

Solitoner generert av trykkperturbasjon på grunt vann

Hovedfagsoppgave i anvendt matematikk

Tomas Torsvik

Matematisk Institutt
Universitetet i Bergen



11. april 2003

Forord

I og med at denne hovedfagsoppgaven er skrevet ferdig, avslutter jeg nå min tilværelse som hovedfagsstudent. Det var moro så lenge det varte.

Først og fremst vil jeg takke veilederen min, Kristian B. Dysthe, for at jeg fikk muligheten til å skrive denne oppgaven, for alle gode råd underveis, og for positiv tilbakemelding. Jeg vil også takke mine medstudenter og ansatte ved instituttet for en fin studietid, både faglig og sosialt.

Tomas Tosrvik
Bergen, april 2003

Innhold

1	Innledning	1
1.1	Historisk bakgrunn	2
2	Solitoner og KdV-ligningen	4
2.1	Korteweg-de Vries ligningen	4
2.2	Løsninger av KdV-ligningen	5
2.2.1	Bølger med permanent form og solitære bølger	6
2.2.2	Løsning av KdV-ligningen for flere solitoner	7
2.3	Konserveringslover	8
2.3.1	Konserveringslover for KdV-ligningen	8
3	Matematisk modell av det fysiske systemet	10
3.1	Presentasjon av ligningene	10
3.2	Froudetallet og Urselltallet	12
3.3	Det lineære problemet	13
3.3.1	Lineære bølger på grunt vann	14
3.4	Gruntvannsligningene	15
3.4.1	Karakteristikker og Riemanninvarianter	16
3.4.2	Fra gruntvannsligningene til Boussinesq-ligninger	17
3.5	Utleddning av fKdV-ligningen	18
3.5.1	Fra Boussinesq-ligningene til fKdV-ligningen	21
3.5.2	Omskalering av fKdV-ligningen	23
4	Numerisk modell	25
4.1	Endelige differanser	25
4.1.1	Randbetingelser	26
4.2	Stabilitetsanalyse	26
4.3	Validering av numerisk metode	28
4.4	Konstruksjon av kildeledd i skjemaet	31
4.4.1	Beregning av Froudetall og dragkraft	32
5	Resultater og diskusjon	33
5.1	Masse og energiteoremer	33

5.1.1	Det dimensjonsløse problemet	34
5.1.2	Karakteristiske egenskaper ved ulike Froudetall	37
5.2	Resultater for konstant Froudetall	38
5.3	Resultater for variabelt Froudetall	44
5.4	Sammenligning med andre studier	50
5.4.1	Full ikke-lineær modell	50
5.4.2	Modell for viskøs væske	51
5.5	Konklusjon og forslag til videre arbeid	52
A	Appendix	55
A.1	Nomenklatur	55
A.2	Betydningen av Ursell tallet	57
A.3	Lineær teori	58
	Bibliografi	61

Kapittel 1

Innledning

Persontransport til vanns domineres av hurtige katamaranferger, og utviklingen ser ut til å gå mot stadig økende operasjonshastigheter. Dette fører med seg nye problemer, blant annet generering av store bølger som kan gjøre skade på folk og eiendom langs kysten. Fenomenet blir omtalt i en artikkel i New Scientist[1], 'Solitary killers', og er utgangspunktet for denne hovedfagsoppgaven. De usedvanlig kraftige bølgene skyldes et resonansfenomen som opptrer når båten beveger seg med en bestemt hastighet, og er avhengig av dybden i vannbassenget. Bølgene kan være vanskelige å oppdage på dypt vann, og dukker dermed opp uten forvarsel når de bryter ved grunner eller mot land. I enkelte farvann har man vært nødt til å sette fartsgrenser for å hindre at disse bølgene genereres. Dersom man ønsker å benytte fartøy som opererer ved høye hastigheter, vil det være av interesse å kjenne til hvordan disse bølgene genereres og hvordan de utvikler seg med tiden.

Målet med oppgaven er å studere en matematisk modell som beskriver resonansfenomenet, og å implementere denne modellen numerisk. For å beskrive fenomenet benytter jeg meg av en 2-dimensjonal ligning, Korteweg-de Vries-ligningen (KdV), som er kjent for å tillate solitære bølger i løsningen. Ligningen kan modifiseres ved å innføre et "kildeledd", og ligningen kalles da for en drevet KdV-ligning (fKdV). Denne ligningen (fKdV) har vært brukt i flere undersøkelser for å modellere fenomener som ligner på det som står beskrevet ovenfor. Det er vanlig å la kilden, som her representerer et fartøy, bevege seg med konstant hastighet i resonansområdet. Jeg vil basere meg på resultatene fra disse undersøkelsene, men jeg ønsker også å undersøke hva som skjer når en båt akselererer gjennom resonansområdet. For å få en enkel ligning å jobbe med, er det nødvendig å se bort fra en rekke faktorer som innvirker på problemet. Resultatene viser at vi likevel oppnår en dynamikk i systemet som ligner på det vi får fra eksperimenter, så det er grunn til å tro at de vesentligste faktorene for systemet er bevart i fKdV-ligningen.

1.1 Historisk bakgrunn

Solitære bølger ble beskrevet allerede i 1844 av John Scott Russell[2]. Han observerte fenomenet ved en tilfeldighet mens han red langs en kanal, og var i stand til å følge bølgens ferd over en betydelig avstand. Inspirert av hendelsen utførte Russell en rekke eksperimenter som avdekket noen av egenskapene til disse bølgene (for skisser av eksperimentene, se Remoissant[3]). Han observerte enkeltstående bølger som hadde en klokke-lignende form. Bølgene forflyttet seg med konstant hastighet, og uten at formen på bølgene forandret seg. Han fant at bølgens hastighet c var gitt ved

$$c = \sqrt{g(h+a)},$$

hvor a er amplituden til bølgen og h er dybden når overflaten er i likevekt. Eksperimentene ble utført med ulike initielle forstyrrelser av overflaten, og utviklingen forløp etter ett av tre tilfeller; som en ren solitær bølge, som en solitær bølge med etterfølgende bølgetog, eller som flere solitære bølger med eller uten etterfølgende bølgetog. De solitære bølgene kunne krysse hverandre uten å forandre form.

Året etter at Russell presenterte sine resultater, skrev Airy[4] en artikkel hvor han viste at bølger med endelig amplitude ikke kan forflytte seg på grunt vann uten å endre form. Dette kommer av at ikke-lineære effekter er vesentlige for bølger med stor amplitude. Airys resultat var tilsynelatende uforenelig med observasjonene til Russell, men problemet ble løst i to uavhengige undersøkelser av Boussinesq[5] (1871) og Rayleigh[6] (1876). Ved å ta hensyn til dispersjon i ligningene for grunt vann, var det mulig å balansere den ikke-lineære effekten som gjorde at bølgene endret form. Boussinesq og Rayleigh utledet Russells formel for bølgefarten c , og fant også at bølgehøyden over den midlere dybden h var gitt ved

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2[(x - ct)/b],$$

hvor $b^2 = 4h^2(h+a)/3a$, for enhver positiv amplitude a . I 1895 fant Korteweg og de Vries[7] en enkel ligning som beskrev bevegelsen til en solitær bølge:

$$\eta_t = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\eta \eta_x + \frac{2}{3} \alpha \eta_x + \frac{1}{3} \sigma \eta_{xxx} \right),$$

hvor α er en liten men ellers vilkårlig konstant, og $\sigma = 1/3 h^3 + Th/g\rho$, T er overflatespenning og ρ er tetthet (overflatespenningen spiller ikke noen vesentlig rolle for det aktuelle resonansproblemet, og vi vil se bort fra denne størrelsen i resten av oppgaven).

Interessen for solitære bølger døde så ut for en periode, men ble fornyet av Zabusky og Kruskal[8] i 1965. Denne gangen var foranledningen en undersøkelse av varmetransport i en kjede av atomer, kjent som FPU-problemet¹. Zabusky og Kruskal viste at man kunne modellere dette problemet ved hjelp av KdV-ligningen. Det viste seg at solitære bølger dominerte den asymptotiske løsningen av KdV-ligningen, og at disse bølgene kunne interferere

¹Etter Fermi, Pasta og Ulam

uten å miste sin identitet. Denne partikkel-lignende egenskapen var inspirasjonskilden til at bølgene fikk navnet solitoner. I 1967 påviste Gardner et al.[9] at KdV-ligningen hadde en analytisk løsning, dersom den initielle tilstanden var tilstrekkelig lokal. Solitoner har vist seg å være et nyttig begrep innen flere grener av fysikken, bl.a. i forbindelse med plasmadynamikk og elektromagnetiske bølger.

Begrepene “soliton” og “solitær bølge” er ikke alltid sammenfallende. En soliton vil alltid være en solitær bølge, men det motsatte er ikke nødvendigvis tilfellet, ettersom solitonenes krav til stabilitet² kan være for strenge i forhold til mange solitære bølger. De solitære bølgene som opptrer i resonansfenomenet bevarer sin identitet under interferens med andre bølger, og kan derfor betegnes som solitoner.

I 1982 viste Wu og Wu[10] at dersom man lot en kilde bevege seg med den karakteristiske gruntvannshastigheten i et vannbasseng, fikk man periodisk generering av solitære bølger i forkant av kilden. Samtidig fikk man en nedsenkning av overflaten i et område i bakkant av kilden, etterfulgt av et svakt dispersivt bølgetog. Wu og Wu benyttet seg av et 2-dimensjonalt generalisert sett av Boussinesq-ligninger. Et lignende fenomen var allerede påvist eksperimentelt for en strømning som beveget seg med den karakteristiske gruntvannshastigheten over en forhøyning på bunnen av et basseng (se f.eks Wu[11] for referanser). Det viser seg at fenomenet med en trykkperturbasjon på overflaten og fenomenet med en forhøyning på bunnen kan modelleres med den samme fKdV-ligningen, men at Boussinesq-ligningene i de to tilfellene har ulike kildeledd.

Det finnes også noe litteratur på problemet med en kilde som beveger seg med en varierende hastighet i resonansområdet. Jeg har funnet to artikler som er relevante for dette problemet; Kevorkian og Yu[12] (1989) og Redekopp og You[13] (1995). Den første artikkelen tar for seg problemet med en forhøyning på bunnen, og hvor væskestrømningen over forhøyningen har varierende hastighet med tiden. Den andre artikkelen tar for seg problemet formulert med en trykkperturbasjon på overflaten, og benytter fKdV-ligningen som modell for problemet.

²“stabilitet” betegner her den formbevarende egenskapen ved solitonene

Kapittel 2

Solitoner og KdV-ligningen

2.1 Korteweg-de Vries ligningen

I dette kapittelet vil jeg presentere Korteweg-de Vries ligningen på et generelt grunnlag, og se på enkelte av egenskapene som er knyttet til denne ligningen. Jeg har i hovedsak basert meg på Drazin[14], men har gjort enkelte modifikasjoner for å knytte stoffet nærmere opp til det aktuelle problemet.

Drazin benytter

$$\eta_t - 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0.$$

som en standardform av KdV-ligningen. Det er imidlertid mulig å skrive ligningen på flere forskjellige måter, ved å transformere og/eller skalere de avhengige og uavhengige variablene som inngår i ligningen. KdV-ligningene som jeg diskuterer i dette kapittelet vil ikke alltid være på samme form, og resultatene vil til en viss grad være avhengige av hvordan ligningene er skalert. Det er likevel mulig å påvise elementer i resultatene som vil være av generell karakter, og gyldige uavhengig av skaleringen.

Vi skal se hvilke bidrag de enkelte leddene i KdV-ligningen gir til løsningen. Utgangspunktet er KdV-ligningen gitt på formen

$$\eta_t + (1 + \eta)\eta_x + \eta_{xxx} = 0. \quad (2.1)$$

Vi ser først på effekten av det ikke-lineære leddet, og ser derfor bort fra det dispersive leddet i KdV-ligningen,

$$\eta_t + (1 + \eta)\eta_x = 0. \quad (2.2)$$

Ligningen (2.2) kan løses vha. karakteristikmetoden, som gir oss løsningen

$$\eta = f(x - (1 + \eta)t),$$

for en differensierbar funksjon f , hvor $f(x)$ er den initielle formen av overflaten. Denne bølgen forplanter seg med hastighet $1 + \eta$, dvs. bølgens 'øvre' del har større hastighet enn

den 'nedre' delen. Bølgefronten vil bli stadig steilere, inntil det oppstår en *sjokk-bølge*. Ligning (2.2) har derfor ingen stasjonære løsninger.

Dersom vi forutsetter at ligning (2.1) bare skal gjelde for små amplituder, kan vi linearisere ligningen,

$$\eta_t + \eta_x + \eta_{xxx} = 0. \quad (2.3)$$

Løsningen kan skrives som en sum av Fourier komponenter. For $\eta = e^{i(kx - \omega t)}$ finner vi at (2.3) må tilfredsstille *dispersjonsrelasjonen*

$$\omega = k - k^3. \quad (2.4)$$

Ved hjelp av dispersjonsrelasjonen kan vi bestemme *fasehastigheten* og *gruppehastigheten*, som er gitt ved hhv.

$$c_f = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2, \quad (2.5)$$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2. \quad (2.6)$$

Fasehastigheten forteller oss hvor fort hver enkelt bølgekomponent forplanter seg, mens energien til bølgene vil forplante seg med gruppehastigheten. Vi ser at hastigheten til løsningskomponentene avtar med bølgetallet, dvs. langbølge-komponenter forplanter seg raskere enn kortbølge-komponenter. Kilden til dispersjon av løsningskomponenter med ulike k , er k^3 -leddet, som har sitt opphav i η_{xxx} -leddet fra KdV-ligningen.

Vi ønsker å benytte KdV-ligningen til å undersøke utviklingen av stabile solitære bølger. Enkel analyse viser at komponenten som inngår i KdV-ligningen, generelt ikke vil gi opphav til stasjonære løsninger når de opptrer hver for seg. For at en soliton skal være stabil, må derfor effektene av η_{xxx} -leddet (dispersjon) og $\eta\eta_x$ -leddet (konsentrasjon) balanseres med hverandre.

2.2 Løsninger av KdV-ligningen

Det er mulig å finne eksakte løsninger for problemer hvor KdV-ligningen er gitt med en spesifisert initialverdi for η . KdV-ligningen er her gitt ved

$$\eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0. \quad (2.7)$$

Siden løsningene vi søker er bølger med permanent størrelse og form, kan vi redusere den partielle differensialligningen (2.7) til en ordinær differensialligning ved å innføre

$$\eta(x, t) = f(X), \quad X = x - ct, \quad (2.8)$$

hvor c er bølgehastigheten¹. Ved substitusjon i ligning (2.7) følger

$$-cf' + 6ff' + f''' = 0,$$

¹Se Drazin[14] for løsning av det generelle problemet

som ved integrasjon mhp. X , gir oss

$$f'' = -3f^2 + cf + A. \quad (2.9)$$

Vi ser at

$$f'' = \frac{dX}{df} \frac{df}{dX} \frac{d^2f}{dX^2} = \frac{1}{2} \frac{dX}{df} \frac{d}{dX} \left\{ \frac{df}{dX} \right\}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{df} \left\{ \frac{df}{dX} \right\}^2,$$

så substitusjon av f'' i (2.9) og integrasjon mhp. f gir oss

$$\frac{1}{2} f'^2 = -f^3 + \frac{1}{2} c f^2 + A f + B. \quad (2.10)$$

2.2.1 Bølger med permanent form og solitære bølger

En fullstendig analyse av mulighetene for stasjonære løsninger av KdV-ligningen, er beskrevet i Drazin[14]. For vårt formål er det tilstrekkelig å se på tilfellet hvor det opptrer solitære bølger.

En solitære bølger må tilfredsstille randkravene $f, f', f'' \rightarrow 0$ når $X \rightarrow \pm \infty$. Sammen med (2.9) og (2.10) gir dette $A = B = 0$, og vi står igjen med ligningen

$$\frac{1}{2} f'^2 = f^2 \left(\frac{1}{2} c - f \right).$$

Siden $f'(X) = df/dX$, får vi for X

$$X = \int \frac{df}{f'} = \int \frac{df}{f \sqrt{c - 2f}}. \quad (2.11)$$

Vi gjør følgende substitusjon

$$f = \frac{1}{2} c \operatorname{sech}^2 \theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{f} = -2 \tanh \theta d\theta,$$

og vi benytter oss av at $[\operatorname{sech} \theta]' = -\operatorname{sech} \theta \tanh \theta$, og at $\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 \theta} = \tanh \theta$. Dermed får vi fra (2.11)

$$\theta = -\frac{1}{2} \sqrt{c} (X - X_0),$$

hvor X_0 er en vilkårlig konstant. Løsningen uttrykt ved f blir

$$f = \frac{1}{2} c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (X - X_0) \right]. \quad (2.12)$$

Amplituden til bølgen, $a = \frac{1}{2} c$, er proporsjonal med hastigheten til bølgen, og bølgelengden er omvendt proporsjonal med \sqrt{c} . Det vil si at høye bølger er relativt smale, og har stor hastighet.

KdV-ligningen tillater også andre bølger med permanent form; periodiske, såkalte cnoidale bølger. Det er en nær relasjon mellom solitære og cnoidale bølger. Lar man bølgelengden til den cnoidale bølgen gå mot uendelig, så ender man opp med en solitær bølge.

2.2.2 Løsning av KdV-ligningen for flere solitoner

Ved hjelp av Hirotrias metode kan man finne løsninger av KdV-ligningen for tilfeller hvor flere solitoner opptrer. Det er spesielt interessant å se på interaksjonen mellom to solitoner, hvor en stor soliton innhenter og passerer en mindre soliton. Resultatet kan benyttes til å validere den numeriske metoden. Følgende er hentet fra Remoissent[3].

Vi tar utgangspunkt i KdV-ligningen (2.7)

$$\eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0.$$

For en enkel soliton har ligningen løsningen

$$\eta(x, t) = 2K^2 \operatorname{sech}^2[K(x - x_0) - 4K^3t],$$

der vi har innført $c = 4K^2$, K er en vilkårlig konstant, i ligning (2.12). Vi innfører transformasjonen $\eta = 2\zeta_x$ og integrerer over $x = \pm\infty$, hvor ζ forsvinner i grensene,

$$\zeta_t + 6(\zeta_x)^2 + \zeta_{xxx} = 0.$$

Så benytter vi Cole-Hopf transformasjonen

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial x} \log F,$$

og får ligningen på formen

$$FF_{xxxx} - 4F_x F_{xxx} + 3(F_{xx})^2 + FF_{xt} - F_x F_t = 0. \quad (2.13)$$

En løsning av denne ligningen er gitt ved

$$F = 1 + e^\theta; \quad \theta = 2K(x - x_0) - 8K^3t,$$

som korresponderer med den enkle solitonen i KdV-ligningen. Vi ser nå etter løsninger på formen

$$F = 1 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^3 F_3 + \dots$$

der ε er en liten parameter. Ved innsetting for F i ligningen, finner vi

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) : (F_{1t} + F_{1xxx})_x &= 0, \\ O(\varepsilon^2) : (F_{2t} + F_{2xxx})_x &= -3[(F_{1xx})^2 - F_{1x}F_{1xxx}], \\ &etc. \end{aligned}$$

Vi leter etter løsninger med to solitoner, og siden ligningen er lineær til laveste orden er det nærliggende å forsøke med en løsning på formen

$$F_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}; \quad \theta_i = 2K_i(x - x_{0i}) - 8K_i^3t, \quad i = 1, 2,$$

For leddet av $O(\varepsilon^2)$ får vi i dette tilfellet

$$F_2 = \frac{(K_1 - K_2)^2}{(K_1 + K_2)^2} e^{(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Det viser seg at alle høyereordens ledd forsvinner ved innsetting av uttrykkene som vi har funnet for F_1 og F_2 . Dermed er

$$F = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \frac{(K_1 - K_2)^2}{(K_1 + K_2)^2} e^{(\theta_1 + \theta_2)},$$

en eksakt løsning av ligning (2.13) (vi har satt $\varepsilon = 1$), som igjen gir oss løsningen av KdV-ligningen for 2 solitoner. Denne metoden kan utvides til å gjelde for N -soliton løsninger.

