s. 156-157). Dette gjelder både det muntlige språket, men også symbolspråket.
I elevenes arbeid med å representere og finne symboler for å kommunisere tankene sine om generalitet har vi en god mulighet for å utvikle et bevisst forhold til matematikkens språk. Vi bruker fra første stund symboler der det er naturlig. Vi kan fokusere på de valgene elevene tar når de velger sine symboliseringer og diskutere hvor godt egnet og hvor eksakt den enkelte representasjon er. Vi kan sammenligne ulike måter å representere på. Her velger vi representasjon med bakgrunn i hva vi vil kommunisere og vi har et bevisst forhold til hvordan symboler kan brukes.

Etterhvert som elevene blir vant til å bruke symboler når de skal representere ideene sine, så vil det forhåpentligvis falle naturlig for dem å bruke symboler. I det vi forsøker å uttrykke ideer og generaliseringer så utvikles symboliseringen. Denne symboliseringen hjelper oss å forstå ideene og generaliseringene bedre og blir i sin tur del av vår forståelse for disse ideene. Sfard (2000) sier at ”*mathematical discourse and mathematical objects create eachother*”. Dette er en kontinuerlig prosess. Ideene utvikles stadig og de kan så symboliseres på et høyere nivå. Denne symboliseringen gir ny dybde til forståelsen av ideene og utvikler ideene videre slik at vi trenger nye symboliseringer. Kaput, Blanton, et al. (2008) refererer til dette som ”*an upward spiral of abstraction and mathematical power*” (Kaput, Blanton, et al., 2008, s. 23).

Symbolisering av generaliseringer gir oss mer kompakte uttrykk å sammenligne. Symbolene inneholder mye informasjon på en oversiktlig måte slik at vi kan sammenligne generaliseringer ved å sammenligne symboliseringene. Vi kan løsrive oss fra konteksten som førte til generaliseringene og symboliseringene og forholde oss til symboliseringene som objekter i seg selv som vi kan undersøke. Symbolisering er en del av menneskelig utvikling og begynner fra en tidlig alder. ”*But, when symbolizations become algebraic, new mathematical worlds become possible*” (Kaput, Blanton, et al., 2008, s. 23). Gjennom å følge strukturene, syntaksen og reglene i algebraen så kan vi skape ny matematikk som ikke springer ut av konkret kontekst, men som er skapt i dette systemet. Det blir da viktig å lære elevene den riktige syntaksen til dette systemet. Vi kan altså si at gjennom å representere og symbolisere generalitet vi finner i eksemplene så skjer det noe med de ideene vi hadde om generaliteten. Gjennom aktiviteten symbolisering så strykes begrepene.

Radford (2006) beskriver et semiotisk-kulturelt rammeverk for matematisk læring. Elevenes utvikling av symbolisering går gjennom de kulturelle uttrykk de allerede kjenner, som ord, bevegelser og tegninger. Symboliseringen utvikler seg gradvis via ulike nivåer av representasjoner. Vi kan kanskje si at kvasialgebraiske uttrykk er et nødvendig steg på veien mot formell algebra ved at det tjener som en overgang der de kulturelle uttrykkene de kjenner brukes i en ny sammenheng for å undersøke algebraiske sammenhenger analytisk. Gradvis transformeres disse uttrykkene, under veiledning av lærer, til konvensjonelt symbolspråk.

Carraher, Schliemann og Schwartz (2008) mener at ulike representasjonsformer spiller en rolle i å flytte fokus fra det spesielle tilfellet til den generelle strukturen. De trekker frem barnas egne tegninger, bruk av tabeller og lister, men også symbolsk notasjon. Også Slavit (1999) legger vekt på notasjon når vi skal gå fra det spesielle til det generelle. Kaput, Blanton, et al. (2008) sier at generalisering og symbolisering er ”*at the heart of algebraic reasoning*” (s.20). Vi kan ikke kommunisere om noe generelt uten et uttrykk som refererer til alle de ulike tilfellene på en samlende måte. Uten et slikt symbol for det generelle må vi liste opp alle tilfellene og håpe at den vi kommuniserer med selv ser mønsteret. Vi trenger altså å symbolisere for å kommunisere generalitet. Når vi så har laget denne symboliseringen blir den en ny plattform for å videre uttrykke og resonnere rundt generalitet, ”*including further symbolization*” (Kaput, Blanton, et al., 2008, s. 20).

Generalisering og abstraksjon ved hjelp av representasjoner gir en rikere forståelse for det systemet de er abstrahert fra, vi kan se strukturen i regnearten løsrevet fra kontekst og konkrete tall og det gir en basis for å jobbe med abstraksjon og formalisering på et enda høyere nivå (Kaput, 1995, s. 77). Ved å notere ned hva vi tenker når vi adderer så må vi være bevisste på hva addisjon egentlig er. Da kan vi se strukturen addisjon løsrevet fra de konkrete objektene vi skal legge sammen. Vi får en bedre forståelse for selve begrepet addisjon og er på vei mot en objektivisering eller reifikasjon av begrepet. En slik forståelse for addisjon kan hjelpe oss til å bruke regnearten mer fleksibelt. Vi kan så bruke objektet addisjon når vi skal lære begreper som er mer kompliserte, men som inkluderer addisjon (for eksempel multiplikasjon som gjentatt addisjon). Vi kan bygge videre på denne strukturen uten av addisjon sees på som en handling. Handlingen har blitt et objekt som så kan inngå som en del av en ny handling. Denne nye handlingen kan så formaliseres og objektifiseres og på denne måten kan vi nå nye nivåer av abstraksjon .

Driscoll (1999) trekker frem viktigheten av å representere et problem på mange ulike måter. Hver representasjon gir et nytt perspektiv til problemet. Lesh, Post og Behr (1987) sier at elever som har problemer med å oversette et begrep fra en representasjon til en annen er de samme barna som har problemer med å løse problemer og forstå utregninger. Når vi krever av elevene at de representerer samme problem på ulike måter så utvikles elevenes begrepsforståelse. Samtidig kan de bruke det de har notert ned som et utgangspunkt for å lete etter generelle mønstre.

Mark-Zigdon og Tirosh (2008) sier at det er tre hovedfaktorer som bestemmer elevenes evne til å forstå meningen til et symbol. 1) *Representation space* 2) *Symbolic thinking* 3) *Conceptual knowledge base*.

1) *Representation space* inkludere alle symbolene og representasjonene elevene har erfaringer med. Kunnskapen elevene har om hvilke prinsipper som gjelder for å operere innen de ulike representasjons-systemene ligger også i dette begrepet. Elevene må vite hvilke komponenter av systemet som er relevante for de matematiske begrepene. For eksempel så er fargen, størrelsen og hvilken skrifttype som brukes irrelevant for den matematiske meningen.

2) *Symbolic thinking* går fra å forbinde et objekt med dettes representasjon til å motsatt kunne skille mellom objekt og representasjon. Meningen til objektet er ikke innbakt i symbolet. I starten av denne utviklingen kan elevene blande sammen hva som er egenskaper hos symbolet og hva som er egenskaper ved den ideen eller det begrepet de symboliserer. For eksempel så kan de skrive navnet på et stort objekt med store bokstaver. Målet er at elevene skal komme til et punkt der de klarer å skille symbol fra begrep.

3) *Conceptual knowledge base* handler om at elevenes kunnskap om de ulike systemene de vil representere symbolsk har påvirkning på hvordan de kan trekke mening ut av symbolene. For eksempel så vil en elev som ikke er godt nok kjent med titallsystemet ha problemer med å gi mening til tall med flere siffer slik som 23.

Mark-Zigdon (2004) fant i en studie at førsteklassingers problemer i addisjon skyldtes problemer de hadde med selve symbolsystemet og reglene i systemet heller enn en manglende forståelse for addisjon i seg selv. Carpenter, Moser og Bebout (1988) sier at førsteklassinger bruker modellering for å løse et addisjons- eller subtraksjonsproblem. Når de så lærer hvilke symboler de kan notere ned slike oppgaver i så ser de først ikke sammenhengen mellom dette uttrykket og det opprinnelige problemet. Ofte løser de oppgaven ved hjelp av konkretene og skriver inn svaret. De skjønner ikke at de kan bruke det skriftlige uttrykket til noe. De representasjonene de lærer påvirker også hvilke løsningsstrategier de velger. Dersom vi bare lærer dem én måte å representere på så vil de etter hvert løse alle oppgaver på den måten og gå bort fra sine mange ulike strategier for å løse ulike oppgaver på. Dersom elevene læres opp til å alltid notere ned i formen $a - b = \_$, så vil dette kanskje føre til at de fjerner seg lenger fra sine opprinnelige modelleringer. Som eksempel gir Carpenter et al. (1988) oppgaven:

3.3.7.1.1

"John had 3 marbles. He won some more.

Now he has 8 marbles.

How many marbles did he win?"

Det naturlige å gjøre her er å telle opp tre klinkekuler. Så telle videre til åtte. Vi kan så telle hvor mange klinkekuler vi måtte legge til for å komme til åtte. Den notasjonen som passer best til denne løsningsstrategien er $3 + \_ = 8$. Dersom de bare har lært a+b= __ eller a-b=__ så er det en større mulighet for at de velger feil operasjon, men også for at det uttrykket de velger å bruke ikke henger sammen med hvordan de tenker om problemet. Det kan da være en større fare for en instrumentell tilnærming der løsning velges ut fra andre kriterier enn elevenes forståelse for problemet. Carpenter et al. (1988) viste at dersom elevene fikk opplæring i ulike måter å notere på som i tillegg til $a - b = \_$ også inkluderte

3.3.7.1.2

$$a + \_ = b, \qquad a - \_ = b\ , \quad \_ + a = b \ \ og \ \ \_ - a = b$$

så var det en større mulighet for at elevene kunne finne måter å notere på som samsvarte med deres modeller og dermed var det en mulighet for at elevene kunne se sammenhengen mellom deres egen tenkning og representasjonene. Det blir altså viktig å finne eksempler som oppfordrer til å representere på ulike måter. Vi må så hjelpe elevene til å se at representasjonene er måter å skrive ned sine egne tanker og ideer på, ikke en løsrevet ferdighet.

I en studie fant Mark-Zigdon og Tirosh (2008) at barn som ikke enda hadde fått opplæring i hvordan de skulle skrive aritmetiske stykker unngikk å gjøre det. De tolket dette som at barna visste om at det her var regler som de ikke kjente til og at de derfor ikke prøvde seg. De var redde for å gjøre feil fordi de hadde en forventning om at det var en rett måte å gjøre det på. Kanskje har elevene helt fra starten av første klasse en forståelse av av det finnes en syntaks i det matematiske symbolsystemet (Mark-Zigdon & Tirosh, 2008).

3.3.8 Andre land

Det har de siste årene vært et stort fokus på internasjonale tester som PISA, PIRLS, TIMSS, KIMS osv. Landene vil gjerne havne på toppen av pallen og plasseringen på rankinglistene har ført til endring av utdanningspolitikk i flere land. Det har også ført til at man blir interessert i å finne ut hva land som gjør det bra på disse rankingene gjør. Man kan for eksempel finne mange amerikanske studier som sammenligner læreplaner i ulike land.

Cai og Moyer (2008) har analysert læreplaner i Kina, Sør-Korea og Singapore samt utvalgte læreplaner fra Russland og USA. De fant at det i alle disse læreplanene var et fokus på å utvikle elevenes relasjonelle forståelse, men tilnærmingen til dette var ulik. Det er mange ulike faktorer som spiller inn på resultatene i internasjonale undersøkelser. Samtidig er det for lett å si at det bare er kulturelle forskjeller som skaper forskjeller i prestasjoner. Det ville være dumt å ikke lære av andre land, selv om vi ikke ville innført de samme undervisningsmetodene i Norge.

Jeg vil i det følgende vise til konkrete eksempler hvor jeg mener det kan være noe å lære av for oss i Norge. Det er ikke belegg for å hevde at disse metodene er årsak til resultater i internasjonale undersøkelser. Men de gir eksempler på undervisning som samsvarer med en del av forskningen som er nevnt over, og er derfor interessante å se på. Jeg vil ta for meg Singapores modellmetode, Kinas fokus på inverse operasjoner og bruk av algebraisk notasjon parallelt med numerisk notasjon og New Zealands Numeracy Project.

3.3.8.1 Kina

De kinesiske læreplanene i grunnskolen fokuserer på å utvikle minst tre tenkemåter hos elevene:

1) å undersøke kvantitative sammenhenger fra ulike synsvinkler

2) løse et problem ved å bruke både aritmetikk og algebra
3) bruke inverse operasjoner til å løse likninger
(Cai et al., 2011, s. 29).
Punkt 1) handler om å finne mange ulike løsningsmåter for samme problem og ulike synsvinkler å se på et problem fra. Elevene utfordres og gis muligheter til å representere kvantitative sammenhenger på ulike måter. Det gis mange oppgaver og eksempler som krever at elevene identifiserer kvantitative sammenhenger og representerer dem på varierte måter.

Punkt 2) blir viktig fra 5.klasse. Da har elevene lært seg å uttrykke sammenhenger i algebraisk språk. De oppgavene de nå løser blir de oppfordret til å representere både numerisk, men også ved hjelp av algebraiske symboler. ”According to the Chinese curriculum*, solving a problem using both an arithmetic approach and an algebraic approach helps students build arithmetic and algebraic ways of thinking about problem solving*” (Cai et al., 2011, s. 31). Målet er at elevene skal utvikle en dybdeforståelse for kvantitative sammenhenger ved at de må representere dem både algebraisk og aritmetisk. I tillegg er målet at det skal være en hjelp til å oppdage likheter og ulikheter mellom algebraiske og aritmetiske tilnærminger slik at de kan forstå kraften i en generell algebraisk tilnærming. De vil også at elevene skal kunne utvise en fleksibilitet i valg av løsningsmetoder.

Punkt 3) kjenner vi igjen fra Kierans liste over hindringer i overgangen mellom aritmetikk og algebra. (3.3.1) Kieran fremholdt viktigheten av inverse operasjoner og ”doing/undoing” (ovenfor). I første klasse i Kina defineres subtraksjon som det motsatte av addisjon (Cai et al., 2011, s. 31-32). Selv om de ikke snakker om å løse likninger, så gis det oppgaver av typen ”finn tallet som mangler” og elevene blir eksplisitt lært opp til å bruke den inverse operasjonen for å finne det som mangler. *”For example, students in the first grade are guided to think about the following question: “If 1 + ( ) = 3, what is the number in ( )?” In order to find the number in ( ), the subtraction 3 − 1 = 2 is introduced. Throughout the first grade, students are consistently asked to solve similar problems”(s. 32)*
Cai et al. (2011) fremholder også at generalisering gjennomsyrer de kinesiske læreplanene. Med utgangspunkt i spesifikke eksempler hjelpes elevene til å danne generelle uttrykk for sammenhengene de finner.

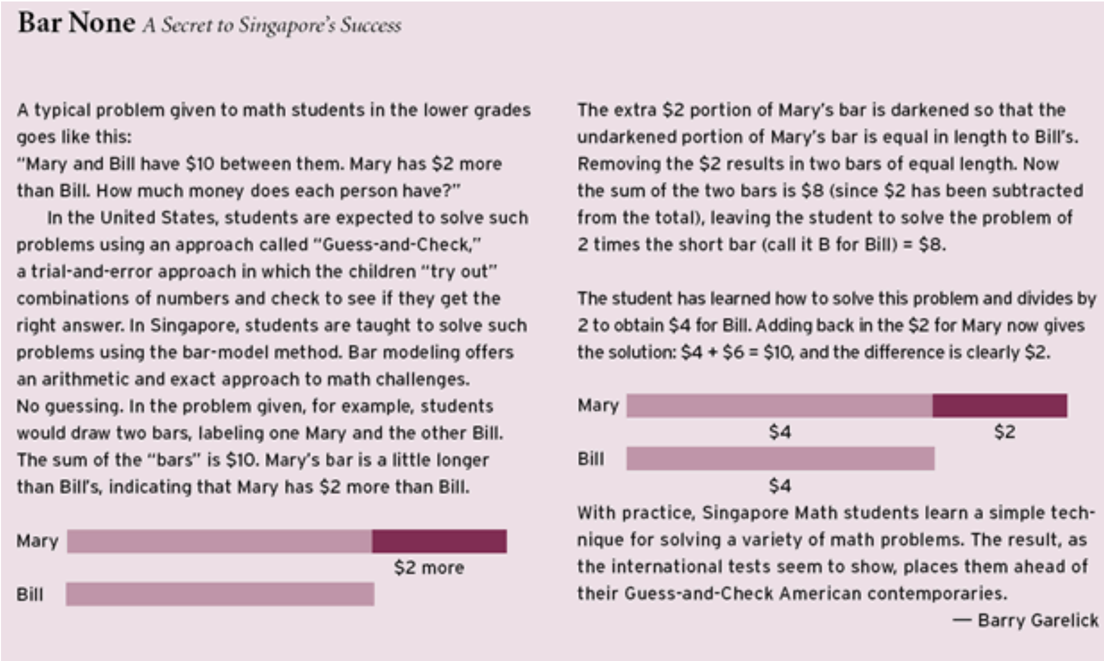
3.3.8.2 Singapore

I Singapore kommer likninger inn i pensum på ungdomsskolen. Noen algebraiske begreper introduseres på 6.trinn, blant annet å sette opp, forenkle og regne ut algebraiske uttrykk. Dessuten introduseres bokstaver for variabler på 6.trinn. Men pensum i småskolen fokuserer på å utvikle algebraisk tenkning gjennom mange ulike erfaringer. "*This development is made possible by using "model methods" or "pictorial equations" to analyze parts and generalize and specify, and do and undo*" (Cai et al., 2011, s. 32). "*It was believed that if students were provided with the means to visualize a word problem—be it a simple arithmetic word problem or an algebra word problem—the structural underpinning of the problem would be made overt. Once children understood the structure of the problem, they were more likely to solve it (Kho 1987).*"

Representasjonen av problemet er altså ment å skulle hjelpe elevene til å forstå problemet bedre slik at de kan løse det. Her utvikler de og gjør seg bruk av elevenes kvantitative tenkning. Den kvantitative tenkningen kommer frem ved at det brukes tid på å forstå problemet som en helhet før man forsøker å løse det. De gjør også bruk av concreteness fading i at de begynner med konkrete objekter (eller bilder av disse) og beveger seg mot mer generelle og abstrakte representasjoner.

I første klasse brukes det bilder av ekte objekter som så etter hvert erstattes av rektangler som skal representere antallet. Ng og Lee kaller de representasjonene elevene møter i første klasse en slags tegneserieutgave av modellmetoden (Ng & Lee, 2009). Modellmetoden blir stadig mer kompleks oppover i klassetrinnene, men introduseres allerede i første klasse. I begynnelsen brukes metoden kun til å visualisere regnestykker med kjente tall. Modellmetoden brukes etter hvert (3.trinn) til å løse algebraproblemer med ukjente, i forbindelse med del i forhold til helheten og i proporsjonalitet. "*In each case, the rectangles allow students to treat unknowns as if they are knowns. This is because the unknowns are represented by unit rectangles that can be treated as if they are knowns, even though the unit represents an unknown number of objects*" (Cai et al., 2011, s. 33).

Garelick (2006) sier følgende om Singapores modellmetode:



Bar None *A Secret to Singapore's Success*

A typical problem given to math students in the lower grades goes like this:
"Mary and Bill have $10 between them. Mary has $2 more than Bill. How much money does each person have?"

In the United States, students are expected to solve such problems using an approach called "Guess-and-Check," a trial-and-error approach in which the children "try out" combinations of numbers and check to see if they get the right answer. In Singapore, students are taught to solve such problems using the bar-model method. Bar modeling offers an arithmetic and exact approach to math challenges. No guessing. In the problem given, for example, students would draw two bars, labeling one Mary and the other Bill. The sum of the "bars" is $10. Mary's bar is a little longer than Bill's, indicating that Mary has $2 more than Bill.

Mary
$2 more
Bill

The extra $2 portion of Mary's bar is darkened so that the undarkened portion of Mary's bar is equal in length to Bill's. Removing the $2 results in two bars of equal length. Now the sum of the two bars is $8 (since $2 has been subtracted from the total), leaving the student to solve the problem of 2 times the short bar (call it B for Bill) = $8.

The student has learned how to solve this problem and divides by 2 to obtain $4 for Bill. Adding back in the $2 for Mary now gives the solution: $4 + $6 = $10, and the difference is clearly $2.

Mary
$4
$2
Bill
$4

With practice, Singapore Math students learn a simple technique for solving a variety of math problems. The result, as the international tests seem to show, places them ahead of their Guess-and-Check American contemporaries.

— Barry Garelick

Hentet fra http://educationnext.org/miracle-math/

Barry Garelick mener at man i Singapore har lært en aritmetisk metode for å løse likninger. Han reduserer altså Singapores modellmetode til kun en prosedyre og har dermed mistet mye av det som gjør dette effektivt i Singapore. Alle metoder som oppfordrer til relasjonell forståelse kan reduseres til prosedyrer dersom lærer ikke er bevisst på denne faren. For eksempel kan det å fokusere på inverse operasjoner gjøres til en rent teknisk øvelse. Det er dette som ligger i begreper som "bytte- og flytteregelen". 3+x=2+2x, vi bytter fortegn og flytter x over på høyre side og 2 over på venstre side. Da får vi enkelt og greit 3-2=2x-x og 1=x. Fokus i Singapore ligger i å utvikle elevenes relasjonelle forståelse. Modellmetoden brukes som en hjelp til tanken når man skal avdekke relasjoner. Til slutt så kan man aritmetisk regne ut svaret, men dette er underordnet. Barelick skriver i rammen over at "*The student has learned how to solve this problem and divides by 2…*". Nei, elevene har lært seg å bruke bildene til å finne de opplysningene de trenger. Dette er ikke drillet inn som enn tankeløs prosedyre, men er en måte å forholde seg til ukjente størrelser og relasjoner mellom dem på. Det er altså ikke et aritmetisk verktøy først og fremst, men et verktøy for å undersøke sammenhenger og relasjoner. Tegningene lar elevene se problemet som et hele før de velger fremgangsmåte for å løse det. Det er ikke snakk om å bruke en fast prosedyre, men å analysere helheten og finne frem til den beste måten å løse dette på. Samtidig har Barelick et poeng i at denne metoden er mye mer effektiv enn en gjett og sjekk-metode. Gjett og sjekk-metoden er ikke algebraisk. Den baserer seg på å teste ut ulike numeriske verdier for så å tilpasse slik at man til slutt finner tall som passer. Når vi bruker modellmetoden så deduserer vi oss frem til hvilke metoder vi kan bruke. Modellmetoden er algebraisk, vi kan snakke om rektanglene som “pictoral equations”. Rektanglene gjør at elever kan forholde seg til ukjente størrelser som om de var kjente. Slik kan de utforske sammenhenger som til slutt kan gi dem et tips til hvordan oppgaven best kan løses, dersom den har en løsning. En slik representasjon og bruk av bilder gjør en overgang til bruk av bokstaver enkel. Her kan rektanglene ganske lett byttes ut med a-er og b-er på høyere klassetrinn. Elevene kan likevel ha mentale modeller for bokstavene i form av rektangler av ukjent lengde.

En annen viktig ide i pensum i Singapore er utforskning av strukturer i mønstre. Her er det snakk om å finne tallmønstre og geometriske mønstre. Den regelen de ser skal de så generalisere slik at mønsteret kan fortsettes. Funksjoner introduseres på 2.trinn i form av å finne en regel for sett av ordnede par. Hvis 1 gir 3 og 5 gir 7 hva gir 9 og hva er regelen? Etter hvert uttrykker de denne regelen med algebraiske uttrykk (n+2). I Singapore fokuseres det på inverse operasjoner fra 2.trinn av.

3.3.8.3 New Zealand

I 1999 satte myndighetene i New Zealand i gang et prosjekt kalt “the Numeracy Project”. Dette var rettet mot lærere og målet var “*to improve students' number sense and understanding of operations by introducing a flexible approach to solving problems in numerical situations*” (Britt & Irwin, 2011, s. 140). Det var fokus på spesifikke regnestrategier. De ulike strategiene ble systematisert etter operasjoner og etter ulike stadier i strategiutviklingen. Elevene ble testet for å finne ut av hvilket nivå deres regnestrategier var på, slik at man kunne arbeide videre på rett nivå for den enkelte elev. Elevene ble så undervist i grupper etter hvordan de skårte på testen.

Operasjoner Stadier	Addisjon og subtraksjon	Multiplikasjon og divisjon	Proporsjon
0	Kan ikke telle eller lage en mengde med opp til ti objekter		
1 En –til-en	En-til-en Kan telle en mengde objekter	En-til-en Kan telle en mengde objekter	Kan ikke dele en mengde inn i to eller fire like deler
	Kan ikke lage mengder til å bruke i addisjon og	Kan ikke lage mengder til å bruke i multiplikasjon og	

	subtraksjon	divisjon	
2 Telle fra en på materiell	Telle fra en	Telle fra en	Dele likt
	Teller objekter for å løse enkle addisjons- og subtraksjonsoppgaver	Løser enkle multiplikasjons- og divisjonsoppgaver ved å telle på materiell	Kan bruke materiell til å dele en mengde inn i et gitt antall like deler
3 Telle fra en ved visualisering	Telle fra en	Telle fra en	Dele likt
	Teller objekter ved å visualisere dem	Teller alle objektene i enkle multiplikasjons- og divisjonsstykker ved å visualisere	Kan dele en mengde i et gitt antall like deler ved å bruke materiell eller ved visualisering
	Ikke bevisst på at ti er en telle-enhet	Bruker materiell for å løse stykker med høyere tall	
4 Avansert telling	Telle videre fra et tall	Telle i hopp	
	Teller fremover eller bakover for å løse enkle addisjons og subtraksjonsstykker	Teller med hopp for å løse enkle multiplikasjons- og divisjonsoppgaver ved å bruke materiell eller visualisering	
5 Tidlig additiv	Tidlig addisjon og subtraksjon	Multiplikasjon ved gjentatt addisjon	Del av et tall ved addisjon
	Bruker et begrenset utvalg av hoderegningsstrategier for å løse addisjons- og subtraksjonsoppgaver. Eks: 8+7=8+8-1 (dobling) og 39+26=40+25=65 (oppdeling og kompensering)	Bruker en kombinasjon av tabellkunnskap og gjentatt addisjon Eks: 4x6=(6+6)+(6+6)=12+12=24	Bruker addisjon til å finne del av et tall Eks: en tredjedel av 12 er fire fordi 4+4+4=12
		Bruker tabellkunnskap i multiplikasjon sammen med gjentatt addisjon for å gjette	Løser divisjon i hodet ved å bruke halvering

		på svar i divisjonsstykker Eks: 20/4=5 side 5+5=10 og 10+10=20	eller tabellkunnskap i addisjon Eks: Når vi deler 7 kaker på fire barn får alle 1+1/2+1/4 kake.
6 Avansert additiv – tidlig multiplikativ	Avansert addisjon og subtraksjon av hele tall	Utledet multiplikasjon	Del av et tall ved addisjon og multiplikasjon
	Kan gjøre overslag over og regne ut med addisjon og subtraksjon oppgaver som involverer hele tall ved å velge passende strategi fra et bredt utvalg av avanserte hoderegningsstrategier Eks: 324-86=324-100+14 1242-986=1242+14-(986+14)	Bruker en kombinasjon av tabellkunnskap og hoderegningsstrategier til å finne svar på multiplikasjons- og divisjonsoppgaver. Eks: 4x8=2x16=32 /dobling og halvering) og 9x6=(10x6)-6=54	Bruker gjentatt halvering eller tabellkunnskap i multiplikasjon og divisjon i oppgaver der man skal finne del av en mengde og i divisjon med rest Eks 1/3 av 36 =12 siden 3x10=30 og 6/3=2 og 10+2=12

Min oversettelse av skjema (Britt & Irwin, 2008, s. 41)

Britt og Irwin (2008) mener at dersom man arbeider med hoderegningsstrategier slik at elevene oppnår en dybdeforståelse for operasjonene og kan bruke ulike algoritmer og strategier på en fleksibel måte, så har de et bedre grunnlag for å lære algebra. Disse strategiene kan gjøre at elevene utvikler en måte å forholde seg til tall på hvor tallene får form av det Fujii og Stephens (2001) kaller ”kvasivariable”. Dette vil si at selv om de regner med tall så forholder elevene seg til tallene på en slik måte at det i prinsippet kunne vært noen andre tall som ble brukt. Dersom man bruker en av deres strategier, kompensering, så vil man kunne legge sammen 14 og 7 ved at man legger til en mindre enn 14, nemlig 13. Men da må dette kompenseres ved at man legger til en ekstra til slutt. 14+7=13+7+1. Dersom vi snakker med elevene om hvordan de tenker når de bruker en slik strategi, og ikke minst når de velger mellom flere ulike strategier, så vil vi få høre argumenter som handler om strukturelle sammenhenger.

Britt og Irwin mener at elevene driver med algebra når de regner. Det er ikke mulig å regne uten å ha en viss strukturell forståelse. De sier at "*The result of our study led to a view of algebra, particulary as it pertains to the pedagogy of introductory algebra, in which we do not see algebra as following aritmetic so that arithmetic has an ending that coincides with the beginning of algebra. Instead our view is consonant with those of Hewitt (1998, p.20), who argues that algebra enables arithemtic to be carried out, and Steffe (2001, p.563), who argues that children's knowledge of number together with numerical operational knowledge that is effective and reliable is essentially algebraic in nature*" (Britt & Irwin, 2008, s. 39).

Man lærer allikevel ikke algebra av å være flink til å regne, men ved å forholde seg til aritmetikken på en strukturell måte. Kritikken mot the Numeracy Project har blant annet vært at det har gått for langt i å fokusere ensidig på mentale regnestrategier slik at man ikke har brukt tid på å øve på de mest effektive algoritmene og på tabellkunnskap, samt på skriftlig matematikk (Patterson, 2015).

Denne oppgaven fokuserer på strukturell forståelse, slik som i the Numeracy Project. Samtidig har vi her fokus på å notere ned og kommunisere de strukturene vi finner. Dessuten fokuserer vi på å finne de mest effektive reglene eller algoritmene gjennom å argumentere og diskutere. Vi arbeider med det Sfard (1991) kaller kondensering (3.1.3). Tidlig algebra handler ikke om å legge vekk algoritmer og aritmetikk, men om å ha et bevisst forhold til algoritmene. Når kan de brukes? Hva kan gå galt? Hvorfor er de effektive? Hvorfor virker de? Vi har også et fokus på tabellkunnskap og algoritmer som en del av de mange eksemplene vi kan bruke for å danne objekter gjennom internalisering, kondensering og reifikasjon.

Noe vi kan ta med fra the Numeracy Project er hvordan tallene kan få en rolle som kvasivariable. Men for at vi skal sikre at elevene oppdager de algebraiske strukturene i aritmetikken så vil jeg hevde at det er viktig å eksplisitt representere disse strukturene. Det er ingen automatikk i at alle elever klarer å gjøre seg nytte av erfaringer med ulike regnestrategier i utvikling av algebraisk tankegang dersom de ikke blir gjort oppmerksom på strukturene. Jeg oppfatter at the Numeracy Project vil legge til rette for mange gode erfaringer som kan tjene som et grunnlag for å forstå den formelle algebraen senere. Men det ingen automatikk i en slik overføring fra gode eksempler til forståelse for struktur. Ved å måtte representere strukturene i aritmetikken ved hjelp av noe annet enn tallene så kan vi kanskje få en annen forståelse for generaliteten i strukturene. Man kan godt starte en prosess med å bruke tallene på en kvasialgebraisk måte, men vi bør ikke stoppe der. Gjennom å representere strukturene eksplisitt vil vi gi flere elever muligheten for å se disse sammenhengene. Dette vil også være et ledd i en utvikling av et symbolsystem for å kommunisere rundt matematiske strukturer, noe som i seg selv er et mål i tidlig algebra.

3.3.9 Pensum

Man kan være skeptisk til å innføre algebra som enda et emne i pensum. Er det ikke nok fra før? Det synet på algebra som forfektes i denne oppgaven ser ikke algebra som et ekstra emne, men i stedet som en måte å møte matematikken på. Vi kan altså fremdeles gjennomføre målene i læreplanen slik den står, men allikevel utvikle elevenes algebraiske tankegang. Det er våre holdninger, vår tilnærming til matematikkfaget som er viktig. De norske læreplanene for første og andre trinn har ganske runde formuleringer og få eksakte krav. Kompetansemålene fokuserer slik jeg ser det på elevenes mengdeforståelse og tallforståelse. Et fokus på generalitet og system er i en slik sammenheng ikke noe som tar ekstra tid, men er en veldig nyttig tilnærming for at elevene kan utvikle en god tall- og mengdeforståelse. ”*Early algebra has the potential to make the existing curriculum - sometimes criticized as a ”mile wide and an inch deep”-into a more connected mathematical experience for children*” (Kaput, Carraher, et al., 2008, s. xix). Jeg har ofte tenkt at ved å dele opp lærestoffet i kapitler som sees på som egne emner så tilsløres det faktum at alt de arbeider med i første klasse i prinsippet handler om det samme, men fra litt ulike perspektiver. Subtraksjon og addisjon er to sider av samme sak, ikke to distinkte atskilte disipliner, arbeid med flere og færre henger sammen med dobling og halvering og med addisjon og tallinje. Vi kan ikke legge fra oss det vi lærte i forrige kapittel og late som vi begynner på noe nytt. Ved å fokusere på sammenhenger og elevenes ideer og så bygge kunnskapen utover derfra, så vil de ulike deler av pensum kunne integreres med hverandre på en helt annen måte. Utfordringen er å endre (men ikke utvide) undervisning, materiell og pensum slik at en algebraisk tilnærming støttes. Resultatet vil ikke nødvendigvis være at elevene lærer mer fagstoff enn de gjorde, men at de lærer det på en måte som også utvikler deres algebraiske tankegang. Vi algebrafiserer matematikken.

“*Our “algebrafication” strategy involves three types of teacher-based classroom change: algebrafying instructional materials, finding and supporting students' algebraic thinking, and creating classroom culture and teaching practices that promote algebraic thinking*” (Blanton & Kaput, 2003, s. 71).
Samtidig er læreplanen det styrende dokumentet i skolen. Dersom det ikke fremgår av læreplanen at algebraisk tenkning er viktig, så vil det heller ikke få noe fokus.

3.4 Oppsummering – tre komponenter i tidlig algebra

Jeg har forsøkt å få frem flere ulike, men kanskje heller supplerende enn motsatte syn på algebra. I tillegg har jeg lagt frem hvilke syn på undervisning jeg bygger min pedagogiske og didaktiske forståelse på. Hvert syn har sin egen tilnærming til hva det er viktig å fokusere på i undervisningen, men de fleste trekker frem nødvendigheten av å representere generelle mønstre og strukturer.

Da jeg så begynte å arbeide med kapittel 5 hvor jeg legger frem eksempler fra forskningslitteraturen på konkret undervisning så jeg at det var to andre kategorier, i tillegg til representasjon, som utkrystalliserte seg. Undervisningseksemplene nevner på ulikt vis viktigheten av gode sentrale eksempler. I tillegg er det et fokus på å diskutere og argumentere for de mønstrene, reglene og strukturene de finner. Det ble etter hvert klart for meg at alle disse tre komponentene, eksempel, representasjon og diskusjon måtte være tilstede i større eller mindre grad i algebraundervisning. Dette funnet gjorde at jeg valgte å strukturere eksemplene i kapittel 5 i nettopp
a) eksempel, b) representasjon og c) diskusjon.
Fokus for alle disse tre, separat og samlet, er generalisering. De tre er ikke ment som en hierarkisk struktur eller som en rekkefølge for hvordan undervisning skal drives, men heller som en slags sjekkliste. Dersom en av disse mangler så kan undervisningen vinne noe på at man tilfører denne komponenten. Hvis vi for eksempel gjennom gode eksempler finner frem til et generelt mønster som vi så representerer, så mister vi noe dersom vi benytter sjansen til å diskutere representasjonen og det generelle mønsteret. Algebraiske ”habits of mind” handler om at det er blitt en vane å avdekke strukturer i eksempler, kommunisere disse på ulike måter og argumentere og diskutere.
Ingen av disse tre kan stå alene dersom man vil at elevene skal utvikle algebraisk tenkning, men det kan være ulikt fokus på de ulike komponentene fra time til time.

3.4.1 Eksempel

I følge Skemp (1971) så bygger vi opp våre begreper gjennom å møte mange eksempler. I første klasse er det viktig at disse eksemplene er så konkrete som mulig. Vi bruker mye konkretiseringsmateriell og dagligdagse situasjoner. Taylor-Cox (2003) mener det er viktig å gi elevene erfaringer med varierte typer mønstre, situasjoner og strukturer. Sfard og Linchevski (1994) snakker om prosesser som blir til objekter blant annet ved at man får repetere prosessene. Det betyr at vi må ha flere eksempler på de samme prosessene i bruk.

Ved å velge ut oppgaver som er sentrale for den sammenhengen vi vil belyse og som gir erfaring med aritmetiske prosesser så er håpet at vi kan gi elevene mulighet for å danne gode begreper. Eksemplene bør også gi mulighet for å utvikle elevenes kognitive tenkning ved at de tilbyr komplekse heller enn forenklede sammenhenger. Smith og Thompson (2008) anbefaler oppgaver som ikke inneholder tall for å flytte fokus fra regning til tenkning. Eksempler kan bestå av konkrete oppgaver med materiell, eller det kan være rene matematiske oppgaver.
Samtidig kan de fleste eksempler som man finner i matematikkbøkene lett omformes til eksempler som fordrer algebraisk tenkning ved å variere tallene i oppgaven eller legge til andre begrensninger. Gode eksempler er ikke nok. Prosesser blir ikke automatisk til objekter (reifikasjon), eksempler blir ikke automatisk til begreper og elevene ser ikke automatisk hvilke mønstre som ligger til grunn for de aritmetiske operasjonene de utfører. Owen poengterer dette for arbeid med mønster: "*It's most important that they be stated explicitly in the children's own terms through discussion and writing*" (Owen, 2005, s. 127).

