Masteroppgave i matematikkdidaktikk

# Bruk av matematikkens historie i matematikkundervisningen

-En kilde til motivasjon?

Jarl Harald Kristiansen

**Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk**

**Matematisk institutt, Universitetet i Bergen**

HØSTEN 2016

UNIVERSITETET I BERGEN
*Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet*

# Forord

Det er mange som fortjener en stor takk for at denne oppgaven omsider er fullført. Først og fremst en stor takk til min veileder, Arne Jakobsen, for konstruktive innspill, nyttige råd og tilbakemeldinger hele veien fra valg av emne til sluttføringen av skrivingen. Det har vært en hektisk periode, men han har aldri gitt meg helt opp og det er jeg veldig takknemlig for nå.

Også en stor takk til alle medstudentene og foreleserne som har bidratt til at samlingene vi har hatt disse siste fire årene har blitt gode og meningsfylte. Det har vært mange gode stunder, og jeg vil huske denne perioden med glede i årene som kommer. Jeg vil takke mine gode kolleger som aldri har sagt nei til noe som helst når jeg trengte hjelp for å komme meg på samlinger, og som på denne måten gjorde det mulig for meg å gjennomføre dette prosjektet. Enkelte kolleger har også stilt opp med hjelp til oversettelse og korrekturlesing, og jeg er veldig takknemlig for dette.

Elevene som deltok i prosjektet fortjener selvfølgelig en stor takk for å villig stille opp og bidra med nyttige tilbakemeldinger og refleksjoner over de oppgavene de arbeidet med.

Sist men ikke minst en stor takk til min kjære Karen og resten av familien, som har stilt opp både dag og natt for at jeg skulle ha mulighet til å fullføre denne mastergraden. Uten dere hadde ikke dette vært mulig å gjennomføre i det hele tatt.

Lillesand November 2016

Jarl Harald Kristiansen

# Sammendrag

Denne masteroppgaven tar for seg bruk av matematikkens historie i matematikkundervisning. Jeg har selv en bakgrunn som matematikklærer i videregående skole gjennom drøyt 15 år, og for meg personlig har matematikkens historie vært en inspirasjonskilde og også bidratt til økt forståelse av matematikken. Jeg ønsket derfor å undersøke om det var mulig å bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen og om dette hadde positiv effekt på elevenes holdning til matematikkfaget.

Jeg har utarbeidet et undervisningsopplegg for elever i den videregående skolen, bestående av tre oppgavesett som alle er basert på historiske kilder. Undervisningen ble gjennomført på en skoledag for elever på studiespesialiserende programområde Vg2, etter at disse var ferdige med sine eksamener. Da utvalget av elever som deltok i forsøket hadde valgt ulike matematikkfag, valgte jeg å basere oppgavene på tema som ikke pensum i noen av matematikkfagene i den videregående skolen.

Jeg har først og fremst ønsket å se på om dette er en måte å motivere elevene for matematikk. Elevene har derfor svart på en spørreundersøkelse om holdninger til matematikkfaget både før og etter gjennomføringen av undervisningopplegget. I tillegg ble det gjennomført gruppeintervju med noen av elevene i etterkant av undervisningen.

Spørreundersøkelse og intervju danner grunnlaget for analysen, sammen med de observasjonene jeg gjorde den dagen jeg var sammen med elevene. Spørreundersøkelsen bidrar med kvantitative resultater, men er basert på få respondenter. Påstandene i spørreundersøkelsen er ordnet i fire ulike kategorier; underholdningsverdi, motivasjon, trygghet og verdi. For tre av de fire variablene som er undersøkt i spørreundersøkelsen finner jeg ingen signifikante forskjeller, mens en av variablene, underholdningsverdien av matematikk, har en signifikant økning. Både de kvalitative og de kvantitative resultatene stemmer bra overens, og jeg finner lignende resultater i andre studier.

Tilbakemeldingene fra elevene er positive både på innhold og utforming av oppgavene, men de gir også tydelig uttrykk for at fagene allerede er presset på tid, så faglig aktivitet utenom pensum vil de ikke bruke tid på. Det betyr at å gjennomføre et slikt opplegg i en vanlig klasse krever en

del forarbeid fra lærerens side, da oppgaver og teori som kan knyttes til pensum ikke nødvendigvis er lett tilgjengelig.

# Innhold

Forord ..... III

Sammendrag ..... IV

Liste over tabeller ..... VIII

Liste over figurer ..... VIII

1 Innledning ..... 1

1.1 Bakgrunn ..... 1

1.2 Forskningsspørsmål ..... 3

2 Teori ..... 5

2.1 Hvorfor bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen ..... 5

2.1.1 Det genetiske prinsipp ..... 5

2.1.2 Andre argumenter for å bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen7

2.2 Hvordan bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen ..... 11

2.2.1 Ulike tilnærminger ..... 11

2.2.2 Eksempler på ulike tilnærminger og noen resultater av disse ..... 12

2.2.3 Andre forslag til undervisningsopplegg ..... 15

2.3 Motforestillinger mot bruk av matematikkens historie i matematikkundervisningen.... 16

2.4 Holdninger til matematikkfaget ..... 17

3 Metode ..... 21

3.1 Utvalg ..... 21

3.2 Oppgavene ..... 22

3.2.1 Oppgavesett 1 ..... 22

3.2.2 Oppgavesett 3 ..... 25

3.2.3 Oppgavesett 4 ..... 26

3.3 Gruppeintervju ..... 27

3.4 Spørreundersøkelse ..... 28

4 Resultater ........ 31
4.1 Generelle observasjoner av elevenes arbeid ........ 31
4.2 Tilbakemeldinger i intervju ........ 32
4.3 Resultat av spørreundersøkelse ........ 37
4.4 Reliabilitet ........ 42
5 Diskusjon ........ 45
5.1 Mindre skremmende ........ 45
5.2 Tverrfaglighet ........ 46
5.3 Tro på egne ferdigheter ........ 47
5.4 Motforestillinger ........ 48
5.5 Begrensninger ........ 48
6 Konklusjon ........ 49
6.1 Svar på forskningsspørsmål 1 ........ 49
6.2 Svar på forskningsspørsmål 2 ........ 50
6.3 Pedagogiske implikasjoner ........ 51
6.4 Videre forskning ........ 52
Referanser ........ 53
8 Vedlegg ........ 58
Holdninger til matematikk ........ 59
Tilbakemelding fra NSD ........ 62
Oppgavesett 1 ........ 63
Oppgavesett 3 ........ 68
Oppgavesett 4 ........ 72

## Liste over tabeller

Tabell 1: Hvor underholdende synes elevene matematikk er? ........ 38
Tabell 2: Elevenes oppfatning av verdien av matematikk ........ 39
Tabell 3: Elevenes tro på egne ferdigheter i matematikkfaget ........ 40
Tabell 4: Elevenes motivasjon for matematikkfaget ........ 41
Tabell 5: t-test av endringer i gjennomsnittet for de fire kategoriene ........ 41
Tabell 6: Chronbach alpha koeffisienter for underkategorier ........ 42
Tabell 7: Chronbach alpha koeffisient for hele spørreskjemaet ........ 42

## Liste over figurer

Figur 1: Oversikt over egyptiske tallsymboler, hentet fra Arcavi (1987, s.13) ........ 23
Figur 2: Figur til oppgave 1 i oppgavesett 1, hentet fra Arcavi (1987, s.14) ........ 23
Figur 3: Figur til oppgave 2 i oppgavesett 1, hentet fra Arcavi (1987, s. 15) ........ 24
Figur 4: Figur til oppgave 3 i oppgavesett 1, hentet fra Arcavi og Isoda (2007, s. 120) ........ 25
Figur 5: Eksempler på oppgaver i oppgavesett 3 der elevene skal undersøke om det finnes en Euler-sti. ........ 26
Figur 6: Den første oppgaven i oppgavesett 3 ........ 27

# 1 Innledning

## 1.1 Bakgrunn

*There is an over-arching consensus that the use of history of mathematics should decidedly improve the quality of mathematics teaching.* (Schubring, 2011, s. 79)

Dette sitatet av Schubring er en av hovedgrunnene til at jeg valgte matematikkens historie som emne for denne masteroppgaven. Utviklingen av matematikken opp i gjennom historien er et emne som har fascinert meg, men som jeg har fått liten innsikt i opp igjennom skolegangen. Først i de senere år, og spesielt mens jeg har arbeidet med denne erfaringsbaserte mastergraden, har jeg blitt tilbudt undervisning i emnet. For meg personlig har det vært både motiverende og ofte oppklarende å få innsikt i historien bak den matematikken vi bruker i dag. Fra min egen skolegang er det stort sett de gamle grekerne og deres arbeid med geometrien jeg husker ble nevnt. Høyere opp i skolesystemet hendte det at ble fortalt korte anekdoter om matematikerne bak matematikken, men jeg visste veldig lite om hvordan matematikken ble utviklet når jeg var ferdig med grunnskolen. For min egen del så har den innsikten jeg har fått i matematikkens historie bidratt til økt motivasjon i mitt arbeide som lærer, og jeg føler også at den har gjort meg bedre i stand til å undervise i faget. Dette fordi jeg nå har fått kunnskap om utviklingen av emnene jeg underviser, og dette gir meg nye måter å belyse disse emnene på overfor elevene mine.

I tillegg til at jeg personlig synes dette er interessant og motiverende, så er det flere forskere enn Schubring (2011) som hevder at matematikkens historie er viktig for å kunne lære matematikk, og dermed burde være en viktig del av matematikkundervisningen. Hassler (1929) hevder at hvis elevene kjenner til historien bak utviklingen av en matematisk prosess, så ville dette kunne stimulere deres interesse. En sammenligning av dagens metoder for å løse et matematisk problem med historiske metoder, kan også føre til at elevene setter større pris på de moderne metodene (Meavilla & Flores, 2007). Det er også studier som tyder på at en ved å sette matematikken i en historisk kontekst, så kan en øke læringsutbyttet til elevene og også påvirke holdningene til faget positivt (Yee & Chapman, 2010) .

Både Arcavi (1985) og Jankvist (2009) har gjort forsøk på å kategorisere argumenter for hvorfor og hvordan en kan bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen. International

Comission on Mathematical Instruction (ICMI) gjennomført en studie på slutten av 90-tallet, som resulterte i boken «History in Mathematics Education: The ICMI Study» (Fauvel, 2000). Denne boken inneholder også en systematisering av argumenter for bruk av matematikkens historie i matematikkundervisningen, samt forslag til hvordan dette kan gjøres.

Et eksempel på bruk av matematikkens historie i matematikkundervisning er beskrevet av Yee og Chapman (2015), som utførte et forsøk med elever i 11. trinn i Singapore. De undersøkte blant annet hvordan bruken av matematikkens historie som verktøy i matematikkundervisningen påvirket elevenes holdninger til matematikkfaget og deres prestasjoner i faget. Resultatene deres tyder på at bruk av matematikkens historie har en midlertidig positiv effekt på affektive verdier, og en langvarig positiv effekt på deres prestasjoner i faget.

Dunham (1986) utarbeidet et kurs for universitetsstudenter som omhandlet noen av matematikkens historisk sett viktige og spesielt betydningsfulle teoremer. Formålet med kurset var ikke bare at studentene skulle tilegne seg nye matematikkunnskaper, men at de også skullelære seg å sette pris på det arbeidet som ligger bak et slikt teorem. Kurset ble populært både blant matematikkstudenter og studenter fra andre fagområder.

Inspirert av Dunhams (1986) arbeid, utarbeidet Barnett, Lodder og Pengelly (2016) undervisningsmateriell for hele kurs, basert på historiske kilder. I begynnelsen var det enkelte moduler, men de utvidet arbeidet sitt, så de til slutt hadde nok materiell til å fylle to lærebøker, og de ønsker å fortsette sitt arbeide. Kursene deres er i utgangspunktet laget for universitetsnivå, men kan tilpasses for elever på andre skoletrinn også. Bakgrunnen for at de fortsatte arbeidet, er de positive tilbakemeldingene fra studentene som har tatt disse kursene. De mener også å kunne merke at elever som har arbeidet med historiske kilder er mer villige til å stille spørsmål, og har en bedre evne til å begrunne svarene sine enn elever som ikke har arbeidet på denne måten.

Matematikkens historie har også vært brukt i lærerutdanning. Arcavi og Isoda (2007) brukte matematikkens historie som et middel for å øve opp fremtidige lærere til å forstå elevenes problemer. Lærerstudentene skulle oversette og løse problemer hentet fra egyptisk matematikk. Denne øvelsen skulle gjøre dem bedre i stand til å se matematiske problemer fra elevenes synsvinkel. Også Jankvist, Mosvold, Fauskanger og Jakobsen (2015) så på bruk av matematikkens historie i tilknytning til lærerutdanning, og en av konklusjonene deres er at kjennskap til matematikkens historie kan bidra til læreren utvikler en bedre forståelse av matematikken som skal undervises (Jankvist, Mosvold, Fauskanger, & Jakobsen, 2015).

La oss nå gå tilbake til bruk av matematikkens historie i den videregående skolen, og da er det naturlig å se på Norge og nærliggende land. I Danmark kom det ny læreplan I 2006-2007 som stilte større krav til elevenes kunnskap om matematikkens historie. I tillegg var det mulighet for å velge et tilleggspensum, som utdypet kjernepensumet i matematikkfaget. Jankvist utarbeidet i 2007 to undervisningsmoduler for elever i den videregående skolen (Jankvist, 2010). Dette var moduler som gikk over 15 dobbelttimer og det ble utarbeidet egne tekstbøker til elevene.

I Norge har matematikklærere ikke det samme spillerommet som kolleger i Danmark, når det kommer til å bestemme hva som skal undervises i timene. Matematikkens historie har også veldig liten plass i matematikkfaget slik det er definert i gjeldende læreplan (Kunnskapsdepartementet, 2013). Når Reform 94 (Det kongelige kirke-, utdannings- og forskningsdepartement, 1996) ble innført, kom det inn små biter av matematikkhistorie i pensum. På grunnskolen skulle en lære litt om tallsystemer, mens på den videregående skole kom gylne snitt og spiraler inn i pensum. Alt dette kunne knyttes til matematikkens historie, men det var ikke et krav om at det ble gjort. I dagens læreplan (Kunnskapsdepartementet, 2013) for matematikk er det ingen kompetansemål som går på matematikkens historie, bortsett fra i faget R1 der elevene skal kunne gjøre rede for ulike bevis for Pytagoras setning. Tallsystemer ble riktignok beholdt for elever i den videregående skole, men ble fjernet ved revisjon av læreplanen i 2013. Dette betyr at hvis læreren skal bruke matematikkens historie, så må han/hun selv finne ut hvordan dette kan gjøres.

Hvis bruk av matematikkens historie i matematikkundervisningen er så viktig både for lærere og elever, hvorfor er det da så lite rom for den i den norske skolen? Dette danner bakgrunnen for de to forskningsspørsmålene jeg ønsker å besvare i løpet av denne oppgaven.

## 1.2 Forskningsspørsmål

Jeg vil undersøke om et undervisningsopplegg basert på historiske problemer kan ha noe for seg med tanke på å øke motivasjonen for matematikkfaget hos elever i den videregående skolen i dag. For å belyse denne problemstillingen vil jeg i løpet av denne oppgaven svare på følgende to spørsmål:

1. Kan matematikkundervisning basert på historiske problemer påvirke elevenes holdning til matematikkfaget?
2. Hvilke utfordringer i undervisning kan identifiseres ved bruk av matematikkens historie i matematikkundervisning?

For å besvare disse spørsmålene vil jeg først ta for meg forskningslitteratur som belyser bruk av matematikkens historie i matematikkundervisningen. Jeg vil også si noe om hva litteraturen sier om holdninger til matematikkfaget hos elever. Deretter vil jeg beskrive utforming av et undervisningsopplegg som benytter historiske problemer, og de metodene jeg har brukt for å evaluere dette. Til slutt vil jeg diskutere mine funn opp mot mine forskningsspørsmål og jeg prøver å trekke noen konklusjoner.

# 2 Teori

Det finnes mange eksempler fra de siste hundre årene der det argumenteres for at bruk av matematikkens historie i matematikkundervisningen vil føre til en bedre undervisning (Hassler, 1929; Thomaidis og Tzanakis, 2007; Yee og Chapman, 2010; Schubring, 2011). Jeg vil først ta for meg ideen om det genetiske prinsipp (Rogers, 2000; Schubring, 2011), som er en mye diskutert teori om hvordan læring av matematikk foregår, før jeg ser på andre argumenter for hvorfor og hvordan matematikkens historie kan brukes i matematikkundervisningen (Arcavi, 1985; Jankvist, 2009). Jeg vil også se på argumenter mot bruk av matematikkhistorien i matematikkundervisningen. Til slutt i dette kapittelet vil jeg se på det teoretiske grunnlaget for elevers holdninger til matematikkfaget.

## 2.1 Hvorfor bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen

### 2.1.1 Det genetiske prinsipp

Den biogenetiske grunnlov ble formulert av den tyske biologen Haeckel tidlig på 1900-tallet. Den sier at utviklingen hos individet etterligner utviklingen av arten (ontogeny recapitulates phylogeny), og dette prinsippet ble så overført til psykologi og utdanning. Spesielt matematikkundervisningen ble preget av denne tankegangen om at utviklingen i enkeltindividet etterligner utviklingen i arten (Schubring, 2011). Overført til matematikkundervisning kan vi formulere det genetiske prinsipp som: Effektiv læring forutsetter at den som skal lære følger hovedtrinnene i den historiske utviklingen av emnet som skal studeres (Byers, 1982, s. 59).

Poincaré uttrykker seg slik i sin bok fra 1913:

> *Zoologists maintain that the embryonic development of an animal recapitulates in brief the whole history of its ancestors throughout geological time. It seems it is the same in the development of minds. The teacher should make the child go over the path his fathers trod; more rapidly, but without skipping stations.* (Poincaré, 1913, s. 437)

Poincaré hevder altså at læreren burde lede eleven gjennom matematikkens utvikling, uten å hoppe over noen steg. I dag kan det virke som om de fleste ser bort fra en bokstavelig tolkning av det genetiske prinsipp, men anbefaler heller å la læreren bruke dette som en rettesnor for sin undervisning. Rogers (2000) hevder blant annet at det er en feilslutning å si at det er en parallellisme mellom problemer som dagens studenter har, og de våre forfedre hadde. Siu og

Siu (1979) påpeker at hvis vi alltid skulle undervise matematiske emner slik de har utviklet seg fra begynnelse til nåværende form, så ville vi få mange forvirrede elever (og de ville være veldig gamle), men at det vil være naturlig å undervise et emne i den rekkefølgen det utvikler seg. Et emne som har tatt lang tid å utvikle, vil sannsynligvis også være vanskelig for elever å forstå. Hvis læreren kjenner til historien bak matematikken, kan han derfor være bedre forberedt på hva elevene kommer til å få problemer med å forstå.