2.3 Konserveringslover

Gitt en PDE som bestemmer en relasjon mellom partielt deriverte av $\eta = \eta(x, t)$, og anta at ligningen kan splittes i to funksjoner T og X , slik at ligningen kan skrives på formen

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad (2.14)$$

Relasjonen (2.14) kalles en konserveringslov med *tetthet* T og *fluks* X . Et kjent eksempel er konservering av masse i en væske med tetthet ρ og horisontal hastighet u , som er gitt ved

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0.$$

Dersom T og X er integrerbare for $-\infty < x < \infty$, så er

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} T dx = -[X]_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} T dx = \text{konstant}. \quad (2.15)$$

2.3.1 Konserveringslover for KdV-ligningen

Vi benytter KdV-ligningen (2.7) og skriver

$$0 = \eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(3\eta^2 + \eta_{xx}),$$

så tetthet og fluks er definert som hhv.

$$T = \eta, \quad \text{og} \quad X = 3\eta^2 + \eta_{xx}.$$

Ved sammenligning med (2.15) får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx = \text{konstant}, \quad (2.16)$$

for enhver løsning $\eta(x, t)$ av KdV-ligningen. Ved å multiplisere ligning (2.7) med η , får vi en ny konserveringslov,

$$0 = \eta(\eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{xxx}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\eta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta^3 + \eta\eta_{xx} - \frac{1}{2}\eta_x^2 \right),$$

som medfører

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx = \text{konstant.} \quad (2.17)$$

Ligning (2.16) representerer konservering av masse, og ligning (2.17) representerer konservering av moment.

Man kan vise at KdV-ligningen gir opphav til uendelig mange konserveringslover (se [14]). Hver konserveringslov er relatert til en tetthet T som må være bevart for alle tidspunkt. Dette kan forklare hvorfor solitoner bevarer sin identitet når de interfererer med andre bølger.

Kapittel 3

Matematisk modell av det fysiske systemet

3.1 Presentasjon av ligningene

I det følgende vil jeg presentere ligningene som beskriver systemet, og si litt om forutsetningene som ligger til grunn for at ligningene skal være gyldige. Ligningene er standardligninger for gravitasjonsbølger på en fri grenseflate, og jeg følger her i grove trekk fremstillingen til Kundu[15].

Vi forutsetter at væsken er homogen og inkompressibel, og at vi kan se bort fra viskositet. Bevegelsesligningen, her redusert til Eulers ligning, og ligningen for bevaring av masse er gitt som hhv.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.2)$$

der \mathbf{u} beskriver hastighetsfeltet i væsken, ρ er tettheten av væsken og p er trykket. Vi antar at variasjon i tettheten ρ kan neglisjeres, slik at vi kan behandle denne som en konstant. Gravitasjonskraften er den eneste volumkraften som virker på væsken, så vi har $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Initielt har vi at virvlingen $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, og vi antar at den forblir null for alle senere tidspunkt. Dermed kan vi definere et hastighetspotensial $\phi(x, y, z)$, ved $\mathbf{u} \equiv \nabla\phi$.

Vi har antatt at det ikke vil induseres virvling i væsken dersom strømmingen initielt er virvelfri. Denne antagelsen er ikke nødvendigvis gyldig for en ikke-lineær bølge på en fri overflate. Dersom bølgen bryter, får vi introdusert virvling i væsken. Vi må i så fall ta hensyn til viskositet i bevegelsesligningen, hvilket innebærer at vi i stedet for ligning (3.1), må ta for oss Navier-Stokes ligning. Når det gjelder vårt problem er vi imidlertid interessert i løsninger hvor bølgene ikke bryter, og for disse løsningene vil vi ikke få introdusert virvling

i væsken.

Vi tenker oss at systemet representerer et basseng uten begrensninger i horisontal retning. Overflaten og dybden bestemmes ved funksjonene η og h , så vi har $z = \eta(x, y, t)$ ved overflaten og $z = -h(x, y, t)$ ved bunnen. Vi ønsker å beskrive systemet uttrykt ved hastighetspotensialet. Setter vi inn for ϕ i ligningene (3.1), får vi Bernoullis ligning, og fra ligning (3.2) får vi Laplace' ligning. Begge ligningene gjelder for hele væsken. Følgende ligninger beskriver systemet:

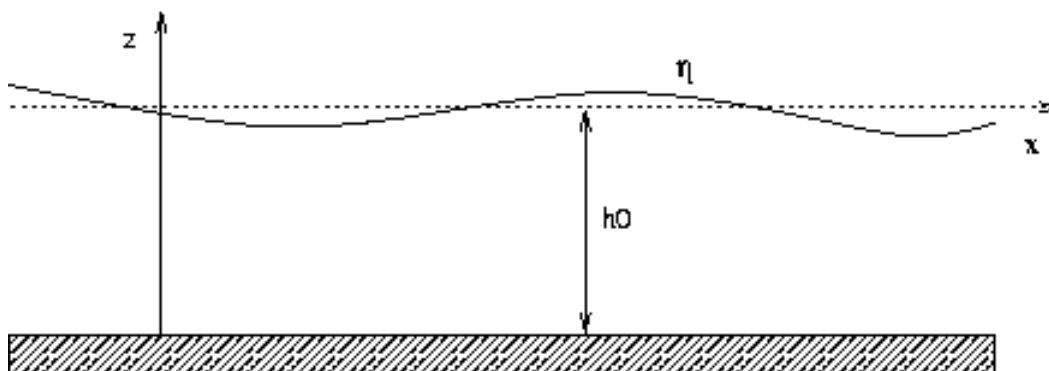
$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0, \quad \text{for } -h < z < \eta; \quad (3.3)$$

$$\eta_t + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y - \phi_z = 0, \quad \text{for } z = \eta(x, y, t); \quad (3.4)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + \frac{p}{\rho} + g\eta = 0, \quad \text{for } z = \eta(x, y, t); \quad (3.5)$$

$$h_t + \phi_x h_x + \phi_y h_y - \phi_z = 0, \quad \text{for } z = -h(x, y, t). \quad (3.6)$$

Ligningene (3.4) og (3.6) er den kinematiske grenseflatebetingelsen anvendt på hhv. overflaten og bunnen av bassenget, og ligning (3.5) er den dynamiske grenseflatebetingelsen anvendt på overflaten.



Figur 3.1: Referansesystem for det homogene problemet

Ligningene (3.3) - (3.6) beskriver et 3-dimensjonalt problem hvor både overflaten og bunnen kan variere med tiden. Som tidligere nevnt er det en nær relasjon mellom problemet med varierende trykk på overflaten og strømming over en forhøyning på bunnen (se kap. 1.1). Begge problemene kan beskrives ut fra systemet som er formulert ved ligningene ovenfor. Jeg har tenkt å konsentrere meg om det 2-dimensjonale problemet, og forutsetter at det ikke forekommer vertikal variasjon på bunnen slik at likevektsdybden h_0 er konstant i bassenget. Med disse begrensningene får vi ligningsettet

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad \text{for } -h_0 < z < \eta; \quad (3.7)$$

$$\eta_t + \phi_x \eta_x - \phi_z = 0, \quad \text{for } z = \eta(x, y, t); \quad (3.8)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + \frac{p}{\rho} + g\eta = 0, \quad \text{for } z = \eta(x, y, t); \quad (3.9)$$

$$\phi_z = 0, \quad \text{for } z = -h_0. \quad (3.10)$$

3.2 Froudetallet og Urselltallet

To dimensjonsløse tall er viktige i forhold til resonansproblemet; Froudetallet og Urselltallet. I denne delen vil jeg presentere disse størrelsene.

Froudetallet er definert ved

$$F \equiv \frac{U(t)}{\sqrt{gh_0}}, \quad (3.11)$$

og angir forholdet mellom den karakteristiske gruntvannshastigheten, eller resonanshastigheten, og hastigheten til kilden $U(t)$ (for problemet med en stasjonær forhøyning på bunnen, vil $U(t)$ betegne hastigheten til væsken). Froudetallet forteller oss hvor nært systemet er til resonans. Resonans inntreffer for $F = 1$, men det opptrer stabile solitære bølger foran kilden også for Froudetall i nærheten av denne verdien. Vi opererer derfor med et såkalt *transkrittisk bånd* av verdier $F = 1 + \delta$, hvor $\delta \ll 1$. Froudetall lavere enn disse verdiene, blir betegnet som *subkrittiske*, mens høyere verdier betegnes som *superkrittiske*. Bredden på det transkrittiske båndet er ikke eksakt definert, men vil generelt være avhengig av styrken til kilden.

Resonansfenomenet som vi undersøker opptrer på “grunt vann”. Hvorvidt et bølgefenomen kan beskrives som et gruntvannsfenomen, avgjøres av forholdet mellom bølgelengden og dybden i vannbassenget. Vi definerer parameteren

$$\varepsilon \equiv \frac{h_0^2}{\lambda^2}, \quad (3.12)$$

som er kvadratet av dette forholdet. For gruntvannsfenomener vil denne parameteren være liten. Siden effekten av dispersjon minker ettersom “gruntvannseffekten” øker, vil parameteren ε også være et mål på hvor sterk den dispersive effekten er for systemet.

For å forklare hvordan vi kan få generert solitoner i resonansproblemet, er det nødvendig å ta hensyn til ikke-lineære effekter i systemet. De ikke-lineære effektene som påvirker en bølge, øker i styrke med bølgens amplitude. Vi innfører parameteren

$$\alpha \equiv \frac{a}{h_0} \quad (3.13)$$

som gir oss forholdet mellom bølgens amplitude a og dybden i bassenget.

Urselltallet er definert ved

$$Ur \equiv \frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{a\lambda^2}{h_0^3}, \quad (3.14)$$

og angir forholdet mellom effektene av ikke-linearitet og dispersjon. For $Ur \ll 1$ vil ikke-lineære effekter være neglisjerbare, og systemet kan modelleres vha. lineære ligninger. For $Ur \gg 1$ vil ikke-lineære effekter dominere systemet, og vi kan ikke forvente å finne stasjonære løsninger. I tilfellet hvor $Ur = O(1)$ er ikke-lineære og dispersive effekter balansert

med hverandre. I dette området kan man forvente at det vil opptre solitoner. For en mer detaljert behandling av Urselltallet, se Ursell[16] og appendiks A.2.

I de to neste kapitlene ser vi nærmere på hhv. den lineære utgaven av gruntvannsproblemet, og tilfellet hvor ikke-lineære effekter dominerer.

3.3 Det lineære problemet

Før vi utleder KdV-ligningen for det ikke-lineære problemet, kan det være instruktivt å ta i betraktning den lineariserte utgaven av problemet. Vi vil se på problemet med frie gravitasjonsbølger, så vi setter $p \equiv 0$ i ligning (3.9).

Dersom de deriverte av hastighetspotensialet $\phi(x, z, t)$ er små størrelser, og vi bare har små utslag fra likevektstilstanden på overflaten, er det rimelig å anta at en linearisering av ligningene (3.7) - (3.10) vil gi en god tilnærming til problemet. Vi kan dessuten velge å evaluere (3.8) og (3.9) ved likevektsnivået $z = 0$, uten at feilen vi gjør blir større enn $O(\eta^2)$. Ligningene for det lineariserte problemet er dermed gitt ved

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad \text{for } -h_0 < z < \eta; \quad (3.15)$$

$$\eta_t - \phi_z = 0, \quad \text{for } z = 0; \quad (3.16)$$

$$\phi_t + g\eta = 0, \quad \text{for } z = 0; \quad (3.17)$$

$$\phi_z = 0, \quad \text{for } z = -h_0. \quad (3.18)$$

Bølger med liten amplitude har en bølgeprofil som kan tilnærmes med en cosinus funksjon. Vi lar amplituden til bølgen være gitt ved a , og ser etter løsninger av systemet (3.15) - (3.18), på formen

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega(k)t). \quad (3.19)$$

Det er også en annen grunn til å lete etter løsninger på denne formen. Fra Fourieranalysen vet vi at enhver kontinuerlig funksjon som har kontinuerlige deriverte, kan skrives som en sum av slike cosinus funksjoner, med ulike amplituder a , bølgetall k , og frekvenser ω . Bølgetallet k er relatert til bølgelengden λ og fasehastigheten $c_f(k)$ ved definisjonene

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}, \quad c_f(k) \equiv \frac{\omega}{k}.$$

Dersom frekvensen ω er en lineær funksjon av k , vil fasehastigheten c_f være konstant for alle verdier av k . Bølgen som beskrives av (3.19) kalles en *dispersiv bølge* dersom fasehastigheten ikke er konstant, men varierer med k . Anta at en løsning av systemet består av en sum av funksjoner på formen (3.19), og at de ulike funksjonene har forskjellige verdier av bølgetallet k . Dersom bølgen er dispersiv, vil de ulike komponentene av løsningen forflytte seg med forskjellige hastigheter, og dermed vil løsningen 'spre seg' ettersom tiden går.

Fra (3.16) og (3.17) ser vi at når η er gitt som (3.19), så vil ϕ være avhengig av funksjonen $\sin(kx - \omega t)$. Vi antar ϕ er en funksjon på formen

$$\phi(x, z, t) = f(z) \sin(kx - \omega t),$$

og vi må løse ligningsettet (3.15) - (3.18) for å bestemme $f(z)$ og $\omega(k)$. Problemet har en eksplisitt løsning (se appendiks A.3) og vi finner

$$\phi = \frac{\omega a \cosh[k(z + h_0)]}{k \sinh kh_0} \sin(kx - \omega t).$$

Løsningen må tilfredsstille dispersjonsrelasjonen, som i sin tur gir oss fasehastigheten og gruppehastigheten,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= gk \tanh(kh_0); & (3.20) \\ c_f = \frac{\omega}{k} &= \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh_0)}; \\ c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} &= \pm \frac{c}{2} \left[1 + \frac{2kh_0}{2 \sinh(2kh_0)} \right]. \end{aligned}$$

Fortegnet på ω er avhengig av om bølgen forplanter seg mot høyre (+) eller venstre (-). Vi ser at ligningene for ω , c_f og c_g er avhengige av den dimensjonsløse parameteren ε , siden $kh_0 = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$.

3.3.1 Lineære bølger på grunt vann

Dersom vi befinner oss på grunt vann, dvs. at bølgelengden er stor i forhold til dybden, har vi $kh_0 \ll 1$. Vi kan rekkeutvikle $\tanh(kh_0)$ om kh_0 ,

$$\tanh(kh_0) = kh_0 - \frac{(kh_0)^3}{3} + \dots$$

Ved innsetting i (3.20) får vi dispersjonsrelasjonen¹

$$\omega = \pm c_0 k \left[1 - \frac{(kh_0)^2}{6} + \dots \right], \quad (3.21)$$

der vi har definert $c_0 = \sqrt{gh_0}$. Det er interessant å sammenligne disse resultatene med tilsvarende resultater for den lineariserte KdV-ligningen, gitt ved ligningene (2.4) - (2.6). Dersom vi velger positivt fortegn i dispersjonsrelasjonen (3.21), ser vi at forskjellene mellom (2.4) og (3.21) kun består i skalering med den karakteristiske gruntvannshastigheten c_0 , og en konstant koeffisient $h_0^2/6$ for k^3 -leddet.

¹For å komme frem til ligning (3.21) benytter vi oss av rekkeutviklingen $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \dots$

Hvis vi bare tar hensyn til ledd av laveste orden i kh_0 , får vi $\omega = c_0k$, og

$$c_f = c_g = c_0,$$

blir de tilhørende verdiene av fasehastigheten og gruppehastigheten. Med forutsetningen om grunt vann $kh_0 \ll 1$, er det mulig å forenkle uttrykket for hastighetspotensialet ϕ , ettersom

$$\cosh[k(z + h_0)] = 1 + O[(kh_0)^2], \quad \sinh(kh_0) = kh_0 + O[(kh_0)^3].$$

Dette gir oss de horisontale og vertikale hastighetskomponentene

$$\begin{aligned} u = \phi_x &= \frac{\omega a}{kh} \cos(kx - \omega t) = c_0 \frac{\eta}{h_0}; \\ w = \phi_z &= \omega a \left(1 + \frac{z}{h_0}\right) \sin(kx - \omega t). \end{aligned}$$

Vi ser at den horisontale hastighetskomponenten u , er uavhengig av z , så i en gitt væskesøyle vil u være uniform.

3.4 Gruntvannsligningene

Vi har sett hvordan lineære bølger oppfører seg på grunt vann. Det er også mulig å finne et sett av ligninger for gruntvannsproblemet uten først å kreve at bølgene skal være lineære. Følgende er hentet fra Whitham[17].

Vi gjør følgende tilnærming i den vertikale komponenten av bevegelsesligningen (3.1)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0,$$

dvs. vi neglisjerer den vertikale komponenten av akselerasjonen. Når vi integrerer over en søyle fra z til η , får vi

$$p - p_0 = g\rho(\eta - z), \quad (3.22)$$

der p_0 er trykket ved overflaten. Ved hjelp av denne relasjonen kan vi bytte ut trykkledet i de horisontale komponentene av bevegelsesligningen, med et ledd som er avhengig av posisjonen til overflaten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Siden høyresiden ikke er avhengig av z , følger det at de horisontale hastighetskomponentene også må være uavhengig av z . Dermed får vi ligningene

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (3.23)$$

Ligning (3.2) representerer konservering av masse, så hvis vi integrerer denne over dybden $h_0 + \eta$, må vi få konserveringsloven

$$\frac{\partial(h_0 + \eta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(h_0 + \eta)u] = 0. \quad (3.24)$$

Vi utfører beregningene for dette tilfellet:

$$0 = \int_{-h_0}^{\eta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_0}^{\eta} u dz + [w]_{z=-h_0}^{z=\eta} - [u]_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

der det siste leddet skyldes at den øvre integrasjonsgrensen er en funksjon av x . Vi setter inn for de kinematiske grenseflatebetingelsene (3.8) og (3.10), og får

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h_0}^{\eta} u dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0.$$

Siden u er uavhengig av z , og $h_{0t} = 0$, kan ligningen skrives som

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_0 + \eta) + \frac{\partial}{\partial x}[(h_0 + \eta)u] = 0,$$

som var det som vi forventet å finne.