3.4.2 Representasjon

J. Smith og Thompson (2008) definerer algebra blant annet som det å uttrykke matematiske begreper. Kieran sier at vi bør ha et fokus på å representere og løse oppgaver, ikke bare løse (ovenfor). Rivera (2006) mener at man bør undervise aritmetikken slik at elevene ser et behov for å bruke representasjoner og at de læres opp til å sette pris på både formelle og uformelle representasjoner. Mange av representasjonene vi bruker i første klasse kan kalles kvasialgebraiske (Kaput, Blanton, et al., 2008), men er et naturlig steg mot formelle symboler. Gjennom representasjon av generalitet så styrkes forståelsen for generaliteten, men også for symbolsystemet. Det er viktig at elevene får utvikle sine egne uttrykk mot en konvensjonell måte å kommunisere matematisk (Radford, 2006; Rivera, 2006). Det er også viktig at de får erfaring med mange ulike representasjoner (Carraher et al., 2008; Driscoll, 1999; Lesh et al., 1987; Mark-Zigdon & Tirosh, 2008)

K-06 sier følgende om det å skrive i matematikkfaget:

"*Å kunne skrive i matematikk inneber å beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear. Det inneber å bruke matematiske symbol og det formelle matematiske språket til å løyse problem og presentere løysingar. Vidare vil det seie å lage teikningar, skisser, figurar, grafar, tabellar og diagram som er tilpassa mottakaren og situasjonen. Skriving i matematikk er ein reiskap for å utvikle eigne tankar og eiga læring. Utvikling i å skrive i matematikk går frå å bruke enkle uttrykksformer til gradvis å ta i bruk eit formelt symbolspråk og ein presis fagterminologi. Vidare går utviklinga frå å beskrive og systematisere enkle situasjonar med matematikkfagleg innhald til å byggje opp ein heilskapleg argumentasjon omkring komplekse samanhengar*" (nedenfor).

3.4.3 Diskusjon

Vi kan se for oss et undervisningsforløp der vi begynner med å gi elevene noen erfaringer og eksempler, så må de representere de mønstrene de ser for eksempel gjennom en tegning. Denne tegningen er nå et håndfast objekt som vi kan diskutere. Elevene har noe felles å ta utgangspunkt i. Selv om elevene fremdeles sitter inne med ulike tolkninger av tegningen så har de nå et felles utgangspunkt for en diskusjon. Vi ønsker i denne fasen at elevene skal komme frem til generaliseringer ut fra de erfaringene de har fått og gjennom å ha representert det de har sett. I de tilfellene der de har oppdaget mønsteret allerede da de representerte, eller allerede i eksemplene så må de i diskusjonen argumentere for at den regelen de har funnet stemmer. I denne fasen er det viktig at det blir stilt gode spørsmål for refleksjon, at elevene argumenterer for det de mener og at de andre elevene kan komme med innsigelser eller presiseringer. Noen gode spørsmål kan være:

- Fortell meg hva du tenkte
- Løste du/dere dette på en annen måte?
- Hvordan vet du at dette er sant?
- Virker dette alltid? Er det alltid slik?

(Blanton & Kaput, 2003)

Noen elever vil kunne oppdage generelle mønstre allerede i møtet med gode eksempler, andre elever knekker koden i det de må skrive dem ned. Andre elever trenger kanskje støtte av de andre elevenes løsninger eller lærerens spørsmål for å se den generelle strukturen. Dessuten blir de elevene som mener de har skjønt det nødt til å argumentere for det de så på en eksakt måte. Det holder ikke å si at de vet det fordi de bare vet det. De må argumentere og begrunne.

I denne argumentasjonen vil de få bruk for symboler å kommunisere gjennom. Spesielt gjelder dette dersom tankene de skal formidle er komplekse (J. Smith & Thompson, 2008). Ved at andre elever følger med og kommer med innsigelser så tvinges de også til å kommunisere eksakt, noe som igjen gir en motivasjon for å lære seg formell algebra. Behovet for å kunne formell algebra vokser da frem gjennom behovet for å uttrykke seg, heller enn for å løse noen oppstilte stykker i en bok. Det matematiske språket vokser frem i en sosial kontekst der kommunikasjon er sentralt. Det er her viktig at læreren er med på å guide elevene til en notasjon som er formelt gyldig. Vi kan ikke forvente at elevene skal gjenoppfinne matematisk notasjon som er forhandlet frem gjennom århundrer. De skal i stedet bli sosialisert inn i de normer som gjelder for matematisk kommunikasjon. Her er læreren en viktig rollemodell. Blanton og Kaput (2008) trekker også frem viktigheten av å etablere "*classroom norms of participation so that argumentation, conjecture, and justification are routine acts of discourse*" (s. 362). De ønsker altså et læringsmiljø der det å grunngi og argumentere blir en vanlig del av diskursen.

K-06 sier følgende om det å kommunisere i matematikkfaget: "*Munnlege ferdigheiter i matematikk inneber å skape meining gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk. Det inneber å gjere seg opp ei meining, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av både eit uformelt språk, presis fagterminologi og omgrepsbruk. Det vil seie å vere med i samtalar, kommunisere idear og drøfte matematiske problem, løysingar og strategiar med andre. Utvikling i munnlege ferdigheiter i matematikk går frå å delta i samtalar om matematikk til å presentere og drøfte komplekse faglege emne. Vidare går utviklinga frå å bruke eit enkelt matematisk språk til å bruke presis fagterminologi og uttrykksmåte og presise omgrep*" (nedenfor).

3.4.4 Konklusjon

Mason (1980) nevner tre prosesser som han mener er essensielle for matematisk tenkning:

"specialization - doing specific examples to try to find out what is meant and get a sense of what is going on.

generalization – trying to articulate the underlying general pattern

reasoning - producing an argument to verify that your articulation of the general pattern is valid." (Mason, 1980, s. 8).

Alle disse mener jeg er inkludert i de tre komponentene. Når elevene møter gode eksempler og representerer det de finner så spesialiserer og generaliserer de. Når de diskuterer generaliseringene sine med andre så resonnerer de. Men de resonnerer også når de finner ut hvordan de skal representere de mønstrene de ser i eksemplene. Mason kaller ikke dette algebraisk tenkning, men generelt matematisk tenkning. Det er i det vi benytter oss av det algebraiske symbolspråket for å generalisere at vi bedriver algebraisk aktivitet. Et steg på veien i denne symboliseringen er gjennom kvasialgebraisk symbolisering, det vi kaller representasjoner. Men vi trenger komplekse, sentrale, gode eksempler som egner seg for flere ulike representasjoner og vi trenger at nedtegningen av generaliteten vi finner blir gjenstand for diskusjon.

Når elevene har funnet frem til mønstre, regler eller strukturer så må de også teste disse reglene ut ved å bruke dem i nye eksempler og prosesser. Gjennom arbeid med disse vil de lære seg regneferdigheter, men samtidig vil disse nye reglene etter hvert bli til objekter som de kan bruke på et høyere nivå i tenkningen. Vi kan derfor ikke si at de tre komponentene følger etter hverandre. Kanskje må man gjøre noen flere forsøk og justere på tegningen sin, eller man kan begynne med en representasjon for så å diskutere hva som skjer, hvilke betingelser som må gjelde, og så teste dette ut i eksempler. Men tanken er at ved å fokusere på alle disse tre i undervisningen så er det større mulighet for å fokusere på strukturene fremfor på det rette svaret.

Jeg vil i kapittel 5 gjennomgå noen eksempler fra undervisning, både min egen og fra forskningslitteraturen. Mitt bidrag her er å hente frem opplegg som passer i første klasse og å lage slike opplegg selv. Noen opplegg har jeg laget og brukt før arbeidet med denne oppgaven. Andre opplegg har blitt til i mitt forsøk på å vise at de fleste områder av algebraen kan dekkes i første klasse. Jeg har funnet inspirasjon i generelle anbefalinger i teorien, i eksempler på opplegg i teorien og i egen erfaring.

Jeg vil også vise hvordan kompetansemål i læreplanen kommer i spill i oppgaver der elevenes algebraiske tankegang er i fokus. Jeg vil komme med forslag til hvordan de tre komponentene kan ta sin plass i disse konkrete oppgavene. For å tydeliggjøre at eksemplene dekker mye av det området vi kan kalle algebra har jeg benyttet meg av Kaputs definisjon og inndeling av algebra (Kaput, Carraher, et al., 2008, s. 5-15).

Kaput sier at algebraen kan deles i to hovedområder; å generalisere ved hjelp av symboler og å forholde seg til disse generaliseringene ved hjelp av algebraens syntaks. Disse to deler han så inn i tre grener. Jeg har viet kapittel 4 til å gå gjennom denne inndelingen av algebraen. Jeg bruker deretter denne inndelingen som struktur i kapittel 5. For hver av de tre grenene har jeg funnet eksempler på undervisning som kan gjennomføres i første klasse. For det meste vil eksemplene forholde seg til generalisering innen de tre grenene. Dette hører inn under hovedområde A. Men jeg vil også forsøke å vise at hovedområde B også blir berørt av eksemplene. Når elevene møter eksempler, representasjoner og diskusjoner som styrker deres forståelse for struktur, syntaks og gir dem symbolkunnskap så bygges det opp kompetanse som er viktig i hovedområde B.

4 Algebra

4.1 To hovedområder

Jeg vil i denne oppgaven legge til grunn en forståelse av hva algebra er, som kommer til uttrykk i boken «Algebra in the Early Grades», spesifikt i kapittelet skrevet av James. J. Kaput: «What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning?» (Kaput, Carraher, et al., 2008, s. 5-15). Kaput legger frem det han kaller en innholdsanalyse av algebra. Han deler inn algebraen i to hovedområder (core aspects) og at begge disse består av tre grener (strands). De to hovedområdene er i min oversettelse og tolkning:

A. Algebra som systematisk symbolisering av generaliseringer av regler og begrensninger
B. Algebra som syntaktisk guidet resonnering og handlinger på generaliseringer uttrykt i konvensjonelle symbolsystemer

4.1.1 Hovedområde A: Generalisere fra prosess og aritmetikk

Jeg legger i dette at i (A) utvikles det symbolske språket som gjør at vi kan kommunisere om mønstre og regelmessigheter vi ser i matematikken. Hovedområde A handler om å generalisere og symbolisere matematiske sammenhenger.
Når vi legger sammen, teller, sammenligner størrelser og løser kvantitative problemer så bruker vi tall og operasjoner. Tall kan sees på som symboler for størrelser. Vi setter et navn på en av egenskapene til en samling objekter, nemlig mengdens størrelse eller antall. Denne egenskapen kan være lik eller ulik hos en annen mengde. Her har det skjedd en generalisering. Vi har trukket ut en egenskap og gitt den et navn og et symbolsk uttrykk. Dette navnet gjelder for denne egenskapen uavhengig av hvilke objekter mengden består av og i hvilken sammenheng den fremkommer. En mengde på fem elefanter er noe helt annet enn en mengde på fem mynter. Men begge disse samlingene av objekter har egenskapen fem felles.

Når vi opererer på disse mengdene benytter vi oss av operasjoner. Også her vil det være det samme som skjer uavhengig av om det er elefanter eller mynter som legges sammen. Vi kan se på slik aktivitet som en prosess vi kan øve oss på å utføre. Vi kan lære oss mange ulike regneregler og triks slik at vi finner et svar på oppgaven eller problemet. Men for i det hele tatt å kunne utføre slike utregninger så må vi ha en forventning om at det er en konsistens i matematikken. Dersom to pluss tre elefanter blir fem elefanter vil vi forvente av to pluss tre mynter også utgjør fem mynter. Denne logikken eller konsistensen inngår som en del av det jeg vil kalle algebra. Det er en struktur og et system som ligger til grunn for at vi i det hele tatt kan regne. Denne strukturen kan vi beskrive ved hjelp av symboler av mer generell karakter enn tall som 1 og 2. I det vi beskriver addisjon som a+b=c så vil de fleste godta at dette er snakk om algebra. Definisjonen av algebra ligger hos mange nettopp i symbolspråket som bytter ut tallene med bokstaver. Men kan en kommunikasjon rundt de generelle strukturene i matematikken gjennomføres uten slik notasjon? Er det notasjonene i seg selv som konstituerer at det er snakk om algebra, eller er det fokuset på strukturene og sammenhengene som er det viktige? I Kaputs definisjon er algebra beskrevet på en veldig vid måte. Her inkluderes også tegninger, figurer, tabeller og annen nedtegning som har til hensikt å kommunisere generelle sammenhenger mellom tall og operasjoner. Vi kan si at algebraen springer ut av et behov for å kommunisere rundt generelle mønstre og strukturer i matematikken.

Dersom vi lar strukturene i matematikken forbli uuttalt gjør vi dem til noe utilgjengelig og mystisk. Oppgavene vi regner i skolebøkene er egentlig spesialtilfeller. Dersom vi bare utsettes for en mengde eksempler uten at de generelle linjene trekkes vil det være veldig individuelt om elevene trekker disse linjene selv. Algebraen er et system av symboler som vi kan bruke til å beskrive og kommunisere om strukturene i matematikken. Vi generaliserer fra de spesielle tilfellene til de generelle mønstrene. Et eksempel kan være at vi ser at for de reelle tallene gjelder det at 2+3=3+2. Vi ser ved erfaring og gjennom vår forståelse for hva det betyr å addere to tall at dette gjelder hver gang vi adderer to naturlige tall. Vi kan generalisere dette til den kommutative lov for addisjon og kan kommunisere denne som a+b=b+a. Her brukes algebraen til å nedtegne noe vi allerede har oppdaget ved hjelp av tallene. Bokstavuttrykket er en generalisering der bokstavene erstatter de konkrete tallene slik at bokstavene kan byttes ut med tall for alle verdier av a og b der a og b inngår i de reelle tallene. Strukturen fremstår nå tydeligere enn den gjorde da vi brukte tall. Men det finnes mange andre måter å nedtegne algebraiske strukturer. Vi kan bruke tegninger og vi kan beskrive sammenhengene muntlig og diskutere dem i klassen. Vi kan også bruke konkreter som tellebrikker, klosser og cuisenairestaver til å kommunisere om de strukturene vi ser i aritmetikken. I eksempelet over kan vi bygge to tårn der det ene tårnet har to klosser og det andre tårnet har tre klosser. Vi kan så flytte rundt på tårnene og se at det totale antallet klosser er helt uavhengig av hvilket tårn vi teller først. Vi kan så forsøke dette med forskjellige antall klosser og se at det samme gjelder. Som en mer generell måte å uttrykke dette på så kan vi bruke to cuisenairestaver. Cuisenairestaver er staver av ulik lengde (fra 1 til 10 cm lange) i ulike farger. Vi kan for eksempel ta en rød og en blå cuisenairestav og så se at uansett hvordan vi flytter på dem så har vi en rød og en blå. Nå kan vi la disse stavene representere ulike mengder. Dersom den ene er 3 og den andre er 4 så har vi fremdeles 3 og 4 uavhengig av hvilken vi velger å nevne først. Vi kan bytte ut tallene med hvilke som helst tall og se at mønsteret gjelder. Vi kan også diskutere i hvilke tilfeller dette ikke gjelder. Vil det for eksempel gjelde for subtraksjon? Vil det gjelde alle de relle tallene?

4.1.2 Hovedområde B: Formell algebra, algebraens regler

I beskrivelsen av hovedområde B legger jeg at det algebraiske språket har en egen logikk og indre struktur. Dersom man følger logikken i dette språket kan man manipulere med bokstavuttrykk og nå frem til viten man ikke umiddelbart kan se ut fra de konkrete tallene, men heller ikke ut fra det generaliserte uttrykket. Vi kan for eksempel benytte oss av dette logiske systemet til å finne ut om den kommutative lov gjelder også for andre tallområder enn de reelle tallene. Vi kan finne ut noe om sammenhenger og samvariasjon som vi ikke visste fra før. Vi kan utvikle nye uttrykk og nye tanker som vi ikke så lett kunne funnet frem til uten logikken i dette formelle symbolsystemet. Vi kan løsrive oss fra anvendelsen og bare forholde oss til symbolene og operasjonene. Vi trenger ikke å tenke at det må kunne fungere eller være nyttig i virkeligheten, bare vi følger logikken i det formelle systemet.

Schoenfeld sier om den formelle matematikken "*…formal systems do not denote; that is, formal systems in mathematics are not **about** anything. Formal systems consist of sets of symbols and rules for manipulating them. As long as you play by the rules, the results are valid **within** the system. But if you try to apply these systems to something from the real world (or something else), you no longer engage in formal reasoning*" (Schoenfeld, 1991, s. 311).

Samtidig så inneholder Kaputs definisjon noe mer enn ren formell symbolmanipulasjon. Den sier noe om hva som er målet og innholdet i denne bruken av symbolspråket, nemlig generalisering. Algebra er resonnering og handlinger om og i forhold til generaliseringer. Mens hovedområde A handler om å generalisere fra konkret til symbolsk nivå så handler hovedområde B tenkning om generaliseringer som er guidet av symbolsystemets syntaks og uttrykt i konvensjonelle symboler.

Goldenberg et al. (2010) mener at førsteklassinger ikke kan forholde seg til symboler løsrevet fra det de representerer. De mener at elever først i 7.-8.klasse har modnet så de kan forholde seg til abstrakt symbolmanipulasjon. Dette har preg av stadietenkning. De bruker også ord som "operational" som vi kan kjenne igjen fra Piagets stadieteori.

Jeg har ikke funnet mye forskning på dette, spesielt ikke for så små barn som første klasse. Det er også en diskusjon hva det betyr at det er symbolisme løsrevet fra kontekst. Goldenberg et al. skriver at barn tidlig forholder seg til abstrakt symbolisme. De kan forholde seg til ord som symboler, bilder som symboler, men de mener at det er bruken av symbolene som skiller hva vi kan gjøre og ikke med de minste elevene. De mener at man ikke kan utføre "*formal operations on strings of algebraic symbols - rearranging them**, apart from their semantics**, to create other strings of algebraic symbols that solve a problem*" (Goldenberg et al., 2010, s. 554, min utheving)

Semantikken er den meningen som symbolene refererer til. De mener altså slik jeg leser det at små elever ikke kan manipulere med symboler uten at de samtidig har med seg i tanken den konteksten symbolet fremkom i og de konkrete objektene symbolene refererer til. De kan videre ikke bruke en slik manipulering med symboler til å løse et problem. Samtidig kan vi allerede fra første trinn gi elevene kunnskap om symbolsystemets syntaks og kanskje allerede da gi dem et første innblikk i hvordan syntaksen påvirker meningen. Og vi kan gi dem en forståelse for hva symbolene representerer.

I denne oppgaven vil tilnærmingen til symboler være at vi lærer språk i kontekst og for å uttrykke mening. På samme måte som elever har et språk før de begynner å lese og skrive så har elevene ideer og tanker om kvantitet før de lærer å skrive tall og uttrykk. For å få gode lesere må man arbeide med lesehastigheten. For å bli god i matematikk må man arbeide med regneferdigheter, og i algebra symbol-manipulasjon etter faste regler. Men vi kan også trekke den parallellen at en fremmedspråklig elev kan bli en reser på å lese norske ord selv om hun eller han ikke aner hva ordene de leser betyr. Vi må altså arbeide med å utvikle et rikt språk hos elevene og med å lære dem nye begreper og språkets syntaks. Det samme gjelder i matematikken. For at elevene skal bli effektive brukere av algebraens språk så må de forstå hva de uttrykker og ha utviklet ideer og meninger det er verdt å uttrykke. For at elevene skal kunne arbeide med symbolmanipulasjon må de være trygge på symbolene de bruker. Ved å lære elevene symboler for å kommunisere det de allerede vet så gir vi dem et godt grunnlag til å møte den mer abstrakte symbolmanipulasjonen med en forståelse som ikke bare er avhengig av regler og prosedyrer. Dette kan gi dem en mulighet til å forholde seg til symbolene på en mer fleksibel måte, fordi de kjenner symbolenes mening og har et bevisst forhold til syntaksen.

Dersom vi starter med symboler samtidig som vi starter med abstrakt bruk av disse symbolene kan elevene oppleve at det blir mye på en gang. Dersom de har blitt kjent med symbolene og språkets syntaks på forhånd i kjente sammenhenger så kan elevene bruke energien sin på problemet de skal løse. Ved å lære symbolene parallelt med aritmetikken så synliggjøres det også at aritmetikk og algebra er to sider av samme sak. Denne tanken fant Cai og Knuth i kinesiske læreplaner for grunnskolen. Her blir elevene oppfordret til å skrive uttrykk både med tall og med formelle algebraiske symbol. Slik er håpet at elevene skal oppdage sammenhengen mellom aritmetikk og algebra, men også at de skal oppdage at algebraen er mer effektiv etter hvert som problemene blir mer komplekse (Cai & Knuth, 2011, s. 40).

Det er naturlig at de fleste eksemplene i denne oppgaven ligger under hovedområde A. Men jeg vil for hvert eksempel kommentere hvordan det er egnet til å bygge elevenes forståelse for symbolene og algebraens syntaks. For at elevene skal kunne drive med syntaksguidet symbolmanipulasjon må de kunne symbolene og syntaksen. Når vi generaliserer og bruker konvensjonelle måter å symbolisere generaliseringene våre på så har vi begynt å jobbe med den algebraen som definerers innunder hovedområde B.

4.2 Tre grener

Kaput sier at de to hovedområdene A og B begge omfatter tre grener innenfor algebraen (Kaput, Carraher, et al., 2008). Disse tre er i min oversettelse og tolkning av begrepene:

1) Algebra som studiet av strukturer og systemer abstrahert fra utregninger og relasjoner , inkludert de som vokser ut av aritmetikk (algebra som generalisert aritmetikk) og kvantitativ tenkning.

2) Algebra som studiet av funksjoner, relasjoner og samvarians.

3) Algebra som bruk av en bukett modelleringsspråk, både fra det matematiske fagfelt og fra felt utenfor matematikken.

	Gren 1 Tall og aritmetikk	Gren 2 Funksjoner og variabler	Gren 3 Modellering
Hovedområde A Generalisere fra aritmetikk	Generalisere og finne mønstre ut fra aritmetikk og mengder. Bygge algebraisk syntaks på strukturen i aritmetikken. Generalisere om egenskaper og relasjoner mellom tall eller grupper av tall	Funksjoner, relasjoner og samvarians	Tallproblem som krever algebraisk løsning. Situasjoner modellert i funksjoner. Generalisering av situasjoner fra aritmetiske problem.
Hovedområde B Algebraens syntaks	Syntaktisk guidet resonnering og handlinger på generaliseringer rundt tall og aritmetikk. Abstrakt algebra	Syntaktisk guidet resonnering og handlinger på generaliseringer av funksjoner, relasjoner og samvarians. Analyse og funksjonslære	Syntaktisk guidet resonnering og handlinger på generaliseringer av modeller.

4.2.1 Gren 1: Tall og aritmetikk

Gren 1) tilsvarer det eksempelet jeg ga under punkt A) over om kommutativ lov. Vi regner og finner mønstre i de prosessene som inngår i regningen som vi så abstraherer til generelle sammenhenger og regler (algebra som generalisert aritmetikk). Disse kan vi så studere som et objekt i seg selv. Vi kan undersøke holdbarheten til vårt generaliserte uttrykk eller regel og så se for hvilke tallområder det gjelder eller ikke gjelder. Kaput nevner i tillegg kvantitativ tenkning. Man kan kanskje tenke at dette er det samme. Men som nevnt i underkapittelet om kvantitativ tenkning så kan vi mene noe om størrelser og relasjonene mellom disse selv om vi ikke har begynt å utføre operasjoner på (regne med) dem. Vi kan ha forventninger om forskjeller og relasjoner og om mengder eller antall uten at dette nødvendigvis er knyttet til regneregler.
På et høyere nivå så fører denne tankegangen til abstrakt algebra, men kan også inkludere klokkeregning, arbeid med bokstavfølger eller andre symboler knyttet til spesifikke regler. Dette hører inn under hovedområde B.

4.2.2 Gren 2: Funksjoner og variabler

Kaput har valgt å samle i gren 2) funksjoner, relasjoner og samvarians.
Innholdet her kan vel ikke sies å være ren algebra, men heller analyse. Samtidig er

dette en stor del av skolealgebraen og man må anvende algebraens syntaks. Noen argumenterer for at all algebra i skolen egentlig handler om funksjoner. (Kaput, Carraher, et al., 2008, s. 15). I denne grenen studerer vi størrelser som er avhengige av hverandre, som varierer, samvarierer eller som forholder seg til andre størrelser på en definert måte.

4.2.3 Gren 3: Modellering

I gren 3) finner vi modelleringsspråk i en vid forstand. Kaput nevner tre ulike former for modellering som er basert på hvordan de to hovedområdene A og B kommer til anvendelse.

Den første typen modellering omhandler tall og mengder. Det består av aritmetiske problem som krever at man bruker algebraens syntaks. Typisk er det et problem med noen begrensninger, gjerne i form av en likning der variabelen sees på som en ukjent heller enn en klasse situasjoner.

Den andre typen modellering samsvarer med hovedområde A ved å generalisere og uttrykke mønstre og regularitet i situasjoner eller fenomen som oppstår utenfor matematikken (fysikk, samfunn) eller innenfor matematikken (for eksempel geometriske mønstre). Her er det selve situasjonen som blir modellert, og uttrykket for generaliseringen tar ofte form av et uttrykk med en eller flere variabler som da kanskje kan representere en funksjon eller en klasse funksjoner. For å arbeide med slike uttrykk gjør man bruk av algebraisk syntaks.

Den tredje typen algebraisk modellering omfatter å generalisere fra løsninger av enkle modelleringssituasjoner enten av den første typen modellering som er nevnt over, eller fra rene aritmetiske tekstoppgaver som man ikke trengte algebraisk syntaks for å løse. Dette kan vi kalle å algebrafisere et aritmetisk problem. Algebraen kommer inn i det vi løser opp på begrensningene fra de opprinnelige problemene og utforsker problemets mer generelle form og sammenhenger. Vi kan sammenligne med andre modeller og situasjoner. I denne typen generalisert modellering innføres variabler som skal beskrive generaliteten. Disse variablene kalles som regel parametere. Vi kan for eksempel ha en oppgave der tre klosser er stablet oppå hverandre. Man skal så finne ut hvor stor overflate denne figuren har. En måte å innføre parametre på her er ved å variere det antallet klosser vi stabler oppå hverandre (Blanton & Kaput, 2011, s. 6). Antallet bokser blir da parameteren. Oppgaven går fra å være en aritmetisk oppgave der man legger sammen flater til å utfordre elevene til å finne et mønster som beskriver alle de ulike tårnene vi får alt etter hvilket antall klosser vi bruker. Den opprinnelige oppgaven fordret en utregning, mens den algebrafiserte oppgaven krever en generalisering gjennom bruk av symboler eller en muntlig forklaring. Mer om denne oppgaven i (5.3.3.1).

5 Algebra i første klasse

I dette kapittelet vil jeg komme med eksempler på hvordan vi kan gi elever i første klasse erfaringer av algebraisk natur i alle de tre grenene av algebraen. Aktivitetene handler for det meste om å generalisere fra aritmetikk, funksjoner og modellering (hovedområde A), men i det vi bedriver generalisering så blir elevene kjent med symboler og algebraens syntaks. For å kunne manipulere symbolsk med generalitet ved hjelp av algebraens syntaks (hovedområde B) kreves en slik kjennskap. Jeg vil derfor under hvert eksempel kommentere hvordan hovedområde B forberedes og påbegynnes gjennom kunnskap om symboler og syntaks elevene møter i eksempelet. Målet med disse eksemplene og aktivitetene er å begynne og bygge et grunnlag for å arbeide med algebraisk tenkning i grunnskolen. De fleste av disse aktivitetene kan videreutvikles og brukes på alle trinn i grunnskolen.

Aktivitetene er bygget opp med de tre komponentene jeg kom frem til i kapittel tre: a) eksempler, b) representasjoner og c) diskusjon. De fleste eksemplene handler om generalisering med utgangspunkt i aritmetikken, funksjoner, variabler og modellering. Men jeg vil som sagt poengtere og diskutere hvordan algebraisk symbolisering og syntaks kommer til uttrykk i aktivitetene. Til slutt vil jeg for hver aktivitet peke på hvilke mål i læreplanen Kunnskapsløftet 06, heretter K-06 som kan realiseres gjennom den enkelte aktivitet. Der ikke annet er nevnt er det kompetansemålene i faget etter 2.årstrinn det vises til (vedlagt nedenfor).

Der ikke andre kilder er nevnt er bildene mine egne.

5.1 Gren 1

I gren 1 beskjeftiger vi oss med tall, operasjoner og relasjoner mellom tall.

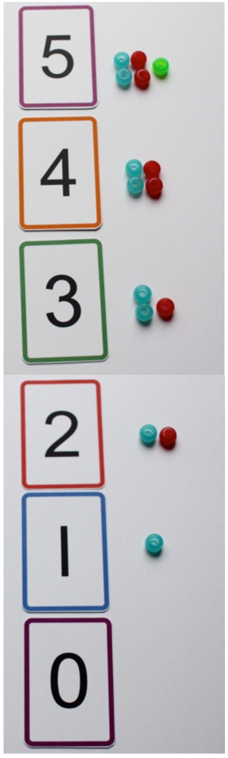
Rivera anbefaler å undervise tallsystemet på en slik måte at elevene blir klar over at det finnes egenskaper og relasjoner i systemet som må uttrykkes matematisk (Rivera, 2006, s. 306). Dette vil altså si at i det vi lærer elevene tallsystemet så bør vi ha et fokus på å synliggjøre de mønstrene som finnes i det og på å uttrykke disse matematisk. Lee og Wheeler (1989) lister opp hvilke områder ungdomsskoleelevene har problemer med i algebra. Bruk av parenteser, regnerekkefølge, regning med brøk, negative tall, og den assosiative og den kommutative lov blir nevnt. Parenteser kan man gjerne begynne å bruke i første klasse. Dersom man bruker parenteser hver gang det er naturlig å gruppere noe sammen så vil elevene kanskje ha en grunnforståelse for hva parenteser er. Regnerekkefølgen har ikke så mye å si i første klasse siden de ikke lærer om multiplikasjon og divisjon. Det samme gjelder brøk og negative tall. Men kommutativitet og assosiativitet kan man begynne å jobbe med i første klasse. Dette kommer vi tilbake til i (5.1.13) og (5.1.15). Avsnitt (5.1.14) omhandler distributiv lov.

Mer generelt sier Booth (1988) at de problemene elevene møter i algebraen ofte skyldes problemer de har i aritmetikken. "*The difficulties that students experience in algebra are not so much difficulties in algebra itself as problems in arithmetic that remain uncorrected*" (Booth, 1988, s. 29). Elevene trenger å lære om strukturene i aritmetikken slik at de får en trygg forståelse for begrepene som er involvert. Dette kan vi gjøre gjennom å gi dem mange gode eksempler som gir dem god trening i prosedyrene, men også ved å representere og diskutere generalitet slik at prosedyrene og prosessene kan bli til strukturell forståelse og til nye objekter og modeller for tanken.

Aritmetikken i første klasse begynner ved at man først må lære seg tallene og tallrekka. Videre arbeider man med sammenhenger mellom mengder, og med operasjonene. Denne delen omfatter derfor eksempler som omhandler telling (5.1.1),(5.1.2), oppdeling av mengder (5.1.3),(5.1.4),(5.1.5), partall og oddetall (5.1.6), dobling (5.1.7), likhet (5.1.8), operasjoner (5.1.9),(5.1.10), (5.1.11) og mønstre (5.1.12).

5.1.1 Telling 1

Å telle er en grunnleggende ferdighet. Mange kan telleregla når de begynner på skolen, men det betyr ikke nødvendigvis at de har en god forståelse av hva telling er. For mange er telleregla som en hvilken som helst annen regle. Det er mye som skal på plass. De må kunne vite at det tallet de sier og den mengden objekter de har talt til nå henger sammen. De må altså ikke tenke at tallene er navn på gjenstandene de teller, men en akkumulativ sum. Dessuten må de knytte et objekt til en plass i rekka slik at de ikke sier regla fortere enn de flytter fingeren fra objekt til objekt. De må også huske hvilke tall de har talt og de må finne et system slik at de ikke teller objekter to ganger. Dessuten må de forstå at hvert objekt bare skal telles en gang. Telling er den prosessen som etter hvert skal bli til objektet mengde. I eksemplene under forsøker vi å hjelpe elevene med denne reifikasjonen av telling. Vi øver på telleregla samtidig som vi lærer noe om strukturen i tallsystemet.



Eksempel: I en førsteklasse gjorde jeg følgende: Jeg la tallkort fra 0 til 10 på gulvet. Elevene fikk hjelpe meg med dette. Jeg la kortene litt feil med vilje, og så måtte elevene hjelpe meg med å rydde opp i tallrekken. Ved hvert tall talte vi opp det antall brikker som kortet tilsa og la det ved siden av kortene. Elevene var engasjerte og hjalp til. Så skulle jeg begynne å gå på tallinja. Jeg begynte på et tall og gikk et visst antall skritt. Vi talte skrittene høyt. Så sammenlignet vi antallet brikker som lå ved det tallet jeg nådde frem til og det tallet jeg startet på. Elevene fant så ut til sin store overraskelse og glede at differansen i antall var det samme som det antallet skritt jeg hadde gått. Differansen fant vi ved å legge de to mengdene ved siden av hverandre og se hvor mange flere det var i den ene mengden. Vi testet dette ut mange ganger. Elevene fikk også gå på tallene. Dette syntes de var morsomt.
Representasjon: Vi kan skrive opp forflytningen på tavla som et antall skritt notert for eksempel i buer. Så kan vi tegne opp de to antallene perler i start og sluttposisjon. Vi kan krysse over de som er like mange og se hvor mange som gjenstår. Da vil vi poengtere at det blir samme antall, men også at to ulike representasjoner kan beskrive samme mengde. Når så i tillegg denne mengden fremkommer gjennom to ulike operasjoner så er det ikke rart at elevene synes det er magisk og morsomt.
Diskusjon: Her kan vi diskutere det vi fant ut om forflytning på tallinja og det å legge sammen brikker. Elevene må formulere i egne ord hva som skjer og de må argumentere for hvorfor de tror det er slik. Vi kan sammenligne de tallene som bare skilles av et skritt. Vi kan forsøke å finne ut hvilke tall som har det samme antallet skritt mellom seg. Vi kan snakke om hvilket uttrykk vi får hvis vi går nedover på tallinja i stedet for oppover. I denne diskusjonen fokuserer vi på det generelle, og på elevenes kvantitative tenkning.
Hovedområde B: Vi er opptatt av strukturen i tallsystemet vår. Vi teller ikke bare en regle med tall som likså gjerne kunne vært ”elle, melle, deg fortelle…”. Tallene knyttes til mengder og mengdene står i et forhold til hverandre og til plasseringen på tallinja. Elevene får oppdage sammenhenger og mønstre i tallene. Elevene må så representere dette med symboler. Vi starter altså med noe konkret: brikker og bevegelser, og ender opp med et abstrakt uttrykk på tavlen. Selv om ikke alle

konserverer mengde kan de få noe utav disse andre sammenhengene og mønstrene. For dem blir kanskje bruk av telleregla det viktigste, men også det at to mengder kan sammenlignes ved å legge dem ved siden av hverandre. Opplevelsen av å telle opp en mengde og se at det ble det samme som antall steg kan være med på å bygge et positivt syn på matematikken som noe spennende og virke motiverende. Selv om de ikke helt forstår hvorfor, så er det tydeligvis et system her som gjør at dette virker hver gang. De får en forventning til at det finnes mønstre og systemer i matematikken som kan avdekkes. At man kan bruke symbolet for addisjon når man beveger seg på tallinja er også en kunnskap som ikke er avhengig av at de konserverer.
K-06: "telje til 100", "*bruke tallinja til berekningar og til å vise talstorleikar*".

5.1.2 Telling 2

Eksempel: En annen gang bygget vi alle antallene fra 0 til 20 med klosser. På toppen av hvert "tårn" la vi en lapp med det tallet som svarte til antall klosser i tårnet. I begynnelsen talte elevene opp hvert tårn. Etter hvert oppdaget de at de kunne legge like mange klosser og så bare legge til en ekstra for å finne det neste tårnet.
Representasjon: Vi kan be elevene tegne det de har gjort. Så kan vi be dem beskrive hva de fant ut som gjorde at de kunne bygge det neste tallet uten å telle. Dette kan være muntlige utsagn:"jeg legger like mange og så en til", "jeg bygger en trapp"
Diskusjon: Her kan vi diskutere om vi alltid kan finne neste tall i tallregla ved å legge til en. Hvorfor kan vi ikke legge til to? Hva skjer hvis vi bytter om på rekkefølgen av tallene i telleregla? Vi kan også finne ut hvordan vi kan finne det forrige tallet i rekka. Hvor høyt er forresten det tårnet som er tre skritt tilbake i rekka? Vil denne trappa fortsette videre og videre? Hvor langt går trappa? Hvordan kan det ha seg at alle sine trapper ser helt like ut?
Hovedområde B: her forholder vi oss til mengdenes forhold til hverandre uten å telle opp mengdene. Vi forholder oss til telling på en mer generalisert måte. Vi leter etter mønsteret i forhold mellom tall i tallrekka. Vi bruker dermed det vi har bygget som et slags symbolsystem der vi kan diskutere mønsteret vi ser uavhengig av antallet brikker i hvert tårn.
K-06: "telje til 100"

5.1.3 Dele opp mengder

Eksempel: Når vi deler opp mengder så kan vi gjøre akkurat det: vi kan ha tellebrikker som vi teller. Så legger vi noen av dem i én haug og resten i en annen. Da får vi erfaring med telling og med å dele opp en mengde på forskjellige måter.

Representasjon: Elevene kan skrive ned det de gjør ved å tegne brikkene. De kan så få forklare de andre muntlig hva de gjorde, hvorfor de valgte å dele opp mengden slik de gjorde og hvor mange brikker det er i hver haug. Her får de erfaring med å oversette handlingen til ord og bilder og dermed kanskje se handlingen som en prosess. Vi kan også skrive oppdelingen ved hjelp av en blanding av bilder og matematiske tegn. Vi kan også notere ned det vi har sett i tabeller. Slik kan vi få systematisert det vi har funnet.

Diskusjon: Ved å snakke om det de har gjort og høre på andre som forteller hva de har gjort så utvikles et språk som blir klassens måte å snakke om fordeling. Det kan oppstå egne uttrykk, for eksempel kan den hende at Per alltid legger like mange i hver haug. Dette kan da kjapt bli ”Pers metode”. Elevene utvikler en felles forståelse og et felles språk som kan utvikles videre til et gyldig matematisk språk med hjelp av læreren. De kan diskutere hva som er den beste måten å dele opp tallet på, den raskeste måten, den morsomste måten osv. Ved å bruke en tabell og fylle denne ut kan vi undersøke at vi har funnet alle de mulige måtene å dele opp mengden. Vi kan diskutere hvilke regler som skal gjelde for en slik oppdeling: skal vi dele opp i to hauger eller er det lov med flere? Hva er det maksimale antallet hauger? Kan vi kalle en haug med null brikker i for en haug? Hvor mange hauger kan vi ha hvis vi tillater ”null-hauger”? Hvis vi ikke tillater null? Hvis vi ikke tillater mindre enn to i hver haug? Hva må vi gjøre for å få mange hauger? Må vi da ha få eller mange i hver haug?