Når matematikkens historie brukes av læreren som en rettesnor for undervisningen minner det om det Toeplitz kaller indirekte bruk av det genetiske prinsipp (Schubring, 2011). Den tyske matematikeren Otto Toeplitz var aktiv i å forbedre matematikkundervisningen i mellomkrigstiden, og han skiller mellom direkte og indirekte bruk av det genetiske prinsipp. Den direkte bruken går på å bruke historien i undervisningen, mens den indirekte fokuserer på læreren og dennes evne til aktivt å gjenspeile den historiske prosessen og formidle essensen i denne i sin undervisning. Ifølge Schubring (2011) er dette det en bør satse på, istedenfor den direkte metoden. Denne metoden beskrives også i "History in mathematics education: the ICMI-study" (Fauvel, 2000, s. 71-74), som en metode med potensiale. Læreren kan bruke den historiske utviklingen som et hjelpemiddel for å planlegge undervisningen, for eksempel til å bestemme i hvilken rekkefølge ulike matematiske konsepter bør undervises. De konseptene som dukket opp først i historien bør elevene få kjennskap til først. Når de så har forstått disse, kan en gå videre på mer moderne detaljer. Ulempen med denne metoden er jo da at den sannsynligvis tar lenger tid og at den kan virke litt uoversiktlig for elevene.

Harper (1987) fant en parallellisme mellom den historiske utviklingen av algebraiske symboler og hvordan elevene forstår bruken av bokstaver i skolematematikk. Thomaidis og Tzanakis (2007) undersøker også denne parallellismen, men de bruker utviklingen av tallinjen som eksempel. Også de finner en parallellisme mellom den historiske utviklingen og læring hos elevene. I tillegg til å finne tegn til en parallellisme, så konkluderer både Harper (1987) og Thomaidis og Tzanakis (2007) med at historien bak matematikken kan brukes til å forbedre hvordan en underviser disse tema i dagens skole.

En lignende konklusjon kommer også Mosvold, Jakobsen og Jankvist (2014) til i sin undersøkelse av hvordan matematikkens historie kan bidra til undervisningskunnskap i matematikk (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT). MKT er en teoretisk modell som omhandler den spesialiserte matematikkunnskap brukt til å undervise matematikk (Mosvold, Jakobsen, & Jankvist, 2014, s. 48). I følge denne modellen kan matematikkunnskap brukt til å undervise matematikk deles opp i to hovedområder; kunnskap om faget (Subject matter knowledge, SMK) og kunnskap om pedagogikk (Pedagogical content knowledge, PCK). Mosvold, Jakobsen og Jankvist (2014) konkluderer med at matematikkens historie kan øke lærerens pedagogiske kunnskap, da læreren kan finne gode ideer til undervisningen her. I likhet med Siu og Siu (1979) trekker også Mosvold, Jakobsen og Jankvist (2014) fram at matematikkens historie kan være med på å forberede læreren på hva elevene vil finne problematisk og eventuelt hvilke misoppfatninger som kan forekomme blant elevene. I tillegg til å øke den pedagogiske kompetansen kan også matematikkens historie bidra til økt faglig innsikt, for eksempel ved å gjøre læreren i stand til å bruke ulike historiske representasjoner i ulike situasjoner.

### 2.1.2 Andre argumenter for å bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen

I en undersøkelse fra 1981, ble 24 personer som jobbet med matematikkundervisning spurt om hvilke bøker som var de viktigste for en ungdomsskolelærer å lese. Matematikkens historie var det emnet som ble anbefalt av flest (Leake, 1983). Jeg vil i den følgende delen ta for meg noen forsøk på å kategorisere argumentene for bruk av matematikkens historie i matematikkundervisningen.

Det første eksempelet er Arcavi (1985). Han har i sin doktorgradsavhandling fra 1985 fokus på bruk av matematikkens historie i lærerutdanningen. Han skriver at «verdien av matematikkens historie, spesielt innenfor lærerutdanningen, lenge har blitt argumentert for» (Arcavi, 1985, s. 1). Arcavi klassifiserer argumentene for bruk av matematikkens historie i undervisning av lærere i fire kategorier (Arcavi, 1985, s. 2-4):

1. Bedre læring og forståelse av matematikk
2. Forestillinger om matematikk og matematisk aktivitet
3. Forbedrede holdninger til matematikk
4. En plausibel parallellisme mellom historisk utvikling av matematiske konsepter og menneskets utvikling

I Arcavis (1985) første kategori kommer argumenter som går på at en lærer med kunnskap om matematikkens historie har en dypere innsikt i faget og derfor kan si noe om hvordan og hvorfor akkurat den matematikken han underviser oppstod. På denne måten kan matematikken settes inn i en historisk sammenheng, noe som kan gjøre det lettere for elevene å få et forhold til den.

I den andre kategorien samler Arcavi (1985) argumenter for at en matematikklærer med kunnskap om matematikkens historie bedre er i stand til å framstille matematikken som et dynamisk fag, framfor kun å formidle fakta hentet fra læreplanen.

Med forbedrede holdninger til matematikken tenker Arcavi (1985) både på elevene og lærerne. Matematikkens historie kan virke inspirerende på lærere og elever, samt gi et annet perspektiv på de vanskelighetene elevene støter på i faget. Kanskje kan kjennskap til de problemene tidligere matematikere opplevde, sette elevenes problemer i et litt annet lys.

Den siste kategorien hos Arcavi (1985) er argumenter knyttet til det genetiske prinsipp. Arcavi tolker det genetiske prinsipp på en måte som minner om Toeplitz indirekte bruk av dette. Han mener at den historiske utviklingen av matematikken, med progresjonen, men også perioder med stagnasjon, konsepter som har forsvunnet og blindspor, kan gi læreren en bedre forståelse av elevenes feil og misoppfatninger (Arcavi, 1985, s. 5).

Selv om Arcavi har tenkt seg lærerstudenter som målgruppe for undervisning av matematikkens historie, så kan kanskje andre studenter også dra nytte av slik undervisning?

I ICMI-studien fra 2000 (Fauvel, 2000, s. 203-207) oppgis det fem områder innen matematikkundervisning som kan støttes, berikes og forbedres ved å integrere matematikkens historie i utdanningsprosessen:

1. Matematikklæring
2. Utvikling av syn på matematikkens natur og matematisk aktivitet
3. Den didaktiske bakgrunnen til lærere og deres pedagogiske repertoar
4. Affektiv mottagelighet til matematikk
5. Verdsetting av matematikk som en kulturell menneskelig bestrebelse

I tillegg til å presentere de ulike områdene som kan dra nytte av bruk av matematikkens historie, presenterer også denne studien (Fauvel, 2000) noen innvendinger mot bruken av matematikkens historie i undervisningen. Innvendingene kommer jeg tilbake til senere, men la oss først se på argumentene for bruken av matematikkens historie innen hvert av de fem områdene.

Det første området i studien (Fauvel, 2000) omfatter altså matematikklæring. Matematikklæringen kan forbedres ved bruk av matematikkens historie på flere måter (Fauvel, 2000). Læreren kan finne inspirasjon til undervisningen i historiske kilder, og finne forslag til hvordan et emne kan presenteres på en naturlig måte. Historiske kilder kan også brukes til å motivere elevene da oppgaver knyttet til slike kilder kan stimulere elevenes interesse og dermed bidra til at prestasjonene i faget blir bedre (Fauvel, 2000, s. 204). Oppgaver knyttet til matematikkens historie kan også brukes til å vise at ulike retninger innenfor matematikken er knyttet sammen, og at matematikk også inngår i andre fag, da mye matematikk ble utviklet for å kunne svare på spørsmål fra andre fagområder. Ved å bruke historiske tekster som et utgangspunkt for matematiske oppgaver kan en også oppnå at elevene må jobbe med matematikk på andre måter enn bare å regne oppgaver. Her kan det legges inn forventninger om at de må lese, skrive og diskutere matematikk i tillegg.

Det andre området gjelder hvordan studier av matematikkens historie kan påvirke elevenes (og lærerens) syn på hvordan matematikken har utviklet seg over tid, både i innhold og form. Studier av primære kilder, eller oppgaver knyttet til slike, kan gi et innblikk av hva som må til for å utvikle ny matematikk. Kravene til bevis har endret seg, det samme har notasjoner, terminologi og framgangsmåter. Oppgaver som bruker primære kilder som et utgangspunkt kan derfor hjelpe elevene med å se fordelene med den moderne formen av matematikk.

Det tredje området omhandle lærerens didaktiske bakgrunn. Her finner vi argumenter som også Arcavi (1985) var innom. Matematikkens historie bidrar til å styrke lærerens didaktiske bakgrunn ved å gi innsikt i hvorfor ulike emner innenfor matematikken oppstod, noe som kan fungere som en motivasjon for introduksjon av nye emner i undervisningen. En kan også øke det didaktiske repertoaret av forklaringer, eksempler og alternative framgangsmåter ved å studere matematikkens historie. I tillegg kan læreren bli bedre forberedt på vanskeligheter elevene kan støte på.

Argumenter for at matematikkens historie kan påvirke affektiv mottagelighet til matematikk handler om hvordan matematikkens historie kan påvirke synet elever har på matematikk. Holdningene til matematikkfaget kan påvirkes ved å studere utviklingen av matematiske emner og det arbeidet som ligger bak en slik utvikling. Elevene kan da få en innsikt i hva som kreves av innsats, utholdenhet og kreativitet for å drive matematikken videre. Kjennskap til hvordan matematikere opp gjennom tidene har slitt med feil, misforståelser og usikkerheter, kan bidra til at elevene selv utviser større grad av utholdenhet når de selv opplever motgang. Det siste punktet som nevnes her er hvordan synet på matematikken som en kulturell bestrebelse kan påvirkes ved bruk av eksempler fra matematikkens historie. Matematikkens historie kan bidra med eksempler fra ulike kulturer, ulike formål og hvilken påvirkning ulike samfunn har hatt på matematikken.

Ett annet forsøk på å kategorisere argumentene for bruk av matematikkens historie i matematikkundervisningen gjøres av Jankvist (2009). Hans utgangspunkt er at alle argumenter for bruken av matematikkens historie i matematikkundervisningen kan plasseres i to kategorier, nemlig (Jankvist, 2009, s. 237):

1. Historien som verktøy
2. Historien som mål

Den første kategorien inneholder argumenter som går på bruken av matematikkens historie som et verktøy for å fremme læring av matematikk. Det kan være at matematikkens historie fungerer som et verktøy ved å motivere elevene eller læreren kan finne andre forklaringsmåter i historien, slik at matematikkens historie blir et verktøy som støtter opp under selve læringsprosessen. Jankvist (2009) plasserer også argumenter bygd på den indirekte bruken av det genetiske prinsipp (Schubring, 2011) i denne kategorien. Da bruker læreren historien som et verktøy for å forberede seg på hva elevene kan komme til å oppleve som vanskelig.

Den andre kategorien beskrives av Jankvist som «argumenter som hevder at det å lære aspekter av matematikkens historie i seg selv er nyttig» (Jankvist, 2009, s. 239). En fokuserer da på utviklingen av matematikken som en disiplin, og så kan bedre matematikkunnskaper komme som en positiv bivirkning.

Sammenligner vi så de fem områdene fra ICMI-studien (Fauvel, 2000) med Jankvist (2009) sine to kategorier, ser vi at de nevnte argumentene kan plasseres som enten å være et verktøy eller et mål.

En annen vinkling finner vi i forskningsrapporten «Matematikkhistorie i grunnskolens lærebøker: en kritisk vurdering» (Smestad, 2002). Her gis det følgende oversikt over *hva* matematikkens historie kan bidra med i matematikkundervisningen (Smestad, 2002, s. 7).:

1. Fakta
   -Forklare hvorfor vi bruker de definisjoner, navn og symboler som vi gjør
   -Forklare hvordan formler opprinnelig ble utledet
2. Ferdigheter
   -Vise elevene et mangfold av algoritmer, og slik bedre forståelsen av deres egne algoritmer

3. Begrepsstrukturer
   -Vise elevene hvordan begreper har utviklet seg og slik knytte begreper sammen
   -Gi elevene mulighet til å se kontraster mellom ulike begreper
4. Strategier
   -Gi mulighet til å sammenlikne gamle og moderne metoder
5. Holdninger
   -Belyse matematikkens rolle i et samfunn. Matematikkhistorien kan vise eksempler på at matematikk har vært viktig
   -Vise at matematikk er et resultat av generasjoners arbeid. Matematikk er altså dynamisk, ikke statisk
   -Vise elevene at vanskeligheter er en naturlig del av utviklingen
   -Gi matematikk et menneskelig ansikt
6. Annet (knyttet til andre fag eller generell del av læreplanen)
   -Øke respekten for tidligere kulturers nivå
   -Utvikle evnene til å bruke kilder, bibliotek, internett og til å skrive essay
   -Gi mulighet til tverrfaglig arbeid med andre lærere

Denne oversikten legger altså vekt på hva matematikkens historie kan bidra med, de punktene som er med her finner vi igjen i argumentene om hvorfor matematikkens historie burde brukes i matematikkundervisningen, oppsummerer disse på en enkel og grei måte.

## 2.2 Hvordan bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen

### 2.2.1 Ulike tilnærminger

Vi har sett på argumenter for at matematikkens historie er viktig i matematikkundervisningen, men hvordan kan vi bruke den i undervisningen?

I ICMI-studien (Fauvel, 2000) beskrives tre måter å integrere matematikkens historie i matematikkundervisningen på (Fauvel, 2000, s. 208):

1. Lære historie, ved hjelp av historisk materiale.
2. Lære matematikk, ved å følge undervisning inspirert av historien.
3. Utvikle en dypere forståelse, både av matematikken selv og om den sosiale og kulturelle konteksten matematikken har blitt utviklet i.

Følger en her punkt 1, så kan dette gjøres ved små innslag av historisk faktainformasjon eller ved å studere bøker om matematikkens historie (Fauvel, 2000). Hensikten med denne måten å gjøre det på er å lære historie heller enn matematikk. Jankvist (2009) har en tilsvarende kategori for bruk av matematikkens historie i undervisningen som han kaller for opplysningstilnærming (illumination approach).

I punkt 2 utarbeider læreren et undervisningsopplegg basert på den historiske utviklingen av et matematisk emne. Også her har Jankvist (2009) en tilsvarende metode, nemlig historiebasert tilnærming (history based approach). Undervisning av et matematisk emne basert på det genetiske prinsipp vil falle inn under denne måten å bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen (Jankvist, 2009, s. 247).

Det tredje punktet i denne oversikten omhandler studier av hvordan matematikken selv har endret seg og hvordan ytre faktorer har påvirket matematikken. Her har ikke Jankvist (2009) en helt tilsvarende kategori, men han har istedenfor en tredje kategori han kaller modultilnærming (modules approach). Med modultilnærming mener Jankvist instruerende enheter viet historien, og ofte basert på caser (Jankvist, 2009, s. 246).

ICMI-studien nevner også en liste med mulige måter å gjøre matematikkhistorien til en del av matematikkundervisningen (Fauvel, 2000, s. 214). Blant forslagene er historiske snutter (korte historiske tekster som finnes i mange lærebøker), bruk av originale kilder, oppgaveark, historiske problemer og forskningsprosjekter basert på historiske tekster.

### 2.2.2 Eksempler på ulike tilnærminger og noen resultater av disse

La oss nå se på noen konkrete eksempler der matematikkens historie har vært brukt i matematikkundervisningen. Det finnes mange forsøk beskrevet i litteraturen, men jeg har her valgt ut en håndfull som varierer i lengde og innhold for å gi et lite innblikk i de ulike måtene å bruke matematikkens historie i undervisningen på.

I innledningen nevnte jeg forsøket til Yee og Chapman (2015) med bruk av matematikkens historie som verktøy i to klasser på 11. trinn i Singapore. De var interessert i å måle hvordan bruken av matematikkens historie kunne påvirke holdninger til og prestasjoner i matematikkfaget. I dette forsøket ble matematikkens historie brukt på 2 hovedmåter:

1. Bruk av anekdoter og biografier om matematikere (belysningstilnærming)

2. Små moduler med historiske problemer og metoder knyttet til pensum (modultilnærming)

Forsøket gikk over ett skoleår, og elevene ble spurt om holdninger til faget før, underveis og etter forsøket. De ble også testet i fagkunnskaper underveis i forsøket. De påviste små endringer i holdninger, men det var antydning til økt motivasjon blant elevene som deltok i eksperimentet. Mer overraskende var det nok at disse elevene også presterte bedre i faget, selv ett år etter at forsøket var gjennomført (Yee & Chapman, 2015). Deres resultater tyder altså på at bruk av historie kan medføre en økt motivasjon for faget, i hvert fall for en kort periode.

Yildiz, Cabakcor og Ôzdogan (2011) brukte fraktaler som utgangspunkt for et undervisningsopplegg i en 8. klasse med 35 elever i Tyrkia. Undervisningsopplegget gikk over fire timer, og inkluderte en presentasjon av fraktaler og fraktalenes historie og litt informasjon om grunnleggerne av fraktalgeometri, Karl Weierstrass og Benoit Mandelbrot. Elevene fikk også prøve seg på problemløsning knyttet til bruk av fraktaler. I etterkant ble fem elever og læreren intervjuet i tillegg til at alle elevene ble bedt om å utføre en skriftlig evaluering av undervisningen. Resultatene her tyder på at både elever og lærer var positive til slike undervisningsopplegg basert på matematikkens historie. Det blir fra elevenes side trukket fram at de fikk en dypere forståelse av emnet i forhold til vanlig undervisning og at de fikk økt motivasjon for å lære mer om emnet. Dette støttes også av lærerens tilbakemelding. I denne undersøkelsen trekker både lærer og elever trekker at tidsbruk og tidsrom for gjennomføring av et slikt undervisningsopplegg må planlegges nøye i forhold til behov for å forberede seg til eksamen.

I et annet eksempel fra Tyrkia arbeidet 15 elever på 11. trinn med historiske oppgaver knyttet til volum av faste legemer (Ozdemir, Goktepe, & Kepceoglu, 2012). For å evaluere oppgavene ble elevene bedt om å fylle ut et spørreskjema med syv åpne spørsmål i etterkant av undervisningen. Elevene arbeidet i grupper med et oppgavesett bestående av tre ulike oppgaver. Oppgavene gikk ut på å vise hvordan en kom fram til tre ulike formler for volumet av en pyramide. Den første formelen var hentet fra egyptisk matematikk, den andre fra kinesisk og den tredje fra babylonsk matematikk. Hensikten med dette forsøket var å se om disse oppgavene kunne øke elevenes kompetanse til å føre geometriske bevis, og også om de fikk en bedre romforståelse. Basert på de avgitte svarene i spørreundersøkelsen konkluderes det i denne undersøkelsen med at elevene fikk økt sin kompetanse til å føre geometriske bevis, og i tillegg ser det ut til at denne typen oppgaver vekket elevenes interesse. Flere tilbakemeldinger gikk på at elevene ved å arbeide med oppgavesettet opplevde å se hvordan matematikken kunne brukes i praksis.

Som vi så på tidligere så argumenterte Arcavi (1985) for at lærerstudenter skulle ha undervisning i matematikkens historie. Clark (2011) beskriver en undersøkelse av amerikanske lærerstudenter som tar et 15 ukers kurs i bruk av matematikkens historie i matematikkundervisning. Hun ville undersøke hvordan en matematisk forståelse i et historisk perspektiv bidrar til framtidige matematikklæreres undervisningskunnskaper i matematikk (Clark, 2011, s. 70). Emnet det ble fokusert på i denne undersøkelsen var løsning av andregradslikninger. Studentene gjennomførte et undervisningsopplegg basert på al-Khwarizmis metode for å lage fullstendige kvadrat for å løse andregradslikninger. Studentene førte refleksjonsjournaler som ble samlet inn og analysert med tanke på hvordan undervisningsopplegget hadde påvirket deres undervisningskunnskaper i matematikk. Det ble gjort undersøkelser på fire ulike kull med totalt 80 studenter. 32 av disse leverte refleksjoner på det gjennomførte undervisningsopplegget. Undervisningsopplegget i dette emnet baserte seg på en tekst av al-Khwarizmi (oversatt til engelsk) om hvordan en skulle lage fullstendige kvadrat. Utfra teksten skulle studentene utarbeide en geometrisk representasjon av problemet. Basert på de analyserte refleksjonsjournalene kunne en se at undervisningsopplegget hadde bidratt til økt forståelse hos de 32 studentene, og da trekkes spesielt dette med den geometriske representasjonen fram. Mange hadde tidligere kun lært seg å bruke andregradsformelen for å løse slike likninger, uten å tenke noe mer over hvilken betydning dette hadde. For andre førte denne geometriske representasjonen til at de endelig fikk en bedre forståelse av prinsippet bak de fullstendige kvadraters metode. I tillegg ga også 24 av journalene uttrykk for at de ville bruke hele eller deler av undervisningsopplegget i egen undervisning. Dette ble begrunnet med at et slikt undervisningsopplegg ga en bedre forståelse av det matematiske emnet og viste at matematikk kunne ha en praktisk betydning.

