Misoppfatningar i algebra hjå elevar på første trinn i vidaregåande skule

Torbjørn Audestad

Masteroppgåve i matematikkdidaktikk

Matematisk institutt
UNIVERSITETET I BERGEN

Våren 2016

Forord

Då eg hausten 2011 byrja på vidareutdanning innan matematikkdidaktikk, var eg klar for å møta nye utfordringar. Desse utfordringane skulle til tider visa seg vera noko større og vanskelegare enn antatt. Arbeidet med sjølve masteroppgåva har vore ein variert prosess, og det har vore mange bølgedalar og kneikar å koma seg over. I kombinasjon med arbeid og familie har det vore utfordrande å finna nok tid til alt som skal gjerast. Det å no kunna sitja å skriva dette forordet til ei ferdig oppgåve, er for meg ei stor oppleving. Det var lenge eg ikkje trudde dette ville skje. Æra for å koma i mål med denne oppgåva kan eg på ingen måte ta aleine:

Eg må gje ein stor takk til min rettleiar Runar Ile som heile vegen gjennom masterarbeidet har kome med god og konstruktiv rettleiing og konkrete tilbakemeldingar som har hjelpt meg fram til ei ferdig oppgåve. Takk for at du har hatt tru på at eg skulle koma i mål. Samtalane med deg, rettleiinga di, har gjeve meg ny giv kvar gong. Takk!

Takk til alle elevar som har deltatt i undersøkingane mine, og spesielt takk til dei som òg stilte til intervju.

Eg må òg takka alle studentane ved kull-11 på vidareutdanninga. Takk for gode diskusjonar, samtalar og samhald.

Vidare må eg takka rektor Aud Åsne og resten av leiinga ved arbeidsplassen min for tilrettelegging av arbeidssituasjonen min slik at det har vore mogleg å kombinera studia med det daglege arbeidet mitt. Takk til alle gode kollegaer som har oppmuntra meg og hjelpt meg ved å letta arbeidsbyrdene mine gjennom desse åra. Ein stor takk til Elizabeth som har lese korrektur på oppgåva mi.

Ein spesielt stor takk til mi kjære kone Kristin for tolmod, oppmuntring og gode innspel gjennom heile studiet. Takk for at du har hatt tru på meg, takk for at eg har fått tid til å jobba med oppgåva ved at du har tatt deg av dei fleste daglege gjeremåla i heimen. Det hadde ikkje blitt noko oppgåve viss det ikkje var for deg.

Eg må òg takka mine kjære tre born Ingeborg, Jakob og Astrid for alle dei gongane de har kome opp på loftet og gitt meg ein klem når eg har sete og jobba med oppgåva, det set eg veldig stor pris på. Takk for forståinga for at de har måtta venta på meg innimellom.

Til slutt må eg takka familien for øvrig, samt alle gode vener, for oppmuntringar og støtte til å gjennomføra dette arbeidet.

Vaksdal, 24.05.2016

Torbjørn Audestad

Samandrag

Denne oppgåva handlar om misoppfatningar i algebra hjå 1.års-elevar i vidaregåande skule. Målet med oppgåva har vore å gje meg som matematikklærar større innsikt i misoppfatningar og vanskar elevar møter i algebra. Eg har prøvd setja meg inn i relevant teori på førehand og undervegs i arbeidet, og eg har samanlikna resultata eg har funne med andre tidlegare arbeid. Det var totalt 91 elevar som deltok i denne studien. Elevane fulgte matematikkkursa 1P-Y, 1P eller 1T, hovudsakleg ved den skulen eg jobbar på.

Masterprosjektet følgjer eit mixed methods-design. Den kvantitative delen består av ei kartleggingsundersøking der elevane sine dugleikar i algebra vart kartlagt gjennom ei rekkje oppgåver. Resultata vart registrerte i eit Excel-dokument. På bakgrunn av desse dataa vart det utarbeidd ein intervjuguide som vart brukt i intervju med eit utval på ti av elevane som deltok i studien. Eg intervjua elevar for å få ei djupare innsikt i nokre av misoppfatningane som kom fram i testen. Intervjua utgjorde den kvalitative delen av studien, og gav eit meir nyansert innsyn i elevane si tenking.

Resultata av kartleggingsprøva viste tydelege teikn på at det rådde ein del misoppfatningar hjå elevane. Mange av elevane sat utelukkande med prosedyrekunnskapar, dei viste lita eller ingen forståing for kva dei gjorde. Dei elevane som som såg ut til å ha manglande strukturell kunnskap, vart avslørte i oppgåver der forståing av variablar var ein føresetnad for å få til oppgåvene. Det viste seg å vera ein samanheng mellom grunnleggjande matematiske dugleikar og dei vanskane elevane møter i algebra. Hol i kunnskapen i aritmetikk gjer vegen vidare med algebra alt anna en enkel.

Eg oppdaga at det var fleire sider ved misopfatningane eg studerte som eg ikkje hadde sett for meg på førehand. Elevane hadde ulike forklaringar på det eg trudde skuldast ei type misoppfatning. For meg var derfor den rikaste erfaringa i dette arbeidet kor komplisert det er å finna ut av kva eleven faktisk tenkjer når han løyser oppgåver i matematikk. Er det ei misoppfatning som faktisk ligg bak eit feilsvar, eller er det feil som skuldast slurv, feil knytt til System 1-tankegang, eller er det rett og slett kognitiv svikt? Dette viste seg altså vera samansatt å finna ut av.

Det viser seg av dataa mine at ei oppgåvene i algebra som vert oppfatta som vanskeleg for ein 1P-Y-elev òg vil vera det for ein 1P- eller 1T-elev, men då i ulik grad. Misoppfatningar er med andre ord kompliserte, men dess viktigare å ha kjennskap til for å få til ei best mogleg tilpassa undervisning for eleven.

INNHALD

1 INNLEIING

Den seinare tida har det vorte større og større fokus på læraren som forskar. Når ein ser på læraren som forskar, snakkar ein om forsking *i* skulen, i staden for *på* skulen som ein gjerne får dersom forskaren ser på skulen frå utsida (Sollid, 2013). Det er ifølgje professor Tom Tiller (2013) ikkje enkelt å få lærarar (og leiing) til å forska i eigen kvardag. I den tilmålte tida ein har som lærar, synest ein ofte ein har meir enn nok med å få gjort alt ein er plikta til. Det å skulle forska på sida av, vil kunne bli sett på som ein forstyrrande og nedprioritert «sideaktivitet». Tiller erfarer likevel at dette er noko lærarar klarer å finna tid til, dersom dei ser nytten i prosjekta.

Lærarutdanninga er for tida i ein omstillingsfase der karakterkrava for å koma inn på studiet, og innhaldet i utdanninga, vert endra. Den nye grunnskuleutdanninga vert frå hausten 2017 gjort om til ei femårig masterutdanning, samtidig vert det og krav om mastergrad for å bli tatt opp til PPU (Gunnarshaug, 2016). Det er mykje snakk om resultata til norske elevar i PISA og TIMMS, der ein presterer under det mange ville venta, spesielt med tanke på brukte kroner per elev. Norske elevar sine resultat i matematikk, og då spesielt algebra, er noko som bekymrar politikarar landet over. Solberg-regjeringa, med kunnskapsminister Torbjørn Isaksen i spissen, har gjort fleire endringar for å heva lærarutdanninga, noko Isaksen meiner skal gje betre lærarar og betre status for lærarane:

Vi vet at gode lærere med solid faglig tyngde er det viktigste for at elevene skal lære mer. Derfor vil vi nå styrke det faglige innholdet i lærerutdanningen. Med en mastergrad vil lærerne stå bedre rustet til å hjelpe elevene med å utnytte hele sitt potensial..

og vidare;

Lærerutdanningene og læreryrket i Norge må i enda større grad kjennetegnes av god innsikt i forskning og utviklingsarbeid. Som masterstudenter vil framtidige lærere få vite mer om hvordan forskningsbasert kunnskap kan finnes og brukes. Med en utdanning som vektlegger forskningsbasert kunnskap, vil lærerne stå bedre rustet til å forbedre undervisningen. Dette er ikke bare et år til med den samme utdanningen. Masterutdanning er forskningsbasert, sier Røe Isaksen. (Kunnskapsdepartementet, 2014).

Så om ikkje læraren nødvendigvis direkte forskar så mykje i det daglege slik Tiller (2013) skriv om, så vil, ifølgje det norske kunnskapsdepartementet, det å kjenna til forsking, gjennom arbeidet med ei mastergrad, gjera at læraren er betre rusta til å forbetra undervisninga. Poenget er her at lærarar skal verta endå meir kompetente til å søka kunnskapar for praktisk handling i sitt daglege virke (Tiller & Brekke, 2013). Skal ein få læraren til å forska meir, må dette inn alt i lærarutdanninga (Tiller & Brekke, 2013), og det er akkurat det som no skjer etter dei nye krava frå hausten 2017.

Kanskje har læraren fått ufortent mykje ansvar for å forbetra elevane sine prestasjonar, det er jo elevane som skal læra, då kjem det ikkje berre an på læraren. Ifølgje eit konstruktivistisk læringssyn må eleven sjølv delta aktivt i læreprosessen, det hjelper lite kor god læraren er dersom eleven ikkje vil læra det ein heldt på med. Dette kunne ein diskutert i det vide og breie, men det skal eg ikkje gjera her. Det som er rett er at læraren skal gjera det han kan for å leggja best mogleg til rette for at elevane kan læra, gjennom solid og tilrettelagt undervisning. Det vil vera ulike meiningar blant politikarar og lærarar om ei mastergrad er noko som nødvendigvis gjer ein til ein betre lærar. Ein lærar med minste utdanning kan vera vel så god som ein med mykje utdanning, det avheng blant anna av evne til formidling, vurdering og det å sjå den enkelte elev.

Eg trur likevel at meir kunnskap innanfor dei rette områda vil gjera ein god lærar betre, fordi det gjev han større innsikt, meir fagleg tyngde og auka forståing. Hadde eg ikkje gjort det, ville eg aldri ha byrja med arbeidet med denne masteren. Etter å ha arbeidd i skuleverket i fira år var eg klar for å læra noko meir, gå i djupna på noko som var nyttig for meg som lærar. Eg ville finna ut meir om vanskane ein observerer og erfarer elevane har. Eg følte behovet for ein større fagleg tyngde og innsikt for å kunne hjelpe elevane på best mogleg vis.

Ein styrke ein kanskje har ved å ta ei masterutdanning etter fleire år i skuleverket, er at ein som lærar innhentar mykje empiri gjennom arbeidet ein gjer, noko som kan ha stor verdi for forskingsarbeidet. Erfaringar ein sit med gjer at ein kanskje i større grad ser kva emne ein vil finna ut meir av, kva som er viktig eller kvar skoen trykker som det heiter. Dette kan etter mi meining gjera at ein som lærar vil kunne ha stort utbytte av forsking i sin eigen kvardag.

1.1 Val av tema

Etter fleire år som matematikklærar i den vidaregåande skulen sit ein med mange inntrykk og meiningar om kva tema elevar meistrar og kva tema som går igjen som vanskelege. Eitt av tema som år etter år viser seg som eit vanskeleg og lite likt tema er algebra. Ein del elevar forstår ikkje kva bokstavar har å gjere i matematiske uttrykk. Kva skal ein med x-ar og y-ar, og kva med desse «$a$ppelsinene» og «$b$ananene»? I møtet med elevar i undervisninga har eg fleire gongar observert kva vanskar elevar sitt forhold til algebraen kan lage for dei. Sjølv enkle problem kan verta kompliserte grunna manglande kunnskap, eller misoppfatningar i algebra. Måten elevar prioriterer rekneoperasjonar er eit av temaa som gjorde at eg valde å sjå nærare på dette med misoppfatningar i algebra. Ei typisk oppgåve på dette er for eksempel $7 +$

$3 - 4 + 1$. Her er det ikkje uvanleg å få svaret 5 frå fleire elevar. Kva tenkjer elevane her, er det tilfeldige feil, eller er dette gjennomgåande feil, misoppfatningar dei sit med?

Temaet i denne oppgåva er altså misoppfatningar i algebra hjå elevar på første trinn i den vidaregåande skulen. Det er gjort ein heil del undersøkingar i grunnskulen og nokre i vidaregåande som kan knytast til dette temaet. Eg ynskjer vidare å sjå på korleis det står til med enkle algebrakunnskapar i vidaregåande skule, og då spesielt hjå elevar som kanskje ikkje er så glade i matematikk, elevar som typisk vel 1P eller 1PY første året.

1.2 Målet med oppgåva

Målet med denne oppgåva er å få ei betre innsikt i elevar sine vanskar og misoppfatningar i algebra, kva finn me av misoppfatningar i vidaregåande skule, og korleis tenkjer elevane som kan sjå ut til å ha desse feila? Gjennom arbeidet med denne masteren håpar eg å utvikla meg som lærar til å verta meir observant og få større forståing for problema elevar møter, og på denne måten og verta betre til å klara å fanga dette opp på eit tidleg tidspunkt. Ved å forstå betre korleis elevar som sit med misoppfatningar tenkjer, kan ein kanskje lettare klare å hjelpa dei til å omstrukturera sitt kunnskapsbilete, og slik hjelpa dei vidare til ei betre matematisk innsikt.

Eg har ikkje som noko mål at denne oppgåva skal kunna brukast for å trekkja store konklusjonar på tvers av kommune- og fylkesgrenser i Noregs land, generaliserbarheita er såleis ikkje prioritert. Oppgåva vil likevel kunne fortelja noko om korleis det står til med grunnleggjande algebrakunnskapar hjå elevar på vg1, kva problem møter dei og korleis tenkjer elevane når dei løyser algebraoppgåver.

1.3 Utarbeiding av problemstilling

Å arbeida med problemstillinga har ikkje vore ein enkel prosess. Korleis formulera og utrykkja den på best mogleg måte? Eg enda opp med eit hovudspørsmål med nokre underliggjande tema for å spissa oppgåva. I denne masteroppgåva vil eg som påpeika i førre delkapittel, sjå etter misoppfatningar i algebra på vg.1. Eg måtte her avgrensa meg til å sjå nærare på nokre utvalde misoppfatningar, desse vert gjort reie for i kapittel 3.3.1.

Forskingsspørsmål:

I kva grad finn ein misoppfatningar i algebra hjå elevar på 1.trinn i vidaregåande skule?

a. Korleis tenkjer elever som sit med desse misoppfatningane?
b. Finn ein desse misoppfatningane like hyppig uavhengig av kva matematikk-kurs eleven vel? (1P-Y, 1P eller 1T?)

2 TEORI

I dette kapittelet vil eg ta føre meg relevant teori for temaet i oppgåva. Eg vil gjere greie for val av læringssyn, kort litt om algebraen si historie, korleis omgrep kan verta danna hjå elevane og då òg korleis misoppfatningar kan oppstå. Vidare vil eg sjå litt på korleis algebraen vert innført i skulen, og på kva tidspunkt dette skjer. Er det ei endring på gang i forhold til synet på kor tid algebraen bør inn i skulen? I denne samanheng vil eg og presentera norske resultat i PISA og TIMMS, der norske elevar ser ut til å gjera det spesielt dårleg i algebra.

Det er klart at teori om misoppfatningar må få ein større del av plassen i dette kapittelet. Eg vil derfor presentera eit utval av misoppfatningar funne i tidlegare forsking som eg i utgangspunktet ynskjer sjå nærare på. Avslutningsvis i kapittelet vil eg ta for meg korleis diagnostiske oppgåver og undervisning kan brukast som verkty for å «nedkjempa» misoppfatningar hjå elevane.

2.1 Kunnskap og læringsyn

Gjennom historia har synet på kva kunnskap er endra seg fleire gongar. Fram til midten av 1800-talet var kunnskap sett på som noko fast og uforanderleg, «noko som er der». I denne perioden var det fokuset på innhaldet i undervisninga som dominerte (Imsen, 1999). I dette behavioristiske læringssynet skjer læring ved ei samhandling mellom stimulus og respons. Eleven er i dette læringssynet ein mottakar av kunnskap der læraren er formidlar av han. Seinare kom Dewey, som ein av dei første, med sitt syn på kunnskap som noko som var i stadig endring og utvikling. Ifølge Imsen (ibid) opna Dewey sitt syn på kunnskap opp for ein ny pedagogisk praksis, der vekta på undervisninga vart flytta frå eit sterkt fokus på lærestoffet, (eleven er ein passiv mottakar av kunnskap), over på eleven sine eigne erfaringsprosessar. Læring skjer ikkje gjennom ytre stimuli, men gjennom at eleven sjølv tar ei aktiv rolle, gjennom å *gjera* ting og dra nytte av erfaringar ein gjer (Imsen, 2014).

I dette masterprosjektet ser eg mot eleven si omgrepsdanning og forståing innan algebra. Kva metodar nyttegjer eleven seg av, og korleis tenkjer eleven i denne prosessen. Med eit hovudfokus retta mot elevar sine misoppfatningar i algebra, er det naturleg å sjå dette i eit konstruktivistisk læringsperspektiv. I konstruktivismen er det spesielt to store kjente namn som dei aller fleste har høyrt, nemleg Piaget og Vygotsky. Dei representerer to ulike retningar innanfor konstruktivismen, Piaget med sin individsentrerte konstruktivisme og Vygotsky med sin sosial konstruktivisme. Vidare i denne oppgåva legg eg hovudsakleg Piaget sitt læringssyn til grunn då eg studerer forståing/tenking hjå den enkelte elev og ikkje på samhandlingar elevane imellom.

2.1.1 Kognitiv konstruktivisme

Konstruktivismen ser på kunnskap som eit produkt av menneske sin «hunger» etter å forstå og forklara verda omkring oss (Imsen, 2014). Her er læring sett på som ein mental prosess der konstruksjon av kunnskap skjer i individet. Gjennom å gjere, sansa og vurdera verda kring oss, skapar me oss eit inntrykk og eit bilete av korleis verda er. På same viset konstruerer elevar sin eigen kunnskap, gjennom å gjera, vurdera og erfara. Skulen og klasserommet som læringsarena gjev elevane dagleg eit hav av inntrykk, intrykk som alle vert tolka og «silte» gjennom allereie eksisterande førestillingar og kunnskapar hjå eleven.

Ifølgje Piaget skjer ikkje læring ved at eit passivt menneske vert påverka av ei ytre «stimuleringskjelde», læring skjer ved at ein som menneske aktivt vel ut, tolkar og tilpassar denne stimuleringa til sitt eige «system» (Imsen, 2014). Piaget sin teori vert ofte omtala som kognitiv konstruktivisme, den har vekt på kva som skjer med eleven sine mentale strukturar under læring (ibid.). To omgrep som er viktige i Piaget sin læringsteori er omgrepa *assimilasjon* og *akkommodasjon*, desse heng nøye saman med Piaget sine kognitive skjema. *Assimilasjon* er enkelt forklart det å tolka og tilpassa nye situasjonar eller fenomen inn i allereie etablerte skjema utifrå det me sansar. Ein vil her altså bruka allereie kjent kunnskap for å tolka og forstå ein ny «problemstilling»/situasjon. I denne prosessen er det at til dømes misoppfatningar kan oppstå. Elevane vil prøva å tilpassa nyoppdaga fenomen inn i allereie eksisterande skjema, det er her ein kan tillegga fenomen eigenskapar dei ikkje har.

Dei ulike kognitive skjemaa kan operera samstundes for å forstå og tolka ein situasjon. Skjemaa kan og vera ordna i ulike mønster, ein snakkar då om kognitive strukturar. Etter kvart som nye stimuli vert sansa og tolka, kan ein kome til ein situasjon der eksisterande skjema ikkje lenger kan forklara situasjonen. Skjemaa må då endrast og utvidast, eller kanskje skjema vert sameina på eit høgare meir abstrakt nivå. Denne endringa er det Piaget kallar for akkommodasjon, det å revidera sine oppfatningar (Imsen, 2014). Ifølgje Piaget er det i akkommodasjonsprosessen at sjølve læringa skjer. Trong til indre likevekt er sjølve drivkrafta for denne prosessen. Det at nye inntrykk ikkje stemmer overeins med allereie eksisterande skjema, fører til ein kognitiv konflikt, ein konflikt som fører til at eksisterande skjema må endrast. Trongen til å endre skjemaa kan òg kome som eit resultat av alder og biologisk modning (Imsen, 2014). Motivasjon for læring skjer i møte med opplevingar/situasjonar der allereie eksisterande kunnskap/skjema ikkje strekk til for å forklara situasjonen, det oppstår kognitive konfliktar som igjen fører til læring (Dysthe, 2001).

Piaget presenterer to typar kunnskap, *figurativ* og *operativ*. *Figurativ kunnskap* er til dømes læring av faktakunnskap. Dette er til dømes pugging av reglar og algoritmar i matematikken, utan at det ligg noko forståing bak, såkalla mekanisk læring. Elevar kan til dømes nyttegjera seg av formlar utan å verken vita eller forstå kva symbola står for. Noko av skulda for denne figurative kunnskapen i matematikk kjem kanskje frå nettopp bruk av pugging av til dømes *multiplikasjonstabellen* eller *abc-formelen*, utan at det ligg noko forståing bak.

Operativ kunnskap er kunnskap og forståing av prosessane ein gjer seg nytte av i arbeidet med oppgåver. Operativ kunnskap kjem av det Piaget kallar for logisk-matematisk læring (LM-læring) og er eit resultat av assimilasjon og akkommodasjon (Imsen, 2014). Denne kunnskapen er varig og elevens eigen. Døme på operativ kunnskap kan vera forståing av ein logaritme i løysing av ei matematisk oppgåve. Eit kjenneteikn på ei slik forståing er at eleven evnar å reversera ein prosess, til dømes å kjenna til kva som er motsette operasjonar og kunne bruka dette til å løysa matematiske problem (ibid.).

2.1.2 Sosial konstruktivisme

Eg vil her gje eit veldig kort innblikk i sosial konstruktivisme. Som eg skreiv over, er fokuset mitt på tenkinga hjå den enkelte elev, det er derfor naturleg å vektleggja eit kognitivt konstruktivistisk læringssyn som presentert over. No er det likevel klart at ingen læringsteori er fullkomen og dekkjer alle sider ved læring. Ulike sider av læringsprosessen kan best forklarast med ulike læringsteoriar, slik supplerer dei kvarandre og gjev oss innsikt i det kompliserte fenomenet *læring*.

Vanleg kritikk mot den kognitive konstruktivismen er at denne ikkje tar omsyn til at læringa veldig ofte skjer i ulike sosiale settingar, og at språket spelar ei viktig rolle i denne læringsprosessen. Den sosiale konstruktivismen tek derimot omsyn til at læring ikkje berre skjer i hovudet til den lærande, men at læring òg må sjåast i samanheng med språket, den sosiale settinga det skjer i og kva kultur den lærande er ein del av (Imsen, 2014). Vygotsky meiner kunnskap ikkje kun er noko som er knytt til menneske sitt kognitive system, det er samstundes ein del av kulturen, utvikla gjennom hundrevis av år (ibid.). Alt frå fødsel av spelar kultur og språk ei viktig rolle i eit born si kognitive utvikling, og må derfor og sjåast på som ein viktig del av læringsprosessen. Ifølgje Dysthe (2009, s. 42) er den store forskjellen mellom Piaget og Vygotsky at medan Piaget såg på dei ulike utviklingstrinna det enkelte bornet er på, ser Vygotsky på den nære utviklingssona og det eleven kan gjera i samarbeid med ein som kan meir.

I skulen ser me dette samspelet mellom elevar og elev- lærar dagleg. Gjennom oppgåveløysing, lesing, studering og kommunikasjon utviklar elevane forståing, det triggar tenking og vurdering av allereie eksisterande kunnskap. Gjennom å ta aktiv del i læringsprosessen oppnår elevane det me som lærarar er ute etter, nemleg læring.

2.1.3 Omgrepsdanning

Eit karakteristisk trekk ved matematiske omgrep er at dei ikkje har vakse fram isolert, men eksisterer i eit nettverk av einskilde idear. Me kaller slike nettverk av idear for omgrepsstrukturar… (Brekke, 2000, s. 8).

Brekke seier at omgrepa vert bygde opp gradvis gjennom strukturar som gjer matematikken meiningsfull, og som gjer at me byggjer opp dugleikar i faget (ibid). Desse strukturane gjer at ein klarar å overføra og tilpassa prosedyrar, samt å retta opp i ting dersom ein hugsar feil (Brekke, 2000). At ein i matematikken nyttar omgrep riktig, er ein føresetnad for å forstå og for å verta forstått. Tydinga av eit omgrep kan likevel variera noko frå person til person, då kvar einskild person kan ha gjort ulike erfaringar og refleksjonar, noko som gjer at ein er på ulike stadium i omgrepsbygginga. Kva ein forstår av eit omgrep vil òg kunna vera situasjonsbestemt, då konteksten omgrepet vert tatt i bruk i, kan gje omgrepet ulik tyding (Brekke, 2000).

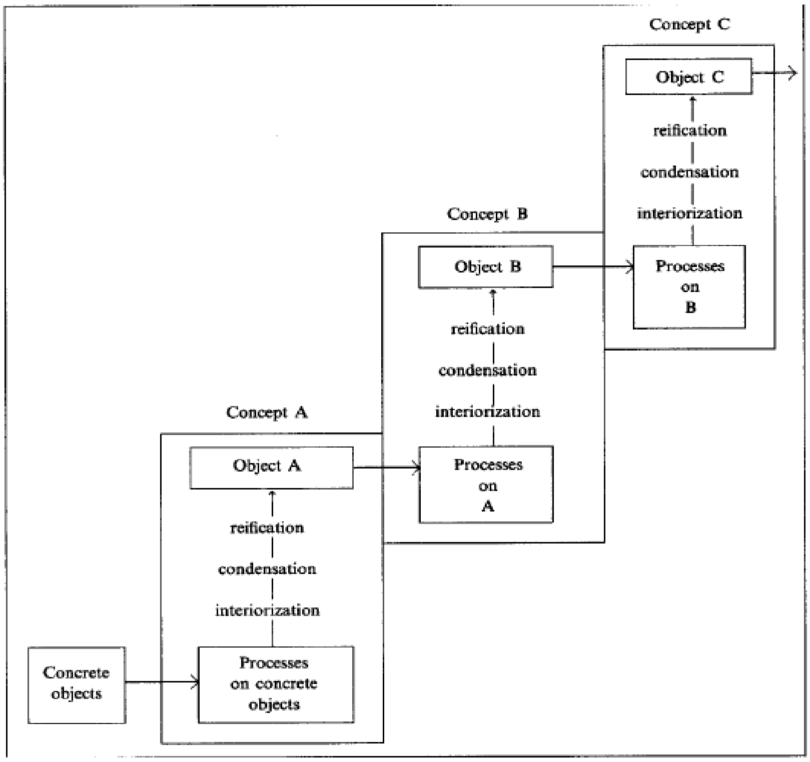
Det er presentert ei rekke omgrep kring matematisk kunnskap eller forståing. Eit kjenneteikn på mange av desse omgrepa er at dei ofte omhandlar det å vita *korleis* og det å vita *kvifor*. Forskjellen på å vita *korleis* ein skal gjere noko, og på det og å vite *kvifor*, kan vera veldig stor. Medan Skemp (2006) nyttar omgrepa *instrumentell*- og *relasjonell* forståing for å forklare denne samanhengen, nyttar Hiebert og Lefevre (1986) omgrepa *prosedyrekunnskap* (procedural knowledge) og *omgrepskunnskap* (conseptual knowledge), òg som omtala i kapittel 2.1.1.brukar Piaget omgrepa *figurativ*- og *operativ* kunnskap. «Kjært born har mange namn», det er tydeleg at her er eit viktige skilje i forståinga til eleven, kva klarar eleven å «gjera» og kva «forstår» eleven av det han gjer.

I artikkelen «*On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*» skriv Anna Sfard på si side om operasjonell og strukturell forståing i matematikk. Det Sfard omtalar som operasjonell forståing er mykje det same som Piaget omtala som *figurativ*, medan Sfard si forklaring av s*trukturell* forståing er omtrent det Piaget omtalar som *operativ* forståing. I følgje Sfard viser forsking at det for dei aller fleste startar med operasjonell forståing, som gjennom øvingar og arbeid kan utvikla seg til strukturell forståing (Sfard, 1991). Ho snakkar om at ein må kunne sjå på eit omgrep både *operasjonelt* som prosess og *strukturelt* som eit bilete eller objekt. Vidare hevdar ho, som tittelen òg peikar på, at desse to måtane å sjå eit omgrep på er naudsynte og avgjerande for å få ei god forklaring av omgrepet. Sfard støttar seg til Piaget sine teoriar, men som ein ser brukar ho nokon andre omgrep og ei litt vidare tolking.

Dei to tilnærmingane til Sfard kan på sett og vis verka motstridande, korleis kan noko vera både ein prosess og eit objekt samstundes? Sfard peikar på at læringsprosessar, og det å jobba med problemløysing, består av interaksjonar mellom operasjonelle- og strukturelle skjema på dei same problema, og at desse såleis er gjensidig avhengig av kvarandre (ibid).

Vidare snakkar Sfard om matematisk omgrepsdanning som ein prosess med tre fasar. Desse tre fasane er internalisering, kondensering og reifikasjon (Sfard, 1991). Å telja er ein prosess som fører ein til dei naturlege tala, subtraksjon fører ein til dei negative tala og det å arbeida med algebraiske manipulasjonar fører ein til funksjonar. Første fase i prosessen er at ein kan gjennomføra desse handlingane mentalt, altså at ein har *internalisert* handlingane.

Kondensering er utvikling av evna til å sjå heilskapen i prosessane utan å måtta gå gjennom kvar detalj i desse. Ved å samanlikna og kombinera ulike prosessar vil ein klara å generalisera meir og meir, dette fører igjen til at ein blant anna kan klara å veksla mellom ulike representasjonar av eit omgrep for å finna avgrensingar og moglegheiter. Eit konkret døme på dette er dugleik til å klara å addera og multiplisera positive og negative tal. (Sfard, 1991). Kor lenge eit omgrep er i denne kondenseringsfasen avhenger av kor lenge det er knytt til ein bestemt prosess. Når omgrepet ikkje lenger berre vert knytt til ein prosess, men vert sett på som noko sjølvstendig, som eit objekt uavhengig av uttrykksform, er eit omgrep reifisert, eller tingleggjort. Sfard omtalar dette siste steget som det vanskelegaste, men viktigaste for å koma opp til eit høgare nivå. Dette er det me som lærarar er særs glade for å observera hjå elevar, når ein ser eleven få den store «aha-opplevinga» av noko. Då det som har vore reine operasjonar og prosessar brått vert noko meir, eleven evnar å sjå heile biletet og får innsikt i kvifor ein gjer det ein gjer.



Figur 1 Sfards modell for omgrepsdanning.(Sfard, 1991, s.22, Figur 4)

Modellen til Sfard visar at det som er objekt på eit nivå, vert noko ein igjen utfører prosessar på på eit høgare nivå i omgrepsbygginga, og på denne måten byggjer ein, og utvidar, den matematiske forståinga og innsikta stein for stein. Sfard seier at forståing på eit høgare nivå er avhengig av denne objektifiseringa på «lågare» nivå. Samstundes seier ho òg at nettopp denne tingleggjeringa er avhengig av at ein gjer prosessar på godt innarbeidde operasjonelle omgrep frå den andre fasen på eit høgare nivå, for at desse skal verta reifisert som eit objekt eller strukturelt omgrep. (Dette kjem ikkje fram i skjemamodellen til Sfard). Det siste her viser at det å arbeida med noko som for eleven kan verke abstrakt og uforståeleg, kan vera med å gje eleven forståing for prosessar på lågare nivå, som igjen vil kunna gje meining til det meir abstrakte.

Samstundes som reifikasjon altså er naudsynt for å gje meining til prosessar på eit høgare nivå, kan det å gjera prosessar på eit høgare nivå vera naudsynt for at reifikasjon skal skje på eit lågare nivå. For mange elevar er den store utfordringa å klara å koma vidare i dette «omgrepshierarkiet». Dei vert gjerne verande i kondensasjonsfasen lenge og klarar kanskje ikkje å nå reifikasjonsnivået innanfor enkelte emne. Tidspresset ein har i skulen, med nødvendigheita av at ein går vidare i pensum, kan vera frustrerande for mange elevar. Dei meiner at å bruka meir tid på kvart emne ville hjelpt for å oppnå forståing og klara å henga med. Samtidig er det, ut frå Sfards teori, naudsynt å arbeida med omgrep på eit høgare nivå for å få full innsikt i eit omgrep. Det er klart ikkje noko enkelt svar på dette, for elevane sine utsegner kan vera subjektive og utan refleksjon over eigen innsats og tidsbruk på emnet. Det er likevel klart at dersom ein elev kun vert sitjande att med operasjonell forståing, vil omgrepsprosessen stoppe opp og reifikasjon vert fråverande. Dette kan føra til vanskar for eleven i vidare læringsprosessar, og gjer det vanskeleg å gå vidare i omgrepsdanninga og å oppnå forståing på eit høgare nivå. Her kjem me inn på noko av kjerna når det gjeld spørsmål knytt til vanskar i matematikkopplæringa, og her kan ein blant anna diskutera innføringa av algebra i skulen. Kor tid og korleis bør dette gjerast? Me skal sjå litt nærare på ulike synspunkt på dette i kapittel 2.3.

Konstruksjon av omgrep skjer gjennom refleksjon rundt erfaringar og eigne idear, samstundes skjer det òg gjennom vekselverknader med andre personar, gjerne med medelevar gjennom samtale og diskusjon (Brekke, 2000). Det å læra seg matematiske omgrep er med andre ord ein samansett prosess, med mange faktorar. Det er i nettopp denne omgrepsdanninga at misoppfatningar kan oppstå. I denne oppgåva kjem eg ikkje inn på dei sosiale aspekta i omgrepsdanninga, det aleine kunne vore emne for ei masteroppgåve.

2.2 Algebra

Dei fleste elevar og vaksne forbind algebra med rekning med bokstavar. At bruk av bokstavar i matematiske uttrykk er det som skil algebra frå vanleg rekning, eller aritmetikk, er heller ikkje ei uvanleg oppfatning. No er det fleire måtar ein kan sjå algebra og aritmetikk på. Desse områda har òg blir sett på som to ulike greiner i matematikken, knytt saman av pre-algebra (Schliemann et al., 2007), men ein kan òg sjå på aritmetikk som ein del av algebraen. Eg kjem nærare inn på dette i 2.1.3. Ser ein historisk på det, er det kanskje ikkje så unaturleg at ein tenkjer at algebraen er ei vidareutvikling av aritmetikken. Ein må ha grunnleggjande reknedugleik på plass dersom ein skal utvikla vidare talforståing. Sfard med fleire viser til at det finst fleire stadium i utviklinga av algebra. Ho seier òg at både historisk sett og når ein skal læra matematikk, oppstår algebraisk tenking lenge før ein har noko spesifikt notasjonssystem for algebraen (Sfard & Linchevski, 1994). Gjennom fleire tusen år handla matematikk om matematiske prosedyrar for å løysa ulike problem. Det var då operasjonell forståing av algebra som var gjeldande, den strukturelle algebraen kom mykje seinare.

2.2.1 Eit kort innblikk i algebraen si historie

Algebra var tidlegare brukt synonymt med likningsteori (Aubert, 2014). Alt babylonarane (2000-ca.1500 f.Kr.) hadde velutvikla algebraiske system som dei nytta blant anna til likningsløysing, det same hadde egyptarane (Holme, 2008). Funnet av leirtavla

Plimpton 322 viser at babylonarane kjende til den pytagoreiske læresetninga så tidleg som rundt 1800 år f. Kr., altså over 1000 år før Pytagoras levde. I mange tusen år vart algebraiske problem løyst ved hjelp av ulike oppskrifter, til dømes tabellar eller det å snakke seg gjennom problema. Det siste er ei operasjonell og munnleg form for problem-/likningsløysing, betre kjent som «Retorisk algebra» (Sfard & Linchevski, 1994).

Sjølve ordet algebra har opphavet sitt i tittelen til det mest berømte verket til matematikaren Abu Ja'far Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi, *Al-kitab al-muhtsar fi hisab al-jabr wa-l-al-muqabala* (ca.825 e.Kr.), korta til *Hisab al-jabr wa-l-al-muqabala (Holme, 2004).* Oversett til norsk vert den fulle tittelen *Den konsentrerte boken om regning (aritmetikk) ved al-jabr og al-muqabala* (ibid).

Omgrepa al-jabr (å setja saman) og al-muqabala (å setja lik, eller balansera) har opphavet sitt i ein løysingsalgoritme for likningar. Med moderne teikn vil overgangen frå likninga

$$8x + 5 = 9 - 2x$$

til

$$10x + 5 = 9$$

vera al-jabr, medan overgangen til

$$10x = 4$$

er al-muqabala. (ibid). Dette er velkjende operasjonar i likningsløysing også i dag, men her vil kanskje «flytt og bytt» vera det omgrepet eleven brukar på denne løysingsmetoden. (Det å balansera likningar er ikkje eit heilt ukjent omgrep for elevar, det er blant anna hyppig brukt i kjemien.). Al-Khwarizmi nytta framleis ein retorisk algebra, slik som t.d. babylonarane. Formaliseringa av algebraen finn ein spor av i Ahmes reknebok (1700f.Kr.), med termen hau (mengde) for den ukjente. Bokstavar for ukjente storleikar vart innført av François Viète rundt 1590 e.Kr. Han var òg den første til å bruka omgrepet *koeffisientar* (Holme, 2004). Viète er av somme omtala som algebraens far. Det er kanskje å tilskriva han vel mykje ære, men han er nok den som gjer at ein knyter algebra til bokstavrekning. Som nemnt innleiingsvis er det første mange elevar tenkjer om algebra at det nettopp er å rekna med bokstavar.

Innføringa av variablar i matematikk gjorde det mogleg å løysa problem som før ikkje var mogleg, og la slik til rette for den vidare utviklinga av matematikken.

2.2.2 Misoppfatningar

Konstruktivismen legg vekt på at ein konstruerer sin eigen kunnskap, og det er då i algebra, som i andre samanhengar, klart at ein kan konstruera seg feilaktige bilete eller generaliseringar, det ein kallar for misoppfatningar. Omgrepet misoppfatning vart kanskje nytta for første gang i artikkelen *Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics* av Erlwanger (1973) (eg kjem litt tilbake til denne artikkelen seinare i oppgåva, sjå kap.3.1). Elevar som innehar ei misoppfatning vil ikkje reagere på feil han/ho gjer, då dette er den overtydinga eleven har av eit omgrep. Det er ikkje uvanleg at personar med ufullstendige omgrep, som er tilfredstillande i ein samanheng, òg bruker desse i andre samanhengar der ein treng meir utfyllande omgrepskunnskap. Ein snakkar her om at eleven/personen overgeneraliserer reglar frå ei setting til ei anna.

Swan (2001) og Brekke (2000) viser til kor viktig det er å skilja mellom dei som gjer «vanlege feil» og dei som gjer feil grunna misoppfatningar dei har danna seg.

> *Some may be simply due to lapses in concentration, hasty reasoning, memory overload or a failure to notice salient features of a situation. Others, however, may be symptoms of deeper misunderstandings or may not be mistakes at all – they may be the result of alternative interpretations of a situation.*

(Swan, 2001, s. 147).

Mange meiner at vanskar i matematikk kjem av dårleg undervisning, dårlege lærarar, feil metodar i undervisninga og så vidare. Det kan nok dessverre vera ei viss sanning i dette, men når det gjeld misoppfatningar, kan ein ikkje seia at det åleine er svaret. Dårleg undervisning kan føra til vanskar i matematikk, men det kan òg god undervisning. Misoppfatningar kan ha opphav i undervisning, lærebøker og eleven si eiga tenking eller «brubygging» mellom ulike emne. Sjølv om misoppfatningar etter eit konstruktivistisk læringssyn vert konstruert av kvar einskild elev, og i så måte er individuelle, finn ein dei same misoppfatningar i matematikk over heile verda, uavhengig av undervisningsmetode, læreplanar og pedagogiske strategiar (Swan, 2001). Elevar skapar seg eigne alternative oppfatningar av matematiske omgrep på tross av korleis dei vert undervist (Swan, 2001). Det er naturleg at ved læring av nye emne, vil ein prøve å kopla den nye kunnskapen til allereie konstruerte tankar og strukturar ein ser den nye kunnskapen i samanheng med, og denne fasen er veldig utsatt for at ein kan etablera misoppfatningar.

Dersom ein ikkje vert merksam på slike misoppfatningar hjå eleven, vil dei heller ikkje kunna bli retta på. Brekke (2000) peikar på diagnostisk undervisning som eit viktig verktøy i denne prosessen (sjå 2.2.6), eit verktøy for å kunna oppdaga og hjelpa eleven og retta opp i misoppfatningar han/ho sit med. Brekke (2000) skriv:

*Misoppfatningar er oppfatningar eller idear som ikkje passar med sosiale konvensjonar, og er slik ikkje i samsvar med dei sosial konvensjonane. Det er desse sosiale konvensjonane som ligg til grunn for det vitskaplege omgrepet***.**

Viktigheita av rette oppfatningar/idear er med andre ord særs viktig for å kunna forstå, og bli forstått.

Som det kjem fram av sitatet til Swan på førre side, er det viktig at ein ikkje blandar meir overflatiske feil, såkalla «slurvefeil» (grunna dårleg tid, dårleg konsentrasjon, gjetting, osb.), med misoppfatningar. Det at ein elev *misforstår* ei oppgåve, treng heller ikkje ha noko med misoppfatningar å gjera. Misoppfatningar byggjer på etablerte idear og omgrep, som vert nytta av eleven i situasjonar der eleven finn dette høveleg og rett etter si oppfatning. Men ei avgrensa forståinga vil kunne føra til at eleven gjer feil i oppgåver der ei djupare forståing er naudsynt. Naalsund (2012) seier at det å gjera feil på grunnlag av misoppfatningar kan, i tillegg til å vera indikatorar på spesifikke hol i eleven si omgrepsforståing, vera eit teikn på manglande prosedyrekunnskap. Dersom ein ser tilbake på Sfard si omgrepsbygging (2.1.3), poengterte ho her viktigheita av å ha solid kunnskap i det ho kallar den operasjonelle fasen og i kondenseringsfasen, før ein kan gå vidare til den strukturelle fasen. Elevar kan, som omtala tidlegare, danna seg eigne bilete, eller konstruera eigne omgrep, som ikkje fell saman med vitskapleg forståing. Eleven dannar seg då det Sfard og Linchevski kallar for *pseudostrukturell kunnskap* (Sfard & Linchevski, 1994).

Misoppfatningar, som altså ikkje er tilfeldige, men byggjer på etablerte idear rundt omgrep, kan vera vanskeleg å «avlæra» seg. Eleven si forståing av eit omgrep er ofte danna innan eit avgrensa felt, og når eleven skal utvida kunnskapen sin til nye felt, må den etablerte forståinga utvidast eller endrast. Ta til dømes ein elev si oppfatning av at multiplikasjon er einstydande med gjentatt addisjon, og at når du multipliserer noko saman vert det større (Swan, 2001). Så lenge eleven berre har jobba med oppgåver av denne typen, er det dette som er multiplikasjon for eleven. Dette vil gje ei særs avgrensa forståing for omgrepet multiplikasjon, og kan by på store vanskar når eleven møter multiplikasjon med desimaltal og brøk. I slike situasjonar må omgrepet utvidast. Denne utvidinga av omgrepet kan hjå nokon føra til misoppfatningar. Brekke (2002) peikar òg på det at mange elevar ikkje skil mellom omgrepet multiplikasjon, kva idear som er knytt til multiplikasjon og utrekningmåten, og *multiplikasjonsalgoritmen* som ei anna viktig årsak til misoppfatningar i forhold til multiplikasjon.

2.2.3 Misoppfatningar, prosedyrefeil eller kognitiv svikt?

Det er viktig å presisera at feil som ved første augekast kan sjå ut til å skuldast misoppfatningar i nokre tilfelle kan skuldast andre typar feil. Som presentert i førre delkapittel seier blant anna Brekke at misoppfatningar er feil som er gjennomgåande. Feil som skuldast av ein «forteikns-glipp», tilfeldig prosedyrefeil eller det å ha misforstått oppgåva, er ikkje noko som må skuldast misoppfatningar.

Kahneman (2003, 2012) snakkar om ulike måtar hjernen gjer om informasjonen han tar inn. Informasjon som av hjernen vert sett på som enkel og noko han ikkje vil bruka tid på, vil ein typisk møte med det han kallar for ein system 1-respons. Her handlar hjernen raskt og effektivt utan noko djup analyse, det hender då at informasjonen vert tolka feil, og feil respons vil følgjeleg verta gitt. Dårleg konsentrasjon eller trøttheit kan føra til denne typen respons aukar. Det hjernen tolkar som avansert informasjon vert tenkt meir grundig igjennom, hjernen svarar her med det som Kahnemann omtalar som system 2-respons.

I arbeidet med oppgåver i matematikk vil feil grunna hjernen sin system 1-respons kunne oppstå. Vidare i denne oppgåva vil eg omtala feil grunna system 1-respons som *system 1-feil*.

Kvart enkelt individ har ei viss mengde informasjon som kan bearbeidast på ein gong. Denne mengda informasjon varierer frå individ til individ og utviklar seg gjennom heile livet. Automatiserte handlingar er noko som krev lite av kortidsminnet og er noko av grunnen til at nokon klarer å «konsentrere» seg om fleire ting samstundes (til dømes sjå TV, strikke og føra ein samtale samstundes) (Imsen, 2014). Avhengig av kva ein arbeider med, kan for mykje informasjon og tankar i hovudet på ein gong føra til det eg vil kalla for «kognitiv svikt», altså at ein ikkje klarer å fullføra ein tankeprosess. Swan omtalar dette som «momory overload» (Swan, 2001). Medverkande årsak kan her vera mangelfull erfaring med det ein arbeider med eller dårleg konsentrasjon og fokus, noko som igjen kan koma av dårleg motivasjon (Imsen, 2014).

Vidare i oppgåva vil hovudfokuset mitt vera mot feil som skuldast misoppfatningar, men eg vil og kommentera andre typar feil der det fell seg naturleg.

2.2.4 Misoppfatningar i algebra

Elevar si oppfatning av algebra byggjer på erfaringar dei har frå talrekninga (Brekke, Grønmo, & Rosén, 2000). Første steget inn i algebra-verda for mange elevar er å utvida omgrepa elevane har med seg frå aritmetikken slik at dei òg omfattar algebraiske omgrep. Her vil, ifølgje Brekke et al. (2000), tydinga av likskapsteiknet, bruk av bokstavar som generaliserte tal og variabelomgrepet vera første trinn. Som eg også peika på i kapittel 2.2.2, er det akkurat i denne utvidinga av omgrepa at misoppfatningar kan oppstå. I algebra har me mange kjente misoppfatningar, og desse har blitt vel dokumenterte i ei rekkje undersøkingar (Bell, Fischbein, & Greer, 1984; Bell, Swan, & Taylor, 1981; Booth, 1984, 1988; Brekke et al., 2000; Herscovics & Linchevski, 1994; Kieran, 1981; Linchevski & Herscovics, 1996; Naalsund, 2012; Russell, O'Dwyer, & Miranda, 2009; Swan, 2001)). I kapittel 2.2.4.1- 2.2.4.7 vil eg gå nærare inn på eit utval av desse misoppfatningane.

Før eg går inn på konkrete misoppfatningar, vil eg leggja fram ei inndeling av misoppfatningar eg fekk presentert under ei førelesning på Universitetet i Bergen våren 2014. Her delte Professor Gunnar Gjone[1] ved Universitetet i Oslo misoppfatningar inn i fire hovudkategoriar; *Overgeneralisering, Overspesialisering, Feilomsetjing og Avgrensa omgrep. Overspesialisering* vil seia at elevane kan leggja restriksjonar til omgrep som ikkje gjeldt for alle område for dette omgrepet. Ta til dømes det at ein elev meiner at rasjonale tal skal vera på forma $\frac{a}{b}$, han/ho vil då ha vanskar for å oppfatte 5 som eit rasjonalt tal. *Feilomsetjing* er feil som kjem av eleven si omsetjing mellom symbol, ord, grafar, formlar eller tabellar. Gjone peikar på at alle slike omsetjingar kan føra til vanskar for elevane.

Det at nokre elevar ikkje har tilstrekkeleg kunnskap om desimaltal kan gjera at dei overgeneraliserer kunnskap om heile tal, som til dømes at jo fleire desimalar eit tal har, jo større må det vera. Dette fell ifølgje Gjone inn i kategorien *avgrensa omgrep.* I overgeneralisering legg han til grunn det same som omtala tidlegare, nemleg det at elevar generaliserer tidlegare kunnskap på ein feilaktig måte, til dømes oppfatninga av at multiplikasjon gjer større medan divisjon gjer mindre. Dei idear som gjeld i ein situasjon treng ikkje gjelde i ein annan. Dette dømet kjem òg inn i kategoriane *overspesialisering* og *avgrensa omgrep,* og Gjone peikar med dette på at desse kategoriane på inga måte ekskluderer kvarandre, men at ei misoppfatning kan høyre inn under fleire av desse kategoriane.

2.2.4.1 Prioritering av rekneoperasjonar

I det elevane byrjar å jobba med rekneoperasjonar som består av meir enn to ledd, er dei i gong med prioritering av reknerekkjefølgja, og her kan mange misoppfatningar oppstå. Samansette uttrykk som $3 + 5(x + 1)$ fortel oss at parentesen $(x + 1)$ skal multipliserast med

[1] Førelesning om Misoppfatningar, diagnostiske oppgåver og diagnostisk undervisning, Gunnar Gjone , UiB Våren 2014.