Her må vi kanskje gå tilbake til brikkene og forsøke flere muligheter. Mens for noen vil det kanskje være nok å gå tilbake til representasjonene og lage flere tegninger eller fylle mer inn i tabellen.

Hovedområde B: i dette eksempelet jobber vi med kombinatorikk. Kombinatorikk kan være en fin måte å introdusere bruk av symboler fordi det ofte ganske fort blir uoversiktlig hvor mange kombinasjoner det er mulig å lage. Slik kan det oppleves som meningsfylt for elevene å finne en måte å notere ned det de finner slik at det blir lettere å holde orden på hva de har gjort og hva de har igjen å gjøre. Det er også en fin

måte å lære elevene at det er nyttig å være nøyaktig og systematisk. Elevene får dessuten utviklet et språklig felleskap der de lettere kan forstå hverandre når de senere skal kommunisere matematisk. De kan forhandle om regler for tegninger og muntlige uttrykk med læreren og med medelever. De må finne måter å uttrykke seg på som kommuniserer det de vil ha fram og blir korrigert av klassen hvis de ikke skjønner hva som menes. Dette eksempelet åpner dessuten for å arbeide med begrensninger. Hvilke verdier er mulige? Er dette avhengig av operasjonen som inngår? Her kan man senere ta opp tråden når elevene har lært seg multiplikasjon og divisjon. Så kan vi reforhandle de begrensningene vi fant når det gjaldt subtraksjon. Elever som ikke enda konserverer vil gjerne forsøke å legge til ekstra brikker for å kunne dele opp på en måte som de synes er morsommere (for eksempel hvis de vil ha like mange i hver haug og antallet brikker ikke kan deles likt). Her vil vi kunne følge med på hvem som fremdeles ikke konserverer. De vil allikevel få erfaringer med å dele opp et tall og hvordan det kan noteres ned, selv om de ikke er bevisst på at det her er viktig at antallet er konstant.
K-06: "dele opp og byggje mengder opp til 10".

5.1.4 Avhengige mengder

Eksempel: Vi deler en mengde i to. Vi kan vise at dersom den ene haugen blir større så blir den andre mindre. Hvis den ene øker med en så vil den andre minke med en. Samtidig er verdien til summen konstant.
Representasjon: vi kan skrive tallene vi får inn i en tabell. Så kan vi velge et tall som vi ikke har brukt og la elevene finne ut hvilket tall som mangler for at de to til sammen skal utgjøre summen. Her bruker vi bokstaver og bokstavuttrykk som kolonnenavn. Dette er en situasjon der det er naturlig å bruke symboler og der de har en veldig konkret tilknytning. Da mener jeg at det er viktig at vi gjør det.

a+b	a	b
8	1	7
8	2	6
8	3	?

Diskusjon: Vi kan diskutere om vi kan velge hvilke tall vi vil. Må tallet vi skriver i tabellen være lavere enn den totale summen? Hvorfor? Hva betyr a og b i tabellen?

Hvorfor står det alltid 8 i venstre kolonne? Vi kan bruke a og b når vi snakker om mengdene med elevene. Hvis vi har valgt a hva vet vi da om b? Kan b være hva som helst? Hvis vi velger b, hvilke konsekvenser får det for a? Hvordan henger disse to sammen? Kan begge være større enn 4? Kan begge være mindre enn 4?
Hovedområde B: Elever som ikke selv kan bruke a og b vil allikevel kunne kjenne igjen funksjonen til disse i bruk. Ved å utsette elevene for mange erfaringer der ulike symboler inngår som en naturlig del av kommunikasjonen så vil det kanskje bli enklere for elevene å ta disse i bruk selv. Først på kjente størrelser og siden som representanter for abstrakte størrelser. Selv om noen elever ikke har klart for seg at denne oppgaven involverer en konstant sum så vil de kunne være med og telle opp (vi har ikke flere klosser enn de vi bruker) og få en forståelse for bruken av symbolene a og b som en tom rute å fylle inn en mengde i. I dette eksempelet er det naturlig at elevene får kjennskap til begreper som ledd og sum.
K-06: "gjere overslag over mengder, telje opp, samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar"

5.1.5 X-boks

Eksempel: Vi kan dele opp en kjent mengde for så å putte den ene haugen i en boks. Jeg bruker gjerne en boks som det står x på. Elevene må så forsøke å finne ut hvor mange som skjuler seg i x-boksen. På bildet under hadde jeg seks perler. Vi talte opp perlene sammen. Så puttet jeg noen perler i boksen. Elevene skal nå forsøke å finne ut hvor mange som er i boksen.

Representasjon: I begynnelsen tegner jeg alltid opp boksen på tavlen i perspektiv og tar meg god tid. Etter hvert ber jeg om lov til å forenkle tegningen. Til slutt sitter jeg igjen med et kvadrat med en x i. Jeg spør så om lov til å bare skrive x selv om det fremdeles betyr hele boksen. Jeg har aldri fått noen innvendinger mot dette. Jeg lar også elevene komme på tavlen og skrive for meg. Noen ganger tegner jeg perlene, andre ganger skriver jeg tallene. Jeg bytter mellom ulike måter å representere på. Elevene kan også gjøre denne aktiviteten to og to og skrive eller tegne det de gjør. Ved å tegne ned dette så kan de telle på brikkene i tegningen hvor mange som mangler. De kan da få se at det kan være nyttig å lage seg en representasjon som viser hele problemet. Dette er en av styrkene med Singapores modellmetode (3.3.8.2). Vi kan ta lærdom av denne tilnærmingen og oppfordre elevene til å representere hele problemet i tegningen sin før de begynner å lete etter svaret.

Elevenes valg av hvordan de vil representere dette gir dem en anledning til å reflektere over hva en ukjent er og hvordan vi kan kommunisere rundt ukjente størrelser. Vi kan også benytte anledningen til å vise elevene at samme problem kan møtes på ulike måter og representeres på forskjellige måter. Vi kan finne ut om de ulike måtene elevene har skrevet ned det de så på er avhengig av hvordan de kommuniserer muntlig om det som skjedde. Dersom de sier noe annet enn det de skriver så kan vi hjelpe dem å notere ned det de sier på en måte som samsvarer. Dersom vi vet at totalen er fem og det ligger tre perler utenfor boksen så kan vi for eksempel telle videre eller trekke fra. Dersom vi teller videre passer det best å skrive $3+x=5$. Dersom vi trekker tre fra 5 så passer det å skrive $5-3=x$.

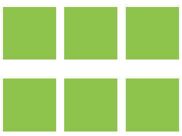
Diskusjon: Elevene kan diskutere hvordan de kom frem til svaret og hvordan de har notert ned det de så. Noen har kanskje talt videre, andre har trukket fra den kjente mengden fra totalen for å finne den ukjente (invers operasjon). Klarer de å forklare hva de har tenkt til hverandre? Er de ulike tilnærmingene like gode? Vil de alltid kunne brukes? Vi kan dele opp mengden uten å telle hvor mange som er i hver del. Når vi legger dem sammen igjen vil det da være like mange som før vi delte opp? (Konservering av mengde, inverse operasjoner). Kan alle mengder deles i to hauger? Hva med tre hauger?

Hovedområde B: Noen av elevene vil benytte seg av inverse operasjoner for å løse denne oppgaven. Dette kan da bli en gylden sjanse til å få elevene til å kommunisere rundt inverse operasjoner. Inverse operasjoner er viktig i skolealgebraen. Det er også viktig at elevene forstår at en bokstav står for en ukjent mengde. Når vi har 2x så har vi ikke to x-er, men vi har to av den mengden x representerer. Hvis de ser på a og b i et uttrykk som appelsiner og bananer så blir det vanskelig å forstå at vi kan multiplisere a med b. Det har ingen mening å multiplisere appelsiner med bananer. Det er viktig å utvikle en slik forståelse av symbolsystemet hos elevene. Når elevene siden skal lære å multiplisere x med et tall så kan vi minne dem på at det er den

ukjente mengden perler i boksen som skal multipliseres, ikke x-en i seg selv. Det er ikke to x-er, det er to ukjente, like store mengder som vi har kalt x.
Samtidig handler denne oppgaven ikke så mye om ukjente. Det er her snakk om å dele opp en mengde. Hvis vi har gjort det rett så finner vi det antallet som er i boksen. Å forholde seg til ukjente forutsetter at elevene kan konservere antall, dvs at de forstår at det bare er ett mulig antall perler i boksen. Ikke alle førsteklassinger et kommet på et slikt nivå i forståelsen (Goldenberg et al., 2010). Oppgaver som denne kan hjelpe dem å utvikle denne forståelsen når de er kommet så langt at de er klare for det. Men elevene får også erfaring med å bruke x for å beskrive noe de ikke vet, og dermed blir de vant til å se og bruke dette symbolet til å benevne noe ukjent.
K-06: "dele opp og byggje mengder opp til ti"

5.1.6 Partall og oddetall

Eksempel: Vi kan arbeide med oddetall og partall selv om elevene ikke kan så mange tall. Vi kan legge mønstre av klosser som går opp i to og ikke og kalle det partall og oddetall.



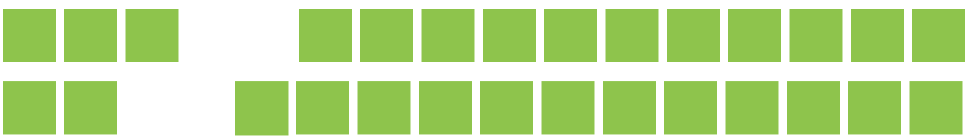
Partall

oddetall

Min erfaring er at dette er enkelt for elevene å forholde seg til. De klarer å forklare hva forskjellen er og kan lett plassere en mengde i den ene eller andre kategorien ved å legge to og to og se om det går opp.
Representasjon: Elevene kan tegne hvordan de la klossene. De kan tegne oddetallene på den ene siden av arket og partallene på den andre. Så kan de undersøke om de ser hva alle oddetallene har felles og hva alle partallene har felles.
Diskusjon: Vi kan diskutere hva en generell regel kan være for om en mengde tilhører den ene eller den andre kategorien. Her er det viktig å la elevene fortelle med sine egne ord hvordan vi kan vite at et tall er odde eller par. Elevene kan nå ta utgangspunkt i de tegningene de laget når de skal formulere sin regel. De kan så diskutere seg frem til hva som er den riktigste eller de riktigste definisjonen(e).
Hovedområde B: Elevene kan så få et ukjent antall brikker og finne ut om de har et antall som er par eller odde. Vi kan gjerne gi elevene så mange brikker at de ikke

hadde klart å telle hvor mange det er. Allikevel kan de finne ut om det er et partall eller et oddetall. Elevene ser i første omgang partall og oddetall som en prosess der de legger to og to klosser ved siden av hverandre. Men etterhvert kjenner de igjen “bildet” av et partall og et oddetall. Noen vil se det som to rader der den ene er lenger enn den andre, andre vil se det som et rektangel med en bit som stikker ut. Andre vil se det som flere mindre rektangler og til slutt en ekstra brikke. Noen vil sikkert også finne måter å se på dette på som læreren ikke har tenkt på. Alle disse perspektivene på det samme tallet åpner for ulike tilnærminger til videre generalisering om partall og oddetall. Derfor er det ikke et mål at alle elevene skal sitte igjen med den samme definisjonen eller bilde av partall og oddetall. Målet er kommunikasjonen rundt mønstrene og regelmessighetene som de finner. Ikke minst er det nyttig å kommunisere rundt forslag til regler som ikke stemmer med de konvensjonelle definisjonene for partall og oddetall. Ved å tegne antallet etter at de har lagt det så må de konsentrere seg om å kommunisere det som er viktig å få frem for å kunne skille om det de tegner er et partall eller et oddetall. Det gir en bedre mulighet for å rette på egne og andres ufullstendige oppfatninger. Det gir også mulighet for at de endrer fokus fra prosessen “å legge to og to” til å få et bilde av hvordan partall og oddetall ser ut generelt. Vi kan nå bruke dette som et objekt som vi kan utforske. Vi kan fremsette hypoteser om hva som vil skje dersom vi adderer eller subtraherer to tall og undersøke dette ved hjelp av brikkene våre eller ved hjelp av tegningene våre.

Eksempel:



To oddetall blir et partall, uavhengig av hvor lang rekke med to og to brikker vi har.

De reglene eller mønstrene de finner kan siden utvides til flere tall og til andre operasjoner etter hvert som de lærer multiplikasjon og divisjon. Vi kan også bruke andre typer representasjoner som tabell.
Her har vi gått fra å representere en egenskap generelt (lage en modell for partall og oddetall) til å bruke denne representasjonen for å finne ut noe om tall som er så store at de fremstår som en slags ukjente for elevene. Så bruker vi vår symbolisering (bilde, aktiviteten å pare) til å undersøke dette ukjente. Vi bruker altså vår generalisering til å

utforske generalitet på et ganske abstrakt nivå for elevene. Vi undersøker egentlig om et tall er et oddetall ved å pare sammen (2n) og se om vi har et ledd til (2n+1) eller ikke (2n).

K-06: "*Kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster*", "*dele opp og byggje mengder opp til 10*".

5.1.7 Doble og halvere

Dobling og halvering gir en god mulighet for å jobbe med generelle kvantitative sammenhenger fremfor eksakte størrelser og mengder.

Eksempel: vi teller opp en mengde og finner det dobbelte uten å telle.

Representasjon: vi tegner ned det vi gjorde.

Diskusjon: Hva er regelen for dobling? Vi starter i prosessen som er å ta det samme en gang til. Etterhvert så finner elevene fort frem til den doble mengden, selv uten å utføre handlingen. De kan noen fakta (det dobbelte av 4 er 8) De kan noe om operasjonene (4+4=8) men de har også etter hvert et bilde av hvordan det dobbelte må se ut: det er dobbelt så stort, dobbelt så langt, dobbelt så tjukt. Og dersom du viser dem ulike mengder og ber dem plukke ut hvilken som er det dobbelte av en bestemt mengde så kan de raskt peke denne ut uten å telle, særlig hvis den er gruppert på en slik måte at det er lett å se doblingen.

Hovedområde B: Når elevene kommuniserer rundt hvordan de kan komme frem til hva det dobbelte er så kommuniserer de rundt en generell struktur. Vi kan så diskutere med utgangspunkt i dette hvordan vi kan vite hva det dobbelte av en million er. For elevene kan tall som tusen og en million fungere som en steg på veien mot å snakke om ukjente, fordi elevene ikke har noen kontekst til så store tall. Tidlig algebra handler om å ha et fokus på mønstre og strukturer. Ved å fokusere på selve regelen bak dobling og på å kommunisere denne så byttes fokus fra å finne det dobbelte til å forstå strukturen dobling.

K-06: "*doble og halvere*". Det står ikke noe i læreplanen om at dette skal læres på en slik måte at elevene får en strukturell forståelse for dobling og halvering. Læreplanen kan oppfylles ved å bare lære dem prosessen. Men dersom elevene har en strukturell forståelse for begrepene så kan de mer fleksibelt overføre dette til andre tallområder enn de hele tallene og til manipulasjon av symboler.

5.1.8 Likhet

Forståelse av likhet og av likhetstegnet er viktig for algebraen. Når vi skal generalisere fra aritmetikken så blir fokuset på strukturene, ikke på tallene eller svarene. Her inngår likhetstegnet med en viktig rolle. Mange forskere har fokusert på elevenes forståelse av likhetstegnet (Carpenter, Franke & Levi, 2003; Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Kieran, 1992)

5.1.8.1 Relasjonell forståelse for likhetstegnet

Det er viktig at elevene forstår likhetstegnet relasjonelt. Det indikerer at det finnes en relasjon mellom tallene eller uttrykkene på hver side av likhetstegnet (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi & Battey, 2007). Tallet eller uttrykket på den ene siden av likhetstegnet må ha den samme verdi som tallet eller uttrykket på den andre siden av likhetstegnet (Warren, Mollinson & Oestrich, 2009). Mange elever ser på likhetstegnet som en operator, de assosierer det med ”doing something” (Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998). Dette gir dem problemer med å løse likninger med ukjente tall. Elever ser på likhetstegnet som et signal om å regne og finne et svar. Oppgaven 8+4=_+5 der man skal fylle inn det tomme feltet illustrerer dette (Falkner et al., 1999). Her svarer de fleste elevene et det blir 12. 8+4=12 og derfor må det stå 12 på andre siden av likhetstegnet. Noen fortsetter uttrykket videre og skriver 8+4=12+5=17. De bruker likhetstegnet som en operator. De regner fra venstre mot høyre (leseretningen) og legger sammen etterhvert (Molina & Ambrose, 2008). For å kunne løse problemer som oppgaven over må de lese hele oppgaven. De må så tenke på likhetstegnet som noe som beskriver en ekvivalensrelasjon mellom de to sidene i uttrykket.

Falkner et al. (1999) fant at det tok lang tid for elever å utvikle denne forståelsen for likhetstegnet. De var også overrasket over at selv små barn (Kindergarten) som bare så vidt hadde begynt å regne allerede hadde en sterk forestilling om likhetstegnet som en operator. Molina og Ambrose (2008) fant at seksåringer hadde en sterk forventning til at det skulle skje noe når det var et likhetstegn. De godtok ikke uttrykk uten operator (3=3) men heller ikke uttrykk med operator på begge sider av likhetstegnet (3+5=7+1). De mente også at uttrykk med operatoren på høyre side i uttrykket var feil og måtte skrives om. De ville for eksempel skrive 4=3+1 som 3+1=4. De har altså allerede som seksåringer mange meninger om hva definisjonen og bruken av likhetstegnet er. Falkner, Levi et al.

(1999) fant at dersom de fikk problemer som inneholdt de samme opplysningene, men gitt i en praktisk kontekst så klarte de å løse dem. Det er altså ikke likhet i seg selv som er problemet, men definisjonen av likhetstegnet. Bruken av likhetstegnet er en konvensjon og ikke en selvinnlysende logisk sannhet. "*The graphic symbol system, as well as other symbolic systems, is characterized by being arbitrary, accepted and transferred information*" (Mark-Zigdon, 2004).

Mange forskere har trukket frem som en årsak til problemer med likhetstegnet at vi bruker mye tid på oppgaver av formen a+b=? i tidlig matematikkopplæring (McNeil et al., 2006; Molina & Ambrose, 2008; Powell, 2012). Kieran (1981) sier at ordbruken til læreren er viktig. Det er forskjell på å si 1+4 *blir* 5 og 1+4 er det samme som 5 eller har samme verdi som 5. Når vi bruker ordet *blir* så forventes det at noe skal endres og bli noe annet.

Også leseretningen kan være med på å styrke elevenes forståelse for likhetstegnet som en operator der man regner ut etterhvert som man leser. En interessant oppgave i så måte fantes på Kartleggingsprøven på 1.trinn (2009) Her har man oppgitt følgende oppgave: 4=_-8. De aller fleste elevene svarte 4. De jeg snakket med hadde snudd leseretningen og lest 8 minus noe *blir* 4. Dette gjaldt både sterke og svake elever. Dette svaret på oppgaven kan også skyldes noen elevers forventning om at alle tallene skal gjøres noe med og at i dette tilfellet er det minus. Da blir 8-4 bare en sum av de tallene og den operatoren som finnes i uttrykket. Flere eksempler på dette:

$$4+5=\_+2 \text{ blir } 11$$

$$7-3= \_-4 \text{ blir } 0$$

(Powell, 2012).

Ambrose og Molina identifiserte tre stadier i utviklingen av forståelse for likhetstegnet. Det første stadiet kalte de "*stimulus for an action*", altså at de ser likhetstegnet som et signal på at de skal utføre en operasjon. De løser åpne problemer på formen a*b=c, men ikke av formen a=b*c der * er + eller -. Dersom de får oppgaver på andre former enn den foretrukne tilpasser de uttrykket, eller vet ikke hva de skal gjøre. I deres studie i en tredjeklasse var alle elevene på dette nivået da studien startet. Det neste nivået kalte de "*expression of action*". Med dette kan vi forstå noe av det samme som i nivå en, men nå kan de snu uttrykket slik at de kan løse a=b*c. Men de kan ikke løse stykker av formen a*b=c*d. Typiske feil er å se bort fra et av leddene (5.1.8.1.1) eller å tilpasse uttrykket ved å flytte rundt på tall og operatorer (5.1.8.1.2). (Mine eksempler etter mønster fra Ambrose og Molina):

5.1.8.1.1

$$4 + 3 = \_ + 2 \text{ blir } 4 + 3 = 7 + 2$$

5.1.8.1.2

$$4 + 3 = \_ + 2 \text{ blir } 4 + 3 + 2 = 9$$

Det siste nivået kaller de "expression of equivalence" som innebærer at elevene har fått en relasjonell forståelse av likhetstegnet.

Kieran (1981) sier at det er utviklingsmessige hindringer for at førsteklassinger kan utvikle en relasjonell forståelse for likhetstegnet. Dette mener Molina og Ambrose (2008) er tilbakevist av nyere forskning. De nevner førsteklassinger spesielt. Førsteklasse i USA er som regel 6-7 åringer, mens det i Norge er 5-6-åringer. Uavhengig av om elevene er klare for en solid relasjonell forståelse for likhetstegnet så kan vi arbeide for at en slik forståelse skal få gode muligheter for å utvikles.

Hvordan kan man jobbe med likhetstegnet? Carpenter, Franke et al. (2003) foreslår å arbeide med "open number sentences" og "true/false number sentences". Ambrose og Molina (2008) bruker disse to oppgavetypene i sin studie. Taylor-Cox (2003) foreslår å bruke erfaringer med vekter som en god måte å lære små barn om likheter, samt bruk av tierrammer. Hattikudur og Alibali (2010) foreslår en tilnærming der man lærer elever om likhetstegnet ved å sammenligne det med tegn for ulikhet. Ambrose og Molina poengterer at det er viktig med en klasseromsdiskusjon som gjør at elevene får oppleve dissonans og må argumentere for sitt syn. De sier at:"*Engaging students in discussions in which they had to defend their opinions was critical to the development of their understanding of the equal sign. Students confronted each others' answers which led them to encounter different ways of interpreting the same sentence. This exchange and the variety of sentences caused the students some cognitive dissonance which drove further learning*" (Molina & Ambrose, 2008, s. 75).

5.1.8.2 Finn tallet som mangler

Eksempel:

"Open number sentences" er oppgaver av typen "finn tallet som mangler". Her er det viktig at det brukes ulike former for uttrykk. Noen ganger vil vi ha tallet som mangler på høyre side (5.1.8.2.2), andre ganger på venstre (5.1.8.2.1),(5.1.8.2.3). Noen ganger vil vi ha to addender, andre tre eller flere (5.1.8.2.4).

5.1.8.2.1

$$\_ + 2 = 4$$

5.1.8.2.2

$$4 + 3 = \_ + 2$$

5.1.8.2.3

$$2 + \_ = 5 - 1$$

5.1.8.2.4

$$4 + \_ + 2 = 8$$

Dette samsvarer med eksemplene i (3.3.7.1.2)

Representasjon: For å utnytte potensialet i det å representere kan vi la elevene skrive ned disse uttrykkene selv før de løser dem i stedet for å bare fylle dem ut i ferdige oppgaver. I tillegg kan vi la dem lage slike oppgaver for hverandre. Vi kan altså jobbe med representasjoner selv om eksemplene allerede er i en skriftlig symbolsk form. Når de skal lage stykker for hverandre må vi kommunisere om hva som er regelen for hvilke stykker de kan lage. Vi må da snakke om høyre og venstre side i uttrykket, vi må snakke om ledd. Elevene må altså tilnærme seg dette på en helt annen måte enn hvis de bare hadde fylt ut tomme ruter i et ferdig oppstilt stykke. Vi får et større fokus på høyre og venstre side av uttrykket.

Diskusjon: Vi kan ta frem stykker på tavla som elevene har laget og de kan forklare hva de tenkte da de laget stykket. Vi kan også innføre tilleggsbegrensninger som hvor høye summer vi kan ha eller at det skal være tre ledd på hver side. Vi kan diskutere hva som må til for at et stykke skal fungere. Kan et stykke som 3+4=8+_ løses ved å sette inn et tall mellom 0 og 10? Elevene må hele tiden forholde seg til at det må bli likt på begge sider av likhetstegnet. Tallene blir brukt som kvasivariable: vi setter inn ulike tall som vi prøver ut, men det er selve strukturen eller regelen for oppgaven som er i fokus og tallene blir brukt for å oppfylle disse kriteriene ikke for å representere konkrete mengder.

Hovedområde B: Ved å la elevene forholde seg til mange oppgaver av denne typen så kan vi kanskje oppnå at feil av typen (5.1.8.1.1) og (5.1.8.1.2) ikke så lett oppstår. Målet er å utvikle en relasjonell forståelse av likhetstegnet. Et slikt relasjonelt syn på likhetstegnet er viktig når man arbeider med likninger og er nødvendig for å forstå at likheten blir konservert når man utfører transformasjoner på likningen for å løse den. (Falkner et al., 1999). Ved å utvikle en slik forståelse for likhetstegnet hjelper vi elevene å tenke relasjonelt. Vi kan begynne med slike oppgaver i slutten av første klasse når elevene har begynt å internalisere og kondensere enkle uttrykk med addisjon. I begynnelsen av første klasse vil man kunne holde på med det samme, men man må være mer forsiktig med bruk av tall som representasjonsform.

K-06: Det nevnes ingen steder i kunnskapsløftet at man skal ha et spesifikt fokus på likhetstegnet. Det finnes dermed også, etter min erfaring, få oppgaver i læreverkene som fokuserer på dette. Samtidig er likhetstegnet sammen med operatorene for de fire regneartene og tallene selv de viktigste symbolene i det matematiske språket. Under den grunnleggende ferdigheten ”*Å skrive i matematikk*” (nedenfor) nevnes at elevene skal ”*bruke matematiske symbol og det formelle matematiske språket til å løyse problem og presentere løysingar*”. I stedet for å lære elevene en mekanisk, instrumentell bruk av dette matematiske språket vil vi utvikle en strukturell forståelse. Når vi jobber med ulike versjoner av addisjonsstykker (eller subtraksjonsstykker) arbeider vi også med å forstå operasjonen addisjon (subtraksjon). I kompetansemål for faget står det at elevene skal: ”*utvikle, bruke og samtale om varierte reknestrategiar for addisjon og subtraksjon av tosifra tal og vurdere kor rimelige svara er*” (nedenfor).

5.1.8.3 Sant eller usant

Eksempel: “True/false number sentences” består i å skrive opp uttrykk for så å spørre elevene om det er et sant eller usant utsagn.

Eksempler på oppgaver kan være:

5.1.8.3.1

$$3 + 4 = 7$$

5.1.8.3.2

$$8 = 4 + 3$$

5.1.8.3.3

$$7 = 7$$

Læreren kan skrive opp slike uttrykk på tavla. Elevene skal så forklare hvorfor det er sant eller ikke.

Representasjon: La elevene tegne de ulike situasjonene. Bruk gjerne ark som er delt med en strek på midten. Elevene tegner så opp høyre og venstre side i uttrykket.

Diskusjon: elevene må nå grunngi hvorfor de mener utsagnet er sant eller usant. De kan bruke tegningene sine i denne argumentasjonen.

Hovedområde B: Som nevnt over er det kritisk at elevene har en god forståelse for likhetstegnets rolle. Gjennom slike aktiviteter blir de kanskje mer bevisste på at *verdien* må være lik på begge sider av likhetstegnet selv om uttrykkene kan være forskjellige. Selv de elevene som ikke konserverer mengde kan representere det som står og dermed øve seg i å oversette fra uttrykk til konkret. De kan også sammenligne to mengder og se om de er like.

K-06: Fremdeles jobber vi med forståelse for operasjonene samtidig som vi utfordrer elevenes forståelse for likhetstegnet.

5.1.8.4 Analysere uttrykk

"Analyzing expressions" betyr å fokusere på de artimetiske strukturene fremfor å regne ut verdier (Molina & Ambrose, 2008). Vi ser på uttrykkene fra et strukturelt heller enn et prosedyremessig perspektiv. I eksempelet under (5.1.8.4.1) er det ikke nødvendig å regne ut uttrykket. Vi ser at den første addenden på venstre side er en mindre enn den første addenden på høyre side. Det vi skal legge til på høyre side må da være en mindre enn det vi legger til på venstre side.

5.1.8.4.1

$$567 + 2 = 568 + \_$$

Denne ferdigheten i å analysere hele uttrykket før man begynner å regne trenger man i møtet med uttrykk av typen $3x + 7 = 2x + 18$ (Molina & Ambrose, 2008, s. 64). Subramaniam og Banerjee har stor tro på å arbeide med stykker som ikke skal regnes ut, men analyseres som de er. De sier at dette er ”*one of the key ideas marking the transition from arithmetic to algebra*” (Subramaniam & Banerjee, 2011, s. 100).

Eksempel: I første klasse har jeg benyttet meg av et kortspill der man spiller spillet krig. Det kortet med den høyeste verdien vinner. Disse kortene har regnestykker på seg. I begynnelsen regner elevene ut verdien på kortet og sammenligner for å finne ut hvem som får stikket. Men etter hvert oppdager noen, og noen får hjelp av læreren til å oppdage, at vi kan ”jukse” ved å bare se på tallene som inngår i uttrykkene og sammenligne dem uten å regne ut.

Strategier som de bruker er: 1+2 og 3+2: det første leddet er forskjellig, det andre er likt. Da vinner det kortet med størst førsteledd.

5+2 og 4+1: begge leddene er parvis større enn leddene på det andre kortet: da er vinner dette kortet. Også dersom leddene byttes om så vil de se etter de leddene som er like og sammenligne det andre.

Vi kan her legge inn begreper som første og andre ledd når vi hjelper elevene å kommunisere om hvilket kort de mener vinner. I denne aktiviteten krever jeg at de snakker om hvordan de kan vite at de har vunnet.

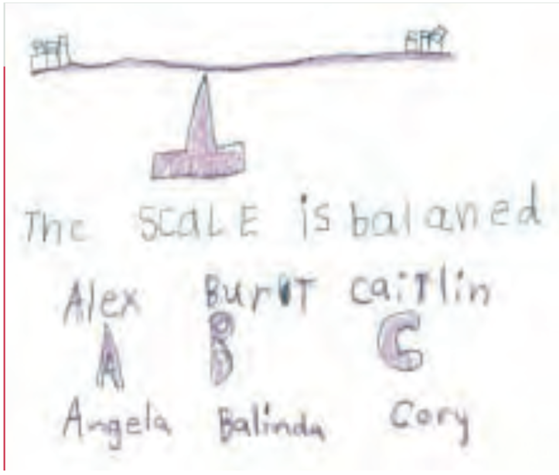
Representasjon: elevene kan representere regnestykket på kortet med brikker eller ved å bruke fingrene sine. Også her er det viktig at de ikke legger brikkene sammen, men i hver sine hauger slik at vi kan se på likheter og forskjeller fremfor å begynne å telle opp summene.

Diskusjon: elevene viser at de har rett ved å vise til antallene på brikker og fingre og dermed "bevise" at det de sier stemmer. Vi kan også bruke selve kortene og legge dem ved siden av hverandre slik at de like tallene ligger inntil hverandre.

Hovedområde B: Elevene bruker mange ulike strategier alt etter hva som er hensiktsmessig. De blir vant til å se på uttrykket (analysere uttrykket) før de regner. Denne fleksibiliteten i bruk av aritmetiske metoder tyder i følge Britt og Irwin (2008) på at elevene forholder seg til tallene som om de var variabler. De fant i sin forskning at elever som hadde en slik tilnærming til tall også gjorde det bedre i algebra. De hadde utviklet en forståelse for den algebraiske strukturen i aritmetikken. Tallene er ikke lenger så viktige. Vi snakker mer om differanser og om forhold mellom tall enn selve verdien til tallene. Et mål er at elevene forholder seg til uttrykkene som objekter som de kan si noe om uten å måtte begynne å regne.
K-06: "*utvikle, bruke og samtale om varierte reknestrategiar for addisjon og subtraksjon av tosifra tal og vurdere kor rimelege svara er", "gjere overslag over mengder, telje opp, samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar*".

5.1.8.5 Likevekt

Elever som har erfaringer med og forståelse for likhet i småskolen kan lettere løse oppgaver med ukjente variabler sier Taylor-Cox (2003, s. 17). Hun mener derfor at det er viktig å tilby unge elever mange erfaringer med å gjenkjenne, definere, lage og opprettholde likhet. En måte å gjøre dette på, sier hun, er ved å bruke vekter. Elevene bør bruke og lage ulike vekter og snakke om begreper som likt/ulikt, samme/forskjellig, mer/mindre og balansert/ubalansert. Hun sier videre at det er gjennom autentisk dialog elever konstruerer mening til begrepet algebraisk likhet.
Eksempel: Taylor-Cox gjengir et eksperiment der elever i første klasse (USA) får eksperimentere med vekter. De skal så prøve seg på en oppgave som har i seg ideen om algebraisk likhet.



Ebony veier. Ebonys tegning av det hun gjorde. (Taylor-Cox, 2003, s. 18)

Det er laget klar seks filmbokser med sand i. To av dem er fulle av sand og er merket med navn som begynner på bokstaven A, to av dem er halvfulle og merket med navn på B og to er nesten tomme og merket med navn på C. Elevene får så prøve om de ved å plassere tre bokser på hver side kan klare å få vekten i likevekt. De oppdager at de da må ha A, B og C på hver side. De oppdager også at dersom de skal ta bort en som begynner på A på den ene siden så må de gjøre det samme på den andre siden. Elevene må så notere ned det de har funnet ut på sin egen måte.

Representasjon: Taylor-Cox poengterer ikke i sin artikkel viktigheten av å tegne eller representere det de har sett. Men hun inkluderer tegninger eleven har tegnet, noe som viser at hun bruker representasjon som en del av dette undervisningsforløpet. Valget av navn på A, B og C styrer eleven mot å forkorte til nettopp A, B og C. Her representerer A, B og C mengder som er ukjente, nemlig vekten til personen.

Diskusjon: I diskusjonen vil det være viktig å få frem at det er vekten til personene, ikke navnet i seg selv som representeres av bokstavene. Vi vet altså ikke hva de veier, men kan allikevel si noe om hvordan personenes vekt forholder seg til hverandre. Vi kan spørre om hva som vil skje dersom vi tømmer ut litt sand fra beholderne. Vi kan også snakke om hvordan vi kunne funnet ut om B var dobbelt så tung som A.

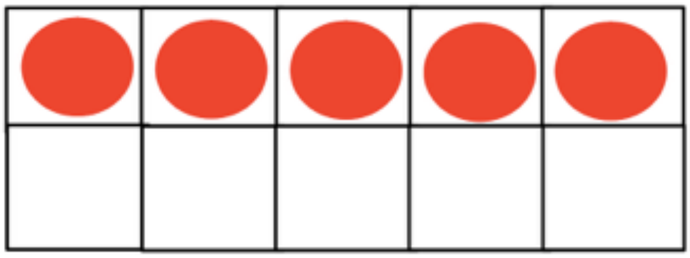
Hovedområde B: Taylor-Cox (2003) sier at i denne aktiviteten kan elevene se helt konkret hva det vil si å balansere en likning. Vi kan bruke denne erfaringen når vi jobber videre med likhet og minne dem på at likhet fungerer som en vekt: det skal alltid være lik verdi på hver side av likhetstegnet.

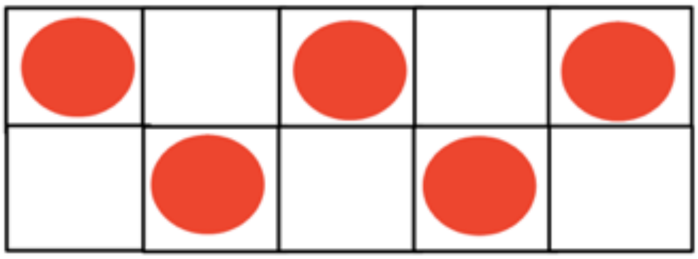
K-06: ”*samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar*”.

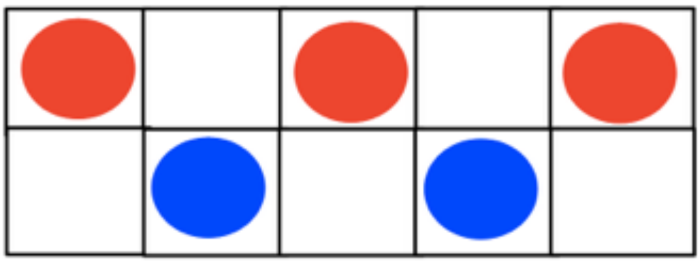
5.1.8.6 Tierrammer

Taylor-Cox Taylor-Cox (2003) trekker også fram bruken av tierrammer.
Dette har jeg brukt mye selv etter at jeg oppdaget det på en amerikansk lærernettside (the teaching channel, tch.com).

Eksempel: Metoden består i å ha en tom tabell på 2x5 ruter. I disse rutene kan man plassere brikker. Ved å plassere det samme antallet brikker i nettet på ulike måter kan man vise at en mengde som er lik kan fremstå på mange måter. Man kan bruke plasseringen i rutenettet, eller man kan bruke ulike farger på brikkene.







Jeg har fulgt en fremgangsmåte som jeg har sett på The Teaching Channel og vist elevene tabellen i tre sekunder. De må så prøve å huske hvor mange brikker det er. De må så si hvordan de så hvor mange det var. De får se på tabellen flere ganger. Til slutt uten tidsbegrensning. Jeg viser dem så det samme antallet en gang til, men i en annen kombinasjon. Igjen må de si hvordan de så hvor mange det var. Dette legger opp til at elevene skal bruke subitizing (kunne se toer og treergrupper) og benytte seg av kunnskap om tierrammene (det er fem ruter oppe og nede) og tiervenner (dersom det mangler to så må det være åtte brikker). De kan da få erfaring med at det er mange ulike måter å danne samme mengde. Når vi jobber med likhet kan elevene få to eller flere tierrammer og få beskjed om å selv lage ulike representasjoner av samme antall.

