MASTEROPPGAVE I MATEMATIKKDIDAKTIKK

ALGEBRAVANSKER

Hva er årsaken til at elevene syns algebra er vanskelig?

Er det hull i grunnleggende kunnskap og/eller misoppfatninger hos elever på videregående skole som gjør at algebra er vanskelig for dem?

ANNE BR BALASUNDARAM

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPLIGE FAKULTET

UNIVERSITETET I BERGEN

HØSTEN – 2017

SAMMENDRAG

I denne oppgaven kommer det fram hva årsaken og problemer elever på videregående kan ha i algebra som gjør at de syns algebra er vanskelig, og gjør det dårlig i dette emnet. Resultatene fra TIMSS Advanced i 2015 viser at resultatene fra 2008 til 2015 hadde en framgang i Norge, men de er dårligere i forhold til resultatene fra året 1995/98. Sammenlignet med de andre internasjonale landene som deltok i denne undersøkelsen, viste det seg at Norge gjorde det dårligere, og da spesielt innenfor temaet algebra.

Dermed er resultatet fra TIMSS Advanced årsaken til at jeg ville finne ut om det virkelig er slik at norske elever på videregående skole, og som tar fordypningen i matematikk (R – matematikk) har problemer med algebra. Gjennom å lese teorier om misoppfatninger som forårsaker problemer i algebra, og ved å teste ut noen oppgaver i en R1 klasse, brukte jeg dette til å bekrefte at videregående elever faktisk kan ha misoppfatninger i algebra som gjør at de har problemer med å løse oppgaver.

Resultatene jeg kom fram til i denne oppgaven var at elever har med seg misoppfatninger fra tidligere skolegang, og at det er dette som er årsaken til at elevene har vansker med algebra også på videregående, og gjør det derfor dårligere i dette emnet. Misoppfatningene elevene på videregående skole har med seg videre er basis ferdigheter i aritmetikken fra barneskolen og introduksjon i algebra fra ungdomsskolen. Årsakene til disse misoppfatningene kommer da av at elever ikke får erfaring med å generaliserer regler og metoder i aritmetikken. Ved å generalisere vil elevene oppdager et mønster ved å jobbe med tall som kjent (spesialisering), som kan brukes til å generere et generelt uttrykk for de samme regelen og metoden på noe ukjent. Dermed vil anvendelse av regler og metoder fra aritmetikken på algebra bli lettere, og elevene vil få en bedre forståelse da algebra knyttes opp mot noe de har lært tidligere, altså tallæren / tallbehandling.

FORORD

Gjennom denne oppgaven har jeg fått en bedre forståelse for hvilke problemer og hva årsaken er for at elever sliter med algebra. Prosessen i skrivingen av oppgaven har vært krevende med tanke på å sette av tid til både vikarjobben jeg hadde og familien min, men motivasjonen til å fullføre den siste delen av det 5årige lektor utdanningen har vært årsaken til å skrive ferdig oppgaven. Samtidig har arbeidet med oppgaven vært lærerikt med tanke på at det nå finnes en årsak til at elever syns algebra er vanskelig, og gjør det dårligere i dette emnet.

Jeg vil takke veilederen min, Andreas Christiansen, som tok seg tid til å lese gjennom utkastet til oppgaven min, og kom med tilbake meldinger om endringer som måtte gjøres.

Jeg vil også takke læreren som lånte meg klassen sin, og elevene for å gjøre testoppgavene mine. Uten dem ville jeg ikke hatt noe datamaterialer som jeg kunne ta i bruk i oppgaven min som belyste noen av problemene med algebra.

Tilslutt vil jeg takke familien min, mine foreldre, søsken, mannen min og barna mine, for oppmuntrende ord, støtten og hjelpen med å komme meg i gjennom oppgaven min.

Bergen, 19.12.2017

Anne BR Balasundaram

Innhold

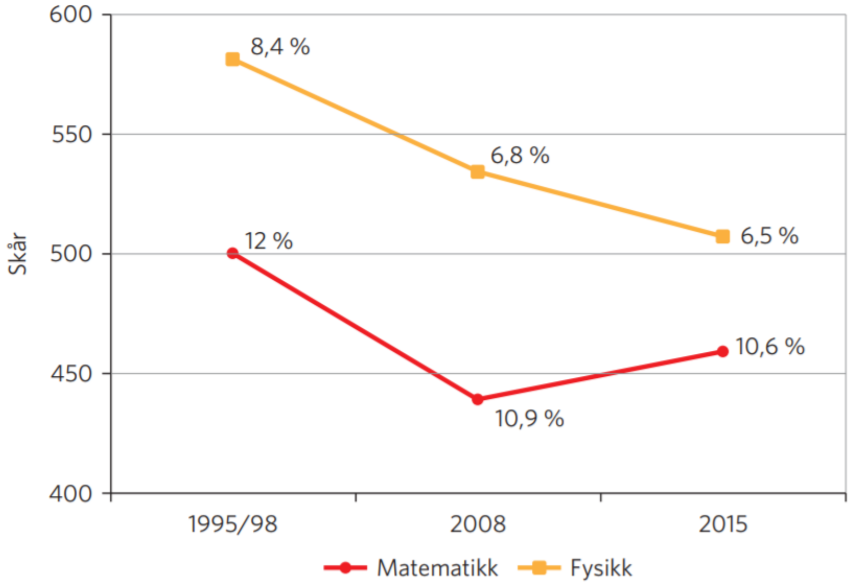
1. INNLEDNING

TIMSS står for «Trends in Mathematics and Science Study», og er en internasjonal studie av undervisning i matematikk og naturfag i skolen. TIMSS studie er en studie som blir utført hver fjerde år, og deltakere i denne studien er elever på grunnskolen. (Sjøberg, 2016). Det blir også utført en internasjonal studie kalt TIMSS Advanced som studerer kompetansen til elever som går det siste året på videregående skole, og som har matematikk og fysikk som fordypningsfag. Målet med å studere resultatene fra TIMSS og TIMSS Advanced er å gjøre læring og undervisningen i matematikk, naturfag og fysikk bedre, i og med at realfagskompetanse er viktig i dagens teknologiske samfunn. Ved å sammenligne prestasjoner, undervisningspraksis, elevenes holdning, skolemiljø, utdanningssystemer, læreplan over tid kan dette gi nye måter å gjøre læring og undervisning bedre på, da man lærer av hverandre på tvers av land og kulturer. (uio.no, 2015).

Det som blir undersøkt hos elevene gjennom TIMSS undersøkelsen er: faglig kunnskap og læringskontekst. (uio.no, 2015).

- Faglig kunnskap: Her blir elevenes faktakunnskaper og ferdigheter testet ut, om hvordan de kan ta i bruk dette i forskjellige situasjoner. I tillegg testes elevenes evner i å resonere, argumentere, se sammenhenger og trekke slutninger.
- Læringskontekst: Gjennom spørreskjemaer finne ut hvilke faktorer (elevenes hjemmebakgrunn, motivasjon, lærerens utdanning og mye mer.) som har påvirkning på læringen hos elevene.

I rapporten TIMSS Advanced «Ett skritt fram, ett skritt tilbake» (Grønmo, Hole & Onstad, 2016) kommer det fram hvordan resultatene fra TIMSS Advanced undersøkelsen utført i 2015 i matematikk var. Denne rapporten sammenligner resultatet fra TIMSS Advanced årene 1995/1998, 2008 og 2015 i Norge, og samtidig blir resultatene fra Norge sammenlignet med resultatene fra ni andre land som også deltok i TIMSS Advanced. Resultatene i Norge viser at det er en framgang i resultatene fra 2008 til 2015, men at resultatene fortsatt er svakere enn resultatene i Norge på 90-talllet. (Se figur 1.1 nederste røde grafen)



Figur 1.1: Resultat fra TIMSS Advanced i Norge fra 1995/98, 2008 og 2015 fra artikkelen til Grønmo, Hole & Onstad (2016)

I tillegg er resultatene i Norge svakere sammenlignet internasjonalt, fra tabell 1.1 ser vi at Norge ligger på tredje siste plass. Dette er bekymringsfullt med tanke på at disse elevene tar fordypning i faget matematikk, altså det høyeste nivået på videregående skole som da blir kalt for R2. Samtidig kommer det også fram at norske elever gjør det dårligst i område algebra, i forhold til andre emner i matematikk. Et tegn på at algebra er en utfordringen for de fleste elever i Norge. Dermed er det interessant å finne ut av hvorfor algebra utgjør et problem blant norske elever.

Land	Skår
Russland (utvalg)	540 (7,8) ▲
Libanon	532 (3,1) ▲
Skalamidtpunkt	500
USA	485 (5,2) ▼
Russland	485 (5,7) ▼
Portugal	482 (2,5) ▼
Frankrike	463 (3,1) ▼
Slovenia	460 (3,4) ▼
Norge	459 (4,6) ▼
Sverige	431 (4,0) ▼
Italia	422 (5,3) ▼

Tabell 1.1: Resultatene for landene som deltok i TIMSS Advanced fra artikkelen til Grønmo, Hole & Onstad (2016)

Det blir også nevnt i rapporten fra TIMSS Advanced (Grønmo, Hole & Onstad, 2016) hvilken type algebraoppgaver det er elevene gjorde det dårligst på. Det viser seg at elever gjorde det dårlig med oppgaver som inneholdt rene algebraoppgaver (kalt rene matematikkoppgaver), i forhold til anvendt matematikk hvor oppgaven blir presentert med et konsept fra dagliglivet eller yrkeslivet. Figur 1.2 viser oppgaven elevene i Norge gjorde det relativt bra på.

> Ei bedrift lagar boksar med sylinderform som har diameter 6 cm, og som kan innehalde 600 cm^3 suppe. Bedrifta ønskjer å endre diameteren til boksane, men halde høgda uendra, slik at boksane kan innehalde 750 cm^3 suppe. Kva må den nye diameteren vere?
>
> Vis framgangsmåten.

Figur 1.2: Algebra oppgave fra TIMSS Advanced fra artikkelen Grønmo, Hole & Onstad (2016)

Men for elever som trenger algebra videre i utdanningen sin, så er det ikke nok med å kunne løse oppgaver med konkrete situasjoner, man trenger og ha den generelle algebraforståelsen. Den generelle algebraforståelsen blir først introdusert som emnet Algebra på ungdomsskolen. Det har da blitt gjort funn av Kongelf (2015) om at introduksjonskapittelet i lærebøkene i algebra brukt på ungdomsskolen har grunnlag for å utvikle misoppfatninger hos elevene når det gjelder algebra. Og når da den grunnleggende algebraforståelsen ikke er på plass fra starten av, vil dette ha en påvirkning når man lærer algebra videre på videregående skole. Siden algebra undervisningen bygger videre på introduksjonen elevene får på ungdomsskolen. I følge Grønmo, Hole & Onstad (2016) er grunnleggende algebra fra ungdomstrinnet og formell tallregning på barnetrinnet viktige områder for videre læring i matematikk om man tar videre utdanning, som er da sentralt i algebra.

1.1 Valg av tema

Det jeg har opplevd den lille tiden som en matematikklærer er at elever synes at matematikk kan være vanskelig, og da spesielt emnet algebra og ligninger. Dette bekrefter også resultatene fra TIMSS Advanced, at norske elever helt opp til videregående skole gjør det dårligere i algebra delen. Da dette innebærer regning med bokstaver, noe som elevene ikke klarer å relaterer med noe de kjenner.

Dermed viser det seg at elever har en form for algebravansker, ikke på grunn av svikt i hjernefunksjon, men på grunn av enten mangel av grunnleggende kunnskap eller misoppfatninger som elevene selv har konstruert for å gi en mening med algebradelen. Dermed ønsker jeg å undersøke om elever som tar R matematikk på videregående skole, virkelig gjør det dårlig slik TIMSS Advanced resultatene tilsier, og om dette har noe med manglende grunnleggende algebrakunnskaper eller misoppfatninger.

1.2 Målet med oppgaven

Målet med oppgaven er å få en forståelse som nyutdannet lærer hvorfor elever syns algebra er vanskelig, og hva årsaken til dette kan være. Etter å ha lest litteratur om vansker, algebra og misoppfatninger, har jeg kommet fram til at vanskene i algebra henger sammen med tidligere algebrakunnskaper og misoppfatninger i grunnleggende ferdigheter i aritmetikken. Om grunnen til vanskene hos elevene er basis kunnskaper som ikke er på plass eller misoppfatninger, så kan dette være til hjelp for meg som lærer ved at jeg kan legge opp undervisningen på en slik måte at det kan minske misoppfatninger hos elevene. Gjennom oppgaven vil jeg derfor prøve å få en innsikt i hvilken problemer elever møter i algebra.

1.3 Problemstilling

Det første spørsmålet som dukket opp da jeg hadde lest rapporten fra TIMSS Advanced var, *«Hvorfor gjør norske elever på videregående det dårlig i algebra?»*. Dette er spørsmålet er i grunn hovedårsaken for at jeg valgte å skrive denne oppgaven, for å finne ut hva vansker elever snakker om når de se syns algebra er vanskelig. Men og omforme en passende problemstilling som skulle være dekkende var ikke enkelt. Som nevnt tidligere vil jeg i oppgaven min undersøke om årsaken til elevenes algebravansker kommer av manglende grunnleggende kunnskap og/eller misoppfatninger, og da spesielt hos elever på videregående skole. Hovedproblemstillingen etterfulgt med bi-problemstilling for oppgaven er da:

Hva er årsaken til at elevene syns algebra er vanskelig?

Er det hull i grunnleggende kunnskap og/eller misoppfatninger hos elever på videregående skole som gjør at algebra er en vanske for dem?

2. TEORI

2.1 Læring

Det finnes forskjellige meninger om hva læring er for noe, men det én kan si er at læring skjer ved atferdsendring eller personlighetsendring. Hvor disse endringene oppstår på grunnlag av øvelse eller erfaringer, og ikke grunn arvelig faktor. (Imsen, 2005). Woolfolk (2004, s.128) definerer læring som *«det som skjer når en erfaring forårsaker en relativt permanent forandring i et individs kunnskap eller atferd».* Altså det vil si at når elever erfarer noe nytt, ved for eksempel å jobbe med flere lignende matematikk oppgaver, så vil det føre til at jo mer de jobber med oppgaver, jo lettere er det og gjøre lignende oppgaver. Til slutt vil elevene være i stand til å utføre oppgaven automatisk, siden de husker metoden så godt. Det har da skjedd en permanent forandring i individets kunnskap eller atferd som gjør at elevene er i stand til å lære noe.

I dag har læringssynet flyttet fokuset fra passiv overføring av kunnskap, hvor kunnskapen ble overført fra læreren til elevene, til at elevene selv er aktiv i sin læringsprosess. Men fortsatt er det en blanding av forskjellige læringsteorier i undervisningen. De tre læringsteoriene som har blitt brukt oppgjennom årene er behavioristisk, kognitiv og sosiokulturelt. (Dysthe, 1999).

Behavioristisk læringssyn går ut på at man lærer gjennom stimulus og responser. Et eksempel Woolfolk (2004) skriver om er at skinners duer ble lært opp til å hakke etter mat når lyset sto på, og ikke gjøre det når lyset var slukket fordi duene ikke fikk noe mat da. Hakkingen ble kontrollert av en stimulus, lyset, som fører til utløsing av respons som nemlig er hakking av mat. Dette som skjer er en frivillig atferdsendring hos duene, altså at duene da bare vil hakke etter mat på dagtid når det er lyst. Individet er da passivt og lærer ved hjelp av ytre påvirkning (straff og belønning). (Imsen, 2005). Dermed kan man med riktig stimulering få en individ til å lære nesten hva som helst. Slik stimulus og respons øvinger blir da i denne læringssynet brukt til å innlæring grunnleggende fakta og begreper, som man kan ha godt nytte av senere i læringen sin. (Dysthe, 1999). Men i dag er det ikke nok med å ta til seg informasjon og lære fakta. Man må i tillegg til å ta til seg informasjon, også kunne reflektere, knytte opp mot tidligere kunnskap og bruke kunnskapen i andre sammenhenger. For å kunne gjøre dette må elever selv være aktive og konstruere kunnskapen for å lære. (Dysthe, 1999). Dette er kjennetegnet for kognitiv læringsteori.

2.2 Læring med forståelse

I matematikken på skolen lærer elevene forskjellige metoder og teknikker, dette alene er ikke nok å kunne. Man må også forstå den faglige innholdet for å kunne vite når og hvordan man kan ta i bruk disse metodene og teknikken. Det er dette som skjer i algebra, de lærer forskjellige regler men vil ha problemer med å kunne anvende dette på nye oppgaver da den faglige forståelsen ikke er på plass. Som Skott, J., Jess, K. & Hansen, H. (2011) også nevner så innebærer læring med forståelse i at elevene skal få mulighet til å finne og konstruere sammenhengen mellom de forskjellige begrepene og metodene. Slik at læring vil framstå som en sammenhengende begrepsbygning og ikke bare at man lærer regler og begrep isolert.

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H. (2011) nevner fem kjennetegn som innebærer læring med forståelse i matematikk, og det er at elevene:

- Konstruerer relasjoner mellom det de allerede kan, og det nye som skal læres.
- Utvide og anvende matematisk kunnskap med nye og flere faglige begreper og metoder.
- Reflektere over sine faglige erfaringer, det vil si at de bevist overveier og undersøker nye begreper og metoder, og ikke bare godtar en definisjon eller en prosedyre. Refleksjon kan føre til omorganisering av allerede eksisterende forståelser/kunnskap.
- Uttrykke deres faglige forståelse både muntlig og skriftlig, gjennom tegninger, diagrammer, matematiske symboler, osv.
- Gjøre det faglige innholdet til sitt eget. Ved at elevene bearbeider forklaringen de har fått på sin måte slik at de utvikler en form for eierskap til det faglige innholdet.

For å lære med forståelse må derfor elever selv være aktive for å kunne konstruere sin forståelse. Det finnes tre læringsteorier som fokuserer på at elever lærer selv ved å være en aktiv deltager sin egen læringsprosess.

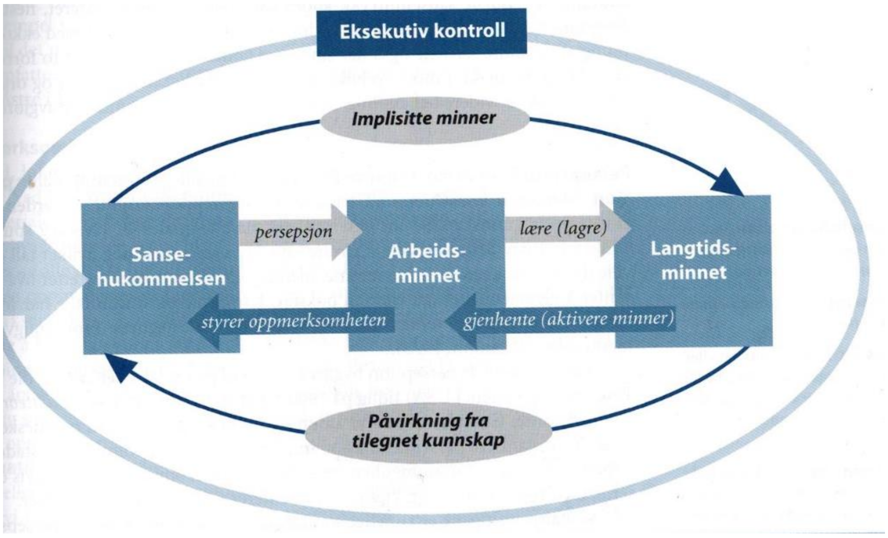
1. Kognitiv læringsteori, konstruktivisme
2. Sosiokulturell læringsteori
3. Radikal konstruktivisme

1) Kognitiv læringsteori

«En generell tilnærming som forstår læring som en aktiv mental prosess som består i å erverve, huske og anvende kunnskap» (Woolfolk, 2004, s.164).

Imsen (2005, s. 35) definerer begrepet «kognitiv» som det som har med de intellektuelle funksjonene å gjøre. Derfor er de indre prosessene som skjer i hodene våre viktig. Alt fra vi mottar en opplevelse gjennom sansene, til vi får en reaksjon av dem. Kognitivistene er derfor interessert i finne ut hvordan hjernen organiserer kunnskapene, og hvordan vi kan tenke, huske og løse problemer. Drivkraften i denne læringsteorien er da menneskets aktivitetstrang og vitebegjær (indre motivasjon), og ikke belønning (ytre motivasjon).

I denne læringsteorien skjer læring aktivt ved at man tilegner seg informasjon, husker denne informasjonen ved at man reflektere og prøver å knytte det opp mot tidligere kunnskap, for så å anvende den nye kunnskapen videre i nye sammenhenger. Denne prosessen kalles informasjonsprosessering. (Woolfolk 2004). Dermed er man interessert i hvordan den mentale prosessen er hos de enkelte elevene. For å forstå hvordan lagring av ny kunnskap skjer kan det være interessant og se på denne informasjonsbehandlingsmodellen.



Figur. 2.1. System for informasjonsbehandling. Woolfolk, 2004, s.167

Figur 2.1, hentet fra Woolfolk (2004), beskriver hvordan informasjonene som hentes inn blir lagret i langtidsminnet, slik at vi husker og lærer noe. Sansehukommelsen mottar all informasjonen, det kan være gjennom syn, hørsel, lukt eller smak, og beholder den i noen sekunder i sanseregisteret. Deretter skjer prosessen persepsjon hvor man prøver å gi mening med informasjonen som har blitt tatt opp. Dette ved å bruke eksisterende kunnskaper. Videre vil informasjonen gå videre til arbeidsminnet, hvor det du tenker for øyeblikket befinner seg. Her vil midlertidig lagring og aktiv prosessering skjer. Det er her den nye informasjonen bli relatert til kunnskaper som allerede ligger i langtidsminner for å kunne lagre informasjonen på riktig plass. Henting av informasjon fra langtidsminnet skjer enten bevisst eller ubevisst avhengig av hva informasjon sansehukommelsen fanger opp. Ny informasjon blir lagret i langtidsminnet først når informasjonen er godt innlært, da forblir den permanent og husket. Det er slik hjernen fungerer når man lærer noe nytt.

Det man kan legge merke til i denne prosessen er at ny informasjon (kunnskap) blir knyttet opp mot eksisterende kunnskap. Man kan da kalle dette for en assimilasjon, et begrep som er kjent av sveitsisk psykologen Jean Piagets. (Woolfolk, 2004). Siden Piaget er en kjent person innenfor kognitive læringssynet, er det greit og nevne hans teori i og med at når elever sitter og jobber med matematikk oppgaver individuelt så er det kognitive læringssynet som blir brukt for å få en forståelse av oppgaven.

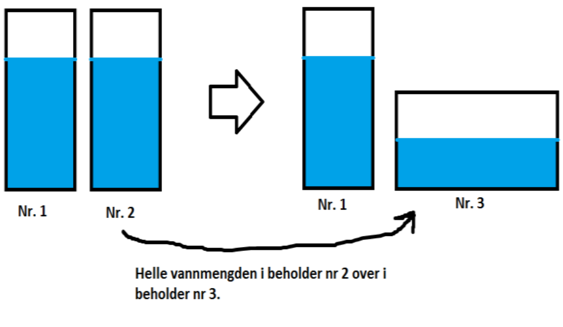
I følge kognitiv læringsteori er læring ein aktiv konstruksjonsprosess der elevane tar imot informasjon, tolkar den, knyter denne saman med det dei alt veit og reorganiserer dei mentale strukturane om det er nødvendig for å passe inn ny forståing.

(Dysthe, 1999, s. 2).

Piagets teori blir omtalt som kognitiv konstruktivisme, hvor da selve læringen (konstruksjonen) skjer i hodene på dem som lærer, og der fokuset er på det som da skjer med personens mentale strukturer under læringen. (Imsen, 2005). Piaget mente da at mennesker ikke lærer ved å være en passiv menneske som påvirkes av en aktiv ytre stimuleringskilde, men ved at mennesket selv velger ut, tolker og tilpasser stimuleringen til sitt eget «system».

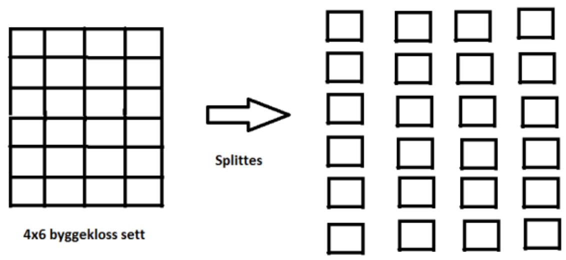
Piaget utviklet en modell på slutten av 1900-tallet som beskrev hvordan mennesker er i stand til å gi mening med alt i verden ved å samle og organisere informasjon man kjenner til. Han mener det er to grunnleggende funksjoner som brukes; Organisering og adaptasjon. (Woolfolk, 2004). *«Organisering – å kombinere, ordne, rekombinere og reorganisere atferd og tanker inn i koherente systemer.» (Woolfolk, 2004, s. 54)*. Nye kunnskaper blir plassert i et systemet Piaget kalte for skjemaer, som er de grunnleggende byggesteinene for vår tenkning. *«Adaptasjon, det vil si tilpasning til omgivelsene.» (Woolfolk, 2004, s.54).* Det er to grunnleggende ferdigheter som er viktig for å kunne tilpasse oss omgivelsene: assimilasjon og akkommodasjon. Assimilering er når ny inntrykk/kunnskap tilpasser seg skjemaer som allerede eksistere. Akkommodasjon skjer når ny inntrykk/kunnskap ikke passer i de eksisterende skjemaene og som må forandres på. Det er slik elever utvikler kunnskapen sin på, når de lærer noe nytt prøver de å koble det nye opp mot noe de har lært før for å huske det. Derfor må de også kunne reflektere over hva de kan, for å gjøre denne koblingen.