5 og at ein deretter skal legge dette til 3, ein skal ikkje addere 3 og 5 og deretter multiplisera 8 med $(x + 1)$. I samansette uttrykk som dette, er multiplikasjon prioritert framfor addisjon. Tilsvarande skal ein i uttrykket $2 + 3 \cdot 4$ først multiplisera 3 og 4 for så å leggja dette til 2, (= 14). Ein del elevar sit med ei oppfatning av at alle slike uttrykk skal reknast frå venstre mot høgre. Ein legg då først saman $2 + 3$, får 5 som ein deretter multipliserer med 4, (= 20). Dei som sit med ei slik oppfatning har altså ikkje fått med seg prioriteringa av multiplikasjon framfor addisjon. Eit område der elevane sine idear frå aritmetikken kan påverke deira prestasjonar i algebra, er bruk av parentesar. Booth (1988) peikar på at mange elevar nemleg ikkje brukar parentes der dette kunne vore naturleg, grunna at dei meiner rekkjefølgja uttrykket er skrive i, gjev dei rekkjefølgja det òg skal reknast ut i (frå venstre mot høgre).

Medan nokre elevar altså meiner eit uttrykk skal reknast konsekvent frå venstre mot høgre, vil andre påstå at rekkjefølgja er heilt utan betyding. La meg presentera eit døme frå ei av Lesley Booth sine undersøkingar:

[Keith, thirteen years old, computing $18 \times 27 + 19$, *having just calculated* $27 + 19 \times 18$ *from left to right]*

Keith: Do … 27 plus 19, then multiply by 18. It's the same as the last one … it's just the other way around.

I: Right, well, suppose I came along and thought it meant multiply 18 by 27, and then add 19. Would I get the same answer?

K: Yes.

I: Which way would you do it?

K: Either! Either way. Depends what comes into my mind at the time.

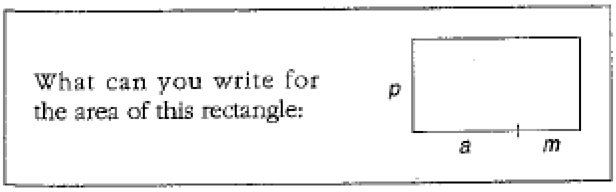
I: But would it matter which way you did it?

K: No, you'd still get the same answer.

Figur 2: (Booth, 1984, s. 55; 1988)

Utdraget frå intervjuet med eleven viser tydeleg at eleven sit med ei oppfatning av at svaret vert det same uavhengig av om ein endrar på rekkjefølgja i oppgåva.

Booth seier at det at elevane ikkje nyttar parentesar i aritmetikken kan føra til at elevar gjer feil òg i algebraiske samanhengar. I oppgåva nedanfor gav ein elev det algebraiske svaret $p \cdot a + m$. Eleven visste at dei to sidene a og m måtte leggjast saman først, men visste ikkje at dette måtte uttrykkast som $p \cdot (a + m)$, (Booth, 1988). Dette ville ført til at eleven ville operert med formelen $pa + m$ i vidare samanheng, noko som ville gjort at eleven ikkje fekk riktige svar.



Figur 3: (Booth, 1988)

Kvifor elevane gjer dei prioriteringar dei gjer, kan ha eit samansett svar. Linchevski og Livneh (1999) viser til korleis både strukturen av uttrykket, og tala i det, kan påverka eleven sine val av prioriteringar. I undersøkinga dei gjorde vart blant anna elevane gitt desse tre oppgåvene:

(1) $27 - 5 + 3 =$

(2) $167 - 20 + 10 + 30 =$

(3) $50 - 10 + 10 + 10 =$

Desse tre oppgåvene har same struktur, men dei gjev ulik grad av det dei kallar for «detatchment of a term from the indicated operation», det eg seinare vil omtala som «frikopling» eller å «setja parentes», (sjå kapittel 2.2.4.3 for ei djupare utgreiing av dette). Ein overvekt av elevane som fekk feil resultat her, delte opp uttrykka ved subtraksjonsteiknet. I uttrykk (1) rekna dei til dømes saman 5+3 = 8, og trakk dette frå 27. Det var 30% av elevane i undersøkinga som gjorde dette, medan prosentandelen som gjorde denne feilen i (2) og (3) auka til høvesvis 43% og 51% (Linchevski & Livneh, 1999, s. 190). Misoppfatninga som viste seg i dei tre oppgåvene over, er døme på oppgåver som i følgje Bell (1995) kan koma frå regelen «drop sign while operating», som er ei feiltolking der ein trur ein kan vente med, eller holde over, subtraksjonsteiknet medan ein reknar ut deler av uttrykket.

$-11 - 6 = -(11 - 6) = -5$ (Bell, 1995, s. 49).

Som ein ser av dømet over, kan det å sjå vekk frå forteiknet til 11 vera det same som å setja ein parentes rundt 11 – 6, som så vil gje –5 som endeleg svar. Dette viser at feil eleven gjer ikkje berre er avhengig av strukturen til oppgåva, men òg at tala er med på å påverke korleis elevane prioriterer. Dette fell saman med Bell et al. (1981) sine funn presenterte i artikkelen «*Choice of operation in verbal problems with decimal numbers*» som viser at når elevar vert presenterte for oppgåver med same struktur, vel dei ulike metodar for å løysa oppgåvene avhengig av dei gitte tala i oppgåvene. Tala i oppgåva kan altså vera med å påverka om ei misoppfatning vert gjeldande eller ikkje.

Brekke, Naalsund, Booth m.fl. seier elevane sine misoppfatningar i algebra ofte har rot i talrekninga. Naalsund (2012) seier at det at nokre elevar framleis er i den aritmetiske modusen, gjer at dei ikkje har utvida omgrepa sine til å gjelda i algebraiske settingar. Det kan vera fleire grunnar til at elevane ikkje har lært seg konvensjonane om prioritering mellom rekneartane i aritmetikken. Brekke peikar her på usikkerheita rundt kva bevisste erfaringar eleven har gjort seg med rekneartane, og om lærebøkene i stor nok grad vektlegg oppgåver som gjer at eleven vert fortrulege med desse.

2.2.4.2 Forståing av likskapsteiknet

«Equivalence of algebraic expressions is at the heart of transformational work in algebra» (Kieran & Saldanha, 2005, s. 193). Skal ein klara å beherska algebraisk rekning, er oppfatninga av ekvivalens avgjerande. Dersom ein ikkje har den naudsynte oppfatninga innabords, vil det kunna oppstå fleire misoppfatningar, og det heile byrjar med forståinga av likskapsteiknet.

Alt i første klasse, og for nokon før dei byrjar i skulen, har born ein viss kjennskap til dei enklaste rekneoperasjonane, det å addera eller subtrahera heile tal, og fleire har alt møtt likskapsteiknet mange gongar. I denne fasen tenkjer ein ikkje så mykje over dette teiknet, dei veit at det betyr at dei skal leggja saman eller trekkja frå dei gitte tala. Elevane lærer fort å skriva og lesa dei elementære symbola ein bruker i aritmetikken, men dei har ikkje nødvendigvis den same forståinga som me har (Kieran, 1981). Ein del elevar ser på likskapsteiknet som ein kommando om at noko skal utførast. Dei vil til dømes i uttrykket 3 + 4 = , lesa «=» som «blir lik», eller «er lik». Denne oppfatninga vert ikkje direkte feil, men kan gje elevane eit inntrykk av at likskapsteiknet er einstydande med at noko skal reknast ut. Den same oppfatninga kan ein få ved bruk av kalkulatoren. Ein tastar inn det matematiske uttrykket og trykker så «=», som då har tydinga «utfør» eller «rekn ut». Begge desse handlingane kan utan medvit føra til at elevar ser på likskapsteiknet som ein kommando, og med dette har eleven fått ei oppfatning av omgrepet som kan gje dei vanskar i møtet med til dømes tekstoppgåver, likningar og forenkling av algebraiske uttrykk. Brekke et al. (2000) peikar på at dette òg kan føra til den såkalla «venstre – høgre» effekten, og gjev følgjande døme på ei oppgåve:

«Eva hadde 75 kroner. Hun fikk 50 kroner av far. Hun kjøpte en CD til 98 kroner. Hvor mye hadde hun igjen?»

Her vil ifølgje Brekke (ibid.) mange elevar skrive utrekninga på denne måten:

$78 + 50 = 125 - 98 = 27$. Dette er utrekningar ein som lærar dessverre ser ein god del av på første trinn i vidaregåande skule, men ein kan òg observera dette i matematikk på høgare trinn (i programfag som til dømes S1 og S2) . Eleven kjem fram til rett *svar* med dette metoden, men føringa viser at eleven har ei avgrensa forståing av likskapsteiknet. Tala på høgre og venstre side av likskapsteiknet skal ha lik verdi, dette er avgjerande å få ei forståing av det å løysa likningar.

I artikkelen «Concepts associatet with the equality symbol», viser Kieran til ein studie gjort av Behr, Erlwanger og Nicholas (1975, sitert i ,Kieran, 1981, s. 319)) der 6.klassingar vart spurt om meininga til uttrykket «$3 = 3$». Her fekk dei svar som: «Det kan bety $6 - 3 = 3$ eller $7 - 4 = 3$», altså kom elevane med døme på kva utrekningar som kunne gje svaret 3.

Ifølge Kieran (1981) finn ein synet på likskapsteiknet som ein kommando, som at noko skal gjerast, hjå elevar frå første klasse og heilt opp til høgskulenivå. Riktig nok har dei eldste elevane då ei meir utvida forståing enn nemnt innleiingsvis i kapitlet, men manglar likevel ei grunnleggjande forståing av kva ekvivalens er. Det å på eit tidleg tidspunkt presentera oppgåver som riv og slit i oppfatninga av likskapsteiknet som ein kommando, er viktig for å unngå at denne misoppfatninga set seg. Skal likskapar som $7x + 11 = 13x - 19$ gje meining, må eleven ha oppfatninga av at det som står på kvar side av likskapsteiknet skal vera likt, altså at dette er ekvivalente uttrykk. Ein måte å førebu elevane på denne algebraiske tenkinga er å gje dei oppgåver som «tvingar» dei til å «tenkje algebraisk», men med aritmetiske oppgåver. Dette kan til dømes gjerast ved å gje elevar reknestykke med fleire ledd på kvar side av likskapsteiknet, gjerne med ulike operatorar.

2.2.4.3 «Frikopling» og «å setja parentes»

«Frikopling» og «å setja parentes» er to formar for prioriteringsfeil, men eg vel likevel å setja dei opp i eit eige delkapittel. Dette handlar om å «setja parentes», noko som kan gjerast «mentalt» eller «på papiret», eller om det å «lausriva eit tal frå forteiknet sitt», det eg kallar for «frikopling». Oppgåva $4 + n - 2 + 5 = 11 + 3 + 5$ er henta frå Kieran (1984) sitert i artikkelen *Structure sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts* (Linchevski & Livneh, 1999). I denne oppgåva viste det seg at mange av dei elevane som fekk feil svar. På eit vis putta på ein parentes rundt 2+5 slik at denne likninga vart «ekvivalent» med likninga $4 + n - 7 = 11 + 3 + 5$, noko som ikkje stemmer. Den same feilen dukka opp i fleire liknande oppgåver, og var for mange elevar ein gjennomgåande og ikkje tilfeldig feil. Dette er ein typisk feil som eg sjølv har sett i arbeid hjå elevar i vidaregåande skule, både ved løysing av algebraiske og aritmetiske oppgåver. Til dømes i reknestykket $3 + 5 - 4 + 2$, der det kan sjå ut til at ein del elevar først adderer tala før (3+5) og etter (4+2) subtraksjonsteiknet, før dei subtraherer dei to svara frå kvarandre. I undersøkinga til Linchevski og Livneh (1999) testa dei om nettopp denne «lausrivinga av eit operasjonsteikn frå leddet», «frikoplinga», «grupperinga», eller «parentessettinga» òg var å finna i aritmetiske oppgåver. Dei laga ei undersøking som bestod av tre intervju à 45 min gjennomførte på 53 sjetteklassingar. I studien deira les me at svært mykje tydar på at dette er feil elevane absolutt òg gjer i aritmetiske oppgåver. Dei fann blant anna ut at nokre av grunnane til denne typen feil kan vera at:

- eleven prioriterer addisjon framfor subtraksjon
- eleven prioriterer multiplikasjon framfor divisjon
- elevane «deler opp uttrykket» og reknar ut ein og ein del, som vil vera litt det same som det å sette inn parentes der dei meiner det er fornuftig, for å gjera utrekninga av uttrykket enklare. (Ikkje alle elevane fører denne parentesen, men ein del gjer dette.) (Linchevski & Livneh, 1999)

Grunnen til at eg lar denne feilen få så mykje plass her er at det er den feilen som fekk meg til å ville skrive om misoppfatningar, og er ein feil eg derfor vil testa i kartlegginga eg vil gjere, til dømes i oppgåve 2.

2.2.4.4 Bokstavar i algebra

Møtet med bokstavar i matematikken er vanskeleg for mange elevar, mykje av grunnen til dette er at ein bokstav kan ha fleire ulike betydingar (Birkeland, Venheim, & Breiteig, 2011; Brekke et al., 2000; Küchemann, 1978; Russell et al., 2009). Frå aritmetikken er elevane til dømes vant med at $5m$ kan bety 5 meter og tilsvarande kan $4s$ bety 4 sekund. I geometrien kjenner ein til at omkrinsen til eit kvadrat er gitt som $4s$ der s er sidekanten i kvadratet, her har altså $4s$ ei heilt anna betydning enn 4 sekund, her betyr $4s$ det same som «$4 \cdot lengda\ av\ sida\ s$». $\underline{s}$ er her ein variabel, avhengig av kva kvadrat me snakkar om. Det at bokstavar kan ha ulik betydning, og betydninga må lesast ut frå konteksten, kan føra til forvirring blant elevar i innleiingsfasen til algebra. For nokon av elevane held denne forvirringa fram resten av livet. Elevar kan altså sjå på bokstavar i matematikk på ulike måtar, og eleven si oppfatning av bokstavane vil og kunna variera frå oppgåve til oppgåve. Küchemann (1978) presenterer seks ulike måtar elevar kan tolka eller bruka bokstavar på i algebra. Det er; *Å finna verdien til ein bokstav, bokstavar som ikkje treng brukast, bokstavar som objekt, bokstav som ein spesifikk ukjent storleik, bokstav som eit generelt tal* og *bokstav som ein variabel.* Eg kjem vidare til å gå vidare inn på eit par av desse.

Det er vanleg at bokstavar i matematikken vert oppfatta som forkortingar for objekt, til dømes a for appelsinar og b for bananar (Brekke et al., 2000, s. 11). Denne «fruktsalatalgebraen» vert òg brukt i skulesamanheng, då kanskje for å visa at ein ikkje kan leggja saman $a + b$ og få ab, for kva meining gjev vel «appelsinbananar»? Denne måten å undervisa på kan hjelpa eleven der og då, med at ein hindrar at eleven får misoppfatninga at ein her kan «setja inntil». Men på andre sida kan dette i staden gje eleven eit inntrykk av at alle bokstavar står for eit objekt. Samstundes peikar Booth (1988) på at nokre elevar kan forenkla $2a + 5b$ til $7ab$, ved å tenka at ein då har 7 (appelsinar-og-bananar), ein har jo trass alt 7 frukt til saman, og "ab" fortel oss at dette er appelsinar og bananar. Anten bokstavar vert sett på som forkortingar for objekt, som forkortingar eller symbol for eit konkret objekt, eller som objekt i seg sjølv, gjer desse måtane å tenkja på at ein unngår å sjå på bokstaven som ein variabel (Brekke et al., 2000).

Bokstavar kan òg bli sett på som ein spesifikk ukjent storleik. Eleven kan i desse tilfella klara å utføra ulike rekneoperasjonar med bokstaven, men har likevel ei avgrensa oppfatning av den ukjente. Küchemann (1978) viser til at i oppgåva $e + f = 8$, $e + f + g = \ldots$?, vil eleven kunna akseptera det opne svaret $8 + g$, men ein del elevar vil føla at dette framleis er noko som skal utførast, dei aksepteter gjerne ikkje opne svar.

2.2.4.5 Korleis handsame opne svar?

Som tidlegare omtala, er det elevane sine erfaringar frå aritmetikken dei byggjer vidare på når dei byrjar med algebra. Dei utvidar sine allereie eksisterande omgrep til å gjelda for nye felt. For mange gjeld dette ei utviding av tydinga til likskapsteiknet, tydinga av variabelomgrepet og bruk av bokstavar som generaliserte tal (Brekke et al., 2000).

Misoppfatningane som går på at likskapsteiknet vert sett på som ein kommando, og den tidlegare omtala «høgre-venstre» tenkinga, kan òg gje elevane problem med å akseptera opne svar, som til dømes $a + 3$. Dette kan gjera at elevane overgeneraliserer frå til dømes summering av brøk og heile tal (det at $2 + \frac{1}{3}$ kan skrivast som blanda tal på forma $2\frac{1}{3}$) , som igjen kan føra til at eleven skriv $a + 3 = 3a$ eller $a3$ (Booth, 1988). Dette vil eg vidare omtala som «å setja inntil».

Som eg skreiv i førre delkapittel, kan dette òg koma av ei manglande forståing av bokstavar i matematikk, eleven evnar ikkje å sjå på bokstaven som eit ukjent tal eller variabel. Frå aritmetikken er elevane vande med at det som skal stå på høgre sida av likskapsteiknet er eit tal, eit «endeleg svar». Mange vil derfor ikkje rekne $a + 3$ som eit svar og løyser dette ved å setja dei to ledda saman til eitt. Denne oppfatninga, at $a + 3$ er det same som $3a$, vil følgjeleg òg laga vidare problem for eleven når meir komplekse uttrykk skal løysast. Dette er feil som viser seg spesielt hjå elevar som har sitt første møte med algebra, men det er òg feil ein kan observera seinare i skulegangen. I undersøkinga mi er dette ein av typen feil eg vil sjå nærare på, blant anna i oppgåve 4 og oppgåve 6. Eg ser det som svært interessant å sjå om, og i kor stor grad, den feilen er å finna hjå elevane som går på første trinn i vidaregåande skule.

2.2.4.6 Likningar

Ein ikkje uvanleg del av innleiinga til algebra er at elevar vert presenterte for samansette aritmetiske likskapar, altså ein møter eit tosidig aritmetisk uttrykk, for så å bli bedt om å «algebraifisera» det. Kieran presenterer følgjande døme:

The next step, introducing the concept of equation, involved taking one of the student's arithmetic identities, e.g.,

$$7 \times 2 - 3 = 5 \times 2 + 1$$

and hiding any one of the numbers. The hiding was done at first by a finger:

$$7 \times \;\; - 3 = 5 \times 2 + 1,$$

then by a box:

$$7 \times \square - 3 = 5 \times 2 + 1,$$

and finally by a letter:

$$7 \times \boldsymbol{a} - 3 = 5 \times 2 + 1.$$

Figur 4 (Kieran, 1981, s. 322)

Dette er ein vanleg innfallsvinkel til likningar, og vert brukt av mange lærarar over heile verda. Å lata det ukjende talet vera representert med eit ope felt, ein firkant, før det vert presentert med ein bokstav, er vanleg i lærebøker sjølv på vidaregåande trinn. Dette gjeld blant anna læreboka Sinus 1P (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl, & Hals, 2014)

SINUS MATEMATIKK

1.7 Førstegradslikninger

OPPGAVE 1.70

a) $x + 5 = 12$

$\boxed{7} + 5 = 12$

$\underline{\underline{x = 7}}$

b) $x - 3 = 5$

$\boxed{8} - 3 = 5$

$\underline{\underline{x = 8}}$

c) $2x = 8$

$2 \cdot \boxed{4} = 8$

$\underline{\underline{x = 4}}$

d) $-4x = 12$

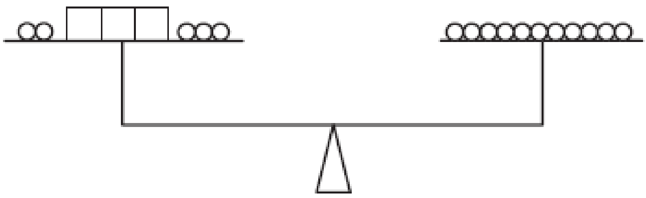
$-4 \cdot \boxed{-3} = 12$

$\underline{\underline{x = -3}}$

Figur 5 Utklipp av løysingsforslag frå nettsida til Sinus 1P (Oldervoll et al., 2014)

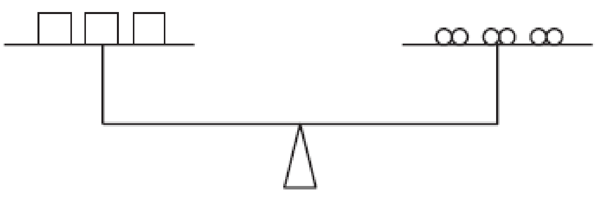
Det ligg i korta at dersom eleven sit på misoppfatningar kring likskapsteiknet, vil dette føra til vanskar i møtet med likningar. Forståinga av at ulike uttrykk for same likning er ekvivalente, er ein føresetnad for å kunna forstå og sjå meininga med dei operasjonane ein gjer knytt til likningsløysing, og er avgjerande for å kunna få ei vidare forståing for blant anna funksjonar og rekkjer.

Det finst eit sett reglar som ein ofte brukar når ein løyser likningar. Ein av dei grunnleggjande reglane er å addere eit tal, eller å subtrahere eit tal, på begge sider av likskapsteiknet. Elevane snakkar ofte om regelen «flytt og bytt», ein regel som bør koma i kraft av forståing (Birkeland et al., 2011). Ein kan òg multiplisera eller dividera med same tal på begge sider av likskapsteiknet. I meir samansette uttrykk er det her naudsynt at eleven er fortruleg med reknerekkjefølgja og handtering av multiplikasjon og divisjon med brøkar, parentesar og potensar. Ved å bruka desse reglane omformar ein likninga, og endar opp med eit utrykk for den/dei ukjente i enkle likningar. Dette er den mest vanlege måten å arbeida med likningar på, men det er ikkje uvanleg i introduksjonen til likningar å samanlikna likninga med ei vekt (sjå under), eller at ein vidarefører «fingeren over»-metoden (sjå ovanfor), og på denne måten ser på likninga litt «utanfrå». Lat oss sjå på to døme. David Foster (2007) viser korleis ein kan løysa likninga $3x + 5 = 11$ med hensyn på x, ved å setja den opp som ei vektstang.



Figur 6 Likning presentert som ei vektstang. (Foster, 2007, s. 166)

På venstresida har me tre boksar, som kvar representerer den ukjente x, og fem klinkekuler. På høgre sida har me elleve klinkekuler (sjå Figur 6). Ein tar så vekk fem kuler frå kvar vektskål, på denne måten er vekta framleis i balanse. Dette er tilsvarande med å subtrahera 5 på kvar side av likskapsteiknet. No er det berre tre ukjente boksar igjen på venstre sida, ein deler då opp den resterande mengda kuler på høgre sida i tre like delar.



Figur 7 (Foster, 2007)

Ein ser då at kvar boks representerer det same som kvar del, altså 2. Det er viktig at bruken av vekta som eit bilete på likninga må gjerast for å tydeleggjera prinsippet som gjeldt for både likninga og vekta for eleven, nemleg det at venstre og høgre side er lik. Framstillinga over kan vera med å utvida eleven si forståing av likskapsteiknet, og dermed unngå misoppfatninga knytt til det.

$$5 - \frac{6}{3x-1} = 2$$

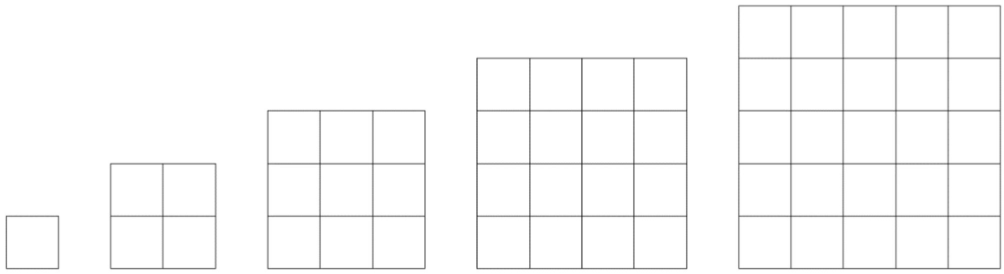
Denne oppgåva kan løysast ved å først multiplisera alle ledda med nemnaren og vidare løysast på tradisjonelt vis, men ein kan òg nytta «fingeren over»-metoden. Birkeland et al. (2011, s. 275) løyser oppgåva omtrent på denne måten: Legg me fingeren over $\frac{6}{3x-1}$, får likninga forma $5 - \square = 2$. Ein ser då lett at talet under fingeren må vera 3, altså må $\frac{6}{3x-1} = 3$. Den ukjente står no i nemnaren, me heldt over nemnaren og får då $\frac{6}{\square} = 3$, altså må det som er under fingeren vera lik 2. Det gir igjen at $3x - 1 = 2$, me heldt fingeren over $3x$ og ser då at $3x = 3$ og det gir at $x = 1$. Her ser me at fleire vegar kan føra ein i mål, men i møte med avanserte likningar vil ein vera avhengig av algebraisk notasjon og metodar, og då er det viktig at den grunnleggjande forståinga er på plass. Eg vil sjå på elevar si forståing av likningar i oppgåve 1, oppgåve 8 og oppgåve 9.

2.2.4.7 Talmønster

Frå hovudområdet i læreplanen vil eg sitera følgjande:

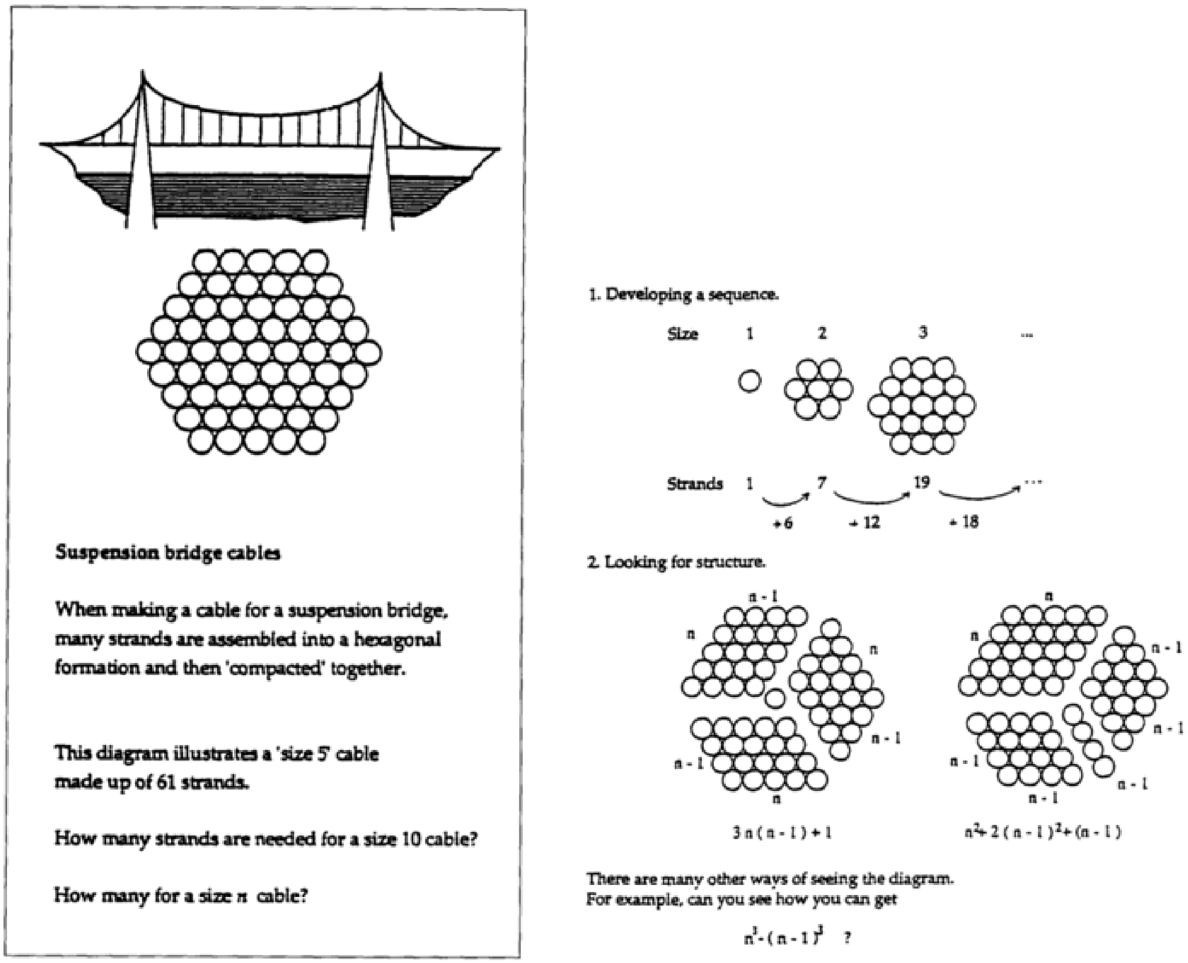
... tal og algebra handlar om å utvikle talforståing og innsikt i korleis tal og talbehandling inngår i system og mønster. Med tal kan ein kvantifisere mengder og storleikar. ... ... Algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar. (UDIR, 2013)

Bruk av talmønster er ifølgje Brekke et al. (2000) eit viktig verktøy for å binda algebra nærare til aritmetikken. Arbeid med, og utforsking av, talmønster i blant anna geometriske figurar og i rekkjer, er vonleg med på å gje eleven innsikt slik at han igjen kan beskriva og analysera mønster og samanhengar som han generaliserer ved hjelp av algebra. Elevane kan til dømes setja saman mindre kvadrat til større kvadrat for å studere kvadrattala, sjå Figur 8.



Figur 8 Figur som viser dei 5 første kvadrattala

Bell (1995) viser til ei oppgåve som går på bru-kablar, den er ikkje av enklaste sort, men den viser to ulike strategiar for å finna eit svar på problema:



Figur 9 Viser brukabel-problemet til venstre, og løysingar til høgre(Bell, 1995, s. 68-69, Figur 12 og 13)

Ved å teikna, skriva ned tal og endringar mellom kvar figur, kan eleven utforska og studera desse i jakta på eit mønster. Strategien eleven brukar i slike «mønster-oppgåver» kan vera avgjerande for i kva grad eleven evnar å finna mønsteret, og om eleven evnar å generalisera dette til å gjelda for eit vilkårleg tal (m, n, k eller kva det måtte vera aktuelt å bruke..) (Brekke et al., 2000). Slike oppgåver er ofte bygd opp på ein slik måte at eleven i dei første oppgåvene kan telja eller teikna seg fram til løysingane, medan ein følgjer opp med å bruka eit så stort tal i rekkja at å telja eller teikna vert vanskeleg, og prøver med dette å få eleven til å finna ein rekneregel. Til slutt spør ein gjerne korleis det vert med figur n. På denne måten prøver ein å hjelpa eleven inn på søken etter ein generell modell/formel. Ved å jobba med slike oppgåver, opplever eleven matematikken som ein aktiv prosess, der han/ho sjølv tar del i å byggja opp eigen kunnskap (Birkeland et al., 2011). Oppgåve 10 i kartleggingsundersøkinga er ei slik oppgåve.

2.2.5 Diagnostiske oppgåver og testar

Ein stor del av matematikkoppgåvene som eg nyttar meg av i kartleggingsundersøkinga i denne masteroppgåva er såkalla diagnostiske oppgåver. Dette er naturleg då diagnostiske oppgåver har til hensikt å avsløra misoppfatningar hjå elevane (Berg, 2013). Ulike kartleggingsverkty i matematikk er derfor ofte basert på nettopp diagnostiske oppgåver.

Ei utfordring ein møter i arbeidet med å laga diagnostiske oppgåver er å klara å laga oppgåver som testar for den misoppfatninga ein har tenkt. Dersom ein ikkje tenkjer grundig nok igjennom moglege løysingar kan ein enda opp med ei oppgåve som til dømes testar for fleire misoppfatningar. Ei slik oppgåve vil ha avgrensa diagnostisk verdi, då den ikkje nødvendigvis avslører ei misoppfatning, men at det kan vera fleire misoppfatningar som fører til same svar.

I arbeidet med å lage diagnostiske oppgåver bør ein derfor utforme oppgåver som kun testar for ei misoppfatning om gangen, slike oppgåver vil gje mest informasjon til læraren (Russell et al., 2009). Dersom elevane til dømes skal gjennomføra ei diagnostisk prøve, bør ein derfor tenkja nøye gjennom kva oppgåver ein lager/bruker slik at ein veit oppgåva testar det den er meint til å testa. Ein bør dessutan og unngå bruk av oppgåver der eleven kan få riktig svar sjølv om dei har ein feilaktig oppfatning av omgrepet (Brekke, 2002). Oppgåva $3 \cdot 4 + 2$ er ikkje ei diagnostisk oppgåve. Her vil eleven kunna få rett svar ved å rekna frå venstre mot høgre, sjølv om eleven sit på misoppfatningar knytt til prioritering. Derimot vil oppgåva $3 + 4 \cdot 2$ vera ei diagnostisk oppgåve, då den avslører om eleven prioriterer multiplikasjon framfor addisjon, eller om eleven følgjer «venstre-høgre» metoden. Eit anna døme på ei oppgåve som gjev liten diagnostisk informasjon, er $0{,}24 : 2$. Her kan eleven koma fram til rett svar sjølv om eleven sit med oppfatninga av at desimaltal er par av heile tal. Reknestykket $0{,}12 : 2$ er på andre sida ei diagnostisk oppgåve, då elevane med denne misoppfatninga mest truleg vil svara $0{,}6$ på denne oppgåva og dermed avsløra misoppfatninga (Brekke, 2002, s. 16).

Brekke var med på å utvikla KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisninga), som blant anna fokuserer på problem elevar og lærarar møter i arbeidet med å byggja matematiske omgrep (Brekke, 2000). Her er det utarbeidd fleire sett med diagnostiske oppgåvesett, blant anna i algebra, talrekning og funksjonar. Brekke (2002) poengterer at diagnostiske oppgåver/prøvar gjerne kan koma før ein underviser i det aktuelle emnet. Dataa frå ei diagnostisk prøve kan ein blant anna nytta til:

• å identifisere og framheve misoppfatninger som elevene har utviklet, også uten at det trenger å ha vært noen formell undervisning i det en vil undersøke,

• å gi læreren informasjon om løsningsstrategier elevene bruker for ulike typer av oppgaver,

• å rette undervisningen mot å framheve misoppfatningene, for på den måten å over-vinne dem og de delvise begrepene,

• å utvikle elevenes eksisterende løsningsstrategier,

• å måle hvordan undervisningen har hjulpet elevene til å overvinne misoppfatningene ved å bruke de samme oppgavene både før og etter undervisningssekvensen.

(Brekke, 2002, s. 16)

«Kartleggingsprøver og læringsstøttende prøver er verktøy som lærere kan bruke til å få et bedre grunnlag for å iverksette tiltak på et tidlig tidspunkt…» UDIR (2015). Bruk av ferdigutvikla kartleggingsprøvar set krav til at læraren, som har elevane/eleven som vert kartlagt, veit kva prøva måler, og korleis. Dette er altså noko læraren må bruke tid på. Mange slike kartleggingstestar er digitale, og eleven skal ofte velje mellom ulike alternativ i oppgåvene. Slike testar vil kunna gje usikre opplysningar då det alltid er ein viss sjanse for at eleven har tippa på alternativa. Ein anna faktor som må tas med i vurderinga er om spørsmålstypen er av kjent karakter for elevane, gjenspeglar testen arbeidsmåtar som elevane er vant med?

Oppfølgjinga av elevar som kjem dårleg ut i ei slik kartlegging er avgjerande for om det gjev meining å gjennomføre ei slik kartlegging. Undersøkingar med formålet å hjelpa elevane til meir kunnskap må følgjast opp av læraren, då gjerne i dialog med eleven/elevane. Kartleggingsprøvar kan som Brekke påpeikar, med fordel nyttast i forkant av undervisninga, det kan blant anna hjelpa læraren med å leggje opp ei diagnostisk undervisning (Brekke, 2002).

2.2.6 Diagnostisk undervisning

I artikkelen «Purpose in School Algebra», forklarar Alan Bell diagnostisk undervisning (i algebra) som ein vekselverknad mellom to hovudområde; «main purpose of algebra» og «focused activities» (1995). Når Bell snakkar om «main purpose of algebra» viser han til det å; (a) generalisera, (b) setja opp og løysa likningar, og (c) arbeida med formlar og funksjonar (Bell, 1995). Med «focused aktivities» tenkjer Bell i hovudsak på framprovoserte kognitive konfliktar og målretta diskusjonar mellom elevane rundt kritiske punkt (Bell, 1995). Bell viser til fleire undersøkingar der det viser seg at det å arbeida på denne måten gjev ei betre langtidslæring (Bell, 1995). Poenget med desse framprovoserte kognitive prosessane er å «tvinga» den lærande til å måtta gå igjennom ein akkommodasjonsprosess, før ny kunnskap kan assimilerast (Berg, 2013).

I KIM-prosjektet byggjer Brekke (med fleire) sitt arbeid blant anna på Bell sine funn, der det, som skrive i førre avsnitt, kjem fram at elevar som følgjer ein slik «diagnostisk» undervisningsmodell får auka langtidslæring (Brekke, 2000).

Formålet med diagnostisk undervisning er å finna ut av kva erfaringar elevane treng gjera gjennom undervisninga for å byggja opp det aktuelle omgrepet. Denne undervisninga er basert på at det er mogleg å identifisera idear og tankar elevane har til det føreståande temaet, og kva eventuelle misoppfatningar og hindringar elevane kan oppleva i omgrepsutviklinga i matematikk (Brekke, 2002). Brekke delar diagnostisk undervisning inn i fire fasar:

1. Identifisera misoppfatningar og delvis utvikla omgrep hjå elevane
2. Tilretteleggja undervisninga slik at eventuelle misoppfatningar eller delvise omgrep vert framheva. Det å skapa kognitiv konflikt hjå eleven.
3. Løysa den kognitive konflikten gjennom diskusjonar og refleksjonar i undervisninga
4. Bruka det utvida (eller nye) omgrepet i andre samanhengar.

Forsking tyder på at denne typen undervisning kan fremma langtidslæringa i matematikk (Bell, 1995). Det at ein gjennom diagnostiske oppgåver får elevane sine misoppfatningar fram i lyset, og det at elevane får diskutert og bearbeida desse, kan føra til at dei omstrukturerer allereie etablerte skjema slik at dei vert kvitt desse misoppfatningane, eller unngår å etablera dei. På eit kurs om læringsvanskar 8.mai 2015, sa professor Snorre A. Ostad at det er vanskeleg å få elevar ut av spor dei er komne inn på. Altså dersom misoppfatningar er etablerte, kan dei vera veldig vanskeleg å bli kvitt. Ostad seier og at jo lenger ein er komen i skulegangen/læringsløpet, jo vanskelegare er det å verta kvitt slike misoppfatningar. Ein del av dei som slit med matematikk, er elevar som har ei såkalla forseinka omgrepsutvikling. Nokon treng meir tid å læra seg omgrep enn andre. Det er derfor særs viktig at kartlegging og tiltak vert gjort på eit tidleg tidspunkt. Ifølgje Ostad var det, i arbeidet hans med MUM-prosjektet[2], ingen som det vart sett inn tiltak på som enda opp med store matematikkvanskar vidare i utdanningsløpet.

2.3 Algebra i skulen

I læreplanen for matematikk fellesfag 1P finn me følgjande:

Hovudområdet tal og algebra handlar om å utvikle talforståing og innsikt i korleis tal og talbehandling inngår i system og mønster. Med tal kan ein kvantifisere mengder og storleikar. Området tal omfattar både heile tal, brøk, desimaltal og prosent. Algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar. Algebra blir òg nytta i samband med hovudområda geometri og funksjonar. (UDIR, 2013)

Å læra algebra er i stor grad å byggja vidare på matematikken ein lærer dei første åra i grunnskulen. Det å kjenna att mønster og regelmessighet når elevane jobbar med tal og rekning er fyrste steg inn i algebraen. Dei byrjar her utvidinga av kunnskapar i matematikk, byggjer forståing og legg grunnlaget for generaliseringar dei vil kunna gjera seinare i møte med algebra. (Utdanningsdirektoratet: Læringsstøttande prøvar, Sept.2012, Algebra).

De trenger å få gjort seg opp generelle tanker om resultatet vi får ved å utføre regneoperasjoner med tall, og ikke bare rette oppmerksomheten mot å få riktige svar på sine utregninger. (ibid).

Erfaringsmessig er det veldig mange elevar som høver til siste del av sitatet ovanfor. Dei er stort sett mest opptatte av å få riktige svar på sine utrekningar. Desse elevane vil kunna slita med å koma seg vidare i omgrepsdanninga si.

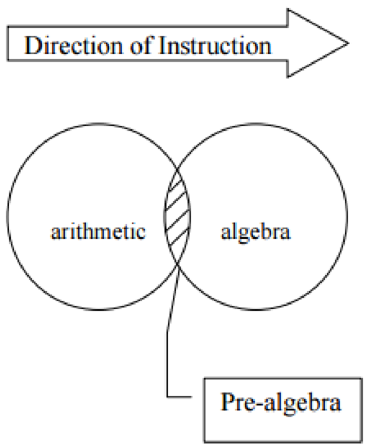
2.3.1 Tidleg algebra

I dag har vi en tendens til å heller prøve å reparere på det som er gått galt: vi tilfører algebra i ungdomstrinnet for at elever ikke skal ryke ut i videregående. Men så ser vi at de ikke kan nok algebra når de kommer til ungdomstrinnet, så da må vi ha mer på mellomtrinnet. Hvis vi hadde tilført tilstrekkelig med ressurser på de første trinnene, så ville vi unngå denne formen for reparasjonsvirksomhet. (Brøyn & Nortvedt, 2013).

[2] MUM står for «matematikk utan matematikkvanskar», og er eit prosjekt leia av professor Ostad retta mot elevar med matematikkvanskar.

I sitatet over poengterer Nortvedt at mange av problema elevane møter i algebra kunne vore unngått dersom ein hadde satsa nok på matematikkundervisninga på eit tidleg tidspunkt. Aritmetikk og algebra er to svært nært knytte omgrep. *Korleis* ein lærer aritmetikk, kan derfor ha mykje å seia for korleis eleven forstår algebra. No er det ulike måtar ein kan sjå på samanhengen mellom aritmetikk og algebra. Den tradisjonelle måten å sjå dette på, er at aritmetikk kjem først, tett fylgt av algebra. Schliemann (m.fl.) peikar på dette som den regjerande tenkemåten i mange skulesystem. Lærebøker, læreplanar og undervisning følgjer modellar etter denne teorien, altså at aritmetikk kjem før algebra. Algebra kjem først inn i læreplanen i norsk skule i 5-7 årstrinn. Blanton og Kaput peikar på at det er viktig at ein innfører algebraisk tenking tidleg i læringsprosessen, og ikkje etter mange år med læring av aritmetikk først, for å legge grunnlag for algebra. Dei peikar på viktigheita i å trena opp elevane i å sjå matematiske strukturar og samanhengar alt frå første stund, for på den måten å få ei djupare forståing for matematikken. Ein bør ikkje sjå på aritmetikk og algebra som to ulike ting, men på aritmetikk som ein del av algebraen (Blanton & Kaput, 2011).

Figur 10 viser korleis Schliemann et.al. meiner at den tradisjonelle undervisninga i USA (og Noreg, med fleire) er lagt opp. Her vert aritmetikk og algebra undervist mest som to ulike



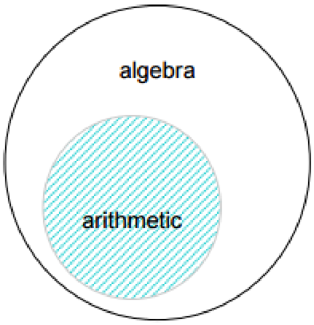
Figur 10. Aritmetikk og algebra som atskilte emner (Schliemann et al., 2007)

tema, knytt saman av ei «bru», det ein kallar for pre-algebra (tidleg algebra, algebraisk tenking utan bruk av algebraisk notasjon). Argumenta for å ta temaa i denne rekkjefølgja har vore gjeldande i lange tider, og er det framleis i mange land. Grunnlaget for denne undervisningsrekkjefølgja er bygd på fleire faktorar, blant anna på den historiske utviklinga av matematikken, og på det at aritmetikk er enklare å handtera og meir konkret, medan algebra er abstrakt og meir uhandgripeleg og derfor bør kome seinare i undervisningsløpet. I den norske skulen følgjer me, som nemnt innleiingsvis i dette kapitlet, i stor grad løpet skissert i Figur 10.

Eit argument som talar i mot denne modellen, er forsking som tyder på at bilete som elevane dannar seg av ulike omgrep kan vera vanskelegare å endra på i ettertid. Eit eksempel Schliemann viser til, er oppfatninga av likskapsteiknet som eit symbol for ein kommando, som noko som skal gjennomførast. Det gjer det vanskelegare å forstå likningar og operasjonar ein kan gjera på desse, grunna biletet ein har av likskapsteiknet (Schliemann et al., 2007). Få elevar vil ha problem med å akseptera «$3 + 5 = 8$», men uttrykket «$8 = 3 + 5$» eller «$3 + 5 = 7 + 1$» kan dei ha problem med å godta (Schliemann et al., 2007).

Mykje forsking peikar i retning av at det er overgangen frå aritmetikk til algebra som er det store problemet. Booth (1984) viser til eiga og andre si forsking som i stor grad tyder på at ein stor del av elevane som slit med algebra, manglar grunnleggande dugleikar i aritmetikk, men òg strukturell forståing av aritmetikken. Han meiner det er ein direkte samanheng mellom misoppfatningar elevane har i algebra og deira dugleik i aritmetikk. Linchevski og Livneh (1999) gjorde undersøkingar for å sjå nærare på akkurat dette. Dei tok utgangspunkt i tidlegare forsking av Linchevski og Herscovics (1994; 1996), og laga aritmetiske oppgåver tilsvarande nokre av dei algebraiske oppgåvene Linchevski og Herscovics fann at elevane hadde problem med. Undersøkinga tok altså utgangspunkt i algebraiske problem registrerte i tidlegare forsking, men vart no testa reint aritmetisk. Dei meinte resultata av forskinga deira viste at det er ein klar samanheng mellom elevane sine vanskar i reine aritmetiske oppgåver og vanskane dei opplever i algebra. Schliemann, Carraher og Brizuela (2007) viser til fleire forskingsprosjekt som dreiar seg om korleis ein kan hjelpa elevane med overgangen frå aritmetikk til algebra på best mogleg måte; Booth, 1984; Da Rocha Falcão, 1993; Filloy & Rojano, 1989; Kieran, 1985, 1989; LAborde, 1982; Resnick, Cauzinille-Marmeche, & Mathieu, 1987; Sfard &Linchevsky, 1994; Steinberg, Sleeman & Ktorza, 1990; Vergnaud, 1985; Vergnaud, Cortes, & Favre-Arttique, 1987; Wagner, 1981.

For å unngå at elevane må avlæra seg innarbeidde tenkjemåtar, eller å måtta omarbeida det dei opplever som faste matematiske omgrep, peikar lektor Elin Røkeberg Lid på viktigheita av å innføra algebraisk tenking på eit så tidleg tidspunkt som i første klasse i grunnskulen. Ho har gjort mange positive erfaringar med dette i førsteklassar ho underviser i (Lid, 2015). Ein kan jo berre tenka seg til kva det vil kunna bety for elevar på vg1 som arbeider med ei oppgåve i algebra, at dei allereie har jobba med algebraisk tenking sidan første klasse. Grunnlaget for å oppnå forståing i algebra vert lagt gjennom grunnskulen, og det at elevane vert lært opp til å tenka algebraisk, sjå etter mønster, og generalisera på eit tidleg tidspunkt, er noko Lid, og mange forskarar peikar på kan vera ei viktig brikke til å hjelpa elevane med å forstå algebra.



Figur 11 Aritmetikk som del av algebra (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007)

I artikkelen *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic* presenterer Schliemann m.fl. modellen over (Figur 11) der aritmetikken er ein del av algebraen, og ikkje to ulike område. Her er ikkje poenget at ein skal innføra bokstavar og algebraisk notasjon frå dei første skuleåra, men at ein skal bli trena i å kjenna att mønster, formalisera og generalisera aritmetikk. Denne modellen kan ifølgje Schliemann vera vanskeleg å akseptera for nokon, spesielt for dei som har gått vegen om aritmetikken først, og så bygd bru over til algebra (Schliemann et al., 2007). Tanken er blant anna at eleven skal verta fortrulege med å møta likskapsteiknet i mange samanhengar heilt frå starten av, både som teikn i forhold, symmetri, ekvivalens og omforming. Det kan vera med på å få eleven til å *ikkje* akseptera uttrykk som,

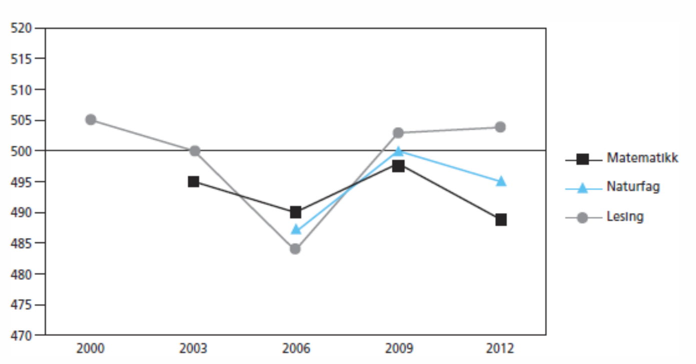
$$«4 + 3 = 7 + 5 = 12».$$

Det er viktig å presisera at «tidleg algebra» ikkje er «algebra tidleg», men at det å trena opp elevar på meir enn «beint fram» aritmetiske oppgåver, noko som kan vera med på å snu overgangen frå aritmetikk til algebra frå brubygging til ei utviding av alt tileigna kunnskap.

