Problemløsning i norske og russiske matematikklærebøker for videregående skole

En sammenlignende studie av eksempler i norske og russiske lærebøker

Natalia Aaseth

Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk

Matematisk institutt
UNIVERSITETET I BERGEN

Vår 2016

Sammendrag

Denne masteroppgaven sammenligner lærebøkene fra to land, Norge og Russland, i emneområder Algebra og Funksjoner, og fokuserer på problemløsningsmetoder i eksemplene i de norske og de russiske lærebøkene for videregående skole. Russiske elever presterer bedre enn norske elever i forskjellige internasjonale undersøkelser, som TIMSS og PISA, og det var interessant å finne ut hva det skyldes. Målet med denne studien har vært å undersøke hva som skiller læreplanene og lærebøkene fra de to landene, når det gjelder problemløsning og problemløsningsmetoder.

Problemstillingen i denne masteroppgaven har vært følgende: Hva er forskjeller og likheter i presentasjonen av problemløsningsmetoder i eksemplene i norske og russiske matematikklærebøker?

For å svare på problemstillingen brukte jeg kombinasjon av kvalitative og kvantitative metoder med dokumentanalyse som datainnsamlingsmetode. Analysen begrenses til eksemplene i de norske lærebøkene for matematikkursene 1T og R1, og til eksemplene i de russiske lærebøkene for 10. og 11. trinn.

Først analyserte jeg den norske læreplanen og den russiske læreplanen for å sammenligne deres syn på problemløsning. Analysen av lærebøker starter med en liten hjelpeundersøkelse for å vise at de undersøkte lærebøkene er sammenlignbare, jeg brukte rammeverket til Hong og Choi og tilpasset det til min oppgave. I hovedundersøkelsen ser jeg både på generelle metoder (Polyas modell) og på spesifikke problemløsningsheuristikker. For å analysere forekomsten av problemløsningsmetoder i eksemplene i de undersøkte matematikklærebøkene brukte jeg et analyseverktøy utviklet av doktorgradsstudenten Tom Rune Kongelf ved Universitetet i Agder.

Analysen av både den norske læreplanen og den russiske læreplanen slår fast at elevene burde lære problemløsning og problemløsningsmetoder. Tross det viser hovedresultatene at det ikke finnes generell innføring i problemløsning i de norske og de russiske matematikklærebøkene. Verken de norske eller de russiske lærebøkene presenterer generelle metoder og spesifikke problemløsningsheuristikker i tilstrekkelig grad. Oppgaven konkluderte med at det finnes både fellestrekk og ulikhetstrekk mellom de norske og de russiske lærebøkene når det gjelder problemløsning. Men samtidig ble det oppdaget mange interessante funn ved siden av hovedanalysen.

Forord

For det første vil jeg gjerne takke veilederen min Runar Ile for god innspill og konstruktive kommentarer hele veien. Takk for gode råd som hjalp meg å komme videre og takk for at du har alltid vært oppmuntrende.

Jeg vil også takke min svigermor Øyvor Aaseth for støtte underveis, korrekturlesing, nyttige tilbakemeldinger og kritisk blikk på oppgaven. Tusen takk for oppmuntrende ord når jeg har vært frustrert.

En spesiell takk til sønnen min Dimitry Vik som hjalp meg å få EndNote til å fungere, og var til stor hjelp med «det tekniske».

Helt til slutt vil jeg takke min tålmodige ektemann Trond Aaseth som støttet meg alle disse årene. Uten deg kunne jeg ikke klart å fullføre oppgaven.

Bergen, januar 2016

Natalia Aaseth

Innhold

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

De komparative undersøkelsene, som PISA og TIMSS, viser ulike resultater for norske og russiske elever. For meg som matematikklærer var det interessant å finne ut hvilke forklaringer det har. Det kunne, for eksempel, være at elever i de to landene får ulik opplæring, at det er forskjell i læringsprosessen, og det kan skyldes kulturelle og sosiale forskjeller. For å kunne finne forklaringer var det fornuftig å bruke det jeg hadde kjennskap til fra før. Jeg er født og oppvokst i Ukraina, og jeg bodde mange år i Russland. Jeg studerte på det pedagogiske universitetet i Russland, og jeg har jobbet som lærer i matematikk og informasjonsvitenskap i Russland. Derfor kjenner jeg godt til skolekulturen både i Russland og Ukraina. Og jeg må si at de var veldig like på grunn av at Russland og Ukraina var ett land før. Jeg har også undervisningserfaring fra Norge som tospråklig lærer på barne- og ungdomsskoler. I tillegg har jeg hatt vikariat på Sotra videregående skole som varte i noen måneder. Der underviste jeg i matematikk 1T. Jeg vil se nærmere på hvilke utfordringer jeg som lærer med utdannelse fra et annet land møter i norske skoler.

Jeg fikk inspirasjon etter møtet med Førsteamanuensis Natalia Blank ved Universitetet i Stavanger. Natalia Blank oversatte russiske lærebøker i matematikk for 1. og 2. klasse. Natalia Blank sammen med lærer Gerd Inger Moe ved Smeaheia skole startet et forskningsprosjekt om å bruke russisk matematikk. De har brukt en metode kalt utviklende læring, utviklet av psykologen Leonid Zankov. I denne metoden legges det vekt på observasjon, analyse og logisk tenkning, og det fokuseres på problemløsning. Elevene lærer å forklare og begrunne hvordan de jobber og løser oppgaver. De lærer også å se på et problem fra forskjellige vinkler og bruke forskjellige løsningsstrategier. Klassene har flere ganger scoret skyhøyt på den nasjonale kartleggingsprøven i matematikk.

Jeg syns det er interessant å sammenligne undervisningen i de to forskjellige landene, og man kan gjøre mange nyttige funn. Funn fra undersøkelsen min kan brukes for å forbedre undervisningen i begge de aktuelle landene.

Til å starte med undersøkelsen min hadde jeg store, ambisiøse planer i forhold til masteroppgaven min. Jeg ville i tillegg til lærebokundersøkelse, observere undervisningen i norsk og russisk klasserom, ha intervjuer med norske og russiske lærere. Men jeg kunne ikke få gjort alt dette med tanke på tiden og muligheten til å reise til Russland for å observere undervisningen der. Derfor måtte jeg begrense analysen min til undersøkelsen av lærebøkene.

Uansett ble det gjort en stor jobb som inkluderte en analyse av til sammen 496 eksempler i norske og russiske lærebøker, 385 eksempler fra norske lærebøker og 111 eksempler fra russiske lærebøker.

Schmidt et al. (1996) sitert av Kongelf (2011) fant ut at læreboka spiller en viktig rolle i matematikk i skolen, og at det er et verdensfenomen, men i USA, Spania og Norge ser det ut til at lærebøker spiller en uvanlig sterk rolle. Flere støtter dette funnet til Schmidt ved å si at lærebøker er grunnlaget for undervisning, blant annet Alseth et al. (2013) som hevder i sin undersøkelse av læreplanen R97 at læreboka er den kilden som lærerne bruker oftest i undervisningen. Forskning viser at matematikkfaget har en lang tradisjon for å la seg styre av lærebøker (Remillard, 2005, s.214 referert i Resvoll, 2014, s. 5). Rapporten fra Utdanningsdirektoratet erkjenner også betydningen av lærebøker i Norge ved å si at *endringer i undervisningen skjer gjennom endringer i lærebøkene* (Utdanningsdirektoratet, 2005, s. 23).

I internasjonale undersøkelser, som PISA og TIMSS Advanced, kommer det frem at matematikkundervisningen i Norge er for ensformig, det vektlegges individuelle arbeidsformer, spesielt oppgaveløsning. Når vi sammenligner elever i Norge med det internasjonale gjennomsnittet, opplever de norske elevene at læreren bruker forholdsmessig lite tid til fremstilling/forklaring av et nytt tema til hele klassen. Istedenfor jobber elever i stor grad alene med oppgavene i læreboken (Grønmo et al, 2003, Danielsen, Skaar & Skaalvik, 2007 referert i Kongelf, 2011, s. 6). I Russland brukes det mer varierte arbeidsmetoder, i tillegg til oppgaveløsning legges det også vekt på metoder som diskusjon, argumentasjon og resonnement. Ifølge PISA og TIMSS Advanced presterer russiske elever bedre enn norske elever. Samtidig viser de undersøkelsene at elever både i Norge og i Russland i skoletimene løser mange oppgaver som ligner eksempler i læreboka.

Ifølge Lithner (2003) er det vanlig at når elever løser oppgaver, bruker de eksemplene i læreboken til å finne lignende problemer, der de kan bruke løsningsmetoden presentert i eksemplet til å løse sin oppgave. Denne formen for resonnering kaller Lithner for imiterende resonnering (ibid.), og sier at de fleste elevene bruker denne formen for resoneringen, når de løser oppgaver.

Flere forskere har studert sammenhengen mellom hvilke oppgaver som gis i matematikktimene og hvordan dette henger sammen både med undervisningen i faget og elevenes læring (Andrews, 2003; Hiebert & Wearne, 1993; Stein, Grover, & Henningsen, 1996 referert i Opheim, 2011). Oppgavene som brukes i undervisningen i matematikk har derfor en betydning for hva elevene lærer i faget. *Students will become skilled at what they have an opportunity to actually do in mathematics class* (Boston & Smith, 2009, referert i

Opheim, 2011). Oppgavene som brukes i undervisningen kommer fra lærebøker, vil derfor ifølge Li et al. (2009) referert i Resvoll (2014) analyse av lærebøker gi et klarere bilde av hva som blir undervist og lært i klasserommet (Resvoll, 2014, s. 12). Derfor var det viktig for meg å undersøke lærebøkene for å se hva elevene undervises i, og det var interessant for meg under undersøkelsen av lærebøker å oppdage hvor mye spennende som finnes under dette temaet.

I Norge finnes det ingen sentral godkjenningsordning for lærebøker. Vanligvis er det skoleledelsen eller lærere som avgjør hvilken lærebok som skal brukes i undervisningen. I Russland kan skolene bare bruke de lærebøkene som er godkjente og står i Den føderale læreboklisten.

Problemløsning har vært et sentral tema i matematikkdidaktikk siden tidlig 1980-tallet når det gjelder både kognitive og pedagogiske perspektiver (Fan et al., 2013, Schoenfeld, 1992). Polya var blant de første som skrev om problemløsning og problemløsningsstrategier. Senere har flere forskere studert problemløsning i skolen med utgangspunkt i hans arbeid (Mason and Davis, 1991, Schoenfeld, 1992). Mange forskere har brukt Polya (1973) sine fire faser for problemløsning og utviklet egne problemløsningsmodeller.

Problemløsning har siden M87 hatt en plass i skolens matematikkundervisning i Norge (Kirke- og undervisningsdepartementet, 1987). Men opp gjennom tiden har man sett på problemløsning og på problemløsningens plass i norsk skole på forskjellig måter. De ulike læreplanene hadde ulik praksis i forhold til undervisning og problemløsning. LK06 sier at problemløsning er en del av den matematiske kompetansen, og at *«opplæringa vekslar mellom utforskande, leikande, kreative og problemløysande aktivitetar og ferdigheitstrening»* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.2). I følge den russiske læreplanen skal elever *«utvikle logisk tenkning … matematisk tenkning og matematisk intuisjon»* (DUVRF, 2004a, s.87) og *«utvikle kreativ(heuristisk) tenkning: fremme og løse problemer, argumentere, velge bort»* (Muravina, 2013). Det står ikke så mye eksplisitt om problemløsning i den russiske læreplanen, og jeg vil se nærmere på den russiske læreplanen og finne forklaringen for det. Men både den norske læreplanen og den russiske læreplanen antyder at elever burde møte problemløsningsoppgaver på skolen, og at de burde lære seg problemløsningsstrategier.

Ut ifra et matematikkdidaktisk perspektiv er det interessant å se hvilke problemløsningsstrategier elevene bruker, når de arbeider med vanskelige problemløsende oppgaver. Jeg vil se hvordan problemløsning blir presentert i norske og russiske lærebøker, og finne forskjeller og likheter i denne presentasjonen, og se om de forskjellene og likhetene gir en pekepinn på hvorfor russiske elever presterer bedre enn norske elever i internasjonale undersøkelser.

1.2 Kapitteloppbygging

Kapittel 2 presenterer problemstillingen og forskningsspørsmålene i denne studien.

Kapittel 3 er gjennomgang av relevant litteratur om problemløsning og problemløsnings rolle. Samtidig vil det bli gitt definisjoner og begreper som skal brukes i denne studien. Senere skal teorien kobles mot funnene. I dette kapitlet får man også innsikt i det russiske skolesystemet og skolestruktur. De norske og de russiske læreplanene skal presenteres, og med det besvares.

Videre fortsetter oppgaven med metode i kapittel 4: metoder som ble benyttet, hva som var utvalget og hvilke begrensninger som ble gjort.

I kapittel 5 presenteres analyseprosedyren, og eksempler på klassifisering av problemløsningsmetoder i eksemplene. Dessuten diskuteres noen utvalgte eksempler fra de undersøkte lærebøkene.

Kapittel 6 viser funnene som ble gjort i analysen. Funnene presenteres ved bruk av tabeller, diagrammer og figurer.

Kapittel 7 er en videre drøfting og oppsummering av funnene i kapittel 6. De mest sentrale funnene fra kapittel 6 blir fremhevet og diskutert.

I kapittel 8 kommer konklusjon for studien. Problemstillingen og forskningsspørsmålene blir besvart, og mulighetene for videre forskning blir presentert.

2. Problemstilling og forskningsspørsmål

Utgangspunktet for min oppgave var å sammenligne norske og russiske lærebøker i forhold til i hvilken grad eksemplene i de norske og russiske lærebøkene belyser problemløsning, og jeg var interessert i å finne forskjeller og likheter i presentasjonen av problemløsningsmetoder i lærebøkene. Samtidig er det vanskelig å sammenligne lærebøkene fra to forskjellige land uten å ta i betraktning de forskjellige læreplanene, skolestrukturen i de to landene og skolekulturen.

På grunnlag av disse tankene har jeg formulert problemstillingen slik:

Hva er forskjeller og likheter i presentasjonen av problemløsningsmetoder i eksemplene i norske og russiske matematikklærebøker?

For å svare på problemstillingen har jeg formulert følgende forskningsspørsmål:

1. Hva sier læreplanen i matematikk om problemløsning i Norge og i Russland?

2. Hvordan blir problemløsningsmetoder benyttet i eksempler i norske matematikklærebøker og russiske matematikklærebøker?

Jeg ble inspirert av undersøkelsen til Fan and Zhu (2007) som analyserte problemløsningsheuristikker i lærebøker fra Kina, Singapore og USA, og av studien til Kongelf (2011) som undersøkte hvordan eksemplene i lærebøkene på niende trinn presenterte problemløsningsteknikker. I undersøkelsen min ville jeg bruke kodingsinnholdsliste og kodingsmanual som ble laget av Kongelf (2011).

Harder (2013) brukte også kodingsinnholdsliste og kodingsmanual til Kongelf (2011) for å undersøke eksemplene i lærebøkene fra videregående skole. På denne tiden var læreplanen i matematikk til revisjon. Harder (2013) ville at hennes undersøkelse skulle bidra til *å belyse eventuelle områder med forbedringspotensialet i lærebøkene, noe forlagene kan ta til etterretning når de nye lærebøkene forfattes* (Harder, 2013). Samtidig skulle det i den reviderte læreplanen fra 2013 legges *noe mer vekt på algebra enn i den opprinnelige planen for Kunnskapsloftet* (Grønmo et al., 2013, s.166). Det virket interessant og motiverende for meg å kunne finne ut hva slags forandringer som skjedde i læreplanen, og om problemløsning fikk «større plass» i læreplanen og i lærebøkene.

3 Teori

I dette kapittelet blir det gjort rede for teorien som dannet bakgrunnen for min undersøkelse. Først skal jeg presentere ulike definisjoner av begreper «problem» og «problemløsning». Så skal jeg se nærmere på forskjellige beskrivelser av problemløsningsprosessen med utgangspunktet i Polyas problemløsningsmodell. Problemløsningskompetanse som en viktig del av matematisk kompetanse presenteres i delkapittel 3.1.5 Problemløsning og problembehandlingskompetanse. Både Norge og Russland deltar i de mest oppfattende og komplekse internasjonale komparative studiene, PISA og TIMSS. Derfor skal de studiene med fokus på problemløsning presenteres i teorikapittelet. Videre skal jeg besvare det første forskningsspørsmålet ved å se på de norske og de russiske læreplanene og på problemløsningens plass i de læreplanene. Et alternativt analyseverktøy som ble utviklet av Johan Lithner for å kategorisere hvilken løsningsstrategi trengs for å løse matematikkoppgaven, skal presenteres til slutt.

3.1 Problem og problemløsning

3.1.1 Hva er et problem? Hva er problemløsning?

Problemoppgaver har en veldig lang historie. De eldste egyptiske papyrusene, de babylonske tavlene, og kopier av kinesiske og indiske manuskripter inneholder alle problemoppgaver (Mason et al., 2011). *Den første som eksplisitt formulerte tanker omkring problemløsning, løsningsstrategier, var den greske matematikeren Pappus, ca. 250 e.Kr* (Solvang, 1992, s.134).

Begrepene problem og problemløsning har hatt og har fortsatt ulike, og i noen tilfeller motstridende, betydninger (Schoenfeld, 1992). Vi kan finne mange forskjellige definisjoner på både hva et problem er, og hva som menes med problemløsning. Alle de definisjonene som ble funnet i litteraturen kan deles i to ulike måter å se det på. Tradisjonelt i matematikken har *problemer blitt sett på som matematiske oppgaver som skal utføres* (Schoenfeld, 1992). Denne definisjonen inkluderer rutineoppgaver som gir trening i noen spesifikke løsningsmetoder, men som ikke *nødvendigvis oppleves som utfordrende eller vanskelig for problemløseren* (Björkqvist, 2003). I tillegg har det også vært forutsatt at et problem er en tekstoppgave, og begrepene problem og tekstoppgave ble brukt synonymt.

I matematikkdidaktisk forskning brukes som regel en annen definisjon på hva et problem er, og denne definisjonen er rådende i problemløsningslitteraturen. Den definisjonen inkluderer bare de matematiske oppgavene hvor løsningsmetodene er ukjente for problemløseren. Denne definisjonen er individrelatert og dynamisk. En situasjon som oppleves som et problem for noen, er ikke nødvendigvis et problem for andre, og noe kan oppfattes som et problem ved et tidspunkt, men ikke oppleves slik ved et annet tidspunkt (Björkqvist, 2003, Polya, 1973, Schoenfeld, 1992, Solvang, 1992).

Polya bruker ordet problem slik at vi kan antyde sammenheng mellom et matematisk problem og et problem i mer generell forståelse. Polya definerer det å ha et problem på følgende måte:

To search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim (Pólya, 1981, s.117).

I følge Polya betyr problemløsning å finne en slik handling. Polya mener at det er viktig å planlegge hva man vil gjøre, det hjelper til å unngå problemer. Angriper man problemet under problemløsning med en gang uten å lage en plan først, kan man kanskje få problemer. Når man lager en plan på forhånd er det lettere å «sjekke» hva man gjør, mens man løser problemet.

Schoenfeld (1989) presenterer to kriterier som definerer hva som er et matematisk problem for en elev. Han bruker følgende kriterier:

For any student, a mathematical problem is a task

a. in which the student is interested and engaged and for which he wishes to obtain a resolution, and

b. *for which the student does not have a readily accessible mathematical means by which to achieve that resolution (*Schoenfeld, 1989, s.87*)*.

Schoenfeld hevder at en oppgave først er et problem for eleven, når eleven betrakter den oppgaven som sitt eget problem. Ifølge Schoenfeld må eleven være interessert, engasjert og ha et ønske om å løse oppgaven for at det skal være mulig å kalle den oppgaven for et problem. En oppgave som for en person er et problem, trenger ikke å være et problem for en annen. Her snakker Schoenfeld ikke om *en regneteknisk vanskelighet, men om en intellektuell vanskelighet (*Schoenfeld, 1985).

Flere senere matematikkdidaktikere har fulgt opp denne individrelaterte definisjonen av begrepet problem, og mener *at det som for en elev kan være rutinemessig oppgave, kan for en annen elev være et problem som eleven ikke vet nøyaktig fremgangsmåte på* (Birkeland et al., 2012, Björkqvist, 2003). For eksempel, mange sjuendeklassinger kjenner fremgangsmåten på løse oppgaven: 1404: 6 =, og for dem er denne oppgaven rutinemessig. Men for en tredjeklassing vil dette være et matematisk problem.

En oppgave som ikke tilfredsstiller definisjonen av et matematisk problem kaller Schoenfeld for øvelse (exercise) (Schoenfeld, 1985, Schoenfeld, 1992). Han hevder at «*in most textbooks, the majority of practice tasks can be solved by the direct application of a procedure illustrated in the chapter*» (Schoenfeld, 1989, s.88).

Mens begrepet problem har lenge hatt en viktig plass i skolematematikken, *er problemløsning et relativt nytt begrep* (Stanic og Kilpatrick ,1988, referert i Schoenfeld, 1992). En felles forståelse av begrepet «problemløsning» er enda mer mangfoldig og nyansert enn forståelsen av begrepet «problem». «Problemløsning» er i et upresist og vidt begrep som ifølge Schoenfeld er «*somewhat ill-defined and poorly grounded*» (Schoenfeld, 1992, s. 334).

Selv om *problemer har stått sentralt i matematikken siden antikken* (Stanic og Kilpatrick, 1988 referert i Fan and Zhu, 2007), viet ikke i forskning mye oppmerksomhet til problemløsning før sent på 1970-tallet. Ifølge Schoenfeld (1992) ble den første store interessen for problemløsning i matematikkdidaktikk registrert i 1977. Siden da har *mange forskere gjort store anstrengelser i å studere problemløsning* (Fan and Zhu, 2007).

Solvang definerer problemløsning som *«å søke etter handlinger som fører til en løsning av et problem»* (Solvang, 1992, s. 135). Når problemløseren møter en utfordring, der man kan bruke en kjent algoritme og som følgende mindre tid på å «søke» etter løsningsmetode, er det snakk om en rutineoppgave. Dersom man ikke kjenner en slik algoritme, er det snakk om et problem. Læreren kan forholde seg til problemet på to forskjellige måter: Læreren kan presentere for elevene en algoritme som fører til en løsning på problemet, og på denne måten gjør læreren problemet til en rutineoppgave. På den andre måten kan læreren utfordre elevene til å utforske problemet og finne en løsning selv.

For å løse et problem, må eleven lage noe nytt og bruke egne erfaringer og kunnskap i en ny situasjon. Problemløsning defineres som det å løse et problem. Boesen (2006) sier at han er inspirert av tankegangen til Schoenfeld som ble presentert tidligere i kapitlet. I likhet med Schoenfeld hevder Boesen at en oppgave ikke er et problem dersom eleven vet hvordan oppgaven kan løses. Men Boesen trekker ikke inn i definisjonen problemløserens ønske om å finne en løsning.

Stanic og Kilpatrick (1988) referert i Schoenfeld (1992) identifiserte tre fremtredende fokus i problemløsningsrolle i matematikkfaget:

- Problemløsning som kontekst
- Problemløsning som ferdighet
- Problemløsning som kunst

Problemløsning som kontekst baserer seg på tanken om at problemer og problemløsning fungerer som redskap for å oppnå ulike mål, gjerne innenfor andre fag. Derfor vektlegges det i skolen matematikkoppgaver som har tilknytning til elevenes dagligliv.

Stanic og Kilpatrick identifiserer fem slike roller som problemer spiller:

1. Som en *begrunnelse* for undervisning i matematikk. *«Historisk har problemløsning vært inkludert i matematikk pensum delvis fordi problemene gir begrunnelse for undervisning i matematikk»* (Stanic og Kilpatrick, 1988, referert i Schoenfeld, 1992, s.13). Virkelighetsnære problemer var ofte inkludert i læreplan for å overbevise studenter og lærere av den betydningen som matematikk har.
2. Som en spesifikk *motivasjon* for fagtemaer. Problemer ble ofte brukt til å introdusere temaer med implisitt eller eksplisitt forståelse av at etter at man har lært leksjonen som følger etter problemet, vil man være i stand til å løse problemer av denne typen.
3. Som *rekreasjon*. Rekreasjonsproblemer er ment til å være motiverende. De viser at matematikk kan være morsomt og spennende, og at det finnes mange underholdende bruksområder for den kompetansen som studentene mestrer.
4. Som et *middel* for å utvikle nye ferdigheter. Problemene kan introdusere nytt fagstoff til studentene og kan gi en kontekst for å diskutere nye teknikker som er mer effektive.
5. Som *øvelse/praksis*. De aller fleste av skolens matematikkoppgaver, faller i denne kategorien. Studentene blir vist en teknikk, og de jobber deretter med mange oppgaver til de har mestret denne teknikken (ibid.).

Når vi sier at matematikk og matematisk problemløsning er viktig for sin egen skyld, snakker vi om *problemløsning som ferdighet*. Vi ser på problemløsning som på ferdigheter som kan læres på skolen. Men ofte begrenses «problemløsningen» på skolen til at læreren viser en framgangsmåte, og elevene jobber med øvingsoppgaver inntil de mestrer «metoden». Schoenfeld påpeker at storparten av matematikkopplæringen på skolen faller inn i denne kategorien (Schoenfeld, 1992).

Problemløsning som kunst stammer fra Polya, og er den «ekte» problemløsning. Det holder ikke alltid å løse oppgaven med en kjent algoritme, og det kreves ofte kreativitet. For Polya var problemløsning en kunst som kunne læres ved imitasjon og øvelse med veiledning. Når man forsøker å undervise i problemløsning og implementere Polyas ideer i lærebøker, *blir ofte problemløsning som kunst redusert til problemløsning som ferdighet* (Kongelf, 2011, Schoenfeld, 1985). Praktisk kan det være vanskelig å anvende problemløsning i lærebøker og klasseromsundervisning. I sin definisjon av problemløsning bruker Polya dette sistnevnte kunstneriske fokuset:

Solving a problem means finding a way out of a difficulty, a way around an obstacle, attaining an aim, which was not immediately attainable. Solving problems is the specific achievement of intelligence, and intelligence is the specific gift of mankind: Solving problems can be regarded as the most characteristically human activity. (Pólya, 1981, vol. 2, s. ix).

Polyas problemløsningsdefinisjon gjelder ikke bare et matematisk problem, den definisjonen kan også brukes i forhold til problemer i livet generelt.

Etter min vurdering er alle de ulike definisjonene av begrepet «problem» og begrepet «problemløsning» som finnes i matematikkdidaktisk forskning ganske like. Alle hevder at «et problem» er et begrep som avhenger av forholdet mellom problem og problemløseren. De oppfordrer ikke bare til å se på egenskapene til et problem alene, men sette i fokus relasjonen mellom problem og problemløseren. I tillegg tar Polya og Schoenfeld inn i definisjonene sine problemløserens ønske om å finne en løsning. Schoenfeld trekker også inn elevens interesse og engasjement. Altså har problem en affektiv dimensjon. Mange studier har avdekket innflytelsen av ulike affektive aspekter (f.eks., tro, holdninger og følelser) på problemløsningsprosess og bygging av matematisk kunnskap (DeBellis og Goldin, 1999 referert i Carlson and Bloom, 2005). Både positive følelser, slik som tilfredshet og stolthet, og negative følelser, som angst og frustrasjon, endres ofte i løpet av problemløsningsprosessen. Når man ikke klarer å løse et vanskelig matematisk problem, får man en forferdelig frustrasjon av å ikke få det til. Holder man ut og får løse problemet til slutt, får man følelse av tilfredshet og ønske om å løse flere matematiske problemer. Da er det snakk om at den affektive dimensjonen kommer av problemløsning, og at det er toveis prosess. *Følelser som suksess og jublende glede fører vanligvis til motivasjon og interesse, mens følelser som fiasko og tristhet fører vanligvis til angst* (Hannula, 1999 referert i Carlson and Bloom, 2005).

Björkqvist (2003) tar ikke inn i definisjonen av problemet problemløserens ønske om å finne en løsning. Han presenterer videre et mulig tillegg til sin egen definisjon om at en oppgave først er et problem når eleven opplever den oppgaven som sin egen, og sier at det «*kan være ønskelig at problemer oppleves som elevenes/problemløsernes egne*» (ibid.). I følge Björkquist vil det garantere en viss utgangsmotivasjon og vil sørge for at oppgaven blir satt i forbindelse med tidligere erfaringer. *Å arbeide med en egen oppgave ligner også arbeidet til den viderekommende matematikeren* (ibid). Etter min oppfatning er Björkquist noe utydelig i sin definisjon av begrepet problem. Björkquist skriver at man kan ta med tillegget, men skriver ikke om han faktisk gjør det.

Björkquist, i likhet med Boesen, og i motsetning til Polya og Schoenfeld, trekker ikke inn i sin definisjon den affektive dimensjonen om at problemløseren skal oppleve problemet som sitt eget. Definisjonen til Björkquist der han tar med tillegget om at problemløseren skal oppleve problemet som sitt eget, er mest lik Polya og Schoenfeld sine definisjoner siden de også trekker inn det aspektet at problemet skal oppleves for problemløseren som sitt eget.

I denne studien skal jeg analysere eksempler fra norske og russiske matematikklærebøker. I forhold til analyse av eksempler i lærebøker, er det vanskelig å bruke den individrelaterte definisjonen av begrepet «problem», for den individrelaterte definisjonen knytter problemet til problemløseren. Derfor velger jeg, i likhet med Fan and Zhu (2007) og Kongelf (2011), å bruke den tradisjonelle definisjonen av begrepet «problem». Fan & Zhu og Kongelf definerer alle situasjoner som krever en avgjørelse som problemer (Fan and Zhu, 2007, Kongelf, 2011). På samme måte skal jeg se på alle eksemplene som er presentert i lærebøkene som på «problemer», uansett om problemløseren løser de ved hjelp av en algoritme (rutine-oppgaver), eller problemløseren må søke løsningen selv og bruke kreativitet. I denne oppgaven skal jeg fokusere på hvilke metoder problemløseren bruker, når han/hun løser problemet. Men selv om denne individrelaterte definisjonen er problematisk for lærebokanalyse, har forskere som Lithner (2008) og Boesen (2006) håndtert dette ved å se på hva slags resonnement er nødvendig for å løse selve problemet. Dette skal presenteres i delkapittel 3.6 Alternativt rammeverk.

For å spare tid og plass skal jeg kalle alle «matematiske problemer» i denne oppgaven for «problemer». Når jeg skal snakke om problemer som ikke er matematiske, men brukes i generell forstand, skal jeg presisere det.

3.1.2 Problemløsningsprosessen

George Polya har vært sentral i begrepsutviklingen rundt problemløsning i moderne tid. Mesteparten av arbeidet som ble gjort innenfor problemløsning på 1970- og 1980-tallet er basert på Polyas arbeid (Schoenfeld, 1992). Schoenfeld har også vært spesielt sentralt innenfor forskning på matematisk problemløsning. Her presenterer jeg Polya og Schoenfeld sine beskrivelser av problemløsningsprosessen, i tillegg til to nyere beskrivelser. Den ene beskrivelsen er konstruert av Marilyn P. Carlson og Irene Bloom (2005) og den andre av Mason, Burton, og Stacey (2010). Deretter sammenligner jeg de fire beskrivelsene og setter dem i en tabell. Jeg vil bemerke at beskrivelsen til Polya ikke er basert på forskning, mens Schoenfeld og Carlson og Bloom, og Mason, Burton, og Stacey sine beskrivelsene er basert på forskning.

I den kjente boken «How to solve it» som ble første gang utgitt i 1943, presenterer Polya (1973) en «fire-trinns oppskrift» på hvordan man løser problemer. Denne «fire-trinns oppskriften» er generell. Men samtidig lister Polya opp flere mer spesifikke strategier eller heuristikker under hvert punkt i sin modell. Til hver fase introduserer han bestemte strategiske spørsmål som kan hjelpe problemløseren på vei mot løsningen (Pólya, 2009). De spørsmålene kan også kalles *heuristiske strategier*. De fire fasene med tilsvarende strategiske spørsmål er:

1. Forstå problemet

- Hva er ukjent?
- Hva vet du?
- Hvilke betingelser er oppgitt?
- Har du tilstrekkelige opplysninger, eller kanskje flere opplysninger enn du trenger?
- Tegn en figur. Bruk formålstjenlige betegnelser
- Kan vi:
  - Gjette på en løsning, og teste gjettingen
  - Trekke ut og organisere informasjon
  - Finne en representasjon: et diagram, en formel, en figur, et skjema
  - Finne passende symboler eller en måte å skrive det ned på

2. Legg en plan

- Har du sett et liknende problem før? Kan du i så fall bruke det?
- Kjenner du til et teorem som kan være nyttig?
- Se på den ukjente. Har du løst et annet problem før, med en tilsvarende ukjent?
- Kan du formulere problemet på en annen måte? På enda en annen måte?
- Kan du introdusere et «hjelpe-element»?
- Bruk definisjonene!
- Kan du løse et enklere problem som likner? Et spesialtilfelle? Et mer generelt tilfelle?
- Kan du løse deler av problemet?
- Hva skjer hvis du dropper noen av betingelsene i oppgaven? I hvor stor grad kan du nå bestemme den ukjente, og hvordan vil den variere?
- Har du brukt alle opplysningene i oppgaven?
- Kan du gjøre antakelser som forenkler problemet?
- Kan du endre de variable og holde de andre fast?
- Kan du teste de variable systematisk?

3. Gjennomfør planen

- Utfør det du har planlagt. Kan du se klart at hvert enkelt trinn i løsningen er riktig? Kan du bevise det?

4. Se tilbake

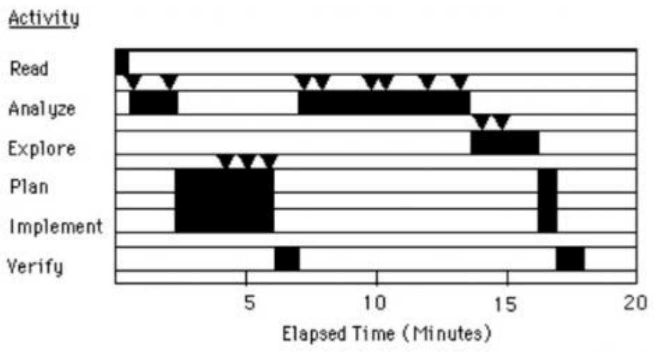
- Reflekter over løsningen. Kan du sjekke at resultatet stemmer? Kan du sjekke argumentene?
- Kan vi kontrollere hvert skritt?
- Kan du finne en annen løsningsmetode?
- Kan du bruke resultatet eller løsningsmetoden i andre problemer?
- Har oppgaven alltid en løsning?
- Har det flere løsninger?
- Hva kan vi lære av løsningen?
- Kan vi utvide – fins det en mer generell løsning? (Birkeland et al., 2012, s. 304, Pólya, 2009).

I Polyas første fase hvor eleven prøver å forstå problemet, må eleven forstå hva ordene og teksten i oppgaven betyr og hva som er relevant i oppgaven. Det kan være hensiktsmessig å se oppgaven på flere ulike måter ved, for eksempel, å tegne opp en figur, lage en visuell representasjon eller gi navn til eventuelle objekter som ikke har navn. Til slutt kan det også være nyttig å gi en kvalifisert gjetning på hva løsningen kan være (Pólya, 2009). Den siste fasen i modellen («se tilbake» – fasen) er også veldig viktig, og denne fasen kan hjelpe elever å forstå at det finnes flere måter å løse problemet på.

Schoenfeld (1992) deler problemløsningsprosessen inn i seks faser:

1. Lese
2. Analysere
3. Utforske
4. Planlegge
5. Implementere/gjennomføre
6. Etterprøve/sjekke

Schoenfeld (1992) studerte hvordan en erfaren matematiker kontra elever fra videregående skoler løste problemer. Den aktuelle matematikeren hadde ikke jobbet innenfor feltet problemet var fra på ti år. Resultatene viste at den erfarne matematikeren bruker mer enn halvparten av tiden på å forstå problemet. Han fulgte ikke opp den første ideen han fikk, og han gjorde en betydelig mengde av analyse. De små trekantene (Figur 1) representerer matematikerens egne eksplisitte kommentarer vedrørende løsningsprosessen. Matematikeren begynte ikke med utforskning og implementering før han var overbevist om at han arbeider i riktig retning. Etter at han hadde prøvd å løse oppgaven, gikk han alltid til etterprøvningsfasen for å se om det han hadde gjort virket riktig. Etterprøvingsfasen var den siste fasen han var innom før han var ferdig.

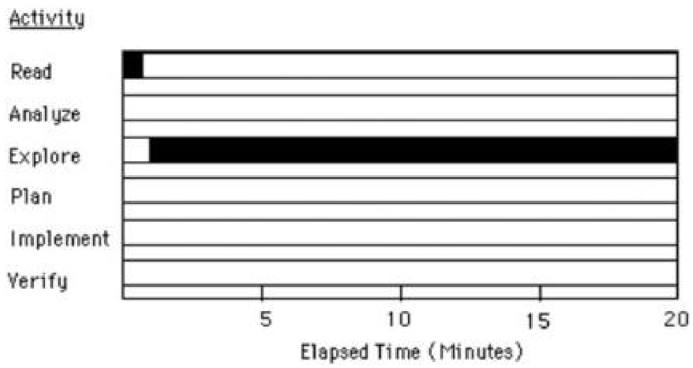


Figur 1. Matematiker som jobber med et vanskelig problem

Den andre delen i undersøkelsen, en elevundersøkelse, ble basert på mer enn 100 video-opptak av studenter som jobbet med «ikke-rutine» problemer. Ifølge undersøkelsen bruker ofte elevene, i motsetning til den erfarne matematikeren, følgende strategi:

Read, make a decision quickly, and pursue that direction come hell or high water (Schoenfeld, 1992, s.356)

Schoenfeld fant ut at elevene leste fort oppgaveteksten, valgte en retning for arbeidet og fortsatte i den retningen resten av den tildelte tiden (20 minutter), selv om de ikke gjorde fremgang. Figur 2 viser et typisk problemløsningsforsøk, der to studenter arbeider sammen for å finne løsningen. Vi ser ingen små trekanter i denne figuren, og det sier at studentene ikke stilte spørsmål til sin egen løsningsprosess.



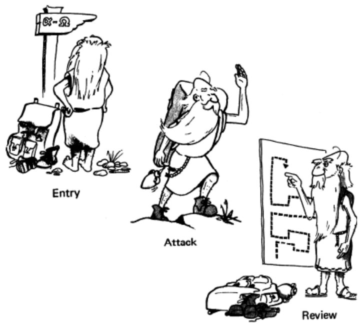
Figur 2. Studenter som prøver å løse et vanskelig problem

Resultatene fra Schoenfeld viste at mer enn 60 % av elevene forsøkte å løse et problem på den overfor nevnte måten *lese, ta en rask beslutning, forfølge denne retningen uansett hva som skjer* (Schoenfeld, 1992). Selv om elevene har kunnskapene de trenger for å løse problemet, klarer de ikke å løse problemet. Hvis elevene ikke er vant til å sjekke og revurdere løsningen, vil valg av feil strategi føre til at elevene ikke finner en løsning.

Når vi sammenligner Polyas sin modell og Schoenfeld sin modell av problemløsningsprosessen, ser vi at mens Polya fokuserer på konkrete handlinger og strategier i problemløsingsprosessen, beskriver Schoenfeld mer abstrakte forhold ved prosessen.

I «Thinking Mathematically» (Mason et al., 2010) og «Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving» (Mason and Davis, 1991) deles løsningsprosessen inn i tre hovedfaser:

1. Entry (Inngang)
2. Attack (Angrep)
3. Review (Tilbakeblikk)



Figur 3. Illustrasjon fra Mason, Burton og Stacey, 2010, s. 24.

Entry

Entry-fasen er den første fasen, og begynner når eleven møter problemet. Det er vanskelig for eleven å lage en god plan for løsningen, og senere utføre denne planen, hvis han ikke har forstått selve problemet. Det er derfor *viktig at eleven bruker tid på å være sikker på at problemet er forstått* (Pólya, 2009). I de fleste tilfeller i *entry -fasen* leser elevene oppgaveteksten og bearbeider det som ble lest.

Entry-fasen svarer på spørsmålene «hva vet jeg», «hva ønsker jeg» og «hva kan jeg introdusere» (Mason et al., 2010). Det er veldig viktig å lese oppgaveteksten nøye. Da overser man ikke informasjon, og *misforståelser oppstår ikke* (ibid.). «Hva vet jeg» - spørsmålet kan deles i to: «hva eleven vet fra spørsmålet», og «hva eleven vet fra tidligere erfaringer» (ibid.). «Hva ønsker jeg» - spørsmålet hjelper til å finne ut hva eleven må gjøre for å finne et svar eller bevise at noe er sant. *Et hovedproblem ved oppgaveløsing er å få klarhet i hva oppgaven egentlig spør om* (ibid.). Spørsmålet om «hva kan jeg introdusere i oppgaven» fører til at eleven kan benytte seg av hjelpemidler. For eksempel, eleven kan tegne en hjelpetrekant med målene som er oppgitt i oppgaven, det hjelper eleven å se på oppgaven på en annen måte. Masons *entry - fasen* ligner på Polyas sin første fase.

Attack

Attack er hovedfasen for anstrengelsene med å løse oppgaven (ibid.). Etter at eleven har tolket innholdet i tekstoppgaven, starter *attack –fasen,* og eleven velger løsningsmetode han/hun skal bruke. I denne fasen benytter eleven gjetting, eller setter frem sin plan. Eleven kan ha flere planer og ideer som han/hun skal prøve ut. De fremgangsmåtene og metodene som eleven velger er avhengig av elevens tidligere kunnskap og erfaring, og av hvordan han/hun forstått innholdet i tekstoppgaven. Tolker eleven oppgaveteksten på feil måte, eller han/hun ikke vet hvilke metoder han skal bruke i de forskjellige situasjonene, kan det hende at eleven velger feil fremgangsmåte/metode. Det kan hende at eleven har prøvd alle ideene og står fast i løsningen. Bare gjennom det å stå fast og å klare å akseptere situasjonen og det at han/hun står fast, lærer eleven hvordan han/hun kommer seg ut av denne situasjonen (ibid.).

Review

Refleksjon er kanskje den viktigste aktiviteten for å utvikle matematisk tenkning. Det er vanskelig for eleven å lære av sine erfaringer uten å reflektere over hva han/hun har gjort (ibid.). Eleven går over til *review -fasen* for å sjekke om løsningen er riktig når en løsning er nådd. Denne fasen hjelper eleven å få erfaringer, og finne flere metoder som kan benyttes ved løsning av matematikkoppgaver. Når eleven senere står fast, kan han/hun huske tilbake til ideer som har fungert tidligere og benytte disse (ibid.). I denne fasen kan eleven også vurdere om han/hun kan løse oppgaven på en annen måte, om metoden kan benyttes for å løse et annet problem. Hvis eleven under denne evalueringen oppdager feil, må han/hun bevege seg tilbake til *entry-fasen* eller *attack-fasen* (ibid.).

Carlson og Bloom utarbeidet en inndeling av problemløsningsprosessen som er veldig likt Polyas sin fire-trinns modell. Carlson og Bloom studerte tolv matematikere mens de løste matematiske problemer. Resultatene de fikk indikerer på at problemløsning består av fire hovedfaser: 1) orientere, 2) planlegge, 3) utføre og 4) sjekke. Etter at matematikerne hadde orientert seg om hva problemet handlet om, repeterte de en planlegge-utføre-sjekke-syklus gjennom hele problemløsningsprosessen. Det var sjelden at noen av oppgavene ble løst på en lineær måte (fase 1-4 uten repetisjoner). Matematikerne reflekterte jevnlig over egne valg og handlinger gjennom alle de fire fasene, og refleksjonene var med på å bevege matematikernes tenkning i en produktiv retning (Carlson and Bloom, 2005).

Fosli (2013, s. 17) setter opp en tabell over fasene i problemløsningsprosessen slik den framstilles av Mason et al. (2010), Polya (1973), Schoenfeld (1989) og Borgersen (1994). Jeg gjengir tabellen her og tar også Carlson og Bloom sin modell med.

	Faser i løsningsprosessen						
Mason et al. (2010)	Inngang		«Angrep»			Tilbakeblikk	
Polya (1973)	Forstå problemet		Legg en plan		Utfør plan	Se tilbake	
Schoenfeld (1989)	Lese	Analysere	Utforske	Planlegge	Implementere	Verifisere	
Borgersen (1994)	Analysere / Definere	Tegning/ Modell	Kvalifisert gjetting	Finne hypotese	Utvikle bevis	Refleksjon	Generalisering
Carlson og Bloom (2005)	Orientere		Planlegge		Utføre	Sjekke	

Tabell 1. Oversikt over ulike faser i problemløsningsprosessen

Jeg syns Tabell 1 gir en hensiktsmessig oversikt over ulike faser i problemløsningsprosessen, og viser at forskerne er enige om hovedtrekkene i problemløsningsprosessen, selv om de tenker forskjellig i forhold til hvor mange faser de deler problemløsningsprosessen i, og hvordan de kaller de forskjellige fasene. Min vurdering er at Carlson og Bloom sin inndeling ligner mye på Polyas sin inndeling, men at Carlson og Bloom er tydelige på at enkelte faser gjentas i problemløsningsprosessen. De snakker om planlegge-utføre-sjekke-syklusen. Schoenfeld deler inn problemløsningsprosessen i seks faser. For meg virker det at to første fasene (lese og analysere) til Schoenfeld sin inndeling kan omfatte det som ligger i Polyas første trinn, forstå problemet, og i Carlson og Blooms første trinn, orientere. Den andre fasen til Polya og Carlson og Bloom samsvarer med fasene «Utforske» og «Planlegge» i inndelingen til Schoenfeld. Videre er de to siste fasene til Schoenfeld sin inndeling samsvarende med de to siste fasene til Polya og Carlson og Bloom.

3.1.3 Problemløsning og heuristikk

I litteraturen blir problemløsning ofte kalt *heuristikk, som betyr oppfinnelseskunst* (Solvang, 1992, s. 134). Det støtter også Schoenfeld (1985) som sier at heuristikk brukes synonymt til matematisk problemløsning. I boken sin skriver Schoenfeld *«once nearly forgotten, heuristics have become nearly synonymous with mathematical problem solving»* (Schoenfeld, 1985).

Heuristikk defineres i fremmedordboken som *«oppfinnelseskunst, læren om de metoder som tjener til å vinne nye vitenskapelige resultater»* (Gundersen & Berulfsen, 2008 referert i Harder, 2013). Målet med heuristikk er å studere metoder og regler for oppdagelse og oppfinnelse (Polya, 1973, s. 112). *Heuristikk (gresk εὑρησις [heuresis] = «oppdagelse») er læren om hvordan man best oppnår og lagrer kunnskap, og er en gren av filosofien. Heuristikken beskjeftiger seg med metodene som kan, eller bør brukes for å oppnå ny erkjennelse, for å løse problemer og for å beskrive disse metodene* (http://no.wikipedia.org/wiki/Hovedside).

Heuristikk behandles av Polya i en ordliste som er en vesentlig del av boken «How to solve it», og betyr *«et generelt forslag til hva en kan gjøre når en skal løse et ukjent problem»* (Polya, 1973). Heuristikk er ment til å være en effektiv måte å hjelpe elevene å håndtere informasjonen som er gitt i problemløsningsoppgaver, spesielt når oppgavene har mye informasjon. En heuristisk fremgangsmåte kan hjelpe elevene til å kontrollere deres egne tankeprosesser. Polyas heuristikker er generelle, og kan deles opp i flere mer spesifikke strategier (se delkapittel 3.1.2 Problemløsningsprosessen). De heuristiske metodene slik vi finner dem i boken til Polya «How to solve it», har blitt kritisert for å være *«descriptive rather than prescriptive»* (Schoenfeld, 1992, s. 353). Det betyr at de heuristiske metodene er beskrivende i den forståelse at matematikere og andre med god kjennskap til problemløsning kan gjenkjenne strategiene når de brukes, men det er vanskelig å lære problemløsning fra de metodene (Schoenfeld, 1992). I tillegg får ikke elevene som ikke kjenner strategiene fra før, de nødvendige detaljene utfra strategiene, og da er de ikke i stand til å bruke de strategiene for å løse problemer (Kongelf, 2011, s.15, Schoenfeld, 1992).

Schoenfeld har utviklet et rammeverk for analyse av matematisk atferd. Rammeverket presenteres i boken «Mathematical Problem Solving» (Schoenfeld, 1985), der det presiseres at matematisk kunnskap og atferd (mathematical knowledge and behavior) består av fire kategorier som delvis overlapper:

- *Evner/ressurser (resources).* Kunnskap (body of knowledge) som personen har med seg i den matematiske situasjonen.
- *Heuristikk (heuristics).* Regler for effektiv problemløsing, med andre ord strategier for å gjøre fremgang i kjente og ukjente situasjoner. Eksempler på heuristikker er å bruke analogier og jobbe baklengs.
- *Kontroll (control).* Utnyttelse av evner/ressurser, planlegging og overvåking av egen tenkning.
- *Oppfatningssystemer (belief systems).* Det matematiske «bildet av verden», med andre ord det perspektivet på matematikk som man kommer i situasjonen med (Schoenfeld, 1985, s.44-45)

Schoenfeld (1985) mener at de fire kategoriene kan forklare hvorfor personen lykkes eller feiler i forsøket på å løse matematiske problemer. Hvis man vet hvilke forutsetninger, hvilket kunnskap en person har, når han løser et problem, kan det gi en pekepinn på hva den personen faktisk klarer å oppnå i et gitt tilfelle. Hvis problemløseren har god kontroll over egen oppførsel, utnytter sine evner på best mulig måte, gir det effektiv problemløsning. Har ikke problemløseren kontroll, kan han mislykkes med å løse problemet. Hvordan man oppfatter matematikk, styrer hans valg av strategier, metoder, tidsbruk. Og det i sin del påvirker problemløsningsferdigheter.