Representasjon: Nedskriving av resultatene sine etterpå vil gi enda et perspektiv til oppgaven. Da må de representere det de har sett på en annen, og for dem mer abstrakt måte. Dette er et steg på veien til å bruke algebraens formelle symbolsystem. Vi arbeider med å finne representasjoner for mønstre og sammenhenger vi ser. Jeg har brukt både tall og tegninger i denne notasjonen.
Diskusjon: Man kan utvide oppgaven ved å la elevene legge samme antall, men på forskjellige måter. Dersom man så noterer resultatet ned som en rekke ekvivalenser får vi for eksempel: 3+4=5+2=1+6=0+7.
Hovedområde B: Tierrammer kan være en fin måte å vise elevene at vi kan ha mange ulike uttrykk med samme verdi. Bruken av to ulike farger gir en mulighet til å poengtere dette ytterligere. Vi kan ha flere eller færre brikker med rødt, men dersom bare antall brikker totalt er likt så er uttrykkene ekvivalente. Fargen er ikke en egenskap som er relevant hvis det er antallet totalt vi er opptatt av.
K-06: ”*dele opp og byggje mengder opp til 10*”. Her jobber vi både med forståelsen for likhet og med delmengder i mengder opp til 10.

5.1.8.7 Likhet og ulikhet

Hattikudur og Alibali har i en studie undersøkt om prinsippet med å lære et begrep i forhold til et annet begrep styrker innlæringen av likhetstegnet. De mener å ha vist nettopp dette i sin studie (Hattikudur & Alibali, 2010). Ved å lære om likhet og ulikhet på en gang så poengteres og kontrasteres meningen med begge begrepene. De mener at dette er et generelt prinsipp som kan overføres til andre områder i matematikken. Det er også nyttig å utvikle ordforrådet til elevene for å beskrive like og ulike situasjoner (Warren et al., 2009).
Eksempel: Vi kan bruke tellebrikker i to hauger. Så kan vi telle dem opp og avgjøre om haugene inneholder like mange brikker. Dette kan være nok i seg selv. Men vi kan også utvide dette litt slik at oppgaven krever mer av elevenes kvantitative tenkning. Vi kan legge til en ukjent haug i en boks (jf x-boks, 5.1.5). Elevene kan nå få opplyst hvordan denne haugen forholder seg til en av de andre haugene og bli bedt om å komme med en begrunnet antagelse for hvordan alle disse haugene forholder seg til hverandre.
Representasjon: Elevene skriver ned på tavlen antallet i hver haug og avgjør om det er likt eller ulikt. Så setter de inn det riktige symbolet og må lese høyt det de har skrevet. Det er vanlig å blande oppgaver med likhet og ulikhet i lærebøkene i første

klasse. Elevene lærer også symbolene ”større enn” og ”mindre enn” i første klasse. Ofte representeres dette med en krokodille som vil spise det største tallet. I den utvidede oppgaven kan de også sette opp tegnene dersom det er mulig.

Diskusjon: Vi kan få elevene til å begrunne hvorfor de valgte å sette inn det ene eller det andre tegnet. De må da praktisere begrepene sine om likt og ulikt. I den utvidede oppgaven kan den ene haugen for eksempel ha 5 brikker og den andre 7 brikker. Den ukjente haugen er større enn den haugen med 5 brikker. Hva kan vi nå si om den ukjente haugen i forhold til den med 7 brikker? Vet vi om den er større eller mindre enn 7? Kan den være lik 7? Dersom det i den ukjente haugen er færre enn 5 brikker vil den da være mindre enn den haugen med 7 brikker?

Hovedområde B: Også i denne oppgaven er det likhet vi fokuserer på, men vi får noen andre ting med som bonus. Vi kan jobbe med logisk tankegang og utvikle elevenes kvantitative tenkning dersom vi benytter oss av de mulighetene som her gis for å utvide oppgaven til mer komplekse sammenhenger.

Ved å jobbe grundig med likhet og ulikhet får elevene dessuten et godt begrepsgrunnlag for relasjonstegnene >,< og =.

K-06: Vi kan benytte oss av tallinja eller opptelling for å bevise at vi har rett når vi kommer med påstander om hvilke tall som er størst. Kompetansemål etter 2.årstrinn sier at elevene skal: ”bruke tallinja til berekningar og til å vise talstorleikar”. Ofte kan det å vise en tallstørrelse på tallinja bety å trekke en strek fra et tall til et sted på linja. Dersom vi i stedet lar tallinja inngå som en del av en argumentasjon så vil bruken av tallinja kanskje oppleves som mer nyttig.

5.1.8.8 Eksakt notasjon av likhet

Etter hvert som elevene får vanskeligere oppgaver å regne ut så tror jeg også at det er mer bruk av en oppstilling der det blir mange ekvivalenser etter hverandre fordi man vil forenkle prosessen ved å ikke skrive nye uttrykk hele tiden.

Eksempel: (7-9)+4(3+5)=-2+4*8=2+32=34.

Dette kan føre til at man i neste omgang løser et sammensatt problem på samme måte:

Anne har tre ganger så mange penger som Line.

Nina har tre kroner mer enn Anne.

Line har 10 kroner.

Hvor mange penger har Nina?

Mitt eksempel.

Her må man først regne ut hvor mange penger Anne har. Deretter kan man regne ut Ninas penger ved å legge til tre kroner. Mange elever vil notere dette som:

$3 \cdot 10 = 30 + 3 = 33$

Dette er ikke holdbart matematisk, men det er effektivt og ryddig sett fra elevens side og det samsvarer med slik eleven ville ha kommunisert det hun/han gjør muntlig. Og som vi har sett over så samsvarer det med den definisjonen elever har av likhetstegnet fra første stund på skolen, nemlig at likhetstegnet er en operator, en markør for handling. Noen har det kanskje med seg allerede fra før de går inn døren til skolen.

Denne bruken og definisjonen av likhetstegnet virker så lenge man jobber i en retning og bare benytter den som en operator. Det er først i møtet med algebraen den blir et problem. Dermed kan det nok for mange lærere og elever virke kunstig og tungvint å holde på en riktig bruk av likhetstegnet. Ved å innføre flere oppgavetyper og aktiviteter der det blir viktig for elevene å bruke den riktige definisjonen så kan vi kanskje bedre motivasjonen for å være ryddig i bruken av dette tegnet. Det er dessuten gjennom arbeid med eksempler man bygger begreper. Ved å gi mange eksempler der elevene hjelpes til å oppdage sider ved likhetstegnet kan vi hjelpe dem å konstruere et riktigere begrepsinnhold (Skemp, 1971).

Booth (1988, s. 303) sier at presis nedtegning av uttrykk er ekstra viktig i algebraen. Hun mener at presisjon kan få mindre konsekvenser i aritmetikken fordi kontekst og tall ofte gjør at elevene vet hva som forventes og klarer å gjennomføre operasjonen korrekt uavhengig av hva som skrives. Det gjør ikke noe om eleven skriver 3:12 hvis han tenker at dette er å dele 12 på tre og så utfører riktig operasjon. I algebra vil forskjellen på p/q og q/p være avgjørende. Elevene kan lage seg regler ut fra erfaring som ikke samsvarer med definisjonene og strukturene i aritmetikken.

Disse kan slå helt feil ut når de brukes i en algebraisk sammenheng. Ofte kan også lærere gi elever slike feiloppfatninger hvis de gir elevene huskeregler som ikke er matematisk gyldige utover det eksempelet det brukes i. Det er ikke slik at det største tallet alltid står først i et divisjonsstykke. Det samme gjelder i subtraksjonsstykker. Et tall blir ikke alltid større dersom det multipliseres. Dette kan forsterkes av at elevene ofte møter oppgaver som følger disse ”reglene” i lærebøkene. Fordi elevene lærer multiplikasjon med heltall før de lærer multiplikasjon med desimaltall, så vil de kunne ha dannet seg en oppfatning om at tall alltid blir større ved multiplikasjon. På samme måte lærer elevene subtraksjon før de lærer om negative tall. De subtraksjonsstykkene de møter vil derfor alltid ha en minuend som er større enn subtraktoren. Divisjon lærer man før brøk og derfor vil vi at divisjonsstykkene skal ”gå opp”, eller gi et heltall som svar. Derfor velger vi en dividend som er større enn divisoren.

5.1.9 Operasjoner

Linchevski og Livneh (1999) sier at mange av problemene elevene har med den algebraiske strukturen stammer fra en mangelfull forståelse for strukurer i aritmetikken. Dersom sjetteklassinger ble møtt med likninger med to ukjente så kunne de klare å finne ut hvilke tall som passet ved å bruke aritmetiske metoder. De så ut til å forstå at likheten skulle balanseres. Men de fant at elevene ikke hadde en god nok forståelse for strukturen i aritmetikken. I stykker med mange ledd var det flere typer feil.

5.1.9.1.1

$$4 + n - 2 + 5 = 11 + 3 + 5$$

Dette ble til $4 + n - 7 = 19$ ved at 2 og 5 ble lagt sammen noe Linchevski og Livneh kaller ” detachment of a term from the indicated operation”

5.1.9.1.2

$$115 \ - \ n \ + \ 9 \ = \ 61$$

Dette ble til $106 - n = 61$ ved at man tok med seg operatoren som sto bak 115 og så bort fra plusstegnet foran 9-tallet. Noen ville så regne ut $106 + n = 61$. De mente nemlig at de hadde brukt opp subtraksjonen i stykket og nå sto igjen med addisjonen. Dette kaller Linchvski og Livneh “*jumping off with the posterior operation*”. De identifiserer også fem andre slike feiltyper som bunner i forståelsen for det aritmetiske systemet: et statisk syn på parantesbruk, en motstand mot å akseptere likhetstegnet som et symbol for dekomposisjon, feil prioriteringsrekkefølge i bruk av operasjoner, vansker med å velge riktig operasjon for partielle summer og problemer med å oppfatte kansellering i et uttrykk. Vi ser at disse feiltypene handler om bruk av operasjoner og symboler etter bestemte regler. Dette er ikke regler som intuitivt dannes hos elevene, men regler som de må gjøres bevisst på mens de lærer aritmetikken. Også Booth (1988) mener at elevenes vansker i algebra ofte skyldes manglende forståelse for de ulike strukturene i aritmetikken.

Slavit (1999) har studert hvordan elevenes forståelse for operasjoner har en rolle i overgangen mellom algebraisk og aritmetisk tenkning. Han sier at dersom elevene har en forståelse for operasjoner slik at operasjonene i seg selv gjøres til et objekt vi kan studere vil det føre til at man oppdager det generelle i aritmetikken. Slik kan elevene utvikle et syn på aritmetikken som er uavhengig av hvilke verdier vi regner med. Dette kan minne om det Fujii og Stephens (2001) kaller kvasivariable. Elevene bruker konkrete tall når de regner, men de er klar over at dette kunne vært andre tall og det ville ikke ha endret på hvordan man forholdt seg til operasjonen. Slavit sier videre at "*…it is critical that generalizations of the operation be made in the context of symbolic activity, and not just sensory-motoractivity. In order for the operation of addition to be generalized to arbitrary inputs, student understanding must be constituted in symbolic operational activity*" (Slavit, 1999, s. 260).

Aktivitet i seg selv er altså ikke nok. Dersom elevene skal kunne generalisere fra aritmetikk til generelle uttrykk må man også uttrykke det man vet symbolsk. Dette trenger ikke nødvendigvis være algebraens formalspråk, men kan for eksempel være tegninger. Det er altså viktig for elevene å representere sammenhengene symbolsk for at de fullt ut skal forstå den generelle karakteren til operasjoner. Dersom vi bare teller opp klosser og finner sammenhenger så er ikke dette nok til at elevene skal få en god forståelse for generalitet. De må også uttrykke det de har funnet på en måte som gjør at de ser at dette gjelder i andre situasjoner og med andre tall.

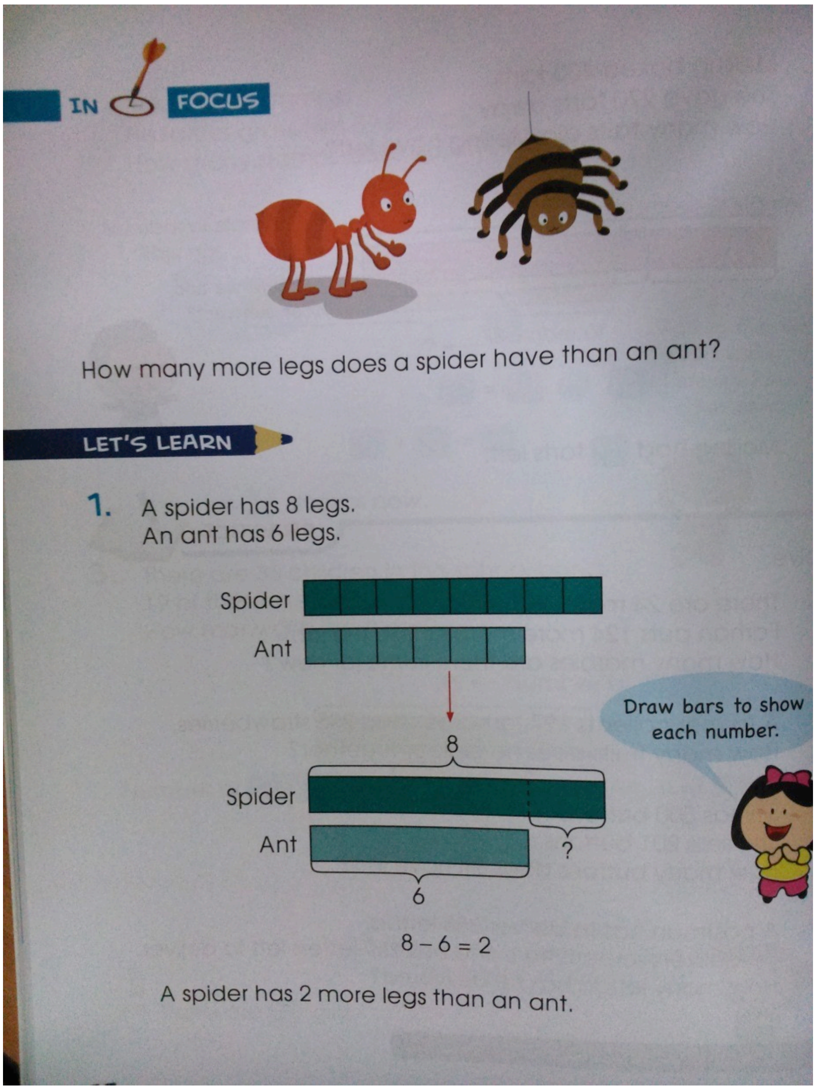
Eksempel: legge sammen to mengder, for eksempel tellebrikker.

Representasjon: elevene kan tegne ned ikke bare mengdene, men også forsøke å beskrive med tegninger eller ord det de gjorde når de la dem sammen. Kanskje talte de den ene mengden for så å telle videre på den andre mengden. Eller så la de kanskje alle brikkene i en haug og talte dem opp. Mange elever må helt sikkert få hjelp til å vite hva de skal tegne. De trenger kanskje å fortelle hva de gjorde til en klassekamerat

eller læreren og få noen tips om hvordan de kan tegne dette. Vi må ikke være redd for å jobbe med det elevene synes er vanskelig, for det er da de er i den proksimale utviklingssonen.
Diskusjon: Vi kan med utgangspunkt i tegningene nå diskutere de ulike valgene elevene tok for å legge sammen mengdene. Vi kan undersøke om metodene som ble valgt alltid gjelder og om noen av metodene er mer effektive. Det kan for eksempel være helt greit å samle alt i en haug dersom denne haugen ikke er for stor. Men dersom haugen blir veldig stor så kan det være lurere å telle videre.
Hovedområde B: Vi jobber på denne måten med generalitet selv i helt enkle addisjonsstykker. Vi vil lære elevene en tilnærming til matematikken der vi hele tiden ser etter det generelle og kommuniserer og diskuterer det vi finner. Bruk av symboler (i dette tilfellet tegninger) hjelper elevene i sin reifikasjon av operasjonen addisjon.
K-06: ”*telje opp, samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar*”, ”*utvikle, bruke og samtale om varierte reknestrategiar for addisjon og subtraksjon*”.

5.1.10 Bildelikninger

Singapore bruker bildelikninger for å løse problem. Dette er en måte å visualisere hele problemet. I første klasse begynner de med å sammenligne del og helhet i forbindelse med addisjon og subtraksjon. Etter hvert utvides dette til multiplikasjon, divisjon, forhold og brøk.
Eksempel: En maur har seks bein, en edderkopp har åtte bein. Hvor mange flere bein har en edderkopp? (se bildet på neste side fra en lærebok i matematikk for første klasse i Singapore).
Representasjon: Antall bein de ulike dyrene har representeres ved hjelp av rektangler. Vi ser at representasjonen starter med en tegning av begge dyrene. Så kommer ruter der hver rute representerer ett insekt eller edderkoppdyr. Så viser de at dette kan skrives som rektangler som representerer hele antallet. Til slutt blir dette til et uttrykk formulert i symboler. Denne måten å tilnærme seg problemer på, ivaretar bedre det vi kalte ”concreteness fading” (3.3.6) enn dersom vi går direkte fra problemet til det symbolske uttrykket. I tillegg så gjør denne måten å løse problemet at elevene må forholde seg til helheten i oppgaven i stedet for å kaste seg ut i telingen med en gang. De må representere hele problemet.



Bilde hentet fra (Hong, Mei & Lianghuo, 2014)

Her undervises elevene eksplisitt i hvordan de skal representere slike problem. De stopper ikke før de har skrevet det ut i symboler 8-6=2.

Diskusjon: Med utgangspunkt i disse tegningene kan vi variere antallet og se hvordan det da hadde blitt. Vi kan også sammenligne antall bein på en hund og en edderkopp. Så kan vi diskutere hvordan tegningen da vil bli og se om den ligner på den forrige. Hva er likt og hva er ulikt? Hva er likt i situasjoner der vi skal sammenligne to mengder? Elevene kan oppdage at tegningen vil se ganske lik ut. De kan oppdage at det ikke er størrelsen til mengdene som er viktig, bare størrelsen av den delen der mengdene er ulike. De kan bruke dette til å også danne en mental modell for differanse.

Hovedområde B: Kieran (Slavit, 1999, s. 260) fremholder viktigheten av å både representere og løse, ikke bare løse. Samtidig er det her fokus på hele problemet på en

måte som minner om ”analyzing expressions” der vi tenker på strukturen i problemet fremfor å starte med regningen.
K-06: ”telje opp, samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar”.

5.1.11 Inverse operasjoner

Som nevnt over er det et stort fokus på inverse operasjoner i de kinesiske læreplanene. Kieran (Slavit, 1999, s. 260) nevner også dette som et av fem kritiske punkt for forståelse av algebra. I Kina jobber de mye med de inverse operasjonene addisjon og subtraksjon fra første klasse. Også i Norge er det tradisjon for oppgaver som viser addisjon og subtraksjon som motsatte. Spørsmålet er om denne sammenhengen blir eksplisitt kommunisert i klasserommet. Både i Singapore og i Kina blir elevene lært at dersom de skal finne en ukjent i et uttrykk der to tall blir subtrahert kan de bruke addisjon og motsatt. Og hvis de skal sjekke svarene sine, så kan de bruke den motsatte operasjonen. De trener på dette. Det nevnes eksplisitt i læreplanene. Jeg oppfatter det slik at i norske lærebøker blir inverse operasjoner kommunisert mer i forbifarten, kanskje som en innledning til et kapittel om subtraksjon.

I Kina gjennomsyres introduksjonen av subtraksjon og divisjon av ideer om likninger og likningsløsning der man bruker inverse operasjoner for å løse likningen. *”The idea of equation and equation solving permeates the introduction of both subtraction and division. For example, students in the first grade are guided to think about the following question: “If 1 + ( ) = 3, what is the number in ( )?” In order to find the number in ( ), the subtraction 3 − 1 = 2 is introduced. Throughout the first grade, students are consistently asked to solve similar problems”* (Cai et al., 2011, s. 32). Her lærer de altså å løse et problem ved å bruke den inverse på en instrumentell måte. Dette står i motsetning til en tenkning der elevene selv skal finne ut hvordan problemet må løses ved hjelp av tegninger og konkretiseringer. Men det er viktig at elevene utvikler en forståelse for hvordan ulike operasjoner er inverse. Dersom vi ikke vil drille inn spesifikke metoder så må vi vie dette spørsmålet mye tid og ikke bare nevne det i forbifarten. Min erfaring er at vi i stor grad benytter oss av inverse operasjoner i innlæring av divisjon, men at vi ikke gjør det i forbindelse med subtraksjon. Det hadde vært interessant å undersøke om norske elever har mer problemer med å utnytte at operasjoner er inverse når det gjelder addisjon og subtraksjon enn når det gjelder multiplikasjon og divisjon i algebraen.

Eksempel: I (5.1.1) fant vi ut at differansen mellom to tall på tallinja var det samme som antall skritt vi gikk. Denne aktiviteten kan vi derfor også bruke til å arbeide med inverse operasjoner. Vi kan arbeide mer eksplisitt med hvordan vi finner og noterer ned differansen. I (5.1.1) så la vi perlene ved siden av hverandre og det overskytende var differansen. Vi kan nå finne differansen på en annen måte ved å plukke vekk det antallet perler som er i det første antallet (tallet vi startet på). Dette kan vi notere ned som subtraksjon. For eksempel kan vi starte på 5 og gå til 7. Differansen kan vi skrive som 7-5. Vi har plukket vekk 5 perler og da sitter vi igjen med 2. Vi kan så forsøke å gå dette antallet på linja fra 5 og se om vi ender opp på 7. Vi kan notere ned den forflytningen vi nå gjør som addisjon (5+2). Her vil vi at elevene skal oppdage en eksplisitt sammenheng som lett kan kompliseres slik at det blir uoversiktlig. Jeg vil derfor si at i dette eksempelet bør læreren styre strengt. Her arbeider vi med inverse operasjoner mens elevene fremdeles lærer seg operasjonene. Det kan derfor være mye på en gang, og gode muligheter for at misoppfatninger oppstår. Samtidig kan ekstra perspektiver til innlæringen av operasjonene styrke dybdelæringen og forståelsen for begrepene dersom vi får det til. Men jeg vil altså se det som et vanskelig emne å jobbe med i første klasse dersom vi ikke vil at de skal lære dette instrumentelt. Kanskje hadde det vært bedre å vente med dette til 2.klasse. I Singapore er dette tema på andre trinn. Det er i hvert fall viktig å finne gode eksempler og gjennomføre dem på en gjennomtenkt og nøyaktig måte. Det er en sammensatt aktivitet der det både inngår addisjon, subtraksjon og inverse operasjoner og det kreves derfor en god struktur for at elevene skal følge med gjennom hele prosessen. Det kan også være en fordel å vente med dette til sent på året når de fleste elevene konserverer mengde og de har fått flere erfaringer med addisjon.

Representasjon: Elevene kan gjerne hjelpe til med å notere ned det læreren eller andre elever gjør i aktiviteten. Jeg ville gjentatt denne aktiviteten mange ganger slik at mange elever får prøvd seg og slik at de får mange repetisjoner av prosessene. Vi kan tegne perlene og vi kan tegne forflytningen på tallinja. Vi kan prøve med et stort antall perler som de ikke klarer å telle, men med en differanse de kan telle. Slik kan tallene i oppgaven fremstå som en plassholder.

Diskusjon: Vi kan diskutere om dette er en metode som gjelder for alle tall. Kan vi alltid ta differansen og legge den til det ene tallet for å få det andre?

Hovedområde B: Inverse operasjoner er et av Kierans (Slavit, 1999, s. 260) fem punkter (2).

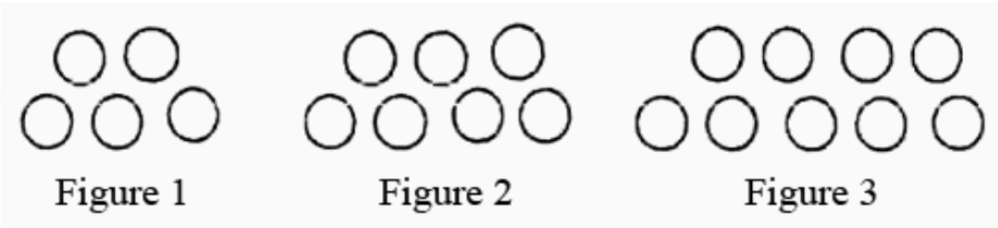
K-06: Inverse operasjoner blir ikke nevnt i K-06 på noen trinn. Dette vitner om at inverse operasjoner kanskje ikke gis det fokus som de har i Kina.

5.1.12 Mønster

Owen (2005, s. 126) mener at en forståelse for repeterende mønstre gir eleven tilgang til "*elements of mathematical thought which are not available to them through any other medium in mathematics*". Ferrini-Mundy, Lappan og Phillips (1997) sier at å jobbe med mønster er en god måte å utvikle algebraisk tenkning. Taylor-Cox (2003) sier det enda sterkere og mener at "*Patterns serve as the cornerstone of algebraic thinking*". Kieran (1989) sier at vi ikke kan ha et fokus kun på å oppdage mønstre. Det er i det vi uttrykker mønsteret algebraisk at vi kan kalle dette algebra. Radford (2006) er enig i dette, men mener at det finnes flere nivåer i hvordan vi kan uttrykke oss algebraisk. Han mener at også tegning, elevenes naturlige språk og andre representasjonsformer kan brukes. Men han sier at hvilket nivå generaliseringen oppnår er avhengig av hvilken representasjon vi velger. Bruk av tegninger og talespråk blir et steg på veien mot det algebraiske symbolsystemet. Men for både Radford og Kieran er det å uttrykke det generelle mønster det som gjør at vi driver med algebra og ikke generell generalisering.

Det er i følge Owen tre typer mønster eleven møter i barneskolen: repeterende mønster, strukturelle mønster og følger. Vi kan finne mønstre i aktivteter vi gjør i det daglige i klasserommet. Fox sier at: "*The promotion of mathematical patterning in pre compulsory settings relies heavily on the teacher's ability to identify concepts and convey them to the students*" (Fox, 2006, s. 2). Hun sier også at selv om det foregår mange aktiviteter som handler om mønster i småskolen så er ofte læringspotensialet dårlig utnyttet. Det er altså ikke nok å drive med aktiviteter der mønster inngår. Lærerne trenger å vite hvordan man skal undervise om begrepene bak aktivitetene. Ved å møte mange ulike aktiviteter der mønstre inngår, ved å symbolisere mønstrene og også diskutere reglene som produserer mønsteret så kan mønsteraktiviteter være med på å utvikle en algebraisk forståelse. *"...there is a need for teachers to have a deep understanding of the nature and power of mathematical patterning. Understanding what to teach, when to teach, and how to teach will provide the opportunity for children to engage in rich patterning experiences and to promote meaningful algebraic foundations*" (Fox, 2006).

Det er altså viktig at lærerne er klar over hvilke matematiske ideer som kan formidles gjennom arbeid med mønster. Radford (2006) sier at ikke all mønsteraktivitet er algebraisk. Selv om vi ender opp med generaliseringer på en konvensjonell algebraisk form så trenger ikke aktiviteten som førte til formelen å være algebraisk. Han gir et eksempel der man skal finne et generelt uttrykk for følgende mønster:



(Radford, 2006, s. Vol 1-4)

Elevene blir her bedt om å finne Figur 10 og 100. Dersom de gjetter en regel og prøver denne ut så er ikke dette en algebraisk måte å komme frem til formelen på. Dersom de i stedet ser etter noe som går igjen og så lager en generalisering ut fra det så bedriver de algebra. Det finnes flere måter å gjøre dette på. De kan se på antallet sirkler i første og andre rad, de kan se at det er fem sirkler i hver figur men at det i figur 2 er to ekstra, mens det i figur 3 er to pluss to ekstra. Poenget er at man deduserer seg frem til de neste leddene og det generelle uttrykket, ikke gjetter og tilpasser uttrykket slik at man får en hypotese som man så kan teste. Eleven i første klasse kan i samarbeid med læreren løse oppgaver som den over. De kan også med hjelp fra læreren komme frem til en måte å uttrykke mønsteret de finner. Men de kan i følge Goldenberg et al. (2010) ikke komme fra uttrykk som 5+(n-1)2 til det forenklede 2n+3. Her er det snakk om symbolmanipulasjon for å finne en generalisering løsrevet fra det konkrete. Dette sier de at ikke er innenfor elevenes rekkevidde i første klasse.

Vi kan altså generalisere uten at vi bedriver det Radford vil godkjenne som algebraisk aktivitet. Han mener derfor at det er viktig i møte med mønsteraktiviteter at læreren gjenkjenner hva som er egnet til å utvikle elevenes algebraiske tenkning. ”*In the use of patterning activities as a route to algebra, we −teachers and educators− have to remain vigilant in order not to confound algebraic generalizations with other forms of dealing with the general; we also have to be equipped with the adequate pedagogical strategies to make the students engage with patterns in an algebraic* *sense"* (Radford, 2006, s. Vol 1-4).

5.1.12.1 Repeterende mønster

Repeterende mønster kan være av formen abcabc, det kan vært gjentakelser av korte sekvenser med geometriske former, farger eller antall (for eksempel tårn av klosser), eller i dagene i uka og månedene i året.

Eksempel: I folkediktningen bruker man ofte bestemte antall gjentakelser. Vi snakker om eventyrtallene 3 og 7 for eksempel. Vi kan gjøre elevene bevisst på slike mønstre i historiene de leser. Vi ser at ved å strukturere så får vi oversikt over historien og vi husker lettere hva som skal med når vi skal lære den utenat. Mønsteret er med på å skape en forventning i fortellingen. Å få oppfylt slike forventinger er en del av gleden ved å høre historier. Vi kan velge "Gullhår og de tre bjørnene". Gullhår går ut i skogen og kommer til et hus. Hun går inn og prøver tre stoler, en stor, en middels og en liten. Hun bestemmer seg for den minste. Hun smaker på grøten på bordet som står i en stor, en middels og en liten bolle. Hun synes den ene er for varm, den andre for kald og den tredje akkurat passelig. Til slutt blir hun trett og prøveligger tre senger. Den ene stor og hard, den andre middels og myk og den tredje liten og passelig. Gullhår sovner. Når bjørnene som bor i huset kommer hjem går de i Gullhårs fotspor og vi får gjentatt det hele. Det er her snakk om mange ulike kvaliteter (varm, myk) og størrelser (stor, middels). Det kunne lett stokket seg dersom det ikke var et mønster fortelleren kunne følge.

Representasjon: Vi kan be elevene tegne bjørnene med de tingene som tilhører den enkelte. Vi kan ha lapper med bilder av tingene og be elevene legge dem i rett rekkefølge slik de kommer i historien. Da kan vi se at mønsteret gjentar seg. Vi kan også forsøke å legge til andre gjenstander som bjørnene kunne ha eid og Gullhår kunne ha prøvd og så fortelle historien en gang til mens vi følger mønsteret.

Diskusjon: Vi kan diskutere hvorfor det kan være nyttig med mønstre når vi skal lære noe utenat. Vi kan prøve å finne andre historier eller eventyr der vi kan finne tilsvarende mønstre.

Hovedområde B: det å gjenkjenne mønstre rundt oss er en viktig del av algebraisk tankegang. Ved å trene elevene i å legge merke til de mønstre vi omgir oss med kan det være enklere for dem å finne slike mønstre også når disse mønstrene inngår i mer abstraherte situasjoner. Vi vil trene elevenes "habits of mind" slik at de leter etter mønstre og regelmessigheter og kan beskrive disse matematisk. Dette bør ikke avgrenses til matematikktimene, men være en del av den generelle kulturen for læring iklassen.

K-06: "kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster".

5.1.12.2 Strukturelle mønster

Eksempel:

et eksempel på et slikt mønster kan være hvilke addisjonsstykker vi kan lage der summen har verdien 5:

$1 + 4 = 5$

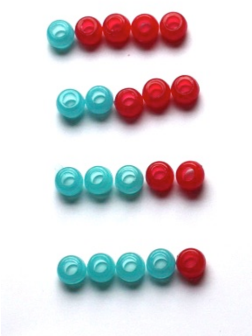
$2 + 3 = 5$

$3 + 2 = 5$

$4 + 1 = 5$

(Fox, 2006, s. 227)

Representasjon: Elevene kan for eksempel bruke perler i ulike farger til å vise dette mønsteret.



De kan så tegne dette på papir eller finne egne måter å notere ned dette mønsteret. Når de legger perlene kan det godt tenkes at de ikke legger dem så pent og systematisk som på bildet over. De gjør det kan hende ganske mekanisk eller uten å se stykkene i sammenheng. Ved å måtte tegne det så er det en større mulighet for at de kan oppdage mønsteret.

Diskusjon: Når de har tegnet ned mønsteret så har de et objekt (tegningen) som kan legges frem for analyse. Vi kan diskutere om noen av tegningene er bedre enn andre til å vise mønsteret og i så fall hvorfor. Vi kan diskutere om det ville være mulig å fortsette dette mønsteret. Vi kan diskutere om vi har funnet alle mulige kombinasjoner som gir 5 i sum. Vi kan også diskutere hvordan vi kan bruke figuren til å være sikker på at vi har funnet alle kombinasjonene. Vi kan så forsøke og se om vårt resonnement rundt dette mønsteret gjelder for andre tall. Gjelder det for alle hele tall?

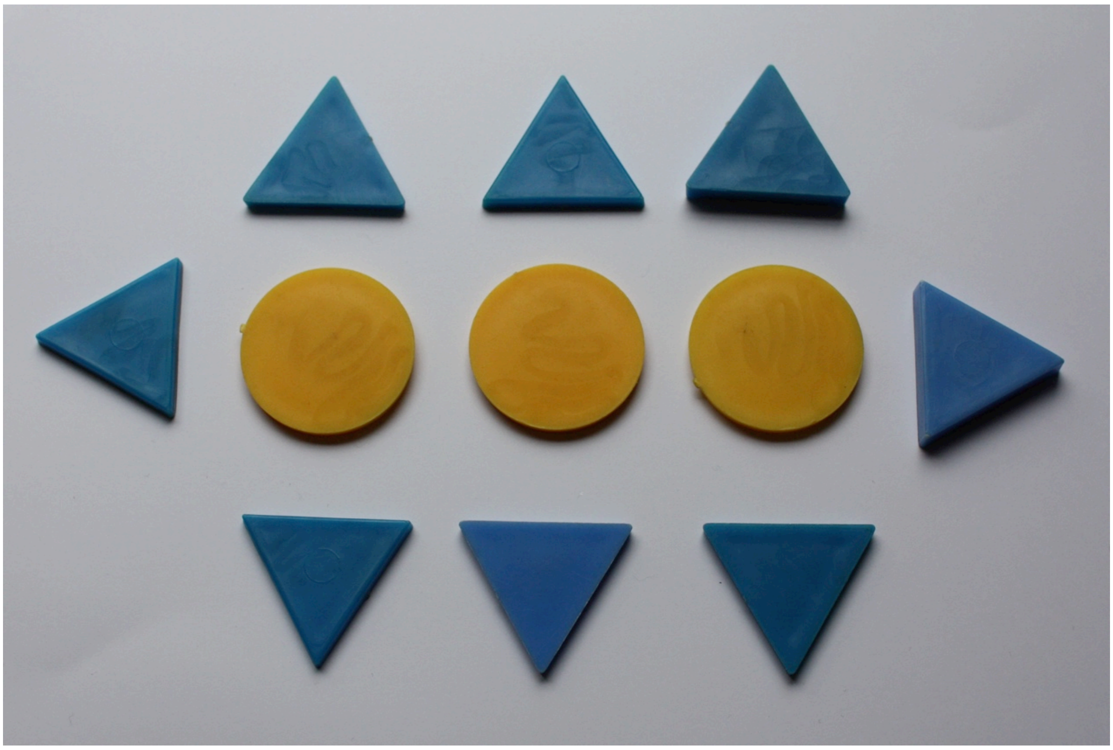
Hovedområde B: Vi bruker bevisst to ulike farger på kulene. Dette gjør mønsteret tydeligere. Det er også en støtte til en strukturell forståelse. Når vi snakker om antall røde og antall blå perler så kunne vi like godt ha snakket om a og b. Rød og blå er bare navn på to mengder som utgjør en konstant sum.

K-06: "kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster", "gjere overslag over mengder, telje opp, samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar", "telje til 100, dele opp og byggje mengder opp til 10".

5.1.12.3 Følger

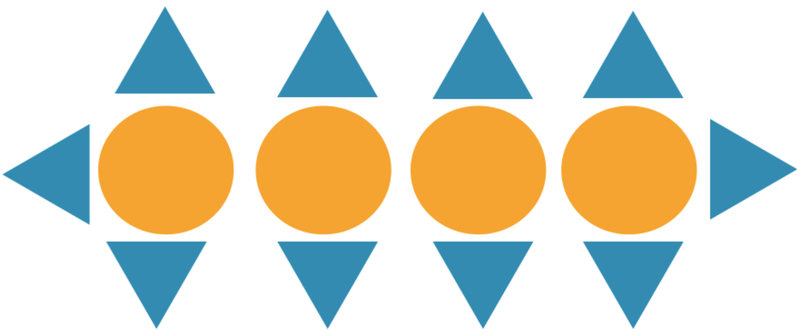
En følge er en opplisting av elementer i en mengde. Hvert element i følgen kan numreres slik at vi kan snakke om det femte elementet eller det n-te elementet. Følger kan gjøres veldig konkrete. Vi finner regelen for følgen og legger brikker videre på samme måte.

Eksempel: Jeg gjorde et eksperiment med alle elevene i en førsteklasse der jeg hadde en elev om gangen ved siden av meg. Dette var i leketid, så det var frivillig for elevene å være med. Jeg la et mønster med gule og blå logiske brikker som jeg hadde sett på en forelesning med Mona Røsseland:



Jeg spurte så hvor mange gule er det?
Hvor mange trekanter er det oppe?
Hvor mange er det nede?
Og hvor mange er det på hver side?
Jeg pekte og brukte også stemmen bevisst slik at det ble en slags opplisting: hvor mange oppe, hvor mange nede og på hver side? Dette er et språklig mønster som jeg kan bruke videre når jeg utvider mønsteret. Dette språklige mønsteret blir utgangspunktet for hvordan jeg vil notere problemet ned senere. Mitt ønske er at elevene kan lære av meg som modell og så bruke stemmen sin til å systematisere liknende problemer. Det ble altså denne gangen: Hvor mange blå er det? Hvis vi har tre gule da blir det tre oppe, tre nede og en på hver side.

Jeg la så til en gul brikke og spurte eleven hvor mange ekstra blå jeg trengte. Elevene tippet ofte tre blå. Dermed la vi disse og elevene oppdaget raskt at det var en blå for mye. Ved neste utvidelse av mønsteret hadde de korrigert seg selv og sa at det trengtes to blå.