2.3.2 TIMMS og PISA

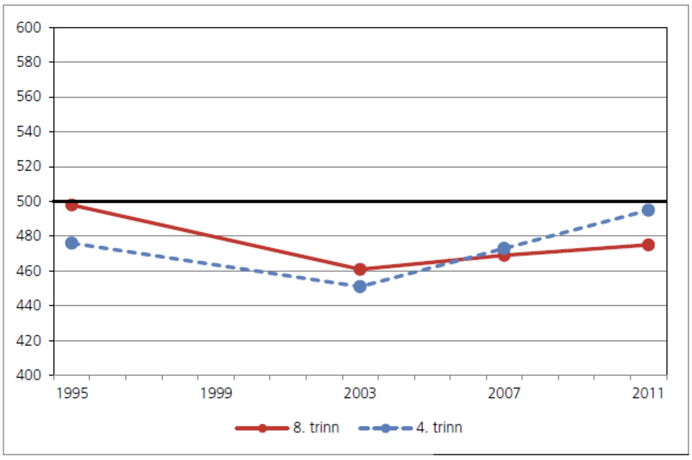
Norske elevar har som nemnt innleiingsvis kome dårleg ut av testar i matematikk, og då spesielt når det gjeld algebra. Dette kjem blant anna fram av store undersøkingar som PISA og TIMSS. I PISA-undersøkinga vert norske femtenåringar testa i matematikk, naturfag og lesing og samanlikna med elevar på same alder i andre OECD-land. PISA vert gjennomført kvart tredje år, der alle desse fagområda er med, men der eitt av dei er hovudområdet kvar gong. Rapporten eg vil gå litt inn i her er den frå 2012, då matematikk igjen var hovudområdet (første gong i 2003). Denne rapporten ser på utviklinga frå den første testen i 2003 til 2012.

TIMSS er ei internasjonal studie som målar kunnskapar og dugleikar i matematikk og naturfag i skulen, leia internasjonalt av forskarar ved Boston College i USA, og i Noreg gjennomført av Det utdanningsvitenskapelige fakultet, UiO. TIMSS testar prestasjonar hjå elevar på 4. og 8. trinn, medan TIMSS-Advanced har til hensikt å testa «matematikkspesialistar» og «fysikkspesialistar» siste året i vidaregåande skule (Grønmo et al., 2012; Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010). PISA-undersøkinga har hovudvekt på å sjå på elevane sine dugleikar til å aktivt bruka kunnskap og erfaringar i konkrete situasjonar. 2012-resultata i matematikk viser ein signifikant nedgang frå 2009, etter ein større oppgang frå 2006 til 2012. Tala viser lågaste oppnådde skår så langt i PISA, men resultata er ikkje signifikant dårlegare enn i 2003. Dette peikar ikkje i rett retning, men norske elever skårar likevel ikkje signifikant lågare enn gjennomsnittet i OECD (Kjærnsli & Olsen, 2013). Rapporten finn heller ikkje at det er kjønnsforskjellar i matematikk i Noreg.



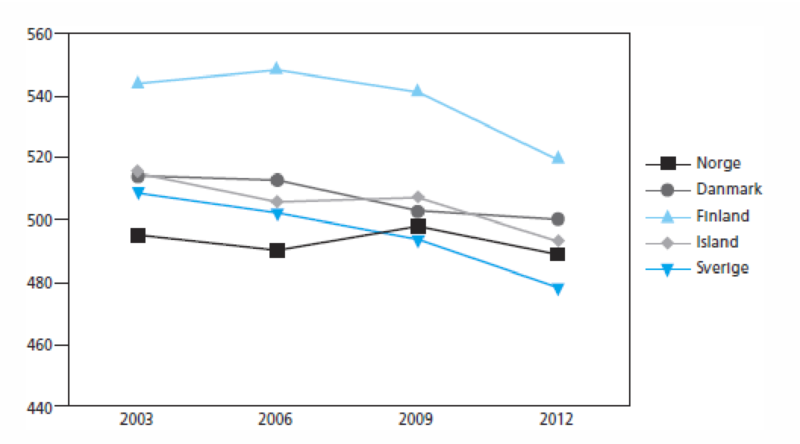
Figur 12: Norske resultat i dei ulike PISA-undersøkingane for kvar av fagområda.(Figur 1.1 Kjærnsli & Olsen, 2013, s. 20)

Samanliknar ein desse resultata med resultat frå TIMSS på 4. og 8. trinn, er det vanskeleg å trekka direkte konklusjonar utan å gjera djupare analyser. Frå 2003 ser ein ei positiv utvikling både med resultat på 4. og 8. trinn, men at ein òg ligg under skalamidtpunktet. 8-trinn i Noreg ligg i 2011 signifikant under 1995-nivået, då me omtrent låg på skalamidtpunktet, medan det er motsett for 4.trinn.



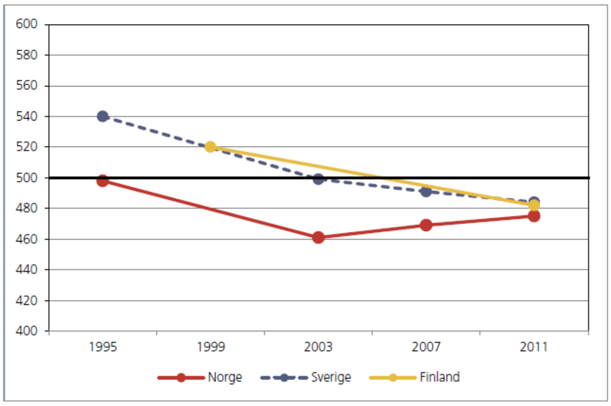
Figur 13: Viser norske elevar si utvikling frå 1995-2011 i TIMSS. (Grønmo et al., 2012, s. 15)

Resultata frå PISA-undersøkinga i matematikk viser at dei nordiske landa, bortsett frå Noreg, har hatt ein signifikant nedgang frå 2003 til 2012. Det må her presiserast at Noreg hadde lågaste poengsum av desse landa i 2003 (sjå figur Figur 14).



Figur 14: Utviklinga i matematisk kompetanse i dei nordiske landa (PISA), (Figur 3.2.Kjærnsli & Olsen, 2013, s. 70)

Tala viser at me heldt oss omtrent på same nivå, avbroten av kortvarig optimistisk positiv framgang i 2009. Undersøkingar i TIMSS peikar òg i liknande retning.

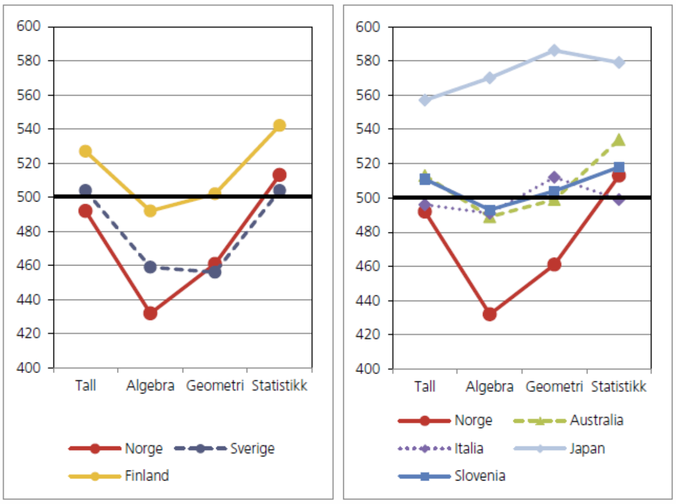


Figur 15: Utvikling i matematikk på 8.trinn (TIMSS) i nordiske land.(Grønmo et al., 2012, s. 21)

Det er viktig å understreka at samanlikninga mellom PISA og TIMSS her må gjerast for å sjå etter utviklingstrender, og ser ein på Noreg si utvikling samanlikna med dei andre nordiske landa, ser det ikkje heilsvart ut for Noreg, sjølv om det er dette inntrykket ein ofte får gjennom media. Medan utviklinga i Sverige og Finland er vidare nedgang, er det verdt å legga merke til at Noreg, som hadde same utvikling som Sverige frå 1995-2003, har hatt ei positiv utvikling frå 2003 til 2011.

Ser ein på Finland, som har hatt svært gode resultat i PISA, ser ein at desse resultata ikkje er like positive for Finland når det gjeld TIMSS, og i begge testane ser det ut til at det er ein nedgang i resultata. Finske matematikarar åtvarar mot at ein har hatt eit for sterkt fokus mot kvardagsmatematikk dei seinare åra, og at dette er noko som blant anna algebraundervisninga har lide under (Grønmo et al., 2012).

Tar ein omsyn til alderen, er norske elevar i 4. klasse eit år yngre enn både dei svenske og danske elevane. På 8. trinn er dei jamgamle med dei finske elevane (som går på 7.trinn),



Figur 16: Noreg sine prestasjonar i emneområda i matematikk på 8.trinn i 2011 samanlikna med høvesvis nordiske land og referanseland.(Grønmo et al., 2012, s. 26)

men yngre enn elevar i andre nordiske land. Og når ein samanliknar Noreg med andre referanseland i TIMSS 2011, er dei norske elevane blant dei yngste i testen. Algebra vert, som tidlegare omtala (2.3.1), innført på eit forholdsvis seint tidspunkt i grunnskulen. Dette kan ifølgje Grønmo et al. (2012) kanskje forklara noko av det at Noreg gjer det spesielt dårleg i algebra i TIMSS 2011, men ikkje alt. Samanlikna med våre nordiske naboland og med referanselanda, skårar norske elevar markant dårlegare i emna algebra og geometri, og dette samsvarar dessverre òg med tidlegare nasjonale rapportar (Grønmo et al., 2012). Artiklar med analysar av data frå både TIMSS og PISA peikar, ifølgje Grønmo et al. (2012), på at det er eit stort problem i norsk skule at tal og algebra viser seg å vera områda norske elevar slit mest med. Dette er spesielt bekymringsfullt då ein veit at elevane er avhengige av gode kunnskapar i algebra for vidare utdanning i matematikk og mange andre fag. Utan å klara å handtera algebraiske uttrykk, kjem ein fort til kort her.

Ser ein til TIMSS Advanced 2008 er resultata dessverre samsvarande med resultata frå grunnskulen. Norske elevar gjer det generelt svakare enn mange andre land, men ligg så vidt over Sverige . Det var berre 1% av elevane i 3MX som nådde opp til det som var definert som *avansert kompetansenivå*, medan 65% av norske elevar presterer under det lågaste definerte nivået for studien (Grønmo et al., 2010).

Eigne erfaringar gjort gjennom undervisning i matematikk 1P, S1 og S2 samsvarar dessverre òg med det ein kan lesa ut i frå PISA og TIMSS - rapportane. Ei stor del av elevane slit med forholdsvis enkle algebraiske operasjonar, og viser lita forståing for algebraiske uttrykk. Dette kjem eg tilbake til i diskusjonskapittelet (kapittel 5).

2.3.3 Norske læreplanar

Etter kunnskapsløftet skjedde det ei endring i norske læreplanar, der det vart sett opp meir konkrete mål for kva eleven skal kunne etter kvart klassetrinn. Viss me ser nærare på læreplanen i matematikk for fagområdet «Tal og algebra» for ungdomstrinnet, har ein følgjande mål etter 10.trinn:

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- samanlikne og rekne om mellom heile tal, desimaltal, brøkar, prosent, promille og tal på standardform, uttrykkje slike tal på varierte måtar og vurdere i kva for situasjonar ulike representasjonar er formålstenlege
- rekne med brøk, utføre divisjon av brøkar og forenkle brøkuttrykk
- bruke faktorar, potensar, kvadratrøter og primtal i berekningar
- utvikle, bruke og gjere greie for ulike metodar i hovudrekning, overslagsrekning og skriftleg rekning med dei fire rekneartane
- behandle, faktorisere og forenkle algebrauttrykk, knyte uttrykka til praktiske situasjonar, rekne med formlar, parentesar og brøkuttrykk og bruke kvadratsetningane
- løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem
- gjere berekningar om forbruk, bruk av kredittkort, inntekt, lån og sparing, setje opp budsjett og rekneskap ved å bruke rekneark og gjere greie for berekningar og presentere resultata
- analysere samansette problemstillingar, identifisere faste og variable storleikar, kople samansette problemstillingar til kjende løysingsmetodar, gjennomføre berekningar og presentere resultata på ein formålstenleg måte
- bruke tal og variablar i utforsking, eksperimentering og praktisk og teoretisk problemløysing og i prosjekt med teknologi og design

Ein har òg nokre kompetansemål knytt til algebra som kjem under geometri og funksjonar. Desse er:

- bruke og grunngje bruken av formlikskap og Pytagoras' setning i berekning av ukjende storleikar
- lage funksjonar som beskriv numeriske samanhengar og praktiske situasjonar, med og utan digitale verktøy, beskrive og tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som grafar, tabellar, formlar og tekstar
- identifisere og utnytte eigenskapane til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og kvadratiske funksjonar og gje døme på praktiske situasjonar som kan beskrivast med desse funksjonane

Grunnen til at eg tek fram kompetansemåla for 10.trinn, er at dei elevane som eg har valt å ha med i mi undersøking er elevar på vg1, og siste måla dei har blitt testa heilskapeleg etter, er måla etter 10.trinn. Fleire av desse læreplanmåla finn ein òg igjen i læreplanmåla etter

1P studieførebuande utdanningsprogram, og er i så måte veldig aktuelle her og. Hovudområda i læreplanen for Tal og algebra (sjå2.3) er gjeldande for alle desse trinna. I oppgåva mi vil eg testa elevane i oppgåver innanfor fleire av desse områda.

3 METODE

Denne mixed methods studien består av to delar, ein kvantitativ del og kvalitativ del. Den kvantitative delen består av ei kartleggingsundersøking som skaffar naudsynte data for ein vidare og djupare analyse, ein analyse som er vanskeleg å gjera kun ut frå kvantitative data. Derfor gjorde eg semi-strukturerte intervju med eit utval av elevane som deltok på kartleggingsprøva. Før eg går nærare inn på korleis eg utarbeidde og gjennomførte desse undersøkingane, vil eg presentere dei to delane (kvantitativ og kvalitativ) av metoden eg nyttegjorde meg av (mixed methods).

3.1 Forskingsmetodar

Når ein forskar på det som skjer i skulen, i klasserommet eller hjå den enkelte elev, må ein nytta samfunnsvitskapleg metode (Christoffersen & Johannessen, 2012). Samfunnsvitskapleg metode dreiar seg om korleis ein kan driva forsking for å få informasjon om den sosiale røynda og korleis me kan analysera denne informasjonen (Christoffersen & Johannessen, 2012). Kunnskap og diskusjonar rundt elevar, skule og utdanning byggjer i stor grad på statistikk og spørjeskjemaundersøkingar (Danielsen, 2013).

Kvalitative metodar har ikkje alltid vore like akseptert i matematikkdidaktiske miljø, den som «innførte» intervjuet som akseptert verkty i matematiske kretsar var Erlwanger (1973). Dette skjedde gjennom diskusjonar og intervju med ein elev, Benny, som gjennom fleire år hadde fylgd det såkalla IPI programmet[3]. Opplegget tufta på tanken om at eleven ikkje kunne koma vidare til neste nivå utan ei vid forståing og mestring av tidlegare nivå. Eleven presterte svært bra på testane og var rekna som ein av dei beste av sin lærar. Erlwanger avslørte gjennom intervju med denne eleven at han sat med fleire misoppfatningar, førestillingar han sjølv hadde danna seg (Erlwanger, 1973). IPI programmet hadde tydelegvis svakheiter. Gjennom denne artikkelen fekk det matematikkdidaktiske miljøet på sett og vis opp augo for kvalitative metodar

[3] Kort fortalt var Induvidually Prescribed Instruction (IPI) Matematics, eit individuelt undervisningsopplegg der elevane jobba sjølvstendig på sitt nivå og ikkje kunne gå vidare før dei bestod ein gitt test til dette nivået. Dette var eit opplegg for å tilpasse undervisninga til den enkelte elev, slik at alle kunne arbeide på det nivået der dei «høyrde heime», og læraren rettleia og gav testar når elevane meinte dei var klare for det. Dette opplegget var eit undervisningsopplegg som elevane fylgde gjennom grunnskulen. (Erlwanger, 1973)

i forskinga, og korleis denne metoden kunne vera med på å belysa resultat frå kvantitative metodar (testar).

3.1.1 Kvantitativ og kvalitativ forsking

Ein viktig skilnad på kvantitativ og kvalitativ metode er grad av fleksibilitet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Kvantitative data kan til dømes byggja på spørjeskjema der kandidatar vert stilt dei same spørsmåla, i den same rekkjefølgja, og det er ofte gitt svaralternativ elevane kan velja mellom. Dette gjer at metoden er lite fleksibel, men har til gjengjeld styrke i at den lett kan førast statistikk over, samanliknast og kan gjennomførast på tvers av ulike settingar og landegrenser. Men dette stiller store krav til kva spørsmål som vert stilt, korleis desse er formulerte og kva svaralternativ som bør vera med. Kvantitative undersøkingar byggjer i mange tilfelle vidare på arbeid som er gjort tidlegare, og ein nyttar ofte spørsmål frå tidlegare forsking. På denne måten kan dataa vise utvikling av trendar over tid, og støtte opp under eller så tvil ved hypotesar og dertil eksisterande teoriar (Danielsen, 2013).

Kvalitative metodar er ikkje bunde opp i like stramme rammer, desse metodane vert gjerne brukt for å få djupare og meir inngåande informasjon om ulike tema. Spørsmåla er meir opne og gjev respondenten høve til å utdjupa svara, ein kan også tilpassa spørsmåla til den enkelte deltakar (Christoffersen & Johannessen, 2012). Christoffersen og Johannessen (2012) peikar på at forholdet mellom forskar og deltakar vert mindre formelt i eit intervju og at forskar kan følgje opp svar med ein gong og forme vidare spørsmål utifrå dette. Dette er òg ei av utfordringane med kvalitativ metode, det set store krav til at forskar evnar å stilla dei rette spørsmåla til rett tid, tolka svar og følgja opp kandidaten med vidare spørsmål på ein hensiktsmessig måte (ibid).

Resultata frå ei kvalitativ undersøking vil følgjeleg ikkje vera like samanliknbare som resultat frå kvantitative undersøkingar, og dei vil derfor ikkje kunna vera like generaliserbare som kvantitative data gjerne kan vera. I mange tilfelle er heller ikkje dette føremålet med ei kvalitativ undersøking. Kvalitative undersøkingar byggjer gjerne på tidlegare (eller parallelle) kvantitative undersøkingar som er gjort, og vil kunne gjerast for å belysa mønster ein ser i dei kvantitative dataa, dette for å få ei djupare innsikt og forståing for til dømes kvifor ein del elevar gjer den same feilen i ei algebraisk oppgåve. Medan det på 70-talet (og utover) var sterk motstand mot kvantitative metodar i pedagogiske miljø, er det i dag ikkje uvanleg at ein gjerne nyttar ein kombinasjon av både kvantitative og kvalitative metodar innanfor same forskingsprosjekt, også kjent som «mixed methods» eller metodetriangulering (Danielsen, 2013). Dette er ein metode som ifølgje Creswell (2014) er basert på ideen om å gjera svakheiter ved dei to metodane (kvantitativ- og kvalitativ metode) mindre gjeldande.

3.1.2 Det kvalitative forskingsintervjuet

Ein mykje brukt metode i kvalitativ forsking er intervju, det såkalla *kvalitative forskingsintervjuet.* Eit intervju kan ha mange formar og gjennomførast på utallege måtar, og korleis det vert gjort varierer nok i stor grad frå person til person. Det som likevel er felles for dette verktyet, eller forskingsmetoden, er at det kan skildrast som ein prosess som går over fleire fasar, frå planlegging, til gjennomføring og til slutt etterarbeid (Sollid, 2013). Kvale og Brinkmann (2009) deler denne prosessen inn i sju fasar: *tematisering, design, intervjuet, transkripsjon, analyse, verifikasjon og rapportering*. Dei peikar vidare på at det ikkje er noko standardprosedyrar for gjennomføringa av eit intervju eller ei heil intervjuundersøking, og dermed står intervjuar fritt til å leggja opp intervjuet slik han ynskjer. Denne opne strukturen er både ein styrke og ein svakheit ved forskingsintervjuet (Kvale & Brinkmann, 2009).

Når det blir brukt som eit verkty i forsking, har intervjuet til hensikt å belysa emne forskaren på førehand har ei formeining om (*tematisering*), og for å gjera dette på ein god måte trengs ofte ein viss struktur i intervjuet (*design*). Forskingsintervjuet må derfor planleggjast godt. Spørsmål og tema må tenkjast ut på førehand, samstundes som ein må vera førebudd på at ting kan dukka opp uventa under intervjuet. Det er vanleg at ein utarbeidar ein intervjuguide i dette førebuingsarbeidet. Kor strukturert eit intervju er, varierer etter kva det er forskaren er ute etter. Christoffersen og Johannessen (2012) snakkar om fire typar forskingsintervju; *ustrukturert intervju*, *semistrukturert intervju*, *strukturert intervju* og *strukturert intervju med faste svaralternativ*.

I eit *ustrukturert intervju* har ein opne spørsmål, og spørsmåla varierer etter svara ein får frå intervjuobjektet etter at temaet er presentert. Intervjuaren er her veldig fri, og det gjer at eit slikt intervju kan likna mykje på ein samtale (Christoffersen & Johannessen, 2012). Eit *semistrukturert intervju* har ein overordna intervjuguide, men spørsmål og tema kan vera i vilkårleg rekkjefølgje. *Strukturerte intervju* har ein meir fast oppbygning der spørsmåla som vert stilt og rekkjefølgja av desse i stor grad er gjevne på førehand. Eit strukturert intervju vil i så måte kunna vera enklare for intervjuaren/forskaren å jobba med i etterarbeidingsfasen, ved at resultata er meir samanliknbare (Christoffersen & Johannessen, 2012). Den siste av dei fire, *strukturert intervju med faste svaralternativ*, vil kunna gje forskaren meir informasjon enn eit spørjeskjema, då ein her kan be informanten grunngje svara i større grad. Men til gjengjeld er eit slikt intervju veldig lite fleksibelt (ibid). Ei slik intervjuform kan kanskje såleis seiast å liggja nær ei kvantitativ form.

Når ein har bestemt seg for kva type intervju ein vil gjennomføra, må ein velja kor mange ein vil intervjua, korleis intervjuobjekta skal veljast ut, og ein må kontakta desse personane for å avtala tid og stad for intervjua. I dag vert det som regel teke lydopptak av intervjua, eller dei vert filma. Vidare arbeid går så ut på å transkribera og analysera resultata (Sollid, 2013). Sjølve transkripsjonsprosessen stiller forskaren overfor fleire val. Skal ein transkribere ordrett eller skal ein til dømes nytta seg av fortetting? Det siste vert ofte nytta for å tydeleggjera poenga i intervjua og korta ned på prat «rundt grauten», men ein kan i den prosessen mista informasjon som kan kasta lys over saka.

3.2 Forsking i skulen

Forsking i skulen er som omtala innleiingsvis i dette kapittelet samfunnsvitskapleg forsking, og ein kan blant anna sjå på samanhengar innan skulesamfunnet, skulen, i klasserommet, mellom elevar, elev-lærar eller hjå den enkelte elev/lærar. Læring skjer gjennom individuelle og sosiale korrelasjonar sett frå eit sosialkonstruktivistisk læringssyn (Imsen, 2014), og forsking på læring, klassemiljø, elevar eller tilsette vil derfor kunna verta utfordrande på fleire måtar. Her er mange omsyn å ta, og ein vil kunne koma bort i fleire etiske problemstillingar i denne type forsking. Ein må ta omsyn til enkeltindivid, som lærarar, elevar eller andre i skulesamfunnet, og ivareta deira rettar. Ein må heile tida passa på at ein ikkje kjem i konflikt med desse, og ein må sørgja for å innhenta naudsynte godkjenningar for å gjera undersøkingar. Det er også viktig at informantane sin anonymitet vert oppretthalden.

Ein må innhenta informert samtykke frå kvar enkelt om å delta i undersøkinga, dette kan gjerast skriftleg, munnleg eller elektronisk (Kvale & Brinkmann, 2009). Er informantane umyndige, må dette samtykket innhentast av føresette, med nokre få unntak, deriblant dersom det ikkje vert innhenta sensitiv informasjon (Christoffersen & Johannessen, 2012). Vidare må det kontrollerast om undersøkinga er meldepliktig overfor NSD (Norsk samfunnsvitskaplege datateneste AS). Om ei undersøking er meldepliktig, vert blant anna styrt av om enkeltpersonar kan identifiserast, om opplysningane er sensitive, og korleis opplysningar vert behandla.

Når ein forskar på elevar, vil ein vera avhengig av eleven si innstilling til undersøkinga, og til læraren/forskaren. Kva ein undersøkjer og kven som deltar i studien, kan ha mykje å seia for resultata i undersøkinga, eit faktum som gjeld i dei fleste forskingsprosjekt. Det er derfor viktig at elevane vert godt informert om kva hensikta med undersøkinga er, kva den skal brukast til, og korleis dataa som vert samla inn vil bli behandla i ettertid. God informasjon kan her styrkje reliabiliteten til dataa, då god informasjon og oppfatninga av viktigheita i eit forskingsprosjekt kan gjera at respondentane tek seg betre tid og svarer så godt dei kan på spørsmåla.

3.3 Val av metode

Målet med val av mixed methods som forskingsdesign er å vonaleg få belyst temaet i oppgåva på best mogleg vis. Eg skal sjå på elevar si forståing og oppfatning av algebra, og då spesielt på misoppfatningar. Interessa ligg i å prøva å finna ut kva som ligg bak desse misoppfatningane, korleis tenkjer elevane? Naalsund (2012) skriv i si avhandling at eit svar i ein test aleine gjev svært avgrensa informasjon om korleis eleven har tenkt for å koma fram til dette svaret. Med mitt val av fokus, ville altså ei rein kvantitativ undersøking vanskeleg gitt den djupe informasjonen eg søkjer. Ei rein kvalitativ undersøking ville kanskje heller ikkje strekkja til, då eg trong informasjon om kva type svar elevane gav og kva misoppfatningar dei eventuelt sat med, det ville i så fall blitt ei stort og omfattandeundersøking. Kartleggingstesten var naudsynt for å få nok breidde og mengda med data for å finna ut kva algebraiske problem som er gjeldande på vg1. Intervjua med enkeltelevar hjelper meg å belysa og analysera desse problema i djupna, få fram nyansar og dermed ei djupare forståing av *korleis* elevane tenkjer når dei vel strategiar og løyser oppgåver.

Den kvantitative delen av mitt forskingsprosjekt består altså av ei kartleggingsundersøking der elevane vart testa i eit utval av oppgåver knytt til algebra. Eg gjev ei nærare skildring av denne prosessen i kapittel 3.3.1 og 3.3.3. Vidare følgde eg opp med intervju av elevar som min kvalitative metode, sjå kapittel 3.3.2 og 3.3.3 .

3.3.1 Utarbeiding av kartleggingstesten

Hovudmålet med utviklinga av kartleggingstesten var å finna oppgåver som kunne belysa elevar si forståing og misoppfatningar i algebra, altså gje svar på problemstillinga for prosjektet. For å få ei oversikt over kva misoppfatningar ein finn og kva eg skulle gjera for å undersøkja dette, har søkt kunnskap gjennom ei rekke artiklar, KIM-prosjektet, PISA og TIMSS, samt nokre masteroppgåver. Mange tidlegare undersøkingar med tanke på misoppfatningar i algebra, er gjort på ungdomstrinnet (8-10. trinn eller tilsvarande), men erfaringa mi som lærar tilsa at eg ville kunna finna igjen dei same misoppfatningane i vidaregåande skule, spørsmålet var i kva grad.

I arbeidet med oppgåvene har eg sytt for at her er nokre oppgåver som testar eleven si operasjonelle forståing (Sfard, 1991), dette er typisk oppgåver som kan løysast ved hjelp av til dømes bestemte algoritmar, det vera seg reglar for prioritering eller likningsløysing. Vidare har eg òg prøvd å få testa elevane si strukturelle forståing (Sfard, 1991) gjennom oppgåver som vanskeleg let seg løysa med bestemte algoritmar, i hovudsak representert gjennom tekstoppgåver, samt gjennom å sjå på eleven sine evner til å nyttegjera seg av løysingsstrategiar i ulike settingar, for å få eit innblikk i eleven si forståing. Mange av oppgåvene i testen er diagnostiske. Ifølgje Brekke (2002) vil diagnostiske oppgåver kunne gje ei innsikt i kva misoppfatningar elevane sit med, noko som igjen gjev verdifull informasjon for å kunna få ei betre forståing for elevane sine feil og for å hjelpa elevane å bli kvitt desse.

Eg byrja prosessen med kartleggingstesten med å utvikla ei pilotundersøking. Her var planen å gå litt breitt ut for å sjå kva misoppfatningar som var gjeldande på første trinn i vidaregåande skule, for så å gjera eit val utifrå desse resultata når det gjaldt kva eg ville arbeida vidare med. Pilotundersøkinga bestod av 14 oppgåver innanfor algebra, med i alt 46 deloppgåver. Desse oppgåvene gjekk på reknerekkjefølgje, forenkling av algebraiske uttrykk (addisjon, multiplikasjon, brøkar, parentesar og potensar), mønster ut frå geometriske figurar (sum av kjente og ukjente sider), løysing av tekstoppgåver (aritmetiske og algebraiske) og enkle likningar. Eg testa så ut desse oppgåvene på 10 vg1 elevar på *Medium og kommunikasjon*, altså 1P-Y –elevar.

I førekant av undersøkinga utarbeidde eg svaralternativ som eg såg for meg kunne koma fram i testen. Dette gjorde eg for å prøva å få ei førestilling av korleis elevane kunne tenkja når dei løyste oppgåvene. I dette arbeidet prøvde eg unngå sjå på kjeldene sine alternativ, eg kan likevel ikkje verken garantere eller påstå at mine alternativ ikkje er prega av kjeldene, då det var relevant å sjå på desse i startfasen ved utveljinga av oppgåvene til testen. Poenget med å prøva å setja opp desse alternativa var at eg ville ha klare forventningar til kva feilsvar som kunne koma, samstundes som det gav meg sjansen til å verta overraska over nye alternativ elevane kom med. Sjå kapittel 4 for korleis desse alternativa kjem fram av resultata.

Resultata registrerte eg så i eit Excelark der eg såg på kva type svar elevane hadde gitt. Svara dei rett eller feil? Gav dei svar som indikerte ei misoppfatning, eller svara dei ikkje i det heile tatt? Riktig svar koda eg som R, misoppfatningsvar som M, feilsvar som F og ubesvart som U. Eg registrerte òg svaralternativet til eleven (så langt det var hensiktsmessig) som alternativ i Excelarket. Vidare gjennomførte eg intervju med to av kandidatane. Eg hadde på førehand laga nokre generelle spørsmål som eg brukte i intervjua. Eg såg for meg intervjua skulle vare i 20-30 minutt. Det viste seg å vera vanskeleg å halda på tida, og intervjua vart ganske lange i forhold til det eg hadde tenkt (40-50 min). Intervjua vart så transkribert ordrett etter beste evne for å få med mest mogleg detaljar. Dette valet gjer at transkriberingane ikkje vert like lesevenlege for ein som les intervjua, men eg synest det gjev mest rett informasjon. Dermed unngjekk eg også at eg gjennom fortettinga mista viktige poeng som eg kanskje ikkje såg med ein gong.

Etter å ha gjennomført denne pilotundersøkinga, såg eg at det måtte gjerast nokre val. Piloten var for omfattande i tal på oppgåver og i breidde, og den tok litt lang tid å gjennomføra. Eg måtte derfor sikta meg ut kva emne eg ville gå djupare inn i, og kva oppgåver som skulle vera med i den endelege undersøkinga. Oppgåver som ingen eller alle fekk til var ikkje så interessante å ha med, desse oppgåvene vart luka vekk. Då eg skulle velja kva emne eg ville gå djupare inn i, brukte eg resultat frå pilotundersøkinga samtidig som eg vurderte kva tema eg ynskte sjå nærare på. Piloten vart såleis òg brukt for å spisse prosjektet.

Det er ikkje noko bestemt tal på kor mange oppgåver det skal vera med i ei slik undersøking. I følgje Christoffersen og Johannessen (2012) bør det vera færrast mogleg, men nok til at det gjev grunnlag for å få svar på aktuell problemstilling. Dersom ei undersøking vert for omfattande, kan det føra til at elevar vert for trøytte, mistar konsentrasjon og ikkje yter sitt beste på slutten av testen (Christoffersen & Johannessen, 2012). Ved å avgrensa talet på oppgåver, som skildra ovanfor, håpte eg å unngå dette. Eg sette som mål at undersøkinga ikkje skulle ta meir enn 30-40 minutt, og enda opp med ein kartleggingstest med i alt 20 deloppgåver, mot 46 i piloten. Desse var då nøye utplukka for å skulle gje meg informasjon som belyser problemstillinga mi.

Prioritering var det temaet som fekk meg til å byrja å tenka å ta denne masteren, så det emnet var sjølvskrive då resultata frå piloten viste dei same teikna eg har sett hjå elevar i eiga undervisning. Vidare er elevane si oppfatning av *ukjende* eit tema som er mykje omtala, og bruk av variablar er vesentleg for å kunna lukkast med fordjuping i matematikk på vg2 og vg3. Funna i piloten gjorde at eg òg ville vita meir om korleis elevane tenkte kring desse ukjende, er det mangel på kunnskap eller misoppfatningar som ligg bak feila elevane gjer? Det siste emnet eg valde å sjå nærare på var *tekst-kontekst* med fokus på *overgangen frå aritmetikk til algebra*. Kvifor er tekstoppgåver så vanskelege å løysa for eit stort tal elevar, og korleis vert dette når oppgåvene inneheldt algebra? Eg plukka her ut oppgåver som blant anna byrja med aritmetiske problem og avslutta gjerne med at elevane skulle setja opp ein generell formel som gjaldt for problemet.

Dei tre hovudområda eg valde sjå nærare på, var altså:

- Prioritering, det «å setja parentes» og omtala som «frikopling» eller «detachement», prioritering mellom rekneoperasjonane addisjon, subtraksjon og multiplikasjon
- forståing av ein variabel (gjennom forenkling av algebraiske uttrykk og likningar)
- samanhengen «tekst-kontekst» og her spesielt overgangen frå aritmetiske til algebraiske problem.

Gjennom arbeidet med piloten fekk eg litt betre innsikt i både korleis ein skulle registrera data og gjennomføre intervju etter beste evne. Dette var viktige erfaringar som hjalp meg i arbeidet med den vidare undersøkinga.

Swan (2001) og Bell et al. (1984), med fleire, peikar på at storleiken på tala som er med i ei oppgåve kan ha stor betyding for korleis eleven vel å løysa denne. I denne undersøkinga har eg derfor teke eit val om å ikkje bruka store tal, då eg ikkje vil sjå nærare på dette problemet.

Oppgåvene er elles av ei vanskegrad som tilseier at elevane skal kunne løysa dei med bakgrunn av det dei har lært etter ferdig grunnskuleutdanning, dette er ein fordel då eg òg til ei viss grad vil samanlikna nokre av resultata mine med til dømes resultat frå Brekke et al. (2000) sine resultat for 10.klasse i KIM-prosjektet. Fleire av oppgåvene er henta nettopp frå dette prosjektet, eller andre tidlegare undersøkingar. Å gjera seg nytte av tidlegare gjevne oppgåver er ifølgje Danielsen (2013) og Christoffersen og Johannessen (2012) viktig for å sikra kvaliteten i oppgåvene, og på denne måten auke reliabiliteten til oppgåvene. Eg har likevel prøvd å laga nokre oppgåver sjølv, dette for å få trening i, og erfaring med å utarbeida oppgåver som er mest mogleg eintydige og som måler det dei er tenkt å måla, altså prøva å unngå oppgåver der ulike misoppfatningar saman kan vera med å påverka/forstyrra svara.

3.3.2 Utarbeiding av intervjuguide

Den kvalitative delen av prosjektet mitt består av intervju med ti av elevane som gjennomførte kartleggingstesten. Ifølgje Kvale og Brinkmann (2009) er det å gjennomføra eit forskingsintervju eit handverk som må lærast gjennom nettopp å praktisera intervju. God kvalitet i kvalitative intervju føreset omfattande trening (Kvale & Brinkmann, 2009). Det er vanskeleg å få nok trening i eit avgrensa masterprosjekt som det eg har gjennomført her. Mi erfaring med kvalitative intervju fekk eg gjennom intervju med to av personane i pilotundersøkinga mi. Erfaringa derifrå gjorde at eg valde ei meir strukturert intervjuform i den endelege undersøkinga, dette grunna vanskar med å avgrensa intervjua i piloten, og det at det vart vanskeleg å samanlikna intervjua då dei alle vart så forskjellige.

For å førebu meg best mogleg til dette, utarbeidde eg ein intervjuguide. Av erfaringa frå intervjua eg gjorde i pilotundersøkinga, gjorde eg ein del endringar på denne guiden. Intervjuguiden (sjå 8.4) la opp til eit løp gjennom intervjuet der eg berre kjem inn på nokre av oppgåvene elevane fekk i kartleggingstesten, og eg laga spørsmål som skulle stillast til desse. Planen var å stilla spørsmåla i den same rekkjefølgja for alle informantane. Ifølgje klassifiseringa til Christoffersen og Johannessen (2012) og Goldin (2000) er dette eit semistrukturert intervju.

Undervegs i intervjua ville eg utfordra intervjuobjekta på nokre av oppgåvene. Grunnen for å gjera dette var for å prøva å finna ut kor djupt forståinga sat hjå eleven. Oppgåvene vart plukka ut for å belysa tre av misoppfatningane eg ville sjå nærare på; *«Å setja parentes», «å setja inntil» og «tekst-kontekst»*. Elevane eg intervjua vart «utfordra» i oppgåve 2b (s.56), oppgåve 4b (s.66) og oppgåve 7b (s.75). Måten dette vart gjort på var at etter at eleven først hadde kome med eit eige svar på oppgåvene, vart dei presenterte for eit «alternativt» svar som «ein annan elev» hadde kome med. Dersom eleven til dømes svara at $2 + 3 - 5 + 2 = -2$, (altså at eleven prioriterte addisjon/«sette parentes»/«frikopla») fekk eleven presentert svaret 2 (som er rett) og skulle ta stilling til kva av desse to alternativa som var det riktige. Det alternative svaret vart som sagt presentert som eit svar ein anna elev hadde kome med, det gjorde eg for å hindra at eleven i å tru han/ho hadde svart rett/feil i utgangspunktet. Eleven skulle så ta stilling til kva svar han/ho trudde var rett, og kvifor. Hadde eleven svara feil, fekk han/ho altså presentert rett svar som alternativ, og dersom eleven i utgangspunktet hadde svara rett vart han/ho presentert eit feilsvar som alternativ. Ideen til denne metoden henta eg frå Linchevski og Livneh (1999). Eg presenterer resultata av desse «utfordringane» i kapittel 5.3.

Noko som eg vil trekkje fram som utfordrande i gjennomføringa av intervjua, var å vera intervjuar/forskar og ikkje lærar. Eg prøvde etter beste evne, men gjennom transkripsjonen av intervjua, vart eg merksam på enkelte tilfelle der eg hjalp elevane til å koma fram til rett svar, og eg kom i etterkant også på meir utfyllande spørsmål eg kunne stilt. Her er det trening og atter trening på intervjusituasjonen som kan hjelpa ein (Kvale & Brinkmann, 2009). Intervjua gav likevel rik informasjon om kva elevane tenkte når dei løyste oppgåvene.

I intervjuguiden står det i byrjinga til mange av spørsmåla at eg sa kva svar eleven hadde kome med i kartleggingsprøva, for så å be dei forklara korleis dei hadde gått fram. Det var ikkje i mange intervju eg faktisk gjorde dette. Viss eg gjorde det, var det berre på eit fåtal av oppgåvene. Eg ba elevane eigentleg løysa oppgåvene først, så forklara kva dei tenkte og såg eventuelt mot svaret deira i kartleggingsprøva til slutt. Intervjuguiden (sjå 8.4) vart såleis ikkje fylgt heilt slik den står, men det var slik den var utarbeidd i forkant av intervjua.

3.3.3 Utval av informantar

Val av informantar kan gjerast på mange ulike måtar, og dersom ein ynskjer generaliserbare resultat, legg det føringar for korleis ein bør gjennomføre utvalet. Blant anna bør utvalet då vera tilfeldig og vera henta frå heile den gruppa dei representerer. Til dømes bør ein kanskje ha elevar frå alle studieprogram, og som representerer alle delar av karakterskalaen. For ei vidare utgreiing av ulike utval sjå Christoffersen og Johannessen (2012).

I dette prosjektet har eg gjort eit såkalla «bekvemmelegheitsutval». Eit slikt utval er ikkje å rekna som representativt for alle elevar, og kan såleis ikkje generaliserast (Danielsen, 2013). Det var totalt 91 elevar som deltok i studien, 42 jenter og 49 gutar. Fleirtalet av desse er frå skulen eg jobbar ved (12 elevar var frå ein annan skule). Det deltok 26 elevar med faget 1P-Y, 17 elevar med 1T, og 48 elevar med 1P. Grunnen til at det er eit fleirtal av 1P og 1P-Y elevar er at eg antok at ein i størst grad ville finna misoppfatningar til algebra her, og ikkje i så stor grad blant dei som hadde valt teoretisk matematikk.

Den skriftlege undersøkinga vart gjennomført i to omgangar. Første gang i vårsemesteret 2015, då med to 1P-grupper og ei 1T-gruppe, totalt 48 elevar. Andre gong rett før haustferien 2015, då med 43 elevar frå 1P og 1P-Y. Begge gongane var dei aktuelle temaa, «talrekning» og «algebra», undervist for elevane. Elevane var altså kome noko ulikt i undervisningsforløpet i 1.klasse, men dette har etter mi meining mindre betyding i mi undersøking. Eg skulle ikkje måla korleis det stod til akkurat i det dei byrja i vidaregåande, men undersøkja ståa på første trinn. Fokuset i undersøkinga mi er på misoppfatningar desse elevane sit med i algebra. Som omtala tidlegare i teorikapittelet, er dette etablerte oppfatningar som den enkelte elev kan ha, slike misoppfatningar har vist seg vera vanskelege å læra av seg. Interessa mi var å finna ut meir om kva som låg bak dei ulike misoppfatningane, prøva å forstå korleis elevar som slit med dei utvalte misoppfatningar tenkjer. Kva tid på året undersøkinga vart gjort hadde derfor for meg mindre å seia.

Skulen eg jobbar ved har elevar frå eit meir eller mindre avgrensa geografisk område på Vestlandet. Elevane kjem hovudsakleg frå Bergen kommune, då i stor grad frå Arna bydel, men han har òg mange elevar frå fleire bygder og tettstadar rundt, til dømes Osterøy, Samnanger og Vaksdal. Elevane kjem frå ulike sosiale miljø og frå både ressurssvake og ressurssterke heimar. Så å seie heile karakterskalaen er representert, men i ulik grad. Karakterane er ikkje data som vert brukt i denne undersøkinga av omsyn til elevane som deltok i testen. Elevrepresentasjonen er i så måte ein variert samansetnad av befolkninga i det aktuelle området og er tilfredstillande for intensjonen med dette masterprosjektet.

Eg har som tidlegare påpeika ikkje til intensjon å kunne konkludera med korleis det står til med norske elevar i vidaregåande skule med tanke på algebra i denne masteroppgåva. Hovudsakleg er eg ute etter å auka mine personlege kunnskapar om temaet misoppfatningar i algebra. Eit av måla er å få større innsikt i kva og korleis elevar tenkjer når dei løyser ulike algebraoppgåver, og kvifor dei tenkjer som dei gjer. Eg håpar sjølvsagt òg at funna mine kan vera interessante og relevante for fleire.

Når det gjeldt utval av kandidatar til intervjua, gjorde eg eit kriteriebasert utval (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 51). Eg ville intervjua elevar som i kartleggingstesten:

- viste teikn til ei eller fleire misoppfatningar
    - … og svara verka til ei viss grad gjennomgåande
    - … men svara verka tilfeldige
- ikkje viste teikn til misoppfatningar
- hadde fleire ubesvarte oppgåver

Eg plukka så tilfeldig ut kandidatar blant dei som oppfylte kriteria ovanfor, fann tilbake til kven desse var og fekk avtala intervju med dei. I informasjonsskrivet elevane var tildelte på førehand måtte dei svara på om dei var viljuge til å bli intervjua. Berre eit fåtal av elevane reserverte seg, men eg måtte sjølvsagt sjekka at eg ikkje plukka ut nokon av desse elevane.

Intervjua vart gjennomførte ca.3 veker etter den skriftlege kartleggingsprøva. Dette var med hensikt for å kunne registrera dataa frå kartlegginga, ferdigutvikla intervjuguiden, velja ut kandidatar til intervjua og la elevane gløyma oppgåvene litt. På dette viset fekk elevane møta oppgåvene på «ny» i intervjua og eg fekk eit lite innblikk i om elevane løyste dei på same viset då som i testen. Elevane som deltok i intervjua var utelukkande frå den første runden med kartleggingsundersøkingar, altså våren 2015.

3.4 Melding til NSD

I denne masteroppgåva er det ikkje innhenta sensitive personopplysningar, men då informasjonen og data vert handsama digitalt er prosjektet likevel meldepliktig (Christoffersen & Johannessen, 2012). Elevane vert sjølvsagt anonymiserte og kjeldedata vil verta destruert når arbeidet er avslutta. I det ligg det at testane og digitale opptak av intervjua vert sletta etter masterprosjektet er ferdig. Det vil vera nokre få avgrensa personopplysningar som vert oppbevart i tida under arbeidet med oppgåva, desse vert oppbevart åtskilt frå anna arbeid. Enkelttestar kan såleis kun koplast til den enkelte elev gjennom eit tildelt kandidatnummer, dette gjeldt òg i intervjua som altså vart tatt digitale lydopptak av. Prosjektet er meldt inn til, og godkjent av NSD, Norsk samfunnsvitskaplege datateneste AS (sjå vedlegg 8.1).

3.5 Reliabilitet og validitet

Uavhengig av kva forsking ein snakkar om, kjem ein ikkje utanom omgrepa reliabilitet og validitet. Desse omgrepa fortel oss noko om kvaliteten til arbeidet som vert gjort, kor nøyaktig ein handsamar dataa. Det er derfor viktig at forskaren heile tida er bevisst på kva data som vert nytta, korleis dei vert samla inn og korleis dei vert arbeidd vidare med i ettertid (Christoffersen & Johannessen, 2012). At ei undersøking kan gjentakast og måle det same kvar gong, gjerne på ulike tidspunkt og med ulike forskarar, er eit kvalitetsstempel og gjev høg reliabilitet (Danielsen, 2013; Kvale & Brinkmann, 2009; Sollid, 2013). Validitet omhandlar i kva grad ein metode undersøkjer det den er meint å undersøkja, altså kor truverdige eller gyldige resultata er (Kvale & Brinkmann, 2009). Ifølgje Danielsen (2013) handlar validitet om i kva grad spørsmåla i undersøkinga er gyldige indikatorar for dei omgrepa eller fenomena ein ynskjer å måla. Det at eg nyttar oppgåver i undersøkinga mi som òg er nytta i andre undersøkingar tidlegare, er derfor med på å auka validiteten. Eg veit at fleire av oppgåvene har vore med på å avdekka misoppfatningar i algebra hjå elevar av andre forskarar.

Det er i følgje Kvale og Brinkmann (2009) viktig at forskaren tenkjer på gyldigheita til undersøkinga gjennom heile forskingsprosessen. Dette understrekar også Sollid (2013), men peikar samstundes på at bruk av intervju som forskingsmetode gjer denne kvalitetssikringa vanskeleg, då ein ser på eit fåtal respondentar sine tankar om eit avgrensa emne. Det som er interessant å sjå på i ei undersøking er ikkje nødvendigvis aktuell i ei anna. Det er såleis ikkje gitt at ei kvalitativ undersøking kan gjentakast i ulike settingar, då det som er gyldig i ein samanheng ikkje treng vera det i ein annan (Sollid, 2013).

Det å tenkja på gyldigheita undervegs er derfor viktig for å i størst mogleg grad få testa det eg har tenkt å testa, og få stilt dei rette spørsmåla for å få svar på problemstillinga mi. Utfordringane i samband med undersøkingar gjort på elevar (som i andre samfunnsvitskaplege undersøkingar) er i kva grad elevane er oppriktige og ærlege i sine svar, både i den skriftlege kartleggingstesten og i dei påfølgjande intervjua. Her er mange faktorar som kan spela inn; er elevane opplagt og motiverte for å delta i studien, eller ville dei helst vore ein heilt annan stad? Er dei trøtte? Har dei ein dårleg dag? Ynskjer dei at eg som lærar og forskar skal få mest mogleg ut av undersøkinga mi, eller ynskjer dei heller å spolera ho? Eleven sitt bilete/inntrykk av læraren kan såleis vera med å påverka resultata.