Piaget mener også at barn går gjennom fire stadier for kognitiv utvikling. De fire stadiene er sensorimotoriske stadium (0 – 2 år), preoperasjonelle stadium (2 – 7 år), konkret-operasjonelle stadium (7 – 11 år) og formel-operasjonelle stadium (11 – voksen). (Woolfolk, 2004). I hvert stadium er det mulig å utvikle å legge grunnlaget for matematiske konsepter og ideer, som kan gjøres allerede i den første stadiet, sensorimotoriske stadiet. (Ojose, 2008). I artikkelen fra Ojose (2008) kommer det fram hvordan man kan introdusere matematikk i de forskjellige stadiene i kognitiv utviklingen, noe som kan være interessant og se på. Allerede i sensormotoriske stadiet har barn en forståelse for tall og telling, de kan også koble sammen tall til objekter. Utviklingen i dette stadiet kan være med på å gi barnet en solid matematisk grunnlag. Derfor kan det i dette stadiet være fokus på aktiviteter som har med telling og gjøre, som eksempel telle på fingrene, leker, osv. I tillegg stille barnet spørsmål som «Hvem har mest?», «Er det nok til alle?», for å koble sammen antall gjenstander med antall personer. En annen aktivitet i dette stadiet er å lese bøker som inneholder matematiske konsepter, slik at barn i tidlig alder får en introduksjon til matematikk. (ibid). I preoperasjonelle stadiet skjer det en økning i ordforrådet, de får symbolske tanker og en begrenset logikk. Dermed kan det være en fordel å få barnet til å bli interessert i problemløsning, som det er mye av i senere matematikk. Men samtidig som barnet jobber med problemet er det viktig at lærere får høre barnet forklare tenkemåten sin, slik at læreren får et innblikk i hvordan barnet tenker. For barn i dette stadiet er utviklingen er begrenset til et aksept/dimensjon. For å vise dette utførte Piaget en test som gikk ut på at han hadde to beholder med like mye vann. Vannet fra den ene beholderen ble helt over i en tredje beholder som var litt bredere. Barnet så da at det var mindre vann i den tredje beholderen sammenlignet med den første, selv om vannmengden var likt i begge beholderne. (Figur 2.2). Altså barnet fokusere på vannet og ikke beholder, fokuset rettet mot en dimensjon. (ibid). For å utvikle dimensjonene av et objekt nevner Ojose (2008) at det kan gjøres ved å stille effektive spørsmål om karakteristikken for objekter når barn skal gruppere geometriske figurer etter lignende karakteristikk. *«Hvordan bestemte du hvor du skulle plassere objektene?», «Er det andre måter å gruppere på?»* er typiske spørsmål.



Figur 2.2: Egen tegning av Piagets test med sammenligne vannmengde

Gjennom øvelser som gruppering av geometriske figurer vil barn begynne å tenke mengde på nye måter, som kan være en god start for neste stadiet, konkret-operasjonelle stadium. I dette stadiet vil de grunnleggende ferdighetene starte å akselerer, og barnet forstår 2 – 3 dimensjoner av et objekt. I testen forklart over, hvor vannet blir overført til en tredje beholder, vil barnet i dette stadiet i tillegg til å legge merke til at det er mindre vann også legge merke til at beholderen er mindre/bredere. Dette er da eksempel på hvordan et barn kan se flere dimensjoner av et objekter på. (Ojose, 2008). Andre ting barn kan i dette stadiet er å ordne lengde, vekt eller volum etter stigende/minkende rekkefølge, og gruppere objekter etter karakteristikk. Det barnet kan ha problemer med og som er viktigst i matematikk er å koble sammenhengen mellom matematisk konsepter og aktivitet. Altså manipulere matematikk med modell er en form for matematikk, mens arbeide med penn og papir er en annen form for matematikk. Som hvordan en 4x6 rektangel bestående av byggeklosser kan relateres til fire multiplisert med 6. Dette trenger de derfor hjelp fra lærere med å forstå, ved å vise med og separere byggeklossene i fire rader med 6 klosser. (Figur 2.3). Forklaringen vil da gi elevene en mening med ideen om byggeklossene, og elevene får en forståelse om at matematiske løsninger kan presenteres på forskjellige måter som grafisk, symbolsk, tabell og med ord. (Ojose, 2008).



Figur 2.3. Egen illustrasjon på problemet 4x6. Koble sammen matematisk konsept med aktivitet.

I det siste stadiet av Piaget's teori som Ojose (2008) tar for seg er formel-operasjonelle stadiet. Her starter utviklingen av å kunne forme hypoteser og forutsi mulige konsekvenser, som er med på å få barn til å konstruere sin egen matematikk. I dette stadiet starter barn og resonnere, ved at de prøver å identifisere og analysere elementer av problemet for og kunne hente ut informasjon for å løse oppgaven. Elever må da bli oppmuntret til å hente ut informasjon fra et problem, som da vil være til hjelp med å forberede matematikk forståelsen deres. Evalueringsevnene er også utviklet i dette stadiet for å kunne bedømme om en problemløsning er tilstrekkelig. I tillegg har elever evner til å kunne koble sammen matematiske konsepter til virkeligheten. (Ojose, 2008).

Det vi ser er at matematiske konsepter og ideer kan bli introdusert tidlig i barnets liv. Men får å få en innblikk i hvordan barnet tenker innenfor matematikk, eller generelt tenker, er det viktig å få barnet til og sette ord på tankeprosessen sin. Dette kan gjøres ved å ha dialog/kommunikasjon med elever hvor enten lærer eller medelever stiller hverandre spørsmål, som fører til at man lærer av hverandre. Så vi ser at vi nærmer oss det sosiokulturelle læringssynet.

2) Sosiokulturell læringssyn

Mens kognitiv læringsteori tar for seg den mentale læringen som skjer hos hvert enkelt individ (individuelle prosesser), så fokuserer sosiokulturelt læringssyn på at kunnskap blir konstruert gjennom samhandling. (Dysthe, 1999). Kjent person innen dette læringssynet er Vygotsky, hans syn på læring og utvikling er en kritikk av behaviorismen og Piagets kognitivisme (Krumsvik & Säljö, 2013). Når elever lærer noe så skjer det gjennom kommunikasjon med andre, og ikke alene. Barn lærer å telle når de først har hørt foreldre eller andre telle, dermed er barnet avhengig av samtalepartnerens evne til å telle før de klarer det selv. Ideen om utvikling i sosiokulturell læringssyn er at et barn trenger en støtte for å klare noe, det kan være foreldre som er med på å støtte barnets tenkning gjennom å si hva kommer nå? Og etter hvert som barnet behersker ferdigheten, kan støtten fjernes slik at barnet ikke lenger trenger noe støtte. (ibid).

«I det sosiokulturelle perspektivet fremheves det dermed at vi lærer gjennom å kommunisere med andre, gjennom samtale, dialog og samarbeid. Vi kan si at det grunnleggende synet på læring er at dette skjer gjennom deltakelse i ulike situasjoner, der man suksessivt tilegner seg erfaringer.»

Krumsvik & Säljö, 2013, s.75

For å forstå hvilken måte elevene lærer på, og hva de kan ha problemer med i matematikk, så er det viktig å få en forståelse for hvordan elevene faglig tenker gjennom å kommunisere med dem. I og med at det ikke alltid er like lett å forstå hvordan elevene har tenkt ved å studere svaret de avgir, dette gjelder uansett om det er skriftlig eller muntlig. (Skott, Jess & Hansen, 2011). Ved å kommunisere kan elevene videreutvikle sin faglige tenkning på to måter: ved at de ikke bare skal forklare hva de har gjort, men også hvorfor de har gjort det. Og den andre måten er at elevene lærer hvordan de skal kommunisere muntlig i matematikk, som er et læringsmål. (ibid). Dermed er det en fordel med å ha kommunikasjon i matematikk undervisningen. Kommunikasjonsformen som kan brukes i undervisningene er dialog som er lærerstyrt. På denne måten kan man også få et innblikk i hvordan elevene har konstruert den nye kunnskapen på, og hjelpe dem i å rette opp eventuelle misoppfatninger og misforståelse de har tatt med i konstruksjonen sin.

Den vanligste formen for lærerstyrt samtale i klasserommet har blitt kalt for IRE-samtale. (Krumsvik & Säljö, 2013). Denne formen for samtale går ut på at læreren stiller et spørsmål (Initiering), som elevene skal svare på (Respons), og deretter vil læreren si om svaret er rett eller galt (Evaluering). Slik kan prosessen gjentas. (ibid). Noen er kritisk til denne samtalen siden elevene bare skal reprodusere ferdig kunnskap, mens andre forskere mener at denne måten å ha samtale på kan føre til å engasjere elevene i problemløsning om lærere stiller autentiske spørsmål. Slike spørsmål kan være åpne spørsmål som krever informasjon som lærer ikke har svar på, og gir et signal på at læreren er interessert i hvordan elevene tenker og hva de vet uten å gjengi kunnskap. Slike spørsmål bidrar med å la elevene komme med noe nytt til samtalen som har en motiverende effekt. (Krumsvik & Säljö, 2013). Noe spørsmål som kan brukes til å starte en diskusjon hos elevene som får dem til å tenke, er

- Hva gjorde du, da …?
- Hvordan kan man være sikker på, at …?
- Hva hvis …?
- Kan man bruke andre representasjoner av … for å vise det resultatet?
- Dette vare en god måte å gjøre det på, men er det noen andre forslag? Hva er forskjellen på disse to måtene?

(Skott, Jess & Hansen, 2011).

Krumsvik & Säljö, 2013 nevnte at noen er kritisk til IRE-samtalen da den går ut på at elevene skal gjengi et fasit svar, siden E'en går ut på at elevenes svar blir evaluert som riktig eller galt.

Til dette kommer Skott, Jess & Hansen (2011) med at IRE – samtalen kan endres til IRFRF …, hvor E (Evaluation) blir erstattet med F (Feedback). For da vil ikke elevenes respons bare være å gjengi et forventet svar, men også argumenter for det slik at det gir opphav til nye problemer, derfor vil dialogen fortsette med ny respons og en feedback. På denne måten vil det ikke lenger bare være læreren lenger som stiller spørsmål, men elevene blir engasjert til å stille spørsmålene selv. (ibid). På denne måten kan vi se at sosiokulturell læringssyn kan være med på å gi elevene læring gjennom og være sosial aktiv og delta i diskusjoner, samtidig vil dette hjelpe til og utelukke feilaktig konstruksjon av læring som elever har lært gjennom egen læring (kognitiv).

3) Radikal konstruktivisme

I følge Skott, Jess & Hansen (2011) har radikal konstruktivisme hatt en stor betydning i matematikkens didaktikk i de siste tiårene. Radikal konstruktivisme er en kombinasjon av kognitiv læringsteori og sosiokulturell læringsteori. For å få en forståelse i matematikk er det ikke nok å individuelt konstruere kunnskapen (kognitiv læringsteori), man må også sette ord og ha samtaler (sosiokulturell læringssyn) om forståelsen man har konstruert for å kunne bekrefte om konstruksjonen av forståelsen har blitt gjort riktig.

Kunnskapen finnes i hodene våre, noe som betyr at vi ikke har noe andre mulighet enn å konstruere den på bakgrunn av den erfaringen vi gjør oss. Grunnleggeren for radikal konstruktivisme var Ernst von Glaserfeld, og han baserte seg mye på Piaget sine teorier om assimilasjon, akkommodasjon og mentale skjemaer. I tillegg mente han også at språk og kommunikasjon spilte en viktig rolle i å utvikle forståelse. (Skott, Jess & Hansen, 2011). Radikal konstruktivisme bygger på grunnleggende prinsipper:

1. Kunnskap mottas ikke passivt, men må aktivt oppbygges av den enkelte individene.
2. Anerkjennelse handler ikke om å oppdage et objektiv eksisterende verden, men å organisere sine erfaringer i møte med nye erfaringer. Siden man konstruerer en forståelse på bakgrunn av inntrykkene og erfaringene fra den eksisterende verden.

Siden kunnskapen finnes i hodene våre, mener von Glaserfeld at språk og kommunikasjon har en viktig rolle i avspeiling av denne kunnskapen. For at elevene lettere skal kunne assimilere og akkommodere nye kunnskaper inn i rette skjemaer ut fra lærerens forklaring, vil det å sette ord på det man har forstått være viktig. Når man da uttrykker seg muntlig, og opplever at det er en overenstemmelse mellom læreren og ens egen forståelse, da har man forstått noe. Det skjer en akkommodering og assimilering først når det oppstår en overenstemmelse mellom forståelsen og den verden, forståelsene er rettet imot. (Skott, Jess & Hansen, 2011).

Ifølge Skott, Jess & Hansen (2011) er kommunikasjon og interaksjon en sentral ide, da dette er avgjørende for å skape en mental ubalanse som trengs for å kunne akkomodere og som påvirker hvilke begreper og ferdigheter vi konstruerer. I radikal konstruktivistisk lærersyn skal elever arbeide alene med konkrete materialer for å konstruere sin forståelser, og ved å ta i bruk klassesamtaler og lærerforklaringer vil dette kunne utvide felles forståelser av det faglige begrepene og metodene som et fokuspunkt i undervisningen. Dermed vil foreløpige forståelser hos elever da kunne utvikles i retning av den antatte felles forståelsen, som hører til matematikkfaget. (Skott, Jess & Hansen, 2011).

2.3 Algebra

Algebra, gren av matematikk, kan i sin enkleste (og eldste) forståelse defineres som læren om ligninger og regning med tall og variabler, men oppfattes i dag mer generelt som studiet av algebraiske systemer og avbildninger mellom slike.

(Aubert, 2014)

Algebra er en gren innenfor matematikk som bygger videre på aritmetikken med at det blir introdusert bokstaver i regneoperasjonene. Bokstavene i algebra blir brukt som et symbol i forskjellige sammenhenger, og brukes:

- Til å generalisere
- Til å begrunne og bevise
- Til å vise regneregler i identiteter
- Til å vise generelle utregningsmåter i formler
- Til å vise sammenhenger mellom korresponderende tallstørrelser
- I funksjoner-
- Som ukjent tall i ligninger og ulikheter

(matematikk.org, u.å.)

Ved å kunne bruke bokstaver i regningen fører dette til at algebra kan gi oss generelle løsningsmetoder, og er et verktøy til å løse problemer. (matematikk.org, 2013). Dermed kan vi uttrykke generelle sammenhenger og formler matematisk ved hjelp av algebra. Eksempel vil utsagnet «*Per er 2 år eldre enn Mona*» kunne oversettes matematisk til $P = M + 2$, om vi definere at Pers alder er P og Monas alder er M. Vi kan derfor bruke algebra til å uttrykke en generell sammenheng mellom alderen til Mona og Per. For uansett hvilken alder Mona er så kan vi med formelen finne ut hvor gammel Per er. Gjennom dette eksempelet ser vi at algebra er et språk som lar oss uttrykke ting vi ikke kan uttrykke ved tall alene. (Høines, Rinvold & Selvik, 2007).

Men på grunn av at bokstaver blir introdusert i regningen synes mange elever at algebra er vanskelig, selv om det er veldig nyttig. Dette kan være på grunn av at algebra brått blir et emne på ungdomsskolen, og elevene må da, både kunne bruke regneoperasjoner på den ukjente og forstå at bokstaven (eks: x-en) kan ha flere verdier og variere i forskjellige sammenhenger. (Lunner, 2012). Noe jeg kommer til å ta for meg mer om i kapitlene videre.

1) Kort om algebraens historie

Helt tilbake til steinalderen har mennesker hatt forestillinger og kunnskap om matematikk, men de hadde da ikke behov for å utvikle denne kunnskapen. Det var først når mennesker begynte å interessere seg i jordbruk og jakt, behovet for matematikk vokste. For å kunne drive jordbruk måtte én vite det nøyaktige tidspunktet for å kunne så korn, til dette trengte mennesker en kalender. Men for å utvikle en kalender måtte man ha kunnskap om astronomi, som igjen førte til at man trengte matematikk. Matematikken hadde sin utspring i Babylon og i Egypt (2700 – 1500 f.Kr), og ble utviklet for å løse dagligdagse problemer ved bruk av blant annet geometri og algebra. Både Babylonere og Egyptere hadde en utviklet en algebraisk måte for å kunne løse første og andregrads ligninger. (Holme, 2008).

Ordet algebra stammer fra araberne sitt arbeid, da det var de som nådde langt med å utvikle både algebra, tallsystem og tallregning. Matematikeren Al-Khwarizmis (780 e.Kr) var den første som hadde skrevet et verk om ren algebra, verket kan oversettes til *«Den konsentrerte boken om regning (aritmetikk) ved al-jabr og al-muqabak»*. Tittelen på verket kan man si er opphavet til vårt algebra, da ordet al-jabr betyr «sette sammen» og al-muqabak betyr «sette lik». (Holme, 2004).

$$(1)\ 8x + 5 = 9 - 2x$$

$$\downarrow \quad \text{Al-jabr}$$

$$(2)\ 10x + 5 = 9$$

$$\downarrow \quad \text{Al-muqabak}$$

$$(3)\ 10x = 4$$

(ibid)

Overgangen fra ligningen (1) til (2) kalles Al-jabr, det er i dette steget man setter sammen de ukjente variabelen. Overgangen fra (2) til (3) kalles al-muqabak, fordi man i dette steget setter uttrykket lik hverandre for å finne verdien for den ukjente. Det er akkurat denne metoden man bruker for å løse ligninger den dag i dag.

Det var denne algebrakunnskapen som spredde seg til blant annet Italia, hvor algebra ble mer utviklet ved at matematikere som Del ferro, Tartaglia og Ferarri oppdaget løsningen for tredje og fjerdegradsligninger som ble publisert i 1545. (Aubert, 2014).

I 1591 ble bruken av bokstaver innført for størrelse av fransk matematikere Viète og Descartes, hvor av begrepet bokstavregning blir en definisjon for Algebra. (Aubert, 2014). Viète var også den første som brukte bokstavregning på en systematisk måte, og innførte mange av symbolene vi kjenner til i dag (Aarnes, 2009).

Utviklingen videre innenfor algebra gikk raskt deretter. Blant annet ble rot og potens innført, og deler av hovedproblemene innenfor ligningsteorien ble avslørt. (Aubert, 2014). For eksempel var det Niels Henrik Abel som klarte å bevise at femtegradsligning ikke kunne løses ved hjelp av de fire regneartene eller røtter. (Holme, 2004). Så fra 1800 – tallet kunne man si at algebra var vel utviklet med egen lærebygning, hvor ligningsteori var en del. (Aubert, 2014).

2) Algebravansker

Når man snakker generelt om vansker innenfor matematikk, så er begreper som dyscalculia, acalculia og dysmathematica det man kobler matematikkvansker mot. Det som innebærer med disse begrepene er at man har vansker med å mestre eller har fullstendig tap av evne til å mestre matematikkbegreper og regneprosedyrer, og at man har lav prestasjoner i matematikk. (Holm, 2000). Det finnes ingen enkel modell som forklarer årsaken til matematikkvansker (Holm, 2000), men symptomene er kjent. (Botton, 2003). Holm (2000) nevner derfor noen faktorer som kan være årsaken til matematikkvansker, og det er; nevropsykologisk faktor, kognitive faktorer og emosjonelle faktorer. Nevropsykologiske faktor omhandler hjernefunksjonen, og dette innebærer at skader i hjernen er årsaken til redusert kognitiv funksjon som innebærer vansker med matematikkferdigheter. Symptomer på matematikkvansker som følger av nevropsykologisk faktor kan gruppers i fire områder ifølge Holm’s (2000) artikkel:

1) Vansker med logisk tenking
2) Vansker med å planlegge hvordan oppgaven skal løses
3) Problemer med å velge løsningsmetode
4) Vansker med å utføre enkel regning

Kognitive faktor innebærer at elever har problemer med å tilegne seg kunnskap på abstrakt nivå, og hovedproblemet kan være hukommelsesforstyrrelser som gjør at de ikke husker grunnleggende ferdigheter. Dette kommer av at de ikke har lært ferdigheten eller så har de ikke lært det godt nok. (ibid). Vansker på grunn av emosjonelle faktorer handler om å ikke mislykkes i faget, noe som fører til stress og angst når elever møter på matematiske problemer. Matematikkvansker defineres da avhengig av om det er medisinsk, psykologisk eller pedagogisk årsak.

Det viser seg også at elever med vansker i matematikk har store problemer med følgende tema:

- Tallforståelse
- Addisjon og subtraksjon
- Multiplikasjon og divisjon
- Prosentregning
- Ligninger
- **Algebra**
- Geometri
- Osv

(Vestfold fylkeskommune, 2014).

Slik fortsetter listen, og det vi kan legge merke til er at algebra står oppført som et av områdene elever har problemer med. Men mange elever synes likevel algebra er meningsløst og vanskelig (Jakobsen, 2012), uten selv å ha noe form for andre matematikkvansker. Det viser resultatene fra TIMSS Advanced, som måler elevenes kompetanse i matematikk sammenlignet med andre land, at elever i Norge gjør det dårligst i algebra emnet i forhold til andre emner, og sammenlignet med andre land. (Grønmo, Hole & Onstad, 2016). Algebra handler om bokstavregning, og det er selve bokstavene i regningen som gjør algebraen vanskelig for de fleste elever i skoler. (Lunner, 2012). Altså disse elevene har da ikke noen alvorlige form for matematikk vansker, bare en feilaktig forståelse innenfor Algebra.

Botten (2003) nevner noen årsakssammenheng mellom elevenes holdning og prestasjoner i faget som er årsaken til at elevene har vansker med faget generelt. Noen av disse sammenhengene kan man direkte knytte til årsaker for algebravansker da dette ikke innebærer alvorlige årsaker for vansker i matematikk generelt:

- Vansker hos elever skyldes ikke skader i hjernen eller nervesystemet, men på grunn av didaktiske eller læringsspsykologiske forhold.
- Vansker på grunn av læremiddel: lærebok som presenterer stoffet på en måte som elevene ikke får tak på.
- Ensidig undervisningsmetoder, hvor formidling skjer fra lærer til elev noe som kan føre til redusert mulighet for læring.

Det at lærebøkene presenterer stoffet på en slik måte at elevene ikke forstår emnet, kan være en av årsakene til algebravansker. Den generelle algebraforståelsen blir for første gang introdusert som emnet Algebra på ungdomsskolen. Det har da blitt gjort funn av Kongelf (2015) at introduksjonskapittelet i lærebøkene i algebra brukt på ungdomsskolen har grunnlag for å utvikle misoppfatninger hos elevene når det gjelder algebra, når bruken av bokstaver blir introdusert med engang algebra kapitelet starter. Når da den grunnleggende algebraforståelsen ikke er på plass fra starten av, vil dette ha en påvirkning når man lærer algebra videre på videregående skole. Men også mangel på solid ferdigheter i aritmetikken er en årsak til at elever gjør det dårlig i algebra (utdanningsdirektoratet, 2012). Årsaken til at algebra er vanskelig for elevene er på grunn av feilene de gjør i algebra. (Booth, 1988). Jeg vil da se på algebravansker som «hull» i grunnleggende ferdigheter i aritmetikk og algebra, og misoppfatninger fra introduksjonen i algebra i lærebøkene.

a) Grunnleggende ferdigheter: Aritmetikk og Algebra

Når man snakker om grunnleggende algebraferdigheter, må man gå tilbake til ferdighetene man lærer i aritmetikk, da algebraferdighetene bygger på ferdigheter og regler fra aritmetikken. Vansker i algebra kommer av forskjellen mellom aritmetikk og algebra, siden algebra egentlig er generalisering av aritmetikk. (Booth, 1988). Algebra er krevende for elevene siden de ikke bare skal utføre symbolske kalkuleringer, men de skal også lære seg nye konsepter som; ligninger, formler, funksjoner, variabel og parameter. (Nickson, 2004). I algebra må elevene ta i bruk av kunnskaper de har utviklet i aritmetikken, denne kunnskapen skal da generaliseres til kunnskap i algebra. For at overgangen mellom aritmetikk til algebra skal kunne skje, må elever derfor ha en god forståelse for tallbegrep og kunne beherske ferdigheter i tallbehandling. (Utdanningsdirektoratet, 2012). I overgangen fra aritmetikk til algebra vil elevene møte nye utfordringer i algebra som er forskjellig fra aritmetikken. Eksempel på forskjeller i algebra og aritmetikk:

1) Notasjoner og konvensjoner: Tallet 57 har en posisjonssystem*, altså det er mulig å sette et «+» tegn mellom to tall, som 50 + 7. Slike posisjonssystem er ikke algebra bygd opp etter.

2) Regning i aritmetikk går ut på at man skal finne et endelig svar for oppgaven, som 50+7 = 57. Mens i algebra kan dette skape et problem da elever vil få en løsning som inneholder en regneoperasjon som man eventuelt ikke kan utføre, som a + 7. Siden man i algebra ikke nødvendigvis skal komme fram til et tallsvar, men heller representere problemsituasjonen med et uttrykk. Det at elevene kommer fram til slik åpent uttrykk blir ikke lett akseptert av dem.

3) Det nye elevene møter på i algebra er bruken av bokstaver i uttrykkene. Det elevene har tendens til å gjøre med uttrykk som består av bokstaver er å erstatte bokstaven med en bestemt tallverdi.

(Utdanningsdirektoratet, 2012).

*) «*I et posisjonssystem representerer hvert tall et multiplum av et bestemt tall (grunntall), avhengig av hvor det står. … Tallet 7452 i titallsystemet står for eksempel for … 7000+400+50+2» (Aubert, 2009).*

For at elevene skal kunne foreta slike generaliseringer, må de ha solide kunnskaper om egenskapene til både tall og regneoperasjoner. De må være fortrolige med å bruke store tall, brøker og desimaltall slik at de kan gjenkjenne en generell sammenheng eller se at en regel gjelder.

(Utdanningsdirektoratet, 2012, s.9)

Problemer og vanskeligheter i algebra kommer dermed av at elever har problemer i grunnleggende ferdighet i aritmetikk, som behandling av store tall, brøk og desimaltall da mange av disse ferdigheten tas i bruk i algebra. Regler som blir brukt for å løse brøk problemer er i grunn den samme som mange av reglene som anvendes i algebraisk ligninger på høyre nivå. (Nickson, 2004). Derfor mener Nickson (2004) at man bør være bevisst på at noen av disse basis konseptene (eks: fire regneoperasjoner på brøk) er grunnmuren for matematikk på høyere nivå, og derfor bør man lære og identifisere disse konseptene på et tidligere stadium slik at dette blir bedre forstått når elever møter konseptene på neste nivå.