Ligning (3.23) og (3.24) er gruntvannsligningene for $\eta(x, t)$ og $u(x, t)$. Dersom vi lar u være horisontal hastighetskomponent midlet over dybden, så er ligning (3.24) eksakt. Ligning (3.22) har en feil av orden $\rho h w_t$, og vi har $w = O(h_0 u_x)$ ved integrasjon over dybden av ligning (3.2). Dermed får vi et uttrykk for relativ feil i ligning (3.23):

$$\frac{-p_x}{\rho u_t} \approx \frac{h_0^2 u_{xxt}}{u_t} \approx \frac{h_0^2}{\lambda^2}.$$

3.4.1 Karakteristikker og Riemanninvarianter

Følgene utlegging er basert på notater jeg har fra Dysthe[18], men tilsvarende teori er beskrevet av bl.a. Myint-U[19]. Gitt gruntvannsligningene (3.23) og (3.24). Vi ønsker å finne en generalisert D'Alamberts løsning av problemet, såkalte *enkle bølger*. Anta systemet har en løsning på formen $\eta(\psi)$, $u(\psi)$, der $\psi = \psi(x, t)$ er en funksjon som er entydig bestemt av initialverdien $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$. Da vil $\psi = \text{konstant}$, gi oss ligningen for karakteristikene. Ved innsetting i gruntvannsligningene får vi

$$\begin{aligned} \eta'(\psi_t + u\psi_x) + u'\psi_x(h_0 + \eta) &= 0, \\ \eta'g\psi_x + u'(\psi_t + u\psi_x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

For å unngå den trivielle løsningen $\eta' = u' = 0$, må vi kreve at determinanten til koeffisi-entmatriisen av ligningsettet (3.25), forsvinner, dvs.

$$(\psi_t + u\psi_x)^2 - \psi_x^2 g(h_0 + \eta) = 0. \quad (3.26)$$

Implisitt derivasjon av $\psi(x, t) = \text{konstant}$, gir oss

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\psi_t}{\psi_x}.$$

Sammen med andregradsligningen (3.26), gir dette oss de *karakteristiske ligningene*

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{g(h_0 + \eta)} = u \pm c(\eta).$$

Til hver av de *karakteristiske hastighetene* $u \pm c(\eta)$ svarer det en familie av karakteristikk $\psi_+ = \text{konstant}$, eller $\psi_- = \text{konstant}$. Hvis vi konsentrerer oss om enkle bølger som går mot venstre, relatert til $\psi_- = \text{konstant}$, og $dx/dt = u - c(\eta)$, får vi ved innsetting i ligningsettet (3.25)

$$\begin{aligned} \eta' \sqrt{g} + u' \sqrt{h_0 + \eta} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{u'}{\eta'} &= \frac{du}{d\eta} = -\sqrt{\frac{g}{h_0 + \eta}}, \\ \Rightarrow u &= -2\sqrt{g(h_0 + \eta)} + C, \end{aligned}$$

hvor C er en konstant. Dersom bølgen beveger seg inn i uperturbert område, dvs. et område hvor $\eta = 0$, må vi velge konstanten $C = 2\sqrt{gh_0} = 2c_0$. Dette gir oss relasjonen

$$u = 2\sqrt{gh_0} - 2\sqrt{g(h_0 + \eta)} = 2c_0 - 2c(\eta). \quad (3.27)$$

Vi ser at $u + 2c(\eta)$ er uavhengig av ψ_- langs karakteristikken $dx/dt = u - c(\eta)$. På samme måte kan vi vise at $u - 2c(\eta)$ er uavhengig av ψ_+ langs karakteristikken $dx/dt = u + c(\eta)$. De to størrelsene $u \pm 2c(\eta)$ kalles Riemanninvariantene. Alle disse bølgene vil utvikle seg mot bølger som bryter, dvs. vi får utviklet "sjokkbølger".

3.4.2 Fra gruntvannsligningene til Boussinesq-ligninger

Vi skal straks gå i gang med å utlede fKdV-ligningen, men først skal vi se at en passende utvidelse av gruntvannsligningene gir oss de såkalte Boussinesq-ligningene. Hvis vi i tillegg begrenser oss til bølger som beveger seg i en bestemt retning, får vi KdV-ligningen.

Vi ønsker å finne et sett av ligninger som, når de lineariseres, gir oss dispersjonsligningen (3.20), inkludert laveste ordens korleksjon i kh_0

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 - \frac{1}{3} c_0^2 h_0^2 k^4.$$

Denne dispersjonsligningen korresponderer med den lineære ligningen

$$\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} - \frac{1}{3} c_0^2 h_0^2 \eta_{xxxx} = 0. \quad (3.28)$$

Dersom vi legger til et ledd i gruntvannsligningene slik at de lineariseres til (3.28), vil vi ha et sett av ligninger som inkluderer ikke-lineære effekter av orden α , og dispersive effekter av orden ε . En måte å få dette til på, er å legge til leddet $\frac{1}{3}c_0^2h_0^2\eta_{xxx}$ i ligning (3.23), som gir oss Boussinesq-ligningene

$$\begin{aligned}\eta_t + [(h_0 + \eta)u]_x &= 0, \\ u_t + uu_x + g\eta_x + \frac{1}{3}c_0^2h_0^2\eta_{xxx} &= 0.\end{aligned}$$

Ligningene kan reduseres til ligning (3.28) i grensen $\alpha \rightarrow 0$, og til gruntvannsligningene (3.23) og (3.24) i grensen $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ser vi på bølger som går i en bestemt retning, eksempelvis mot høyre, er dispersjonsligningen gitt ved (3.21),

$$\omega = c_0k - \gamma k^3, \quad \gamma = \frac{1}{6}c_0h_0^2,$$

som korresponderer med den lineære ligningen

$$\eta_t + c_0\eta_x + \gamma\eta_{xxx} = 0.$$

I gruntvannsligningene vil en bølge som beveger seg mot høyre, inn i et uforstyrret område, være assosiert med Riemanninvarianten

$$u = 2\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0},$$

og ved innsetting for u i gruntvannsligningen (3.24), får vi

$$\eta_t + \{3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}\}\eta_x = 0.$$

Kombinert med den lineære dispersive ligningen ovenfor, gir dette oss KdV-ligningen²

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0}\right) \eta_x + \gamma \eta_{xxx} = 0,$$

som igjen tar vare på ikke-lineære effekter av orden α og dispersive effekter av orden ε .

3.5 Utledning av fKdV-ligningen

Vi skal utlede KdV-ligningen med drivledd, fKdV-ligningen, ved hjelp av et Boussinesq-sett av ligninger. Whitham[17] og Zeytounian[20] utleder KdV-ligningen uten drivledd fra et ligningsett som tilsvare ligningene (3.7) - (3.10), men med $p = 0$. Wu[21] utleder et generalisert Boussinesq-sett ved hjelp av et sett av transportligninger, og utledningen av fKdV-ligningen fra Boussinesq-settet gjennomføres av Lee, Yates og Wu[22]. Utledningen

²Benyttter relasjonen: $\sqrt{g(h_0 + \eta)} = \sqrt{gh_0}[1 + \frac{1}{2} \frac{\eta}{h_0} + O\left(\frac{\eta}{h_0}\right)^2]$

av en fKdV-ligning er også utført av Akylas[23], men uten å gå veien om Boussinesq-ligningene. Vi skal utlede et Boussinesq-sett av ligningene (3.7) - (3.10), hvor vi i hovedsak vil følge Whitham. Deretter følger vi Lee, Yates og Wu i utledningen av fKdV-ligningen.

Vi tar utgangspunkt i ligningsettet (3.7) - (3.10).

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi^* &= 0, & -h_0 < z^* < \eta^*, \\ \eta_{t^*}^* + \eta_{x^*}^* \phi_{x^*}^* &= \phi_{z^*}^*, & z^* = \eta^*, \\ \phi_{t^*}^* + \frac{1}{2}(\nabla \phi^*)^2 + g\eta^* &= -\frac{p_a^*}{\rho}, & z^* = \eta^*. \\ \phi_{z^*}^* &= 0, & z^* = -h_0,\end{aligned}$$

Jeg innfører som en konvensjon at størrelser som har dimensjoner markeres med *, dersom det er mulighet for sammenblanding med dimensjonsløse størrelser. Kilden er gitt ved en perturbasjon av det atmosfæriske trykket, og markeres med p_a^* . Vi ønsker å gjøre ligningene dimensjonsløse, og innfører derfor følgende transformasjoner:

$$\begin{aligned}x &= \frac{x^*}{\lambda}, & z &= \frac{z^*}{h_0} + 1, & t &= \frac{c_0 t^*}{\lambda}, \\ \phi &= \frac{\phi^*}{c_0 \lambda}, & \eta &= \frac{\eta^*}{a}, & p_a &= \frac{p_a^*}{\rho g a}.\end{aligned}$$

Skaleringen av z gjør at vi har flyttet 0-nivået ned på bunnen. I dette referansesystemet er grenseflatebetingelsen ved bunnen enkel å håndtere, så alle vanskeligheter er forbundet med den frie overflaten. Skaleringen av p_a med amplituden a er fysisk begrunnet. Eksperimenter har vist at trykk sterkere enn $|p_a| = O(\alpha)$, fører til at bølgen vil bryte ved kilden. Vi har allerede innført parametrene ε (lign. (3.12)) og α (lign. (3.13)), og vi antar at disse parametrene er små størrelser, dvs.

$$\varepsilon = \left(\frac{h_0}{\lambda}\right)^2 \ll 1, \quad \text{og} \quad \alpha = \frac{a}{h_0} \ll 1.$$

Ved transformasjonen til dimensjonsløs form, og ved å benytte parametrene ε og α , får vi ligningsettet:

$$\varepsilon \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad 0 < z < 1 + \alpha \eta \quad (3.29)$$

$$\alpha \varepsilon (\eta_t + \eta_x \phi_x) = \phi_z, \quad z = 1 + \alpha \eta \quad (3.30)$$

$$\alpha \eta + \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \frac{1}{\varepsilon} \phi_z^2) + \alpha p_a = 0, \quad z = 1 + \alpha \eta \quad (3.31)$$

$$\phi_z = 0, \quad z = 0 \quad (3.32)$$

Vi utvikler hastighetspotensialet i en potensrekke i ε . Ligning (3.30) gir en indikasjon på at ϕ må skaleres med α , så vi forsøker med utviklingen

$$\phi(x, z, t) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(x, z, t)$$

Vi tar i første omgang for oss ligningene (3.29) og (3.32), og venter med ligningene for den frie overflaten. Ved innsetting av rekkeutviklingen for ϕ i ligningene (3.29) og (3.32) får vi hhv.

$$\begin{aligned}\phi_{0zz} + \varepsilon(\phi_{0xx} + \phi_{1zz}) + \varepsilon^2(\phi_{1xx} + \phi_{2zz}) + \dots &= 0 \\ \phi_{0z} + \varepsilon\phi_{1z} + \varepsilon^2\phi_{2z} + \dots &= 0, \quad \text{for } z = 0\end{aligned}$$

Vi ser på ligningsettet til laveste orden

$$\begin{aligned}\phi_{0zz} = 0 &\Rightarrow \phi_0(x, z, t) = zA(x, t) + B(x, t), \\ \phi_{0z}|_{z=0} = A(x, t) = 0 &\Rightarrow \phi_0(x, z, t) = B(x, t).\end{aligned}$$

Det betyr at den horisontale hastighetskomponenten av laveste orden u_0 , er uavhengig av dybden

$$u_0(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}\phi_0(x, t).$$

Vi antar nå at $\phi_n = 0$ for $z = 0$ og $n = 1, 2, 3, \dots$, og at u_0 er den horisontale hastighetskomponenten ved bunnen, dvs. $z = 0$. Da kan vi se bort fra vilkårlige funksjoner når vi integrerer for å bestemme ϕ_1 og ϕ_2 :

$$\begin{aligned}O(\alpha\varepsilon) : \quad &\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} \\ \Rightarrow \phi_1(x, z, t) &= -\frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} \\ O(\alpha\varepsilon^2) : \quad &\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^4\phi_0}{\partial x^4} \\ \Rightarrow \phi_2(x, z, t) &= \frac{1}{24}z^4\frac{\partial^4\phi_0}{\partial x^4}\end{aligned}$$

De første leddene i rekken er

$$\phi(x, z, t) = \alpha\phi_0 - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon z^2\phi_{0xx} + \frac{1}{24}\alpha\varepsilon^2 z^4\phi_{0xxxx}$$

Vi tar nå for oss tilstanden ved $z = 1 + \alpha\eta$. Fra ligning (3.30) får vi

$$\begin{aligned}\alpha\varepsilon\eta_t + \alpha^2\varepsilon\eta_x\phi_{0x} + \alpha\varepsilon(1 + \alpha\eta)\phi_{0xx} - \frac{1}{6}\alpha\varepsilon^2(1 + \alpha\eta)^3\phi_{0xxxx} &= 0 \\ \eta_t + [(1 + \alpha\eta)\phi_{0x}]_x - \frac{1}{6}\varepsilon\phi_{0xxxx} &= 0\end{aligned}\tag{3.33}$$

og fra (3.31)

$$\begin{aligned}\alpha\phi_{0t} - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon(1 + \alpha\eta)^2\phi_{0xxt} + \alpha\eta + \frac{1}{2}\alpha^2\phi_{0x}^2 + \alpha p_a &= 0 \\ \phi_{0t} + \eta + p_a + \frac{1}{2}\alpha\phi_{0x}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\phi_{0xxt} &= 0 \\ \phi_{0xt} + \eta_x + p_{ax} + \alpha\phi_{0x}\phi_{0xx} - \frac{1}{2}\varepsilon\phi_{0xxxt} &= 0\end{aligned}\tag{3.34}$$

For å få den siste ligningen har vi derivert ligningen mhp. x . Vi innfører nå den horisontale hastighetskomponenten midlet over dybden $\bar{u}(x, t)$, som defineres ved

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{\alpha(1 + \alpha\eta)} \int_0^{1+\alpha\eta} \phi_x(x, z, t) dz.$$

Setter vi inn for rekkeutviklingen av ϕ får vi

$$\bar{u} = \frac{1}{1 + \alpha\eta} [z\phi_{0x}]_0^{1+\alpha\eta} - \frac{\varepsilon}{6} \frac{1}{1 + \alpha\eta} [z^3\phi_{0xxx}]_0^{1+\alpha\eta} + \dots$$

som i laveste orden av α og ε gir oss

$$\bar{u} = \phi_{0x} - \frac{1}{6}\varepsilon\phi_{0xxx} + O(\alpha\varepsilon, \varepsilon^2).$$

Fra ligning (3.33) får vi

$$\begin{aligned} \eta_t + [(1 + \alpha\eta)\phi_{0x} - \frac{1}{6}\varepsilon\phi_{0xxx}]_x &= 0 \\ \eta_t + [(1 + \alpha\eta)\bar{u}]_x &= 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

og fra ligning (3.34) får vi

$$\begin{aligned} [\phi_{0x} - \frac{1}{6}\varepsilon\phi_{0xxx}]_t + \eta_x + p_{ax} + \alpha\phi_{0x}\phi_{0xx} - \frac{1}{3}\varepsilon\phi_{0xxxt} &= 0 \\ \eta_x + \bar{u}_t + \alpha\bar{u}\bar{u}_x - \frac{1}{3}\varepsilon\bar{u}_{xxt} &= -p_{ax}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ligningene (3.35) og (3.36) utgjør et sett av Boussinesq-ligninger med feil av orden $O(\alpha\varepsilon, \varepsilon^2)$.

3.5.1 Fra Boussinesq-ligningene til fKdV-ligningen

For å komme videre, må vi innføre restriksjoner på trykkleddet. Wu[11] viser at mens Boussinesq-ligningene krever at trykket er av størrelsesorden $O(\alpha)$, så krever fKdV-ligningen at trykket har størrelsesorden $O(\alpha^2)$. Vi skal dessuten anta at kilden beveger seg med en hastighet som er nær kritisk verdi. For et trykkfelt som går mot venstre skriver vi

$$p_a = p_a(x + (1 + \delta)t), \quad F = \frac{U}{c_0} = 1 + \delta. \quad (3.37)$$

hvor vi antar at δ er $O(\alpha)$. For laveste orden i α og ε , reduseres (3.35) og (3.36) til

$$\eta_t + \bar{u}_x = 0, \quad \eta_x + \bar{u}_t = 0,$$

som gir opphav til relasjonene

$$\bar{u} = -\eta, \quad \eta_t - \eta_x = 0.$$

Vi ønsker å finne en løsning som gjelder opp til $O(\alpha)$, og antar at løsningen har formen

$$\bar{u} = -\eta + \alpha A + O(\alpha^2),$$

hvor A er en funksjon av η og dens deriverte. (3.35) og (3.36) gir

$$\eta_t - \eta_x + \alpha(A_x - 2\eta\eta_x) = O(\alpha^2), \quad (3.38)$$

$$\eta_t - \eta_x - \alpha(A_t + \eta\eta_x + \frac{1\varepsilon}{3\alpha}\eta_{xxt} + p_{ax}) = O(\alpha^2). \quad (3.39)$$

Dersom systemet er konsistent, må ledd av $O(\alpha)$ i (3.38) og (3.39) være like, og vi får

$$\begin{aligned} A_x + A_t &= \eta\eta_x - \frac{\varepsilon}{3\alpha}\eta_{xxt} - p_{ax}, \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{\varepsilon}{6\alpha}\eta_{xt} - \frac{1}{2}p_a. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nå gjenstår bare å sette inn (3.40) i en av ligningene (3.38) eller (3.39), og vi har en inhomogen KdV-ligning

$$\eta_t - \left(1 + \frac{3}{2}\alpha\eta\right)\eta_x - \frac{1}{6}\varepsilon\eta_{xxx} = \frac{1}{2}\alpha p_{ax}. \quad (3.41)$$

I ligning (3.41) har vi byttet ut η_{xxt} med η_{xxx} , som gir oss en feil $O(\varepsilon)$. Siden leddet hvor η_{xxt} inngår er $O(\varepsilon)$, blir den totale feilen $O(\varepsilon^2)$, og kan derfor neglisjeres. Midlere horisontal hastighet innsatt A blir

$$\bar{u} = -\eta + \frac{1}{4}\alpha\eta^2 - \frac{1}{6}\varepsilon\eta_{xx} - \frac{1}{2}\alpha p_{ax}. \quad (3.42)$$

Det kan være interessant å sammenligne (3.42) med uttrykket som vi fant for enkle bølger i kap. 3.4.1. Fra ligning (3.27) har vi

$$u^* = -2\sqrt{g(h_0 + \eta^*)} + 2\sqrt{gh_0},$$

der størrelsene er gitt med dimensjoner. Med dimensjonsløse variable får vi

$$u = -2\sqrt{1 + \eta} + 2 \approx -\eta + \frac{1}{4}[\eta]^2 - \dots$$

Siden $\eta = O(\alpha)$, er $\eta^2 = O(\alpha^2)$, mens vi i ligning (3.42) har eksplisitt uttrykt relativ orden av leddene. For enkle bølger vil vi derfor ha

$$\bar{u} = -\eta + \frac{1}{4}\alpha\eta^2 + O(\alpha^2),$$

hvor vi har byttet ut u med \bar{u} , siden den horisontale hastighetskomponenten er uavhengig av z . Vi ser at de to første leddene i (3.42) er identiske med uttrykket vi finner for enkle bølger. Leddet $-(1/6)\varepsilon\eta_{xx}$ skyldes dispersjon, og $-(1/2)\alpha p_{ax}$ skyldes kilden.

3.5.2 Omskalering av fKdV-ligningen

Ligningene (3.37) og (3.41) gjelder for en strømning som er i ro ved $x = \pm\infty$. Jeg ønsker å omskalere problemet slik at referansesystemet beveger seg med den karakteristiske grunntvannshastigheten c_0 . Dette kan gjøres ved å innføre nye variable $x' = x + t, t' = t$, hvilket gir oss fKdV-ligningen på formen (jeg sløyfer apostrofene)

$$\eta_t - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \frac{1}{6}\varepsilon\eta_{xxx} = \frac{1}{2}\alpha p_{ax}; \quad (3.43)$$

$$p_a = p_a(x + \delta t).$$

Kilden vil følge en bestemt bane i (x, t) -koordinatsystemet, avhengig av kildens hastighet til enhver tid. Vi ser at stigningstallet til denne banen er gitt ved δ , hvilket gjør det mulig å beregne Froudetallet for ethvert tidspunkt. Spesielt har vi at $F = 1$ for $\delta = 0$.

Med omskaleringen ovenfor sitter vi fortsatt igjen med to parametre som ikke er bestemt, utover det at de er små størrelser. Ved hjelp av Urselltallet (lign. (3.14)) kan vi kvitte oss med den ene parameteren, siden vi vet at vi må ha

$$Ur = \frac{\alpha}{\varepsilon} = O(1),$$

for å få generert solitoner i forkant av kilden. Det er nærliggende å velge $\varepsilon = \alpha$. Jeg skal i det følgende finne et sett av variable som transformerer den opprinnelige fKdV-ligningen til en form hvor det ikke opptrer parametre på venstre side i ligningen.