Tilhøvet mellom lærar og elev kan altså vera avgjerande for kor reliable data ein får. Det var derfor viktig at eg gjorde det eg kunne som forskar for å få størst mogleg reliabilitet i undersøkinga. Det vart gjort ulike tiltak for å auke reliabiliteten og validiteten til studiet. Eg passa på at testen ikkje vart for lang og omfattande i tid, det same med intervjua, og eg passa på å finna høvelege tidspunkt for gjennomføringa av undersøkingane slik at elevane forhåpentlegvis var opplagte under testen/intervjua. Vidare nytta eg meg av fleire oppgåver frå tidlegare undersøkingar, og testen var i ei viss grad sett saman slik at fleire oppgåver testa det same, men på litt ulike måtar og i ulike settingar. Dette gjer at oppgåver kan samanliknast og vurderast opp mot einannan. I førekant av undersøkinga gav eg elevane utfyllande informasjon skriftleg og munnleg, der dei blant anna fekk vita hensikt med studien, korleis dataa kom til å bli nytta og handterte i det vidare arbeidet. Det var viktig å understreka friviljugheita til å delta i undersøkinga, og at dei kunne trekkja seg viss dei ikkje lenger ynskte delta. Eg forklarte vidare at eit av måla med arbeidet var å få ei større innsikt i elevar sine tenkemåtar, og at dette ville kunne vera med å gjera meg til ein betre og meir bevisst lærar, noko som vonleg vil koma framtidige elevar og lærarar til gode, og at dei ved å delta seriøst i dette arbeidet ville hjelpa meg i denne prosessen. Om svara dei gav var rett eller feil, var eg derfor mindre interessert i, eg ville vita kvifor dei tenkjer som dei gjer, og understreka òg viktigheita av at dei jobba sjølvstendig under testen.

3.6 Relasjon mellom forskar og informant

Når ein skal forska på eigne elevar, er det altså fleire ting ein må tenkje på. Blant anna vert det stilt spørsmål til korleis det å forska på eigne elevar påverkar resultata i undersøkinga, og om dette er i positiv eller negativ retning. Svaret på dette er nok at det vil variera. Kvaliteten på informasjonen som kjem ut av eit intervju er avhengig av relasjonen mellom intervjuar og informant (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 81). Eg meiner det vil kunne vera positive og negative sider ved både å kjenna elevane og ikkje kjenna dei. Gjer ein undersøkingar i ein ukjent klasse, vil det nok vera ein styrke i og med at elevane føler seg trygge på at resultat og informasjon vert halden heilt åtskilte frå faglæraren sine inntrykk av elevane, og ikkje kunne påverka læraren si oppfatning av eleven i så måte. Samstundes meiner eg at det å forska på eigne elevar kan gje ein styrke til undersøkinga. Kjenner elevane forskaren, har dei vonleg tillit til han, og vil gjerne i større grad ynskje å hjelpa til ved til dømes å ta undersøkinga meir seriøst og yte sitt beste. På den andre sida kan eit dårleg forhold til læraren kunne føra til det motsette, at eleven tar undersøkinga useriøst og underyter på testen.

Mi oppleving som forskar på eigne og andre sine elevar, var at det å forska på eigne elevar var like uproblematisk som på andre sine. Eg fekk ein følelse av at dei aller fleste elevane tok undersøkinga seriøst og ytte det dei kunne.

I intervjua deltok kun elevar frå eigen skule, grunnen til det var at det var lettare å finna passande høve for intervjua og avtale dette med faglærarar då eg kjente timeplan og lærarar. På denne måten intervjua eg elevar på tidspunkt som ramma dei minst mogleg (eller ikkje i det heile) i høve til anna undervisning. Det verka som elevane som då kjente meg var avslappa og tillitsfulle under intervjua, og inntrykket var at dei sa det dei meinte/tenkte og ikkje det dei trudde eg ville dei skulle svara. Ein elev uttrykte blant anna at han syntes ei av oppgåvene var litt «jalla», han sikta då til oppsettet som han ikkje var heilt nøgd med, det er ikkje sikkert ein ukjent elev ville kome med ein slik uttale.

3.7 Registrering og bearbeiding av resultata

Resultata frå den skriftlege undersøkinga vart registrert i Excel, på same viset som forklart for piloten, (sjå vedlegg 8.6 for fullstendig datasett). I Excelarket vart det skrive «1» for det alternativet eleven gav. Samstundes koda eg svara med anten «R», «M», «F» eller «U»

Tabell 1: Utsnitt av registreringa i Excel

Tal på; Elevar: 91 Jenter: 42 Gutar: 49

Kandidatnummer:	12	13	6	17	11	5	16	18	19	3	14	2	20	15	1
Fag:	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
Kjønn:	G	G	G	J	G	J	J	J	J	J	G	J	J	G	G
Skule:	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Oppgåve 1 a)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	98 %	0 %	
Ubesvart			1
7 (Riktig svar)			98
6			1
			100

Frekvens	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	R	R	R	R	R
1															
89	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1															

Oppgåve 1 b)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	96 %	4 %	
Ubesvart			0
4 (Riktig svar)			96
2			1
8			1
6			2
			100

Frekvens	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	R	R	R	R	R
0															
87	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1															
1															
2															

Oppgåve 1 c)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	77 %	22 %	
Ubesvart			1
6 (Riktig svar)			77
3			21
5			1
			100

Frekvens	**R**	**R**	**M**	**R**	**R**	**M**	**M**	**R**	**R**	**R**	R	M	R	R	M
1															
70	1	1		1	1			1	1	1	1		1	1	
19			1			1	1					1			1
1															

alt etter om svaret var høvesvis rett, om det skuldast misoppfatning, andre feil eller om oppgåva stod ubesvart. I denne prosessen kan det ha blitt gjort feil i kodinga, det er umogleg å garantera noko anna. Eg gjorde det eg kunne for unngå slike feil ved å gå gjennom resultata for å sjå til at alternativa hadde same koding for alle kandidatane. Så eg håper dette ikkje er noko som har innverknad på resultata mine. I resultatkapittelet presenterer eg berre utsnitt av tabellane til venstre i tabellen over.

Registreringane over (den fullstendige versjonen) vart så transponerte over i eit anna ark i Excel-fila[4], i dette arket såg eg meir samla på resultata og fekk laga ei oversikt over tilfelle av rette svar, feilsvar, misoppfatningsvar og ubesvarte. Eit utsnitt av denne registreringa kan ein sjå i tabell 2, alle desse dataa finn ein i vedlegg 8.5.

Tabell 2: Utsnitt og forklaring av samla resultata registrert i Excel.

			R	M	F	U
Alle	% Rett		62 %	-	-	-
Alle	% Misoppfatning		-	19 %	-	-
Alle	% Feilsvar		-	-	5 %	-
Alle	% Ubesvart		-	-	-	14 %
Snitt "R"	Alle		0,62	0,19	0,05	0,14
Snitt "R"	1P	48	0,63	0,21	0,06	0,10
Snitt "R"	1P-Y	26	0,43	0,22	0,05	0,29
Snitt "R"	1T	17	0,86	0,08	0,03	0,03
Jenter "R"	Alle jenter	42	0,68	0,16	0,04	0,13
Jenter "R"	1P		0,67	0,17	0,05	0,10
Jenter "R"	1P-Y		0,51	0,19	0,02	0,28
Jenter "R"	1T		0,90	0,07	0,01	0,03
Gutar "R"	Alle gutar	49	0,57	0,22	0,06	0,15
Gutar "R"	1P		0,59	0,25	0,06	0,10
Gutar "R"	1P-Y		0,39	0,25	0,07	0,30
Gutar "R"	1T		0,84	0,09	0,05	0,03
Misoppfatningar	Alle			0,19		
Misoppfatningar	1P			0,21		
Misoppfatningar	1P-Y			0,22		
Misoppfatningar	1T			0,08		

	Oppg	1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5
Alle	% Rett	98 %	96 %	77 %	63 %	66 %	54 %	92 %	46 %	58 %	43 %	62 %	82 %
Alle	% Misoppfatning	0 %	4 %	22 %	9 %	33 %	31 %	0 %	13 %	27 %	44 %	23 %	8 %
Alle	% Feilsvar	1 %	0 %	0 %	5 %	1 %	13 %	3 %	3 %	1 %	2 %	3 %	1 %
Alle	% Ubesvart	1 %	0 %	1 %	23 %	0 %	2 %	4 %	36 %	13 %	11 %	12 %	9 %
Snitt "R"	Alle	0,98	0,96	0,77	0,63	0,66	0,54	0,92	0,46	0,58	0,43	0,62	0,82
Snitt "R"	1P	1,00	0,98	0,75	0,63	0,52	0,52	0,98	0,46	0,63	0,50	0,67	0,90
Snitt "R"	1P-Y	0,92	0,88	0,77	0,46	0,73	0,42	0,85	0,19	0,23	0,19	0,31	0,58
Snitt "R"	1T	1,00	1,00	0,82	0,88	0,94	0,76	0,88	0,88	1,00	0,59	0,94	1,00
Jenter "R"	Alle jenter	1,00	0,98	0,79	0,71	0,64	0,71	1,00	0,55	0,64	0,40	0,62	0,90
Jenter "R"	1P	1,00	1,00	0,75	0,75	0,58	0,67	1,00	0,54	0,67	0,42	0,63	0,96
Jenter "R"	1P-Y	1,00	0,90	0,90	0,60	0,60	0,70	1,00	0,30	0,30	0,20	0,30	0,70
Jenter "R"	1T	1,00	1,00	0,75	0,75	0,88	0,88	1,00	0,88	1,00	0,63	1,00	1,00
Gutar "R"	Alle gutar	0,96	0,94	0,76	0,55	0,67	0,39	0,86	0,39	0,53	0,45	0,61	0,76
Gutar "R"	1P	1,00	0,96	0,75	0,50	0,46	0,38	0,96	0,38	0,58	0,58	0,71	0,83
Gutar "R"	1P-Y	0,88	0,88	0,69	0,38	0,81	0,25	0,75	0,13	0,19	0,19	0,31	0,50
Gutar "R"	1T	1,00	1,00	0,89	1,00	1,00	0,67	0,78	0,89	1,00	0,56	0,89	1,00
Misoppfatningar	Alle	0,00	0,04	0,22	0,09	0,33	0,31	0,00	0,13	0,27	0,44	0,23	0,08
Misoppfatningar	1P	0,00	0,02	0,25	0,13	0,46	0,29	0,00	0,23	0,31	0,46	0,23	0,04
Misoppfatningar	1P-Y	0,00	0,12	0,19	0,04	0,27	0,42	0,00	0,00	0,38	0,46	0,35	0,19
Misoppfatningar	1T	0,00	0,00	0,18	0,06	0,06	0,18	0,00	0,06	0,00	0,35	0,06	0,00

		6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	8c	8d	9	10a	10b	10c
Alle	% Rett	80 %	41 %	47 %	37 %	20 %	79 %	73 %	47 %	64 %	47 %	80 %	62 %	32 %
Alle	% Misoppfatning	15 %	40 %	33 %	37 %	36 %	7 %	5 %	11 %	2 %	37 %	2 %	20 %	16 %
Alle	% Feilsvar	1 %	7 %	5 %	2 %	8 %	7 %	8 %	10 %	10 %	1 %	11 %	11 %	9 %
Alle	% Ubesvart	3 %	13 %	14 %	23 %	36 %	8 %	14 %	32 %	24 %	14 %	7 %	8 %	43 %
Snitt "R"	Alle	0,8	0,41	0,47	0,37	0,2	0,79	0,73	0,47	0,64	0,47	0,8	0,62	0,32
Snitt "R"	1P	0,90	0,44	0,46	0,40	0,10	0,85	0,77	0,48	0,69	0,42	0,79	0,67	0,31
Snitt "R"	1P-Y	0,54	0,04	0,23	0,15	0,00	0,58	0,46	0,19	0,38	0,31	0,81	0,46	0,12
Snitt "R"	1T	0,94	0,88	0,88	0,65	0,76	0,94	1,00	0,88	0,88	0,88	0,82	0,71	0,65
Jenter "R"	Alle jenter	0,86	0,43	0,52	0,48	0,21	0,88	0,81	0,57	0,76	0,55	0,93	0,64	0,31
Jenter "R"	1P	0,92	0,42	0,50	0,54	0,08	0,88	0,88	0,50	0,71	0,50	0,92	0,67	0,38
Jenter "R"	1P-Y	0,60	0,10	0,20	0,10	0,00	0,80	0,50	0,40	0,70	0,40	0,90	0,50	0,00
Jenter "R"	1T	1,00	0,88	1,00	0,75	0,88	1,00	1,00	1,00	1,00	0,88	1,00	0,75	0,50
Gutar "R"	Alle gutar	0,76	0,39	0,43	0,29	0,18	0,71	0,65	0,39	0,53	0,41	0,69	0,59	0,33
Gutar "R"	1P	0,88	0,46	0,42	0,25	0,13	0,83	0,67	0,46	0,67	0,33	0,67	0,67	0,25
Gutar "R"	1P-Y	0,50	0,00	0,25	0,19	0,00	0,44	0,44	0,06	0,19	0,25	0,75	0,44	0,19
Gutar "R"	1T	0,89	0,89	0,78	0,56	0,67	0,89	1,00	0,78	0,78	0,89	0,67	0,67	0,78
Misoppfatningar	Alle	0,15	0,40	0,33	0,37	0,36	0,07	0,05	0,11	0,02	0,37	0,02	0,20	0,16
Misoppfatningar	1P	0,08	0,40	0,35	0,48	0,52	0,04	0,06	0,17	0,02	0,44	0,04	0,10	0,17
Misoppfatningar	1P-Y	0,35	0,58	0,42	0,31	0,23	0,15	0,08	0,08	0,00	0,42	0,00	0,42	0,15
Misoppfatningar	1T	0,06	0,12	0,12	0,18	0,12	0,00	0,00	0,00	0,06	0,12	0,00	0,12	0,18

Elevresultat

Relativ hyppigheit av type svar: "R", "M", "F" og "U"

Gjennomsnittleg poengskår på dei ulike oppgåvene etter ulike inndelingar

Koding av svar:
R = rett svar
M = svar som tydar på misoppfatning
F = feil som skyldast andre ting (slurvefeil, reknefeil)
U = eleven gav ikkje noko svar, ubesvart

Skule	Kandidat	Fag	Kjønn	R	M	F	U	1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5
A	12	P	G	10	9	3	3	R	R	R	U	M	M	R	M	M	M	R	R
A	13	P	G	15	7	2	1	R	R	R	R	M	M	R	R	R	M	M	R
A	6	P	G	17	3	4	1	R	R	M	U	R	F	R	R	R	R	R	F
A	17	P	J	16	7	2	0	R	R	R	R	M	M	R	R	M	M	M	R
A	11	P	G	17	6	2	0	R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R
A	5	P	J	12	4	3	6	R	R	M	U	R	R	R	U	R	M	F	R

Kandidat	6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	8c	8d	9	10a	10b	10c
12	R	F	M	M	M	R	R	U	R	U	F	F	M
13	R	M	M	R	R	R	R	F	F	M	R	R	U
6	R	R	M	R	R	R	F	R	R	M	R	R	F
17	R	R	R	R	M	R	R	R	R	M	R	F	F
11	R	M	M	M	M	R	R	R	R	R	F	F	M
5	R	R	F	M	M	F	R	U	U	U	R	R	U

Desse registreringane vart nytta til å sjå samla på resultata til enkelelevar og grupper som «Alle jenter», «Gutar 1P» og så bortover. Vidare vart data frå oversikta over nytta til framstilling av ulike diagram og diskusjon av desse presentert i kapittel 5 og 6.

[4] Excelfila med desse dataa i si heilheit er å finna i fullskala-variant på adressa: http://math.uib.no/adm/Master/Raadata_Audestad.xlsx

4 RESULTAT OG ANALYSE

I dette kapitlet vil eg i hovudsak presentera resultata frå kartleggingsundersøkinga eg gjennomførte. Eg vil òg i nokre tilfelle koma med utdrag frå intervjua for å belysa enkelte emne. Eg vil presentera kvar oppgåve i åtskilte delkapittel, men vil dra nokre parallellar over til andre oppgåver for å visa til samanhengar.

Sjølve oppgåvene vert presenterte innleiingsvis i kvar sine delkapittel, men ikkje alltid kronologisk. Deloppgåvene vil bli gått gjennom i tur og orden. Resultata vil så bli presenterte i tabellar med svaralternativ og tilhøyrande relativ frekvens. I nokre oppgåver vil eg omtala talet på elevar som til dømes har gitt eit bestemt svar, det kan då vera greitt å ha i minnet at 91 respondentar deltok i undersøkinga mi.

Som tidlegare påpeika, prøvde eg å setja opp svaralternativ på førehand. Svaralternativ som eg ikkje hadde sett opp på førehand, men som likevel dukka opp som svar hjå respondentane, er markerte med ein svak gulfarge i tabellane. Det riktige alternativet er markert med grå bakgrunn og er alltid det nest øvste alternativet.

4.1 Oppgåve 1

Skriv rett tal i rutene

a) $\mathbf{3 \cdot \square = 21}$

b) $\mathbf{\square \cdot 2 + 4 = 12}$

c) $\mathbf{3 + 2 \cdot \square = 15}$

d) $\mathbf{25 - 2 \cdot \square = 17}$

Figur 17: Oppgåve 1

Oppgåve 1 er henta frå «Kartlegging av matematikkforståelse, Veiledning til algebra» (Brekke et al., 2000). Desse oppgåvene testar korleis elevar prioriterer ulike rekneoperasjonar i forhold til kvarandre. Den ukjente er representert ved ei tom rute, dette er ein metode mykje brukt i innføring av ukjente tal, og er ei av metodane Kieran (1981) tilrår for å gjera overgangen til algebra best mogleg (sjå 2.2.4.6). Her er det misoppfatningar i prioriteringa mellom multiplikasjon og addisjon eller subtraksjon, samt det å følgja rekkjefølgja i oppgåva slavisk (venstre mot høgre) som er temaet.

I ***oppgåve 1a*** testar ein om eleven meistrar multiplikasjon mellom to tal, og ein testar om eleven er kjent med å bruka ei tom rute som symbol for eit bestemt ukjent tal. Bommar eleven her, er det truleg vanskeleg med dei tre etterfølgjande oppgåvene òg. Her kan eit manglande svar koma av at eleven ikkje forstår kva som skal gjerast. Kanskje eleven ikkje er kjent med, eller fortruleg med, denne type oppsett?

Tabell 3: Resultat oppgåve 1a

Oppgåve 1 a)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	98 %	0 %	
Ubesvart			1
7 (Riktig svar)			98
6			1

Det var to elevar som ikkje fekk til denne oppgåva i undersøkinga, medan resten av elevane svara rett (89 stk.). Det tolkar eg som at dei fleste av deltakarane i undersøkinga kan multiplisera enkle tal, og at dei har forstått kva «ruta» representerer. Dette er i tråd med resultata Brekke et al. (2000) fann i sine undersøkingar. Eleven som ikkje svarte på oppgåva, svarte riktig nok på (b) og (c). Han viste i dei oppgåvene teikn til misoppfatningar, spesielt i forhold til reknerekkjefølgja, men eleven hadde òg manglande forståing for sjølve oppsettet generelt. Meir om dette i omtale av oppgåve (b).

Oppgåve 1b testar om eleven følgjer vanleg framgangsmåte (både rekkjefølgja i oppgåva og reknerekkjefølgja), eller om eleven først summerer 2 og 4 (sidan han/ho kjenner desse og dei er faktiske tal) og deretter multipliserer med 2 for å få tolv. Altså er feilsvaret 2 av særskild interesse.

Tabell 4: Resultat oppgåve 1b

Oppgåve 1 b)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	96 %	4 %	
Ubesvart			0
4 (Riktig svar)			96
2			1
8			1
6			2

96% av elevane fekk til denne oppgåva. Samstundes ser ein av tabellen over at det berre var ein elev i undersøkinga som svarte 2. Dersom eleven legg saman 2 og 4 først for så å multiplisera dette med 2, kan det vera eit teikn på at eleven ikkje kjenner til prioriteringa av multiplikasjon framfor addisjon. Altså kan oppgåva vera med på å avsløra dette. Samstundes kan eit rett svar her koma av ei anna misoppfatning. Sidan elevar er vande med at mange oppgåver vert rekna frå venstre mot høgre, kan denne oppgåva leia eleven til rett svar, utan at eleven nødvendigvis kjenner til prioritering mellom addisjon og multiplikasjon, men berre følgjer oppsettet i uttrykket, frå venstre mot høgre. Oppgåva gav meg såleis ikkje den informasjonen eg venta, då sistnemnde misoppfatning likevel kan gje riktig svar. Oppgåva er derfor ikkje ei velfungerande diagnostisk oppgåve, tenkjer eg. Dette er i strid med Brekke si oppfatning, han skriv at oppgåva er «*en god diagnostisk oppgave som gir rik informasjon om elevtenkning*» (Brekke et al., 2000, s. 13). Eg vil heller seia den gir avgrensa informasjon om dei elevane som ikkje sit med misoppfatninga «venstre-høgre».

Svaret «8» kjem truleg av at eleven har sett inn svaret på $4 \cdot 2$, altså har eleven eigentleg funne rett svar for firkanten, men så skrive inn svaret på multiplikasjonen (8). Dette kan vera eit resultat av at eleven stressar eller rett og slett ikkje tenkjer godt nok etter, det Kahneman (2012) omtalar som System 1-respons. Eleven som ikkje svara på 1a) var ein av to elevar som gav svaret 6 i (b), eit svar som mest truleg kan koma av to årsaker. Det kan vera eleven ser etter kva som må multipliserast med 2 for å få 12, eller at eleven summerer alle tala, og altså overser multiplikasjonsteiknet. Resultata frå undersøkinga til Brekke et al. (2000) for 10.klasse viser 9 prosent som svara 2, medan berre ein elev svara 2 i mi undersøking, noko som utgjer 1,1% av svara. Elles var resultata ikkje veldig ulike frå desse to undersøkingane, og det er verdt å merka seg at eg har eit mykje mindre elevtal å visa til; 91 elevar mot Brekke sine 511 elevar.

Oppgåve 1c testar om eleven følgjer prioriteringsrekkjefølgja eller reknar ut oppsettet frå venstre mot høgre. Nokre elevar vil kanskje her rekna saman 3+2 først, og deretter multiplisera med 3. Denne oppgåva testar i motsetnad til førre oppgåve for misoppfatninga «venstre-mot-høgre», i tillegg til misoppfatningane som vart testa i oppgåve (1b). Ifølgje Booth (1988) er det ikkje uvanleg at elevar meiner rekkjefølgja uttrykket er skrive i, òg gjev dei rekkjefølgja det skal reknast ut i. Ein elev som fekk rett svar i (b), kan, som påpeika på førre side, sitja på misoppfatning i forhold til prioritering utan at det kjem fram av svaret, men det kan oppgåve 1c) vera med på å avsløra.

Tabell 5: Resultat oppgåve 1c

Oppgåve 1 c)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	77 %	22 %	
Ubesvart			1
6 (Riktig svar)			77
3			21
5			1

I undersøkinga var det 21 % som gav svaret «3», altså kan det sjå ut til at i overkant av kvar femte elev som deltok i undersøkinga, reknar uttrykket frå venstre mot høgre, utan å ta omsyn til prioriteringar. Her skulle ein tru at dei elevane som gjorde feil i (b), òg gjer same feilen i (c), dette var ikkje tilfelle for den eine eleven som svarte 2 i (b) i mi undersøking. Denne eleven svarte rett i (c), noko som kan tyda på at eleven kanskje ikkje sit på ein direkte misoppfatning, men at eleven kan ha gjort ein tilfeldig feil i (b).

Det viser seg altså å vera ein betydeleg del av elevane som reknar oppgåva i leseretninga i (c), det er ikkje utenkeleg at desse òg gjorde det i (b) utan at det kom fram av den oppgåva. At oppgåver skal løysast i leseretninga, er ei vanleg misoppfatning hjå elevar i grunnskulen (Booth, 1988), men her viser den seg og tydeleg hjå elevar på første trinn i vidaregåande skule.

Samanliknar ein resultata mine med Brekke sine, så viser det seg å vera ein betydeleg lågare del av elevane som gjer feil på vg1 enn på 10.trinn. På 10.trinn er det til samanlikning 33 prosent som svarar riktig, «6», på oppgåve (c), medan det er heile 63% som svarer 3 på oppgåva. Så tala er omtrent bytt om, det var 77% av elevane på vg1 som svarte rett på denne oppgåva.

Siste ***deloppgåva, 1d***, stilte elevane ovanfor eit litt anna problem. Her tenkte eg i førekant av undersøkingane mine at det truleg ville vera overvekt av ubesvarte eller riktige svar, då rekneoperasjonen på venstre side ikkje gjev alternative utrekningar med heile tal som svar. Eit svaralternativ eg likevel kunna sjå for meg var 8, sidan dette er det ein må trekkja frå 25 for å få 17. Dersom ein ser etter i tabellen under, ser ein at dette alternativet ikkje er oppført, grunnen er at det ikkje var føreslått av nokon av elevane.

Tabell 6: Resultat oppgåve 1d

Oppgåve 1 d)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	63 %	9 %	
Ubesvart			23
4(Riktig svar)			63
21			7
13			1
9, 0, 27 eller anna tal			5
13/25			1

Tabellen viser resultata frå oppgåve 1d). Som antatt var det ei overvekt av riktige svar, 63 %, og heile 23% let oppgåva stå uløyst. Det at så mange let oppgåva stå uløyst, kan vera botna i at dei sit med misoppfatninga av at svaret må vera eit heilt tal, og samstundes har venstre-høgre-misoppfatninga.

Eit svar eg finn spesielt interessant her, er svaret 21. Det var seks elevar som kom med dette svaret i undersøkinga. Første augekast får ein til å undra seg over korleis elevane kom fram til dette svaret. Det viser seg at dei har freista å løysa oppgåva slik ein løyser ei likning, men utan å lukkast. Elevane har flytta 25 over til høgresida og deretter delt på 2, som om dei negative forteikna ikkje eksisterer. Eg tok ikkje denne oppgåva med i intervjua eg gjorde i undersøkinga mi, då eg måtte gjera prioriteringar. For å få fram eleven sitt tenkemønster, vil eg derfor visa til eit intervju med ein elev som svarte 21 i pilotundersøkinga eg hadde. I dette intervjuet gjentar eleven same framgangsmåten når han vert presentert for oppgåva på ny, noko som viser at dette er måten eleven faktisk tenker på, det er ikkje ein tilfeldig feil, men han hadde ein bestemt strategi for å løysa likninga.

Det ser altså ut til at nokon elevar nyttar seg av den kjente metoden likningsløysing for å løysa desse oppgåvene. Dette er ikkje uventa, elevane har jo arbeidd med likningar og ukjente representert som bokstavar tidlegare. At elevane kjenner att uttrykket som ei likning, og dermed løyser oppgåva som ei likning når dei ikkje ser svaret ut frå uttrykket, er positivt. Det viser at elevane har laga seg eit bilete av omgrepet likningar (sjå kap. 2.2.4.6). Svaret 21 viser at ein del av desse elevane likevel ikkje klarar å løysa denne forholdsvis enkle likninga.

Det som var positivt i oppgåve 1, var at mange fekk til dei fleste av oppgåvene. Det viser seg å vera ein del elevar som reknar frå venstre mot høgre, noko som eigentleg var forventa, men samanlikna med Brekke sine resultat ved testing med same oppgåver, (Brekke et al., 2000), gjer elevane på 1,trinn i vidaregåande skule det betre på desse prealgebraiske oppgåvene. Altså ser det ut til at det er ei positiv utvikling frå grunnskulen, om ein tek omsyn til at eg ikkje har testa breitt innanfor ulike vidaregåande retningar.

4.2 Oppgåve 2

Rekn ut

a) $\mathbf{2 + 3 - 5 + 2 =}$

b) $\mathbf{1 + 4 \cdot 3 - 7 + 5 =}$

Figur 18: Oppgåve 2

Desse oppgåvene testar elevane i reknerekkjefølgja/prioriteringsproblem, men oppgåvene er av ein annan type enn i oppgåve 1. Medan oppgåve 1 bestod av likningar, får elevane i oppgåve 2 presentert to reknestykke som skal løysast. Dette er ein type oppgåver med eit oppsett elevane skal vera godt kjent med frå tidlegare skulegang, og forhåpentlegvis noko elevane beherskar godt.

Kvifor har eg då desse oppgåvene med? Grunnen er at gjennom tida som lærar i matematikk har eg sett at elevar møter spesielle utfordringar nettopp i møtet med slike oppgåver. Ei av utfordringane handlar om «tenkte parentesar», noko ein kanskje kan sjå på som feilprioritering mellom addisjon og subtraksjon (sjå kap. 2.2.4.3). Det kan verka som om nokon av elevane deler opp reknestykka ved subtraksjonsteikna. Desse erfaringane inspirerte meg til å laga dei to oppgåvene ovanfor.

Seinare har eg funne ut at dei to oppgåvene har mykje til felles med oppgåver og funn hjå Linchevski og Livneh (1999) som eg viste til i teorikapittelet (2.2.4.3). Dei gjorde som omtala forsøk med liknande oppgåver på elevar tilsvarande ungdomstrinnet, og fann at elevar deler opp, eller grupperer ledd, i eit uttrykk og reknar så ut del for del, som om det er ein usynleg parentes rundt delane. Denne misoppfatninga omtalar dei som «detachment of the posterior operator», medan Bell (1995) omtalar denne misoppfatninga som «drop sign while operating» (sjå kap.2.2.4.3).

Oppgåve 2a) har til hensikt å testa om eleven følgjer rekkjefølgja slik han skal (her i leseretninga) eller om eleven "ser" parentesar rundt to og to ledd, $(2+3) - (5+2)$, slik som beskrive i dei førre avsnitta.

Tabell 7: Resultat oppgåve 2a

Oppgåve 2 a)	**% Rett**	**% M**	**Relativ frekvens**
Svar:	66 %	33 %	
Ubesvart			0
2 (Riktig svar)			67
-2 (misoppfatting)			26
-1			3
7 (Detachment ++)			1
6 (M, 3-5=2 -> 2+2+2=6			1
12 (Set parentes, og endrar forteikn, + summeringsfeil)			1

I undersøkinga mi var det 67 % som svara riktig, medan vel 26 % av elevane gjorde ein av feila nemnt ovanfor og fekk -2 som svar. Eg syntest dette var ein forholdsvis stor del med tanke at dette er på vidaregåande, samstundes er jo dette noko eg har sett ein god del av i undervisninga på dette trinnet, så eg blei ikkje overraska.

Det første eg tenkjer dersom elevar kjem med svaret -2, er anten at elevane «set parentes», eller at eleven sit med misoppfatninga om at addisjon kjem før subtraksjon. Dette kan stemma, men problemet kan òg vera meir samansett enn det. Dette med «å setja parentes» treng ikkje vera knytt kun til feilprioritering mellom addisjon og subtraksjon, men kan vera ei misoppfatning i seg sjølv (Linchevski & Livneh, 1999). Feilsvaret -2 kan òg vera såkalla system 1-feil, jamfør Kahneman (2003, 2012). Når ein elev møter denne oppgåva, vil det første han ser vera ei oppgåve som er symmetrisk om subtraksjonsteiknet, og intuitivt vil hjernen kunna summera tala på venstre og høgre side av dette, for så å trekkja desse frå kvarandre. Oppgåve 2a vert tolka som så enkelt at hjernen ikkje nødvendigvis startar noko djupare prosess, den arbeider automatisk og hurtig, og kan då gjera ulogiske feil (Kahneman, 2012).

I intervjuet med elev12 under ser me at eleven summerer det før og etter

E 12: Regn ut A: 2+3 – 5 + 2 =
L: Ja, korleis vil du løysa den?
E12: Begynne med å ta to pluss tre, som då e seks. Nei, som da e fem.
L: Mhm
E 12: Og så finne ut at fem pluss to e syv. Så tar eg fem minus syv.
L: Som e?
E12: Eh, minus to

Intervjuutdrag 1

subtraksjonsteiknet, før han trekkjer sju frå fem. Her fulgte eg ikkje opp med vidare spørsmål, så eg fann ikkje ut kva av grunnane til at eleven gjorde denne feilen var. Den kan skuldast system 1-feil, men den kan og koma av «mentale» parentesar eller frikopling frå det negative forteiknet.

Forutan misoppfatninga «å setja parentes» eller «drop sign while operating» har me òg fleire andre funn her. Ein av elevane har kome med svaret 6. Dette svaret kjem mest truleg av ein forteiknsfeil i forsøk på ei forenkling av uttrykket, eleven hadde gjort følgjande: $2+3-5+2=2+(3-5)+2=2+2+2=6$. Det er òg mogleg at eleven gjer denne feilen grunna vanskar med å vita korleis han skal forholda seg til negative svar.

Svaret tolv kom av at eleven her reknar saman det før og det etter subtraksjonsteiknet, for så erstatta subtraksjonsteiknet med eit addisjonsteikn. Dette svaret kan kanskje tyde på ein misoppfatning knytt til parentesbruk og at eleven samstundes har gjort ein forteiknsfeil.

Ein elev har skrive feil utrekning, men riktig svar. Om rett svar kjem av at han gjer ein forteiknsfeil eller om eleven veit riktig svar er uvisst. Kanskje burde eg her brukt litt andre tal for å unngå mogleiken for forteiknsfeil.

For å testa om oppsettet av oppgåva kan «lura» eleven til å gjera system-1-feil, tok eg med ei oppgåve som likna, men som og inkluderer multiplikasjon, på denne måten bryt ein symmetrien ein finn i (a). ***Oppgåve 2b)*** er ei meir samansett oppgåve enn (a), dette gjer at det òg er ei oppgåve der me testar fleire misoppfatningar, så her er det fleire moment ein må sjå etter. Dersom eleven grupperer, slik nokon elevar gjorde i oppgåve 2a), vil eleven trekkja det etter subtraksjonsteiknet frå det som står framføre, og få ein som svar.

Eit anna svaralternativ som eg kan tenkjer kan førekoma, er 13. Eleven legg då først saman 1+4 før han multipliserer med 3, trekkjer frå 7 og legg til 5. Dette svaret vil ein få dersom ein følgjer leseretninga i den oppstilte oppgåva, utan å ta omsyn til prioriteringa mellom dei ulike rekneoperasjonane. Dersom eleven sit med same misoppfatninga som i (a), («å setja parentes» eller frikopling), og i tillegg misoppfatning i forhold til multiplikasjon-addisjon vil eleven få 3 som svar.

Tabell 8: Resultat oppgåve 2b

Oppgåve 2 b)	**% Rett**	**% M**	**Relativ frekvens**
Svar:	54 %	31 %	
Ubesvart			2
11 (Riktig svar)			54
13 (misoppfatning addisjon-multiplikasjon)			11
1 (Misopptatting addisjon subtraksjon)			19
3 (misoppfatning fleire)			1
0			1
9			1
2			1
10 eller anna talsvar			10

Tabell 8 viser at talet på riktige svar går ned samanlikna med (a). Samstundes er talet på svar med misoppfatningar omtrent det same i (a) og (b), høvesvis 31% og 33%. Det er 17 elevar som gjer same type feil som ein fann i (a), samstundes er det 10 elevar som ikkje prioriterer etter operatorane, men konsekvent følgjer leseretninga i oppgåva. Noko av det mest interessante her er til dømes å sjå om eleven som viste teikn på «å setja parentes» eller frikopling i (a) også gjer dette i (b). Og også: er elevane som svarte rett i (b) dei same som gjorde rett i (a)? For å prøva å sjå litt nærare på dette, lagar eg ein krysstabell over resultata.

Tabell 9

Oppgåve 2

2a \ 2b	Rett	Misoppfatning	Feil	Ubesvart	Sum
Rett	**40**	**9**	**10**	**1**	60
Misoppfatning	**9**	**18**	**2**	**1**	30
Feil	**0**	**1**	**0**	**0**	1
Ubesvart	**0**	**0**	**0**	**0**	0
Sum	49	28	12	2	91

Som ein ser av Tabell 9, er det kun 40 elevar som gjorde rett i begge oppgåvene, altså var det 20 av dei 60 elevane som gjorde rett i (a), som gjorde feil i (b). 9 av desse igjen gjorde feil som kunne tyda på ei misoppfatning. Samstundes gjorde 9 av elevane som gav eit svar som botna i ei misoppfatning i (a), rett i (b). Eg hadde i større grad venta at elevane som viste teikn på misoppfatningar i den første oppgåva, òg ville gjere det i (b). At 9 av elevane som viste teikn på misoppfatning knytt til å setja parentes i (a) ikkje gjorde det i (b), som var eit litt meir samansett uttrykk, kan tyda på at elevane kanskje vart «lurt» av oppsettet og symmetrien kring subtraksjonsteiknet som triggar system-1 til å setja parentes i (a).

Professor Snorre A. Ostad (1999) seier at elevar med vanskar i matematikk har få og lite fleksible strategiar i møte med oppgåver. Oppsett og kontekst kan då ha mykje å seia for om eleven får til oppgåva eller ikkje. Den vekslande metodebruken kan ifølgje Greeno (1982) vera eit teikn på at metodane nokre av elevane brukar, til ei viss grad er tilfeldige og inkonsekvente, og ikkje nødvendigvis eit teikn på ei etablert misoppfatning (1982, referert i, Linchevski & Livneh, 1999). Av Tabell 9 i oppgåve 2 ser me at omtrent kvar femte elev sit med misoppfatningar i høve til det å setja parentes i desse to oppgåvene, eller at dei ventar med å nytta det negative forteiknet til etter at dei har lagt saman tala . Eg har då tatt omsyn til at resultata av (b) kan tyda på at nokre elevar har vorte lurt av symmetrien i oppgåva og har gjort system 1-feil.

4.3 Oppgåve 3

a) Kor mange klinkekuler har du etter at du har vunne 4 klinkekuler 3 gongar og 2 klinkekuler 5 gongar? Vis korleis du kjem fram til svaret.

____

____

b) Kor mange klinkekuler har du etter at du har vunne 4 klinkekuler m gongar og 2 klinkekuler n gongar?

____

____

Figur 19: Oppgåve 3

Denne oppgåva har det overordna føremålet å testa overgangen frå aritmetikk til algebra. Dei to deloppgåvene er svært like kvarandre, forskjellen er at (a) er aritmetisk og (b) er algebraisk. I tillegg er oppgåvene gitt rett etter kvarandre for å hjelpa eleven til å sjå mønsteret og klara å setja opp den algebraiske løysinga. Oppgåva er henta (og oversett til norsk) frå Sfard og Linchevski (1994). Der vart oppgåva berre brukt for å testa eleven si forståing av ekvivalens (altså kun oppgåve (a) var med).

Oppgåve 3 a) har til hensikt å testa eleven sin evner til å henta ut informasjon i ei enkel tekstoppgåve og bruka den på riktig måte. Her er nokre tenkte feil som kan koma fram: Ein vil få svaret 14 dersom ein summerer alle tala. Ein kan òg få talet 48 dersom ein legg saman "klinkekuletala" (4 og 2) og "gongetala" (3 og 5), og multipliserer desse.

I første deloppgåva er eg altså ute etter å sjå om dei klarar å henta ut den naudsynte informasjonen i teksten og finna svaret på kor mange klinkekuler dei har til saman. Då oppgåve (a) ikkje er spesielt vanskeleg, forventar eg at dei aller fleste skal få til denne.

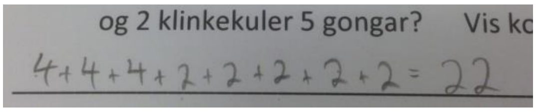
Tabell 10: Resultat oppgåve 3a

Oppgåve 3 a)	**% Rett**	**% M**	**Relativ frekvens**
Svar:	92 %	0 %	
Ubesvart			4
22 (Riktig svar)			92
24			1
13			1
Anna svar			1

Av tabellen kan ein lese at heile 92 % av elevane kom med rett svar i denne oppgåva, det er oppløftande då det tydar på at dei fleste klarer å henta ut informasjonen og bruka den på rett måte. Metodane elevane brukte, varierte likevel noko. Omtrent 34% av elevane som svara rett, sette opp tre reknestykke: $4 \cdot 3 = 12$, $2 \cdot 5 = 10$, $12 + 10 = 22$. Her viser elevane at dei klarar å henta ut og bruka informasjonen i teksten. 60% av elevane som svara rett, sette opp problemet i eitt uttrykk, $4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 22$, medan to elevar kom med svaret utan å visa noko utrekning.

Det var berre to elevar som brukte likskapsteiknet feil (sjå kap. 2.2.4.2). Dei tre andre svara som var gitt her, er mest truleg små slurvefeil. Den eine eleven skriv $1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 12 + 1 + 10 = 13$. Kvar denne eleven får eitt-talet frå, hadde vore interessant å finna ut, men denne eleven var ikkje ein av dei som vart valt ut til intervju. Det var kun fire som ikkje svarte på oppgåva.

Av dei som svara riktig på oppgåva, var det ein elev som sette dette opp som ei rekke av ledd og summerte. Dette er riktig, men viser



kanskje at eleven føretrekk gjentatt addisjon framfor multiplikasjon. Dette kunne vore eit teikn på at eleven ikkje kjenner til gjentatt addisjon som multiplikasjon, men det viste seg at denne eleven gav rett svar i (b). Ostad (2006) viser til forsking som peikar på at elevar som ofte vel det han kallar for «backup-strategiar», som til dels å telja seg oppover, eller presentera eit problem i ei enkel form, ofte har ei lite utvikla forståing i matematikk. Desse elevane sit ifølgje Ostad ofte på ei eller anna form for matematikkvanskar. At elevar vel løysingsstrategiar som vist over, kan vera eit teikn på at eleven sit på avgrensa forståing og/eller misoppfatningar. I dette tilfellet kan det verka som at eleven heller vert hjelpt av denne strategien. Svaret i (b), der eleven svarer riktig ($4m + 2n$), tydar på at eleven klarar å nytta seg av algebraspråket til å utrykka mønsteret som (a) er eit døme på.

I ***oppgåve 3b*** har eg utvida (a)-oppgåva for å sjå om elevane klarar å setja opp ei løysing når dei konkrete tala skal erstattast med variablar. Ser eleven mønsteret og klarar han å dra nytte av dette? Vil eleven sitt val av oppsett i (a) ha innverknad på om eleven får til (b)?

Tabell 11: Resultat oppgåve 3b

Oppgåve 3 b)	**% Rett**	**% M**	**Relativ frekvens**
Svar:	46 %	13 %	
Ubesvart			36
$4m + 2n$			46
$6mn$ (misoppfatning, legge inntil)			1
$4x + 2y$ (byter ut variablane)			1
$6x$			2
mn			1
8mn			2
8+2m			1
72, eller anna tal			7
(4*n)+(2*n), el;2*x+2*x=			2

I oppgåve 3b var statistikken som venta noko annleis enn i (a). Det var berre 46 % som svarte rett på oppgåva, altså har ca. halvparten av dei som fekk til (a) gjort feil eller ikkje svart på (b). Det skal også seiast at ein elev hadde rett svar, men bytte variablane ut med x og y.

Det var ulike feilsvar som dukka opp, utan at nokon av desse peika seg spesielt ut. Av Tabell 11 ser ein at det kun var ein elev på kvar av dei svaralternativa eg på førehand såg for meg kunne dukka opp (dei farga alternativa i tabellen er svar som eg ikkje tenkte ut på førehand, men som dukka opp i elevane sine svar). Ein ser her at det er ei overvekt av ulike variantar av misoppfatninga «å leggje inntil». Denne typen feil kan, som blant anna Booth (1984), (Bell, 1995) og Brekke (2002) peikar på, koma av «fruktsalatalgebraen» elevane ofte møter i introduksjonen til algebra, og for ein del elevar er denne førestillinga framleis gjeldande. At nokon elevar skyggar unna med det same det kjem bokstavar inn i biletet, er dessverre eit kjent problem.

7% av elevane kom med ulike talsvar, noko som tyder på rein gjetning då dei ikkje veit kva dei skal gjera. Ein ser at nokre elevar summerer tala og legg bokstavane inntil. To av elevane har multiplisert saman $4m\ og\ 2n$ og fått $8mn$, noko som ikkje ville vore feil dersom det skulle multipliserast. Ikkje nokon av elevane multipliserte saman alle tala (i alle fall ikkje rett..) i (a), ein kan såleis tenkja at det ville vera merkeleg at dei gjer det i (b), men dersom eleven vert usikker på framgangsmåte grunna variablar, kunne det eventuelt forklara skiftet i metoden.

At andelen elevar som ikkje svarar på oppgåva aukar frå ca. 4 % i a) til 36 % i b), er i denne oppgåva er eit interessant funn. Eg hadde venta ein lågare andel rette svar i (b), men eg forventa eigentleg ein tilsvarande større andel feilsvar, og ikkje så stor del ubesvarte. Det er altså mange elevar som ikkje klarar å følgja opp tenkjemåten dei hadde i (a) når dei ukjente verdiane m og n må brukast i staden for tal, dette på tross av at oppgåva legg opp til at elevane kan byta desse ut direkte, utan å tenkja ut noko nytt oppsett. Eit endå meir interessant funn her, er at av dei som fekk til (a), men som *ikkje* klarar (b), delte 55% av elevane uttrykket i tre delar. Det var altså 79,3 % av dei elevane som løyste (a) ved å dela problemet opp i tre rekneoperasjonar, som datt av då variablar kom inn i biletet. Det ser ut til at metoden elevane brukar for å løysa problemet i a) har stor betydning for om eleven får til (b). Dette støttar det Ostad (2006) seier, nemleg at elevar med avgrensa reknestrategiar har større problem med overgangen til algebra. Å setja opp oppgåve (a) i eitt uttrykk, kan hjelpa elevane til å sjå korleis uttrykket må verta med variablar. Samstundes kan det jo tenkast at elevane som gjer dette, sit med meir utvida algebrakunnskapar enn dei som vel ei meir oppstykka løysing.

Smith og Thompson (2008) seier at elevar ofte manglar ein link mellom tala og/eller symbola og sjølve situasjonen/problemet desse skal hjelpa oss med å forstå. Dei meiner at ein ved å auka kompleksiteten i eleven sitt tankemønster, vil auka eleven sitt behov for å læra algebra. Utan denne kompleksiteten vil algebra verka meiningslaust (Lid, 2015). Kanskje er denne «mangelen på algebraisk-tenkning» i aritmetikk årsaka til at elevane ikkje ser korleis dei skal løysa oppgåver, og dermed berre trekkjer seg unna? Vidare meiner Smith og Thompson (2008) at mykje undervisning og mange lærebøker sitt fokus på innlæringa av kommandoar, som til dømes «løys», «forkort», «faktoriser» eller «forenkle», appellerer til å memorera prosedyrer som gjev lita meining utanfor den gitte konteksten (Smith & Thompson, 2008, s. 4). For ein del elevar er dette med på å redusera algebra til nettopp dette, eit sett med symbol, formlar og reglar for manipulasjon av desse (ibid.2008).

Consequently, many students limit their engagement with algebra and stop trying to understand its nature and purpose. In many cases, this marks more or less the end of their mathematical growth. (Smith & Thompson, 2008, s. 4)

At elevane ikkje ser ut til å klara overgangen frå aritmetikk (3a) til algebra (3b) kan kanskje ha sitt utspring i manglande eller avgrensa kunnskap om algebra. Dei har kanskje for liten erfaring med bruk av algebra til modellering, og har dermed ikkje fått utvida oppfatninga si av kva algebra er. Dei vil då ifølgje Sfard og Sfard & Linchevski (1991; 1994) ikkje klara å koma vidare i omgrepsdanninga si. Dette stør opp under sitatet til Smith og Thomson ovanfor, og kan kanskje forklare noko av elevar sine vanskar med, og frustrasjon over, algebra.

4.4 Oppgåve 5

Etter å ha sett på oppgåve 3, som tar for seg overgangen frå aritmetisk til algebraisk kontekst, vil eg følgja opp med oppgåve 5, som er ei av dei frigjevne oppgåvene frå TIMMS (2011a). Oppgåva er såleis eigentleg tenkt for elevar ved ungdomstrinnet og ikkje vg1-elevar.

Det var m gutar og n jenter i ein parade. Kvar person hadde to ballongar. Kva av desse uttrykka gir talet på ballongar i paraden?

Set ring rundt rett alternativ.

a) $\mathbf{2(m+n)}$

b) $\mathbf{2+(m+n)}$

c) $\mathbf{2m+n}$

d) $\mathbf{m+2n}$

Figur 20: Oppgåve 5

Oppgåve 5 testar lesedugleikar, det å lesa og tolka eit algebraisk uttrykk opp mot tilhøyrande tekst. Oppgåva liknar veldig på 3b, men har ikkje den hjelpa ein får frå 3a til å sjå noko mønster, i staden får ein no hjelp av ulike alternativ. Det elevane truleg vil setja opp ut frå teksten er $2m + 2n$, så ingen av alternativa passer direkte, dei må finna det ekvivalente uttrykket. Eg venta meg her ein større del rette svar enn det eg fann i 3b i førre delkapittel, då elevane her har desse ferdig oppsette svaralternativa å velja mellom. Samstundes vil ein kunna få ei auka grad av gjetting på svaralternativ, då eleven veit at eit av desse må vera rett. Det at alternativa er gitt, hjelper i alle fall eleven å få i gong tenkinga.