Men ofte blir det forvirrende, når problemløsning og problemløsningsheuristikker blandes sammen, for det er egentlig to forskjellige ting. Problemløsningsheuristikker er mønstre i hvordan man gjør problemløsning, og ikke problemløsning selv. Problemløsningsheuristikker er mer konkrete og eksplisitte. Men de har noe mer generelt over seg; en form for tankegang som kan brukes til å løse forskjellige problemer i mange forskjellige sammenhenger. Den tankegangen er ikke en konkret regel, og den tankegangen dreier seg om å forstå hva man skal gjøre og når, og hvilke ting er det man skal tenke på. Under denne tankegangen finner man ut hvilke konkrete heuristiske metoder som er aktuelle for å løse det konkrete problemet.

I denne oppgaven kommer jeg til å bruke begreper «heuristiske strategier», «heuristiske metoder» og «problemløsningsheuristikker» på lik linje.

3.1.4 Undervisning i problemløsning

Pólya (1981) mener at undervisning i problemløsning er det viktigste en matematikklærer kan tilby sine elever. Han hevder at de 70 % av elevene som mener at de aldri senere kommer til å ha nytte av matematikk utover helt grunnleggende regneferdigheter, likevel vil ha nytte av den «common sense» som gjerne preger problemløsning (ibid.). Polyas hensikt var at elevene måtte få mulighet til å engasjere seg i problemløsning som en oppdagende og skapende aktivitet. Polya har selv gitt konkrete anbefalinger i forhold til problemløsning. Ifølge Polya kan man bruke ulike strategier som, for eksempel, å bryte ned og sette sammen på ny, bruke analogier, hjelpeelementer, indusere, spesialisere, variere og arbeide baklengs for å kunne finne løsningen på problemet. Polyas arbeid førte til at man begynte å iverksette problemløsning på skolen. Men uansett har synet på Polyas anbefalinger fram til 1980-årene vært relativt negativt. Grunnen til det kunne være at prosessen var lite formalisert og var vanskelig å bruke (Schoenfeld, 1992). Som det ble sagt før, var anbefalingene til Polya beskrivende, men ga ingen detaljert oppskrift for hvordan en skulle gå fram. Samtidig var det lite forskning og lite empirisk bevis på 70-tallet som støttet at heuristikker kunne forbedre problemløsning (ibid.). Men funnene på 80-tallet snudde seg mer til fordel for Polyas anbefalinger. (ibid.) viser til studier som beviste at undervisning i generell problemløsning ikke nødvendigvis gjør elevene i stand til å overføre lærte teknikker til nye situasjoner, men påpeker at nyere funn indikerer at elever kan dra nytte av å lære seg mer spesifikke teknikker (ibid.). De spesifikke teknikkene kan elever ha i sin matematisk verktøykasse, på lik linje med de andre kunnskapene og metodene. Da blir problemløsningsferdighetene en del av elevenes matematisk kunnskap og forståelse. Hvis en person har brukt en metode flere ganger og lyktes, kommer personen til å huske den metoden og bruke den senere til å løse problemer. Etter hvert blir flere metoder lagret i et personlig sett med problemløsningsstrategier. Hvis man får undervisning i de metodene, *slipper man å oppdage de metodene på egenhånd* (Schoenfeld, 1985, s. 70-71). Samtidig har mange klassebaserte undersøkelser indikert at passende undervisning i problemløsningsmetoder fremmet utviklingen av studentenes evne i problemløsning (f.eks. Charles og Lester, 1984; Hembree, 1992; Higgins, 1997; Lee, 1982; Oladunni, 1998; Schoenfeld, 1979 referert i Fan and Zhu, 2007).

Hvis lærebokforfatterne skriver lite i lærebøkene sine om hva heuristiske metoder er og hvordan man bruker de heuristiske metodene, kan reduseres muligheten for elever og lærere å delta i diskusjon om slike metoder. Dette betyr at *dersom lærebøkene ikke behandler heuristiske metoder på en eksplisitt og systematisk måte, kan man ikke forvente at lærere underviser metoder og elever lærer dem, og det forhindrer at heuristiske metoder blir en del av en strategi for å løse problemer* (Schoenfeld, 1985).

Målet med problemløsning beskriver Schoenfeld (1992) med flere punkter:

- Søke løsninger, ikke bare memorere prosedyrer/metoder
- Utforske mønstre, ikke bare memorere formler
- Formulere beregninger, ikke bare gjøre øvelser
- Få elevene til å tenke kritisk og analytisk
- Gi elever muligheten til å være forskere, slik at de får anledning til å forstå meningen med matematikk (Schoenfeld, 1992)

Hvis undervisningen begynner å reflektere over det, vil elevene ha mulighet til å studere matematikk *som et utforskende, dynamisk, utviklende fag og ikke som en sett med regler som skal huskes* (Schoenfeld, 1992).

Når Polya snakker om problemløsning og heuristikk, forutsetter han en viss grad av matematisk forståelse hos elever, og sier at *«læring av heuristikker krever et fundament av* *matematiske evner/ressurser»* (Pólya, 1981). Schoenfeld påpeker at *heuristikk i ånden av Polya muligens krever et visst matematisk nivå, og anbefaler å undervise i heuristiske metoder på universitetsnivå* (Schoenfeld, 1992, Schoenfeld, 1985). Men Kongelf (2011) mener derimot at yngre elever kan lære heuristikk i en mindre streng forstand, enn det som vanligvis brukes i matematisk problemløsning.

Selv om Schoenfeld antyder at undervisning i problemløsning må være eksplisitt og systematisk, sier Lester at problemløsning er en kompleks prosess (Lester, 1996).
Og derfor er det vanskelig å undervise i problemløsning (Lester, 1996). Det er forsket mye på hvordan man best kan undervise i problemløsning, og Lester (1996) gjennomgikk gjeldende litteratur om undervisning i problemløsning, og presenterte en liste med fire hovedprinsipper:

1. Elever må løse mange problemer for å forbedre sin problemløsningsevne
2. Problemløsningsevne utvikles sakte over lang tid
3. Elever må tro at deres lærer synes problemløsning er viktig for at de skal ta til seg undervisning i/om problemløsning
4. De fleste elever tjener på systematisk undervisning i problemløsning (Lester, 1996, s.87)

I Lesters oppsummering av forskningslitteratur omkring problemløsning, kommenterer han at et tydelig forskningsresultat er at det ikke er nok å lære om problemløsning (f.eks. undervisning om Polyas fire-fasede modell) for å få bedre problemløsningsevne. Elever må løse mange problemer over en lengre tidsperiode for å forbedre problemløsningsevnen sin (Lester, 1994).

Teoretikere presentert over snakker om å være konkret angående undervisning i problemløsning. Så prøver matematikk-didaktikere å finne noen konkrete anbefalinger angående undervisning i problemløsning. Didaktikere som Breiteig (2008) og Birkeland et al. (2012) har et lignende syn i at undervisning må gi elever muligheten til å skaffe seg erfaring med å gjøre matematikk, og at det må gjenspeiles i gjeldende matematikkplaner. Følgende sjekkliste med noen trekk ved en arbeidsform som inkluderer problemløsning og utforsking, kan brukes i skolepraksis:

- Finn rike oppgaver
- Motiver elevene
- Gi dem tid
- La elevene selv få en vesentlig del av oppdagelsen
- La dem gå veien fram

- Lytt til deres språk og deres formuleringer
- Still oppfølgende spørsmål, be dem gjerne om å forklare hvordan de har gjort og tenkt, og hvorfor de har gjort det slik
- Stimuler deres tenking om eget arbeid og egne løsninger
- Motstå fristelsen til å gi dem en rask løsning
- Verdsett deres oppdagelse og deres forståelse
- Hold målet med oppgaven og aktiviteten klart
- Verdsett oppsummering og refleksjon ved slutten av en arbeidsøkt (Birkeland et al., 2012, s. 291, Breiteig, 2008, s. 39)

Listen over bekrefter at det er viktig å sette god tid i undervisningen til at elever skal kunne jobbe med vanskelige oppgaver. Hvis elever har nok tid til å snakke om oppgaven, analysere oppgaven og prøve å løse den, og etterpå å fortelle hvordan de løste oppgaven og hvorfor de mislyktes, utvikles det en slags «problemløsende kultur» i undervisningen. Hvis elever ikke får anledning til å løse mange problemer, blir elever ikke gode problemløsere. For å lære og utvikle problemløsningsstrategier, må elever jobbe jevnt og systematisk med vanskelige problemer. Men det er ofte ikke tid til problemløsning i skoleundervisning. Derfor foretrekker ofte lærere å gi elevene mange lette oppgaver istedenfor å gi en oppgave som er vanskelig og som trenger mye tid for å bli løst. For å bli gode problemløsere må elever ikke bare løse problemet, men også kunne snakke om hvordan de løste problemet, hvorfor har de ikke klart å komme til løsningen, hva kunne de gjøre annerledes for å lykkes. Elever må ha anledning til å kunne overvåke og kontrollere egen løsningsprosess, men det er som regel ikke tid til i undervisning. Men samtidig kan det være fare for at for systematisk læring kan fort bli for metodisk og for stivt. Mennesker er ikke flinke til å lære ting etter «oppskriften». De lærer ofte av å se på eksempler og oppdage mønstrer. Så bruker de mønstrene til å løse lignende problemer. Og noe problemløsning dreier seg om, er å lære mennesker i å oppdage mønstrer i hvordan de oppdager mønstrene. Derfor er det hele veien snakk om å finne en balanse i undervisning mellom det metodiske og stive, og det fleksible og kreative.

Som vi så over, var det lang utvikling av synet på hvordan problemløsning skal undervises. Det startet med Polya som presenterte de generelle trekkene ved problemløsning. Så finner man noe som er mer eksplisitt og spesifikt. Og med tiden blir det alt for eksplisitt og metodisk. Den største utfordringen var igjen å kunne finne en «mellomting» mellom det å være for abstrakt og det å være for konkret. Selv om de spesifikke problemløsende heuristikkene skal presenteres tydelig, og deres bruk bør utvikles på samme måte som andre matematiske strategier eller teknikker, bør en viss forsiktighet tas om hvordan eksplisitt undervisningen i heuristikker er nødvendig (Higgins. 1997 referert i Fan and Zhu, 2007). Higgins (1997) sin studie referert i Fan and Zhu (2007) rapporterte at elever som fikk undervisning i problemløsning, hadde tendens til å sette likhetstegn mellom problemløsning og problemløsningsheuristikker de hadde lært. Med andre ord anså de studentene problemløsende heuristikker som «regler» for å løse problemer. Derfor er det viktig både for lærebokforfattere og for lærere, å være klar over både positive og negative potensielle påvirkninger, når de presenterer spesifikke problemløsningsheuristikker som står i lærebøker (Fan and Zhu, 2007). Elever må ikke få oppfatning at alle oppgavene av denne typen skal løses ved bruk av en konkret heuristikk og på en konkret måte. De må kunne se på en oppgave uten å forbinde denne oppgaven med en konkret «regel», men heller forstå problemet og analysere hvordan de skal gå frem og hvorfor, og hvilke heuristikker de kan bruke for å løse oppgaven.

Fan and Zhu (2007) mener at undervisningen i problemløsning ikke bør behandles som et isolert tema. I stedet bør den undervisningen være integrert i vanlig matematikkundervisning og læring. Dette virker for meg å være veldig fornuftig, for det hjelper elevene å ikke likestille problemløsning med en liste over spesifikke heuristikker, og å ikke behandle problemløsningsheuristikker som regler.

3.1.5 Problemløsning og problembehandlingskompetanse

Norge kommer dårlig ut i undersøkelser som viser elevens kompetanse i matematikk. Men samtidig er det mange som mener at det er viktig at elevene behersker flere ulike kompetanser i matematikk, og at vi trenger en bevisstgjøring omkring hva det vil si å ha matematiske kompetanse (Rørsseland, 2005a).

En generell beskrivelse av hva matematisk kompetanse er, finner vi hos Niss og Jensen. Denne beskrivelsen var et resultat av det danske prosjektet «Kompetencer og matematiklæring» (KOM-prosjektet) (Niss and Jensen, 2002). Prosjektet pågikk i perioden fra år 2000 til 2002, og hadde Mogens Niss som leder. Målet var å karakterisere matematisk faglighet som er basert på matematiske kompetanser. De matematiske kompetansene skulle brukes som et verktøy for å utvikle matematikkutdanningen i Danmark (Niss and Jensen, 2002). Niss og Jensen mener at læreplaner i matematikk bør fokusere på at elevene skal utvikle de ulike matematiske kompetansene. I følge Niss and Jensen (2002) betyr matematisk kompetanse: *at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik* *og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå* (Niss and Jensen, 2002, s. 43)

Niss and Jensen (2002) definerer en matematisk kompetanse som:

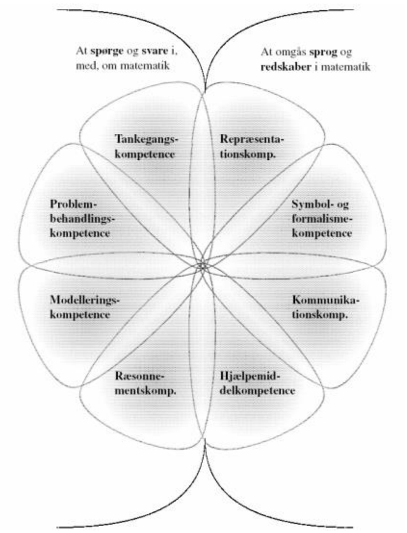
indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer (Niss and Jensen, 2002, s. 43)

Niss og Jensen deler den matematiske kompetansen i åtte kompetanser (Figur 4), som er fordelt i to hovedgrupper. Den ene hovedgruppen omfatter kompetanser en person trenger for å spørre og svare i, med og om matematikk:

1. Tankegangskompetanse
2. Problembehandlingskompetanse
3. Modelleringskompetanse
4. Resonneringskompetanse

Den andre hovedgruppen omfatter kompetanser innen det å omgå språk og redskaper i matematikk:

5. Representasjonskompetanse
6. Symbol- og formalismekompetanse
7. Kommunikasjonskompetanse
8. Hjelpemiddelkompetanse



Figur 4. Matematisk kompetanse

Beskrivelsene på de åtte kompetansene kan man se i Vedlegg 17. Beskrivelsene på de åtte kompetansene av den matematiske kompetansen til Niss og Jensen.

Alle de åtte kompetansene har like mye med hverandre å gjøre (Niss and Jensen, 2002). Det er en nær forbindelse mellom to ulike kompetanser, og det finnes overlappinger mellom ulike kompetanser. En kompetanse kan ikke bli ervervet i isolasjon fra andre kompetanser.

Problembehandlingskompetanse inneholder det å kunne finne og formulere matematiske problemstillinger, kunne løse matematiske problemstillinger og etter hvert også kunne løse dem på forskjellige måter. De elevene som har høy problemløsningskompetanse vil kunne resonnere og løse problemene med systematisk valg av strategi, og de vil være i stand til å velge mellom ulike løsningsstrategier, for å velge den mest hensiktsmessige (Rørsseland, 2005b). Problembehandlingskompetanse går tett sammen med modelleringskompetanse og resonneringskompetanse.

En annen beskrivelse av matematisk kompetanse ble utarbeidet av T. Palm, E. Bergqvist, I. Eriksson, T. Hellström og C.-M. Häggström i 2004 (Palm et al., 2004). Den beskrivelsen er basert på analyser av læreplanverket og tilhørende politiske dokumenter for den videregående skolen i Sverige, og målet var at kompetansene skulle være forståelige for lærere og personer som lager oppgaver og utvikler prøver (Boesen, 2006, Palm et al., 2004). Beskrivelsen inneholder seks kompetanser:

1. Problemløsningskompetanse
2. Algoritmekompetanse
3. Begrepskompetanse
4. Modelleringskompetanse
5. Resonneringskompetanse
6. Kommunikasjonskompetanse

Denne beskrivelsen ligner på Niss og Jensen sin beskrivelse av matematisk kompetanse. Og på samme måte som hos Niss og Jensen finnes det relasjoner og overlappinger mellom de seks kompetansene. En av de seks kompetansene er problemløsningskompetansen. Problemløsningskompetansen er en kompetanse som er nødvendig for å kunne løse et problem (Palm et al., 2004). Denne kompetansen har også nær forbindelse til modelleringskompetansen og resonneringskompetansen.

En kompetanse kan ikke bli ervervet i isolasjon fra andre kompetanser og må ses i sammenheng med de andre komponentene av matematisk kompetanse. Alle de kompetansene sammen bidrar til utvikling av den matematiske kompetansen. For å kunne utvikle problemløsningskompetanse, må man bruke og utvikle de andre kompetansene. Samtidig bidrar problemløsningskompetanse til utviklingen av generell matematisk kompetanse. Derfor er det viktig å ta i betraktning alle komponentene av matematisk kompetanse når man snakker om problemløsningskompetanse. Når elever behersker problemløsningskompetanse, er de i stand til å fremme og løse matematiske problemer på opptil flere ulike måter. Problemløsningskompetanse har mye felles med modelleringskompetanse og resonnementskompetanse, og de til sammen dreier seg om problemløsning. Når man driver med problemløsning, utvikles ikke bare problembehandlingskompetanse, men også modelleringskompetanse og resonneringskompetanse. De tre kompetansene vedrører nesten det samme.

Palm et al. (2004) bruker også individrelatert definisjon av begrepet problem. Et problem er en oppgave som en elev ikke har en kjent løsningsmetode for å løse. For å løse et problem, må eleven produsere ny kunnskap, altså tilpasse egne kunnskaper til en ny situasjon (Palm et al., 2004). Denne definisjonen ligner på definisjonene til Polya (Pólya, 1981), Schoenfeld (Schoenfeld, 1992, Schoenfeld, 1985), Björkqvist (Björkqvist, 2003), Boesen (Boesen, 2006) og Niss & Jensen (Niss and Jensen, 2002). Om en oppgave krever problemløsningskompetanse eller ikke, avhenger både av problemet og problemløseren som skal løse problemet. Oppgaver som er ukjente for eleven med informasjon som er blitt gitt annerledes enn hva eleven er vant til, og sammensatte oppgaver, er oppgaver hvor eleven kan trenge problemløsningskompetanse (Boesen, 2006).

Som det ble nevnt før, er det vanskelig i lærebokanalysen å bruke individrelatert definisjon av begrepet «problem», for den individrelaterte definisjonen knytter problemet til problemløseren. Men selv om jeg bruker den tradisjonelle, ikke - individrelaterte definisjonen av «problem», hjelper det å ha et mer helhetlig bilde av problemløsning ved å se på hvilke kompetanser trenger man for å løse problemer.

3.1.6 Internasjonale undersøkelser Pisa og TIMSS

Både TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) og PISA (Programme for International Student Assessment) er designet for å kunne sammenlikne resultater mellom land, og for å kunne måle utvikling over tid, såkalte trender. TIMSS og PISA undersøker ulike populasjoner i grunnskolen, TIMSS retter seg mot 4. og 8.trinn, PISA mot elever i 10. trinn. TIMSS tester elevene i mer elementære faglige ferdigheter og kunnskaper, og gjennomføres hvert fjerde år. PISA er en internasjonal undersøkelse som gjennomføres hver tredje år. TIMSS baserer seg på læreplanene fra de landene som deltar i undersøkelsen, hvor man gjennom internasjonalt samarbeid har kommet fram til en enighet om innhold i de faglige testene basert på deltakerlandenes læreplaner og mål for matematikkundervisning. PISA har et annet utgangspunkt ved å gi sin egen definisjon av matematisk kompetanse, vi snakket om i delkapitlet 3.1.5 Problemløsning og problembehandlingskompetanse. I PISA brukes begrep «mathematical literacy» som skal beskrive hva slags kompetanse alle trenger for en aktiv deltakelse i dagens og morgendagens samfunn. «Mathematical literacy» er i PISA definert slik:

Mathematical literacy is an individual's capacity to formulate, employ, and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using mathematical concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to recognice the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens (OECD, 2013, s. 25).

I PISA tok man utgangspunkt i Niss & Jensen sine matematiske kompetanser som ble beskrevet i kapitlet 3.1.5 Problemløsning og problembehandlingskompetanse. PISA opererer med sju kompetanser. Tre av de sju kompetansene omhandler problemløsning, og er:

- å kunne matematisere og modellere både matematiske og virkelige situasjoner
- å kunne resonnere og argumentere matematisk
- å kunne planlegge, velge ut og bruke problemløsingsstrategier (Nortvedt, 2013).

Selv om PISA, i motsetning til TIMSS, ikke baserer seg på de deltakende lands læreplaner, samsvarer målene for undersøkelsen godt med målene i norsk læreplan. Kjærnsli et al. (2004) argumenterer at beskrivelsene i læreplanen er svært sammenfallende med med PISA sin beskrivelse av matematikk (Kjærnsli et al., 2004, s. 46).

PISA studerer 15-åringers kompetanser på et tidspunkt som i de fleste land representerer avslutningen av den obligatoriske skolegangen. Det legges vekt på at elevene må være i stand til å ta i bruk egne kunnskaper og kompetanser (OECD, 2013). PISA inneholder oppgaver som er knyttet til et problem slik man kan anta å møte det i dagliglivet. Det er også en viss forskjell på TIMSS og PISA når det gjelder hvilken type data de henter inn via spørreskjemaer. TIMSS bruker klasser som enhet, og har derfor et spørreskjema om utdanning og undervisning i matematikk som lærerne i disse klassene skal svare på. PISA tester ikke hele klasser og har derfor ikke noe slikt spørreskjema til lærere. Begge undersøkelsene har et elevspørreskjema med bakgrunnsfaktorer og spørsmål knyttet til matematikk i skolen, PISA med mer vekt på elevenes læringsstrategier i faget, TIMSS med mer vekt på hva som gjøres i matematikkundervisningen. Resultatene fra TIMSS 2003, 2007 og 2011 viste at både de norske elevene og de russiske elevene hadde en viss framgang i matematikk fra 2003 til 2007, og fra 2007 til 2011.

3.1.7 Problemløsning i PISA

Jurdak (2006) argumenterer for at det er sammenheng mellom problemløsning på skolen og problemløsning generelt. Samtidig legger PISA veldig stor vekt på problemløsningsevne. I PISA 2003 var det for første gang med et område som ble kalt problemløsning, der elever skulle løse virkelighetsnæreproblemer. Derfor oppfatter jeg det området som relevant for studien min og vil se nærmere på det.

Matematikk er ikke ment til å være et fag elevene kun møter på skolen. Matematikken har også til hensikt å gjøre elevene i stand til å vurdere situasjoner de møter i dagliglivet og løse problemer de møter i virkeligheten. Det ble gjort mange studier der man sammenligner problemløsning på skolen og problemløsning i dagliglivet og i arbeidslivet (ibid.). Matematiseringsprosessen er i stor grad den samme både for problemløsning i skolekontekst og for problemløsning i den virkelige verden. Elevene vil alltid møte problemløsningssituasjoner som er tilknyttet matematikk, for eksempel ved å velge abonnement til internett eller mobiltelefonen. For at elevene skal være i stand til å håndtere slike situasjoner på en fornuftig måte, kan det være hensiktsmessig å gi dem mulighet til å jobbe med problemer som har tilknytning til virkeligheten (ibid.). Både for å løse matematiske problemer og for å løse virkelighetsnære problemer, kan man bruke den samme problemløsningsmekanismen som vi har sett på før. Man kan godt bruke Polyas sin firetrinns modell for å løse problemer fra hverdagslivet. Det er en åpenbar sammenheng mellom å drive matematisk problemløsning, og det å bli en god problemløser. Hvis elever er flinke til å løse matematiske problemer, kan det hjelpe dem til å løse problemer fra virkeligheten og omvendt. Hvis elever får muligheten til å jobbe med virkelighetsnæreproblemer på skolen, kan de overføre de strategiene og tilnærmingene de lærte i matematisk problemløsning, til løsning av problemer fra virkeligheten. Både den norske læreplanen (se 3.2.3 Problemløsning i læreplanen Kunnskapsløftet LK06) og den russiske læreplanen (se 3.3.5 Problemløsnings plass i den russiske læreplanen) slår fast at på skolen skal elever lære å løse virkelighetsnæreproblemer. OECD mener også at *problemløsing er en viktig kompetanse i skolegang, arbeids- og samfunnsliv* (Kjærnsli et al., 2013, s. 5). OECD (2013) definerer problemløsing slik i rammeverket for PISA 2012:

… an individual's capacity to engage in cognitive processing to understand and resolve problem situations where a method of solution is not immediately obvious. It includes the willingness to engage with such situations in order to achieve one's potential… (OECD, 2013, s. 125).

Vi ser at definisjonen legger vekt på å løse virkelighetsnære problemer. Problemløsing deles i fire prosesser som ligner på problemløsningsprosessen som ble presentert i kapitel 3.1.2 Problemløsningsprosessen.

Problemløsing krever at man forstår problemet, planlegger og gjennomfører en løsningsprosess, overvåker og vurderer progresjonen underveis. Evne og vilje til kreativitet og kritisk tenkning er helt sentralt. Man må være kreativ for å tenke ut nye løsninger, og kritisk tenkning er viktig for å vurdere ulike løsningsalternativer. En oppgave er enklere å løse dersom temaet er kjent fra før. Problemløsingsoppgavene i PISA 2012 ble laget med tanke på at problemene skulle være nye for elevene, slik at løsningsmetoden ikke er kjent fra før, men krever at man finner fram til og planlegger en ny løsning. For å kontrollere for forkunnskaper ble et bredt utvalg av kontekster inkludert i problemløsingsoppgavene i PISA 2012 (Kjærnsli et al., 2013, s. 10).

Det kreves ikke spesifikke fagkunnskaper for å kunne løse de enkelte oppgavene. Problemer som kunne blitt plassert innenfor undersøkelsens hovedområder – lesing, matematikk og naturfag – er ikke inkludert i denne delen av prøven. Prøven i problemløsing måler problemløsningsferdigheter som kreves for å løse problemer, man kan møte i livet generelt, og som ligger utenfor det som normalt omfattes av nasjonale læreplaner i fag.

Resultatene i problemløsning fra PISA 2012 er følgende med standardavvik i parentes:

- Norge - 503 (103)
- Russland - 489 (88)
- OECD - gjennomsnittet – 500 (96) (Kjærnsli et al., 2013, s. 14).

Resultatene ble litt bedre for både norske og russiske elever i forhold til resultatene fra 2003 (Norge – 490, Russland – 479). I følge resultatene presterer norske elever litt bedre enn russiske elever. Men ifølge størrelsen på standardavvik, som er et mål på spredningen av prestasjonene, er det litt mindre spredning på de russiske resultatene. PISA-undersøkelsen viste også at forskjellene mellom skoler er relativt små i Norge, men at forskjeller innad i den enkelte skolen er store (Kjærnsli et al., 2013, s. 20, Kjærnsli and Olsen, 2012). Samtidig ser man at spredningen i elevenes prestasjoner er større innen problemløsning enn i de andre fagområdene (Kjærnsli et al., 2013, s. 20).

3.1.8 Problemløsning i TIMSS Advanced

TIMSS Advanced er et tilsvarende TIMSS prosjekt om matematikk og fysikk på slutten av videregående skole. På grunn av at jeg undersøker lærebøkene fra videregående skole, er resultatene fra TIMSS Advanced relevante til oppgaven min, og jeg vil se mer detaljert på dette prosjektet. Målet for TIMSS Advanced er å undersøke elever som har valgt fysikk eller matematikk til fordypning i det siste året på videregående skole. De komparative resultatene fra TIMSS Advanced kunne jeg med fordel bruke i min sammenlignende studie.

I TIMSS Advanced undersøkes: gjennomsnittlige alder, antall år på skolen og dekningsgrad. Variasjonene mellom landene er rimelig store. For Norge og Russland er det følgende:

Land	Prosentandel av årskullet(dekningsgrad)	Alder	År på skolen	Skår
Russland	1,4	17	10 (eller 11)	561
Norge	10.9	18,8	12	439
Skalert gjennomsnitt				500

Tabell 2. Hovedresultatene i matematikk for Norge og Russland (Grønmo et al., 2010, s.15)

Dekningsgrad i Tabell 2 er prosentandel av elevene i årskullet som tar avansert matematikk i det siste året på videregående skole. Russland har i 2008 høyest gjennomsnittlig skår (561), men har nesten lavest dekningsgrad (1,4). På den annen siden er de russiske elevene svært unge sammenliknet med elevene i de fleste andre land. De norske elevene er nesten 2 år eldre enn de russiske. Det kan på bakgrunn av dette synes som om avansert matematikk i Russland er et typisk fag for en liten elite, som når et ganske høyt kompetansenivå allerede i ung alder (Grønmo et al., 2010, s. 16).

I TIMSS Advanced har norske elever hatt en klar og signifikant tilbakegang fra 1998 til 2008. Norge og Sverige framstår som de to landene som har mest markant tilbakegang. Russland, Nederland og Libanon er høyt presterende, og ligger signifikant over det skalerte gjennomsnittet på 500 i TIMSS Advanced. Norge presterer signifikant under det skalerte gjennomsnittet, slik norske elever på 4. og 8. trinn har gjort det i de to siste TIMSS-studiene for grunnskolen (Grønmo et al., 2010, s. 14).

Resultatene av TIMSS Advanced 2008 viser også at kun 1% norske elever befinner seg på avansert nivå mot 24% russiske elever. Det ser ut som det er 24 ganger så mange russiske elever, enn norske elever som befinner seg på det avanserte nivået. Men når vi tar i betraktning dekningsgrad fra Tabell 2, ser vi at det bare er 3,4 ganger flere russiske elever enn norske elever som presterer på det nivået. Tilsvarende ligger 9 % norske elever og 55 % russiske elever på høyt nivå, og på middels nivå ligger 25 % norske mot 83 % russiske, og under middels nivå 65 % norske elever mot 17 % russiske (Mullis et al., 2009, s. 94).

De to områdene hvor Norge ligger lavest i forhold til det internasjonale gjennomsnittet er å «lære formler og framgangsmåter utenat» og å «diskutere strategier for problemløsing». Norske elever ligger også klart lavere enn det internasjonale gjennomsnittet, når det gjelder å «sette opp likninger» og å «diskutere resonnementer». At norske elever ligger klart under det internasjonale gjennomsnittet på disse spørsmålene, samsvarer godt med resultatet for TIMSS i grunnskolen (Grønmo and Onstad, 2009). De eneste områdene hvor Norge ligger på det internasjonale gjennomsnittet er å «løse oppgaver som likner på eksempler i læreboka» og «se på at læreren viser matematikk på en datamaskin». Resultater fra tidligere TIMSS studier i grunnskolen viser også stor vekt på individuell oppgaveløsing og lite vekt på diskusjoner og argumentasjon (Grønmo et al., 2010). Dette stemmer med resultater fra studien til Alseth et al. (2013), og kan betraktes som tegn på at bruken av individuelle arbeidsmåter i matematikk overdrives i norsk skole.

Det ble også funnet at klasser i Norge hvor det også legges mer vekt på metoder som diskusjon og argumentasjon av strategier og problemløsing, presterer bedre i matematikk i TIMSS Advanced enn klasser hvor man gjør dette i mindre grad (Grønmo et al., 2010, s. 231). Når eleven løser et problem, tenker han/hun ikke på hvordan han/hun løser problemet. Når elever får beskjed om å fortelle til hverandre hvordan de løste problemet, blir de nødt til å reflektere over sin egen løsning. Da møter de et nytt problem hvordan de løste et problem. Når elever hører hvordan en annen elev løste det samme problemet, oppdager de at det er mulig å løse problemet på en annen måte. Da kommer de fort til å vurdere om denne alternative måten er bedre enn den måten de løste problemet på eller ikke, og hvorfor er denne måten bedre eller verre.

Området Algebra i TIMSS Advanced omfatter hovedsakelig komplekse tall, følger og rekker, likninger og ulikheter, og ulike representasjoner av funksjoner (som symbolske uttrykk, grafer, tabeller og ordnede par). Komplekse tall er ikke med i den norske læreplanen for realfag på det avsluttende året på videregående skole, men med unntak av dette stemmer emneområdet Algebra i TIMSS Advanced godt overens med den norske læreplanen for R2. Emneområdet Algebra stemmer på alle emner med den russiske læreplanen for det avsluttende året (emne Komplekse tall er inkludert i den russiske læreplanen) (Mullis et al., 2009, s. 49).

Elevene ble spurt om hvor ofte ulike typer arbeidsmåter ble benyttet i undervisningen. Her er resultatene i forhold til organisering og arbeidsmåter i matematikkundervisningen, presentert prosentvis av oppstått hendelse i minst halvparten av undervisning:

	Norge	Russland
Lærer formler og fremgangsmåter utenat	15	54
Løser oppgaver som likner eksempler i læreboka	76	68
Setter opp likninger og funksjoner for å representere sammenhenger	36	73
Diskuterer strategier for problemløsing	21	91
Velger egne framgangsmåter for å løse sammensatte problemer	19	65
Diskuterer resonnementene våre	16	73
Ser på at læreren viser oss matematikk på datamaskin	7	10

Tabell 3. Elevenes syn på hvor ofte ulike arbeidsmåter benyttes i matematikktimene i TIMSS Advanced (Mullis et al., 2009, s.162).

Resultatene fra Tabell 3 viser at både norske og russiske elever aktivt bruker eksempler i læreboka, når de løser oppgaver. Vi ser også at arbeidsmåter som «diskutere strategier for problemløsing» og «diskutere resonnementer» betydelig oftere benyttes i matematikktimene i Russland enn i Norge. På lignende måte brukes arbeidsform «Sette opp likninger og funksjoner for å representere sammenhenger» to ganger oftere i matematikktimene i Russland enn i Norge. Det er rimelig å tro at så få norske elever ligger på høyt og avansert nivå, henger sammen med det som skjer i undervisningen. Som vi ser i Tabell 3, brukes ofte i undervisningen i Norge arbeidsmetoden «løse oppgaver som likner på eksempler i læreboka», og det legges lite vekt på diskusjoner og argumentasjon. Samtidig er undervisningen i den norske skolen veldig styrt av lærebøker, derfor har lærebøkene veldig mye å si om hvordan lærere underviser. Lærebøkene brukes veldig ofte i undervisningen på den måten at elever på egen hånd løser oppgaver fra lærebøker. Derfor er det viktig at det blir lagt vekt på problemløsning i lærebøkene. Blir det lagt mer vekt på problemløsning i lærebøkene, blir det også lagt mer vekt på problemløsning i undervisningen. Og da blir det større rom for at elevene skal diskutere strategier for problemløsning i undervisningen, og at de skal få muligheter til å diskutere resonnementene sine. Samtidig kommer det klart til syne at elevene heller ikke er så flinke på å lære formler og fremgangsmåter utenat. Og det at de ikke lærer formler og fremgangsmåter, vil med stor sannsynlighet få konsekvenser for hva elevene lærer på høyere matematisk nivå, og kan bidra til at det blir vanskeligere for elevene å operere på det høyere nivået.

3.2 Problemløsning i den norske læreplanen

3.2.1 Læreplanens ulike nivåer

Det var enighet mellom matematikkdidaktikere om at problemløsning bør ha en viktig rolle i læreplanen i matematikk (Lester, 1994). Samtidig ifølge (Schoenfeld, 1992) må problemer og problemløsningsprosessen være inkludert i matematikkutdanningen. Samfunnet forventer at elever kan finne løsninger i nye ukjente situasjoner. Samfunnets forventninger til skolen gjenspeiler seg blant annet i det gjeldende læreplanverket. Skolemyndighetene utarbeider læreplanverket som inneholder retningslinjer og mål som styrer arbeidet i skolen (Gjone, 2003).

Ifølge Gjone (2003) og Grønmo et al. (2010) ble læreplanen delt inn i tre ulike nivåer (se Vedlegg 9. Læreplanens tre nivåer). På systemnivået finner vi den intenderte læreplanen slik den er vedtatt av myndighetene. Innholdet i *den intenderte læreplanen* gjenspeiler seg i læreplandokumenter og i andre uttalte intensjoner for skolen fra ansvarlige myndigheter. Læreplanen som ble tatt i bruk av lærere og lærebokforfattere ble kalt *den implementerte læreplanen*. Og den implementerte læreplanen kan være forskjellig fra den vedtatte læreplanen, det er avhengig av hvordan den ble tolket av ulike grupper, blant annet av lærere og lærebokforfattere. Det siste nivået ble kalt *den resulterte læreplanen* og omfatter det som eleven selv har fått med seg fra undervisningen, kunnskaper og holdninger hos elevene (Gjone, 2003). Læreboken definerer ofte den implementerte læreplanen, som kan avvike betydelig fra den intenderte læreplanen. Læreboken kan også fungere som mellomledd mellom den intenderte læreplan og den implementerte læreplan, noe som fører til at lærebøker spiller en stor rolle i hva som skjer i matematikkundervisningen.

I Norge krever opplæringsloven at lærere følger læreplanverket (Kunnskapsdepartementet, 1998). Gjone (2003) påpeker at læreplanens funksjon som styringsmiddel er kraftig overvurdert, og at lærerens bakgrunn, lærebøker og sentrale prøver har en viktigere rolle i arbeidet i skolen. En studie av 63 norske klasser, gjennomført av Imsen (2003), viser at lærebøkene er det viktigste hjelpemiddelet, når lærere på 10. trinn planlegger sin undervisning i matematikk. Læreplanen kommer på andre plass, og det tyder på at den også er viktig i planleggingsfasen, ifølge Imsen. Resultatet samsvarer med Gjone sin påstand. Lignende funn ble rapportert fra Sverige (Skolverket, 2003; Johansson, 2006), Finland (Röj-Lindberg, 1999), England, Frankrike og Tyskland (Pepin & Haggerty, 2001, 2002) (referert i Kongelf, 2011, s. 6).

I Norge fantes det tidligere en godkjenningsordning som skulle sikre at lærebøkene var i tråd med læreplanens mål, at de var tilpasset alderstrinnet og at innholdet var i tråd med skolens mål om likestilling mellom kjønnene (Kunnskapsdepartementet, 1995 referert i Resvoll, 2014). I år 2000 ble denne godkjenningsordningen opphevet. Begrunnelsen for det var påstanden at det var læreplanen som skulle være styrende i undervisningen. Valget av læreverk er dermed den enkelte skole og lærers ansvar (Kunnskapsdepartementet., 2013, s.61).

I motsetning til det godkjenner Departementet for utdanning og vitenskap i Den Russiske føderasjon lærebøker som skal brukes på skolen. Skolene i Russland kan bare bruke de bøkene som står i «Den føderale læreboklisten av lærebøker som er anbefalt for bruk i undervisningen på skoler i Russland». Bøkene som er oppført i «Den føderale læreboklisten av lærebøker som er anbefalt for bruk i undervisningen på skoler i Russland» kontrolleres regelmessig i forhold til nye forandringer i læreplaner (DUVRF, 2012, § 18.4).

Det faktum at det ikke lenger finnes en godkjenningsordning for norske lærebøker gir en god grunn til å studere norske lærebøker. I dag kan i teorien hvem som helst produsere lærebøker til bruk i norsk skole, og man kan ikke alltid være sikker på kvaliteten på lærebøkene som brukes. Studier som denne kan være med på å kontrollere at lærebøkene er i tråd med læreplanens mål. Selv om russiske lærebøker er sikret av Departementet for utdanning og vitenskap i at de er i tråd med læreplanens mål, kan studier som denne bidra til å øke kvaliteten på lærebøkene. I tillegg kan denne sammenlignende studien komme frem med noen viktige momenter som både Norge og Russland kan dra nytte av.

3.2.2 Problemløsning i Mønsterplanen 87 og i læreplanen L97

I Mønsterplanen for grunnskolen 1987 (M87) kom problemløsning for første gang inn som et eget tema blant ti andre hovedtemaer. Elevene skulle bruke matematikk som et verktøy for å løse praktiske problemer, og arbeidet i matematikk skulle bygge på og videreutvikle elevenes kreative og skapende evner (undervisningsdepartementet, 1987). Schoenfeld (1992, s. 338) mener at den generelle utviklingen rundt problemløsning i læreplanene på 80-tallet kan sies å falle inn under problemløsning som ferdighet, en ferdighet elevene burde erverve seg gjennom undervisning, slik Stanic & Kilpatrick beskrev det (se delkapittel 3.1.1 Hva er et problem? Hva er problemløsning?) (Stanic & Kilpatrick (1989) referert i Schoenfeld, 1992). Mønsterplanen (undervisningsdepartementet, 1987) beskrev problemløsning som en prosess med flere ledd som virker inspirert av Polya.

Læreplanverket for grunnskolen (L97) ble innført i skoleåret 1997/1998 og avløste M87. Læreplanverket for grunnskolen (L97) la opp til at det skulle være en nær kobling mellom matematikk i og utenfor skolen, blant annet gjennom «Matematikk i dagliglivet», som var et av fem hovedtemaer. Elevene skulle arbeide med oppgaver knyttet til dagliglivet og realistiske sammenhenger.

I L97 var problemløsning ikke lenger et eget tema. Men fokuset var rettet mot utforskende aktiviteter, og elevene på alle nivåer blant annet skulle få mulighet til å «undersøke og utforske sammenhenger, finne mønstre og løse problemer», «å resonnere, begrunne og trekke slutninger» og «samarbeide om å løse oppgaver og problemer» (Det kongelige kirke-, 1996, s.156).

Selv om problemløsning ikke var et eget hovedemne, fantes det hovedmomenter med fokus på problemer for elever fra 8.-10. klasse. For eksempel, i «Tall og algebra» for 10. trinn står det at i opplæringen skal elevene:

- *«Arbeide videre med å tolke, beskrive og vurdere situasjoner og løse problemer ved hjelp av tall og regnemetoder, formler og likninger»* (Det kongelige kirke-, 1996, s. 166-170)

3.2.3 Problemløsning i læreplanen Kunnskapsløftet LK06

LK06, er problemløsningskompetanse en del av den matematiske kompetansen (se delkapittel 3.1.5 Problemløsning og problembehandlingskompetanse). I LK06 er problemløsning omtalt eksplisitt i læreplanen for matematikk fellesfag (matematikk til og med VG1) fem ganger, og to av disse er i *formålet med faget*:

- *«Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er»*
- *«Opplæringa vekslar mellom utforskande, leikande, kreative og problemløysande aktivitetar og ferdigheitstrening»* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2)

To andre kommer under grunnleggende ferdigheter, henholdsvis i *regning og bruk av digitale verktøy*:

- *«Å kunne rekne som grunnleggjande ferdigheit inneber å bruke symbolspråk, matematiske omgrep, framgangsmåtar og varierte strategiar til problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt både i praktiske, daglegdagse situasjonar og i matematiske problem».*

- «*Digitale ferdigheiter i matematikk inneber å bruke digitale verktøy til læring gjennom spel, utforsking, visualisering og presentasjon. Det handlar òg om å kjenne til, bruke og vurdere digitale verktøy til berekningar, problemløysing, simulering og modellering*» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 5)

Problemløsning omtales i et kompetansemål ett sted i læreplanen. Det er under hovedområdet *Tall og algebra* etter 10 trinn:

«[eleven skal kunne] *bruke tal og variablar i utforsking, eksperimentering og praktisk og teoretisk problemløysing og i prosjekt med teknologi og design*» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8)

I LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013) er heuristiske metoder ikke nevnt, men strategiene er nevnt to ganger *under grunnleggende ferdigheter*.

1. Den første gangen er de nevnt i generelt betydning uten eksplisitt tilkobling til problemløsning:

«Munnlege ferdigheiter i matematikk inneber å skape meining gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk. Det inneber å gjere seg opp ei meining, stille spørsmål og argumentere ved hjelp av både eit uformelt språk, presis fagterminologi og omgrepsbruk. Det vil seie å vere med i samtalar, kommunisere idear og drøfte matematiske problem, løysingar og strategiar med andre».

2. Den andre gangen strategier er nevnt, er en forbindelse til problemløsning mer synlig:

«*Utvikling av å rekne i matematikk går frå grunnleggjande talforståing og å kjenne att og løyse problem ut frå enkle situasjonar til å analysere og løyse eit spekter av komplekse problem med eit variert utval av strategiar og metodar*» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 4).

Selv om det ikke brukes eksakte ord «problemløsningsstrategier» eller «heuristiske metoder» i ett av de to sitatene ovenfor, er det mulig å tolke dem som implisitt kobling til kjente tilnærminger som «prøv og feil» og «se etter et mønster» for å løse problemer.

Den eneste gangen spesifikke tilnærminger er nevnt under *grunnleggende ferdigheter*:

«*Å kunne skrive i matematikk inneber å beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear. Det inneber å bruke matematiske symbol og det formelle matematiske språket til å løyse problem og presentere løysingar. Vidare vil det seie å lage teikningar, skisser, figurar, grafar, tabellar og diagram …*» ((Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 4)

Selv om sitatet handler om å løse problemer, og ikke om problemløsning, er kjente heuristiske metoder som «lage en illustrasjon» og «lag en tabell» ganske synlige.

Jeg mener at beskrivelsen av grunnleggende ferdighet «å kunne rekne» styrker problemløsningens rolle i læreplanen kraftig. Men selv om det i dagens læreplan poengteres at problemløsning er viktig, tyder mye på at elevene ikke får opplæring i hvordan de skal bli gode i problemløsning. Det forventes at elevene skal bli gode problemløsere, men de får ikke direkte trening i problemløsning på skolen. Som vi så i delkapittel 3.1.8 Problemløsning i TIMSS Advanced, bekreftes det i TIMSS Advanced-undersøkelser at både lærere og elever oppgir at det brukes veldig liten tid på å diskutere strategier for problemløsning, og på å velge egne fremgangsmåter for å løse sammensatte problemer. Enda mindre tid brukes på å diskutere resonnement (Grønmo and Onstad, 2009, Grønmo et al., 2010).

Den nye reviderte læreplanen i matematikk fellesfag fra 2013 har lagt større vekt på problemløsning. I motsetning til den gamle læreplanen fra 2010, finner vi oftere utrykk som «varierte strategier», «variert utvalg av strategier og metoder», «analysere og løse… komplekse problem», «sammensatte problemstillinger». For eksempel, ble beskrivelsen av grunnleggende ferdighet «regning» nyansert med det at ferdigheten skal utvikles fra å kunne løse enkle problemer til *«å analysere og løyse eit spekter av komplekse problem med eit variert utval av strategiar og metodar»* (Utdanningsdirektoratet, 2013). Beskrivelsen av kompetansemål under hovedområdet *Tall og algebra* etter 1T ble også utvidet og nyansert. Før revisjonen av læreplanen sto det bare at elever skal kunne bruke matematiske metoder for å løse problemer. Læreplanen etter revisjonen sier at elever skal kunne vurdere, velge og bruke metoder og «reflektere over, vurdere og presentere løysningane» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Alt dette gir grunn til å tro at det legges større vekt på problemløsning i lærebøkene som ble laget etter revisjonen.

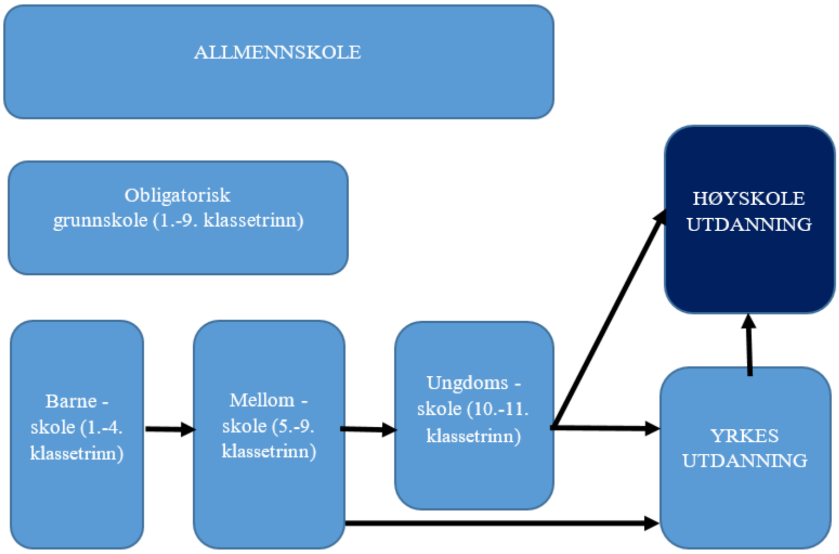
3.3 Problemløsning i den russiske læreplanen

3.3.1 Det russiske skolesystemet og skolestruktur

Russland har et komplisert utdanningssystem, med flere ledd som kan kombineres i et skoleforløp. Her vil jeg presentere det forløpet som gjelder studien min, dvs. allmennskoleforløpet (Figur 5).

Allmennskolen består av den obligatoriske grunnskolen, som i sin tur kan deles inn i barneskolen (1.- 4. trinn) og mellomskolen (5.- 9.trinn). Etter at man er ferdig med den obligatoriske grunnskolen, kan man enten fortsette ved allmennskolen i form av ungdomsskole i 10.– 11. trinn eller begynne på yrkesskolen. Fra 9. trinn (og i noen skoler enda tidligere) kan man velge fordypning i ulike utdanningsprogrammer.