Det er stor enighet om at det er viktig for elever og studenter å delta i samtaler knyttet til matematikk i matematikkundervisningen, fordi dette er fordelaktig for læring av matematikk (Xu, 2011). Kjeldsen og Blomhøj (2012) undersøkte bruken av matematikkens historie som en metode for å lære studenter om meta-diskursive regler i matematikken. Sfard (2001) sier om meta-diskursive regler: I en matematisk diskurs, vil denne kategorien av regler inkludere de som ligger under de unike matematiske måtene å definere og bevise på (Sfard, 2001, s. 30). Ved å la studentene undersøke historiske tekster knyttet til bevisførsel mener Kjeldsen og

Blomhøj at studentene kan bli engasjert i diskusjoner og refleksjoner om meta-regler for matematisk diskurs (Kjeldsen & Blomhøj, 2012, s. 346).

### 2.2.3 Andre forslag til undervisningsopplegg

Jankvist utarbeidet i 2007 to undervisningsmoduler for elever i den videregående skolen. (Jankvist, 2010). I Danmark kom det ny læreplan I 2006-2007 som stilte større krav til elevenes historiekunnskap. I tillegg var det mulighet for å velge et tilleggspensum, som utdypet kjernepensumet i faget. Dette gjorde at det var mulig å bruke 15 dobbelttimer til en slik historisk modul, uten at det gikk utover andre emner som elevene måtte gjennom. Emnet som ble valgt for elevene i dette tilfellet var utviklingen av feilrettingskoder. Det ble laget en tekstbok til elevene, der historie og matematikk ble presentert side om side. Elevene måtte svare på spørsmål og løse oppgaver knyttet til det matematiske innholdet i hvert kapittel. Det var også mindre essay oppgaver der elevene skulle diskutere utviklingen til matematikken som ble presentert og dens anvendelse, før de mot slutten av modulen skulle skrive et større essay. Det at elevene skulle skrive et slikt essay gjorde at i dette forsøket ble matematikkens historie målet, ikke kun et verktøy for å lære matematikk.

Meavilla og Flores (2007) utga et undervisningsforslag til hvordan en kan bruke originaltekster i matematikkundervisningen. De forslår her å gjennomføre undervisningen i tre faser:

1. Analysere originaltekst og problemløsning
2. Analyse av originalløsning
3. Sammenligne løsningsmetoder

Målet med forslaget er å gjøre elever på ulike nivåer kjent med klassiske matematiske tekster, og også å få lærere til å innse at historien er en kilde til didaktiske ressurser.

Både Burns (1964) og Arcavi (1987) har publisert forslag til undervisningsopplegg basert på egyptisk matematikk. Burns utarbeidet oppgaveark for bruk i barneskolen, mens Arcavi skisser grunnlaget for en matematisk aktivitet som kan brukes på alle nivåer i skolen.

Et annet forslag kommer fra Panagiotou (2011) som foreslår å bruke matematikkens historie til å undervise logaritmer. Valget av logaritmer som emne er gjort fordi dette er et matematisk konsept som har endret seg opp i gjennom historien. I dagens lærebøker presenteres ofte logaritmer etter at eksponentialfunksjoner har vært introdusert, men historien viser at logaritmer egentlig oppstod før eksponentialfunksjonen. I utgangspunktet var logaritmer et verktøy for å utføre kompliserte kalkulasjoner enklere og raskere, noe som i dag enkelt gjøres med en kalkulator eller PC. Logaritmiske og eksponentielle funksjoner er derimot stadig viktig, da disse beskriver en rekke naturlige fenomener (Panagiotou, 2011, s. 2). I sin artikkel presenterer Panagiotou logaritmenes historie på en slik måte at historien kan være utgangspunkt for undervisning av elever på 11. trinn, uten forkunnskaper i matematisk analyse. Tanken er at elevene skal lære at logaritmer var et verktøy utviklet for å løse praktiske problemer, og siden utviklet det seg til å bli et viktig teoretisk analyseverktøy. Artikkelen er ikke et ferdig undervisningsopplegg, men ment som en støtte for læreren som vil bruke matematikkens historie til å undervise om logaritmer. I artikkelen er forfatteren klar på at han ikke følger det genetiske prinsipp fullt ut, men bruker historien som en veiledning, på en måte som minner om den indirekte bruken av det genetiske prinsipp som vi så på i kapittel 2.1.1. Målet er at elevene skal lære om logaritmer, og da forfølges ikke alle ideer i historien fullt ut, hvis dette kan virke forstyrrende på elevenes læring.

Det presenteres ikke noen resultater fra utprøving av undervisningsopplegg knyttet til stoffet som presenteres i artikkelen, men det nevnes at det har vært gjennomført i to skoleklasser, med positive tilbakemeldinger fra elevene som deltok i forsøkene.

## 2.3 Motforestillinger mot bruk av matematikkens historie i matematikkundervisningen

I ICMI-studien (Fauvel, 2000) nevnes det noen innvendinger mot bruk av historie i matematikkundervisningen. Motforestillingene deles opp i psykologiske og praktiske. Av psykologiske motforestillinger nevnes (Fauvel, 2000, s. 203):

1. Historie er ikke matematikk
2. Historien kan være uoversiktlig og forvirrende heller enn opplysende
3. Studentene har for lite kjennskap til historien, noe som gjør det umulig å plassere matematikken i en historisk kontekst.
4. Mange studenter misliker historie og vil derfor ikke bli motivert av historisk matematikk.
5. Framskritt i matematikken er å gjøre vanskelige utfordringer til rutine. Så hvorfor skal vi se bakover?
6. Historie kan være med på å utvikle kulturell sjåvinisme eller nasjonalisme.

Av praktiske motforestillinger nevnes:

1. Mangel på tid. Det er allerede problematisk å rekke gjennom pensum på den tiden vi har i dag.
2. Mangel på ressurser. Det er liten tilgang på undervisningsressurser.
3. Mangel på ekspertise. Det er lite matematisk historie i lærerutdanningen.
4. Mangel på vurdering. Det er ingen entydig måte å innlemme den historiske komponenten i vurderingen av studenten, og hvis det ikke vurderes vil studenten hverken sette pris på det eller bry seg om det.

Selv om denne rapporten er fra 2000, så vil jeg påstå at spesielt de praktiske motforestillingene som her nevnes fremdeles er aktuelle i den norske skolen den dag i dag.

Den samme rapporten nevner også litt om situasjonen i den norske skolen ved innføring av Reform 94. I denne reformen ble historie vektlagt mer i matematikkundervisningen enn tidligere, og når forslaget var ute på høring møtte den motstand. Kritikken som da kom gikk på at historie ikke er matematikk, det var vanskelig å vurdere og det var lite kunnskap blant lærerne. Den ble som kjent innført, men ved neste korsvei, innføringen av Kunnskapsløftet, forsvant historien ut igjen av matematikkpensumet i grunnskolen.

## 2.4 Holdninger til matematikkfaget

Mennesket kan sies å ha to ulike tankesystemer; det kognitive og det affektive. De grunnleggende prosessene for det kognitive tankesettet er mønstergjenkjenning, kategorisering og assosiering. Mer komplekse kognitive fenomener, som hukommelse og bevissthet, stammer fra disse prosessene (Hannula, 2002). Det affektive domenet er knyttet til følelser, men når vi skal se på hvordan dette er bygd opp kan det fort bli vanskelig fordi det ikke er noen entydige definisjoner på begrepene som brukes. En mye brukt modell for affekt er McLeods, som sier at affekt består av følelser, holdninger og overbevisninger (Hannula, 2012; Di Martino & Zan, 2011). Når en skal definere følelser, holdninger og overbevisninger er det derimot ikke like lett. Følelser i matematikkundervisningen var tidligere knyttet til angst, men etter hvert har en forsket på hele spekteret av følelser. Det som det er enighet om er at følelser involverer fysiologiske reaksjoner og påvirker kognitive prosesser på flere måter (Di Martino & Zan, 2011). Overbevisninger ble i tidlige studier betraktet som et rammeverk for et individs beslutninger. Når en da antar at det er en sammenheng mellom overbevisning og oppførsel, så er overbevisninger interessante i forskning på matematikkundervisning fordi dette resulterer i en gitt adferd.

Når det gjelder holdninger foreslår Di Martino og Zan (2011, s.476) en modell der disse består av tre dimensjoner: følelser (liker/liker ikke), syn på matematikk (hva matematikk er) og syn på egne ferdigheter i faget. Når elever på ulike trinn ble bedt om å beskrive sitt forhold til matematikk, kunne en kjenne igjen fire punkter som gikk på negative følelser og syn på matematikk:

-matematikk er bare regler og formler
-matematikk er tørt og kjedelig, ikke noe rom for følelser
-matematikk gir ingen mening, målet med å lære seg enkelte emner er uklart
-i matematikk er det ikke rom for å uttrykke egne ideer

En annen undersøkelse som studerte norske og engelske elevers holdninger til matematikk hadde liknende funn (Pepin, 2011). I denne undersøkelsen brukes holdninger som sosio-kulturelle konstruksjoner som kobler sammen kognitive, motivasjonsrelaterte og affektive faktorer i studenters læring av matematikk (Pepin, 2011, s.544). Her argumenteres det for at holdninger til matematikk er påvirket av:

-ambisjoner om yrke og muligheter for å oppnå disse
-hvordan matematikk er presentert og utført
-lærerens pedagogiske praksis
-et støttende miljø utenfor skolen
-vurderingssystemet og tilknyttede praksiser

Selv om noen av disse punktene er utenfor lærerens mulighet til å påvirke, så er presentasjon og pedagogisk praksis noe som kan brukes til å påvirke holdninger.

Går vi nærmere inn på motivasjon, så skiller vi mellom indre og ytre motivasjon. Indre motivasjon er det når vi har en genuin interesse for det vi holder på med. Vi liker å få nye utfordringer og vil gjerne lære mer. Ytre motivasjon er knyttet til straff eller belønning, og vil for elever i den videregående skole handle om for eksempel karakterer og forventninger fra foreldre. Elever med høy indre motivasjon får bedre karakterer (Lin, McKeachie, & Kim, 2003), de lykkes bedre på skolen, har mer positive selvbilder og har lite problemer med angst på skolen (Leroy & Bressoux, 2016). Ytre motivasjon har ofte vært ansett som et onde, men her er bildet etter hvert blitt mer nyansert. I følge Lin (2003) er moderat ytre motivasjon kombinert med høy indre motivasjon den kombinasjonen som gir det beste grunnlaget for suksess på skolen.

Matematikk som skolefag kommer dårlig ut med hensyn på motivasjon hos elevene. Leroy og Bressoux (2016, s. 43) peker på noen faktorer som kan være årsaken til dette:

1. I matematikk er det lett å skille mellom suksess og fiasko, svaret er rett eller galt.
2. Matematikk er et fag der det regelmessig innføres nye konsepter som bygger på tidligere konsepter, men tidligere konsepters relevans er ikke alltid opplagt.
3. Oppfatningen om at matematikk er et fag for de talentfulle og smarte elevene.

I tillegg ser det ut til at elevenes motivasjon for matematikkfaget avtar når de går fra grunnskolen til den videregående skolen (Leroy & Bressoux, 2016). En forklaring på dette kan kanskje være at den ytre motivasjonen blir sterkere jo høyere opp i skolesystemet elevene kommer. En modell for hvordan læreren kan øke elevenes motivasjon i matematikkfaget inneholder tre hovedkomponenter (Lindner, Smart, & Cribbs, 2015, s. 402):

1. Redusere stress
2. Trygt miljø
3. Matematikkens verdi

Stress oppstår først og fremst i forbindelse med prøver, så vurderingssituasjoner må ufarliggjøres, ifølge denne modellen. Modellen er basert på observasjoner av elever i grunnskolen, og her er nok dette enklere å få til enn høyere opp i skolesystemet hvor enkelte vurderingssituasjoner fremdeles er av avgjørende betydning for elevene. Elevene trenger også å være trygge på at de har lærerens støtte, og ikke blir straffet for feil de gjør. Dette henger sammen med den andre faktoren som går på å skape et trygt miljø i klasserommet. Å koble matematikken med relevante praktiske problemer, legge til rette for diskusjoner både elevene imellom og mellom lærer og elev, og oppmuntre elevene for å øke troen på egne ferdigheter er andre elementer som bidrar til å skape et trygt miljø i klasserommet. Å framheve matematikkens verdi kan gjøres ved å vise til hva matematikken brukes til i dagliglivet, men samtidig er det også viktig at læreren selv viser at han eller hun liker matematikkfaget. Dette kan påvirke elevenes oppfatning av matematikkens betydning.

Hvis en ønsker å påvirke elevenes motivasjon for matematikkfaget, så må en gjøre forandringer med måten en underviser faget på. Det er lite sannsynlig å oppleve endring i motivasjon, hvis miljøet ikke endres (Bieg, Reindl, & Dresel, 2016). Dette mener jeg støtter opp om tanken på å bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen, da dette vil kunne gi læreren en mulighet til å endre undervisningspraksis.

# 3 Metode

I dette kapittelet vil jeg først beskrive utvalget av elever som deltok i forsøket. Deretter beskriver jeg utarbeidelse av de ulike oppgavesett, gjennomføring av intervju og bakgrunn for et spørreskjema som ble brukt til å måle elevenes holdninger til matematikkfaget.

## 3.1 Utvalg

Forsøket ble gjennomført med elever fra en videregående skole i en mindre by sør i Norge. Elevene kom fra tre studiespesialiserende klasser på andre trinn i den videregående skolen, der elevene er 17-18 år. I samtale med ledelsen på skolen ble det avtalt et tidspunkt for gjennomføring av undervisningen basert på matematikkens historie slik at dette ikke kom i veien for eksamensforberedelsene til elevene. På det tidspunktet undervisningen med utgangspunkt i matematikkens historie ble gjennomført var elevene ferdige med ordinær undervisning og eksamener, og kunne denne dagen velge mellom fagdager med ulike emner. Ett av emnene var altså matematikk basert på matematikkens historie. Elevene stod fritt til å velge hva de ville delta på, og 20 elever valgte da å delta på dette prosjektet. De hadde ulike forutsetninger i matematikk, men alle hadde valgt fordypning i matematikk inneværende skoleår. Dette betyr at de istedenfor minstekravet 2P (praktisk matematikk, 3t per uke), enten hadde gjennomført S1 (matematikk for samfunnsfag, 5t per uke) eller R1 (matematikk for realfag, 5t per uke).

Det ble ikke på noe tidspunkt samlet inn personopplysninger fra elevene. Det var ingen navn på spørreskjemaet, og i intervjuet ble elevene tildelt et nummer for å sikre anonymitet. Dette ble opplyst til elevene før de meldte seg på. Elevene stod også fritt til å trekke seg fra videre deltakelse i prosjektet, dersom de skulle ombestemme seg. Prosjektet ble ansett som ikke meldepliktig av Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD), se vedlegg 2.

Elevene meldte seg på undervisningen en uke før gjennomføring, men dessverre var det mange elever som i løpet av denne uka ombestemte seg. Derfor var det kun syv av de som egentlig var påmeldt som møtte opp. De 13 andre hadde i utgangspunktet valgt å delta på andre prosjekter, og hadde derfor ikke gjennomført spørreundersøkelsen før undervisningen ble gjennomført.

## 3.2 Oppgavene

Jeg utarbeidet fire ulike oppgavesett, men da det er et poeng at elevene skal ha god tid til å arbeide med oppgavene, valgte jeg å bare bruke tre av oppgavesettene.

Følgende kriterier ble lagt til grunn for utforming av oppgavesettene:

-Oppgavene må kunne løses med forkunnskaper fra matematikk 1P på Vg1.
-Minst ett av oppgavesettene skal gi elevene innblikk i matematikk fra andre kulturer.
-Oppgavesettene bør gi elevene mulighet til å sammenlikne gamle og moderne metoder.
-Oppgavesettene bør kunne gi elevene en oversikt over hvordan matematikken har utviklet seg.
-Oppgavesettene skal være utformet slik at elevene i samarbeid kan komme fram til løsning, uten innblanding fra lærer.

Med dette utgangspunktet undersøkte jeg hva som fantes av undervisningsopplegg basert på historisk material. Jeg fant da fire aktuelle emner som jeg kunne bruke:

1. Egyptisk matematikk basert på utdrag fra Rhind-papyrusen
2. Utvikling av sannsynlighetsregning basert på korrespondanse mellom Pascal og Fermat
3. Utvikling av det binære tallsystemet fra Leibniz til moderne tid
4. Utvikling av grafteori basert på Eulers problem med broene i Königsberg

Jeg valgte å gå videre med emne 1, 3 og 4. Oppgavesettet om sannsynlighetsregning ble ikke med i undervisningen, da jeg vurderte det som det mest tidkrevende oppgavesettet, og samtidig det emnet som stilte størst krav til matematiske forkunnskaper.

Jeg vil nå presentere de tre oppgavesettene som ble brukt.

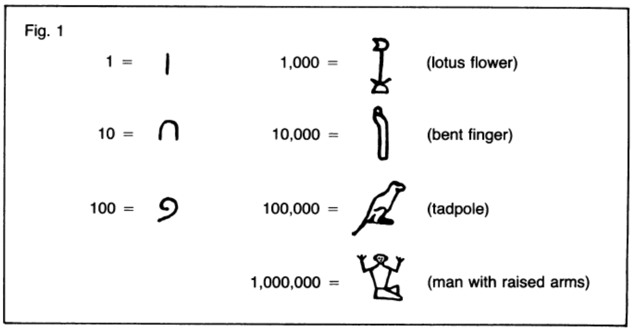
### 3.2.1 Oppgavesett 1

Dette oppgavesettet omhandler egyptisk matematikk, basert på en artikkel av Arcavi  og Isoda (2007). Alle figurene er hentet fra Arcavi (1987) samt Arcavi og Isoda (2007). Utgangspunktet er funn gjort på Rhind-papyrusen (Rhind papyrus, n. d. ). Rhind-papyrusen finner vi i dag på British Museum i London. Den dateres til ca 1550 fvt og er et av de beste eksemplene på egyptisk matematikk vi har i dag. Den er sannsynligvis en lærebok i matematikk og inneholder 84 matematiske problemer som dekker multiplikasjon og divisjonstabeller, brøkregning og geometri. I utgangspunktet er skriftspråket på papyrusen hieratisk, men i disse oppgavene er det oversatt til hieroglyfer, som er enklere å tyde. I tillegg har hver oppgave en moderne oversettelse (engelsk tekst), der enkelte felt er utelatt. De oversatte oppgavene er basert på boken til Arnold Buffum Chase (1927), der han går grundig gjennom innholdet i papyrusen og oversetter alle de 84 problemene fra egyptisk til engelsk.