Tabell 12: Resultat oppgåve 5

Oppgåve 5	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	82 %	8 %	
ubesvart			9
$2(m+n)$			82
$2+(m+n)$			8
$2m+n$			0
$m+2n$			0
4mn, 2mn, m2n			1

I undersøkinga, sjå Tabell 12 over, var det 82% av elevane som valde rett alternativ, medan knappe 8 % av elevane svara alternativ b) som var $2 + (m + n)$. Omtrent 9% av elevane let oppgåva stå ubesvart. Då denne oppgåva ikkje spurde etter grunngjeving for svaret, er det vanskeleg å seia kva dei som valte feil alternativ har tenkt, og om alle som har valt riktig alternativ faktisk har tenkt på rett måte. Gjennom eit intervju med ein av elevane som hadde svara rett på denne oppgåva, kan ein sjå at eleven slett ikkje er skråsikker i si sak:

L: På oppgåve 5, der har du då valgt alternativ a, kvifor det?
A07: (Les oppgåva stilt...) Det er a, fordi du må ta 2*m + 2*n og det blir jo to på hver person og så blir det jo så mange guttar det er og så mange jenter det er, eg vetsje, eg tror i alle fall det er riktig.
L: Ja, du sa 2*m og 2*n, er det det same som å skriva 2(m+n)?
A07: Ja, nei, eller..Nei eg vetsje.. Vent då.. (Les..) Kvar person har to ballonger, ...utrykket tal på ballonger.. Eg tror det blir sånn 2*m+2*n
L: Og så har dei skrive det på ein litt anna måte her?
A07: Ja, det kan vere eg har feil, men eg vet ikkje, eg har kje peiling.
L: Jaudå, du. (avbrutt..)
A07: For eksempel på b), eg skjønnar ikkje kva som er forskjellen.. 2+ (m+n)..?
L: Ja kva er forskjellen på den i frå a?
A07: Nei det skjønnar ikkje eg..
L: Men ka som står på a) då? Der står det jo..?
A07: 2 ganger (m+n)
L: 2*(m+n) er det det same som 2 + (m+n)?
A07: Nei..
L: Så kva er forskjellen då?
A07: Eg vetsje, her e de +? Men du må jo gange for å få opp parentesen..
L: Ja at du må gange inn..? At dei egentlig er like då sei du?
A07: Ja, men de e sikkert ikkje det, men eg ser ikkje noe ant,
L: Nei du ser ikkje forskjell på de sånn som de står?
A07: Nei..

Intervjuutdrag 2.

Eleven byrjar godt og det verkar som han eigentleg har kontroll på oppgåva, men når eg prøver å få klargjort om han veit at $2m + 2n$ er det same som $2(m + n)$, verkar han meir usikker. Først vart eg litt usikker på om eg hadde forvirra intervjuobjektet med spørsmålet mitt, men så, i linje 177, avslører eleven at han ikkje er heilt stø i skrivemåten. Eleven ser ikkje kva som er skilnaden på uttrykket «$2(m + n)$» og «$2 + (m + n)$», han er veldig usikker. I den eine augneblinken seier han at dei ikkje er det same, i det neste seier han at dei er like. Det verka på meg som at eleven hadde fått med seg brotstykke av rekning med parentesar, og at han hugsar noko med at ein måtte ganga inn i parentesen, men han klarte ikkje å sjå forskjell på dei to alternativa a) og b).

Ei oppgåve med alternativ gjev såleis avgrensa informasjon om eleven si forståing. Skal ein få noko meir ut av den, må ein be om ei grunngjeving av svaret. Som me såg i dømet ovanfor, er det ikkje nødvendigvis slik at rett svar er det same som at eleven har forstått oppgåva. Elevar med avgrensa algebrakunnskapar kan «sjå for seg» korleis det skal gjerast, men dei klarar kanskje ikkje å setja opp uttrykket på riktig måte. Dette kan ha sitt opphav i avgrensa kjennskap til samansette uttrykk i aritmetikken, eller det kan vera problematisk for eleven å sjå korleis ein presenterer dette som eit uttrykk. Han ville kanskje helst gitt eit talsvar.

Talet på riktige svar i denne oppgåva er betydeleg høgare enn i oppgåve 3b, nesten dobbelt så stort. Dette kan blant anna koma av hjelpa dei får gjennom dei ferdige alternativa, men det kan òg vera at denne oppgåva vert enklare då ein har med talet 2 å gjera. 2-gangen, eller dobling, er noko av det første elevane lærer i skulen, og det vert ofte (kanskje for ofte?) brukt i seinare undervisning.

Samanliknar me resultata mine med resultata for Norge i TIMMS 2011, ser me at medan det var 82 % som svara rett i testen min, var det 59,3% som svara riktig i TIMMS undersøkinga. Altså viser resultata mine at deltakarane i testen skårar langt betre på vg1 enn det norske elevar gjer i TIMMS i denne oppgåva. Likevel er det mange land (Japan, Sør-Korea, Libanon, Russland, Singapore, USA med fleire) som kan visa til betre resultat i denne oppgåva på 8.trinn enn det elevane i undersøkinga mi viser på første trinn i vidaregåande (TIMMS, 2011b, s. 95).

4.5 Oppgåve 4

Legg saman

a) $3n$ og 4 Svar: __________

b) 5 og $a + 2$ Svar: __________

c) a og $7b$ og $2a$ Svar: __________

Figur 21: Oppgåve 4

Hensikta med denne oppgåva er å sjå korleis elevane handterer summering av ukjente storleikar, og såleis prøva å forstå eleven si oppfatning av ukjente storleikar. Desse oppgåvene har eg henta heilt eller delvis frå Küchemann (1978). Oppgåve a) er òg nytta av Brekke et al. (2000, s. 26). I Brekke sin kartleggingstest stod det: «Legg sammen 4 og 3*n*». Grunnen til at eg ikkje nytta dette oppsettet, er at elevar med ei munnleg tilnærming til algebra, vil kunna misforstå dette. Dei kan tolka det som «legg saman 4*n* og 3*n*», då ein i munnleg samanheng ofte kortar ned på antal ord ein bruker. Eg meiner at dersom ein snur om på desse, slik at det står «legg saman 3n og 4», vil færre elevar kunna bli «lurt inn» i denne feiloppfatninga.

I desse tre deloppgåvene skal kandidatane leggja saman tal og variablar, dette kan skapa uvisse hjå elevane av fleire grunnar. Det kan til dømes vera elevar som ikkje ser på eit algebrauttrykk som eit ferdig svar, (sjå «Korleis handsame opne svar?, s21»). At eleven ikkje veit korleis han skal handterer opne svar, kan føra til at eleven ikkje svarar på oppgåva. Dersom eleven er lite kjent med korleis ein skal leggje saman tal og variablar, kan det føra til at eleven prøver å forenkla oppgåvene ved for eksempel «å setja inntil» (Booth, 1988; Küchemann, 1978).

Tabell 13: Resultat oppgåve 4a

Oppgåve 4 a)	Rett	M	Relativ frekvens
Svar:	58 %	27 %	
Ubesvart			13
3n og 4, 3n+4 (rett svar)			58
7n (legg saman tala og legg inntil, misoppfatting)			18
3n4 (legg inntil ved å fjerne alle teikn mellom ledda)			4
7 (gjev verdien 1 til variabelen)			1
12m, 12n			2
3n 4			1
Gjev verdien 5 til n, =19, eller anna verdi			2

I ***oppgåve 4a*** skal ein leggja saman 3*n* og talet 4. Det er 58% som svarer rett på denne oppgåva i testen min (sjå tabellen over), medan det var høvesvis 36% i Küchemann si undersøking (snittalder på 14,3år) og 46% i Brekke si (KIM-prosjektet, 10. trinn) (Brekke et al., 2000, s. 27; Küchemann, 1978, s. 24). Ser ein på dei som gjorde feil i testen min på denne oppgåva, var det 18% som svara 7*n*. Her ignorerer elevane variabelen, summerer tala og set så den ukjente inntil. Til samanlikning var det 31% av elevane som gjorde denne feilen i undersøkinga Küchemann (1978) viser til, medan det var heile 39% som gjorde denne feilen på 10. trinn i Brekke si undersøking (Brekke et al., 2000). Det ser altså ut til at det er ein klart lågare del som gjer denne feilen i vidaregåande. At nesten kvar femte elev gjer denne feilen, viser likevel at det framleis er mange som har ei avgrensa algebraisk forståing.

Vidare er det 4 elevar (4,3%) som legg inntil utan å rekna saman tala, dei set rett og slett berre dei to ledda inntil kvarandre. Ifølgje Booth (1988) er «å setja inntil» ein misoppfatning som kan koma av eleven si manglande evne til å akseptera opne svar. Opne svar kan for mange elevar opplevast som ei oppgåve, ein beskjed om noko som skal utførast, like mykje som at det er eit svar, dette kan vera ei årsak til at denne typen feil oppstår. Samstundes kan det å setja inntil vera ei overgeneralisering av til dømes blanda tal ($4\frac{1}{2}$ som $4+\frac{1}{2}$) eller forveksling med einingar (3m som 3meter) frå aritmetikken (ibid.).

Nokre elevar vil helst ha eit tal dei kan setja to streker under til slutt. Dette kan ein sjå igjen i svar der elevane har gitt verdiar til variabelen for så å få eit tal som svar, eller at dei ser heilt vekk frå variabelen og fjernar han. Som ein ser av Tabell 13, er det ein elev som har ignorert *n* heilt (fjerna den), eventuelt gitt den verdien 1 etter å ha lagt inntil. *n* vart òg gitt andre verdiar. Å gi verdi til den ukjente på denne måten, er eit tydeleg teikn på at eleven ikkje kjenner til meininga med bruken av bokstavar i matematikk. Når ein ser på resultata på denne oppgåva frå dei ulike undersøkingane, ser det ut til å vera ei positiv utvikling med aukande alder.

Svara $12n$ og $12m$ er og interessante. Desse svara tyder på at elevane har misforstått oppgåveteksten. «Legg saman» har dei tenkt på som å multiplisere saman. Kvifor dei har tolka det på denne måten, er vanskeleg å seia. Kanskje dei koplar «og» opp mot sannsynsrekning for uavhengige hendingar der $P(A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B)$, og derfor vel å multiplisera når det står «og»? Det kjem tydeleg fram at elevane har eit avgrensa språk når det gjeldt matematikk, mange har lite kjennskap til språklege formuleringar, kanskje bortsett frå nettopp i sannsynsrekninga, der elevane må «snakka» matematikk.

Oppgåve 4b er ei oppgåve med to tal og ein variabel som skal leggjast saman. Her kan ein kanskje venta færre rette svar enn i (a), då det er fleire ledd og såleis meir å halda orden på. Denne oppgåva testar om eleven meistrar å legga saman tala og lar variabelen stå igjen i eige ledd, eller om eleven sit med ei anna oppfatning av korleis dette skal gjerast. Det er interessant å sjå om det vert forvirring rundt at det her er brukt både «og» og addisjonsteiknet +. Får ein svar som $5 + a + 2$ eller $5 + (a + 2)$, eller legg dei 5 inntil *a* og har 2 som ledd til slutt? Vil $7a$ vera sterkt representert blant svara? Og vil det eventuelt vera dei same elevane som «set inntil» i (b) som det var i (a)?

Tabell 14: Resultat oppgåve 4b

Oppgåve 4 b)	**% Rett**	**% M**	**Relativ frekvens**
Svar:	43 %	44 %	
Ubesvart			11
a+7 (rett svar)			43
5 + a+ 2			1
5a + 2 (misoppfatning)			5
5a2			2
7a (Misoppfatning)			22
8 (gjev variabelen verdi 1)			2
5+2a (misoppfatning)			9
10a			1
5(a+2)			1
7 a			1
3+a (endrar rekkefølgje og byt då forteikn			1

Ut frå tabellen over, ser ein at det var 43% av elevane som svara rett, 11 % svara ikkje, medan det var 22% som svara $7a$. Dette kan tyda på at elevane synest det er vanskeleg å summera tal og variablar. Kvifor går talet på rette svar ned samanlikna med (a)? Ser ein til Küchemann sitt arbeid, var det 68% som svarte rett på oppgåva «Add 4 onto $n + 5$)», medan 20% svarte 9 (ignorerte variabelen). Dette er ikkje same oppgåva som eg har i testen, men den liknar veldig. Brekke et al. (2000) har òg med ei liknande oppgåve; «Legg sammen 2 og $n +$ 5». Her er det 37% som svarar riktig, 33% som svarar 7n eller liknande, og 13% legg heilt eller delvis inntil (utan å summere, 2n+5, 2n5).

I undersøkinga mi er det 22% som legg saman tala 2 og 5, får 7 og set a inntil, noko som gir svaret $7a$. Andelen som gjorde denne feilen i (b) er altså noko høgare enn i (a), der den var på 18%. Samanlikna med Brekke sine resultat, der 33 % gjorde denne feilen, ser resultata «mine» betre ut. Litt mindre positivt er det at andre versjonar av å leggje inntil (utan å legge saman tala), i undersøkinga mi tel 16%, mot 13% hjå Brekke.

Svar som $10a$, $5a + 2$ og $5(a + 2)$ tyder på at nokre elevar òg i denne oppgåva tenkjer multiplikasjon i staden for addisjon, dette utgjer vel 7% av respondentane. 2% av elevane gjev variabelen verdi 1 og får svaret 8, ingen gjorde denne feilen på 10.trinn.

I oppgåve 4c (Legg saman a og $7b$ og $2a$) aukar tilsynelatande vanskegrada ved at ein har to ukjente, a og b. Her vil ein kunne finna dei misoppfatningane som er skildra ovanfor,

Tabell 15: Resultat oppgåve 4c

Oppgåve 4 c)	Rett	M	Relativ frekvens
Svar:	62 %	23 %	
ubesvart			12
$3a + 7b$ (rett svar)			62
$2a^2 + 7b$			1
a7b2a			2
9ab			3
10ab			1
8b + 2a			1
3a7b			9
$9a^2b$			1
10 (legg saman koeffisientane)			1
$a + 7b + 2a$			1
3a 7b			1
$7b - 2a^2$			1
7b+a, endrar rekkjefølge->byt forteikn			1
7ab+2a			2

samstundes er det interessant å sjå korleis dei eventuelt då løyser desse problema når ein har to ukjente. Fruktsalat-tankegang kan faktisk i denne oppgåva vera med og hindra at dei gjer feil. Å sjå på dei ukjente som for eksempel appelsinar og bananar, kan gjera at eleven ikkje kjem med svar som 10ab, 9ab eller 3a7b. Altså kan synet på variablane som objekt, i dette tilfellet hjelpa eleven med å koma fram til rett svar.

I denne oppgåva tenkte eg ut mange måtar å koma fram til eit feil svar på, dei fleste er representerte i tabellen, men det var ikkje så mange som kom med desse alternativa. 62% svarar rett på denne oppgåva, medan 12% lar ho stå ubesvart. 9 % av elevane la saman *a*-ane og *b*-ane for så å legga inntil, men dei la ikkje saman tala. Det kan tyda på at elevane synest det er enklare å leggja saman ledd med ulike variablar, enn å leggja saman nokre ledd med variablar og nokre med tal. Det er mogleg «fruktsalatalgebraen» er med og bidreg til dette. Det at dei har lært at ein ikkje kan leggja saman appelsinar og bananar, kan hindra dei i å leggja saman desse tala. Eleven kan her ha misoppfatninga av at ein bokstav peikar til eit konkret objekt («*a*» = appelsin, «*b*» = banan), og ikkje eit ukjent tal, og likevel få riktig svar på denne oppgåva. Altså er ikkje oppgåva diagnostisk på same måte som (b) (Küchemann, 1978).

Ser ein heile oppgåve 4 under eitt, ser det ut til at feila elevane gjer her, i mykje større grad er gjennomgåande, enn det me såg i oppgåve 2. I oppgåve 4 gjer dei aller fleste som gjer feil i (a) òg den same feilen i (b), og dei fleste òg i (c). Eg reknar her med dei som gjer liknande feil, og med det meiner eg ulike former for forsøk på å løysa oppgåva ved å leggja inntil. Korleis dei summerer koeffisientar, eller om dei eventuelt ikkje gjer det, kan for nokon av dei endra seg litt frå oppgåve til oppgåve. Når ein elev bruker ein metode gjennomgåande slik som dette, og når den er feil slik som her, tyder dette ganske sterkt på at han har misoppfatningar knytt til å trekkja saman algebraiske uttrykk (Brekke, 2002). Det ein ser i (c) samanlikna med dei andre to, er at det er eit større spekter av svar som er gitt. Det kjem truleg av at det her er to ukjente i staden for ein, og at variasjonen i kva elevane kjem fram til då aukar.

Andelen riktige svar er 58% i (a), men minkar til 43 % i (b), for så å auka igjen i (c) til 62 %. Dei elevane som gjer riktig i (a), gjer det stort sett òg i (c), så det er i (b) desse elevane gjer feil. Feila desse elevane gjer i b) er ulike variantar av å setja inntil, og ein del av desse er svar der uttrykket er delvis lagt saman, delvis lagt inntil. Dette kan tyda på at ein del av elevane er usikre på kva metode dei skal bruka. Dei har byrja å få tak på korleis ein summerer algebraiske uttrykk, men er dels usikker på metode, eller dei har ikkje heilt forstått kva dei gjer, men dei byrjar få taket på delar av prosessen.

Når det gjeldt oppgåve (c) der resultata tok seg noko opp frå (b), kan det vera at noko av dette skyldast at her var det to ukjente og at elevane tenkte at desse ikkje kunne leggjast saman. Nokre elevar som hadde svart feil i både (a) og (b) svara riktig i oppgåve (c), truleg fordi dei har ei oppfatning av bokstavane som objekt, som omtala ovanfor. Det ser ut til at det er desse elevane som gjer at (c) er den oppgåva med størst del riktige svar.

L: Eh, på c) då
E5: Då hadde eg tatt 3a + 7b, fordi her legg du sammen 2a og a, så det blir tre a, bli kje det det? Eller blir det det?
L: Det er, kofför vil kje du legge sammen her?
E5: då hadde det blitt 10. Eg kan kje legge sammen for her er kje samme bokstav
L: og då kan du ikkje legge i sammen...
E5: Eh.. nei då kan du ikkje få et reint svar... som e, då vetsje eg om det blir et reint a-svar eller b-svar, då blir det jo to forskjellige svar
L: Ja, så du får 3a +7b
E5: Ja

Intervjuutdrag 3

Eleven i intervjuet over la inntil i oppgåve (b), men det er tydeleg at eleven har fått med seg at ein ikkje kan leggja saman når det er ulike bokstavar. Han gjorde det likevel når det var tal og bokstav som skulle adderast.

Talet på ubesvara oppgåver heldt seg jamt rundt 12% gjennom heile oppgåve 4. Kva kan grunnen til at nokre av elevane ikkje svarar på desse oppgåvene vera? Ein moglegheit er at mange elevar har svært avgrensa erfaringar med å snakka om algebra. Den munnlege forma på desse oppgåvene kan såleis vera med på å hindra elevane i å få dei til, i staden for å hjelpa dei med det. Det kan òg vera at elevane ikkje ein gong forstår kva «Legg saman» betyr. I så tilfelle vil det vera vanskeleg å løysa desse oppgåvene. Det munnlege språket kan òg føra til forvirring slik me såg ovanfor med at elevar tolkar «og» i den tydinga me finn i sannsynsrekning. Oppgåve 6 vil kanskje gje oss eit lite innblikk i kva formuleringa av oppgåvene har å seia.

4.6 Oppgåve 6

Skriv uttrykka enklare

a) $2a + 5b + a =$ ______________

b) $3a - (b + a) =$ ______________

c) $x + y - x + y =$ ______________

Figur 22: Oppgåve 6

Denne oppgåva er ein del av ei oppgåve (oppgåve 8) funne i «Kartlegging av matematikkforståelse» (Brekke et al., 2000, s. 33). Her finn me nokre fellestrekk til oppgåve 4, men ein viktig skilnad er at oppgåve 6 er skrive på tradisjonelt vis, med matematiske teikn mellom ledda. Samstundes kan ein òg trekkja parallellar til oppgåve 2 og oppgåve 5. Grunnen til at eg tar med denne oppgåva, er blant anna for å sjå i kor stor grad oppsettet har innverknad på eleven si forståing.

Oppgåve 6a) er forholdsvis lik 4c, men den er presentert på ein annan måte. Det spennande her er om presentasjonsforma gjev ulik oppfatning hjå eleven. Får han til 6a, men ikkje 4c? Eller omvendt? Då oppsettet i oppgåve 4 er ein veldig vanleg måte å presentera oppgåver på i kartleggingsprøvar, vil det i så fall vera interessant dersom dette er ei form som elevane synest er vanskelegare enn den me finn i 6a.

Tabell 16: Resultat oppgåve 6a

Oppgåve 6 a)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	80 %	15 %	
Ubesvart			3
3a+5b (rett svar)			80
2a+5b			1
$2a^2 + 5b$			1
$7ab$ (Misoppfatning)			1
3a+5			2
a+2a+5b			1
8a			3
3a5b (misoppfatning)			4
a+5b (endrar rekkjefølgje og byt forteikn			1
2+5+aab			1

Det første som tar merksemda mi her, er at andelen elevar som ikkje svarar på oppgåvene har gått kraftig ned samanlikna med oppgåve 4, samt at det er heile 80 % som svara riktig på denne oppgåva. Svar som kan ha rot i misoppfatningar er nede i 15% mot minimum 23% i oppgåve 4. Samanliknar ein resultata her med resultata frå Brekke et al. (2000) si undersøking, liknar tala i stor grad. På 10.trinn var der 86% som svara rett, medan 2% let oppgåva stå ubesvart.

Ser ein på oppgåve 4c opp mot oppgåve 6a, kan det altså tyda på at oppsettet på oppgåva, altså korleis problemet vert presentert, har stor innverknad på korleis elevane oppfattar oppgåva. Det kan verka som om elevane er mindre vande med den munnlege forma ein ser i oppgåve 4, kanskje dei har snakka lite algebra gjennom skulegangen. Ifølgje Naalsund (2012) har norske elevar mykje mindre fokus på utforsking, diskusjonar og forklaringar i matematikkundervisninga i ungdomskulen enn det mange andre land har, det på trass av at dette er kjende metodar for å fremja djupare forståing hjå elevane.

I ***oppgåve 6b)*** har me eit algebraisk uttrykk med eit negativt forteikn framfor parentesen, korleis klarar elevane å skrive denne enklare? Veit elevane korleis dei skal gå fram for å løysa opp parentesen? Her testar ein misoppfatning knytt til positive tal multiplisert med negative, samt misoppfatning knytt til parentesbruk. Er det kun «*b*» som skiftar forteikn når eleven løyser opp parentesen? Sistnemnte er ei misoppfatning som vil gje svaret $4a$ - b og vil her vera av spesiell interesse.

Tabell 17: Resultat oppgåve 6b

Oppgåve 6 b)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	41 %	40 %	
Ubesvart			13
2a - b (rett svar)			41
4a-b			13
-4ab			2
2a+b (byt forteikn på andre ledd)			3
3aba			2
3a-ab			8
$3b$ eller $3a^2 - b$			2
$3ab - 3a^2$, $3a(b - a)$ eller $-3ab-3a^2$			3
4a+3ab (Mis., multipliserer inn i parentes, gløymer forteikn)			2
3-1 (Gjev (b+a) verdien 1)			1
2ab			3
4a + b			1
3a-b-a (rett løyst opp)			4

Det var kun 41% av elevane som løyste opp parentesen på rett måte, og som deretter la saman uttrykket riktig. Heile 40% av elevane gav svar som kan koma av at dei sit på ein misoppfatning. Dette var eit overraskande høgt tal. Av desse var det svaralternativet $4a - b$ som peika seg sterkast ut, 13 % gav det svaret. Dette er òg den mest erfarte feilen elevar gjer i slike oppgåver, dei byter forteikn på det første leddet inne i parentesen, men ikkje på resten. Det verkar som om dei berre fjernar parentesen og lar forteiknet stå att, og kanskje er det nettopp dette dei gjer?

Elles ser ein igjen at dei fleste andre svaralternativa elevane kjem med, er ulike variantar av «å setja inntil». Me har svar som $-4ab, 3aba, 3a - ab,\ 2ab$, og dette er alle ulike versjonar av å setja inntil. Over 16% av elevane kom med slike svar (mot 5 % på 10.trinn (Brekke et al., 2000)). Svaret som er sterkast representert er $3a - ab$, 8% gav dette svaret. Dette svaret viser at elevane har sett inntil tala inne i parentesen, men ikkje sett inntil heile uttrykket. Det kan kanskje vera eit teikn på at desse elevane er i ferd med å utvida si algebraiske forståing, sjølv om dei ikkje er heilt i mål. Denne typen feil er av same type feil som ein såg i oppgåve 4, og er som tidlegare påpeika ei svært vanleg misoppfatning knytt til algebra (Booth, 1984, 1988; Brekke, 2002; Küchemann, 1978).

I oppgåve 3 såg me eit døme på ein elev som har lært at det som står framfor parentesen må gangast med det inne i parentesen før ein kan løysa han opp. Nokon elevar ser ut til å ha misforstått dette, og overgeneralisert til at dersom det ikkje står noko tal framfor parentesen, multipliserer dei gjerne inn eit ledd som står framfor parentesen. Deretter kan dei eventuelt løysa han opp. Svar som $3ab - 3a^2$ eller $3a(b - a)$ vitnar om dette.

Oppgåve 6c) er ei oppgåve med to ukjente, som har same struktur som oppgåve 2a. Den er symmetrisk om subtraksjonsteiknet. Det er interessant å sjå om ein observerer same feilen her som ein gjorde i oppgåve 2, eller om det ikkje er tilfelle då elevane her har ukjente å forholda seg til.

Tabell 18: Resultat oppgåve 6c

Oppgåve 6 c)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	47 %	33 %	
Ubesvart			14
2y (rett svar)			47
0 (misoppfatning,setje parentes)			8
$-2x\,2y$, xy-xy eller xy (legge inntil)			7
$-x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$ eller $y^2x - x$			3
$2x + 2y$, $2y - 2x$ eller $2x - 2y$			9
x-x+2y			1
1+1-1+1 (gjev variablane verdien 1)			1
x-y, -x+2y, x+y, -x+-y, x+2y			10

I oppgåve (c) er det 47% som svarar rett, medan det er 8 % av elevane som set parentes og dermed får null. Utdraget frå intervjuet under, viser at eleven på ein måte tenkjer parentes rundt to og to ledd.

E17: Ja ok. Eh.. x+y-x+y, eh... *tenker*.. Ska eg gjera da enklare?
L: Ja forenkla utrykket
E17: So eg skal ikkje rekna det ut? Blir da ikkje null då?
L: Kvifor sei du da?
E17: Fordi at det er eit uttrykk og so tar du minus det same uttrykket.
L: Mhm
E17: Eg veit ikkje korleis eg ska skriva da enklare..

Intervjuutdrag 4

9% av elevane ser at det er to x-ar og to y-ar i uttrykket, noko som gjer at dei kjem fram til uttrykka $2x + 2y$, $2y - 2x$ eller $2x - 2y$. Det verkar som om dei er fristilte frå forteikna, det er noko som kanskje blir plassert i etterkant. Denne misoppfatninga vert gjerne kalla «drop sign while operating» ((Bell, 1995) sjå2.2.4.1).

Me ser av Tabell 18 at elevar òg nyttar fleire ulike former for å setja inntil. $-2x2y$, xy, $xy - xy$ er døme på dette. 7% av elevane sit med denne misoppfatninga. Samanliknar ein med

Brekke et al. (2000) sine resultat for 10.trinn, ser me at 57% svara rett på oppgåva, medan 3 % sette inntil og heile 16% sette parentes.

Undersøkinga mi viser altså at i denne oppgåva er det ein større del av elevane som legg inntil enn det var i Brekke si undersøking, medan andelen som set parentes har gått noko ned.

4.7 Oppgåve 7

Når Nora bruker mobilen sin betaler ho 0,49 kr per ringeminutt for innanlandssamtalar og 1,79 kr per ringeminutt for utlandssamtalar.

a) Dersom $\boldsymbol{m}$ står for kor mange minutt ho ringer innanlands og $\boldsymbol{n}$ står for kor mange minutt ho ringer utanlands, kva står då $\mathbf{0,49}\boldsymbol{m} + \mathbf{1,79}\boldsymbol{n}$ for?

b) Kor mange minutt ringer Nora til saman?

Figur 23: Oppgåve 7

Dette er ei oppgåve som har til hensikt å testa elevane si forståing av ei tekstoppgåve som inneheldt algebraiske uttrykk. Korleis les eleven oppgåva, kva klarar eleven å henta ut av informasjon, og ikkje minst,: klarar eleven å bruka opplysningane rett?, Dessutan, i (b): Klarar eleven å uttrykkja kontekstuell meining i eit algebraisk språk? Oppgåva har eg utforma sjølv, men er av ein type oppgåver elevane skal vera kjent med frå tidlegare skulegang.

I ***oppgåve 7a)*** får eleven først forklart kva det kostar per ringeminutt for høvesvis innlands- og utlandsamtaler, og kva variablane m og n står for. Deretter får dei presentert uttrykket $0{,}49m + 1{,}79n$ og vert spurt om å forklara dette. Eg er ute etter å vita om eleven verkeleg forstår, og klarar formulera med ord kva dette uttrykket betyr. Dette er ei oppgåve som testar elevane sin algebraiske lesedugleik, den testar ikkje overgangen frå aritmetikk til algebra, slik oppgåve 3 gjorde.

Ser me på resultata i Tabell 19 på neste side, er det tydeleg at dette var vanskeleg for elevane. Det er kun 37% av elevane som klarar å skriva rett forklaring på uttrykket. 23% valte å la oppgåva stå open, medan heile 37 % gav svar som viste at dei misforstod uttrykket. Så kva er årsaka til at elevane ikkje klarer å svara på oppgåva? Er det grunna manglande kunnskap i algebra, lesevanskar (spesielt vanskar med å henta ut informasjon av eit uttrykk), eller kjem det av at dei ikkje forstår kva dei skal gjera?

Tabell 19: Resultat oppgåve 7a

Oppgåve 7 a)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	37 %	37 %	
Ubesvart			23
Prisen ho må betala totalt for mobilbruk (el.liknande) (rett)			37
0,49 min og 1,79 min utanlands			5
1min innlands og 1min utlands			10
Innlandspris og utlandspris++			5
Kor mykje ho hart ringt			11
0,49innlandsminutter+1,79*um			2
1,18+1,79			1
Kor mange gongar ho ringer innanlands eller utanlands			1
Samla pris per min innland og utland			3

Elevane som ikkje fekk dette til kom med ulike forsøk på forklaringar. Mange hadde med andre ord vanskeleg med å forstå denne oppgåva. 5 % av elevane les 0,49 kr per ringeminutt som 0,49 minutt. Det er vidare 11 % som hevdar det fortel kor mykje ho har ringt, medan det er 10 % som meiner det fortel at ho har ringt 1 minutt innanlands og 1 minutt utanlands. Det kan vera at desse sistnemnde tolkar *m* og *n* som einingar (minutt), eller det kan vera at dei gjev variablane *m* og *n* verdiane 1.

I ***oppgåve 7b)*** spør eg etter kor mange minutt det vert ringt til saman. 20 % av elevane svara her $m + n$, det betyr at nesten halvparten av elevane som fekk til (a), ikkje ser at det er dette som er det riktige svaret. 13 % av kandidatane har anten lagt saman prisane, eller forsøkt å gjera det utan å ha lukkast. Dei har kome med svar som 2,28 minutt eller svar rundt 3 minutt. 36% av elevane har valt å ikkje svara på denne, det ser ut til at det er ein del av dei som har svara rett i (a), som vel å ikkje svara på (b).

Tabell 20: Resultat oppgåve 7b

Oppgåve 7 b)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	20 %	36 %	
Ubesvart			36
m + n min (rett)			20
2,28 min			10
3min (+/-) forsøk på å leggja saman prisen per min			3
2 min			15
0,49m + 1,79m			7
0,49*0,49+1,79*1,79=____			1
Anna svar (T.D. DET STÅR DET IKKJE NOKO OM)			8

15% av elevane svarar 2 minutt. Dette kjem som nemnt ovanfor truleg av at eleven anten ser på m og n som einingar, eller at dei gjev m og n begge verdien 1. I intervju med elev9 ser ein korleis denne eleven tenkjer.

L: Nei. Det står jo dersom m står for kor mange minutt ho ringer innanlands, og n står for kor mange minutt ho ringer utanlands. So sa du at det uttrykket som står der gjer kor mykje det kostar totalt å ringe. Og då står det 0,49 * m. Kva var m?
E09: Det var kor mykje det kosta innanlands, eller det var kor mange minutter ho ringer innanlands.
L: Ja
E09: Ah, ja no ser eg det..
L: Og n er?
E09: Kor mange minutta ho ringer utanlands.
L: Så kor mange minuttar ringer ho då til saman?
E09: 2 minuttar
L: Fordi at?
E09: Det er en m her og det er en n
L: Og derfor blir det to minutt?
E09: Ja..

Intervjuutdrag 5

Det at *«det er en «m» her og en «n»* er forklaringa eleven har til at han kjem med svaret *to minutt.* Det kan verke som eleven tel opp talet på bokstavar. Om dei andre elevane som har kome fram til same svar, vil ha same forklaring, veit eg ikkje, men dette er ein av strategiane som fører til dette svaret.

Ein ganske stor del av elevane meinte at ein ikkje hadde noko opplysningar om kor mange minutt det kunne vera, fordi «det stod det ikkje noko om». Desse elevane (8%) har kanskje vanskar med å akseptera ukjente i eit svar. Ifølgje Booth (1984) vil elevane ha problem med å akseptera $m + n$, som eit svar, dei vil kunna oppfatta addisjonsteiknet som at noko skal utførast, ikkje som eit «lukka» svar.

Både i (a) og (b) er det ein svært stor del av elevane som ikkje svarer på oppgåvene, ein mogleg grunn kan vera at elevane har for store språklege vanskar til at dei klarar å ta fatt på oppgåva. Her kan det vera lite trening med denne typen oppgåver som gjer det heile vanskeleg. Dei manglar kanskje erfaring med å lesa meining frå eit algebrauttrykk inn i ein kontekst, samt å bruka algebra til å utrykkja meining frå ein kontekst.

4.8 Oppgåve 8

Løys likningane

a) $7x + 13 = 48$ b) $61 = 12x + 25$

c) $4 + n - 2 + 5 = 11 + 3 + 5$ d) $15x - 7 = 6 + 8x + 36$

Figur 24: Oppgåve 8

Denne oppgåva inneheld likningar av første grad. Eg vart inspirert til å laga oppgåve a), b) og d) etter å ha lese artikkelen «The Gains and the Pitfalls of Reification: The Case of Algebra» (Sfard & Linchevski, 1994). Hovudpoenget med dei fire deloppgåvene er å freista å finna ut om oppsettet påverkar eleven si evne til å løysa likningar. Blant mange peikar Linchevski og Sfard på elevar sine feiloppfatningar av kva likskapsteiknet betyr. Mange elevar ser på likskapsteiknet som ein operator «skal bli lik», heller enn «er lik». Med andre ord er det elevar som ser på likskapsteiknet som ein kommando, noko som skal gjerast. Dei fire deloppgåvene her er blant anna tenkt at skal teste dette. Medan tankegangen «skal bli lik» vil fungera i (a), vil det vera vanskelegare med denne i (b), spesielt for elevar som les frå venstre mot høgre. I oppgåve 8d er det ukjente på begge sider av likskapsteiknet, her vil ein truleg «mista» nokre elevar då ein her ikkje kan gjera seg like lett nytte av ein aritmetisk tankegang. Elevar som er på stadiet der dei framleis nyttar seg av aritmetiske metodar i likningsløysing, vil møta vanskar i det dei møter uttrykk av typen $ax + b = cx + d$ (Sfard & Linchevski, 1994). Oppgåve (a) og (b) er eigentleg forenklingar (tala er mindre) av ei oppgåve presentert av Sfard og Linchevski, grunnen til denne forenklinga er som forklart innleiingsvis at eg ikkje ynskjer at elevane gjera feil grunna for store tal.

I ***oppgåve 8a)*** var altså hensikta å sjå om eleven klarar å løysa ei enkel likning,

Tabell 21: Resultat oppgåve 8a

Oppgåve 8 a)	**Rett**	**M**	**Relativ**
Svar:	79 %	7 %	**frekvens**
Ubesvart			8
$x = 5$ (Riktig svar)			79
$7x = 35$			1
x =6 Divisjonsfeil			3
x =9			1
x =7 Divisjonsfeil			1
Set inn 5 for x, men feil i føring, venstre høgre. (7*5=35+13=48)			2
Anna svar, t.d.: X=20, $x = \frac{61}{7}$ (Flyttar utan å byta forteikn), eller anna forsøk på svar			4

og 79% av elevane klarte å løysa denne likninga. Ser ein vekk frå feil føring i forhold til likskapsteiknet, er det vel 81 % som har gitt rett svar. Det er svært positivt at så mange klarar å løysa oppgåva. Den vanlegaste feilen eg registrerer er divisjonsfeil, dei deler 36 på 7 og får feil som 6 eller 7. Dette kan vera feil som kjem av «dårleg tid», at eleven skriv ned svaret utan å tenkja seg skikkeleg om, ein såkalla system 1-feil (Kahneman, 2003, 2012; Stanovich & West, 2000). 8% av elevane svara ikkje på oppgåva. Det kjem truleg av at dei ikkje visste kva dei skulle gjera.

Tabell 22: Resultat oppgåve 8b

Oppgåve 8 b)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	73 %	5 %	
Ubesvart			14
$x = 3$			73
$x = \frac{86}{12}$			2
$x = \frac{-36}{-12}$ rett men uferdig			1
$x = 12$ Divisjonsfeil (36/12=12)			1
34/12, 56/12 (subtraksjonsfeil)			2
x=6 (tar kvadratrot av 36, og av 12x=x			2
37x, eller anna "tilfeldig svar"..			3
$x = \frac{-44}{12}$ Subtraksjonsfeil og forteiknsfeil..			1

Det var ikkje mange fleire som fekk til (a) enn som fekk til ***oppgåve 8b)***. Dette tyder på at det i alle fall ikkje er mange som sit med oppfatninga av at den oppsette oppgåva må stå på venstre sida av likskapsteiknet, og svaret på høgre. Dei andre feila som vert gjort oppgåve b) er meir reknetekniske feil, som subtraksjonsfeil, divisjonsfeil, eller at eleven ikkje har gjort seg ferdig med oppgåva. Nokre elevar gjer forteiknsfeil, dei gløymer å byta forteikn når dei flyttar på ledda. Dette kan tyda på at dei har lært seg regelen med å flytta ledd og byta forteikn, men at dei her gjer feil, og ikkje heilt skjønar kva dei gjer. Den innlærte regelen kjem då mest truleg av pugging, og ikkje på bakgrunn av forståing. Det er svært uheldig at nokre elevar kun puggar, eller opplever at dei må pugga, og ikkje tar seg tid til (eller får tid) til å jobba med forståinga. For desse elevane vil arbeid med algebraoppgåver verka nokså meiningslaust (Smith & Thompson, 2008).

Tabell 23: Resultat oppgåve 8c

Oppgåve 8 d)	Rett	M	Relativ frekvens
Svar:	64 %	2 %	
Ubesvart			25
$x = 7$			63
$x = 5$			4
$x = 6$ (divisjonsfeil)			2
Gøymer svar i uleseleg skrift			2
Forteiknsfeil x=49/23			1
48x			1
$x = 1$ Forteiknsfeil			1

I ***oppgåve 8 d)*** (me hoppar førebels over 8c) ser me at talet på riktige svar går vidare ned. Skilnaden frå dei to første oppgåvene, er at *x* her er representert på begge sider av likskapsteiknet. Me ser at så mange som kvar fjerde elev har unngått denne oppgåva. Over 6 % av elevane endrar ikkje forteiknet når dei flyttar over, anten eine eller andre vegen. Dei nyttar seg av «flytt og bytt» regelen, men gløymer å skifta forteikn i eit eller fleire av tilfella. $x = 5$, $x = 1$ og $x = \frac{49}{23}$ er alle svar som kjem frå ein eller fleire forteiknsfeil. Igjen er det vanskeleg å seia noko om dette er type 1- eller type 2-feil.

64% av elevane fekk altså til 8d, medan 81% fekk til (a). Denne forholdsvis store forskjellen fortel oss at ein heil del elevar har vanskar med enkel likningsløysing, sjølv på vg1 i vidaregåande skule. Den høge andelen elevar som ikkje svarar på oppgåva er eit lite varselteikn ein bør vera obs på. Det kan vera er eit teikn på at elevane ein har lite robust kunnskap som verkar avhengig av at likninga har ei bestemt form.

Oppgåve 8c) har ei litt utvida hensikt samanlikna med dei andre tre, denne oppgåva har eg òg med for å testa om eleven set parentes etter subtraksjonsteiknet i ei likning. Oppgåva inneheld ein del fleire ledd enn dei andre oppgåvene, men skulle elles ikkje vera vanskelegare. Den ukjente er her symbolisert med *n* , medan den i dei andre likningane er symbolisert med *x*. Dette er ein forskjell som for nokre elevar kan ha betyding for om dei klarar/vel å løysa oppgåva.

Av tabellen 24 på neste side ser ein at det er heile 31 % som har hoppa over oppgåva. I denne oppgåva var det kun ein *n*, det var såleis kun om å gjera å leggja saman tala og få dei på same side, men det viser seg at det var kun 48 % som klarte å løysa likninga. Intensjonen med oppgåva, å testa om respondentane set parentes, var vanskeleg å oppnå på dette mangelfulle grunnlaget. Det var kun 1 % som svara $n = 22$ (som ein ville få om ein sette parentes og gjorde resten riktig), medan 3 % gjorde samstundes feil med å setja inntil og fekk svaret $n = 6{,}5$ eller $n = 3$.

Tabell 24: Resultat oppgåve 8d

Oppgåve 8 c)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	47 %	11 %	
Ubesvart			31
$n = 12$			48
$n = 22$			1
$n = 4$, (leggje inntil, $4 + n = 4n$)			3
$n = \frac{19}{7}$ (Misoppfatning legge inntil)			1
$n = 10$			1
$n = 2$			1
$n = 6{,}5$ (Misoppfatning legge inntil og setje parentes)			2
Ikkje endeleg svar			1
n=3, legge inntil, setje parentes og forteiknsfeil			1
$n = 11$ eller 13 eller ...			9

Det som òg skulle visa seg som eit feilsvar i denne oppgåva, var at nokre av elevane la inntil. I dei andre oppgåvene, der *x* var den ukjente, gjorde ikkje elevane denne feilen. Dette kan tyda på at elevane valde ulik metode avhengig av representasjonen av den ukjente. Det kan tenkast at dei er vant med å jobba med likningar der den ukjente er *x* eller *y*, og at dei derfor i mindre grad gjer denne feilen i (a), (b) og (d).

Det var 9 % som kom med ulike talsvar utan å visa til metode, eller som skuldast mindre reknetekninske feil, og som eg då tolkar til at dei ikkje sit med nokre misoppfatningar på området.

4.9 Oppgåve 9

Set ring rundt dei likningane nedanfor som er korrekte uansett kva verdi variabelen har?

a) $2 + y = y + 2$

b) $x - 5 = 5 - x$

c) $3 \cdot b = b \cdot 3$

d) $\frac{6}{n} = \frac{n}{6}$

Figur 25: Oppgåve 9

I denne oppgåva vert elevane presentert for fire likningar, og skal ut frå å sjå på desse finna ut kva likningar som er korrekte, uavhengig av verdien til variabelen. Oppgåva er henta frå ei undersøking gjort i ungdomskulen (Hompland, 2012), men er omskrive noko i oppsett og form. Svarar dei (b) her, kan det vera eit teikn på at dei sit med misoppfatninga at subtraksjon er kommutativt. Svarer dei (d) her, kan det vera eit teikn på misoppfatninga som går på at divisjon er kommutativt. Samstundes må ein ha i tankane at det er sterk symmetri i oppgåvene, noko som kan trigga system 1-feil hjå elevane.

Tabell 25: Resultat oppgåve 9

Oppgåve 9	Rett	M	Relativ frekvens
Svar:	47 %	37 %	
Ubesvart			14
a og c (Riktig svar)			47
a, b, c, d			2
a, b			4
a, c			1
a, d			1
b, d			2
c, d			1
b			2
c			5
d			7
a, b, c			8
a, b, d			2
a, c, d			2

Det var 47 % av elevane som svara rett på denne oppgåva, medan 14 % ikkje svara i det heile tatt. Her skulle elevane setja ring rundt dei likningane som dei meinte stemte, uavhengig av verdien til variabelen. Det viste seg å vera mange ulike kombinasjonar som kom fram.

I Hompland si undersøking på 10.trinn var spørsmålet stilt noko annleis, her vart det spurt om kva av uttrykka (a), (c) og (d) som ikkje alltid stemte. 11,5 % meinte at (a) ikkje alltid stemte, 11 % meinte at (c) ikkje alltid stemte og 67,5 % meinte at (d) ikkje alltid stemte. Omset me desse resultata til å passa til mi spørsmålsformulering, var det altså 88,5 % som meinte at (a) alltid stemte, 89% meinte at (c) alltid stemte og 32,5 % meinte at (d) alltid stemte.

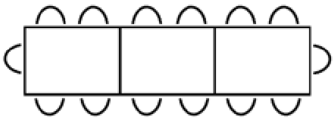
I undersøkinga mi var desse tala høvesvis for (a) 68%, (b) 66% og (c) 17,6% Samanliknar me mine resultat med Hompland (2012) sine, ser me at for (a) og (c) skårar elevane i vidaregåande mykje dårlegare enn det elevane på 10. trinn gjorde. Når det gjeldt kommutativitet og divisjon skårar derimot elevane på vg1 ein heil del betre enn 10.klassen til Hompland.

66% av elevane i undersøkinga mi svarer altså at uttrykket $3 \cdot b = b \cdot 3$ stemmer alltid, men mange av desse hadde dessverre og ei oppfatning av at anten subtraksjon eller divisjon òg er kommutative operasjonar. I undersøkinga til Hompland (2012) er det kun 1,1 % som seier at multiplikasjon ikkje er ein kommutativ operasjon, medan i mi undersøking så er det 34% som seier dette. Det er svært overraskande at ein så stor del av elevane ikkje ser ut til å vita dette.

Ein kan så spørja seg om desse feilsvara kjem av at elevane ikkje har forstått kva som er kommutative operasjonar eller ikkje, eller om det kjem av at elevane ikkje forstår oppgåva. Det ville vera naturleg å tenkja seg at elevane som ikkje svarar på oppgåva er dei som ikkje har forstått kva ein spør etter, eller at dei rett og slett ikkje veit kva dei skal svara. Det kan òg tenkjast, som påpeika innleiingsvis, at symmetrien i desse oppgåvene triggar System 1-feil. Elevane svarar utan å gå skikkeleg inn i oppgåvene.

4.10 Oppgåve 10

Eitt konfirmasjonsbord skal setjast saman av småbord med stoler rundt som på figuren under:



a) Kor mange kan det dekkast til om me nyttar fem småbord?

Svar:

b) Kor mange kan det dekkast til om me nyttar 10 småbord?

Svar:

c) Kor mange stolar vert det dersom me nyttar n småbord?

Svar:

Figur 26: Oppgåve 10

Denne oppgåva er òg henta frå *Veiledning til algebra* (Brekke et al., 2000). Den testar eleven si evne til å sjå mønster og vidare evna til å formulera dette mønsteret i form av eit algebraisk uttrykk. Slike oppgåver kan vera utfordrande for elevane, men samstundes peikar Bell (1995) og Birkeland et al. (2011) på at dei er viktige for at elevane skal oppleva korleis ein kan byggja og utvikla eigen kunnskap, noko som kan vera inspirerande og motiverande for eleven. Oppgåva er noko omarbeidd med tanke på formulering, Brekke spurte heller ikkje etter algebraisk uttrykk i sin versjon av oppgåva. På lik linje med Oppgåve 3 testar altså denne oppgåva òg om eleven klarer overgangen frå aritmetikken til algebraen. I (a) kan ein telja seg fram, eller ein kan teikna og telja. I (b) vert dette litt vanskelegare, då det her er 10 bord det skal dekkast til. I (c) testar eg om eleven har klart å sjå eit mønster i korleis han har kome fram til svara i (a) og (b). Vil han klara å setja dette opp i eit generelt uttrykk der talet på bord er *n?*

Tabell 26: Resultat oppgåve 10a

Oppgåve 10 a)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	80 %	2 %	
Ubesvart			7
22 (Riktig svar)			80
25			2
30 (6*5)			1
23			2
18			2
24, 21, .. ANNA			5

Oppgåve 10 a), gjekk nokså bra. Her var det 80 % som svarte med rett tal på stolar. 7% svarte ikkje på oppgåva. Dette tyder at dei aller fleste har fått med seg kva oppgåva spør etter. Av dei ulike feilsvara var det ingen spesielle som skilte seg ut, det verka som det var meir eller mindre tilfeldige feil som førekom.

Tabell 27: Resultat oppgåve 10b

Oppgåve 10 b)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	62 %	20 %	
Ubesvart			8
42 (Riktig svar)			62
50			2
43			2
60 (30*5)			1
44			15
63			1
46, 34, ...			9

I ***oppgåve 10 b)*** var det ein del færre riktige svar, 62 %, medan talet på ubesvarte var omtrent uforandra (8%). Den store trenden i denne oppgåva var at for å finna talet på stolar rundt eit langbord sett saman av 10 småbord, dobla dei talet på stolar dei kom fram til i (a). Det førte blant anna til at svaret 44 kjem fram som det sterkaste alternativet etter det riktige som var 42. 15 % av elevane doblar svaret 22 som dei fekk i (a), og får 44 i (b). Desse elevane tenkte rett i (a), men tar ein snarveg i oppgåve (b) som ikkje fører dei til riktig svar. Talet på elevar som doblar i (b), uavhengig av kva svar dei gav i (a), er i overkant av 20.