I artikkelen av Astrid Bondø, *«Brøk – er det noe problem, da?»*, kommer det fram at elever opplever at brøk er vanskelig å forstå. Om man har vansker med å forstå hva brøk er, vil dette ha en effekt i algebra forståelsen, da man her også vil komme over uttrykk på brøk form i kombinasjon med bokstaver (Rasjonale uttrykk). Årsaken til at brøk er vanskelig for elevene er på grunn av at brøk kan ha flere forskjellige definisjoner og betydninger. Dette nevner Bondø (2010) i artikkelen sin når hun finner tre forskjellige kilder som definerer hva brøk er på forskjellige måter. I den føreste definisjonen Bondø (2010) fant på matematikknett.no kan brøkstreken bli sett på som et divisjonstegn, i den andre definisjonen fra Breiteig og Venheim så er brøkstreken ikke er det samme som divisjonstegnet men at brøken er svaret på divisjonen. Altså at: $3 : 8 = \frac{3}{8}$. Mens i den siste definisjonen Bondø (2010) fant fra Nämnaren ble brøk definert som en operasjon og et objekt. Det at brøken $\frac{24}{3}$ er en operasjon innebærer at tjuefire skal divideres med tre, og $\frac{24}{3}$ som et objekt vil si selve brøk uttrykket. (Bondø, 2010). Dermed finnes det flere aksepter ved brøkbegrepet som elevene må kunne beherskes for å få en god forståelse for brøk. (Ruth, 2014). Dette kan være en grunn til at elevene har problemer med å forstå hva brøk er, i og med at de ikke tar hensyn til at brøk beskriver flere egenskaper. Brøk kan være:

- *En del av et «hel»*
- *Et punkt på tallinja som ligger mellom to hele tall*
- *En sammenlikning mellom en del og et hele*
- *Svaret på en divisjonsoppgave*
- *En måte å sammenlikne to mengder eller to mål på*

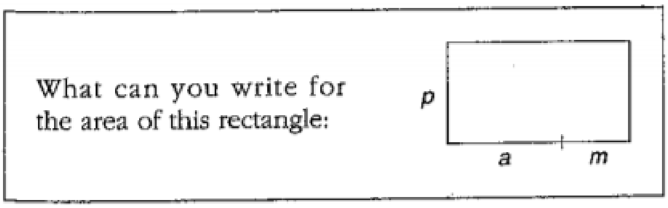
(Bondø, 2010, s. 36)

I brøk blir det tatt i bruk to heltall, en i teller og en i nevner, alene vil ikke disse tallene gi noe mening, men det gjør relasjonen mellom dem. (Ruth (2014). Elever kan da overse dette og operere teller og nevner som to uavhengige tall, og ikke en verdi. Dette vil gi grunnlag for misoppfatninger fordi elevene overgeneraliserer de matematiske reglene og bestemmelsene. Et eksempel:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{2}{7}$$

Det eleven har gjort i oppgaven over ifølge Ruth (2014) er at de operer teller og nevner hver for seg. Elevene har da overgeneralisert regel for vanlig addisjon (legge sammen teller) og i tillegg multiplikasjon (multiplisere av teller for seg, og nevner for seg) av brøker. Slike misoppfatninger i aritmetikken vil ha en effekt i overgangen fra aritmetikk til algebra, og føre til at elever sliter med algebra.

Om elevene er usikker i grunnleggende aritmetikk ferdigheter og i tillegg har misoppfatninger i aritmetikken, så kan dette knyttes opp mot vansker i algebra. Misoppfatninger i aritmetikk kan for eksempel være: prioritering av regneoperasjoner ved bruk av parenteser. (Booth, 1988). Booth (1988) tar for seg et eksempel på en elev som skal regne ut $18 * 27 + 19$. Det eleven gjør er at han legger sammen $27 + 19$, og deretter velger å multiplisere med 18. Det kommer av at elevene ikke er vant til å bruke parenteser i aritmetikk, og de tror at måten operasjon sekvensene er skrevet på er det som avgjør hvilke utregning som er foretrukket. (ibid). Altså addisjon først, og så deretter multiplikasjon. Denne forstålenes tas med videre når elevene da skal uttrykke arealet til gitt rektangel. (Se figur 2.4). Eleven uttrykker arealet som $p * a + m$. (ibid), som egentlig betyr $(p * a) + m$. Men under samtale med denne eleven, kommer det fram at eleven mener han har skrevet at a adderes med m, da får man uttrykk for hele lengden, som skal multipliseres med p (ibid), altså $p * (a + m)$, noe som er korrekt forklaring.



Figur 2.4: Children's Difficulties in Beginning Algebra (Booth, 1988)

Når elevene skal utvide de ferdighetene de behersker i tallregning, til å mestre algebra, trenger de å kunne:

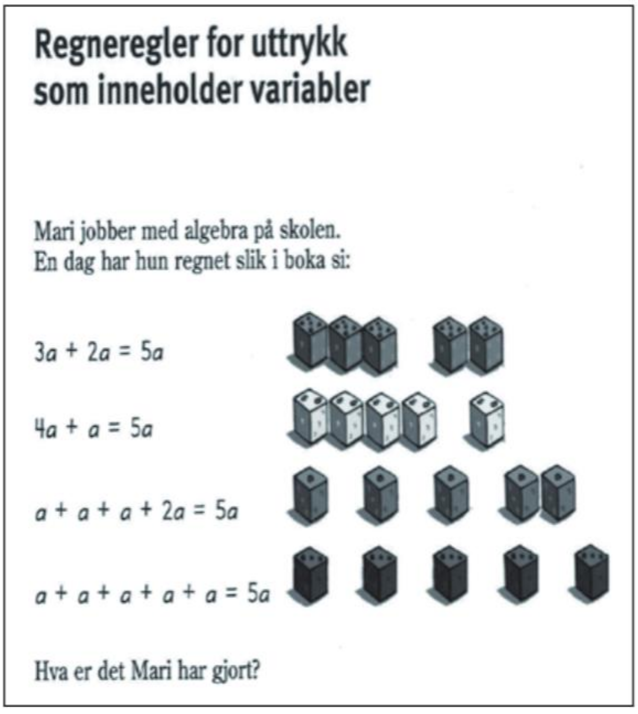
- *Snakke om tall uten å regne. Tallene kan ha store eller små verdier, være kjente tall eller tall som er kommet som et resultat av en måling. Et bestemt tall kan være ukjent av alle. Vi kan ha tall som kan endre seg, eller tall som er faste etc.*
- *Gjøre rede for eller beskrive utregninger. Slike beskrivelser har som mål å gi oppskrifter som kan beskrives med ord. Målet er å gå fra slike beskrivelser til forkortninger og formler.*
- *Forandre på måten som tall og størrelser er beregnet på. Ved bruk av regnereglene for tallregning får vi nye muligheter til å foreta utregninger idet samme problemet. Elevene skal bli oppmerksomme på at de kan erstatte én beregning med en annen, eller én prosedyre med en annen, og vite at de vil få det samme resultatet. I algebra kaller vi dette omforminger.*

(Utdanningsdirektoratet, 2012, s.10)

b) Introduksjon av algebra i lærebøker som forårsaker misoppfatning

I tillegg til misoppfatninger i aritmetikk, så har vi misoppfatninger som kan oppstå på grunn av måten algebra blir introdusert på for første gang. Eksempel på dette er begrepet variabel. Tom Rune Kongelf (2015) en høyskolelektor som har forsket på hvordan algebra blir introdusert i lærebøker på ungdomstrinnet i Norge. *«Med lærebok mener vi den tradisjonelle fysiske klassetrinns-spesifikke boken som brukes til undervisning og læring av matematikk i skolen»* (Kongelf 2015, s. 83). Funnene Kongelf (2015) gjorte da han undersøkte seks lærebøker som brukes på ungdomsskolen, er at variabelaspektet ikke kommer tydelig nok fram, introduksjonen bygger ikke videre på tall-lære, feilaktige formuleringer, illustrasjoner og resonnement. Dette er da forhold som ligger til grunn for å utvikle misoppfatninger. Siden algebra introduksjonen ikke bygger videre på tall-lære så fører dette til at elevene ser på algebra som et eget tema som ikke kan knyttes opp mot temaer de har lært tidligere på barneskolen. Blant annet for hvorfor man kan sløyfe ett tallet foran en bokstav, og bare skrive bokstaven alene. 1*x = x. I disse lærebøkene er det blitt nevnt at man fjerner ett tallet, men ikke hvorfor. For å kunne relatere dette videre på tall-lære, så kunne man har brukt forklaringen med eventuelt en-gangen. Altså at: 1*1 = 1, 1*2 = 2, 1*3 = 3, …, derfor er1*x = x.

Det finnes flere slike eksempler i artikkelen fra Kongelf (2015) om at algebra introduksjonen ikke bygger videre på tidligere kunnskap hos elevene. For eksempel multiplikasjon med gjentatt addisjon, denne begrunnelsen blir ikke nevnt i lærebøkene når den tar for seg regneregler med bokstaver. Årsaken til at 2a + 3a = 5a, er på grunn av at uttrykket på venstre side av likhetstegnet kan skrives som a + a + a + a + a = 5a. I tillegg når bøkene tar for seg



Figur 2.5: fra Introduksjon av algebra i matematikkbøker i Norge (Kongelf, 2015)

bokstaver som variabler som kan varier, så blir det misvisende og koble variabel mot en figur slik som i figur 2.5.

Noen av lærebøkene prøver å knytte de nye notasjonene i algebra med tallære, men går bort fra dette i eksempel regningen. For eksempel at $2x + 3x = 5x$ dette blir representer som løsning nr.1. Og utregningen $x + x + x + x + x = 5x$ hvor multiplikasjon som gjentatt addisjon blir brukt, og hvor man da knytter algebra notasjonen opp mot det kjente, blir representert som løsning nr. 2. Altså blir multiplikasjon med gjentatt addisjon sett på som en mellom regning, og boken går umiddelbart over til den forenklede utregningen (løsning 1). Men i starten, hvor algebra er i introduksjonsfasen er det viktig å bruke litt tid på å få en forståelse på hva som skjer når man regner med bokstaver. Dermed burde bøkene har brukt litt tid på dette, med tanke på at uttrykkene blir kompliserte med både brøk, produkt og ledd videre i algebra undervisningen.

Et annet eksempel Kongelf (2015) tar for seg er hvordan variabelaspektet ikke kommer tydelig nok fram. Dette eksemplet starter med å definere hva en variabel er, deretter er det tegnet opp to kvadrater, en med lengde 3 og en med lengde x. Videre defineres det i eksemplet at omkretsen i til kvadratet til den kjente siden er $3 + 3 + 3 + 3 = 4 * 3 = 12$. Noe som er kjent for elevene. Videre kan man lese: *«I det lille kvadratet vet vi ikke hvor lang siden er, den kan variere. Vi kaller den x. Kvadratets omkrets blir da 4x.»* (Kongelf 2015, s.98). Det er dette som er nytt for elevene, det at bokstaver kommer inn i bilde, og det å forstå hva variabel begrepet er. Det at eksemplet tar utgangspunktet fra et spesialtilfelle hvor man finner omkretsen til et kvadrat med kjente sider før det så introduserer uttrykket for omkretsen til kvadratet med ukjent side med bokstaver, kan være utfordrende for elevene. Selv om elevene får en definisjon på at variabel er noe som kan variere, så klarer ikke elevene å forstå dette ved å bare se ett eksempel med kjente side. For unnsett hvor mye de ser på kvadratet med side x, er det umulig å se det variere. Det at variabelaspektet ikke blir forstått fører til at ligninger med ukjente blir vanskelig å løse.

Introduksjonskapittelet har grunnlag for å danne misoppfatninger blant elever i algebra, da den:

1) Ikke lager forbindelser til tallære i utregningen, og om notasjon
2) Det er tilrettelagt for misoppfatninger gjennom reglene som blir presentert, også i kontekst og forklaringene.
3) Variabelaspektet kommer ikke tydelig nok fram i kontekstene og forklaringen. (ibid).

Også Booth (1988) kommer med at årsakene til feilene gjort i algebra, er at elevene ikke har forståelse for hva meningen med bokstavene og variabler er. Da Booth utførte en undersøkelse ved å stille en elev et spørsmål om hva y’en i 5y betydde fikk han til svar at y’en er en bokstav som da står for en gjenstand som må starte på y (yacht, yam, youghurt.). Dette er på grunn av at i aritmetikken blir bokstaver brukt som en forkortelse for enheter, eksempel m for meter. (ibid). Dermed viser dette at elevene ikke har en forståelse for hvorfor bokstaver blir brukt i algebra regning, da introduksjonen starter direkte med å introdusere regler som blir brukt i algebra, enn å introduser hvorfor bokstaver brukes.

Et eksempel fra Booth (1988) hvor begrepet variabel ikke har blitt forstått skikkelig, ved å stille en elev om følgende utsagnet "$x + y + z = x + p + z$" alltid er sann, aldri sann eller noen ganger sann? Gjennom samtale med denne eleven kommer det fram at eleven har en forståelse for at forskjellige bokstaver representerer forskjellige tall, og svarer dermed med at utsagnet aldri vil være sann på grunn av at y verdien ikke er det samme som p verdien. (ibid). Eleven tenker ikke at y kan være lik p, at forskjellige bokstaver kan representere det samme tallet, for da vil utsagnet bli sann. Dette på grunn av at elevene ikke har en forståelse på hva det menes med at en bokstav kan variere, altså kommer variabelaspektet ikke tydelig nok fram som Kongelf (2015) også nevner.

Så ut fra Kongelf’s funn så viser det seg at det finnes forhold i lærebøkene som fører til misoppfatninger blant elevene, som blir tatt i bruk videre i utdanning innenfor algebra. Dette kan da være en forklaring på hvorfor elevene syns algebra er vanskelig. Men man kan ikke legge hele skylden på lærebøkene, fordi elevene vil ikke lese en matematikkbok frivillig. Men etter veiledning fra lærerne, så må elevene bruke boken for å jobbe med oppgaver. Så læreboken blir for det meste brukt av elevene for å kunne jobbe med oppgaver med tanke på gjennomgang fra undervisningen. Slik at det er lærerne som er de som bruker læreboken mest, og baserer undervisningen sin etter hvordan boken introduserer kapitlene. Når læreren da følger lærerbøkene, som inneholder manglende forklaringer og som ikke knytter algebraen opp mot tallære, da begynner elevene å syns at algebra er både vanskelig og uforståelig og det oppstår en del spørsmål. Artiklene av Nøra, S (2015) *«Hvorfor er det så vanskelig med matte?»* og av Jakobsen, H (2012) *«Derfor er algebra vanskelig»*, kommer det fram at lærere som ikke behersker matematikk godt nok, vil være dem som legger opp undervisningen basert på boken. Noe som igjen medfører at det ikke er rom for elevens spørsmål eller innspill i undervisningen. En annen årsak for at elevene har problemer med algebra kan være at læreren har noe av de samme problemene med å forstå algebraprinsippene som elevene har. Derfor er det viktig at lærere har en dyp forståelse av stoffet for å kunne undervise på en god måte. I tillegg til solid kunnskap, nevner artikkelen av Jakobsen, H (2012) at lærerne også må ha kunnskap om elevenes tankegang og ulike læringsstrategi. Det er først når lærerne er oppmerksom på hvordan elevene tenker, de kan ta tak i måten elevene tenker på når stoffet blir introdusert slik at misoppfatninger blir oppklart tidlig i læringsstadiet.

c) Misoppfatninger.

«Et begrep er sjelden fullstendig utviklet ved at en har gjort erfaringer på et avgrenset felt. Vi kaller ufullstendige tanker knyttet til et begrep for misoppfatninger.»

(Brekke, 2002, s.10)

Det er forskjell når elevene gjør en feil når de løser matematikk oppgaver, og når de gjør feil på grunn av misoppfatninger. Feil elever gjør i oppgaver er ofte tilfeldige på grunn av at de ikke er oppmerksomme, ikke leser oppgaven godt nok, eller er for rask med å gjøre oppgaven. Misoppfatninger er ikke tilfeldige, da det ligger en bestemt tankegang eller ide bak disse feilene. (Botten, 2003). Dermed kan alle ha en form for misoppfatninger, siden det ligger en kognitiv prosess i forståelse av nye begreper, og hvordan man tenker rundt disse begrepene. (Nygaard & Zernichow, 2006). Siden det er normalt når man lærer et nytt tema å kunne koble det opp mot allerede konstruerte tanker og strukturer, for å få en bedre forståelse, kan dette da føre til misoppfatninger om elevene ikke helt har fått den riktige forståelsen. Derfor er det viktig å legge vekt på elevens oppfatning, og forståelse av matematiske begreper og matematiske sammenhenger, for å få en oppklaring i misoppfatninger elevene har. (Botten, 2003). Botten (2003) mener misoppfatningene elevene har er skoleskapte, blant annet presentasjonene i lærebøkene og ensidig undervisningsform (altså årsaken ligger hos læreren). I tillegg til disse årsakene nevner også Nygaard & Zernichow (2006) at læreplanen og selvfølgelig elevenes egen tenking som årsaker til misoppfatninger. Derfor finnes det et verktøy man kan ta i bruk for å få en innsikt i hvordan elevene tenker. Dette ved å bruke diagnostisk undervisning og oppgaver. (Brekke, 2002).

Misoppfatninger finnes innenfor alle felt av matematikk (Brekke, 2002), også i algebra. Misoppfatninger i algebra som blir fokusert på i artiklene av blant annet Booth (1988), Russell, O'Dwyer & Miranda (2009), Herscovics & Linchecski (1994) og Kieran (1981) er følgende:

1) Bruken av bokstaver, og begrepet variabel
2) Forståelsen for likhetstegnet
3) Regneoperasjoner og bruken av parenteser

1) **<u>Bruken av bokstaver, og begrepet variabel:</u>**

Misoppfatning i bruken av bokstav kommer av at elevene ikke konstruerer en mening for de nye symbolene ved å knytte dette opp mot tidligere ideer. Derfor vil elevene få en følelse av at de gjør meningsløse utregninger med symboler de ikke forstår. (Herscovics & Linchecski,1994). Artikkelen *«A cognitive gap between aritmetic and algebra»* tar for seg en undersøkelse hvor elever må svare på spørsmålene: «legg 4 til 3n» og «multipliser n+5 med 4». Det viser seg at flertallet av elevene svarer riktig med $3n + 4$, men allikevel er det noen elever som svarer 7n og 7 på den samme spørsmålet. Årsaken for at 7n er et svar elevene kommer med, er på grunn av at elevene følger reglene fra tallregning uten forståelse, da er det lett og gjøre feil. Altså elever overgeneraliserer regler og operasjoner fra aritmetikken, som ikke lenger trenger og gjelde i algebra. (Jakobsen, 2012).

I tillegg er elevene vant med å knytte bokstaven med et spesiell objekt som starter med den bokstaven, fordi de er vant med dette i aritmetikk (Booth,1988). Derfor vil elevene kunne tenke 3 nøtter pluss 4 til det blir 7 nøtter, altså 7n. Med denne forståelsen i bakgrunn vil elever tro at $3a + 2a = 5a$, fordi 3 appelsiner pluss 2 appelsiner gir 5 appelsiner. (Husabø, 2016). Dette vil føre til misoppfatning når elevene da skal legge sammen 2a og 5b, dette kan føre til at elevene skriver $2a + 5b = 7ab$, siden elevene allerede har en forståelse med at de har 2 appelsiner og 5 bananer som blir 7 appelsinbananer. (Booth, 1988). Derfor bør ikke elevene få en oppfatning om at bokstaven representerer en konkret ting, men heller et generelt tall.

(Husabø, 2016). Derfor er det viktig å la elevene få generalisere tallmønstre for å få en forståelse i hvorfor man tar i bruk bokstaver (Kongelf, 2015), som vi skal se mer på litt senere.

Som Frost (2007) nevner i sin artikkel, siden variabel er et viktig konsept innenfor algebra, er det derfor viktig at elever har en forståelse for at en variabel ikke trenger å være et bestemt tall, men at den kan variere avhengig av problemet. Variabelen i ligning $3x + 4 = 19$ vil ikke variere men ha en bestemt verdi, nemlig 2. (Frost, 2007). Mens i ligningen, som også kalles for en funksjon, $y = 5x + 1$ vil x'en være en fri variabel, altså x kan ha hvilken som helst reell verdi, noe som fører til at forskjellige valg av verdier for x vil gi forskjellige verdier for y. (Store norske leksikon, 2017). Frost (2007) mener da at for at elevene skal forstå begrepet funksjoner og variabler, må de kunne ta utgangspunkt i deres egne opplevelser. I artikkelen til Frost (2007) lister derfor elevene opp en liste over egne opplevelser som inneholder variabler og funksjonsforhold:

- *The length of a candle varies with the amount of the time it burns.*
- *The height of a child varies as its age increases.*
- *The temperature of a liquid varies with the amount of time it cools in a freezer.*
- *The distance an object moves varies with the force of a push.*
- *The weight of a piece of a given rope varies with its length.*

(Frost, 2007, s. 165)

Fordelen ved å la elevene ta utgangspunkt i sine egne opplevelser vil føre til at de utvikler en kobling mellom konkrete opplevelser og abstrakte konsepter som er derfor er viktig i algebra. (ibid).

2) Forståelsen av likhetstegnet:

Elever har erfaring med likhetstegnet «=» fra aritmetikken, og kjenner tegnet som en kommando for å utføre en operasjon enn å se på uttrykket som et symmetrisk forhold mellom venstre og høyre siden av likhetstegnet. (Russell, O'Dwyer & Miranda, 2009). Forståelsen elevene har av likhetstegnet fra barneskole er at når symbolet «=» dukker opp så skal man «gjøre» noe eller «gi» noe, noe som fører til at følgende uttrykk gir problemer for elever:

- 7 = 3+4: Elever har vanskeligheter for å akseptere dette (Herscovics & Linchecski,1994), siden skrivemåten er forskjellige fra det elevene allerede kjenner til. At det ikke er noe spørsmål på venstre side og ingen svar på høyre side (Russell, O’Dwyer & Miranda, 2009), da elevene er vant med formen 3+4=7.
- 3 = 3: Elevenes respons på et slik uttrykk er at det kan betyr 6-3=3 eller 7-4=3, på grunn av at elevene ser på likhetstegnet som «å gjøre noe signal». (Kieran, 1981).
- 4+5=3+6: Elevenes respons på et slik uttrykk er at de vil dele opp uttrykket i to problemer og løse hver side individuelt, 4+5 = 9 og 3+6 = 9. (Herscovics & Linchecski,1994). Dette fordi elevene forventer at det skal være et svar etter «=» tegnet og ikke et nytt problem. (Kieran, 1981).
- At man kan addere og subtrahere samme tall på begge sider av et likhetstegn (Russell, O’Dwyer & Miranda, 2009).

Fra artikkelen «*Concepts associated with the equality symbol*» tyder det på at elever på high school (den videregående skole) ser på likhetstegnet som et signal på å gi et svar. At det altså skal utføres en operasjon på venstre side, og resultatet skal føres på høyre side av symbolet. (Kieran, 1981). Det at elevene fokuserer på at svaret skal stå på høyre side av likhetstegnet, kan gi et problem når de så må løse algebra ligninger. Følgende uttrykk som $3x + 5 = 26$, vil bli godtatt da det er et svar på høyre side, og dette vil da passe inn med elevenes forståelse. Men med engang man har ukjent på begge sider av et likhetstegnet, som $3x + 5 = 2x + 12$, vil det bli en konflikt med det elevene har forstått. (Kieran, 1981). For at elevene skal få en forståelse for likhetstegnet, så mener Kieran (1981) derfor at konseptet om ligninger må introduseres på aritmetikk, hvor én starter med en ligning med bare tall og deretter gradvis gjør små endringer som videre fører til at man ender opp med den samme ligningen hvor et av tallene nå er erstattet med en bokstaven. (Se figur 2.6).

The next step, introducing the concept of equation, involved taking one of the student's arithmetic identities, e.g.,

$$7 \times 2 - 3 = 5 \times 2 + 1$$

and hiding any one of the numbers. The hiding was done at first by a finger:

$$7 \times \quad - 3 = 5 \times 2 + 1,$$

then by a box:

$$7 \times \square - 3 = 5 \times 2 + 1,$$

and finally by a letter:

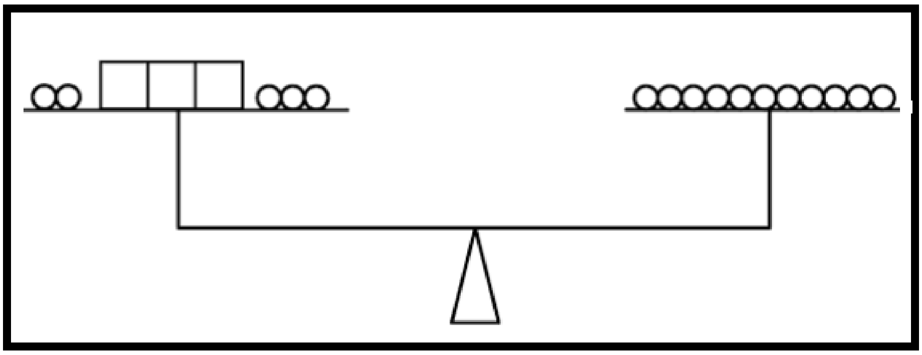
$$7 \times a - 3 = 5 \times 2 + 1.$$

Thus an equation was defined as

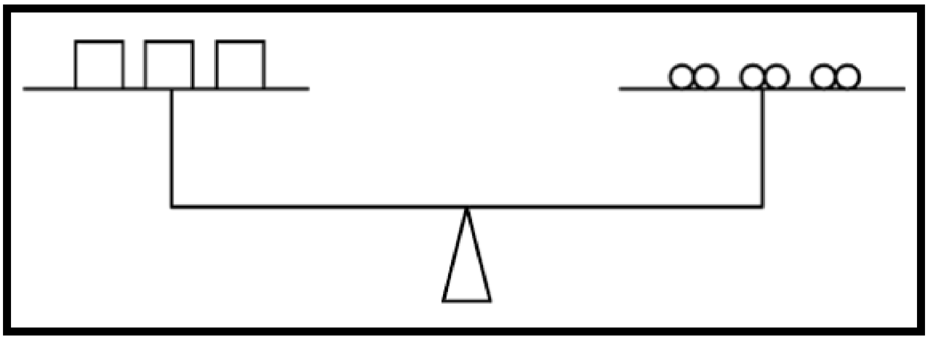
AN ARITHMETIC IDENTITY WITH A HIDDEN NUMBER.