Med fire gule blir antall blå fire oppe, fire nede og en på hver side. Jeg ber elevene fortelle hvor mange brikker det er oppe og nede og på hver side. De har begynt å se mønsteret og svarer riktig. Så spør jeg, uten å gjøre noe med brikkene; "hvor mange blå blir det hvis jeg har fem gule?". Sammen finner vi ut at det da må bli fem oppe og fem nede og en på hver side. Det blir tolv til sammen. Hvis det er ti gule da? Elevene svarer selv uten hjelp: ti oppe ti nede og en på hver side. Det blir tjueto. Hva hvis det er hundre gule? Hundre oppe hundre nede og en på hver side. Det ser ikke ut som det er vanskeligere for elevene å legge sammen hundre og hundre enn å legge sammen ti og ti. (Noen kan ikke enda ti pluss ti, men alle kan en pluss en). Det kan virke som det er blitt en regle for dem. De bruker takten i språket til å finne rett antall. De kan så regne sammen og finne det totale antallet. De angir her antall uten å telle, bare ved å stole på det mønsteret de har oppdaget. Helt bevisst bruker jeg ikke tall som det er vanskelig for dem å regne ut, som 7 oppe 7 nede og en på hver side. Da blir de nødt til å telle. Det er det jeg vil unngå ved å gi dem tall som de lett kan legge sammen i hodet. Slik blir mest mulig av fokuset på mønsteret, ikke på telling eller addisjonen i etterkant. Jeg spør så om antall blå hvis det er en million gule. Dette er ikke noe vanskeligere, men veldig morsomt for de fleste. Jeg sier så at jeg har funnet på et tall som heter nunginungi. Hvor mange blå må vi ha hvis vi har nunginungi gule? Det blir nunginungi oppe og nunginungi nede og en på hver side.

Representasjon: Nunginungi er så langt å skrive, så vi skriver bare n. Vi har nå skrevet ned et uttrykk for antall blå hvis antall gule er nunginungi som er n+n+1+1. Når vi lager variabler eller parametre ved å forkorte ord til en bokstav er det viktig å være sikker på at elevene vet at bokstaven refererer til et antall og ikke til substantivet som forkortes. I dette tilfellet er det ganske klart at det ikke refereres til et objekt, da nunginungi ikke har noen annen betydning. Hvis vi derimot hadde forkortet dette til b for brikker så vil b+b lett kunne bety to brikker for elevene i stedet for et antall pluss et antall. Dette var min begrunnelse for å innføre det nye fantasitallet nunginungi.

Diskusjon: Vi kan så prøve ulike verdier for tallet nunginungi. Da poengterer vi at n står for et hvilket som helst tall og ikke er en forkortelse for en bestemt situasjon eller en bestemt mengde. Vi kan diskutere om det er noen grenser for hvor stort eller lite nunginungi kan være.

I en klasse på tjue førsteklasseelever var det bare èn som ikke fulgte med til dette stadiet. Han falt av tidlig og begynte å lage sine egne bilder av biler og trær med brikkene. Jeg lot ham gjøre det fordi det var leketid. Jeg gjorde ikke dette i min egen klasse. Hadde jeg gjort det ville jeg ha sjekket senere om jeg kunne få ham med på en slik aktivitet. Denne aktiviteten er veldig strukturert av læreren, men det er viktig å gi elevene tid til å oppdage mønsteret selv ved å gi dem god tid og eventuelt mange repetisjoner.

Rivera (2008) sier at å komme frem til slike generaliseringer av følger er vanskelig for elevene. Han sier også at det er vanskelig å se sammenhenger mellom ulike elevers generaliseringer fordi de kan få så ulik form. Kun gjennom en manipulasjon av uttrykkene kan vi vise at de er ekvivalente. Jeg ville ikke satt elever på dette nivået i gang med å finne slike uttrykk på egenhånd. Men jeg vil gi dem mange erfaringer med hvordan et slikt mønster kan beskrives og guide dem gjennom slik utforskning ved hjelp av stemmebruk og andre metoder som jeg selv bruker når jeg vil finne et uttrykk for en følge.

Hovedområde B: Her forholder elevene seg til et rent algebraisk uttrykk som det kan se ut som at er løsrevet fra den konkrete konteksten. Men selv om de er med på at man kan forkorte nunginungi til n så er det ikke sikkert at de forholder seg til n som uttrykk for et tilfeldig tall. De har kanskje selv egne forestillinger om hva nunginungi er. De er ikke nødvendigvis helt med på at man kan bytte det ut med hvilket som helst tall. Dersom vi hadde spurt dem om hva de tenker at nunginungi er så hadde de kanskje kommet med et forslag eller de hadde sagt at det var det tallet læreren tenker på. Da tenker de på n som en ukjent, ikke en variabel. I følge Goldenberg et al. (2010) så er elever på dette nivået generelt ikke klare for å manipulere med bokstavuttrykk. De forholder seg til den konkrete konteksten. Men ved å diskutere og bruke slike bokstavuttrykk så kan de kanskje lære seg å bruke bokstavuttrykk til å beskrive sammenhenger som også inneholder ukjente. Jeg tolker det slik at Goldenberg et al mener at det er *manipulasjon* av slike uttrykk, løsrevet fra noen kontekst som er problemet for så unge elever og ikke selve uttrykkene. Og da spesielt det å løse problemer med ukjente størrelser ved å manipulere med abstrakte uttrykk.

Dette eksempelet er gjengitt i dette kapittelet fordi elevene lett kan fortsette dette mønsteret rekursivt. De bare legger til to blå for hver gule brikke. Samtidig kan vi finne et uttrykk for det n-te leddet i følgen. Denne måten å forholde seg til mønsteret på er mer likt det vi nedenfor kaller korresponderende mønstre og som jeg har plassert under gren 2. Vi finner antall blå brikker avhengig av hvor mange gule brikker vi har.

K-06: "*kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster*".

Blanton og Kaput (2011) kaller den type mønster som de vi har gått gjennom i dette kapittelet for *rekursive mønstre*. Det er snakk om å se mønsteret og fortsette dette. I neste kapittel går jeg gjennom to andre typer mønstre, som godt kunne vært lagt frem i dette kapittelet, men som tjener som en innføring i funksjoner og dermed er gjennomgangen lagt til kapittel 5.2.

5.1.13 Kommutativ lov

Lee og Wheeler (1989) lister opp hvilke områder ungdomsskoleelevene har problemer med i algebra. Bruk av parenteser, regnerekkefølge, regning med brøk, negative tall, og den assosiative og den kommutative lov blir nevnt.

Kommutativitet er en viktig egenskap for de naturlige tallene. Kommutativitet for addisjon betyr at dersom man adderer sammen tallene a og b så får vi samme verdi uavhengig av rekkefølgen på a og b. Vi skriver:

5.1.13.1.1

$$a + b = b + a$$

For de naturlige tallene gjelder dette i addisjon og multiplikasjon, men ikke i divisjon og subtraksjon.

Eksempel: Vi kan bygge med klosser, gjerne med en farge for a og en for b.

Representasjon: Vi kan tegne klossene. Vi kan så telle opp og finne summen. Så kan vi snu arket. Vi har fremdeles de samme klossene, men har inntatt et nytt perspektiv. Igjen får vi samme sum. Vi kan forsøke å tegne eller skrive ned denne regelen. Elevene kan gjerne få vite at denne regelen har et navn og lære seg dette navnet. Det kan også være fruktbart å lære elevene navn på de ulike delene av et regnestykke. Dette hjelper elevene når de skal diskutere rundt den regelen de har funnet.

Diskusjon: Vi kan benytte oss av ord for ledd og sum for å diskutere om de reglene de finner om kommutativitet gjelder i alle tilfeller. Når de har blitt vant til å snakke om kommutativitet i addisjon og er trygge på begrepet kan det være interessant å innføre en kognitiv konflikt ved å la dem teste om subtraksjon er kommutativt. Dette blir selvsagt bare til en kognitiv konflikt dersom de har en forventning om at også subtraksjon er kommutativ.

Hovedområde B: kommutativitet, assosiativitet og distributivitet er algebraiske lovmessigheter vi bruker for å beskrive ulike algebraiske grupper og strukturer. Samtidig er disse tre lovmessighetene viktige for å kunne regne med formelle algebraiske uttrykk. Vi har sett at Lee og Wheeler (1989) mente at elevene hadde problemer med kommutativitet og assosiativitet.

K-06: Når vi undersøker om addisjon er kommutativt så innebærer det telling, det innebærer addisjon og det innebærer å kunne kommunisere skriftlig i matematikken.

5.1.14 Distributiv lov

En annen viktig sammenheng i aritmetikken er den distributive lov. Den sier at vi kan dele opp et tall i deler og så utføre en operasjon på hver del uten at dette endrer verdien til uttrykket.
Vi kan skrive:

5.1.14.1.1

$$a(b + c) = ab + ac$$

For de naturlige tallene gjelder denne egenskapen for multiplikasjon. Den eneste multiplikasjonen vi holder på med i første klasse er dobling.
Eksempel: Vi skal finne det dobbelte av en mengde brikker. Først kan vi finne dobbelt ved å legge en rad til med like mange brikker. Vi kan så bruke to forskjellige farger på brikkene og lage en oppgave der vi skal doble fem røde og tre blå brikker.
Vi kan doble på samme måte ved å legge blå under blå og rød under rød.
Representasjon: Elevene kan tegne ned det vi gjorde og selv forsøke med andre antall. Vi vil også at de skal prøve å formulere hva som er regelen når vi dobler en sum av røde og blå brikker.
Diskusjon: I diskusjonsdelen blir det viktig å få elevene til å diskutere regelen de laget. Hvordan formulerte de den? Klarte noen å skrive den ned? Hvordan kan vi vite at dette gjelder alle summer av blå og røde brikker? Hva om vi la til noen grønne brikker før vi doblet? Hvordan kan vi finne det dobbelte av en sum med tre ledd?
Hovedområde B: distributiv lov er en viktig struktur i algebraen. Jf hovedområde B under kapittelet ovenfor.
K-06: "*doble og halvere*".

5.1.15 Assosiativ lov

Assosiativ lov handler om at i et uttrykk med tre ledd så endrer ikke summen seg med om man først utfører operasjonen på de to første eller de to siste leddene. Vi kan skrive at

5.1.15.1.1

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

For de naturlige tallene gjelder denne loven for addisjon og multiplikasjon, men ikke for subtraksjon og divisjon.

Eksempel: Vi kan teste ut dette for addisjon ved bruk av brikker. Vi kan dele en mengde brikker i tre hauger. Vil det få noen betydning for summen i hvilken rekkefølge vi legger sammen de tre haugene? Dersom noen elever er usikre her kan det tyde på at de ikke enda konserverer mengde.
Representasjon: Dette kan representeres ved at elevene tegner ringer rundt de mengdene de legger sammen. De kan tegne med rød farge en ring rundt de to mengdene de la sammen først og så med blå farge de mengdene de la sammen til slutt. Vi kan gjøre dette sammen på tavla og elevene kan gjøre det hver for seg i egne bøker.
Diskusjon: Med utgangspunkt i elevenes tegninger kan vi så diskutere hvorfor summen blir den samme uavhengig av rekkefølgen.
Hovedområde B: assosiativitet er en viktig struktur i algebraen. Se (5.1.13)
K-06: ”*utvikle, bruke og samtale om varierte reknestrategiar for addisjon og subtraksjon*”.

5.2 Gren 2 Funksjoner og variabler

Gren 2 handler om funksjoner og variabler.

5.2.1 Variabler

”*A variable is a symbol or (typically a letter but sometimes a simple figure or other token) that stands for an element of a set of possible values. The set typically contains numbers or measures (i.e., numbers along with units of measure), but it may be defined over any sorts of objects, mathematical or not.*
Although mathematics tends not to distinguish an unknown from a variable, in mathematics education, an unknown is often taken to refer to a fixed number. As a result, the term unknown leaves open the issue of whether the variable is employed in the former or latter sense. Given this ambiguity, variability (the idea that a variable can take on multiple values) is generally treated as a distinct feature of algebraic reasoning” (Carraher & Schliemann, 2014, s. 193). I tråd med dette sier MacGregor og Stacey (1997) at elever har problemer med å bruke bokstaver for å representere variabler. De ser ikke bokstavene som uttrykk for en variabel, men som plassholder for et konkret tall. Küchemann (1981) klassifiserte elevenes tolkning av bokstaver i algebraen i to hovedgrupper:

”1. The letter is ignored, given an arbitrary value, or used as the name of an object.
2. The letter is used as a specific unknown number or generalised number”
(Küchemann (1981) i (MacGregor & Stacey, 1997)).
Disse ble så delt opp i to og disse fire utgjorde så fire nivåer i utvikling av forståelse for bokstaver som Küchemann mente tilsvarte Piagets fire stadier.
MacGregor og Stacey (1997, s. 1) mener å ha vist at det er flere ting enn elevenes utviklingsmessige nivå som spiller inn. De mener at elevenes vanskeligheter med å lære å bruke algebraisk notasjon skyldes blant annet:

- *intuitive assumptions and sensible, pragmatic reasoning about an unfamiliar notation system;*
- *analogies with symbol systems used in everyday life, in other parts of mathematics or in other school subjects;*
- *interference from new learning in mathematics;*
- *poorly-designed and misleading teaching materials.*

De mener at mye av problemene skyldes at elevene ikke får nok erfaring med å bruke algebraisk notasjon. De tenker at det at mange elever tolker bokstaver feil i algebraen skyldes misforståelser som lett kan avverges ved riktig undervisning, men også mer gjenstridige oppfatninger som det tar lang tid å endre på. Det er viktig at læreren er klar over hvor problemene ligger for elevene og hva de kan gjøre for at elevenes første møte med bokstavnotasjon legger et grunnlag for en konsistent struktur i elevenes algebraiske forståelse.

5.2.1.1 The candy boxes problem

Carraher og Schliemann (2014, s. 193-194) legger frem et eksempel på et undervisningsforløp i tredje klasse som de kaller ”the candy boxes problem”. Dette ligner litt på x-boksen i forrige eksempel (5.1.5), men her er poenget ikke å finne ut hva som er oppi esken. I stedet vil vi at elevene skal fokusere på sammenhengen mellom størrelser.
Eksempel: John og Mary har en boks med drops hver. Det er like mye i hver boks, men Mary har tre drops ekstra. Vi har gjerne med to bokser med drops i som er trygt stengt så elevene ikke kan åpne dem opp. På toppen av den ene boksen ligger det tre drops.

Elevene får kjenne på boksene. De får så spørsmål om hva de vet om hvor mange drops John og Mary har. I eksempelet Carraher et al. legger frem så ville elevene først ikke godta at det var like mange i begge boksene. De kan ikke undersøke dette så godt selv og må bare stole på forskeren når han sier at det er likt. De forsøker å sammenligne vekten på boksene. De godtar til slutt at det er like mange i hver boks.
Representasjon: Elevene blir så bedt om å tegne hva de vet om mengden drops Mary og John har. 56 av 63 elever produserte tegninger. 40 av de 56 elevene laget tegninger som fokuserte på et spesifikt tilfelle. De valgte altså et antall drops i boksene. 23 av elevene gjettet ikke på antallet i boksene. De lot det være åpent hvor mange drops det var. Noen brukte spørsmålstegn, andre bare skrev i tekst eller beskrev i bilder at Mary har tre mer enn John. Carraher et al. mener ikke at elevene med dette har forstått variabler, men de sier at: ”*representation of an indeterminate amount is a placeholder for eventual introduction of a variable*” (Carraher et al., 2008, s. 238-247).
Her tenker jeg at mye av kjernen til tidlig algebra ligger: vi introduserer ikke algebraen slik den vil fremstå i 8.klasse, men vi skaper rom for at slike uttrykk og tankemåter kan vokse frem på et senere tidspunkt. Vi vil gi elevene opplevelser med ukjente og variable mengder slik at de har erfaringer å trekke på og ideer som allerede er utviklet til å inkludere tanker om ukjente og variable mengder og hvordan disse kan representeres.
Diskusjon: Carraher et al. (2008) sier at elevene er motvillige til å la det være åpent hvor mange drops det er. Når de diskuterer de tegningene som ikke gir et bestemt tall for antall drops, så kommer elevene ofte med eksempler som inkluderer bestemte mengder. Men det at noen allikevel insisterer på å illustrere problemet uten å oppgi mengder, gir læreren en mulighet til å introdusere notasjonsformer som elevene kan benytte seg av ved senere representasjoner og diskusjoner. Det er nyttig å poengtere at alle de ulike svarene kan være løsninger på problemet.

Hovedområde B: Dette tilfellet gjaldt en bestemt historie og et bestemt tilfelle. Men forskerne mener at det er mulig å se på ”the candy boxes problem” som en samling av mange mulige historier. ”*The teacher hopes to gradually move the focus of discussion toward algebra by capitalizing on this shift in thinking*” (Carraher et al., 2008, s. 241)
Første klasse: Det er en slik gradvis bevegelse fra de spesifikke eksemplene til de generelle mønstrene vi vil starte allerede i første klasse. Siden bevegelsen er gradvis vil det si at vi begynner med de mest konkrete ideene (bokser vi kan holde i hånda). Elevene kan få flere slike konkrete erfaringer med ukjente og variable. Dette er de ikke for små til i første klasse. De har forståelse for at to mengder kan være like uten at vi kan telle dem. De er vant til å ikke kunne telle større mengder og derfor måtte godta det voksne sier er likt. At noe er tre mer er heller ikke et tema som er for komplisert, men noe vi jobber med hele tiden i første klasse i forbindelse med tallrekken og operasjonene addisjon og subtraksjon. I tråd med teorien om ”concreteness fading” vil det være naturlig å bruke mer tid på den konkrete representasjonen med førsteklassinger. Samtidig er det viktig å bevege seg mot et mer abstrakt nivå også med førsteklassinger. Ved at elevene tegner det som skjer så må de skifte blikk fra det konkrete til en avbildning av det konkrete og dette vil aktivere tankene på en annen måte enn den konkrete situasjonen. Læreren må selv vurdere elevgruppen i forhold til om det er best at denne representasjonen gjøres i fellesskap eller om de skal får forsøke seg to og to eller en og en. Gjennom en diskusjon med utgangspunkt i tegningene kan man komme frem til en felles måte å tegne variable størrelser på i klassen. Jeg ville ha gjentatt denne aktiviteten flere ganger med ulike eksempler (poser med Lego, pennal med farger i eller liknende) slik at elevene blir vant til å håndtere ukjente størrelser.
K-06: Det er ingen mål i planen for 1.-2.trinn som handler om ukjente og variable størrelser og heller ikke at elevene skal lære representere slike. Samtidig er det en tradisjon for oppgaver i bøkene med tall som mangler. The candy boxes problem er en konkret måte å arbeide med å ”finne tallet som mangler”. Når vi arbeider med slike oppgaver så jobber vi samtidig med del-hele, vi jobber med addisjon og subtraksjon og med mengdeforståelse.

5.2.1.2 The candy boxes problem, del 2

Eksempel: Noen av elevene har brukt spesifikke eksempler med et visst antall drops i boksene. De som ikke hadde spesifikke verdier blir bedt om å finne et eksempel på

hva John og Mary kan ha. Dette gjøres ikke for å forsterke elevenes tilbøyelighet for å velge spesifikke tall, men er et ledd i et undervisningsforløp der målet er å gjøre synlig dette problemets algebraiske karakter.
Representasjon: Forskerne tegner opp en tabell på tavla og elevenes navn og antall for John og Mary føres inn i tabellen. Dermed må alle elevene igjen forholde seg til problemet. I et tilfelle skrev en gutt fem i begge kolonner. Da kunne forskerne spørre om det ut fra problemet kan stemme at begge har like mye. Eleven hadde glemt de tre ekstra dropsene. Dersom elever gir verdier som ikke passer med forutsetningene i problemet får de beskjed fra de andre elevene. De andre elevene må da kommunisere hva som ikke stemmer og hvorfor. En elev ble ikke overbevist av de andre elevenes argumenter og forskerne lot verdiene hans stå på tavlen, selv om de ikke stemte. Han gjettet at John hadde 7 og Mary 13.
Diskusjon: når tabellen er ferdig utfylt fokuseres det på forskjellen i antall hos Mary og John. Forskeren spør om Mary kan ha 13? Og om John kan ha 7? Elevene bekrefter dette. Men hvorfor stemmer da ikke det eleven sa med 13 til Mary og 7 til John? Elevene sier da at selv om John og Mary kan ha hvilket som helst antall drops, så er allikevel svaret med 7 og 13 feil. De diskuterer seg frem til at dersom vi vet hva den ene har så har vi ikke uendelig med muligheter for den andre. Nå er det bare en mulighet for den andre.
Hovedområde B: ved å fokusere på at den ene mengden er avhengig av den andre så kan vi trekke fokuset bort fra de konkrete mengdene Mary og John har og over på avhengige variabler. Vi vil at de skal se utvalget og begrensningene i hvilke mengder som er mulige. Elevene vil gjerne tilordne dem et bestemt antall, slik de jo ville hatt om dette var et konkret, spesifikt tilfelle. For å flytte elevenes fokus fra det spesifikke til det generelle så ser vi at det er viktig å representere og diskutere.
Første klasse: Gjennomføringen av del 2 av "the candy boxes problem" ville jeg ha gjort ved at elevene fikk drops eller perler som ligner på drops slik at de kunne vise ulike mulige mengder for Mary og John. Også i tabellen på tavlen ville jeg gitt rom for å tegne dropsene, ikke bare skrive ned tallene. I tillegg ville jeg ha gruppert dropsene i tabellen slik at det var enkelt å oppdage at det er likt pluss tre. I den påfølgende diskusjonen ville jeg ha bedt dem komme med forslag til en forklaring på hvorfor jeg tegnet dropsene nettopp slik. Dermed kan kanskje de siste som ikke oppdaget dette av seg selv se det nå. Samtidig er dette en teknikk som er grunnleggende matematisk: det å sortere og omarrangere det vi har så det blir mer

oversiktlig og slik at mønstre trer frem. Jeg ville brukt god tid på å snakke gjennom det vi ser. Jeg ville også oppfordret alle elevene til å forklare med egne ord det vi vet om mengdene til John og Mary. Selv om de etter hvert bare gjentar det elever før dem har sagt, så kan det ha en effekt å måtte uttale det selv. Det blir enda en representasjonsform og nye steder i hjernen aktiveres når vi snakker, ikke bare tegner eller handler.

K-06: Når elevene skal finne ut hvilke mulige verdier som finnes så må de gjøre bruk av addisjon. De må også sammenligne mengder og uttrykke disse mengdene.

5.2.1.3 To variabler

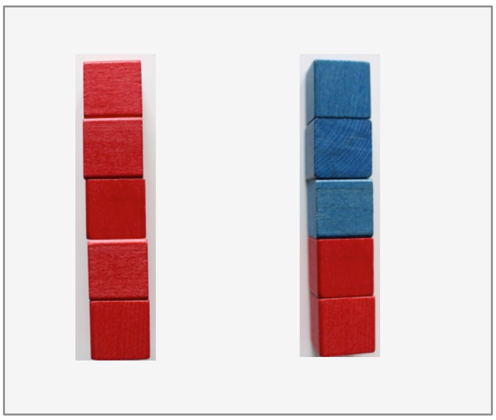
I arbeidet med likhetstegnet så kan det være interessant å legge inn oppgaver som har mange mulige løsninger. Vi arbeider da med to variabler.

5.2.1.3.1

$$5 + \_ = 2 + \_$$

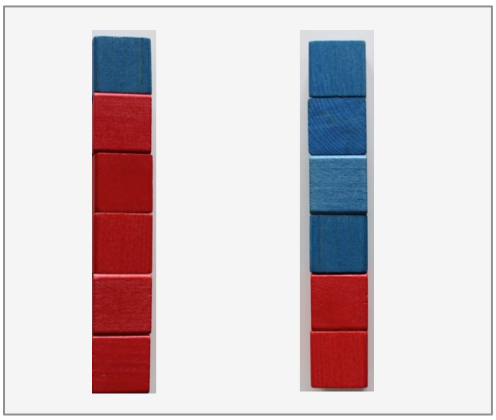
Da det er mange mulig løsninger flyttes fokus fra det ene rette svaret til å finne et mønster eller en regelmessighet som gjør at vi kan avgjøre om et tall er en løsning eller ikke.

Eksempel: Hvilken egenskap må de to tallene ha som kan settes inn i uttrykket (5.2.1.3.1)? Vi kan bruke klosser og bygge tårn for å visualisere uttrykket. Her kan man benytte seg av mange ulike matematiske metoder for å finne en løsning. Vi kan bygge det første tårnet i to forskjellige farger: 5 i rødt og det ukjente i blått for så å bygge det andre tårnet like høyt og så se hvor mange blå vi fikk.



Fem røde ingen blå — 5+0

To røde tre blå — 2+3



Fem røde en blå — 5+1

To røde fire blå — 2+4

Representasjon: Vi kan tegne de tårnene vi bygger. Da får vi et enda større fokus på at det er de to fargene som er tallene i stykket. Det er hele tiden like mange røde klosser.

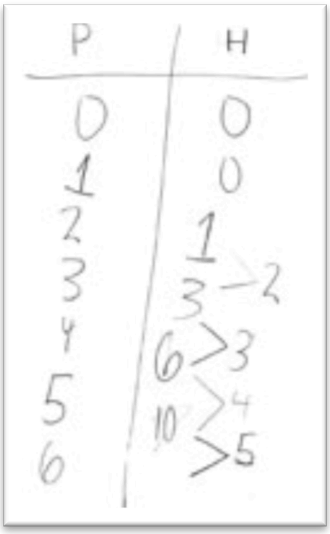
Diskusjon: I diskusjonen kan man få elevene til å forklare hvordan de tenkte. Hvordan kunne de vite at det ble rett? Må vi prøve oss frem hver gang eller finnes det en regel vi kan følge for å finne antall blå klosser i det andre tårnet? Kan vi bruke differansen mellom 5 og 2 til noe? Kan vi bygge tårn nummer to først? Hvordan kan vi da finne antall blå klosser i tårn nummer en? Hva om vi endrer antall røde klosser i oppgaven? Hva skjer da med antall blå klosser? Har det noe å si om vi endrer antall røde klosser med like mye i hvert tårn? Hva om det er like mange røde i hvert tårn?

Hovedområde B: Her jobber vi egentlig med variable størrelser, men styrker samtidig forståelsen for likhet. Vi benytter oss av syntaksen i likheter for å løse en oppgave. Vi kan ikke velge hvor mange blå klosser vi skal bruke i tårn nummer to. Variablene er avhengige. Vi har her ingen kontekst til tallene annet enn en visualisering. Det er ikke noe utenom oppgaven som kan bestemme hvilke tall vi velger. Alt er bestemt av syntaksen, strukturen i likheter. Vi finner det ukjente tallet ved hjelp av inverse operasjoner. Vi har funnet en generell struktur og vi bruker denne til å løse andre oppgaver.

K-06: Når vi jobber med å bygge tårnene og sammenligne dem så teller elevene og de sammenlikner størrelser.

5.2.2 Funksjoner

I følge Carraher et al. (2008, s. 242) kan funksjoner være en bra vei inn i algebraen. De fremholder spesielt det å jobbe med samvarians og korrespondanse når vi holder på med mønstre som en måte å danne forståelse for funksjoner. De legger til grunn (E. Smith, 2008) sin inndeling av mønster. Smith sier det er spesielt tre typer mønster vi jobber med i skolen. Det er rekursive, samvarierende (5.2.2.1) og korresponderende (5.2.2.2) mønstre. Rekursive mønstre er den type mønstre som ble diskutert i Gren 1. Det handler om å fortsette et mønster eller en følge. Vi finner mønsteret og gjør det samme videre. Blanton og Kaput (2011) mener at det er mye fokus på denne typen mønstre i skolen. Dette mener de er uheldig. De har tro på at det å bruke mer tid på de to andre typene mønstre vil ha en større effekt på elevenes forståelse for funksjoner og algebra. De er også opptatt av å bruke representasjoner for å forstå bedre, men også fordi det i seg selv er et mål at de skal bli gode til å bruke tabeller og andre representasjoner. De mener at dersom man bruker manger representasjoner, og kanskje spesielt tabeller med de små elevene så vil de etter hvert kunne bruke tabellene på noe de kaller en transparent måte. Det vil si at det som før var kun et verktøy for å notere ned data etter hvert kan tjene som noe man kan se ”gjennom” for å oppdage mønstre i tallmaterialet.



(Blanton & Kaput, 2011, s. 10)

Over er et eksempel på en førsteklassings representasjon av ”the hand shake problem” (hvor mange håndtrykk blir utvekslet når et visst antall mennesker skal hilse på hverandre hvis alle skal hilse på hverandre én gang). Her kan vi se at tabellen brukes for å ”se gjennom” tallene og avdekke mønsteret.

Det kinesiske pensumet gir eleven mange muligheter for å utvikle en forståelse for funksjoner på et konkret, intuitivt nivå. Det introduseres når man jobber med å sammenlikne og utføre operasjoner på hele tall i første klasse ved bruk av “*one-to-one mapping*” (Blanton & Kaput, 2011). I aktiviteten “funksjonsmaskin” nedenfor er det dette vi gjør.

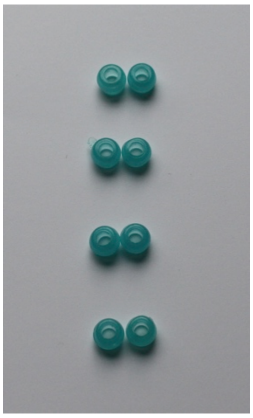
5.2.2.1 Samvarierende mønster: Hunder og øyne

Eksempel: Samvarierende mønstre vil si at dersom en av variablene endres så vil den andre også endres. Et eksempel Blanton og Kaput bruker er en oppgave med hunder og øyne. Dersom vi har to hunder så kan vi finne ut hvor mange øyne de har til sammen. Dersom antall hunder øker med en så øker antall øyne med to.

Representasjon: Elevene får høre at det er to hunder som har to øyne hver. Dette tegner de ned. Når vi så øker antall hunder så må de tegne flere hunder. De kan så telle øynene. Dette er fremdeles et rekursivt mønster: vi tegner neste ledd i følgen - en hund. For at de skal tenke på dette som samvarians så må vi gjøre noe annet enn bare å tegne hunder. Her kan det passe å lage representasjoner kun av antallet øyne ved å tegne prikker, bruke perler til å representere øynene eller ved å bruke tabell. Så kan vi lettere fokusere på hva som skjer når vi øker med en hund.

Hunder	Øyne
1	2
2	4
3	6
4	8

T-tabell over antall hunder og øyne



Antall øyne når det er 4 hunder

Diskusjon: Det blir nå veldig viktig å ha en diskusjon ut fra det de tegnet. Elevene vil lett tenke på dette som et rekursivt mønster (en hund til) heller enn samvarians. I diskusjonen må vi flytte fokus fra hundene til antallet øyne og hva som skjer etter hvert som antallet hunder endrer seg. Kan vi lese noe ut fra tabellen?

Hovedområde B: Etter hvert som elevene blir vant til å notere ned data i tabeller og så siden analysere og diskutere disse tabellene for å finne mønstre i tallmaterialet så blir tabellene nyttige verktøy for en strukturell tenkning. Når fokus flyttes fra data til mønster så utvikles den algebraiske tankegangen. Elevene bruker tabellen på en transparent måte (Blanton & Kaput, 2011).

K-06: "samle, sortere, notere og illustrere data med teljestrekar, tabellar og søylediagram og samtale om prosessen og kva illustrasjonane fortel om datamaterialet", "kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster".

5.2.2.2 Korresponderende mønstre

Korresponderende mønstre betyr at vi finner en variabel ved å bruke et uttrykk der en annen variabel er med. Det var det vi gjorde i (5.1.12.3) da vi fant et uttrykk for det n-te leddet. 5.1.12.3 handlet om å finne et uttrykk for et rekursivt mønster. Dersom vi bare hadde lagt en gul og to blå videre og videre for å finne det neste leddet så hadde vi kun forholdt oss til å fortsette et mønster. Men i det vi beskriver mønsteret og finner et uttrykk for det n-te leddet så handler det egentlig om å finne den ene variabelen (antall blå brikker) ved hjelp av et uttrykk der den andre inngår (antall gule brikker). Vi kan også gjøre det en del enklere ved å utvide oppgaven ovenfor.

Eksempel: Vi kan utvide oppgaven med hunder og øyne. Vi kan finne hvor mange øyne fem hunder har fordi vi vet at siden hver hund har to øyne så må det være dobbelt så mange øyne som hunder. Her trenger vi ikke å gå veien om en tabell og så finne ut hvordan tallene samvarierer. Vi vet at alle hunder har to øyne og kan bruke dette direkte.

Representasjon: Vi kan bruke en tegning til å demonstrere at vi tegner to øyne for hver hund.

Diskusjon: Vi kan diskutere om vi alltid kan finne antall øyne ved å doble antallet hunder. Hva hvis noen av hundene har skadet øyet og bare har ett? Kan vi lage en tegning eller et uttrykk for det? Hvis vi for hver hund teller antall bein i stedet hva blir så regelen?

Hovedområde B: Denne typen mønster kan gi behov for gode måter å notere ned det vi vet. Den kan gi elevene et behov for å bruke symboler. Da har vi sjansen til å utvikle elevenes symbolisering i en meningsfull kontekst for elevene. De kan oppleve at algebraen er nyttig og effektiv.

K-06: "*doble og halvere*".

5.2.2.3 Funksjonsmaskin

Rivera (2006, s. 306) anbefaler en aktivitet han kaller gjett regelen, der man gis en input- og en output-verdi. Så skal man finne regelen. Dette kan man enkelt gjøre ved å skrive opp tallpar på tavlen. Owen (2005) sier at et konkret objekt kan hjelpe elevene til å tolke oppgaven og han tegner opp det han kaller en funksjonsmaskin (Owen, 2005, s. 136). I aktiviteten under går vi gjennom hvordan vi kan bruke en slik funksjonsmaskin.

Eksempel: Vi lager en smal sprekk i bunnen på en eske. En sprekk som er akkurat stor nok til at vi kan putte noen perler/brikker gjennom. Esken ligger på siden med bunnen mot klassen. Elevene får så komme opp og stikke et antall perler gjennom sprekken. Inne i eller bak kassen sitter læreren og gir tilbake ut gjennom sprekken et visst antall perler. Elevene teller opp perlene. De må nå prøve å finne ut hvilken regel læreren fulgte for å telle opp dette antallet perler. For eksempel har noen puttet inn to perler og fått ut fire. En av elevene skriver tallparene på tavlen. Elevene skal så gjette på hva læreren gjorde inne i esken. De gjør dette ved å fremsette en hypotese og teste denne ved å putte et nytt antall perler inn gjennom sprekken. Etter hvert kan også elevene sitte inne i maskinen og bestemme regelen.

Her har elevene laget en funksjonsmaskin ved å klippe hull i en plakat og henge den på en pult. I dette tilfellet er det en av de andre elevene som sitter inne i maskinen.

Representasjon: Elevene kan notere tallparene i en tabell på tavla, eller den enkelte kan notere ned på sitt eget ark. Dersom en elev sitter inne i kassa så er det lurt at denne også lager en representasjon av den regelen han/hun bruker. Nedskriviningen sikrer da at eleven ikke bytter regel underveis.

Diskusjon: Elevene kan diskutere med utgangspunkt i det de har notert hvilket antall de skal forsøke som det neste. Her er det viktig å diskutere hvordan de tenkte for å finne ut hva regelen var. Gjettet de bare, eller hadde de noen tanker om hvilke typer regler som var sannsynlige? Dersom de har brukt subtraksjon for å finne ut hva som ble lagt til så kan vi vise til at subtraksjon og addisjon er inverse operasjoner.

Vi kan videre bruke regelen og prøve å finne ut hva som kan ha blitt lagt inn i maskinen dersom svaret er en viss mengde. Hvis vi for eksempel vet at maskinen legger til 2 og maskinen gir 4 i svar, så kan de prøve å finne ut hva som da ble lagt inn i maskinen for at det skulle bli 4. Elevene kan forsøke å skrive ned den regelen de kom frem til, og så sammenlikne den med den regelen eleven eller læreren inne i kassa hadde skrevet ned. Her blir det nyttig for elevene å finne en måte å notere ned det som skjer. Det er derfor en stor mulighet for at den notasjonen læreren bruker på sine regler kan bli adoptert hos elevene.

Hovedområde B: Det som skjer inne i esken har ingen begrunnelse i en regnefortelling eller historie, men kun i operasjonene. Det fremstår for elevene som en tallek og ikke som en representasjon av et virkelig problem. Samtidig er det helt konkret ved at vi bruker perler. Vi bruker det vi vet om addisjon og subtraksjon og kanskje etter hvert om dobling og halvering til å forutse hva som kommer ut av maskinen. Etter hvert kan vi bruke tallkort i stedet. Denne aktiviteten gir en god mulighet for å diskutere hvordan vi kan symbolisere en funksjonell sammenheng. I første klasse så vil denne aktiviteten likne mye på x-boksen i og med at vi ofte finner et tall med en operator, mens vi i x-boksen finner et tall. Jeg fokuserer på at det skjer noe i funksjonsmaskinen, men i x-boksen ligger det noe klart som vi bare skal prøve å finne ut hva er. Denne aktiviteten kan med fordel gjentas hele barneskolen (og ungdomsskolen) med stadig mer kompliserte regler. Den er naturlig å ta frem når elevene har lært dobling, halvering og etter hvert multiplikasjon og divisjon.

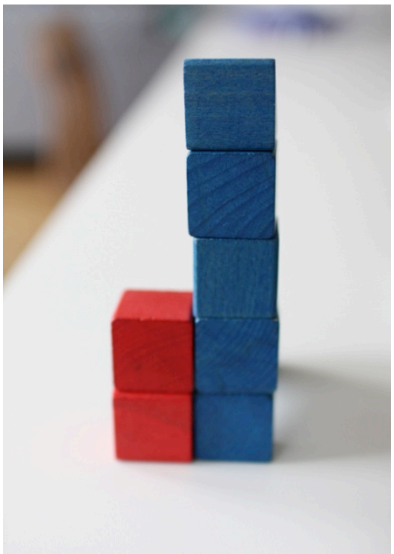
K-06: "kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster". Samtidig arbeider de med addisjon, subtraksjon, dobling og halvering.

5.2.2.4 Addisjon som en funksjon

Carraher et al. (2000) kaller det en godt bevart hemmelighet at addisjon er en funksjon, eller i hvertfall kan sees på som en funksjon. Vanligvis introduseres elevene for addisjon og subtraksjon som binære operasjoner på to tall. 4+6=10 eller 5-2=3. For å se på addisjon som en funksjon må vi behandle det som en operasjon på en definert mengde med tall. Dette betyr for meg at man kan enten lære elevene metoder for å regne ut et rett svar, eller man kan se etter mønstre. Vi kan jobbe med mange urelaterte oppgaver der addisjon handler om å legge sammen og finne et svar. 1+3=4 handler om ulike måter å komme frem til svaret 4 med utgangspunkt i 1 og 3. Vi kan telle videre eller vi kan telle opp perler og legge de to "haugene" med en og tre perler sammen og telle opp totalen. Dersom vi i stedet som lærer tenker at vi skal jobbe med funksjonen y=x+3 så vil vi forholde oss på en annen måte. For eksempel kan vi sette opp mange uttrykk med ulike verdier for x og y og så la elevene finne regelen. Dette gjør Carraher et al. (2000) i en tredjeklasse (norsk 4.). Vi kan gjøre tilsvarende i første klasse, selv før elevene har lært seg å skrive tallene. Da bruker vi klosser i stedet for tall.