I ***oppgåve 10 c)*** skjer den store overgangen til algebraen. Dersom elevane hadde tenkt rett i dei to føregåande deloppgåvene, kunne ein tenkja seg at dei hadde eit ok utgangspunkt for å koma fram til eit fornuftig svar her. Det avheng likevel av at eleven evnar å tenkja algebraisk, og at eleven er trena i dette frå eit tidleg tidspunkt. McIntosh (2007) hevdar at mange born har problem med å oversetja problem til den relevante utrekningssituasjonen, dette på trass av at dei gjerne forstår sjølve situasjonen. Han seier at dette ofte skjer fordi elevane ikkje har tilstrekkeleg trening i å oversetja ein situasjon til eit reknestykke, og at ein del elevar derfor tyr til snarvegar og lagar seg «reglar» som sjeldan fungerer, altså at dei manglar skrivedugleik i matematikk. Doblinga i (b) kan kanskje vera eit døme på dette.

Tabell 28: Resultat oppgåve 10c

Oppgåve 10 c)	**Rett**	**M**	**Relativ frekvens**
Svar:	32 %	14 %	
Ubesvart			43
$4n + 2$ (rett svar, og med ord)			32
$4n$			2
$n + 2$			1
n			4
$5n$ eller $6n$			3
Anna svar (tal, variabel osb..)			14

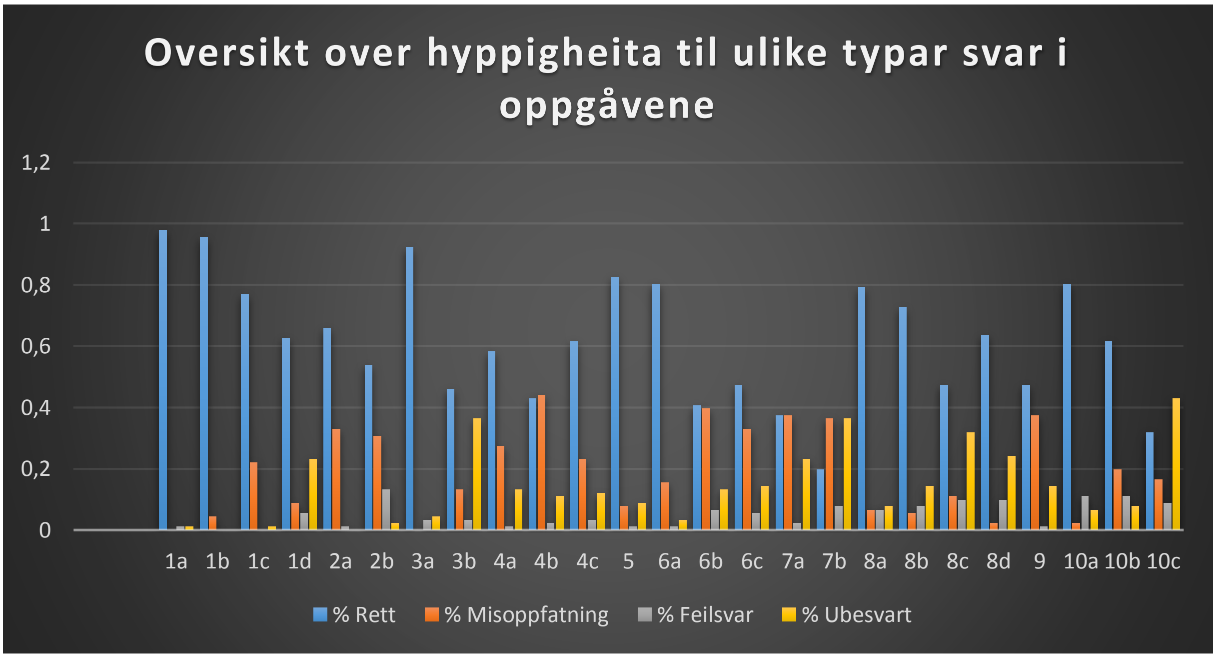
Me ser at det skjer store endringar i svarmønsteret frå (a) og (b) til (c). Det første ein ser er at det er heile 43 % som let oppgåva stå ubesvara i (c), medan det høvesvis var kun 7 og 8 prosent i (a) og (b). Talet på elevar som svarar rett i (c) er omtrent halvert frå (b), det var kun 32% av elevane som gav svaret $4n + 2$. Det er altså mindre enn ein tredjedel av elevane som får til å setja opp dette algebraiske uttrykket. Dette kan koma av det McIntosh (2007) omtalar som elevar sine vanskar med å omsetja tekst til reknestykke, eller uttrykk, saman med det at mange elevar har liten eller svært avgrensa forståing av samanhengen mellom symbola og situasjonen dei skal representera (Stacey & Macgregor, 1997). Dersom du ikkje skjønar kva det er som skal representerast med kva, vil du heller ikkje klara å setja opp noko uttrykk. Du må her skjøna at det er talet på bord som er den ukjente variabelen, og at talet på stolar avheng av dette.

Det var mange elevar som tok til å gjetta på tal eller uttrykk utan forklara desse noko nærare. Svara $4n$, $5n$ og $6n$ kan likevel tyda på at elevane er på veg i utvidinga av sitt omgrepsmønster og si forståing i algebra. Svaret 6*n* kan koma av at eleven tenkjer rett på sin måte, problemet kan vera at eleven sit med misoppfatninga å setja inntil.

4.11 Samla oversikt

I presentasjonen av oppgåvene ovanfor ser me at førekomsten av misoppfatningar, andre feil og at elevane lar oppgåvene stå uløyste, varierer naturleg nok frå oppgåve til oppgåve. Korleis er så hyppigheita av dei ulike type svar elevane gav på kartleggingsprøva? For å få ei betre oversikt av dette presenterer eg desse resultata samla i Tabell 29. Dette gjev eit samla inntrykk av i kva oppgåver elevane møtte størst vanskar.

Tabell 29: Hyppigheita til type svar



Desse resultata er stort sett omtala i dei tilhøyrande delkapittla tidlegare i kapittel 4. Ein vidare diskusjon av av ulike observasjonar er gjort i kapittel 5.

5 DISKUSJON

I dette kapittelet vil eg sjå nærare på nokon av problema me har sett elevar kan møta i algebra, kva misoppfatningar ein finn knytt til desse temaa, og korleis desse viste seg i undersøkinga eg gjorde. Eg nyttegjer meg av ein del av intervjua for å prøva å sjå nærare på kva elevane tenkte då dei løyste oppgåvene. Fokuset vil vera på diskusjon av fenomena (dei ulike misoppfatningane) og ikkje så mykje på enkeltoppgåver, men enkeltoppgåver vil sjølvsagt verta nytta i denne diskusjonen.

Temaa eg kjem til å gå spesielt inn på her er omtrent det same som presentert i kapittel 3.3.1;

- Prioritering (å setja parentes og frikopling)
- Tolking av variablar (å leggje inntil)
- Tekst-kontekst (lese og skrivedugleik i algebraiske oppgåver, overgang aritmetikk-algebra)
- Kor djupt sitt kunnskapen til elevane?
    - Overflatisk? Inkonsekvent metode?
    - Elevar presentert for ulike forslag til løysingar –byter dei meining?
    - Misoppfatningar eller system 1-feil?

Avslutningsvis vil eg òg sjå overordna på resultat frå testen. Kan eg finna nokre tendensar i resultata? Er det gjennomgåande skilnadar på elevane etter kva matematikk dei har, eller har dette mindre å seia sidan oppgåvene i testen er basert på ting dei skal ha lært i grunnskulen? Eg vil òg sjå om eg finn skilnadar mellom resultata hjå gutar og jenter, sjølv om dei siste internasjonale testane ikkje viser signifikante skilnadar på dugleikar avhengig av kjønn (Kjærnsli & Olsen, 2013).

5.1 Prioritering

Som ein kunne sjå i resultata under dei forskjellige oppgåvene, inneheldt testen fleire oppgåver som kunne avsløra misoppfatningar knytte til prioritering. Om elevane gjorde feil knytte til frikopling av forteikna, setjing av parentes eller prioritering mellom addisjon/subtraksjon, heng alle desse tre feiltypane ofte saman med misoppfatningar, og vert brukte til å løysa alt frå enkle til meir avanserte oppstilte oppgåver. Det kan ved første augekast sjå ut til at dette problemet er meir vanleg i dei aritmetiske oppgåvene i testen enn i dei algebraiske. Det var spesielt i oppgåve 2 at ein fann flest førekomstar av misoppfatninga «å setja parentes». Noko av grunnen til at denne feilen førekjem hyppigare i desse oppgåvene kan vera samansett å finna ut av. Det kan verka som at ein del av elevane som gjer denne feilen i oppgåve 2, er usikre på korleis dei skal handtere variablar. Det ser ut som om denne uvissa, eller misoppfatningar knytt til handtering av variablar, «tar over» og gjer at elevane ikkje «set parentes» (eller tilsvarande) i nokre av dei algebraiske oppgåvene. Dette understrekar kompleksiteten i å finna årsakene til at elevar svarar feil i oppgåver. Ei misoppfatning kan dekke over for ei anna.

Som omtala tidlegare, fann Linchevski og Livneh (1999) at fleire misoppfatningar knytte til prioritering i algebra, funne i tidlegare forsking (Herscovics & Linchevski, 1994; Linchevski & Herscovics, 1996), kjem frå misoppfatningar knytte til prioriteringar i tilsvarande aritmetiske oppgåver. Dette er òg noko som blant andre Booth (1988) påpeiker. Funna eg gjorde var som sagt hovudsakleg misoppfatningar i aritmetiske oppgåver, men det var òg fleire elevar som viste desse misoppfatningane i nokre av dei algebraiske oppgåvene.

Oppgåvene som testar for denne «parentessetjinga» eller «frikoplinga» er oppgåve 2 (s.56), 6c (s.71) og 8c (s.78). Når ein ser på elevar som sette parentes i oppgåve 2, ser ein av Tabell 9 at ein del elevar fekk til (b) sjølv om dei ikkje fekk til (a). Dei ni elevane som viste misoppfatning i (a), (la saman $2 + 3$ og fekk 5, la deretter saman $5 + 2$ og fekk 7, trakk så 7 frå 5 og fekk svaret -2), kan ha blitt lurt av symmetrien i oppgåva, altså at dei gjorde ein system 1-feil, jamfør Kahneman (2003, 2012). Dei tenkjer kanskje at det ikkje har noko å seia at ein ventar med å nyttegjera seg av subtraksjonsteiknet. Denne feilen er som nemnt òg kjent som «drop sign while operating» (Bell, 1995). Elevane som òg gjorde feil i 2b sit gjerne i større grad med den faktiske misoppfatninga at dei set parentes, eller delar opp uttrykket, etter eit subtraksjonsteikn.

Som omtala i kapittel 3.3.2 (sjå òg evt. Intervjuguide, vedlegg 8.4), fekk elevane nokre utfordringar undervegs. I eitt av intervjua fekk ein elev ei «openbaring». Han hadde i intervjuet først løyst ein del oppgåver frå kartleggingstesten, og blant anna svara «1» på oppgåve 2b, $(1 + 4 * 3 - 7 + 5 = ?)$, som då er feil. I etterkant fekk han presentert det korrekte svaret på 2b, nemleg 11, presentert som eit anna elevsvar, utan at han fekk vita kva svar som var det riktige. Han vart så utfordra til å prøva finna ut korleis den andre eleven kunne ha tenkt, og deretter vurdera kva metode som var den rette.

E10: Jammen no e da ikkje da, for da stod ikkje sånn, da stod ikkje minus sju pluss fem..
L: Nei fø, ka gjorde du no, eg ser jo kje da på opptaket, kan du sei ka du gjorde?
E10: Eg sette parentes på sju og fem, og da va ikkje da da stod.
L: Nei, men du tenkte da på ein måte då?
E10: Ja.
L: Men e da ein forskjell om da står parentes eller ikkje då?
E10: Ja, da e da. Viss ikkje da e parentes då må eg ta hakk for hakk og ikkje... Ja, du veit eg ikkje klara forklara..

Intervjuutdrag 6

Denne eleven kom sjølv fram til at måten han først hadde løyst oppgåva på måtte vera feil. Gjennom å prøva å forstå korleis den andre eleven kunne ha tenkt, fekk han brått opp augo for kva som måtte vera rett måte å løysa oppgåva på. *«Jammen no e da ikkje da, for da stod ikkje sånn, da stod ikkje sju minus fem..»,* sa eleven ivrig, og sette parentes rundt sju pluss fem; $-(7+5)$. Eleven forstod at han ikkje berre kunne tenkja parentes og dela opp uttrykket uavhengig av forteikna, han må ta «hakk for hakk», som han sa det. Ved å få presentert det alternative svaret «11» til svaret «1» som han kom med, klarte han å koma fram til kva som var rett tenkjemåte og korrigerte synet sitt på kva som var rett svar.

Kanskje fekk denne eleven korrigert si oppfatning av prioritering og blei kvitt ein misoppfatning, eller kanskje eleven eigentleg hadde det inne, men hadde tenkt for fort gjennom oppgåva og gjort ein system 1-feil. Dette har eg ikkje noko svar på, men gleda hjå eleven når han gjorde denne oppdaginga tilseier at det var stort for eleven, og vonleg noko han har hatt glede av seinare òg, i form av å ikkje «tenkja inn» eller setja inn parentesar utan å ta omsyn til forteikna fleire gongar. Eg vil nemna at dette var den einaste eleven, av dei som i utgangspunktet svara feil på denne oppgåva, som under intervjuet endra svaret sitt til det rette alternativet.

Resultata frå oppgåve 9, alternativ (b), fortel oss at kvar femte elev har ei oppfatning av at subtraksjon er kommutativ, medan over 17 % av elevane òg svarar som om divisjon er det. Eit problem ein ser i forhold til elevar sitt arbeid med assosiativ lov, distributiv lov og kommutativ lov, er at elevar i stor grad heng seg opp i kva tal ein arbeider med og kva svar ein får, og mindre i kva operasjonar ein har med å gjera (Bush & Karp, 2013). I arbeidet med kommutativ lov, gjer nettopp dette fokuset at elevar overgeneraliserer og overfører dette til og å gjelda for subtraksjon og divisjon. På denne måten dannar elevar seg eit eige bilete av kommutativ lov, dei dannar seg pseudostrukturell kunnskap (Sfard & Linchevski, 1994). Dette fann dei at ikkje var tilfellet med assosiativ lov, der elevane fokuserer meir på operasjonane dei gjer og ikkje på tala (Bush & Karp, 2013).

I kva grad elevane har kjennskap til dei tre lovane omtala i førre avsnitt er uvisst, men ut frå funna eg gjorde i undersøkinga mi, og funna til Linchevski og Livneh (1999), verkar det som at elevar både bevisst og ubevisst plasserer parentesar eller deler opp uttrykket utan å ta omsyn til forteikna. På ei anna side, hevdar Booth (1988) at mange elevar synest parentesbruk ikkje er naudsynt, då rekkjefølgja operasjonane står i, fortel oss korleis me skal rekna det ut. Elevar som tenkjer slik, kan som me såg i Oppgåve 6b, fjerne parentesar utan å ta omsyn til forteiknet til parentesen.

Tankane eg hadde på førehand om at desse feila skyldast at elevane sette parentes, skulle altså visa seg å ha mange fleire årsaker. Ikkje alle elevane som gjorde feil som kunne koma av at dei sette parentes, tenkte på parentes i det heile tatt. I oppgåve 2 fekk elevane i oppgåve; Rekn ut: a) $2 + 3 - 5 + 2 =$

I eit intervju med elev 5 svara eleven følgjande:

L: Du va då elev nummer fem i testen, og so.. ska me sjå ... Ja, i oppgåve 2, kan du lesa opp den oppgavo sånn so du ville lest ho?
E5: Her liksom?
L: Ja..
E5: Ja, då ville eg tatt 2 + 3, og det er fem..
L: Ja..
E5: og så tatt -5+2, altså plusset sammen fem pluss to,
L: Ja
E5: som e syv, og så funne ut ka det e..
L: Mhmm, og då kjem du fram te..?
E5: minus to

Intervjuutdrag 7

Utfrå dette utdraget kunne det sjå ut til at eleven sette ein slags mental parentes rundt $(5 + 2)$ og set minusteiknet på etterpå, men eleven nemnar aldri noko om parentes. Kanskje det tydar på ei frikopling frå det negative forteiknet, altså at eleven droppar dette medan han reknar, for så å setja det på etterpå. Dette er ein feil skildra av både Bell (1995) og Linchevski og Livneh (1999), (sjå kapittel 2.2.4.1 for detaljar). Dei to nemnde misoppfatningane var det mange elevar som sat med, men ikkje denne eleven. Me ser på korleis intervjuet heldt fram;

L: Minus to, ja. I testen her so kom du fram te to, har du skreve her
E5: ja...
L: Ka kan du ha tenkt, da va jo litt annleis enn da du fekk no... Ka kan du ha tenkt då?
E5: Då kan det vere sånn her, måkje pluss og minus... det blir jo ett eller ant, men dette blir jo minus, pluss og minus blir minus

Intervjuutdrag 8

I dette tilfellet kjem denne feilen altså av at eleven overgeneraliserer reglane for multiplikasjon av positive og negative tal, så verken parentesbruk eller frikopling frå forteiknet er inne i biletet her. Det kan heller ikkje seiast å vera ein system 1-feil, då det verkar som om her er gjort ei vurdering av metoden. Samstundes må det peikast på at denne eleven hadde «rett svar» på denne oppgåva på den skriftlege testen, men då utan å vise framgangsmåte.

McIntosh (2007) meiner at parentesbruk i ei stor grad er usystematisk og tilfeldig hjå elevane, og at ein ikkje bør bruka for mykje tid på parentesar for parentesane si skyld, men nytta dei der det er naturleg. Resultata frå oppgåve 2 (4.2, s.56), oppgåve 5 (4.4, s.64) og oppgåve 6 (4.6, s.71) viser at ein stor del av elevane gjer feil knytt til parentesbruk. Av elevane eg plukka ut til intervjua, var det elevar som tydeleg sat inne med misoppfatningar, og elevar som hadde gjort tilfeldige feil. Det viste seg òg å vera fleire tilfelle av system 1-feil, dette avslørte seg gjennom at elevar skifta meining undervegs i intervjua, samt ulike svar i kartleggingstest og intervju, gjerne då utan at eleven sjølv forstod kva han/ho hadde tenkt først. Denne endringa gjekk òg feil veg, frå å ha svara rett til å endra til feil.

5.2 Tolkning av variablar

Når det kjem til elevane si oppfatning av variablar, verkar det som om det her er fleire utfordringar for elevane. Ein elev ser slik på oppgåve 3b om klinkekuler;

L: og som er lik 12 + 10+ som er 22, men b, den har du ikkje svart på. Så eg lurte på kofför har du ikkje svart på b..?
E5: Fordi det bokstavgreie kommer inn
L: Det kjem sånn bokstavgreie inn i...
E5: Ja, m og n, og det bare ødelegger alt.....
L: ...det ødelegger alt. Kofför ødelegger det alt?
E5: Fordi det er å forvirre, altså det forvirrer meg bare, det blir bare helt, ahhrrr...
L: Mhmmm.. okei. Men... Ja, eh..
E5: Eh, jammen det er jo det, vis du ser over regnestykket så plutselig dukker det en bokstav opp inni, så....

Intervjuutdrag 9

Mange av elevane som har problem med dei forholdsvis enkle algebraoppgåvene i denne undersøkinga, ser ut til å sjå på bokstavar som objekt, og ikkje som ukjente storleikar eller variablar. Som omtala tidlegare peikar Küchemann (1978) på utfordringane den tidlege undervisninga i algebra kan by på. Nokon elevar vert undervist med den såkalla «fruktsalatmetoden». Den kan, som omtala i kapittel 2.2.2, hjelpa nokon med å rekna ut enkle algebraiske oppgåver, men kan samstundes hindra forståinga av algebra. Dette såg me òg eksempel på i resultata frå oppgåve 4, der elevar gjorde det best i oppgåva der dei skulle leggje saman to forskjellige variablar.

Ein av dei vanlegaste feila som går igjen når elevane skal forenkla algebraiske uttrykk, ser i mine data ut til å vera det å setja inntil. Det kan vera ulike grunnar til at eleven vel å behandla variablar på denne måten. At elevane har problem med å akseptera eit algebrauttrykk som eit endeleg svar, samstundes som dei heng igjen i metodar frå aritmetikken, kan ifølgje Booth (1988) vera noko av grunnen til at elevane gjer denne feilen. Som tidlegare påpeika seier òg Booth at undersøkingar tydar på at elevar som ikkje har noko forkunnskapar til algebra, ofte nyttar nettopp metoden med «å flytte inntil» (Booth, 1984). Mason, Graham, og Johnston-Wilder (2011) hevdar, som Booth, at denne typen feil kan skuldast erfaringar frå aritmetikken, men òg mangel på slike erfaringar. Elevane er vande med å få tal, og ikkje uttrykk, som svar. Dersom elevane i større grad hadde vore vande med å sjå på uttrykk som til dømes 3 + 2 eller 10/2 som objekt, som akseptable «namn» for talet 5, så er det sannsynleg at dei lettare ville akseptera uttrykk som står for noko generelt. Til dømes at dei såg på $3n + 4$ som objekt heller enn ein uferdig operasjon (Mason et al., 2011). Dette fører igjen tilbake til aritmetikken, der det å øva på å presentera tal på ulike måtar, til dømes som ein sum, brøk, differanse, produkt osb., altså kan vera med på å førebu elevane på å forstå algebra, utan at dei nødvendigvis arbeidar med algebra (Lid, 2015).

Figur 27: Oppgåve 4

Legg saman

a) $3n$ **og** 4 Svar: __________

b) **5 og** $a + 2$ Svar: __________

c) a **og** $7b$ **og** $2a$ Svar: __________

Det kan sjå ut til at uttrykk som inneheld fleire ukjende er enklare for elevane å forholda seg til. I intervju med elev 9, gav han til dømes følgjande svar på oppgåve 4:

55 L: Okei. Viss me då blar om til oppgåve 4. Der skulle du legge saman desse uttrykka.
56 E09: Ja
57 L: Så viss du legg sammen i a), ka får du då?
58 E09: 7n
59 L: Og i b?
60 E09: Eh, 7a
61 L: og c?
62 E09: og c.. Eh, vent då.. 7b, eller her er ikkje noko + imellom, eller går det an?
63 L: Jodå du kan eventuelt..
64 E09:Lage et uttrykk?
65 L: ja du kan jo det, gjer sånn so du tenker er rett
66 E09: Ja.. 7b+3a kanskje?

Intervjuutdrag 10

I oppgåva (c) der det er to ukjende, er det flest elevar som svarar rett, og ein har færrast tilfelle av misoppfatninga å setja inntil. Elevane si oppfatning av ukjende som objekt, som me ser hjelper nokon elevar i enkelte oppgåver («ein kan ikkje legge saman ulike bokstavar»), vil kunna øydeleggja for elevane si utvikling i algebra. Dei forstår ikkje kva denne ukjende symboliserer, noko som ifølgje blant anna Sfard og Linchevski (1994) vil kunne hindra eleven i å nå vidare i si omgrepsdanning, noko som igjen fører til at eleven si matematiske utvikling stagnerer.

Som lærar erfarer ein kor viktig det er at elevane skjønar at ein ukjend eller ein variabel kan symbolisere mange ulike ting avhengig av kontekst, og at dette er heilt essensielt for å kunne gå vidare med matematikken. Ein del elevar kan nå langt med ei avgrensa omgrepsforståing gjennom å pugga formlar og algoritmar, men dei har vanskeleg med å skjøna kva dei eigentleg heldt på med.

Dersom me ser tilbake på oppgåve 8 s.78, skulle elevane her løysa enkle likningar av andre grad. Resultata for dei ulike deloppgåvene peikar mot at kva symbol som vert nytta for dei ukjente har ei viss betydning for om elevane får til oppgåva. I 8c var den ukjente *n*, og svarprosenten på denne var dårlegare enn for dei andre tre likningane. Det verkar som elevane er mest fortrulege med at ukjente har symbola *x* eller *y*. Dette kjem og fram i nokre oppgåver der enkeltelevar brukar *x* og *y* framfor dei etterspurte variablane, til dømes *m* og *n*. At elevane føretrekk *x* og *y* kan koma av at det er desse variablane dei er vande med å sjå i til dømes likningar og funksjonar. Elevane kan ha for lita erfaring med at andre bokstavar enn *x* og *y* representerer variablar. Det kan tenkjast at dette og kan vera uheldig for elevane i arbeid med koordinatsystema (*x*- og *y*-akse). Eleven kan overspesialisera si forståing av variablar til å kun gjelda for *x* og *y*, jamfør Gjone (sjå 2.2.4).

Korleis elevane tolkar variablar, heng altså nøye saman med kva erfaringar elevane har frå arbeid med algebraoppgåver. Denne erfaringa styrer omgrepsdanninga som skjer individuelt hjå den enkelte elev, saman med blant anna inntrykk frå lærebøker, lærarar og diskusjonar med medelevar. Schliemann et al. (2007) peikar på at korleis ein vel å leggja opp undervisningslaupet i matematikk vil kunne ha stor betyding for eleven si utvikling i algebra. Algebra er ofte sett på som ei fortsetjing på aritmetikken, som generalisert aritmetikk, noko det er lange historiske tradisjonar for (Mason, 2008). Men ved å sjå på aritmetikken som ein del av algebraen, slik som omtala i kapittel 2.3.1, kan tidleg algebra vera med på å leggja eit viktig grunnlag som gjer at elevane i sitt møte med bokstavar i algebra, lettare aksepterer desse uttrykka. Dette vil gje elevane ei djupare forståing på eit tidlegare tidspunkt, noko som igjen vil gjere vegen vidare i matematikk lettare, og ikkje minst meir interessant og meiningsfull for elevane. Mason (2008) seier følgjande:

> *I am proposing that it is much more fruitful to think of generalized arithmetic as meaning the result of learners generalizing their experience with numbers, and expressing generality about properties of numbers arising from a variety of situations in the material, mental, and symbolic worlds, culminating in expressing generality about rules of arithmetic and then taking these to be the rules for algebraic manipulation* (s. 77)

Vidare seier Mason at algebra verken må sjåast på som symbolmanipulasjon eller som aritmetikk med bokstavar, ikkje ein gong som språket for likningar. Han seier algebra må sjåast på som eit konsist og manipulerbart språk for å uttrykka generalitet, og avgrensingar denne måtte ha (Mason, 2008, s. 77).

5.3 Kor konsekvente er elevane i sin metodebruk?

I førebuinga til intervjua, gjekk eg gjennom testen til kvar enkelt elev og såg på svara elevane hadde gjeve. Under intervjua såg eg at fleire av elevane, på fleire ulike oppgåver, svara annleis enn dei gjorde i kartleggingsundersøkinga. Dette var spesielt tydeleg i algebraoppgåvene. Det kan tyda på at nokre av elevane ikkje er så konsekvente i sin metodebruk, noko som kan skuldast lite erfaring med denne type oppgåver, eller rett og slett eit lågt kunnskapsnivå når det gjeld algebra. Spørsmåla vart samstundes stilt på ulike tidspunkt, og i ulike situasjonar (test kontra intervju), noko som sjølvsagt og kan påverka korleis eleven svarar. Det kjem likevel tydeleg fram i intervjua at elevane ofte er usikker på eigen kunnskap, eller at dei i alle fall er usikker på korleis dei skal utrykkja denne; «*Eg har bare ikkje peiling*», «*Eg vetsje. Eg har ikkje peiling egentlig. For meg er det fifty-fifty..», «Eg tenker at det eg gjorde no var meir rett», «Ja, eg vetsje koffor eg bare tenker det*».

Som omtala i kapittel 3.3.2 og 5.1, fekk elevane som eg intervjua (10 stk) ei utfordring i tre utvalte deloppgåver. Eg gav dei då eit alternativt svar som var motsett av det dei hadde kome fram til då dei svara på oppgåva tidlegare i intervjuet. Det vil seia at dersom dei hadde svara rett, fekk dei presentert eit svar som skuldast ei misoppfatning, og hadde dei gitt eit svar med rotfeste i ei misoppfatning, vart dei presentert for det riktige svaret. Vidare vart dei utfordra til å prøva å finna ut korleis ein kunne koma fram til det alternative svaret, og vurdera kva av metodane som var den riktige. Dette gjorde eg for å sjå om elevane var konsekvente i sin framgangsmåte, eller om den var meir tilfeldig. Ideen til dette henta eg altså frå Linchevski og Livneh (1999, s. 180). Resultatet presenterer eg i tabellen under:

Tabell 30

Oppgåve 2 b) 4 elevar løyste korrekt 6 adderte 7+5 først	$\mathbf{1 + 4 \cdot 3 - 7 + 5 =}$	4 endra ikkje 4 endra ikkje 1 endra til feil 1 endra til rett
Oppgåve 4 b) 7 elevar løyste korrekt 3 la inntil	**Legg saman: 5 og *a* + 2**	4 endra ikkje 1 klarte ikkje bestemma seg for kva som var rett 2 endra til feil 1 endra ikkje 2 endra til rett
Oppgåve 7 b) 2 elevar løyste korrekt 7 visste ikkje, uvisst, feil	**sjå 4.7 s.75**	2 endra ikkje 1 endra ikkje 6 endra til rett ved presenterte alternativ

Av Tabell 30 ser me at i oppgåve 2b, som er ei aritmetisk oppgåve, er det ingen av elevane som svara riktig som seinare endra meining då dei fekk presentert det alternative svaret. Nokre av desse elevane skjøna ikkje korleis ein kunne gjera feil her. Av dei som prioriterte feil, altså dei som frikopla talet *sju* frå forteiknet sitt, var det fire elevar som ikkje endra forklaring når det alternative svaret var gitt, men meinte at dei tenkte rett og den andre eleven tenkte feil. Berre ein av dei seks elevane som svara feil endra svaret sitt til rett alternativ, dette var elev10 som eg siterte i kapittel 5.1 side 89.

I rad 2 i Tabell 30, ser ein at det her var ein større andel som i utgangspunktet løyste oppgåva korrekt og fekk $7 + a$ som svar. Då desse så fekk presentert det feile svaret «$7a$», endra to av desse elevane si oppfatning av kva som var rett metode. Dei tenkte altså at «$7a$» var rett, medan den siste eleven ikkje klarte avgjera kva som var rett. Det var ulike grunnar til at dei to elevane endra meining. Ein av elevane endra meining til feil fordi han byrja å tenkja på «*og*» som «og» i sannsynsrekning, og ville derfor multiplisera. Her ser ein at den munnlege forma i desse oppgåvene kan laga problem for elevar. Eg kjem nærare inn på dette i kapittel 5.4. Den andre eleven som skifta alternativ til $7a$, var elev19. Me ser på eit utdrag frå intervjuet med han på neste side.

E19: Nei, eg trur 7a e rett, for du ska jo på ein måte gjera da enklast mulig. Og då blir jo da enklast.
L: Ja, men eh. Du sa her i A. At 3 n og fira, da vart 3n pluss fira. For da at dei ikkje kunne leggast saman for da va ikkje likt. Men her nere då?
E19: Dar står da på ein måte ikkje nåke med den a-en. Viss da hadde stått 2a for eksempel, so trur eg ikkje eg hadde gjort da samma. Men når den står åleina so trur ikkje eg, plei eg berre på ein måte å legga han ilag. Men da e vel egentlig ikkje rett å gjera da?
L: Ja, sånn at du får 7a, tenke du?
E19: Ja
L: Men ka, koffø vil da vera annleis om da stod 2a då? Ka som...
E19: Eg veit kje heilt. Eg trur eg berre plei gjera da. Veit kje.
L: Ja, at du plei legga den saman, viss den står åleina, so legg du den ilag med...
E19: Mhm

Intervjuutdrag 11

Som me ser av Intervjuutdrag 11, vel denne eleven å setja inntil fordi det er den enklaste måten å skriva det på. Metoden ville vore annleis dersom oppgåva hadde vore annleis, «*dersom det hadde vore* 2*a for eksempel, so trur eg ikkje eg ville gjort da samma.*» Ein kan kanskje hevda ut frå dette at eleven på eit vis er inkonsekvent i metoden, men samstundes har eleven si eiga formeining om at det er slik ein skal gjera det, og har ei førestilling om kor tid han vil setja inntil og kor tid han ikkje vil det. Dersom det står eit tal og ein ukjend aleine, legg han inntil, men står eit tal og ein variabel ilag, til dømes «2*a*», som han seier, ville han ikkje gjort det. Truleg sit eleven med ei misoppfatning av korleis ein kan leggja saman tal og bokstavar, sjølv om han verkar litt usikker på eigen metode. På eit vis minner denne eleven om Erlwangers Benny som eg har nemnt tidlegare. Benny var ein av læraren sine flinkaste elevar, men Erlwanger avdekka at Benny sat på gjennomgåande misoppfatningar. På lik linje med elev19 så hadde Benny laga seg sine eigne metodar for å løysa ulike oppgåver. Reglane nytta han gjennomgåande for å løysa gitte problem, til dømes omsetjing frå brøk til desimaltal.

Eit anna døme viser at elevane kan vera usikre på eigen metode. Ein elev skulle koma fram til kva svar som var rett i oppgåve 4b. Tidlegare i intervjuet kom han fram til at 7+*a* var rett, medan i testen hadde koma fram til 7*a*, noko han ennå ikkje er gjort medviten på;

E10: Eg har aldri lyst å sei at da e du so har rett, eller ein har jo lyst te da, men ein vil ikkje at da e du so sei da [snakkar her om du som seg sjølv]
L: Du har lyst at eg ska sei da, ikkje du ..
E10: Ja
L: Men kem tenke du..?
E10: Eg lure på om eg ska stola på meg sjølv.
L: At du ska stola på deg sjølv?
E10: Ja, elle..eeeehhh.... Jo, eg stoler på meg sjølv
L: Ja. Denne personen, da va deg på testen..
E10: Fillern... [ler...]
L: På testen svarte du 7a
E10: E da 7+a som e riktig?
L: Du svarte 7a på testen og 7+a istad, eg vil ikkje sei so mykje om kva som e rett og gale no, men ehh.
E10: Eg stole på meg sjølv uansett her eg då..

Intervjuutdrag 12

Eleven enda med å gje svaret, «*Eg stole på den nye meg*», og enda med det opp med rett svar. Dette utdraget er eit av mange som viser at elevane ikkje er konsekvente i metoden sin, dette kan koma av det Gjone omtala som *avgrensa omgrepsforståing* (sjå kap.2.2.4).

I rad 3 i Tabell 30 ser me at når det gjeldt oppgåve 7b var det kun to av dei ni[5] elevane som gav rett svar. Desse to elevane endra ikkje meining då dei fekk presentert eit feil alternativ. Av dei som kom med feil svar, eller ingen svar, klarte seks av dei å velja rett alternativ då dei fekk nokre alternativ[6] å velja mellom. Det kan tyda på at det var det å setja opp utrykket som var problemet, eg kjem tilbake til dette i kapittel 5.4.

Det at nokon elevar varierer metodane sine, peikar i større grad i retning av at dei er usikker på kva dei skal gjera, enn at dei nødvendigvis sit på bestemte misoppfatningar (Brekke, 2002; Küchemann, 1978). Dei har gjerne uklåre bilete av kva «ukjende» er, og av korleis dei skal handterast. Er ein usikker på metode, nyttar ein tidlegare kunnskap ein har til å løysa problem, eller ein prøver å tilpassa den nye kunnskapen inn i etablerte skjema, dette er kva Piaget omtalar som assimilasjon (Imsen, 2014; Sfard, 1991). Utan rettleiing og erfaring, er eleven i ein slik fase utsatt for å etablera misoppfatningar. Samstundes viste det seg at nokre av feila elevane gjorde, kom av system 1-feil. Altså feil som kan skuldast dårleg konsentrasjon, eller at eleven tenkjer «for fort».

Så samstundes som resultata frå kartleggingstesten viser at ein del av feila er gjennomgåande for nokre elevar, noko som er eit teikn på at det eksistererer etablerte misoppfatningar hjå elevane, er det òg ein del elevar som truleg ikkje har etablerte misoppfatningar, men som gjer feil av andre grunnar. Som me har sett i dette delkapittelet kan

[5] Den første eleven eg intervjua gløymte eg å utfordra på denne oppgåva. Derfor ni og ikkje ti elevar her.
[6] Alternativa dei fekk å velja mellom var til dømes 2,28minutt, $m + n$ minutt, mn minutt eller 2minutt.

ein del elevar vera inkonsekvente i metoden dei nyttar, og dei har vanskar med å forklara kvifor dei nyttar den metoden dei gjer. Dette kan til dømes koma av lite erfaring med oppgåvetypen og det å utrykkja seg i matematikk, av generelt dårleg kunnskap om emnet eller at eleven er dårleg konsentrert.

5.4 Tekst-kontekst

At ein elev skal klara å løysa ei matematisk oppgåve, er avhengig av at eleven forstår kva han eller ho les. Dersom eleven ikkje klarar å henta ut informasjonen som vert gitt i ei oppgåve, vil han heller ikkje klara å løysa den. I matematikk generelt er det å klara å lesa oppgåver og setja seg inn i problemstillingar, avgjerande for at ein klarar å løysa matematiske problem. Kva informasjon er nyttig og kva informasjon er eventuelt «støy»? Klarer dei å forstå meiningsinnhaldet i ein formel? Og sist men ikkje minst, klarer dei å utrykkja eit generelt svar ved hjelp av algebra? Denne problematikken er kjend som tekst-kontekst.

Hva betyr uttrykket $xy + 1$?

A Legg 1 til y, gang så med x.
B Gang x og y med 1.
C Legg sammen x og y, legg så til 1.
D Gang x med y, legg så til 1.

Norge	36
Finland	72
Sverige	53
Australia	71
Italia	65
Japan	87
Slovenia	76
Int. gj.snitt	65

Figur 28.TIMMS-oppgåve (Grønmo et al., 2012, s. 42)

Som tidlegare omtala gjer norske elevar det spesielt dårleg i algebra i internasjonale undersøkingar. I TIMMS 2011 kom me dårlegast ut i heile Europa, noko som fekk varsellampane til å lysa over det ganske land. Ei oppgåve (sjå Figur 28), gitt elevar ved 8.trinn, viser kanskje litt kva som er problemet for ein stor del av elevane i Noreg. Oppgåva er i TIMMS kategorisert som middels vanskeleg. Den set krav til at eleven kjenner til prioriteringsrekkjefølgja og at utrykket «xy» betyr at x og y skal multipliserast med kvarandre. Altså set det krav til at eleven klarar å lesa uttrykket rett og dermed kunne knyte det til riktig alternativ forklaring på kva det faktisk betyr. Til høgre i Figur 28 finn ein dei relative frekvensane for riktig svar til nokre av deltakarlanda. Som me ser er det kun 36% av dei norske elevane som klarer å velja rett uttrykk, det internasjonale gjennomsnittet ligg på 65%. Dette er altså langt under snitt og fortel oss at norske elevar i lågare grad enn elevar i andre land har den naudsynte kunnskapen for å forstå dette uttrykket (Grønmo et al., 2012).

5.4.1 Modellering

I algebra vil elevar blant anna møta oppgåver der dei skal forklara utrykk (som i dømet frå TIMMS over), eller laga/setja opp uttrykk som skildrar ein spesiell samanheng eller eit mønster. Dei skal gjerne laga ein modell som skal gjelda i alle tilfelle for eit gitt problem. Dette er oppgåver som set krav til elevane sine kunnskapar. Ein er blant anna avhengig av at dei har ei forståing av kva variablane dei bruker symboliserer, og at dei klarar å utrykkja seg, gjerne i form av eit algebraisk uttrykk. Det set og krav til at elevane er stø i grunnleggjande reknedugleikar, deriblant prioriteringa mellom rekneoperasjonar. Men for å sjå samanhengar treng ein som regel meir enn berre den operasjonelle forståinga. Forståinga og fleksibiliteten ein kan trenge for å løysa slike oppgåver set krav til ei strukturell forståing. Som me har sett på tidlegare, kan tidspunktet for innføringa av algebra ha mykje å seia for kva forståing av algebra elevane sit med (Booth, 1988; Küchemann, 1978; Stacey & Macgregor, 1997). Ein tenkjer at den første undervisninga elevane får kan vera medverkande til nokre av misoppfatningane elevane sit med. Det å bruka fyrste bokstaven i ord som symbol for den ukjende, kan til dømes vera med på å laga grunnlag for misoppfatninga «bokstav som forkorting for objekt» (Bush & Karp, 2013; Küchemann, 1978).

Eleven si oppfatning av variabelen, heng altså nøye saman med eleven sine erfaringar. Korleis eleven les algebrauttrykk styrer òg korleis eleven vel å løysa dei. Dette gjer at elevar med til dømes misoppfatninga «å setja inntil» eller «bokstav som forkorting for objekt» mest truleg ikkje vil klara å lesa ein formel rett, eller gjera seg nytte av denne. Eit døme på dette såg me i oppgåve 7 s.75, eit anna i dømet frå TIMMS innleiingsvis i kapittel 5.4. I oppgåve 7a skulle eleven lesa og tolka eit algebraisk uttrykk som gav oss mobilkostnadane i ein tenkt situasjon. Det viste seg at ein svært liten del av elevane i undersøkinga (37%) klarte å tolka uttrykket rett. Mange elevar prøvde å gje ei forklaring, men dei klarte ikkje setja uttrykket i samanheng med teksten ovanfor uttrykket. Me ser at løysingsprosenten i oppgåve 7a og i oppgåva frå TIMMS er høvesvis 37 og 36%. Er dette tilfeldig, eller underbygger desse resultata kvarandre? Resultata er vanskeleg samanliknbare, ein skal derfor ikkje trekkja konklusjonar, spesielt ikkje berre ut frå desse to oppgåvene.

Vidare i oppgåve 7b skulle dei setja opp eit uttrykk for kor mange minutt det vart ringt til saman, endå færre elevar klarte denne. Eg meinte det var tydeleg formulert i oppgåveteksten at talet på ringeminutt var høvesvis «*m*» og «*n*» minutt, altså at det var $m + n$ minutt til saman. Det var berre 20 % av elevane som sjølv klarte å setja opp dette uttrykket for talet på ringeminutt, samstundes auka mengda som ikkje svara på oppgåva samanlikna med (a) frå 23 til 36%.

Kva er det som gjer at elevane ikkje klarar å henta ut denne informasjonen og uttrykka den algebraisk, når eg som lærar tenkjer at det skulle vera ei grei oppgåve? Er det lese- eller skrivedugleiken det skortar på? Ein av gutane eg intervjua, hadde gjort det bra på testen og vist forståing for kva variablar var og korleis ein kunne leggja desse saman. Denne 1T-eleven fekk likevel problem i oppgåve 7b, sjølv om han hadde gjeve rett forståing av algebrauttrykket i (a). Han klarte ikkje å sjå korleis han skulle finna talet på minutt. Først etter å ha fått presentert fleire alternativ, forstod han kva kan skulle finna. Då tok han det derimot med ein gong. Me ser på eit utdrag frå dette i intervjuutdrag 13 under:

225 L: Heh, nei altso de` jo, viss eg.. da va ulike svar som kom fram på..på testen her då. På denne.
226 E33: Ja?
227 L: Eh, et svar va 2,28 minutt. Et ant svar va mn. Og tredje svar va m+n.
228 E33: Åja, ja. Av de?
229 L: Ja, av de.
230 E33: Når en tenker sånn, på den måten ja.
231 L: Ja, viss du tenke på den måten. Mhm
232 E33: Så e m pluss n riktig.
233 L: M pluss n, ja?
234 E33: Ja
235 L: Ja. Ka..?
236 E33: Koffor eg ikkje tenkte sånn?
237 L:Ja? Korleis tenkte du?
238 E33: Eg leitet etter et konkret tall
239 L: Ja, du lette ette et konkret tal ja, mhm.
240 E33: Ja. Ikkje etter en formel på kor mange minutter.

Intervjuutdrag 13

Frå utdraget ser ein at eleven ikkje har forstått at det han leitar etter ikkje treng vera eit konkret tal. Det han skulle leitt etter, var eitt uttrykk for talet på minutt, ein formel, som han seier. Han leitte etter eit konkrete tal, og då det ikkje var å finna i oppgåva, fekk han problem med denne deloppgåva. Elevane er nok meir vande med at det står «Finn eit utrykk for…» når ein skal finna eit algebraisk uttrykk, det kan vera ein grunn for at mange av elevane, som Elev33, ikkje kjem på moglegheita med å svara med eit utrykk i denne oppgåva.

I oppgåve 3 (s.60) og oppgåve 10 (s.83) vert elevane gitt to tekstoppgåver som byrjar med at elevane skal henta ut informasjon frå teksten og berekna høvesvis eit antal klinkekuler, og eit antal plassar rundt eit «konfirmasjonsbord». I desse to oppgåvene var tanken å gje elevane moglegheita til å setja opp eit uttrykk med tal, for så i siste deloppgåve spørje etter ein generell formel som ville gje høvesvis talet på klinkekuler og plassar rundt konfirmasjonsbordet. Det skulle visa seg at eit stort antal av elevane klarte dei første deloppgåvene, men at det å generalisera, ved til dømes å setja inn ein variabel for eit ukjend antal bord (oppgåve 10), var desto verre. Elevane kan ha hatt vanskar med å sjå mønstera (sjå 2.2.4.7, s.24) i oppgåvene, men det kan og vera det å utrykkja desse algebraisk som var det vanskelege. I oppgåve 3, var det som tidlegare omtala i resultatkapittelet (4.3), mange som sleit med å generalisera frå utrykket «$4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 22$» til «$4m + 2n =$*talet på klinkekuler*». Overgangen frå aritmetisk til algebraisk situasjon var altså vanskeleg for svært mange. Talet på elevar som ikkje svarte på oppgåva auka frå ca. 4 % i (a) til 36 % i (b). Det viste seg òg at korleis elevane sette opp uttrykket i (a), anten som eitt uttrykk, eller tre «deluttrykk», i stor grad var førande for om dei fekk til (b) eller ikkje (sjå avslutning på kapittel 4.3 for detaljar).

I oppgåve 10 var det òg overgangen frå aritmetikk til algebra som var vanskeleg. Her hadde elevane først fått to deloppgåver der dei skulle berekna antal plassar rundt konfirmasjonsbordet, etter eit gitt antal bord. Men når talet på bord vart representert med bokstaven «n», datt dei aller fleste elevane av. Få av elevane i undersøkinga klarte å uttrykkja problema med generelle uttrykk når dei skulle setja desse opp sjølv. Dersom elevane fekk servert nokre alternativ å velja mellom, var det derimot langt fleire som klarte å velja rett representasjon. Det såg ein døme på i oppgåve 5 (s.64), og då elevane vart utfordra i oppgåve 7b i intervjua (sjå kapittel 5.3).

Det kan, som eg erfarte, vera ulike grunnar til at elevane ikkje klarar å løysa oppgåvene 7b, 3b og 10c. Det treng ikkje nødvendigvis vera eleven sin «eigen feil». Som skrive tidlegare, kan det koma av at elevane har fått ei undervisning som har ført dei inn på eit blindspor som dei ikkje har kome seg ut av. Dei ser kanskje på variablar med andre auge, til dømes som objekt. Eller kanskje dei ikkje ser variabelen i det heile, men ignorerer han og erstattar han med eit tal, til dømes «1» eller til og med bokstaven sin «nummererte plass» i alfabetet som verdi (Brekke et al., 2000; Küchemann, 1978). Truleg manglar mange elevar ei brei nok erfaring med oppgåver som gjev meining og forståing til symbola dei opererer på, dei har såleis ikkje utvikla eit godt nok fundamentert bilete av kva algebra er. Det vil då og vera vanskeleg å sjå korleis algebra som verkty kan hjelpa dei i å løysa meir avanserte matematiske problem. Dersom ein berre har jobba med forenkling av algebraiske uttrykk (operasjonell forståing), der dei ukjente gjerne ikkje har noko meining, vil det vera vanskeleg å utvikla den strukturelle forståinga ein treng i gitte kontekstar. Som Erlwanger (1973) seier, vil eit sterkt fokus på prosedyreoppgåver, drilling av oppgåver, for mange elevar ikkje garanterer ein tilstrekkeleg læringsprosess, dette er noko og Smith og Thompson (2008) og Bush og Karp (2013) påpeikar. Innlæringa av kommandoar som «løys», «forkort», «faktoriser» eller «forenkl» appellerer til å memorera prosedyrer som gjev lita meining utanfor den gitte konteksten, dette gjer elevane lite fleksible til å tenkja sjølvstendig i ulike settingar.