Figur 2.6: Concepts associated with the equality symbol. (Kieran, 1981, s.322)

Når elever blir introdusert for ligning er det viktig at elevene har en forståelse for at likhetstegnet («=») betyr at uttrykkene på venstre side og høyre side har den samme verdien. Det er dette som er hindringen for elever når de skal løse ligninger, da de er vant til at likhetstegnet betyr at det følgende er svaret. (Frost, 2007). Frost (2007) nevner en annen metode man kan ta i bruk når man introduserer ligninger for elevene, slik at de får en bedre forståelse for bruken av likhetstegnet, og hvilken operasjoner som kan brukes ved å ta i bruk vektskål prinsippet (balance scale). Likhetstegnet representerer midtpunktet på vektskålen, om vekten er i balanse å man legger til en gjenstand i skålen på ene siden av vektskålen må man også legge en lik gjenstand med samme vekt i den andre skålen på den andre siden for at vekten skal komme i balanse igjen. Ved å legge til og ta vekk en masse fra begge sider av vektskålen vil elevene utvikle et konsept for likheten, og en strategi for å løse med hensyn på den ukjente. (Frost, 2007). Et eksempel Frost (2007) tar i bruk i artikkel sin er hvordan man kan ta i bruk vektskål prinsippet for å løse ligningen $3x + 5 = 11$.



Figur 2.7a): Bruk av vektskål prinsippet for å løse ligningen 3x+5=11 (Frost, 2007, s. 166)



Figur 2.7b): Bruk av vektskål prinsippet for å løse ligningen 3x+5=11 (Frost, 2007, s. 166)

På venstre siden av vektskålen har man tre bokser som representerer den ukjente x'en med 5 baller, dette skal da være lik høyre side som består av 11 baller. (figur 2.7a). For å få de ukjente alene må vi derfor fjerne fem av ballene fra begge sidene for at vekten fortsatt skal være i balanse (figur 2.7b). Dette skal da representere prosessen hvor vi subtrahere lik verdi fra begge sider av likhetstegnet. På denne måten ser vi at en boks veier like mye som to baller, og har da funnet ut at verdien for den ukjente er 2.

3) Regneoperasjoner og bruk av parenteser:

Et område fra aritmetikken som kan påvirke elevenes utregning i algebra er bruken av parenteser ved bruk av flere regneoperasjoner. Elever bruker vanligvis ikke parenteser i utregning innenfor aritmetikk, da de har en oppfatning at rekkefølgen av operasjonene avgjør hvilken beregninger som skal utføres (Booth, 1988), og gjør da utregningen fra venstre til høyre. (Herscovics & Linchecski,1994). Undersøkelse gjort av Herscovics & Linchecski (1994), hvor de spurte noen elever om å gi svar på følgende to oppgaver:

- $5 + 6 * 10 =$
- $8 * (5 + 7) =$

Resultatet fra den første oppgaven svarte hele 77% av elevene at svaret blir 110, da de hadde addert først for så å multiplisere. I og med at de gjør utregningen fra venstre til høyre, fører dette til at elevene adderer først, og deretter multipliserer. Så slik prioritering mellom regneoperasjonene er viktig i aritmetikk, med det er ikke alltid at alle elevene er bevist på dette om det ikke blir lagt vekt på. Dermed vil dette være en svakhet i aritmetikk kunnskapen som vil skape problemer i algebra. (Utdanningsdirektoratet, 2012).

I den andre oppgaven med parentes var det ingen som svarte feil, da de hadde kjennskap til prioritering. Under samtale med disse elevene kom det fram at de hadde brukt metoden «BOMDAS» (parentes først, deretter multiplikasjon/divisjon og tilslutt addisjon/subtraksjon), dette på grunn av parentesen som var i oppgaven. I det første uttrykket hvor det ikke var noen parentesers, så kommer ikke elever på at de kunne sette inn parenteser for så å bruke «BOMDAS» metoden, siden elevene ikke hadde den ideen. Men gjennom samtale om framgangsmåten i den andre oppgaven klarte Herscovics & Linchecski (1994) og få elevene til å bruke «BOMDAS» metoden på første oppgaven selv om det ikke var noe parenteser der. Elevene klarte dermed å rette opp feilen sin, og svarte korrekt på den nye utforingen de ble gitt: $6 + 5 * 4 + 7 * 3 =$. Dermed kan man gjennom riktig kommunikasjon få en innsikt i hvordan elevene tenker (Skott, Jess & Hansen, 2011), og få dem også til å reflektere og knytte ny kunnskap opp mot tidligere kunnskap. (Woolfolk, 2004).

2.4 Diagnostiske undervisning

En måte å få innsikt i hvilken feil og misoppfatninger elevene har, er ved å bruke diagnostisk undervisning. (Brekke, 2002). Undervisningen vil da bli lagt opp slik at elever møte på problemer som tydeliggjør misoppfatninger de har, slik at det skaper en kognitiv konflikt hos dem. Eneste måten å løse denne konflikten på er gjennom diskusjon og refleksjon, slik vil misoppfatninger bli oppklart. Og det viser seg at det har en utdanningseffekt ved å ha slik konfliktdiskusjon med elevene. (Brekke & Rosèn, 1996). Brekke (2002) nevner at gjennom å ha diagnostisk undervisning kan man trekke fram følgende faser:

1) Identifisere misoppfatninger og delvis utviklede begreper hos elevene.
2) Tilrettelegge undervisningen slik at eventuelle misoppfatninger eller delvise begreper blir framhevet. En kaller dette å skape en kognitiv konflikt.

3) Løse den kognitive konflikten gjennom diskusjoner og refleksjoner i undervisningen.
4) Bruke det utvidede (eller nye) begreper i andre sammenhenger.

Man kan da gjennom diagnostisk oppgaver skape en slik konfliktdiskusjon hos elevene.

2.5 Diagnostiske oppgaver

Diagnostiske oppgaver er oppgaver man kan bruke før en undervisningsøkt som Brekke (2002) nevner, og oppgavene skal da avsløre misoppfatninger elever kan ha (Russell, O'Dwyer & Miranda, 2009). Dermed vil hovedmålet med å bruke diagnostiske oppgaver før en undervisning være følgende:

- *Å oppdage hvilke tanker de har om ulike begreper,*
- *Å bli kjent med de vanskene som er knyttet til disse begrepene,*
- *Å hjelpe læreren med å planlegge undervisningen.*

(Brekke, 2002, s. 16).

Typiske oppgaver kan være flervalgsoppgaver (med flere mulige svaralternativer) hvor et svar må være riktig, et svar som kommer av misoppfatninger, og svar som er ukorrekt. (Russell, O'Dwyer & Miranda, 2009). Svaret som representere misoppfatninger, skal da måle en type misoppfatning, mens den ukorrekte svaret representere bare en annen type feil (Russell, O'Dwyer & Miranda, 2009), altså feil som elever tilfeldigvis gjør som regnefeil. (Botten, 2003).

m is a positive whole number. How many possible values can 10*m* have?

Ⓐ 5

Ⓑ 10

Ⓒ 20

Ⓓ Infinitely many

Figure 1. Example of a concept-of-a-variable item. Option D is the correct response; Option B is the misconception response.

Figur 2.8. Eksempel på en diagnostisk oppgave fra artikkelen til Russell, M., O'Dwyer, L. & Miranda, H. (2009)

På figuren 2.8 ser vi et eksempel på en typisk diagnostisk oppgave fra artikkelen til Russell, O'Dwyer & Miranda (2009), hvor svaralternativ D er korrekt svar, mens svaralternativ B er svaret med misoppfatninger. Misoppfatninger elevene har som velger alternativ B har en tendens til å ignorere variabelen å fokusere på tallet ved siden av (10 i dette tilfelle), mens alternativ A og C er ukorrekte tilfeldige tall. (ibid).

Resultatene fra diagnostiske oppgaver kan ifølge Brekke (2002) brukes:

- *Å identifisere og framhevemisoppfatninger som elever har utviklet, også uten at det trenger å ha vært noen formell undervisning i det en vil undersøke,*
- *Å gi læreren informasjon om løsningsstrategier elevene bruker for ulike typer av oppgaver,*
- *Å rette undervisningen mot å framheve misoppfatningene, for på den måten å overvinne dem og de delvise begrepene,*
- *Å utvikle elevenes eksisterende løsningsstrategier,*
- *Å måle hvordan undervisningen har hjulpet elevene til å overvinne misoppfatningene ved å bruke de samme oppgavene både før og etter undervisningssekvensen.*

(Brekke, 2002, s. 16).

2.6 Generalisering

I artikkel «*Purpose in School Algebra*» av Alan Bell (1995) kommer det fram at meningen med skolealgebra er å (1) generalisering, (2) formering og løse likninger og (3) jobbe med funksjoner og formler. Punkt (2) og (3) kan ligne på de tre faser som blir brukt i algebraisk situasjoner tatt opp rapporten fra Utdanningsdirektoratet (2012), som er at problemet blir matematisert, så manipulert og tilslutt tolket. Eksempel fra Heldagsprøve 9.trinn Våren 2016 lyder et problem: *«Sindre og bestefaren hans er til sammen 102 år. Bestefar er fem ganger så gammel som Sindre».* Å matematiserer problemet vil i denne sammenheng bety å oversette problemet fra ord til matematiske symboler. Altså vil matematiseringen være at Sindre er x år, og siden bestefars alder er fem ganger Sindres alder, vil bestefar være 5*x år. Da blir oversettingen: x + 5*x = 102. Dette er den første fasen, deretter over til fase 2 som innebærer manipulering, altså løse problemet. Løser vi ligningen over, får vi:

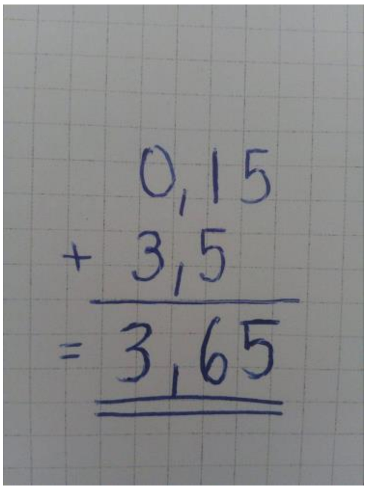
$$6 * x = 102$$

$$x = \frac{102}{6} = 17$$

Tilslutt siste fase i problemløsningen som er tolkning. Etter at problemet er løst, må man konkludere hva det er man har kommet fram til. I dette problemet vil tolkingen være at Sindre som representere x år, vil være 17 år, og dermed vil alderen til bestefar være $17 * 5 = 85$. Slik er det da algebra skal brukes i skolen.

Nøkkelen i å forstå algebra ligger i begrepet generalisering, dette ordet blir nevnt i flere artikler, men mest i boken *Å lære algebraisk tenkning* av Mason, Graham og Johnston-Wilder (2011). Gjennom å generalisere noe generelt blir elevene tvunget til å finne en forbindelse mellom tall og algebra ved å lete etter et mønster. (Kongelf, 2015), altså dette er en måte og knytte samme aritmetikk og algebra sammen.

Hva innebærer begrepet generalisering? Mason, Graham og Johnston-Wilder (2011) tar opp begrepet generalisering og spesialisering, noe som er viktig i forståelsene av algebra. Dette er evner barn har de fra de er små, og som kan tas i bruk i undervisningen siden dette er evner som er gode for å kategorisere og gi mening til kunnskapen. Eksempelvis når små barn ser dyr som flyr, så vil de kalle det generelt for «fugl». Da sier vi at dette barnet har generalisert. Men når barnet klarer å skille hvilken type fugl dette er, eksemplet at dette er en «undulat», da har barnet spesialisert seg ved å identifisert et spesiell objekt med et ord. I aritmetikk blir generalisering blant annet brukt for å få en forståelse for hvordan man legger sammen tall, og på denne måten trenger elevene ikke og pugge alle svarene man kan få når man legger samme forskjellige type tall. Men når elevene har forstått hvordan tallsystemet fungerer, med tanke på enerplass, tierplass, osv., hvordan man låner og regner med rest, da vil elevene klare og legge samme tall som 0,15 med 3,5 (figur 2.9). Altså man genererer en generell uttrykk/formel for en situasjon.



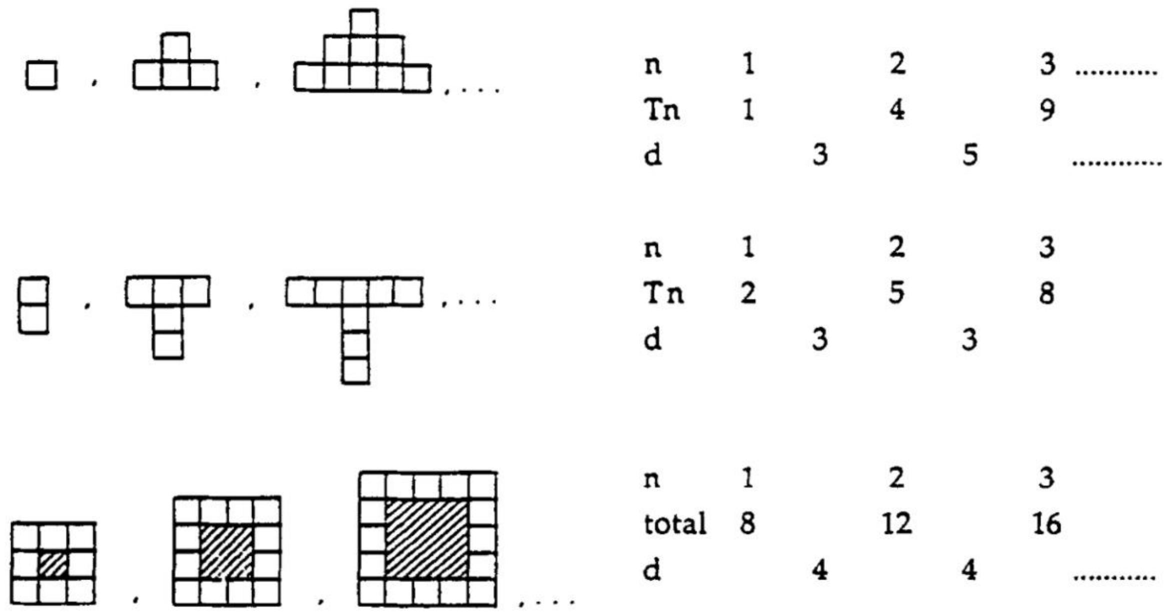
Figur 2.9. Eget eksempel på hvordan utføre addisjon

Alan Bell (1995) definer da generalisering som en prosess hvor man utforsker en gitt situasjon hvor man organiserer dataene systematisk for så å gjenkjenne forholdet og mønsteret i dataene, som fører til at man tilslutt kan uttrykke det verbalt og symbolsk. Oppgaver som man kan relatere med denne definisjonen er tallmønster eller figurtall, som er kompetansemål i fagene 2P og 2T.

- *…, finne mønstre og struktur i ulike situasjonar og beskrive samanhengar ved hjelp av matematiske modellar.*
- *Utforske matematiske modellar, samanlikne ulike modellar og vurdere kva for informasjon modellane kan gje, …*
- *Gjere målingar i praktiske forsøk og formulere matematiske modellar på grunnlag av observerte data*

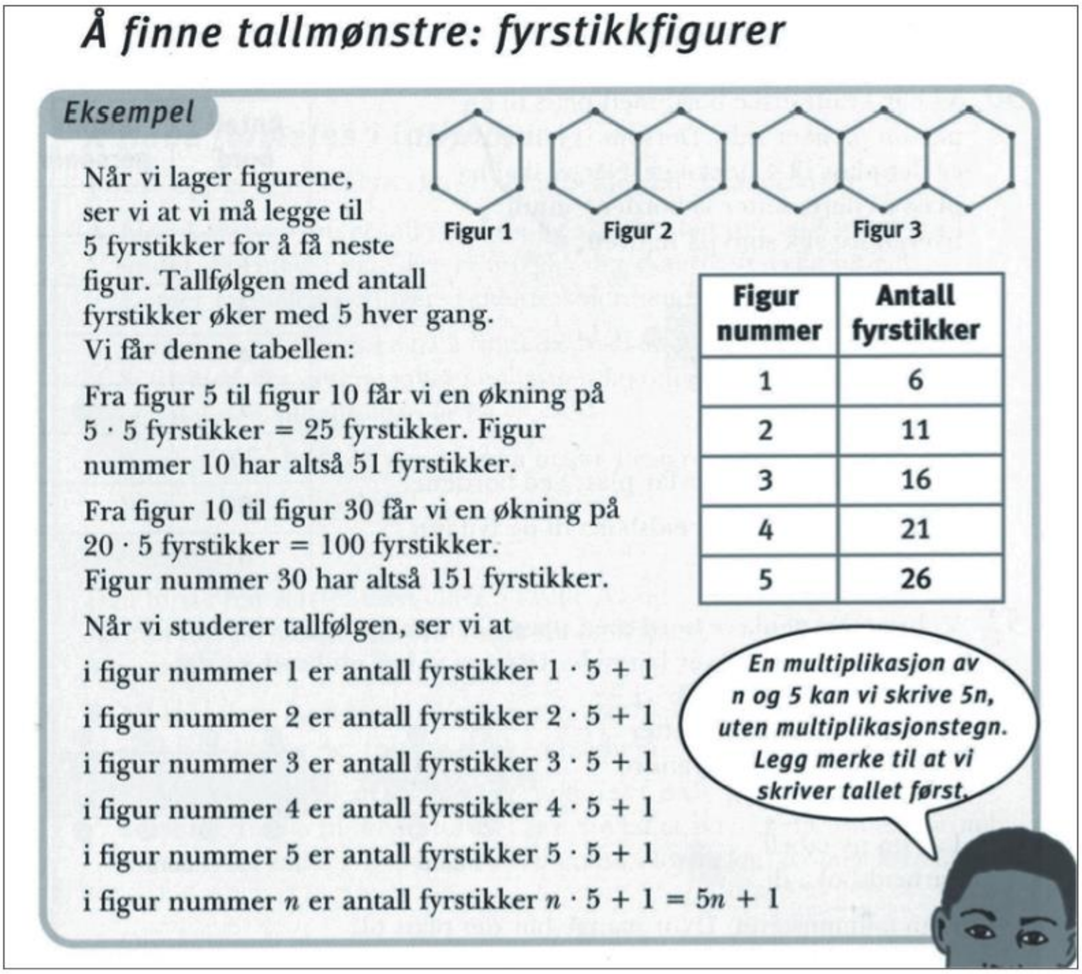
(UDIR, 2013).

Dermed er viktig å introduserer generalisering av tallmønster (figur 2.10 og 2.11) som en begynnelse for algebra emnet, da algebra er generalisering av aritmetikk.



Figur 2.10: Eksempel på tallmønster oppgave fra artikkelen til Bell, A (1995)

Etter å ha lest Kongelf (2015) sin rapport så bygger ikke introduksjonskapitlene i algebra videre på tallære, noe som fører til at algebra blir sett på som noe isolert og noe helt annet enn det elevene har lært tidligere når de har arbeidet med tall (aritmetikk). I eksemplene som blir brukt i lærebøkene så tas det i bruk bokstaver med engang, uten at elevene helt har forstått hvorfor man må ta i bruk bokstaven. Et eksempel fra en lærebok Kongelf undersøkt (se figur 2.11) er brukt som en slags oppsummering av algebraisk ide på slutten av kapittelet. I dette eksempelet er det gitt 3 figurer som er laget av gitt antall fyrstikker. Målet med oppgaven er å finne et uttrykk for hvor mange fyrstikker som må til for å lage den n-te figuren. Dermed må elevene i denne oppgaven finne et mønster mellom figurene i de gitte figurene. Når elevene da oppdager hvilke mønster det er mellom figurene, og hva som endrer seg / varierer, da kan de trekke inne bokstaver som representere denne variabelen for å uttrykke situasjonen symbolsk, slik Bell (1995) definerer generaliseringsprosessen. Dermed må elevene i slike situasjoner ta i bruk bokstaver i regningen sin som en konsekvens for å kunne sette opp et generelt uttrykk (Kongelf, 2015). Dette vil føre til at elevene vil få en bedre forståelse for bruken av bokstaver i algebra, og at den ikke skal representere en konkret ting (Booth, 1988). På denne måten vil elevene få en bedre forståelse for variabelbegrepet som da er et nytt konsept i algebra sammenlignet med aritmetikk.



Å finne tallmønstre: fyrstikkfigurer

Eksempel

Når vi lager figurene, ser vi at vi må legge til 5 fyrstikker for å få neste figur. Tallfølgen med antall fyrstikker øker med 5 hver gang. Vi får denne tabellen:

Figur 1 Figur 2 Figur 3

Figur nummer	Antall fyrstikker
1	6
2	11
3	16
4	21
5	26

Fra figur 5 til figur 10 får vi en økning på $5 \cdot 5$ fyrstikker $= 25$ fyrstikker. Figur nummer 10 har altså 51 fyrstikker.

Fra figur 10 til figur 30 får vi en økning på $20 \cdot 5$ fyrstikker $= 100$ fyrstikker. Figur nummer 30 har altså 151 fyrstikker.

Når vi studerer tallfølgen, ser vi at

i figur nummer 1 er antall fyrstikker $1 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 2 er antall fyrstikker $2 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 3 er antall fyrstikker $3 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 4 er antall fyrstikker $4 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 5 er antall fyrstikker $5 \cdot 5 + 1$

i figur nummer n er antall fyrstikker $n \cdot 5 + 1 = 5n + 1$

En multiplikasjon av n og 5 kan vi skrive 5n, uten multiplikasjonstegn. Legg merke til at vi skriver tallet først.

Figur 11. *Eksempel fra Tetra (Hagen m.fl., 2006, s.99)*

Figur 2.11: Fra introduksjon av algebra i matematikkbøker brukt på ungdomstrinnet i Norge. (Kongelf, 2015)

3. Metodologi

Metoder jeg har valgt å bruke i forskningen min for å samle inn data er i hovedsak testoppgaver og intervju, altså en form for kombinasjon av kvalitative og kvantitative metoder. Men fokuset vil være besvarelsene fra den skriftlige testoppgaven, og intervju delen vil være en støtte spiller for å få en bekreftelse på noen av tankegangene i oppgavene. Med tekstoppgavene ønsker jeg meg en oversikt over eventuelle generelle grunnleggende ferdigheter og/eller andre misoppfatninger elevene kan ha. Resultatene fra denne testen ble ført i Excel som riktig, ubesvart og feil. Dermed fikk jeg en oversikt over hvilke oppgaver som vil være interessant å spørre om i intervju delen. For å kunne få et inntrykk av hvordan elevene hadde tenkt på noen av oppgavene som ble løst feil, var det derfor nødvendig med en liten intervju for noe av disse oppgavene.

3.1 Melding til NSD

Planen var å utføre tekstoppgaver i en klasse på videregående skole, helst anonymt uten å samle inn noe form for personopplysninger. Og ifølge NSD sine nettsider er det mulig å utføre forskning uten at det trenger å være meldepliktig, om hele prosessen er anonym og at ingen sensitive data kan knyttes opp mot personidentifiserende opplysninger (nsd.uib.no), og dette kan gjøres som følgende:

- *Ved intervju og observasjon registreres data kun i form av notater (ikke opptak). Man må da påse at det ikke registreres noen navn eller personidentifiserende bakgrunnsopplysninger i datamaterialet.*
- *Spørreskjemaer innhentes i papirform, uten navn og sensitive personopplysninger.*

I og med at jeg ikke hadde noen klasse jeg underviste i selv, måtte jeg spørre noen videregående skoler om å kunne låne en R matematikk klasse. Skolene jeg spurte hadde jeg enten gått på selv, vært i praksis hos eller vikariert for. I tilfelle jeg ikke fikk lånt en klasse, måtte jeg ha en annen plan, og den andre planen var at jeg da måtte finne noen videregående elever gjennom sosiale media / internett. Ved å samle inn data på denne måten ville det medfører at jeg også måtte samle inn personlige opplysninger som navn og epost adresse. Da vil det være mulig å spore tilbake til hva de forskjellige elevene hadde svart på testoppgavene. På grunn av denne nødplanen, og for å være på den sikre siden, så sendte jeg derfor inn en søknad til NSD om at jeg kom til å utføre en forsking som vil være meldepliktig og at personligopplysninger ville bli makulert etter at prosjektet var avsluttet.

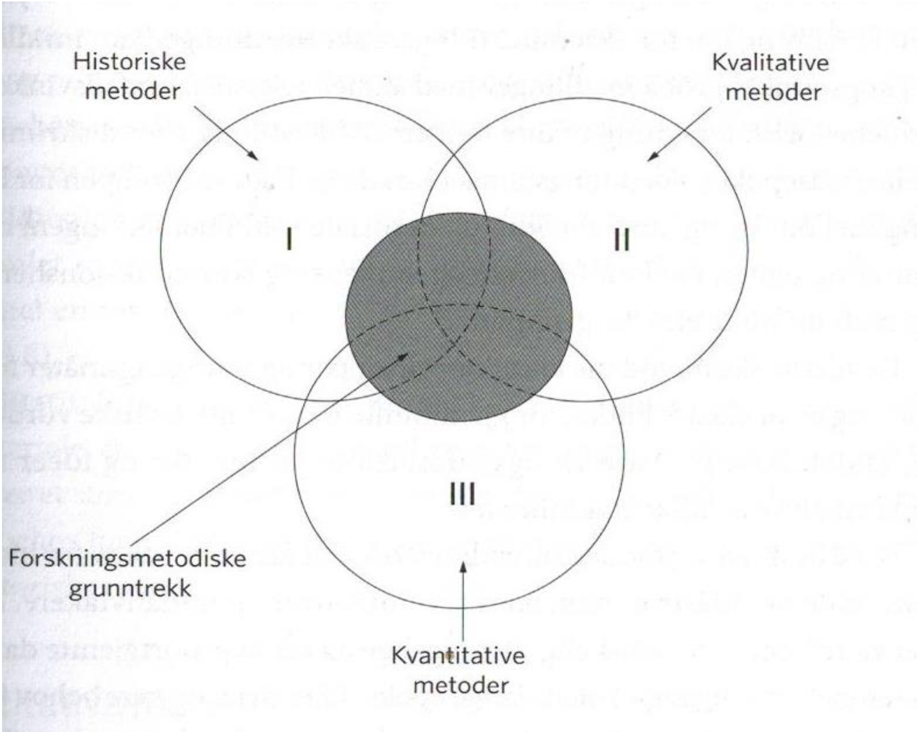
Men det som skjedde var at jeg fikk låne en R1 klasse med 29 elever som jeg ikke kjente, og jeg utførte undersøkelsen på papirform slik at jeg fikk tilbake arkene med bare svarene uten noen navn eller andre opplysninger på. På denne måten kunne ikke svarene kobles tilbake til hvem som hadde svarte hva, så innsamlingen min ble dermed helt anonymisert slik jeg hadde planlagt det.