I følge «Lov om Opplæring» DUVRF (2012: § 67) starter man på allmennskole i 6-7 års alderen, men ikke senere enn i 8 års alderen. Foreldrene kan søke om at barna kan begynne på skolen og avslutte den tidligere (tidligst ved 15 år). På samme måte som den videregående opplæringen i Norge, er ungdomstrinnet på allmennskolen (10.– 11. klassetrinn) ikke obligatorisk i Russland. Hvis man vil fortsette utdanning på et høyere nivå, må man fullføre enten ungdomstrinnet eller yrkesskolen på et mellomnivå.



Figur 5. Skolestruktur i Russland

I følge opplæringsloven av 2012 DUVRF (2012: § 10.4) finnes det følgende typer av allmennutdanning:

- Førskoleutdanning
- Barneskole allmenn utdanning (1.-4. klasse)
- Mellomskole allmenn utdanning (5.-9. klasse)
- Ungdomsskole allmenn utdanning (10.-11. klasse)

Og det finnes følgende typer av utdanning man tar etter man fullførte allmennutdanning (DUVRF, 2012: § 10.5):

- Lavere utdanning
- Høyskoleutdanning – bachelorgrads utdanning
- Høyskoleutdanning – mastergrads utdanning
- Høyskoleutdanning – høyere grads utdanning

Opplæringsloven bestemmer formål for opplæringen, felles minste krav til opplæringsinnhold, krav til lærebøker som brukes i matematikktimene og felles minste krav til resultater hos avgangselever (kompetansemål) for alle typer skoler i Russland (DUVRF, 2012: § 13, 15, 16).

3.3.2. De Statlige utdanningsstandarder

I følge den russiske «Lov om opplæring» av 2012 definerer De Statlige utdanningsstandarder det nødvendige kunnskapsnivået som alle elever har krav på ved opplæringen (DUVRF, 2012: § 11). «De Statlige utdanningsstandardene» ble for første gang innført i 1992. I 1993—1996 og 1997—1998 fikk de noen uvesentlige forandringer. De betydelige forandringene av «De Statlige utdanningsstandardene» ble gjort i 2009 for 1-4 klassetrinn, i 2010 for 5-9 klassetrinn og i 2012 for 10-11 klassetrinn. Den største forandringen gikk ut på at barnas personlighet skulle være i fokus. Barnas personlige utvikling skal være viktigere enn det som barna lærer på skolen. Personlig utvikling betyr, blant annet, å utvikle kreativitet, å lære å kunne utrykke seg på forskjellige måter, å kunne velge og begrunne sitt valg osv. Problemløsning handler mye om det samme. Problemløsning henger tett sammen med det å være individuelt. Alle elever løser problemer (dvs. «gjør problemløsning») på sin egen måte. Og samtidig bidrar problemløsning til å utvikle den enkelte elev faglig og personlig. Personlig utvikling har fokus på hvordan en elev skal kunne bli den beste versjonen av seg selv, ut fra sine evner, forutsetninger, interesser og talenter. De andre tingene som skulle også være viktig, var at barna skulle kunne bruke de ferdighetene og kunnskapene som de fikk på skolen, i det voksne liv og i arbeidslivet, og at barna skulle lære å planlegge, begrunne og overvåke sine handlinger. I «De nye Statlige utdanningsstandardene» ble det lagt vekt på tilpasset opplæring slik at både de sterke og de svake elevene skulle få oppgaver som tilsvarer deres nivå. I tillegg ble det lagt vekt på at elever skulle kunne utvikle sine kreative ferdigheter og møte problemer som skulle utfordre dem og bidra til deres utvikling.

«De Statlige Standardene» for grunnleggende allmenn utdanning dekker spørsmål om: krav til resultater av grunnleggende utdanningsprogrammer for allmenn utdanning (kompetansemål); strukturen til grunnleggende utdanningsprogrammer, for eksempel, innholds krav og forholdet mellom obligatoriske og valgfrie deler i programmer; vilkår angående finanser, logistikk og lignende. De Statlige Standarder bestemmer også formålet med faget.

«Lov om opplæring» av 2012 sier at skolene kan velge selv hvilke bøker de skal bruke i undervisningen, men skolene må følge følgende krav:

- Skolene skal velge mellom bøkene som står i Den føderale læreboklisten

- De skal kun bruke lærematerieller som blir utgitt av de godkjente forlagene som driver med utarbeidelse av lærebøker og lærematerieller (DUVRF, 2012: § 18.4)

I tillegg til lærebøkene bruker lærere i den russiske skolen mange forskjellige læringsmaterieller /læringsressurser. I en del av det metodiske materiellet presenteres det løste eksempler til hver av emnene som læres på skolen. Lærerne bruker ofte de løste eksemplene i undervisningen ved, for eksempel, å kopiere de eksemplene og gi til elevene i timene. Eksemplene fra lærebøkene kan både presenteres i undervisning og brukes for hjemmearbeid (Konecpoljskaja, 2015).

Derfor kan det være vanskelig å bedømme undervisningen i den russiske skolen etter innholdet bare i lærebøkene. Og de eksemplene i lærebøkene er ikke de eneste løste eksemplene som brukes i undervisningen. Men på grunn av at det finnes tusenvis av forskjellige tilleggsmaterieller som brukes av lærere, gjør det umulig å undersøke alle de materiellene. Og derfor måtte jeg begrense undersøkelsen min til bare å undersøke lærebøker, og jeg skal gjøre det så godt som det er mulig.

Fra 7. trinn kan skolene ha klasser med fordypning i matematikk (se Vedlegg 6. Struktur av matematikkundervisning i den russiske skolen). Skolene kan velge forskjellige spesialiserende retninger, for eksempel, fysikk-matematisk retning, fysikk-kjemisk retning, kjemi- biologisk retning. På de tre sist nevnte retningene brukes lærebøkene i matematikk for spesialiserende retning i matematikk. Det er akkurat de lærebøkene som skal analyseres i oppgaven.

3.3.3. Læreplaner og timefordeling

Jeg vil presentere timefordeling i matematikkfaget på ulike trinn og ulike studieretninger i Russland. I Vedlegg 1. Eksempler på timefordeling i læreplaner i den russiske allmennskolen finnes det mer detaljert informasjon om timefordelingen i den russiske skolen. Jeg vil også oppgi en lignende informasjon om timetall i matematikkfaget for ulike klassetrinn i Norge.

I Tabell 4 og Tabell 5 presenteres en oversikt over timetall i matematikk fra barnetrinn til og med VG2 i Norge og fra barnetrinn til og med ungdomstrinn i Russland. Det vises timetall i forskjellige klassetrinn for både spesialiserende og ikke-spesialiserende studieretning. I Norge er timetallene fastsatt som 60 - minutters enheter for hovedtrinn i grunnskolen og for årstrinn i videregående opplæring (Utdanningsdirektoratet, 2014, s. 2). Derimot i Russland er timetallene fastsatt som 45 - minutters enheter. For å kunne sammenligne har jeg omregnet antall timer i den norske skolen til 45 minutter lengde, i parenteser står det timetall i 60 - minutters enheter.

	Barne trinn	Mellom trinn	Ungdom strinn	VG 1 (1T)	VG 2 (R1)	Til sammen
Norge (spesialiserende retning)	747 (560)	437 (328)	417 (313)	187 (140)	187 (140)	1975
Norge (ikke - spesialiserende retning)	747 (560)	437 (328)	417 (313)	187 (140)	112 (84)	1900

Tabell 4. Oversikt over timetall i matematikk fra barnetrinn til og med VG2 i Norge (Utdanningsdirektoratet, 2014).

	Barnetrinn	Mellomtrinn	Ungdomstrinn (10.-11.trinn)	Til sammen
Russland (Spesialiserende retning)	540	875	Minst 420 Maks 840 I praksis 560	1975
Russland (ikke - spesialiserende retning)	540	875	280	1695

Tabell 5. Oversikt over timetall i matematikk fra barnetrinn til og med 11. klassetrinn i Russland (DUVRF, 2004a).

Jeg sto ovenfor et dilemma, da jeg skulle velge hvilke klassetrinn i den norske skolen skulle sammenlignes med 10. -11. trinn i den russiske skolen. Etter en nærmere undersøkelse av norske og russiske læreplaner, kan jeg si at det som læres på 10.- 11. trinn i den russiske skole, samsvarer best med kursene 1T og R1 i den norske skolen samt noe fra R2. Så her kunne undersøkelsen gå i to varianter:

1. Sammenligne 1T+R1 i den norske skolen med 10.- 11. trinn i den russiske skolen
2. Sammenligne 1T+R1+R2 i den norske skolen med 10.- 11. trinn i den russiske skolen

I undersøkelsen min valgte jeg den første varianten, dvs. å sammenligne kursene 1T og R1 i den norske skolen og 10. og 11. trinn i den russiske skolen. Jeg valgte den første varianten fordi denne sammenligningen dreier seg om to norske klassetrinn og to russiske klassetrinn. Tar man R2 med i undersøkelsen, blir det alt for stor aldersforskjell mellom de norske og de russiske elevene. Samtidig ser jeg at innholdet for 10.-11. trinn i den russiske skolen ligner mest på innholdet for 1T og R1 i den norske skolen. Selv om jeg velger 10.-

11.trinn på den ene siden og 1T og R1 på den andre siden, blir det ikke helt sammenlignbar i forhold til flere aspekter. Det er uansett litt aldersforskjell mellom elevene som går på 1T og R1 i norsk skole og 10. og 11. trinn i russisk skole. Fra Tabell 4 og Tabell 5 kan man se at det er flere undervisningstimer i matematikk i Russland enn i Norge per år, dvs. 420 timer i russisk skole mot 374 timer i norsk skole. Hvis vi ser på det som praktiseres på skoler, så er det 560 timer i russisk skole mot 374 timer i norsk skole. Og som Tabell 5 sier, kan det også være opptil 840 timer i matematikk fordelt på to år i russisk skole, mot 374 timer i norsk skole. Og det utgjør en vesentlig forskjell.

Russland er et stort land og består av mange forskjellige føderasjoner (deler) som ligger langt fra hverandre geografisk, og er litt forskjellige i forhold til befolkningen, tradisjoner, økonomi, utvikling osv. Derfor er det vanskelig å få til at alle skoler skal ha lik læreplan. Alle de endelige læreplanene til hver enkel skole tar utgangspunkt i «Den statlige komponenten fra de statlige utdanningsstandardene». Og «Den statlige komponenten fra de statlige utdanningsstandardene» er en felles «kjerne» for alle læreplanene, mens timer fra den regionale komponenten og den lokale komponenten brukes på forskjellige måter på forskjellige sted (byer, landsbyer) i Russland. Derfor har de som lager læreplanene i hver enkel skole, en del frihet. Og derfor er det noen forskjeller mellom læreplanene i de forskjellige skolene i Russland.

Man kan si at Læreplan i russisk skole må gjennom flere etapper for å bli til:

- «Den statlige komponenten fra de statlige utdanningsstandardene»
- «Den statlige grunnleggende læreplanen og forslag til læreplaner for utdanningsinstitusjoner i Russland»
- Den estimerte læreplanen
- Den anbefalte læreplanen til lærebokserien
- Arbeidslæreplan til hver enkel skole

«Den statlige komponenten fra de statlige utdanningsstandardene» inneholder formålet med faget og det obligatoriske minimumet av innholdet og kompetansemålene i alle fag. «Den statlige grunnleggende læreplanen og forslag til læreplaner for utdanningsinstitusjoner i Russland» ble laget på grunnlag av «Den statlige komponenten fra de statlige utdanningsstandardene», og regulerer timefordelinger og bestemmer forholdet mellom den statlige komponenten, den regionale komponenten (eller den nasjonal-regionale komponenten) og komponenten til den enkelte utdanningsinstitusjonen (den lokale komponenten). Som navnene antyder kan innholdet av disse komponentene bestemmes forholdsvis på statlig nivå, regionale (nasjonal-regionale) nivå og lokalt på utdanningsinstitusjonsnivå. I følge «Den statlige grunnleggende læreplanen og forslag til læreplaner for utdanningsinstitusjoner i Russland» er det anbefalt følgende fordeling:

- Den statlige komponenten – ikke mindre enn 75 % av all tiden
- Den regionale komponenten (eller den nasjonal-regionale komponenten) - ikke mindre enn 10 % av all tiden
- Den lokale komponenten - ikke mindre enn 10 % av all tiden (DUVRF, 2004b)

På grunnlag av «De statlige utdanningsstandardene» og «Den russiske statlige grunnleggende læreplanen» lages det estimert læreplan i hvert enkelt fag. Den estimerte læreplanen i matematikk er pekepinn for lærebokforfattere og inneholder den obligatoriske delen av matematikkfaget. *Den er en slags felles plattform som ikke begrenser kreativitet til lærebokforfattere og gir dem mulighet til å velge detaljer som, for eksempel, hvilke rekkefølge forskjellige emner skal presenteres i og hvilke arbeidsformer som skal brukes* (DUVRF, 2004c). I tillegg inneholder den estimerte læreplanen generell karakteristikk (kjennetegn) for faget som sier i hvilke retninger utvikler seg innholdet i faget. En av de retningene er: *Perfeksjonere matematisk utvikling til det nivået som gir mulighet til å bruke fritt innlærte fakta og metoder for å løse problemer som ikke ligner på de som elevene kjenner fra før* (DUVRF, 2004c). Lærebokforfattere lager anbefalt læreplan til lærebokserien sin. Hver skole lager sin egen arbeidslæreplan som baserer seg på «De Statlige utdanningsstandardene», «Den russiske statlige grunnleggende læreplanen», den estimerte læreplanen og den anbefalte læreplanen til lærebokserien. Hver skole bestemmer timetall som skal brukes i hvert fag, og i den arbeidsplanen til konkrete skolen står timetall i fag.

Som det ble fortalt over, er begrepet Læreplan i russisk skole og begrepet Læreplan i norsk skole litt forskjellige ting. Mens den norske læreplanen regulerer både formål med faget, timetall, hovedområder, kompetansemål og grunnleggende ferdigheter, regulerer «Den russiske statlige grunnleggende læreplanen» kun timetall og forholdet mellom de tre ulike komponentene. Formål med faget, hovedområder og kompetansemål reguleres av «De statlige utdanningsstandardene». Læreplan i russisk skole har ikke noe som heter grunnleggende ferdigheter.

3.3.4 Innholdet i Spesialiserende retning i matematikk for 10.– 11. trinn i russisk allmennskole

Timetall: Basislæreplan for 10.- 11. trinn (se 3.3.3. Læreplaner og timefordeling) tildeler 420 (for 2 år) undervisningstimer fra den statlige komponenten, der timetallet er oppgitt i 45 minutters enheter. I tillegg kan det komme opp til 140 undervisningstimer fra den regionale komponenten, og opp til 280 undervisningstimer fra den lokale komponenten. Og da kan samlet timetall for spesialiserende retning i matematikk være opptil 840 undervisningstimer (45 minutter) fordelt på to år. Per uke kan det utgjøre i 10. trinn og i 11. trinn 6 timer fra den statlige, 2 timer fra den regionale, og minst 4 timer fra den lokale komponenten. Det vil si opp til 12 timer per uke (DUVRF, 2004a s. 18). I praksis dreier det seg om 560 timer på to år, der delen fra den statlige komponenten utgjør 420 timer, fra den regionale utgjør 70 timer og fra den utdanningsinstitusjons komponenten utgjør 70 timer. Det er vanlig å ha ca. 8 timer per uke i matematikk i en klasse med spesialiserende retning i matematikk (Konecpoljskaja, 2010 referert i Zvorono, 2011).

I 10. og 11. trinn i den russiske skolen er det egne bøker for Geometri og egne bøker for Algebra og grunnleggende matematisk analyse.

Forfatterne til lærebøkene Muravin G.K., Muravina O. V. (2013) og Muravin G.K., Muravina O. V. (2014) anbefaler å tildele 272 timer til Algebra og grunnleggende matematisk analyse fordelt på to år. Det tilsvarer 4 timer i uken (Muravina, 2013 s. 88).

Vedlegg 4: Innholdet i spesialiserende retning i matematikk for 10.– 11. trinn i russisk allmennskole presenterer timefordeling for spesialiserende retning i matematikk for 10.trinn og 11.trinn (for Algebra og grunnleggende matematisk analyse).

Kompetansemål: Utdanningsstandarder DUVRF (2004a: s. 87-91) beskriver innholdselementer for spesialiserende retning i matematikk for 10.-11-trinn, og kunnskapene og ferdighetene (kompetansemål) som man skal kunne på slutten av allmenn grunnutdanning (se Vedlegg 4: Innholdet i spesialiserende retning i matematikk for 10.– 11. trinn i russisk allmennskole).

Det er lett å merke noen forskjeller mellom norsk og russisk læreplan. Norsk læreplan inneholder kompetansemål, mens russisk læreplan har både beskrivelser av innholdselementer og kompetansemål. Når man sammenligner norsk og russisk læreplan, ser man at innholdet i den russiske læreplanen går langt utover innholdet i den norske læreplanen. For eksempel, inneholder den russiske læreplanen komplekse tall, symmetriske polynomer, irrasjonale ulikheter, osv., mens den norske læreplanen ikke gjør det. Samtidig er innholdet i den norske læreplanen og den russiske læreplanen ganske likt. Hvis vi ser, for eksempel, på tema Funksjoner, inneholder læreplanene fra begge land blant annet potensfunksjoner, rot-funksjoner, funksjonsegenskaper: kontinuitet, nullpunkter, bunnpunkter og toppunkter, skjæringspunkter osv. Når man skal nevne forskjeller, så inneholder, for eksempel, den russiske læreplanen for 10.-11. trinn trigonometriske funksjoner, men i Norge er det temaet for kurs R2. Man kan legge merke til at innholdet i den russiske læreplanen er mer omfattende enn i den norske læreplanen (se Vedlegg 4: Innholdet i spesialiserende retning i matematikk for 10.– 11. trinn i russisk allmennskole). Det kunne være interessant å se om alt som står i den russiske læreplanen, finnes i de russiske lærebøkene. Men det er ikke tema for oppgaven min. Derfor skal jeg ikke gå så mye i detaljer rundt dette, men jeg vil understreke at ifølge den russiske læreplanen, er matematikk på 10.-11. trinn mer teoretisk enn i Norge, og man går «dypere» inn i stoffet enn ifølge den norske læreplanen.

For meg var det mer interessant å kunne finne svar på spørsmål om det blir nok tid til problemløsning i undervisningen i Russland, når man skal lære så mye stoff i timene, og innholdet er ganske teoretisk. Jeg vil se nærmere på det i det neste delkapitlet.

3.3.5 Problemløsnings plass i den russiske læreplanen

I den russiske læreplanen kommer det tydelig frem at elever skal kunne utvikle sine kreative ferdigheter og møte problemer som skal utfordre dem og bidra til deres utvikling.

I De Statlige utdanningsstandardene i formålet med faget for spesialiserende retning i matematikk i den russiske læreplanen står det at matematikkopplæring skal være rettet mot læreplanens følgende mål:

- *«Forme forestillinger om matematiske ideer og metoder i matematikk, forme forestillinger om matematikk som et universal språk i vitenskapsverden, og som et middel for modellering av situasjoner og prosesser fra forskjellige samfunnsområder»*
- *«Utvikle logisk tenkning, algoritmisk kultur, matematisk tenkning og matematisk intuisjon - kreative egenskaper som skal være nødvendige for fremtidig utdanning og for selvstendig virksomhet i matematikk, og for bruk av matematikk i fremtidige fagvirksomhet»* (DUVRF, 2004a, s. 86)

I den estimerte læreplanen presiseres det at i matematikktimene for spesialiserende retning i matematikk får elever erfaring med:

- *Å nå konklusjoner ved hjelp av logisk resonnement*
- *Å bruke matematisk språk for å utføre reproduksjon, tolkning, argumentering og bevis*

- *Å stille og løse problemstillinger fra forskjellige områder i matematikk, være kreative og utforskende for å løse krevende matematiske problemer*
- *Å lage og undersøke modeller for å løse både matematiske og virkelighetsnære problemer, sjekke løsningen, reflektere over den matematiske løsningen, tolke matematisk løsning i forhold til det opprinnelig problemet*
- *Å arbeide selvstendig med informasjonskilder, analysere, generalisere og systematisere informasjonen og integrere informasjonen i personlig erfaring* (DUVRF, 2004c).

Selv om det ikke brukes eksakt ord «problemløsning», handler sitatene over om å løse problemer. Derfor er det mulig å tolke de sitatene som implisitt kobling til problemløsning.

I den anbefalte læreplanen til lærebokserien som jeg analyserte er ikke heuristikker nevnt, men heuristisk tenkning ble omtalt i formålet med faget for spesialiserende retning i matematikk:

- *Utvikle kreativ(heuristisk) tenkning: fremme og løse problemer, argumentere, velge bort* (Muravina, 2013)

I formålet med faget for spesialiserende retning i matematikk fra den anbefalte læreplanen til lærebokserien skrevet av Muravin & Muravina ser vi kobling til Polyas firetrinns modell:

- *Planlegge, gjennomføre, sjekke løsninger*
- *Kunne vurdere forskjellige måter å løse problemet på og kunne velge den mest effektive måten å løse problemet på* (Muravina, 2013)

Under *de kunnskapene og ferdighetene(kompetansemål)* i *«Algebra og grunnleggende matematisk analyse»* som man skal kunne på slutten av allmenn grunnutdanning står det at man skal kunne:

- *«Bruke matematiske ideer, matematiske metoder og resultater fra «Algebra og grunnleggende matematisk analyse» til å lage modeller av forskjellige praktiske virkelighetsnære situasjoner og prosesser»* ((DUVRF, 2004a, s. 90)

I *kompetansemål* under hovedområdet *«Likninger og ulikheter»* slik som i sitatet over nevnes matematiske modeller:

- *«Bruke kunnskaper om likninger og ulikheter og dens systemer i praksis og i hverdagslige liv for å lage og utforske enkelte matematiske modeller»* (DUVRF, 2004a, s. 91)

Som vi så i delkapittel 3.3.2. De Statlige utdanningsstandarder, ble forandringene i De Statlige utdanningsstandarder betydelig rettet mot problemløsning. Derfor virket det litt overaskende for meg at verken «problemløsning», «problemløsning strategier» eller «heuristiske metoder» eksplisitt ble omtalt i den russiske læreplanen. Forklaringen kan være at man i Russland ikke ser så stor forskjell mellom å løse problemer man har teknikker for, og å løse problemer man ikke har teknikker for. I russisk skole lærer man ikke problemløsning for seg selv som et eget tema, og det brukes ikke spesielle undervisningstimer for det. Problemløsningsoppgaver «dukker opp» naturlig i undervisningen blant de andre oppgavene. Samtidig er utvalget av elever som velger spesialiserende retning i matematikk veldig smalt (Tabell 2 fra delkapittel 3.1.8). Det er bare veldig flinke elever som tar spesialiserende retning i matematikk i den russiske skolen.

Selv både den nye reviderte læreplanen i matematikk fellesfag i Norge har lagt større vekt på problemløsning, og forandringene i De Statlige utdanningsstandarder ble mer rettet mot problemløsning, omtales problemløsning og problemløsningsstrategier eksplisitt verken i den norske læreplanen eller i den russiske læreplanen. Men tross det, behandles kanskje strategiene i lærebøkene? Og det gir god grunn til å undersøke lærebøkene og finne var på dette spørsmålet.

3.4 Problemløsning i eksamensoppgaver

Alseth et al. (2013) hevder etter sin undersøkelse av læreplanen L97 at skriftlig eksamen er sterkt styrende for innholdet i matematikkundervisningen, og at eksamen derfor har en tilbakevirkende effekt på undervisningen. Når eksamensoppgavene i liten grad krever problemløsningsevne, er det derfor grunn til å tro at dette igjen påvirker undervisningen ved at det fokuseres på andre typer oppgaver (ibid.). Clarke (1996) referert i Zvorono (2011) mente at det som skal evalueres bestemmer hva som skal undervises. Det som blir verdsatt i evalueringen, fungerer som mål i undervisningen og det som ikke vil evalueres, eller er vanskelig å evaluere, vil nedprioriteres i undervisningen (Zvorono, 2011). Derfor er det lett å forestille at lærere ofte velger bort stoffet som ikke kommer til å bli presentert på eksamen/prøven. I følge eksamensveiledningen til eksamen på studiespesialiserende program på videregående skole i Norge skal elevene vurderes etter evne til å løse ulike problemstillinger (Utdanningsdirektoratet, 2015, s. 19). Begrepet «problem» forstås her slik jeg definerte over (se delkapittel 3.1.1 Hva er et problem? Hva er problemløsning?) - fra enkle, rutinemessige oppgaver til større, mer sammensatte problemer. Og her brukes det den individrelaterte definisjonen av begrepet «problem». «*Det som er et problem for én elev, kan oppleves som elementært for andre elever, avhengig av på hvilket nivå eleven befinner seg*» (Utdanningsdirektoratet, 2015, s. 19). Alt dette skulle logisk føre til stor fokus på problemløsning i undervisningen. Men tross dette fant Fossum (2009) og Leer (2009) ut i sine undersøkelser at eksamensoppgavene i liten grad stiller krav til problemløsningsevne. Lignende funn gjorde Zvorono (2011) i sin sammenlignende studie av norske og russiske eksamensoppgaver med logaritmer som konkluderte at norske elever testes kun i standardiserte rutinepregede oppgaver. Zvorono (2011) fant også ut at selv de vanskeligste norske eksamensoppgaver med logaritmer ligger generelt minst på ett nivå lavere i alle taksonomier enn de russiske oppgavene (Zvorono, 2011). Når kompetanse i problemløsning i liten grad kreves på viktige eksamener og tester, og samtidig legges det lite vekt på problemløsning i lærebøkene, kan det derfor føre til enda mindre fokus på dette i undervisningen.

3.5 Lærebøker og problemløsning

Stray (1994) sitert av Johansson (2003) har følgende definisjon på hva en lærebok er « *(…) a book designed to provide an authoritative pedagogic version of an area of knowledge*» (Johansson, 2003 s. 20). Med det menes at lærebøker er ment til å være en pedagogisk versjon av et matematisk område. Den mest vanlige formen for lærebøker slik vi kjenner dem i dag, er *«fairly large and printed objects»* som skal veilede elever gjennom et skoleår (Johansson, 2003, s. 20).

Det ble ikke gjort så mye forskning innenfor lærebøker i matematikk som i andre felt i matematikkdidaktikk, men de siste tiårene har lærebøker fått større oppmerksomhet innenfor internasjonal forskning (Fan, 2013). Lærebokanalyse inkluderer flere ulike temaer (ibid.). Man kan fokusere på en bestemt lærebok, et helt læreverk, flere lærebøker fra samme land, sammenligninger av lærebøker fra forskjellige land. Analyse av lærebøker kan også fokusere på ulike perspektiver ved lærebøkene, for eksempel, legge vekt på et matematisk emne, representasjoner, illustrasjoner, eksempler, oppgaver eller verktøy.

Fan et al. (2013) har sett på totalt 111 studier gjort fra før 1980 til og med 2012 og har klassifisert forskningen i fire kategorier:

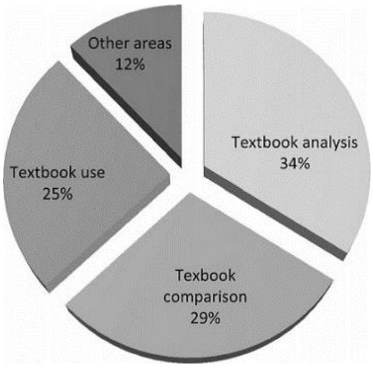
1. Rollen til lærebøker (studier om rollen til lærebøker i matematikkundervisning og læring)
2. Analyse og sammenligninger av lærebøker (studier som fokuserer på å analysere representasjoner i matematiske lærebøker, og sammenligne likheter og forskjeller i to eller flere serier av matematiske lærebøker i tilfelle læreboksammenligning)
3. Bruk av læreboka (studier som fokuserer på hvordan lærebøker blir brukt av lærere og / eller elever)

4 Andre områder (de andre studiene, for eks. studier om elektroniske lærebøker og studier om forholdet mellom lærebøker og elevenes prestasjoner) (Fan et al., 2013)

I forhold til de tre siste overfor nevnte områdene, viser Figur 6. I følge Figur 6 omfattet de fleste studiene i lærebokforskning (63%=34%+29% av alle studiene) området lærebokanalyse (inkludert lærebok sammenligning 29%), og lærebok bruk (25%), mens mye færre studier ble funnet i andre områder (12%). I undersøkelsen min fokuserer jeg på å sammenligne likheter og forskjeller i flere serier av matematiske lærebøker. Derfor tilhører undersøkelsen den andre kategorien.

Fan et al. (2013) velger fem aspekter ved analyse av lærebøker:

1. Matematisk innhold og matematiske emner
2. Kognitive krav og pedagogikk
3. Kjønn, etnisitet, økonomi, kultur og verdier
4. Internasjonale sammenligninger av lærebøker
5. Konseptualisering og metodiske forhold



Figur 6. Fordeling av empiriske studier av matematiske lærebøker

Undersøkelsen min dreier seg først og fremst om det fjerde aspektet «Internasjonale sammenligninger av lærebøker». Men de andre aspektene, som «Matematisk innhold og matematiske emner» «Kultur» er også til å se ved min analyse.

Spørsmålet om hvordan problemløsning er representert i matematikklærebøker har fått større oppmerksomhet i den siste tiden (f.eks. Fan og Zhu 2000; Hensey 1996; Li 1999; Mayer et al. 1995; Ng 2002; Nibbelink et al. 1987; Zhu og Fan 2006 referert i Fan and Zhu, 2007). Men mye oppmerksomhet har blitt gitt til fremstilling av problemtyper, mens temaet om hvordan lærebøker representerer problemløsningsmetoder har sjelden vært undersøkt (Fan and Zhu, 2007).

Som det ble sagt før, av alle studiene som Fan et al. (2013) analyserte, var 29 % sammenligningsstudier (Fan et al., 2013). En stor del av studiene er gjort innenfor lærebokanalyse gjennomført på tvers av flere landegrenser, for å sammenligne fremstilling av matematiske emner, kultur og tradisjoner. Jeg vil kort presentere noen av de undersøkelsene.

Den største sammenligningsstudien gjort av lærebøker er en del av TIMSS studie fra 1990 (Valverde et al., 2002 referert i Resvoll, 2014). Denne studien sammenlignet lærebøker i matematikk og naturfag i 40 land og hundrevis av bøker. Studien fokuserte på følgende fem hovedkategorier:

1. Den pedagogiske situasjonen til læreboka
2. Fagstoffets innhold
3. Rekkefølgen på emner
4. Bokens fysiske utseende
5. Kompleksiteten av det som ble forventet av elevene

Innenfor disse fem kategoriene ble det valgt ut 12 variabler for å representere hver av dem. Hovedkonklusjonen til studien var at lærebøkene fra de forskjellige landene hadde variasjoner på mange områder, og viste betydelige forskjeller i måten å presentere og strukturere pedagogiske metoder på. Forskjellene var systematisk innenfor land, klassetrinn og fagstoff. Alle sammenligningsstudiene viser ulikheter på tvers av landegrensene. Analysen bekreftet at lærebøker i mange land blir sett på som det viktigste verktøyet når et nytt tema i matematikk skal introduseres, og at det er en av de mest brukte kildene til matematikk for lærere, elever og foreldre (Valverde et al., 2002 referert i Resvoll, 2014).

En annen sammenligningsstudie som har sett på sammenhengen mellom den nasjonale læreplanen til landet og lærebøkene, ble gjort av Jones and Fujita (2013). De analyserte lærebøker fra Japan og England på 8.trinn. For å analysere lærebøkene brukte de et rammeverket som tok utgangspunkt i rammeverket fra Valverde et al. (2002). Fokuset for undersøkelsen var basert på to viktige problemstillinger innenfor matematikkdidaktikk:

1. Resonnering og bevis
2. Undervisning og problemløsning

Resultatene av studien viste at resonnering og bevis var mer spredt i engelske lærebøker og mer konsentrert i japanske lærebøker. Men i forhold til undervisning og problemløsning ga de engelske lærebøkene et bredere innhold enn de japanske lærebøkene. De japanske lærebøkene hadde varierte tilnærminger til matematikken og startet vanligvis med et problem som skulle sette i gang en klassediskusjon, mens de engelske lærebøkene ofte hadde fastere struktur i forhold til teori, oppgaver og oppsummeringer.

Mayer et al. (1995) referert i Fan et al. (2013) undersøkte hvordan lærebøker i Japan og USA presenterer problemløsning. Ved å analysere (leksjoner på addisjon og subtraksjon av hele tall, 7.trinn) tre japanske lærebøker og fire amerikanske lærebøker, fant de at de japanske lærebøkene viet 81% av deres plass til å forklare løsningsmetoden for løste eksempler, sammenlignet med 36% i de amerikanske lærebøkene. På den annen side viet de amerikanske lærebøkene mer plass til uløste øvelser (45%) og irrelevante illustrasjoner (19%), mens de japanske lærebøker viet bare henholdsvis 19% og 0% av plass. Resultatene som ble funnet i overensstemmelse med klasseroms observasjoner viser at japanske lærebøker er mer effektive med å vektlegge problemløsningsprosessen, mens amerikanske lærebøker er mer rettet mot det endelige svaret.

Stigler et al. (1986) analyserte tekstoppgaver i fire amerikanske lærebøker og én lærebok fra den tidligere Sovjetunionen. Det ble funnet at alle amerikanske lærebøkene var lik hverandre, men den sovjetiske læreboken var forskjellig fra de amerikanske på flere måter. For eksempel, sovjetiske lærebøker hadde mye mer variasjon av problemtyper og inkluderte flere komplekse to-trinnsoppgaver. Mens de amerikanske lærebøkene var mer fokusert på problemene som var enklest å løse. Videre presenterte sovjetiske lærebøker forskjellige problemer i hele teksten, i stedet for å fokusere på mer vanskelige problemer i en bestemt del av teksten.

I sin studie studerte Zhu and Fan (2006) hvordan utvalgte lærebøker fra Kina og USA på 7. og 8. klassetrinn representerer ulike typer matematikkproblemer som rutinemessige problemer vs. ikke-rutinemessige problemer, «åpne» problemer vs. «lukkede» problemer, og «tradisjonelle» problemer vs. «ikke-tradisjonelle» problemene (f.eks. prosjekt oppgaver, «Puzzle problem»). Det viste at i begge land var mer enn 96% av problemene rutinemessige og «tradisjonelle», og mer enn 93% var «lukkede» problemer. Resultatene viste også at problemene i kinesiske lærebøker var generelt mer utfordrende og involverte flere trinn i problemløsningsprosessen, mens lærebøker i USA hadde flere problemer med visuell informasjon. Som vi kommer til å se i kapittel 7 Videre drøfting, minner det forholdet litt om funnene i denne oppgaven.

Fan and Zhu (2007) sammenlignet lærebøker fra Kina, Singapore og USA, med hovedfokus på hvordan de representerte metoder for problemløsning. Studien ble utført i to deler: generelle strategier, som anvendelse av Polyas firetrinns problemløsningsmodell, og spesifikke strategier som består av 17 forskjellige problemløsning heuristikk, for eksempel «jobbe bakover», «tegn et diagram». Resultatet av studien viste at alle lærebøkene presenterte noen generelle metoder for problemløsning. I de kinesiske lærebøkene var metodene mer eksplisitte enn i bøkene fra de to andre landene. Fan and Zhu (2007) fant at «tegn et diagram», «bruk en ligning», og «omformuler problem» var de mest brukte problemløsnings heuristikkene i lærebøker fra Kina, Singapore og USA. Fan and Zhu (2007) tror måten skolens lærebøker presenterer problemløsningsmetoder på, vil ha en viktig innflytelse på undervisning og læring, og til slutt på studentenes evne i problemløsning. Studien viste også at det var et gap mellom de nasjonale læreplanene og lærebøkene.

I likhet med Fan and Zhu (2007) gjorde Johansson (2003) en studie som studerte sammenhengen mellom læreplanen og matematikkbøkene i Sverige. I studien analyserte hun den samme læreboka i forskjellige utgaver etter hvert som den svenske læreplanen endret seg. Resultatet av studien viste at innholdet i lærebøkene var ganske likt, og at bare deler av læreplanen ble oppfylt.

På grunnlag av studien til Fan and Zhu (2007) undersøkte Kongelf (2011) 740 eksempler fra ulike lærebøker på niende trinn. Kongelf fikk inspirasjon til sin studie av å analysere heuristiske metoder i norske lærebøker, da han så hvilken rolle heuristikk har i land som leder i TIMSS-undersøkelsen, for eksempel Singapore. Han studerte rådende litteratur, blant annet Schoenfeld og Polya, og laget en liste over ni problemløsningsmetoder med tilhørende beskrivelser. Funnene til Kongelf viser at mange av problemene i lærebøkene ble løst ved hjelp av en eller flere heuristiske tilnærminger. Kongelf (2011) sier at han fant at de heuristiske metodene i grunnskolebøkene hovedsakelig ikke var presentert bevisst, men heller var et resultat av ubevisst kulturell praksis (Kongelf, 2011). I tillegg var utvalget av metoder ensartet: enkelte metoder ble brukt mye, andre var nesten totalt fraværende. I følge Kongelf (2011) *er det et stort potensial for å bedre matematikklærebøker i grunnskolen i Norge angående heuristikk tilnærminger*.

Harder (2013) brukte analyseverktøyet til Kongelf (2011) i analysen av eksemplene fra lærebøkene i matematikk for videregående skole i Norge. Dette verktøyet ble brukt for å beskrive, og å gjøre det mulig å gjenkjenne heuristiske metoder i eksempler i lærebøkene. Bruken av disse heuristiske metodene vil indikere om eksemplene i lærebøkene gir elevene opplæring i problemløsningsmetoder (Harder, 2013). Utgangspunktet for analysen hennes var Kongelfs liste, som Harder har utvidet med en metode. I likhet med Kongelf ville Harder finne ut i hvilken grad eksempler fra ulike lærebøker stiller krav til typiske problemløsningsteknikker. Harder fant at eksemplene i matematikklærebøkene i liten grad belyser problemløsning. Men hun mente at problemløsning skulle blitt styrket i læreplanene etter revisjon av LK06, og hun håpet at forlagene skulle ta hensyn til funnene i oppgaven hennes og forbedre bruken av problemløsningsmetoder i de nye lærebøkene (Harder, 2013, s.63).

Disse studiene som sammenligner lærebøker fra flere ulike land, viser viktigheten av å se det kulturelle aspektet ved lærebokanalyse. Når man kommer fra forskjellige land, har man ulike nasjonale læreplaner, ulik tradisjon og ulik kultur for undervisning. Dette former også lærebøkene i de ulike landene. Flere av tudiene viste at elevene ble tilbudt ulik matematikk, og fikk ulike muligheter for å lære den matematikken som ble tilbudt av lærebøkene. Ved å sammenligne lærebøker fra ulike land, kan man også forstå deres kulturelle tradisjoner innenfor matematikk, og dermed også deres pedagogiske rammer. Ved å ha fokus på slike studier vil det bli lettere å forstå hverandres forskjeller og lære av hverandres ulikheter.

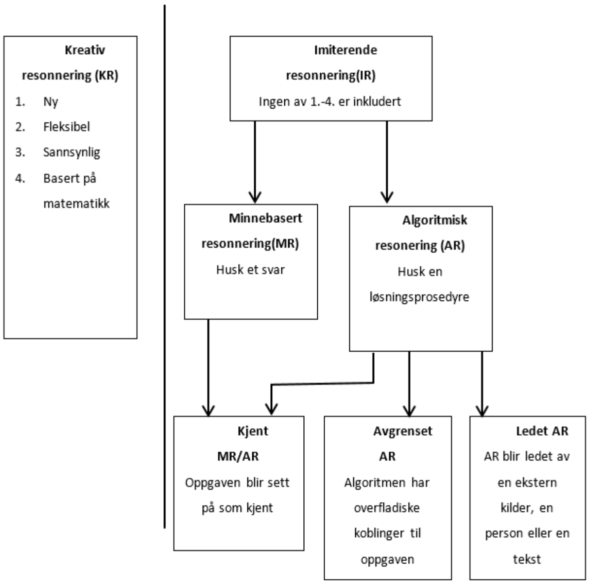
3.6 Alternativt rammeverk

Jeg valgte å bruke den åpne definisjonen av begrepet problem som ikke er individrelatert. Med denne åpne, bredere definisjonen kunne jeg analysere bruken av problemløsningsmetoder i eksemplene uten å måtte tolke dem ut i fra problemløserens perspektiv. Andre forskere som Lithner (2003), Bergqvist (2007) og Boesen (2006) har valgt å bruke den individrelaterte definisjonen som utgangspunkt. De brukte et analyseverktøy som ble utviklet av Johan Lithner for å kategorisere hvilken løsningsstrategi trengs for å løse matematikkoppgaven Lithner (2004) og elevers valg av løsningsstrategi i møte med matematikkoppgaver Lithner (2003). For å illustrere hva det vil si å løse en matematikkoppgave lister Lithner (2008) opp fire trinn som ligner på firetrinnsmodellen si så på i delkapittel 3.1.2 Problemløsningsprosessen:

1. Møtet med en (del)oppgave betegnes som en problematisk situasjon dersom det ikke er opplagt hvordan man skal fortsette.
2. Det gjøres et strategivalg der «strategi» kan være alt fra lokale metoder til generell tilnærming og «valg» kan få en vid betydning (velge, gjenkalle, konstruere, oppdage, gjette, osv.).
3. Strategien blir implementert.
4. En konklusjon blir funnet (Lithner, 2008 s. 257)

Det teoretiske rammeverket som analyseverktøyet bygger på, definerer ulike typer av resonnering som ble funnet i empiriske studier, og deler matematisk resonnering inn i to hovedtyper:

- Kreativ resonnering (creative mathematically founded reasoning)
- Imiterende resonnering (imitative reasoning)



Figur 7. Oversikt over kreativ og imiterende resonnering (Boesen, 2006, s. 18)

Resonnering er kreativ dersom det er nytt for eleven, og inneholder begrunnelse for valg av strategi og logiske, matematikkbaserte argumenter for hvorfor konklusjonene medfører riktighet (Bergqvist, 2007). Problemløsning krever at elevene behersker kreativ resonnering (Boesen, 2006, Palm et al., 2005). Det er først når en oppgave krever kreativ resonnering, at vi kan stille spørsmål om at det er en problemløsningsoppgave.

Imiterende resonnering er resonnering som ikke tilfredsstiller kravene til kreativ resonnering (Boesen, 2006). Når elever bruker overfladisk leting etter lignende eksempler og løsningsmetoder for å løse en gitt oppgave, kan vi snakke om imiterende resonnering. Mange studier har vist at imiterende resonnering er mye brukt av elever og lærere, og det kan være grunnen til at mange elever sliter i matematikk (Boesen, 2006). Hvis elever sjelden får oppgaver som krever annet enn imiterende resonnering, vil de ikke få sjanse til å utvikle evne til kreativitet i faget.

Imiterende resonnering er i stor grad basert på overflatisk betraktning av oppgavene. Denne typen resonnering kan ytterligere deles i to hovedkategorier (Lithner, 2008, s. 258):

- Minnebasert resonnering (memorised reasoning)
- Algoritmisk resonnering (algorithmic reasoning)

Oppgavene som havner under kategorien minnebasert resonnering, er oppgavene der eleven må gjengi et enkelt bevis eller å oppgi noen navn. For eksempel, for å svare på et spørsmål «Hva heter skjæringspunktene mellom x-akse og y-akse i et koordinatsystem?»

bruker man minnebasert resonnering (Bergqvist, 2007, s. 352). Et eksempel på bruk av algoritmisk resonnering er å huske formelen for å løse andregradsligninger. Eleven kan fylle inn formelen, regne ut og skrive ned svaret.

Hvis det finnes oppgaver eller eksempler i læreboken som ligner på den aktuelle oppgaven, kan eleven bruke kjent algoritmisk resonnering for å løse oppgaven. Noen elever bruker overfladisk tolking av oppgaveteksten for å sammenligne oppgavene og finne den algoritmen som passer for å løse oppgaven. Eleven som løser oppgaven ved hjelp av algoritmisk resonnering og som har løst mange oppgaver av denne typen, ser på denne gitte oppgaven som på en kjent oppgave. Algoritmen som brukes for å løse oppgaven er kjent for eleven. Eleven følger algoritmen, og som regel, løser lett oppgaven. Derfor tror eleven at løsningen er riktig. Han gjør ingen forsøk på å sjekke om at svaret er riktig. Da kan det skje at elevene tror at en oppgave er av en bestemt, kjent type, men det er den ikke, og da velger elevene en feil algoritme for å løse oppgaven. Algoritmisk resonnering kan brukes både av en elev som har forståelsen av oppgaven, og av en elev som kun kjenner algoritmen og har trent på å bruke denne algoritmen. Utfordringen her kan være å finne den riktige algoritmen.

Strategivalget som brukes i tekst - guidet algoritmisk resonnering kan være å lete etter likheter mellom oppgaven og et eksempel, en definisjon, et teorem, en regel eller noe annet i en tekstkilde (Lithner, 2008, s. 263). Eleven som skal løse oppgaven ved hjelp av tekst - guidet algoritmisk resonnering, har for eksempel løsningen av lignende oppgaven i boken foran seg.

Ofte skjer det at eleven begynner med å bruke en algoritme for å løse oppgaven, men finner ikke svar. Uten å reflektere over hva som er feil, går eleven til en annen algoritme og mislykkes igjen. Til slutt bruker eleven algoritmen som ser ut til å gi et riktig svar.

Ifølge Bergqvist (2007) viser flere studier at studenter ofte bruker imiterende resonnering ved å kopiere algoritmer eller gjenkalle fakta. Forskning viser også at et fokus på denne type resonnering i undervisning kan svekke studentenes forståelse av de underliggende matematiske begrepene. Bergqvist (2007) i sin studie analyserte oppgaver fra 16 eksamener ved fire forskjellige svenske universiteter. Resultatene viste at ca. 70% av oppgavene kunne løses ved hjelp av imiterende resonnering, og at 15 av de eksamenene kunne bestås ved kun bruk av imiterende resonnering (Bergqvist, 2007).

Med det alternative analyseverktøyet er det altså mulig å analysere oppgaver også. Jeg skal bruke dette verktøyet i noen av eksemplene (se delkapittel 5.4 Presentasjonen av noen eksempler ved hjelp av alternativt rammeverk).

4 Metode

4.1 Design og metode

Problemstillingen for denne studien har vært: *Hva er forskjeller og likheter i presentasjonen av problemløsningsmetoder i eksemplene i norske og russiske matematikklærebøker?*

For å kunne svare på problemstillingen, formulerte jeg to følgende forskningsspørsmål:

1. Hvilken plass har problemløsning i læreplanene i matematikk i Norge og i Russland?
2. Hvordan blir problemløsningsmetoder benyttet i eksempler i norske og russiske matematikklærebøker?

Jeg besvarte begge forskningsspørsmålene ved hjelp av forskningsmetoden tverrsnittstudie (cross-sectional design) i form av dokumentanalyse, men gjorde det på forskjellig måte. Ifølge Bryman (2012) er *en tverrsnittstudie innsamling av data i en populasjon (mer enn ett tilfelle/case) på et gitt tidspunkt, for å samle en mengde kvantitative eller kvantifiserbare data knyttet til to eller flere variabler som så sammenliknes for å se etter mønster* (Bryman, 2012, s. 58). For å svare på det første forskningsspørsmålet, analyserte jeg læreplaner i matematikk for 1T og R1 i Norge og for 10.- 11. trinn i Russland for å se hvilken rolle problemløsning spiller, og for å vite hva som menes med problemløsning i de ovenfor nevnte læreplanene. Samtidig ville jeg se på likheter og forskjeller i læreplanene. For å besvare det andre forskningsspørsmålet, foretok jeg analyse av eksempler i læreverkene ved hjelp av analyseverktøyet som ble utviklet av Kongelf (2011). Dette verktøyet ble brukt for å beskrive og å gjøre det mulig å gjenkjenne heuristiske metoder i eksempler i lærebøkene. Forekomsten av disse heuristiske metodene ville indikere om eksemplene i lærebøkene gir elevene opplæring i problemløsningsmetoder. Jeg så også på hvordan generelle strategier brukes i de undersøkte eksemplene.

Ifølge Bryman (2012, s. 289) er de to mest kjente definisjonene av innholdsanalyse følgende: «*Content analysis is a research technique for the objective, systematic and quantitative description of the manifest content of communication*» og «*Content analysis is any technique for making inferences by objectively and systematically identifying specified characteristics of messages*».

Egenskaper «objektivitet» og «det å være systematisk» er avgjørende for enhver innholdsanalyse. «Objektivitet» betyr at reglene blir tydelig bestemt før data deles inn i kategorier. For å være objektiv må forskeren støtte seg til det teoretiske rammeverket. Egenskap «å være systematisk» refererer til en konsistent måte å anvende reglene, slik at personlig påvirkning blir minimalisert. Hvis begge egenskapene, både «objektivitet» og «å være systematisk», er til stede, er det mulig å ha «ideell» innholdsanalyse. Med det menes at alle som benytter de samme reglene til samme data vil komme opp med de samme resultatene. *For å sikre disse kvalitetene på best mulig måte har utformingen av kodingsordningen stor betydning* (Kongelf, 2011).