I første omgang kan vi ta for oss den modifiserte utgaven av fKdV-ligningen, gitt ved (3.43). Vi ønsker å holde oss til et koordinatsystem som beveger seg med resonanshastigheten c_0 , og velger oss en skalering

$$x' = Ax, \quad t' = At, \quad \eta' = B\eta,$$

hvor de vilkårlige konstantene A og B må bestemmes. Det viser seg at vi kan fjerne parameteren α (og dermed også ε) fra den venstre siden av fKdV-ligningen, dersom vi velger

$$A = \alpha^{-\frac{1}{2}} \quad \text{og} \quad B = \alpha.$$

Dersom vi går tilbake til det opprinnelige problemet, gitt ved ligning (3.41), ser vi at ved å foreta transformasjonen,

$$x' = \alpha^{-\frac{1}{2}}(x + t), \quad t' = \alpha^{-\frac{1}{2}}t, \quad \eta' = \alpha\eta,$$

får vi fKdV-ligningen på formen (igjen sløyfer jeg apostrofene)

$$\eta_t - \frac{3}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} = \frac{1}{2}\alpha^2 p_{ax};$$

$$p_a = p_a(\alpha^{-\frac{1}{2}}(x + \delta t)).$$

Vi innfører en ny funksjon $P(x, t)$

$$P(x, t) = \alpha^2 p_a(x, t), \quad P(x, t) = P(x + \delta t),$$

som gir oss fKdV-ligningen

$$\eta_t - \frac{3}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} = \frac{1}{2}P_x. \quad (3.44)$$

Kapittel 4

Numerisk modell

4.1 Endelige differanser

Jeg har laget en numerisk løser for fKdV-ligningen, basert på endelige differanser. Målet har vært å kunne illustrere hvordan fKdV-ligningen virker under gitte forutsetninger. Jeg har ikke hatt ambisjoner om å foreta en utførlig numerisk analyse av problemet.

Jeg skal løse fKdV-ligningen (3.44) med en kilde som er gitt ved

$$P(x, t) = P_0 \sin^2 \left[\frac{\pi}{L}(x + \delta t) \right], \quad 0 \leq x + \delta t \leq L,$$

der L angir kildens utbredelse i x -retningen og P_0 er amplituden til kilden. Vi har bruk for den deriverte av P mhp. x , som er enkel å finne analytisk,

$$P_x(x, t) = P_0 \frac{\pi}{L} \sin \left[\frac{2\pi}{L}(x + \delta t) \right], \quad 0 \leq x + \delta t \leq L.$$

Metoden jeg har implementert er eksplisitt, basert på sentrale differanser ved beregning av deriverte i rom, og leapfrog metode for å utvikle i tid. Jeg har benyttet et ekvidistant gitter av beregningspunkter, slik at $\eta(m \Delta x, n \Delta t) = v_m^n$, og bruker v som variabel i differensligningene, for å skille mellom disse og differensialligningene. Med dette utgangspunktet, kan vi skrive fKdV-ligningen som en differensligning

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2 \Delta t} - \frac{3}{2} v_m^n \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2 \Delta x} - \frac{1}{6} \frac{v_{m+2}^n - 2v_{m+1}^n + 2v_{m-1}^n - v_{m-2}^n}{2 \Delta x^3} = \frac{1}{2} Q_m^n,$$

hvor kilden i differensligningen er representert med en variabel Q_m^n , som må bestemmes separat for hvert tidssteg. Vi ser at hvert nytt tidssteg kan bestemmes eksplisitt,

$$v_m^{n+1} = v_m^{n-1} + \frac{3 \Delta t}{2 \Delta x} v_m^n (v_{m+1}^n - v_{m-1}^n) + \frac{\Delta t}{6 \Delta x^3} (v_{m+2}^n - 2v_{m+1}^n + 2v_{m-1}^n - v_{m-2}^n) + \Delta t Q_m^n.$$

Siden metoden er avhengig av å kjenne tilstanden i to foregående tidssteg, er det nødvendig å bruke en enstegsmetode for å beregne det første tidssteget. Metoden er ikke resurskrevende med hensyn til lagringskapasitet, ettersom det til enhver tid er tilstrekkelig å ha lagret data for de to foregående tidsstegene. Koeffisientene $3 \Delta t / 2 \Delta x$ og $\Delta t / 6 \Delta x^3$ er konstante, så vi trenger ikke å beregne disse på nytt i hvert beregningspunkt. Vi kan dessuten beregne differansen $v_{m+1}^n - v_{m-1}^n$ før vi beregner v_m^{n+1} , hvilket sparer oss for to flyttallsoperasjoner pr. beregningspunkt. Kilden har begrenset utstrekning, så vi trenger bare å beregne $\Delta t Q_m^n$ i et begrenset antall beregningspunkter. Dette skulle tilsi at vi normalt vil utføre 9 flyttallsoperasjoner pr. beregningspunkt, og 11 flyttallsoperasjoner pr. beregningspunkt i nærheten av kilden.

4.1.1 Randbetingelser

Modellen skal representere bølger på en fri, ubegrenset overflate, som i utgangspunktet er i likevekt, eller er perturbert med en lokal forstyrrelse. Vi ønsker åpne render, og ønsker derfor å minimere refleksjon ved randen av beregningsområdet. Begrensningen av beregningsområdet er ikke fysisk betinget, så i prinsippet kan vi velge beregningsområdet så stort vi vil. I praksis er det ønskelig å begrense beregningsområdet, for å unngå å gjøre for mange beregninger.

Jeg har benyttet meg av et sett av randbetingelser som gir en “stiv” projeksjon av forstyrrelser over randen. Punkter på randen oppdateres på bakgrunn av verdiene til de nærmeste beregningspunktene. Metoden gir brukbare resultater så lenge vi bare har numerisk støy med liten amplitude ved rendene. Det er derfor nødvendig å plassere rendene langt unna kilden, og da særlig nedstrøms, hvor det oppstår et dispersivt bølgetog.

Jeg har testet ut en del ulike metoder for å konstruere åpne randbetingelser. Wu bruker randkravene $\eta_t = \pm \eta_x$, og rapporterer om tilfredsstillende resultater. Orlanskis metode for åpen rand baserer seg på å følge karakteristikene av bølger, og projisere disse over randen. FRS-metoden går ut på å tilpasse løsningen i beregningsområdet med en løsning som gjelder på randen, og tilpassingen skjer over flere beregningspunkter i nærheten av randen. Jeg har bare gjort overfladiske undersøkelser hvor jeg har prøvd ut disse metodene, men har ikke fått tilfredsstillende resultater. Jeg regner det som sannsynlig at flere av disse metodene kan anvendes, men jeg har ikke prioritert å undersøke dette nærmere.

4.2 Stabilitetsanalyse

Vi ønsker å foreta en stabilitetsanalyse av det numeriske skjemaet. Lax teorem forteller oss at løsningen av differensligningen konvergerer mot løsningen av differensialligningen dersom skjemaet er konsistent og stabilt. Kriteriet for konsistens er at løsningen av differensligningen skal nærme seg løsningen av differensialligningen i ethvert punkt (x, t) når

$(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$ og $(m\Delta x, (n+1)\Delta t) \rightarrow (x, t)$. Dette kriteriet er oppfylt, ettersom skjemaet bygger på Taylorrekker for å estimere de deriverte. Det gjenstår derfor å vise at skjemaet er stabilt. Jeg har benyttet meg av Thomas[24] og Ismail & Taha[25] i forbindelse med denne analysen.

Vi vil bruke von Neumann metoden for å studere stabiliteten av skjemaet. Denne metoden kan bare benyttes på lineære problemer, så vi ser derfor på den lineariserte utgaven av fKdV-ligningen. Det er tilstrekkelig å studere det homogene tilfellet, så vi vil undersøke skjemaet

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{1}{6} \frac{v_{m+2}^n - 2v_{m+1}^n + 2v_{m-1}^n - v_{m-2}^n}{2\Delta x^3} = 0.$$

Vi forenkler notasjonen ved å innføre konstanten $R = \Delta t/3\Delta x^3$, og operatoren δ^3 , som defineres ved

$$\delta^3 v_m^n \equiv v_{m+2}^n - 2v_{m+1}^n + 2v_{m-1}^n - v_{m-2}^n.$$

Dermed kan vi skrive skjemaet på formen

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{2} R \delta^3 v_m^n + v_m^{n-1}.$$

Det er en fordel å skrive skjemaet som et system av enstegsmetoder. Vi definerer $V_{1m}^n = v_m^n$ og $V_{2m}^n = v_m^{n-1}$, og setter opp systemet

$$\mathbf{V}^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} R \delta^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}^n, \quad \text{der } \mathbf{V}^n \equiv \begin{pmatrix} V_{1m}^n \\ V_{2m}^n \end{pmatrix}.$$

Vi kan eliminere den romlige derivasjonsoperatoren ved hjelp av Fouriertransformasjonen

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} v_m, \quad \xi \in [-\pi, \pi],$$

hvor $\hat{v} \in [-\pi, \pi]$. Den inverse transformasjonen er gitt ved

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\xi} \hat{v}(\xi) d\xi.$$

Etter Fouriertransformasjon får vi ligningsettet

$$\hat{\mathbf{V}}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2iR \sin \xi (\cos \xi - 1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}^n,$$

og vi definerer forsterkningsmatrisen (eng: amplification matrix)

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} 2iR \sin \xi (\cos \xi - 1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kan skrive ligningssystemet på formen

$$\widehat{\mathbf{V}}^{n+1} = G(\xi) \widehat{\mathbf{V}}^n = G(\xi)^{n+1} \widehat{\mathbf{V}}^0,$$

og vi ser at normen til forsterkningsmatrisen må være begrenset dersom løsningen av differensligningen skal være begrenset. I praksis vil vi kreve at spektralradien $\sigma(G(\xi)) \leq 1$. Vi beregner egenverdiene til $G(\xi)$,

$$\det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2i \sin \theta - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2i\lambda \sin \theta - 1 = 0,$$

der vi har definert

$$\sin \theta \equiv R \sin \xi (\cos \xi - 1).$$

Dermed får vi egenverdiene

$$\lambda = e^{i\theta} \quad \vee \quad \lambda = -e^{-i\theta}.$$

For å ha stabilitet må vi ha $|\lambda| \leq 1$, så θ må være en reell størrelse. Fra definisjonen av θ får vi kravet

$$|R \sin \xi (\cos \xi - 1)| \leq 1.$$

Størrelsen $\sin \xi (\cos \xi - 1)$ har maksimal verdi $3\sqrt{3}/4$ på intervallet $\xi \in [-\pi, \pi]$. Kravet til stabilitet blir dermed

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^3} \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2.3.$$

Jeg har utført de fleste beregningene med $\Delta x = 0.1$, og har brukt tidsdiskretisering $\Delta t = 0.001$. Dette ser ut til å gi gode resultater, men vi ser at det er nødvendig med et stort antall tidssteg dersom metoden skal gi en tidsutvikling.

4.3 Validering av numerisk metode

Det vil være vanskelig å validere resultatene for den inhomogene fKdV-ligningen, uten å sammenligne med eksperimentelle data. Det er imidlertid mulig å gi en vurdering av det numeriske skjemaet dersom vi ser på den homogene KdV-ligningen, og sammenligner med en analytisk løsning av problemet.

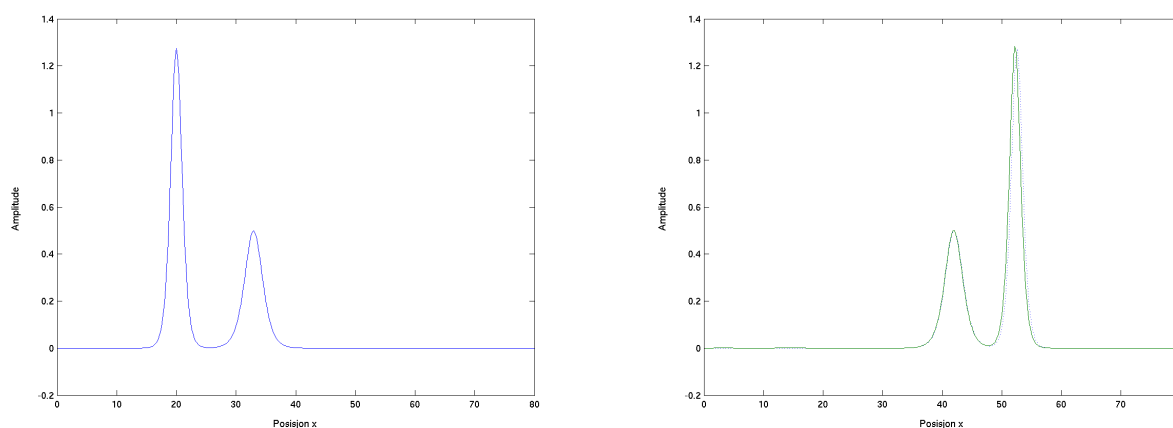
Jeg vil se på KdV-ligningen som gitt i kap. 2 (se ligning (2.7)),

$$\eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0.$$

og løse denne for en initialtilstand med to solitoner. Ved hjelp av Hirotrias metode (se kap. 2.2.2) kan vi finne en eksakt løsning av problemet. Den eksakte løsningen er gitt ved

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log F; \\ F &= 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \frac{(K_1 - K_2)^2}{(K_1 + K_2)^2} e^{\theta_1 + \theta_2}; \\ \theta_i &= 2K_i(x - x_{0i}) - 8K_i^3 t, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Det viser seg at det numeriske skjemaet for KdV-ligningen blir ustabil med diskretiseringen $\Delta x = 0.1$ og $\Delta t = 0.001$. Sammenligner vi med stabilitetsanalysen over, ser vi at det skiller en faktor 6 mellom de dispersive leddene i de to skjemaene. Vi må derfor ha $\Delta t/\Delta x \leq 2/3\sqrt{3} \approx 0.383$, og jeg har derfor valgt $\Delta x = 0.2$ og $\Delta t = 0.001$ for dette tilfellet. Jeg har dessuten valgt $k_1 = 0.5$, $x_{01} = 30$ og $k_2 = 0.8$, $x_{02} = 20$. Den eksakte løsningen ved $t = 0$ ble brukt som initialbetingelse for den numeriske metoden.

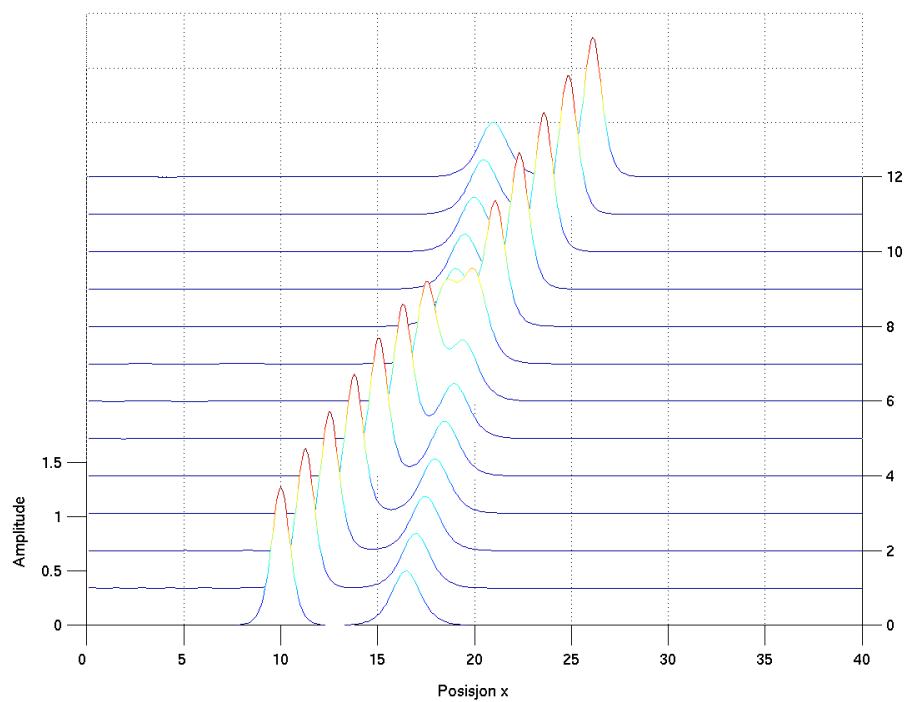


Figur 4.1: Initiell tilstand og tilstand ved $t=12$. Den numeriske løsningen er plottet med heltrukken linje, og den analytiske løsningen er plottet med stiplet linje.

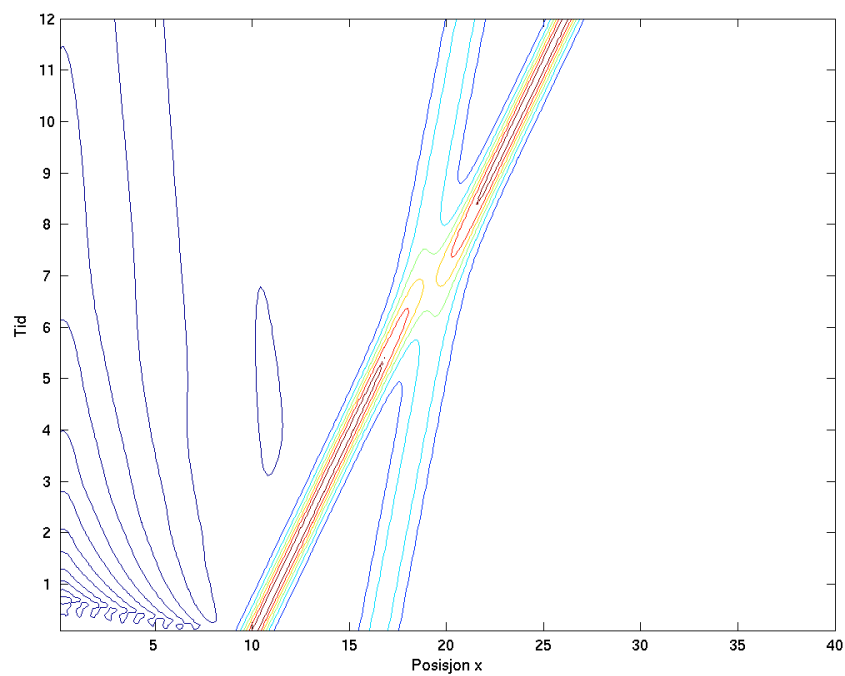
I figur 4.1 har jeg plottet initialtilstanden for problemet, og tilstanden ved $t = 12$ som er beregnet både numerisk og analytisk. Vi ser at den numeriske løsningen stort sett er sammenfallende med den analytiske løsningen, men med noe avvik for den største solitonen.

Figurene 4.2 og 4.3 viser tidsutviklingen for den numeriske løsningen. På grunn av orienteringen av plottet i figur 4.2, blir z -aksen projisert inn på plottets venstre side, mens y -aksen som markerer tidsutviklingen, ligger i plottets høyre kant. Vi legger merke til at amplituden avtar under interaksjonen mellom de to solitonene, hvilket er svært ulikt det vi er vant til fra interaksjon mellom lineære bølger. Konturplottet av tidsutviklingen, figur 4.3, viser at vi til enhver tid vil ha to distinkte bølgetopper.

En annen effekt som kommer tydelig frem i figur 4.3, er at solitonene faseforskyves under interaksjonen. Etter interaksjonen mellom solitonene, er den største solitonen faseforskjøvet fremover, mens den minste solitonen er faseforskjøvet bakover.



Figur 4.2: Tidsutvikling av numerisk løsning.



Figur 4.3: Tidsutvikling av numerisk løsning, konturplott

4.4 Konstruksjon av kildeledd i skjemaet

Vi skal se på hvordan kilden kan behandles i det numeriske skjemaet for fKdV-ligningen. Som tidligere nevnt lar vi kilden være gitt som

$$P(x, t) = P_0 \sin^2 \left[\frac{\pi}{L}(x + \delta t) \right], \quad 0 \leq x + \delta t \leq L. \quad (4.1)$$

Slik som problemet er formulert i ligning (3.44), vil koordinatsystemet bevege seg mot venstre med gruntvannshastigheten c_0 , i forhold til uperturbert væske. Kilden vil ikke være stasjonær i dette referansesystemet, bortsett fra i spesialtilfellet hvor også kilden beveger seg med konstant hastighet c_0 . Alternativt kunne vi valgt et referansesystem som var stasjonært i forhold til kilden. Vi ønsker å la kilden akselerere gjennom resonansområdet, og dersom vi lar koordinatsystemet følge kilden, vil vi få et bilde hvor bølgene “bøyer seg” ettersom kilden akselererer.