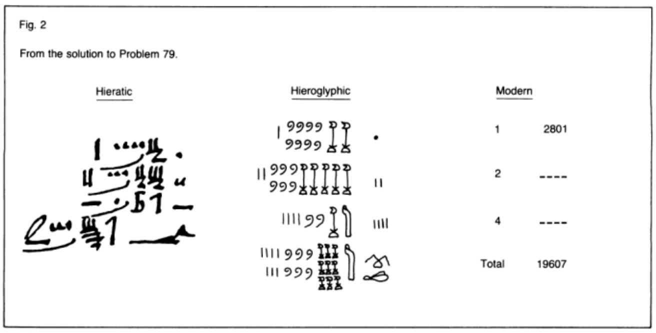
Målet med dette oppgavesettet er at elevene skal lære om de egyptiske metodene for multiplikasjon og løsning av lineære likninger, for så å sammenlikne disse med de metodene vi bruker i dag.

Oppgavesettet inneholder tre oppgaver, der hver oppgave er knyttet til en figur og har spørsmål for å lede elevene på riktig vei.

Den første oppgaven i dette settet inneholder to figurer.



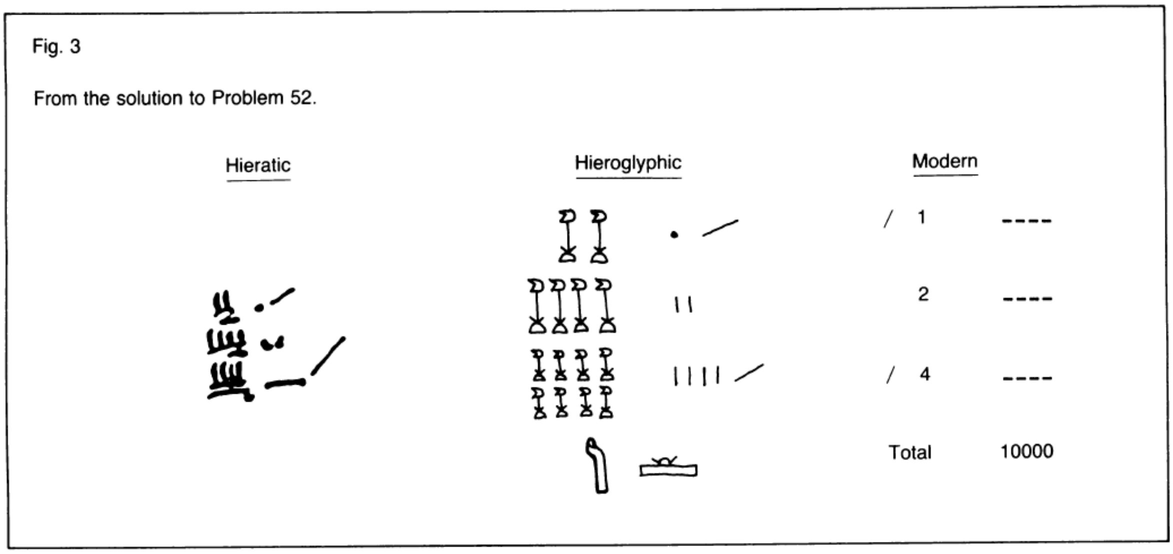

*Figur 1: Oversikt over egyptiske tallsymboler, hentet fra Arcavi (1987, s.13)*




*Figur 2: Figur til oppgave 1 i oppgavesett 1, hentet fra Arcavi (1987, s.14)*

Figur 1 gir en oversikt over de egyptiske symbolene for våre tall, mens figur 2 er et regnestykke. I den moderne kolonnen er noen felter blanket ut, og det blir elevenes oppgave å fylle ut denne, samt å avgjøre hvilken regneoperasjon som har funnet sted her.

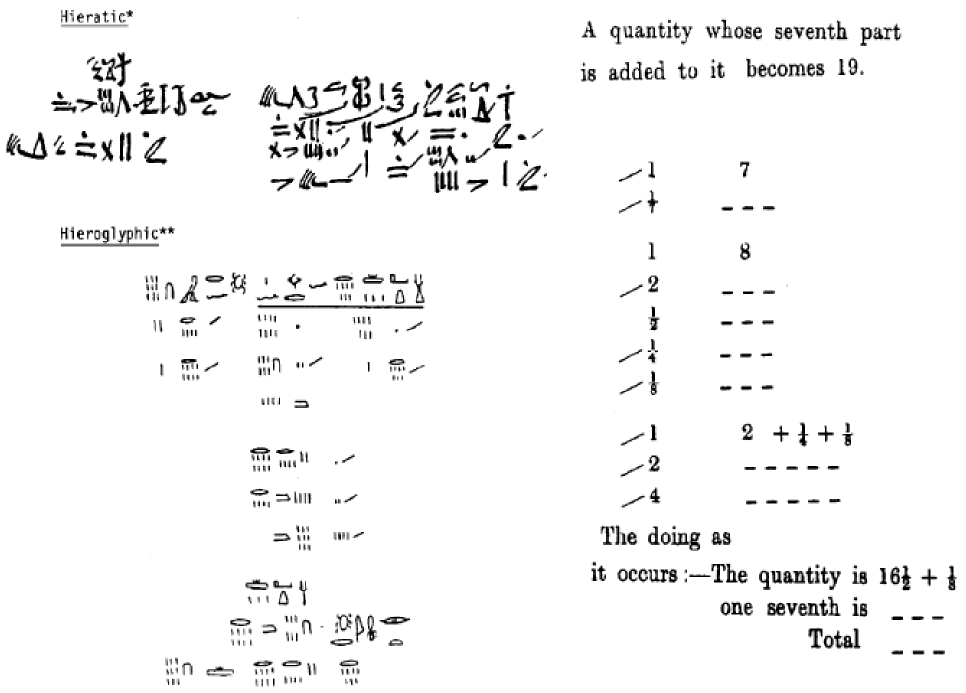
I den andre oppgaven i dette oppgavesettet får elevene en ny figur.




*Figur 3: Figur til oppgave 2 i oppgavesett 1, hentet fra Arcavi (1987, s. 15)*

Igjen et regnestykke der den moderne kolonnen ikke er fullstendig utfylt. Her må elevene i tillegg til å fylle ut de manglende tallene finne ut hva «/» foran tallet betyr.

Figur 4 viser den tredje oppgaven i dette oppgavesettet.




*Figur 4: Figur til oppgave 3 i oppgavesett 1, hentet fra Arcavi og Isoda (2007, s. 120)*

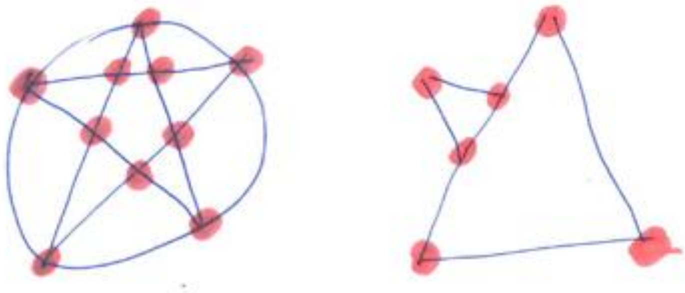
Dette er en lineær likning som elevene først skal løse på den moderne måten utfra den engelske teksten. Videre skal de så fylle ut de blanke feltene i den moderne kolonnen og bruke resultatet her til å løse likningen. Underveis blir de også bedt om å fortelle hva de har gjort. Til slutt skal de prøve å løse likningen ved å starte med tallet 14 istedenfor 7.

### 3.2.2 Oppgavesett 3

Leonhard Euler (1707-1783) ble født i Basel i Sveits, der han også studerte under Johann Bernoulli (O'Connor & Robertson, 1998). Etter studiene tilbrakte han mye tid i St Petersburg hvor han jobbet for Katarina den store. Han var interessert i nesten alle former for matematikk, og i dag anses han som en av de største matematikerne gjennom tidene (Mastin, 2010). Han var meget arbeidsom, og selv om han etter hvert ble blind hindret ikke dette ham i å publisere opptil en artikkel i uka.

Dette oppgavesettet er en forkortet og oversatt versjon av et oppgavesett hentet fra Math Forum (Reed, 1998). Vi begynner her med de syv broene i Königsberg. Elevene skal prøve å finne en vei over alle de 7 broene i Königsberg, uten å passere den samme broen to ganger. Deretter skal de prøve med færre broer, før de blir presentert for begreper fra grafteorien. De får definisjonen av en graf og Euler sti, og skal så bruke dette til å finne eventuelle Euler-stier i en rekke figurer. Målet er at elevene skal kunne avgjøre om en graf har en Euler-sti, uten å måtte lete seg fram til denne.

Figur 5 viser eksempler på oppgaver der elevene skal undersøke om det finnes en Euler-sti.



*Figur 5: Eksempler på oppgaver i oppgavesett 3 der elevene skal undersøke om det finnes en Euler-sti.*

### 3.2.3 Oppgavesett 4

Gotfried Wilhwlm Leibniz (1646-1716) var en tysk filosof og matematiker, som også var aktiv som diplomat, historiker, jurist og teolog. Som matematiker er han kanskje mest berømt for sitt grunnleggende arbeid med differensial og integralregning (Svendsen, 2014). Notasjonene som Leibniz innførte for den derivasjon og integral er fremdeles i bruk den dag i dag. Han anses også for å være ansvarlig for utviklingen av det binære tallsystemet, selv om Leibniz selv var klar over at de gamle kineserne hadde hatt lignende ideer (Mastin, 2010).

Leibniz utvikling av det binære tallsystemet danner grunnlaget for dette oppgavesettet, men vi går også videre til moderne tid og det heksadesimale tallsystemet. Settet bygger på oppgaver hentet fra Jeremy M. Lodder (Hopkins, 2014, s. 169-174). Hensikten er at elevene skal få en forståelse av historien bak det binære tallsystemet og se hvordan bruken har utviklet seg gjennom tidene.

Vi begynner her med en oppgave der elevene skal finne fire standardlodd som kan veie alle vekter fra 1 til 15.

Leibniz innser at vi kun trenger 4 ulike lodd for å veie alle mulige stein med (heltallig) vekt mellom 1 og 15. Hva er disse 4 standardloddene? (4 ulike lodd, hvert lodd kan bare brukes en gang).

Fyll ut følgende tabell:

| Standardlodd: | Nr 1 | Nr 2 | Nr 3 | Nr 4 |
|---|---|---|---|---|
| Vekt av stein | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |
| 11 | | | | |
| 12 | | | | |
| 13 | | | | |
| 14 | | | | |
| 15 | | | | |

*Figur 6: Den første oppgaven i oppgavesett 3, Leibniz tabell for standardlodd*

Deretter skal elevene skrive noen vanlige tall på utvidet form, før de beveger seg over i totallsystemet og prøver å gjøre om vanlige tall til binære tall.

Eksempler på addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med binære tall blir oppgitt, og elevene skal forklare framgangsmåten.

Til slutt ser vi på det heksadesimale tallsystemet. Elevene gjør om mellom vanlige tall, til binære tall og heksadesimale tall. En kan da også komme inn på bits og bytes, men det rakk vi ikke her.

## 3.3 Gruppeintervju

Fem elever gjennomførte et gruppeintervju på 20 minutter i etterkant av undervisningen. Eleven meldte seg frivillig til å gjennomføre intervjuet. Som et grunnlag for utforming av intervjuet ble Hilde Sollids guide brukt (Brekke & Tiller, 2013, s. 124-137). Hensikten med intervjuet var å få elevenes tilbakemeldinger på hvordan de opplevde å jobbe med oppgaver knyttet til matematikkens historie. Elevene ble først spurt om hvilket inntrykk de satt igjen med etter undervisningen, før vi gikk mer i detalj på hvert av oppgavesettene.

Elevene fikk da spørsmål som:

-Var emnet interessant?

-Lærte du noe? I så fall hva?

-Fungerte arbeidsmåten?

-Hvordan var oppgavene formulert?

-Kunne dette vært brukt i en vanlig undervisningstime?

Elevene ble spurt om å kommentere innhold og utforming av oppgavesettene, og å gi tilbakemelding på arbeidsform og eventuell bruk i vanlig matematikkundervisning.

## 3.4 Spørreundersøkelse

Spørreskjemaet som ble brukt til å måle elevenes holdninger ti matematikk er en oversatt versjon av «Attitudes Toward Mathematics Inventory» (ATMI)[1] (Tapia, 1996). Dette skjemaet inneholder spørsmål som likner på de vi finner i «Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales» (FSMAS) (Fennema & Sherman, 1976), som har vært det mest brukte spørreskjemaet på dette området siden det ble konstruert på 70-tallet (Mulhern & Rae, 1998; Yee & Chapman, 2013). FSMAS består av ni kategorier, hver med 12 spørsmål. Det er derfor et omfattende skjema som tar omtrent 45 minutter å gjennomføre. ATMI ble derfor utviklet som et kortere alternativ (Yee & Chapman, 2013; Tapia). ATMI inneholder 40 påstander knyttet til fire faktorer:

1. Elevens følelse av trygghet -15 påstander
2. Matematikkens verdi – 8 påstander
3. Motivasjon – 9 påstander
4. Trivsel med matematikk – 8 påstander

Cronbach alpha koeffisientene for de fire faktorene ble av Tapia (1996) funnet til å være henholdsvis 0,95, 0,86, 0,89 og 0,88. Totalt for hele skjemaet oppgis Cronbach alpha til å være 0,97 (Tapia, 1996).

[1] Skjemaet kan lastes ned fra: http://www.pearweb.org/atis/tools/48

Spørreskjemaet er utviklet for en studie av amerikanske high-school studenter, men også prøvd ut på elever i Singapore (Yee & Chapman, 2013) og Ghana (Asante, 2012).

Med god hjelp fra kolleger ved avdeling for språkfag ble spørsmålene oversatt til norsk før elevene gjennomførte undersøkelsen.

Elevene besvarte skjemaet en uke før undervisningen ble gjennomført, og på nytt rett etter at undervisningen var avsluttet. Syv elever deltok begge gangene.

For å sjekke om endringene i elevenes skår var signifikante ble det utført en t-test for avhengige hendelser på gjennomsnittet for hver variabel før og etter undervisningen basert på matematikkens historie var gjennomført. For hver test ble p=0,05 brukt som signifikansnivå.

# 4 Resultater

I dette kapittelet vil jeg presentere de innsamlede data. Først kommer noen observasjoner jeg selv gjorde i løpet av denne dagen med undervisning basert på matematikkens historie. I det andre kapitelet presenteres og diskuteres elevenes tilbakemeldinger i gruppeintervju før jeg så går videre til resultatene fra spørreundersøkelsen.

## 4.1 Generelle observasjoner av elevenes arbeid

Dagen var delt opp i tre økter på ca. to timer hver. Hver økt ble innledet med en femminutters informasjon om tidsepoken og aktuelle matematikere. Elevene skulle så bruke resten av tiden på oppgavearkene, før vi tok en felles oppsummering i slutten av hver økt.

Vi startet med oppgavesettet om egyptisk matematikk, og etter en kort presentasjon om Rhind-papyrusen og Egypt fikk elevene utdelt oppgavearket. Elevene var ivrige og snudde seg raskt mot de som satt i nærheten. Elevene samarbeidet først i små grupper på 3-4, men etter hvert fungerte hele klassen som en stor gruppe, der det ble utvekslet ideer på kryss og tvers av rommet. Hjelpeteksten på de to første oppgavene ble lite brukt, her gikk elevene løs på å fylle inn de manglende tallene med en gang. På den tredje oppgaven (likningen) ble derimot hjelpeteksten mer brukt, og elevene hjalp hverandre med forklaringer på hvordan og hvorfor underveis. Når det så ut til at de fleste var enige om resultatet, tok vi en samlet gjennomgang på slutten av økten.

Etter en pause gikk vi videre på oppgavesettet om Leibniz. Her ble Leibniz kort presentert før oppgavesettet ble utdelt. Den første oppgaven var hvilke standardlodd som skulle brukes, og her måtte det avklares at det var 4 lodd, alle med ulik vekt, før elevene kunne starte arbeidet. Dette var opplyst i teksten, så igjen viser det at elevene var så ivrige på å starte rett på oppgavene at de ikke leste oppgaveteksten godt nok. Her tok vi en oppsummering etter den første oppgaven, da elevene trengte litt hjelp for å se hvordan denne tabellen kunne brukes til å oversette tall fra titallsystemet til totallsystemet. Men deretter arbeidet elevene på egenhånd videre fram til det heksadesimale tallsystemet. Her tok vi en felles oppsummering av arbeidet med totallsystemet, før vi så på hvordan det heksadesimale tallsystemet var bygd opp. Vi så også sammen på hvordan vi kunne gjøre om tall direkte fra totallsystemet til det heksadesimale tallsystemet.

På slutten av denne økta sammenliknet vi så omgjøringen fra titallsystemet til totallsystemet med multiplikasjonsmåten fra Egypt. Det framkom da kommentarer som «de var ikke så dumme likevel disse egypterne» da elevene så hvor like disse regnemåtene var. Da har vi kanskje lykkes med å gi elevene kjennskap til og respekt for andre kulturer, noe som jo er et argument for å bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen.

Den siste økta ble innledet med noen ord om Euler. Alle hadde brukt *e* i matematikken, men ingen kjente til at dette var eulertallet. Historien om Königsberg ble presentert, og elevene satte i gang med å prøve å planlegge byvandring. Her tok vi også en oppsummering før vi gikk videre på de andre figurene, der de selv skulle avgjøre om det fantes en Euler-sti eller ikke. Avslutningsvis tok vi en felles gjennomgang av de siste oppgavene.

## 4.2 Tilbakemeldinger i intervju

Det var fem elever tilstede på intervjuet, tre gutter og to jenter. Innledningsvis ble de spurt om dagen generelt, før vi etter hvert gikk mer inn på hvert enkelt oppgavesett.

Generelt så var det positive kommentarer på dagen som helhet. Når de ble bedt om å konkretisere hva som hadde vært bra eller gøy, så gikk svarene både på innhold og form.

Innholdet var interessant fordi de nå fikk god tid til å sette seg inn i emner de tidligere hadde hørt om, for eksempel totallsystemet. Elevene fikk også innblikk i andre metoder for å løse matematiske problemer.

Elev 1: Noen ting man hadde hørt om før liksom, kanskje ble det litt mer grundig forklart nå. Vi visste jo hva totallsystemet var, og kunne skrive masse tall på det liksom, men nå var det lettere å se sammenhengen mellom det og sekstentallsystemet.

Elev 3: ….du…. utvider på en måte kunnskap du har om hvordan regne forskjellige ting og mange måter du kan regne ting på. Sånn som jeg hadde ikke hørt så mye om totallsystemer og sekstentallsystemer og alt mulig sånn, så jeg lærte egentlig veldig mye.

Vi ser at Elev 1 mener at totallsystemet ble grundigere forklart denne dagen. Elevene fikk jo en kort innføring etter at de selv hadde jobbet med oppgaven om Leibniz sine lodd, men ingen lengre forklaring ble gitt. Når eleven likevel føler at det ble grundigere forklart, så kan det skyldes at elevene selv arbeidet med prinsippet for binære tall i den første oppgaven i oppgavesett 3.

I tillegg var det enkelte elever som så for seg at også andre fagområder kunne knyttes til de emnene de hadde jobbet med denne dagen.