Da jeg skulle svare på problemstillingene mine, ville jeg velge metoder som kunne egne seg best til undersøkelsen min. For å velge om jeg skulle bruke kvantitative metoder eller kvalitative metoder, eller kombinasjon av dem, så jeg på forskjellen mellom kvalitative og kvantitative forskningsmetoder for å finne ut hvilken av dem som er mest brukbar i forhold til min undersøkelse. *Når man har både kvantitative og kvalitative data, og data av begge typer sammen, gir det en bedre forståelse av problemstillingen enn hva den enkelte metoden kan gi* (Creswell, 2012).

Grønmo beskriver fire strategier for å kombinere kvalitative og kvantitative metoder:

1. kvalitative undersøkelser som forberedelse til kvantitative undersøkelser;
2. kvalitative undersøkelser som oppfølging av kvantitative undersøkelser;
3. parallell utnytting av kvalitative og kvantitative tilnærminger under både datainnsamling og analyse;
4. innsamling av kvalitative data som kvantifiseres under analysen (Grønmo, 1996)

Disse strategiene står ikke i motsetning til hverandre eller utelukker hverandre. I forskningen kan de kombineres i ulik grad, avhengig av de problemstillingene som skal undersøkes.

I min undersøkelse bestemte jeg kategorier og lagde en kodingsmanual, og jeg fulgte forhåndsbestemte regler for kategorisering. I min undersøkelsen skulle alle oppgaver, både norske eller russiske, analyseres ved hjelp av det samme analyseverktøyet som ble laget på forhånd, dvs. jeg skulle bruke de samme kategoriene for alle eksemplene, og de kategoriene skulle ikke endres underveis. De oppgavene fra ulike lærebøker hadde sammenlignbar innhold og hensikt. I analyse av eksemplene ville jeg finne ut forholdet mellom oppgavene og de bestemte kategoriene. På denne måten tilhører min undersøkelse den kvantitative tilnærmingen. Samtidig, i forhold til læreplanene, skulle jeg selv jobbe direkte med kilden, og undersøkelsen skulle være preget av nærhet. I tillegg skulle jeg se nærmere på noen konkrete eksempler. På denne måten er undersøkelsen min kvalitativ.

Som følge av det som står over, tilhører min undersøkelse både kvalitative og kvantitative tilnærminger. Jeg brukte kombinasjon av kvalitative og kvantitative metoder på følgende måte: parallell utnytting av kvalitative og kvantitative tilnærminger under både datainnsamling og analyse.

Polya sin firetrinns problemløsningsmodell som ble beskrevet i delkapittel 3.1.2 Problemløsningsprosessen, gir en generell beskrivelse på hvordan er det å løse matematiske problemer, og denne modellen presenterer generelle strategier. I analysen min ville jeg først se om de fire trinnene i problemløsningsmodellen til Polya presenteres i de undersøkte lærebøkene. I delkapittel 5.2 Noen interessante eksempler med bruk av Polyas firetrinns modell skal noen av eksemplene analyseres i forhold til bruk av Polyas firetrinns problemløsningsmodell.

Men som Schoenfeld (1979) påpekte, er spesifikke problemløsningsheuristikker ofte mer praktiske under selve problemløsning (Schoenfeld, 1979). For å analysere forekomsten av spesifikke problemløsningsheuristikker, brukte jeg kodingsordningen til Kongelf (2011). Kodingsordningen hans består av kodingsinnholdsliste og kodingsmanual. I motsetning til Kongelf (2011) sin kodingsinnholdsliste med fire dimensjoner, består min kodingsinnholdsliste av tre dimensjoner med ulike kategorier i hver dimensjon (se Tabell 6). Kategoriene i dimensjonen «Lærebok» er kodet med navnet på den analyserte læreboken. Dimensjonen «Eksempel» er delt opp i to underdimensjoner som består av det totale antallet eksempler i læreboka og det totale antallet heuristiske metoder. Dimensjonen «Heuristiske metoder» er delt opp i 11 underdimensjoner som består av heuristiske metoder innen problemløsning. Jeg var opptatt av at det ble helt separate dimensjoner i kodingsinnholdslisten slik at det ikke var noe empirisk eller begrepsmessig overlapping mellom dimensjonene. Det er også viktig at kategoriene innenfor hver dimensjon er gjensidig utelukkende, dvs. at det ikke er noen overlapping mellom kategoriene.

Lære-bok	Eksempel		Heuristiske metoder										
	Total eksempler	Total metoder	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell	Lag en illustrasjon	Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en annen	Bruk digitale hjelpemidler	Introduser hjelpeelementer

Tabell 6. Kodingsinnholdsliste basert på Kongelf (Kongelf, 2011)

Jeg hadde en utfordring, da jeg skulle bestemme hvilke heuristiske metoder jeg skulle undersøke i lærebøkene. Jeg ble inspirert av den internasjonale komparative studien til Fan and Zhu (2007) om hvordan lærebøker i Kina, Singapore og USA presenterte 17 problemløsningskategorier. Disse kategoriene ble basert på de ulike heuristikkene som ble funnet i de nasjonale læreplanene for de tre landene. På samme måte som Kongelf, oppdaget jeg at flere av disse heuristikkene verken ble funnet i den norske læreplanen og de norske lærebøkene, eller i den russiske læreplanen og de russiske lærebøkene. Etter at jeg bearbeidet Fan and Zhu (2007) og Kongelf (2011) sine lister med heuristiske metoder og vurderte tilnærminger til Polya (1973) og Björkqvist (2003), baserte jeg undersøkelsen min på karakterisering av forekomsten av 11 heuristiske tilnærminger i lærebøkene.

På lignende måte som Kongelf (2011) og Harder (2013) bestemte jeg å undersøke de ni heuristiske metodene som finnes i de norske lærebøkene. Jeg ville også inkludere i analysen den tiende metode «Bruk digitale hjelpemidler» som ble brukt i studien til Harder (2013). I tillegg ville jeg ha med i analysen en heuristikk til som ble funnet i de russiske lærebøkene. Den siste heuristikken kalte jeg for «Introduser hjelpeelementer» (se Tabell 7. Kodingsmanual basert på Kongelf (Kongelf, 2011). Denne kategorien ville jeg ha for seg selv, fordi jeg mener at den ikke passer så godt i de andre kategoriene. Med denne kategorien menes det at eleven innfører et element som opprinnelig ikke var i oppgaven og benytter det som en hjelp for å løse oppgaven. For eksempel, kan eleven introdusere $y = x^2$ som et hjelpeelement for å løse likningen $x^4 – 13x^2 + 36 = 0$. Da får eleven likningen $y^2 – 13y + 36 = 0$ som er en andregradslikning og som er enkelt å løse. Jeg syns at denne heuristikken ikke passer så godt i de andre kategoriene, og derfor valgte jeg å lage denne nye kategorien.

Heuristiske metoder	**Beskrivelse**
1 Se etter et mønster	Identifisere mønster i den gitte informasjonen ved nøyaktig observasjon av felles egenskaper, variasjoner eller forskjeller ved tall, former og liknende i problemet.
2 Lag en systematisk tabell	Lage en systematisk liste eller tabell som inneholder den gitte informasjonen eller de ulike mulighetene.
3 Lag en illustrasjon	Bruke den gitte informasjonen til å lage en illustrasjon/visualisering for å presentere problemet visuelt.
4 Prøv og feil	Gjøre en rimelig antakelse om hva svaret er, og så sjekke om resultatet blir riktig. Gjenta prosedyren hvis nødvendig for å finne svaret eller en god tilnærming.
5 Løs deler av problemet	Dele et problem i flere delproblemer, for så å løse disse ett etter ett, og fine løsningen på det opprinnelige problemet.
6 Jobb baklengs	Tilnærme seg problemet baklengs fra dets resultat eller løsninger for å finne hvilke krav som må tilfredsstilles.
7 Tenk på et liknende problem	Huske eller vurdere liknende problemer som er løst tidligere for å eventuelt kunne bruke samme metoder og resultater i tilnærmingen til problemet.
8 Gjør problemet enklere	Forenkle vanskelige tall eller forhold i problemet uten å endre problemet matematisk.
9 Se problemet fra en annen side	Tilnærme seg problemet med en annen vinkling når tidligere tilnærminger ikke fører frem.
10 Bruk digitale hjelpemidler	Bruke digitale hjelpemidler som grafisk kalkulator, regneark eller andre programmer for å løse problemet.
11 Introduser hjelpeelementer	Bruke hjelpeelementer for å løse problemet

Tabell 7. Kodingsmanual basert på Kongelf (Kongelf, 2011)

Bryman beskriver innholdsanalyse som *«en tilnærmingsmåte til dokumentanalyse og tekster (...) som forsøker å kvantifisere innhold i forhåndsbestemte kategorier på en systematisk måte som kan gjentas»* (Bryman, 2012, s. 289). Ifølge Bryman (2012) brukes innholdsanalyse tradisjonelt *«in the examination of printed texts, documents and of mass media items»* (Bryman, 2012). Som vi så over, kan dokumentanalyse være både kvalitativ og kvantitativ, og de begge variantene er representert i denne oppgaven. Analyseverktøyet som brukes for å svare på det andre forskningsspørsmålet kan sies å være innholdsanalyse slik Bryman beskriver det, og derfor tilhører på den ene siden kvantitative metoder (Bryman, 2012, Grønmo, 1996). Men jeg skal samtidig se nærmere på noen konkrete eksempler, dvs.

bruke kvalitative tilnærminger. Analysen av læreplanen hadde som mål å finne dybdeinformasjon om innholdet, og kan anses som kvalitativ metode (Bryman, 2012).

Det er flere fordeler som kan oppnås ved hjelp av innholdsanalyse i lærebokforskning. For det første, er det en veldig gjennomsiktig metode. Kodingsmanualen sammen med en detaljert beskrivelse av metoder som ble undersøkt, gjør både lignende studier og oppfølgingsstudier gjennomførbar.

Innholdsanalyse er også egnet for langsgående studier, og dermed skaper muligheter for videre forskning. Innholdsanalyse er enkel å gjenta slik at andre forskere kan benytte samme verktøy under andre forhold. *Innholdsanalyse er også kjent som en diskret metode* (Cohen et al., 2011), noe som betyr at man kan observere uten å bli observert. Derfor er det ingen risiko for at forskeren påvirker datamaterialet. Men forskeren selv anses i dette tilfellet som instrumentet for undersøkelsen, og derfor er det risiko for at forskerens forforståelse kan påvirke analysen. Kvaliteten på analysene avhenger altså i stor grad av meg som forsker. Derfor var det viktig for meg å bestemme kategorier og lage en kodingsmanual på forhånd, og kun følge forhåndsbestemte regler for kategorisering. Kodingsmanualen har hjulpet meg å være konsistent ved å gi bestemte retningslinjer for hva som kreves for de ulike metodene. Jeg har klargjort for ulike valg som ble fattet, og har lagt ved alle analyseskjemaer (se fra Vedlegg 11. Analyseskjemaet – Sinus 1T). Jeg prøvde å støtte meg til det teoretiske rammeverket og være så objektiv som mulig.

I motsetning til Kongelf (2011) hadde jeg en utfordring til i min undersøkelse. Kongelf (2011) undersøkte bare de norske lærebøkene. I min studie skulle jeg undersøke og sammenligne norske og russiske lærebøker. De norske og de russiske lærebøkene har litt ulik oppbygning og layout, noe som påvirker fordeling av tekst, oppgaver og eksempler, samt at de har litt forskjellige faglig innhold.

De komparative studiene som sammenlignet læreverkene fra forskjellige land, tok ikke opp problematikken om hvor sammenlignbare lærebøkene fra forskjellige land var. Det var for eksempel, analysen til Fan and Zhu (2007) som sammenlignet lærebøkene fra Kina, Singapore og USA. Etter min mening for å kunne sammenligne læreverkene fra ulike land, bør man undersøke først hvor sammenlignbare de undersøkte læreverkene er. For å kunne finne ut hvor sammenlignbare de norske og de russiske lærebøkene var, ville jeg først se på forskjeller og likheter i oppbygningen og innholdet i lærebøkene. Blant annet ville jeg undersøke hvor store de læreverkene er, hvor mye informasjonen per side er det i de lærebøkene, og hvor de ulike temaene blir presentert i lærebøkene. For å kunne svare på disse spørsmålene, valgte jeg å gjøre en liten hjelpeundersøkelse. Jeg tok utgangspunkt i rammeverket fra en forskningsartikkel av Hong and Choi (2014) som består av en sammenligning av koreanske og amerikanske lærebøker. Dette analytiske verktøyet brukte også Karimzadeh (2014) for å sammenligne norske og singaporske lærebøker. Hong and Choi (2014) valgte kvadratiske likninger som gjenstand for sin undersøkelse, og analyserte innholdet i lærebøkene ved å se på ulike elementer i utvalgte områder i lærebøkene. Det to-dimensjonale rammeverket de brukte i undersøkelsen sin består av en horisontal analyse og en vertikal analyse. Den horisontale analysen ser på lærebøkene som en helhet, og gir et stort og overfladisk bilde av lærebøker. Den horisontale analysen har som hensikt å finne ut hvor ulike temaer innenfor et valgt område befinner seg i lærebøkene, på hvilket klassetrinn, hvor stor plass tar de ulike temaene osv. Den vertikale analysen går mer i dybden, og fokuserer mer på det matematiske innholdet. Denne vertikale analysen tar for seg, blant annet, hvordan et nytt område introduseres og videreutvikles, hvordan nye konsepter og begreper presenteres og anvendes. Man ser også på om det undersøkte området har bare ren matematisk kontekst eller har kontekst fra den virkelige verden. I tillegg undersøker den vertikale analysen hvilke kognitive nivåer som trenges for å løse oppgaver. Kombinering av begge dimensjoner i undersøkelsen, både den horisontale analysen og den vertikale analysen, kan være med på å styrke analysen.

Av hensyn til oppgavens omfang måtte jeg begrense min undersøkelse til hovedtemaet «Likninger, ulikheter og dens systemer». Jeg bearbeidet både rammeverket til Hong and Choi (2014) og rammeverket til Karimzadeh (2014), og tilpasset de til min undersøkelse etter det hva jeg syntes har vært nødvendig for å kunne svare på forskningsspørsmålene mine. Jeg bestemte meg for å forholde meg til den horisontale analysen. Den horisontale analysen har gitt meg et bilde av hvordan forfatterne av de undersøkte lærebøkene har organisert området «Likninger, ulikheter og dens systemer». Jeg har presentert en oversikt over antall oppgaver i dette området. Analysen har også inkludert oversikt over hvor ulike temaer innenfor området «Likninger, ulikheter og dens systemer» befinner seg i lærebøkene, hvor stor andel av bøkene som er satt av til det området, og hvilke temaer som har blitt dekket innenfor det området.

Jeg bestemte meg for ikke å bruke den vertikale analysen fordi jeg skulle gå mer «i dybden» senere i analysen ved å se etter forekomsten av heuristiske metoder i lærebøkene ved hjelp av Kongelf sitt analyseverktøy. Jeg mener at kombinert bruk av de to analyseverktøyene, både rammeverket til Hong and Choi (2014) og rammeverket til Kongelf (2011), kan være gunstig for denne studien fordi analysen går da både i bredden og dybden som er med på å fange opp data fra ulike områder.

4.2 Utvalg

Utvalget mitt bestod av norsk læreplan i matematikk og russisk læreplan i matematikk, fire norske lærebøker og to russiske lærebøker basert på læreplanen. Lærebøkene spiller en viktig rolle i undervisningen Kongelf (2011), og mye av skoletiden går til å løse oppgaver som ligner eksempler presentert i læreboken (Grønmo et al., 2010, Kongelf, 2011). Derfor er det viktig å se på lærebøkene for å se hva elevene undervises i. I denne oppgaven ville jeg analysere eksemplene som ble presentert i de norske og de russiske lærebøkene.

4.2.1 Fag og skoletrinn

Av hensyn til oppgavens omfang kunne jeg ikke undersøke lærebøkene på alle trinn. Jeg valgte å konsentrere meg om analysen til studiespesialiserende program (SSP). Studiespesialiserende program inkluderer matematikk fellesfag (1T og 1P) på Vg1, og de til sammen seks variantene av matematikkfaget i Vg2 og Vg3 (2T, 2P, R1, S1, R2 og S2). *«Det er to variantar av læreplanen på Vg1. T-varianten er meir teoretisk orientert, medan P-varianten er meir praktisk orientert. Begge variantane gjev i dei studieførebuande utdanningsprogramma generell studiekompetanse saman med matematikk på Vg2, anten 2T/2P eller programfag i matematikk (R1/S1)»* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2). De vanligste studieløpene i matematikk med elevantall i 2013/2014 kan man se i Vedlegg 5: De vanligste studieløpene i matematikk med elevantall i 2013/2014 på SSP.

I forhold til den norske skolen ble denne oppgaven begrenset til de mer teoretiske og realfaglige matematikkvariantene (1T og R1). Grunnen til det var et faktum at elevene som forsetter med matematikk etter videregående skole, velger matematikk 1T på VG1 og R1 på VG2. Og det er de elevene som virkelig trenger å lære seg å beherske problemløsning i matematikk siden de høyst sannsynlig vil måtte benytte seg av det i senere studier og i arbeidsliv.

I den russiske skolen valgte jeg å fokusere på 10. og 11. trinn for spesialiserende retning i matematikk. Som det ble nevnt tidligere, kan elevene i den russiske skolen velge enten vanlig grunnleggende retning i matematikk eller spesialiserende retning i matematikk. Av samme grunn som for den norske skolen, valgte jeg å fokusere på spesialiserende retning i matematikk for den russiske skolen, fordi de elevene som velger denne retningen i matematikk, er de elevene som velger matematikk bevisst og skal mest sannsynlig bruke matematikken i senere studier og arbeidsliv.

Jeg valgte 10. og 11. trinn for spesialiserende retning i matematikk i den russiske skolen fordi innholdet i den tilsvarende læreplanen er nærmest til 1T og R1 i den norske skolen. Og samtidig ville jeg at det ikke skulle være stor aldersforskjell mellom norske og russiske elever.

4.2.2 Undersøkte lærebøker

De norske lærebøkene som er tatt med i denne rapporten er fra de to største forlagene i Norge: serien Sinus fra Cappelen Damm forlag og serien Sigma fra Gyldendal. Og det *er de lærebøkene som blir hyppigst brukt i matematikkundervisningen i den videregående skolen* (Pedersen, 2012).

Forlagene gjennomgått i denne rapporten har egne nettsider:
Cappelen Damm: http://sinus.cappelendamm.no/
Gyldendal: http://web2.gyldendal.no/sigma/

Følgende norske lærebøker ble undersøkt:

Cappelen Damms *Sinus 1T* (Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S., 2014), heretter omtalt som *Sinus 1T*

Cappelen Damms *Sinus R1* (Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S., 2013), heretter omtalt som *Sinus R1*

Gyldendals *Sigma 1T* (Øgrim, et al., 2013), heretter omtalt som *Sigma 1T*

Gyldendals *Sigma R1* (Øgrim, et al., 2012), heretter omtalt som *Sigma R1*

I Russland er det mange lærebøker som brukes i undervisningen. Og hver skole kan velge de lærebøkene de vil bruke. Da jeg skulle velge russiske lærebøker for analysen min, ville jeg velge lærebøker som er opptatt av problemløsning, kreativitet og heuristikk. Jeg valgte lærebokserien til Muravin & Muravina, fordi forfatterne er opptatt av at elever som tar spesialiserende retning i matematikk, skal, blant annet, kunne:

- *Utvikle matematisk tenkning, både logisk, algoritmisk og heuristisk*
- *Lære matematisk språk og bruke det matematiske språket for å utforske og beskrive virkelighetsnære situasjoner*
- *Bruke matematiske modeller for å utforske og beskrive virkelighetsnære situasjoner* (Muravina, 2013 , s.6-7, 12-13)

Som vi ser over brukte lærebokforfattere ordet «heuristisk» i den anbefalte læreplanen til lærebokserien sin. I lærebøkene sine sier forfattere i forordet til elever at *å kunne matematikk betyr å kunne løse problemer* (Muravin and Muravina, 2013, Muravin and Muravina, 2014).

Følgende russiske lærebøker ble undersøkt:

Drofas *Matematikk: Algebra og grunnleggende matematisk analyse*. For spesialiserende retning i matematikk for 10.trinn (Muravin and Muravina, 2013): heretter omtalt som *Matematikk: AGMA, 10.trinn.*

Drofas *Matematikk: Algebra og grunnleggende matematisk analyse*. For spesialiserende retning i matematikk for 11.trinn. (Muravin and Muravina, 2014): heretter omtalt *som Matematikk: AGMA, 11.trinn*.

4.2.3 Valgte tema og eksempler

For å begrense analysens omfang ytterligere har jeg valgt å se på læreplanens hovedområder *«Tall og algebra»* og *«Funksjoner»* i matematikk 1T og *«Algebra»* og *«Funksjoner»* i matematikk R1 i den norske skolen. I følge Grønmo et al. (2012) er *regning med tall og symboler grunnleggende for matematikken, og algebra kan sammen med aritmetikk/tall regnes som «motoren i matematikken»*. Å ha grunnleggende ferdigheter og forståelse innenfor tall og algebra er *viktig for alle som bruker matematikk, noe som gjelder i en lang rekke yrker og profesjoner* (Grønmo et al., 2012, s. 27).

Jeg valgte temaet «Algebra» fordi det er et viktig tema, og både norske og russiske elever sliter med dette temaet. Teknikkene som benyttes i Algebra vil også være sentrale i de andre områdene fra læreplanen, fordi algebra mest sannsynlig er en viktig del i disse områdene.

I den russiske skole har jeg valgt å analysere læreplanens hovedområder *«Tall og bokstavutrykk»*, *«Funksjoner»* og *«Likninger og ulikheter»* for spesialiserende retning i matematikk for 10. og 11.klasse. Jeg syns at de temaene både i den norske skole og i den russiske skole har mye potensiale angående problemløsning. Samtidig bekrefter den nyeste TIMSS-undersøkelsen at norske elever presterer bekymringsverdig dårlig i algebra (Grønmo et al., 2012). Hovedområdet «Funksjoner» henger tett sammen med «Algebra» etter min mening, og derfor ble dette temaet også valgt for analyse. Kompetansemålene i de utvalgte hovedområdene både for den norske og for den russiske skolen ble presentert i kapitler 3.2 Problemløsning i den norske læreplanen og 3.3 Problemløsning i den russiske læreplanen.

Jeg tok utgangspunkt i disse kompetansemålene og har valgt ut hvilke deler av de norske og russiske bøkene som var aktuelle. Og deretter valgte jeg hvilke eksempler som skulle analyseres i de utvalgte bøkene. Dette resulterte i totalt 496 norske og russiske eksempler som er blitt analysert. Og her er det utvalget av alle eksempler i disse kapitlene som ble undersøkt i min studie:

Utvalg – norske og russiske lærebøker

Gyldendal – *Sigma 1T*	Delkapittel
Kapittel 1 – Tallregning og algebra	1-9 (hele)
Kapittel 3 – Førstegradsuttrykk	1-8 (hele)
Kapittel 4 – Funksjoner og andregradsuttrykk	3,4,5,6,7,8,9)
Kapittel 5 – Potenser og logaritmer	1-9 (hele)
Kapittel 7 – Funksjoner og modeller	1-6 (hele)
Kapittel 8 – Vekstfart og derivasjon	1,2,4,6,7,8,9

Gyldendal – *Sigma 1T*	Delkapittel
Kapittel 1 – Matematikken rundt oss	1-8, 12, 13 14
Kapittel 2- Lineære funksjoner	1-8 (hele)
Kapittel 3 – Potenser, logaritmer, eksponentiell vekst	1-10 (hele)
Kapittel 5 – Algebra	1-15(hele)
Kapittel 7 – Grafer og ulikheter	1 -9 (hele)
Kapittel 8 - Derivasjon	1, 5, 6, 7, 10

Drofa - *Matematikk: AGMA, 10.trinn*	Delkapittel
Kapittel 1 - Funksjoner og grafer	1-4
Kapittel 2 – Potenser og røtter	5-8
Kapittel 3 – Eksponentielle funksjoner og logaritmiske funksjoner	9-11
Kapittel 4 - Trigonometriske funksjoner og dens egenskaper	18-20, 26
Kapittel 6 - Repetisjon	29-30

Cappelen Damm – *Sinus R1*	Delkapittel
Kapittel 1- Algebra	1-9 (hele)
Kapittel 2 - Logaritmer	1-7 (hele)
Kapittel 7 - Funksjonslære	2-8

Gyldendal – *Sigma R1*	Delkapittel
Kapittel 2- Bevis og bevisføring	1-6, 8
Kapittel 4 – Algebra	1-13 (hele)
Kapittel 6 – Funksjonsdrøfting	1-10 (hele)

Drofa - *Matematikk: AGMA, 11.trinn*	Delkapittel
Kapittel 1 – Kontinuerlige funksjoner og grenseverdier	1,3
Kapittel 2 – Derivasjon	4,6
Kapittel 3 – Derivasjonsregler	7, 8, 10
Kapittel 5 - Likninger, ulikheter og dens systemer	18-20, 26
Kapittel 7 – Komplekse tall	29-30

Tabell 8. Utvalg i de norske og de russiske lærebøkene

4.3 Validitet og reliabilitet

I samfunnsvitenskapelig forskning handler validitet *om hvorvidt metoden eller instrumentet undersøker det den skal undersøke* (Kvale and Brinkmann, 2009, s. 250).I følge Cohen et al. (2011) går *validitet ut på om forskningen framstår som tillitvekkende* (Cohen et al., 2011). Validiteten er derfor et krav for både kvantitativ og kvalitativ forskning. I denne oppgaven har jeg brukt både kvalitative og kvantitative datainnsamlingsmetoder. I kvalitative metoder kan *validitet fremmes blant annet gjennom ærlighet, dybde og riktighet i dataene, graden av triangulering og objektiviteten til forskeren* (Cohen et al., 2011, s.105). I kvantitative metoder styrkes *validiteten gjennom å gjøre nøye utvalg, bruke passende instrumenter, og egnede statistiske instrumenter for å behandle dataene* (Cohen et al., 2011, s.105). Når forsker skaper en sammenheng mellom data, lærebøkene, og analyseverktøyet utviklet fra teoribakgrunnen, kan det øke validiteten i oppgaven (Cohen et al., 2011). Resultatet av forskningen kan være preget av forskeren sine egne meninger og tolkinger. Derfor er det viktig å være så objektiv som mulig og støtte seg til teorien.

Funnene i denne studien begrenses kun til utvalget av undersøkte lærebøker og til de kapitlene som er undersøkt. Selv om funnene ikke kan generaliseres, impliserer ikke det nødvendigvis at det vil være en trussel for validiteten. Det er ikke krav om at *enhver forskning nødvendigvis må være universell og gyldig for alle mennesker eller alle lærebøker og til enhver tid* (Kvale and Brinkmann, 2009).

Begrepet validitet går ut på at man har et ønske om at datamaterialet og måleprosedyrene skal virke etter hensikten. *Validitet er altså et mål på hvor godt man måler det man ønsker å måle* (Ragin, 1994 referert i Olsen, 2008). Ved innholdsanalyse er spørsmål om validitet nært knyttet opp mot kategoriene og kodene som benyttes i undersøkelsen. I mitt tilfelle er kategoriene hentet fra teorien. Den teorien som brukes, er mye brukt innenfor matematikkdidaktisk forskning. Og det er noe som kan peke på at kategoriene er valide. Analyseverktøyet jeg brukte ble utviklet med bakgrunn i teorien og tidligere studier.

Som alle forskningsmetoder har innholdsanalyse også noen ulemper. En innholdsanalyse er avhengig av dokumenter som analyseres. Dette betyr at dokumentene vurderes i forhold til autentisitet, troverdighet og representativitet. Autentisitet sier noe om lærebøkene er som de gir seg ut for å være, og troverdighet må sjekkes om lærebøkene ikke har blitt forvrengt eller forfalsket på noen måte. Problemer som også kan oppstå ved innholdsanalyse er at kvaliteten til dokumentene er dårlig, dokumentene er ufullstendige eller ikke representative. Et ufullstendig dokument kan, for eksempel, være en bok, der ikke alt i teksten er lesbar. Det er derfor viktig å ta hensyn til hvorvidt dokumentet er fullstendig og representativt.

I denne studien analyseres læreplaner og lærebøker. Siden analysen undersøker de gjeldende læreplanene i Norge og i Russland, er utvalget av læreplaner representativt, og læreplandokumentene er fullstendige. Lærebøkene som analyseres mangler ingen sider eller deler, og det er de bøkene som elever bruker i skolen, og derfor er lærebøkene også fullstendige. Alle kompetansemålene i de utvalgte hovedområdene i norske læreplanene for 1T og R1 er presentert i de norske lærebøkene, og alle kompetansemålene i de utvalgte hovedområdene i russiske læreplanene for 10. og 11. trinn finnes i de russiske lærebøkene. Men samtidig kan jeg ikke påstå at de undersøkte lærebøkene er mestselgende og representative. Derfor gjelder resultatene fra denne undersøkelsen først og fremst bare de undersøkte lætebøkene, og de kapitlene som ble undersøkt. Selv om funnene fra denne undersøkelsen ikke kan generaliseres, betyr ikke det nødvendigvis at det kan påvirke validiteten. Det er ikke krav om at *enhver forskning nødvendigvis må være universell og gyldig for alle mennesker eller alle lærebøker og til enhver tid* (Kvale and Brinkmann, 2009). Goldin (2000) referert i Karimzadeh (2014) mener at mangel på representativitet ikke alltid er en svakhet fordi generalisering nødvendigvis ikke er et mål man må søke mot.

Reliabilitet er et mål på hvor pålitelig datamaterialet er, i forhold til hvordan undersøkelsen ble utformet og hvordan data ble innsamlet. Reliabilitet handler om hvor pålitelige de resultatene forsker har funnet er. *Reliabilitet, eller pålitelighet, handler om det er mulig for en annen forsker å gjennomføre nøyaktig den samme studien, ut i fra de samme forutsetningene, og få de samme resultatene og konklusjonene* (Yin, 2003 referert i Resvoll, 2014). Jeg forsøkte å dokumentere alle prosesser i min forskningsprosess, slik at analyseverktøyet jeg brukte, også kunne brukes for å sammenligne andre lærebøker, for eksempel, norske lærebøker og ukrainske lærebøker.

Den største trusselen mot pålitelige resultater er store og/eller systematiske tilfeldigheter i målingene. *Har vi for mye av dette, vil konklusjonene vi trekker være feilaktige, evt. ugyldige* (Ragin, 1994 referert i Olsen, 2008). Det er viktig å vite at *vi får omtrent samme resultater selv om undersøkelsen skulle blitt gjennomført mange ganger* (Ragin, 1994 referert i Olsen, 2008).

Når det gjelder reliabiliteten til analysen av lærebøkene, har jeg forsøkt å legge min egen mening om lærebøkene til side, slik at det ikke skulle påvirke mine funn. Jeg har fokusert på å analysere lærebøkene ut fra den teoribakgrunnen som jeg har presentert ovenfor.

I mitt arbeid med innholdsanalyse har jeg lagt vekt på å redegjøre de ulike stegene i mitt arbeid. Generelt har lærebokstudier gjerne høy reliabilitet, fordi datamaterialet kan undersøkes flere ganger og datamaterialet ikke forandrer seg over tid. Ved innholdsanalyse avhenger reliabilitet av hvor klart kategoriene blir presentert, og om ulike personer tolker de samme kategoriene på samme måte. Reliabiliteten i min studie styrkes også av det faktum at resultatene fra min analyse samsvarer veldig godt med resultatene fra Harder sin studie, når det gjelder området Algebra i de norske lærebøkene. Eksempelvis kan man se resultatene for læreboken Sigma 1T fra min analyse i Vedlegg 13. Analyseskjemaet –Sigma 1T, og Harder sin analyse for læreboken Sigma 1T (se Harder, 2013, s. 77).

5 Analyse

I dette kapittelet skal jeg gjøre rede for hvordan jeg gikk frem i undersøkelsen min, der jeg så etter forekomsten av både generelle problemløsningsstrategier og spesifikke heuristiske metoder i de norske og de russiske lærebøkene. Det virket for meg mer logisk å starte med hjelpeundersøkelsen, for å først kunne finne svar på hvor sammenlignbare de lærebøkene jeg undersøkte var. For å kunne sammenligne læreverkene fra to forskjellige land, brukte jeg analyseverktøyet utviklet av Hong og Choi som jeg tilpasset til min oppgave. Ved hjelp av dette verktøyet har jeg sammenlignet de norske og de russiske bøkene i forhold til, blant annet, hvordan de behandler det faglige stoffet, hvor mye plass bruker de til forskjellige ting, hvordan de forskjellige temaene ble organisert. Videre presenteres det hvordan jeg kategoriserte eksemplene ved hjelp av kodingsinnholdslisten og kodingsmanualen utviklet av Kongelf (Kongelf, 2011). Dette analyseverktøyet brukte jeg for å analysere bruken av elleve heuristiske metoder i norske lærebøker for matematikk 1T og R1, og i russiske lærebøker for 10. og 11. trinn. I tillegg kommer noen konkrete eksempler på bruken av generelle problemløsningsstrategier på bakgrunn av Polya sin modell. Eksempler med spesifikke heuristiske metoder i de norske og de russiske lærebøkene blir også presentert. Til slutt vises to eksempler på hvordan det kunne være mulig å bruke det alternative rammeverket.

5.1 Analysegjennomføring

5.1.1 Hjelpeundersøkelsen (den horisontale analysen)

For å sammenligne lærebøkene fra Norge og Russland, brukte jeg den første delen (den horisontale analysen) av det to-delte analyseverktøyet til Hong og Choi (Hong and Choi, 2014). Til den horisontale analysen laget jeg en tabell. I denne tabellen presenterte jeg informasjon om antall sider, antall kapitler i de aktuelle lærebøkene, antall sider i prosent og antall oppgaver som dreier seg om «Likninger, ulikheter og dens systemer». Jeg har også utarbeidet en liste over de aktuelle kapitlene om «Likninger, ulikheter og dens systemer» i de undersøkte lærebøkene. Samtidig sammenlignet jeg læreverkene i forhold til følgende punkt:

- Hvordan organiseres kapitlene i lærebøkene
- Hvor og hvordan i bøkene presenteres temaet «Likninger, ulikheter og dens systemer»
- Har temaet kontekst fra hverdagen eller bare ren matematisk kontekst
- Står det like mye informasjon per side i lærebøkene fra de to landene
- Brukes det ikke-informative bilder i lærebøkene
- Står oppgavene i selve lærebøkene eller brukes det en egen bok for oppgaver

- Kommer oppgaver etter hvert tema eller bare på slutten av kapitlet

5.1.2 Analytisk rammeverk i hovedundersøkelsen

I hovedundersøkelsen min brukte jeg analyseverktøyet utviklet av Kongelf (2011). Kongelf analyserte eksempler i matematikklærebøker for grunnskolen. Han ville finne ut hvilke av de ni heuristiske metodene som ble benyttet, og hvor ofte. Analyseverktøyet til Kongelf brukte også Harder i sin undersøkelse av eksempler i matematikklærebøker for videregående skolen. Harder oppdaget at i undersøkelsen til Kongelf *kom en tiende metode til syne, nemlig «bruk digitale hjelpemidler»* (Harder, 2013). Harder mener at dette er en metode som vil kunne bli mer og mer sentral ettersom teknologien utvikler seg, og derfor har Harder valgt å inkludere denne metoden. Mens jeg analyserte russiske matematikklærebøker, oppdaget jeg en metode som ble brukt i de russiske lærebøkene. Det er en metode som jeg kalte «Introduser hjelpeelementer».

Jeg så derfor etter bruken av de følgende elleve heuristiske metodene i norske og russiske lærebøkene i analysen min:

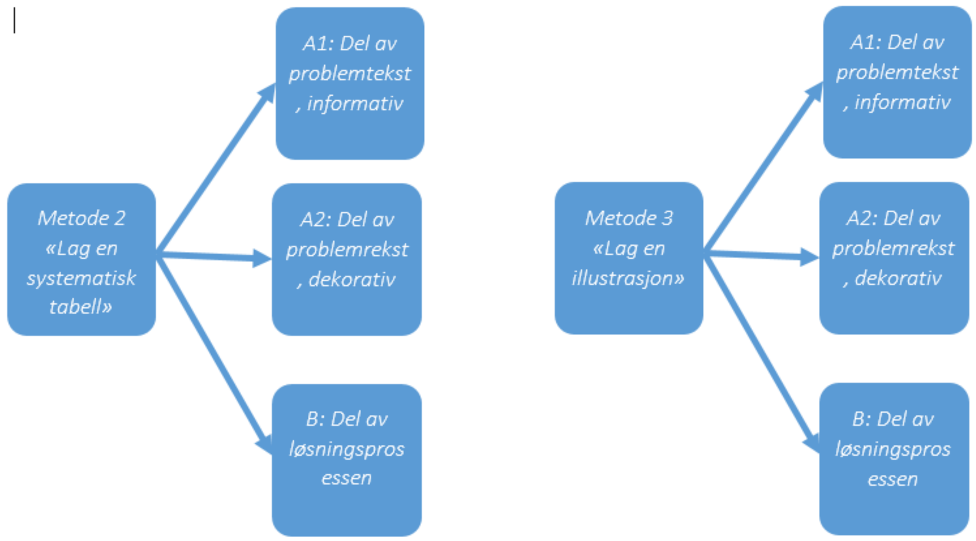
1. Se etter et mønster
2. Lag en systematisk tabell
3. Lag en illustrasjon
4. Prøv og feil
5. Løs deler av problemet
6. Jobb baklengs
7. Tenk på et liknende problem
8. Gjør problemet enklere
9. Se problemet fra en annen side
10. Bruk digitale hjelpemidler
11. Bruk hjelpeelementer

Jeg oppdaget at i noen av lærebøkene presenteres stoff i den løpende teksten som jeg mener med fordel kunne vært skilt ut og merket som eksempel. Jeg bestemte meg for også å definere de som eksempler på lik linje med de eksemplene som er skilt ut og merket.

5.1.3 Underkategorier

Kongelf (2011) observerte i undersøkelsen sin at *det dannet seg underkategorier for noen av metodene.* Harder (2013) har valgt å benytte seg av noen av disse underkategoriene, og se bort fra andre. Grunnen til dette var at Kongelfs undersøkelse var beregnet på lærebøker og pensum fra grunnskolen, og at Harder analyserte lærebøker for videregående skole (Harder, 2013).

For eksempel, har Harder valgt å dele metoden «Lag en systematisk tabell» og metoden «Lag en illustrasjon» opp i flere underkategorier: «Del av problemtekst, informativ», «Del av problemtekst, dekorativ», «Direkte etterspurt» og «Del av løsningsprosessen». Jeg syns også at det er nyttig i et problemløsningsperspektiv å skille mellom ulike underkategoriene. Jeg vil bruke underkategoriene: «Del av problemtekst, informativ», «Del av problemtekst, dekorativ» og «Del av løsningsprosessen» på samme måte som Harder (2013) gjør. Men jeg unnlot å bruke underkategorien «Direkte etterspurt», for det var irrelevant for min undersøkelse. Av de to kategoriene, «Del av problemtekst» og «Del av løsningsprosessen» var det særlig interessant for meg underkategorien «Del av løsningsprosessen», fordi denne underkategorien viser hvilke metoder som brukes under selve problemløsning, og hvordan ulike metoder kan bidra til å komme frem til en løsning på et problem. Jeg bestemte meg også for å dele kategorien «Del av problemtekst» i to deler: informativ og dekorativ. Det er fordi jeg oppdaget under analysen av de norske lærebøkene, at mange av illustrasjonene som tilhørte problemteksten, var «meningsløse» og ikke bidro til forståelsen av teksten på problemet. Eksemplene som faller i underkategorien «Del av problemtekst, dekorativ» har lite informasjon og er irrelevant til problemløsning. Men samtidig kan de eksemplene bidra til at metoden «Del av problemtekst» får et høyt representasjonstall i undersøkelsen. Jeg vil dele metode 2 «Lag en systematisk tabell» og metode 3 «Lag en illustrasjon» i følgende underkategorier:



Figur 8. Underkategorier av metode 2 og 3

Kongelf (2011) påpekte at metode 5 «Løs deler av problemet» kan virke overrepresentert, fordi hver trinnvis utførelse av en matematikkoppgave vil falle i denne kategorien. Han skiller derfor ut «Trinnvis utførelse» som en underkategori av metoden «Løs deler av problemet».

Harder (2013) har valgt ikke å inkludere denne fin-inndelingen. *Grunnen til det var at matematikken på videregående nivå er såpass avansert, og veldig mange av matematikkoppgavene på videregående nivå antyder trinnvis utførelse* (Harder, 2013). På samme måte som Harder tok jeg bort «trinnvis utførelse» fra metode 5 «Løs deler av problemet».

5.1.4 Analyseskjema

Jeg analyserte heuristiske metoder og laget analyseskjemaer, til sammen seks analyseskjemaer. Et analyseskjema representerer en lærebok. Tabell 9 viser hvordan et slikt skjema ser ut. Tabell 9 viser et utsnitt av analyseskjemaet til Sinus 1T (før utfylling). Jeg utførte selve analysen slik: da jeg oppdaget et eksempel inneholdt en metode, fylte jeg inn et ett-tall i den kolonnen som tilsvarer denne metoden. Etterpå telte jeg antall ett-tall i hver kolonne. Jeg gjentok denne fremgangsmåten for alle undersøkte lærebøkene. Og det gav meg svar på hvor mange ganger denne konkrete metoden ble brukt i denne konkrete læreboken.

HEURISTISKE METODER																			
					1	2			3			4	5	6	7	8	9	10	11
Kap	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell			Lag en illustrasjon			Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en anne side	Bruk digitale hjelpemidler	Introduser hjelpeelementer
						a1	a2	b	a1	a2	c								
1. Tallregning og algebra	1.1	Regnerekke	Eks 1	10															
	1.2	Brøkregning	Eks 2	12															
			Eks 3	13															
			Eks 4	15															
	1.3	Bokstavregning og parenteser	Eks 5	16															
			Eks 6	17															
	1.4	Rasjonale uttrykk	Eks 7	19															
			Eks 8	20															
			Eks 9	21															

Tabell 9. Utsnitt av analyseskjema (Sinus 1T)

Alle analyseskjemaene følger vedlagt, ferdig utfylt (se vedlegg 11-16).

5.1.5 Klassifisering

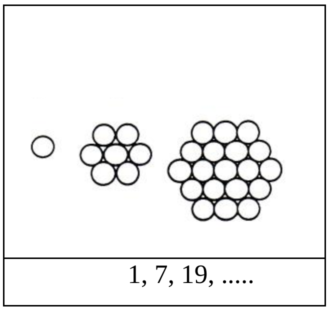
I dette delkapitlet ville jeg vise hvordan jeg har foretatt analysen, og hvordan jeg kodet eksemplene. Jeg ville presentere metode 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9 og 11. I presentasjonen av noen metoder følger det konkrete eksempler på hvordan jeg kodet eksemplene i analysen.

Metode 1 «Se etter et mønster»

Under denne kategorien faller oppgavene der det kreves å observere felles kjennetegn, variasjoner, forskjeller angående tall, former osv. for å finne løsningen.

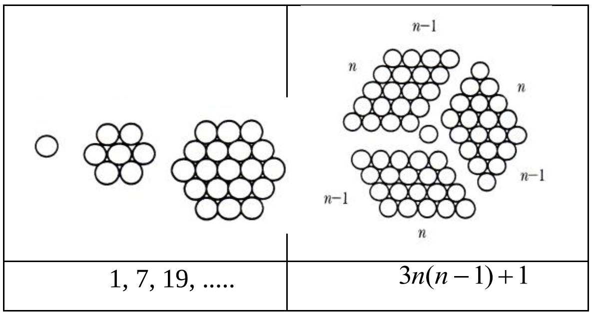
For eksempel, oppgavene der elever kan finne mønster og sammenhenger når de multipliserer algebraiske uttrykk av typen (a+b) (a+b), (a-b) (a-b) og (a+b) (a-b), eller oppgavene der elever bruker kvadratsetningene til å faktorisere algebraiske uttrykk. Jeg kan også nevne oppgaver som «Faktorisering av flerleddet utrykk» som krever gjenkjennelse av fellesfaktorer, oppgaver «Hvilke figur som kommer etter? Lag et algebraisk uttrykk …» (se eksempel under), «Fortsett tallrekken …» også lignende.

Eksempel: Se etter mønster og lag et algebraisk uttrykk:



Figur 9. Eksempel på metode «Se etter mønster»

Her kan en av løsningene være følgende løsning:



Figur 10. Løsning av Eksempel på metode «Se etter mønster»

Det finnes også flere måter å løse denne oppgaven på, for eksempel, se mønsteret som differansen mellom to kubikktall: n^3 - $(n -1)^3$.

Metode 3 «Lag en illustrasjon»

Noen ganger kan det være lettere å se hva oppgaven handler om og se hva mønsteret eller sammenhengen i oppgaven kan være ved å tegne opp en figur eller en illustrasjon. Jeg ville dele illustrasjonene som brukes til eksemplene i to kategorier: «Del av problemtekst» og «Del av løsningsprosessen».

Noen eksempler hadde ingen markering for hva som var problemtekst og hva som var løsning. Dette førte til at illustrasjoner kunne oppfattes både som del av problemteksten og som del av løsningen. Jeg valgte i alle tvilstilfeller å være konsekvent og kodet disse som 3c «Del av løsningsprosessen» fremfor 3a1 «Del av problemtekst, informativ».

Metode 4 «Prøv og feil»

Denne metoden går ut på at eleven først gjetter på en løsning, så sjekker den og til slutt generaliserer den. Et eksempel på det kan være oppgaven om å faktorisere utrykket $x^2 + 5x + 6$ i hodet (eks 14, s. 148 i Sinus 1T). Her må eleven finne to tall som er slik at produktet blir 6 og summen blir 5. Eleven prøver og feiler, og til slutt finner tallene: 2 og 3. Dermed blir løsningen: (x+2) (x+3).

Metode 5 «Løs deler av problemet»

Eleven deler et problem i flere delproblemer og konsentrerer seg om ulike deler i oppgaven etter hverandre (Pólya, 2009). De delproblemene i utregningen er delene som eleven klarer å løse. Etter at alle delene av problemet er forstått eller løst, setter eleven de sammen igjen til en helhet, og da er det lettere å forstå hva oppgaven egentlig sier og å løse den (Pólya, 2009).

Her vil jeg presentere følgende oppgave:

Ved hvilken verdi av y er summen av brøkene $\frac{y}{y-3}$ og $\frac{6}{y+3}$ lik produktet av brøkene?

Løsning:

For å løse det problemet deler vi problemet i flere deler og løser deler av problemet:

1. Finner summen av de brøkene:

$$\frac{y}{y-3} + \frac{6}{y+3} = \frac{y^2 + 9y - 18}{y^2 - 9}$$

2. Finner produktet av de brøkene:

$$\frac{y}{y-3} \text{ x } \frac{6}{y+3} = \frac{6y}{y^2 - 9}$$

3. Løser likningen:

Likningen $y^2 + 9y - 18 = 6y$ har to røtter $y = 3$ og $y = -6$.

4. Sjekke at røttene oppfyller betingelsen:

$y^2 - 9 \neq 0$

Etter at vi har løst de fire delproblemene, løste vi det opprinnelige problemet (Fridman and Tureckij, 1989, s. 49).

Metode 6 «Jobb baklengs»

Her kan det presenteres følgende oppgave «Halvparten av elevene som spiste lunsj i kantina hadde med niste og kjøpte ingenting. 3/4 av den andre halvparten av elevene kjøpte frukt. Halvparten av elevene som kjøpte frukt, kjøpte epler og fjerdeparten kjøpte pærer. De siste 15 elevene kjøpte bananer. Hvor mange elever spiste lunsj i kantina?». Man må begynne med å se at de som kjøpte bananer må også være en fjerdedel, og gå trinnvis til begynnelsen av oppgaven.

Metode 7 «Tenk på et liknende problem»

Ved å bruke denne metoden «kopierer» eleven løsningen fra et problem som ligner problemet han står overfor, eller benytter et lignende problem som en hjelp og pekepinnen for hvordan oppgaven kan løses. Når eleven har benyttet løsningen på et slikt lignende problem for å løse sitt problem, er det viktig at han prøver å forstå hvorfor det var nyttig å bruke denne metoden til å løse problemet.

Metode 9 «Se problemet fra en annen side»

Hvis ulike regler, sammenhenger eller måter å løse problemet på ble påpekt i eksempler, ble dette kodet som metode 9 «Se problemet fra en annen side». Ved å bruke metode 9 nærmer vi oss problemet fra en annen vinkel når forrige metoden, ofte en vanlig metode, ikke er effektiv. Vi kan også bruke en annen enklere måte å løse problemet på. Det kan for eksempel være at eleven skal finne løsninger til likningen $x^2 + 2x + 1 = 0$. Da kan han bruke kvadratsetningen for å omforme slik at han i stedet kan løse $(x + 1)^2 = 0$. Noen andre eksempler er å løse likningen $5x^3 - 8x^2 - 19x - 6 = 0$ ved hjelp av Horners metode når kalkulatoren ikke er tilgjengelig (eks 3, s. 135 i Matematikk: AGMA, 11.trinn), eller fremstille et desimaltall som en brøk.