Vi vil altså bestemme kilden slik at den kan flyttes langs x -aksen etter behov. For å holde rede på hvor kilden befinner seg på x -aksen, innfører jeg en ny variabel $x_0(t)$, som markerer midtpunktet av området kilden befinner seg på. Det er også hensiktsmessig å innføre variabelen $X = x + \delta t - \frac{L}{2}$. Dette gir oss kilden på formen

$$P(x, t) = P_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{L} X(x, t) \right), \quad -\frac{L}{2} \leq X(x, t) \leq \frac{L}{2}.$$

Intervallet som kilden defineres på, diskretiseres med samme romdiskretisering som i det numeriske skjemaet som løser KdV-ligningen. I hvert av beregningspunktene i intervallet finner jeg verdiene som interpolerer

$$P_x(x, t) = -\frac{\pi P_0}{L} \sin \left(\frac{2\pi X}{L} \right), \quad -\frac{L}{2} \leq X(x, t) \leq \frac{L}{2},$$

som vil være den effektive kilden i skjemaet, og lagrer disse verdiene i en vektor q . Deretter oppretter jeg en vektor Q som inneholder like mange null-elementer som det totale romgriddet jeg skal løse for. I denne vektoren laster jeg inn verdiene som er lagret i q slik at disse blir plassert riktig i forhold til posisjonen til kilden, som til enhver tid er gitt ved $x_0(t)$. Siden denne metoden forutsetter at funksjonen for kilden diskretiseres på samme måte som skjemaet som løser KdV-ligningen, er det en fordel å bruke et ekvidistant grid.

Dermed har vi satt opp systemet. Så skal vi forflytte oss i tid. Problemet her er at kilden generelt vil forflytte seg slik at gridpunktene som gir referanserammen for væsken og gridpunktene som refererer til kilden generelt ikke vil være sammenfallende. Sagt på en annen måte så vil de interpolerte verdiene vi har funnet og lagret i q , generelt ikke “treffe” de gridpunktene vi bruker for å beregne responsen til væsken. Dette problemet har jeg løst ved først å beregne avstanden mellom et interpolerende punkt og et gridpunkt, og deretter beregne effekten av kilden i et gridpunkt ved å ta en vektet sum av de to nærmeste interpolerende punktene.

Før vi kan begynne å forflytte oss i tid, må vi bestemme oss for hvordan hastigheten til kilden skal variere. Dette tilsvarer å bestemme en trajektorie som kilden, lokalisert ved funksjonen $x_0(t)$, skal følge i et (x,t) -koordinatsystem. Avstanden mellom de interpolerende punktene og gridpunktene er gitt ved resten $r = x_0(t) \pmod{\Delta x}$. Gridpunktet som ligger foran x_0 på x -aksen er gitt ved $x_n = (x_0 - r)/\Delta x$. Dermed har vi alt vi trenger for å foreta beregningene av kilden Q i alle gridpunktene. Denne metoden for å beregne posisjonen til kilden, ser ut til å fungere tilfredsstillende i de simuleringene jeg har foretatt.

4.4.1 Beregning av Froudetall og dragkraft

Froudetallet gir oss forholdet mellom kildens hastighet og resonanshastigheten c_0 . Slik som vi har satt opp systemet, vil kilden følge en bane i (x,t) -planet, og Froudetallet vil være bestemt av tangenten til denne banen. Vi antar at kilden enten beveger seg med konstant fart, eller med jevn akselerasjon. Banen til kilden vil dermed være gitt ved

$$x_0(t) = C_2 t^2 + C_1 t + C_0,$$

og tangenten til banen vil være gitt ved den deriverte

$$x'_0(t) = 2C_2 t + C_1 = \delta.$$

Vi kan dermed beregne Froudetallet

$$F = 1 + \delta.$$

Jeg har også beregnet dragkraften $D_W(t)$, som virker på kilden. Dragkraften er gitt ved

$$D_W(t) = - \int P(x, t) \eta_x dx.$$

For å beregne produktet $P(x, t) \eta_x$ må vi behandle P på samme måte som vi gjorde for P_x i det numeriske skjemaet. Vi velger å interpolere P i like mange punkter som det vi har gjort for P_x . Da vil ikke beregningen av dragkraften innebære noe vesentlig merarbeid, ettersom vi kan bruke de samme vektene til å beregne effekten av både P og P_x . Jeg kommer tilbake til betydningen av dragkraften i kap. 5.1.1.

Kapittel 5

Resultater og diskusjon

5.1 Masse og energiteoremer

Vi ønsker å bestemme massen og energien som er assosiert med solitonene. Disse størrelsene er av interesse i seg selv, men det viser seg at de også kan benyttes for å gi et mål på perioden for generering av solitoner, og middelverdien av draget på kilden.

For å finne uttrykk for massen og energien til solitonene, har jeg støttet meg på en artikkel av Shen[26]. Shen benytter et referansesystem som er noe anderledes enn det jeg har brukt ellers i oppgaven. Den viktigste forskjellen er at alle størrelsene relateres til en parameter som er bestemt av forholdet mellom amplituden til kilden $\|h^*\|_\infty$ og likevektsdybden h_0 . Jeg skal kort presentere de viktigste størrelsene som Shen opererer med.

Shen benytter et koordinatsystem (x^*, z^*) , som følger med kilden. Kilden er i dette tilfellet en forhøyning på bunnen, og er bestemt ved

$$h^*(x^*) = \kappa^2 h_0 h(x), \quad \text{der} \quad \kappa = \sqrt{\frac{\|h^*\|_\infty}{h_0}}.$$

Overflaten, hastighetskomponentene og trykket er gitt ved hhv.

$$\begin{aligned} \eta^* &= \kappa h_0 \eta_1(x, t) + O(\kappa^2); \\ u^* &= -\kappa c_0 \eta_1; \\ w^* &= \kappa^{\frac{3}{2}} c_0 \eta_1 x z; \\ p^* &= \rho g \left[-\left(1 - \frac{z^*}{h_0}\right) + \kappa \eta_1 \right]. \end{aligned}$$

Det er rimelig enkelt å se at massen over likevekt må være gitt ved

$$m^* = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \eta^*(x^*, t^*) dx^*.$$

Før vi tar for oss energien som er forbundet med en overflatebølge, ser vi på det horisontale momentet M_h , som er gitt ved

$$\begin{aligned} M_h &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{h^*}^{h_0+\eta^*} \rho u^* dz^* dx^* \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\kappa^2 h_0 h}^{h_0(1+\kappa\eta)} \rho \kappa \eta_1 \sqrt{gh_0} d(h_0 z) d(\kappa^{-\frac{1}{2}} h_0 x) + \rho h_0^2 \sqrt{gh_0} O(\kappa^{\frac{5}{2}}) \\ &= -\kappa^{\frac{3}{2}} \rho c_0 h_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1^2(x, t) dx + \rho c_0 h_0^2 O(\kappa^{\frac{5}{2}}). \end{aligned}$$

Det vertikale momentet er av orden $\rho c_0 h_0^2 \kappa^5$, og har ingen vesentlig betydning for problemet. Den totale energien er gitt ved summen av kinetisk og potensiell energi

$$\begin{aligned} E^* &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{h^*}^{h_0+\eta^*} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^{*2} + v^{*2}) + \rho g \left(z^* - \frac{h_0 + h^*}{2} \right) \right\} dz^* dx^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\kappa^2 h_0 h}^{h_0(1+\kappa\eta)} \left\{ \frac{\rho}{2} (\kappa^2 \eta_1^2 g h_0 + \kappa^3 g h_0 \eta_{1x}^2 z^2) \right. \\ &\quad \left. + \rho g h_0 \left(z - \frac{1}{2} (1 + \kappa^2 h) \right) \right\} d(h_0 z) d(\kappa^{-\frac{1}{2}} h_0 x) \\ &= \kappa^{-\frac{1}{2}} \rho c_0^2 h_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \kappa^2 \eta_1^2 (1 + \kappa \eta_1 - \kappa^2 h) + \frac{1}{6} \kappa^3 \eta_{1x}^2 [(1 + \kappa \eta_1)^3 - \kappa^6 h^3] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [(1 + \kappa \eta_1)^2 - \kappa^4 h^2] - \frac{1}{2} (1 + \kappa^2 h) (1 + \kappa \eta_1 - \kappa^2 h) \right\} dx \\ &= -c_0 M_h + \frac{1}{2} \rho c_0^2 h_0^2 \kappa^{\frac{5}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} [\eta_1^3 + \frac{1}{3} \eta_{1x}^2 - h \eta_1] dx + \rho c_0^2 h_0^2 O(\kappa^{\frac{7}{2}}). \end{aligned}$$

Til laveste orden i κ er den totale energien kun avhengig av det horisontale momentet M_h .

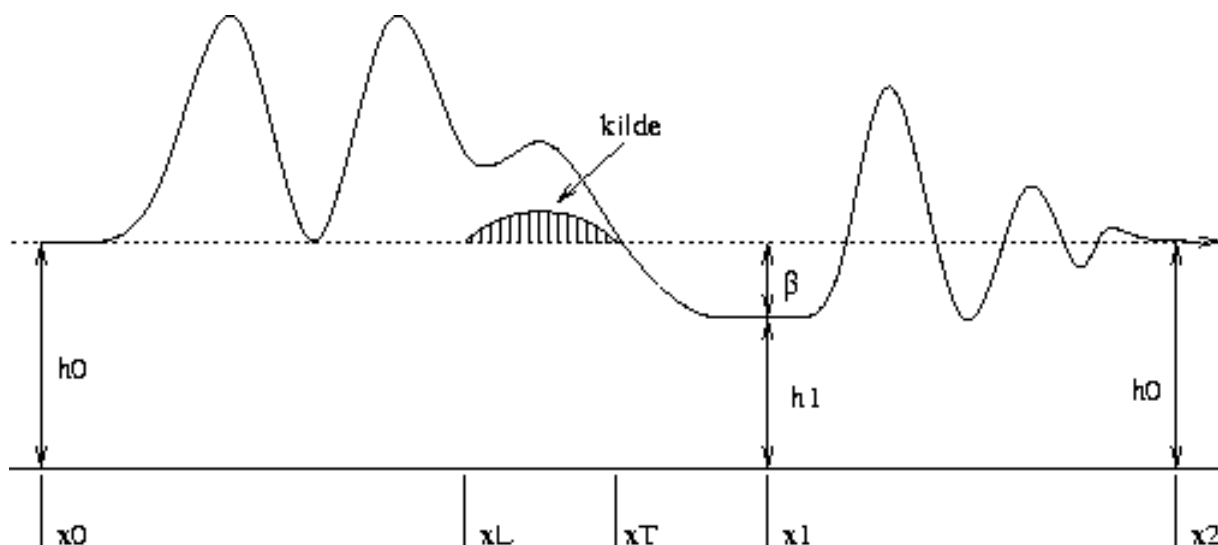
5.1.1 Det dimensjonsløse problemet

Vi skal relatere masse og energi til fKdV-ligningen (3.44). Den homogene utgaven av denne ligningen tillater enkle solitoner som løsninger, og disse er gitt ved

$$\eta(x, t) = 2c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{6c} (x + ct) \right].$$

Sammenligner vi med ligning (2.12), som gjelder for KdV-ligningen (2.7), og ser bort fra forskjellen i orientering av bølgeene, ser vi at forskjellen kun består i skaleringen av amplituden og bølgelengden. Vi skal se på stabile solitoner, som vil ha konstant masse m_s og energi E_s . Vi kan derfor foreta beregninger for et vilkårlig tidspunkt, og velger $t = 0$. Solitonene har amplitude α , så jeg innfører $\alpha = 2c$, hvilket gir oss

$$\eta(x, t) = \alpha \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{3\alpha} x \right].$$



Figur 5.1: Referansesystem for resonansproblemet

Massen til solitonen bestemmes ved å integrere over hele x -aksen

$$m_s = \int_{-\infty}^{\infty} \eta \, dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2\left\{\frac{1}{2}\sqrt{3\alpha}x\right\} \, dx = 4 \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

For å finne et uttrykk for energien, integrerer vi kvadratet av overflatehevningen η ,

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \, dx = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4\left\{\frac{1}{2}\sqrt{3\alpha}x\right\} \, dx = 8 \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Dragkraft

En kilde som genererer bølger på en fri overflate, vil oppleve motstand fra mediet i form av en dragkraft. Den dimensjonsløse dragkoeffisienten defineres ved

$$D_W(t) \equiv \frac{D_W^*(t)}{\rho g h_0 L} = - \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} P(x, t) \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dx,$$

der $P(x, t)$ er gitt ved ligning (4.1). Energien som kilden tilfører systemet, vil fordele seg på solitonene som genereres oppstrøms, og hekkbølgene som genereres nedstrøms. Shen[26] viser at ved subkritiske og lave transkritiske verdier av Froudetallet, vil mesteparten av energien gå til generering av hekkbølgene, mens ved høye transkritiske verdier vil mesteparten av energien gå til generering av solitoner.

Egenskaper ved systemet for tilfellet $F = 1$

I artikkelen [11], tar Wu for seg tilfellet med $F = 1.0$, og fKdV-ligningen (3.44)

$$\eta_t - \frac{3}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} = \frac{1}{2}p_{ax}. \quad (5.1)$$

For et gitt tidspunkt vil vi ha en situasjon som er illustrert i figur 5.1. Vi integrerer ligningen fra $x = x_0$ til $x = x_1$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} \eta dx = \frac{3}{4}(1 - h_1)^2,$$

der vi har satt $h_0 = 1$, og midler over perioden for generering av solitoner

$$\frac{m_s}{T_s} = \frac{3}{4}(1 - h_1)^2.$$

Det viser seg at vi trenger å bestemme overflatehevningen i forkant av kilden, midlet over tid, så vi integrerer fKdV-ligningen fra $x = x_0$ til $x = x_L$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_L} \eta dx = \frac{3}{4}\eta_L^2 + \frac{1}{6}\eta_{Lxx},$$

der $\eta_L(t) = \eta(x_L, t)$. Vi skriver η_L som summen av midlet verdi over tid og en tidsavhengig komponent $\eta_L = \bar{\eta}_L + \eta'_L(t)$, og antar at $|\eta'_L(t)| \ll |\bar{\eta}_L|$. Vi skal også anta at krumningen av overflaten er neglisjerbar. Med disse antagelsene får vi

$$\frac{m_s}{T_s} = \frac{3}{4}(\bar{\eta}_L)^2,$$

og ved sammenligning av de to uttrykkene for m_s/T_s får vi

$$\bar{\eta}_L = 1 - h_1.$$

Vi vil se på energiligninger relatert til solitonene, og multipliserer ligning (5.1) med η . Integrasjon mellom x_0 og x_1 gir oss

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} \eta^2 dx = \frac{1}{2}(D_W + \eta^3(x_1)),$$

og igjen ser vi på midlere verdi

$$\frac{E_s}{T_s} = \bar{D}_W - (1 - h_1)^3.$$

Vi integrerer også mellom x_0 og x_L , og argumenterer på samme måte som sist. Resultatet blir, med midling,

$$\frac{E_s}{T_s} = \bar{\eta}_L^3 = (1 - h_1)^3.$$

Vi har nå resultater for masse og energi i to regioner, midlet over tid, og er dermed i stand til å finne h_1 , T_s og \bar{D}_W , uttrykt ved α ,

$$\frac{E_s}{m_s} = \frac{2}{3}\alpha = \frac{4}{3}(1 - h_1) \quad (5.2)$$

$$\alpha = 2(1 - h_1) \quad (5.3)$$

$$T_s = \frac{64}{(3\alpha)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.4)$$

$$\bar{D}_W = \frac{1}{4}\alpha^3 \quad (5.5)$$

Vi ser at en økning i amplituden vil gi større nedsenkning av området bak kilden. Midlere dragkraft øker, mens perioden for generering av solitoner minker. Resultatene gjelder for konstant Froudetall, så en variasjon i amplituden må skyldes variasjon i styrken til kilden. Figur 5.5 viser amplituden som funksjon av Froudetallet, for kilder med ulik styrke.

5.1.2 Karakteristiske egenskaper ved ulike Froudetall

I [22] behandles masse- og energiteoremer for tilfeller hvor Froudetallet har en annen konstant verdi enn 1. Vi benytter et koordinatsystem som følger med kilden, og får fKdV-ligningen

$$\eta_t + \delta\eta_x - \frac{3}{2}\eta\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx} = \frac{1}{2}p_{ax},$$

der $\delta = F - 1$ (se ligning (3.37)). For å forenkle notasjonen, innfører vi $\beta = 1 - h_1$. Argumentasjonen er den samme som for tilfellet med $F = 1$, hvilket gir oss

$$\begin{aligned} \frac{m_s}{T_s} &= \frac{3}{4}\beta^2 + \delta\beta, \\ \frac{E_s}{T_s} &= \bar{D}_W - \beta^3 - \delta\beta^2, \end{aligned}$$

for integrasjon mellom x_0 og x_1 , og

$$\begin{aligned} \frac{m_s}{T_s} &= \frac{3}{4}(\bar{\eta}_L)^2 + \delta\bar{\eta}_L, \\ \frac{E_s}{T_s} &= (\bar{\eta}_L)^3 - \delta(\bar{\eta}_L)^2, \end{aligned}$$

for integrasjon mellom x_0 og x_L . Ved hjelp av disse ligningene finner vi

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_L &= \beta + \frac{4}{3}\delta, \\ \alpha &= 2 \frac{(\beta + \frac{4}{3}\delta)(\beta + \frac{1}{3}\delta)}{\beta}, \\ T_s &= \frac{16}{3} \left\{ \frac{2(\beta + \frac{1}{3}\delta)}{3\beta^3(\beta + \frac{4}{3}\delta)} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \bar{D}_W &= 2 \left(\beta + \frac{2}{3}\delta \right)^3.\end{aligned}$$

Dersom Froudetallet er 1, dvs. $\delta = 0$, reduseres resultatene til det vi fant i forrige del.