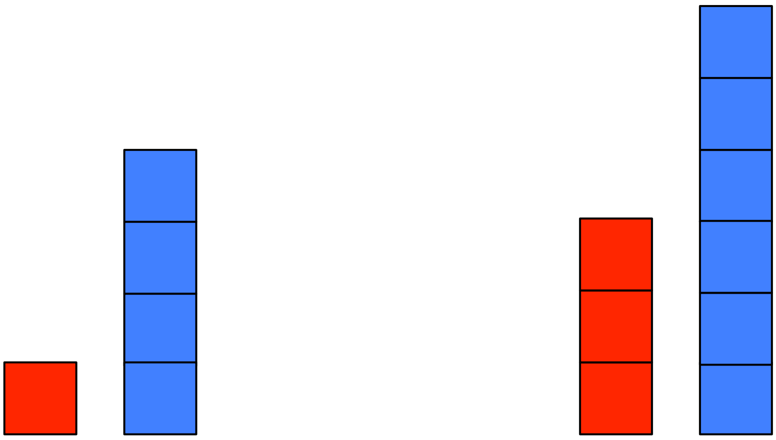
Eksempel: Vi kan bygge tårn av lego eller klosser, et blått og et rødt.

5.2.2.4.1.1



Vi kan bygge flere slike par med differansen 3.

5.2.2.4.1.2

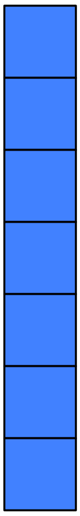


Dette kan ligne på Riveras gjett regelen, i og med at man har en input-verdi: rødt tårn, og en output-verdi: blått tårn.

Elevene skal så prøve å finne ut hva regelen er og så fullføre et tårnpar hvis bare den ene fargen er gitt.

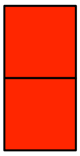
5.2.2.4.1.3

Hvor mange røde trenger vi?



5.2.2.4.1.4

Hvor mange blå trenger vi?



Representasjon: Elevene tegner ned det vi har gjort og den regelen de fant.
Siden kan de også lage nye oppgaver til hverandre og klassen.
Diskusjon: Vi kan snakke om hvordan de klarte å finne regelen. Vi kan diskutere hvordan vi kan tegne eller notere ned en slik regel. Vi kan også spørre om det finnes begrensninger for hvor høye tårnene kan bli.
Hovedområde B: Vi jobber med å legge til tre, samtidig er fokuset på hva som skjer når vi legger til tre, ikke på hva svarene blir. Når vi arbeider med å finne en måte å notere ned den regelen vi finner så er dette en start på å symbolisere mønstre. I en slik fremstilling av addisjon så er det også lett å vise at addisjon og subtraksjon er inverse operasjoner. Vi jobber med å finne ut hva det blir når vi legger til tre. Dette gjør vi ved å finne differansene mellom to mengder.

K-06: Ulike regnestrategier er nevnt i læreplanen. Bruk av inverse operasjoner er en viktig slik regnestrategi.

5.2.2.5 Endring

Taylor-Cox (2003) nevner to typer endring, kvalitativ og kvantitativ endring. Hun mener at elevene bør legge merke til og tenke over begge disse. I kvalitativ endring legger hun endringer vi beskriver med begreper som høyere, større, mere og så videre. I kvantitative endringer legger hun endringer vi kan måle helt eksakt. Som eksempel trekker hun fram at vi kan snakke om at en blomst er høyere enn den var forrige uke. Dette kaller hun kvalitativ endring. Dersom vi i stedet snakker om at blomsten vokser 1 centimeter i uken så er dette en kvantitativ endring. Her er det mulig å konstruere situasjoner der målet er å snakke om endring, men dersom lærere og elever er opptatt av å avsløre matematikken og mønstrene i verden rundt seg så vil det være mange situasjoner i et vanlig klasserom der det vil være naturlig å snakke om endring. Det gjelder altså å se etter muligheter i det daglige. Dersom man har en pytt utenfor klasserommet kan man måle dybden og se hvordan den endrer seg over tid og med ulikt vær. Elevene kan se på værmeldingen og komme med hypoteser om hvordan vannstanden i pytten vil endre seg til neste dag. De kan fremsette hypoteser for om det vil bli mer eller mindre vann i pytten (kvalitativ endring) og de kan si hva de forventer om hvor mange centimeter vannstanden synker eller stiger (kvantitativ endring). Her kan vi også godt bruke elevenes egne måleenheter. Bare fantasien og evnen til å legge merke til verden rundt seg med et matematisk blikk setter grenser for hvor man kan finne læringsmuligheter. Dersom dette skal begrenses til et par mattetimer i uken eller til aktiviteter planlagt av læreren så vil det naturlig nok bli færre eksempler enn dersom man hele tiden er på utkikk etter slike eksempler. Som lærer i første klasse har man som regel klassen i mange, om ikke alle fag.
Eksempel: Taylor-Cox (2003, s. 20) gir et eksempel der man triller en ball ned en planke. Man kan så heve planken for å gjøre banen ballen skal rulle brattere. Dette kan for eksempel gjøres ved å stable et antall klosser under planken. Så kan elevene prøve å forutsi hvor langt ballen kommer til å rulle før den stopper ved ulikt antall klosser under planken. Da får elevene også erfaringer med en sammenheng som ikke er lineær.
Representasjon: elevene kan lage tabeller over de ulike rullelengdene og høydene ballen startes fra (hvor mange klosser som ligger under planken). De kan også tegne

situasjonene. Vi kan se på tabellen og finne ut at lengden ballen triller alltid er lenger enn høyden den ble sluppet ut fra. Her kan vi finne en måte for å beskrive dette matematisk. Vi kan benevne de to lengdene (trillelengde og høyde) med ulike symbol eller bokstaver og så sette opp uttrykk for hvem som er størst, for eksempel $l > h$ der l er trillelengden og h er høyden ballen slippes ut på planken ved. Vi kan bruke klosser for å måle rullelengden. Vi kan også se at trillelengden er avhengig av høyden ballen startes fra, dess høyere planke dess lenger rullelengde.

Diskusjon: Det kan være nyttig å fokusere på at det var vanskelig å forutse hvor langt ballen skulle trille. Det er ingen lineær sammenheng her. Men det er allikevel mulig å si noe om den kvalitative endringen. Lengden ballen triller er helt avhengig av høyden ballen slippes ut ved. Vi kan også prøve med andre størrelser på klossene og se at sammenhengen allikevel er den samme: dess flere klosser, dess lenger trillelengde.

Hovedområde B: Ved å representere det de finner ved hjelp av symboler, tegninger og tabeller så brukes det matematiske symbolspråket i en sammenheng der det har mening for elevene.

K-06: For å sammenligne trillelengder og høyder så må elevene ”*måle og samanlikne storleikar som gjeld lengd og areal, ved hjelp av ikkje-standardiserte og standardiserte måleiningar, beskrive korleis og samtale om resultata*”.

5.2.2.6 Tannfelling

Eksempel: I første klasse har vi pleid å lage tannfellingstabell. Dette betyr at vi setter opp en tabell på veggen med hvert barns navn i første kolonne og antall mista tenner i de neste kolonnene. Så har elevene fått krysse et kryss hver gang de mister en tann. Jeg valgte å bruke regneark til dette.

Representasjon: Samtidig laget jeg et søylediagram i samme regneark. Dette søylediagrammet endrer seg etter hvert som elevene fører på flere tenner.

Diskusjon: Vi brukte så søylediagrammet som utgangspunkt for å analysere hvordan status var den aktuelle dagen, men også til å forutse hva som kom til å skje senere og diskutere ulike scenario og begrensninger. Kan søylene bare fortsette å vokse? Kan alle søylene nå maks i morgen? Hva ville det i så fall bety for tannsituasjonen hos elevene i klassen?

Hovedområde B: Når elevene førte på en ekstra tann så fikk de oppleve at dette hadde en påvirkning på systemet. Søylene endret seg. Ved at de la til en tann så var det mange av de tingene vi hadde diskutert som ikke lenger gjaldt. Det forandret forhold som hvem har mistet flest tenner, hvor mange har mistet 7 tenner, hvor stor andel har ikke mistet noen tenner?

K-06: Elevene skal: ”*kjenne til, bruke og vurdere digitale verktøy til berekningar*”

5.2.2.7 Eksperimentere med regneark

Eksempel: Jeg viste elevene hvordan de selv kunne lage enkle summeringsformler i regneark. De kunne så endre på tallene og se hva som skjedde. Rutene i regnearket fungerer da som variabler som eleven kan manipulere med.

Dette kan være en fin måte å vise samvariasjon og avhengighet mellom variabler. Elevene liker å eksperimentere med store tall og se hva som skjer. De kan ved hjelp av regnearket eksperimentere med tall de ikke hadde hatt mulighet for å teste ut uten et slikt digitalt verktøy. Slik lek er motiverende. De kjenner at de holder på med noe som er utenfor deres forståelse, men som de allikevel kan få litt kontroll på. Håpet er at ved å eksperimentere med slike enkle summeringsformler så får de en følelse for hva som skjer når tall forholder seg til hverandre i et slikt system. De danner seg forventninger om hva som skjer med det ene tallet dersom de endrer det andre tallet.

Representasjon: Etter en slik eksperimentering er det nyttig å samle elevene og la dem demonstrere for de andre elevene hva de fant ut. De må da formulere i ord og vise ved hjelp av regnearket hva de har funnet ut. Dette gjør også at de som ikke klarte å se noen sammenheng får støtte av de andre elevene til å fokusere på dette.

Diskusjon: Vi kan diskutere hva som skjedde når det ene tallet ble veldig stort eller veldig lite. Vi kan også diskutere hvorfor det bare var summen som endret seg og ikke de andre leddene i summeringsformelen. Vi kan diskutere om det er noen grenser for hvilke tall vi kan bruke.

Hovedområde B: Vi lager summeringsformelen i regnearket ved å bruke navnet på rutene. For eksempel kan vi skrive i rute C1 ”=A1+B1”. Rutenavnet blir da variabelnavnet. Dette variabelnavnet har en konkret betydning i at det beskriver en fysisk plass i regnearket, men tallene vi setter inn har ingen sammenheng med noe virkelig. Jeg mener derfor at dette hører inn under hovedområde B i Kaputs inndeling. Vi kan altså fokusere på det som skjer uten at dette henger sammen med et problem eller en oppgave. Vi jobber med konkrete tall, men vi bruker variabelnavn (rutenavn). Fordelen med bruk av regneark kan være at rutene på en god måte viser hvordan en variabel kan være: det er en tom boks som vi kan putte noe inn i. Det vi velger å sette inn får en påvirkning på systemet.

K-06: Elevene skal: ”*kjenne til, bruke og vurdere digitale verktøy til berekningar*”.

5.3 Gren 3

Gren 3 handler om å generalisere til algebraens språk ut fra modellering.
K-06 sier følgende om modellering: ”*Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er*”.

5.3.1 Modellering type 1

Denne typen modellering består av at man har et aritmetisk problem hvor variabelen behandles som en ukjent, ikke en variabel som representerer en hel klasse sitasjoner. Man vil altså finne et tall som løsning. Man gjør så bruk av den algebraiske syntaksen for å løse problemet.

5.3.1.1 Fyrstikklikninger

Eksempel: Denne aktiviteten ble lagt frem i kursrekken til Mona Røsseland. Her har vi en eske med et ukjent antall fyrstikker oppi. Vi har også et ark som er delt på midten med en strek. A) Vi legger så noen fyrstikker på den ene siden av streken og fyrstikkesken på den andre siden av streken. Elevene skal finne ut hvor mange fyrstikker som er oppi esken dersom de vet at det skal være like mange fyrstikker på hver side. De kommer nå frem til at det er like mange fyrstikker oppi esken som det ligger på den andre siden av streken. B) Vi tar så å bytter ut antallet fyrstikker i esken. Vi legger noen fyrstikker ved siden av esken. På den andre siden av streken legger vi et antall fyrstikker som tilsvarer det antallet som er i esken og ved siden av esken tilsammen. Elevene skal nå forsøke å finne ut hvor mange fyrstikker som er i esken.
Representasjon: Det kan være greit å skrive opp på tavlen det som vi ser på arket. Vi kan tegne eller skrive tall og symboler. Vi kan krysse ut dersom elevene sier at vi skal fjerne like mange på hver side. I begynnelsen er denne aktiviteten styrt av læreren og læreren noterer. Etter hvert kan en elev få notere på tavlen. Når man har gjort aktiviteten noen ganger kan elevene to og to eller alene notere ned tilsvarende løsninger. De kan også lage oppgaver til hverandre.
Diskusjon: Vi kan lede elevene mot å finne ut at en generell regel kan være å legge til eller å trekke fra et antall på begge sider. Dette er en god aktivitetet for forståelse av likhetstegnets betydning. Hva vi har på hver side endrer seg, men vi er ikke opptatt av hvor mange fyrstikker det er på hver side, bare at det er likt på begge sider. Vi kan

også diskutere ut fra prinsippet om ”*analyzing expressions*” hva som kan være et sannsynlig og et usannsynlig svar. Noen vil allerede i denne diskusjonen kunne komme frem til rett svar ved eliminasjonsmetoden eller gjett og bytt.
Hovedområde B: Forståelsen av likhetstegnet er viktig for å mestre den formelle algebraen. Men her inngår også andre viktige ideer som ukjent og inverse operasjoner. Innholdet i fyrstikkesken er den ukjente, og dersom vi skriver opp uttrykkene ser vi at dersom vi har lagt til noe ved siden av fyrstikkesken så må dette trekkes fra på begge sider. Denne aktiviteten kan tas frem igjen når vi kommer til multiplikasjon og divisjon også.
Som tidligere nevnt så er elevene i første klasse ikke klare for manipulasjon av symboler som så kan gi en løsning. I denne aktiviteten manipulerer vi med uttrykk, men i en konkret form. Samtidig er dette ganske løsrevet fra noen virkelig anvendelse og etter hvert som vi diskuterer og noterer så fjerner vi oss noe fra det konkrete. Dermed tenker jeg at denne aktiviteten hører hjemme under hovedområde B.
Aktiviteten kan også utvides oppover i klassen slik at vi innfører flere ukjente. Vi kan ha en fyrstikkeske med x på og en med y på. Vi kan også ha flere fyrstikkesker. Vi kan lage likningssett ved å ha to ark.
K-06: I denne aktiviteten får elevene telle fyrstikker. De får legge sammen og trekke fra og vurdere sine egne løsninger.

5.3.2 Modellering type 2

Denne modelleringstypen handler om å generalisere og uttrykke mønstre og regularitet i situasjoner eller fenomen som oppstår utenfor matematikken (fysikk, samfunn) eller innenfor matematikken (for eksempel geometriske mønstre). Her er det selve situasjonen som blir modellert, og uttrykket for generaliseringen tar ofte form av et uttrykk med en eller flere variabler som da kanskje kan representere en funksjon eller en klasse funksjoner.
I kapittel (5.1.12.3) så kommer elevene frem til uttrykket 2n+2 for følgen. Her ser de et mønster og ved å legge mønsteret videre og se etter den generelle strukturen kommer de i samarbeid med læreren frem til et uttrykk. Vi kan så teste dette uttrykket ved å prøve andre tall som vi så legger med brikker for å undersøke om vår regel er gyldig.

5.3.2.1 Regnefortellinger

Eksempel: Regnefortellinger er mye brukt i første klasse. Her tegner eller skriver læreren og etter hvert elevene ofte med utgangspunkt i noen gitte tall en historie der tallene inngår. Denne aktiviteten kan lett gjøres slik at den inkluderer en kvanititativ tenkning som er mer kompleks og som gir elevene behov for å notere ned det de vet og det de skal finne ut. Ofte er slike regnefortellinger veldig enkle og fører til ett addisjons- eller subtraksjonsstykke med to ledd. Men det er ikke noe i veien for å utvide disse til å inneholde funksjoner, mønstre og kombinatorikk som krever at elevene må notere eller tegne for å få oversikt over det som skjer. For eksempel kan vi ha følgende historie: Anne har et epletre utenfor huset sitt. Nå er eplene modne. Annes mor har plukket eplene og har dem i en eske i kjelleren. Hver dag går Lise til Anne sitt hus for å gå i følge til skolen. Anne får to epler av mammaen sin før hun skal gå til skolen. Hver morgen gir hun et eple til Lise og beholder det andre eplet selv. Anne spiser sitt eple i lunsjen på skolen. Men Lise har funnet ut at hun vil spare på eplene og lage en eplekake til helga. Hvor mange epler har Lise på fredag hvis hun har fått epler hver dag hele skoleuka?

Representasjon: Elevene må her omsette en historie fra virkeligheten (eller fra eventyrene) til et matematisk språk. De må avgjøre hva som er viktig informasjon og de må notere dette ned på en måte som gjør at de kan kommunisere sine ideer med andre. De må finne en modell for det som skjer. Her kan de tegne et eple for hver dag som de så kan telle når de har kommet til fredag. De kan også bruke klosser til å representere eplene.

Diskusjon: Med utgangspunkt i elevenes representasjoner kan man så diskutere holdbarheten i representasjonen og i konklusjonene. Videre kan de finne det generelle i situasjonen. Dette gjøres ofte best ved å innføre parametre i oppgaven. Her kan vi spørre hvor mange epler hun ville hatt dersom hun hadde ventet en uke med å lage eplekake. Da må elevene forholde seg til hva som er begrensningene (hvor mange skoledager er det i en uke?). Vi kan også undersøke hvor mange epler hun ville hatt dersom Anne hadde blitt med på ideen og spart sine epler også. Vi kan også undersøke hvor mange epler som trengs til en eplekake og se hvor mange kaker det er nok til. Vi kan utvide med flere uker. Vi kan snakke om hvordan vi vet at det er fem epler på fredag: summen øker med et eple for hver dag. Da kan vi kanskje finne ut hvor mange epler det ville blitt etter 10 skoledager også? Hva om begge jentene sparte eplene sine, hvordan kunne vi da finne ut hvor mange dager det vil ta før de har nok til en eplekake? Hva skjer med antall epler Annes mor har igjen? Hvem av de andre elevene har tegnet oppgaven på en måte som du synes det er lett å forstå? Dette eksempelet viser at man kan holde på veldig lenge med en enkelt oppgave.

Hovedområde B: Når vi deduserer oss frem til uttrykk og sammenhenger for å beskrive et mønster så driver vi med algebraisk aktivitet. Hvis vi bare prøver oss frem ved å gjette og sjekke så er ikke dette algebra. Vi leter etter et mønster som vi så beskriver. Vi bruker så beskrivelsen til å finne antall epler når antall dager endrer seg. Disse beskrivelsene kan være mer eller mindre formelle i formen, men er uansett et steg på veien i en concreteness fading som ender ut i algebraisk symbolspråk.

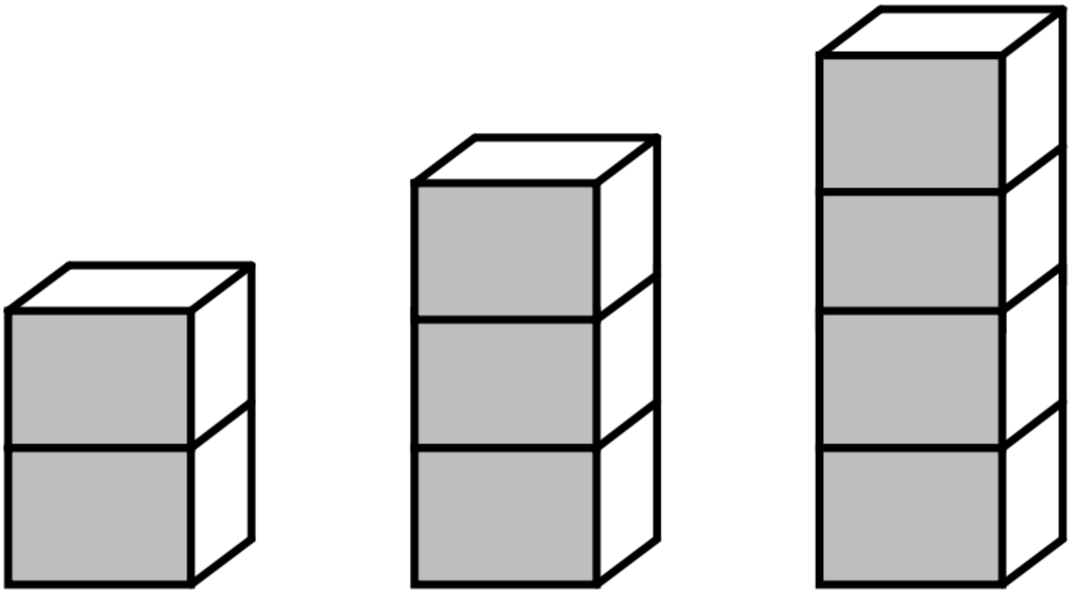
K-06: "Å kunne lese i matematikk inneber å forstå og bruke symbolspråk og uttrykksformer for å skape meining i tekstar frå dagligliv og yrkesliv så vel som matematikkfaglege tekstar".

5.3.3 Modellering type 3

Modelleringstype 3 handler om å generalisere fra enkle modelleringssituasjoner som type 1 eller fra rene aritmetiske tekstoppgaver som vi kan løse numerisk. Vi utvider nå de opprinnelige problemene og løser opp begrensningene for å finne hva som er problemets mer generelle form. Vi algebrafiserer problemet ved å innføre parametre. Dette er nettopp det vi gjorde i gren 2. Der gjorde vi et aritmetisk problem om til en funksjon ved å innføre parametre. Jeg synes det kan være vanskelig å skille mellom det å finne frem til en funksjon i gren 2 og det å modellere med en funksjon som sluttprodukt i gren 3. Modellering kjennetegnes ved at man gjør forsøk og genererer en modell på bakgrunn av denne utforskningen. I første klasse bruker vi mye konkret materiell. Derfor vil mye av den aktiviteten vi gjør minne om modellering. Vi tester ut en regel vi tror kan stemme og ser om den passer med virkeligheten ved å prøve den ut på mange eksempler. Men der eksemplene i gren 2 mye handlet om å få erfaringer med funksjoner handler modellering i større grad om hvordan disse funksjonene fremkommer. I definisjonen av modellering av type 3 i forrige kapittel nevnte jeg en oppgave fra Blanton og Kaput (2011) som handlet om overflaten på et tårn laget av et visst antall klosser. Vi kan tenke oss et enklere eksempel for første klasse der man teller antall kvadrater overflaten består av i stedet for å regne ut overflaten.

5.3.3.1 Tårn

Eksempel:



Elevene kan bygge tårn og gi dem navn etter hvor mange klosser de inneholder. Tårn en har en kloss, tårn to har to klosser. De kan så telle hvor mange kloss-sideflater som utgjør overflaten til tårnet. Vi kan starte med å bruke kubiske klosser. Slik blir alle sideflatene like av størrelse.

Representasjon: Elevene kan tegne tårnene eller skrive ned antall sideflater og antall klosser i en tabell. Hver gang de bygger et nytt tårn så noterer de ned det de får. Etter hvert kan vi se om vi finner noe mønster slik at vi kan finne ut hvor mange flater det neste tårnet til ha. Vi jobber da med rekursivt mønster. Vi kan også se i tabellen vår og se om vi finner noen sammenheng mellom nummeret i rekken og antall sideflater. Det er ikke meningen at elevene skal klare å finne dette på egenhånd. Målet er at vi kan bruke det algebraiske språket til å beskrive det vi ser og at de er med på prosessen. Som i (5.1.12.3) kan vi bruke verbal rytme til å avsløre regelen. Vi finner ut hvordan mønsteret er gjennom å si det vi ser på forskjellige måter til vi finner noe som gjentar seg. Hvis vi for eksempel sier ”fire rundt, ett lokk og en bunn” på nummer en og så sier ”fire rundt og fire rundt, ett lokk og en bunn” på nummer to så kan det hende elevene oppdager mønsteret. Det er fire rundt for hver kloss og et lokk og en bunn. Dersom vi i stedet legger sammen tallene blir det mye vanskeligere å se mønsteret. Her er vi igjen tilbake til det vi i (5.1.8.4) kalte ”*analyzing expressions*”-vi forsøker å

si noe om et problem uten å regne det ut.
Det er generelt enklere å komme frem til at vi legger til 4 for hver kloss (rekursivt) enn at det er fire sider pr kloss pluss topp og bunn og at det derfor er en sammenheng mellom antall klosser og antall sider som vi kan finne uten å begynne fra en kloss og så bygge oss oppover. Men i følge Blanton og Kaput (2011) er det nyttig at vi også bruker tid på slike korresponderende mønster. De mener at slike mønster er bedre egnet til å utvikle elevenes forståelse enn de rekursive mønstrene.
Diskusjon: Vi kan diskutere hvordan vi kan skrive ned det mønsteret vi har funnet. Vi kan spørre om det er grenser for hvor mange klosser vi kan ha. Vi kan prøve med klosser som har andre former og se hva som da skjer. Kan vi bruke den samme regelen eller må den endres?
Hovedområde B: Blanton og Kaput (2011) fremholder arbeid med mønster som en god måte å utvikle algebraisk forståelse hos elever. Spesielt trekker de frem korresponderende og samvarierende mønstre. Fordi disse mønstrene er mer komplekse så gir de også større rom for å bruke symboler.
K-06: " *kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster", "lage og utforske geometriske mønster, både med og utan digitale verktøy, og beskrive dei munnleg"," måle og samanlikne storleikar som gjeld lengd og areal, ved hjelp av ikkje-standardiserte og standardiserte måleiningar, beskrive korleis og samtale om resultata*". I denne aktiviteten handler det om mønstre både geometrisk og tallmessig. Dessuten arbeider vi med overflate. Her kun gjennom å telle antall overflater (som vi godt kan regne som en naturlig måleenhet for overflate), men vi kan lett utvide denne oppgaven til å handle mye om begrepet overflate ved å diskutere om alle klossene må være like store og hva som skjer med overflaten dersom vi velger andre klosser.

5.3.4 Problemløsning

Problemløsning og modellering kan ha mange likheter. Når vi jobber med problemløsning vil vi prøve å finne en løsning på et konkret problem. Disse er gjerne beskrevet med dagligspråk og kalles tekststykker. For at et tekststykke skal være en problemløsningsoppgave må løsningen involvere at elevene må bruke det de allerede kan på nye måter. De må kanskje bruke mange forskjellige regnearter, de må kanskje gjøre undersøkelser for å få nok informasjon til å kunne regne ut svaret. De må dessuten oversette fra sitt naturlige språk til matematisk språk: horisontal matematisering. Modellering inneholder enda et aspekt i det man forsøker å finne en modell for hvordan virkeligheten eller det matematiske problemet skal beskrives. Vi har altså en mer generell tilnærming enn vi har i en problemløsningsoppgave. Vi vil undersøke om vi kan finne en regel for hvordan slike problemer kan løses mer generelt og vil vil forsøke å teste ulike scenarior. Vi må være bevisst på begrensninger og hvilke områder reglene våre gjelder for. Vi kan kanskje si litt tabloid at problemløsning handler om å løse et spesifikt problem mens modellering handler om å finne den generelle løsningen. Vi kan dermed godt ta utgangspunkt i problemløsningsoppgaver, men forsøke å finne ut hvordan dette problemet kan gjøres generelt, gjerne ved hjelp av parametre.

6 Diskusjon

Jeg har i det foregående vist noen eksempler på hvilke aktiviteter som er mulig å bedrive i algebra i første klasse. Jeg har også forsøkt å vise at disse aktivitetene i følge forskning vil føre til at elevene utvikler en algebraisk tenkning, eller ”habits of mind”. I tillegg har jeg forsøkt å vise at vi ved å jobbe med aritmetikken på en algebrafisert måte også oppfyller målene i læreplanen.

Jeg har delt oppgaven inn etter Kaputs skjema. Det har vært utfordrende å gjøre disse skillene mellom grener. Hver gang vi lager en modell av virkeligheten vil vi skrelle bort noe som ikke passer i modellen. Vi vil overforenkle og overgeneralisere. Alle modeller har sine styrker og svakheter. Styrken med Kaputs modell har for meg vært at den har hjulpet meg med å vise at vi kan finne oppgaver og aktiviteter som dekker flere grener av algebraen. Den har hjulpet meg å strukturere oppgaven og tvunget meg til å lete frem eksempler som jeg kanskje ikke ville funnet uten. Som lærer i første klasse har jeg for eksempel forholdt meg lite til begrepet modellering, som jeg har forbundet med GeoGebra og andre modelleringsmetoder på høyere årstrinn. Gjennom denne oppdeling ble jeg tvunget til å bruke mer tid på dette begrepet enn det som var naturlig for meg. Det samme kan man si om funksjoner, som ikke vanligvis er en naturlig del av undervisningen i første klasse.

Antall eksempler innenfor hver av de tre grenene viser også at det har vært mer naturlig for meg å forholde meg til gren 1 enn til gren 2 og gren 3. Dette samsvarer med funnene i studien til Blanton og Kaput (2005). Deres undersøkelser viste at det lå mer naturlig for grunnskolelærere å generalisere fra aritmetikken der de følte seg mer trygge (gren 1). De satt igjen med et inntrykk av at en tilnærming som inkluderte funksjoner krevde mer forarbeid. De konkluderte med at en tilnærming med generalisering av aritmetikk kan være den beste innfallsvinkelen dersom man vil at lærerne selv skal oppdage muligheter for algebrafisering av matematikken. Samtidig tenker jeg etter hvert som læreren blir mer vant til denne måten å tenke på (”habits of mind”) må det være et mål å også arbeide med gren 2 og 3.

Det jeg ser som svakheten med Kaputs modell er at den gjør nettopp det som vi vil motvirke i tidlig algebra: den deler ting opp i ulike båser eller emner. Den tidlige algebraen prøver nettopp å se sammenhenger og mønstre i stedet for avgrensede emner. Mange ganger i mitt arbeid med denne oppgaven har jeg vært i tvil om hvilken bås jeg skulle legge en spesifikk aktivitet i. Det har blitt klarere for meg underveis i arbeidet at dette ikke kan være en modell for emner i undervisningen, men en modell for å sjekke at jeg har fått med meg noe innenfor alle grenene. I arbeidet med de aktivitetene jeg har lagt frem over vil jeg prøve å integrere disse slik at det ikke blir kunstige skillelinjer mellom modellering, funksjoner og aritmetikk. Målet må være å holde på med alle disse tingene på en sammenhengende og dynamisk måte. Det er mulig å være innom alle disse grenene i samme time og i samme oppgave. Ja det er ikke bare mulig, men ønskelig.

I første klasse kan man nesten si at alt vi gjør er modellering. Vi tar utgangspunkt i noe konkret og virkelig for elevene. Vi omformer så dette til det matematiske språket, enten ved ord, tegninger eller symboler. Vi diskuterer så vår avbildning av verden og leter etter generelle mønstre og sammenhenger. Vi ser så om modellen vår gjelder for andre eksempel. På samme måte kan en slik modelleringsoppgave gjerne inneholde tenkning rundt funksjoner og funksjonelle sammenhenger. Blanton og Kaput (2011) oppfordrer sterkt til å la funksjoner være en viktig del av undervisningen. Når vi så sier i (5.2.2.4) at operasjoner er funksjoner så ser vi at ringen er sluttet tilbake til aritmetikken og tallene. Det viktige blir å arbeide med sammenhengene og mulighetene. Sammenhengene mellom de ulike grenene og de mulighetene de ulike grenene gir for algebraisk tenkning.

I begynnelsen av arbeidet med masteroppgaven hadde jeg tenkt å finne eksempler på oppgaver som klart hørte inn under hovedområde A og andre som klart hørte inn under hovedområde B. Jeg hadde en forventning om at jeg ville finne færre oppgaver som hørte inn under hovedområde B, men jeg tenkte allikevel at dette ville være en fruktbar oppdeling. I arbeidet med oppgaven har jeg sett at det nettopp er underveis i arbeidet med generaliseringer av aritmetikk, funksjoner og modeller (hovedområde A) at elevene utforsker, lærer og forstår algebraens syntaks og symbolsystem (hovedområde B). Det ble unaturlig å lete etter oppgaver som skilte de to hovedområdene. Visst kan det finnes oppgaver som heller mer til den ene eller andre siden, men de beste oppgavene anser jeg å være oppgaver der man både arbeider med symbolspråket og med den konkrete aritmetiske sammenhengen der behovet for dette språket vokser frem. Min fordom var kanskje også at målet var å forberede den formelle algebraen gjennom eksempler som unge elever hadde forutsetning for å forstå. Slik at målet for aktiviteten var at de etter hvert skulle kunne bedrive kontekstfri symbolmanipulasjon. Jeg ser at det som er mer nyttig er at elevene får utviklet mentale modeller, ferdigheter i å beskrive, visualisere og argumentere rundt sammenhenger i matematikken. Dette er ikke noe som de bør slutte med selv om matematikken beveger seg bort fra de konkrete tallene og over i det mer kraftfulle algebraiske språket, men er nettopp en forutsetning for å utvikle en algebraisk tankegang som man ikke legger fra seg i det man begynner på ungdomsskolen. Så heller enn at barneskoleelevene skal bli mer formelle så handler kanskje denne tilnærmingen om at målet er at ungdomsskoleelevene skal ha utviklet en algebraisk tankegang. De har da ”habits of mind” som gir dem verktøyene til å fortsette sine matematikkstudier slik at de forstår hva de holder på med og hvordan dette forholder seg til virkeligheten og til matematikken.

6.1 Eksempler

Mitt mål med oppgaven var å finne aktiviteter som skulle hjelpe elevene å utvikle algebraisk tenkning. Gjennom mitt arbeid med oppgaven har jeg blitt mer og mer klar over at det ikke er aktivitetene i seg selv, men vår tilnærming til dem som bestemmer om det er en aktivitet egnet til å utvikle en algebraisk tenkning. Aktivitetene eller eksemplene i seg selv kan gjøres om til instrumentell matematikk dersom vi ikke forholder oss til dem med algebraiske ”habits of mind”. De kan vris om til å bli aktiviteter utført etter lærerens instruksjoner på en mekanisk måte. Dersom elevene skal være aktive i forhold til eksemplene så må de få undre seg, de må få tid til å tenke og teste ut sine ideer. Dersom vi for raskt gir dem hjelp eller de får for mye hjelp av medelever så blir det bare aktiviteter for aktivitetenes skyld. Samtidig så kan det ikke blir så komplekst og vanskelig at de gir opp. Denne balansegangen mellom å være i den proksimale utviklingssonen og å tråkke utenfor på den ene eller andre siden er vanskelig når man jobber med en hel klasse. Vi vil ikke gjøre det for enkelt, men heller ikke miste noen underveis.

Hva så med alle faktaene en elev trenger å kunne? vil kanskje noen innvende. Skal ikke elevene øve på tabellkunnskap som addisjonstabeller og multiplikasjonstabeller? Det er veldig viktig at en del kunnskap er automatisert. På samme måte som elevene må kunne bokstaver og stavelser og etter hvert helord for å kunne lese flytende så må elevene også ha matematiske fakta som er automatiserte og som de kan hente frem uten å bruke mye tankeenergi på dem. Men; vi leser ikke for å lese, men for å forstå det som er skrevet. På samme måte kan vi øve fakta i matematikken samtidig som vi prøver å forstå matematiske sammenhenger. Dette minner meg om diskusjonen i lesing og LTG-metoden, eller læring på talens grunn.

Her var det viktig at de tekstene som man arbeidet med hadde en relevans for elevene. Nå har pendelen svingt og mye av leseopplæringen tar i bruk spesialpedagogiske metoder med drill av bokstaver, lyder og stavelser løsrevet fra kontekst. Samtidig har en metode som heter STL+ (skrive seg til lesing) begynt å få flere tilhengere. Her skriver elevene det de vil kommunisere, samtidig som de lærer lydene og automatiserer dem gjennom at skrivingen blir lest opp for dem av talesyntesen i skriveprogrammet på datamaskinen. Målet er da altså kommunikasjon. Elevene føler behov for å lære seg nye lyder etter hvert som de trengs i ord de vil skrive. Mange metoder krever en viss grad av drill. Også i STL+ må elevene lære seg noen bokstaver før de kan starte med skrivingen. De må også lese det de har skrevet for å repetere lydene.

På samme måte må man i matematikken ha en viss grad av tabellkunnskap og noen algoritmer som man husker. Men disse algoritmene og denne tabellkunnskapen bør ikke øves på uten at man vet hva som ligger under. Det har ingen mening å øve inn addisjonstabeller dersom man ikke har mengdeforståelse. Det hjelper ikke å kunne multiplisere store gangestykker dersom man ikke forstår i hvilke tilfeller man har behov for multiplikasjon eller vet hva svaret egentlig sier. Mange foreldre har sagt til meg: hvorfor skal de lære å legge sammen bortover når det er så mye lettere nedover? Ja det er lettere å få rett svar når man setter et addisjonsstykke under hverandre. Da kan man få rett svar uten å tenke så mye over hva man gjør. Man følger reglene. Dette er noe av kraften i matematikken: vi kan generalisere sammenhenger og slik minske den kognitive belastningen ved å måtte ha alt i hodet på en gang. Når vi bruker kvadratsetninger og andre formler så bruker vi mye mindre tid og krefter enn om vi skulle regnet det ut uten å bruke formlene og reglene. Men faren er at man lærer seg regler og formler løsrevet fra elevenes egen logikk og at matematikken slik blir et eget avsondret emne fra folks liv, ikke et nyttig verktøy som kunne vært i bruk daglig.

Så ja, de skal lære at det går fortere og oftere gir et rett svar dersom vi stiller opp addisjonsstykker under hverandre, men de skal vite hvorfor de gjør det, hvorfor det fungerer, hva som kan være mulige feil og hva addisjon er, hva posisjonssystemet er, og hvordan de noen ganger kan regne det ut raskere i hodet ved å se på uttrykket før de regner noe. De skal utvikle en fleksibilitet slik at de kan velge metoder som er effektive i det enkelte tilfellet, ikke tanketomt sette i gang med å regne og la all logikk og oversikt fare. Da må vi utvikle elevenes kvantitative tenkning og deres algebraiske tenkning samtidig som vi øver på prosedyrer og fakta. Å stille opp et addisjonsstykke blir da en logisk følge av at vi har kunnskap om posisjonssystemet og tiere og enere.