Metode 11 «Introduser hjelpeelementer»

Å introdusere et hjelpeelement vil det si at eleven innfører et element som opprinnelig ikke var i oppgaven og benytter det elementet som en hjelp for å løse oppgaven.

For eksempel, for å løse ligningssystemet $\begin{cases} \sqrt{4-3x} - 1 = \sqrt{5y-3x} \\ \sqrt{1-5y} + \sqrt{5y-3x} = 5 \end{cases}$

kan man introdusere hjelpeelementer $\sqrt{4-3x} = u$, $\sqrt{5y-3x} = v$ og $\sqrt{1-5y} = z$ (eks 7, s. 154 i Matematikk: AGMA, 11.trinn).

Ofte brukes det også hjelpeparameter eller hjelpefigurer som introduseres for å løse problemet. *Hjelpefigurer er det fornuftig å bruke for å løse geometriske oppgaver* (Fridman and Tureckij, 1989, s. 78).

5.2 Noen interessante eksempler med bruk av Polyas firetrinns modell

Under undersøkelsen min har jeg oppdaget at generelle strategier for problemløsning (Polyas firetrinnsmodell) ikke presenteres eksplisitt i de undersøkte lærebøkene. I både de norske og de russiske lærebøkene fant jeg oftest det som Polya omtaler som problemløsningens tredje trinn «Gjennomfør planen». Det virket ikke overaskende. Fordi det funnet samsvarer med funnet til Fan and Zhu (2007) som fant ut følgende fordeling på bruk av problemløsningens tredje trinn «Gjennomfør planen»: China: 56.4%, Singapore: 64.3%, USA: 67.0%. I noen av eksemplene fant jeg også det første trinnet i Polyas firetrinnsmodell. Polyas fjerde trinn «Se tilbake» omtales direkte i en del eksempler. I disse eksemplene oppfordres elevene «å sette svarene på prøve». Jeg vil presentere flere eksempler, der det brukes trinn 4 «Se tilbake». Et av eksemplene presenteres her (eksempel 2), og de andre eksemplene presenteres i delkapitlet 5.3 Presentasjonen av noen eksempler med heuristikker (eksempel q og eksempel d).

I delkapitlet 5.3 Presentasjonen av noen eksempler med heuristikker finnes det også eksempel c som også bruker to av trinnene i Polyas modell i løsningen av problemet, både trinn 1 «Forstå problemet» og trinn 4 «Se tilbake». Jeg vil også presentere i delkapitlet 5.3 Presentasjonen av noen eksempler med heuristikker eksempel g som har antydning til Polyas andre trinn.

I eksempel 1 i dette delkapitlet mener jeg alle fire trinnene i Polyas modell brukes.

Eksempel 1

Løs likning:

$\text{Log}_3 \frac{x-2}{x+2} + \log_3(x^2 - 4) = 4$

(Eksempel 2 i Matematikk: AGMA, 10.trinn, 2013, s. 97)

Løsningen:

Før vi begynner å løse likningen, må vi huske at $\log_3 \frac{x-2}{x+2}$ er bare definert når $\frac{x-2}{x+2} > 0$ og når $x^2 – 4 > 0$. Da kan x i denne likningen stå for $x < - 2$ og $x > 2$. Etter at vi hadde løst likningen, må vi sette svarene på prøve.

For venstre delen av likningen benytter vi den første logaritmesetningen «baklengs»:

$\log_3 \frac{x-2}{x+2} + \log_3(x^2 - 4) = \log_3(\frac{x-2}{x+2}\ (x^2 - 4)) = \log_3 \frac{(x-2)(x-2)(x+2)}{x+2} = \log_3 (x – 2)^2$.

Så får vi:

$\log_3 (x – 2)^2 = 4$,

$(x – 2)^2 = 3^4$,

$x – 2 = -9$ eller $x – 2 = 9$

$X_1 = 11$ eller $x = -7$.

Vi setter svarene på prøve og ser at de begge svarene er riktigere.

Bemerkningen 1:

Her kunne vi også bruke den tredje logaritmesetningen «baklengs» til $\log_3 (x – 2)^2 = 4$:

$\log_3 (x - 2)^2 = 2 \log_3 (x - 2)$

Men her må vi bruke modulen for ikke å miste løsningene:

$\log_3 (x - 2)^2 = 2 \log_3 |x - 2|$.

Her kan vi generalisere:

$\mathrm{Log}_a\, b^{2n} = 2n \log_a |b|$, hvor n er en heltall.

Bemerkningen 2:

Når vi bruker logaritmesetningene til å løse logaritmelikninger, må vi være klar over at vi kan miste løsningene. For eksempel, hvis vi bruker den første logaritmesetningen og den andre logaritmesetningen «baklengs»:

$\log_3 (x - 2) - \log_3 (x + 2) + \log_3 (x - 2) + \log_3 (x + 2) = 4$

$2 \log_3 (x - 2) = 4$.

Det må presiseres at $\log_3 (x - 2)$ er bare definert når $x > 2$.

Løsningen blir:

$\log_3 (x - 2) = 2$

$x - 2 = 9$

$x = 11$

Her mistet vi en løsning $x = -7$.

I dette eksemplet presenteres både Polyas første trinn og Polyas fjerde trinn. Før man begynner å løse problemet, prøver man å forstå oppgaven. Og det er første trinn i Polyas modell. Til slutt kontrollerer man svarene (fjerde trinn i Polyas modell).

Bemerkningen 1 kan også betraktes som Polyas første trinn der man forstår problemet. Så kommer en generalisering som kan brukes i lignende oppgaver. Bemerkningen 2 viser løsningen der man løser problemet med en gang uten å forstå problemet og lage en plan. Og da mister man en løsning, og oppgaven blir ikke løst riktig.

Eksempelet ble kodet som metode 9 «Se problemet fra en annen side» fordi her presenteres det flere måter å løse problemet på. Jeg syns at eksempelet gjerne kunne kontrollere svarene grafisk, for eksempel ved hjelp av kalkulator eller PC. Og da kunne eksempelet bli kodet som metode 3b «Lag en illustrasjon, del av løsningsprosessen» og metode 10 «Bruk digitale hjelpemidler».

Eksempel 2

Figur 11 viser et eksempel som bruker Polyas fjerde trinn i løsningen. Forfatterne bruker fjerde trinn «ser tilbake» for å vurdere hvilke svar som er gyldige. I tillegg markeres det en notis på hvordan man løser irrasjonale likninger. Det siste punktet i den generelle algoritmen er «Sett prøve på svarene».

EKSEMPEL 5

Løs likningen $\sqrt{4x+5}-2=x$.

Løsning:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{4x+5}-2 &= x \\
&\Updownarrow \quad \cdots \text{ Vi isolerer rottegnet på venstre side} \\
\sqrt{4x+5} &= x+2 \\
&\Downarrow \quad \cdots \text{ Vi kvadrerer hver side} \\
4x+5 &= (x+2)^2 \\
&\Updownarrow \quad \cdots \text{ Vi regner ut} \\
4x+5 &= x^2+4x+4 \\
&\Updownarrow \quad \cdots \text{ Vi ordner likningen} \\
x^2 &= 1 \\
&\Updownarrow \quad \cdots \text{ Vi løser som en kvadratisk likning} \\
x &= \pm 1
\end{aligned}
$$

Til slutt setter vi prøve for å undersøke hvilken av de to mulige løsningene som passer inn i den opprinnelige likningen:

$$
\begin{aligned}
x=1: &\quad \text{VS:} \quad \sqrt{4\cdot 1+5}-2=1 \\
&\quad \text{HS:} \quad =1 \\
x=-1: &\quad \text{VS:} \quad \sqrt{4\cdot(-1)+5}-2=-1 \\
&\quad \text{HS:} \quad =-1
\end{aligned}
$$

Løsningen til likningen er altså $x=\pm 1$.

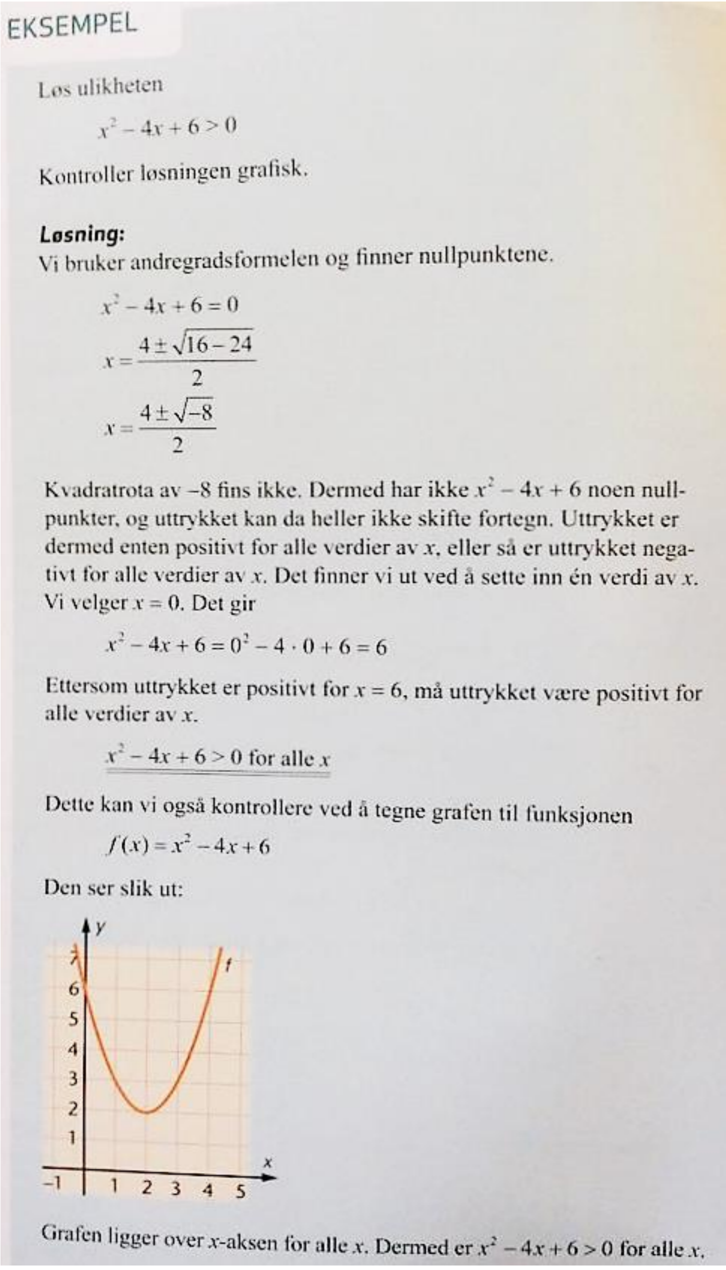
Figur 11. Eksempel 5 (Sigma R1, 2013, s.55)

5.3 Presentasjonen av noen eksempler med heuristikker

Her presenteres en del konkrete eksempler på noen av metodene på hvordan jeg kodet eksemplene med heuristikker i analysen.

Eksempel a – et eksempel på bruk av Polyas fjerde trinn

Figur 12 viser et eksempel, der oppgaven er å løse en ulikhet. Eksempelet kodet som metode 3b «Lag en illustrasjon, del av løsningsprosessen», metode 5 «Løs deler av problemet» og metode 9 «Se problemet fra en annen side». Det forklares nøye hvorfor vi ikke har noen nullpunkter og hva det betyr for uttrykket. Mot slutten kontrolleres løsningen grafisk og eksempelet viser tegning som et godt supplement til forklaringen. Her er det igjen det vi kaller Polyas fjerde trinn. I tillegg påpeker eksemplet at det er mulig å løse problemet digitalt.



EKSEMPEL

Løs ulikheten

$$x^2 - 4x + 6 > 0$$

Kontroller løsningen grafisk.

Løsning:
Vi bruker andregradsformelen og finner nullpunktene.

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Kvadratrota av −8 fins ikke. Dermed har ikke $x^2 - 4x + 6$ noen nullpunkter, og uttrykket kan da heller ikke skifte fortegn. Uttrykket er dermed enten positivt for alle verdier av x, eller så er uttrykket negativt for alle verdier av x. Det finner vi ut ved å sette inn én verdi av x. Vi velger $x = 0$. Det gir

$$x^2 - 4x + 6 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 6 = 6$$

Ettersom uttrykket er positivt for $x = 6$, må uttrykket være positivt for alle verdier av x.

$$\underline{\underline{x^2 - 4x + 6 > 0 \text{ for alle } x}}$$

Dette kan vi også kontrollere ved å tegne grafen til funksjonen

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

Den ser slik ut:

Grafen ligger over x-aksen for alle x. Dermed er $x^2 - 4x + 6 > 0$ for alle x.

Figur 12. Eksempel 18 (Sinus 1T, 2014, s.154)

Eksempel b – mange metoder

Jeg mener dette er et godt presentert eksempel som ble kodet med flere metoder. Metodene som brukes i eksemplet er 3a2 «Lag en illustrasjon, del av problemtekst, dekorativ», 3b «Lag en illustrasjon, del av løsningsprosessen», 9 «Se problemet fra en annen side» og 10 «Bruk digitale hjelpemidler».

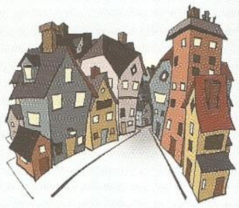
EKSEMPEL

Folketallet i en by har økt eksponentielt med 3 % per år i perioden etter 2000. Folketallet passerte 2 millioner 1. januar 2010.

a) Finn folketallet 1. januar 2014 og 1. januar 2000.

b) Finn funksjonsuttrykket $F(x)$ som gir folketallet i millioner x år etter 1. januar 2010, og tegn digitalt en graf som viser folketallet fra 2000 til 2020.

c) Finn når folketallet passerer 2,5 millioner grafisk, ved hjelp av CAS og ved hjelp av logaritmer.



Løsning:

a) Vekstfaktoren til 3 % økning er 1,03. Folketallet i millioner etter 4 år er

$$2 \cdot 1{,}03^4 = 2{,}25$$

Folketallet for 10 år siden var

$$2 \cdot 1{,}03^{-10} = 1{,}49$$

<u>Folketallet var 2,25 millioner i 2014 og 1,49 millioner i 2000.</u>

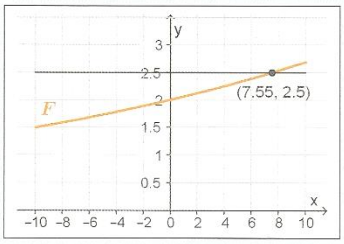
b) Folketallet x år etter 1. januar 2010 er gitt ved

$$\underline{\underline{F(x) = 2 \cdot 1{,}03^x}}$$

I GeoGebra skriver vi inn funksjonsuttrykket slik:

Skriv inn: **F=Funksjon[2*1.03^x,-10,10]**

Det gir denne grafen:



c) *Grafisk:*
I GeoGebra skriver vi $y = 2{,}5$, bruker **Skjæring mellom to objekt** og får programmet til å vise verdi for skjæringspunktet i stedet for navnet. Av figuren i oppgave b leser vi at folketallet passerer 2,5 millioner etter 7,55 år.

CAS:
I GeoGebra CAS skriver vi inn likningen og trykker på $x\approx$. Det gir dette resultatet:

1	2*1.03^x=2.5
○	NLøs: **{x = 7.55}**

Logaritmer:

$$2 \cdot 1{,}03^x = 2{,}5$$
$$1{,}03^x = 1{,}25$$
$$\lg 1.03^x = \lg 1{,}25$$
$$x \cdot \lg 1{,}03 = \lg 1{,}25$$
$$x = \frac{\lg 1{,}25}{\lg 1{,}03}$$
$$x \approx 7{,}55$$

Alle tre metodene viser:

<u>Folketallet passerer 2,5 millioner i juli 2017.</u>

Figur 13. Eksempel 6 (Sinus 1T, 2014, s. 242 - 243)

Eksempelet presenterer godt metode 9 «Se problemet fra en annen side» ved å vise tre ulike metoder for å løse problemet, og ved å poengtere sammenhengen mellom funksjonsverdiene og grafen.

Eksempel c - bruk av Polyas første og fjerde trinn, «Prøv og feil» - metoden

Løs likningen:

$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$

(Eksempel 2 i Matematikk: AGMA, 10.trinn, 2013, s. 56)

Analyse:

En likning der den ukjente står under et rottegn, kaller vi en irrasjonal likning. Når vi løser slike likninger, må vi som oftest kvadrere begge sidene av likhetstegnet. Hvis vi kvadrerer en likning, får vi vanligvis ikke noen ekvivalent likning. Vi må huske at når vi kvadrerer begge sidene av en likning, kan vi få falske løsninger.

For eksempel, vi har en likning $\sqrt{x} = -1$ som ikke har løsninger. Når vi kvadrerer begge sidene av denne likningen, får vi en ny likning x = 1 som har en løsning x = 1 som ikke er løsningen til den opprinnelige likningen. Løsningen x = 1 er feil og passer ikke i den likningen vi begynte med.

Løsning 1:

Før vi kvadrerer begge sidene av likningen, flytter vi rot- utrykkene på forskjellige sidene av likhetstegnet:

$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$

$\sqrt{2x+3} = 4 - \sqrt{x-2}$

$2x + 3 = 16 + x - 2 - 8\sqrt{x-2}$

$8\sqrt{x-2} = 11 - x$

Kvadrerer begge sidene av likningen en gang til:

$64 (x -2) = 121 + x^2 - 22x$

$x^2 - 86x + 249 = 0$

Løsningene er:

$x_1 = 3$ og $x_2 = 83$

Prøve på svarene:

Når vi kvadrerer begge sidene av en likning, kan vi få falske løsninger. Vi må derfor sette prøve på de svarene vi får:

1) Hvis x = 3

$\sqrt{2 * 3 + 3} + \sqrt{3 - 2} = 4$

x = 3 passer i likningen

2) Hvis x = 83

$\sqrt{2 * 83 + 3} + \sqrt{83 - 2} = 4$

x = 83 passer ikke i likningen.

Løsning 2:

Vi kan ved hjelp av «Prøv og feil» metoden finne en løsning x = 3.På grunn av at den venstre siden av likningen er en voksende funksjon, har likningen bare en løsning.

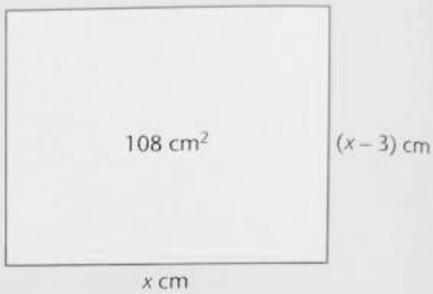
Eksemplet begynner med analyse, og her ser vi referansen til det Polya omtaler som problemløsnings første trinn «Forstå problemet». Videre presenteres to måter å løse problemet på, og de ble kodet som 9 «Se problemet fra en annen side». Den andre måten å løse oppgaven på inneholder metode 4 «Prøv og feil». Til slutt settes løsningen på prøve ifølge fjerde trinn i Polyas modell.

<u>Eksempel d - et praktisk problem, bruk av Polyas fjerde trinn</u>

Figur 14 presenterer et godt eksempel på hvordan man kan bruke en andregradslikning til å løse et praktisk problem. I oppgaven må man finne sidene i et rektangel gitt at du vet at arealet er 108 cm2 og at langsiden er 3 cm lengre enn kortsiden. Eksempelet ble kodet som metode 5 «Løs deler av problemet» og 3b «Lag en illustrasjon, del av løsningsprosessen». Her var det litt uklart om at illustrasjonen var en del av problemtekst eller illustrasjonen var en del av løsningsprosessen. Det kunne vært nyttig å ha en bildetekst som sa, for eksempel, «det er ofte lurt å lage illustrasjonen for å løse oppgaven». Da ville det vært lettere å avgjøre om at illustrasjonen var en del av løsningsprosessen.

EKSEMPEL

I et rektangel er den korteste siden 3 cm kortere enn den lengste.
Arealet av rektangelet er 108 cm^2.
Hvor lange er sidene?



Løsning:
Vi setter lengden av den lengste siden lik x cm.
Lengden av den korteste siden blir $(x-3)$ cm.

Arealet i kvadratcentimeter blir

$$A = x \cdot (x-3) = x^2 - 3x$$

Ettersom arealet er 108 cm^2, får vi likningen

$$x^2 - 3x = 108$$
$$x^2 - 3x - 108 = 0$$
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 432}}{2}$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{441}}{2}$$
$$x = \frac{3 \pm 21}{2}$$
$$x = \frac{24}{2} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-18}{2}$$
$$x = 12 \quad \text{eller} \quad x = -9$$

En side i et rektangel kan ikke ha negativ lengde. Oppgaven har bare løsningen $x = 12$.

Den lengste siden er 12 cm, og den korteste er 12 cm − 3 cm = 9 cm.

Figur 14. Eksempel 9 (Sinus 1T, 2014, s.138)

På slutten vurderes det i eksemplet om de to løsningene av andregradslikningen er gyldige og forklares på en god måte hvorfor en løsning forkastes. Det er i tråd med fjerde trinn i Polyas modell. Det kunne også vært fornuftig å kontrollere i tillegg svaret ved å regne ut arealet og se at det er riktig, og presisere og generalisere dette ytterligere som for eksempel «Når vi bruker en likning til å løse et praktisk problem, må vi alltid undersøke om løsningene gir mening, altså om de er svar på det praktiske problemet». På denne måten viser forfatter tilbake til oppgavens premisser i tråd med Polyas fjerde trinn. Samtidig har dette eksemplet kontekst fra hverdagen. Alt i alt presenterer eksempelet mye god metodebruk.

Eksempel e – mange gode metoder

Løs likning:

(x -1)(x-2)(x-3)(x-4)=15.

(Eksempel 2 i Matematikk: AGMA, 11.trinn, 2014, s. 143)

Løsning 1:

Hvis vi multipliserer parenteser, får vi en firegradslikning som er vanskelig å løse. Vi kan prøve og feile, og til slutt finner vi kanskje noen heltallige løsninger. Men hvis vi prøver å multiplisere parentesene parvis, finner vi til slutt at det kan være nyttig å multiplisere (x-2) (x-3) og (x-1) (x-4). Da får vi (x^2-5x+4) (x^2-5x+6) =15.

Vi introduserer hjelpeelement x^2-5x+4 = y og får en ny andregradslikning y(y+2) =15. Vi løser denne likningen og får to løsninger y_1=-5 og y_2= 3.

Da er x^2-5x+4=-5 og x^2-5x+4 = 3.

Vi løser disse likningene og får svar x_1= (5- $\sqrt{21}$) /2 og x_2 = (5+$\sqrt{21}$) /2

Løsning 2:

Det var også mulig å merke at løsningene til likning (x -1) (x-2) (x-3) (x-4) = 0 som er 1, 2, 3 og 4 og er symmetriske om 2,5.

Da kan vi introduserer hjelpeelement x - 2,5 = z og får en ny likning

(z +1,5)(z+0,5)(z-0,5)(z-1,5)= 15

(z^2 -2,25) (z^2 -0,25)=15

Vi introduserer hjelpeelement en gang til z^2 - 2,25 = y og får likning y(y+2) =15 som er lett å løse.

Det er et eksempel med flere metoder. I begynnelsen presiseres det at den løsningen som oftest brukes (å multiplisere parenteser) fører til en firegradslikning som er vanskelig å løse. I stedet anbefales det å oppdage en interessant egenskap denne likningen har. Det er å multiplisere parentesene parvis, (x-2) (x-3) og (x-1) (x-4). Det kodet jeg som metode 1 «Se etter et mønster». Eksempelet presenterer flere løsninger av problemet, og er derfor kodet som metode 9 «Se problemet fra en annen side». I den første løsningen introduseres et hjelpeelement x^2-5x+4 = y. I den andre løsningen introduseres hjelpeelementer to ganger. Først er det x - 2,5 = z, så kommer det et hjelpeelement til z^2 - 2,25 = y. Eksemplet ble kodet som metode 11 «Introduser hjelpeelementer». I tillegg valgte jeg å kode det eksempelet som metode 4 «Prøv og feil» selv om selve metoden ikke presenteres, men bare nevnes.

Eksempel f

Det er også et godt eksempel som presenterer metode 9 «Se problemet fra en annen side» ved å løse ulikheten både grafisk og ved regning. Her brukes også metoden 3c «Lag en illustrasjon, del av løsningsprosessen». Men selv om det står i eksemplet «Vi tegner fortegnslinjen …», er selve illustrasjonen av fortegnslinjen ikke til å se. Løsningen i punkt e) kunne man godt vise på illustrasjonen for å se sammenhengen mellom funksjon og graf.

EKSEMPEL 15

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

a) Finn bunnpunktet og tegn grafen.

b) Bestem verdimengden V_f.

c) Funksjonen g er gitt ved $g(x) = -x^2 + x + 2$.
Finn toppunktet og tegn grafen i samme koordinatsystem som $f(x)$.

d) Løs ulikheten $-x^2 + x + 2 \geq x^2 - 3x - 4$ grafisk og ved regning.

e) Finn den største vertikale avstanden mellom $g(x)$ og $f(x)$ i området der $g(x)$ ligger over $f(x)$.

Løsning:

a) Vi finner x-verdien til bunnpunktet:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4 = -\frac{25}{4}$$

Bunnpunktet er $\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

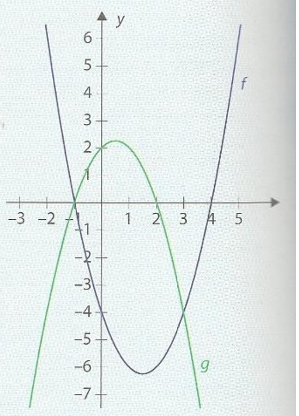
b) $V_f = \left[-\frac{25}{4}, \rightarrow\right\rangle$

c) Toppunkt:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$$

Toppunktet er $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.



d)
$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &\geq x^2 - 3x - 4 \\ -x^2 + x + 2 - x^2 + 3x + 4 &\geq 0 \\ -2x^2 + 4x + 6 &\geq 0 \qquad |:(-2) \\ x^2 - 2x - 3 &\leq 0 \\ (x-3)(x+1) &\leq 0 \end{aligned}$$

Vi tegner fortegnslinje og finner at $x \in [-1, 3]$. Grafisk svarer ulikheten til at $g(x) \geq f(x)$. På grafen ser vi at g ligger over f nettopp i $[-1, 3]$.

e) Vi lager en ny funksjon d, der differensen mellom g og f er

$$\begin{aligned} d(x) = g(x) - f(x) &= -x^2 + x + 2 - (x^2 - 3x - 4) \\ &= -x^2 + x + 2 - x^2 + 3x + 4 = -2x^2 + 4x + 6 \end{aligned}$$

Vi finner største verdi: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1$

Den største avstanden er $d(1) = -2 \cdot 1 + 4 + 6 = 8$.

Figur 15. Eksempel 15 (Sigma 1T, 2013, s.258)

Eksempel g - metode 11 «Introduser hjelpeelementer» og bruk av Polyas andre trinn

Finn ut med hvilke parameter a har likningen $\sqrt{3x-2}$ = x + a bare en løsning. (Eksempel 3 i Matematikk: AGMA, 11.trinn, 2014, s. 164)

Løsning 1:

Vi introduserer et hjelpeelement $\sqrt{3x-2}$ = y.

Da 3x - 2 = y^2

Og x = $\frac{1}{3}$ (y^2 + 2).

Likningen vår ser slik ut:

Y = = $\frac{1}{3}$ (y^2 + 2) + a

Y^2 – 3y + 2 + 3a = 0

Den opprinnelige likningen $\sqrt{3x-2}$ = x + a har bare en løsning, når likningen y^2 – 3y + 2 + 3a = 0 bare har en positiv løsning. Dette er mulig i tre følgende tilfeller:

1. Når likningen har bare en løsning og den ene løsningen er positiv.
2. Når den første løsningen er positiv, og den andre løsningen er negativ.
3. Når en løsning er lik 0, og den andre løsningen er negativ.

Vi skal se nærmere på de tre tilfellene:

1. Hvis likningen har bare en løsning, er 9 – 4(2+3a) = 0. Da er a = $\frac{1}{12}$, og

likningen har bare en løsning $\frac{3}{2}$.

2. 2 + 3a < 0, a < - $\frac{2}{3}$.
3. Den ene løsningen er lik 0 : 2 + 3a = 0 , a = -$\frac{2}{3}$. Når a = - $\frac{2}{3}$ er den andre

løsningen lik 3. Løsningen er ikke negativ og passer ikke inn. Fordi da har den opprinnelig likningen to løsninger som er motsatt for vår betingelse.

Løsning 2:

Vi får grafen til funksjon Y=$\sqrt{3x-2}$ av grafen Y=$\sqrt{x}$ ved:

- Å forskyve grafen horisontalt med 2 enheter.
- Å krympe grafen horisontalt med en faktor 3.

Grafen til funksjonen y=x + a for hver verdi av a er en rett linje som er parallell til linjen y = x.

I følge illustrasjonen har grafene et felles punkt ved a = a_1 (når den rette linjen tangerer grafen til funksjon Y=$\sqrt{3x-2}$), og når a < a_2.

Det kan merkes at a_2 = - $\frac{2}{3}$. For å finne a_1 kan vi løse likningen:

$\sqrt{3x-2}$ = x + a

3x - 2= $(x + 2)^2$

X^2 + x (2a -3) + a^2 +2 = 0

Vi bruker formelen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Og får a = $\frac{1}{12}$.

Svar: a < - $\frac{2}{3}$, a = $\frac{1}{12}$.

Dette eksempelet ble kodet som metode 11 «Introduser hjelpeelementer» fordi det bruker y = $\sqrt{3x-2}$ som hjelpeelement. I tillegg presenterer eksempelet metode 9 «Se problemet fra en annen side» fordi her presenteres det flere måter å finne løsningen på. Metode 3b «Lag en illustrasjon, del av løsningsprosessen» er også til å se fordi løsningen 2 presenterer den grafiske løsningen av problemet, og illustrasjonen brukes.

Her ser vi også antydning til Polyas andre trinn når forfattere lager en plan for hvordan den positive løsningen skal finnes.

Eksempel h- metode «Prøv og feil»

Løs likning:

$\sqrt{19-x}$ - $\sqrt{x+6}$ = $\log_3$ (8x +3) – 2

(Eksempel 5 i Matematikk: AGMA, 11.trinn, 2014, s. 145)

Løsning:

Vi skal prøve forskjellige verdier av x slik at vi får heltall under rot- utrykkene på den venstre siden.

Vi kan se at x = 3 kunne passe i likningen fordi $\sqrt{19-x}$ = $\sqrt{19-3}$ = 4 og $\sqrt{x+6}$ = $\sqrt{3+6}$ =3. Da får vi 4 -3 = 1 på den venstre siden, og $\log_3 27$ – 2 = 3 - 2=1 på den høyre siden.

På den venstre siden er det en minkende funksjon, og på den høyre siden er det en voksende funksjon. Derfor er x = 3 den eneste løsningen.

Svar: x = 3.

Det er et av de få eksemplene som bruker metode 4 «Prøv og feil». Det er en av de minst brukte metodene, og det var fint å finne et slikt eksempel, men samtidig mener jeg at det gjerne skulle vært flere slike eksempler.

Eksempel i - Uheldig bruk av metoden

Dette eksemplet kunne godt illustrere bruk av metode «Lag en illustrasjon, del av løsningsprosessen», men illustrasjonen mangler bildetekst og refereres ikke til i oppgaveteksten. Leseren vil kanskje ikke legge merke til illustrasjonen i det hele tatt. Her kunne metoden brukes mye tydeligere ved for eksempel å bruke en bildetekst som viste den andelen av kildevannet (0,8 liter) som måtte brukes, og den andelen av råsaften (0,2 liter) som måtte brukes.

EKSEMPEL 12

Et firma skal selge en ny type saft der de bruker kildevann, til kr 5,00 per liter, og råsaft til kr 50,00 per liter. En liter saft koster kr 14,00. Hvor mye kildevann og hvor mye råsaft er det da i en liter ferdig saft?

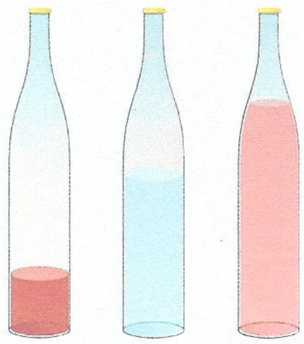
Løsning:
Vi har her x liter kildevann og y liter råsaft i én liter blanding.
Siden det totalt er én liter, har vi $x + y = 1$.

Kildevannet koster kr 5 per liter. Kildevannsdelen av denne blandingen koster da kr $5 \cdot x$. Råsaftdelen koster kr $50 \cdot y$.
Siden én liter koster kr 14, kan vi sette opp likningen $5x + 50y = 14$.

Ut fra oppgaveteksten har vi nå fått likningssettet:

$$\begin{bmatrix} \text{I:} & 5x + 50y = 14 \\ \text{II:} & x + y = 1 \end{bmatrix}$$

Vi bruker et digitalt verktøy og får $x = 0{,}8$ og $y = 0{,}2$.
Vi må bruke 0,8 liter kildevann og 0,2 liter råsaft.



Figur 16. Eksempel 12 (Sigma 1T, 2013, s.69)

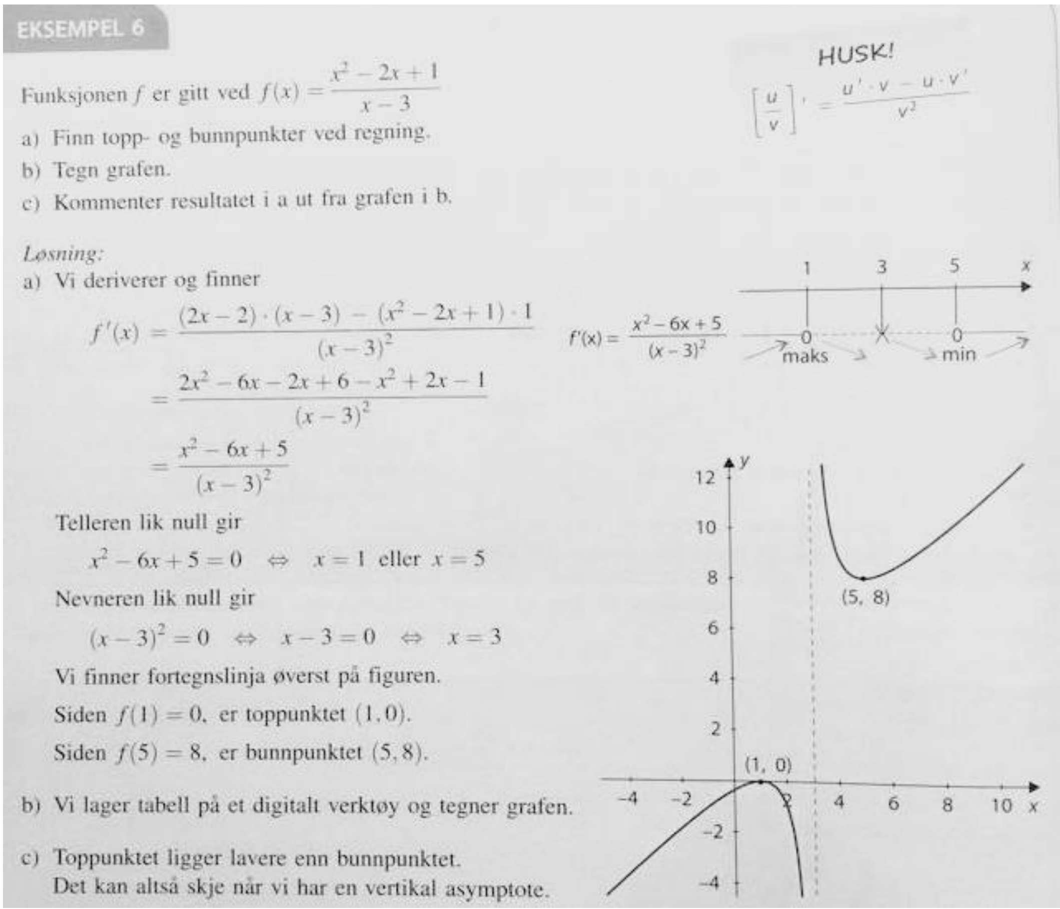
5.4 Presentasjonen av noen eksempler ved hjelp av alternativt rammeverk

Jeg brukte definisjonen av begrepet problem som ikke er individrelatert. Noen av forskere brukte den individrelaterte definisjonen (se delkapittel 3.6 Alternativt rammeverk). Her ville jeg presentere to eksempler på hvordan det kunne vært mulig å bruke et alternativt rammeverk. Det alternativet analyseverktøyet som brukes er et analyseverktøy utviklet av Johan Lithner for å kategorisere hvilken type av matematisk resonnering trengs for å løse matematikkoppgaven. Det finnes to hovedtyper av matematisk resonnering som brukes av problemløseren ved problemløsning: imiterende resonnering som deles i memorert resonnering og algoritmisk resonnering, og kreativ resonnering. Hvis problemløseren løser problemet ved hjelp av hukommelse eller gjengivelse, eller ved algoritmebruk, er det snakk om imiterende resonnering. Må problemløseren finne på noe nytt, være kreativ og basere seg på matematiske egenskaper for å begrunne og argumentere sine valg, snakker man om kreativ resonnering.

Jeg valgte her å presentere to eksempler fra det samme området Funksjoner, et eksempel fra en norsk lærebok og et eksempel fra en russisk lærebok. I det første eksemplet brukes det imiterende resonnering (tekst - guidet algoritmisk resonnering). For å løse det andre eksemplet må man være mer kreativ og bruke kreativ resonnering.

Eksempel 1

For å løse underpunktene a og b i oppgaven på Figur 17 kan det brukes algoritmisk resonering. Det finnes mange eksempler i læreboken før dette eksemplet der man må derivere en funksjon, finne topp- og bunnpunkter, tegne grafen til en funksjon. For å løse dette problemet (underpunkter a og b), kan man enkelt bruke først algoritmen for å finne den deriverte av brøkfunksjoner. Så kan det brukes algoritmen for å finne topp- og bunnpunkter. Og til slutt brukes det algoritmen for å tegne grafen. I underpunktet c kommenteres det at toppunktet ligger lavere enn bunnpunktet. Og at det kan skje når vi har en vertikal asymptote. Jeg syns at eleven i underpunktet c må bruke kreativ resonering for å komme med denne kommentaren fordi lignende eksempler/oppgaver ikke ble funnet i læreboken før dette eksemplet.


EKSEMPEL 6

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

a) Finn topp- og bunnpunkter ved regning.
b) Tegn grafen.
c) Kommenter resultatet i a ut fra grafen i b.

HUSK!

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Løsning:

a) Vi deriverer og finner

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-3) - (x^2-2x+1)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 2x + 6 - x^2 + 2x - 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$$

Telleren lik null gir

$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ eller $x = 5$

Nevneren lik null gir

$(x-3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

Vi finner fortegnslinja øverst på figuren.

Siden $f(1) = 0$, er toppunktet $(1, 0)$.

Siden $f(5) = 8$, er bunnpunktet $(5, 8)$.

b) Vi lager tabell på et digitalt verktøy og tegner grafen.

c) Toppunktet ligger lavere enn bunnpunktet.
Det kan altså skje når vi har en vertikal asymptote.

Figur 17. Eksempel 6 (Sigma R1, 2013, s. 200)

Eksempel 2

Tegn grafen til en funksjon f som kunne ha følgende betingelser:

a. Funksjonen har definisjonsmengden <-4, 3>.

b. Funksjonen har verdimengden [-3, 4).

c. F' (x) < 0 for alle x fra <-4, 0> og F' (x) > 0 for alle x fra <0,2> og <2, 3> og F' (x) = 0 for x= 0 og x = 2.

d. Nullpunktene til funksjonen er x = -1 og x = 2.

(Eksempel 3 i Matematikk: AGMA, 11.trinn, 2014, s. 59).

Løsning:

Vi ser at funksjonen f er kontinuerlig.

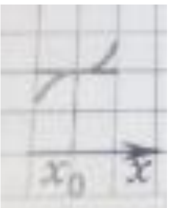
Funksjonen f er kontinuerlig for x = a dersom f(a) eksisterer og $\lim_{x\to a}(\ ) = f'(a)$.

Funksjonen f er voksende når x ∈<0,2> og <2, 3>. Funksjonen f er minkende når x ∈ < -4, 0>.

I x = 0 skifter F' (x) tegn far «minus» til «pluss». Derfor er x = 0 et bunnpunkt.

I x = 2 skifter ikke F' (x) tegn.

I punktet x = 2 ser grafen slik ut:



Figur 18. Eksempel 3 i Matematikk: AGMA, 11.trinn, 2014, s. 59

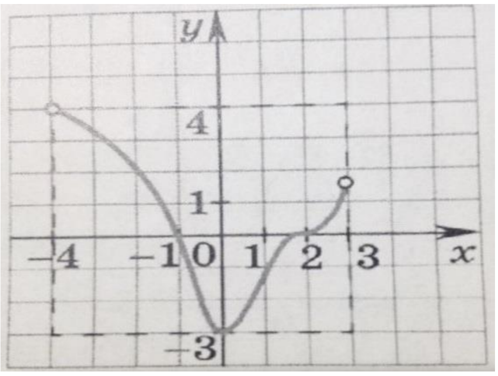
Funksjonen f har bare er et bunnpunkt. På grunn av at funksjonen f er kontinuerlig, bunnpunktet og den minste verdien fra verdimengden samsvarer. Da $y_{min} = -3$.

Vi lager tabell med informasjonen vi fant ut:

x	<-4, 0)	0	<0,2>	2	<2 ,3>	-1
F (x)	↘	-3	↗	0	↗	0

Når vi skal tegne grafen, må vi huske at nullpunktene til funksjonen er x = -1 og x = 2, og at enten $\lim_{x\to -4}(\ ) = 4$ eller $\lim_{x\to 3}(\ ) = 4$. Det kan også hende at både $\lim_{x\to -4}(\ ) = 4$ og $\lim_{x\to 3}(\ ) = 4$.

Her presenteres det en av mulige grafer:



Figur 19. Eksempel 3 i Matematikk: AGMA, 11.trinn, 2014, s. 59

I læreboken før dette eksempelet finnes det en del eksempler der man må finne definisjonsmengden og verdimengden til en funksjon, nullpunktene til en funksjon, finne hvor funksjonen vokser og hvor funksjonen minker. I de eksemplene er funksjonen oppgitt på forhånd. Dette eksemplet er annerledes fordi her har man ikke en oppgitt funksjon og må resonnere seg til en mulig funksjon som kan oppfylle disse gitte kravene. Her må man jobbe baklengs og bruke kreativ resonering for å løse problemet.

Forskjellen mellom de to eksemplene er at i det første eksemplet (underpunkter a og b) var det mulig å bruke algoritmisk resonnering ved å bla læreboken tilbake og finne mange liknende eksempler i læreboken, der man måtte finne topp- og bunnpunkter til en funksjon, og tegne en graf. Det andre eksemplet er ukjent for elever fordi det ikke finnes noen lignende eksempler i læreboken foran dette eksemplet. Det finnes en del eksempler der man må tegne grafen til en gitt funksjon slik man gjør det i eksempl 1 presentert i Figur 17. Eksempel 6 (Sigma R1, 2013, s. 200). Men det finnes ikke eksempler der man må tegne grafen til en funksjon etter gitte betingelser. Man må bruke matematikkbaserte argumenter for å nå riktige konklusjoner og finne riktig svar. Samtidig krever underpunkt c i det første eksemplet også kreativ resonnering da det også kreves bruk av matematiske egenskaper for å konkludere at toppunktet ligger lavere enn bunnpunktet og ikke omvendt.

6 Funn

I dette kapittelet vil jeg trekke frem funn fra analysen. Først vil jeg presentere funn fra hjelpeundersøkelsen. Jeg vil påpeke forskjeller og likheter mellom de norske og de russiske lærebøkene, når det gjelder oppbygging av lærebøkene og plassering av temaer i de lærebøkene. Så skal jeg se på hvordan de undersøkte eksemplene fordeles mellom de norske og de russiske lærebøkene. Til slutt presenteres forekomsten av problemløsningsmetoder i lærebøkene ved hjelp av tabeller og figurer med forklaringer.

6.1 Funn fra hjelpeundersøkelsen (den horisontale analysen)

6.1.1 Likheter og forskjeller i oppbygging av lærebøkene

I analysen av lærebøkene har jeg merket at de ulike lærebokseriene har ulik oppbygging, og som følge av det, har de ulik fordeling av tekst, eksempler og oppgaver. Den norske lærebokserien Sigma skiller seg ut med det at hvert kapittel starter på en ny side. I denne lærebokserien kommer først teori/innledning, så kommer eksempler merket med blå bakgrunnsfarge, og til slutt kommer oppgaver merket med rød bakgrunnsfarge. Huskeregler kommer på siden markert med oransje bakgrunnsfarge. I Sinus brukes det også farger, blå farge for å markere eksempler og oransje farge for å markere huskeregler. I de russiske lærebøkene brukes det ikke så mye farger. Det brukes kun grønn farge på rammer rundt huskeregler. I de russiske lærebøkene brukes ikke irrelevante tegninger, de tegningene som er til å finne brukes til å presentere blant annet grafer og tabeller. I alle de undersøkte lærebøkene står oppgavene i lærebøkene, og det brukes ikke egne bøker for oppgaver. I lærebokserien Sinus kommer oppgaver etter hvert eksempel, det gir en pekepinn til elever hvilket eksempel de skal herme etter. Men i Sigma og AGMA kommer oppgaver på slutten av delkapitlet. I Sigma og AGMA markeres vanskeligere oppgaver. I Sigma kalles de for «Utfordring», og i de russiske lærebøkene AGMA markeres de vanskeligere oppgavene med tegn som viser vanskelighetsgrad. I lærebokserien Sigma kommer det etter hvert kapittel øvingsoppgaver. Men i Sinus og i AGMA kommer øvingsoppgaver på slutten av boken, i AGMA kommer de i form av hjemme-tester med blandede oppgaver. Mens i Sinus følger øvingsoppgaver kapittel for kapittel. Øvingsoppgaver ble ikke analysert i denne undersøkelsen.

6.1.2 Plassering av temaer og antall sider i lærebøkene

Tabell 10 og Tabell 11 gir blant annet oversikt over plasseringen til temaet «Likninger, ulikheter og dens systemer», antall sider og antall oppgaver som brukes til dette temaet. AGMA 11.trinn inneholder Kapitel 7 «Komplekse tall» som tar for seg, blant annet, kubiske likninger og komplekse tall. Men kurs R1 i norsk skole inneholder ikke temaet «Komplekse tall». Derfor skilte jeg dataene med og uten komplekse tall i den russiske læreboken AGMA 11.trinn. Jeg telte ikke alle oppgavene i de undersøkte kapitlene, men bare de oppgavene som dreier seg om likninger og ulikheter, og dens systemer.