3.2 Forskningsmetode

I første rekke er det kvaliteter ved metodene som gjør at en undersøkelse kan kalles forskning – og vitenskap. Forskningsmetodene omfatter formulering av stringente problemstillinger, framgangsmåter for innhenting av valide og pålitelige data, og prinsipper for analyse og tolkning av data.

(Befring, 2015, s. 36)

I «*Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*» av Edvard Befring (2015) blir tre sentrale forskningsmetoder presentert som hovedkategorier av forskningsmetoder, og det er: historiske, kvalitative og kvantitative metoder. Se figur 3.1, Hovedkategorier av forskningsmetoder.



Figur 3.3:Hovedkategorier av forskningsmetoder

1. Historisk metode

Historisk metode handler om hvordan man finner relevante kilder, da historisk orientert forskning skal tolke hva som har skjedd, og beskrive hovedtrekk i utviklingen som har skjedd. Denne metoden har klare prinsipper og måter for hvordan man finner brukbare kilder, og hvordan man gjennomfører kildekritisk vurderinger og kildetolkning og innholdsanalyse av forskjellige dokumenter. (Befring, 2015). De tre sentrale momentene for kildevurdering:

I. *Å vurdere om kilden baserer seg på direkte og primære observasjoner og opplevelser, eller om det er sekundær ved å være en gjenfortelling.*

II. *Fokus på budbringerens kompetanse og troverdighet.*

III. *Kontroll og nyanserende bidrag fra andre, samtidige budbærere.*

Befring, 2015, s. 106 – 107

2. Kvalitative og kvantitative metoder

Hovedforskjellen mellom kvalitative og kvantitative metodene er graden av fleksibilitet, hvor kvantitative metoder er lite fleksibel. (Christoffersen & Johannessen, 2012). Både Befring (2015) og Christoffersen & Johannessen (2012) nevner at det er mulig å kombinerer disse to metodene i en og samme undersøkelse, da det kan være behov for både kvalitative og kvantitative data innsamlinger i selve undersøkelsen.

Kvantitative metoder går ut på å bruke objektive målinger, tallmateriale og statistikk, for å kunne framskaffe generell kunnskap. Som betyr at man skal kunne gi en allmenngyldig konklusjon ved å generaliserer fra et undersøkelsesutvalg. (Befring, 2015). Måten man kan skaffe seg datamaterialer på er ved å ha spørreskjema / oppgaver hvor alle deltagere blir stilt de samme spørsmålene i samme rekkefølge. Fordelen med dette er at det er mulig å sammenligne svarene fra alle deltagerne. (Christoffersen & Johannessen, 2012). For å kunne sammenligne dataene, må man bearbeide disse gjennom statistikk med å blant annet lage tabeller og grafer, beregne gjennomsnitt, variasjon og andre statistiske analyser.

Når man skal utforme et spørreskjema er det viktig at man på forhånd vet hva man vil spørre om, og utgangspunktet for selve skjemaet vil derfor være undersøkelsenes problemstilling da det er dette vi ønsker å finne mer ut av. (Christoffersen & Johannessen, 2012). Spørsmålene man bruke i undersøkelsen må være meningsfulle, og ikke for mange av dem. I tillegg må de være korte og presise, og svaralternativene må være tydelige. (Befring, 2015). Befring (2015), Christoffersen & Johannessen (2012) nevner også at spørreskjemaet må være utprøvd ved pilotering eller en prestudie. Dette innebærer at skjemaet testes ut på noen få utvalgte mennesker slik at de får kommentert hvordan det var å gjennomføre testen.

Kvalitative metoder er mer fleksible, da det tillater mer spontanitet og åpne spørsmål, hvor spørsmålene kan variere fra deltager til deltager. Deltagere har her da mulighet til å svare med utfyllende og detaljert med egne ord. (Christoffersen & Johannessen, 2012). Metodene som blir brukt er direkte observasjoner og personlige intervjuer for å hente inn datamaterialer, men også skriftlige essaysvar, dagbøker, tegninger og lydopptak er eksempler på andre form for kvalitative metoder. (Befring, 2015). Denne metoden er relevant om man ønsker innsikt og forståelse for selve problemet. (ibid).

Kvalitativ intervju er dermed den mest brukte metoden innenfor kvalitative metode, da man får mulighet til å få fyldige og detaljerte beskrivelser. (Christoffersen & Johannessen, 2012). Man kan utføre forskjellige type intervjuer; ustrukturert, strukturert eller semistrukturert intervju. Ustrukturert intervju vil si et intervju med fri samtale som tar utgangspunkt i tema og generelle spørsmål (Befring, 2015), mens et semistrukturert intervju tar utgangspunkt i et intervjuguide hvor spørsmålenes rekkefølge varierer (Christoffersen & Johannessen, 2015). Strukturert intervju innebærer at man tar i bruk en detaljert intervjuguide med fastlagte spørsmål (Befring, 2015), hvor rekkefølgen av spørsmålene er fastsatte. (Christoffersen & Johannessen, 2012). En intervjuguide er en liste over temaer og generelle spørsmål som blir gjennomgått i løpet av intervjuet. (ibid).

3. Forskningsmetodiske grunntrekk

Sammen danner disse tre forskningsmetodene en samlende grunntrekk (figur 3.1) som kan gi:

- *En åpen og kreativ forskningsprosess: som kan bidra faglig fornyelse*
- *Systematikk i gjennomføringen: med presisjon og nøyaktighet*
- *Entydige problemstillinger: som kan uttrykkes i form av generelle og spesifikke forskningsformål og forskningsspørsmål, eller som hypoteser*
- *Gode forskningsdata som er valide og reliable for å undersøke de historiske eller empiriske problemstillingene som står i fokus*
- *Troverdig tolkning og analyse av data: som kan bestå av dokumentanalyse, kvalitativ analyse eller statistiske beskrivelser og analyser*
- *Vilkår for etterprøving og replikasjon: med muligheter for å kunne reprodusere resultatene gjennom nye undersøkelser*
- *Systematisk kontroll av feilfaktorer: som innebærer å begrense både tilsiktede og utilsiktede feil som kan oppstå på alle trinn i et forskningsarbeid*
- *Utforming av konklusjoner: med svar på problemstillinger, refleksjoner og kritisk vurderinger av anvendte forskningsmetoder*

(Befring, 2015, s. 41)

3.3 Mine valg av forskningsmetoder

Problemstillingen min for denne oppgaven er:

Hva er årsaken til at elevene syns algebra er vanskelig?

Er det hull i grunnleggende kunnskap og/eller misoppfatninger hos elever på videregående skole som gjør at algebra er en vanske for dem?

For å svare på problemstillingen min valgte jeg både kvalitativ og kvantitativ metode. For å få et bilde over hvilke misoppfatninger elever har i algebra valgte jeg derfor å utforme noen testoppgaver som skulle bli testet i en klasse på videregående skole. Gjennom den kvantitative delen fikk jeg samlet inn datamaterialer som jeg kunne analyseres og uthente opplysninger om noen misoppfatninger elever kan ha. Fordelen med dette er at det er mulig å sammenligne svarene fra alle deltagerne, og finne ut hva flertallet har problemer med. (Christoffersen & Johannessen, 2012). Basert på misoppfatninger jeg har skrevet om i teoridelen (kapittel 2) så er misoppfatninger jeg ser sitter hos elevene da:

- Misoppfatninger i ferdigheter fra aritmetikken som er: prioritering av regneoperasjoner, brøk og likhetstegnet
- Forståelse for variabel
- Generalisering og oversetting fra test til algebraiskuttrykk.

I tillegg valgte jeg å ha en kvalitativ del med i oppgaven min, ved å intervjue noen elever for å få en forklaring på hvordan elevene løste de oppgavene som flertallet hadde gjort feil på. Dette på grunn av at det var en del besvarelser hvor elever bare hadde skrevet ned svarerne uten noe mellomregning, slik at det ikke kom fram hvordan elevene hadde tenkt for å komme fram til svarene sine. Som da Christoffersen & Johannessen (2012) også nevner så vil man gjennom intervju kunne få mulighet til å få mer fyldig og detaljerte beskrivelser.

Ved å ta i bruk testoppgaver fikk jeg derfor en oversikt over hvilken oppgave elever hadde problemer med. Og siden hver av oppgavene representerte en misoppfatning så fikk jeg derfor også vite hvilken misoppfatninger elevene hadde om det gjaldt grunnleggende ferdigheter fra aritmetikk og om det var innenfor prioritering, brøk, likhetstegn eller variabelaspektet. I tillegg til at jeg gjennom noen intervjuer fikk vite hvordan elevene hadde tenkt på oppgaver de hadde problemer med, altså få et bilde av framgangsmåten til misoppfatningene deres.

Testoppgavene ble utført i en R1 klasse på en tilfeldig valgt videregående skole, da jeg fikk låne en klasse jeg ikke kjente fra før. Siden grunnlaget for valget av tema for denne oppgaven var resultatene fra rapporten TIMSS Advanced (Grønmo, Hole & Onstad, 2016), hvor det kom fram at elever på videregående (R2 matematikk nivået) gjorde det dårlig i algebra i forhold til andre internasjonale land. Dette gjorde at jeg nettopp ville jeg teste ut elevenes algebra kunnskapene for elever som starter på R1 matematikk kurset, for å undersøke om elever som velger å fordype seg i matematikk (R matematikk) virkelig har problemer innenfor algebra på grunn av tidligere misoppfatninger.

Strategien min var derfor å ta i bruk resultatene fra analysen av testoppgaven, noen av intervjuene og knytte erfaringene opp mot teorien. Ikke alle oppgavene i testoppgaven blir brukt i kapittel 5 analyse delen, men bare oppgaver som belyste misoppfatningene jeg oppdaget elevene hadde. I tillegg valgte jeg å ta i bruk oppgaver som hadde en detaljert mellom regning (fra selve testoppgaven og noen fra intervjuet) for å få fram hvordan elevene hadde kommet fram til det feile svaret. Siden utførelsen av testoppgavene var helt anonym, noe som gjorde at jeg ikke visste hvem som hadde svart hva, førte dette til at jeg ikke kunne plukke ut de riktige elevene til intervjuet. Men gjennom de få intervjuene jeg hadde med eleven fikk jeg vite fremgangsmåten til noen av oppgavene som hadde feil svar, men som sagt ikke for alle.

3.4 Utforming av test oppgavene

Den kvantitative delen av undersøkelsen min var å hente data gjennom testoppgaver. Så når man skal lage slike oppgaver er det viktig å reflektere over hvilke opplysninger man skal spørre om, og den må derfor utformes slik at det gir svar på problemstillingene. (Christoffersen & Johannessen, 2012). Siden jeg fokuserer på å finne ut hvorfor algebra er vanskelig for elevene, om det er anvendelse av grunnleggende kunnskaper eller andre misoppfatninger, måtte jeg derfor forme et oppgavesett med oppgaver som måtte belyse dette. Siden jeg ønsket å finne ut om grunnleggende kunnskap/ferdigheter var en årsak til at algebra er vanskelig for elever på videregående skole, tok jeg utgangspunkt i læreplanen for 10.trinnet for å få en oversikt over hva elever skal være kjent med i algebra før de starter videre med algebra på videregående skole. Jeg fant dermed noen oppgaver som skulle vise om elever hadde noe problemer med grunnleggende ferdigheter i aritmetikk som regnegneoperasjon med bare tall og forenkle brøk uttrykk med rene tall. Trekker så denne ferdigheten videre slik at elevene skal vise hvordan de anvender disse tilsvarende ferdighetene på oppgaver med algebraiske uttrykker med både tall og bokstaver. Det skal være mulig for elevene å løse disse oppgavene med tanke på at det baserer seg på kunnskap elever skal ha etter at de er ferdig med 10. trinnet. Oppgavene og ideer er derfor hentet fra KIMS – prosjekter for 10 trinnet og sinus 1P den laveste matematikk emnet på videregående skole.

Siden det ikke finnes noe fasit på hvor mange spørsmål man skal ha med i undersøkelsen, men nok til å kunne svare på problemstillingen (Christoffersen & Johannessen, 2012), så besto den endelige testoppgaven min av 5 oppgaver med 23 del oppgaver. Det var oppgaver med prioritering av regneoperasjoner (addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon) både på rene tall og algebraisk uttrykker, forenkle brøkuttrykk og potensuttrykk med rene tall og algebraiske uttrykker, fra tekst til algebra oppgaver og ligninger. Disse oppgavene ble utført på 29 elever som nettopp hadde startet med R1. Gjennom denne testen vil jeg derfor belyse at følgende problemer kan være årsak til at elevene kan ha vanskeligheter med algebra.

- Problemer med grunnleggende basiskunnskap fra aritmetikk, og om dette blir forfulgt i algebra. Som for eksempel prioritering av regneoperasjoner, potens regler, brøk
- Forståelsen for variabel og likhetstegnet med tanke på ligninger og algebra uttrykk
- Oversetting fra tekst til algebraisk uttrykk (generalisering)

3.5 Utforming av intervjuguide

Den andre delen av undersøkelsen gikk ut på å ha intervju med 4 av elevene som hadde tatt test oppgaven. Siden hele undersøkelsen var anonymisert visste jeg ikke hva disse elevene hadde svart i test oppgavene, dermed var valget av elever helt tilfeldige. Intervjuet ble på ca. på 20 – 30 minutter, hvor det som ble sagt ble notert ned skriftlig på grunn av anonymiteten. Jeg hadde en form for strukturert intervju som Christoffersen & Johannessen (2012) kaller det. Da jeg på forhånd hadde skrevet en intervjuguid på hvilke spørsmål jeg ville stille (se guiden i kap 8). I og med at jeg ikke visste hva disse elevene hadde svart på test oppgaven, måtte jeg be dem om å løse oppgavene på nytt, for å kunne spørre om hvorfor de hadde tenkt på denne måten.

Målet med et intervjuet er å gi elevene en større frihet til å kunne uttrykke seg enn det spørreskjemaet tillater. (Christoffersen & Johannessen, 2012). Og dette trengte jeg virkelig da det var noe svaralternativer elever hadde kommet med som jeg ikke helt klarte å forstå hvordan elever hadde kommet fram til. Gjennom intervjuet vil jeg kunne få en forståelse for hvordan elevens tankemåte kan være ved misoppfatninger.

3.6 Håndtering av resultatene

Jeg måtte bearbeide resultatene fra tekstoppgavene jeg fikk utført i en R1 klasse, som jeg var så heldig å få låne i og med at jeg selv ikke underviste. Det første jeg gjorde var å gjennomgå besvarelsene ved å rette testene og markere om oppgaven var riktig, galt eller ubesvart. Deretter ble disse resultatet ført i Excel hvor det for hver oppgave ble notert ned hvor mange som hadde fått «Riktig», «Feil» eller «Ubesvart» på oppgavene. På denne måten fikk jeg en fullstendig oversikt over resultatene fra hver enkelt oppgave. (Se figur 3.4). Dermed fikk jeg også regnet ut prosentandelen for hvor mange som hadde svart riktig, feil eller ikke svar på oppgaven i det hele tatt.

	Antall elever	29	Jente	12	Gutt	17	
a)		Totalt	%	Jente	%	Gutt	%
	R= Riktig	28	97	11	92	17	100
	U= Ubesvart						
	F= Feil	1	3	1	8		
	totalt antall	29	100	12	100	17	100
b)		Totalt	%	Jente	%	Gutt	%
	R= Riktig	29	100	12	100	17	100
	U= Ubesvart						
	F= Feil						
	totalt antall	29	100	12	100	17	100
c)		Totalt	%	Jente	%	Gutt	%
	R= Riktig	26	90	12	100	14	82
	U= Ubesvart						
	F= Feil	3	10			3	18
	totalt antall	29	100	12	100	17	100

Oppg 1 | Oppg 2 | Oppg 3 | Oppg 4 | Opp

Figur 3.4: Utsnitt av registreringen i excel fra oppg. 1

Da den første delen av registreringen var over, var det over til å analysere feilene elevene hadde gjort. Jeg måtte sortere feilene etter:

1) Om det var feil på grunn av at elevene var litt for raske med å løse oppgaven slik at det ble noen regnefeil, eller
2) Om det var en årsak bak feilen elevene hadde gjort. Feil som da er forårsaket av misoppfatning og misforståelse.

For hver av deloppgavene som hadde feil, ble det laget en liten tabell i et Word dokument med svar alternativene elevene hadde kommet med hvor det ble krysset ut om det enten var feil på grunn av 1) eller 2). Om feilen var av en årsak ble dette notert under tabell hva/hvordan elevene hadde løst oppgaven på. (Se figur 3.5 under).

Oppgave 1d)

RIKTIG SVAR: 100

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	244		x	2
2	92		x	1
3	116		x	1
4	284		x	2
5	180	x		1
6	108	x		1
7	356		x	1
8	114		x	1
9	-180		x	1

Grunn:

1) Fortegnsfeil
2) Potens regel.
   $(10-4)^2 = 20+8$. Tenkt: $(10-4)^2 = 10*2+4*2 = 20+8$
   $(10-4)^2 = 100-8$
   $(10-4)^2 = 100-16$
   $(10-4)^2 = 100+8$
   $-2^3 = 8$
   $3*(10-4)^2 = 300-8$
3) Regne rekkefølgen (Svar 9)
   $-2^3 + 3 = -5$. Lagt sammen og deretter multiplisert med parantesen.

Figur 3.5: Utsnitt av andre delene av andre delen av registreringen. Sortering av type feil, med notat på hvordan elevene hadde løst oppgaven.

Det nye opplysningene ble ført inn i en ny Excel ark, og dette gav meg en bedre oversikt over hvor mange som hadde gjort feil på grunn av regnefeil og hvor mange som hadde feil på grunn av en annen årsak. I tillegg fikk jeg også en oversikt over de forskjellige svar alternativene elevene hadde kommet med, som er interessant og se på. (Se figur 3.6 under).

Antall elever 29

a)	Totalt	%
R= Riktig	28	97
U= Ubesvart		
F= Feil 1)	1	3
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

d)	Totalt	%
R= Riktig	18	62
U= Ubesvart		
F= Feil 1)	2	7
F= Feil 2)	9	31
totalt antall	20	100

g)	Totalt	%
R= Riktig	18	62
U= Ubesvart		
F= Feil 1)	3	10
F= Feil 2)	8	28
totalt antall	29	100

b)	Totalt	%
R= Riktig	29	100
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

e)	Totalt	%
R= Riktig	27	93
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		
F= Feil 2)	2	7
totalt antall	29	100

c)	Totalt	%
R= Riktig	26	90
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		0
F= Feil 2)	3	10
totalt antall	29	100

f)	Totalt	%
R= Riktig	29	100
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

Oppgave 1c)

	Svar:	Antall	Prosent %	
1	-2	26	90	(Riktig svar)
2	-38	1	3	
3	38	2	7	

Oppgave 1e)

	Svar:	Antall	Prosent %	
1	a - b	27	93	(Riktig svar)
2	2 - b	1	3,5	
3	3a - b	1	3,5	

Oppgave 1g)

	Svar:	Antall	Prosent %	
1	$-8x^2+20x-12$	18	62,07	(Riktig Svar)
2	$-4x^2+12x-8$	1	3,45	
3	0	1	3,45	
4	$-8x^2+4x+4$	1	3,45	
5	$-4x+4$	1	3,45	
6	$4x^2-12x-12$	1	3,45	
7	$-8x^2+4x-12$	1	3,45	
8	$-8x^2+4x+12$	1	3,45	
9	$-4x^2-4x$	1	3,45	
10	12x	1	3,45	
11	$8x^2+20x+4$	1	3,45	

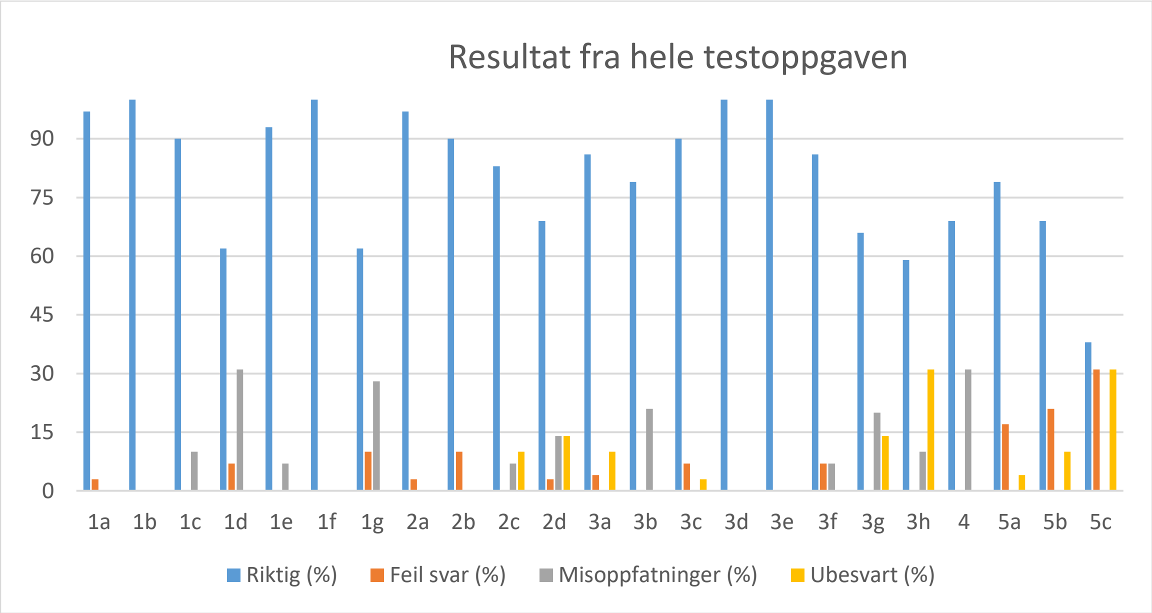
Oppgave 1d)

	Svar:	Antall	Prosent %	
1	100	18	62	(Riktig Svar)
2	244	2	7	
3	92	1	3	
4	116	1	3	
5	284	2	7	
6	180	1	3	
7	108	1	3	
8	356	1	3	
9	114	1	3	
10	-180	1	3	

Figur 3.6. Utsnitt av endelige sorteringen av dataene.

4. RESULTATER

I dette kapittelet skal jeg introdusere resultatene jeg fikk fra undersøkelsen jeg hadde i matematikk klassen. Her kommer de forskjellige svar alternativene elevene kom med, og i tillegg hvor mange prosent av elevene som svarte de forskjellige alternativene. Den riktige svaret er markert med lyse grønn farge, svarene som er gitt på grunn av en årsak (misoppfatning) er markert med lyse gul farge, mens svar som kommer av regnefeil ikke har noe farge.



Figur 4.1. Samlet resultat

Fra figur 4.1 får vi en total inntrykk av hvordan elevene gjorde det på testoppgaven. Det vi kan se er at en store deler av elevene har svart korrekt på alle oppgavene i denne testen, men vi kan også se at det er noen oppgaver som er et problem for elevene på grunn av en form for misoppfatning. Vi kan tydelig se fra figur 4.1 at jo lengre ut i testen vi komme, jo flere feil gjør elevene. Oppsummert har elevene problemer med spesielt oppgave 2c), 2d) (grunnleggende ferdigheter i blant annet brøk som anvendes på algebrauttrykk), 3a), 3f), 3g), 3h) (ligninger, forståelse for variabel og likhetstegnet) og oppgave 5 (generalisering).

Vi skal nå se nærmere på resultatene for hver av oppgavene i testen, fokusert på oppgavene elevene gjorde feil på.

4.1 OPPGAVE 1

Oppgave 1

Regn ut:

a) $10 + (-4 - 2) =$

b) $5 * (-4) =$

c) $(-6) * 3 + (-4) * (-5) =$

d) $-2^3 + 3 * (10 - 4)^2 =$

e) $2a - (b + a) =$

f) $5 * (a + 6) =$

g) $4 * (x - 1) - 2 * (2x - 2)^2 =$

Figur 4.2 Oppgave 1 a) – g)

Disse oppgavene ble hentet fra matematikkboken Sinus 1P av Oldervoll m.fl. (2014). Meningen med denne oppgaven var å teste ut misoppfatninger som håndtering av rekkefølgen av regneoperasjoner kombinert med potensregler. Som man kan se så er oppgave 1 a) til d) oppgaver hvor man skal kunne regne ut med bare rene tall, og i de 3 siste oppgavene (e) til g)) skal elevene kunne bruke denne rekkefølgen av regneoperasjoner på algebrauttrykk. Denne oppgaven skal prøve å vise om grunnleggende ferdigheter i aritmetikken er grunn til misoppfatning i algebra. I og med at grunnleggende ferdigheter i algebra egentlig er en generalisering av regler i aritmetikken. (Grønmo, L.S., Hole, A. & Onstad, T., 2016).

a)		Totalt	%
	R= Riktig	28	97
	U= Ubesvart		
	F= Feil 1)	1	3
	F= Feil 2)		
	totalt antall	29	100

b)		Totalt	%
	R= Riktig	29	100
	U= Ubesvart		
	F= Feil 1)		
	F= Feil 2)		
	totalt antall	29	100

f)		Totalt	%
	R= Riktig	29	100
	U= Ubesvart		
	F= Feil 1)		
	F= Feil 2)		
	totalt antall	29	100

Tabell 4.1: Første utkast av registrering av resultatene oppgave 1a) 1b) og 1f)

**) Feil 1) er feil på grunn av regnefeil. Feil 2) er feilene gjort på grunn av en metode, en misoppfatning.*

Ut i fra Excel dokumentet som ble laget over bearbeidingen av datamaterialet, så var det ingen av elevene som hadde problemer med oppgave 1a), 1b) og 1f) (Tabell 4.1). Disse elevene hadde forstått bruken av parenteser, og hadde en forståelse for minus som en regneoperasjon (oppgave 1a)) og minus som fortegn (oppgave 1b)). Men oppgavene 1c), 1d), 1e) og 1g) er oppgaver som er interessante å se på, da det var en del elever som tydelig nok hadde en form for misoppfatning her.