Ved å måtte representere det de tenker når de adderer så flyttes fokus til strukturene fremfor de rette svarene. Og ved å diskutere rundt det generelle mønsteret kan de bli bevisst på hva som kan gå galt, og på gyldigheten til de ulike metodene ut fra hvilke tallområder eller kontekster utregningen inngår i. Det blir da viktig med oppgaver og eksempler som har ulike kontekster, som blir stilt på ulike måter og der svaret må tolkes inn i en sammenheng med begrensninger. Det blir viktig å finne oppgaver som synliggjør motsetninger og som skaper kognitiv konflikt hos elevene. Dette betyr ikke at de riktige svarene ikke er viktige. Det er viktig å få det rette svaret. Matematikk er en eksakt vitenskap. Det rette svaret er målet. Men hvordan kan vi vite at svaret er det rette? Det kan vi bare vite ved at vi har kunnskap om prosessene og reglene som produserte svaret og en forventning om hva svaret bør være. Mange av våre diskusjoner handler derfor om hvordan vi kan nå det rette svaret, men det er ikke tallet i seg selv som er det viktige, men hvordan vi kom frem til dette tallet og hvorfor vi kan stole på at det er riktig.

Det er viktig at det er en logisk oppbygning i hvilke eksempler som gis og hvilke erfaringer elevene får. Denne oppbygningen må ha et lenger perspektiv enn første klasse. Elevenes "habits of mind" må bygges opp over tid og man må ha en plan for hvordan dette gjøres. Det hjelper altså ikke å strø noen algebraiske oppgaver over som sukker på grøten. Dette betyr at det ville være nyttig med lærebøker og årsplaner som støtter en slik systematisk utvikling av algebraisk tenkning parallelt med utvikling av regneferdigheter.

6.2 Representasjoner

Også representasjonene til elevene kan bli noe mekanisk dersom vi går inn og standardiserer eller hjelper for mye. Målet er at de skal tenke og gruble når de prøver å notere ned det de har gjort. Men det kan være vanskelig for mange elever å komme i gang med å tegne eller notere ned det de har tenkt. Vi vil gjerne at deres representasjoner skal være et uttrykk for deres tanker og ideer og vi vil derfor ikke standardisere for mye hvordan slike representasjoner skal se ut. Da kan det være en fordel om læreren eller en annen elev kan fungere som sekretær. Det kan være lettere å instruere andre til å tegne når man er usikker, enn å tegne selv. Elevene kan også få mange ideer av hverandre til hvordan de kan notere ned det de vet. Etter hvert vil vi i en klasse kunne utvikle noen redskaper for slik tegning som alle forstår. Dette blir en slags standardisering, men den springer ut fra elevenes egen logikk og er ikke innført av læreren.

Målet for læreren kan være å guide elevene i retning av matematiske måter å notere ned data på etter hvert, men med utgangspunkt i elevenes egne nedtegninger. Tabeller og lister er et fint sted å starte. Det kan gå fra å dele et ark i to til å bli tabeller med flere rader og kolonner. Tabellene gir struktur og hjelper elevene til å jobbe strukturert, men samtidig må de selv bestemme hva de vil notere i tabellen og hva som er overskriftene.

I mange tilfeller kan tellebrikker og annet konkret materiell fungere som fine representasjoner. For elevene er brikker et stort skritt i abstraheringen. Brikkene skal for eksempel representere hunder, men har verken bein eller hale. Ved å bruke ulike typer brikker til å representere hunder så vil elevene lettere kunne løsrive seg fra den konkrete representasjonen og tenke mer generelt om problemet de skal løse. Dette er elevenes vei fra det konkrete til algebraens språk.

Gjennom concreteness fading så nærmer vi oss gradvis det mer abstrakte matematiske språket. At elevene foretrekker å bruke fingre å telle på eller brikker å synliggjøre sammenhenger med er dermed ikke et problem, men del av en naturlig utvikling. Det vi må sikre er at de klarer å bevege seg videre i prosessen og ikke blir sittende fast i én type representasjon. Dette kan vi gjøre ved å ha et fokus på mange ulike representasjoner, også når det gjelder konkretiseringsmateriell. Når eleven klarer å veksle mellom flere ulike representasjoner så både tyder dette på en større forståelse og det gir i sin tur bedre forståelse (Lesh et al., 1987).

6.3 Diskusjon

Når vi så kommer til det punkt at vi skal diskutere er det greit at læreren har noen verktøy for å lede diskusjonen. Det er skrevet mye rundt metoder som utforskende læring og dialogbasert læring. Det kan være en god hjelp for læreren å ha en liste med gode spørsmål som er tenkt ut på forhånd. Dette bør være spørsmål som ikke oppfordrer til noe rett eller galt svar, men hjelper elevene videre i diskusjonen. Det er også viktig å trekke alle elevene med slik at vi får mange perspektiver vi kan diskutere ut ifra og at vi får alle elevene med. Det kan være vanskelig å engasjere alle elever. Noen er mindre glade i å snakke høyt og noen kan ha problemer med tro på egne ideer. Da kan det være nyttig å veksle mellom klassediskusjoner og pardiskusjoner der man kan lufte sine tanker i en mindre sammenheng og kanskje få hjelp til å uttrykke denne til de andre elevene. Men selv om en elev ikke skulle bidra så mye som de andre i den muntlige delen så vil det å følge diskusjonen kunne hjelpe dem til forståelse. Det kan være enklere å forstå jevnaldrendes forklaringer enn lærerens utlegninger. Dessuten kan det godt hende at den stille eleven er flink til å notere ned og representere. Motsatt kan et fokus på diskusjon løfte elever som er sterke på kommunikasjon, men ikke fullt så flinke til å skrive og tegne. Det er avgjørende at læreren kan skape et inkluderende miljø i klassen der alles ideer kan komme frem og berike diskusjonen.

Det er også avgjørende at læreren har satt seg nøye inn i den aktiviteten som skal gjennomføres og tenkt ut hva som kan være gode spørsmål å stille for å skape kognitive konflikter eller for å lede elevene videre mot en generalisering. Hvordan kan de ledes uten at det stilles ledende spørsmål med et rett eller galt svar? Hvilke spørsmål egner seg til å vekke diskusjon? Hvilke spørsmål vi kan stille er avhengig av hvilke eksempler vi jobber med, men som tidligere nevnt anbefaler Blanton og Kaput (2003) følgende spørsmål:

- Fortell meg hva du tenkte
- Løste du/dere dette på en annen måte?
- Hvordan vet du at dette er sant?
- Virker dette alltid? Er det alltid slik?

For mange elever kan dette være vanskelige spørsmål å svare på. Vi er interessert i å få dem til å dele tankene sine med andre, men da må disse tankene først bevisstgjøres hos eleven. Mange elever finner svar, men vet ikke helt hvordan de tenkte for å komme dit. De vet i hvert fall ikke hvordan de kan kommunisere om hva de tenkte. Dette er ferdigheter som elevene må bygge opp over tid. Da må de få mange muligheter for å trene på dette og få gode eksempler gjennom elever og lærere som modeller.

For at elevene skal komme til et punkt der de tør å dele sine tanker er det viktig at tanken i seg selv ikke evalueres eller devalueres, men at den tas inn i diskusjonen som et nyttig bidrag. Wiliam og Hodgen (2006) anbefaler at både riktige og gale svar må argumenteres for uten at læreren gir noen dom over hva som er rett eller galt. De anbefaler å utfordre både de rette og de gale svarene med spørsmål som ”hvordan vet du at det er slik?” og spørre de andre elevene om de er enige eller uenige. Med en slik åpen holdning blir både feilsvar og ufullstendige svar noe som informerer diskusjonen. Hvis vi ikke får frem de gale svarene vil vi heller ikke kunne avdekke hvilken forståelse elevene har om begrepene. Ordet "feil" må snus til noe positivt. Vi lærer noe mer fordi vi sa noe som ikke stemte. Mens vi argumenterte for det vi trodde stemte, så fant vi ut at vi tok feil og lærte hva som var rett. Bare gjennom at en hypotese møter motstridende argumenter kan vi sikre at den holder i alle situasjoner. Det er også viktig å kunne ombestemme seg når argumentene peker på en annen løsning.

6.4 Algebra

Har jeg så med disse eksemplene vist hvordan vi kan drive med algebraisk tenkning i første klasse? Dette kommer i stor grad an på hvilken definisjon av algebra som legges til grunn. Noen vil nok hevde at det ikke er algebra dersom elevene ikke noterer ned det de finner ut i konvensjonelle algebraiske symboler. Det kan også være ulike definisjoner på hva algebraisk tenkning er. I Kriegler (2008) fremkommer noen ulike definisjoner og forklaring på hva det vil si å tenke algebraisk. Jeg vil i det følgende drøfte om aktiviteter som de jeg har lagt frem i oppgaven er egnet til å fremme den tenkning som er definert i Krieglers tekst.

6.4.1

Battista and Brown (1998): For at elever skal kunne anvende algebra på en meningsfull måte så er det essensielt at instruksjonen fokuserer på forståelse, ikke symbolmanipulasjon. Gjennom sin matematiske karriere bør de få muligheten til å reflektere over og snakke om generelle prosedyrer utført på tall og mengder. Tenkning rundt numeriske prosedyrer starter i småskolen og fortsetter til elevene til slutt kan uttrykke og reflektere over prosedyrer ved hjelp av algebraiske symboler. Battista og Brown (1998) vil at elevene skal ha et forhold til algebraen der den fremstår som meningsfull for elevene. De synes det er viktig at undervisningen fokuserer på forståelse. Dette mener de kan oppnås gjennom å reflektere over generalitet og snakke om generalitet. Både gjennom å representere og diskutere generalitet så fremmes en slik refleksjon. Under hvert eksempel i kapittel 5 poengteres det at elevene må representere og diskutere generaliteten i eksemplene. Videre mener de at elevenes tenkning rundt generelle strukturer i numeriske prosedyrer skal starte i småskolen. Gjennom denne oppgaven har jeg vist eksempler på at dette er mulig og argumentert for at det er ønskelig. De poengterer at en slik algebraisk tenkning kan starte før elevene får tilgang til alle symbolene vi vanligvis bruker for å kommunisere og tenke rundt algebraiske sammenhenger. De sier ikke noe om at det er et poeng å starte med symbolene tidlig, men sier at det må legges til rette for refleksjon. Denne oppgaven fremholder viktigheten av at elevene tidlig får representere sine ideer gjennom naturlig språk, men også gjennom ulike representasjonsformer som for eksempel tegninger, konkreter og symboler. Jeg oppfatter det slik at Battista og Brown fokuserer på å tenke og snakke. Dette er selvfølgelig viktig, men jeg mener at vi kan hjelpe elevene til en mer utviklet algebraisk tenkning ved at de må representere tankene sine og også lære seg å argumentere for sine ideer.

6.4.2

Greenes and Findell (1998): De sentrale ideene i algebraisk tenkning involverer representasjoner, proporsjoner, balanse, variable, mønstre og funksjoner, induktive og deduktive resonnement.

Greenes og Findell trekker som denne oppgaven frem representasjoner som en viktig ide i algebraisk tenkning. Videre nevnes flere ideer som også gjennomgås i denne oppgaven; variabler (5.2.1), mønstre (5.1.12), funksjoner (5.2.2) og balanse (5.1.8.5) i betydningen ekvivalens. Arbeid med proporsjoner mener jeg er veldig viktig for algebraen og bør være et hovedfokus når elevene begynner med brøk. I første klasse er det særlig dobling og halvering som gis prioritet, men jeg vil påstå at ved å diskutere hvordan tall forholder seg til hverandre bygges det også opp et grunnlag for å forstå proporsjonalitet. De to siste store ideene Greenes og Findell nevner er deduktiv og induktiv resonnering. Vi jobber med å generalisere fra eksempler til generalitet og benytter oss da av en induktiv tilnærming. Vi har mange eksempler som vi så sammenfatter til en modell eller regel. Samtidig så utvikles det etter hvert en forventning hos elevene om hva slags type modell vi kan vente å finne og vi undersøker våre regler gjennom nye eksempler. Samtidig benytter vi oss av deduktiv tenkning når vi forholder oss til regler vi har funnet og tester disse ut for andre eksempler og når vi diskuterer rundt generalitet. Da har vi utgangspunkt i noe vi har indusert oss frem til (generaliseringen) og så argumenterer vi for at denne vil gjelde i andre tilfeller også. Selv om vi kaller det induktivt når vi bygger opp en regel, så har vi noen forventninger om hvilke typer sammenhenger vi kan finne. Ofte velger vi hvordan vi går fram med bakgrunn i hvilken sammenheng vi tror vi vil finne. Da kan vår tenkning få preg av deduksjon. I eksemplene i denne oppgaven benyttet vi oss av induktiv tenkning for å finne ut hvordan mønsteret i fortellingen om de tre bjørnene var (5.3.2.1), mens når vi så leter videre etter andre historier med tilsvarende mønster vil vi bruke en deduktiv tilnærming.

6.4.3

Herbert and Brown (1997): Algebraisk tenkning er å bruke matematiske symboler og verktøy til å analysere ulike situasjoner ved å (1) trekke ut informasjon fra situasjonen, (2) representere denne informasjonen matematisk i ord, diagrammer, tabeller, grafer og likninger og (3) tolke og anvende matematiske funn som for eksempel å løse en likning, teste en hypotese og identifisere en sammenheng som kan representeres med en funksjon.

Herbert og Brown (1997) poengterer blant annet bruk av matematiske symboler når vi skal hente ut informasjon av en situasjon, representere og analysere. I denne oppgaven brukes i tillegg til matematiske symboler også tegninger og elevenes naturlige språk. Det er kommunikasjonen av ideene som står i sentrum. Samtidig er det et mål at læreren innfører de korrekte symbolene etter hvert som elevene får behov for dem. Vi kan si at tegningene til elevene er forløpere for et mer symbolsk språk og dermed en del av uviklingen mot matematisk symbolisering. Ved at vi legger vekt på å notere ned det vi vet på en slik måte at det kan kommunisere ideene våre til andre, så utvikles en bevissthet rundt matematisk kommunikasjon.

6.4.4

Kaput (NCTM, 1993): *"Algebraic thinking involves the construction and representation of patterns and regularities, deliberate generalization, and most important, active exploration and conjecture".*

Kaput sier i dette sitatet at det er veldig viktig med aktiv utforskning og å danne seg hypoteser. Ved å ikke gi elevene svaret, men ved sammen å forsøke og komme frem til det generelle i situasjonen så legges det opp til at elevene skal komme med sine egne påstander om hvordan ting henger sammen. De skal bli vant til å komme med utsagn som de så må forsvare og teste. I kapittel 5 legges det stor vekt på at elevene skal komme frem til noen påstander om generalitet. Det er et mål for meg at dette gjøres gjennom en utforskende tilnærming der vi diskuterer oss frem til hvordan det henger sammen.

6.4.5

Kieran and Chalouh (1993): ”*Algebraic thinking involves the development of mathematical reasoning within an algebraic frame of mind by building meaning for the symbols and operations of algebra in terms of arithmetic*”.

Kieran og Chalouh poengterer her aritmetikkens rolle i å gi mening til algebraen. Det de kaller en ”algebraic frame of mind” kan minne om det vi kaller en algebraisk ”habit of mind”. Det er snakk om en tankemessig algebraisk tilnærming. Det er altså ikke i første omgang snakk om algebra som disiplin, men som en tilnærming til aritmetikken og en måte å tenke matematikk på. Aritmetikken får en rolle i å utvikle en algebraisk tenkning hos elevene. Vi har altså med oss et dobbelt perspektiv når vi jobber med aritmetikken. Vi vil at elevene gjennom sitt arbeid med tall og operasjoner skal få en forståelse for symbolene og operasjonene i algebraen.

Jeg mener at Kieran og Chalouhs tilnærming sammenfaller med synet i denne oppgaven. Spesifikt handler kapittel 5.1 om hvordan vi kan algebrafisere aritmetikken.

6.4.6

LUMR Project (Driscoll, 1997): Algebraisk tenkning inkluderer å kunne tenke rundt funksjoner og hvordan de virker og å tenke på hvilken påvirkning et systems struktur har på utregningene.

Driscoll (1997) poengterer at algebraisk tenkning inkluderer funksjonell tenkning. Mange mener at nettopp funksjoner er en fin inngangsport til algebraisk tenkning. Kapittel 5.2 i denne oppgaven viser eksempler på hvordan vi kan inkludere funksjoner i undervisningen i første klasse.

6.4.7

NCTM Standards (5-8) - Algebra (NCTM, 1989): *”Understand the concept of variable, expression, and equation; represent situations and number pattern with tables, graphs, verbal rules, and equations, and explore the interrelationships of these representations; analyze tables and graphs to identify properties and relationships; develop confidence in solving linear equations using concrete, informal, and formal*

methods; investigate inequalities and nonlinear equations informally; apply algebraic methods to solve a varity of real-world problems and mathematical problems".
NCTM Standards (5-8) - Patterns and Functions (NCTM, 1989):*"Describe, extend, analyze, and create a wide variety of patterns; describe and represent relationships with tables, graphs, rules; analyze functional relationships to explain how a change in one quantity results in a change in another; use patterns and functions to represent and solve problems".*
I første sitat defineres hva man legger i algebra i NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) sine standarder for 5.-8.trinn. Standardene inkluderer at det er en forståelse for begrepene variabler, uttrykk og likning. Det fokuseres videre på tabeller, grafer og ulikheter og bruk av algebraiske metoder for å løse problemer. Samtidig er det er sterkt fokus på metoder som ikke inkluderer formell algebra. Det nevnes å bruke av verbale regler for tallmønstre, se sammenhenger mellom ulike representasjonsformer, løse lineære likninger og undersøke ulikheter og ikke-lineære likninger ved bruk av metoder som ikke er formelle. Denne oppgaven inkluderer eksempler som skal hjelpe elevene til å utvikle en forståelse for funksjoner, variabler og likninger (5.2). Samtidig har vi et fokus på elevenes egne ideer og formuleringer. Videre fokuserer vi på å kunne bruke ulike representasjoner til å notere ned samme problem (3.3.7). Jeg mener dermed at det er et godt sammenfall mellom det synet denne oppgaven har på algebra og det som fremkommer i NCTMs standarder.
Det andre sitatet definerer innhold for undervisning i mønster og funksjoner. Her inkluderes å beskrive, utvide, utvikle og skape mange ulike typer mønstre. Mønster er en viktig del av mange av aktivitetene i kapittel 5. Vi er opptatt av å beskrive mønstre og å utvide disse og endre på betingelsene. Eksemplene tar også for seg mange ulike typer mønstre, både rekursive (5.1.12), samvarierende (5.2.2.1) og korresponderende (5.2.2.2). Videre inneholder standardene det å beskrive og representere sammenhenger ved hjelp av tabeller, grafer og regler. Vi bruker ikke noe tid på grafer i denne oppgaven. Lage regler og notere data i tabeller for å synliggjøre sammenhenger er derimot mye brukt i eksemplene. Standardene sier videre at man kan analysere samvariasjon ved hjelp av funksjoner. Dette gjør vi i (5.2.2.1). Til slutt vil de at man skal bruke mønstre og funksjoner til å representere og løse problemer. Vi bruker i første klasse mønstre og funksjoner først og fremst til å representere problemer. Denne representasjonen hjelper oss til å få oversikt over problemet slik at vi kan løse det.

Det er ikke overraskende at NCTM sine standarder samsvarer med det synet som er på algebra i kapittel 4. Kaput som har laget den inndelingen jeg har brukt har nemlig vært med på å utforme NCTM sine standarder.

6.4.8

Usiskin (1997): Algebra er et språk. Dette språket har fem aspekt: (1) ukjente (2) formler (3) generaliserte mønstre (4) plassholdere (5) relasjoner. Hver gang disse ideene diskuteres fra Kindergarten og oppover i klassene så er det en mulighet for å introdusere algebraens språk. *(Usiskin, 1997, s. 346).*

Usiskin (1997) poengterer at algebra er et språk som det er gode muligheter for å lære elevene helt fra første klasse. Særlig kan vi slutte oss til en holdning som sier at der muligheten dukker opp til å bruke det algebraiske språket så skal vi gjøre det. Når vi snakker om ukjente størrelser så kan det passe å innføre symboler for ukjente (som i (5.1.5) og (5.1.12.3)). Når en regel kan formuleres i en formel som gir mening for elevene så bør vi gjøre dette (3.3.7). Generaliserte mønstre må formuleres, hvis ikke må vi nevne alle leddene i mønsteret.

Plassholder handler i følge Usiskin (1997) om situasjoner der vi ikke trenger å vite hvilket tall vi har med å gjøre. Ofte handler dette om mønstre der vi skal utføre en handling på et tall som ikke er avhengig av hva tallet er. For eksempel skal vi doble tallet og legge til tre. Regelen er den samme uavhengig av tallet. Vi er ikke interessert i å finne dette tallet. Det er regelen som står i sentrum. En bokstav eller et annet symbol kan da stå som en plassholder vi trenger for å vise mønsteret. Denne ideen ligger til grunn i (5.1.6) når vi jobber med partall og oddetall ved å innføre et tall som er så stort at de ikke kan telle det. Det kan være hvilket som helst tall. Poenget er den ene ekstra brikken som finnes hos oddetall når mengden organiseres i par.

Relasjoner hos Usiskin handler om at vi kan uttrykke relasjoner mellom tall på ulike måter som er ekvivalente. Det algebraiske språket gjør det lettere å se at disse representasjonene er ekvivalente. Dette gjennomgås utførlig i kapittel (5.1.8)

6.4.9

Vance (1998): Algebra defineres noen ganger som generalisert aritmetikk eller som et språk for å generalisere aritmetikk. Men algebraisk tenkning er mer en en samling regler for symbolmanipulasjon: *"it is a way of thinking". (Vance, 1998, s. 282)*

Vance underslår ikke at algebra er generalisering av aritmetikk. Men han mener, som også denne oppgaven gjør, at algebraisk tenkning er mer enn å tenke generelt om aritmetikk. Det er en egen måte å tenke på. Denne oppgaven er opptatt av elevenes tenkning mer enn deres manipulasjon med symboler. Vi vil utvikle denne tankegangen eller ”habits of mind” hos elever og lærere.

6.5 K-06

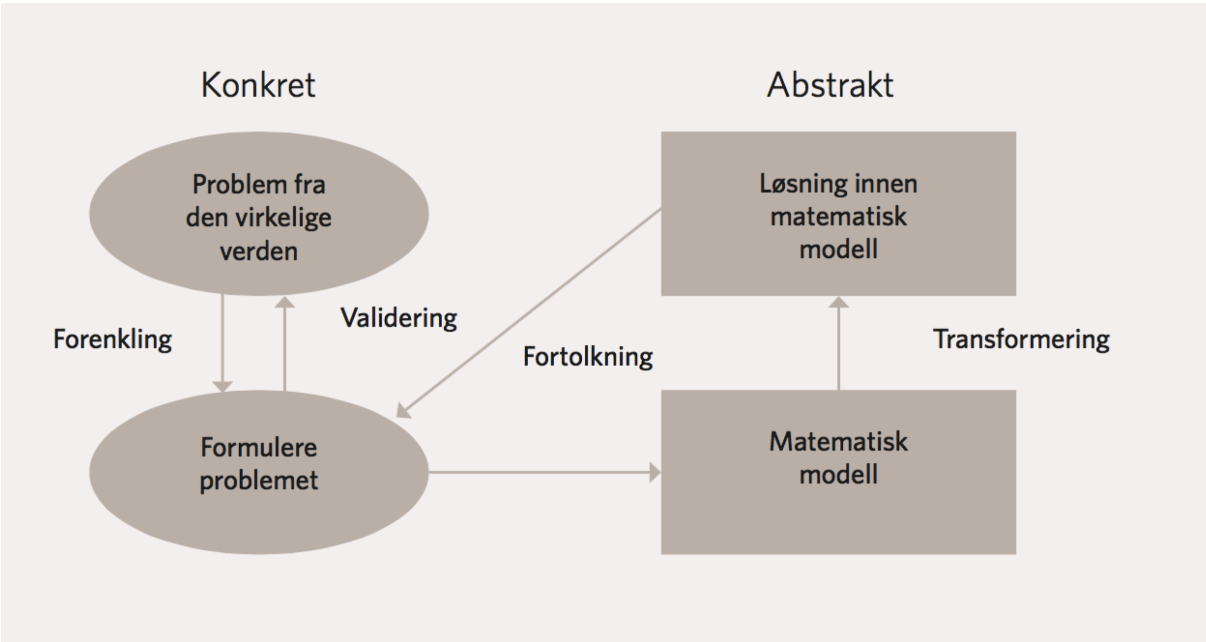
Jeg har under hvert eksempel i kapittel 5 nevnt hvilke mål i læreplanen jeg mener at kan nås gjennom et arbeid med en algebraifisert aritmetikk. De fleste av disse målene hører inn under området tall. Det betyr ikke at vi legger bort denne måten å tenke på når vi møter andre tema i matematikken. Vi ser også at mange av aktivitetene er gode til å nå formålene for faget og i arbeidet med de grunnleggende ferdighetene regne, lese og skrive i matematikk. Hvis man skulle omarbeidet læreplanen til å inkludere algebraisk tenkning så holder det ikke å bare legge til et punkt om algebra under området tall. Det er en tankegang som må gjennomsyre hele matematikkundervisningen. For at det skal bli en vane (”habits of mind”) for elevene å se mønstre så må de møte denne måten å tenke på til stadighet i klasserommet. Det trenger heller ikke å begrenses til matematikktimene. Mønstre som kan kommuniseres matematisk finnes i alle fag i skolen. Hvis det blir en vane å lete etter mønstre så vil vi finne mønstre i mange situasjoner. Ved å vise elevene at alle disse mønstrene kan kommuniseres matematisk så kan de oppleve at matematikken har gyldighet utover matematikktimene og oppkonstruerte eksempler.
Jeg har ikke gått inn på digitale ferdigheter annet enn i bruk av regneark. Dette skyldes kun et behov for å begrense oppgavens omfang. Som IT-ansvarlig på egen skole i over ti år så har jeg absolutt et positivt forhold til hva digitale hjelpemidler kan gjøre for matematikkundervisningen. Det skjer mye spennende når det gjelder utvikling av programvare der elevene kan utforske mønstrene og strukturene i matematikken på en visuell måte. Datamaskinen tar seg av utregningene og kan gi elevene mulighet for å utforske matematikk som de vanligvis ikke ville hatt tilgang til.

6.6 Kritikk

Kritikk mot tidlig algebra kan handle om at man tror at det er algebraen fra 8.klasse som skal innføres i første klasse. Som sagt i kapittel (3.3.1) er tidlig algebra ikke algebra tidlig, men heller en måte å tenke rundt aritmetikken som gjør at vi utvikler algebraisk tankegang fra første stund. Samtidig innfører vi symboler etter hvert som vi trenger dem. Dette kan virke uvant og unødvendig komplisert. I kapittel (3.3.7) begrunnes det hvorfor symbolisering er viktig i matematikken allerede fra første klasse. Cai, Ng og Moyer mener til og med at symbolisering kanskje passer bedre i grunnskolen enn i ungdomsskolen: *"Because the elementary grades often incorporate meaningful imagery and concrete experiences to support conceptual development, they, more so than secondary grades, can provide a rich, inquiry-based atmosphere for introducing symbolic notation".* (Cai et al., 2011, s. 36)

Men kritikken kan like gjerne handle om et behov for å returnere til en matematikkundervisning som er mer formell og ikke inneholder så mye prat. Det har vært et fokus på dagliglivets matematikk i Skandinavia og i engelskspråklige land de siste årene. Målet med å trekke inn dagliglivets matematikk var at elevene skulle få en større forståelse for den matematikken de lærte og at de skulle kunne bruke den i livene sine. Samtidig har disse landenes testskåre i internasjonale sammenligninger gått nedover (Grønmo, 2013). Da vil mange mene at undervisningen var bedre før og de vil tilbake til mer tradisjonell undervisning med regning i bøkene og fokus på algoritmer og fakta.

Relasjonell og operasjonell forståelse kan stå som to ytterpunkter i matematikkundervisningen. Ingen vil si at de støtter bare operasjonell forståelse eller relasjonell forståelse, samtidig vil ulike syn på hvordan matematikkundervisning bør være helle mot en av sidene. Kanskje har det med en innstilling til hvordan elever lærer matematikk å gjøre. De som støtter posisjonen at det skal gjøres mange oppgaver kan lett bli tatt for å fremme et operasjonelt syn på matematikken. Ved å gjøre mange oppgaver og kunne bruke ulike algoritmer effektivt så er argumentet deres at gjennom modning så vil forståelsen for de underliggende strukturene vokse frem. Dette kan stemme med Sfard og Linchevskis fokus på at elevene må få mye erfaring med prosessene før de kan danne begreper om det de gjør (Sfard & Linchevski, 1994). De som støtter dette synet vil si at for mye utforskning og prat i matematikktimene tar bort tid fra å øve på algoritmene og reglene slik at elevene blir svakere i regning og dermed heller ikke kan oppnå en god begrepsforståelse i matematikken. Motsatt så vil de som fokuserer på at matematikklæring må skje gjennom at elevene forstår det de holder på med være opptatt av å bruke tid på begrepsforståelsen gjennom eksempler og aktiviteter som gjør at elevene er aktive i forhold til lærestoffet. De vil si at mengdetrening på algoritmer ikke gjør at elevene kan bruke disse algoritmene i det virkelige livet. Et ensidig fokus på regneregler gjør at matematikken blir et avsondret og lite relevant emne for elevene. Vi kan si at disse to posisjonene har fokus på ulike stadier av matematiseringsprosessen. Vi kan snakke om horisontal og vertikal matematisering (Freudenthal, 1991). Horisontal matematisering handler om å lære elevene hvordan man kan oversette problemer fra den virkelige verden til matematikkens språk. Motsatt handler det også om å oversette den løsningen eller svaret vi har fått til den virkelige situasjonens begrensninger og rammer. Vertikal matematisering handler om å bruke matematikkens språk og regler til å regne ut et svar.



(Grønmo, 2013, s. 20)

De som vil at elevene skal være flinkere til å regne vil si at det ikke hjelper å forstå hva som skjer hvis vi ikke kan regne ut svaret. De fokuserer på den vertikale matematiseringen. De som er opptatt av at elevene skal kunne forstå hva som skjer og kunne bruke matematikken i dagliglivet vil være opptatt av den horisontale matematiseringen.

Tidlig algebra prøver å ivareta begge disse posisjonene. Vi har et fokus på å generalisere fra mengder og antall (det konkrete) til symbolspråket (horisontal matematisering). Samtidig har vi fokus på algebraens syntaks (vertikal matematisering). Ved at vi fokuserer på representasjonene og generaliseringene så har vi fokus både på forståelsen, men også på det formelle. Vi hjelper elevene til å se mønstrene i regnestykkene uten at de må oppdage dem selv. Sfard (1991) sier at det ikke er en automatikk i at elevene overfører fra eksemplene til strukturene. Det hjelper altså ikke alle elever å gjøre mange regneoppgaver. Det hjelper heller ikke alle elever å få gode eksempler gjennom aktiviteter og konkretiseringer. Ved å fokusere eksplisitt på de mønstrene som finnes og de strukturene som ligger bak gjennom representasjoner og argumentasjon så kan vi hjelpe elevene til å oppdage nye sider ved begrepene som de ikke ville ha oppdaget på egenhånd. Vi gjør altså ikke aktiviteter for aktivitetenes skyld, men for å synliggjøre strukturene. Når vi regner så gjør vi dette ikke uten forståelse på en instrumentell måte, men vi analyserer og undrer oss over operasjonene og sammenhengene mellom dem slik at vi får en dypere forståelse for de strukturene som ligger til grunn for algoritmene. Ved å algebrafisere aritmetikken så gjør vi to ting på en gang: vi gjør aritmetikk, men med forståelse. Gjennom et fokus på å symbolisere og representere så løfter vi både konkretiseringen og regningen til et annet nivå. I den påfølgende argumenteringen så avdekkes mønstre og strukturer som ikke er intuitivt tilgjengelig for alle elever. Det hjelper også de elevene som selv har sett mønstrene i deres videre reifikasjon. På denne måten er tilnærmingen viktig både for de som har lett for å lære matematikk og de som trenger mer hjelp.

Kritikken mot utforskende læring har også vært at det er mye aktivitet, men lite læring. Gjennom å representere og argumentere så gis aktivitetene en mening og et innhold som støtter utvikling av begreper og algoritmer. På samme måte så kan diskusjoner rundt algoritmene der elevene må representere og visualisere det som skjer støtte forståelsen for algoritmene. En slik forståelse poengterer hvordan algoritmene henger sammen med andre begreper og strukturer i matematikken, men også hvordan de kan brukes i praksis.

I USA har man i det offentlige ordskiftet begrepet ”Math wars”. Bakgrunnen for denne ordkrigen er at det har vært en trend i USA de siste årene å fokusere mye på utforskende læring, problemløsning og dagliglivets matematikk. Dette mener mange at har gått utover elevenes regneferdigheter. Tidlig algebra kan da bli en måte å undervise elevene matematikk med forståelse på en måte som ikke gjør at elevene blir dårligere i regning. Vi inkluderer et syn på matematikk der utforskning og elevenes egne erfaringer tas med, men vi forsøker gjennom representasjoner og argumentasjon å vri fokuset over på det generelle i situasjonene. Vi kommer frem til algoritmer og regler som er effektive, men på en måte som fremmer forståelse hos elevene.

Noe av kritikken mot New Zealands ”Numeracy Project” har vært at et for stort fokus på ulike strategier for regning har gitt elevene for liten tid til å øve på den metoden som var mest effektiv. The Numeracy Project har brukt mye tid på tallforståelse, men lite tid på matematikkens symbolspråk og formell matematikk har det blitt hevdet. (Patterson, 2015). Tidlig algebra kan ta opp i seg ideene fra the Numercay Project, men i tillegg fokuseres det på algebraisk og kvasialgebraisk representasjon av generelle sammenhenger.

Hvordan vet man at den undervisningen man bedriver er effektiv og gir de rette resultatene? Kanskje vil en undervisning som går mer i dybden ta lenger tid slik at man på samme tidspunkt i undervisningen ikke kan gjennomføre de samme utregninger? Vil vi ved å jobbe med dybdeforståelsen henge etter i andre målbare ferdigheter? Er dette i såfall et problem? Kan et lands skåre på PISA si alt om matematikkompetansen i dette landet? Og kan en måling av kompetanse hos elever på 15 år si alt om hva som foregår på andre trinn i utdanningssystemet? Er det et mål å ha høyest mulig skår på PISA eller kan vi si oss fornøyd med et middels resultat når vi ser på det totale bildet av hva den norske skolen vil gi sine elever? Skal man for eksempel kutte ut alle estetiske fag og fokusere ensidig på regning og lesing fordi disse måles på PISA? Og hvordan kan det ha seg at land som skårer høyt på PISA har stort fokus på å tilby kreative fag til alle elever? (OECD, 2013, s. 115). Singapore som stadig ligger i toppen av tabellen tilbyr for eksempel kor, korps eller orkester til 98% av elevene. Hvor langt opp på listen må vi klatre for at vi skal være fornøyd? 12.plass? 1.plass?

7 Konklusjon

Min problemstilling har vært:

1) Hva er tidlig algebra i første klasse?
2) Hvordan kan undervisningen i første klasse gjennomføres slik at den støtter en utvikling av elevenes algebraiske tenkning?

Algebra i første klasse handler om at strukturene i matematikken trekkes frem, at elevene gradvis får tilgang til det algebraiske symbolspråket og at elevenes tenkning skal utvikles og kommuniseres. Det er snakk om "habits of mind" der man er opptatt av generaliseringer og argumentasjon. Elevenes algebraiske tankegang utvikles parallelt med at de lærer aritmetikk og tallforståelse.

Undervisning i matematikk som skjer gjennom gode eksempler, mange representasjoner og diskusjon rundt generalitet har i seg et potensiale til å utvikle den algebraiske tenkningen hos elevene. Både eksemplene, representasjonene og diskusjonene handler om generalisering og tar utgangspunkt i elevenes egen tenkning, språk og ideer. Dette kan kalles kvasialgebraisk aktivitet, men er et steg på veien mot formell algebra gjennom å utvikle de ideene og det språket som algebraen er avhengig av. Dessuten så utvikler man elevenes kvantitative tenkning slik at den blir kompleks nok til å trenge algebraens språk. Dette gjøres gjennom å fokusere på generelle sammenhenger fremfor konkrete numeriske løsninger.

Gjennom flere ulike eksempler har jeg forsøkt å vise hvordan algebraisk tenkning kan utvikles hos elevene med utgangspunkt i enkle aktiviteter som også støtter læreplanens mål. Mitt mål med disse aktivitetene har ikke vært å gi noen utfyllende plan for hvordan man skal legge opp undervisningen i første klasse, selv om disse aktivitetene godt kan tas i bruk slik de er. Mitt mål var å vise hvordan en undervisning som fokuserer på elevenes algebraiske tenkning kan se ut.

Et fokus på de tre komponentene eksempel, representasjon og diskusjon kan altså hjelpe oss når vi vil algebrafisere aritmetikken. Men tidlig algebra er ikke en metode. Det er en ny måte å forholde seg til matematikken på. Det er en tenkemåte, en "habit of mind" som gjør at vi ser matematikken gjennom en linse som er generalisering. Vi søker hele tiden å finne sammenhenger, strukturer og generalitet. Tallene blir en hjelp i dette arbeidet og fremstår som kvasivariable fremfor at de er et mål i seg selv. For at de tre komponentene skal føre til en utvikling av elevenes algebraiske tenkning så er det viktig at alle tre fokuserer på generalisering. Vi eksemplifiserer for at det generelle skal komme frem, vi representerer for at elevene skal sette ord eller symboler på generalitet og vi diskuterer for å synliggjøre generalitet, argumentere for generalitet og for å trekke sammenhenger til andre generaliseringer.

Vi må endre hvordan vi ser på matematikken i skolen. Vi må bytte fokus fra regneferdigheter til strukturer, fra spesielle eksempler til generelle mønstre, fra fakta til forståelse, men på en måte som allikevel gir elevene regneferdigheter og faktakunnskap. Dette mener jeg best gjøres gjennom en undervisning der algebra og aritmetikk går hånd i hånd fra første stund og støtter hverandre.