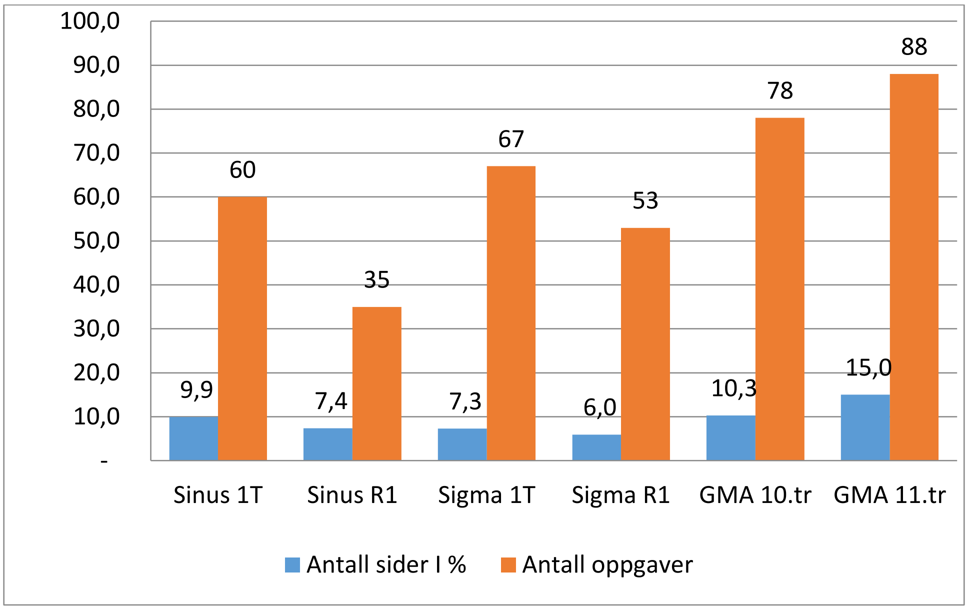
	Antall kapitler	**Kapittel nummer**	**Antall sider**	**Antall sider i %**	**Totalt antall sider**	**Antall oppgaver**
Sinus 1T	9	Deler av kapittel 3, 4 og 5	50	9,9	503	60
Sinus R1	8	Deler av kapittel 1 og 2	37	7,4	500	35
Sigma 1T	8	Deler av kapittel 1, 2, 3, 5 og 7	28	7,3	383	67
Sigma R1	7	Deler av kapittel 2 og 4	20	6,0	336	53
AGMA 10.tr	6	Deler av kapittel 2, 3, 4 og 6	33	10,3	320	78
AGMA 11.tr	7	Hele kapittel 5	48	15,0	320	88

Tabell 10. Plassering og antall sider til temaet «Likninger, ulikheter og dens systemer» i prosent uten Kapitel 7 «Komplekse tall»

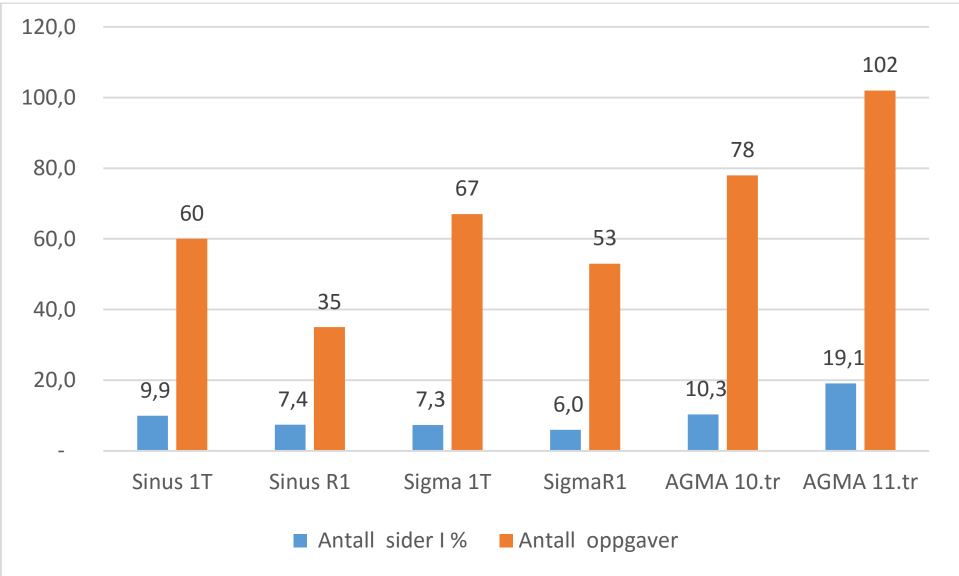
	Antall kapitler	**Kapittel nummer**	**Antall sider**	**Antall sider i %**	**Totalt antall sider**	**Antall oppgaver**
Sinus 1T	9	Deler av kapittel 3, 4 og 5	50	9,9	503	60
Sinus R1	8	Deler av kapittel 1 og 2	37	7,4	500	35
Sigma 1T	8	Deler av kapittel 1, 2, 3, 5 og 7	28	7,3	383	67
Sigma R1	7	Deler av kapittel 2 og 4	20	6,0	336	53
AGMA 10.tr	6	Deler av kapittel 2, 3, 4 og 6	33	10,3	320	78
AGMA 11.tr	7	Hele kapittel 5 og deler av kapittel 7	61	19,4	320	102

Tabell 11. Plassering og antall sider til temaet «Likninger, ulikheter og dens systemer» i prosent med Kapitel 7 «Komplekse tall»

I de to neste figurene presenteres antall sider (i prosent) som brukes til temaet «Likninger, ulikheter og dens systemer» og antall oppgaver i dette teamet i de undersøkte lærebøkene. I Figur 20 er Kapitel 7 «Komplekse tall» fra den russiske læreboken AGMA 11. trinn ikke inkludert. Mens Figur 21 inkluderer dataene fra Kapitel 7 «Komplekse tall» fra den russiske læreboken AGMA 11. trinn.



Figur 20. Antall sider i prosent og antall oppgaver uten Kapitel 7 «Komplekse tall»



Figur 21. Antall sider i prosent og antall oppgaver med Kapitel 7 «Komplekse tall»

De russiske lærebøkene har flest oppgaver og prosentvis flest antall sider som brukes til «Likninger, ulikheter og dens systemer». Samtidig har de russiske lærebøkene flest underpunkter under de enkelte oppgavene, og oppgavene er lengre og mer komplekse. Spredningen mellom det norske og det russiske læreverket i antall sider i prosent som brukes til «Likninger, ulikheter og dens systemer» er ikke så stort.

Jeg oppdaget også er det er ikke så mange oppgaver som har praktisk kontekst i noen av de undersøkte lærebøkene. Det russiske læreverket har et ganske teoretisk preg, når det gjelder likninger, ulikheter og dens systemer. I Sigma 1T finnes det et delkapittel «Bruk av andregradslikninger», men dette delkapitlet finnes ikke i de andre lærebøkene.

Selv om det er flest sider i de norske lærebøkene, særlig i lærebokserien Sinus, står det mer informasjon per side i de russiske lærebøkene enn i de norske. Man kan, for eksempel, se hvordan den russiske boken AGMA 11. trinn presenterer polynomlikninger i Vedlegg 7. Utsnitt fra den russiske læreboken Matematikk for 11. trinn. I Vedlegg 8. Utsnitt fra den norske læreboken Sigma R1 presenteres en typisk side fra Sigma R1som inneholder presentasjonen av polynomlikninger. Mens det brukes bare en side til presentasjonen av polynomlikninger i den norske boken Sigma R1, brukes det flere sider til en dypere og mer utfyllende presentasjon i den russiske boken AGMA 11.trinn.

Videre så jeg på hvilke temaer som finnes i de undersøkte lærebøkene, hvordan temaene ble introdusert og i hvilken rekkefølge dette skjer. Tabeller 1-6 i Vedlegg 10 viser en oversikt over delkapitlene under «Likninger, ulikheter og dens systemer» for henholdsvis Sinus 1T, Sigma 1T, AGMA 10. trinn, Sinus R1, Sigma R1 og AGMA 11.trinn. Samtidig kan man se hvilke temaer lærebøkene dekker i hvert delkapittel.

De ulike temaene innenfor «Likninger, ulikheter og dens systemer» presenteres i samme rekkefølge i alle de undersøkte lærebøkene, men på litt forskjellige måter.

Både Sinus 1T og Sigma 1T introduserer først lineære likninger og lineære likningssett. I Sinus 1T presenteres samtidig lineære ulikheter, mens i Sigma 1T kommer ulikheter litt senere. Så kommer andregradslikninger og praktisk bruk av andregradslikninger i både Sinus og Sigma. Etterpå kommer likningssett som ikke er lineære. I Sinus 1T presenteres samtidig andregradsulikheter. Etter det presenteres eksponentiallikninger og logaritmelikninger. Sigma 1T behandler ulikheter for seg selv i kapittel 7.

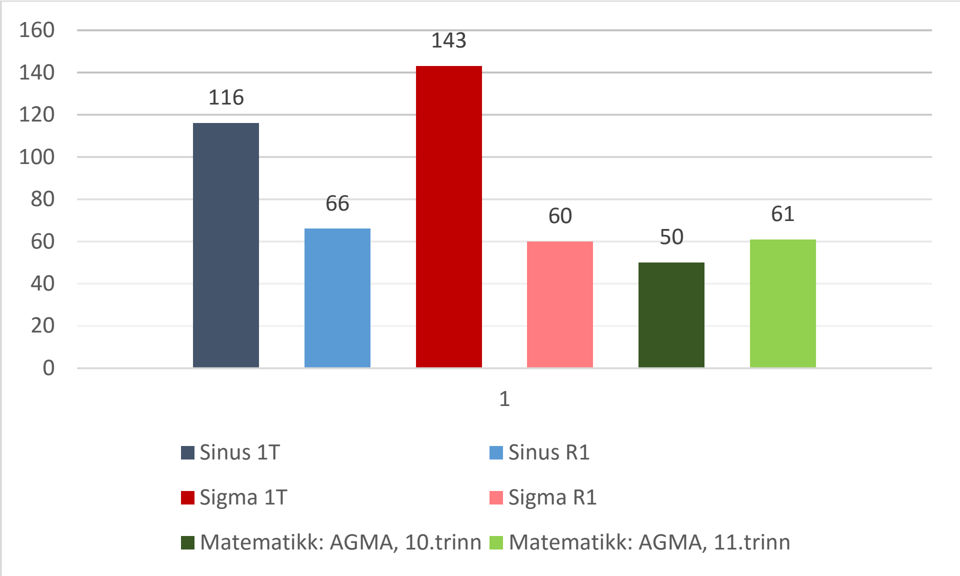
I den russiske læreboken for 10.trinn er det første vi ser til likninger presentasjoner av eksponentiallikninger og logaritmelikninger, og ulikheter. Det er fordi lineære og andregradslikninger har elever allerede lært på 9. trinn. Forfatterne av de undersøkte lærebøkene sier kort om de typene av likninger som ble lært før og går direkte til å presentere nye typer likninger uten å først repetere det som ble lært før. Repetisjon foregår hele tiden, mens det nye stoffet læres. Det som også skiller det russiske læreverket fra de norske, er presentasjonen av trigonometriske likninger på 10. trinn. I de norske lærebøkene presenteres trigonometriske likninger verken i 1T eller R1.

På 11. trinn i den russiske læreboken oppsummeres og generaliseres alt som ble lært før 11. trinn, og presenteres polynomlikninger av grad n og løsningsmetoder for polynomlikninger av grad høyere enn 2. Til slutt kommer to delkapitler, der elever får utfordrende eksempler og oppgaver med likninger, ulikheter og dens systemer som de ikke har møtt før. I den norske boken Sigma R1, men ikke i Sinus R1, presenteres polynomlikninger av grad 3 som løses ved bruk av nullpunktsetningen. Det samme gjelder, for eksempel, ekvivalente likninger. Den russiske læreboken for 10. trinn tildeler et delkapittel til temaet «Ekvivalente likninger». Mens i den norske læreboken Sinus R1 brukes bare en side til det, og Sigma R1 sier ingenting om det.

Alt det som er presentert over er med på å konkludere at de norske og de russiske lærebøkene har ganske likt faglig innhold, mens de russiske lærebøkene behandler noen temaer som ikke finnes i de norske lærebøkene. Samtidig går de russiske lærebøkene «dypere inn i stoffet» enn de norske lærebøkene, og det faglige stoffet i de russiske lærebøkene er mer utvidet. Allikevel har de norske og de russiske lærebøkene ganske lik oppbygging og de behandler presenterte temaer på ganske lik måte. Derfor mener jeg at de norske og de russiske lærebøkene er sammenlignbare.

6.2 Fordeling av eksempler i de norske og de russiske lærebøkene

Jeg analyserte til sammen 496 eksempler, av dem 385 norske eksempler og 111 russiske eksempler. Fordelingen av disse eksemplene i lærebøkene er relativt skjev. Figur 22 viser antall eksempler i de ulike lærebøkene. Jeg har også valgt å presentere både de norske og de russiske lærebøkene i samme figur slik at det blir lettere å sammenligne. Læreboken Sigma 1T til Gyldendal skiller seg ut ved å ha flest eksempler, men det er også i denne lærebokserien at det er størst forskjell i antall eksempler fra 1T-læreboken til R1-læreboken. Felles for alle de norske lærebøkene er at det er færre eksempler i R1-bøkene enn i 1T-bøkene. Noe av grunnen til dette er at hovedområdet Tall og algebra i læreplanen for matematikk 1T er mer omfattende enn hovedområdet Algebra i læreplanen for R1. I de russiske lærebøkene er antall eksempler i Matematikk: AGMA, 10.trinn og Matematikk: AGMA, 11.trinn nesten lik.



Figur 22. Antall eksempler i lærebøkene fra temaene Algebra og Funksjoner

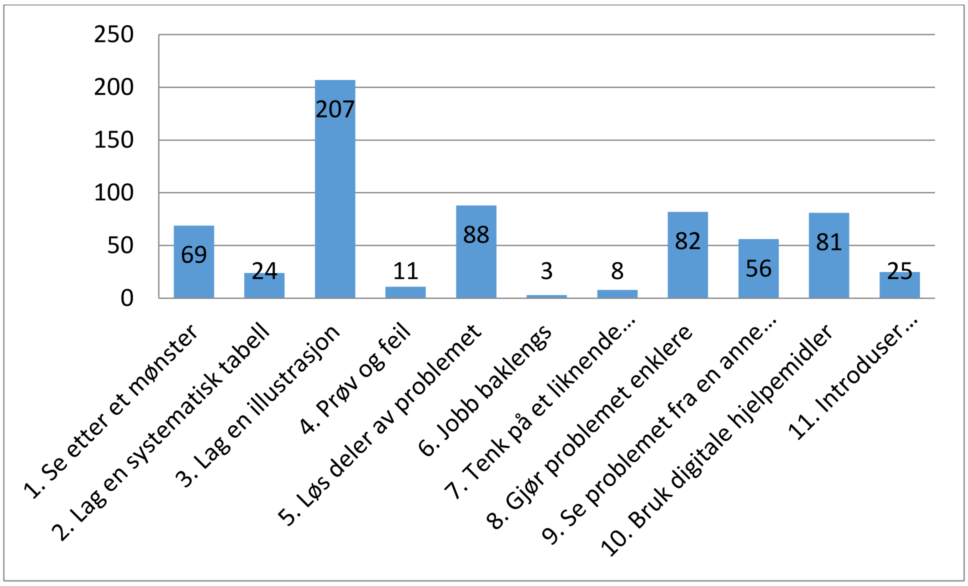
Figur 22 viser at de norske lærebøkene har flere eksempler enn de russiske, særlig Sigma 1T. Samtidig oppdaget jeg at de norske og de russiske eksemplene er forskjellige. Som vi så i delkapittel 5.3 Presentasjonen av noen eksempler med heuristikker er de norske eksemplene enklere og kortere, og de tar mindre plass. Som vi så i delkapitlene 5.2 Noen interessante eksempler med bruk av Polyas firetrinns modell og 5.3 Presentasjonen av noen eksempler med heuristikker, er de russiske eksemplene vanskeligere, større og mer komplekse. De har ofte flere måter å løse oppgaven på og tar ofte to sider i læreboken. Derfor tar de russiske eksemplene større plass i de russiske lærebøkene, den samme plassen kunne være brukt til flere eksempler i de norske lærebøkene. Det forholdet minner oss om forholdet mellom de sovjetiske og amerikanske lærebøkene, der de sovjetiske eksemplene også var mer komplekse og ofte inkluderte to trinn i løsningen (Stigler et al., 1986). Samtidig har de russiske lærebøkene færre sider enn de norske lærebøkene for å presentere eksemplene (se delkapittel 6.1 Funn fra hjelpeundersøkelsen (den horisontale analysen).

6.3 Heuristiske metoder i de norske og de russiske lærebøkene

For å presentere forekomsten av de heuristiske metodene, brukte jeg også tabeller og diagrammer. Som det ble presentert før, har de ulike lærebokseriene litt ulik oppbygging, og dette påvirker metodebruken i enkelte tilfeller. De russiske bøkene har, for eksempel, færrest eksempler særlig for 10 klasse. Etter revisjonen av LK06 har Sinus 1T flere eksempler der det brukes metode 10 «Bruk digitale hjelpemidler» enn det var i læreboken før revisjonen. Før revisjonen hadde Sinus 1T et eget appendiks om kalkulatorbruk.

6.3.1 Antall metoder

Totalt sett har jeg funnet 654 tilfeller av metodebruk fordelt på de 496 analyserte eksemplene. Figur 23 viser hvor ofte hver enkelt heuristisk metode presenteres i lærebøkene:

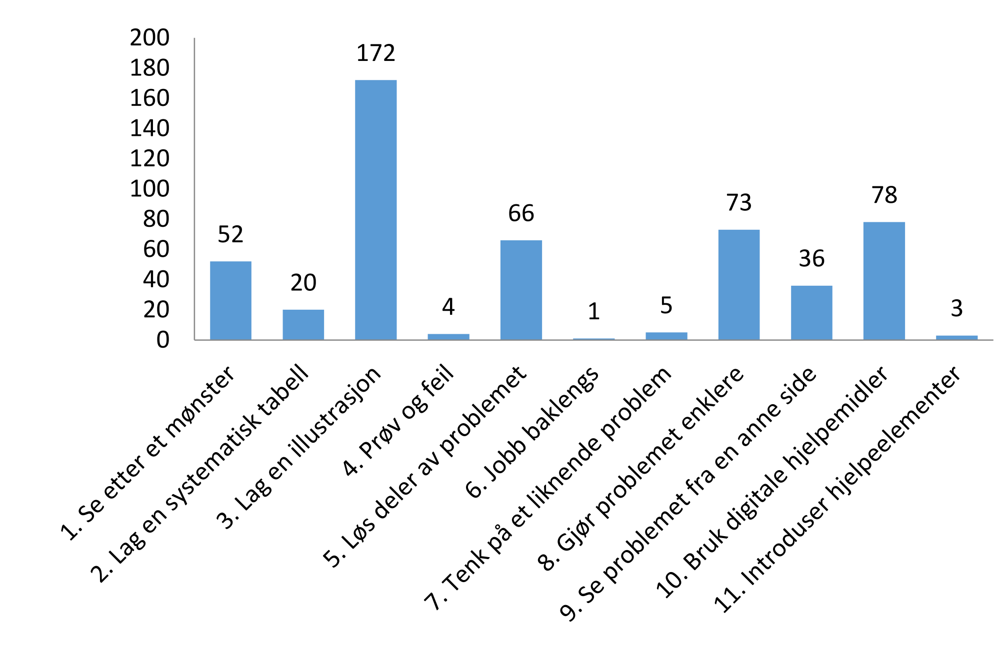


Figur 23. Metodebruk totalt

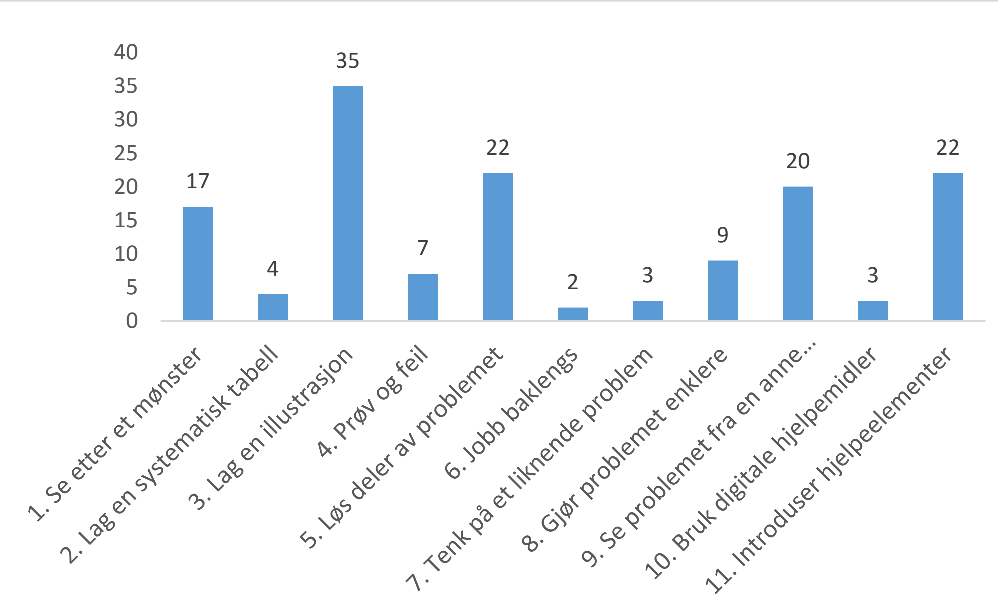
Figur 23 viser at enkelte metoder forekommer oftere enn andre. Oftest av alle forekommer metode «Lag en illustrasjon». Nest oftest brukes metoden «Løs deler av problemet». Metoder «Jobb baklengs» og «Tenk på et lignende problem» brukes sjelden i de undersøkte lærebøkene.

6.3.2 Variasjon fra de norske læreverkene til det russiske læreverket

For å kunne sammenligne det norske og det russiske læreverket så jeg på forekomsten av heuristiske metoder separert. Figur 24 presenterer metodebruk i de norske lærebøkene, og Figur 25 - metodebruk i de russiske lærebøkene.



Figur 24. Metodebruk i de norske læreverkene



Figur 25. Metodebruk i det russiske læreverket

Figur 24 og Figur 25 viser at både de norske lærebøkene og de russiske lærebøkene bruker oftest metode «Lag en illustrasjon». Men de norske læreverkene bruker metoden «Lag en illustrasjon» 5 ganger oftere enn det russiske læreverket. De norske og de russiske lærebøkene skiller seg mest fra hverandre når det gjelder metoder «Bruk digitale hjelpemidler» og «Introduser hjelpeelementer». Metoden «Bruk digitale hjelpemidler» brukes 26 ganger oftere i de norske lærebøkene enn i de russiske lærebøkene. Mens metoden «Introduser hjelpeelementer» presenteres 7,3 ganger oftere i de russiske lærebøkene enn i de norske lærebøkene, og er generelt sjelden til å finne i de norske lærebøkene.

	Norske		Russiske	
1. Se etter et mønster	52	10 %	17	12 %
2. Lag en systematisk tabell	20	4 %	4	3 %
3. Lag en illustrasjon	172	34 %	35	24 %
4. Prøv og feil	4	1 %	7	5 %
5. Løs deler av problemet	66	13 %	22	15 %
6. Jobb baklengs	1	0 %	2	1 %
7. Tenk på et liknende problem	5	1 %	3	2 %
8. Gjør problemet enklere	73	14 %	9	6 %
9. Se problemet fra en annen side	36	7 %	20	14 %
10. Bruk digitale hjelpemidler	78	15 %	3	2 %
11. Introduser hjelpeelementer	3	1 %	22	15 %

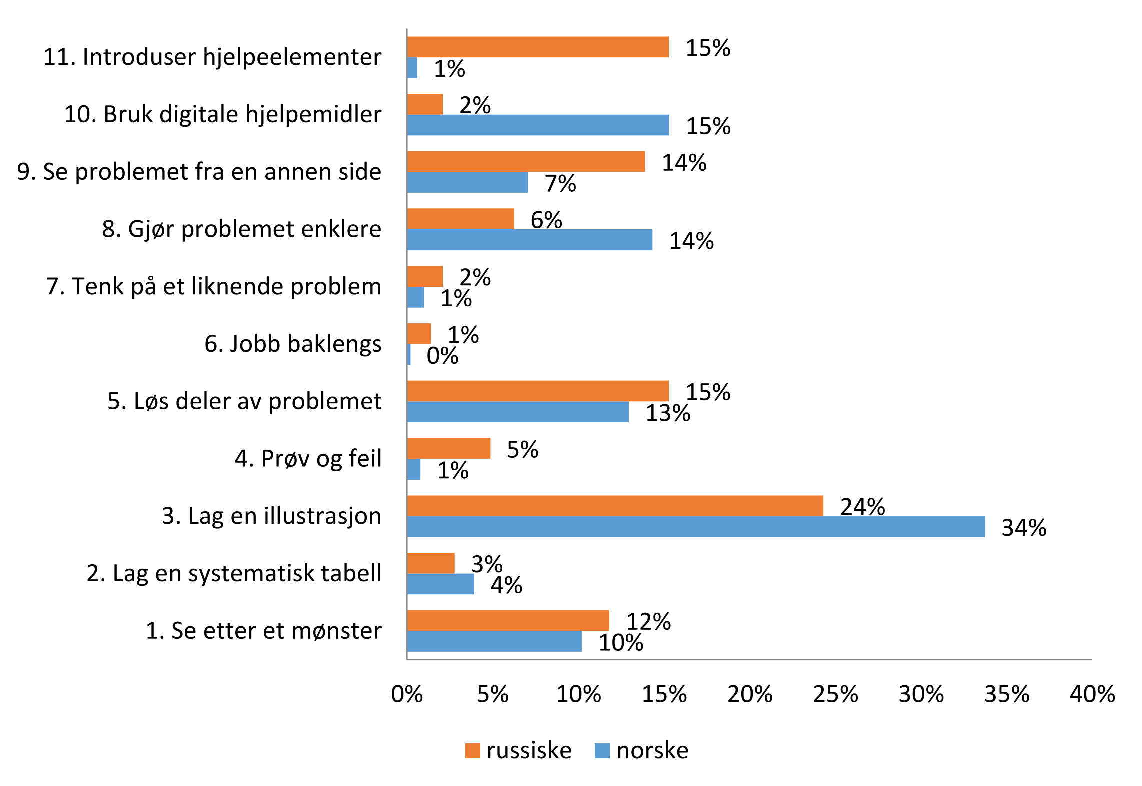
Tabell 12. Metodebruk i de norske og de russiske lærebøkene i tall og relativ prosent

Som Tabell 12 viser er metodene som brukes oftest i de norske lærebøkene følgende metoder:

- «Lag en illustrasjon»
- «Bruk digitale hjelpemidler»
- «Gjør problemet enklere»
- «Løs deler av problemet»

De metodene som brukes oftest i de russiske lærebøkene er følgende metoder:

- «Lag en illustrasjon»
- «Introduser hjelpeelementer»
- «Løs deler av problemet»
- «Se problemet fra en annen side»



Figur 26. Metodebruk i relativ prosent

Det er generelt liten forskjell når det gjelder metoder: 1, 2, 5, 6, 7. Som Figur 26 viser, brukes metoder 8 og 10 oftere i de norske lærebøkene, og metoder 9 og 11 brukes oftere i de russiske lærebøkene. Metode 3 brukes litt oftere i de norske lærebøkene, og metode 4 brukes litt oftere i de russiske lærebøkene.

6.3.3 Fordeling mellom lærebøkene

	Sinus 1T	**Sinus R1**	**Sigma 1T**	**Sigma R1**	**AGMA, 10.trinn**	**AGMA, 11.trinn**
1. Se etter et mønster	12	8	18	14	6	11
2. Lag en systematisk tabell	4	1	12	3	0	4
3. Lag en illustrasjon	55	31	62	24	14	21
4. Prøv og feil	2	0	0	2	3	4
5. Løs deler av problemet	12	28	21	5	15	7
6. Jobb baklengs	0	0	0	1	1	1
7. Tenk på et liknende problem	4	0	0	1	2	1
8. Gjør problemet enklere	18	17	24	14	6	3
9. Se problemet fra en annen side	13	3	18	2	9	11
10. Bruk digitale hjelpemidler	35	17	17	9	2	1
11. Introduser hjelpeelementer	2	1	0	0	10	12
Total metoder	157	106	172	75	68	76
Total eksempler	116	66	143	60	50	61

Tabell 13. Totaloversikt av antall analyserte eksempler og antall brukte metoder

Tabell 13 viser at alle lærebøkene har flere metoder, enn eksempler. Grunnen til det er at noen av eksemplene presenterer flere enn en metode per eksempel. Man ser at de norske lærebøkene bruker flere metoder per eksempel enn de russiske.

For å kunne sammenligne bruk av metoder i de forskjellige lærebøkene benyttet jeg den relative fordelingen i prosent. Den relative fordelingen i prosent hjelper til å kunne se forskjeller og likheter av metodebruken selv om lærebøkene har ulikt antall eksempler. Men det er uansett vanskelig å si noe konkret om fordelingen fordi variasjonen mellom lærebøkene er relativt stort. I Tabell 14 brukte jeg rød og grønn farger for å fremheve ekstremverdier.

Metode	Lærebok					
	Sinus 1T	Sinus R1	Sigma 1T	Sigma R1	AGMA, 10.trinn	AGMA, 11.trinn
1. Se etter et mønster	7,6 %	7,5 %	10,5 %	18,7 %	8,8 %	14,5 %
2 Lag en systematisk tabell	2,5 %	0,9 %	7,0 %	4,0 %	0,0 %	5,3 %
3. Lag en illustrasjon	35,0 %	29,2 %	36,0 %	32,0 %	20,6 %	27,6 %
4. Prøv og feil	1,3 %	0,0 %	0,0 %	2,7 %	4,4 %	5,3 %
5. Løs deler av problemet	7,6 %	26,4 %	12,2 %	6,7 %	22,1 %	9,2 %
6. Jobb baklengs	0,0 %	0,0 %	0,0 %	1,3 %	1,5 %	1,3 %
7. Tenk på et liknende problem	2,5 %	0,0 %	0,0 %	1,3 %	2,9 %	1,3 %
8. Gjør problemet enklere	11,5 %	16,0 %	14,0 %	18,7 %	8,8 %	3,9 %
9. Se problemet fra en annen side	8,3 %	2,8 %	10,5 %	2,7 %	13,2 %	14,5 %
10. Bruk digitale hjelpemidler	22,3 %	16,0 %	9,9 %	12,0 %	2,9 %	1,3 %
11. Introduser hjelpeelementer	1,3 %	0,9 %	0,0 %	0,0 %	14,7 %	15,8 %

Tabell 14. Relativ bruk av metoder i prosent

Hvis det var en stor variasjon mellom verdiene for en konkret metode, markerte jeg verdiene med rødt og grønt. De positive ekstremverdiene merket jeg med rød farge, og de negative ekstremverdiene merket jeg med grønn farge. Man ser at de største variasjonene gjelder metoder «Se etter et mønster», «Løs deler av problemet», «Gjør problemet enklere», «Bruk digitale hjelpemidler» og «Introduser hjelpeelementer». Samtidig merkes det at i hver kolonne er det både negative og positive ekstremverdier. Og det tyder på at alle lærebøkene har sine sterke og svake sider. Når vi for eksempel ser på metodene «Prøv og feil» og «Løs deler av problemet», er forskjellen fra læreverk til læreverk større, enn forskjellen mellom de norske og de russiske lærebøkene.

Jeg vil nevne de metodene som skiller seg mest ut. Man ser at metode «Lag en illustrasjon» er den eneste metoden som har relativt jevn fordeling i de norske lærebokseriene og i den russiske lærebokserien. Metode «Introduser hjelpeelementer» er mye brukt i de russiske lærebøkene, men lite i de norske. Metode «Bruk digitale hjelpemidler» er mye brukt i de norske læreverkene, særlig i Sinus 1T, men lite brukt i det russiske læreverket. Ifølge Tabell 14 er metoden «Se problemet fra en annen side» mer brukt i de russiske lærebøkene, men er mindre brukt i de norske lærebøkene, særlig i Sigma R1 og Sinus R1. Men Tabell 13 viser at metoden «Se problemet fra en annen side» brukes ganske ofte i Sigma 1T og Sinus 1T. Samtidig er de metodene som kodet under kategorien metode 9 «Se problemet fra en annen side» er forskjellige i de norske og de russiske lærebøkene. I de norske lærebøkene kodet jeg ofte under «Se problemet fra en annen side» tilfeller der man, for eksempel, skulle skrive tallet 1 som 100 % (Sigma 1T, s.12) eller et tall som en brøk (Sigma 1T, s.16). I de russiske lærebøkene kodet jeg som regel under «Se problemet fra en annen side» de eksemplene som ble løst på to eller flere forskjellige måter (se delkapittel 5.3 Presentasjonen av noen eksempler med heuristikker). Metodene «Jobb baklengs» og «Prøv og feil» forekommer sjelden både i de norske og de russiske lærebøkene. Metoden «Lag en systematisk tabell» er også sjelden til å finne i både de russiske og de norske lærebøkene. Men den norske læreboken Sigma 1T skiller seg ut med 7 % forekomst av denne metoden, mens Sinus R1 har 0.9% og AGMA 10.trinn har 0%.

6.3.4 Underkategorier

For å analysere metoder «Lag en systematisk tabell» og «Lag en illustrasjon» brukte jeg underkategorier. Forekomsten av metode «Lag en systematisk tabell» var ganske liten. Derfor presenteres her bare fordelingen i underkategoriene for metode «Lag en illustrasjon». Som man ser fra Tabell 14, er metoden «Lag en illustrasjon» den metoden som oftest brukes i både norske og russiske eksempler.

	Del av problemtekst		Del av løsningsprosessen	Til sammen
	Informativ	Dekorativ		
Sinus 1T	1	14	40	55
Sinus R1	0	3	28	31
Sigma 1T	7	23	32	62
Sigma R1	1	4	19	24
SUMMEN	9	44	119	172
PROSENTDEL	5 %	26 %	69 %	
AGMA, 10.trinn	2	0	12	14
AGMA, 11.trinn	1	1	19	21
SUMMEN	3	1	31	35
PROSENTDEL	9 %	3 %	89 %	

Tabell 15. Inndeling for metode «Lag en illustrasjon»

Vi ser at de fleste tilfeller av metoden «Lag en illustrasjon» faller i underkategorien «Del av løsningsprosessen», 89 % i det russiske læreverket og 69 % i de norske læreverkene. Sinus 1T og Sigma 1T har flest eksempler som ble kodet som metode «Lag en illustrasjon», underkategori «Del av problemtekst, dekorativ». De metodene er irrelevant til problemløsning, men bidrar til å gi metoden høyere representasjonstall i undersøkelsen. De russiske lærebøkene har nesten ikke tilfeller som faller i denne underkategorien.

Metoden «Lag en illustrasjon» er favoritt i begge lærebokseriene. Men denne metoden brukes litt på forskjellige måter i de norske og i de russiske lærebøkene. I de norske lærebøkene finnes det mange dekorative bilder uten mening, slike bilder finnes ikke i de russiske lærebøkene. Alle bildene som finnes i det russiske læreverket brukes for å hjelpe elever med å løse oppgaver. De nest oftest brukte metodene i de norske lærebøkene er «Løs deler av problemet», «Gjør problemet enklere» og «Bruk digitale hjelpemidler». I det russiske læreverket er de nest oftest brukte metodene «Løs deler av problemet», «Se problemet fra en annen side» og «Introduser hjelpeelementer». Metoder «Jobb baklengs» og «Tenk på et lignende problem» brukes sjelden både i det norske og det russiske læreverket. Metode «Prøv og feil» brukes også ganske sjeldent, men litt oftere i det russiske læreverket.

7 Videre drøfting

7.1 Bruk av heuristiske metoder i eksemplene

Som det ble sagt over, har jeg brukt den tradisjonelle definisjonen av begrepet problem, selv om den individrelaterte definisjonen av begrepet problem er rådende i litteraturen. Derfor definerte jeg alle eksemplene i lærebøkene som «problemer». De undersøkte eksemplene i alle lærebøkene presenterte løsningene på problemer, og det ble brukt betydelig mange problemløsningsheuristikker. Den samlede metodebruken i de norske og de russiske lærebøkene viser at metoden «Lag en illustrasjon» forekommer oftest, og nest oftest brukes metoden «Løs deler av problemet». Ser vi separert på de norske lærebøkene er det fire metoder som brukes oftest: «Lag en illustrasjon», «Bruk digitale hjelpemidler», «Gjør problemet enklere» og «Løs deler av problemet». De metodene som brukes oftest i de russiske lærebøkene er følgende metoder: «Lag en illustrasjon», «Introduser hjelpeelementer», «Løs deler av problemet» og «Se problemet fra en annen side». Det samsvarer med funnene til Kongelf (2011) som konkluderte med at de oftest brukte metodene i de norske lærebøkene for 9.trinn var «Løs deler av problemet», «Lag en illustrasjon» og «Se problemet fra en annen side» (Kongelf, 2011). Noe lignende fant også Harder (2013) som sier at de oftest brukte metodene i algebraeksempler i norske lærebøker fra videregående skoler er «Gjør problemet enklere», «Lag en illustrasjon», «Løs deler av problemet» og «Se etter mønster». Jeg oppdaget at metodene «Prøv og feil», «Tenk på et lignende problem» og «Jobb baklengs» sjelden presenteres i lærebøkene, særlig i de norske lærebøkene. Det samsvarer også med funnene til Kongelf (2011) og Harder (2013).

Metoden «Introduser hjelpeelementer» brukes 7,3 ganger oftere i de russiske lærebøkene enn i de norske. Forklaringen for dette kan være at de russiske eksemplene er vanskeligere og mer komplekse enn de norske. Derimot brukes metoden «Bruk digitale hjelpemidler» 26 ganger oftere i de norske lærebøkene. TIMSS-rapporten der 92 % av norske elever svarer at de bruker kalkulator hver eller nesten hver time, tyder på at bruken av kalkulator og PC i matematikktimene ser ut til å være overdrevet i den norske skolen (Mullis et al., 2009, s.168). Derimot svarer bare 22% av russiske elever at de bruker kalkulator hver eller nesten hver time (ibid, s.168). Bruker elever alt for ofte kalkulator eller PC, kan det føre til at elever blir dårlig til å løse problemer når de ikke har digitale hjelpemidler tilgjengelig. For eksempel kan elever slite med å regne i hodet, med å finne prosent av et tall osv. I den russiske skolen er man mer opptatt av at elever blir i stand til å løse problemer for hånd, at de skal klare seg når de ikke har mulighet til å bruke kalkulator eller PC. Derfor vises i eksemplene som regel to metoder å løse problemet på, med digitale hjelpemidler og uten digitale hjelpemidler.

Metoden «Tenk på et lignende problem» ble sjelden funnet både i de russiske og i de norske lærebøkene. Forklaringen for det kan være at det ikke er så lett å få med denne metoden i lærebøker. Derimot er det fult mulig for lærere å bruke metoden i undervisning slik at elever får mulighet til å bli kjent med denne metoden. Lignende rapporterte også Fan and Zhu (2007) som har funnet at metoden «Tenk på et lignende problem» sjelden brukes i både amerikanske, kinesiske og singaporske matematikklærebøker. Samtidig presiserte de at denne heuristikken er en av de heuristikkene som ble inkludert i læreplanen i Singapore i listen over heuristikker som skulle læres på skolen, og at det foreligger et avvik mellom pensum og lærebøker. Metoden «Se problemet fra en annen side» presenteres heller ikke så ofte i lærebøkene, særlig ikke i de norske lærebøkene for 1T og R1. *Forklaringen på det kan være at det ikke er praktisk for lærebøker å presentere en ubrukbar metode før den riktige metoden* (Fan and Zhu, 2007). Men det nevnes både i de norske og de russiske læreplanene at elever skulle kunne løse problemer på flere forskjellige måter. Og det kunne være mer naturlig at denne heuristikken skulle forekomme oftere i lærebøkene. Det gir anledning til å trekke konklusjonen at det foreligger avvik mellom læreplanen og lærebøkene både i Norge og i Russland. *Derfor kan lærernes undervisning spille en viktigere rolle i presentasjonen av denne heuristikken til elever* (Fan and Zhu, 2007).

Når det gjelder de syv første metodene (se Tabell 13 og Tabell 14), er forskjellen fra læreverk til læreverk større, enn forskjellen mellom de norske og de russiske lærebøkene. Det var relativt stor variasjon i verdiene mellom 1T-bøkene og R1-bøkene, samt mellom 10.trinn-boken og 11.trinn- boken. Noen av metodene som for eksempel «Gjør problemet enklere» forekommer oftere i 1T (og 10.trinn) - bøkene enn i R1 (og 11.trinn) - bøkene. Det kan forklares med at de to matematikkursene er relativt forskjellige: kurset 1T (10.trinn) er bredere, mens R1 (11.trinn) er mer spesialisert. Derfor har de kursene forskjellige eksempler og oppgaver som igjen påvirker metodebruken. Når det gjelder metoden «Se etter et mønster», forekommer den oftere i 1T- bøkene i Norge og i 11.trinn – boken i Russland. Med hensyn til oppgavens omfang kunne jeg ikke gå dypere i denne delen av undersøkelsen, og si hva disse forskjellene skyldes.

I delkapittel 6.3.3 Fordeling mellom lærebøkene merket jeg at noen av verdiene i Tabell 14 skilte seg ut. Det var, for eksempel, metoden «Bruk digitale hjelpemidler» med høy verdi for Sinus 1T (22,3 %) som var dobbelt så høy som i de andre norske bøkene, og 17 ganger så høy som i de russiske bøkene. Men det er vanskelig å tolke hvorfor den enkelte læreboken skiller seg ut fra de andre lærebøkene uten å kunne gjøre en dypere undersøkelse. Det kan kanskje andre forskere finne svar på i fremtidige undersøkelser.

Man ser at de norske lærebøkene bruker flere metoder per eksempel enn de russiske. Det kan skyldes, blant annet, triviell metodebruk. Når vi ser nærmere på de metodene som brukes i eksemplene, kan vi oppdage at de metodene som faller i samme kategori skiller seg fra hverandre. For eksempel, når man ser på eksemplene i de russiske lærebøkene som kom i kategorien «Se problemet fra en annen side», ble eksemplene oftest løst på to eller flere forskjellige måter (se eksemplene c, e og g i delkapittel 5.3 Presentasjonen av noen eksempler med heuristikker). Mens i de norske lærebøkene under denne kategorien «Se problemet fra en annen side» kom det som regel eksempler med enkelte trinn i løsningen. Det var, for eksempel, oppgavene som ble løst ved hjelp av følgende regler: *«å legge til et negativt tall er det samme som å trekke fra det tilsvarende positive tallet»*, *«å dele med en brøk er det samme som å gange med den motsatte brøken»* og *«fremstille et desimaltall som en brøk»* (Sigma 1T).

Metoden «Lag en illustrasjon» er den metoden som oftest brukes i både de norske og russiske eksemplene. Men de norske lærebøkene inneholder eksempler med dekorative illustrasjoner som bidrar til høy forekomst av metoden «Lag en illustrasjon» i de norske lærebøkene. Det påpekte også Harder (2013) som konkluderte med at 35 % av bruken av metoden «Lag en illustrasjon» faller i underkategori «Del av problemtekst, dekorativ». Et annet funn i analysen min var at 89 % av alle de russiske eksemplene og 69 % av alle de norske eksemplene plassert under kategorien «Lag en illustrasjon» faller i underkategorien «Del av løsningsprosessen». Jeg mener at under kategorien «Lag en illustrasjon» er denne underkategorien «Del av løsningsprosessen» mest relevant for problemløsning.

Når det gjelder de norske lærebøkene, samsvarer mine funn veldig godt med funnene til Harder (2013) som undersøkte eksemplene i algebra. De forskjellene som oppsto, skyldes hovedsakelig i det at jeg i tillegg undersøkte området «Funksjoner». Det var noen forskjeller i funnene som kan forklares av at eksemplene og, som følge metodebruken, i de to områdene, Algebra og Funksjoner, er litt forskjellige. Hvis man ser bare på området Algebra, er forskjellene nokså små. Det var overraskende for meg at forskjellene var mye mindre, enn jeg var innstilt på i begynnelsen av undersøkelsen. Det indikerer at det ikke ble gjort noen vesentlige forandringer angående problemløsning i de norske lærebøkene etter revisjonen av læreplanen selv om problemløsning ble styrket i den reviderte læreplanen fra 2013.

7.2 Problemløsningsprosessen i norske og russiske lærebøkene

Under undersøkelsen min har jeg lagt merke til at verken de norske eller de russiske lærebøkene behandler problemløsning som et eget tema. For eksempel, lærebøkene kunne inkludere et delkapittel som presenterer generelle strategier for hvordan man kan gå frem når man løser matematiske problemer, slik det var i læreboken etter Mønsterplanen 87. Men slike delkapitler var ikke til å finne i de analyserte lærebøkene.

Polyas tre første trinn slik de ble beskrevet i delkapittel 3.1.2 Problemløsningsprosessen omtales ikke eksplisitt i noen av lærebøkene. Men jeg kan ikke konkludere med at de tre første trinnene ikke brukes i undervisningen. Flesteparten av de analyserte oppgavene dreier seg om trinn 3 i Polyas modell som heter «Gjennomfør planen». I analysen sin konkluderte også Fan og Zhu (2007) at lærebøkene fra Kina og Singapore oftest presenterer trinn 3 i Polyas modell (Kina: 56,4%, Singapore: 64.3%). I motsetning til dette brukes i de amerikanske lærebøkene minst to problemløsningstrinn i løsninger i de fleste tilfellene (67 %). I min undersøkelse oppdaget jeg at de eksemplene som bruker flere trinn i Polyas modell, for eksempel, både trinn 1 «Forstå problemet» og trinn 4 «Se tilbake», er som regel kompliserte eksempler eller eksempler som ble kalt «sammensatte problemer» (se delkapittel 5.3 Presentasjonen av noen eksempler med heuristikker). Jeg fant ingen eksempler i de norske lærebøkene der alle fire trinn i Polyas modell ble brukt. I de russiske lærebøkene var det få eksempler med alle fire trinn i Polyas modell (se eksempel 1 i delkapittel 5.2 Noen interessante eksempler med bruk av Polyas firetrinns modell). Det samsvarer med funnene til Fan and Zhu (2007) om at de fire trinnene sjelden ble funnet i alle seriene fra de tre landene (Kina: 2,9 %, Singapore: 0,9 %, USA: 1,7 %). Samtidig er det en enighet i forskningslitteraturen om at elever fokuserer på «angreps-fasen», og bruker relativt lite tid på «inngangs-fasen» og «tilbakeblikk-fasen» (Fosli, 2013, s. 17).

Det finnes ingen generell innføring i problemløsning i både de norske og de russiske lærebøkene, og det brukes ikke eksplisitte navn på heuristiske metoder. I motsetning til det fant Fan and Zhu (2007) at både singaporske og amerikanske lærebøker ofte bruker eksplisitte navn på heuristikker, mens kinesiske bøker bruker ikke eksplisitte navn på heuristikker. *Singaporske lærebøker gir lister av heuristikker i teksten, amerikanske lærebøker presenterer lister av heuristikker i vedlegg, mens kinesiske lærebøker presenter ikke slike lister* (Fan and Zhu, 2007).

7.3 Et kvalitativt blikk på lærebøkene

Tross noen forskjeller har de norske og de russiske lærebøkene nesten lik oppbygging når det gjelder Algebra og Funksjoner. Derfor konkluderte jeg med at de var sammenlignbare (se delkapittel 6.1 Funn fra hjelpeundersøkelsen (den horisontale analysen)). Men samtidig finnes det en del forskjeller. Jeg oppdaget at i de norske lærebøkene finnes det færre temaer innenfor temaer Algebra og Funksjoner enn i de russiske lærebøkene. For eksempel, det russiske læreverket presenterer trigonometriske likninger på 10. trinn, og kubiske likninger, likninger med parameter og komplekse tall på 11.trinn. Disse temaene finnes ikke i de norske undersøkte lærebøkene. Analysen viser at i de overfor nevnte delkapitlene i de russiske lærebøkene brukes det færre heuristiske metoder enn i de andre delkapitlene. Av denne grunnen kan den samlede summen av heuristiske metoder være lavere i de russiske lærebøkene enn i de norske. Lignende funn finner vi hos Karimzadeh (2014) som sammenlignet de norske lærebøkene for 8.trinn og de lærebøkene for secondary one i Singapore som tilsvarer 7.trinn i den norske skolen. Hun konkluderte med at de norske lærebøkene introduserer færre temaer innenfor likninger og ulikheter enn det den singaporske læreboken gjør, og at *det er svært få oppgaver hvor elevene kan få muligheten til å utforme algebraiske problemer ved hjelp av likninger eller ulikheter, lete etter mønster og tolke svaret* (Karimzadeh, 2014).

I de russiske lærebøkene presenteres stoffet mer grundig og mer systematisert enn i de norske. Før et nytt tema presenteres, brukes ofte noen historiske fakta, informasjoner om historiske personer som gjorde noe stort i matematikken. For eksempel, i AGMA 11.trinn i delkapittel 7 «Komplekse tall» presenteres det hvordan matematikere prøvde å løse kubiske likninger og hvordan komplekse tall oppsto. Jeg mener det er fornuftig å ta slikt historisk stoff med, for det kan øke motivasjonen hos elever. Slik informasjon var sjelden å finne i de norske lærebøkene.

Det er flere eksempler i de norske lærebøkene enn i de russiske lærebøkene. Mellom de norske lærebokseriene Sinus og Sigma er det flest eksempler i Sinus 1T og færrest i Sigma R1 som samsvarer med funnene til Harder (2013). Men de russiske eksemplene er vanskeligere, større og er mer komplekse, de har ofte flere måter å løse oppgaven på, og de tar ofte to sider i boken. Derfor tar de russiske eksemplene større plass i boken. Plassen som brukes til et eksempel i det russiske læreverket kunne være brukt til flere eksempler i de norske lærebøkene. Samtidig har de russiske lærebøkene færre sider totalt som kan brukes for å presentere eksemplene enn de norske lærebøkene. En annen forklaring på at det er færre eksempler i de russiske lærebøkene kan være det faktum at russiske lærere, særlig lærere på ungdomsskoler og videregående skoler, bruker andre læringsressurser som et supplement til lærebøker. Lærere står fritt til å bruke eksempler og oppgaver fra de andre godkjente læringsressursene (samtale med Konecpoljskaja, 2015). Det bekreftes også i TIMSS-undersøkelsen der lærere ble stilt spørsmål om hvor mye de bruker arbeidsbøker eller arbeidsark. Svaralternativene var som følger: «som undervisningsgrunnlag» og «som supplement». I Russland svarte lærerne på 4.trinn henholdsvis 29 % og 66 %, og lærerne på 8.trinn – henholdsvis 6 % og 86 % (Mullis, 2012, s. 394). Det viser at lærerne ofte bruker arbeidsbøker som supplement i undervisningen.