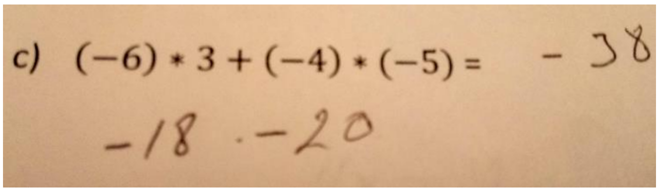
<u>Oppgave 1c):</u>

I denne oppgaven må elevene vite når de skal multiplisere og addere / subtrahere, altså må de kjenner til regnerekkefølgen til operasjonene når det er flere operasjoner i et regnestykke.

Oppgave 1c)				
	Svar:	Antall	Prosent %	
1	-2	26	90	(Riktig svar)
2	-38	3	10	

Tabell 4.2: Resultater fra oppgave 1c)

Fra resultatene (Tabell 4.2) ser vi at alle elevene svarte på oppgaven, men bare 90 % av elevene svarte korrekt på denne oppgaven. Men allikevel var det 10 % av elevene som hadde problemer med denne oppgaven. Disse elevene hadde dermed fått med seg regelen om regnerekkefølgen med at man først skal utføre multiplikasjon og deretter addere/subtrahere. Videre ser vi at elevene klarer og multipliser et negativt tall med et positivt tall, men problemet ligger i fortegn når de skal multipliserer to negative tall. Elevene har kommet fram til at $(-4) * (-5) = -20$, derav kommer svaret -38 (Figur 4.3 besvarelse fra en elev), som dermed er en misoppfatning elevene vil ha med seg videre om det ikke blir fanget opp i starten.



Figur 4.3: Besvarelse fra en elev

Oppgave 1d):

d)		Totalt	%
	R= Riktig	18	62
	U= Ubesvart		
	F= Feil 1)	2	7
	F= Feil 2)	9	31
	totalt antall	20	100

Tabell 4.3: Første utkast av registrering av resultat oppg 1d)

Denne oppgaven handler også om bruken av regnerekkefølgen på tall, men nå i kombinasjon med multiplikasjon, subtraksjon/addisjon, potensregler og parentes. I denne oppgavene ville det ha vært riktig å angripe regnestykke i følgende rekkefølge: parentesen, potensen, multiplikasjon og tilslutt legge sammen.

$$-2^3 + 3 * (10 - 4)^2$$

$$= -2^3 + 3 * (6)^2$$

$$= -8 + 3 * 36$$

$$= -8 + 108$$

$$\underline{= 100}$$

Det var interessant å se på resultatet for denne oppgaven, da det kom opp flere forskjellige svart alternativer fra elevene på denne oppgaven på grunn av blant annet potensleddet med parentesen : $(10-4)^2$.

Oppgave 1d)				
	Svar:	Antall	Prosent %	
1	100	18	62	(Riktig Svar)
2	244	2	7	
3	92	1	3	
4	116	1	3	
5	284	2	7	
6	180	1	3,5	
7	108	1	3,5	
8	356	1	3	
9	114	1	3	
10	-180	1	3	

Tabell 4.4: Resultat fra oppgave 1d)

Fra resultatene over (Tabell 4.4) ser vi at 62 % av elevene klarte å komme fram til riktig løsning som var 100. Men det er hele 38 % av elevene som svarte feil på denne oppgaven, hvorav 7 % av elevene hadde feil på grunn av noen regnefeil. Dermed viser det seg at 31 % av elevene som hadde en form for misoppfatning med denne oppgaven, enten på grunn av det siste leddet i regnestykket eller regnerekkefølge. Måter elevene har løst opp leddet: $(10-4)^2$ på:

a) $(10-4)^2 = 20+8.$

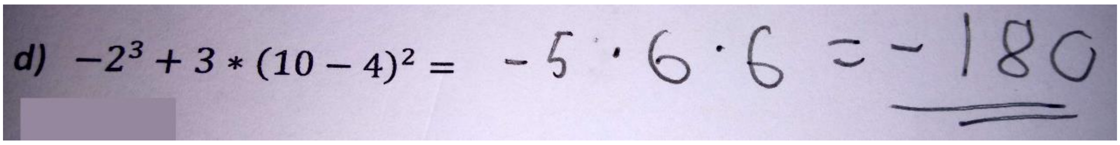
b) $(10-4)^2 = 100-8$

c) $(10-4)^2 = 100-16$

d) $(10-4)^2 = 100+8$

Det vi kan se elever har gjort for å løse opp parentesen er ved å enten doble begge leddene i parentesen (a)) eller ved å opphøye begge leddene i parentesen (b) – d)), kombinert med regnefeil da de har løst $4^2 = 8$ (b) og d)) i stedet for 16, og slike feil forekommer ofte når man er for rask. Dette kombinert med regnefeil på grunn av fortegn er årsakene til de forskjellige svar alternativene.

Fra resultatet ser vi at en elev har svart -180, og dette kommer av at denne eleven kjenner til regneoperasjonsrekkefølgen, men har byttet om på rekkefølgen mellom multiplisering og addering. Eleven har klart å løse opp potensen riktig, men eleven har valgt og legge sammen (-8) med 3, og deretter multipliserte resultatet med 36 (som er svaret man får når man løser opp $(10-4)^2$). Dermed har denne elevene valgt å dele opp oppgaven i to deler, ved å løse opp -2^3+3 for seg, og så $(10-4)^2$, og deretter multiplisere begge disse resultatene. (Se figur 4.4). En kreativ tankegang, men dette er en misoppfatning eleven har.



Figur 4.4: Besvarelse fra en elev

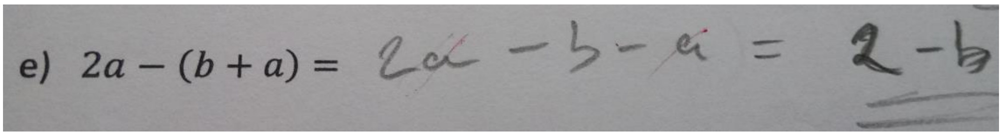
Oppgave 1e):

Denne oppgaven er den første oppgaven hvor bokstaver er inkludert, for å se hvordan elever håndtere bruken av regneoperasjoner på algebraiske utrykker. I denne oppgaven ser vi at det er et minus tegn foran en parentes, noe som fører til at alle ledd inni parentesen vil skifte fortegn når man løser den opp. Resultatene fra tabell 4.5 viser at 93 % av elevene klarte å løse denne oppgaven, men det var allikevel 2 elever som hadde problemer med å løse denne oppgaven.

Oppgave 1e)				
	Svar:	Antall	Prosent %	
1	a - b	27	93	(Riktig svar)
2	2 - b	1	3,5	
3	3a - b	1	3,5	

Tabell 4.5: Resultat fra oppgave 1e)

I svaralternativ 3 fra tabell 4.5 har eleven kommet fram til løsningen 3a – b, dette kommer av at minus tegnet utenfor parentesen bare har påvirket fortegnet til b leddet og ikke a leddet i parentesen. Men det som er interessant å se på er svaralternativ nummer 2, hvor eleven har kommet fram til løsningen 2 – b, ved å løse opp parentesen på riktig måte men så kansellert vekk a’ene. (Figur 4.5).



Figur 4.5: Besvarelse fra elev

<u>Oppgave 1g):</u>

Denne oppgaven er en sammensatt algebrauttrykk med parenteser, potens, multiplikasjon og addisjon. Man må i denne oppgaven klare å kunne ta i bruk regnerekkefølgen man bruker i oppgaven 1d) nå på algebrauttrykk. Målet er å se om elevene klarer og ta i bruk kunnskapen fra aritmetikk over til algebra, siden reglene er de samme, men at bokstaver er nå i tillegg involvert. Fra tabell 4.6 ser vi at 62 % av elevene klarte denne oppgaven. 10 % gjorde feil på oppgaven på grunn av regnefeil (markert med hvit), og hele 28 % av elevene hadde feil på grunn av en bestemt løsningsmetode. Fra tabell 4.6 kan vi også se alle de ulike svar alternativene de 28 % av elevene kom med da de løste denne oppgaven (se løsning markert med lyse gul farge i tabell 4.6).

Oppgave 1g)				
	Svar:	**Antall**	**Prosent %**	
1	$-8x^2+20x-12$	18	62,00	(Riktig Svar)
2	$-4x^2+12x-8$	1	3,50	
3	0	1	3,50	
4	$-8x^2+4x+4$	1	3,30	
5	$-4x+4$	1	3,50	
6	$4x^2-12x-12$	1	3,50	
7	$-8x^2+4x-12$	1	3,50	
8	$-8x^2+4x+12$	1	3,50	
9	$-4x^2-4x$	1	3,50	
10	12x	1	3,30	
11	$8x^2+20x+4$	1	3,30	
12	$2(x-1)$	1	3,50	

Tabell 4.6: Resultat fra oppgave 1g)

Årsaken til alle disse ulike svaralternativene kommer av måten elevene har løst opp parentesen med potensen på: $(2x-2)^2$. De fleste har blant annet brukt den samme «feile» metoden de brukte i oppgave 1d) for å løse denne oppgaven, altså ved å opphøye hvert ledd i parentesen med 2. De ulike måtene elevene har løst opp den siste leddet i oppgaven på:

a) $(2x-2)^2 = 2x^2 - 4x + 4$ Opphøyd x i 2, men ikke to tallet.
b) $(2x-2)^2 = 2 * 2x - 2 * 2 = 4x - 4$
c) $(2x-2)^2 = 2x^2 + 8x + 4$ Opphøyd x, men ikke 2 tallet + fortegnsfeil
d) $(2x-2)^2 = 4x^2 + 4$
e) $(2x-2)^2 = 4x^2 - 4$
f) $(2x-2)^2 = 2(x-1)^2 = 2(x^2 - 2x + 1)$ Faktorisere for å få et lettere uttrykk
g) $(2x-2)^2 = (2x-2)(2x-2) = 4x - 4x - 4x + 4 = -4x + 4$
h) $-2 * (2x-2)^2 = -4x + 4$. Multiplisert -2 inn uten å opphøye

4.2 OPPGAVE 2

Oppgave 2

Forkort brøken:

a) $\frac{5}{25} =$

b) $\frac{3+4}{21} =$

c) $\frac{2b^3}{3b} =$

d) $\frac{4x+2}{8x} =$

Figur 4.6: Oppgave 2

Jeg har opplevd at elever har problemer med brøk, og spesielt når de bruker samme regler i brøk for tall på algebrauttrykk. Så meningen med denne oppgaven er å se om elever faktisk har problemer med grunnleggende brøkforståelse, som i dette tilfelle vil være å forkorte en brøk når bokstaver inngår i regnestykket. Oppgave 2a) og 2b) ser selvlagde oppgaver, mens oppgave 2c) og d) er hentet fra KIMS hefte, læringsstøttende prøver fra utdanningsdirektoratet. (Utdanningsdirektoratet, 2012).

a)		Totalt	%
	R= Riktig	28	97
	U= Ubesvart		
	F= Feil 1)	1	3
	F= Feil 2)		
	totalt antall	29	100

b)		Totalt	%
	R= Riktig	26	90
	U= Ubesvart		
	F= Feil 1)	3	10
	F= Feil 2)		
	totalt antall	29	100

Tabell 4.7: Første utkast av registrering av resultatene oppg. 2a) og 2b)

Fra tabell 4.7 ser vi at det ikke er noe misoppfatninger hos elevene i oppgaven 2a) og 2b), elevene har forstått hvordan man skal forkorte en brøk på et uttrykk med tall. Den eneste feilen som dukker opp i disse to deloppgavene er feil av type 1 på grunn av regnefeil, da det ikke er noe spesiell årsak til disse feilene. Men feilene som dukker opp i oppgave 2c) og 2d) viser at elever kan ha problemer med å forkorte algebrauttrykk på brøk form.

Oppgave 2c):

Oppgave 2c)				
	Svar:	Antall:	Prosent %	
1	$\frac{2b^2}{3}$	24	83	(Riktig svar)
2	$\frac{b^2}{1}$	1	3,5	
3	2b	1	3,5	
4	Ubesvart	3	10	

Tabell 4.8: Resultatene fra oppgave 2c)

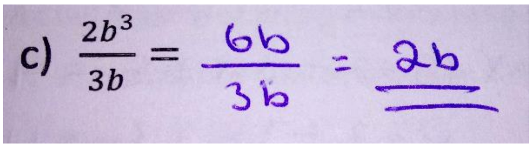
Fra tabell 4.8 kommer det fram at store deler av klassen, hele 83 %, klarte å forkorte denne brøken. Men ser at 7 % av klassen har kommet fram til et annet uttrykk enn det som skulle ha vært svaret, dette på grunn av måten de har tenkt på. Dette er også den første deloppgaven hvor det er noen elever som har valgt og ikke svare på oppgaven, og det er 10 % av klassen. Det at elever ikke har svart på oppgavene viser at de ikke klarer å anvende forkortelses regelen i brøk på algebraiske uttrykk, hvor det dukker opp bokstaver i uttrykket.

Svaralternativ 2, $\frac{b^2}{1}$, fra tabell 4.8 kommer av at eleven valgte å løse oppgaven ved å faktorisere uttrykket, og deretter stryke like faktorer/produkter over og under brøkstreken. Dermed har elevene forkortet vekk 2 tallet og en b, og ender dermed opp med sin løsning.

$$\frac{2b^3}{3b} = \frac{2 * b * b * b}{2 + 1 * b} = \frac{b^2}{1}$$

Eleven har dermed forståelse for hva faktorisering av et uttrykk er, og hva det innebærer og forkorte et uttrykk, men allikevel har denne eleven en misoppfatning i måten man faktoriserer uttrykket på, som er grunnen til at elevene kommer fram til feil svar.

Eleven som svarte 2b på denne oppgaven (svaralternativ nr. 3 fra tabell 4.8), hadde også en interessant måte og løse det oppgaven på. (se figur 4.7).



Figur 4.7: Besvarelse fra elev

Denne eleven har på en eller annen grunn valgt og multiplisere eksponenten 3 med tallet 2 og fått uttrykket $\frac{6b}{3b}$, for deretter og forkortet 6 med 3, og latt bokstaven b stå igjen. Eleven viser da at han/hun kan forkorte tall, men viser også at hun/han ikke har forstått hva variabelen b i uttrykket er for noe, og derfor valgt og bare la den stå.

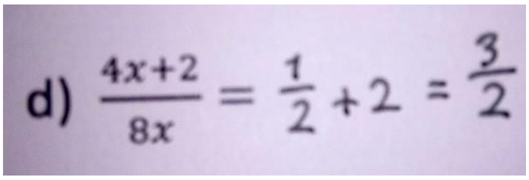
Oppgave 2d)

I denne oppgaven skal elevene også forkorte et algebraisk uttrykk på brøk form, men denne ganger består telleren av ledd. Det viser seg, fra læringsstøttende prøve fra utdanningsdirektoratet (Utdanningsdirektoratet, 2012), at elever på ungdomsskolen har problemer med å forkorte slike uttrykker. Målet med denne oppgaven er å se om elever som starter med R1 kurset på videregående skole, for å fordype seg mer i matematikk har de samme grunnleggende feilene på slike algebraiske uttrykker.

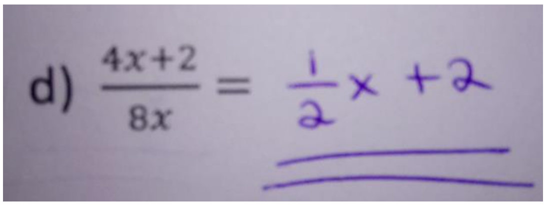
Oppgave 2d)				
	Svar:	Antall:	Prosent %	
1	$\frac{2x+1}{4x}$	20	69	(Riktig svar)
2	$\frac{3}{2}$	2	7	
3	$\frac{1}{2}x+2$	2	7	
4	Ubesvart	4	14	
5	$\frac{x+1}{2x}$	1	3	

Tabell 4.9: Resultatene fra oppgave 2d)

Fra tabell 4.9 ser vi at hele 31 % av denne R1 klassen hadde problemer med å forkorte dette uttrykket. Hvor av 3 % kom fram til feil løsning på grunn av regnefeil, 14 % hadde feil på grunn av misoppfatning, og 14 % svarte ikke på selve oppgaven. Dette var en overraskende resultat, med tanke på at dette er elever som faktisk studere matematikk videre.



Figur 4.8a): Besvarelse fra en elev



Figur 4.8b): Besvarelse fra en elev

Fra figur 4.8a) og b) ser vi at årsaken til svaralternativ nummer 2 og 3 fra tabell 4.9 kommer av måten elevene har forkortet brøkene på, ved å forkorte x leddet. Mellomregningen for figur 4.8a)

$$\frac{4x+2}{8x} = \frac{4x}{8x} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

Mellomregning for figur 4.8b)

$$\frac{4x+2}{8x} = \frac{4x}{8x} + 2 = \frac{1}{2}x + 2$$

Det eleven har gjort er at de har splittet brøken i to, sortert x leddet for seg og konstant ledd for seg. På grunn av dette ser elevene at de kan forkorte leddet $\frac{4x}{8x}$ til $\frac{1}{2}$, hvor x'ene kansellerer hverandre, og vi ender opp med svaralternativ 2 fra tabell 4.9. Det er nemlig den samme tankegangen for metoden som har blitt brukt i figur 4.8b) for å komme fram til svar alternativ 3. Men i her har elevene bare forkortet tallet som står foran x, og beholdt en x istedenfor å forkorte vekk x 'ene. Igjen ser vi tegn på at eleven ikke helt har forståelse for hva variabelen er. Det vi også kan se fra denne løsningsmetoden er at elevene ikke har forstått begrepet fellesnevner når de velger å splitte opp brøken i to som disse elevene har valgt, altså igjen en misoppfatning i grunnleggende brøkferdigheter.

4.3 OPPGAVE 3

<u>Oppgave 3</u>

Skriv inn tallet som mangler

a) $(\quad) * 2 = 21$
b) $3 + 2 * (\quad) = 4 + 6 + 5$
c) $\frac{1}{2} + (\quad) = 4$

Løs ligningene

d) $2x = 8+2$
e) $5 - 2x = x - 4$
f) $(x + 1) * 2 + 3x + 6 = 4$
g) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 5$
h) $\frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{4}$

Figur 4.9: Oppgave 3

Oppgave 3 handler om ligninger, hvor de tre første deloppgavene a) – c) er oppgaver hvor det ikke har blitt introdusert noe variabel for den ukjente, en slags introduksjonsoppgave for ligninger. Disse tre deloppgavene baserer seg på oppgaver hentet fra utdanningsdirektoratet (2012). Mens de fem siste deloppgavene, d) – h), er ligninger med x som ukjent. Disse deloppgavene baserer seg på oppgaver fra sinus 1P matematikk boken av Oldervoll m.fl. (2014). I oppgave d) og e) skal elevene kunne anvende metoden de brukt i a) og b), mens i oppgave g) og h) er det bruk av grunnleggende ferdigheter innenfor brøk som er kombinert i ligningen. Det var ingen problem for elevene å løse oppgave 3c), d) og e), bare at 7% av elevene gjorde regnefeil på oppgave 3c), med at de må ha misforstått oppgaven. (ifølge tabell 4.10). Det som noen elever har gjort i de tre første deloppgaven a) – c) er at de har innføre variabelen x i det tomme «ruten», og løst oppgaven som en ligning med hensyn på x for å finne ut hva den manglende tallet er.

c)		Totalt	%
	R= Riktig	26	90
	U= Ubesvart	1	3
	F= Feil 1)	2	7
	F= Feil 2)		
	totalt antall	29	100

d)		Totalt	%
	R= Riktig	29	100
	U= Ubesvart		
	F= Feil 1)		
	F= Feil 2)		
	totalt antall	29	100

e)		Totalt	%
	R= Riktig	29	100
	U= Ubesvart		
	F= Feil 1)		
	F= Feil 2)		
	totalt antall	29	100

Tabell 4.10: Første utkast av registrering av resultat oppg. 3c) d) og e)

Oppgave 3a):

Oppgave 3a				
	Svar:	Antall:	Prosent %	
1	10,5	25	86	(Riktig svar)
2	7	1	3	
3	Ubesvart	3	10	

Tabell 4.11: Resultat oppgave 3a)

Det er ingen misoppfatninger og oppdage i denne oppgaven, men det som er interessant å legge merke til at det er 3 % av klassen som ikke har tenkt på at man kan ta i bruk enten et desimaltall eller skrive tallet som en brøk. Elevene har her fokusert på at tallet som mangler må være et heltall. Det samme gjelder for elevene som ikke svarte på oppgaven, som da utgjør 10 % av klassen. De hadde problemer med å finne et tall som skulle multipliseres med 2 og gi svaret 21, og valgte derfor å ikke løse oppgaven.

Oppgave 3b):

Målet med denne oppgaven er å ha regneoperasjons rekkefølgen i minnet når man skal finne hvilket tall som mangler. Og vi ser her at 21 % av klassen (tabell 4.12) har kommet med feil svar. Det disse elevene har gjort er at de først har lagt sammen tallene 3 + 2, og deretter funnet tallet man må multiplisere for at det skal bli likt med det som står på høyre side av likhetstegnet som er 15. Det man kan legge merke til er at regneoperasjons rekkefølgen er en viktig ferdighet som blir brukt i algebra / ligninger, og dette har noen elever som sagt problemer med.

Oppgave 3b				
	Svar:	Antall	Prosent %	
1	6	23	79	(Riktig svar)
2	3	6	21	

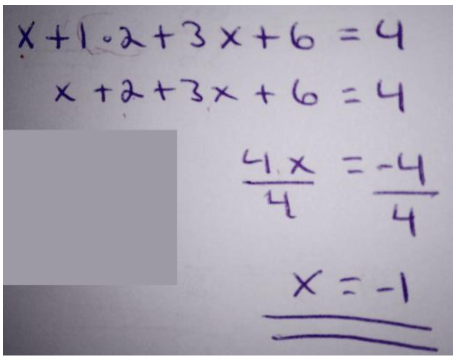
Tabell 4.12: Resultatene fra oppgave 3b)

Oppgave 3f):

Oppgave 3f)				
	Svar:	Antall:	Prosent %	
1	$x = -\frac{4}{5}$	25	86	(Riktig svar)
2	$x = \frac{5}{6}$	1	3,5	
3	$x = -\frac{1}{2}$	1	3,5	
4	$x = -1$	2	7	

Tabell 4.13: Resultatene fra oppgave 3f)

Resultatene fra tabellen over viser at 7 % av elevene gjorde feil på grunn av en liten fortegnsfeil, altså en form for regnefeil siden framgangsmåten viser at disse elevene visste hva det var de gjorde når de skulle finne verdien for x'en. Men allikevel er det 2 elever som har en misoppfatning når det kommer til å løse slike ligninger. Begge elevene hadde løst oppgaven på samme måte (se figur 4.10). Det elevene har gjort er å multiplisere 2 tallet som står utenfor parentesen med bare konstantleddet inni parentesen og ikke x leddet. Dette viser da at elevene ikke har helt forstått konseptet med bruken av parenteser.



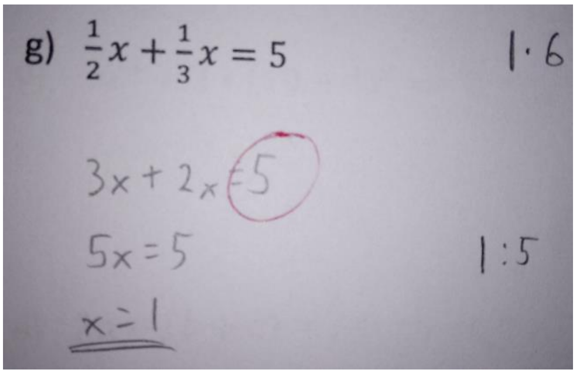
Figur 4.10: Besvarelse fra en elev

Oppgave 3g):

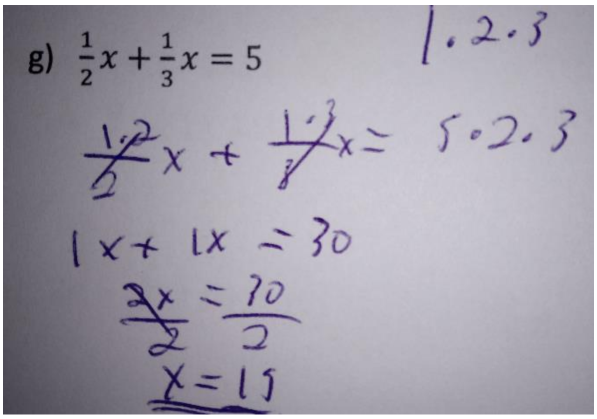
Oppgave 3g)				
	Svar:	Antall:	Prosent %	
1	x=6	19	66	(Riktig svar)
2	x = 1	4	14	
3	x= 15	1	3	
4	$x = 5 - \frac{1}{6}$	1	3	
5	Ubesvart	4	14	

Tabell 4.14: Resultatene fra oppgave 3g)

Målet med denne oppgaven er å løse ligningen ved å ta i bruk fellesnevner til brøkene, for å «fjerne» nevneren. Man kan da se fra tabell 4.14 at 34 % av elevene har problemer med å løse slike oppgaver, hvor av 14 % av elevene velger å ikke oppgi noe svar på oppgaven.