Elev 1: Og så når vi hadde om det siste vi hadde om, det binære tallsystemet og sånt, det er kanskje også noe som kunne vært inn i fysikken.

Denne koblingen til fysikk kommer Elev 1 med uoppfordret, og det knyttes også til data og teknologi. Det er tydelig at flere av elevene har vært innom binære tall tidligere, men ikke gjort så mye annet en å «skrive masse tall på det liksom». Etter denne økta virker det som om de har fått en litt annen forståelse av emnet. Hvis vi ser tilbake på noen av argumentene for å bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen, så var det at en på denne måten kunne se hvordan matematikk var knyttet til andre fagområder et av argumentene.

Når det gjelder formen på oppgavesettene og hvordan undervisningen ble organisert så var de fem elevene ganske samstemte. Når de ble bedt om å kommentere hvordan det var å arbeide med oppgavesettene, fikk jeg tilbakemeldinger som:

Elev 2: Men så er det jo litt gøy med litt annerledes logisk tenkning, ikke bare sånn… i R-matte er det masse sånn bare følge regler, regler, regler. Men sånn som… så er det litt gøy å prøve seg fram før du får vite reglene. Sånn som du gjorde med oss nå, for eksempel med den egyptiske regninga og igjen med dette her med Eulers sti, Eulerstien. Det var litt gøy, så fikk vi prøve oss fram og så fikk vi liksom skjønne det mer selv da, at det måtte være oddetall i alle punktene unntatt start og slutt.

Jeg er i hvert fall veldig glad i at en må tenke litt, liksom. Prøve å finne fram til egne måter å løse, ikke bare en egen løsning, men måter å løse det på. Det synes jeg er veldig gøy.

Også synes jeg det er veldig nyttig, i hvert fall i R-matten, det er veldig sånn bare følge alle reglene. Det er veldig nyttig, litt sånn avkobling, og heller tenke logisk, litt hjernetrim. Så slipper man å…. Det er ikke mye grubling liksom i R-matten, det er bare du må vite hvilken formel du må bruke, så bare putter du talla inn og så får du ett svar, som du egentlig ikke skjønner.

Elev 1: Ja også når vi har sånn tema i matten til vanlig, så lærer vi først hvordan vi skal regne, og så går det liksom to måneder og så får du den aha-opplevelsen for hvorfor du skulle kunne det liksom. Nå kunne du først vite hvorfor du skal kunne noe, og så lærte du det etterpå

Elev 3: Vanligvis så lærer du bare metoder å gjøre ting på. Du så litt sånn derre… sammenhengen mellom ting.

Elev 4: Jeg likte at vi skulle finne ut av hva du hadde gjort selv, før vi gikk gjennom det på tavla.

Vi ser at elevene er vant til matematikktimer der en har et fast mønster; først gjennomgang på tavla, deretter arbeide med oppgaver. De oppgavene de ble presentert for i disse oppgavesettene gjorde at de måtte arbeide på en annen måte, og det ser ut til å ha motivert elevene. Som Elev 1 sier: «*Nå kunne du først vite hvorfor du skal kunne noe, og så lærte du det etterpå*». Det er jo slik matematikken har oppstått, vi har et problem og trenger å finne en måte å løse det på. Så derfor mener jeg at denne typen oppgaver kan være med å gi elevene en bedre forståelse av matematikkens natur.

Elev 2 utdyper hvordan han arbeidet med figurene i Euler-oppgaven:

Elev 2: Men jeg merket i hvert fall selv hvordan tenkemåten utviklet seg i løpet av oppgaven. For det er jo en ganske lang oppgave, med ganske mange forskjellige. Sånn som på den første, så måtte en begynne å prøve liksom. På den andre så måtte jeg begynne å prøve. Når jeg kom på figur 3 så skjønte jeg ikke hvorfor den ikke skulle gå, når figur to funket. De var jo nesten like, men så så jeg at det var dobbelt opp med partall… nei oddetallspunkt liksom. Og da kunne jeg begynne å søke mer metodisk da. Så det liksom… hvis man trener opp den evnen i skolen til å finne metoder, så er det veldig… det er også ganske relevant mot ingeniørretninga tenker jeg.

Eleven prøver seg altså fram på de første enkle figurene, men innser så at på de mer komplekse figurene så må han finne en forklaring på hvorfor noen har Euler-sti, mens andre ikke har det. Det blir for komplisert å prøve seg fram. Jeg tolker dette som en forståelse for at matematikk har en praktisk tilknytning, og er et redskap for å løse problemer. Det blir enda tydeligere når han kobler det til ingeniørutdanningen.

Om bruken av tid i begynnelsen av hver økt til å fortelle litt om tid, sted og personer var det delte meninger. Noen mente at dette kunne vært kuttet ut, mens andre mente at det gjorde det litt lettere å huske hva de hadde lært.

Elev 3: Men samtidig så kan det være greit å vite litt bakgrunn også, da husker du bedre…på en måte koble det opp til noe, så kan du liksom se litt utviklinger og sånn

Elev 2: Men sånn i en sånn time… time sammenheng da, så er det vel kanskje sånn at presentasjonen av personene hadde vært unødvendig….. for det er matten vi har om, eh, utviklingen av matte. Men altså vi har om mye av det allerede i lærebøkene, det er en hel side om pytagorashistorien

Vi ser at her er de to elevene uenige. Elev 3 mener det kan være greit å ha noe å koble matematikken til, mens Elev 2 mener at matematikken er det viktigste, ikke personene. En hel side om Pytagoras i læreboka er mer enn nok historie for denne eleven. Dette kan skyldes måten det ble presentert på, kanskje har jeg ikke fokusert nok på å gjøre denne delen interessant, men det kan også ha sin bakgrunn i at elevene var veldig ivrige etter å komme i gang med oppgavene. Det så vi jo også når elevene fikk ut oppgavearkene, så hadde de ikke tid til å lese teksten på arket godt nok før de begynte på oppgavene. Jeg mener at Elev 3 har et viktig poeng, og at det derfor bør legges arbeid i å lage en god setting i klassen før elevene begynner å arbeide med oppgavene, nettopp for at de skal få noe å koble matematikken til. Dette er også viktig for at det praktiske aspektet av matematikken skal bli tydelig.

Innholdet i oppgavesettene var ikke en del av pensum for noen av elevene, og dette var et punkt som elevene mente var viktig i forhold til om de ville bruke tid på et slikt opplegg i sine vanlig matematikktimer. Elevene reflekterte litt rundt dette, og kom blant annet med følgende tilbakemeldinger:

Elev 3: Man kan jo også tenke sånn at det bare øker på en måte forståelsen din av liksom verden rundt deg. For eksempel når du lærer ting på skolen, ikke sant, så er det ofte du kan se det igjen, Å det kan jeg bruke til det og det og sånn. For eksempel når vi hadde engelsk så var det om globale utfordringer, liksom du ser ting igjen som du har lært på skolen ofte. Og det tror jeg kan være aktuelt, selv om det ikke gjør deg bedre, at du får en bedre karakter nødvendigvis, men det at det kan hjelpe deg sånn utenfor skolen, det tror jeg

Det Elev 3 sier her tyder jo på at hun er klar over at matematikk kan hjelpe henne i situasjoner utenfor skolen. Hun er derfor mer åpen for bruke tid på aktiviteter som ikke er direkte knyttet til pensum, fordi hun mener at det kan komme til nytte likevel.

Elev 2: Men jeg tror kanskje det er mer relevant for S-matte enn i et R-matte kurs. For R-matte det er så travelt allerede, da må du ta vekk noe for at det skal kunne få plass. Ellers så må læreren gå enda fortere gjennom noen sider.

Elev 5: Tror jeg hadde det følt det var litt sløsing av tid

Her var svarene avhengig av hvilket matematikkurs (S1 eller R1) elevene hadde gjennomført. R1 elevene, som Elev 2 og Elev 5, mente at det ikke var plass til noe utenom det de trengte å kunne til neste prøve, mens S1 elevene, som Elev 3, mente de hadde hatt tid til å bruke noen undervisningstimer på liknende undervisningsopplegg i løpet av skoleåret. Begge grupper mente at i 2P kurset hadde man god tid, men dårligere faglige forutsetninger for å gjennomføre et slikt undervisningsopplegg. Dette er synspunkter elevene kom med uoppfordret, men det er selvfølgelig vanskelig for elevene å uttale seg om det faglige nivået i andre matematikkgrupper. Jeg velger å tolke disse uttalelsene som et tegn på at elevene som deltok i intervjuet har god tro på egne matematikkferdigheter.

Elev 1 mente tidspunktet for gjennomføringen av undervisningsopplegget ville være avgjørende:

Elev 1: Det kommer litt an på, hvis det hadde vært etter at vi ferdige med sånne heldagsprøver og alt sånn, sånn som nå liksom, da hadde det vært veldig greit. Hvis det hadde vært midt oppi sånne heftige prøveperioder, så ville jeg kanskje heller vært med pensum.

Tidspresset i matematikkfagene i den videregående skolen er absolutt et reelt problem, og her viser elevene at de er fullt klar over dette. Hvis det ikke er noe som kommer på neste prøve, så er det sløsing med tid. Selv om elevene er enige om at de har lært nye ting og fått dybdeforståelse, så klarer de ikke helt å se at de får betalt i form av bedre karakterer, og da er det ikke interessant å bruke tid på det. Jeg mener at dette er innspill som en absolutt må ta hensyn til hvis en velger å prøve ut et undervisningsopplegg basert på matematikkens historie. Selv om elevene kan dra nytte av den kunnskapen de tilegner seg, så vil motivasjonen for å delta på et slikt opplegg være lav, hvis elevene mener at de burde brukt tiden på å forberede seg til prøver eller eksamen. Dette kjenner vi igjen fra forsøket med undervisning i fraktalenes historie som ble gjort i Tyrkia (Yildiz, Cabakcor, & Ôzdogan, 2011).

Hvis vi nå prøver å oppsummere de tilbakemeldingene som ble gitt i intervjuet, så mener jeg vi kan sette opp følgende hovedpunkter:

-Arbeidsformen var ulik den vanlige matematikktimen

-Elevene så muligheter for å bruke matematikk på andre fagområder og i livet utenfor skolen

-Elevene fikk noen knagger å henge matematikken på

-Hvis undervisningen ikke kan knyttes direkte til pensum, så må tidspunktet for gjennomføring planlegges nøye

## 4.3 Resultat av spørreundersøkelse

Spørreundersøkelsen skulle vært besvart av alle deltakere en uke før undervisningen («pre-test») og deretter etter at undervisningen var gjennomført («post-test»). Dessverre var det kun syv av de som gjennomførte undersøkelsen uken før som dukket opp på undervisningsdagen. De resterende 13 hadde ikke gjennomført undersøkelsen uken før, så derfor blir resultatene her basert på et veldig lite utvalg.

Da jeg er interessert i å se på endringer i holdninger er det kun de som har gjennomført undersøkelsen før og etter undervisningen som er med i sammenligningen.

For hver påstand i spørreskjemaet skal en si om en er helt uenig, delvis uenig, nøytral, delvis enig eller helt enig. Hvert svar gis poeng på en skala fra 1 til 5, der 5 er betyr at en er helt enig i påstanden (noen av påstandene har negative fortegn, og for disse er poengskalaen invertert, se merknad 2, 3 og 4).

Tabell 1 viser de åtte påstandene som utgjør kategorien «hvor underholdende synes du matematikk er?», med gjennomsnittsverdier før og etter gjennomføring av undervisningen basert på matematikkens historie.

Vi ser at gjennomsnittet etter gjennomføringen av undervisning basert på matematikkens historie er noe høyere enn fra undersøkelsen utført uken før. Ved bruk av SPSS ble det utført en t-test for avhengige utvalg som sammenlignet elevenes skår på hvor underholdende de synes matematikk er før og etter gjennomført undervisning. For denne faktoren finner vi en signifikant forskjell på gjennomsnittskår før undervisning (M=4,09, SD=0,70) og etter undervisning (M=4,34; SD=0,56); ($t(6) = 3{,}464$, $p = 0{,}013$). Noen enkelte påstander utmerker seg med relativt store utslag. «Jeg trives bedre i matematikktimene enn i noen andre fag» har fått en lavere karakter, mens «Jeg liker virkelig matematikk» og «Jeg er komfortabel med å svare på spørsmål i matematikklassen min» har fått høyere karakter. At denne sist har økt stemmer bra med de observasjonene jeg gjorde mens elevene arbeidet. Da virket det som om alle ganske raskt var komfortable med å bidra med forklaringer, eller stille spørsmål til de andre elevene i gruppa.

*Tabell 1: Hvor underholdende synes elevene matematikk er?*

| Påstand | Gjennomsnitt før | Gjennomsnitt etter |
| --- | --- | --- |
| Jeg får stor tilfredsstillelse av å løse matematiske problemer | 3,86 | 4,57 |
| Matematikk er tørt og kjedelig[2] | 4,43 | 4,57 |
| Jeg liker å løse nye matematiske problemer | 4,29 | 4,29 |
| Jeg liker virkelig matematikk | 4,14 | 4,29 |
| Jeg trives bedre i matematikktimene enn i noen andre timer | 3,71 | 3,29 |
| Matematikk er et veldig interessant fag | 4,43 | 4,71 |
| Jeg føler meg komfortabel med å uttrykke mine ideer om hvordan en kan løse et vanskelig matematisk problem | 4,00 | 4,43 |
| Jeg er komfortabel med å svare på spørsmål i matematikklassen min | 3,86 | 4,57 |
| Totalt | 4,09 | 4,34 |

I tabell 2 har vi de åtte påstandene som utgjør kategorien «verdien av matematikk». Også her er gjennomsnittsverdien totalt høyere etter gjennomført undervisning (M=4,54, SD=0,52) mot skår før undervisningen (M=4,39, SD=0,46). En t-test for avhengige utvalg viser at denne endringen ikke er signifikant ($t(6) = 1{,}255$, $p=0{,}256$). Likevel kan det være verdt å merke seg påstanden «Jeg tror at å studere matematikk vil hjelpe meg å løse problemer innenfor andre områder» som har en mye høyere (+0,9) verdi etter gjennomført undervisning. Denne påstanden går direkte på tverrfaglig bruk av matematikk, noe som også kom fram i gruppeintervjuet av elevene. De andre påstandene her har kun mindre økning eller nedgang.

[2] Her er skalaen invertert, slik at 1 betyr helt enig og 5 helt uenig

*Tabell 2: Elevenes oppfatning av verdien av matematikk*

| Påstand | Gjennomsnitt før | Gjennomsnitt etter |
|---|---|---|
| Matematikk er et veldig nyttig og nødvendig fag | 5,0 | 4,7 |
| Jeg vil gjerne utvikle mine matematiske ferdigheter | 4,5 | 4,7 |
| Matematikk lærer oss å tenke, og bidrar til hjernens utvikling. | 4,3 | 4,7 |
| Matematikk er viktig i dagliglivet | 4,5 | 4,7 |
| Matematikk er et av de viktigste fagene man kan studere | 4,5 | 4,7 |
| Matematikkfagene på videregående skole vil være nyttig for meg uansett hva jeg velger å studere | 4,5 | 4,4 |
| Jeg kan se for meg mange situasjoner der jeg bruker matematikk utenom skolen | 4,2 | 4,0 |
| Jeg tror at å studere matematikk vil hjelpe meg å løse problemer innenfor andre områder | 3,7 | 4,6 |
| Totalt | 4,39 | 4,54 |

For kategorien «tro på egne ferdigheter» er det 15 påstander som er samlet i tabell 3. Her har de fleste påstandene en liten økning, men økningen er ikke signifikant når en ser på gjennomsnitt skår for denne faktoren før undervisning (M=4,34, SD=0,64) og etter undervisning (M=4,48, SD=0,57); ($t(6) = 2{,}103$, $p$=0,080). To av påstandene skiller seg ut i denne kategorien, og det er «Jeg liker ikke å høre ordet matematikk» og «Matematikk skremmer meg ikke i det hele tatt». Disse to påstandene har en økning på hhv 0,7 og 0,9. Siden skalaen er invertert for den første av disse påstandene, betyr det altså at elevene svarer at de blir mindre skremt av ordet matematikk etter gjennomført undervisning basert på matematikkens historie. Interessant er det at påstanden «Matematikk skremmer meg ikke i det hele tatt» hadde en av de laveste verdiene før undervisningen, men er etter undervisningen på samme nivå som de andre påstandene. Det kan se ut som elevene har hatt en positiv opplevelse av å delta i undervisningen, og dermed fått et mer positivt bilde av matematikkfaget.

*Tabell 3: Elevenes tro på egne ferdigheter i matematikkfaget*

| Påstand | Gjennomsnitt før | Gjennomsnitt etter |
|---|---|---|
| Matematikk er et av de fagene jeg frykter mest[3] | 4,5 | 4,7 |
| Hodet føles tomt og jeg er ikke i stand til å tenke klart når jeg jobber med matematikk[3] | 4,5 | 4,6 |
| Tanken på å studere matematikk gjør meg nervøs[3] | 4,0 | 4,3 |
| Matematikk får meg til å føle meg ukomfortabel[3] | 4,2 | 4,4 |
| Jeg er alltid veldig stresset i matematikktimene | 4,5 | 4,6 |
| Jeg liker ikke å høre ordet matematikk[3] | 4,0 | 4,7 |
| Jeg blir nervøs bare av å tenke på et matematisk problem[3] | 4,5 | 4,4 |
| Matematikk skremmer meg ikke i det hele tatt | 3,7 | 4,6 |
| Når det gjelder matematikk, har jeg høy selvtillit | 4,0 | 3,9 |
| Jeg løser matematiske problemer uten større vanskeligheter | 4,0 | 3,9 |
| Jeg regner med å gjøre det ganske bra i alle matematikkurs jeg tar | 4,0 | 4,3 |
| Jeg er alltid forvirret i matematikktimene[3] | 4,5 | 4,6 |
| Jeg føler meg usikker når jeg skal løse matematikkoppgaver[3] | 4,0 | 4,3 |
| Jeg synes det er lett å lære matematikk | 4,2 | 4,3 |
| Jeg tror jeg er flink til å løse matematiske oppgaver | 4,5 | 4,6 |
| Totalt | 4,34 | 4,48 |

De ni påstandene som omhandler motivasjon er samlet i tabell 4. Samlet sett er det også her en liten økning i gjennomsnittskår for denne faktoren etter gjennomført undervisning (M=4,25, SD=0,59) i forhold til gjennomsnittsverdier før undervisning (M=4,11, SD=0,65), men kun mindre endringer i de enkelte påstandenes poengsum. Endringen i elevenes gjennomsnittsskår er heller ikke signifikant for denne faktoren ($t(6) = 1,800$, $p$=0,122).

[3] For disse påstandene er skalaen invertert slik at 1 betyr helt enig og 5 er helt uenig

*Tabell 4: Elevenes motivasjon for matematikkfaget*

| Påstand | Gjennomsnitt før | Gjennomsnitt etter |
|---|---|---|
| Jeg er sikker på at jeg er i stand til å lære avansert matematikk | 4,2 | 4,6 |
| Jeg har som regel likt matematikk på skolen | 4,7 | 4,6 |
| Jeg foretrekker innleveringsoppgaver i matematikk framfor i norsk | 4,5 | 4,6 |
| Jeg vil helst unngå matematikk i videre studier[4] | 4,5 | 4,3 |
| Jeg er villig til å ta mer matematikk enn nødvendig | 3,7 | 4,1 |
| Jeg planlegger å ta så mye matematikk som mulig i løpet av utdannelsen min | 4,0 | 4,4 |
| Utfordringene i matematikk appellerer til meg | 4,2 | 4,3 |
| Jeg synes det er nyttig å studere avansert matematikk | 3,7 | 3,3 |
| En godt grunnlag i matematikk kan hjelpe meg i yrkeslivet | 4,7 | 4,7 |
| Totalt | 4,11 | 4,25 |

Tabell 5 oppsummerer resultatene funnet i t-test av endringene i gjennomsnittet for hver av de fire kategoriene elevene ble bedt om å vurdere i spørreundersøkelsen. Utfra denne ser vi at det kun er endringen i gjennomsnittet for påstander i kategorien «hvor underholdende synes du matematikk er?» som er signifikant med signifikansnivå $p$=0,05.