Samtidig er bruken av eksempler forskjellig mellom de norske og de russiske lærebøkene. Eksemplene i de norske lærebøkene ble ofte laget for at elevene skulle kunne bruke de eksemplene for å løse enkle og lette oppgaver som står i boken etter eksemplet ved å kopiere løsningen fra eksemplet. Karimzadeh (2014) konkluderte også med at s*tort sett fokuserer de norske bøkene på løsningsteknikker for å løse oppgaver og gir i stor grad oppgaver der man kan herme etter eksemplene* (Karimzadeh, 2014). I de russiske lærebøkene brukes ofte eksempler for å presentere et nytt stoff og vise et konkret tilfelle for å generalisere dette tilfellet etterpå og presentere regelen. Det står ofte bemerkninger og konklusjoner etter eksemplet (se Vedlegg 7. Utsnitt fra den russiske læreboken Matematikk for 11. trinn). For meg virker det slik at de russiske eksemplene ble laget mer for at elever skulle kunne lære å løse problemer, dvs. å lære problemløsning. De eksemplene presenterer ofte flere måter å løse problemet på. Det gir lærere muligheten til å diskutere med elever de metodene i eksemplet og veie dem mot hverandre. Og det er med på å vise elever at det finnes flere måter å løse problemet på, og at noen av metodene er mer brukbare enn de andre. Det virker som at forfattere av de russiske lærebøkene bevisst bruker et eksempel som kan løses på flere måter, istedenfor å presentere flere forskjellige eksempler etter hverandre. Alt dette hjelper å utvikle elevens forståelse og problemløsningsevne. Eksemplene i de russiske lærebøkene har en annen funksjon enn i de norske, de brukes ofte for å presentere nytt stoff eller oppsummere det som ble presentert før eksemplet; de er rett og slett en del av det faglige stoffet. I mange av delkapitlene kommer, for eksempel, generaliseringer rett etter eksemplet. I Vedlegg 7. Utsnitt fra den russiske læreboken Matematikk for 11. trinn etter eksempel 1 kommer en generalisering om at alle heltallige løsninger av polynomet med heltallige koeffisienter er faktorer i konstantleddet.

Oppgavene som kommer etter eksempler i de russiske lærebøkene, er mer utfordrende, og det er større forskjeller mellom oppgaver med ulike vanskelighetsgrad (tre vanskelighetsgrader), enn i de norske lærebøkene. I noen tilfeller er det viktig at elever jobber med mange like oppgaver for automatisere noen teknikker. Men i lengden kan det drepe motivasjonen, og føre til at mange barn kjeder seg i matematikktimene. Mens varierte og utfordrende oppgaver kan virke motiverende og inspirerende. Lignende funn gjorde også Karimzadeh. *Sammenlignet med den singaporske læreboken er det som oftest små forskjeller mellom oppgaver fra de ulike vanskelighetsgradene i de norske lærebøkene og det kan derfor bli lite utfordrende spesielt for de flinkeste elevene* (Karimzadeh, 2014).

7.4 Begrensninger i metoden

Selv om den individrelaterte definisjonen av begrepet problem er rådende i den matematikkdidaktiske litteraturen, var det vanskelig å bruke denne definisjonen i lærebokanalyse der man ikke kan ta problemløseren i betraktning. Derfor valgte jeg, slik som Kongelf og Harder, å bruke en bredere definisjon som inkluderte alle problemene som skulle løses. Det viste seg å medføre en del begrensninger. Når vi bare bruker analyseverktøyet til Kongelf, ser vi at det ikke er så store forskjeller mellom de norske og de russiske lærebøkene, når det gjelder problemløsning. De mer vesentlige forskjellene mellom de norske og de russiske lærebøkene som ble presentert overfor, er noen av de forskjellene som kommer av min observasjon ved siden av bruken av analyseverktøyet til Kongelf. Det virker som det kanskje ikke er mulig å bruke denne metoden for å kunne gripe de vesentlige forskjellene mellom lærebøkene. Til forskjell fra eksemplene i de norske lærebøkene har eksemplene i de russiske lærebøkene større intensjonsdybde. Eksemplene i de russiske lærebøkene inngår som en del av lærestoffet, og brukes ikke bare som eksempler på hvordan man skal løse standardoppgaver, eller som oppskrifter på hvordan elever skal løse oppgaver som kommer etter eksemplet. Eksemplene i de russiske lærebøkene brukes på en annen, mer gjennomtenkt måte enn i de norske lærebøkene. Men det tar ikke metoden tak i. Og det må kanskje brukes andre, for eksempel, kvalitative metoder, for å kunne fange opp disse forskjellene.

8 Oppsummering

8.1 Konklusjon

Denne studien hadde følgende problemstillingen: *Hva er forskjeller og likheter i presentasjonen av problemløsningsmetoder i eksemplene i norske og russiske matematikklærebøker?*

For å svare på problemstillingen stilte jeg følgende forskningsspørsmål:

1. Hva sier læreplanen i matematikk om problemløsning i Norge og i Russland?
2. Hvordan blir problemløsningsmetoder benyttet i eksempler i norske matematikklærebøker og russiske matematikklærebøker?

For å besvare disse spørsmålene har jeg analysert norske læreplaner og lærebøker for 1T og R1, og russiske læreplaner og lærebøker for 10. trinn og 11.trinn.

Læreplaner brukes som utgangspunkt i produksjon av lærebøker, og læreplanene inneholder innholdslister og kompetansemål som beskriver kunnskap og ferdigheter som skal utvikles hos elever. Derfor er det viktig å analysere læreplaner på lik linje med lærebøker.

Under min analyse oppdaget jeg flere forskjeller mellom den norske og den russiske læreplanen. I motsetning til den norske læreplanen inneholder den russiske læreplanen både innholdselementer og kompetansemål. Den russiske læreplanen har mer eksplisitt og detaljert beskrivelse av innholdet og kompetansemål, mens den norske læreplanen inneholder mer generell og unøyaktig beskrivelse. Både den norske læreplanen og den russiske læreplanen sier at problemløsning og problemløsningsmetoder er noe elevene burde lære på skolen, og derfor forventes det at problemløsning og problemløsningsmetoder skulle være presentert i lærebøkene.

Både den russiske og den norske læreplanen er opptatt av at oppgaver skal være virkelighetsnære. De norske lærebøkene har mer praktisk og hverdagslig kontekst, når det gjelder eksempler og oppgaver. Den russiske læreplanen sier at på slutten av allmenn grunnutdanning skal elever kunne, blant annet, lage modeller av forskjellige praktiske virkelighetsnære situasjoner og løse virkelighetsnære problemer (delkapittel 3.3.5 Problemløsnings plass i den russiske læreplanen). Men det ble ikke funnet så mange eksempler på løsninger av virkelighetsnære problemer. Derfor foreligger det avvik mellom den russiske læreplan og de russiske lærebøkene.

Læreboken påvirker veldig matematikkundervisningen. I analysen av TIMSS-data for Norge og Sverige understrekker Grønmo et al. (2013) at *«fra rundt 90 % til nærmere 100 % av lærerne sier at de bruker læreboka som undervisningsgrunnlag»* (Grønmo et al., 2013, s.

165). I Russland bruker forholdsvis 95 % av lærere på 4.trinn og 88 % av lærere på 8.trinn læreboka som undervisningsgrunnlag (Mullis, 2012, s. 392-395). Derfor er det viktig at lærebøker presenterer problemløsningsmetoder slik at elever skal kunne utvikle problemløsningsevne.

For å kunne svare på den andre problemstillingen, ville jeg først finne ut om de undersøkte lærebøkene var sammenlignbare. Analysen i denne sammenlignende studien har funnet flere forskjeller ved lærebøkenes innhold, struktur, nivå og progresjon. Noen av de funnene var: de russiske lærebøkene er mer «matematiske» enn de norske, de russiske lærebøkene har flere temaer som de norske lærebøkene ikke har, innholdet i de russiske lærebøkene er mer teoretisk, omfattende og «dypere». Tross forskjellene som ble oppdaget, var de norske og de russiske lærebøkene ganske identiske og kunne sammenlignes.

Både de norske og de russiske lærebokforfatterne skriver ikke om hva heuristiske metoder er, og hvordan man bruker dem. Og det kan redusere muligheten for elever å være med i samtaler og diskusjoner om slike metoder. Mange kjente metoder forekommer sjelden både i de norske og de russiske lærebøkene. Kongelf (2011) mener at *hver elev har rett til å vite noe om metodene «Se etter et mønster», «Prøv og feil», «Jobb baklengs»* (Kongelf, 2011*)*. Jeg er enig i at elever tjener på å lære disse metodene, og de metodene bør brukes oftere i matematikklærebøkene. Jeg oppdaget også at de tre metodene brukes sjelden både i de norske og de russiske lærebøkene.

Harder (2013) konkluderte i undersøkelsen sin *at det er et stort forbedringspotensial hva angår problemløsningsmetoder i matematikklærebøkene for videregående skole i Norge*. Hun mente at etter revisjonen av læreplanen i 2013 hadde forlagene mulighet til å bruke hennes funn når de skulle lage nye lærebøker for videregående skole (Harder, 2013). Selv om den nye reviderte læreplanen har lagt større vekt på problemløsning, viser mine funn at det ikke ble gjort noen store forandringer i de norske lærebøkene sammenlignet med lærebøkene før revisjonen.

Både Lester (1996) og Schoenfeld (1992) understreker at undervisning i problemløsing må skje systematisk og sakte over tid. Og at problemløsende heuristikker må presenteres mer eksplisitt. Men funnene til Kongelf (2011) og Harder (2013), samt funnene i denne oppgaven indikerer at de undersøkte lærebøkene ikke tar hensyn til det. Hvis både de russiske og norske lærebøkene skal være mer i overensstemmelse mellom Lester og Schoenfeld anbefalinger, bør problemløsningsmetoder presenteres mer eksplisitt og systematisk. Men samtidig må lærebokforfattere og lærere være klar over både det positive og det negative ved presentasjonen av heuristikker i lærebøker, *slik at elever ikke anser heuristikker som regler i* *problemløsning og ikke setter likhetstegn mellom problemløsning og problemløsningsheuristikker de hadde lært* (Higgins, 1997, referert i Fan and Zhu, 2007).

Svaret på problemstillingen: «Hva er forskjeller og likheter i presentasjonen av problemløsningsmetoder i eksemplene i norske og russiske matematikklærebøkene?» må bli at likheten mellom dem er at verken de norske eller de russiske lærebøkene presenterer problemløsningsmetoder i tilstrekkelig grad. Både de russiske lærebøkene og de norske lærebøkene legger liten vekt på eksplisitt presentasjon av problemløsningsheuristikker. Men det er også forskjeller mellom de undersøkte lærebøkene. For meg virker det slik at eksemplene i de norske lærebøkene ble laget for å trene elever i noen konkrete teknikker. Derimot er eksemplene i de russiske lærebøkene laget mer for å lære elever å løse problemer og tenke kreativt. Metodene som ble brukt i de russiske lærebøkene, var mer komplekse og gjennomtenkte. Samtidig finnes det mye potensiale i hvordan metodene kan presenteres i eksemplene både i de russiske og de norske lærebøkene.

8.2 Videre forskning

Etter at jeg har vært ferdig med undersøkelsen min, tenke jeg på hva som kunne gjøres annerledes, og hva annet som kunne undersøkes. Undersøkelsen min hadde «kvantitativ retning», og klarte ikke å fange opp mange interessante fenomener. For å kunne undersøke de fenomenene, er man antagelig nødt til å bruke andre, muligens mer kvalitative metoder. Det kunne være interessant å sammenligne bruken og forekomsten av de fire trinn i Polyas modell i de norske og de russiske lærebøkene, og se hvilke trinn i Polyas modell som brukes i de norske og de russiske lærebøkene. Samtidig kunne det være interessant å se hvilke lærebøker som bruker flere trinn i Polyas modell i eksemplene. I tillegg kunne det være mulig å se nærmere på det siste trinnet i Polyas modell «se tilbake» for å finne ut hvilke aspekter har blitt sett på i denne siste fasen. Her kunne være mulig bruke tre følgende kategorier i analysen:

1. Se tilbake på det opprinnelige problemet
2. Se tilbake på problemløsningsmetodene som ble brukt
3. Se tilbake på det endelige svaret på problemet

Kursene 1T og R1 i norsk skole, slik som kursene 10.trinn og 11.trinn i russisk skole, er relativt forskjellige, de har forskjellige eksempler og oppgaver som igjen påvirker metodebruken. Det kunne være interessant å sammenligne metodebruken i lærebøkene for de to kursene for å finne ut forskjeller og likheter, og for å kunne svare hvorfor noen av metodene blir mer brukt i lærebøkene som tilhører de kursene. En slik studie kunne, for eksempel, finne svar på spørsmål om hvilke heuristikker som bør innføres til elever på ulike klassetrinn, og hvordan forskjellige heuristikk bør introduseres.

Selv om metodene i de russiske og de norske lærebøkene i undersøkelsen min ble kodet under den samme kategorien, var metodebruken forskjellig i forhold til at metodene i noen av eksemplene var mer komplekse enn i de andre. Samtidig var metodebruken i noen av eksemplene triviell. Det kunne vært mulig å utføre en mer utvidet analyse, og bruke en finere inndeling av flere metoder. Bruk av flere underkategorier i analysen kunne gi et klarere bilde av forekomsten av de problemløsningsmetodene i de norske og de russiske lærebøkene, og kunne kanskje føre til enda flere funn. Men samtidig er jeg usikker på om denne finere inndelingen hjelper til å avsløre flere funn. Det virker som at denne kvantitative metoden som ble brukt i min studie ikke forteller hele sannheten om forskjeller mellom de norske og de russiske lærebøkene, og det kreves en annen tilnærming for å fange opp forskjellene mellom lærebøkene. Dersom jeg skulle utføre analysen på nytt, skulle jeg bruke metoder som har mer «kvalitativt preg».

Under undersøkelsen fikk jeg fornemmelsen av at de russiske eksemplene stiller høyere kognitive krav enn de norske eksemplene. Undersøkelse av forskjeller og likheter i oppgavenes kognitive krav til elevene kunne vært temaet for et videre forskning. Samtidig kunne det være interessant å se på flere russiske lærebøker som brukes i undervisningen i russiske skoler for å kunne finne svar på om funnene i min analyse er typiske for russiske lærebøker.

Litteraturliste

ALSETH, B., BREITEIG, T. & BREKKE, G. 2013. Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering - matematikkfaget som kasus. Telemarksforsking Notodden.

BERGQVIST, E. 2007. Types of reasoning required in university exams in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior,* 26**,** 348-370.

BIRKELAND, P. A., BREITEIG, T. & VENHEIM, R. 2012. *Matematikk for lærere : 2,* Oslo, Universitetsforl.

BJÖRKQVIST, O. 2003. Matematisk problemløsning. *In:* GREVHOLM, B. (ed.) *Matematikk for skolen.* Bergen: Fagbokforl.

BOESEN, J. 2006. *Assessing mathematical creativity: comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact.* Umeå universitet.

BORGERSEN, H. E. 1994. Open ended problem solving in geometry. *Nordisk Matematikkdidaktikk,* 2**,** 6-35.

BREITEIG, T. 2008. Problemløsning som inngangsport til matematikk. *Tangenten,* 1**,** 35-40.

BRYMAN, A. 2012. *Social research methods,* Oxford, Oxford University Press.

CARLSON, M. P. & BLOOM, I. 2005. The Cyclic Nature of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem-Solving Framework. *Educational Studies in Mathematics,* 58**,** 45-75.

COHEN, L., BELL, R. C., MANION, L. & MORRISON, K. 2011. Research methods in education. 7th ed. ed. London: Routledge.

CRESWELL, J. W. 2012. *Educational research : planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research,* Boston, Mass, Pearson.

DET KONGELIGE KIRKE-, U.-., -OG FORSKNINGSDEPARTEMENT. 1996. Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen. Oslo: Nationalt læremiddelsenter.

DUVRF, D. F. U. O. V. I. D. R. F. 2004a. Den føderale komponenten av statlige utdanningsstandarder for allmennutdanning. Spesialiserende retning. Original tittel: Министерство образования и науки Российской Федерации. (2004). Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Среднее (полное) общее образование. Профильный уровень. Москва. Moskva.

DUVRF, D. F. U. O. V. I. D. R. F. 2004b. Den statlige grunnleggende læreplanen og forslag til læreplaner for utdanningsinstitusjoner i Russland. Moskva.

DUVRF, D. F. U. O. V. I. D. R. F. 2004c. Estimert læreplan for allmenn grunnutdanning for spesialiserende retning i matematikk. . Moskva.

DUVRF, D. F. U. O. V. I. D. R. F. 2012. Lov om opplæring i den Russiske Føderasjon. Moskva.

FAN, L. 2013. Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *The International Journal on Mathematics Education,* 45**,** 765-777.

FAN, L. & ZHU, Y. 2007. Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics,* 66**,** 61-75.

FAN, L., ZHU, Y. & MIAO, Z. 2013. Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM,* 45**,** 633-646.

FOSLI, W. 2013. Problemløsning i geometri – en studie av konkurranseoppgaver og elevers løsningsstrategier. University of Stavanger, Norway.

FOSSUM, A. 2009. Algoritmer og kreativitet til matematikkeksamen : fra 2MX til R1 : endret eksamensoppgavene seg med eksamensformen? Oslo: A. Fossum.

FRIDMAN, L. M. & TURECKIJ, E. N. 1989. *Hvordan lære å løse problemer.*

GJONE, G. 2003. Læreplaner og læreplanutvikling i matematikk. *In:* GREVHOLM, B. (ed.) *Matematikk for skolen.* Bergen: Fagbokforlaget.

GRØNMO, L. S., BORGE, I. C. & ONSTAD, T. 2013. Hvor står vi - hvor går vi? *In:* ONSTAD, T. & GRØNMO, L. S. (eds.) *Opptur og nedtur: Alalyser av TIMSS-data for Norge og Sverige* Oslo: Akademika forlag.

GRØNMO, L. S. & ONSTAD, T. 2009. *Tegn til bedring: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007,* Oslo, Unipub.
GRØNMO, L. S., ONSTAD, T., NILSEN, T., HOLE, A., ASLAKSEN, H. & BORGE, I. C. 2012. *Framgang, men langt fram : norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011,* Oslo, Akademika.
GRØNMO, L. S., ONSTAD, T. & PEDERSEN, I. F. 2010. *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole,* Oslo, Unipub.
GRØNMO, S. 1996. Forholdet mellom kvalitative og kvantitative tilnærminger i samfunnsforskningen. Oslo: Universitetsforl., 1996.
HARDER, V. 2013. *Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole.* Masteroppgave, Universitetet i Oslo.
HONG, D. & CHOI, K. 2014. A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics,* 85**,** 241-263.
IMSEN, G. 2003. *Skolemiljø, læringsmiljø og elevutbytte : en empirisk studie av grunnskolens 4., 7. og 10. trinn,* Trondheim, Tapir akademisk forl.
JOHANSSON, M. 2003. *Textbooks in mathematics education: a study of textbooks as the potentially implemented curriculum. (Licentiate thesis).* Luleå Univesity og thecnology.
JONES, K. & FUJITA, T. 2013. Interpretations of National Curricula: the case of geometry in textbooks from England and Japan. *ZDM,* 45**,** 671-683.
JURDAK, M. 2006. Contrasting Perspectives and Performance of High School Students on Problem Solving in Real World, Situated, and School Contexts. *Educational Studies in Mathematics,* 63**,** 283-301.
KARIMZADEH, A. 2014. *Algebra i norske og singaporske matematikklærebøker. Masteroppgave.*, Universitetet i Oslo.
KJÆRNSLI, M., LIE, S., OLSEN, R. V., ROE, A. & TURMO, A. 2004. *Rett spor eller ville veier? Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003,* Oslo, Universitetsforlaget.
KJÆRNSLI, M., NORTVEDT, G. & JENSEN, F. 2013. *Norske elevers kompetanse i problemløsing i PISA 2012. ,* Oslo, Universitetet i Oslo, Institutt for lærerutdanning og skoleforskning.
KJÆRNSLI, M. & OLSEN, R. V. 2012. *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012,* Oslo, Universitetsforlaget
KONECPOLJSKAJA, J. J. 2015. Telefonsamtaler.
KONGELF, T. R. 2011. What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? . *Nordic Studies in Mathematics Education,* 16**,** 5-54.
KUNNSKAPSDEPARTEMENTET 1998. Opplæringslova: Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa. *In:* KUNNSKAPSDEPARTEMENTET (ed.). Oslo: Kunnskapsdepartementet.
KUNNSKAPSDEPARTEMENTET. 2013. På rett vei: kvalitet og mangfold i fellesskolen. (Melding til Stortinget nr. 20,2012-2013). Oslo: Kunnskapsdepartementet.
KVALE, S. & BRINKMANN, S. 2009. *Det kvalitative forskningsintervju,* Oslo, Gyldendal akademisk.
LEER, L. G. 2009. Vurdering av matematisk problemløsning : en studie av sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk og oppgavene som gis på eksamen. Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet Institutt for matematiske fag.
LESTER, F. K. 1994. Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education,* 25.
LESTER, F. K. 1996. Problemlösningens natur. *In:* AHLSTRÖM, R. & EMANUELSSON, G. R. (eds.) *Matematik - ett kommunikationsämne.* Mölndal: Nämnaren : Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs Universitet.
LITHNER, J. 2003. Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics,* 52**,** 29-55.
LITHNER, J. 2004. Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of Mathematical Behavior,* 23**,** 405-427.
LITHNER, J. 2008. A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 67**,** 255-276.

MASON, J., BURTON, L. & STACEY, K. 2010. *Thinking mathematically,* Harlow, Prentice Hall.
MASON, J. & DAVIS, J. 1991. *Fostering & Sustaining Mathematics: Thinking Through Problem Solving,* Deakin University. School of Education. Open Campus Program, Deakin University.
MASON, J., LIE, J., GRAHAM, A. & JOHNSTON-WILDER, S. 2011. *Å lære algebraisk tenkning,* [Bergen], Caspar forl.
MULLIS, I. V. S. 2012. *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*, IEA Secretariat.
MULLIS, I. V. S., MARTIN, M. O., ROBITAILLE, D. F. & FOY, P. 2009. TIMSS Advanced 2008 International Report: Findings from IEA's Study of Achievement in Advanced Mathematics and Physics in the Final Year of Secondary School. *Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.*
MURAVIN, G. K. & MURAVINA, O. V. 2013. *Matematikk: Algebra og grunnleggende matematisk analyse, Geometri. Algebra og grunnleggende matematisk analyse for spesialiserende retning i matematikk for 10. trinn. Moskva: Drofa. (Min oversettelse. Original tittel: Муравин Г.К., Муравина О. В. (2013). Математика: Алгебра и начала математического анализа, Геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень. 10 класс. Москва: Дрофа),* Moskva, Drofa.
MURAVIN, G. K. & MURAVINA, O. V. 2014. *Matematikk: Algebra og grunnleggende matematisk analyse, Geometri. Algebra og grunnleggende matematisk analyse for spesialiserende retning i matematikk for 11. trinn. (Min oversettelse. Original tittel: Муравин Г.К., Муравина О. В. (2014). Математика: Алгебра и начала математического анализа, Геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень. 11 класс. Москва: Дрофа),* Moskva, Drofa.
MURAVINA, O. V. 2013. *Matematikk: Algebra og grunnleggende matematisk analyse, Geometri. Algebra og grunnleggende matematisk analyse For spesialiserende retning i matematikk for 10.-11.trinn. Anbefalt læreplan til lærebokserie Muravin G.K., Muravina O.V. ,* Moskva, Drofa.
NISS, M. & JENSEN, T. H. 2002. *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling av matematikundervisning i Danmark,* København, Undervisningsministeriet.
NORTVEDT, G. A. 2013. Matematikk i PISA – matematikkdidaktiske perspektiver. *In:* OLSEN, R. V., KJÆRNSLI, M., NORTVEDT, G. A., ROE, A., NARVHUS, E. K., ERIKSEN, A. & JENSEN, F. (eds.) *Fortsatt en vei å gå: norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012.* Oslo: Universitetsforlaget.
OECD 2013. *PISA 2012 Assessment and analytical framework. Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*, OECD.
OLSEN, O. H. I. 2008. Matematisk modellering : en teoretisk og empirisk belysning av PISA. Oslo: O.H.I. Olsen.
OPHEIM, L. G. 2011. *Elevers kognitive engasjement i matematikkoppgaver : en kvalitativ studie som bygger på oppgavebaserte intervjuer i en yrkesrettet, videregående skole.*
PALM, T., BERGQVIST, E., ERIKSSON, I., HELLSTRÖM, T. & HÄGGSTRÖM, C.-M. 2004. En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser for uppgiftskonstruktion.
PALM, T., BOESEN, J. & LITHNER, J. 2005. The requirements of mathematical reasoning in upper secondary level assessment.
PEDERSEN, G. M. 2012. Forbrukeremner i matematikkfagets lærebøker for den Videregående skole etter Kunnskapsløftet 2006.
POLYA, G. 1973. *How to solve it. ,* Princeton, NJ, Princeton University Press.
PÓLYA, G. 1981. *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving,* New York, Wiley.
PÓLYA, G. 2009. *How to solve i: A new aspect of mathematical method,* New York, Ishi Press International.
RESVOLL, E. 2014. *Lærebøker i matematikk og læreres bruk av dem : en analyse av karakteristiske trekk ved de mest brukte lærebøkene på ungdomstrinnet og hvordan de blir brukt av tre*

lærere til palnlegging og gjennomføring av undervisning. Høgskolen i Sør-Trøndelag. Avdeling for lærer- og, tolkeutdanning.
RØSSELAND, M. 2005a. Hva er matematisk kompetanse? - del 1. *Tangenten,* 1**,** 12-15.
RØSSELAND, M. 2005b. Hva er matematisk kompetanse? - del 2. *Tangenten,* 2**,** 48-53.
SCHOENFELD, A. H. 1979. Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem-Solving Performance. *Journal for Research in Mathematics Education,* 10**,** 173-187.
SCHOENFELD, A. H. 1985. *Mathematical problem solving*, ERIC.
SCHOENFELD, A. H. 1989. Teaching mathematical thinking and problem solving. *In:* RESNICK, L. B. & KLOPFER, L. E. (eds.) *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research.*
SCHOENFELD, A. H. 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *In:* GROUWS, D. (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning.*
SOLVANG, R. 1992. *Matematikk-didaktikk,* Bekkestua, NKI.
STIGLER, J. W., FUSON, K. C., HAM, M. & SOOK KIM, M. 1986. An Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in American and Soviet Elementary Mathematics Textbooks. *Cognition and Instruction,* 3**,** 153-171.
UNDERVISNINGSDEPARTEMENTET, K. O. 1987. Mønsterplan for grunnskolen.
UTDANNINGSDIREKTORATET 2005. Kartlegging av læremidler og læremiddelpraksis. København: Rambøll Management A/S.
UTDANNINGSDIREKTORATET 2013. Læreplan i matematikk fellesfag. *In:* UTDANNINGSDIREKTORATET (ed.). Utdanningsdirektoratet.
UTDANNINGSDIREKTORATET 2014. Fag- og timefordelingen i grunnopplæringen. Vedlegg 1 til rundskriv Udir-01-2014
UTDANNINGSDIREKTORATET 2015. Vurderingsveiledning 2015. Matematikk – sentralt gitt eksamen. Studieforberedende og yrkesfaglig utdanningsprogram. Kunnskapsløftet LK06. *In:* UTDANNINGSDIREKTORATET (ed.).
ZHU, Y. & FAN, L. 2006. Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. 4**,** 609-626.
ZVORONO, V. G. 2011. En sammenlignende studie av norske og russiske eksamensoppgaver med logaritmer : en analyse av eksamensoppgaver med kognitive kategorier som redskap. Tromsø: Universitetet i Tromsø.

Lærebøker

Sigma 1T

Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2013). *Sigma matematikk 1T: studieforberedende*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Sigma R1

Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W., Mustaparta, S., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2012). *Sigma R1: matematikk*. Oslo: Gyldendal undervisning.

Sinus 1T

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2014). *Sinus 1T: matematikk for Vg1: studieforberedende program*. Oslo: Cappelen Damm.

Sinus R1

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2013). *Sinus R1: lærebok i matematikk: studiespesialiserende program*. Oslo: Cappelen Damm.

Algebra og grunnleggende matematisk analyse for 10.trinn:

Muravin G.K., Muravina O. V. (2013): *Matematikk: Algebra og grunnleggende matematisk analyse, Geometri. Algebra og grunnleggende matematisk analyse For spesialiserende retning i matematikk for 10. trinn*. Moskva: Drofa. (Min oversettelse. Original tittel: *Муравин Г.К., Муравина О. В. (2013). Математика: Алгебра и начала математического анализа, Геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень. 10 класс*. Москва: Дрофа).

Algebra og grunnleggende matematisk analyse for 11.trinn:

Muravin G.K., Muravina O. V. (2014*): Matematikk: Algebra og grunnleggende matematisk analyse, Geometri. Algebra og grunnleggende matematisk analyse For spesialiserende retning i matematikk for 11. trinn*. Moskva: Drofa. (Min oversettelse. Original tittel: Муравин Г.К., Муравина О. В. (2014). *Математика: Алгебра и начала математического анализа, Геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень. 11 класс*. Москва: Дрофа).

Figurer og tabeller

Liste over figurer

Liste over tabeller

Vedlegg

Vedlegg 1. Eksempler på timefordeling i læreplaner i den russiske allmennskolen

Eksemplene under viser hvor mange timer brukes til alle fag på ulike klassetrinn i den russiske skolen og hvor mange timer brukes til matematikk.

1. Allmenn grunnopplæring (barneskole). Det minimale antallet timer som skal i utdanningsinstitusjoner i Russisk Føderasjon

Trinn	**1. trinn**	**2. trinn**	**3. trinn**	**4. trinn**	**Til sammen**
Skolefag	**Antall timer per år**				
Matematikk	132	136	136	136	540
Totalt	660	748	748	748	2904
	Antall timer per uke				
Matematikk	4	4	4	4	16
Totalt	20	22	22	22	86

2. Allmenn grunnopplæring (mellomskole). Det minimale antallet timer som skal i utdanningsinstitusjoner i Russisk Føderasjon

Trinn	**5. trinn**	**6. trinn**	**7. trinn**	**8. trinn**	**9. trinn**	**Til sammen**
Skolefag	**Antall timer i år**					
Matematikk	175	175	175	175	175	875
Totalt	910	945	1015	1050	1015	4935
	Antall timer i uke					
Matematikk	5	5	5	5	5	25
Totalt	26	27	29	30	29	141

3. Allmenn grunnopplæring (ungdomsskole). Det minimale antallet timer som skal i utdanningsinstitusjoner i Russisk Føderasjon

Trinn	**10. trinn**	**11. trinn**
Skolefag	**Antall timer i år**	**Antall timer i år**
Matematikk	210	210
Totalt	1050	1050
	Antall timer i uke	**Antall timer i uke**
Matematikk	6	6
Totalt	32	32

4.1 Realfagsretning

Studiefag	Antall timer per uke for 2 studieår
1.Den føderale komponenten	
De grunnleggende studiefagene	
De samlede fagene	32
De spesialiserende studiefagene	
Matematikk	12 (6 timer i 10.trinn og 6 timer i 11.trinn)
Informatikk og IKT	8
Fysikk (Kjemi)	10
11. Den regionale (nasjonale-regionale) komponenten	
Etter vurdering til ulike regioner i Russland	4
111. Den utdanningsinstitusjonen (lokale) komponenten	
Valgfag studiefag, studiepraksis, prosjekter, forskning.	8

4.2 Andre studieretninger bl.a. samfunns – humanitære retning

Studiefag	Antall timer per uke for 2 studieår
1.Den statlige komponenten	
De grunnleggende studiefagene	
De samlede fag	22
Matematikk	8 (4+4)
De spesialiserende (fordypnings) studiefagene	
De samlede fag	32
11. Den regionale (nasjonale-regionale) komponenten	
Etter vurdering til ulike regioner i Russland	4
111. Den utdanningsinstitusjonen (lokale) komponenten	
Valgfag studiefag, studiepraksis, prosjekter, forskning.	6

4.3 Universal studieretning (ikke-spesialiserende)

Studiefag	Antall timer per uke for 2 studieår
1.Den statlige komponenten	
De grunnleggende studiefagene	
De samlede fag	43
Matematikk	8 (4+4)
11. Den regionale (nasjonale-regionale) komponenten	
Etter vurdering til ulike regioner i Russland	4
111. Den utdanningsinstitusjonen (lokale) komponenten	
Elektiv (valgfag) studiefag, studiepraksis, prosjekter, forskningstimene (kan brukes til undervisning i spesialiserende fag).	17

Vedlegg 2: Den statlige grunnleggende læreplan (basislæreplan) for ungdomsskole allmenn utdanning

DEN STATLIGE KOMPONENTEN

Den ikke-variable delen

De obligatoriske studiefag på det grunnleggende nivået

Studiefag	**Timetall for 2 studieår (10/11 kl- ant. Timer per uke)** – **Det grunnleggende nivået**
Russisk	**70** (1/1)
Litteratur	**210** (3/3)
Fremmedspråk	**210** (3/3)
Matematikk	**280** (4/4)
Historie	**140** (2/2)
Samfunnsfag (inkl. økonomi og rettslære)	**140** (2/2)
Naturfag	**210** (3/3)
Gym	**140** (2/2)

Den variable delen

Studiefag til valg på det grunnleggende og det spesialiserende nivået

Studiefag	**Timetall for 2 studieår (10/11 kl- ant. Timer per uke)** – **Det grunnleggende nivået**	**Det spesialiserende nivået**
Russisk	-	**210** (3/3)
Litteratur	-	**350** (5/5)
Fremmedspråk	-	**420** (6/6)
Matematikk	-	**420** (6/6)
Historie	-	**280** (4/4)
Gym	-	**140** (2/2)
Samfunnsfag (eksl. økonomi og rettslære	**70** (1/1)	**210** (3/3)
Økonomi	**35** (0,5/0,5)	**140** (2/2)
Rettslære	**35** (0,5/0,5)	**140** (2/2)
Geografi	**70** (1/1)	**210** (3/3)
Fysikk	**140** (2/2)	**350** (5/5)
Kjemi	**70** (1/1)	**210** (3/3)
Biologi	**70** (1/1)	**210** (3/3)
Informatikk og IKT	**70** (1/1)	**280** (4/4)
Kunst	**70** (1/1)	**210** (3/3)
Teknologi	**70** (1/1)	**280** (4/4)
Den grunnleggende livssikkerhets opplæring (?)	**35** (1/-)	**140** (2/2)
TIL SAMMEN	**Maksimum 2100** (minst 4/minst 4)	

DEN REGIONALE (NATIONALE-REGIONALE) KOMPONENTEN

TIL SAMMEN	**140** (2/2)

UTDANNINGSINSTITUSJONSKOMPONENTEN

TIL SAMMEN	**Minst 200** (minst 4/minst 4)

TIL SAMMEN	**Opptil 2520 (36/36)**
Ved 6-dagers studieuke	**2520** (36/36)
Ved 5-dagers studieuke	**2450** (35/35)

Vedlegg 3: Innholdet i de aktuelle matematikkursene (1T og R1) i norsk videregående skole

Hovedområder for R1: Geometri, Algebra, Funksjoner, Kombinatorikk og sannsynlighet.
Timetall for R1: 140 årstimer, der timetallet er oppgitt i 60 minutters enheter. Ved omregning til en undervisningstime på 45 min, vil man få ca. 187 årstimer, det vil si 5 undervisningstimer per uke.
Hovedområder for 1T: Tall og algebra, Geometri, Sannsynlighet og Funksjoner.
Timetall for 1T: 140 årstimer, der timetallet er oppgitt i 60 minutters enheter. Ved omregning til en undervisningstime på 45 min, vil man få ca. 187 årstimer, det vil si 5 undervisningstimer per uke.
Kompetansemål: Norsk læreplan sier ikke noe direkte om innholdselementer. For å lage et tilnærmet bilde av hvilke innholdselementer elevene får undervisning i, kan man se i lærebøker som brukes i videregående skole.
Her er kompetansemålene i de utvalgte hovedområdene:

Etter 1T - Vg1 studieførebuande utdanningsprogram:

Tal og algebra

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- Tolke, bearbeide, vurdere og drøfte det matematiske innhaldet i ulike tekstar
- Vurdere, velje og bruke matematiske metodar og verktøy til å løyse problem frå ulike fag og samfunnsområde og reflektere over, vurdere og presentere løysingane på ein formålstenleg måte
- rekne med rotuttrykk, potensar med rasjonal eksponent og tal på standardform,bokstavuttrykk, formlar, parentesuttrykk og rasjonale og kvadratiske uttrykk med tal og bokstavar, faktorisere kvadratiske uttrykk, bruke kvadratsetningane og lage fullstendige kvadrat
- Omforme uttrykk og løyse likningar, ulikskapar og likningssystem av første og andre grad og enkle likningar med eksponential- og logaritmefunksjonar, både ved rekning og med digitale verktøy
- Omforme ei praktisk problemstilling til ei likning, ein ulikskap eller eit likningssystem, løyse det matematiske problemet både med og utan digitale verktøy, presentere og grunngje løysinga og vurdere gyldigheitsområde og avgrensingar

Funksjonar

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- Gjere greie for funksjonsomgrepet og kunne omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar
- Berekne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjeringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart,
- Finne tilnærma verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta
- Gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar
- Lage, tolke og gjere greie for funksjonar som beskriv praktiske problemstillingar, analysere empiriske funksjonar og finne uttrykk for tilnærma lineære samanhengar, med og utan bruk av digitale verktøy
- Bruke digitale verktøy til å framstille og analysere kombinasjonar av polynomfunksjonar, rotfunksjonar, rasjonale funksjonar, eksponentialfunksjonar og potensfunksjonar

(Utdanningsdirektoratet, 2013, s.9)

Matematikk R1:

Algebra

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- Faktorisere polynomer ved hjelp av nullpunkter og polynomdivisjon, og bruke dette til å løse likninger og ulikheter med polynomer og rasjonale uttrykk
- Omforme og forenkle sammensatte rasjonale funksjoner og andre symbolske uttrykk med og uten bruk av digitale hjelpemidler
- Utlede de grunnleggende regnereglene for logaritmer, og bruke dem og potensreglene til å forenkle uttrykk og løse likninger og ulikheter
- Gjøre rede for implikasjon og ekvivalens, og gjennomføre direkte og kontrapositive bevis

Funksjoner

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- Gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare

- Bruke formler for den deriverte til potens-, eksponential- og logaritmefunksjoner, og derivere summer, differanser, produkter, kvotienter og sammensetninger av disse funksjonene
- Bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte forløpet til funksjoner og tolke de deriverte i modeller av praktiske situasjoner
- Tegne grafer til funksjoner med og uten digitale hjelpemidler, og tolke grunnleggende egenskaper til en funksjon ved hjelp av grafen
- Finne likningen for horisontale og vertikale asymptoter til rasjonale funksjoner og tegne asymptotene
- Bruke vektorfunksjoner med parameterframstilling for en kurve i planet, tegne kurven og derivere vektorfunksjonen for å finne fart og akselerasjon

(Utdanningsdirektoratet, 2006, s.3)

Vedlegg 4: Innholdet i spesialiserende retning i matematikk for 10.– 11. trinn i russisk allmennskole

Hovedområder (for 10.– 11. trinn): Tall- og bokstavuttrykk (70 timer), Trigonometri (30 timer), Funksjoner (30 timer), Grunnleggende matematiske analyse (30 timer), Likninger og ulikheter (70 timer), Elementer av kombinatorikk, statistikk og sannsynlighetsteori (20 timer), Geometri (120 timer), Reserve (50 timer). Det vil tilsvare 420 timer fra den statlige komponenten (DUVRF, 2004c).
Russisk læreplan sier ikke hvordan disse emnene fordeles, men læreplanen viser hvor mange timer det er anbefalt til gjennomgåing av hvert enkelt emne.

Forfatterne til lærebøkene Muravin G.K., Muravina O. V. (2013) og Muravin G.K., Muravina O. V. (2014) presenterer følgende timefordeling for spesialiserende retning i matematikk for 10.trinn (Algebra og grunnleggende matematisk analyse):

Nr.	Innhold	Timetall
1	Funksjoner og grafer	20
2	Røtter og potenser	17
3	Eksponentielle og logaritmiske funksjoner, likninger og ulikheter	22
4	Trigonometriske funksjoner og dens egenskaper	50
5	Sannsynlighetsregning	9
6	Repetisjon	18

For spesialiserende retning i matematikk for 11.trinn presenterer de også følgende timefordeling (Algebra og grunnleggende matematisk analyse):

Nr.	Innhold	Timetall
1	Funksjonslære	13
2	Derivasjon	17
3	Derivasjonsregler	28
4	Integral og antiderivert funksjon	13
5	Sannsynlighetsregning	9
6	Likninger, ulikheter og dens systemer	27

7	Komplekse tall	13
8	Reserve	16

Oversikt over innholdselementer i kurset som gjelder Algebra og Funksjoner (10.-11. trinn, spesialiserende retning i den russiske allmennskolen):

Emner	**Innholdselementer**
TALL OG BOKSTAVUTTRYKK	**Divisjon med heltall.** Resten ved divisjon med heltall. *Sammenligninger**. Oppgaver med ukjente som er hele tall. **Komplekse tall.** Aritmetiske operasjoner med komplekse tall. Kompleks konjugert. *Potensen av komplekse tall (de Moivres forme). Algebraens fundamentalt teorem*. Geometrisk tolkning av komplekse tall. Trigonometrisk form av komplekse tall. Polynomer av et ukjent. Polynomdivisjon. Resten ved en polynomdivisjon. Rasjonale røtter av polynomer med hele koeffisienter. *Horners regel.* Polynom divisjonsalgoritmen. Antall av røtter til polynom. Polynomer av to ukjente. Binomialformelen. *Polynomer av flere ukjente. Symmetriske polynomer*. Røtter og potenser med brøkeksponent. Potenser med rasjonal eksponent. Potenser med reel eksponent. Egenskaper av potenser med reel eksponent. **Logaritme**. Logaritmen av et tall. Den grunnleggende logaritmiske setningen. Logaritmen av et produkt, av en brøk og av en potens. Overgang til et nytt grunntall. Briggske logaritmer og naturlige logaritmer, tall e. Omforming av de elementære (enkleste) uttrykkene, som inneholder aritmetiske operasjoner, og i tillegg operasjoner med eksponenter og logaritmer.
FUNKSJONER	Funksjoner. Definisjonsmengden og verdimengden. Grafer til ulike funksjoner. Tegning av grafer til ulike funksjoner. Funksjonsegenskaper: kontinuitet, nullpunkt, bunnpunkt og toppunkt, maksimalverdi og minimalverdi, skjæringspunkt.

	Invers funksjon (omvendt funksjon). Definisjonsmengden og verdimengden for invers funksjon (omvendt funksjon). Grafen til invers funksjon (omvendt funksjon). Eksempler på funksjoner som beskriver praktiske problemstillinger. Potensfunksjoner, egenskaper og grafer. *Horisontale og vertikale asymptoter.* Trigonometriske funksjoner, egenskaper og grafer. Periodiske funksjoner. *Inverse trigonometriske funksjoner, egenskaper og grafer.* Eksponentialfunksjoner, egenskaper og grafer. Logaritmefunksjoner, egenskaper og grafer. Avbildninger/Transformasjoner av grafer (speiling, rotasjon), parallellforskyvning, skalering og symmetri av grafer til funksjoner.
LIKNINGER OG ULIKHETER	Likninger og ulikheter med eksponential- og logaritmefunksjoner, og trigonometriske funksjoner. Irrasjonale likninger og *ulikheter.* Hovedmetoder for løsning av ligningssystemer: innsettingsmetoden, algebraisk addisjon, bruk av nye ukjente. Likeverdighet av likninger, ulikheter og ligningssystemer. Ekvivalente likninger. Løsning av ligningssett med to likninger med to ukjente (enkelte typer). Løsning av ligningssett med to ulikheter med en ukjent Bevis av ulikheter. Ulikhet om aritmetisk middeltall og geometrisk middeltall. Grafisk løsning av likninger og ulikheter. Bruk av fortegnsskjema.

Oversikt over kunnskapene og ferdighetene (kompetansemål) som man skal kunne på slutten av allmenn grunnutdanning 10.-11. trinn, spesialiserende retning i den russiske allmennskolen:

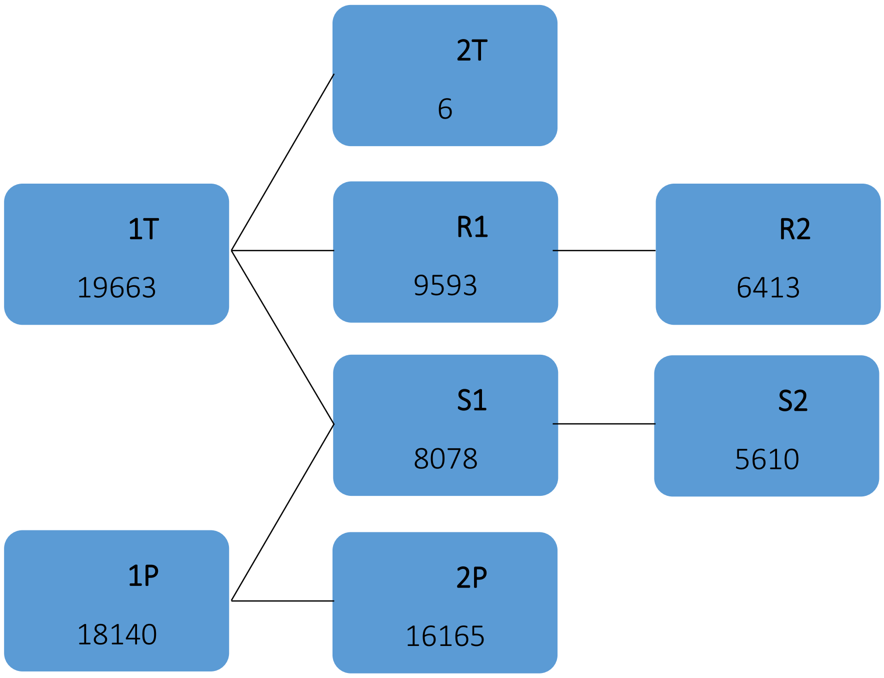
Emner	**Kompetansemål.** *Mål for opplæringen er at eleven skal kunne:*

TALL OG BOKSTAVUTTRYKK	-utføre aritmetiske operasjoner, kombinere muntlige og skriftlige metoder, finne verdiene av røtter og potenser med brøkeksponent, logaritmen, bruke digitale hjelpemidler, bruke evaluering og beregninger i praktiske sammenheng -bruke regler for divisjon for å løse matematiske oppgaver -finne røtter av polynomet med et ukjent -faktorisering av polynomer -utføre operasjoner med komplekse tall, bruke geometrisk tolkning av komplekse tall, finne komplekse røtter av likninger med reelle koeffisienter -utføre omforminger og utregninger av setninger med tall og bokstaver, inkludert potenser, logaritmer og trigonometriske funksjoner, ved hjelp av kjente formler og regler -bruke matematiske metoder og hjelpemidler til å løse problemer fra ulike samfunnsområder -uføre praktiske beregninger ved hjelp av formler, inkludert formler med potenser, logaritmer og trigonometriske funksjoner -bruke ved nødvendighet hjelpemidler og IT
FUNKSJONER OG GRAFER	-finne funksjonsverdi ved ulike representasjoner av funksjoner, som grafer, tabeller, formler og tekster -beskrive egenskaper til funksjoner ved hjelp av formler og grafer -beskrive og konstruere avbildninger (speiling, rotasjon), parallellforskyvning, skalering og symmetri av grafer til funksjoner -løse likninger, ulikheter og dens systemer ved bruk av egenskaper til funksjoner og geografisk tolkning til funksjoner -bruke kunnskaper i forskjellige praktiske virkelighetsnære situasjoner for å beskrive og undersøke forskjellige praktiske sammenhenger ved hjelp av funksjoner, -lage grafisk fremstilling av praktiske sammenhenger -fortolke grafer av praktiske virkelighetsnære prosesser

LIKNINGER OG ULIKHETER	-løse rasjonelle og irrasjonelle, eksponentielle og logaritmiske likninger og dens systemer -løse rasjonelle, eksponentielle og logaritmiske ulikheter og dens systemer -bevise enkle ulikheter -løse praktiske problemer ved hjelp av likninger og ulikheter og vurdere gyldigheten av løsningen -bruke koordinatsystem for å presentere løsningene av likninger og ulikheter av to ukjente og dens systemer -finne grafiske løsninger av likninger og ulikheter -løse likninger og ulikheter og dens systemer ved hjelp av funksjonens egenskaper, bruke grafiske metoder ved løsninger -bruke kunnskaper om likninger og ulikheter og dens systemer i praksis og i hverdagslige liv for å lage og utforske enkelte matematiske modeller

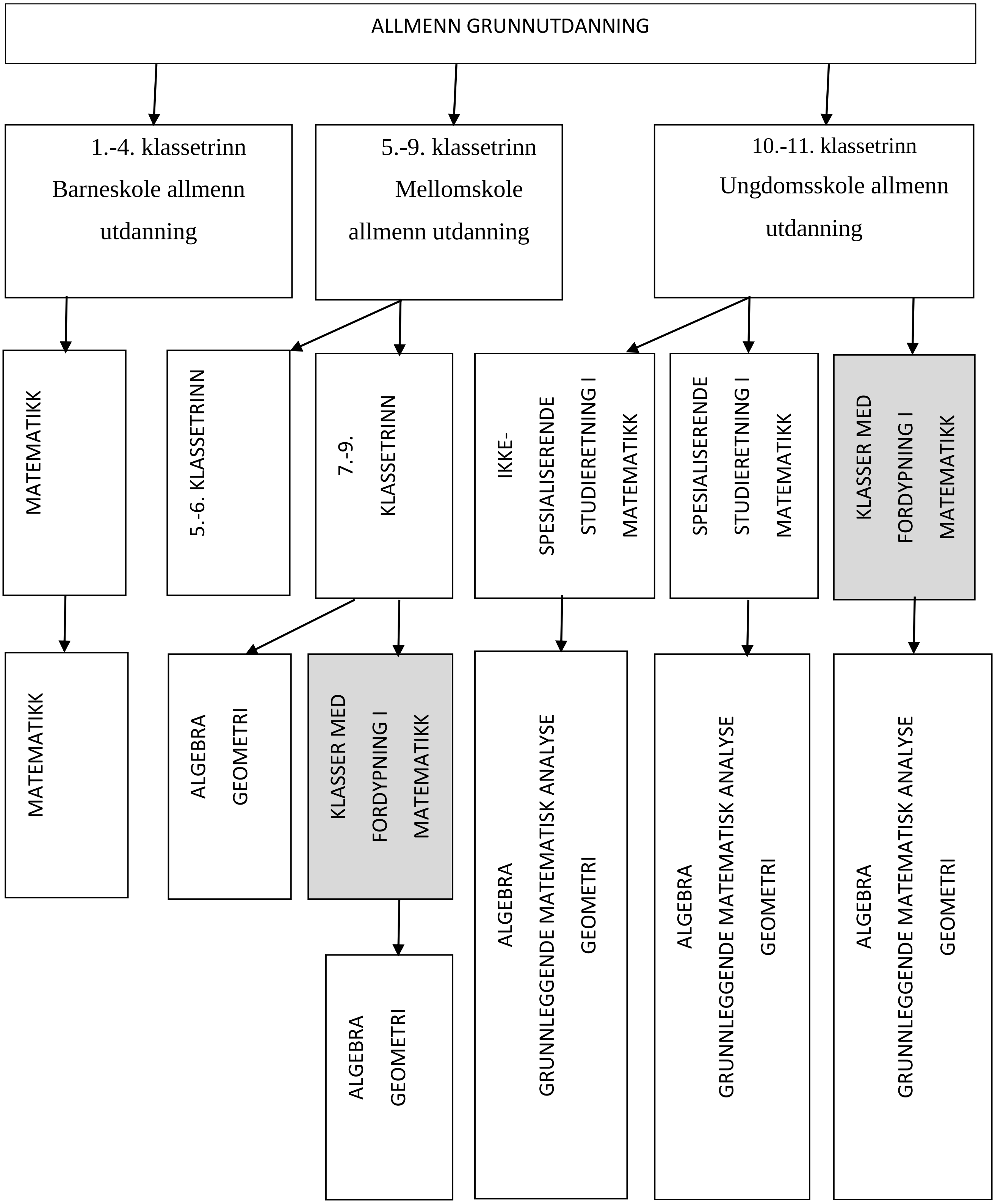
*Det som er merket med kursiv, er inkludert i undervisning, men tilhører ikke kompetansemål.