Figur 4.11 a): Besvarelse fra en elev



Figur 4.11 b): Besvarelse fra en elev

Fra figur 4.11a) og 4.11b) ser vi to forskjellige måter oppgaven har blitt løst på. Fra figur 4.11a) ser vi at eleven starer med å multipliserer hele ligningen med 6 for å «fjerne» nevneren, men utfører prosessen bare på den ene siden av likhetstegnet og ikke med 5 tallet på høyre side av likhetstegnet. Dette viser at eleven ikke helt har forståelse for betydningen av likhetstegnet, om man gjør en endring på den ene siden av likhetstegnet så må man gjøre den samme enderingen på den andre siden. Det samme kan vi se igjen på den andre besvarelsen fra en annen elev (figur 4.11b)), men denne elevene har en forståelse for betydningen av likhetstegnet da eleven multipliserer fellesnevneren med tallet som står på høyreside av likhetstegnet. Her har også denne eleven multiplisert hele ligningen med 6 (fellesnevner) for å fjerne nevneren, men da ved å multiplisere ligningen med 2 og 3 (produktet av fellesnevneren). Årsaken til dette kan vi se i neste trinn på figur 4.11b). Vi ser at eleven bruker 2 tallet som har blitt multiplisert inn for å forkorte brøken med 2 i nevner, og 3 tallet som har blitt multiplisert går til å forkorte brøken med 3 i nevner. Eleven har altså gjort dette for å fjerne nevneren, men vi kan se at eleven har en misoppfatning her med og omforme ligninger med flere ledd på brøk form ved at eleven ikke har multiplisert hele fellesnevner med hvert ledd.

Oppgave 3h):

Oppgave 3h)				
	Svar:	**Antall**	**Prosent %**	
1	$x = \frac{5}{12}$	1	3,3	
2	$x = -\frac{1}{4}$	1	3,3	
3	x = 3	1	3,3	
4	x = 5	17	59	(Riktig svar)
5	Ubesvart	9	31	

Tabell 4.15: Resultater fra oppgave 3h)

Fra tabell 4.15 kan vi se at hele 41 % av klassen har problemer med å løse slike type ligninger på brøk form med en ukjent x både i teller og nevner, og dette utgjør en stor andel av klassen. Igjen kan man i denne oppgaven ta i bruk fellesnevneren til brøken for å løse ligningen, og det er det elevene har gjort, men det viser at elevene nå har et problem når den ene nevneren har flere ledd. En elev har løst oppgaven på følgende måte:

Trinn 1:	$\frac{(x+1)*4}{(x+3)*4} = \frac{3*3}{4*3}$
Trinn 2:	$\frac{4x+4}{4x+12} = \frac{9}{12}$
Trinn 3:	$\frac{4x}{4x} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12}$
Trinn 4:	$\frac{4x}{4x} = \frac{9-4}{12}$
Trinn 5:	$x = \frac{5}{12}$

Figur 4.12a): Besvarelse fra en elev

I trinn 1 (fra figur 4.12a)) har eleven utvidet brøken på venstre side med å multiplisere med 4 og høyre side ved å multiplisere med 3. Grunnen til dette kan vi se i trinn 2, hvor brøken på venstre side nå har et ledd med 12 som er lik nevneren på høyre side av likhetstegnet. Eleven har utelatt helt at x'en er en del av nevneren til den ene brøken. Videre i trinn 3 kan vi se at eleven nå splitter opp brøken på venstre side til to brøker, for å kunne flytte $\frac{4}{12}$ over likhetstegnet og løse ligningen med hensyn på x.

En annen elev besvarelse som viser misoppfatninger ved å løse slike oppgaver:

Trinn 1:	$\frac{4x+4}{x+3} = 3$
Trinn 2:	$\frac{4x+4}{x+3} - 3 = 0$
Trinn 3:	$\frac{4x+4*(x+3)-3(x+3)}{x+3} = 0$
Trinn 4:	$4x + 4 - 3 = 0$
Trinn 5:	$x = -\frac{1}{4}$

Figur 4.12b): Besvarelse fra en elev

Vi ser at eleven i trinn 2 (figur 4.12b)) har begynt riktig, videre skjer det noe i trinn 3 som ikke er helt korrekt når eleven prøver å slå sammen leddene i trinn 2 slik at de får felles brøkstrek. For det eleven gjøre i tillegg til å multiplisere 3 tallet med (x+3), er at han/hun multipliserer telleren som allerede har en nevner, for så å kansellere vekk (x+3) leddet i teller og nevner som fører til galt svar.

4.4 OPPGAVE 4

Oppgave 4

Jeg har m kroner og du har k kroner. Jeg har 6 kroner mer enn deg.

Hvilke ligning/uttrykk beskriver situasjonen best?

a) $6k = m$

b) $6m = k$

c) $k + 6 = m$

d) $m + 6 = k$

e) $6 - m = k$

Figur 4.13: Oppgave 4

Denne oppgaven er hentet fra artikkelen «*Purpose in school algebra*» av Alan Bell (1995), som nevner at elever har problemer med å oversette verbal uttrykk til et algebraisk uttrykk. Noe som er viktig å kunne for å kunne anvende algebra kunnskap på praktiske situasjoner.

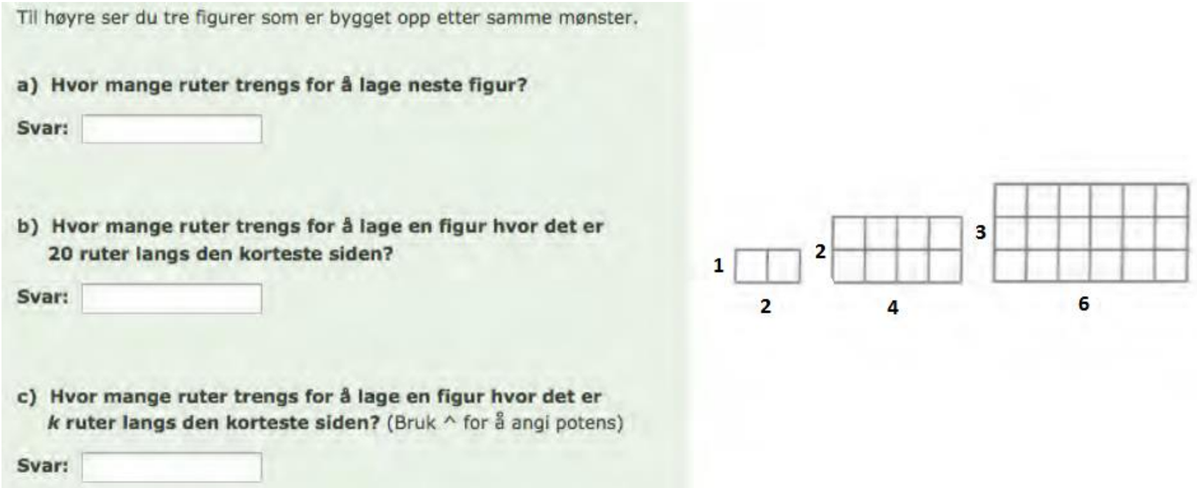
Oppgave 4)				
	Svar:	Antall	Prosent %	
1	C)	20	69	(Riktig svar)
2	D)	6	21	
3	E)	3	10	

Tabell 4.16: Resultater fra oppgave 4

Det vi kan se er at 31 % av klassen svarte feil på dette spørsmålet, på grunn av problemer med å tolke hvordan en skal oversette setningen til et symbolsk uttrykk.

4.5 OPPGAVE 5

Oppgave 5



Figur 4.14: Oppgave 5

Denne oppgaven er hentet fra heftet (Utdanningsdirektoratet, 2012), og går ut på å generalisere svaret ved å observere mønsteret i en tall/figur rekke. Meningen med denne oppgaven skulle være å se om elever klarer å komme fram til et generelt uttrykk (oppgave c)) ved å studere figur mønstrene.

a)	Totalt	%
R= Riktig	23	79
U= Ubesvart	1	3
F= Feil	5	17
totalt antall	29	100

c)	Totalt	%
R= Riktig	11	38
U= Ubesvart	9	31
F= Feil	9	31
totalt antall	29	100

b)	Totalt	%
R= Riktig	20	69
U= Ubesvart	3	10
F= Feil	6	21
totalt antall	29	100

Tabell 4.17: Første utkast av registrering av resultat fra oppgave 5

17 % av elevene som svarte feil i a) oppgaven oppga hvor mange ekstra ruter som trengs for å lage neste figur, altså en form for feil av type 1 som følge av de ikke har lest oppgaven godt

nok. Det samme gjelder for b) også, elevene har mistolket oppgaven ved at de har svart enten 200 ruter eller 40 ruter. Dette kommer av enten:

1. At elevene har tenkt at den oppgitte verdien var antall ruter på den lengste siden av rektangel figuren (egentlig er dette den korte side). For ifølge mønsteret de har observert vil figuren da ha 10 ruter langs den korte siden. Totalt vil denne figuren dermed ha 200 ruter.

2. Av opplysningen i oppgaven så har elevene funnet ut at den lengste siden av figuren består av 40 ruter, når korte siden er 20 ruter lang. Og derav svart 40 fordi den lengste siden vi være når den korte siden består av 20 ruter. Altså dermed ikke lest nøye gjennom hva oppgaven spurte om.

Fra tabell 4.17 oppgave c) ser vi at det er hele 18 % av klassen som har kommet fram til feil generell uttrykk for mønsteret til rekken, eller ikke har besvart oppgaven i det hele tatt. Dette viser da at elevene ikke klarer å ta i bruk en variabel bokstav størrelse for å beskrive utviklingen av tall/figur mønsteret.

5. ANALYSE

I dette kapitelet vil jeg se mer på misoppfatningene som ble belyst under testoppgaven som ble utført i R1 klassen, og prøve å koble dette sammen med hva årsaken til misoppfatningen kan være. Basert på teorier jeg har lest, utformet jeg en testoppgaver som skulle belyse at elever har slike misoppfatninger i algebra. Fra analysen av besvarelsene fra elevene, ut ifra testoppgaven som ble utført, viste det seg at flertallet i denne klassen hadde problemer / misoppfatninger på følgende områder:

- Problemer med grunnleggende basiskunnskap fra aritmetikk, og at dette blir forfulgt i algebra. Som for eksempel prioritering av regneoperasjoner, potens regler, brøk og likhetstegnet
- Forståelsen for variabel
- Oversetting fra tekst til algebraisk uttrykk og generalisering

Som vi kan se så henger disse områdene godt sammen. Om elever har problemer med å generalisere vil de ha problemer med å anvende kunnskaper fra aritmetikk på algebra, da algebra er generalisering av aritmetikk (Booth, 1988). Dersom elever ikke kan generalisere, vil de også ha problemer med forståelsen av variabel. Siden det er gjennom generalisering av noe spesifikt at man blir tvunget til å ta i bruk bokstaver som variabler for å uttrykke seg generelt. Dermed vil jeg se på misoppfatningene på disse områdene nevnt over.

5.1 PROBLEMER MED GRUNNLEGGENDE BASISKUNNSKAPER FRA ARITMETIKK

Det vi ser fra testoppgavene er at mange av algebraoppgavene bygger på basiskunnskap man bruker i aritmetikk som brøkregning, potensregning og rekkefølge av regneoperasjoner. Altså man må kunne vite hvordan man anvender denne grunnleggende basiskunnskapen fra aritmetikk på oppgaver i algebra. Og som også Utdanningsdirektoratet (2012) sier så må elever har god forståelse for tallbegrep, og kunne beherske ferdigheter i tallbehandling, for at overgangen mellom aritmetikk og algebra ikke skal blir et problem. Oppgaver fra testen som kan være med på å belyse dette problemet er: Oppgave 1e), 1g), 2d), 3b), 3g), 3h). Som Booth (1988) mener så oppstår vansker i algebra som følge av forskjellen i aritmetikk og algebra, i og med at algebra egentlig bare en generalisering av aritmetikk. Igjen ser vi at begrepet generalisering som både Mason (2011), Bell (1995) og Kongelf (2015) tar opp blir sett på som et viktig ord som dukker opp i algebra. Om elever da er usikker i grunnleggende ferdigheter innenfor aritmetikken, vil det føre til vansker i algebra i større grad fordi mye av ferdighetene i aritmetikk nettopp blir brukt i algebra. Grunnleggende ferdigheter fra aritmetikk elevene har som vi observerer fra utført test oppgave er: Prioritering av regneoperasjoner (rekkefølge av regneoperasjon) (oppgave 1e, 1g, 3b), ferdigheter innenfor brøkregning (oppgave 2d, 3g og 3h) og likhetstegnet (oppgave 3g og 3h).

1) Prioritering av regneoperasjoner

Misoppfatninger i aritmetikken som kan gi vansker i algebra ifølge Booth (1988) Russell, O'Dwyer & Miranda (2009), Herscovics & Linchecski (1994) og Kieran (1981) er prioritering av regneoperasjoner. Eksempel Booth (1988) nevner i sin artikkel om en elev som løse regnestykket: $18 * 27 + 19$. Det eleven gjør er at eleven først tar å legger sammen 27 og 19, for så deretter å multiplisere det med 18. Slik: $18 * 27 + 19 = 18 * 46 = 828$. Vi kan se at elever har problemer med rekkefølgen av regneoperasjoner, spesielt i oppgave 3b) hvor elevene måtte finne ut hvilket tall som manglet for at uttrykket skulle bli likt (se figur 4.8). Det jeg da la merke til var at 21% av elevene først adderte tallet 3 og 2, og deretter fant ut hva summen 5 kunne multipliseres med for at det skulle bli 15, slik:

$$3 + 2 * (\ ) = 4 + 6 + 5$$

$$5 * (\ ) = 15$$

$$5 * 3 = 15$$

Som Booth (1988) nevner så tror elevene at måten operasjonssekvensen er skrevet på som er det avgjørende for hvordan oppgaven blir løst på. I skolen så lærer man regneoperasjonene ifølge rekkefølge:

1. Addisjon / subtraksjon
2. Multiplikasjon / divisjon
3. potens / parenteser

I og med at det første elevene lærer på skolen i matematikk er addisjon og subtraksjon, deretter multiplikasjon, så divisjon og deretter potens, så vil elevene automatisk gå for å addere/subtrahere først, for så å deretter multiplisere/dividere for å fullføre utregning for et regnestykke med flere regneoperasjoner. Ser vi på regelen for regneoperasjoner er den som følgende:

1. Parenteser / potenser
2. Multiplikasjon / divisjon
3. Addisjon / subtraksjon

(Ndla.no, 2010)

Dermed ser vi at regelen for regnerekkefølgen for regneoperasjonen man bruker på oppgaver med flere operasjoner, er den motsatt av rekkefølgen man lærer operasjonene i. Årsaken til misoppfatning innenfor regneoperasjoner kan da være at elevene forveksler rekkefølgen av regneoperasjoner basert på den rekkefølgen de lærer regneoperasjonene i, og regelen for regneoperasjoner.

2) Ferdigheter innenfor brøkregning

Fra testoppgavene med oppgaver som inneholdt algebraisk uttrykk på brøk form, så fikk jeg observerer at elever hadde problemer med å bruke regler fra brøken i aritmetikk på algebraisk uttrykk på brøk form. I oppgave 2d) var det noen elever som prøvde å løse oppgaven ved å splitte opp brøken til to brøker på denne måten: $\frac{4x+2}{8x} = \frac{4x}{8x} + 2$. Ser at elevene har forståelse for at en brøk kan splittes opp, men det vi også kan se er at de ikke har tatt hensyn til fellesnevner begrepet. Dette kan være fordi at det dukker opp bokstaver i uttrykket som gjør at elevene dropper fellesnevner når de splitter opp brøken, i og med at elevene har en erfaring med at ledd med bokstaver og ledd med konstantledd er to forskjellige verdier og man kan derfor ikke summerer dem sammen. Den riktige måten å splitte opp $\frac{4x+2}{8x}$ på er:

$$\frac{4x+2}{8x} = \frac{4x}{8x} + \frac{2}{8x}$$

Dette har elever problemer med å forstå at er mulig å gjøre, fordi de er vant til å se uttrykket snudd den andre veien:

$$\frac{4x}{8x} + \frac{2}{8x} = \frac{4x+2}{8x}$$

I og med at alle oppgaver elever gjør i brøkregning i aritmetikk delen, vil oppgaven være på venstreside av likhetstegnet, og svaret på høyre side av likhetstegnet. (Figur 5.1). Dermed vil elevene klarer å bruke de riktige brøkreglene, men bare om oppsettet på oppgaven er gitt slik de er vant med å se oppgavene på, som figur 5.1

1) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$

2) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$

Figur 5.1 Eksempel på hvordan brøkoppgaver elever er vant til fra aritmetikk

På grunn av denne enveis måten å løse oppgaver på, så vil elever ha problemer med å løse oppgaven om oppgaven var snudd. Altså for eksempel splitt opp brøken $\frac{5}{7}$ i to brøker slik at summen av de to nye brøkene blir $\frac{5}{7}$. Når elever da prøver å gjøre slike oppgaver vil de få en forståelse for sammenhengen mellom brøken som er oppgitt, og brøkene de må lage, nemlig begrepet fellesnevner, og at når man løser oppgaven baklengs så vil man kunne finne flere løsninger. Eks:

1. $\frac{5}{7}=\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$

2. $\frac{5}{7}=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}$

Slike øvelser kaller Mason (2011) «fram og tilbake» eller «bakoveroppgave», noe som er en god øvelse for å lære algebraisk tenkning på. På denne måten vil elevene lære hvordan de kan gjøre et uttrykk vanskeligere, og samtidig oppdage hvordan de kan gjøre uttrykket enklere igjen. Dette er da opphavet til teknikker for problemløsninger, og på denne måten vil elevene kunne lærer seg forskjellige teknikker de kan bruke, og når de kan bruke dem. Dette ser vi mangler i skolen. Det at man kan se andre måter å løse en oppgave på, vil være til stor hjelp når man skal anvende kunnskap, for eksempel fra aritmetikk på algebra.

Fra oppgave 3h) $\frac{x+1}{x+3}=\frac{3}{4}$, kan vi se at elever har problemer med begrepet fellesnevner når brøker har forskjellige nevnere, og splitte opp en større brøk uttrykk til et uttrykk med flere ledd som består av brøk. En elev prøvde å gjøre om brøkene slik at nevneren skulle bli like, ved å multiplisere den ene brøken med 4 og den andre brøken med 3. (Se figur 4.12a)). Dette for å få noe som er likt i nevnerne, som i dette tilfelle vil være tallet 12. På grunn av dette felles tallet, så valgte eleven derfor å splitte opp brøken på venstre side av likhetstegnet.

Trinn 1: $\frac{(x+1)*4}{(x+3)*4} = \frac{3*3}{4*3}$

Trinn 2: $\frac{4x+4}{4x+12} = \frac{9}{12}$

Trinn 3: $\frac{4x}{4x} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12}$

Trinn 4: $\frac{4x}{4x} = \frac{9-4}{12}$

Trinn 5: $x = \frac{5}{12}$

Figur 4.12a): Besvarelse fra en elev

Fra trinn 2 til trinn 3 ser vi at eleven har omformet brøken slik: $\frac{4x+4}{4x+12} = \frac{4x}{4x} + \frac{4}{12}$. Altså har eleven ikke tatt i bruk de grunnleggende reglene som gjelder for brøk i aritmetikken, hvor man kan legge sammen eller trekke fra i telleren om nevneren er lik. Men heller valgt å splitte opp brøken ved å sortere leddet med bokstaver for seg og ledd med tall for seg. Dette kommer av at man i algebra lærer at man ikke kan legge sammen eller trekke fra ledd med bokstaver, og ledd med tall. Det vil si at i oppgaver hvor man skal trekke sammen uttrykket:

$$5a + 6 + 2a - a + 4 + 2$$

vil elevene da først sortere uttrykket slik at leddene med bokstaver står etter hverandre og så leddene med tall står for seg etter hverandre. Da vil det være enklere å trekke sammen uttrykket:

$$5a + 2a - a + 6 + 4 + 2$$

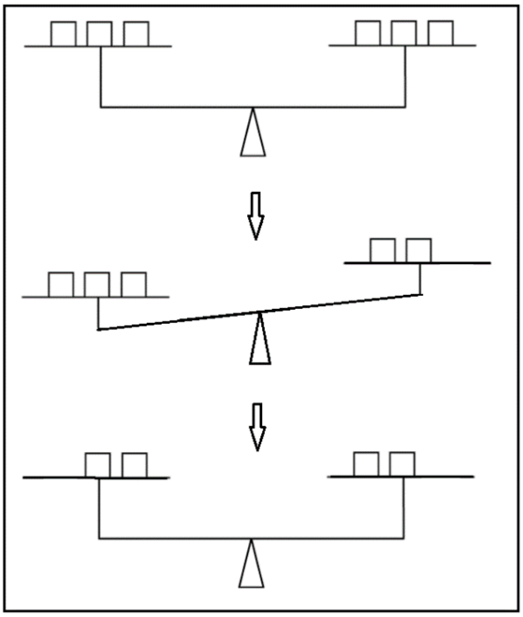
$$\underline{6a + 12}$$

Det er dette eleven har valgte å gjøre i overgangen fra trinn 2 til trinn 3 i figur 4.12a). Igjen et tegn på at elevene ikke får øvd seg på basis regler på nye vinklinger av oppgaver, fordi dette ikke er i fokus i undervisning. I undervisningen er fokuset å komme seg gjennom pensumet, og da spesielt å følge måten læreboken framstiller pensumet på. Som også blir nevnt i artikkelen av Bondø (2010) blir det ikke brukt så mye tid på å hjelpe elevene med å forstå hva brøk er når elever på grunnskolen lærer om brøkregning. Fokuset ligger heller i å lære bort reglene for de fire regneoperasjonene, som da er hvordan addere, subtrahere, multiplisere og dividere sammen flere ledd med brøk.

3) Likhetstegnet og likninger

I oppgave 3g), som var en ligningsoppgave med brøk, observerte jeg at hele 34 % av klassen hadde problemer med å løse denne oppgaven. Det jeg la merke til da elevene løste denne oppgaven var at de visste at de måtte multiplisere med fellesnevneren for å fjerne nevneren for brøkene, men det som var en interessant observasjon var at en elev multipliserte hele ligningen med 6 (fellesnevner) for å fjerne nevneren, men da ved å gange ligningen med 2 og 3 (produktet av fellesnevneren) (se figur 4.11b)). Årsaken til dette kan vi se i neste trinn på figur 4.11b). Ser at eleven bruker 2 tallet som har blitt multiplisert inn for å forkorte brøken med 2 i nevner, og 3 tallet som har blitt multiplisert går til å forkorte brøken med 3 i nevner. Altså eleven har ikke multiplisert hele fellesnevner med hver av brøkene, men bare multiplisert hver av brøkene med det tallet som trengs for å kunne forkorte nevneren. Eleven har gjort dette for å fjerne nevneren, men vi kan se at eleven har en misoppfatning her med å omforme ligninger med flere ledd på brøk form ved at eleven ikke har multiplisert hele fellesnevner med hvert av leddene som er den korrekte måten å løse oppgaven på.

Dette tyder da på at elevene ikke har forstått at om man gjør en endring på den ene side av likhetstegnet, så er man nødt til å gjøre den samme endringen på andre siden av likhetstegnet. Måten elevene kan få en forståelse for å løse likninger og en forståelse for hva likhetstegnet er, er ved å ta tenke på likning som en vektskål som er kjent for alle. Som Froster (2007) nevner i artikkelen sin så vil en slik måte å se likninger på gi elevene en bedre forståelse for hvilke oppgave likhetstegnet har i likninger, og hvilken operasjoner som er tillatt å gjøre for at vektskålen er i balanse. For det man erfarer ved å bruke denne ideen er at, om man har 5 like tunge gjenstander på hver side av skålen og velger å ta bort en gjenstand fra den ene siden, så vil skålen komme i ubalanse. For å opprette denne balansen igjen, så ser vi at vi enten kan legge tilbake gjenstanden vi tok, eller ta vekk en gjenstand fra den andre skålen. (Se figur 5.2). Istedenfor å introdusere likninger for første gang ved å løse forskjellige type likninger og oppgaver som ligner på oppgave 3 i testoppgaven min hvor man må finne tallet som mangler, noe som er den vanlige måten, kan man heller introdusere likninger med å ta i bruk vektskålen slik at elevene får et inntrykk i hvordan man finner den ukjente, og får visuelt sett at man må gjøre den samme endringene på begge sider.



Figur 5.2. Bruk av vektskål som introduksjon for likninger

5.2 FORSTÅELSE FOR VARIABEL

Fra resultat delen kan vi trekke inn følgende oppgaver: 2c) og 2d) som illustrere at elever kan ha en misoppfatning med hva variabelen i et algebraisk uttrykk representerer. Som Herscovics & Linchecski (1994) uttrykker så føler elevene at de gjør meningsløse utregninger med symboler de ikke forstår, dette på grunn av at de ikke klarer å knytte de nye symbolene i algebra opp mot tidligere ideer de allerede har lært. Årsaken til dette kan være på grunn av hvordan læreboken introduserer algebra delen for elevene for første gang på ungdomsskolen som Kongelf (2015) fant ut i undersøkelsen sin. I og med at bøkene plutselig starter opp med å introdusere mange regler med både tall og bokstaver, så kan dette føre til en forvirring blant elevene med hva bokstavens rolle egentlig er i utregningene. Eksempel fra Kongelf (2015) som har blitt nevnt tidligere dukker det opp i bøkene at 2a + 3a = 5a, uten noe forklaring på hvorfor det skal være slik, som kunne ha blitt begrunnet med multiplikasjon med gjentatt addisjon. På grunn av dette kan elevene lage seg sin egen forklaring på hvorfor 2a + 3a = 5a. De man kan legge merke til ved første øyekast er at tallene 2 og 3 blir lagt sammen, og man beholder bokstaven, siden begge leddene består av a, må også resultatet inneholde bokstaven a. Elevene kan da lage et bilde om at man skal gjøre noe med tallene for seg og bokstavene for seg. Dette for er for å kunne gi mening med det nye som blir lært, og samtidig prøve å koble dette opp mot noe de allerede har lært tidligere ved å assimilerer slik Piaget mener læring skjer.