Det at elevar ofte har lita trening i å bruka algebra til å utrykkja noko eller å lesa meining ut av ein formel innanfor ein verkelegheitsnær kontekst, gjer modelleringsarbeidet i matematikken vanskeleg (Clement, Lochhead, & Monk, 1981). Resultata mine viste at elevane klarte å henta ut informasjon og bruka han rett når det var tal inne i biletet, men dersom det var variablar med, var det mange som datt av lasset. Det oppstår problem for mange elevar når det skal setjast opp ein modell, eit uttrykk, basert på eit mønster eller informasjon i ei tekstoppgåve. Resultata frå den skriftlege undersøkinga, med utdjuping gjennom intervjua, viser at det å lesa ut algebraisk meining og det å utrykkja seg algebraisk, er vanskeleg for elevane. Elevane har altså for dårleg algebraisk lese- og skrivedugleik. Norske elevar jobbar mykje med symbolmanipulasjon, formlar og det ein kjenner som «drilling» av oppgåver. Dette er viktig for å få ein solid basis av grunnleggjande ferdigheiter for slik å automatisera ein rekke operasjonar, dette vil kunne frigje mental kapasitet til å kunna konsentrere seg om meir kompliserte ting som refleksjon, forklaringar og logiske ressonement (Naalsund, 2012). Men dersom elevane ikkje får tilstrekkeleg erfaring med situasjonar og kontekstar der dette er aktuelt, hjelper det eleven lite når han faktisk møter slike utfordringar. Ifølgje Naalsund er derfor eit utelukkande arbeid med desse grunnleggjande ferdigheitane uheldig for å utvikla ei strukturell forståing i algebra (ibid.)

Korleis skal dei uttrykkja den generelle samanhengen dersom dei ikkje har noko erfaring med det? Då elevane fekk presentert alternativ, som i oppgåve 5 (s.64), eller som presentert i Tabell 30 s.95, var det ein større del av elevane som fort såg kva alternativ som måtte vera det rette. Me ser på utdrag frå intervju med elev5. Eleven fekk ikkje til oppgåve 3b, ho klarte ikkje

314 E5: Ja, eg tror det er (a) som er riktig
315 L: Mhm
316 E5: Eg klarer ikkje forklare koffor eg tror det er den..

Intervjuutdrag 15

å setja opp slike uttrykk sjølv, som ho seier, etter å ha diskuert oppgåve 5:

328 L: Men ka ska me sei.. Den her 2(m+n) er rett, Du har valgt rett alternativ her..
329 E5: Har eg det?
330 L: Ja du har da. E da lettare hvis du
331 E5: Ja det det er lettere, eg klarer ikkje sette opp det der...
332 L: Nei, e det det å settja det opp sjøl som er vanskelig?
333 E5: Ja, ja..
334 L: Men her når det var oppsett so...
335 E5: Då er det på en måte, eg føler det er litt lettere å se seg til , enn den der oppgave 3.

Intervjuutdrag 14

Desse betraktningane tydar etter mi mening på at både det å lesa og forstå ei oppgåve i ein gitt kontekst òg det å *utrykkja* ein samanheng algebraisk, er problematisk for elevane. Dette samsvarer med resultata frå blant anna TIMMS og PISA . For at elevane skal kunne klara tekst-kontekst oppgåver, krevs ei viss strukturell forståing. For å få det, er det ein føresetnad at elevane får trent på varierte oppgåver som ikkje lar seg løysa med enkel symbolmanipulasjon (Clement et al., 1981).

5.4.2 Presentasjonsform av oppgåver

To oppgåver som liknar mykje på kvarandre er Oppgåve 4c: *«Legg saman:* a *og* $7b$ *og* $2a$*»* og Oppgåve 6a: *«Skriv uttrykket enklare:* $2a + 5b + a = \ldots$*»*. Under presentasjonen av resultat av desse oppgåvene i kapittel 4.5 og 4.6, kom det fram at det var større ulikskapar mellom resultata. Tabell 31 under viser ein krysstabell der eg ser nærare på resultata frå dei to deloppgåvene. Grunnen til at eg har sett opp denne samanlikninga, er at eg vil sjå nærare på skilnadane mellom desse to. Oppgåvene er omtrent heilt like, men dei er presentert på to forskjellige måtar. Av tabellen ser ein at talet på misoppfatningar og talet på elevar som ikkje svarar, går ned i 6a samanlikna med 4c. Samstundes aukar talet på elevar som svarar rett. Denne samanhengen viser at forskjellen i presentasjonen av oppgåvene, har noko å seia for korleis elevane forstår oppgåva. Den munnlege forma i oppgåve 4 er tydelegvis litt uklar for ein del elevar, ei form dei har lita erfaring med ifølgje dei sjølv, noko som igjen kan føra til at dei svarar feil.

Tabell 31

Oppgåve 4c - 6a

		6a				
		Rett	Misoppfatning	Feil	Ubesvart	Sum
4c	Rett	**53**	**2**	**1**	**0**	56
	Misoppfatning	**10**	**8**	**0**	**3**	21
	Feil	**3**	**0**	**0**	**0**	3
	Ubesvart	**7**	**4**	**0**	**0**	11
	Sum	73	14	1	3	91

I eitt av intervjua gav ein elev uttrykk for at han ikkje var heilt nøgd med oppbygninga i oppgåve 4.

L: Nei, no va eg litt kjapp. Oppgåve fira fyst. Fyst oppgåve fira.

E33: Okei
L: Her sku du legga i saman. Korleis ville du komma fram te.. elle, kan du fortella, ka du vil gjera her?
E33: Ja, de va litt jalla disse oppgavene, men.. det..
L: Ja, ka meine du med da?
E33: Vetsje, eg likte kje oppbygningen dies.
L: Nei, på dei her?
E33: Va kje noe særlig.. ja..
L: Ja..
E33: Det va kje noe solid mønster, men det eg tenkte då, det va at du kan ikkje legge sammen 3n og fire. Så eg tror eg bare skrev 3n pluss fire. Eg tror det var svaret mitt.
L: Ja, da va da.
E33: Eg mener det e riktig hvertfall.

Intervjuutdrag 16

Eleven poengterer her at måten oppgåvene er skrive på er av ein litt ukjent karakter. Me ser litt vidare på intervjuet:

L: Ja. Men da du, da va jo stilig her at du sa at du syns oppgavena va jalla. E da oppsettet på denna oppgavo her?
E33: Ja, det står legg sammen
L: Legg sammen..
E33: Eg liker kje sånt, eg liker plusstegn og gangetegn, når det blir tydelig..
L: Ja, og ikkje, da at du får og – ord inni…
E33: Ja, det e rotete syns eg, men ja..min mening da.
L: Ja.
E33: Kanskje noen liker det betre sånn som dette, men det liker ikkje eg.
L: Ja?
E33: Mere oppsett ja, med orden, med tegn.

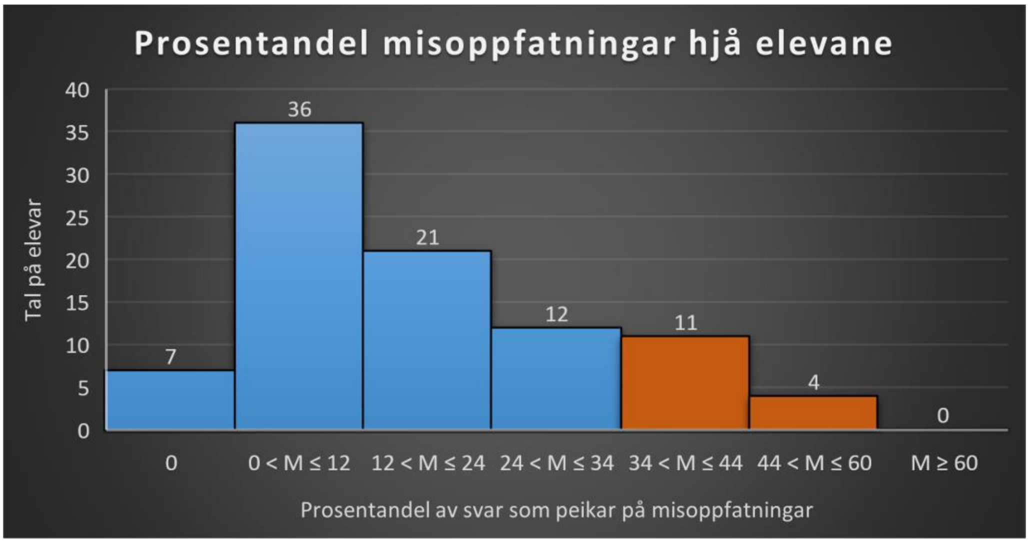
Intervjuutdrag 17

Denne eleven seier her kanskje det mange andre elevar også meiner. Det me såg av Tabell 31 over peikar i retning av at det er ein større del av elevane som får til Oppgåve 6a) enn Oppgåve 4c), som har ei meir munnleg form i. Elev 33 påpeikar at den munnlege forma har noko av skylda. At ein del oppgåver, diagnostiske eller ikkje, har ei slik munnleg form kan altså sjå ut til å kunne laga nokre vanskar for elevane. Dei er ikkje så vande med denne typen oppgåver. Oppgåve 4 er ikkje tydeleg nok meiner han, sjølv om han forstår og får til oppgåva. Han vil at den skal vera presentert med matematiske teikn og symbol, då er det tydeleg kva han skal gjere.

5.5 Overordna blikk på hyppigheita av misoppfatningar

Misoppfatningar vil ein sjølvsagt òg finna i andre tema enn dei eg har tatt føre meg. Avslutningsvis i dette kapittelet vil eg sjå nærare på korleis resultata og tilfelle av misoppfatningar til deltakarane samla sett varierer, avhengig av faget dei fylgjer. Er det eventuelle forskjellar mellom kjønn?

Tabell 32



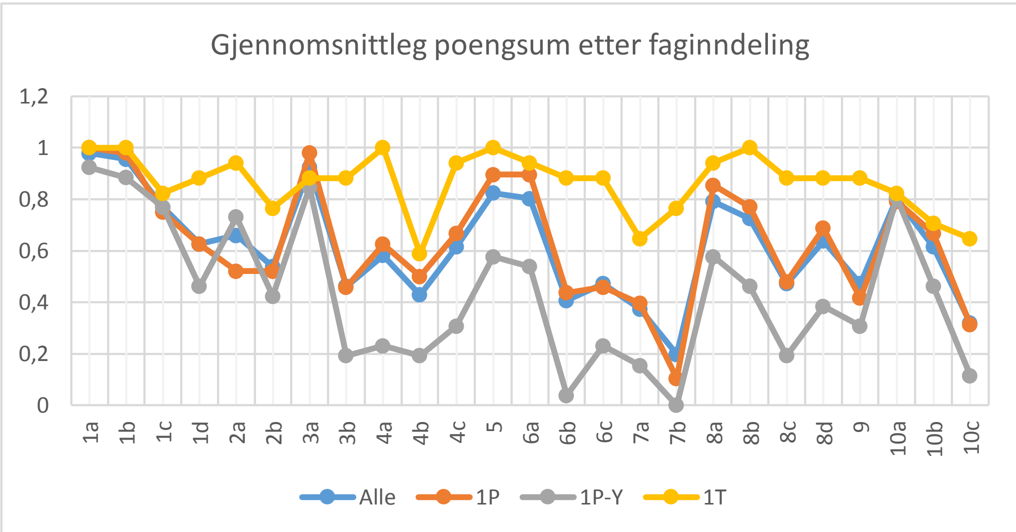
I figuren over ser me ei oversikt over i kor stor del av oppgåvene elevane gav svar som tyda på ei misoppfatning. Søylediagrammet gjev talet på elevar som hadde høvesvis 0 % misoppfatningsvar, 1% til og med 12 % misoppfatningsvar, frå 12 % til 24 % osb. I diagrammet ser ein òg at eg har merka dei to søylene til høgre med brun farge. Ei inndeling brukt av Russell et al. (2009, s. 416) seier at elevar som viser teikn til misoppfatningar i meir enn 35 % av tilfella, mest truleg sit på misoppfatningar og at desse feila då ikkje skuldast tilfeldige feil. Eg vil her presisera at dette diagrammet eg presenterer ikkje tar omsyn til kva type misoppfatning elevane har, dette er samla statistikk for heile kartleggingsprøva.

Av dei 91 respondentane, er det altså 15 elevar som mest truleg sit på kjende og tidlegare omtala misoppfatningar. Det vil seia at 16,5 % av elevane som deltok i undersøkinga ser ut til å ha gjennomgåande misoppfatningar i meir enn 35 % av oppgåvene. Dette er etter mi meining eit høgt tal. Noko som ikkje kjem fram i denne undersøkinga, eller andre undersøkingar, er kor stor del av dei ubesvarte oppgåvene som «skjuler» elevar med misoppfatningar. Det vil slik sett alltid vera ei viss mengd mørketal. Dersom dataa i Tabell 32 skulle stemma med røynda, og det verkeleg er tilfelle at kvar sjette elev slit med grunnleggjande oppfatningar av algebra, kan dette kanskje vera noko av grunnen til at norske elevar kjem dårleg ut i internasjonale testar. Elevar som sit på misoppfatningar vil, når alternativ er gitt, kunna velja både feil og riktige alternativ. Oppgåver med alternative svar vil derfor gje avgrensa og noko meir usikre data enn oppgåver der eleven sjølv skal koma med svaret. Betraktningane som her er gjort med utgangspunkt i tala frå Tabell 32, må sjåast på med eit vart og forsiktig blikk og kan ikkje brukast for å trekkja konklusjonar då respondentane ikkje utgjer eit representativt utval. Likevel kan kanskje tabellen og betraktningane vera med å så spirar til vidare forsking.

5.5.1 Hyppigheita av misoppfatningar sett i forhold til fag

Dersom me samanliknar gjennomsnittleg poengsum på dei ulike oppgåvene til respondentane ut frå kva matematikkfag dei har på vg1, kan ein sjå tydelege tendensar hjå elevgruppene. Eg må understreka at dei betraktningane eg gjer i forhold til desse, kun er basert på mine eigne erfaringar og resultat frå testen. Tala på elevar frå dei ulike faga i testen er svært ulike. 17 elevar frå 1T, 26 frå 1P-Y og 48 elevar frå 1P. Dette gjer at enkeltelevar sine prestasjonar kan gje store utslag, spesielt for resultat frå faget 1T og 1P-Y. Kor stor verdi denne samanlikninga har, kan sikkert derfor diskuterast, men eg syntest kurvene i Tabell 33 var interessante, og vil derfor likevel presentera nokre tankar rundt denne tabellen.

Tabell 33

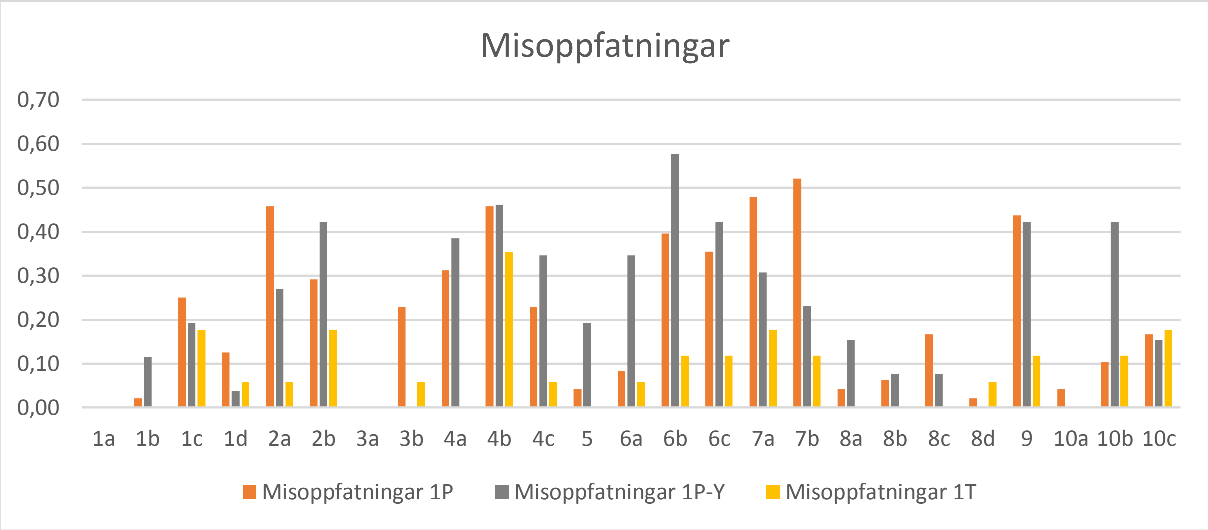


Ser ein vekk frå oppgåve 3a, (klinkekuleoppgåva), gjer elevane frå 1T det best i samtlege oppgåver, dette samsvarar med kva ein kunne forventa. Dei elevane som vel 1T har stort sett større interesse for, og dugleikar innan, matematikk, og dermed òg når det gjeld algebra. Det ville vera overraskande om ikkje dei gjorde det best i denne undersøkinga. Kva som gjer at 1T-elevane kom dårlegare ut i oppgåve 3a enn 1P-elevane, har eg ikkje noko konkret forklaring på, det kan vera tilfeldige utfall, men det er heller ikkje utenkeleg at dette er oppgåver P-elevane er meir vande med å sjå. Nesten samtlege (98%) av 1P elevane fekk til denne oppgåva, medan det altså var 12 prosent av 1T-elevane som ikkje fekk den til. Det må understrekast at desse 12 % svarar til to elevar som svara feil. Dette kan jo og slik sett kome av «slurv». Mykje meir interessant er det at ein ser kurvane i stor grad følgjer kvarandre. 1T-elevane har som nemnt høgast gjennomsnittleg poengsum, deretter følgjer 1P, stort sett noko lågare, og dårlegast ut kjem elevane frå 1P-Y. Ikkje heilt uventa altså, men at kurvene følgjer kvarandre slik som dei gjer er interessant. Ein ser at hjå 1T-elevane varierer gjennomsnittsskåren noko mindre frå oppgåve til oppgåve enn hjå dei andre elevane, det peikar i retning av at desse elevane er sikrare på kva metode dei skal bruka, noko som truleg speglar ei djupare forståing av emnet.

At kurvene følgjer kvarandre slik som dei gjer, viser at dei oppgåvene som er vanskeleg for ein P-elev, stort sett òg er vanskeleg for T-elevane, det same gjeldt for 1P-Y- elevane. Dette viser på eit vis at det er det same som er vanskeleg for elevane uavhengig av fagval, sjølv om dette er i ulik grad frå oppgåve til oppgåve. Vidare ser ein av Tabell 33 at dei oppgåvene der avstanden mellom elevane frå dei ulike faga er størst, er i dei algebraiske oppgåvene. Som me har sett på tidlegare er det i desse oppgåvene mange tilfelle av misoppfatningar og ubesvara oppgåver. I oppgåve 1 følgjer elevane kvarandre ganske likt i deloppgåve (a) til (c), medan avstanden aukar i (d). Dette var aritmetiske oppgåver. Ein ser òg av tabellen at i tekstoppgåver der det gjeld å henta ut tal og finna eit konkret talsvar (oppgåve 3a, oppgåve 10a og b), kjem P- og P-Y- elevane omtrent like godt ut som T-elevane, i 3a, som omtala, betre. Kjem ein derimot til dei påfølgjande deloppgåvene, ser ein tydeleg skilnad på snittet til elevane i dei ulike faga. Det å skulle setja opp eit algebraisk uttrykk, verkar å vera vanskelegare for P- og P-Y-elevane. Ei mogleg årsak kan vera at desse elevane har ei avgrensa forståing av symbolbruken i algebra, noko som igjen kan kome av lita erfaring med bruk av algebra i forskjellige kontekstar. Dette kan blant anna gjere det vanskeleg å setja opp generelle formlar slik elevane skulle i desse tekstoppgåvene. Ein ser òg at hjå P- og P-Y-elevane finn fleire førekomstar av misoppfatningar knytt til «å setja inntil» i dei oppgåvene der det var aktuelt.

Resultatet presentert i Tabell 33 seier oss ikkje direkte noko om talet på misoppfatningar hjå elevane i dei ulike oppgåvene. Men mange rette svar betyr at det er færre feil, og jo færre feil, jo færre misoppfatningar. Sjølv om det er mange feil, er det ikkje dermed sagt at desse skuldast misoppfatningar. Ei oversikt over misoppfatningane i dei ulike oppgåvene delt inn etter fag er presentert i Tabell 34. Av dette diagrammet ser me som påpeika at i dei oppgåvene der elevane gjorde det dårleg, (sjå Tabell 33) er det ei større førekomst av misoppfatningar enn i oppgåvene der dei gjer det bra (naturleg nok).

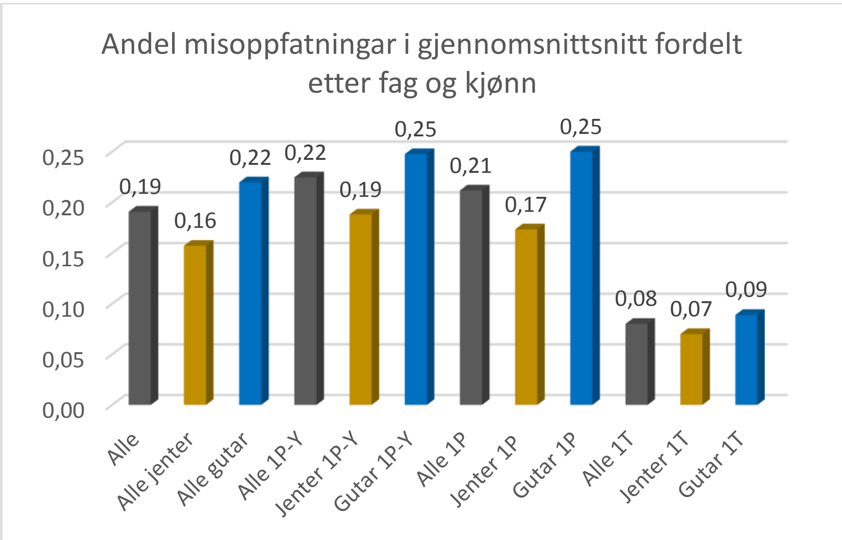
Tabell 34



Det som ikkje kjem fram av korkje Tabell 33, Tabell 34 eller av Tabell 29 s.86, er at elevane som hadde faget 1P-Y hadde ein betydeleg større del ubesvara oppgåver i kartleggingsundersøkinga samanlikna med 1P og 1T. Dette fører naturlegvis og til eit lågare snitt i dei ulike oppgåvene. Kva den større andelen ubesvarte oppgåver skuldast, har eg ikkje eit eintydig svar på. Det kan vera elevane sit med misoppfatningar, det kan vera dei ikkje forstår kva dei skal gjera eller det kan vera at dei ikkje er motiverte til å ta fatt på dei meir utfordrande oppgåvene av ulike grunnar.

Mykje som venta kom det fram av resultata at elevane i 1T hadde ein mykje lågare del misoppfatningar enn elevar frå 1P og 1P-Y, dette kjem fram av søylediagrammet presentert i Tabell 35 under.

Tabell 35



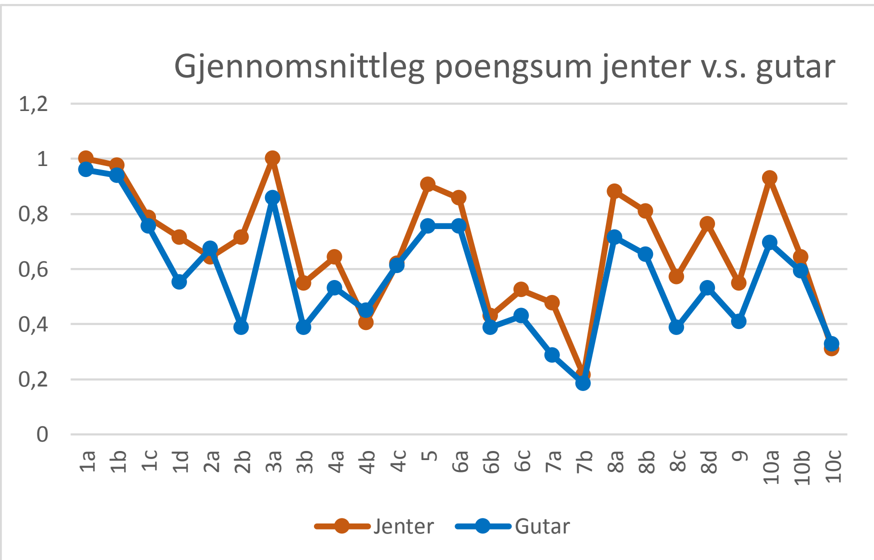
Tabellen tar for seg andelen «misoppfatningsvar» elevane frå dei ulike faga kom med i snitt. Som ein kunne venta kjem 1T-elevane ut med færrast misoppfatningar (8%), deretter kjem 1P- og 1P-Y ut nokså likt i tabellen med høvesvis 21% og 22%. Det må igjen påpeikast at 1P-Y elevane hadde ein mykje høgare del ubesvarte oppgåver enn 1P. Å ikkje svara på ei oppgåve kan skuldast at ein ikkje veit kva ein skal gjera, i det kan det blant anna liggja misoppfatningar knytt til dei aktuelle oppgåvene.

Hyppigheita av misoppfatningar me ser i Tabell 35 samsvarar med det ein ser i Tabell 33, her store skilnader mellom faga, spesielt i algebraiske oppgåver, og slik det ser ut kan misoppfatningar hjå elevane vera noko av grunnen til denne forskjellen.

5.5.2 Førekjem misoppfatningar hyppigare hjå gutar enn hjå jenter?

Ein tendens ein kan sjå av søylene i Tabell 35, er at det ser ut til at gutane sit med fleire svar som tydar på misoppfatningar enn jentene. Dette går igjen for alle dei tre matematikkfaga. Om dette er tilfeldige svingingar, eller om dette er eit faktisk funn, kan eg ikkje seia noko om, men det set likevel nysgjerrigheita mi i gong. Ser ein på Tabell 36 under kjem jentene jamt over betre ut enn gutane poengmessig i dei ulike oppgåvene. Kva kan i så fall dette skuldast? Kan det vera at gutar faktisk sit med fleire misoppfatningar enn jentene? Eller er det slik at gutane er mindre konsentrerte og derfor gjer fleire system 1-feil, noko som vil føra til statistikk som då feilaktig kan peika på større hyppigheit av misoppfatningsvar? Mange spørsmål kan stillast, men her må det eventuelt vidare undersøkingar til, der dette er i fokus.

Tabell 36



6 AVSLUTTANDE BETRAKTNINGAR

Målet med denne oppgåva var å få ei betre innsikt i elevar sine vanskar og misoppfatningar i algebra, kva me finn av misoppfatningar i vidaregåande skule, og korleis elevar som gjer desse feila tenkjer. Vidare håpte eg at at arbeidet med dette masterprosjektet skulle gjera meg til ein betre lærar som i større grad evna å hjelpa elevane med å avlæra eventuelle etablerte misoppfatningar på eit tidleg tidspunkt.

6.1 Konklusjon

Gjennom arbeidet med oppgåva har det vorte endå tydelegare for meg at misoppfatningar absolutt er til stades hjå elevane på første trinn i vidaregåande skule. Resultata i undersøkinga mi viser at ganske mange slit med prioritering av rekneoperasjonar, forståing av variablar og overgangen frå aritmetiske til algebraiske kontekstar. Dette er dei same misoppfatningane som ein òg finn i tidlegare skulegang. Data frå kartlegginga viste at talet på elevar med misoppfatningar ikkje nødvendigvis var så mykje lågare i vidaregåande skule enn i dei aktuelle undersøkingane frå ungdomskulen eg har samanlikna resultata med, men ein kan skimte ein tendens til forbetring. Dette kan skuldast at fleire elevar har «sett lyset» når det gjeld algebra, men det kan òg vera at dei kanskje minst matematikk-motiverte elevane (?) har gått til andre utdanningsprogram (ulike yrkesfag), og derfor ikkje er med i undersøkinga. Dette viser noko av avgrensinga denne undersøkinga har i omfang, og reduserer moglegheita for å generalisera resultata.

Eit av dei viktigaste funna eg gjorde, var at elevane sine tankemønster rundt oppgåver var endå meir komplisert enn det eg hadde sett for meg. Bak eit feilsvar har eg tydeleg erfart at det kan liggja fleire misoppfatningar, som gjerne har lite med kvarandre å gjera. Prioritering av rekneoperasjonar kan til dømes vera ei komplisert oppgåve for mange. Eit feilsvar kan her kome av fleire ulike misoppfatningar, som til dømes det «å setja parentes», det å «frikopla», eller av ei overgeneralisering av multiplikasjonsreglane mellom positive og negative tal. Det viste seg òg å koma av system 1-feil, til dømes grunna symmetri om subtraksjonsteiknet. Dei mange misoppfatningane gjer det altså vanskeleg å finna den faktiske årsaka til at eleven gjev det svaret han/ho gjev. I oppgåve 2a, $2 + 3 - 5 + 2$ var det, som omtala tidlegare, mange som svara -2, og er eit døme på ei slikt svar som skildra ovanfor. I intervjua fekk elevane utdjupa kva dei tenkte samstundes som dei løyste oppgåvene, nokre gongar kom dei fram til andre svar enn i kartleggingsundersøkinga. Oppfatningane elevane sit med kan såleis over tid vera lite konsistente. I den grad eleven klarte å gjera greie for si eiga tenking, fekk ein gjennom intervjua likevel ei viss innsikt i elevane sin tankegang.

Det kjem vidare fram i undersøkinga mi at elevane har vanskar med å utrykkja seg algebraisk og med å lesa meining ut av ein algebraisk kontekst. Elevane har vanskar med å grunngje kvifor dei løyser oppgåver som dei gjer, og dei er ofte usikre på eigen kunnskap. Desse funna samsvarar med det ein finn både i nasjonal og internasjonal forsking. Rapportar frå desse peikar på at Noreg sitt manglande fokus på undring, diskusjon, skriving og samtalar i undervisningssamanheng har noko av skulda (Grønmo et al., 2012; Grønmo et al., 2010; Kjærnsli, Nortvedt, & Jensen, 2014; Kjærnsli & Olsen, 2013; Naalsund, 2012). Ein av grunnane til vanskane elevane har med å utrykkja seg i algebra kan kome av manglande kunnskap, samstundes ser eg og korleis misoppfatningar og avgrensa omgrep er til hinder for elevane si forståing.

Misoppfatningar ser, som venta, ut til å vera meir utbredt hjå elevar som fylgjer praktisk matematikk, (1P eller 1P-Y), enn hjå elevar som vel teoretisk matematikk (1T). Resultata mine viste dette ganske tydeleg (sjå Tabell 35). Det var òg tydeleg at elevar med praktisk matematikk hadde mindre kunnskap og meir operasjonell kunnskap og presterte derfor svakare også i tekst-konteks oppgåver som krev ei meir strukturell forståing.

Det er etter mi meining tydeleg at verdien av å nytta diagnostiske oppgåver og testar, er avhengig av moglegheita ein har til å gå igjennom desse individuelt med elevane i ettertid. Bak dataa i ein test, bak svaret i ei oppgåve, med eller utan gitte alternativ, ligg det veldig mange usikre variablar og moglegheitar. Det er ikkje slik at teikn på misoppfatningar hjå ein elev nødvendigvis vil seie at han har det. Likevel er diagnostiske oppgåver eit av dei viktigaste verktya ein har for å avløra misoppfatningar hjå elevar, men det har som påpeika vorte veldig tydeleg for meg at samtale med eleven likevel er naudsynt for å avgjere om feila faktisk skuladst ei misoppfatning.

Mange av «oppdagingane» eg gjorde hadde eg som påpeika ikkje gjort dersom eg ikkje gjennomførte intervju med eit utval av elevane. Dataa eg samla inn gjennom den kvantitative kartleggingsprøva var heilt naudsynte for å få oversikt over kva svar elevane kom med, men det var intervjua som på mange måtar gav meg den djupare forståinga for kvifor elevane gjorde bestemte feil. Som Naalsund (2012) påpeikar, så gjev svara aleine i ei kartleggingsundersøkjing svært avgrensa informasjon om eleven si tenking. Eg meiner derfor at å nytta ei form for mixed methods som eg gjorde, var riktig for meg i dette arbeidet. Det gav meg større innblikk i korleis elevane kan tenkja rundt misoppfatningar.

6.2 Konsekvensar for undervisning

Forsking viser at misoppfatningar er noko ein finn på tvers av landegrenser, kontinent, undervisningsmetodar, undervisningsmateriell og læringsmål (Swan, 2001). At misoppfatningar oppstår i læringsprosessar er uunngåeleg. Dette betyr at å arbeida for å unngå at misoppfatningar vert danna, eller å arbeida med å korrigera dei, er noko som alltid vil vera ein del av lærarar sitt virke, i vidaregåande som i grunnskulen.

For meg var det eit mål at arbeidet med oppgåva òg skulle gje meg fleire reiskapar i matematikkdidaktikken, og såleis gjera meg til ein betre matematikklærar. Nokre viktige konsekvensar for undervisninga på bakgrunn av arbeidet med denne oppgåva presenterer eg i dei neste underkapitla.

6.2.1 Variert undervisning

Med bakgrunn i den kunnskapen eg har opparbeida meg, og med dei erfaringane eg har gjort gjennom masterprosjektet, har det vorte endå tydelegare kor viktig variert undervisning er for elevane. Ved å gjera mange erfaringar med algebra, i ulike situasjonar, vil elevane få fleire trådar knytt til algebra. Dette nettverket av erfaringar vil gjera dei meir fortrulege med dei operasjonane og algoritmane dei brukar, altså den operasjonelle forståinga. Med rike erfaringar frå røyndomsnære kontekstar, vil elevane vonaleg opparbeida seg eit gradvis meir omfattande bilete av algebra (strukturell forståing), og klara å nyttegjera seg av algebra til å løysa ulike naudsynte matematiske oppgåver.

6.2.2 Algebraisk tenking frå første trinn

Eg trur Schliemann, Lid med fleire har eit viktig poeng når dei framhevar at ein bør byrja med tidleg algebra frå første trinn i skulen. Som undersøkinga mi viser, så finn ein også misoppfatningar i reint aritmetiske oppgåver, desse misoppfatningane ser ut til å halda fram i elevane sitt arbeid med algebra. Å førebyggja misoppfatningar med å læra elevane tenkja algebraisk i aritmetiske oppgåver er altså noko eg, og mange med meg, meiner er eit viktig grep i å betra elevane sine algebrakunnskapar. Som Brøyn og Nortvedt (2013) seier, så må ein gå over frå å reparera til å førebyggjamisoppfatningar. Ved å setja inn tilstrekkeleg ressursar på dei første trinna i grunnskulen vil ein kunne hjelpa mange elevar unngå å etablera misoppfatningar, noko òg Ostad understrekar. Lærarar i matematikk i grunnskulen har ei særs viktig oppgåve i så måte. Undervisninga dei gjev elevane legg grunnlaget for deira vidare matematiske utvikling. Jo færre misoppfatningar elevane sit med frå den grunnleggande aritmetikken, jo lettare vert vegen vidare.

6.2.3 Eit algebraisk språk

Noko som ikkje overraskande kom fram i undersøkinga, var elevane sine problem med tekstoppgåver, dette på trass av at«lesing i alle fag» er eit satsingsområde i ungdomskulen. Å klara å lesa informasjon ut av algebraiske formlar og uttrykk set krav til ei fleksibel forståing av kva variablar er og symboliserer, vidare slit elevane òg med å uttrykka samanhengar i algebra, både skriftleg og munnleg.

Å forstå algerbraiske oppgåver, krev altså meir enn rein lesedugleik, det krev ei ei strukturell forståing av samanhengar i algebra. For å få det, må ein derfor leggja opp undervisninga slik at elevane i større grad får trening i nettopp det å utrykka samanhengar i algebra (og matematikk generelt), både munnleg og skriftleg. Det kan ein gjera ved å leggja til rette for diskusjonar og dialog, mellom elevar og lærar-elev. Elevane må øva på å setja ord på det dei heldt på med, gjennom å forklara samanhengar for kvarandre og argumentera for dei vala ein gjer. Slik kan kanskje elevane utvikla eit rikare, naturleg og meir presist algebraisk språk.

6.2.4 Diagnostiske oppgåver og undervisning

Som omtala i kapittel 2.2.5 og 2.2.6 kan ein nytta diagnostiske oppgåver, i testar og undervisning, for å avdekka, førebyggja og vonaleg avlæra misoppfatningar hjå elevane. Å framprovosera kognitive konfliktar hjå elevane er eit viktig verkty for å få elevane på rett kjøl i si omgrepsdanning (Berg, 2013).

Vegen vidare for min del, vil sjølvsagt handla om å gjera undervisninga og oppfølgjinga av elevane best mogleg for den enkelte elev. Etter arbeidet med denne masteroppgåva, føler eg sjølv at eg vil kunne gjera det på ein betre måte enn tidlegare. Det å til dømes nyttegjera seg av diagnostiske oppgåver i undervisning og prøvar, kan vera viktige verkty, saman med god dialog med elevane for å prøva å få innblikk i korleis dei tenkjer. Først då kan ein forstå og endra etablerte «sanningar» hjå eleven.

6.3 Nye spørsmål

Perspektiva på oppgåvene endrar seg jo lenger ein har jobba med dei, spesielt gjev svara elevane kjem med nokre perspektiv ein ikkje såg for seg på førehand. Dette gjer at ein kan gjere seg endå vidare betraktningar og tolkningar dersom ein grev seg skikkeleg ned i enkelte av fenomena. Fleire av temaa eg tar opp i prosjektet mitt, kunne nok vore skrivne eigne masterprosjekt om.

Eg gjorde fleire funn som eg meiner kan vera interessante å gå djupare inn i. Som me ser av Tabell 35, kan det sjå ut til at det er skilnad i hyppigheita av misoppfatningar hjå gutar og jenter. Er dette tilfelle, eller berre eit tilfeldig «skeivfordeling» i denne masteroppgåva? Ser me tilbake på den gjennomsnittlege poengskåren i dei ulike oppgåvene i Tabell 36, ser me at jentene òg stort sett kjem litt betre ut enn gutane i undersøkinga. Internasjonale testar (TIMMS og PISA) seier at det ikkje er noko forskjell på gutar og jenter i matematikk (Kjærnsli & Olsen, 2013), men kan det vera at det likevel er det innanfor algebra? Eller er det slik at gutar i større grad gjer system 1-feil og dermed kjem dårlegare ut i undersøkinga mi? Dette er noko som eventuelt må undersøkast grundig gjennom eigne studier.

Korleis elevar les og forstår tekstoppgåver er eit anna tema ein kan gå djupare inn i, spesielt no når det er auka fokus på temaet «å lesa i alle fag» (på ungdomsskulen). Eg såg i dette prosjektet kor viktig det er at elevane har ei rik oppfatning av variablar for å få til overgangen frå aritmetiske til algebraiske problem. Elevane sine evner til å lesa og utrykkja seg i algebra, kan vera eit interessant emne å gå djupare inn i.

Det er òg mange alternative måtar ein kunne gått inn i problemstillinga mi på. Ein kunne sett på korleis lærebøkene presenterer algebra, kan ulikskapar her føra til ulik kunnskap hjå elevane? I så fall korleis? Elles kunne ein òg sett på temaet i eit litt anna perspektiv, gjerne frå den sosiale sida, til dømes undersøkja korleis det vert undervist i algebra. Ved å ha ei sosialkonstruktivistisk vinkling, ville ein her fått eit anna fokus, og dermed ei anna oppgåve.

6.4 Misoppfatningar, eit fargerikt bilete

For meg har arbeidet med denne masteroppgåva vore ei lang og til tider tung reise, men samstundes gjevande og ikkje minst lærerik. Frå å eigentleg ha ei avgrensa forståing for kva ei misoppfatning er, og mi enkle «svart-kvit» forklaring på kva ein slik feil må skuldast, har eg no sett at biletet er mykje meir fargerikt. Eg har sett nyansar og overgangar som eg ikkje visste om.

Det å få innsikt i tidlegare og eiga forsking, gjer at ein er betre rusta til å møta elevar sine utfordringar i algebra. Denne reisa har gjort meg mykje meir bevisst på misoppfatningar som førekjem i matematikk, spesielt i algebra, og det har gjeve meg ei større forståing for korleis elevane kan tenkja når dei gjer denne typen feil. Dette har etter mi meining gjort meg til ein betre lærar, som vonaleg vil kunne hjelpa elevar å verta medvitne sine misoppfatningar, og med det hjelpa dei å omstrukturera omgrepsbileta sine.

7 KJELDER

Aubert, K. E. (2014). Algebra. Henta frå Store Norske Leksikon, Henta 26.04.2016, website: https://snl.no/algebra

Bell, A. (1995). Purpose in School Algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 41-73.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: the effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 129-147. doi: 10.1007/BF00305893

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics, 12*(4), 399-420.

Berg, C. V. (2013). Lærerstudenter som forskere : muligheter og begrensninger *Årbok Agder vitenskapsakademi*. Kristiansand: Portal.

Birkeland, P. A., Venheim, R., & Breiteig, T. (2011). *Matematikk for lærere : 1* (5. utg. Per Arne Birkeland, Trygve Breiteig og Rolf Venheim. utg.). Oslo: Universitetsforl.

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. I J. Cai & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization* (s. 5-23): Springer Berlin Heidelberg.

Booth, L. R. (1984). Algebra: Children's strategies and errors: Windsor, UK: Nfer-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra, K-12*, 20-32.

Brekke, G. (2000). *Forsking på omgrepsdanning i matematikk: konsekvensar for arbeidsmåtar i lærarutdanninga*. Notodden: Telemarksforsking - Notodden.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* (Bokmål[utg.]. utg.). Oslo, Noreg: Læringssenteret.

Brekke, G., Grønmo, L. S., & Rosén, B. (2000). Veiledning til algebra : F, H og J *Kartlegging av matematikkforståelse*

Brøyn, T., & Nortvedt, G. A. (2013). Nye læreplaner i matematikk. *Bedre skole, nr.1*, 24-25.

Bush, S. B., & Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 613-632. doi: 10.1016/j.jmathb.2013.07.002

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forl.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. S. (1981). Translation Difficulties in Learning Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 88*(4), 286-290.

Creswell, J. W. (2014). *Research design : qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed. utg.). Los Angeles, Calif: SAGE.

Danielsen, A. G. (2013). Kunnskapsbygging i skolen via kvantitative verktøy : statistikk og spørreskjema *Læreren som forsker* (s. 138 - 154). Oslo: Universitetsforlaget.

Dysthe, O. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel og læring*. Oslo: Abstrakt forl.

Dysthe, O. (2009). Læringssyn og vurderingspraksis. I J. Frost (Red.), *Evaluering i et dialogisk perspektiv* (s. 33-51). Oslo: Cappelen akademisk.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1*.

Foster, D. (2007). Making Meaning in Algebra: Examining Students' Understandings and Misconceptions. I A. H. Schoenfeld (Red.), *Assessing Mathematical Proficiency* (Vol. 53, s. 163-176). MSRI Publications: Cambridge University Press.

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. I A. E. Kelly & R. A. Lesh (Red.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram; Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo, Noreg: Akademika forlag.

Grønmo, L. S., Onstad, T., & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind; TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Oslo, Noreg: Unipub.

Gunnarshaug, S. (2016). Landets største lærerutdanning med nytt masterkrav. Henta frå studvest.no website: http://www.studvest.no/landets-storste-laererutdanning-med-nytt-masterkrav/

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics* (s. 1-27). New York: Routledge.

Holme, A. (2004). *Matematikkens historie : 2 : Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel*. Bergen: Fagbokforl.

Holme, A. (2008). *Matematikkens historie : 1 : Fra Babylon til mordet på Hypatia* (2. rev. utg. utg.). Bergen: Fagbokforl.

Hompland, A. B. (2012). Misoppfatningar i algebra på ungdomsskulen : ei diagnostisk tilnærming: Universitetet i Bergen

Imsen, G. (1999). *Lærerens verden: innføring i generell didaktikk*. Oslo: Tano Aschehoug.

Imsen, G. (2014). *Elevens verden : innføring i pedagogisk psykologi* (5. utg. utg.). Oslo: Universitetsforl.

Kahneman, D. (2003). A Perspective on Judgment and Choice: Mapping Bounded Rationality. *American Psychologist, 58*(9), 697-720.

Kahneman, D. (2012). *Tenke, fort og langsomt* (E. Lilleskjæret & G. Nyquist, Trans.). Oslo: Pax.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326. doi: 10.1007/BF00311062

Kieran, C., & Saldanha, L. (2005). Computer algebra systems (CAS) as a tool of coaxing the emergence of reasoning about eqvivalence of algebra expressions. I H. Chick & J. L. Vincent (Red.), *Proceedings of the 29th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, s. 193-200). Melbourne: PME.

Kjærnsli, M., Nortvedt, G. A., & Jensen, F. (2014). Norske elevers kompetanse i problemløsning i PISA 2012.

Kjærnsli, M., & Olsen, R. V. (2013). *Fortsatt en vei å gå : Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforl.

Kunnskapsdepartementet. (2014). Innfører femårig lærerutdanning på masternivå. Henta frå https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/Innforer-5-arig-grunnskolelarerutdanning-pa-masterniva/id761439/

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (T. M. Anderssen & J. Rygge, Trans. 2. utg. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Lid, E. R. (2015). Algebra i første klasse: The University of Bergen.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 39-65. doi: 10.1007/BF00163752

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational studies in mathematics, 40*(2), 173-196.

Mason, J. (2008). Making Use Of Children's Powers To Produce Algebraic Thinking. I J. Kaput, Carraher, D. and Blanton, M. (Red.), *Algebra In The Early Grades* (s. 57 - 94). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2011). *Å lære algebraisk tenkning* (J. Lie, Trans.). Bergen: Caspar forl.

McIntosh, A. (2007). *Alle teller! : håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen : kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelser på området : tall og tallforståelse* (M. R. Settemsdal, I. Stedøy-Johansen, T. J. Arntsen & o. Nasjonalt senter for matematikk i, Trans.). Trondheim: Matematikksenteret.

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? : a study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency.* no. 154, Faculty of Educational Sciences, University of Oslo, Oslo.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O., & Hals, S. (2014). Sinus Matematikk 1P. (978-82-02-42744-3). frå Cappelen Damm http://sinus-1p.cappelendamm.no/binfil/download2.php?tid=1498883&h=e1c03ff6deb3ea66f4c9c4cb1975ae8c&sec_tid=1363386

Ostad, S. A. (1999). Developmental progression of subtraction strategies: a comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. *European Journal of Special Needs Education, 14*(1), 21-36. doi: 10.1080/0885625990140103

Ostad, S. A. (2006). Dysmatematikk: Et multifaktorelt fenomen med karakteristiske kjennetegn. *Skolepsykologi, nr.5, 2006*, 27-39.

Russell, M., O'Dwyer, L., & Miranda, H. (2009). Diagnosing students' misconceptions in algebra: Results from an experimental pilot study. *Behavior Research Methods, 41*(2), 414-424. doi: 10.3758/BRM.41.2.414

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children´s Ideas to Classroom Practice. *Lawrence Erlbaum Associates*.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification: The Case of Algebra. *Educational studies in mathematics, 26*, 191.

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95.

Smith, J. P., & Thompson, P. W. (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning *Algebra in the early grades* (s. 95-132). London: Routlegde.

Sollid, H. (2013). Intervju som forskningsmetode i klasseromsforskning. *Læreren som forsker* (s. 124 - 137). Oslo: Universitetsforlaget.

Stacey, K., & Macgregor, M. (1997). Ideas about Symbolism That Students Bring to Algebra. *The Mathematics Teacher, 90*(2), 110-113.

Stanovich, K. E., & West, R. F. (2000). Individual differences in reasoning: Implications for the rationality debate? *Behav. Brain Sci., 23*(5), 645-665.

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. I P. Gates (Red.), *Issues in Mathematics Teaching* (s. 147-165). London and New York: Routledge Falmer (Taylor and Francis).

Tiller, T. (2013). Å forske i skolens hverdag *Læreren som forsker* (s. 27 - 44). Oslo: Universitetsforlaget.

Tiller, T., & Brekke, M. (2013). Læreren som forsker og den nye utdanningsveien *Læreren som forsker* (s. 277 - 284). Oslo: Universitetsforlaget.

TIMMS. (2011a). Matematikk G8 Timms oppgaver 2011 *UiO*. http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/frigitte-oppgaver/.

TIMMS. (2011b). Matematikk items almanacs *TIMMS 2011 Eight Grade Almanacs*. http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_G8_Almanacs.zip.

UDIR. (2012). *Læræringstøttande prøvar*. Algebra. UDIR Henta frå http://www.udir.no

UDIR. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. UDIR Henta frå http://www.udir.no/kl06/MAT1-04.

UDIR. (2015). *Informasjon til elever og foreldre om frivillige kartleggingsprøver og læringsstøttende prøver Vg1*. : Henta frå http://www.udir.no/globalassets/filer/vurdering/kartlegging/infoskriv-foresatte-kp-lp-2015-bm.pdf.

8 VEDLEGG

8.1 Godkjenning frå Norsk samfunnsvitenskaplege datateneste

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Runar Ile
Matematisk institutt Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 01.10.2014 Vår ref: 40033 / 3 / KH Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 28.09.2014. Meldingen gjelder prosjektet:

40033	*Misoppfatningar i Algebra på VG1*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Runar Ile*
Student	*Torbjørn Audestad*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 20.06.2016, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Katrine Utaaker Segadal

Kjersti Haugstvedt

Kontaktperson: Kjersti Haugstvedt tlf: 55 58 29 53
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Torbjørn Audestad toraud@hfk.no

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Avdelingskontorer / *District Offices*:
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 40033

Informasjonsskrivet til elever og foresatte er godt utformet.

Det innhentes skriftlig samtykke fra elevene.

Personvernombudet forutsetter for øvrig at prosjektet er klarert med ledelsen ved aktuelle skole.

Forventet prosjektslutt er 20.06.2016. Datamaterialet anonymiseres ved at verken direkte eller indirekte personidentifiserbare opplysninger fremgår.

8.2 Informasjonsskriv

Informasjon og førespurnad om deltaking i masterstudie

Til elevar og føresette

Eg er lærar i matematikk og naturfag ved Garnes vidaregåande skule. For tida er eg og masterstudent ved Universitetet i Bergen der eg tar vidareutdanning i matematikkdidaktikk. I forbindelse med mi masteroppgåve , Algebra i vidaregåande skule vg1, ynskjer eg å gjera ei undersøking for å kartleggja algebrakunnskapar hjå elevar på vg1.