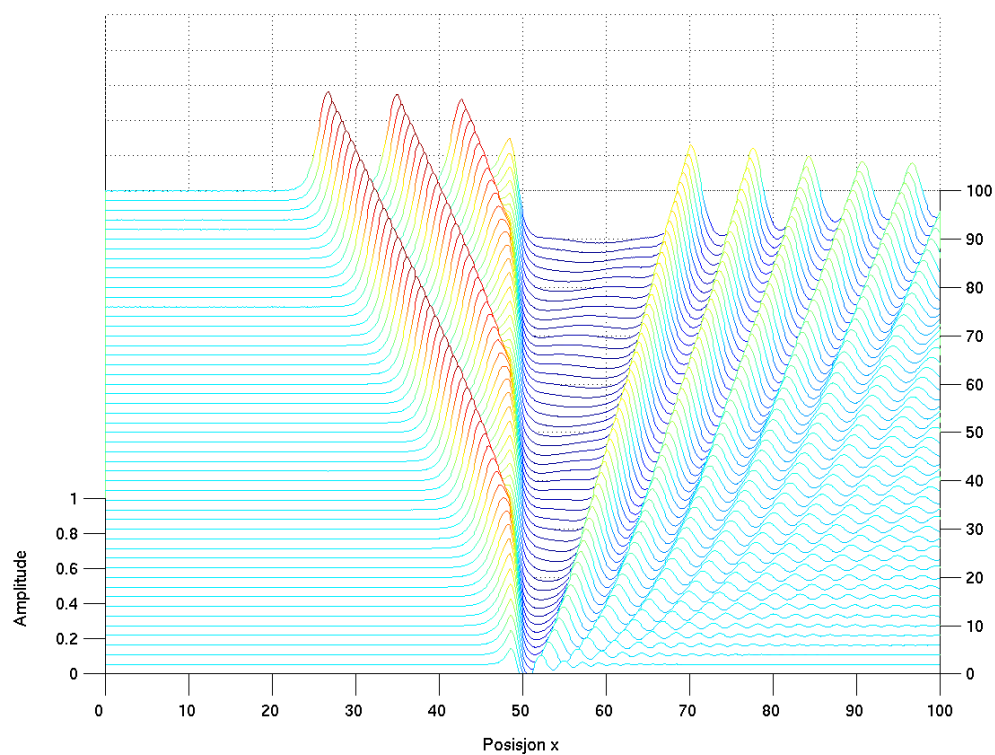
F	β	Numeriske resultater			Analytiske resultater		
		α	T_s	\bar{D}_W	α	T_s	\bar{D}_W
0.85	0.269	0.137	45.3	0.0121	0.112	55.6	0.00965
0.90	0.249	0.201	47.3	0.0119	0.200	47.9	0.0121
0.95	0.214	0.274	50.7	0.0118	0.272	50.9	0.0118
1.00	0.185	0.352	56.0	0.0111	0.370	54.7	0.0127
1.05	0.150	0.444	66.0	0.0107	0.481	65.7	0.0123
1.10	0.109	0.538	88.0	0.00873	0.633	92.7	0.0108

Tabell 5.1: Fra Lee *et al.*: Sammenligning av numeriske og analytiske resultater

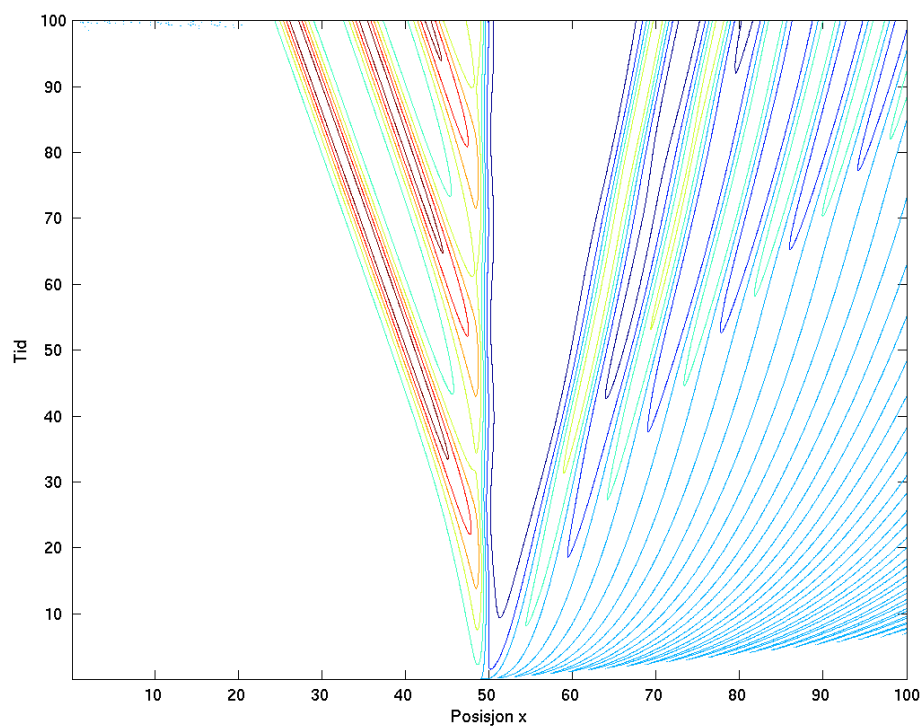
Tabell 5.1 viser resultater hentet fra [22], som sammenligner numeriske og analytiske resultater. Amplituden til solitonene øker med økende Froudetall. Samtidig øker perioden T_s , så Froudetallet spiller en vesentlig rolle også for tidsskalaen for systemet. Vi ser at det er en del avvik mellom numeriske og analytiske resultater i tabellen. Den beste overensstemmelsen mellom resultatene får vi i området $F \in [0.90, 1.00]$. Det analytiske resultatet forutsetter at variasjonen i overflaten ved kilden $\eta'_L(t)$, er liten og at krumningen av overflaten er neglisjerbar. Resultatene tyder på at disse forutsetningene ikke “slår til” i like stor grad når verdien av Froudetallet vokser. Denne hypotesen kan imidlertid ikke forklare avvikene vi får for $F = 0.85$.

5.2 Resultater for konstant Froudetall

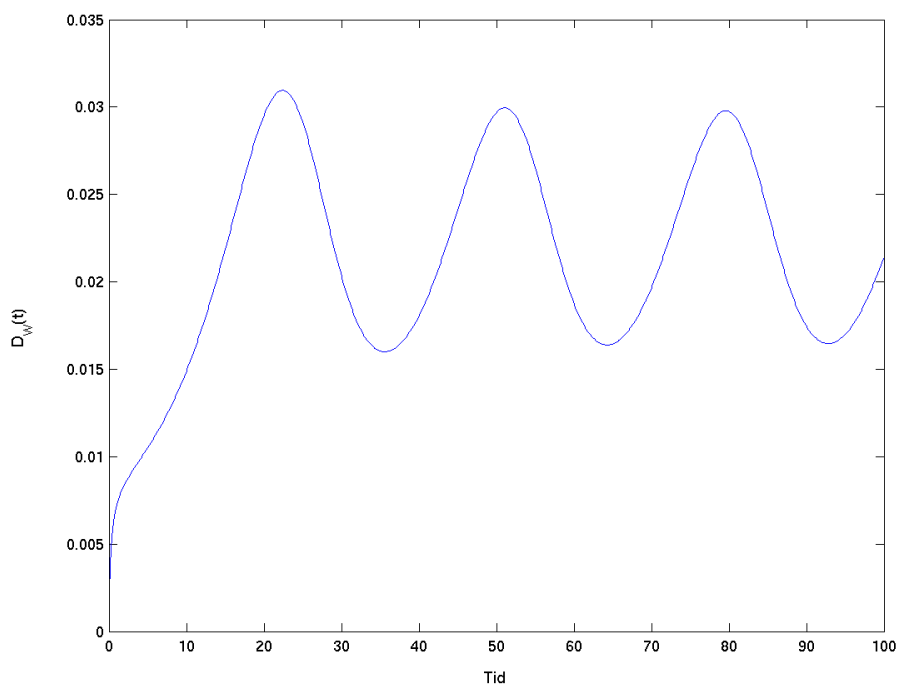
Tilfellet med konstant Froudetall er godt dokumentert i litteraturen. I tillegg til numeriske løsninger av problemet, har vi de analytiske resultatene som ble utledet i kap. 5.1, som til sammen utgjør et effektivt sett av hjelpemidler. For å illustrere hva som skjer, har jeg plottet hendelsesforløpet for tilfellet med $F = 1$, $P_0 = 0.1$ og $L = 2$. Jeg har forøvrig brukt $L = 2$ i alle resultatene som presenteres i denne oppgaven.



Figur 5.2: Tidsutvikling av numerisk løsning



Figur 5.3: Tidsutvikling av numerisk løsning, konturplott



Figur 5.4: Dragkraft som funksjon av tiden

Figurene 5.2 og 5.3 viser tidsutviklingen når systemet blir påvirket av en kilde som beveger seg med konstant hastighet. Koordinatsystemet beveger seg mot venstre med gruntnvannshastigheten c_0 , og siden kilden også har hastigheten c_0 i dette tilfellet, vil den være stasjonær i plottet (kilden er plassert ved $x = 50$). Jeg har ikke tatt med hele beregningsområdet, som strekker seg til $x = 350$, i figurene. Som før nevnt må vi plassere nedstrøms rand langt unna kilden, for å unngå at refleksjoner fra randen forstyrrer bølgene vi er interessert i.

I figur 5.4 har jeg plottet draget på kilden som funksjon av tiden. Sammenligner vi med figur 5.3, ser vi at maksimalverdiene for draget korresponderer med at en ny soliton genereres.

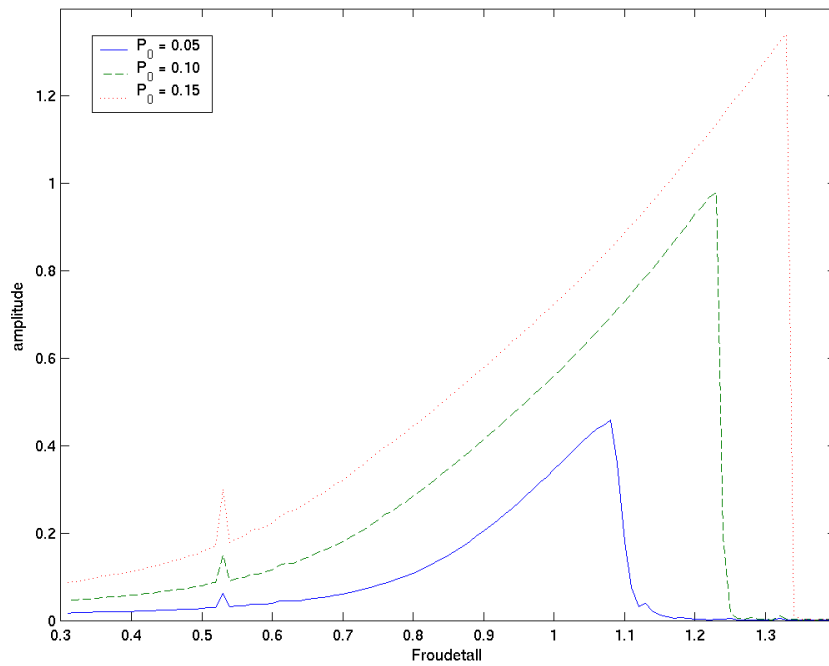
Vi vil i hovedsak konsentrere oss om to problemer i resten av denne delen; effekten av varierende Froudetall, og effekten av varierende styrke på kilden. Froudetallet holdes konstant for hver enkelt simulering, men vi kan velge ulike verdier for denne konstanten. I hvert enkelt tilfelle vil vi se på de maksimale amplitudene til solitonene og det dispersive bølgetoget, og perioden T_s for generering av solitoner.

I figurene 5.5 og 5.6 har jeg plottet hvordan hhv. amplituden til solitonene og amplituden til hekkbølgene varierer med Froudetallet. Jeg har utført simuleringer med tre ulike styrker av kilden; $P_0 = 0.05$, $P_0 = 0.10$ og $P_0 = 0.15$. Vi ser at amplitudene for solitonene vokser for Froudetall i nærheten av $F = 1$, men etter et visst punkt forsvinner de helt. Hekkbølgene vokser for subkritiske verdier, men avtar i det transkritiske området. Utslaget for $F = 0.53$

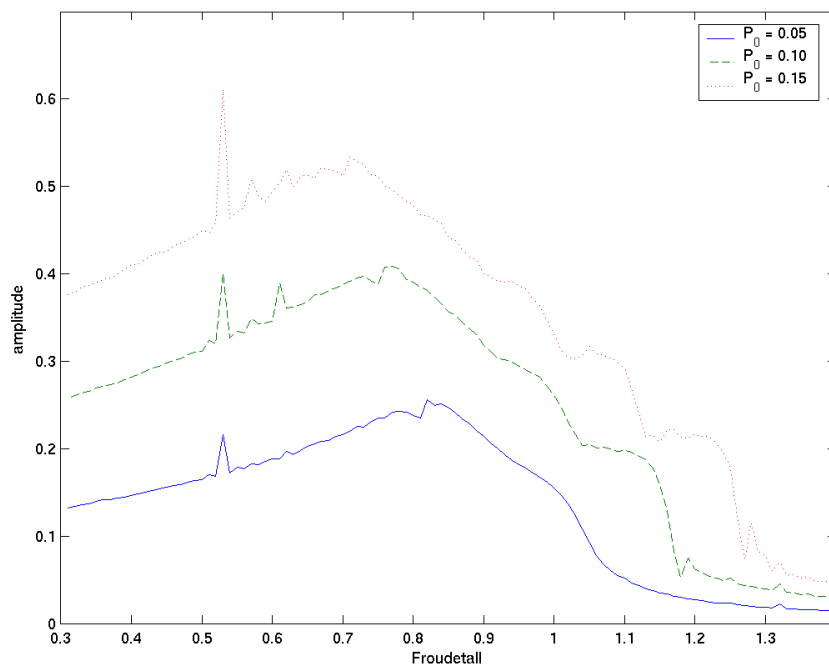
skyldes at jeg fikk unormalt mye refleksjon fra randen for dette tilfellet.

I figur 5.7 har jeg plottet amplituden til solitonene og amplituden til hekkbølgene i samme plott. Her er $P_0 = 0.10$. Figur 5.8 viser hvordan perioden T_s for generering av solitoner varierer med Froudetallet. Igjen har jeg utført simuleringer for tre ulike styrker av kilden. Vi ser at perioden, særlig for de sterke kildene, vokser sakte for subkritiske og lave transkritiske verdier av Froudetallet, for så å vokse kraftig for store transkritiske verdier av Froudetallet. Sammenligner vi med figur 5.5, ser vi at denne økningen i perioden kommer rett forut for punktet hvor solitonene slutter å opptre i responsen fra systemet.

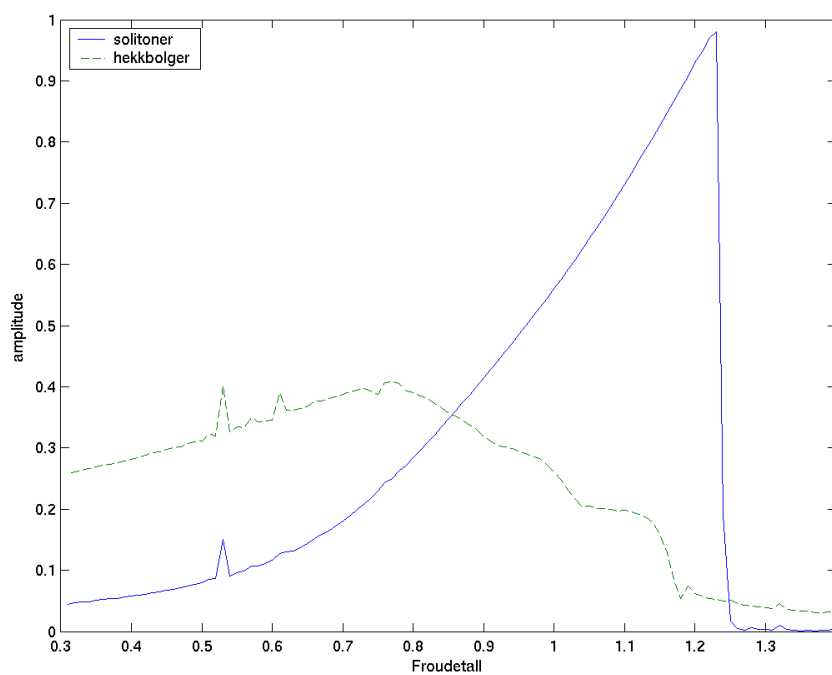
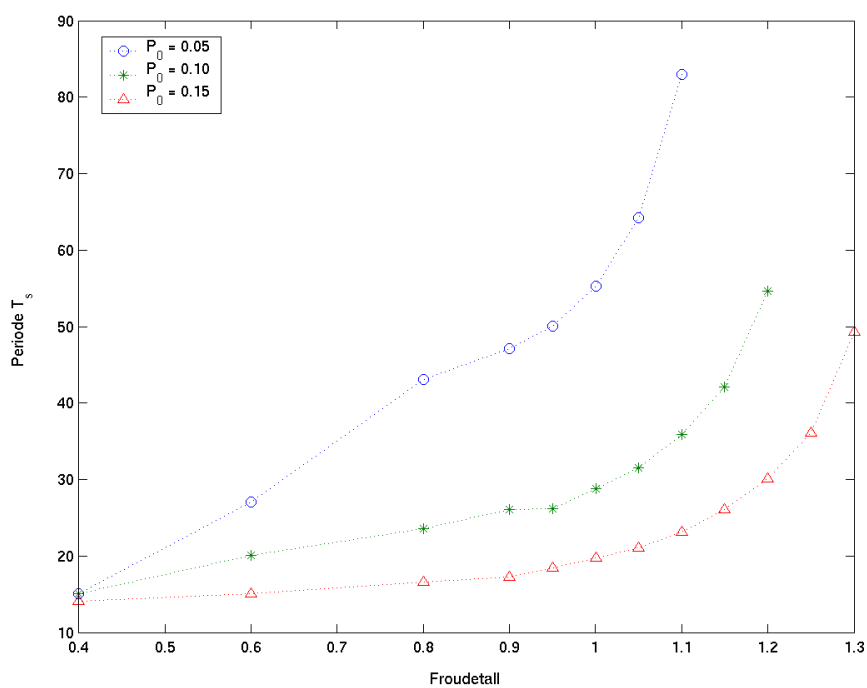
Sammenligner vi med resultatene til Lee *et al.* i tabell 5.1, og i artikkelen [22], ser vi den samme tendensen som i resultatene som er presentert i figurene 5.5 - 5.8. I de numeriske resultatene i tabell 5.1, har Lee *et al.* brukt en kilde med amplitude $P_0 = 0.10$. Resultatene viser mindre amplituder og lengre perioder for generering av solitoner, enn de tilsvarende resultatene jeg har fått, og som er presentert i figurene 5.5 og 5.8. En mulig årsak til dette avviket kan være at kildens utbredelse er ulike for de to tilfellene.



Figur 5.5: Amplitude til solitoner



Figur 5.6: Maksimal amplitude til hekkbølgene

Figur 5.7: Sammenligning av amplitude for solitoner og hekkbølger, $P_0 = 0.1$ 

Figur 5.8: Perioden for generering av solitoner

5.3 Resultater for variabelt Froudetall

Når kilden akselererer gjennom resonansområdet, vil genereringen av solitoner være avhengig av to tidsskalaer; perioden for generering av solitoner, som vil være avhengig av Froudetallet, og tidsintervallet som kilden befinner seg i det transkritiske området. Jeg har ikke foretatt noen systematisk undersøkelse av dette problemet, men begrenser meg til å vise hendelsesforløpet for noen enkeltstående tilfeller.

Jeg har undersøkt tilfellet med en kilde som har amplitude $P_0 = 0.1$, og som akselererer jevnt gjennom det transkritiske området. Fra figur 5.7 ser vi at det genereres solitoner med relativt stor amplitude i forhold til hekkbølgene, for Froudetall i området $F \in [0.8, 1.25]$. For $F = 0.8$, genereres det solitoner med perioden $T_s = 23.6$, mens for $F = 1.2$ øker perioden til $T_s = 54.6$. Dette gir en viss indikasjon på hvor lenge kilden må finne seg i det transkritiske området for at det skal genereres solitoner.

I de to tilfellene som jeg presenterer i denne delen, er absoluttverdien på akselerasjonen den samme, men i det første tilfellet har kilden en jevnt økende hastighet, mens i det andre tilfellet er hastigheten til kilden jevnt avtagende. Dette innebærer at kilden i de to tilfellene vil finne seg like lenge i det transkritiske området. Vi skal se at utviklingen for de to tilfellene likevel vil være svært forskjellige.

Figurene 5.9 - 5.13 viser resultatene fra eksempelet med kilden som har jevnt økende hastighet. Vi ser igjen på problemet i et referansesystem som beveger seg mot venstre med gruntnavnshastigheten c_0 . I dette tilfellet, og i tilfellet med avtagende hastighet, vil posisjonen til kilden forandre seg med tiden, ettersom kildens hastighet forandrer seg. Beregningsområdet strekker seg i realiteten til $x = 475$, men vi ser bare på området opp til $x = 100$.