*Tabell 5: t-test av endringer i gjennomsnittet for de fire kategoriene*

| Kategori | Endring i gjennomsnittlig skår (post –pre) | 95% konfidensintervall for endringen | Df | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| Underholdning | 0,25 | 0,07 – 0,43 | 6 | 0,013 |
| Verdi | 0,14 | -0,14 – 0,42 | 6 | 0,256 |
| Sikkerhet | 0,13 | -0,02 – 0,29 | 6 | 0,080 |
| Motivasjon | 0,14 | -0,05 – 0,34 | 6 | 0,122 |

[4] For denne påstanden er skalaen invertert, slik at 1 er helt enig og 5 helt uenig

## 4.4 Reliabilitet

For å kunne vurdere kvaliteten på spørreskjemaet ble det utført en statistisk analyse av de avgitte svarene for å undersøke den interne konsistensen. Spørreskjemaet var opprinnelig utformet for en studie gjennomført på amerikanske elever, og en kan derfor ikke uten videre anta at en oversatt versjon vil fungere like godt på norske elever.

Jeg brukte IBM SPSS Statistics versjon 23 til å utføre en reliabilitetsanalyse på skjemaene som ble utfylt før undervisningen basert på matematikkens historie ble gjennomført. En tilsvarende analyse på skjemaene som ble levert i etterkant av undervisningen gir liknende resultater. Tabell 5 viser Chronbach alpha koeffisienten for hver av underkategoriene i spørreundersøkelsen, sammenliknet med de oppgitte verdiene fra Tapia (1996). I tabell 6 finner vi Chronbach alpha koeffisienten for hele spørreskjemaet, også her sammenliknet med Tapia (1996). Liknende resultater finner vi også hos Asante (2012) og Yee og Chapman (2013), men der er det litt andre kategorier som er brukt. Asante (2012) oppgir Chronbach alpha koeffisienten for hele spørreskjemaet til å være 0,97, mens Yee og Chapman (2013) har 0,91.

*Tabell 6: Chronbach alpha koeffisienter for underkategorier*

| Kategori | Chronbach alpha | Chronbach alpha fra Tapia (1996) |
|---|---|---|
| Underholdning | 0,90 | 0,88 |
| Verdi | 0,73 | 0,86 |
| Sikkerhet | 0,93 | 0,95 |
| Motivasjon | 0,86 | 0,89 |

*Tabell 7: Chronbach alpha koeffisient for hele spørreskjemaet*

| Datasett | Chronbach alpha |
|---|---|
| Utprøvd versjon | 0,96 |
| Tapia (1996) | 0,97 |

Resultatene her tyder på høy grad av indre konsistens i spørsmålene til denne undersøkelsen, så selv om det denne gangen var for få deltagere til å kunne se noen signifikante forskjeller før og etter gjennomført undervisning basert på matematikkens historie, så ser det ut til at dette spørreskjemaet kan benyttes i framtidige undersøkelser for å kartlegge elevenes holdninger til matematikkfaget.

# 5 Diskusjon

I dette kapittelet vil jeg knytte de kvalitative og kvantitative resultatene jeg har samlet inn opp mot teorien som ble presentert i kapittel 2. Jeg vil først se nærmere på de resultatene som jeg mener utmerker seg i de ulike delene av resultatdelen, før jeg til slutt i dette kapittelet diskuterer de begrensningene resultatene av forsøket har.

## 5.1 Mindre skremmende

Utgangspunktet for masteroppgaven var å undersøke om undervisning basert på matematikkens historie kunne bidra til en endring i elevenes holdning til matematikkfaget, og spesielt da om vi kunne se en økt motivasjon for videre arbeid i faget. I tillegg var jeg interessert i å kartlegge eventuelle vanskeligheter med å gjennomføre en slik undervisning i praksis. Bruker vi Jankvist (2009) sin inndeling av argumenter for bruk av matematikkens historie i undervisningen, så kan vi si at i dette forsøket ble matematikkens historie brukt som et verktøy for å øke elevenes motivasjon. Dette er ifølge Jankvist (2009, s. 237) et typisk argument for bruken av matematikkens historie som et verktøy. I tillegg til å øke elevenes motivasjon for matematikkfaget, kan matematikkens historie også bidra til å gjøre matematikkfaget mindre skremmende. Både ICMI rapporten (Fauvel, 2000) og Smestad (2002) støtter at undervisning basert på matematikkens historie kan påvirke elevenes holdning til faget, så dette var en kategori jeg hadde forventet å observere en positiv endring. Utfra svarene i spørreundersøkelsen kan vi observere en mindre endring i positiv retning for alle fire kategorier, men den er signifikant kun for en av kategoriene. Usikkerheten i data blir relativt stor når utvalget er så lite som her og kan bidra til å forklare hvorfor endringene i de tre andre kategoriene ikke er signifikante. Nå var de elevene som deltok i min undersøkelse i utgangspunktet godt motiverte elever, så det kan være vanskelig å få til en endring i positiv retning i et slikt utvalg. Like fullt var det i hvert fall to påstander som utmerket seg her. Både «Matematikk skremmer meg ikke i det hele tatt» og «Jeg liker ikke å høre ordet matematikk» skåret lavt på den første undersøkelsen, men lå over gjennomsnittet for kategorien i den andre undersøkelsen. Det er selvfølgelig vanskelig å trekke noen konklusjoner basert på to påstander på spørreskjemaet, men det antyder i hvert fall at undervisning basert på matematikkens historie kan bidra til å ufarliggjøre matematikkfaget og på den måten skape mer positive holdninger til undervisningen i faget. Hvis en klarer å ufarliggjøre matematikkfaget, så vil jo dette også være med på å skape et tryggere miljø i undervisningssituasjonene, noe som kan føre til økt motivasjon hos elevene

(Lindner, Smart, & Cribbs, 2015). Selv om det bare ble funnet statistisk signifikante endringer for en av kategoriene, så samsvarer den generelle økningen som er observert i tallmaterialet på spørreundersøkelsen med tilbakemeldinger gitt i intervjuet, der elevene ga uttrykk for at de hadde hatt det gøy denne dagen.

Den kategorien vi finner en signifikant positiv endring i var altså elevenes oppfatning av matematikkens underholdningsverdi. Spesielt merker jeg meg at påstandene «Jeg får stor tilfredsstillelse av å løse matematiske problemer» og «jeg er komfortable med å svare på spørsmål i matematikklassen min» hadde en positiv økning. Denne dagen stilte jeg som lærer få spørsmål, det var elevene selv som ba hverandre om forklaringer. Dette kan ha bidratt til at de følte seg mer komfortable med å komme med forslag til løsninger. Elevene måtte selv finne fram til hvordan oppgavene skulle løses, de hadde ingen ferdig algoritme å bruke. I intervjuet blir dette trukket fram som en positiv opplevelse hos elevene, og det kan kanskje være med å forklare den økte tilfredstillelsen av å løse matematiske problemer som de her gir uttrykk for at de opplever.

## 5.2 Tverrfaglighet

I spørreundersøkelsen finner vi en liten økning i motivasjon og underholdningsverdi, mens verdien av matematikkfaget og tro på egne ferdigheter øker mer. Spesielt interessant synes jeg det er at en påstand som «Jeg tror at å studere matematikk vil hjelpe meg å løse problemer innenfor andre områder» øker med 0,9, selv om den statistiske analysen sier at denne endringen ikke er signifikant – noe som igjen kan forklares med et lite utvalg. Tverrfaglighet var et poeng elevene selv trakk fram i intervjuet som ble utført i etterkant av undervisningen. Også påstander som «Jeg føler meg komfortabel med å uttrykke mine ideer om hvordan en kan løse et vanskelig matematisk problem» og «Jeg er komfortabel med å svare på spørsmål i matematikklassen min» har fått høyere verdier etter at undervisningen var gjennomført. Dette stemmer bra med mine observasjoner av hvordan elevene arbeidet med oppgavene. I begynnelsen var de litt forsiktige, men etter hvert var det ivrig diskusjon på tvers av klasserommet om løsninger og løsningsmetoder. Å vise matematikkens betydning i dagliglivet, og hvordan den kan brukes i andre fagområder, kan være med på å øke motivasjonen for matematikkfaget (Lindner, Smart, & Cribbs, 2015). På denne måten kan en også legge til rette for tverrfaglig samarbeid, slik Smestad (2002) argumenterer for i sin rapport.

## 5.3 Tro på egne ferdigheter

Troen på egne ferdigheter påvirker hvordan en presterer i matematikkfaget. Elever med stor tro på egne ferdigheter oppnår vanligvis bedre resultater enn de med mindre tro på ferdighetene sine (Reyes, 1984). Hvis matematikkens historie kan være med på å forbedre troen på egne ferdigheter, så vil jo det ha en positiv effekt på elevenes matematikkunnskaper. Barnett, Lodder og Pengelly (2016) rapporterer også at studenter som har arbeidet med primære kilder har lettere for å stille spørsmål, både til oppsett av matematiske problemer og om moderne notasjon. Arcavi og Isoda (2009) lot studenter arbeide med oppgaver fra egyptisk matematikk (tilsvarende oppgavesett 1 i mitt forsøk) og observerte heftige diskusjoner om hvordan en skulle løse oppgavene blant studentene som deltok i deres forsøk, ikke ulikt det jeg observerte blant mine elever. I min gruppe ba elevene hverandre stadig om forklaring, det holdt ikke å komme med et svar uten å begrunne dette.

En av årsakene til negative holdninger til matematikkfaget som Di Martino og Zan (2011) nevner er manglende muligheter til å få uttrykt egne ideer. I arbeidet med oppgaver basert på matematikkens historie ga elevene i intervjuet uttrykk for at de følte at de fikk gitt uttrykk for sine egne ideer, da ingen hadde presentert dem for en ferdig algoritme for å finne løsningen. Yee og Chapman (2015) brukte matematikkens historie i undervisningen gjennom et helt år, og målte der en forbigående positiv effekt på elevenes holdninger til matematikkfaget. I det samme forsøket fikk testgruppen en signifikant økning i matematikkunnskaper som også var målbar lenge etter at forsøket var over. En ny og annerledes undervisningsform mener de kan være årsaken til at holdningene ble positivt endret i en periode. Elevene i Singapore var vant til en bestemt form for matematikkundervisning, ikke ulik den vi vanligvis finner her i Norge, med gjennomgang av teori og eksempler før elevene blir satt til å løse oppgaver. Når de så fikk matematikkhistorie blandet inn i den vanlige undervisningen opplevdes dette som noe nytt og annerledes. Dette ble også uttalt av elevene i mitt forsøk. Elevene likte at det var en annerledes måte å jobbe på, der ikke alt var forklart på forhånd. De måtte selv samarbeide for å komme fram til hvordan oppgavene kunne løses. Så det er kanskje ikke nødvendigvis at oppgavene var basert på matematikkens historie, men måten elevene skulle arbeide på som var utslagsgivende for positive holdningsendringer? På den annen side så er kanskje matematikkens historie et veldig godt utgangspunkt for å utarbeide oppgaver av denne typen, der elevene kan arbeide på andre måter enn det de er vant til fra vanlige matematikktimer.

## 5.4 Motforestillinger

Yee og Chapman (2015, s. 207) fikk også negative tilbakemeldinger som:

- Det tar for lang tid
- Lite relevant for eksamen
- Kjedelig
- Vanskelig

Også dette er tilbakemeldinger jeg finner igjen i intervjuet av elevene mine. De var bekymret for om det ville være tid til dette i vanlige timer og om det ville hjelpe dem til eksamen. Enkelte mente også at innledningen som skulle danne den historiske settingen godt kunne utelates, og at en kunne begynne direkte med oppgavene.

Dette er innvendinger som vi finner igjen også hos lærere, som argumenter mot bruken av matematikkens historie i matematikkundervisningen, og for så vidt også som argumenter mot en konstruktivistisk arbeidsmåte i matematikkfaget. Undervisningen må organiseres på en effektiv måte for at en skal rekke gjennom alt som er pensum til eksamen, og da vil man prioritere bort å bruke tid på emner som ikke blir vurdert på eksamen.

## 5.5 Begrensninger

Til slutt er det verdt å minne om noen av forutsetningene som ligger til grunn for dette forsøket:

1. Resultatene av spørreundersøkelsen er basert på de syv som gjennomførte denne både før og etter undervisningen basert på historisk matematikk.
2. Alle deltagerne hadde valgt fordypning i matematikk, altså var holdningene til matematikkfaget i utgangspunktet positive.
3. Undervisningen baserte seg ikke på pensum for noen av fagene som elevene hadde hatt undervisning i.

Det første punktet medfører at jeg ikke kan generalisere, men likevel gir resultatene en pekepinn på hvordan elevene oppfatter undervisning basert på matematikkens historie. Det gjør også – som allerede nevnt – at usikkerheten i de målte data blir relativt stor og vi finner kun signifikante endringer for en av de fire kategoriene som ble undersøkt.  Ser vi på resultatene for de fire kategoriene, så er likevel tendensen at alle kategoriene har hatt en positiv økning.

# 6 Konklusjon

I dette kapittelet vil jeg først besvare disse utfra de betraktningene jeg så langt har gjort meg, før jeg ser på noen pedagogiske implikasjoner og kommer med forslag til videre forskning.

Innledningsvis stilte jeg to forskningsspørsmål:

1. Kan matematikkundervisning basert på historiske problemer påvirke elevenes holdning til matematikkfaget?
2. Hvilke utfordringer i undervisning kan identifiseres ved bruk av matematikkens historie i matematikkundervisning?

## 6.1 Svar på forskningsspørsmål 1

I denne oppgaven har jeg undersøkt hvordan oppgaver basert på matematikkens historie påvirker elevers holdninger til matematikkfaget. Jeg tilbrakte en hel skoledag sammen med en gruppe elever fra en videregående skole, som jobbet seg gjennom tre ulike oppgavesett. Oppgavesettene ble utformet som oppgaveark med en kort historisk innledning og oppgaver med forklarende tekst, slik at elevene på egenhånd skulle kunne løse oppgavene. Oppgavene var basert på matematisk historie fra ulike tidsepoker. Det første oppgavesettet omhandlet egyptisk matematikk, med oppgaver hentet fra Rhind-papyrusen. Formålet her var at elevene skulle bli kjent med egypternes regnemåter og sammenlikne disse med de metodene vi bruker i dag. Det andre oppgavesettet startet med Eulers broer i Königsberg. Elevene skulle selv prøve å løse dette, samt andre liknende problemer, før de etter hvert kom fram til hva som kjennetegner grafer med Euler-stier. Formålet med dette oppgavesettet var å la elevene se hvordan matematikken kan bidra til å løse praktiske problemer.  Det tredje oppgavesettet begynte med Leibniz tanker om totallsystemet og regneregler i dette, før det gikk videre til det heksadesimale tallsystemet. Formålet med dette oppgavesettet var å bli kjent med totallsystemet, litt om utviklingen til dette og hvilke bruksområder det har i dag.

En uke før gjennomføringen av denne undervisningen hadde elevene besvart et spørreskjema med ulike påstander om deres holdninger til matematikkfaget. Etter gjennomført undervisning besvarte de spørsmålene på nytt. I tillegg ble det gjennomført et gruppeintervju i etterkant av undervisningen. Basert på tilbakemeldingene elevene har gitt gjennom å besvare spørreskjema og deltakelse i gruppeintervju mener jeg at det er grunnlag for å hevde at bruken matematikkens historie kan påvirke elevenes holdninger til matematikkundervisningen i en positiv retning, og at dette er noe som bør utvikles videre. Dette hevder jeg på bakgrunn av resultatene fra spørreundersøkelsen som viste en signifikant positiv endring i elevenes syn på matematikkens underholdningsverdi. Dette støttes av de tilbakemeldingene som ble gitt i intervjuet, der elevene ga uttrykk for at de syntes dette var annerledes og interessant, og gjerne ville gjenta dette neste år. Det var annerledes fordi det skilte seg fra tradisjonell matematikkundervisning, på den måten at de ikke ble presentert for en algoritme som de så skulle bruke til å løse oppgaver. Her måtte de selv finne ut hvordan de skulle løse problemet. Elevene ga uttrykk for at de fikk uttrykt sine egne ideer i denne prosessen. De fikk også et innblikk i hvordan matematikk ble brukt i andre kulturer og hvordan den kunne brukes innenfor andre fagområder. Jeg har vist til at dette er faktorer som kan påvirke elevers holdninger til matematikkfaget, og mener derfor at undervisning basert på matematikkens historie har en positiv effekt på elevenes holdninger til matematikkfaget.

Fordelen med å bruke et undervisningsopplegg basert på matematikkens historie er at dette oppleves som noe nytt og annerledes for elevene. De får en ny måte å arbeide på, noe som i hvert fall for en kortere periode kan påvirke holdningene til faget positivt. Ved å gi elevene et innblikk i matematikkens historie får de også noe mer å forholde seg til enn bare en formel i en bok. Elevene kan få en bedre forståelse av hvordan faget har utviklet seg, hvordan andre kulturer har arbeidet med matematikk og hvor våre moderne symboler og formler kommer fra.

Positive holdninger til matematikkfaget er viktig for gode prestasjoner, og bruken av matematikkens historie i matematikkundervisningen kan derfor være en god måte å heve prestasjonene på.

En annen positiv effekt er at læreren selv kan få økt motivasjon og innsikt i matematikkfaget ved å studere matematikkens historie. I tillegg kan en studie av matematikkens historie forberede læreren på hvilke matematiske emner eller deler av et emne som kan være spesielt problematiske for elevene å få en forståelse av.

## 6.2 Svar på forskningsspørsmål 2

Både i mitt eget arbeid med å lage oppgaver og i tilbakemeldingene fra elevene dukket det opp utfordringer i forhold til å bruke matematikkens historie i matematikkundervisningen.

Da det finnes lite ferdig undervisningsmateriell basert på matematikkens historie som uten videre kan kobles til pensum i den norske skolen, vil det kreve at læreren selv finner fram til aktuelle emner og tilpasser materialet til den elevgruppen som skal arbeide med dette. Det er selvfølgelig en utfordring i en travel skolehverdag.

For at et undervisningsopplegg basert på matematikkens historie skal være vellykket må det være koblet til elevenes pensum, slik at det oppfattes som relevant for eksamen. Elevene er helt tydelig fokusert på å gjøre det best mulig til eksamen, og å bruke tid på aktiviteter som ikke er direkte relevant i en slik sammenheng kan medføre at de har liten motivasjon til å delta. Det er også viktig å ta hensyn til tidsbruken, da de fleste matematikkfagene i den videregående skolen har mye pensum som de skal dekke på begrenset tid. Dette er også elevene veldig klar over.

Elevene har også ulike interesser, så noen synes det er interessant å få med litt av matematikkens historie, mens andre synes det er bortkastet tid. Utfordringen her vil ligge i å skape en ordentlig setting for elevene å arbeide i, uten å bruke for mye tid.