Gjennom mine egne eksempler og ved å tilpasse eksempler fra forskningen mener jeg å ha bidratt til å klargjøre hva algebra i første klasse kan være.
Ved å bruke Kaputs skjema mener jeg å ha vist at det er realistisk å arbeide med alle delene av algebra i første klasse. Jeg har også funnet frem til tre komponenter jeg mener bør være tilstede i undervisning som fokuserer på elevenes algebraiske tenkning. Disse tre komponentene er ikke en metode, men en sterk anbefaling til hva man skal se etter når man velger metoder.

8 Implikasjoner

Jeg vil ta for meg de seks punktene i den didaktiske relasjonsmodellen. Dette er en modell for planlegging av undervisning som har vært mye brukt i den norske skolen siden den ble beskrevet i "Nye veier i didaktikken?: en innføring i didaktiske emner og begreper" av Bjarne Bjørndal og Sigmund Lieberg i 1978. De seks punktene er rammefaktorer, elevforutsetninger, mål, innhold, arbeidsmåter og vurdering.

8.1 Rammefaktorer

Jeg har tidligere sagt at jeg synes det er viktig at lærerne finner sin måte å legge opp undervisningen på og at jeg ikke har tro på ferdig lagde opplegg som lærerne bare skal følge. Elevene er for forskjellige, rammene er for forskjellige og lærerne er for forskjellige. Men tilnærmingen i denne oppgaven inneholder et krav til at elevene må få diskutere ideene sine. Det er da viktig at alle elevene får bruke språket og kommunisere. Dette stiller noen krav til de fysiske rammene. Det må være mulig å snakke mange på en gang uten at det blir for mye støy. Kanskje er en slik tilnærming enklere å få til i en liten enn i en stor klasse? Kanskje er den enklere å gjennomføre i en skole med lukkede klasserom fremfor baseskoler? Når elevene er så små som 5 og 6 år så trenger de å bli hørt og sett, samtidig som de har mindre utholdenhet i å se og lytte til andre. Det blir da enklere å få til en diskusjon som elevene henger med på i en mindre klasse enn i en stor klasse. Samtidig så kan en gruppe lett bli for liten også. Vi trenger mange ulike innspill fra elevene. Dersom gruppen blir for liten eller for homogen, så er det en fare for at læreren må bidra for mye for å drive diskusjonen fremover.

8.2 Mål og innhold

Målene i læreplanen er styrende for aktiviteten i skolen. Dersom vårt mål er at elevene skal utvikle en algebraisk tankegang så bør dette komme bedre frem i læreplanene enn det som er tilfellet nå. Men jeg har i oppgaven forsøkt å vise at man kan oppfylle dagens mål i læreplanen ved å jobbe med tidlig algebra og vise versa. Det er ikke først og fremst nye læreplanmål vi trenger. Det som behøves er at lærerne får utviklet "habits of mind" for algebra slik at dette blir en integrert del av matematikkundervisningen. Da kan de bli gode forbilder for elevene. Lærere er ikke så forskjellige fra elever. Det som kreves for at en elev skal utvikle algebraiske

”habits of mind” er det samme som kreves for at lærerne skal gjøre det. Lærerne trenger gode eksempler, de trenger å måtte representere tankene sine og de trenger å diskutere med andre lærere. De trenger forbilder, de trenger å gå utenfor egen komfortsone og bevege seg inn i den proksimale utviklingssonen og de trenger å samarbeide med andre. Blanton og Kaput (2003) mener at å gi lærere tid til å analysere elevenes tenkning og diskutere med andre lærere kan være en god måte for å utvikle en algebraisk tankegang. Elevenes tenkning blir da eksemplene. Ved å notere ned det de tror elevene tenker og så diskutere dette med andre lærere så må de være bevisste på når elevene viser algebraisk tankegang. Ved å ta notater så tvinges de til å trekke ut det som utgjør det algebraiske og ved å få diskutere dette med andre så kan misforståelser avklares og begreper styrkes. Samtidig som man kan få nye ideer til undervisningen.

Driscoll og Moyer (2001) mener også at vi kan bruke elevenes tenkning som en måte å utvikle lærernes tenkning. Men de mener at for at dette skal skje så må denne analysen av elevenes tenkning gjøres på en målrettet måte. Det er spesielt to spørsmål lærerne må svare på:

1) Hvilken type tenkning vil vi at elevene skal utvikle?

2) Hva er de største hindringene for at slik tenkning skal utvikles?

Dersom vi vil at elevene skal utvikle en algebraisk tankegang så må vi definere hva vi legger i dette. Vi kan finne eksempler på dette hos elevene våre. Vi må også undersøke hvor de får problemer. Vi må så planlegge aktiviteter og oppgaver som hjelper elevene å utvikle sin tenkning videre (Driscoll & Moyer, 2001).

Jeg mener altså å ha vist at man kan arbeide med målene i K-06 samtidig som man utvikler elevenes algebraiske tenkning. Vi trenger altså ikke å innføre noen store endringer i innhold i læreplanen. Samtidig er det slik at læreplanen er det styrende dokumentet for aktivitet i skolen. Dermed er det allikevel ikke uten betydning om algebraisk tenkning tydelig kommuniseres i planene. Slik planen er nå nevnes ikke algebra i det hele tatt i kompetansemålene for 1.-2.trinn. I beskrivelsen av hovedområder i matematikkfaget defineres algebra slik: ”*Algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar. Algebra blir òg nytta i samband med hovudområda geometri og funksjonar*” (nedenfor). Men i tabellen for fordeling av hovedområder så nevnes ikke algebra før på 5.-7.trinn (nedenfor).

Dersom vi vil at elevene skal utvikle en algebraisk tankegang parallelt med at de lærer aritmetikk, så må dette kommet til uttrykk i formål for faget.

8.3 Arbeidsmåter: metoder

En metode kan gjennomføres på en instrumentell måte. Dersom man ikke forstår metoden på en strukturell måte så kan man risikere å gå glipp av det som er sentralt i metoden og fokusere på deler som ikke er like viktige. Det hjelper lite om man har forsket på effekten av å bruke en bestemt metode dersom andre som skal bruke den ikke bruker den på samme måte. Man må vite hvorfor man bruker metoden, hva målet er, hvilken tenkning som ligger bak og hva som er styrker og svakheter med metoden. Slik kan man tilpasse den til fag, elevgrupper, rammefaktorer, skiftende læreplaner og ulike vurderingsformer. Tenkningen styrer det vi gjør i praksis og blir viktigere enn selve metoden. Dette betyr ikke at det er likegyldig hvilken metode man velger.

Det forskes mye på metoder og på hvilke som gir best effekt på læringen. Men hvis vi skal utvikle metodene videre og hvis vi skal kunne gjøre gode valg i et utvalg metoder så må vi ha en forståelse for det vi vil undervise som ikke er instrumentell, men strukturell. De ulike metodene er gode på forskjellige ting. For å vite hvilken metode vi skal velge, kan vi se på hvilke metoder forskningen mener er gode, men vi må også vurdere om metodene fremmer den læringen vi ønsker den skal fremme. For eksempel vil en elevaktiv metode være naturlig dersom man har et kognitivt læringssyn. Dessuten vil man måtte finne metoder som legger til rette for samarbeid og kommunikasjon mellom elevene dersom man har en sosiokulturelt læringssyn.

Denne oppgaven handler ikke om metode, selv om det er mange eksempler på aktiviteter som kan gjennomføres. Disse eksemplene er ment for at leseren skal forstå potensialet i å endre først og fremst på hvordan man tenker. Det å endre perspektiv på matematikkundervisningen vil naturlig få konsekvenser for hvordan det undervises. Det vil påvirke hvilke metoder man velger og hvordan man gjennomfører dem. Jeg har bevisst ikke knyttet meg opp mot en bestemt metode. Mitt mål med å skrive oppgaven var å sette meg inn i tidlig algebra og tenkningen rundt dette slik at jeg sto bedre rustet til å kunne kritisk vurdere ulike metoder og tilnærminger. Hvilke metoder som brukes i skolen er blitt en politisk sak. Det er også mange kommersielle krefter inne i bildet. Etter å ha jobbet under ulike rektorer og under ulike undervisnings-trender ser jeg at jeg som regel allikevel står ganske fritt i hvordan jeg vil gjennomføre en metode eller et pålegg. Det er de tankene som ligger bak det jeg gjør som er viktige. Man klarer å vri det meste til å passe med slik man tenker. Derfor synes jeg det er viktig å ta tak i disse tankene. Hva vil vi med undervisningen? Dersom målet mitt er at elevene skal oppnå en relasjonell og strukturell tenkning i matematikken og hvis jeg vil at de skal utvikle algebraisk ”habits of mind” så må jeg undervise med dette for øyet. Dersom noen vil at jeg skal undervise på en måte som jeg mener strider med dette må jeg da protestere og argumentere for mitt syn. I en slik argumentasjon hjelper det å ha satt seg inn i forskningen på området.

Metoder som lar elevene møte gode og konkrete eksempler, som lar elevene representere og diskutere og som fokuserer på å avdekke strukturene i matematikken blir viktige. Men det er altså ikke selve metodene, men vår innstilling til matematikken som er viktig. Kanskje kan en lærer få til å utvikle god algebraisk tenkning hos elevene ved å bruke mye felles undervisning rundt tavlen? Det viktige er om hun/han gir elevene rom for å kommunisere, diskutere og ikke minst tenke selv. Elevene må få mange erfaringer og møte gode eksempler. Selv vil jeg tenke at en undervisning som veksler mellom klassesamtaler og –aktiviter, gruppesamtaler, individuelt arbeid og arbeid i par passer for meg. Andre steder kan rammene være anderledes og dermed gi rom for andre tilnærminger.

8.4 Elevforutsetninger

Noen elever vil kanskje finne en form med mye diskusjon krevende dersom de selv har dårlig utviklet vokabular eller lett mister konsentrasjonen. Kanskje vil stor grad av elevmedvirkning føre til at noen trenger mer støtte for å bidra i diskusjonen enn en lærer klarer å gi alene. Samtidig er min erfaring at mange av dem som sliter med å sitte på plassen sin og regne i en bok trives i disse aktivitetene. Det er en veksling mellom bruk av konkreter, samarbeid og eget arbeid som kan være positivt for motivasjon og utholdenhet. Det blir viktig å lage god struktur slik at elevene kan bruke energien sin på de ideene som er oppe til diskusjon og ikke på hvor de skal sitte eller hva de skal gjøre.

Denne tilnærmingen til matematikken er kognitivt krevende. Vi krever at elevene skal være i den proksimale utviklingssone. Vi vil at de skal utvikle sin tenkning, ikke bare øve på noen prosedyrer. Dette kan være krevende for elever som har kognitive vansker. Det er viktig å være oppmerksom på disse elevene, men heller ikke hjelpe dem så mye at de ikke får utvikle sin tenkning.

8.5 Vurdering

”Vurdering for læring” er en nasjonal satsing og implementert i Sandnes kommune. Det er et sterkt fokus på mål og kriterier på individnivå. Jeg mener at det er mye enklere å vurdere fremgang i tilegnelse av faktakunnskaper enn å vurdere hvordan elevenes algebraiske tenkning er. Tenkningen i matematikk går gjerne via misoppfatninger og ufullstendige begreper. Elever som kanskje kan gjøre mange feil på en prøve fordi de har slike uferdige begrep kan ha kommet lenger enn elever som har lært seg en metode instrumentelt. Det blir derfor vanskelig å bruke standardiserte kvantitative prøver (prøver som gir elevene poeng som skal beskrive hvor mye de har lært). Det er i samtalen med elevene at man kan se hvilke strategier de bruker, hvordan de resonnerer og kommuniserer. Dette er så komplekst at det ville føre til et voldsomt arbeid om det skulle skjematiseres for hver enkelt elev. For at elevene skal få den fremovermeldingen de trenger må vi stole på den enkelte lærers vurdering i situasjonen. Det er også vurderinger tett på situasjonene som elevene lærer mest av. Derfor er en implikasjon av å arbeide med algebraisk tenkning at vi gir lærerne rom til å bli dyktige fagpersoner som kan lede elevene på best mulig måte gjennom prosessene mot objektene og gjennom eksemplene mot generaliseringene. Det har liten mening for en elev å få en tilbakemelding om at han ikke har en god nok forståelse for hva likhetstegnet betyr. Det er ikke noe han kan gå hjem og øve på til neste gang. Det er en forståelse som vokser frem gjennom mange erfaringer og diskusjoner. Det er en prosess som foregår over flere år og som det ikke er så lett å måle.

Selv om vi kunne lage gode tester for å undersøke dette så må vi spørre oss om det er verdt den tiden det tar å gjennomføre disse testene. Er dette tid som heller burde vært brukt til læringsarbeid? Det betyr ikke at vi ikke skal vurdere elevenes læring. Men kanskje er det mer effektivt å gjøre dette underveis i samspillet med elevene heller enn på standardiserte tester som tar tid fra læringsarbeidet? For at tester skal være nyttige må vi ha en tro på at det finnes en konstant kunnskap hos elevene som de har med seg i alle situasjoner og som kan hentes ut ved hjelp av en prøve. Dette persepktivt kaller Imsen (1998) *kompetanseorientering*. Man tenker at gjennom nøyaktig oppgavekonstruksjon og tilretteleggelse av prøvesituasjonen så kan man unngå misforståelser og få svar som sier noe om kompetansenivået til eleven. Som kontrast til dette synet har vi *kommunikasjonsorientering*. Her fokuserer man på hvordan eleven forsto spørsmålet og hva svaret kan være et uttrykk for. Har eleven misforstått oppgaven? Oppfyller eleven en forventning om hva svaret bør være? Her kan ikke læreren forvente at eleven legger det samme i spørsmålet som intensjonen var. Læreren må løsrive seg fra egen tolkning og forsøke å forstå den logikken eleven besvarte oppgaven med. Kanskje kommer feilsvar på grunn den situasjonen prøven skaper? Kanskje svarer eleven rett, men det ligger en feil logikk til grunn for svaret? Jeg mener at lærerne har en viktig oppgave i å stadig analysere hvor elevene er i sin utvikling. Dette mener jeg gjøres best ved kommunikasjon rundt elevenes ideer. Gjennom en undervisning som inneholder de tre komponentene eksempler, representasjon og diskusjon så gis det mange muligheter for læreren til å avdekke hvordan elevene tenker. Læreren kan så diskutere elevenes tanker med andre lærere. Slik kan lærerne utvikle sin egen algebraiske tenkning og lære av elevene og hverandre.

I Norge har det blitt innført kartleggingsprøver. Disse gjør etter min erfaring at lærerene stresser mer med hva elevene kan og ikke av mer faktabasert kunnskap som addisjonstabeller og tallenes plassering på tallinjen. Mange skylder på kartleggingsprøvene og de nasjonale prøvene og sier at de er mer stresset enn før. Det er ikke noe i prøvene i seg selv som skulle tilsi at man skulle ”teach to the test”. Både kartleggingsprøvene og de nasjonale prøvene inneholder, mener jeg, gode og relevante oppgaver. Men de inneholder ingen føringer for hvordan undervisningen skal legges opp. Det at man tester om elevene kan tallene fra 0-20 tilsier ikke at man skal undervise instrumentell tenkning. Ved å bruke den typen aktiviteter som legges frem i denne oppgaven vil man også kunne få mange erfaringer med tallene fra 0 til 20. Jeg tror det at lærerne lar seg stresse av målingene fører til dårligere undervisning i klasserommene. Min fordom er at man ikke tar seg tid til utforskende læring, men tyr til drill og instruksjonsundervisning.

9 Videre forskning

Jeg har funnet lite forskning som er longitudinell, eller som viser kvantiserbare effekter av å algebrafisere aritmetikken. Hvordan går det med de elevene som har lært seg algebraisk tenkning og algebraisk språk? Får de et blidere møte med algebraen i ungdomsskolen?

Algebraisk tenkning er tenkning som beveger seg på et høyere kognitivt nivå enn å lære prosedyrer utenat. Er det virkelig slik at alle elever vinner på en tilnærming som er såpass kognitivt krevende? Er det noen elever som dette ikke passer for? Vil det at vi forventer mer av elevenes tenkning tidlig skille mer mellom elevene, eller vil det hjelpe elever som sliter kognitivt med å utvikle seg slik at de gjør det bedre på skolen? Kan en tilnærming som fokuserer på matematikken som et språk appellere til flere?

Det kunne også være interessant å forske på hvordan vi kan gjøre underveisvurderingen mer reliabel ved hjelp av gode spørsmål eller tester som ikke tar for mye tid fra læringsarbeidet. Denne balansen mellom informasjon vi kan stole på og at vurderingen skal være til mest mulig nytte i videre læringsarbeid og ta minst mulig fokus fra det løpende arbeidet er vanskelig. Å fokusere på tester som ikke gir læreren noen ny informasjon, men som tar mye tid er ikke effektivt. Samtidig er det viktig å finne måter å sikre at det inntrykket man til en hver tid har av elevenes utvikling stemmer og at det kan videreformidles til de det er relevant for, slik som foreldre eller nye klasselærere; dette er viktig for at fremovermeldingene til eleven skal være dekkende for hva de bør jobbe videre med.

Referanser

Befring, E. (2007). *Forskingsmetode, med etikk og statistikk.* Oslo: Det Norske Samlaget. Seksjon høgare utdanning.

Björklund, C. (2014). *Den første matematikken*: Cappelen Damm.

Bjørndal, B. & Lieberg, S. (1978). *Nye veier i didaktikken?: en innføring i didaktiske emner og begreper*: Aschehoug.

Bjørnestad, Ø. (2004). *Om konstruktivismen* (Notat 12/2004) [Notat]. Hentet 17.07.2015 fra http://hdl.handle.net/11250/149470

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2003). Developing Elementary Teachers'" Algebra Eyes and Ears". *Teaching Children Mathematics,* 10(2), 70-76.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 412-446.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2008). Building district capacity for teacher development in algebraic reasoning. I Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics New York., 361-388.

Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. I: Cai, J. & Knuth, E. (2011) *Early algebraization* (s. 5-23): Springer.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. I: A. F. Coxford (ed.), *The Ideas of Algebra*, *K-12* (1988 Yearbook), NCTM, Reston, VA, pp. 20–32.

Britt, M. S. & Irwin, K. C. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *ZDM,* 40(1), 39-53. doi: 10.1007/s11858-007-0064-x

Britt, M. S. & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. I: Cai, J. & Knuth, E. (2011).*Early Algebraization* (s. 137-159): Springer.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*: Springer.

Cai, J. & Moyer, J. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies. I: In Carole Greenes & Rheta Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics - Seventieth Yearbook* (s.169-180). Reston: NCTM.

Cai, J., Ng, S. F. & Moyer, J. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. I: Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early Algebraization* (s. 25-41): Springer.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*: Heinemann Portsmouth, NH.

Carpenter, T. P., Moser, J. M. & Bebout, H. C. (1988). Representation of Addition and Subtraction Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19(4), 345-357. doi: 10.2307/749545

Carraher, D. W. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. I: F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 669-706): Information Age Publishing, National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. (2014). Early Algebra Teaching and Learning. I: Lerman, Stephen (red) *Encyclopedia of Mathematics Education*, 193-196. Springer

Carraher, D. W., Schliemann, A. & Brizuela, B. M. (2000). *Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions.* Paper presentert på det 22. årlige møte til the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tucson, Arizona.

Carraher, D. W., Schliemann, A. & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not algebra early. I: J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Red.). *Algebra in the Early Grades* (s. 235-272): Routledge.

Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10*: Westport, CT, Heinemann.

Driscoll, M. & Moyer, J. (2001). Using Students' Work as a Lens on Algebraic Thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 6(5), 282-287. doi: 10.2307/41180952

Engel, M., Claessens, A. & Finch, M. A. (2013). Teaching students what they already know? The (Mis) Alignment between mathematics instructional content and student knowledge in kindergarten. *Educational Evaluation and Policy Analysis,* 35(2), 157-178.

Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics,* 6(4), 232-236. doi: 10.2307/41197398

Ferrini-Mundy, J., Lappan, G. & Phillips, E. (1997). EXPERIENCES WITH PATTERNING. *Teaching Children Mathematics,* 3(6), 282-288. doi: 10.2307/41196740

Fox, J. L. (2006). Connecting algebraic development to mathematical patterning in early childhood. In Novotna, Jarmila, Moraova, Hana, Kratka, Magdalena, & Stehlikova, Nada (Eds.) *30th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, July, 2006, Prague, Czech Republic.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures.Kluwer Academic Publishers. London.

Fujii, T. & Stephens, M. (2001). *Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables.* I: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.),*The proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra*, (Vol. 1, s. 258–264). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Fyfe, E., McNeil, N., Son, J. & Goldstone, R. (2014). Concreteness Fading in Mathematics and Science Instruction: a Systematic Review. *Educational Psychology Review,* 26(1), 9-25. doi: 10.1007/s10648-014-9249-3

Garelick, B. (2006). Miracle Math. *Education next, Vol. 6, no. 4 http://educationnext.org/miracle-math/*

Goldenberg, E. P., Mark, J. & Cuoco, A. (2010). An algebraic-habits-of-mind perspective on elementary school. *Teaching Children Mathematics,* 16(9), 548-556. doi: 10.2307/41199563

Grønmo, L. S. (2013). Algebra og tall er motoren i matematikken - derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart. . *Bedre skole,* 1, 17-22.

Hattikudur, S. & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology,* 107(1), 15-30. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2010.03.004

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics,* 27(1), 59-78. doi: 10.1007/BF01284528

Hong, K. T., Mei, Y. S. & Lianghuo, F. (2014). *Model Method in Singapore Primary Mathematics Textbooks* [powerpoint presentation]. Hentet fra http://blog.soton.ac.uk/icmtrd2014/files/2014/10/Hong_Model-Method-in-Singapore-Primary-Mathematics-Textbooks_30Jul14.pptx

Howe, R. (2005). *Comments on NAEP algebra problems.* . Hentet 05.07.2015 fra http://www.brookings.edu/~/media/Files/events/2005/0914_algebra/Howe_Presentation.pdf

Imsen, G. (1998). Elevens verden: Oslo: Tano Aschehoug.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. & Battey, D. (2007). Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementary School. *Journal for Research in Mathematics Education,* 38(3), 258-288. doi: 10.2307/30034868

Kaput, J. J. (1995). A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform? Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (17th, Columbus, OH, October 21-24, 1995)

Kaput, J. J., Blanton, M. & Moreno-Armella, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. I Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics, New York.

Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics New York.

Kelle, U., Bryant, A. & Charmaz, K. (2010). The development of categories: Different approaches in grounded theory. *The Sage handbook of grounded theory*, 191-213.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics,* 12(3), 317-326. doi: 10.2307/3482333

Kieran, C. (1989). *A Perspective on Algebraic Thinking.* Paper presentert på 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Paris.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I: Grouws, Douglas A. (red), (1992). Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. , (s. 390-419). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. I: Cai, J. & Knuth, E. (2011).*Early algebraization* (s. 579-593): Springer.

Kriegler, S. (2008). Just what is algebraic thinking. http://www.math.ucla.edu/~kriegler/pub/algebrat.html

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Interviews: Learning the craft of qualitative research interviewing*: Sage.

Lee, L. & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics,* 20(1), 41-54.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 33-40.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics,* 40(2), 173-196.

Ludvigsen-utvalget. (2015). *NOU 2015:8 Fremtidens skole. Fornyelse av fag og kompetanser.* Hentet 12.07.2015 fra https://blogg.regjeringen.no/fremtidensskole/nou-2015-8/

MacGregor, M. & Price, E. (1999). An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(4), 449-467. doi: 10.2307/749709

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). STUDENTS'UNDERSTANDING OF ALGEBRAIC NOTATION: 11–15. *Educational studies in mathematics,* 33(1), 1-19.

Mark-Zigdon, N. (2004). *First graders' and kindergarten children's knowledge of grafic symbole system of numbers and addition and subtrraction.* Paper presentert på PME CONFERENCE.

Mark-Zigdon, N. & Tirosh, D. (2008). Legitimate Arithmetic Number Sentence. I: J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.). *Algebra in the early grades* (s. 201-210). New York, USA: Taylor & Francis Group, LLC.

Mason, J. (1980). When Is a Symbol Symbolic? *For the Learning of Mathematics,* 1(2), 8-12. doi: 10.2307/40247707

Mason, J. (2005). *Developing thinking in algebra*: Sage.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S. & Krill, D. E. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition and Instruction,* 24(3), 367-385. doi: 10.1207/s1532690xci2403_3

Molina, M. & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 30(1), 61-80.

Ng, S. F. & Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* 40(3), 282-313. doi: 10.2307/40539338

Nortvedt, G. (2013). Nye læreplaner i matematikk. I T. Brøyn (Red.), *Bedre skole* (nr. 1, s. 24-25): Utdanningsforbundet.

OECD. (2013). *PISA 2012 Results: What Makes Schools Successful? Resources, Policies and Practices (Vol IV)*
: O. Publishing. Hentet fra http://dx.doi.org/10.1787/9789264201156-en

Owen, A. (2005). In search of the unknown: A review of primary algebra. I: J. Anghileri (Red.), *Children's Mathematical Thinking in the Primary Years : Perspectives on Children's Learning*. London, GBR: Continuum International Publishing.

Patterson, R. (2015). UN (AC)COUNTABLE - WHY MILLIONS ON MATHS RETURNED LITTLE. New Zealand: The New Zealand Initiative.

Powell, S. R. (2012). Equations and the Equal Sign in Elementary Mathematics Textbooks. *The Elementary School Journal,* 112(4), 627-648. doi: 10.1086/665009

Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective.* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal,* 26(2), 257-277.

Reikerås, E. K. L. (2006). Performance in solving arithmetic problems: a comparison of children with different levels of achievement in mathematics and reading. *European Journal of Special Needs Education,* 21(3), 233-250. doi: 10.1080/08856250600810633

Rivera, F. (2006). Changing the face of arithmetic: Teaching children algebra. *Teaching Children Mathematics,* 12(6), 306-311.

Rivera, F. (2008). On the Pitfalls of Abduction: Compolicities and Complexities in Patterning Activity. *For the Learning of Mathematics*, 17-25.

Rowland, T. (2014). Mathematics Teacher Knowledge. *Masterclass in Mathematics Education*, 87-100.

Sáenz-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). Third Graders' Interpretations of Equality and the Equal Symbol. *Educational Studies in Mathematics,* 35(2), 153-187. doi: 10.2307/3482997

Schliemann, A., Carraher, D. W. & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice*: Lawrence Erlbaum Associates

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. I: D. N. P. James F. Voss, Judith W. Segal (Red.), *Informal reasoning and education* (s. 311-343): Routledge.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics,* 22(1), 1-36.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being–or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*, 37-98.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification — The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics,* 26(2-3), 191-228. doi: 10.1007/BF01273663

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4-14. doi: 10.2307/1175860

Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*: Penguin books ltd.

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher,* 26(3), 9-15. doi: 10.2307/41187667

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics,* 37(3), 251-274. doi: 10.1023/A:1003602322232

Smith, E. (2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. I: J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.). *Algebra in the Early Grades* (s. 133-160): Taylor & Francis Group, LLC.

Smith, J. & Thompson, P. W. (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. I:Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades (s.95-132)* Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics New York.

Star, J. (2014). Instrumental and Relational Understanding in Mathematics Education. I: S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 304-307): Springer Netherlands.

Stern, P. N. (1980). Grounded theory methodology: Its uses and processes. *Image,* 12(1), 20-23.

Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The arithmetic-algebra connection: A historical-pedagogical perspective. I: Cai, J. & Knuth, E. (2011) *Early algebraization* (s. 87-107): Springer.

Taylor-Cox, J. (2003). ALGEBRA in the Early Years? *Young Children,* 58(1), 14-21.

Usiskin, Z. (1997). Doing Algebra in Grades K-4. *Teaching Children Mathematics,* 3(6), 346-356. doi: 10.2307/41196752

Vance, J. H. (1998). Number Operations from an Algebraic Perspective. *Teaching Children Mathematics,* 4(5), 282-285. doi: 10.2307/41196954

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher mental process: Cambridge, MA: Harvard University Press.

Walsh, I., Holton, J. A., Bailyn, L., Fernandez, W., Levina, N. & Glaser, B. (2015). What Grounded Theory Is…A Critically Reflective Conversation Among Scholars. *Organizational Research Methods,* 18(4), 581-599. doi: 10.1177/1094428114565028

Warren, E., Mollinson, A. & Oestrich, K. (2009). Equivalence and equations in early years classrooms. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 14(1), 10.

Wiliam, D. & Hodgen, J. (2006). *Mathematics inside the black box: Assessment for learning in the mathematics classroom*. London: Granada Learning.

Wood, D., Bruner, J. S. & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of child psychology and psychiatry,* 17(2), 89-100.

Wu, H.-H. (2011). The mathematics K-12 teachers need to know. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.307.8609&rep=rep1&type=pdf

Vedlegg

Kunnskapsløftet -06

Føremål

Matematikk er ein del av den globale kulturarven vår. Mennesket har til alle tider brukt og utvikla matematikk for å systematisere erfaringar, for å beskrive og forstå samanhengar i naturen og i samfunnet og for å utforske universet. Ei anna inspirasjonskjelde til utviklinga av faget har vore glede hos menneske over arbeid med matematikk i seg sjølv. Faget grip inn i mange vitale samfunnsområde, som medisin, økonomi, teknologi, kommunikasjon, energiforvalting og byggjeverksemd. Solid kompetanse i matematikk er dermed ein føresetnad for utvikling av samfunnet. Eit aktivt demokrati treng borgarar som kan setje seg inn i, forstå og kritisk vurdere kvantitativ informasjon, statistiske analysar og økonomiske prognosar. På den måten er matematisk kompetanse nødvendig for å forstå og kunne påverke prosessar i samfunnet.

Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er. Dette har òg språklege aspekt, som det å formidle, samtale om og resonnere omkring idear. I det meste av matematisk aktivitet nyttar ein hjelpemiddel og teknologi. Både det å kunne bruke og vurdere ulike hjelpemiddel og det å kjenne til avgrensinga deira er viktige delar av faget. Kompetanse i matematikk er ein viktig reiskap for den einskilde, og faget kan leggje grunnlag for å ta vidare utdanning og for deltaking i yrkesliv og fritidsaktivitetar. Matematikk ligg til grunn for store delar av kulturhistoria vår og utviklinga av logisk tenking. På den måten spelar faget ei sentral rolle i den allmenne danninga ved å påverke identitet, tenkjemåte og sjølvforståing.

Matematikkfaget i skolen medverkar til å utvikle den matematiske kompetansen som samfunnet og den einskilde treng. For å oppnå dette må elevane få høve til å arbeide både praktisk og teoretisk. Opplæringa vekslar mellom utforskande, leikande, kreative og problemløysande aktivitetar og ferdigheitstrening. I praktisk bruk viser matematikk sin nytte som reiskapsfag. I skolearbeidet utnyttar ein sentrale idear, former, strukturar og samanhengar i faget. Elevane må utfordrast til å kommunisere matematikk skriftleg, munnleg og digitalt. Det må leggjast til rette for at både jenter og gutar får rike erfaringar med matematikkfaget, som skaper positive haldningar og ein solid fagkompetanse. Slik blir det lagt eit grunnlag for livslang læring.

http://www.udir.no/kl06/mat1-04/Hele/Formaal/?read=1

Hovudområder

Årssteg	Hovudområde			
1.–4.	Tal	Geometri	Måling	Statistikk
5.–7.	Tal og algebra	Geometri	Måling	Statistikk og sannsyn (bm.: sannsynlighet)

Utvalg av tabell http://www.udir.no/kl06/mat1-04/Hele/Hovedomraader/

Tal og algebra
Hovudområdet tal og algebra handlar om å utvikle talforståing og innsikt i korleis tal og talbehandling inngår i system og mønster. Med tal kan ein kvantifisere mengder og storleikar. Området tal omfattar både heile tal, brøk, desimaltal og prosent. Algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar. Algebra blir òg nytta i samband med hovudområda geometri og funksjonar.

Geometri
Geometri i skolen handlar mellom anna om å analysere eigenskapar ved to- og tredimensjonale figurar og gjere konstruksjonar og berekningar. Ein studerer dynamiske prosessar som spegling, rotasjon og forskyving. Hovudområdet omfattar òg å beskrive plassering og forflytting i rutenett, kart og koordinatsystem.

Måling
Måling vil seie å samanlikne og oftast knyte ein talstorleik til eit objekt eller ei mengd. Denne prosessen krev at ein brukar måleiningar og høvelege teknikkar, målereiskapar og formlar. Viktige delar av måleprosessen er å vurdere resultatet og drøfte kor usikre målingane er.

Statistikk, sannsyn og kombinatorikk
Statistikk omfattar å planleggje, samle inn, organisere, analysere og presentere data. I analysen av data høyrer det med å beskrive generelle trekk ved datamaterialet. Å vurdere og sjå kritisk på konklusjonar og framstilling av data er ein sentral del av denne prosessen. I sannsynsrekning talfester ein kor stor sjanse det er for at ei hending skal skje. I kombinatorikk arbeider ein med systematiske måtar for å telje opp moglege utfall for å kunne berekne sannsyn.

Funksjonar
Ein funksjon beskriv endring eller utvikling av ein storleik som er avhengig av ein annan, på ein eintydig måte. Funksjonar kan uttrykkjast på fleire måtar, til dømes med formlar, tabellar og grafar. Analyse av funksjonar går ut på å leite etter spesielle eigenskapar, som kor raskt ei utvikling går, og når utviklinga får spesielle verdiar.

Økonomi
Hovudområdet økonomi handlar om berekningar og vurderingar som gjeld økonomiske forhold.
http://www.udir.no/kl06/mat1-04/Hele/Hovedomraader/

Grunnleggjande ferdigheiter

Grunnleggjande ferdigheiter

Grunnleggjande ferdigheiter er integrerte i kompetansemåla, der dei medverkar til utvikling av og er ein del av fagkompetansen. I matematikk forstår ein grunnleggjande ferdigheiter slik:

Munnlege ferdigheiter i matematikk inneber å skape meining gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk. Det inneber å gjere seg opp ei meining, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av både eit uformelt språk, presis fagterminologi og omgrepsbruk. Det vil seie å vere med i samtalar, kommunisere idear og drøfte matematiske problem, løysingar og strategiar med andre. Utvikling i munnlege ferdigheiter i matematikk går frå å delta i samtalar om matematikk til å presentere og drøfte komplekse faglege emne. Vidare går utviklinga frå å bruke eit enkelt matematisk språk til å bruke presis fagterminologi og uttrykksmåte og presise omgrep.

Å kunne skrive i matematikk inneber å beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear. Det inneber å bruke matematiske symbol og det formelle matematiske språket til å løyse problem og presentere løysingar. Vidare vil det seie å lage teikningar, skisser, figurar, grafar, tabellar og diagram som er tilpassa mottakaren og situasjonen. Skriving i matematikk er ein reiskap for å utvikle eigne tankar og eiga læring. Utvikling i å skrive i matematikk går frå å bruke enkle uttrykksformer til gradvis å ta i bruk eit formelt symbolspråk og ein presis fagterminologi. Vidare går utviklinga frå å beskrive og systematisere enkle situasjonar med matematikkfagleg innhald til å byggje opp ein heilskapleg argumentasjon omkring komplekse samanhengar.

Å kunne lese i matematikk inneber å forstå og bruke symbolspråk og uttrykksformer for å skape meining i tekstar frå daglegliv og yrkesliv så vel som matematikkfaglege tekstar. Matematikkfaget er prega av samansette tekstar som inneheld matematiske uttrykk, grafar, diagram, tabellar, symbol, formlar og logiske resonnement. Lesing i matematikk inneber å sortere informasjon, analysere og vurdere form og innhald og samanfatte informasjon frå ulike element i tekstar. Utvikling i å lese i matematikk går frå å finne og bruke informasjon i tekstar med enkelt symbolspråk til å finne meining og reflektere over komplekse fagtekstar med avansert symbolspråk og omgrepsbruk.

Å kunne rekne i matematikk inneber å bruke symbolspråk, matematiske omgrep, framgangsmåtar og varierte strategiar til problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt både i praktiske, daglegdagse situasjonar og i matematiske problem. Dette inneber å kjenne att og beskrive situasjonar der matematikk inngår, og bruke matematiske metodar til å behandle problemstillingar. Eleven må òg kommunisere og vurdere kor gyldige løysingane er. Utvikling av å rekne i matematikk går frå grunnleggjande talforståing og å kjenne att og løyse problem ut frå enkle situasjonar til å analysere og løyse eit spekter av komplekse problem med eit variert utval av strategiar og metodar. Vidare inneber dette i aukande grad å bruke ulike hjelpemiddel i berekningar, modellering og kommunikasjon.

Digitale ferdigheiter i matematikk inneber å bruke digitale verktøy til læring gjennom spel, utforsking, visualisering og presentasjon. Det handlar òg om å kjenne til, bruke og vurdere digitale verktøy til berekningar, problemløysing, simulering og modellering. Vidare vil det seie å finne informasjon, analysere, behandle og presentere data med formålstenlege verktøy, og vere kritisk til kjelder, analysar og resultat. Utvikling i digitale ferdigheiter inneber å arbeide med samansette digitale tekstar med aukande grad av kompleksitet. Vidare inneber det å bli stadig meir merksam på den nytten digitale verktøy har for læring i matematikkfaget.

http://www.udir.no/kl06/mat1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter/?read=1

Kompetansemål etter 2. årssteget

Kompetansemål - kompetansemål etter 2. årssteget

Tal

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- telje til 100, dele opp og byggje mengder opp til 10, setje saman og dele opp tiargrupper opp til 100 og dele tosifra tal i tiarar og einarar
- bruke tallinja til berekningar og til å vise talstorleikar
- gjere overslag over mengder, telje opp, samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar
- utvikle, bruke og samtale om varierte reknestrategiar for addisjon og subtraksjon av tosifra tal og vurdere kor rimelege svara er
- doble og halvere
- kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle talmønster

Geometri

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- kjenne att og beskrive trekk ved enkle to- og tredimensjonale figurar i samband med hjørne, kantar og flater og sortere og setje namn på figurane etter desse trekka
- kjenne att, bruke og samtale om spegelsymmetri i praktiske situasjonar
- lage og utforske geometriske mønster, både med og utan digitale verktøy, og beskrive dei munnleg

Måling

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- måle og samanlikne storleikar som gjeld lengd og areal, ved hjelp av ikkje-standardiserte og standardiserte måleiningar, beskrive korleis og samtale om resultata
- nemne dagar, månader og enkle klokkeslett
- kjenne att norske myntar og setlar opp til 100 og bruke dei i kjøp og sal

Statistikk

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- samle, sortere, notere og illustrere data med teljestrekar, tabellar og søylediagram og samtale om prosessen og kva illustrasjonane fortel om datamaterialet

http://www.udir.no/kl06/mat1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-2.-arssteget-/?read=1