I figur 5.11 har jeg plottet banen som kilden vil følge i (x, t) -koordinatsystemet, mens figur 5.13 viser Froudetallet som en funksjon av tiden. Kilden starter ut i posisjonen $x = 50$, og Froudetallet er $F = 0.6$. Kilden beveger seg først mot høyre i plottet, siden hastigheten er lavere enn gruntnavnshastigheten. Ved $t = 50$ har vi $F = 1$, og kilden er stasjonær i plottet. Ettersom kildens hastighet øker, beveger kilden seg mot venstre i plottet, samtidig som Froudetallet øker.

I figurene 5.9 og 5.10 ser vi tidsutviklingen av responsen fra væsken. Vi ser at det genereres to solitoner i forkant av kilden. Det ser ikke ut til at solitonene i dette tilfellet har vært i stand til å "frigjøre seg" fra kildens påvirkning. Siden kilden stadig akselererer, kan den ta igjen solitoner den har generert tidligere, slik at disse solitonene opplever å bli påvirket av kilden over en lengre periode enn det vi fikk når kilden beveget seg med konstant hastighet.

Den numeriske metoden genererer en del numerisk støy, som til en viss grad blir reflektert ved randen av beregningsområdet. I de fleste resultatene er amplituden på støyen av orden $\leq O(10^{-3})$, men for simuleringer som går over lange tidsperiode, kan vi få en gradvis økning av støyen. Det er denne effekten som blir synlig i figur 5.10 for $t > 120$.

En effekt som er mulig å oppnå for tilfellet med akselererende kilde, men som vi i liten grad ser i dette eksempelet, er at vi kan få interaksjon mellom solitonene. Solitonene som dannes først, ved lave Froudetall, er mindre og tregere enn solitonene som genereres ved høyere froudetall.

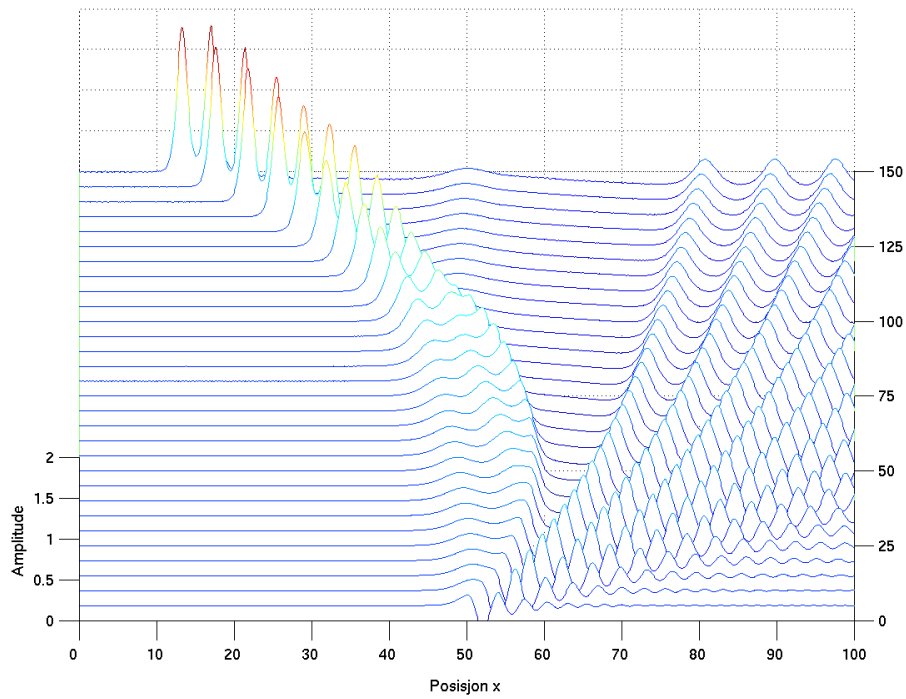
I figur 5.12 har jeg plottet draget som virker på kilden. Ettersom kilden interagerer med de samme solitonene flere ganger, er det ikke mulig å identifisere oscillasjonene i draget med generering av nye solitoner.

Figurene 5.14 - 5.18 viser resultatene fra eksempelet med kilden som har jevnt avtagende hastighet. Referansesystemet er det samme som for tilfellet med økende hastighet.

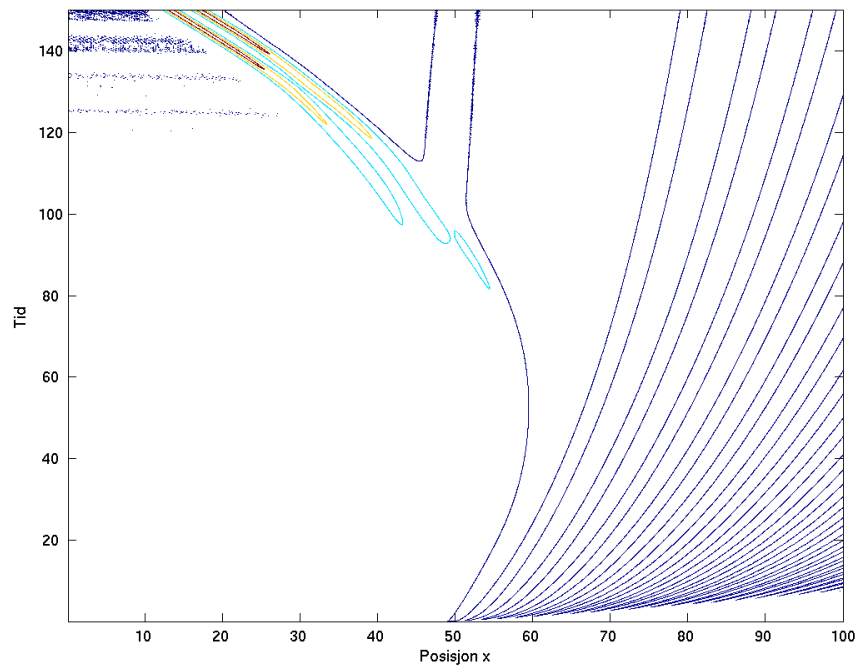
I figur 5.16 har jeg plottet banen til kilden, og i figur 5.18 har jeg plottet Froudetallet som funksjon av tiden. Kilden starter ut i posisjonen $x = 50$, og også denne gangen vil kilden nå gruntvannshastigheten c_0 ved tidspunktet $t = 50$.

Responsen fra væsken er plottet i figurene 5.14 og 5.15. Vi ser at det genereres tre solitoner i dette tilfellet. Solitonene genereres med stadig avtagende amplitude, så det er ingen mulighet for interaksjon mellom solitonene. Solitonene vil også raskt forlate området for kildens påvirkning etter at de er generert. Vi ser at solitonene i figur 5.14 har lavere amplituder enn solitonene som opptrer i figur 5.9. Det er rimelig å anta at denne effekten skyldes at solitonene i figur 5.9 påvirkes av kilden over en lengre tidsperiode enn det som er tilfellet i figur 5.14.

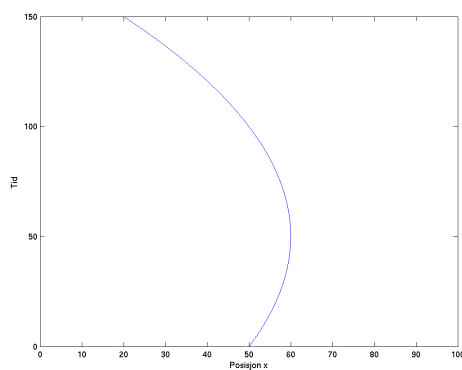
Figur 5.17 viser draget som funksjon av tiden. Vi kan identifisere tre topper før $t = 100$, som korresponderer med generering av de tre solitonene. Oscillasjonene i nærheten av $t = 150$, kan skyldes at kilden blir tatt igjen av de største hekkbølgene.



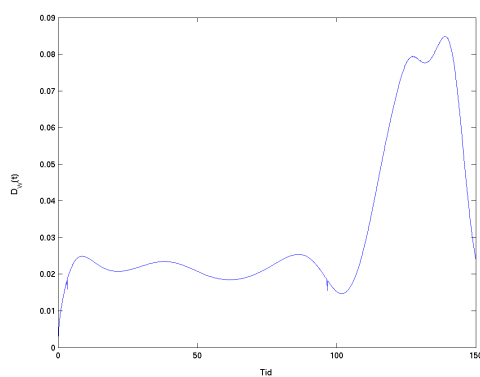
Figur 5.9: Tidsutvikling av numerisk løsning, økende hastighet.



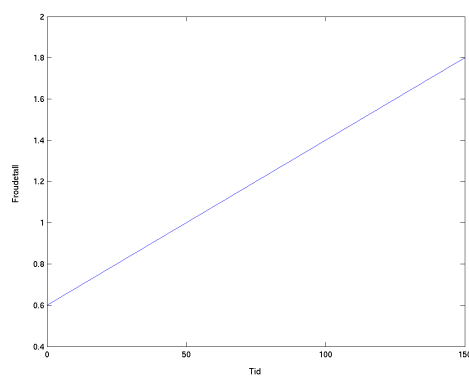
Figur 5.10: Tidsutvikling av numerisk løsning, konturplott.



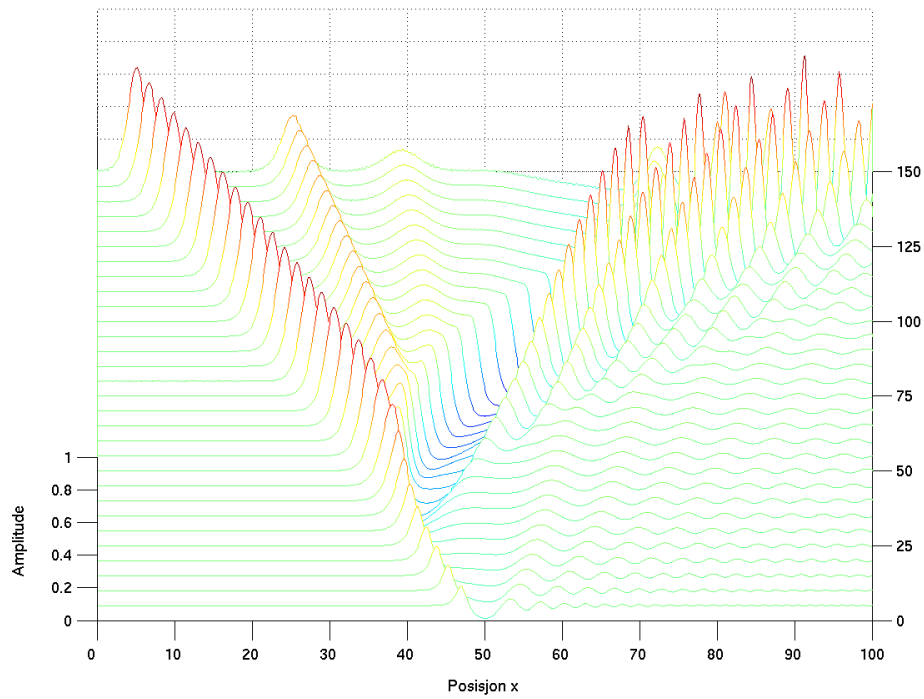
Figur 5.11: Posisjon av kilde som funksjon av tid



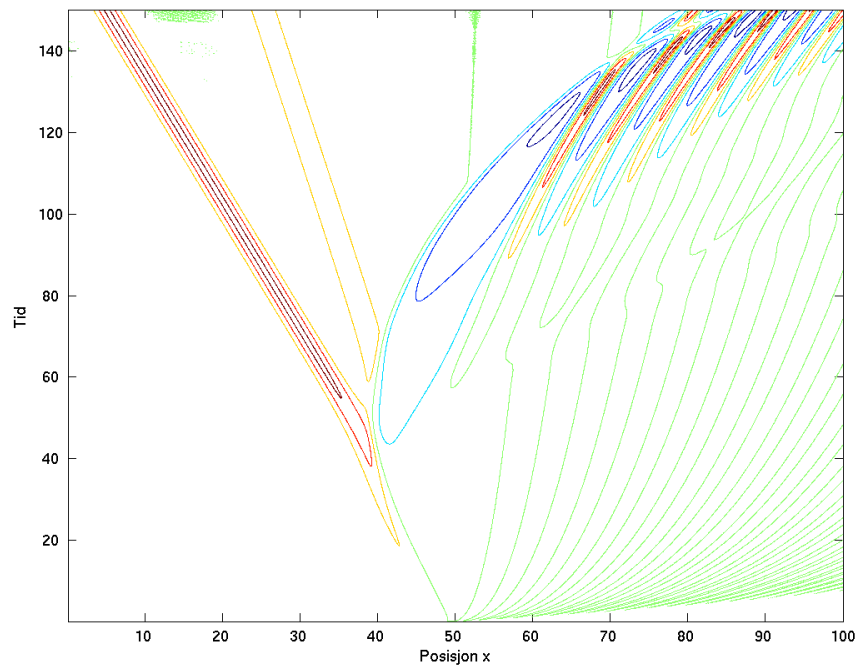
Figur 5.12: Dragkraft som funksjon av tid



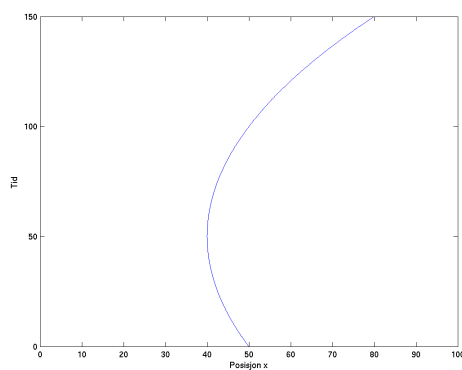
Figur 5.13: Froudetall som funksjon av tid



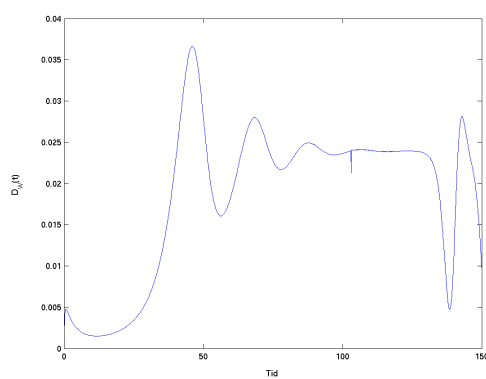
Figur 5.14: Tidsutvikling av numerisk løsning, avtagende hastighet.



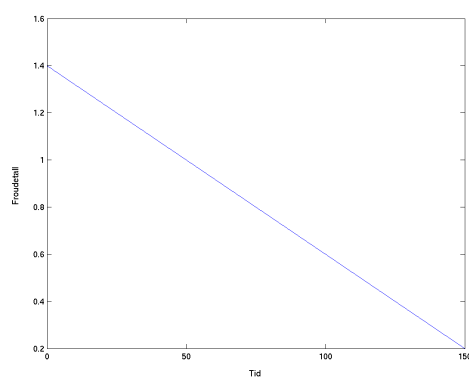
Figur 5.15: Tidsutvikling av numerisk løsning, konturplott.



Figur 5.16: Posisjon av kilde som funksjon av tid



Figur 5.17: Dragkraft som funksjon av tid



Figur 5.18: Froudetall som funksjon av tid

5.4 Sammenligning med andre studier

Det finnes, så langt jeg kjenner til, to studier som er relatert til problemet med en kilde som beveger seg gjennom det transkritiske området. Kevorkian og Yu[12] benytter Boussinesq-ligningene i sin undersøkelse av problemet. De tre hastighetsregionene sub-, trans- og superkritisk hastighet behandles separat, og løsningene må matches i overgangene mellom regionene for å få en kontinuerlig løsning. Problemet med variabelt Froudetall behandles uten dispersjon. Når en kilde akselererer gjennom resonansområdet, genereres det to hydrauliske sprang; et positivt sprang i forkant av kilden og et negativt sprang i bakkant. Sprangene vokser inntil kilden når superkritisk hastighet, hvorpå kilden forlater området hvor sprangene befinner seg. Denne utviklingen er analog til det vi har sett for fKdV-ligningen. Fremgangsmåten til Kevorkian og Yu er svært forskjellig fra den jeg har benyttet i denne oppgaven, så jeg vil ikke forsøke på noen nærmere sammenligning.

Artikkelen til Redekopp og You[13] er mer relevant i forhold til problemet slik det er behandlet i denne oppgaven. Redekopp og You benytter seg av fKdV-ligningen, men i et koordinatsystem som følger med kilden. Dessuten formulerer de problemet slik at kilden både starter og slutter i det superkritiske hastighetsområdet, men er “innom” det transkritiske området i mellomtiden. Kilden er i dette tilfellet definert som en Gauss-funksjon. Man definerer U_u som grensen til det transkritiske båndet, og lar strømningshastigheten være gitt ved $U(t)$.

Numeriske løsninger av problemet viser at det genereres solitoner når kilden befinner seg i det transkritiske hastighetsområdet. Antallet solitoner og amplituden til solitonene varierer. Redekopp og You foreslår å bruke *resonanseffekten* (eng. “resonant action”), definert ved

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \{U_u - U(t)\} dt,$$

som mål på hvor mange solitoner som blir generert.

Resonanseffekten A er avhengig både av hvor lenge kilden befinner seg i det transkritiske området, og hvilke hastigheter kilden har mens den er i det transkritiske båndet. Det viste seg at A ikke gav et entydig mål på hvor mange solitoner som ble generert. I enkelte intervaller for verdien av A , fikk man generert ulike antall solitoner avhengig av hvordan forholdet var mellom kildens hastighet og tidsperioden i resonansområdet. For de fleste verdiene av A fikk man imidlertid entydige resultater.

5.4.1 Full ikke-lineær modell

Cao *et al.*[27] konstruerer en modell for å beregne effekten av en kilde som beveger seg med kritisk hastighet på grunt vann. Modellen tar hensyn til ikke-linearitet i grenseflatebetingelsene for den frie overflaten, uten å forutsette at den vertikale variasjonen av strømmingen

er liten. Modellen sammenlignes med fKdV-modellen til Wu (1987), og tar også for seg kilder av tre ulike typer; trykkperturbasjon på overflaten, en hump på bunnen, og en sylinder som er nedsenket i strømmingen.

Jeg skal ikke gå inn på hvordan modellen til Cao *et al.* ser ut, men konsentrere meg om sammenligningen med fKdV-modellen. fKdV-modellen, og Boussinesq-modellen som den er utledet fra, forutsetter at den vertikale variasjonen i strømmingen er liten. En trykkperturbasjon på overflaten og en forhøyning på bunnen vil være ekvivalente kilder i fKdV-modellen, mens en sylinder nedsenket i strømmingen ikke kan beskrives av ligningen.

Cao *et al.* bruker samme form på drivledet som Wu (1987), hvor amplituden til kilden er gitt ved P_0 . For Froudetallet $F = 1.0$ og svak kilde $P_0 = 0.02$, er resultatene for den fulle ikke-lineære modellen (FIL) og fKdV-modellen i godt samsvar. Responsen oppstrøms er tilnærmet lik for de to modellene, mens nedstrøms bølgetog beveger seg raskere i fKdV-modellen enn i FIL-modellen.

For en sterk kilde $P_0 = 0.1$, er forskjellen mellom de to modellene merkbare. FIL-modell gir oppstrøms solitoner med større amplitude enn fKdV-modellen, og frekvensen for generering av solitoner er også større i FIL-modellen enn i fKdV-modellen. I nedstrøms respons er fasene forskjøvet, som ved $P_0 = 0.02$, og responsen for FIL er noe større enn responsen for fKdV. Forskjellene er enda tydeligere for $P_0 = 0.15$, hvor vi får brytning i oppstrøms respons i FIL-modell, mens fKdV-modell gir oss generering av solitoner. Cao *et al.* viser til at man i fKdV-modellen forutsetter at kilden har amplitude $O(\varepsilon^2)$, hvor $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ er forholdet mellom likevektsdybden (her er $h_0 = 1$) og bølgelengden. I de numeriske beregningene for $P_0 = 0.1$ er bølgelengdene $O(10)$, som skulle tilsvare $\varepsilon = O(0.01)$ og $P_0 = O(10^{-4})$! Det ser derfor ut til at fKdV-modellen bare kan være gyldig for svake kilder. Imidlertid viser de to modellene rimelig godt samsvar for $P_0 = 0.02$, så det kan se ut til at vi har pålagt strengere krav på P_0 enn det som er nødvendig. Kravet til små verdier av P_0 understøttes også av Protopopov[28], som finner at vi må kreve $P_0 \leq 0.1$ for de generaliserte Boussinesq-ligningene.