Vedlegg 5: De vanligste studieløpene i matematikk med elevantall i 2013/2014 på SSP



De vanligste studieløpene i matematikk med elevantall i 2013/2014 på SSP (UDIR, 2014):

Vedlegg 6. Struktur av matematikkundervisning i den russiske skolen



Struktur av matematikkundervisning i den russiske skolen (Bolotov et al., 2012, s.35).

Vedlegg 7. Utsnitt fra den russiske læreboken Matematikk for 11. trinn

Глава 5

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

Своё умение решать уравнения, неравенства и системы вы неоднократно демонстрировали в предшествующем курсе. В учебнике для 10 класса подробно рассматривались иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения. В этой главе будет немного повторения, но главное — это знакомство с некоторыми специальными приёмами, которые помогают при решении более трудных задач.

Алгебра создавалась и развивалась как наука о решении уравнений. Даже само слово «алгебра» является частью арабского названия часто используемого приёма при решении уравнений — переноса члена из одной части уравнения в другую с переменой его знака.

Наибольший интерес математиков привлекали так называемые *целые уравнения* с одной переменной, в левой части которых стоит целое выражение, а в правой — нуль.

Как вы знаете, любое целое выражение можно преобразовать в тождественно равный ему многочлен, поэтому можно сказать, что целое уравнение с одной переменной имеет вид $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен с одной переменной x. Напомним, что степенью такого многочлена называют степень его *старшего члена* — члена, содержащего переменную в наибольшей степени. Так, например, левая часть уравнения $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ — многочлен третьей степени. По степени этого многочлена и само уравнение называют уравнением третьей степени или кубическим уравнением. Вообще, уравнение, левая часть которого — многочлен n-й степени с одной переменной, а правая — нуль, называют *уравнением n-й степени*.

Уравнения первой степени имеют вид $ax + b = 0$, где $a \neq 0$. Такие уравнения вы начали решать ещё в начальной школе, а в 6 классе после знакомства с отрицательными числами могли решить любое уравнение первой степени.

Уравнения второй степени — квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, вы научились решать в 8 классе. Корни любого квадратного уравнения можно найти по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Решение уравнений, степень которых выше второй, обычно является значительно более трудной задачей. Покажем сначала, как можно найти целые корни целого уравнения.

14. Целые корни многочлена с целыми коэффициентами

Вы много раз с помощью теоремы Виета подбирали целые корни приведённых квадратных уравнений. Подбором можно находить целые корни целых уравнений и более высоких степеней.

Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда при любом целом значении переменной x значение этого многочлена — целое число. Нас интересуют корни уравнения $P(x) = 0$, т. е. значения x, обращающие многочлен $P(x)$ в нуль.

> Значения переменной, при которых значение многочлена равно нулю, называют ***корнями многочлена.***

Пример 1. Какие из чисел -2, 3, 17 являются корнями многочлена $P(x) = 4x^3 - 13x^2 + 5x - 6$?

Решение. Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно вычислить значения $P(-2)$, $P(3)$ и $P(17)$. Однако нас интересуют не столько сами значения многочлена, сколько равны ли они нулю.

1) При $x = -2$ все члены многочлена принимают отрицательные значения, поэтому значение многочлена отрицательно $P(-2) \neq 0$, и число -2 не является корнем многочлена $P(x)$.

2) $P(3) = 4 \cdot 3^3 - 13 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 6 = 4 \cdot 27 - 13 \cdot 9 + 15 - 6 = 108 - 117 + 15 - 6 = 0.$

Число 3 — корень многочлена $P(x)$.

3) При $x = 17$ все члены многочлена $P(x)$, содержащие x, делятся на 17, а свободный член, равный -6, на 17 не делится. Если бы число 17 было корнем многочлена $P(x)$, то выполнялось бы равенство $4 \cdot 17^3 - 13 \cdot 17^2 + 5 \cdot 17 - 6 = 0$.

Перенесём -6 в правую часть равенства, а в левой части вынесем множитель 17 за скобки: $(4 \cdot 17^2 - 13 \cdot 17 + 5) \cdot 17 = 6$. В левой части равенства после вычислений получится целое число, которое делится на 17, а число 6, стоящее в правой части равенства, на 17 не делится, значит, это равенство не верно. Но тогда не выполняется и равенство

$$4 \cdot 17^3 - 13 \cdot 17^2 + 5 \cdot 17 - 6 = 0,$$

а значит, 17 не является корнем многочлена $P(x)$.

Ответ: из данных чисел только число 3 является корнем многочлена $P(x)$.

Рассуждения, которые позволили нам без вычислений сделать вывод о том, что 17 не является корнем многочлена $P(x)$, можно дословно повторить для любого целого числа, которое не является делителем свободного члена этого многочлена. Более того, аналогичные рассуждения можно провести и для любого многочлена с целыми коэффициентами.

Пусть целое число k — корень многочлена с целыми коэффициентами $a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx + c$. Тогда из того, что $a_1k^n + a_2k^{n-1} + \ldots + a_nk + c = 0$, следует, что $(a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_n)k = -c$. Левая часть равенства делится на k, значит, на k должна делиться и правая часть равенства, т. е. на k должен делиться свободный член многочлена.

Это позволяет сформулировать важный вывод.

Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Значит, искать целые корни многочлена с целыми коэффициентами следует среди делителей его свободного члена.

Пример 2. Найти целые корни многочлена

$$Q(x) = 3x^3 - 8x^2 + 3x + 2.$$

Решение. Число 2 имеет 4 делителя: 1, -1, 2 и -2. Однако делители свободного члена — это ещё не корни, а лишь кандидаты в корни. Вычисляем соответствующие значения многочлена:

$Q(1) = 3 - 8 + 3 + 2 = 0,$ $\quad Q(-1) = -3 - 8 - 3 + 2 \neq 0,$

$Q(2) = 24 - 32 + 6 + 2 = 0,$ $\quad Q(-2) = -24 - 32 - 6 + 2 \neq 0.$

Ответ: многочлен $Q(x)$ имеет два целых корня 1 и 2.

▼ Перебирая корни, можно найти не только целые, но и дробные корни многочлена, если у него они есть. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное число, является корнем многочлена $3x^3 - 8x^2 + 3x + 2$, т. е. выполняется равенство

$$3\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 8\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 3\left(\frac{p}{q}\right) + 2 = 0.$$

Умножим обе части этого равенства на q^3, получим

$$3p^3 - 8qp^2 + 3q^2p + 2q^3 = 0$$

и преобразуем его левую часть

$$3p^3 + q(-8p^2 + 3qp + 2q^2) = 0.$$

Сумма и второе слагаемое левой части делятся на q, значит, и первое слагаемое $3p^3$ делится на q. Поскольку p^3 не имеет с q общих делителей, значит, на q делится число 3. Таким образом, знаменатель искомой дроби должен быть равен 3, поскольку все целые корни (дроби со знаменателем 1) уже найдены.

Сгруппировав члены многочлена иначе, получим равенство $p(3p^2 - 8qp + 3q^2) + 2q^3 = 0$. Из этого равенства такими же, как и в предыдущем случае, рассуждениями, получим, что 2 должно делиться на p. Значит, претендовать на роль дробного корня могут четыре числа: $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$. Подставляя их в многочлен и вычисляя его значение, получим, что только $-\frac{1}{3}$ является корнем.

Проведённые рассуждения позволяют сформулировать важное свойство дробного корня многочлена.

Если несократимая дробь является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то её знаменатель является делителем старшего коэффициента, а числитель — делителем свободного члена этого многочлена. △

Vedlegg 8. Utsnitt fra den norske læreboken Sigma R1

4.4 Likninger og ulikheter med polynomer

Du skal lære
- å løse likninger og ulikheter med polynomer ved å bruke nullpunktsetningen

EKSEMPEL 7

a) Finn en løsning til $x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = 0$ ved å prøve deg fram.

b) Løs likningen $x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = 0$ ved regning.

c) Løs ulikheten $x^3 - 6x^2 + 7x + 4 \leq 0$ ved regning.

Løsning:

a) Vi prøver med ulike verdier av x og finner at $x = 4$ gir

$$4^3 - 6 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 4 = 0$$

Altså vet vi at $x = 4$ er en løsning til likningen.

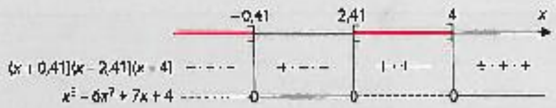
b) Fra a vet vi at $x^3 - 6x^2 + 7x + 4$ er delelig med $x - 4$.
Vi dividerer og får $(x^3 - 6x^2 + 7x + 4) : (x - 4) = x^2 - 2x - 1$.
Da vet vi at $x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = (x^2 - 2x - 1)(x - 4)$.
Altså vet vi at $x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 1)(x - 4) = 0$.
Her gir produktsetningen at

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{eller} \quad x - 4 = 0$$

Vi løser andregradslikningen med et digitalt verktøy og finner at
$x \approx 2,41$, $x \approx -0,41$ eller $x = 4$.

c) Vi må finne fortegnslinja for $x^3 - 6x^2 + 7x + 4$.
Uttrykket er lik null når $x \approx -0,41$, $x \approx 2,41$ og $x = 4$.
Disse nullpunktene merker vi av på fortegnslinja.
Så regner vi ut fortegnet i hvert område.
Dette kan vi gjøre ved å bruke et digitale verktøy til å regne ut funksjonsverdier i hvert område.

Når vi faktoriserer tredjegradsuttrykket, kan vi også finne fortegnene ved regning. En x-verdi til venstre for $-0,41$ er $x = -1$. Da blir fortegnene til faktorene i $(x + 0,41)(x - 2,41)(x - 4)$ lik $- \cdot - \cdot -$. Altså blir fortegnet til produktet minus. Tilsvarende kan vi tenke i de andre områdene. Vi viser fortegnene på figuren.

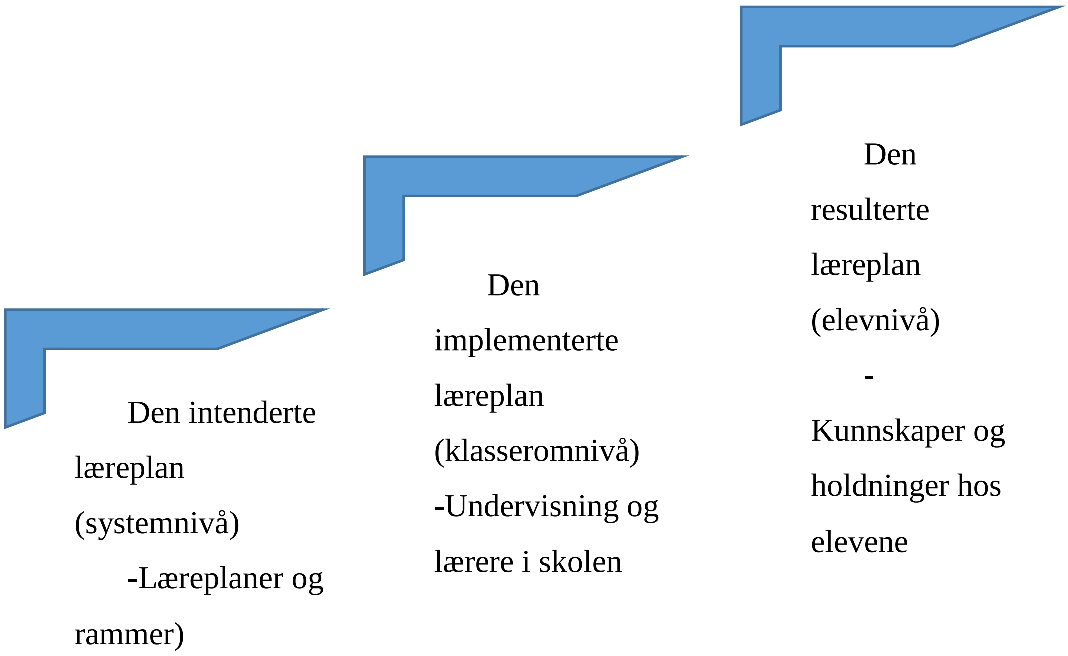


Vi leser av svaret: $x \in \langle \leftarrow, -0,41] \cup [2,41, 4]$.

PRODUKTSETNINGEN
$a \cdot b = 0$
$\Updownarrow$
$a = 0$ eller $b = 0$

Vi kan løse tredjegradslikninger på et digitalt verktøy.

Vedlegg 9. Læreplanens tre nivåer



Læreplanens tre nivåer (Gjone, 2003; Grønmo, 2010)

Vedlegg 10. Oversikt over delkapitlene i lærebøkene

Tabell 1: Oversikt over delkapitler i Sinus 1T

Delkapittel	**Tema**
3.1	Likninger
3.7	To lineære likninger med to ukjente
3.8	Ulikheter
4.3	Grafisk løsning av andregradslikninger
4.4	Andregradslikninger med to ledd
4.5	Andregradsformelen
4.6	Mer om andregradslikninger
4.7	Ikke-lineære likningssett
4.9	Andregradsulikheter
5.8	Eksponentiallikninger
5.9	Logaritmelikninger

Tabell 2: Oversikt over delkapitler i Sigma 1T

Delkapittel	**Tema**
1.6	Likninger
2.4	Lineære likningssett. Addisjonsmetoden. Innsettingsmetoden
2.5	Grafisk løsning av lineære likningssett. Løsning med digitale verktøy
2.8	Sammensatte eksempler
3.7	Eksponentiallikninger
3.9	Logaritmelikninger
5.2	Kvadratiske likninger og produktregelen
5.8	Løsningsformel for andregradslikninger
5.9	Bruk av andregradslikninger
5.10	Likninger med brøker
5.14	Likningssett som ikke er lineære
5.15	Sammensatte eksempler
7.1	Lineære ulikheter. Fortegnslinjer

7.2	Løsning av ulikheter ved hjelp av fortegnslinjer

Tabell 3: Oversikt over delkapitler i GMA 10.trinn

Delkapittel	**Tema**
3	Kontinuerlige og monotone funksjoner
5	Potensfunksjon
6	Rotfunksjon
9	Eksponentialfunksjon
10	Logaritme
11	Logaritmefunksjon
26	Trigonometriske likninger
30	Likninger og ulikheter

Tabell 4: Oversikt over delkapitler i Sinus R1

Delkapittel	**Tema**
1.1	Logikk (ekvivalente/likeverdige likninger)
1.7	Likninger og ulikheter
1.8	Rasjonale likninger
1.9	Rasjonale ulikheter
2.2	Eksponentiallikninger
2.3	Eksponentielle ulikheter
2.4	Likninger og ulikheter med lg x
2.6	Bruk av den naturlige logaritmen
2.7	Likninger og ulikheter med ln x

Tabell 5: Oversikt over delkapitler i Sigma R1

Delkapittel	**Tema**
2.3	Irrasjonale likninger
4.4	Likninger og ulikheter med polynomer
4.5	Likninger løst med substitusjon. Brøklikninger
4.6	Brøkulikheter

4.7	Logaritmesetningene
4.8	Likninger med logaritmer
4.10	Likninger med naturlige logaritmer
4.11	Uttrykk og likninger med tallet ℓ
4.12	Ulikheter med eksponentialfunksjoner og logaritmer
4.13	Sammensatte eksempler

Tabell 6: Oversikt over delkapitler i GMA 11.trinn

Delkapittel	**Tema**
14	Heltallige røtter av polynomer med heltallige koeffisienter
15	Polynom divisjonsalgoritmen
16	Likninger og ulikheter
17	Systemer av likninger og ulikheter
18	Oppgaver med parameter
21	Kubiske likninger
26	Algebraisk form av komplekse tall
30	Geometrisk tolkning av komplekse tall

Vedlegg 11. Analyseskjemaet – Sinus 1T

					HEURISTISKE METODER															
					1	2			3			4	5	6	7	8	9	10	11	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell			Lag en illustrasjon			Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en anne side	Bruk digitale hjelpemidler	Introduser hjelpeelementer	
						a1	a2	b	a1	a2	b									Sum
1. Tallregning og algebra	1.1	Regnerekkefølge	Eks 1	10																**0**
	1.2	Brøkregning	Eks 2	12																**0**
			Eks 3	13													1			**1**
			Eks 4	15																**0**
	1.3	Bokstavregning og paranteser	Eks 5	16												1				**1**
			Eks 6	17												1	1			**2**
	1.4	Rasjonale uttrykk	Eks 7	19												1	1			**2**
			Eks 8	20												1				**1**
			Eks 9	21												1				**1**
	1.5	Kvadratsetningene	Eks 10	23												1				**1**
			Eks 11	24												1				**1**
			Eks 12	25	1					1							1			**3**
	1.6	Faktorisering	Eks 13	27																**0**
			Eks 14	28	1													1		**2**
	1.7	Forkorting av rasjonale uttrykk	Eks 14	29	1					1							1			**3**
			Eks 15	30	1													1		**2**
	1.8	Fullstendige kvadrater	Eks 16	32																**0**
	1.9	Metoden med fullstendige kvadrater	Eks 17	35	1															**1**
			Eks 18	36	1															**1**
			Eks 19	37	1															**1**
3. Førstegradsuttrykk	3.1	Likninger	Eks 1	72													1			**1**
			Eks 2	74													1			**1**
			Eks 3	74													1	1		**2**
	3.2	Formler	Eks 4	77						1										**1**
			Eks 5	78																**0**
			Eks 6	80						1										**1**
	3.3	Rette linjer	Eks 7	85							1									**1**
	3.4	Digital graftegning	Eks 8	88							1							1		**2**
	3.5	Å finne likningen for ei linje	Eks 9	90							1		1					1		**3**
			Eks 10	93																**0**
			Eks 11	94																**0**
			Eks 12	95																**0**
	3.6	Grafisk avlesing	Eks 13	96							1							1		**2**
			Eks 14	98							1							1		**2**
	3.7	To lineære likninger med to ukjente	Eks 15	100							1						1	1		**3**
			Eks 16	102							1		1			1		1		
	3.8	Ulikheter	Eks 16	105												1		1		**2**
			Eks 17	106																**0**
	4.2	Andregradsfunksjoner	Eks 1	116				1			1							1		
4. Funksjoner og andregradsuttrykk	4.3	Grafisk løsning av andregradslikninger	Eks 2	123							1									**1**
			Eks 3	125							1									**1**
			Eks 4	126							1							1		**2**
	4.4	Andregradslikninger med to ledd	Eks 5	128							1						1			**2**
			Eks 6	131	1															**1**
	4.5	Andregradsformelen	Eks 7	132							1							1		**2**
			Eks 8	135												1				**1**
	4.6	Mer om andregradslikninger	Eks 9	138							1		1							**2**
			Eks 10	139							1						1	1		**3**
	4.7	Ikke-lineære likningssett	Eks 11	142									1							**1**
			Eks 12	143							1		1			1		1		**4**
	4.8	Faktorisering av andregradsuttrykk	Eks 13	146									1					1		**2**
			Eks 14	148								1								**1**
			Eks 15	149						1		1	1			1				**4**
	4.9	Andregradsulikheter	Eks 16	151							1									**1**
			Eks 17	153							1		1							**2**
			Eks 18	154							1		1				1	1		**4**
5. Potenser og logaritmer	5.1	Potenser	Eks 1	160																**0**
			Eks 2	161																**0**
			Eks 3	163	1															**1**
			Eks 4	163																**0**
			Eks 5	164																**0**
	5.2	Regneregler for potenser	Eks 6	165																**0**
			Eks 7	166												1				**1**
			Eks 8	167												1				**1**
	5.3	Tall på standardfom	Eks 9	168						1										**1**
			Eks 10	168						1										**1**
			Eks 11	169																**0**
			Eks12	170																**0**
	5.4	Kvadratrøtter og røtter av høyere orden	Eks 13	172																**0**
			Eks 14	173																**0**
			Eks 15	173																**0**
			Eks 16	174														1		**1**
	5.5	Potenser med en brøk som eksponent	Eks 17	175														1		**1**
			Eks 18	176												1				**1**
			Eks 19	177																**0**
			Eks 20	178														1		**1**
	5.6	Prosentregning	Eks 21	179											1					**1**
			Eks 22	180											1					**1**
			Eks 23	182											1					**1**
			Eks 24	184											1					**1**
	5.7	Logaritmer	Eks 25	185	1															**1**
			Eks 26	186																**0**
			Eks 27	187																**0**
			Eks 28	187																**0**
			Eks 29	187																**0**
	5.8	Eksponentiallikninger	Eks 30	188																**0**
			Eks 31	189														1		**1**
			Eks 32	190						1										**1**
			Eks 33	191						1										**1**
			Eks 34	192	1											1				**2**
			Eks 35	193	1					1						1				**3**
	5.9	Logaritmelikninger	Eks 36	194														1		**1**
			Eks 37	195												1				**1**
7. Funksjoner og modeller	7.1	Lineære modeller	Eks 1	230		1					1								1	**3**
	7.2	Lineær regresjon	Eks 2	233		1					1							1	1	**4**
	7.3	Polynomfunksjoner	Eks 3	236							1							1		**2**
			Eks 4	238							1							1		**2**
	7.4	Eksponentialfunksjoner	Eks 5	241							1							1		**2**
			Eks 6	242						1	1						1	1		**4**
			Eks 7	244							1							1		**2**
	7.5	Potensfunksjoner	Eks 8	247						1	1							1		**3**
			Eks 9	249							1							1		**2**
			Eks 10	250							1							1		**2**
	7.6	Rasjonale funksjoner	Eks 11	254							1									**1**
			Eks 12	256							1							1		**2**
8. Vekstfart og derivasjon	8.1	Gjennomsnittig vekstfart	Eks 1	263							1									**1**
	8.2	Momentan vekstfart	Eks 2	266							1							1		**2**
	8.4	Vekstfart som grenseverdi	Eks 4	273							1		1							**2**
	8.6	Noen derivasjonsregler	Eks 7	279																**0**
			Eks 8	280							1									**1**
			Eks 9	281						1								|		**1**
	8.7	Funksjonsdrøfting	Eks 10	286				1			1							1		**3**
			Eks 11	290							1									**1**
	8.8	Optimering	Eks 12	291						1	1									**2**
			Eks 13	291							1		1							**2**
	8.9	Mer om optimering	Eks 14	294					1		1		1					1		**4**
		SUM	**116**		**12**	**2**	**0**	**2**	**1**	**14**	**40**	**2**	**12**	**0**	**4**	**18**	**13**	**35**	**2**	
							4			**55**										

Vedlegg 12. Analyseskjemaet – Sinus R1

					HEURISTISKE METODER															
					1	2			3			4	5	6	7	8	9	10	11	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell			Lag en illustrasjon			Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en anne side	Bruk digitale hjelpemidler	Introduser hjelpeelementer	
						a1	a2	b	a1	a2	b									**Sum**
1. Algebra	1.1	Logikk	Eks 1	12												1				**1**
	1.2	Mengdelære	Eks 2	17							1									**1**
	1.3	Noen bevismetoder	Eks 3	19	1															**1**
			Eks 4	20	1												1			**2**
			Eks 5	21																**0**
	1.4	Polynomdivisjon	Eks 6	24																**0**
			Eks 7	25																**0**
			Eks 8	26																**0**
			Eks 9	26																**0**
	1.5	Resten ved en polynomdivisjon	Eks 10	28																**0**
			Eks 11	29																**0**
			Eks 12	30																**0**
	1.6	Faktorisering av polynomer	Eks 13	32									1							**1**
			Eks 14	34									1							**1**
			Eks 15	34									1					1		**2**
			Eks 16	36									1			1				**2**
			Eks 17	37																**0**
			Eks 18	37									1			1		1		**3**
	1.7	Likninger og ulikheter	Eks 19	39							1		1							**2**
			Eks 20	40							1		1							**2**
			Eks 21	42							1		1							**2**
			Eks 22	43							1		1					1		**3**
	1.8	Rasjonale likninger	Eks 23	46	1											1				**2**
			Eks 24	47									1			1				**2**
			Eks 25	48									1			1		1		**3**
	1.9	Rasjonale ulikheter	Eks 26	52							1		1			1				**3**
			Eks 27	53							1		1			1		1		**4**
2. Logaritmer	2.1	Briggske logaritmer	Eks 1	59																**0**
			Eks 2	61												1				**1**
	2.2	Eksponentiallikninger	Eks 3	63	1															**1**
			Eks 4	64						1							1	1		**3**
			Eks 5	65																**0**
	2.3	Eksponentielle ulikheter	Eks 6	66	1											1				**2**
			Eks 7	68							1		1							**2**
			Eks 8	69							1		1			1			1	**4**
	2.4	Likninger og ulikheter med lg x	Eks 9	71												1	1	1		**3**
			Eks 10	72												1				**1**
			Eks 11	73														1		**1**
			Eks 12	74	1						1									**2**
	2.5	Den naturlige logaritmen	Eks 13	78							1		1					1		**3**
	2.6	Bruk av den naturlige logaritmen	Eks 14	81							1					1		1		**3**
			Eks 15	83	1						1		1			1		1		**5**
	2.7	Likninger og ulikheter med ln x	Eks 16	85							1					1				**2**
			Eks 17	86												1				**1**
			Eks 18	87							1							1		**2**
			Eks 19	88	1						1		1							**3**
7. Funksjonslære	7.1	Grenseverdier	Eks 1	257									1							**1**
			Eks 2	259																**0**
	7.2	Kontinuerlige funksjoner	Eks 3	260																**0**
			Eks 4	261																**0**
			Eks 5	262																**0**
			Eks 6	264				1			1		1					1		**4**
	7.3	Vertikale asymptoter	Eks 7	268							1									**1**
			Eks 8	268							1		1							**2**
			Eks 9	270							1									**1**
	7.4	Horisontale og skrå asymptoter	Eks 10	273							1		1							**2**
			Eks 11	274							1		1					1		**3**
	7.5	Derivasjon	Eks 12	279							1		1					1		**3**
	7.6	Derivasjon av polynomer	Eks 13	282																**0**
			Eks 14	282							1		1							**2**
			Eks 15	284						1										**1**
	7.7	Funksjonsdrøfting	Eks 16	289							1		1					1		**3**
			Eks 17	291							1		1							**2**
	7.8	Krumning og vendepunkter	Eks 18	295							1		1					1		**3**
			Eks 19	298						1	1									**2**
	7.9	Fart og akselerasjon	Eks 20	302																**0**
		SUM	**66**		**8**	**0**	**0**	**1**	**0**	**3**	**28**	**0**	**28**	**0**	**0**	**17**	**3**	**17**	**1**	
						1			**31**											

Vedlegg 13. Analyseskjemaet –Sigma 1T

					HEURISTISKE METODER															
					1	2			3			4	5	6	7	8	9	10	11	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell			Lag en illustrasjon			Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en anne side	Bruk digitale hjelpemidler	Introduser hjelpeelementer	
						a1	a2	b	a1	a2	b									Sum
1. Matematikken rundt oss	1.1	Veien om 1 - en nyttig framgangsmåte	Eks 1	10						1										1
			Eks 2	10						1										1
			Eks 3	11						1			1							2
	1.2	Prosent	Eks 4	12					1								1			2
			Eks 5	12									1				1			2
			Eks 6	13									1				1			2
			Eks 7	13									1							1
	1.3	Regnerekkefølge og fortegn	Eks 8	14																0
			Eks 9	14												1				1
			Eks 10	15																0
			Eks 11	15																0
	1.4	Regning med brøk	Eks 12	16																0
			Eks 13	16													1			1
			Eks 14	17						1										1
			Eks 15	17									1							1
	1.5	Grunnleggende algebra	Eks 16	18																0
			Eks 17	18																0
			Eks 18	19	1											1	1			3
	1.6	Likninger	Eks 19	20																0
			Eks 20	21						1			1							2
	1.7	Kvadratrøtter	Eks 21	22																0
			Eks 22	22																0
			Eks 23	23												1				1
	1.8	Dekadiske målenheter, Nøyaktighet	Eks 24	24																0
			Eks 25	25																0
			Eks 26	25																0
	1.12	Vekstfaktor	Eks 34	32									1							1
			Eks 35	32									1							1
			Eks 36	33						1			1							2
			Eks 37	33									1							1
	1.13	Linært forholdstall	Eks 38	34						1										1
			Eks 39	35									1							1
	1.14	Sammensatte eksempler	Eks 40	36													1			1
			Eks 41	36									1							1
			Eks 42	36					1											1
			Eks 43	37							1		1							2
			Eks 44	37					1											1
			Eks 45	37	1											1				2
2. Lineære funksjoner	2.1	Funksjonsbegrepet	Eks 1	60																0
			Eks 2	61				1			1									2
	2.2	Linære funksjner	Eks 3	62																0
			Eks 4	63				1			1						1			3
			Eks 5	63					1											1
	2.3	Formel for stigningstallet	Eks 6	64																0
			Eks 7	64					1											1
			Eks 8	65						1										1
	2.4	Linære likningssett. Addisjonsmetoden. Innsettingsmetoden	Eks 9	66												1				1
			Eks 10	67																0
	2.5	Grafisk løsning av linære likningssett. Løsning med digitale verktøy	Eks 11	68				1			1									2
			Eks 12	69							1							1		2
	2.6	Ettpunktsformelen	Eks 13	70							1									1
			Eks 14	71						1										1
	2.7	Linær regresjon	Eks 15	73						1										1
	2.8	Sammensatte eksempler	Eks 16	74				1			1									2
			Eks 17	74							1									1
			Eks 18	75						1										1

					1	2			3			4	5	6	7	8	9	10	11	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell			Lag en illustrasjon			Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en anne side	Bruk digitale hjelpemidler	Introduser hjelpeelementer	
						a1	a2	b	a1	a2	b									Sum
3. Potenser. Logaritmer. Eksponentiell vekst	3.1	Potenser med positive eksponenter	Eks 1	90																0
			Eks 2	91																0
			Eks 3	91																0
	3.2	Eksponenter lik null. Negative eksponenter	Eks 4	92																0
			Eks 5	93												1				1
	3.3	Store og små tall	Eks 6	94																0
			Eks 7	94														1		1
			Eks 8	95														1		1
			Eks 9	95						1										1
	3.4	n-te røtter. Ukjent vekstfaktor	Eks 10	96												1				1
			Eks 11	96																0
			Eks 12	97						1						1				2
	3.5	Potenser med brøkeksponenter. Potensfunksjoner	Eks 13	98																0
			Eks 14	99												1				1
			Eks 15	99				1			1									2
	3.6	Logaritmer	Eks 16	100																0
			Eks 17	100	1															1
			Eks 18	101						1								1		2
			Eks 19	101														1		1
	3.7	Eksponentiallikninger	Eks 20	102												1				1
			Eks 21	103									1							1
			Eks 22	103																0
	3.8	Eksponentialfunksjoner	Eks 23	105							1									1
	3.9	Logaritmelikninger	Eks 24	106												1				1
			Eks 25	107						1										1
	3.10	Sammensatte eksempler	Eks 26	108				1			1									2
			Eks 27	109				1			1									2
5. Algebra	5.2	Kvadratiske likninger og produktregelen	Eks 1	162																0
			Eks 2	163	1															1
	5.3	Kvadratiske likninger og produktregelen	Eks 3	164						1							1			2
			Eks 4	165				1		1							1			3
	5.4	Konjugatsetningen	Eks 5	166																0
			Eks 6	166	1															1
			Eks 7	167	1											1				2
	5.5	Første og andre kvadratsetning	Eks 8	168																0
			Eks 9	169																0
			Eks 10	169	1												1			2
	5.6	Første og andre kvadratsetning	Eks 11	170																0
			Eks 12	170																0
			Eks 13	171	1								1							2
			Eks 14	171	1								1							2
	5.7	Faktorisering og forkorting av brøkuttrykk	Eks 15	172	1											1	1			3
			Eks 16	173	1								1			1				3
	5.8	Løsningsformel for andregradslikninger	Eks 17	174																0
			Eks 18	174																0
			Eks 19	175													1	1		2
	5.9	Bruk av andregradslikninger	Eks 20	176						1							1	1		3
			Eks 21	176	1						1									2
			Eks 22	177				1										1		2
	5.10	Likninger med brøker	Eks 23	178														1		1
			Eks 24	178												1				1
			Eks 25	179																0
			Eks 26	179												1				1

					1	2			3			4	5	6	7	8	9	10	11	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell			Lag en illustrasjon			Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en anne side	Bruk digitale hjelpemidler	Introduser hjelpeelementer	
						a1	a2	b	a1	a2	b									Sum
	5.11	Sammentrekking av uttrykk med den ukjente i nevneren	Eks 27	180												1				1
			Eks 28	180	1											1				2
			Eks 29	181						1										1
	5.12	Brudden brøk	Eks 30	182													1			1
			Eks 31	182	1											1				2
			Eks 32	183	1											1				2
	5.13	Faktoriseringsformel for andregradsuttrykk	Eks 33	184												1				1
			Eks 34	185	1								1			1				3
	5.14	Likningssett som ikke er linære	Eks 35	186							1		1				1			3
	5.15	Sammensatte eksempler	Eks 36	188	1											1	1			3
			Eks 37	188	1															1
			Eks 38	189									1							1
7. Grafer og ulikheter	7.1	Linære ulikheter. Fortegnslinjer	Eks 1	242																0
			Eks 2	243							1									1
	7.2	Løsing av ulikheter ved hjelp av fortegnslinjer	Eks 3	244							1									1
			Eks 4	245							1									1
	7.3	Definisjonsmengde og verdimengde	Eks 5	247																0
	7.4	Parabler	Eks 6	248									1							1
			Eks 7	249				1			1									2
	7.5	Bruksområder for andregradsfunksjoner	Eks 8	250				1		1	1									3
			Eks 9	250						1	1							1		3
	7.6	Rasjonale funksjoner i praktiske situasjoner	Eks 10	252						1	1									2
			Eks 11	253							1						1	1		3
	7.7	Hyperbler. Asymptoter	Eks 12	255				1			1									2
	7.8	Rotfunksjoner. Sammensatte funksjoner	Eks 13	256					1		1							1		3
			Eks 14	257						1	1							1		3
	7.9	Sammensatte eksempler	Eks 15	258							1						1			2
			Eks 16	259							1					1				2
8. Derivasjon	8.1	Informasjon fra grafer	Eks 1	276							1							1		2
	8.5	Den deriverte av polynomfunksjoner. Tangent	Eks 7	284																0
			Eks 8	285							1							1		2
	8.6	Drøfting av polynomfunksjoner	Eks 9	287							1							1		2
	8.7	Vi lager uttrykk og finner største eller minste verdi	Eks 10	289					1		1									2
	8.10	Sammensatte eksempler	Eks 13	294							1							1		2
		SUM	143		18	0	0	#	7	#	#	0	21	0	0	24	18	17	0	
						12			62											

Vedlegg 14. Analyseskjemaet –Sigma R1

					HEURISTISKE METODER															
					1	2			3			4	5	6	7	8	9	10	11	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell			Lag en illustrasjon			Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en anne side	Bruk digitale hjelpemidler	Introduser hjelpeelementer	
						a1	a2	b	a1	a2	b									Sum
2. Bevis og bevisføring	2.1	Logikk	Eks 1	51																0
	2.2	Implikasjon og ekvivalens	Eks 2	52						1										1
			Eks 3	52																0
			Eks 4	53																0
	2.3	Irrasjonale likninger	Eks 5	55																0
	2.4	Bevis. Direkte bevis	Eks 6	56	1															1
			Eks 7	57	1						1									2
	2.5	Andre bevisformer	Eks 8	58	1							1								2
			Eks 9	58	1												1			2
			Eks 10	59	1															1
	2.6	Vi øver på bevis	Eks 11	60	1															1
			Eks 12	61	1															1
			Eks 13	61	1											1				2
	2.8	Sammensatte eksempler	Eks 16	65	1															1
4. Algebra	4.1	Andregradsuttrykk	Eks 1	120	1											1				2
			Eks 2	121	1											1				2
	4.2	Polynomdivisjon	Eks 3	123																0
	4.3	Nullpunktsetning. Faktorisering	Eks 4	124																0
			Eks 5	124																0
			Eks 6	125																0
	4.4	Likninger og ulikheter med polynomer	Eks 7	126							1	1					1			3
	4.5	Likninger løst med substitusjon	Eks 8	128												1				1
		Brøklikninger	Eks 9	129	1			1								1				3
	4.6	Brøkulikheter	Eks 10	130							1		1							2
			Eks 11	131							1		1			1				3
	4.7	Logaritmesetningene	Eks 12	132																0
			Eks 13	132												1				1
			Eks 14	133												1				1
	4.8	Likninger med logaritmer	Eks 15	134												1				1
			Eks 16	134																0
			Eks 17	135																0
	4.9	Tallet e. Naturlige logaritmer	Eks 18	136	1													1		2
			Eks 19	137																0
			Eks 20	137												1				1
	4.10	Likninger med naturlige logaritmer	Eks 21	138																0
			Eks 22	138												1				1
			Eks 23	139																0
	4.11	Uttrykk og likninger med tallet e	Eks 24	140						1								1		2
			Eks 25	140														1		1
			Eks 26	141																0
			Eks 27	141												1				1
	4.12	Ulikheter med eksponentialfunksjoner og logaritmer	Eks 28	142																0
			Eks 29	142																0
			Eks 30	143	1						1		1							3
	4.13	Sammensatt eksempler	Eks 31	144							1		1		1	1				4
6. Funksjonsdrøfting	6.1	Andrederivert. Krumning. Vendepunkt	Eks 1	192																0
			Eks 2	193							1							1		2
	6.2	Drøfting av polynomfunksjoner	Eks 3	194				1			1		1	1				1		5
	6.3	Størst eller minst vekst	Eks 4	196						1	1							1		3
	6.4	Asymptoter	Eks 5	199							1									1
	6.5	Drøfting av rasjonale funksjoner	Eks 6	200				1			1							1		3
			Eks 7	200							1					1				2
	6.6	Drøfting av eksponentialfunksjoner	Eks 8	202							1									1
			Eks 9	202							1									1
	6.7	Drøfting av logaritmefunksjoner	Eks 10	204							1									1
			Eks 11	204							1							1		2
	6.8	Drøfting av vektorfunksjoner	Eks 12	206							1							1		2
	6.9	Kontinuitet og deriverbarhet	Eks 13	209																0
	6.10	Sammensatte eksempler	Eks 14	210					1		1									2
			Eks 15	210						1	1									2
		SUM	**60**		**14**	**0**	**0**	**3**	**1**	**4**	**19**	**2**	**5**	**1**	**1**	**14**	**2**	**9**	**0**	
						3			**24**											

Vedlegg 15. Analyseskjemaet – AGMA 10.trinn

					1	2			3			4	5	6	7	8	9	10	11	
Kap.	Del-kap.	Tema	Eks.	Side	Se etter et mønster	Lag en systematisk tabell			Lag en illustrasjon			Prøv og feil	Løs deler av problemet	Jobb baklengs	Tenk på et liknende problem	Gjør problemet enklere	Se problemet fra en anne side	Bruk digitale hjelpemidler	Introduser hjelpeelementer	
						a1	a2	b	a1	a2	b									Sum
1. Funksjoner og grafer	1	Funksjonsbegrepet	Eks 1	9																0
			Eks 2	9					1											1
			Eks 3	10					1											1
	2	Rette linjer, hyperbel, parabel og sirkel	Eks 1	16																0
			Eks 2	19																0
			Eks 3	19							1									1
	3	Kontinuerlige funksjoner og monotoniegensk	Eks 1	25							1									1
			Eks 2	27							1									1
			Eks 3	30								1					1			2
	4	Kvadratiske funksjoner og rasjonale funksjoner.	Eks 1	37							1			1		1				3
			Eks 2	38							1						1			2
			Eks 3	39							1					1				2
			Eks 4	40									1							1
2. Potenser og røtter	5	Potensfunksjon	Eks 1	48																0
			Eks 2	48									1							1
	6	n-te røtter	Eks 1	55							1		1							2
			Eks 2	56								1				1	1			3
			Eks 3	57								1	1							2
	7	Egenskaper til arikmetiske røtter	Eks 1	62																0
			Eks 2	62																0
			Eks 3	62									1			1				2
			Eks 4	63												1				1
			Eks 5	63									1							1
	8	Potenser med rasjonale eksponenter	Eks 1	69							1		1			1		1		4
			Eks 2	70									1							1
3. Eksponentialfunksjon og lo	9	Funksjon $y=a^x$	Eks 1	79															1	1
			Eks 2	80									1							1
			Eks 3	80							1								1	2
	10	Logaritmebegrepet	Eks 1	89													1		1	2
			Eks 2	89									1							1
			Eks 3	90									1							1
	11	Egenskaper til logaritmer	Eks 1	96													1			1
			Eks 2	97													1			1
			Eks 3	98									1						1	2
			Eks 4	100														1	1	2
4. Trigonometriske funksjoner c	18	Egenskaper og grafen til funksjon $y=\sin x$	Eks 1	148	1															1
			Eks 2	148	1															1
	19	Egenskaper og grafen til funksjon $y=\cos x$	Eks 1	152	1															1
			Eks 2	153							1		1						1	3
	20	Egenskaper og grafen til funksjon $y=\mathrm{tg}\,x$	Eks 1	161																0
			Eks 2	161																0
	26	Trigonometriske likninger	Eks 1	194															1	1
			Eks 2	196									1						1	2
			Eks 3	196	1										1					2
			Eks 4	197	1										1		1			3
			Eks 5	197							1						1		1	3
			Eks 6	199	1															
6. Repetisjon	29	grafer	Eks 1	220							1		1							2
	30	Likninger og ulikheter	Eks 1	238													1			1
			Eks 2	239															1	1
		SUM	**50**		**6**	**0**	**0** **0**	**0**	**2**	**0** **14**	**#**	**3**	**15**	**1**	**2**	**6**	**9**	**2**	**10**	

Vedlegg 16. Analyseskjemaet –AGMA 11.trinn

Kap.	Delkap	Tema	Eks.	Side	1 Ser etter et mønster	2 Lage en systematisk tabell a1	2 a2	2 b	3 Lage en illustrasjon a1	3 a2	3 b	4 Prøv og feil	5 Løs deler av problemet	6 Jobb baklengs	7 Tenk på et liknende problem	8 Gjør problemet enklere	9 Se problemet fra en annen side	10 Bruk digitale hjelpemidler	11 Introduser hjelpeelementer	Sum
1. Kontinuerlige funksjoner	1	Kontinuerlige funksjoner	Eks 1	8							1		1							2
			Eks 2	10																0
			Eks 3	11							1									1
			Eks 4	13													1			1
	3	Grenseverdiregninger og asymptoter	Eks 1	28																0
			Eks 2	29																0
			Eks 3	29							1									1
			Eks 4	31									1							1
2. Derivasjon	4	Tangenten til funksjonen	Eks 1	40							1						1			2
			Eks 2	41																0
	6	Voksende og minkende funksjoner.	Eks 1	57							1		1							2
			Eks 2	58				1			1		1							3
			Eks 3	59				1			1			1						3
3. Derivasjonsregler	7	Derivasjonsregler	Eks 1	68																0
			Eks 2	69									1							1
			Eks 3	70																0
			Eks 4	71				1			1									
	8	Derivasjon av sammensatte funksjoner	Eks 1	78																0
			Eks 2	78							1						1			2
	10	Den største og den minste verdien til	Eks 1	95									1							1
			Eks 2	96					1		1									2
	11	Den andrederiverte	Eks 1	104							1									1
			Eks 2	104																0
			Eks 3	105																0
			Eks 4	106							1									1
5. Likninger, ulikheter og deres systemer	14	Hele røttene til et polynom med heltallige koeffisienter	Eks 1	132								1					1			2
			Eks 2	133								1					1			2
			Eks 3	135				1		1							1	1		4
	15	Bezouts teorem	Eks 1	139												1				1
	16	Likninger og ulikheter	Eks 1	141							1									1
			Eks 2	143	1							1					1		1	4
			Eks 3	143	1														1	2
			Eks 4	144	1														1	2
			Eks 5	145								1								1
			Eks 6	145													1			1
	17	Systemer av likninger	Eks 1	150															1	1
			Eks 2	150															1	1
			Eks 3	151																0
			Eks 4	152	1															1
			Eks 5	153	1														1	2
			Eks 6	153															1	1
			Eks 7	154															1	1
			Eks 8	154	1															1
			Eks 9	155															1	1
			Eks 10	156	1														1	2
	18	Oppgaver med parameter	Eks 1	161									1							1
			Eks 2	162							1				1					2
			Eks 3	164							1						1		1	3
			Eks 4	165	1						1						1			3
			Eks 5	165							1					1				2
			Eks 6	166	1															1
			Eks 7	167	1															1
			Eks 8	168												1				1
			Eks 9	168	1															1
7. Komplekse tall	21	Cardanos formel for løsning av kubiske likninger	Eks 1	201							1						1		1	3
	22	Algebraens fundamentalteorem.	Eks 1	207																0
			Eks 2	207																0
	23	Geometrisk tolkning av komplekse tall	Eks 1	210							1									1
			Eks 2	211																0
	24	Trigonometrisk form av komplekse tall	Eks 1	216																0
			Eks 2	217																0
		SUM	61		11	0	0	4	1	1	#	4	7	1	1	3	11	1	12	
						4			21											

Vedlegg 17. Beskrivelsene på de åtte kompetansene av den matematiske kompetansen til Niss og Jensen

1) Tenke matematisk (*tankegangskompetence*), som involverer å stille relevante spørsmål, kjenne og forstå matematiske begrepers rekkevidde og ulike betydninger;

2) Fremme og løse matematiske problemer (*problembehandlingskompetence*), altså å stille opp både rene og anvendte problemstillinger, samt å løse dem på opptil flere ulike måter;

3) Modellere matematisk (*modelleringskompetence*), som involverer både å lage og analysere modeller;

4) Resonnere matematisk (*ræsonnementskompetence*), som er å følge og bedømme et matematisk resonnement, forstå hva et bevis er og hvordan det fungerer, samt å tenke ut og gjennomføre uformelle og formelle resonnement;

5) Representere matematiske størrelser (*repræsentasjonskompetence*), en kompetanse som består både i å kunne forstå og bruke ulike representasjoner (algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammiske, tabellmessige eller verbale), og å se sammenhengen mellom dem;

6) Håndtere matematiske symboler og formalisme (*symbol- og formalismekompetence*), som går ut på å kunne oversette mellom symbol- og formelspråk, og naturlig språk, samt å kunne benytte seg av symbolholdige utsagn og uttrykk;

7) Kommunisere i, med og om matematikk (*kommunikationskompetence*), som involverer å sette seg inn i og tolke andres matematikkholdige skriftlige, muntlige eller visuelle utsagn, samt å kunne uttrykke seg på forskjellige måter og presisjonsnivå;

8) Bruke matematiske hjelpemidler og verktøy (*hjælpemiddelkompetence*), som involverer å ha kjennskap til eksistensen og egenskapene til diverse former for relevante redskaper i matematikk, ha innblikk i deres muligheter og begrensninger og å kunne bruke dem. (Niss and Jensen, 2002, s. 45-62)