## 6.3 Pedagogiske implikasjoner

For min egen del så har arbeidet med denne oppgaven vært en lærerik reise. Jeg ser at det finnes materiale med historisk matematikk som kan brukes i den norske skolen. Det krever fremdeles litt bearbeiding før det kan brukes og man må være tålmodig når man leter, men jeg tror absolutt at dette kan være verdt litt ekstra arbeid. Det vil jo være snakk om å bruke dette på noen emner, slik at det fremdeles vil oppleves som noe nytt og annerledes for elevene. Tilbakemeldingene fra elevene gjør også at jeg veldig gjerne vil prøve å fortsette dette arbeidet, for å forbedre min egen undervisning. Jeg har absolutt tro på at bruken av matematikkens historie i matematikkundervisningen kan bidra til å gjøre denne mer interessant. For egen undervisning har jeg et mål om å se nærmere på Panagiotou (2011) og hans beskrivelse av logaritmenes utvikling. Dette er et eksempel på et område som jeg tror matematikkens historie kan fungere utmerket til å gi elevene en bedre forståelse av et matematisk begrep.

I tillegg til å ha gitt meg ideer til hvordan jeg kan forbedre min egen undervisning så har dette arbeidet med å studere matematikkens historie bidratt til å gjøre meg som lærer mer positiv til faget, noe jeg håper vil komme elevene mine til gode. Jeg har innsett at det er mye spennende man kan hente fram fra matematikkens historie, så personlig anser jeg den absolutt som en kilde til motivasjon og inspirasjon. Jeg tror absolutt at matematikkens historie bør være en viktig del av utdanningen for matematikklærere, nettopp fordi det kan motivere og inspirere og i tillegg bidra med viktig kunnskap om hva elevene sannsynligvis vil finne vanskelig å forstå.

## 6.4 Videre forskning

Da jeg skulle ha en kvantitativ komponent inn i denne oppgaven, kunne jeg ikke finne et passende spørreskjema på norsk, så valget falt på et amerikansk spørreskjema som hadde vært utprøvd tidligere. Med litt hjelp fikk jeg det oversatt til norsk, og det ser ut til å ha gitt gode resultater, selv om utvalget var lite i dette forsøket. Det hadde vært interessant å få en større undersøkelse for å kartlegge effekten av et undervisningopplegg basert på matematikkens historie på elevenes holdninger til matematikkfaget. Det trengs da flere respondenter, slik at en med større sikkerhet kan uttale seg om effekten på elevenes holdninger. I mitt forsøk var utvalget lite, noe som gir en relativt stor usikkerhet, og det er da vanskelig å si noe signifikant om hvordan elevenes holdninger ble påvirket av undervisningen basert på matematikkens historie.

Et annet spørsmål er hvordan en undervisning basert på matematikkens historie påvirker elever med lite motivasjon i utgangspunktet. I mitt forsøk var elevene i utgangspunktet godt motiverte, men ville effekten ha blitt den samme for elever som hadde liten eller ingen motivasjon for arbeid med matematikk?

Det er selvfølgelig også interessant å utvikle undervisningsopplegg tilpasset pensum i den norske skolen basert på matematikkens historie. Forhåpentligvis kunne en også få samlet slike undervisningsopplegg på ett sted, slik at det ble mer tilgjengelig for alle interesserte lærere.

I tillegg til å se på hvilken effekt et undervisningsopplegg basert på matematikkens historie har på elevenes holdninger til matematikkfaget, hadde det vært interessant å undersøke om en slik form for undervisning også kan ha effekt på elevenes læringsutbytte, slik vi ser rapportert hos Yee og Chapman (2015). Er det i så fall mulig å få til dette innenfor de rammene (timetall, læreplan) vi har i den norske skolen i dag?

# Referanser


Arcavi, A. (1985). *History of mathematics as a component of mathematics teachers background.* Doktorgradsavhandling.

Arcavi, A. (1987). Using historical materials in the mathematics classroom. *The Arithmetic Teacher*, s. 13-16.

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, s. 111-129.

Asante, K. O. (2012). Secondary students' attitudes towards mathematics. *Ife Psychologia*, s. 121-133.

Barnett, J. H. (2014). Learning mathematics via primary historical sources: straight from the source's mouth. *PRIMUS*, s. 722-736.

Barnett, J. H., Lodder, J., & Pengelly, D. (2016). Teaching and learning mathematics from primary historical sources. *PRIMUS*, s. 1-18.

Bieg, S., Reindl, M., & Dresel, M. (2016). The relation between mastery goals and intrinsic motivation among university students: a longitudinal study. *Educational Psychology*.

Brekke, M., & Tiller, T. (2013). *Læreren som forsker.* Universitetsforlaget.

Burns, P. C. (1964). Historical mathematics materials for use in teaching arithmetic. *The Arithmetic Teacher*, s. 262-266.

Byers, V. (1982). Why study the history of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, s. 59-66.

Chase, A. B. (1927). *The Rhind Mathematical Papyrus.* Oberlin, Ohio, USA: Mathematical Association of America.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, s. 67-84.

Det kongelige kirke-, u. o. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen.*

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitudes towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *Mathematics Education*, s. 471-482.

Dunham, W. (1986). A "Great Theorems" Course in Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, s. 808-811.

Fauvel, J. a. (2000). *History in mathematics education : The ICMI Study.* Hingham, US: Kluwer Academic Publishers.

Fennema, E., & Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for Reasearch in Mathematics Education*, s. 324-326.

Freudenthal, H. (1981). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, s. 30-33.

Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, Expectations and Values. *Educational Studies in Mathematics*, s. 25-46.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, s. 137-161.

Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, s. 75-90.

Hassler, J. O. (1929). The use of mathematical history in teaching. *The Mathematics Teacher*, s. 166-171.

Hopkins, B. (2014). *Notes: Resources for teaching discrete mathematics: classrooms projects, history modules, and articles.* Mathematical Association of America.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "Whys" and "Hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, s. 235-261.

Jankvist, U. T. (2010). An empirical study of using history as a "goal". *Educational Studies in Mathematics*, s. 53-74.

Jankvist, U. T., Mosvold, R., Fauskanger, J., & Jakobsen, A. (2015). Analysing the use of history of mathematics through MKT. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, s. 495-507.

Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, s. 327-349.

Kunnskapsdepartementet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag MAT1-04.* Hentet 10. 15., 2016 fra Utdanningsdirektoratet: www.udir.no/kl06/MAT1-04

Leake, L. (1983). What every secondary school mathematics teacher should read - twentyfour options. *The Mathematics teacher*, s. 128 - 133.

Leroy, N., & Bressoux, P. (2016). Does amotivation matter more than motivation in predicting mathematics learning gains? A longitudinal study of sixth-grade students in France. *Contemporary Educational Psychology,* s. 41-53.

Lin, Y.-G., McKeachie, W. J., & Kim, Y. C. (2003). College student intrinsicand/or extrinsic motivation and learning. *Learning and Individual Differnces,* s. 251-258.

Lindner, S. M., Smart, J. B., & Cribbs, J. (2015). A multi-method investigation of mathematics motivation for elementary age students. *School Science and Mathematics*, s. 392-403.

Mastin, L. (2010). *Euler.* Hentet fra The Story of Mathematics: http://www.storyofmathematics.com/18th_euler.html

Mastin, L. (2010). *Leibniz.* Hentet fra The Story of Mathematics: http://www.storyofmathematics.com/17th_leibniz.html

Meavilla, V., & Flores, A. (2007). History of mathematics and problem solving: a teaching suggestion. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, s. 253-259.

Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & Education*, s. 47-60.

Mulhern, F., & Rae, G. (1998). Development of a shortened form of the Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales. *Educational and Psychological Measurement*, s. 295-306.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (1998). *Johann Bernoulli*. Hentet Oktober 30, 2016 fra MacTutor History: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann.html

Ozdemir, A. S., Goktepe, S., & Kepceoglu, I. (2012). Using mathematics history to strenghten geometric proof skills. *Procedia - Social and Behavioral Sciences,* s. 1177 - 1181.

Panagiotou, E. N. (2011). Using history to teach mathematics: The case of logarithms. *Science & Education*, s. 1-35.

Pepin, B. (2011). Pupils' attitudes towards mathematics: a comparative study of Norwegian and English secondary students. *Mathematics education*, s. 535-546.

Poincaré, H. (1913). *The Foundations of Science: Science and Hypothesis, The Value of Science, Science and Method.* (G. B. Halsted, Overs.) New York: The Science Press.

Reed, I. (1998). *Famous Problems*. Hentet Mai 2016 fra Math Forum: http://mathforum.org/isaac/problems/bridges2.html

Reyes, L. H. (1984). Affective variables and mathematics education. *The Elementary School Journal*, s. 558-581.

*Rhind papyrus*. (n. d. ). Hentet fra British Museum: http://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details.aspx?assetId=766120001&objectId=117389&partId=1

Rogers, L. (2000). The biogenetic law and its influence on theories of learning mathematics. *Reasearch in Mathematics education*, s. 225-240.

Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning - epostemology, history and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics*, s. 79 - 104.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, s. 13-57.

Siu, F.-K., & Siu, M.-K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, s. 561-567.

Smestad, B. (2002). *Matematikkhistorie i grunnskolens lærebøker: En kritisk vurdering.* Alta: Høgskolen i Finnmark.

Svendsen, L. F. (2014, oktober 27). *snl.no.* Hentet fra Store norske leksikon: https://snl.no/Gottfried_Wilhelm_Leibniz

Tapia, M. (1996). The Attitudes toward Mathematics Instrument. *Artikkel presentert på det årlige møtet til Mid-South Educational Research Association.*

Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical "parallelism" revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics,* s. 165-183.

Xu, L. (2011). Meta-rules of dicursive practice in mathematics classrooms from Seoul, Shanghai and Tokyo. *Mathematics: Traditions and (new) practices,* s. 846-855.

Yee, L. S., & Chapman, E. (2010, Desember). Using History to Enhance Student learning and Attitudes in Singapore Mathematics Classroom. *Education Research and perspectives*.

Yee, L. S., & Chapman, E. (2013). Development of a short form of the attitudes towards mathematics inventory. *Educational Studies in Mathematics,* s. 145-160.

Yee, L. S., & Chapman, E. (2015). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students' attitudes, anxiety, motivation and achievment in grade 11 classrooms. *Educational Studies in Mathematics,* s. 189-212.

Yildiz, C., Cabakcor, B. Ô., & Ôzdogan, Z. B. (2011). The views of the teacher and students in regards to the use of the history of mathematics in the teaching of fractal subject. *Procedia Social and Behavioral Sciences,* s. 868-872.

# 8 Vedlegg

1. Spørreundersøkelse
2. Svar fra NSD
3. Oppgavesett 1
4. Oppgavesett 3
5. Oppgavesett 4

**Vedlegg 1**

## Holdninger til matematikk

**Veiledning:** Dette spørreskjemaet inneholder påstander om dine holdninger til matematikk. Det finnes ingen riktige eller gale svar. Les hver påstand nøye. Tenk over hvordan du føler i forhold til hver påstand og kryss av for om du er helt uenig, litt uenig, nøytral, litt enig eller helt enig i påstanden. Besvar alle spørsmålene.

| | | Sterkt uenig | Uenig | Hverken uenig eller enig | Enig | Sterkt enig |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Matematikk er et veldig nyttig og nødvendig fag | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2. | Jeg vil gjerne utvikle mine matematiske ferdigheter | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3. | Jeg får stor tilfredsstillelse av å løse matematiske problemer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4. | Matematikk lærer oss å tenke, og bidrar til hjernens utvikling. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5. | Matematikk er viktig i dagliglivet | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6. | Matematikk er et av de viktigste fagene man kan studere | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7. | Matematikkfagene på videregående skole vil være nyttig for meg uansett hva jeg velger å studere | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8. | Jeg kan se for meg mange situasjoner der jeg bruker matematikk utenom skolen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9. | Matematikk er et av de fagene jeg frykter mest | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10. | Hodet føles tomt og jeg er ikke i stand til å tenke klart når jeg jobber med matematikk | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 11. | Tanken på å studere matematikk gjør meg nervøs | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 12. | Matematikk får meg til å føle meg ukomfortabel | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 13. | Jeg er alltid veldig stresset i matematikktimene | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 14. | Jeg liker ikke å høre ordet matematikk | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 15. | Jeg blir nervøs bare av å tenke på et matematisk problem | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 16. | Matematikk skremmer meg ikke i det hele tatt | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 17. | Når det gjelder matematikk, har jeg høy selvtillit | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 18. | Jeg løser matematiske problemer uten større vanskeligheter | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 19. | Jeg regner med å gjøre det ganske bra i alle matematikkurs jeg tar | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 20. | Jeg er alltid forvirret i matematikktimene | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 21. | Jeg føler meg usikker når jeg skal løse matematikkoppgaver | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 22. | Jeg synes det er lett å lære matematikk | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 23. | Jeg er sikker på at jeg er i stand til å lære avansert matematikk | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 24. | Jeg har som regel likt matematikk på skolen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 25. | Matematikk er tørt og kjedelig | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 26. | Jeg liker å løse nye matematiske problemer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 27. | Jeg foretrekker innleveringsoppgaver i matematikk framfor i norsk | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 28. | Jeg vil helst unngå matematikk i videre studier | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 29. | Jeg liker virkelig matematikk | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 30. | Jeg trives bedre i matematikktimene enn i noen andre timer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 31. | Matematikk er et veldig interessant fag | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 32. | Jeg er villig til å ta mer matematikk enn nødvendig | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 33. | Jeg planlegger å ta så mye matematikk som mulig i løpet av utdannelsen min | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 34. | Utfordringene i matematikk appellerer til meg | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 35. | Jeg synes det er nyttig å studere avansert matematikk | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 36. | Jeg tror at å studere matematikk vil hjelpe meg å løse problemer innenfor andre områder | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 37. | Jeg føler meg komfortabel med å uttrykke mine ideer om hvordan en kan løse et vanskelig matematisk problem | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 38. | Jeg er komfortabel med å svare på spørsmål i matematikklassen min | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 39. | En godt grunnlag i matematikk kan hjelpe meg i yrkeslivet | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 40. | Jeg tror jeg er flink til å løse matematiske oppgaver | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

**Vedlegg 2**

## Tilbakemelding fra NSD

**Resultat av meldeplikttest: Ikke meldepliktig**

Du har oppgitt at hverken direkte eller indirekte identifiserende personopplysninger skal registreres i forbindelse med prosjektet.

Når det ikke registreres personopplysninger, omfattes ikke prosjektet av meldeplikt, og du trenger ikke sende inn meldeskjema til oss.

Vi gjør oppmerksom på at dette er en veiledning basert på hvilke svar du selv har gitt i meldeplikttesten og ikke en formell vurdering.

Til info: *For at prosjektet ikke skal være meldepliktig, forutsetter vi at alle opplysninger som registreres elektronisk i forbindelse med prosjektet er anonyme.*

*Med anonyme opplysninger forstås opplysninger som ikke på noe vis kan identifisere enkeltpersoner i et datamateriale, hverken:*

*- direkte via personentydige kjennetegn (som navn, personnummer, epostadresse el.)*
*- indirekte via kombinasjon av bakgrunnsvariabler (som bosted/institusjon, kjønn, alder osv.)*
*- via kode og koblingsnøkkel som viser til personopplysninger (f.eks. en navneliste)*
*- eller via gjenkjennelige ansikter e.l. på bilde eller videoopptak.*

*Vi forutsetter videre at navn/samtykkeerklæringer ikke knyttes til sensitive opplysninger.*

Med vennlig hilsen,

NSD Personvern

## Oppgavesett 1

Kilder: (Arcavi, 1987), (Arcavi, Isoda, 2007)

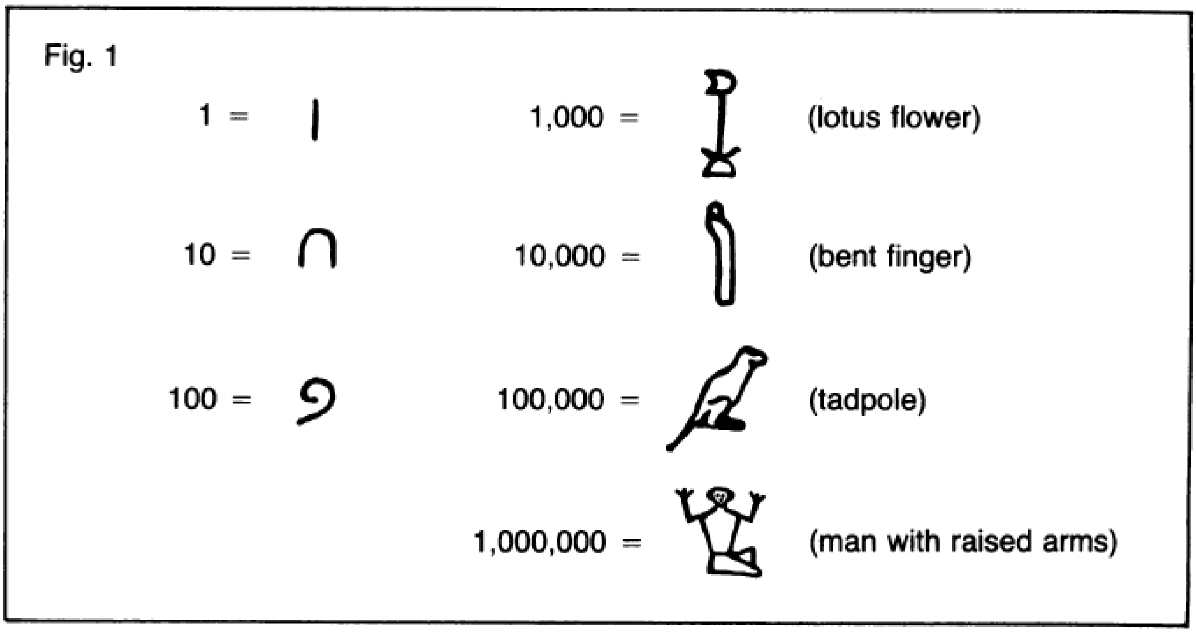
### Rhind-papyrusen

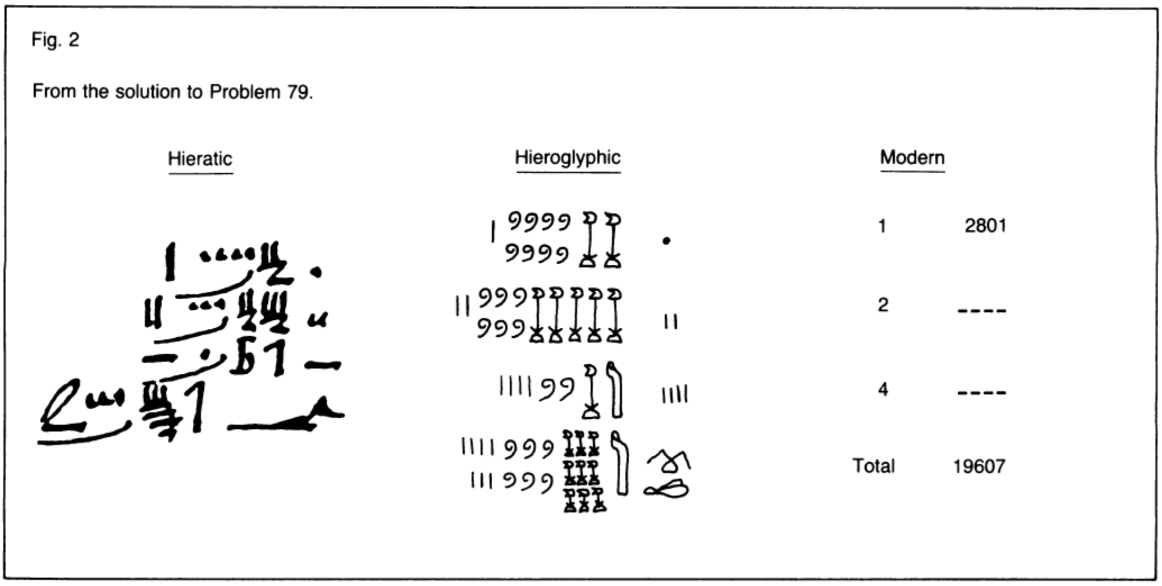
*Foto 1: Rhind-papyrusen (British Museum)*

Rhindpapyrusen er et av de eldste eksisterende matematiske dokumenter. Papyrusen har fått navn etter Henry Rhind, en engelskmann som kjøpte den i Luxor, Egypt, i 1858. Etter hans død overtok British Museum papyrusen, og der er den fremdeles den dag i dag. Papyrusen ble tidligere kalt Ahmes regnebok, etter avskriveren Ahmes. Det er stimert at rullen stammer fra 1700 før kristus, men er tilsynelatende en kopi av enda eldre kilder. Papyrusen inneholder en samling av 87 problemer og løsningen på disse. Problemene dekker ulike emner som aritmetikk, utregning av areal og løsning av lineære likninger. Vi skal i denne økten se nærmere på problemer som omhandler aritmetikk.