På bakgrunn av resultatene i artikkelen til Cao *et al.* er det grunn til å tro at vi i eksemplene i kap. 5.2 og 5.3, har brukt amplituder på kilden som er i overkant av gyldighetsområdet for fKdV-ligningen. Teorien som resultatene mine bygger på, er i stor grad hentet fra artikkelen til Lee *et al.*[22], og jeg har derfor ønsket å sammenligne resultatene mine med resultatene som presenteres i denne artikkelen. Jeg har derfor valgt å bruke de samme amplitudene på kilden som det Lee *et al.* benytter seg av i sine undersøkelser.

5.4.2 Modell for viskøs væske

Zhang og Chwang[29] undersøker 2-D solitære bølger vha. inkompressibel Navier-Stokes (NS) ligning. NS-modellen er mer omfattende enn fKdV-modellen, og krever en mer omstendelig løsningsprosess. Resultatene sammenlignes med de numeriske og eksperimentelle resultatene som ble publisert av Lee *et al.*[22].

NS-modellen stemmer godt overens med eksperimentelle data. De største avvikene inn-treffer ved subkritisk hastighet og strek kilde, men i dette tilfellet oppstår det brytning i eksperimentet. NS-modellen tillater ikke at bølgene bryter.

Sammenligning av de numeriske resultatene med eksperimentelle data, viser at NS-modellen generelt gir bedre resultater enn fKdV-modellen og modellen som er basert på generaliserte Boussinesq-ligninger (g -B). Både fKdV-ligningen og g -B-ligningene er midlet over dybden, slik at vertikale variasjoner i væsken neglisjeres. Dessuten ser vi bort fra viskøse effekter i de to modellene. NS-modellen tar vare på både viskøse effekter og vertikal variasjon i væsken. Det fremkommer ikke hvorvidt det er de viskøse effektene eller det at man tar hensyn til vertikal variasjon i væsken, som gir det største bidraget til forbedringen av resultatene.

5.5 Konklusjon og forslag til videre arbeid

Vi har sett hvordan fKdV-ligningen kan gi oss en modell for hva som skjer når en kilde beveger seg med en hastighet som er i nærheten av den karakteristiske gruntvannshastigheten i et vannbasseng. Problemet er løst numerisk, men vi har også sett at en del karakteristiske egenskaper ved problemet kan bestemmes analytisk. Til slutt har vi sett på hva som skjer når hastigheten til kilden får lov til å variere. Resultatene har i hovedsak vært tilfredsstillende for de tilfellene vi har sett på.

Med bakgrunn i denne oppgaven ser jeg en rekke muligheter for videre arbeid med problemet.

En relativt enkel ting å gjøre, vil være å undersøke effekten av å variere kildens utbredelse. Som nevnt i kap. 5.2 har jeg kun vist resultater for tilfellet med $L = 2$. En overfladisk undersøkelse viser at variasjon i utbredelsen av kilden kan ha stor betydning for styrken på kilden. Man kunne eventuelt foretatt en tilsvarende undersøkelse som det som er presentert i figurene 5.5 - 5.8, men variere kildens utbredelse i stedet for kildens amplitude.

Det ville være mulig å gjøre en grundigere undersøkelse av problemet med variabelt Froudetall, og f.eks. se på resonanseffekten for problemet. Slik Redekopp og You formulerer problemet, blir resonanseffekten avhengig både av hvor lenge kilden befinner seg i det transkritiske området, og hvor "dypt" den går inn i det transkritiske båndet. For problemet med jevn akselerasjon gjennom det transkritiske båndet, vil ikke disse størrelsene variere uavhengig av hverandre. Vi kan likevel ikke forvente å få entydige resultater; i de to eksemplene som er beskrevet i figur 5.9 og figur 5.14, er kilden like lenge i det transkritiske området, men i det første tilfellet genereres det to solitoner, mens i det andre genereres det tre.

Det ville vært interessant å se om vi kunne benyttet fKdV-ligningen til å se på effekter av varierende Urselltall. I ligning (3.41) forutsetter vi at både α og ε er små parametre, men uten å legge føringer på det relative forholdet mellom α og ε . Resultater fra eksperimenter

tyder på at Urselltallet vil variere med Froudetallet. Hvorvidt det er mulig å finne en relasjon mellom Urselltallet og Froudetallet er et åpent spørsmål.

Det er et stort potensiale for forbedringer av det numeriske skjemaet. Dersom vi benytter et implisitt skjema, er det mulig at vi kan øke steglengden på tidsstegene. Både Wu[11] og Redekopp og You[13] har forslag til forbedringer av den numeriske metoden. Ellers finnes det flere metoder som har vært benyttet på KdV-ligningen, som kanskje kunne vært anvendt på fKdV-ligningen også. Frøneberg og Whitham[30] løste KdV-ligningen ved å benytte en pseudospektral metode for å beregne de romlige deriverte. KdV-ligningen har også blitt løst ved hjelp av operatorsplitting, som i artikkelen til Holden *et al.*[31].

Randbetingelsene er et viktig element i konstruksjonen av det numeriske skjemaet. Jeg har implementert en metode hvor forstyrrelser ved randen projiseres stivt ut av beregningsområdet. Oppstrøms ser dette ut til å være en effektiv metode, så lenge man bare har numerisk støy ved randen. Nedstrøms er det nødvendig å tillate et stort beregningsområde, slik at bølger som når randen bare har liten amplitude. I kap. 4.1.1 har jeg nevnt noen metoder for å projisere bølger ut av beregningsområdet, og som kanskje kunne tillatt oss å bruke et mindre beregningsområde.

Sammenligningen i kap. 5.4 viser oss noen av svakhetene ved fKdV-modellen. En mulig retning for videre arbeid vil være å finne frem til modeller som tar hensyn til mer av fysikken som inngår i problemet. Dette vil kreve en omfattende revisjon av formuleringen av problemet, og vi vil i liten grad kunne dra nytte av metodene som er brukt i denne oppgaven. Gevinsten er mulighetene for ny innsikt i prosessene som ligger bak genereringen av solitonene.

En annen naturlig utvidelse av problemet, og kanskje den mest interessante, er å se på problemet i 3 dimensjoner. Det er allerede gjort en del arbeid med dette problemet, bl.a. av Katsis og Akylas[32], som benytter Kadomtsev-Petviashvili (KP) ligningen, og Pedersen[33], som ser løser problemet vha. et sett med Boussinesq-ligninger. KP-ligningen er en utvidelse av KdV-ligningen, med bølger som er nesten en-dimensjonale. I dette tilfellet kan vi kanskje dra nytte av det vi vet om fKdV-ligningen. Dersom denne muligheten forfølges, vil det etter alt å dømme være nyttig om vi har et numerisk skjema som løser fKdV-ligningen raskere og mer nøyaktig enn den metoden som er skissert i denne oppgaven.

Tillegg A

Appendix

A.1 Nomenklatur

Liste over symboler som er brukt i oppgaven.

- η : Funksjon som beskriver den frie overflaten.
- u : Horisontal hastighetskomponent i punktet (x, z) ved tiden t .
- \bar{u} : Horisontal hastighetskomponent midlet over dybden.
- w : Vertikal hastighetskomponent i punktet (x, z) ved tiden t .
- ϕ : Hastighetspotensial
- c_0 : Karakteristisk hastighet for systemet; $c_0 = \sqrt{gh_0}$.
- U : Kildens hastighet.
- c : Solitonens hastighet.
- h_0 : Dybde for systemet i likevekt.
- λ : Karakteristisk bølgelengde.
- a : Amplitude av bølge på overflaten.
- p_a : Trykkperturbasjon på overflaten.
- F : Froudetallet; $F = U/c_0$.
- Ur : Urselltallet; $Ur = \lambda^2 a/h_0^3$.
- α : Parameter gitt ved $\alpha = a/h_0$.
- ε : Parameter gitt ved $\varepsilon = h_0^2/\lambda^2$.
- δ : Variabel som er relatert til Froudetallet; $\delta = F - 1$

-
- ζ^* : Størrelse som har dimensjoner. Brukes dersom det er mulighet for tvetydighet.
- $\hat{\zeta}$: Den Fouriertransformerte av en størrelse.
- P : Funksjon som beskriver kilden.
- P_0 : Kildens amplitude.
- L : Kildens bredde.
- D_W : Dimensjonsløs dragkoeffisient.
- \overline{D}_W : Dimensjonsløs dragkoeffisient midlet over tid.
- T_s : Periode for generering av solitoner.

A.2 Betydningen av Ursell tallet

Airy[4] hevdet at enhver bølge på grunt vann med endelig amplitude ville forandre form. Denne påstanden er tilsynelatende uforenelig med eksistensen av stabile solitære bølger på grunt vann. Ursell[16] forsøker å løse dette problemet. I problemet inngår det bølger med liten amplitude a og stor bølgelengde λ , i forhold til dybden h_0 . Ursell viser at Airys konklusjon kun er gyldig dersom Urselltallet

$$Ur = \frac{a\lambda^2}{h_0^3}, \quad (\text{A.1})$$

er stort, mens stabile solitære bølger opptrer for $Ur = O(1)$. Ursell viser også at linearisert teori for overflatebølger kun er gyldig dersom både a/λ og Ur er små størrelser.

Ursell tar utgangspunkt i et sett av ligninger for gravitasjonsbølger, formulert i Lagrangske koordinater. I stedet for å følge Ursells utledning, skal vi utføre en tilsvarende analyse basert på ligningene som er presentert i oppgaven. Vi tar for oss Boussinesq-ligningene (3.35) og (3.36), og ser bort fra trykkledet p_a . Forutsetningen vi har gjort for å formulere disse ligningene er at både $a/h_0 \equiv \alpha \ll 1$ og $h_0^2/\lambda^2 \equiv \varepsilon \ll 1$. Vi har ikke gjort noen antagelser om forholdet mellom α og ε . For laveste orden reduseres ligningene til (jeg skriver u i stedet for \bar{u})

$$\eta_t + u_x = 0, \quad \text{og} \quad u_t + \eta_x = 0.$$

Hvis vi eliminerer u fra ligningene, får vi bølgeligningen

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} = 0.$$

Vi har også $\eta = \pm u$, hvor fortegnet på u er avhengig av hvilken retning bølgen beveger seg. For ledd av orden α og ε kan vi bytte ut ∂_{tt} med $-\partial_{xx}$, uten at feilen blir større enn $O(\alpha\varepsilon, \varepsilon^2)$. Det er også mulig å bytte ut hhv. u_t med $-\eta_x$ og u_x med $-\eta_t$ uten at feilen blir større enn $O(\alpha\varepsilon, \varepsilon^2)$. Vi deriverer (3.35) mhp. t og (3.36) mhp. x , og får ligningene

$$\begin{aligned} \eta_{tt} + u_{xt} + \alpha[\eta u]_{xt} &= 0, \\ u_{xt} + \eta_{xx} + \alpha[u_x^2 + uu_{xx}] - \frac{1}{3}\varepsilon u_{xxxx} &= 0. \end{aligned}$$

Deretter eliminerer vi u_{xt} fra ligningene, og substituerer $[u_t]_{xxx} = [-\eta_x]_{xxx}$, som gir oss ligningen

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} + \alpha[(\eta u)_{xt} - u_x^2 - uu_{xx}] + \frac{1}{3}\varepsilon\eta_{xxxx} = 0.$$

Vi håndterer leddet av orden α ved å innføre $u = -\eta$, som er relatert til den karakteristiske ligningen $\eta_t - \eta_x = 0$ ($u = \eta$ og den karakteristiske ligningen $\eta_t + \eta_x = 0$ vil gi et tilsvarende resultat, men for bølger som går mot høyre). Dermed kan vi eliminere u fra ligningen, og vi får

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} - 3\alpha[\eta_x^2 - \eta\eta_{xx}] + \frac{1}{3}\varepsilon\eta_{xxxx} = 0,$$

som kan omformes til

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{3}{2} \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta^2 + \frac{1}{3} \varepsilon \frac{\partial^4}{\partial x^4} \eta = 0. \quad (\text{A.2})$$

Vi ser at $\alpha \ll \varepsilon$, gir oss en lineær ligning, $\alpha \gg \varepsilon$ gir oss Airys ligning, og $\alpha = O(\varepsilon)$ gir oss en ligning av Boussinesq-klassen.

A.3 Lineær teori

Her følger en mer detaljert utledning av ligningen for hastighetspotensialet. Gitt det lineære systemet

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, \quad \text{for } -h_0 < z < \eta; \quad (\text{A.3})$$

$$\eta_t - \phi_z = 0, \quad \text{for } z = 0; \quad (\text{A.4})$$

$$\phi_t + g\eta = 0, \quad \text{for } z = 0; \quad (\text{A.5})$$

$$\phi_z = 0, \quad \text{for } z = -h_0. \quad (\text{A.6})$$

Vi antar ϕ kan skrives på formen

$$\phi(x, z, t) = f(x, z) \sin(kx - \omega t). \quad (\text{A.7})$$

Ved innsetting i (A.3) finner vi

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f \right) \sin(kx - \omega t) + 2k \frac{\partial f}{\partial x} \cos(kx - \omega t) = 0.$$

Koeffisienten til $\cos(kx - \omega t)$ må forsvinne, dvs. $f_x = 0$, så $f(z)$ er uavhengig av x . Laplace ligning reduseres til

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f = 0,$$

som har generell løsning

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}.$$

Vi setter inn i (A.7) og deriverer mhp. z

$$\phi_z = (Ae^{kz} - Be^{-kz})k \sin(kx - \omega t).$$

Ved $z = -h_0$ har vi (A.6)

$$\begin{aligned} \phi_z|_{z=-h_0} &= (Ae^{-kh_0} - Be^{kh_0})k \sin(kx - \omega t) \\ \Rightarrow Ae^{-kh_0} - Be^{kh_0} &= 0 \\ \Rightarrow B &= Ae^{-2kh_0} \end{aligned}$$

Vi antar $\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t)$, så ligning (A.4) gir oss

$$\begin{aligned} \phi_z|_{z=0} &= (A - B)k \sin(kx - \omega t) = a\omega \sin(kx - \omega t) \\ \Rightarrow A - B &= \frac{a\omega}{k} \\ \Rightarrow A &= \frac{a\omega}{k(1 - e^{-2kh_0})}, \quad B = \frac{a\omega e^{-2kh_0}}{k(1 - e^{-2kh_0})}; \\ \text{eller} \quad A &= \frac{a\omega e^{kh_0}}{k(e^{kh_0} - e^{-kh_0})}, \quad B = \frac{a\omega e^{-kh_0}}{k(e^{kh_0} - e^{-kh_0})} \end{aligned}$$

Med disse konstantene får vi hastighetspotensialet

$$\phi(x, z, t) = \frac{\omega a \cosh[k(z + h_0)]}{k \sinh kh_0} \sin(kx - \omega t). \quad (\text{A.8})$$

Den siste ligningen (A.5) bestemmer ω som en funksjon av k .

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2 a \cosh kh_0}{k \sinh kh_0} \cos(kx - \omega t) + ga \cos(kx - \omega t) &= 0 \\ \Rightarrow \omega^2 &= gk \tanh(kh_0) \end{aligned}$$

Bibliografi

- [1] M. Hamer. Solitary killers. *New Scientist*, pages 18–19, August 1999.
- [2] J.S. Russell. Report on waves. *Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, pages 311–390, 1844.
- [3] Michel Remoissenet. *Waves Called Solitons: concepts and experiments*. Springer, 1999. ISBN-3-540-65919-6.
- [4] G.B. Airy. Tides and waves. *Encyclopaedia Metropolitana*, 1845.
- [5] J. Boussinesq. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire on de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 72:755–759, 1871.
- [6] Lord Rayleigh. On waves. *Philos. Mag.*, 1:257–279, 1876.
- [7] D.J. Korteweg and G. De Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, 39:422–443, 1895.
- [8] N. Zabusky and M. Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15:240–243, 1965.
- [9] C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal, and R.M. Miura. Method for solving the korteweg de vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1095–1097, 1967.
- [10] T.Y. Wu and D.M. Wu. *Proc. 14th Symp. on Naval Hydrodynamics*, pages 103–125, 1982. Washington, D.C.: National Academy of Sciences.
- [11] T.Y. Wu. Generation of upstream advancing solitons by moving disturbances. *J. Fluid Mech.*, 187:75–99, 1987.
- [12] J. Kevorkian and J. Yu. Passage through the critical froude number for shallow-water waves over a variable bottom. *J. Fluid Mech.*, 204:31–56, 1989.
- [13] L.G. Redekopp and Z. You. Passage through resonance for the forced korteweg-de vries equation. *Physical Review Letters*, 74(26):5158–5161, 1995.
- [14] P.G. Drazin. *Solitons*. Cambridge University Press, 1983. ISBN-0-521-27422-2.

-
- [15] P.K Kundu. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 1990. ISBN-0-12-428770-0.
- [16] F. Ursell. The long-wave paradox in the theory of gravity waves. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 49:685–694, 1953.
- [17] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear waves*. John Wiley & Sons, 1970.
- [18] K. Dysthe. Privat kommunikasjon.
- [19] T. Myint-U. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. PTR Prentice Hall, 1987. ISBN-0-13-051665-1.
- [20] R. K. Zeytounian. Nonlinear long waves on water and solitons. *Physics-Uspokhi*, 38:1333–1382, 1995.
- [21] T.Y Wu. Long waves in ocean and costal waters. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 107:501–522, 1981.
- [22] S. Lee, G.Y. Yates, and T.Y. Wu. Experiments and analysis of upstream-advancing solitary waves generated by moving disturbances. *J. Fluid Mech.*, 199:569–593, 1989.
- [23] T.R. Akylas. On the excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution. *J. Fluid Mech.*, 141:455–466, 1983.
- [24] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Springer, 1995.
- [25] M.S Ismail and T.R. Taha. A numerical study of compactons. *Mathematics and Computers in Simulation*, 47:519–530, 1998.
- [26] S.S. Shen. Energy distribution for waves in transcritical flows over a bump. *Wave Motion*, 23:39–48, 1996.
- [27] Y. Cao, R.F. Beck, and W.W. Schultz. Numerical computations of two-dimesional soitary waves generated by moving disturbances. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 17:905–920, 1993.
- [28] B.E. Protopopov. Numerical investigation of soliton generation by a moving region of surface pressure. *International Series of Numerical Mathematics*, 99:347–355, 1991.
- [29] D. Zhang and A.T. Chwang. Numerical study of nonlinear shallow water waves produced by a submerged moving disturbance in viscous flow. *Phys. Fluids*, 8(1):147–155, 1996.
- [30] B. Froneberg and G.B. Whitham. A numerical and theoretical study of certain non-linear wave phenomena. *Phil. Trans. Royal Soc. London*, 289:373–403, 1978.
- [31] H. Holden, K.H. Karlsen, and N.H. Risebro. Operator splitting methods for generalized korteweg-de vries equations. *Journal of Computational Physics*, 153:203–222, 1999.

-
- [32] C. Katsis and T.R. Akylas. On the excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution. part 2. three-dimensional effects. *J. Fluid Mech.*, 177:49–65, 1987.
- [33] G. Pedersen. Three-dimensional wave patterns generated by moving disturbances at transcritical speeds. *J. Fluid Mech.*, 196:39–63, 1988.