Denne testen vil bli brukt i studien og til hjelp for å koma fram til oppgåver/metodar som forhåpentlegvis kan vera med på å forbetra elevar si forståing i algebra. Testen vil bestå av ulike algebraoppgåver og matematiske problemstillingar som eleven skal løysa.

Vidare ynskjer eg å intervjua ca.6-8 av elevane for å få endå betre innsikt i tankemønster rundt løysinga av enkelte oppgåver. Deltakinga i desse intervjua og deltaking i testen i seg sjølv er sjølvsagt heilt friviljug.

Du kan trekkje deg frå undersøkinga kvar tid som helst dersom du vil det.

Det er viktig å presisere at denne testen ikkje har noko påverknad på karakteren din i matematikk. Alle data vert handsama konfidensielt og vil ikkje kunna knyttast til enkeltelevar i den ferdige oppgåva. Dataa vil verta sletta så snart masteroppgåva er ferdig, vonleg innan utgangen av 2015.

Håpar du vil delta i denne undersøkinga slik at eg får eit godt datamateriale og arbeida vidare med.

Studien er meldt til Personvernombudet for forsking, Norsk samfunnsvitenskapelig datateneste A/S.

Dersom du har nokre spørsmål i høve til denne undersøkjinga, kan du ta kontakt direkte med meg på e-post: toraud@hfk.no, din faglærar i matematikk, eller ved å kontakta min rettleiar ved UiB, Runar Ile,på e-post: runar.ile@math.uib.no.

Med venleg helsing

Torbjørn Audestad

Erfaringsbasert master i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Bergen (UiB)
Matematikk- og naturfagslærar ved [redacted] vidaregåande skule
e-post: toraud@hfk.no
mobil: [redacted]

Dersom du ynskjer å delta i undersøkjinga, ver gild og fyll ut kontaktinformasjonen under:

Ja eg ynskjer delta i undersøkjinga

Namn: ______________________________

Klasse: ___

e-post: ______________________________

Eg stiller meg positiv til å delta i eit eventuelt intervju:

JA ☐ Nei ☐

Underskrift:

____

8.3 Kartleggingsprøve

Test i Algebra
for
Vidaregåande skule
Vg1

2015

Del av masteroppgåve
av
Torbjørn Audestad

Elevnummer:_____

Alder:____

Kryss av: 1P ☐ , 1T ☐ , 1PY ☐ , Jente ☐ , Gut ☐

Oppgåve 1

Skriv rett tal i rutene

e) $3 \cdot \square = 21$

f) $\square \cdot 2 + 4 = 12$

g) $3 + 2 \cdot \square = 15$

h) $25 - 2 \cdot \square = 17$

Oppgåve 2

Rekn ut

c) $2 + 3 - 5 + 2 =$

d) $1 + 4 \cdot 3 - 7 + 5 =$

Oppgåve 3

a) Kor mange klinkekuler har du etter at du har vunne 4 klinkekuler 3 gongar og 2 klinkekuler 5 gongar? Vis korleis du kjem fram til svaret.

____

____

b) Kor mange klinkekuler har du etter at du har vunne 4 klinkekuler m gongar og 2 klinkekuler n gongar .

____

____

Oppgåve 4

Legg saman

a) $3n$ og 4 Svar: ___________

b) 5 og a + 2 Svar: ___________

c) a og $7b$ og $2a$ Svar: ___________

Oppgåve 5

Det var m gutar og n jenter i ein parade. Kvar person hadde to ballongar. Kva av desse uttrykka gir talet på ballongar i paraden?

Set ring rundt rett alternativ.

a) $2(m+n)$

b) $2+(m+n)$

c) $2m+n$

d) $m+2n$

Oppgåve 6

Skriv uttrykka enklare

a) $\boldsymbol{2a + 5b + a =}$______________

b) $\boldsymbol{3a - (b + a) =}$______________

c) $\boldsymbol{x + y - x + y =}$ ____________

Oppgåve 7

Når Nora bruker mobilen sin betaler ho 0,49 kr per ringeminutt for innanlandssamtalar og 1,79 kr per ringeminutt for utlandssamtalar.

a) Dersom $\boldsymbol{m}$ står for kor mange minutt ho ringer innanlands og $\boldsymbol{n}$ står for kor mange minutt ho ringer utanlands, kva står då $\boldsymbol{0,49m + 1,79n}$ for?

____

____

b) Kor mange minutt ringer Nora til saman?

____

____

Oppgåve 8

Løys likningane

a) $\boldsymbol{7x + 13 = 48}$

b) $\boldsymbol{61 = 12x + 25}$

c) $\boldsymbol{4 + n - 2 + 5 = 11 + 3 + 5}$

d) $\boldsymbol{15x - 7 = 6 + 8x + 36}$

Oppgåve 9

Set ring rundt dei likningane nedanfor som er korrekte uansett kva verdi variabelen har?

a) $\mathbf{2 + y = y + 2}$

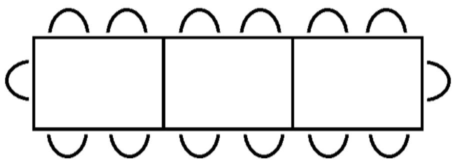
b) $\mathbf{x - 5 = 5 - x}$

c) $\mathbf{3 \cdot b = b \cdot 3}$

d)
$$\frac{6}{n} = \frac{n}{6}$$

Oppgåve 10

Eitt konfirmasjonsbord skal setjast saman av småbord med stoler rundt som på figuren under:



a) Kor mange kan det dekkast til om me nyttar fem småbord?

Svar:____

____

b) Kor mange kan det dekkast til om me nyttar 10 småbord?

Svar:____

____

c) Kor mange stolar vert det dersom me nyttar n småbord?
Svar:____

____

____

8.4 Intervjuguide

Intervjuguide

Varigheit ca. 20-30 min

Eg byrjar intervjuet med å fortelja kva me skal snakka om og kva spørsmål eleven kan venta å få. Vidare forklarer eg at eg er interessert i å vita korleis eleven har tenkt for å koma fram til svara i nokon av oppgåvene. Eg presiserer og at det er framgangsmåten/tenkjemåten eg er interessert i, ikkje om svaret er rett eller gale. Spør så om det er noko eleven lurar på før eg går i gong med sjølve intervjuet.

Spørsmål til:

Oppgåve 2

- Kan du lese opp denne oppgåva for meg (først a, så b om naudsynt)?
- Kan du fortelja korleis du ville gått fram for å løysa denne oppgåva?
- I testen kom du fram til svaret …… , kan du fortelja korleis du tenkte for å koma fram til dette?

Oppgåve 6c-8c

- I testen kom du fram til svaret …… i oppgåve 6c. Kan du fortelja korleis du tenkte for å koma fram til dette?
- I testen kom du fram til svaret …… i oppgåve 8c. Kan du fortelja korleis du tenkte for å koma fram til dette?
- Kva tenkjer du om framgangsmåten din her samanlikna med i oppgåve 2?
- Kvifor tenkjer du på same/ulik måte her?
- Har oppgåvene nokre likskapstrekk? Viss så er tilfelle, kva?

UTFORDRING 1

- I oppgåve 2 b) kom ein anna elev kom fram til svaret _______________. Korleis kan denne eleven ha tenkt for å kome fram til dette?
- Kven meiner du har rett, du eller den andre eleven?
- Kvifor meiner du det?
- Er det andre metodar du kunne brukt for å løysa oppgåva?

Oppgåve 4

- Kan du lese opp denne oppgåva for meg?
- Kan du med eigne ord fortelja kva oppgåva spør etter?
- I testen kom du fram til svaret …… , kan du fortelja korleis du tenkte for å koma fram til dette?
- På denne oppgåva har du ikkje skrive noko svar, kva tenkte du her?
- Kva var det som gjorde at du lot vera å svara på oppgåva?

Oppgåve 6 a og b

- Kan du fortelja korleis du ville gått fram for å løysa denne oppgåva?
- Kva tenkjer du om framgangsmåten din her samanlikna med i oppgåve 4?
- Kvifor tenkjer du på same/ulik måte her?
- Har oppgåvene nokre likskapstrekk? Viss så er tilfelle, kva?

UTFORDRING 2

- I oppgåve 4b kom du fram til svaret ___, ein anna elev kom fram til _____. Korleis kan denne eleven ha tenkt?
- Kven meiner du har rett, du eller den andre eleven?
- Kvifor meiner du det?
- Er det andre metodar du kunne brukt for å løysa oppgåva?

Oppgåve 3b og 5

- Oppgåve 3a svarte du ____. I oppgåve b svarte du __________ /du svarte ikkje på b), kvifor/kvifor ikkje?
- I Oppgåve fem vel du dette alternativet, kva fekk deg til å gjera det?

UTFORDRING 3

- I oppgåve 7b kom du fram til svaret ______, ein anna elev kom fram til _____. Korleis kan denne eleven ha tenkt?
- Kven meiner du har rett, du eller den andre eleven?
- Kvifor meiner du det?
- Er det andre metodar du kunne brukt for å løysa oppgåva?

Eventuelle oppfølgingsspørsmål:

- Kvifor tenkte du slik?
- Ville du tenkt på same måten dersom du skulle gjort oppgåva på nytt i dag?
- Kunne du løyst oppgåva på ein annan måte?
- Er det andre metodar du kunne brukt for å løysa oppgåva?
- Kan du fortelje litt meir om kvifor du valte denne metoden?
- Kva vil du seia om ditt val av metode?

8.5 Samling av data

			R	M	F	U	Oppg	1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5	6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	8c	8d	9	10a	10b	10c
Alle	% Rett		62 %	-	-	-		98 %	96 %	77 %	63 %	66 %	54 %	92 %	47 %	58 %	43 %	62 %	82 %	80 %	41 %	47 %	37 %	20 %	79 %	73 %	47 %	64 %	47 %	80 %	62 %	32 %
	% Misoppfatning		-	19 %	-	-		0 %	4 %	22 %	9 %	33 %	31 %	0 %	13 %	27 %	44 %	23 %	8 %	15 %	40 %	33 %	37 %	36 %	7 %	5 %	11 %	2 %	37 %	2 %	20 %	16 %
	% Feilsvar		-	-	5 %	-		1 %	0 %	0 %	5 %	1 %	13 %	3 %	3 %	1 %	2 %	3 %	1 %	1 %	7 %	5 %	2 %	8 %	7 %	8 %	10 %	10 %	1 %	11 %	11 %	9 %
	% Ubesvart		-	-	-	14 %		1 %	0 %	1 %	23 %	0 %	2 %	4 %	36 %	13 %	11 %	12 %	9 %	3 %	13 %	14 %	23 %	36 %	8 %	14 %	32 %	24 %	14 %	7 %	8 %	43 %
Snitt "R"	Alle		0,62	0,19	0,05	0,14		0,978	0,956	0,769	0,626	0,659	0,538	0,923	0,473	0,582	0,429	0,615	0,824	0,802	0,407	0,473	0,374	0,198	0,791	0,725	0,473	0,637	0,473	0,802	0,615	0,319
	1P	48	0,63	0,21	0,06	0,10		1,00	0,98	0,75	0,63	0,52	0,52	0,98	0,46	0,63	0,50	0,67	0,90	0,90	0,44	0,46	0,40	0,10	0,85	0,77	0,48	0,69	0,42	0,79	0,67	0,31
	1P-Y	26	0,43	0,22	0,05	0,29		0,92	0,88	0,77	0,46	0,73	0,42	0,85	0,23	0,23	0,19	0,31	0,58	0,54	0,04	0,23	0,15	0,00	0,58	0,46	0,19	0,38	0,31	0,81	0,46	0,12
	1T	17	0,86	0,08	0,03	0,03		1,00	1,00	0,82	0,88	0,94	0,76	0,88	0,88	1,00	0,59	0,94	1,00	0,94	0,88	0,88	0,65	0,76	0,94	1,00	0,88	0,88	0,88	0,82	0,71	0,65
Jenter "R"	Alle jenter	42	0,68	0,16	0,04	0,13		1,00	0,98	0,79	0,71	0,64	0,71	1,00	0,55	0,64	0,40	0,62	0,90	0,86	0,43	0,52	0,48	0,21	0,88	0,81	0,57	0,76	0,55	0,93	0,64	0,31
	1P		0,67	0,17	0,05	0,10		1,00	1,00	0,75	0,75	0,58	0,67	1,00	0,54	0,67	0,42	0,63	0,96	0,92	0,42	0,50	0,54	0,08	0,88	0,88	0,50	0,71	0,50	0,92	0,67	0,38
	1P-Y		0,51	0,19	0,02	0,28		1,00	0,90	0,90	0,60	0,60	0,70	1,00	0,30	0,30	0,20	0,30	0,70	0,60	0,10	0,20	0,10	0,00	0,80	0,50	0,40	0,70	0,40	0,90	0,50	0,00
	1T		0,90	0,07	0,01	0,03		1,00	1,00	0,75	0,75	0,88	0,88	1,00	0,88	1,00	0,63	1,00	1,00	1,00	0,88	1,00	0,75	0,88	1,00	1,00	1,00	1,00	0,88	1,00	0,75	0,50
Gutar "R"	Alle gutar	49	0,57	0,22	0,06	0,15		0,96	0,94	0,76	0,55	0,67	0,39	0,86	0,41	0,53	0,45	0,61	0,76	0,76	0,39	0,43	0,29	0,18	0,71	0,65	0,39	0,53	0,41	0,69	0,59	0,33
	1P		0,59	0,25	0,06	0,10		1,00	0,96	0,75	0,50	0,46	0,38	0,96	0,38	0,58	0,58	0,71	0,83	0,88	0,46	0,42	0,25	0,13	0,83	0,67	0,46	0,67	0,33	0,67	0,67	0,25
	1P-Y		0,39	0,25	0,07	0,30		0,88	0,88	0,69	0,38	0,81	0,25	0,75	0,19	0,19	0,19	0,31	0,50	0,50	0,00	0,25	0,19	0,00	0,44	0,44	0,06	0,19	0,25	0,75	0,44	0,19
	1T		0,84	0,09	0,05	0,03		1,00	1,00	0,89	1,00	1,00	0,67	0,78	0,89	1,00	0,56	0,89	1,00	0,89	0,89	0,78	0,56	0,67	0,89	1,00	0,78	0,78	0,89	0,67	0,67	0,78
Misoppfatningar	Alle			0,19				0,00	0,04	0,22	0,09	0,33	0,31	0,00	0,13	0,27	0,44	0,23	0,08	0,15	0,40	0,33	0,37	0,36	0,07	0,05	0,11	0,02	0,37	0,02	0,20	0,16
	1P			0,21				0,00	0,02	0,25	0,13	0,46	0,29	0,00	0,23	0,31	0,46	0,23	0,04	0,08	0,40	0,35	0,48	0,52	0,04	0,06	0,17	0,02	0,44	0,04	0,10	0,17
	1P-Y			0,22				0,00	0,12	0,19	0,04	0,27	0,42	0,00	0,00	0,38	0,46	0,35	0,19	0,35	0,58	0,42	0,31	0,23	0,15	0,08	0,08	0,00	0,42	0,00	0,42	0,15
	1T			0,08				0,00	0,00	0,18	0,06	0,06	0,18	0,00	0,06	0,00	0,35	0,06	0,00	0,06	0,12	0,12	0,18	0,12	0,00	0,00	0,00	0,06	0,12	0,00	0,12	0,18

Elevresultat

Relativ hyppigheit av type svar: "R", "M", "F" og

Gjennomsnittleg poengskår på dei ulike oppgåvene etter ulike

Koding av svar:
R = rett svar
M = svar som tydar på misoppfatning
F = feil som skyldast andre ting (slurvefeil, reknefeil)
U = eleven gav ikkje noko svar, ubesvart

Skule	Kandidat	Fag	Kjønn	R	M	F	U		1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5	6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	8c	8d	9	10a	10b	10c
A	12	P	G	10	9	3	3		R	R	R	U	M	M	R	M	M	M	R	R	R	F	M	M	M	R	R	U	R	U	F	F	M
A	13	P	G	15	7	2	1		R	R	R	R	M	M	R	R	R	M	M	R	R	M	M	R	R	R	R	F	F	M	R	R	U
A	6	P	G	17	3	4	1		R	R	M	U	R	F	R	R	R	R	R	F	R	R	M	R	R	R	F	R	R	M	R	R	F
A	17	P	J	16	7	2	0		R	R	R	R	M	M	R	R	M	M	M	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	M	R	F	F
A	11	P	G	17	6	2	0		R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	M	M	M	M	R	R	R	R	R	F	F	M
A	5	P	J	12	4	3	6		R	R	M	U	R	R	R	U	R	M	F	R	R	R	F	M	M	F	R	U	U	U	R	R	U
A	16	P	J	22	1	2	0		R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	R
A	18	P	J	17	5	0	3		R	R	R	M	M	R	R	M	R	R	R	R	R	M	R	M	U	R	R	R	R	U	R	R	U
A	19	P	J	17	5	2	1		R	R	R	R	M	M	R	R	R	R	R	R	R	M	F	R	U	R	R	M	R	M	R	R	F
A	3	P	J	20	3	2	0		R	R	R	R	M	F	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	M	R	R	R
A	14	P	G	19	2	1	3		R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	R	U	U	R	R	R	R	M	R	R	U

Skule	Kandidat	Fag	Kjønn	R	M	F	U		1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5	6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	8c	8d	9	10a	10b	10c
A	2	P	J	15	6	3	1		R	R	M	R	M	R	R	M	R	R	R	R	R	F	F	U	M	R	R	F	R	M	R	R	M
A	20	P	J	21	2	1	1		R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	F	R	U	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R
A	15	P	G	18	2	3	2		R	R	R	R	R	F	U	U	R	R	R	R	R	R	R	M	M	R	R	F	R	R	R	R	F
A	1	P	G	7	9	2	7		R	R	M	F	R	F	R	U	M	M	M	U	M	M	M	M	M	U	U	U	U	R	R	R	U
A	10	P	G	13	8	3	1		R	M	R	U	M	M	R	R	M	M	R	R	R	M	R	R	F	R	R	M	F	M	R	R	F
A	9	P	G	10	13	2	0		R	R	M	F	M	R	R	M	M	M	M	R	R	M	M	M	M	M	F	M	R	M	R	R	R
A	7	P	G	13	10	0	2		R	R	M	R	M	U	R	R	M	M	M	R	R	U	M	M	M	R	R	R	R	M	R	R	M
A	8	P	G	21	3	1	0		R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	F	R	R	R	R	M	R	R	R
A	30	T	G	24	1	0	0		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R	R
A	21	T	G	23	0	2	0		R	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	R	R
A	24	T	J	21	3	1	0		R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	M
A	25	T	G	8	9	2	6		R	R	M	R	R	F	R	M	R	M	M	R	M	M	M	U	U	F	R	U	M	M	U	U	U
A	28	T	J	23	2	0	0		R	R	R	M	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
A	32	T	G	25	0	0	0		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
A	22	T	J	24	1	0	0		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M
A	23	T	J	19	3	1	2		R	R	M	F	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	U	R	R	R	R	M	R	M	U
A	26	T	G	19	5	1	0		R	R	R	R	R	M	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	F	M	M
A	31	T	J	18	4	0	3		R	R	M	R	M	M	R	U	R	M	R	R	R	R	R	U	R	R	R	R	R	R	R	R	U
A	36	T	J	24	1	0	0		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R	R
A	37	T	G	21	3	1	0		R	R	R	R	R	R	F	R	R	M	R	R	R	R	M	M	R	R	R	R	R	R	R	R	R
A	27	T	G	23	0	2	0		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	F	R
A	29	T	J	25	0	0	0		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
A	35	T	G	23	0	2	0		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	F	R	R	R	R
A	34	T	J	25	0	0	0		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
A	33	T	G	22	2	1	0		R	R	R	R	R	M	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R
B	41	P	G	18	1	3	3		R	R	R	R	R	F	R	U	U	R	R	R	R	R	F	R	M	R	R	U	F	R	R	R	R
B	39	P	G	17	6	2	0		R	R	R	R	M	R	R	M	M	R	R	R	R	F	F	M	M	R	M	R	R	R	R	R	R
B	42	P	G	9	12	3	1		R	R	M	U	M	F	R	M	M	M	M	R	M	M	M	M	M	R	M	R	R	F	R	R	F
B	44	P	J	14	1	1	9		R	R	R	U	R	R	R	U	U	U	U	R	R	U	M	R	F	R	R	U	U	R	R	R	U
B	42	P	J	18	5	1	1		R	R	R	M	R	R	R	F	R	M	R	R	R	R	R	M	M	R	R	R	R	M	R	R	U
B	48	P	J	22	2	0	1		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	M	U	R	R	R	R	R	R	R	R
B	47	P	J	22	0	1	2		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	U	R	R	R	R	R	R	F	U
B	49	P	J	9	11	1	4		R	R	M	U	M	M	R	R	M	M	M	R	R	M	M	R	M	U	U	M	U	M	R	F	R
B	46	P	J	21	3	1	0		R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	M	R	M	R	R	R	F	R	R	R	R
B	45	P	J	14	4	1	6		R	R	R	R	M	R	R	U	U	U	U	R	R	M	M	M	U	R	R	R	F	R	R	R	U
B	50	P	J	18	2	2	3		R	R	R	F	R	R	R	U	R	M	U	R	R	M	R	R	U	R	R	F	R	R	R	R	R
B	43	P	J	16	7	1	1		R	R	R	R	F	M	R	R	M	M	R	R	R	M	U	M	M	R	R	M	R	R	R	R	R
A2	314	P	G	12	10	1	2		R	R	R	R	M	M	R	U	M	M	R	R	R	R	M	M	M	R	R	M	R	M	F	M	U
A2	305	P	J	17	2	3	3		R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	M	R	U	U	F	R	F	R	M	R	R	U
A2	304	P	J	15	7	1	2		R	R	R	R	R	R	R	M	M	M	M	R	R	U	U	R	M	R	R	F	R	R	R	M	M

Skule	Kandidat	Fag	Kjønn	R	M	F	U	1a	1b	1c	1d	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	5	6a	6b	6c	7a	7b	8a	8b	8c	8d	9	10a	10b	10c
A2	308	P	G	21	2	0	2	R	R	R	R	R	R	R	U	R	R	R	R	R	R	R	M	M	R	R	R	R	R	R	R	U
A2	324	P	G	20	4	1	0	R	R	R	M	M	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	M	R	F	R	R	R	R	R	R
A2	309	P	G	14	5	1	5	R	R	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	M	M	U	U	U	U	M	M	M	U
A2	313	P	G	22	2	0	1	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	U	M	M	R	R	R	R	R	R	R	R
A2	317	P	G	13	2	0	10	R	R	R	R	R	M	R	U	R	R	R	U	R	M	R	U	U	R	R	U	U	U	U	U	U
A2	315	P	G	16	6	3	0	R	R	R	M	R	F	R	M	R	R	R	R	R	R	R	M	M	R	R	F	R	M	R	F	M
A2	321	P	G	5	15	1	4	R	R	M	U	M	M	R	U	M	M	M	M	M	M	M	M	R	M	M	M	M	U	F	R	U
A2	310	P	J	24	1	0	0	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
A2	319	P	J	20	3	1	1	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	F	U	R	R	R	R	R	R	M	M
A2	316	P	J	14	6	1	4	R	R	R	R	R	R	R	U	R	M	R	M	R	F	R	U	U	R	R	M	R	M	M	M	U
A2	302	P	J	8	9	1	7	R	R	M	R	M	M	R	U	M	M	M	R	R	M	M	R	M	R	F	U	U	U	U	U	U
A2	320	P	J	12	8	0	5	R	R	M	R	M	M	R	R	M	R	R	R	R	M	M	M	U	R	U	U	U	R	R	U	M
A2	318	P	G	12	7	0	6	R	R	R	M	M	M	R	R	R	R	M	R	R	R	M	M	U	R	R	U	U	M	U	U	U
A2	301	P	G	15	6	0	4	R	R	R	U	M	M	R	M	R	R	R	R	R	R	R	M	M	R	R	R	R	M	U	U	U
A2	438	PY	G	5	12	2	6	R	R	M	U	M	M	R	U	M	M	M	M	U	M	M	U	U	F	R	U	F	M	R	M	M
A2	427	PY	J	13	7	1	4	R	R	R	U	R	R	R	R	M	M	M	R	U	U	U	M	M	R	F	R	R	R	R	M	M
A2	435	PY	G	11	3	0	11	R	R	R	U	R	M	R	U	U	U	U	U	M	U	U	U	U	R	R	U	R	R	R	M	R
A2	433	PY	J	22	2	1	0	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	M	R	R	M
A2	434	PY	G	12	9	0	4	R	R	R	R	R	M	R	U	M	M	R	R	R	M	R	M	M	M	M	U	U	M	R	R	U
A2	436	PY	J	18	5	0	2	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	R	M	U	M	M	M	R	R	R	R	R	R	R	U
A2	426	PY	J	12	5	1	7	R	R	R	R	M	R	R	U	R	M	R	U	R	M	M	U	U	R	F	U	R	U	R	M	U
A2	432	PY	G	16	6	0	3	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	M	M	M	R	U	U	U	M	R	R	R
A2	428	PY	G	7	11	3	4	R	R	R	R	R	F	F	U	M	M	M	M	M	M	M	M	M	F	M	U	U	M	R	R	U
A2	430	PY	J	9	8	0	8	R	R	R	U	M	M	R	U	M	M	M	M	R	U	U	U	U	R	R	M	R	U	R	M	U
A2	431	PY	G	21	3	0	1	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	M	R	U	R	R	R	R	R	R	M	R
A2	440	PY	G	9	9	0	7	R	R	M	U	R	M	U	U	M	M	M	M	R	M	M	U	U	R	R	U	R	M	R	R	U
A2	439	PY	G	5	8	1	11	U	M	M	U	R	F	R	U	M	M	M	R	U	U	U	M	U	M	U	U	U	M	R	R	U
A2	429	PY	J	9	1	0	15	R	R	R	R	R	U	R	U	U	U	U	U	R	M	U	U	U	U	U	U	U	U	R	R	U
A2	441	PY	J	12	3	1	9	R	M	R	R	M	R	R	U	U	U	U	R	M	U	U	U	U	R	R	F	R	R	R	R	U
A2	446	PY	G	3	6	4	12	F	R	R	U	M	M	R	U	U	U	U	U	M	U	M	U	U	F	U	U	U	M	F	F	M
A2	448	PY	G	8	2	1	14	R	R	R	U	R	M	U	U	U	U	U	R	R	U	R	U	U	U	U	U	U	U	R	M	F
A2	455	PY	G	11	2	1	11	R	R	R	R	R	F	R	U	U	U	U	U	M	M	R	U	U	R	R	U	U	U	R	R	U
A2	447	PY	G	6	11	8	0	R	M	M	F	R	M	R	F	M	M	R	M	M	M	R	M	F	M	F	M	F	R	F	F	F
A2	454	PY	G	12	5	4	4	R	R	R	R	M	M	R	R	F	F	F	R	R	M	M	R	U	R	R	U	F	U	R	M	U
A2	457	PY	J	9	3	1	12	R	R	R	U	R	R	R	U	U	U	U	R	R	M	M	U	U	U	U	U	U	R	F	M	U
A2	443	PY	G	10	7	1	7	R	R	M	R	R	R	R	U	M	M	M	R	M	F	M	R	U	U	U	U	U	M	R	R	U
A2	442	PY	J	8	7	0	10	R	R	U	U	M	M	R	U	U	M	R	R	R	U	U	M	M	R	U	U	U	M	R	M	U
A2	445	PY	G	14	2	1	8	R	R	R	U	R	R	R	U	R	R	R	R	R	M	U	U	U	R	R	U	U	R	F	M	U
A2	444	PY	G	5	3	0	17	R	R	R	U	R	M	U	U	U	U	U	U	R	M	U	U	U	M	U	U	U	U	U	U	U
A2	449	PY	J	15	6	0	4	R	R	R	U	R	R	R	U	M	M	M	R	M	M	R	U	U	R	R	R	R	M	R	R	U

8.6 Rådata

Tal på; Elevar: 91 Jenter: 42 Gutar: 49

Oppgåve 1 a)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	98 %	0 %		
Ubesvart			1	1
7 (Riktig svar)			98	89
6			1	1
			100	

Oppgåve 1 b)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	96 %	4 %		
Ubesvart			0	0
4 (Riktig svar)			96	87
2			1	1
8			1	1
6			2	2
			100	

Oppgåve 1 c)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	77 %	22 %		
Ubesvart			1	1
6 (Riktig svar)			77	70
3			21	19
5			1	1
			100	

Oppgåve 1 d)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	63 %	9 %		
Ubesvart			23	21
4(Riktig svar)			63	57
21			7	6
13			1	1
9, 0, 27 eller anna tal			5	5
13/25			1	1
			100	

Oppgåve 2 a)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	66 %	33 %		
Ubesvart			0	0
2 (Riktig svar)			67	61
-2 (misoppfatting)			26	24
-1			3	3
7 (Detachment ++)			1	1
6 (M, 3-5=2 -> 2+2+2=6			1	1
12 (Set parentes, og endrar forteikn, + summeringsfeil)			1	1
			100	

Oppgåve 2 b)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	54 %	31 %		
Ubesvart			2	2
11 (Riktig svar)			54	49
13 (misoppfatning addisjon-multiplikasjon)			11	10
1 (Misoppfatting addisjon subtraksjon)			19	17
3 (misoppfatning fleire)			1	1
0			1	1
9			1	1
2			1	1
10 eller anna talsvar			10	9
			100	

				Kandidatnummer:	12	13	6	17	11	5	16	18	19	3	14	2	20	15	1	10	9	7	8	30	21	24	25	28	32	22	23	26	31	36	37	27	29	35	34	33	41	39	42	44	42	48	47	49	46	45	50	43	314	305	304	308	324	309	313	317	315	321	310	319	316	302	320	318	301	438	427	435	433	434	436	426	432	428	430	431	440	439	429	441	446	448	455	447	454	457	443	442	445	444	449
Oppgåve 3 a)	Rett	M	Relativ frekvens																																																																																													
Svar:	92 %	0 %		Frekvens	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	U	R	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	R	R	U	R	R	R	R	U	R	R	R	R	R	R	R	U	R
Ubesvart			4	4														1																																																																1					1								1	
22 (Riktig svar)			92	84	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1		1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1		1
24			1	1																					1																																																																								
13			1	1																															1																																																												
Anna svar			1	1																																																																											|1|																
			100																																																																																												
Oppgåve 3 b)	Rett	M	Relativ frekvens																																																																																													
Svar:	47 %	13 %		Frekvens	M	R	R	R	M	U	R	M	R	M	R	M	R	U	U	R	M	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	U	R	R	R	R	R	R	R	U	M	M	U	F	R	R	R	R	U	U	R	U	R	M	U	R	F	R	U	M	U	R	R	U	U	R	R	M	U	R	U	R	U	R	U	R	U	U	R	U	U	U	U	U	U	U	F	R	U	U	U	U	U	U
Ubesvart			36	33						1								1	1														1								1			1						1	1		1			1				1		1			1	1				1		1		1		1		1	1		1	1	1	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1
$4m + 2n$			46	42		1	1	1			1		1		1		1			1		1	1	1	1	1		1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1						1	1	1	1			1		1			1		1				1	1			1	1			1		1		1		1			1															
$6mn$ (misoppfatning, legge inntil)			1	1																	1																																																																											
$4x + 2y$ (byter ut variablane)			1	1																																																																																				1						
$6x$			2	2	1							1																																																																																	
mn			1	1					1																																																																																				
8mn			2	2										1																																																					1																										
8+2m			1	1												1																																																																													
72, eller anna tal			7	6																								1															1	1													1						1																														1							
(4*n)+(2*n), el;2*x+2*x=			2	2																																						1													1																																								
			100																																																																																														
Oppgåve 4 a)	Rett	M	Relativ frekvens																																																																																													
Svar:	58 %	27 %		Frekvens	M	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	M	M	M	M	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	U	M	M	U	R	R	R	M	R	U	R	M	M	R	M	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	M	M	R	R	M	M	U	R	M	R	R	R	M	M	R	M	M	U	U	U	U	U	M	F	U	M	U	R	U	M
Ubesvart			13	12																																							1			1						1																							1													1	1	1	1	1	1			1		1		1	
3n og 4, 3n+4 (rett svar)			58	53		1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					1	1	1		1		1			1		1	1	1	1	1	1		1	1	1			1	1				1		1	1	1			1																		1		
7n (legg saman tala og legg inntil, misoppfatting)			18	16	1														1	1	1																														1			1							1					1			1				1				1	1		1	1									1				1
3n4 (legg inntil ved å fjerne alle teikn mellom ledda)			4	4																		1																									1																						1																	1							
7 (gjev verdien 1 til variabelen)			1	1																																																												1																													
12m, 12n			2	2					1																																									1																																											
3n 4			1	1																																																																																				1						
Gjev verdien 5 til n, =19, eller anna verdi			2	2																																						|1|1|																																																					
			100																																																																																														
Oppgåve 4 b)	Rett	M	Relativ frekvens																																																																																													
Svar:	43 %	44 %		Frekvens	M	M	R	M	R	M	R	R	R	R	R	R	M	R	M	M	M	M	R	R	R	M	M	M	R	R	R	M	M	R	M	R	R	R	R	F	R	R	M	U	M	R	R	M	R	U	M	M	M	R	M	R	M	R	R	R	R	M	M	M	M	M	R	R	R	M	M	U	R	M	R	M	R	M	M	R	M	M	U	U	U	U	U	M	F	U	M	M	R	U	M
Ubesvart			11	10																																									1						1																							1													1	1	1	1	1	1			1				1	
a+7 (rett svar)			43	39			1		1		1	1	1	1	1	1		1					1	1	1				1	1	1			1		1	1	1	1		1	1				1	1		1					1		1		1	1	1	1							1	1	1				1		1		1			1																		1		
5 + a+ 2			1	1																																				|1|																																																								
5a + 2 (misoppfatning)			5	5					1		1							1					1											1																																																													
5a2			2	2																																										1																																													1							
7a (Misoppfatning)			22	20	1	1														1	1	1					1		1						1												1							1				1								1											1		1		1	1		1	1										1				1
8 (gjev variabelen verdi 1)			2	2																																																														1				1																										
5+2a (misoppfatning)			9	8																								1								1																1						1						1	1	1																											1			
10a			1	1																																															1																																													
5(a+2)			1	1																																																																1																								
7 a			1	1																																																																																				1						
3+a (endrar rekkefølgje og byt då forteikn			1	1																																						1																																																						
			100																																																																																														

Oppgåve 4 c)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	62 %	23 %		
ubesvart			12	11
$3a + 7b$ (rett svar)			62	56
$2a^2 + 7b$			1	1
a7b2a			2	2
9ab			3	3
10ab			1	1
8b + 2a			1	1
3a7b			9	8
$9a^2b$			1	1
10 (legg saman koeffisientane)			1	1
$a + 7b + 2a$			1	1
3a 7b			1	1
$7b - 2a^2$			1	1
7b+a, endrar rekkjefølge->byt forteikn			1	1
7ab+2a			2	2
			100	

Oppgåve 5	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	82 %	8 %		
ubesvart			9	8
$2(m + n)$			82	75
$2 + (m + n)$			8	7
$2m + n$			0	0
$m + 2n$			0	0
4mn, 2mn, m2n			1	1
			100	

Oppgåve 6 a)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	80 %	15 %		
Ubesvart			3	3
3a+5b (rett svar)			80	73
2a+5b			1	1
$2a^2 + 5b$			1	1
$7ab$ (Misoppfatning)			1	1
3a+5			2	2
a+2a+5b			1	1
8a			3	3
3a5b (misoppfatning)			4	4
a+5b (endrar rekkjefølgje og byt forteikn			1	1
2+5+aab			1	1
			100	

Oppgåve 6 b)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	41 %	40 %		
Ubesvart			13	12
2a - b (rett svar)			41	37
4a-b			13	12
-4ab			2	2
2a+b (byt forteikn på andre ledd)			3	3
3aba			2	2
3a-ab			8	7
$3b$ eller $3a^2 - b$			2	2
$3ab - 3a^2$, $3a(b - a)$ eller $-3ab-3a^2$			3	3
4a+3ab (Mis., multipliserer inn i parentes, gløymer forteikn)			2	2
3-1 (Gjev (b+a) verdien 1)			1	1
2ab			3	3
4a + b			1	1
3a-b-a (rett løyst opp)			4	4
			100	

Kandidatnummer:					12	13	6	17	11	5	16	18	19	3	14	2	20	15	1	10	9	7	8	30	21	24	25	28	32	22	23	26	31	36	37	27	29	35	34	33	41	39	42	44	42	48	47	49	46	45	50	43	314	305	304	308	324	309	313	317	315	321	310	319	316	302	320	318	301	438	427	435	433	434	436	426	432	428	430	431	440	439	429	441	446	448	455	447	454	457	443	442	445	444	449
Oppgåve 6 c)	Rett	M																																																																																														
Svar:	47 %	33 %	Relativ frekvens	Frekvens	M	M	M	R	M	F	R	R	F	R	R	F	U	R	M	R	M	M	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	M	R	R	R	R	R	F	F	M	M	R	R	R	M	M	M	R	U	M	R	U	R	R	R	U	R	R	M	R	R	R	M	M	M	R	M	U	U	R	R	M	M	M	M	U	M	M	U	U	U	M	R	R	R	M	M	M	U	U	U	R
Ubesvart			14	13													1																																					1			1				1												1	1							1			1	1	1								1	1	1	
2y (rett svar)			47	43				1			1	1		1	1			1		1			1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1					1	1	1				1			1		1	1	1		1	1		1	1	1				1				1	1												1	1	1							1
0 (misoppfatning,setje parentes)			8	7																	1						1								1								1						1																			1							1																				
$-2x$ $2y$, xy-xy eller xy (legge inntil)			7	6		1													1																											1									1								1																															1										
$-x^2+y^2$, x^2-y^2 eller y^2x-x			3	3	1																																																																										1												1				
$2x+2y, 2y-2x$ eller $2x-2y$			9	8			1		1												1																										1																												1	1							1	1					
x-x+2y			1	1																																					1																																																					
1+1-1+1 (gjev variablane verdien 1)			1	1																																																																		1																								
x-y , -x+2y, x+y, -x+-y , x+ 2y			10	9						1			1			1																													1												1																	1	1								1	1																			
			100																																																																																											
Oppgåve 7 a)	Rett	M																																																																																														
Svar:	37 %	37 %	Relativ frekvens	Frekvens	M	R	R	R	M	M	R	M	R	R	U	U	R	M	M	R	M	M	R	M	F	R	U	R	R	R	R	R	U	M	M	R	R	R	R	R	R	M	M	R	M	M	R	R	R	M	R	M	M	U	R	M	R	M	M	U	M	M	R	F	U	R	M	M	M	U	M	U	R	M	M	U	M	M	U	R	U	M	U	U	U	U	U	M	R	U	R	M	U	U	U
Ubesvart			23	21											1	1											1						1																									1						1					1					1		1				1			1		1		1	1	1	1	1			1			1	1	1
Prisen ho må betala totalt for mobilbruk (el.liknande) (rett)			37	34		1	1	1			1		1	1			1			1			1			1		1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1			1			1	1	1		1				1		1					1			1						1								1										1		1				
0,49 min og 1,79 min utanlands			5	5						1									1	1																																										1																				1																				
1min innlands og 1min utlands			10	9					1																																		1										1							1	1		1	1						1												1																			
Innlandspris og utlandspris++			5	5																	1			1											1																																		1																									1								
Kor mykje ho hart ringt			11	10								1																								1											1					1																								1			1			1				1				1											1			
0,49innlandsminutter+1,79*um			2	2																					1																																							1																															
1,18+1,79			1	1																																							1																																																				
Kor mange gongar ho ringer innanlands eller utanlands			1	1																																																	1																																									
Samla pris per min innland og utland			3	3	1																		1																								1																																																
			100																																																																																											
Oppgåve 7 b)	Rett	M																																																																																														
Svar:	20 %	36 %	Relativ frekvens	Frekvens	M	R	R	M	M	M	F	U	U	F	U	M	R	M	M	F	M	M	F	R	R	R	U	R	R	R	U	M	R	R	R	R	R	R	R	M	M	M	M	F	M	U	U	M	M	U	U	M	M	U	M	M	M	M	M	U	M	R	R	U	U	M	U	U	M	U	M	U	F	M	M	U	M	M	U	U	U	U	U	U	U	U	U	F	U	U	U	M	U	U	U
Ubesvart			36	33								1	1		1												1				1																			1	1			1	1			1						1				1	1		1	1		1		1				1			1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1		1	1	1
m + n min (rett)			20	18		1	1										1						1	1	1		1	1	1			1	1	1	1	1	1	1																						1	1																																
2,28 min			10	9						1				1																											1												1		1	1																						1			1															1			
3min (+/-) forsøk på å leggja saman prisen per min			3	3																																							1																							1			1																									
2 min			15	14	1				1										1	1		1	1																							1							1		1								1	1		1															1			1																			
0,49m + 1,79m			7	6				1								1																1														1			1								1																																					
0,49*0,49+1,79*1,79=____			1	1																																					1																																																						
Anna svar (T.D. DET STÅR DET IKKJE NOKO OM)			8	7							1									1			1																					1																											1		1															1							
			100																																																																																											
Oppgåve 8 a)	Rett	M																																																																																														
Svar:	79 %	7 %	Relativ frekvens	Frekvens	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	R	U	R	M	R	R	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	U	R	R	R	R	R	F	R	R	R	U	R	R	R	M	R	R	R	R	R	R	R	F	R	R	R	M	R	R	R	F	R	R	R	M	U	R	F	U	R	M	R	U	U	R	R	M	R
Ubesvart			8	7															1																															1									1																											1			1				1	1				
$x = 5$ (Riktig svar)			79	72	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1		1		1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1		1	1	1		1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1		1	1	1		1	1	1			1			1		1			1	1		1
$7x = 35$			1	1																																																																																	1									
x =6 Divisjonsfeil			3	3						1																		1																																																			1																		
x =9			1	1																																																		1																																								
x =7 Divisjonsfeil			1	1																																																																		1																								
Set inn 5 for x, men feil i føring, venstre høgre. (7*5=35+13=48)			2	2																																																																						1								1												
Anna svar, t.d.: X=20, $x = \frac{61}{7}$ (Flyttar utan å byta forteikn), eller anna forsøk på svar			4	4																	1																																								1																											1						1	

Oppgåve 8 b)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	73 %	5 %		
Ubesvart			14	13
$x = 3$			73	66
$x = \frac{86}{12}$			2	2
$x = \frac{-36}{-12}$ rett men uferdig			1	1
$x = 12$ Divisjonsfeil (36/12=12)			1	1
34/12, 56/12 (subtraksjonsfeil)			2	2
x=6 (tar kvadratrot av 36, og av 12x=x			2	2
37x, eller anna "tilfeldig svar"..			3	3
$x = \frac{-44}{12}$ Subtraksjonsfeil og forteiknsfeil..			1	1
			100	

Oppgåve 8 c)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	47 %	11 %		
Ubesvart			31	28
$n = 12$			48	44
$n = 22$			1	1
$n = 4$, (leggje inntil, $4 + n = 4n$)			3	3
$n = \frac{19}{7}$ (Misoppfatning legge inntil)			1	1
$n = 10$			1	1
$n = 2$			1	1
n =6,5 (Misoppfatning legge inntil og setje parentes)			2	2
Ikkje endeleg svar			1	1
n=3, legge inntil, setje parentes og forteiknsfeil			1	1
$n = 11$ eller 13 eller ...			9	8
			100	

Oppgåve 8 d)	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	64 %	2 %		
Ubesvart			25	23
$x = 7$			63	57
$x = 5$			4	4
$x = 6$ (divisjonsfeil)			2	2
Gøymer svar i uleseleg skrift			2	2
Forteiknsfeil x=49/23			1	1
48x			1	1
x =1 Forteiknsfeil			1	1
			100	

Oppgåve 9	Rett	M	Relativ frekvens	Frekvens
Svar:	47 %	37 %		
Ubesvart			14	13
a og c (Riktig svar)			47	43
a, b, c, d			2	2
a, b			4	4
a, c			1	1
a, d			1	1
b, d			2	2
c, d			1	1
b			2	2
c			5	5
d			7	6
a, b, c			8	7
a, b, d			2	2
a, c, d			2	2

Oppgåve 10 a)	Rett	M	Relativ frekvens
Svar:	80 %	2 %	
Ubesvart			7
22 (Riktig svar)			80
25			2
30 (6*5)			1
23			2
18			2
24, 21, .. ANNA			5
			100

Kandidatnummer:	12	13	6	17	11	5	16	18	19	3	14	2	20	15	1	10	9	7	8	30	21	24	25
Frekvens	F	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	U
6																							1
73		1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	1																						
1					1																		
2																							
2																							
5																							

Kandidatnummer:	28	32	22	23	26	31	36	37	27	29	35	34	33	41	39	42	44	42	48	47	49	46	45
Frekvens	R	R	R	R	F	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
6																							
73	1	1	1	1		1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2																							
1																							
2					1																		
2									1														
5																							

Kandidatnummer:	50	43	314	305	304	308	324	309	313	317	315	321	310	319	316	302	320	318	301	438	427	435	433
Frekvens	R	R	F	R	R	R	R	M	R	U	R	F	R	R	M	U	R	U	U	R	R	R	R
6										1						1		1	1				
73	1	1		1	1	1	1		1		1		1	1			1			1	1	1	1
2															1								
1																							
2																							
2																							
5			1					1				1											

Kandidatnummer:	434	436	426	432	428	430	431	440	439	429	441	446	448	455	447	454	457	443	442	445	444	449
Frekvens	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	R	R	F	R	F	R	R	F	U	R
6																					1	
73	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1		1		1	1			1
2																						
1																						
2												1										
2																				1		
5															1		1					

Oppgåve 10 b)	Rett	M	Relativ frekvens
Svar:	62 %	20 %	
Ubesvart			8
42 (Riktig svar)			62
50			2
43			2
60 (30*5)			1
44			15
63			1
46, 34, ...			9
			100

Kandidatnummer:	12	13	6	17	11	5	16	18	19	3	14	2	20	15	1	10	9	7	8	30	21	24	25
Frekvens	F	R	R	F	F	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	U
7																							1
56		1	1			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
2	1																						
2				1																			
1					1																		
14																						1	
1																							
8																							

Kandidatnummer:	28	32	22	23	26	31	36	37	27	29	35	34	33	41	39	42	44	42	48	47	49	46	45
Frekvens	R	R	R	M	M	R	R	R	F	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	F	R	R
7																							
56	1	1	1			1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1
2																							
2																							
1																							
14																							
1					1																		
8				1					1											1	1		

Kandidatnummer:	50	43	314	305	304	308	324	309	313	317	315	321	310	319	316	302	320	318	301	438	427	435	433
Frekvens	R	R	M	R	M	R	R	M	R	U	F	R	R	M	M	U	U	U	U	M	M	M	R
7										1						1	1	1	1				
56	1	1		1		1	1		1			1	1										1
2															1								
2											1												
1																							
14			1		1			1						1						1	1	1	
1																							
8																							

Kandidatnummer:	434	436	426	432	428	430	431	440	439	429	441	446	448	455	447	454	457	443	442	445	444	449
Frekvens	R	R	M	R	R	M	M	R	R	R	R	F	M	R	F	M	M	R	M	M	U	R
7																					1	
56	1	1		1	1			1	1	1	1			1				1				1
2																						
2																						
1																						
14			1			1	1						1			1			1			
1																						
8												1			1		1			1		

Oppgåve 10 c)	Rett	M	Relativ frekvens
Svar:	32 %	16 %	
Ubesvart			43
$4n+2$ (rett svar, og med ord)			32
$4n$			2
$n+2$			1
n			4
$5n$ eller $6n$			3
Anna svar (tal, variabel osb..)			14

Kandidatnummer:	12	13	6	17	11	5	16	18	19	3	14	2	20	15	1	10	9	7	8	30	21	24	25
Frekvens	M	U	F	F	M	U	R	U	F	R	U	M	R	F	U	F	R	M	R	R	R	M	U
39		1				1		1			1				1								1
29							1			1			1				1		1	1	1		
2												1											
1																1							
4																		1					
3	1				1																		
13			1	1					1					1								1	

Kandidatnummer:	28	32	22	23	26	31	36	37	27	29	35	34	33	41	39	42	44	42	48	47	49	46	45
Frekvens	R	R	M	U	M	U	R	R	R	R	R	R	R	R	R	F	U	U	R	U	R	R	U
39				1		1											1	1		1			1
29	1	1					1	1	1	1	1	1	1	1	1				1		1	1	
2					1																		
1																							
4			1																				
3																							
13																1							

Kandidatnummer:	50	43	314	305	304	308	324	309	313	317	315	321	310	319	316	302	320	318	301	438	427	435	433
Frekvens	R	R	U	U	M	U	R	U	R	U	M	U	R	M	U	U	M	U	U	M	M	R	M
39			1	1		1		1		1		1			1	1		1	1				
29	1	1					1		1				1									1	
2																							
1																							
4											1			1									
3																					1		
13					1												1			1			1

Kandidatnummer:	434	436	426	432	428	430	431	440	439	429	441	446	448	455	447	454	457	443	442	445	444	449
Frekvens	U	U	U	R	U	U	R	U	U	U	U	M	F	U	F	U	U	U	U	U	U	U
39	1	1	1		1	1		1	1	1	1			1		1	1	1	1	1	1	1
29				1			1															
2																						
1																						
4																						
3																						
13												1	1		1							