I gamle Egypt hadde en to skriftformer; hieroglyfisk og hieratisk. Hieroglyfer finnes først og fremst som inskripsjoner i steintempler. Hieratisk er en raskere, mer dagligdags skriftform, som er den som i størst grad forekommer på papyrusen.

På figur 1 kan vi se noen av de hieroglyfiske nummertegnene, som er lettere å tyde enn de hieratiske.



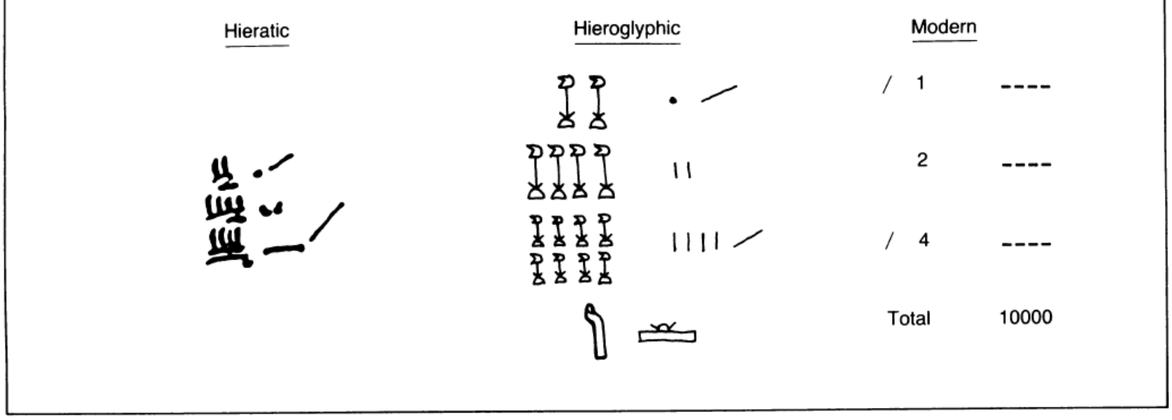




**Øvelse 1:** Fyll inn de blanke feltene i den moderne kolonnen i figur 2.

**Øvelse 2 :** Hva slags utregning er gjort her? Hvordan fungerer metoden som er benyttet?

Fig. 3

From the solution to Problem 52.



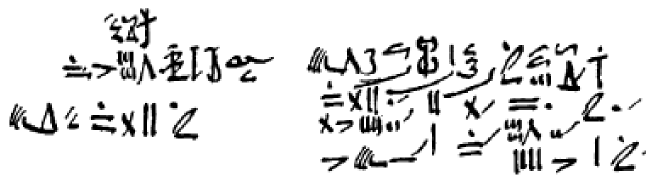

**Øvelse 3:** Fyll inn de tomme feltene i den moderne kolonnen på figur 3

**Øvelse 4:** Hva slags utregning er gjort her? Hvordan fungerer metoden som er benyttet?

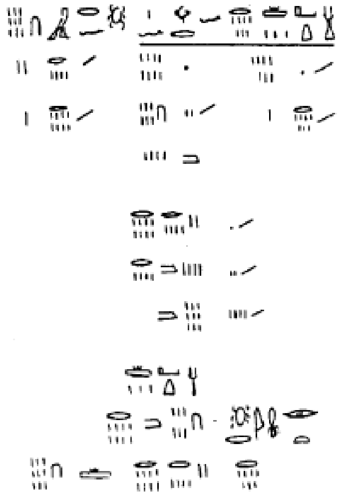
**Øvelse 5:** Regn ut 13 x 27 ved bruk av den egyptiske metoden

**Øvelse 6:** Kan man multiplisere et hvilket som helst par av tall med den egyptiske metoden? Forklar

Hieratic*



Hieroglyphic**



A quantity whose seventh part is added to it becomes 19.

| | |
|---|---|
| /1 | 7 |
| /$\frac{1}{7}$ | --- |
| 1 | 8 |
| /2 | --- |
| $\frac{1}{2}$ | --- |
| /$\frac{1}{4}$ | --- |
| /$\frac{1}{8}$ | --- |
| /1 | $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ |
| /2 | ----- |
| /4 | ----- |

The doing as it occurs:—The quantity is $16\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

one seventh is ---

Total ---

1. Denne figuren viser løsningen til problem nr 24 på papyrusrullen. Utklippet her har blanke felter, som dere skal fylle inn. Men først, skriv likningen, som er beskrevet med ord, med moderne notasjon og løs denne.

2. Se så på det første steget:

/1 7
/1/7 ___

Det ser ut til at egypterne begynte løsningen med å gjette på et tall, for så å se hva som skjedde.

(a) Hvilket tall gjettet de på her?
(b) Fyll inn de tomme feltene.
(c) Hva ble resultatet?
(d) Hvorfor tror du de valgte det tallet de gjorde?

3. Se på det andre steget:

1 8
/2 ___
½ ___
/1/4 ___
/1/8 ___

(a) Fyll inn de tomme feltene.

(b) Hvilken regneoperasjon er utført, og hva er resultatet?

4. Se på det tredje steget:

   /1 2+ ¼ + 1/8

   /2 ___

   /4 ___

(a) Fyll inn de tomme feltene.
(b) Hvilken regneoperasjon er utført, og hva ble resultatet?

5. Se på det siste steget:

Fyll in de blanke feltene og forklar hva man har utrettet med dette steget.

6. Reproduser og oppsummer løsningsmetoden, og forklar den.
7. Skriv løsningen på oppgaven, slik den ville fremkommet på papyrusen (men i moderne notasjon) hvis man hadde begynt med 14 istedenfor 7.
8. Problem #25 i papyrusen lyder som følger:
   «Et tall som blir 16 når halvparten av tallet blir lagt til»
   Løs problemet som en moderne likning og ved hjelp av den egyptiske metoden (som du tror det ville sett ut i papyrusen, men med moderne notasjon).

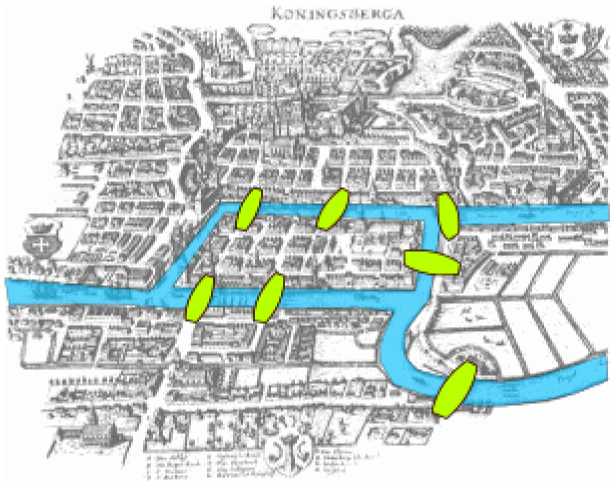
## Oppgavesett 3

(Bygger hovedsakelig på oppgaver fra: http://mathforum.org/isaac/problems/bridges1.html)

Topologi er en av de nyeste grenene i matematikken. En enkel måte å beskrive topologi er som en «gummigeometri» - topologer studerer de egenskapene til figurer som forblir de samme når figurene strekkes eller komprimeres. Euler tallet for en graf lik de som presenteres senere i denne oppgaven er et eksempel på en slik egenskap som ikke endres når grafen strekkes eller komprimeres.

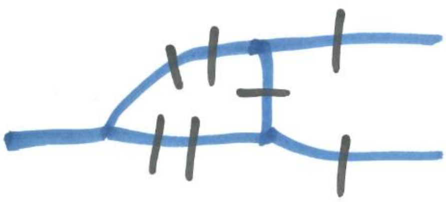
Topologi for grafer ble først utviklet av Leonhard Euler i 1735. Hans arbeid innenfor dette feltet ble inspirert av følgende problem:

### De syv broene i Königsberg



I Königsberg (I dag kjent som Kaliningrad, Russland), renner det en elv gjennom sentrum og I midten av denne ligger det en øy. Etter at elva har passert øya deler den seg i to. Det ble bygd syv broer, slik at folk kunne komme seg fra den ene delen av byen til den andre.

En skisse av sentrum i Königsberg kunne se slik ut:



Folket i byen undret seg over om det var mulig å gå tur rundt I byen på en slik måte at alle broer ble krysset nøyaktig en gang.

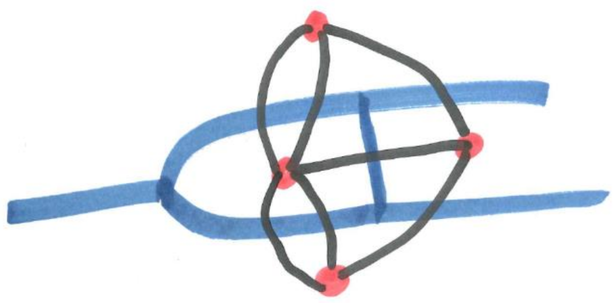
**Oppgave 1**
Forsøk å få det til. Lag en skisse av byen, lik den over, og forsøk å planlegge en tur som krysser hver av broene nøyaktig en gang. Det må være en sammenhengende tur.

**Oppgave 2**
Hva om de bare hadde bygd seks broer i byen, slik at kartet hadde sett slik ut:

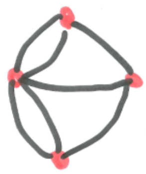
Er det nå mulig å planlegge en rute som krysser alle broene nøyaktig en gang?

**Oppgave 3**
Spiller det noen rolle hvilken bro du tar vekk? Hva om du legger til flere broer?
Tegn dine egne kart, og planlegg en reiserute for hvert av dem.

Euler laget en forenklet figur, der røde prikker representerer sammenhengende land, og sorte streker er broer:



Hvis vi da fjerner elven, kan en forenklet utgave av broene i Königsberg se slik ut:



De røde prikkene kaller vi *hjørner* (eller noder), mens broene kalles *kanter*

Problemet blir nå å tegne denne figuren uten å tegne samme kant to ganger og uten å løfte blyanten fra papiret.

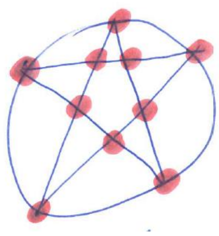
## Generalisering til grafteori

Euler utviklet tankemåten videre, og la på den måten grunnlaget for grafteori. I moderne språk kan vi lage følgende definisjoner:

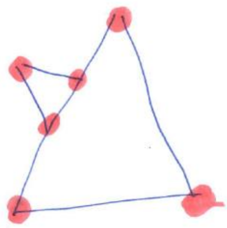
<u>Definisjon</u>: En graf er en figur bestående av punkter (hjørner) bundet sammen av ikke-kryssende kurver (kanter).

<u>Definisjon</u>: En Euler sti er en kontinuerlig sti som går gjennom hver kant en gang og bare en gang.

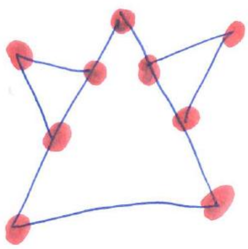
**Oppgave 4:**
Avgjør om figurene under har en Euler-sti, og finn i så fall denne.



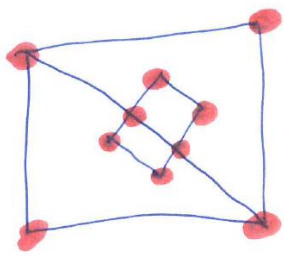
Figur 1



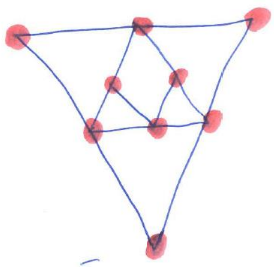
Figur 2



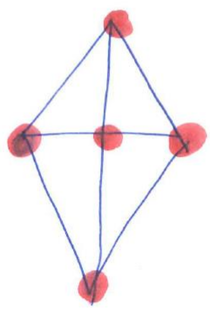
Figur 3



Figur 4

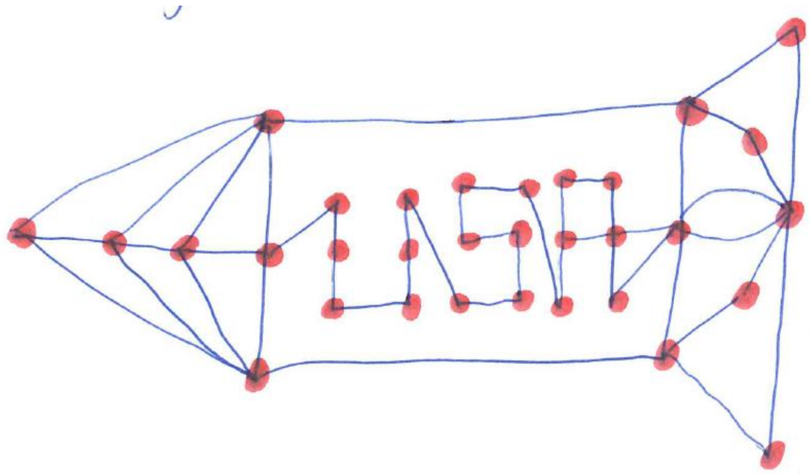


Figur 5



Figur 6

**Oppgave 5:**
Kan du avgjøre om denne figuren har en Euler-sti, uten å prøve å finne den?



Figur 7

## Oppgavesett 4

(Basert på «*Binary Arithmetic: From Leibniz to von Neumann*» (Lodder, J.), https://www.math.nmsu.edu/hist_projects/binaryI.pdf)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Leibniz mente at bruken av kun to siffer gjorde pugging av multiplikasjonstabellen overflødig, slik vi er vant til fra titallssystemet. Man behøver heller ikke metoder for divisjon, basert på prøv og feile prinsippet. Han hevdet også at mynter med verdiene 1, 2, 4, 8,…., ville være mer effektivt.

∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞

Oppgave 1

Vi har en skålvekt som brukes til å veie steiner. En stein med ukjent vekt er plassert på den ene skålen, mens standardlodd er plassert på den andre, til vekten er i balanse.

Leibniz innser at vi kun trenger 4 ulike lodd for å veie alle mulige stein med (heltallig) vekt mellom 1 og 15. Hva er disse 4 standardloddene? (4 ulike lodd, hvert lodd kan bare brukes en gang).

Fyll ut følgende tabell:

| Standardlodd: | Nr 1 | Nr 2 | Nr 3 | Nr 4 |
|---|---|---|---|---|
| Vekt av stein | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |
| 11 | | | | |
| 12 | | | | |
| 13 | | | | |
| 14 | | | | |
| 15 | | | | |

∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞

.

**Oppgave 2**

Skriv tallene 1, 10, 100, 1000 og 10 000 som tierpotenser. Ser du mønsteret?

**Oppgave 3**

Skriv tallene 1, 2, 4, 8 og 16 som toerpotenser. Ser du mønsteret?

Hvordan er dette sammenliknet med det du fant I oppgave 2?

Hvordan er dette sammenliknet med standardvektene du fant i oppgave 1?

**Oppgave 4**

Skriv tallene 34, 64, 100 og 1015 som tall I totallsystemet.

Følgende oversikt over addisjon, subtraksjon og multiplikasjon i totallsystemet er hentet fra «*Binary Arithmetic: From Leibniz to von Neumann*» (Lodder, J., s.5)

For example, addition (1)

$$\begin{array}{cccc||c} & 1 & 1 & 0 & 6 \\ & 1 & 1 & 1 & 7 \\ \cdot & \cdot & & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc||c} & & 1 & 0 & 1 & 5 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc||c} & 1 & 1 & 1 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 17 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 31 \end{array}$$

For subtraction

$$\begin{array}{cccc||c} 1 & 1 & 0 & 1 & 13 \\ & 1 & 1 & 1 & 7 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc||c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 17 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & 14 \end{array}$$

For multiplication (2)

$$\begin{array}{cccc||c} & & 1 & 1 & 3 \\ & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & & \\ & \cdot & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc||c} & 1 & 0 & 1 & 5 \\ & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc||c} & & 1 & 0 & 1 & 5 \\ & & 1 & 0 & 1 & 5 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ & \cdot & & & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}$$

**Oppgave 6**

Ta utgangspunkt i figuren over og forklar framgangsmåten for addisjon, subtraksjon og multiplikasjon i totallsystemet.

**Oppgave 7**

Regn ut:

11010 – 1101

(1101)*(11)

# Det heksadesimale tallsystem

Nevnt i tidlige skrifter fra 1800-tallet, men forkastet da man ikke hadde nok tegn til å beskrive tallsystemet. Kom for fullt tilbake på midten av 1900-tallet. Det heksadesimale tallsystemet er meget nyttig i arbeid med datamaskiner. Årsaken er at det er nært forbundet med totallsystemet, kjent som det *binære* tallsystemet, som datamaskiner er basert på. Sammenhengen er slik: Siden $16 = 2^4$, kan ethvert *firesifret binært tall* skrives som et *ensifret heksadesimalt tall* og omvendt. Fire bit (fire binære siffer) kan altså uttrykkes ved ett enkelt heksadesimalt siffer. En byte som består av 8 bit kan da kompakt angis med et tosifret heksadesimalt tall. Dette er en stor fordel for mennesker, som leser for eksempel "B4" mye lettere enn byten "10110100".

Tallsystemet har 16 ulike siffer: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E og F.

| Vanlig tall | Binært tall | Heksadesimalt tall |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 2 |
| 3 | 11 | 3 |
| 4 | 100 | 4 |
| 5 | 101 | 5 |
| 6 | 110 | 6 |
| 7 | 111 | 7 |
| 8 | 1000 | 8 |
| 9 | 1001 | 9 |
| 10 | 1010 | A |
| 11 | 1011 | B |
| 12 | 1100 | C |
| 13 | 1101 | D |
| 14 | 1110 | E |
| 15 | 1111 | F |
| 16 | 10000 | 10 |

Gjør om fra heksadesimalt til binært og vanlig tall:

a) A2E
b) 3FC

Gjør om fra vanlig tall til heksadesimalt tall:

a) 64
b) 1024
c) 256