Dette problemet med forståelsen av variabelen kan vi se igjen i utregningene elevene har gjort i figur 4.7 og 4.8b). I figur 4.7 ser vi at elevene har gjort følgende: $\frac{2b^3}{3b} = \frac{6b}{3b} = 2b$. Da jeg tilfeldig valgte elever til intervju, hadde jeg klart å plukke ut eleven som hadde svart 2b på denne oppgaven. Det vi ser er at denne eleven hadde tatt eksponenten fra b og overført den til 2 taller, slik: $\frac{2^3 b}{3b} = \frac{2*3b}{3b} = \frac{6b}{3b} = 2b$, basert fra utsagnet fra intervjuet med denne eleven. (se figur 5.3). Dette kan ha med misoppfatningen om at man ikke kan blande sammen tall og bokstaver, altså at man ikke kan regne ut b^3. I tillegg ser vi at forkortingen av $\frac{6b}{3b}$ skjer ved at tallene forkortes til 2, og så beholde en bokstav b. Det samme er blitt gjort i figur 4.8 b) også, at elevene har forkortet tallet som står med x'en, og beholdt en x i løsningen: $\frac{4x+2}{8x} = \frac{4x}{8x} + 2 = \frac{1}{2}x + 2$, hvor uttrykket har blitt splittet opp til et ledd som inneholder bokstaver og et ledd med tall. Dette kommer tydelig av at elevene ikke har en forståelse for hva bokstaven står for, og at like bokstaver har den samme verdien. Som da Jakobsen (2012) nevner i artikkelen sin så overgeneraliserer elever regler og operasjoner fra aritmetikk som nødvendigvis ikke gjelder i algebra, dette igjen på grunn av at de ikke har forståelse for hva denne variabelen er, som igjen kommer av måten læreboken presenterer algebra på. Dette da ved at kapittelet starter med engang å introdusere bokstaver i regning enn å ha en myk overgang fra aritmetikk til algebra, hvor man gradvis introduserer en bokstav i uttrykket som en variabel gjennom å generalisere.

Meg: Hvordan løste du oppgave 2c)?
Eleven: 2b i tredje kan vi omforme til 6b, så skal dette deles på 3b. Jeg kan derfor ta 6 del på 3 som gir 2 ganget med b.
Meg: Hvordan blir $2b^3$ til $6b$?
Elev: Fordi $2b^3$ er $2^3 b$, siden man kan slå sammen tallene for seg og bokstavene for seg. Derfor får vi 6b, på grunn av to i tredje er 2 ganget 3 som er 6.
Meg: Men hvorfor ende du opp med 2b som svar?
Elev: Siden vi nå har 6b i over brøkstreken og 3b under brøkstreken, kan vi ta 6 delt på 3 som gir 2, og b delt på b som gir b. Derfor blir det 2b.

Figur 5.3: Utsagn fra intervju av en elev

Det man også kunne observere fra testoppgaven angående oppgave 2d) var at en elev klarte å komme fram til riktig løsning ved å bruke metoden med å faktorisere teller og deretter forkorte brøken slik:

$$\frac{4x+2}{8x} = \frac{2(2x+1)}{8x} = \frac{2x+1}{4x}$$

Men hvis vi ser på besvarelsen i oppgave 2c) for den samme eleven ser vi at eleven har brukt metoden med å faktorisere uttrykket for så å forkorte den, men i motsetning av oppgave 2d) så kommer denne eleven fram til feil svar i oppgave 2c). Måten eleven har forkortet brøken på er:

$$\frac{2b^3}{3b} = \frac{2*b*b*b}{2+1*b} = \frac{b^2}{1}$$

Forskjellen mellom disse to oppgavene er at i oppgave 2c) har vi både partall og oddetall i uttrykket, mens i oppgave 2d) består alle leddene av partall. Det vi ser her er at eleven har faktorisert tallet 3, et oddetall, som 2 + 1, for å ha noe og kunne stryke vekk i telleren. Dersom et av leddene i oppgave 2d) hadde inneholdt et ledd med oddetall, ville oppgaven nok ha blitt faktorisert på samme måte som i oppgave 2c), ved å omforme oddetallet om til en sum av ledd eller differanse av ledd. Men de vi kan trekk ut fra denne besvarelsen er at elever også kan ha en misoppfatning innenfor faktorisering av uttrykker, som da er et problem med grunnleggende basiskunnskaper i aritmetikk.

5.3 OVERSETTING FRA TEKST TIL ALGEBRAISK UTTRYKK OG GENERALISERING

I artikkelen «*Purpose in School Algebra*» av Bell (1995) tar de for seg et problem kalt «students and professors problem» som går ut på at elevene skal oversette utsagnet: *«There are six times as many students as professors at this university»*, til et algebraisk uttrykk. Det viser seg at mange elever har problemer med denne oversettingen fra verbal til algebra, hele 37 % av elevene i denne artikkelen svarte feil, hvor mange hadde svart 6S = P. (S = students, P = Professors). For å undersøke dette valgte jeg å ha en lignende oppgave i min test oppgave (se oppgave 4 figur 4.12). Resultatet fra min undersøkelse viste at hele 31 % av elevene ikke klarte å løse oppgaven riktig. Den mest åpenbare forklaringen for feilen i «students and professors problem» er at elevene oversetter den verbale formen, altså at det er seks studenter per professor. Flertallet av elevene i min undersøkelse, som da var 21 % av elevene, hadde oversatt den verbale utsagnet til $m + 6 = k$. Som vi finner i «students and professors problem» ligger feilen i at elevene oversetter uttrykket med at for hver k kroner er det 6 kroner mer med m kroner. I følge Bell (1995) ligger årsaken til problemer i oversettingen fra tekst til algebra med utsagn som $3a + 4b$ som kan ha vært avledet fra 3 epler og 4 bananer, noe som har vist seg å være en hyppig kilde til feilen, som vi kan finne igjen i mange algebraiske tekster.

Den siste oppgaven (oppgave 5, figur 4.14) tar for seg det å generalisere et generelt uttrykk ved å se en sammenheng mellom følgen som er oppgitt. Det jeg la merke til i denne oppgaven var at i oppgave c) hvor elevene skulle komme fram til et generell uttrykk som beskrev utviklingen til figurmønsteret, så var det hele 31 % av klassen som hadde gjort feil eller ikke visste hvordan uttrykket skulle se ut. Årsaken til dette er nok fordi elevene ikke er kjent med å gjøre slike oppgaver. Det å generaliser et generelt uttrykk vil være en fin oppgave som en introduksjonsoppgave for algebra, på grunn av at man i generaliseringen blir tvunget til å trekke inn og ta i bruk bokstaver for å beskrive utviklingen i mønsteret. Dette vil gi elevene en bedre forståelse for hva variabelen og bokstaven i uttrykket representerer. Men det Kongelf (2015) har funnet ut er at oppgaver som på figur 2.11, er oppgaver som blir presentert i slutten av kapittelet som en oppsummering, etter at man har vært gjennom de grunnleggende reglene i algebra, uten å ha fått forståelsen for betydningen av bokstaven.

5.4 DISKUSJON

Det vi kan oppsummere med er at mye av vanskene i algebra kommer av misoppfatning i grunnleggende regneferdigheter innenfor aritmetikken når man tar i bruk dette i algebraen. Ut i fra testoppgaveresultatene endte jeg opp med at elevene hadde misoppfatninger innenfor følgende områder:

- Problemer med grunnleggende basiskunnskap fra aritmetikk, og om dette blir forfulgt i algebra. Som for eksempel prioritering av regneoperasjoner, potens regler, brøk og likhetstegnet
- Forståelsen for variabel
- Oversetting fra tekst til algebraisk uttrykk og generalisering

Det man også kan legge merke til er at alle disse områdene i stor grad overlapper hverandre. Om man jobber med oppgaver hvor man skal generaliser, vil man få en forståelse for variabel begrepet i algebra. Gjennom å generalisere vil også anvendelsen av ferdigheter i aritmetikk over på algebraen blir lettere for elevene, da som Booth (1988) never så er algebra egentlig bare generalisering av aritmetikk.

Det vi kan se er at generalisering er et viktig begrep i matematikk. Så selv om elevene ikke selv klarer å generalisere, så er det viktig at lærerne da lager oppgaver slik at elevene blir tvunget til å generalisere, og ikke bare løse oppgaven ved å bruke regler som er innlært. Generalisering kan brukes innenfor alle områder i matematikk, også algebra. Som i figur 2.11, hvor elevene skal komme fram til et generelt uttrykk for hvor mange fyrstikk figur nr. n har, inngår det generalisering. Selv om oppgaven ikke nevner dette, så er det akkurat det oppgaven vil elevene skal gjøre, nemlig at man skal generalisere et generelt uttrykk for mønsteret i systemet. Generalisering og spesialisering kan brukes for å få en forståelse for regne regler i algebra. Eksempelvis forståelse for hvordan man løser potens uttrykker, som flere elever hadde problemer med å løse ifølge utført testoppgave (oppgave 1g):

1. $(a+b)^2 = (a+b) * (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$ (Bruke kvadartsetningen).
2. $(a * b)^2 = a^2 * b^2$

For å få en forståelse i forskjellen mellom de to uttrykkene over, kan man først ved spesialisering, altså velge tilfeldige tall for a og b kombinert med potensregler, og se hva som skjer med uttrykket. Ved å bruke valgte tall for bokstavene kan dette føre til en forståelse for hvordan svaret blir, og bruker dette til å se en sammenheng i måten man løser uttrykket på.

Fra oppgave 1d) ser vi at flere elever hadde skrevet potensuttrykket i oppgaven slik (et spesialtilfelle av punkt 1 over):

$$(10-4)^2 = 100-16$$

Elevene har da opphøyd begge leddene hver for seg, ved å ta i bruk multiplikasjon regel for poten (potensuttrykk nr. 2 over). Dette viser at eleven ikke har forstått at $(10-4)^2 = (10-4)*(10-4) = 6*6 = 36$, på grunn av potensregel som sier at eksponenten forteller hvor mange ganger grunntallet er multipliser med seg selv. Her vil da $(10-4)$ være grunntallet, og eksponenten er 2. Dermed fortelles det at $(10-4)$ skal multipliseres med seg selv to ganger: $(10-4)*(10-4)$. For å bekrefte at det er slik det skal gjøres, så kan man ta i bruk hjelpemidler som kalkulatoren og taster inn uttrykket $(10-4)^2$ og får opp at det blir 36. Dette vil da gi en grundigere forståelse for hvorfor dette blir slik, og dermed kan vi appellere dette på bokstavregninger. For det jeg fant ut var at i oppgave 1g), som inneholder et slikt potens uttrykk med bokstaver, så hadde elevene brukt den samme metoden som beskrevet over. Dette på grunn av at elevene ikke er bevist på at uttrykkene $(a+b)^2$ og $(a*b)^2$ løses på forskjellige måter, på grunn av at elevene ikke har erfaring med å se en struktur med spesialtilfeller i aritmetikken. Som igjen kommer av at i undervisningen på skolen så er fokuset rettet mot at elevene skal lære de forskjellige reglene og teknikkene, men ikke på hva kjennetegn man må se etter i oppgaven for å velge riktig teknikk. I dette tilfelle ser vi at kjennetegnet i uttrykket $(a+b)^2$ er at det er et pluss tegn inni parentesen, på grunn av dette må man løse potensen ved å bruke kvadratsetningen. I uttrykket $(a*b)^2$ ser vi at det er et multiplikasjonstegn i parenteser, på grunn av dette vil måten å løse opp potensen være å opphøye alle faktor i parentesen med 2, fordi:

$$(a*b)^2 = (ab)^2 = (ab)*(ab) = ab*ab = a*b*a*b = a*a*b*b = a^2*b^2$$

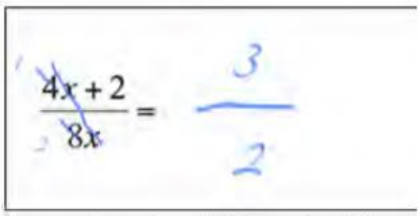
Slike forklaringer og fremgangsmåter kan man se mangler i dagens skole når man introdusere grunnleggende algebra på ungdomsskolen. Dette stemmer med det Mason (2011) tar opp om generalisering og spesialisering, at ved å prøve spesialtilfeller så vil man oppdage en felles underliggende struktur (generalisering) i teknikkene som da er en god måte å komme i gang med algebraisk tenkning.

Ut fra Kongelf's (2015) funn så viser det seg at det finnes forhold i lærebøkene som fører til misoppfatninger blant elevene, som blir tatt i bruk videre i utdanningen innenfor algebra. Dette kan da være en forklaring på hvorfor elevene syns algebra er vanskelig. Men man kan ikke legge skylden på lærebøkene, fordi elevene ikke frivillig vil lese en matematikkbok. Men etter veiledning fra lærerne, må elevene bruke boken for å jobbe med oppgaver. Så læreboken blir for det meste brukt av elevene for å kunne jobbe med oppgaver med tanke på gjennomgangen fra undervisningen. Slik at det er lærerne som er de som bruker læreboken mest, og baserer undervisningen sin etter hvordan boken introduserer kapitlene. Når læreren da følger lærerbøkene, som inneholder manglende forklaringer og som ikke knytter algebra opp mot tallære, da begynner elevene og syns at algebra er vanskelig og uforståelig og får en del spørsmål. Artiklene *«Hvorfor er det så vanskelig med matte?»* av Nøra, S (2015), og *«Derfor er algebra vanskelig»* av Jakobsen, H (2012), kommer det fram at lærere som ikke behersker matematikk godt nok, og da algebra, vil være dem som legger opp undervisningen basert på boken. Noe som igjen medfører at det ikke er rom for elevens spørsmål eller innspill i undervisningen. En annen årsaken for at elevene har problemer med algebra kan være at læreren har noen av de samme problemene med forstå algebraprinsipper som elevene har. Derfor er det viktig at lærere har en dyp forståelse av stoffet for å kunne undervise på en god måte. I tillegg til solid kunnskap, nevner artikkelen av Jakobsen, H (2012) at lærerne også må ha kunnskap både om elevenes tankegang og ulike læringsstrategier. For når lærerne først er oppmerksom på hvordan elevene tenker, da kan de ta tak i måte elevene tenker på når stoffet blir introdusert slik at misoppfatninger blir oppklart.

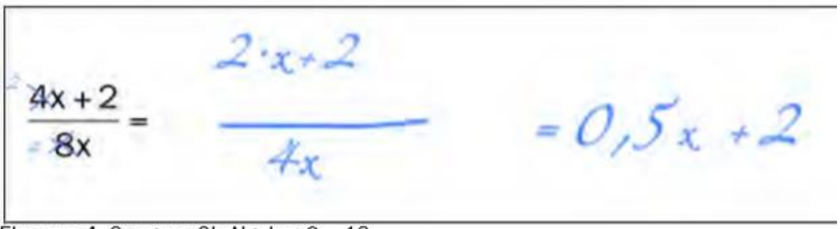
Det at algebra ikke knyttes opp mot tallære er en årsak for at elevene kan ha vanskeligheter, siden de får problemer med å se sammenheng med det de har lært tidligere. Rapporten fra utdanningsdirektoratet (2012) tar for seg studier som har blitt gjort på elevenes kunnskap, og trekker fram at årsaken for at elever syns at algebra er vanskelig er på grunn av at de ikke har en solid kunnskap om tall og de grunnleggende regneoperasjonene (addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon), og regneregler. Oppgaven fra rapporten hvor elevene skal finne et tall slik at regnestykket resulterer med det som står på høyreside, lyder slikt: 3 + 2 * --- = 15. Det kommer nemlig fram fra resultatene i rapporten at 66 av 99 elever i 10.trinnet svarte ukorrekt på oppgaven. Framgangsmåten de gjør er å legge sammen 3 + 2 og får 5, og så tenker de hva man kan gange 5 med for at det skal bli 15, altså 3. Dette viser da at elevene ikke helt har kontroll på regnereglene. At multiplikasjon / divisjon alltid skal gjennomføres før en addisjon eller subtraksjon. Og da jeg testet den samme oppgaven på elevene som hadde start opp med matematikk R1, så viste resultatet at hele 31 % av elevene hadde tenkt på akkurat samme måte som disse 10. trinn elevene. Dette viser at misoppfatninger i grunnleggende ferdigheter man lærer på grunnskolen forfølger elevene videre i utdanningen sin om det ikke blir oppdaget tidlig og rettet opp.

En annen interessant oppgave fra rapporten fra utdanningsdirektoratet (2012) er oppgaven hvor elevene må forkorte: $\frac{4x+2}{8x}$. Her velger fleste elevene å stryke vekk x leddene fra telleren og nevneren uten å ta hensyn til 2 tallet som også har en sammenheng med 8x. (Figur 5.4). Bare 2 av 86 elever hadde svart riktig på oppgaven. Her ser vi da at elevene ikke har godt nok forståelse med brøkuttrykk. Elevene klarere ikke å reversere regelen, at to brøk med samme nevner kan legges sammen ved å legge sammen telleren. De ser ikke at uttrykket i oppgaven da kan skrives om til to brøk, hvor begge brøkene har samme nevner:

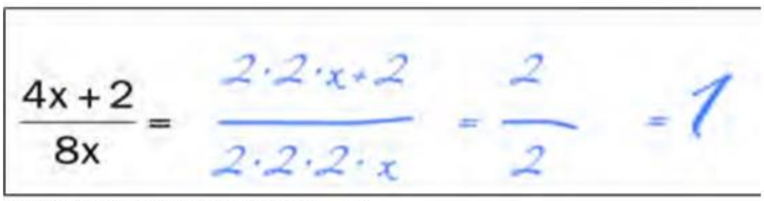
$\frac{4x+2}{8x} = \frac{4x}{8x} + \frac{2}{8x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} = \frac{2x+1}{4x}$.



Elevsvar 3. Oppgave 9b Algebra 8 – 10



Elevsvar 4. Oppgave 9b Algebra 8 – 10



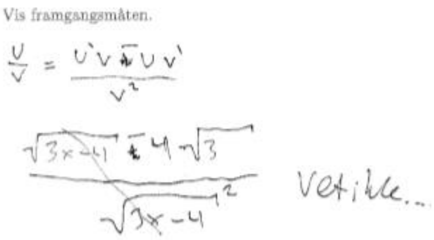
Elevsvar 5. Oppgave 9b Algebra 8 – 10

Figur 5.4: Noen elevbesvarelser fra rapporten fra utdanningsdirektoratet (2012)

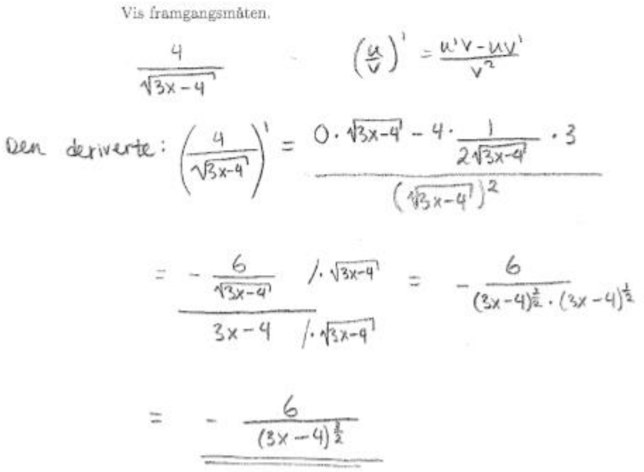
De samme problemene ser vi igjen i R1 klassen jeg utførte testoppgave som også besto av denne oppgaven, og det var flere elever som splittet opp brøken på samme måte som elevene i 10. trinnet fra rapporten gjorde. Igjen ser vi at misoppfatninger fra grunnleggende ferdigheter i aritmetikk kombinert med algebra man lærer på grunnskolen er årsaken til at elevene syns algebra er vanskelig, og gjør det dårligere i algebra i TIMSS undersøkelsen i forhold til andre land.

Det vi kan se fra rapporten og utført testoppgave er at det ikke bare er slike misoppfatninger som gjør det vanskelig for elever på ungdomstrinnet, men dette er også årsaken for hvorfor elevene i videregående også har problemer med algebra. Fra en masteroppgave skrevet av Charlotte Merete Dahl (2011) er det lagt ved noen elev besvarelser fra undersøkelse utført på videregående skolen. Oppgavene som er brukt i undersøkelsen er oppgaver som ble brukt i TIMSS Advanced 2008 på trinn 13, altså siste året på videregående i faget R2. Her finner vi at elever som tar utdypning i matematikk sliter med de samme problemene som elever på ungdomsskolen har. Eks: fikk elevene en oppgave hvor de skulle derivere uttrykket: $\frac{4}{\sqrt{3x-4}}$. I en elev besvarelse kommer eleven fram til uttrykket, $\frac{\sqrt{3x-4}-4\sqrt{3}}{(\sqrt{3x-4})^2}$. Som i eksempeloppgaven fra ungdomsskolen, så forkorter denne elevene altså vekk $\sqrt{3x-4}$ over og under brøkstreken, uten å tenke på at $4\sqrt{3}$ også er en del av uttrykket. Den samme oppgaven løst av en annen elev, som skal forkorte uttrykke sitt: $\frac{\frac{-6}{\sqrt{3x-4}}}{3x-4}$. Det eleven egentlig prøver å gjøre er å fjerne $3x-4$ under den andre brøkstreken, og det eleven gjør er at han/hun multipliserer hele uttrykket, både teller og nevner med $\sqrt{3x-4}$. Men når elevene gjør det vil den øverste brøken bli forkortet, og uttrykket blir: $\frac{-6}{(3x-4)*(\sqrt{3x-4})}$, men det eleven endt opp med er uttrykket: $\frac{-6}{(3x-4)^{\frac{1}{2}}*(3x-4)^{\frac{1}{2}}}$. Se figur 5.5 for elevbesvarelsen.

Elevbesvarelse 1



Elevbesvarelse 2



Figur 5.5: Elevbesvarelse for derivasjonsoppgaven. Dahl, M.C (2011)

Vi ser da fra eksemplet at forenkling av algebrauttrykket er et problem som følger igjen fra lavere trinnet. Fra elevbesvarelsene i figur 5.5 ser vi at elevene vet hva det vil si å derivere en sammensatte funksjoner, og i begge besvarelsene bruker begge elevene kvotientregel for å derivere uttrykket. Men problemer starter når de skal forenkle uttrykket, noe som elevene på tidligere trinnene også hadde. Det vi ser er at elever har problem med algebrauttrykk når det kommer til bokstavregning kombinert med de grunnleggende reglene de gjennomgår på barneskolen med rene tall. Så problemet ligger i at algebra er vanskelig på grunn av at i det man skal ta i bruk regnereglene fra aritmetikken over på algebra med bokstaver, da starter elevene å tenke for komplisert på grunn av at det vil i algebra være et bokstavuttrykk i bilde noe det ikke gjør i aritmetikken. I aritmetikk så vil elever klare og forkorte uttrykket $\frac{8+2}{2}$, siden det er 8+2 i teller starter de med å legge dette sammen og får 10. Deretter divideres det med 2, og ender opp med 5. Løsning 1: $\frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$. I denne oppgaven har de ikke behov for å gjøre brøken om til to brøker før de løser oppgaven, som løsning 2: $\frac{8+2}{2} = \frac{8}{2} + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$. Men om de hadde fått mulighet til å praktisere mer på løsning 2, vil de kunne få en forståelse for hvorfor og når man kan gjøre om en brøk til to brøker. Dette er en god øvelse og et godt triks elevene kan ha med seg videre med tanke på oppgaven i figur 5.4 hvor elever skulle forkorte brøken $\frac{4x+2}{8x}$. Elevene har en forståelse av at 4x+2 ikke kan legge sammen, på grunn av at uttrykket består av et ledd med bokstav og et ledd med tall. Og når dette uttrykket skal deles med 8x, som er et bokstavuttrykk, vil de automatisk forkorte 8x med bokstavleddet 4x i telleren. På grunn av forståelsen om at man kan gjøre noe med like bokstaver. Vi kan dermed konkludere med at grunnleggende årsaken for at algebra er vanskelig for elevene er på grunn av at elever ikke får øvelse i og se etter hvorfor man løse oppgavene som man gjør. Siden elevene er vant til å løse oppgaver fra venstre til høyre, så vil de få problemer med å gå den andre veien (bakover), fordi dette ikke blir fokusert i undervisningen.

En måte å utvikle algebraisk tenkning på hos elevene er ved å se en sammenhengen fra spesialtilfeller, eksempel ved regning av brøk med tall, og utlede en generell metode som kan tas i bruk i algebra med rasjonale uttrykk (brøk uttrykk). I figur 5.6 ser vi noen typiske brøk addisjoner som er hentet fra en presentasjonsnotat om fra aritmetikk til algebra («From arithmetic to algebra») ved universitetet i Oregon av H. Wu (2009). Det vi kan se med disse addisjonene i brøk er hvordan man legger sammen to brøk med forskjellige nevner, og om man ser nøye etter kan man dessuten se et mønster i metoden som brukes.

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{8} = \frac{20+3}{24}$$
$$\frac{11}{15} + \frac{3}{20} = \frac{44+9}{60}$$
$$\frac{8}{21} + \frac{5}{14} = \frac{16+15}{42}$$

Figur 5.6: Addisjon av brøk (aritmetikk) fra presentasjon fra University of Oregon om Fra aritmetikk til algebra av H. Wu (2009)

Ifølge presentasjonsnotatente av Wu (2009) så ser elevene den rasjonale uttrykket (figur 5.7) som et helt nytt problem, istedenfor å knytte dette opp mot mønsteret de har observert i brøk i aritmetikk delen. Derfor ser de problemet i figur 5.7 som noe helt nytt. Dette viser da at læring i algebra ikke tar utgangspunktet i tallæren.

$$\frac{x^2-4}{2x-3} + \frac{7x}{x^4+1}$$

Figur 5.7: Rasjonaluttrykk, brøk uttrykk i algebra delen. Wu (2009).

Fra oppgavene i figur 5.6 kommer elevene fram til et generell uttrykk som fungerer for addisjon av brøk i aritmetikk. Ved å jobbe med spesialtilfeller av et uttrykk, som i dette tilfelle brøk med tall, kan man oppdage et mønster (se figur 5.8). Ved da og ta i bruk det mønsteret som har blitt oppdaget i den rasjonale uttrykket, altså i algebra, kan man lett legge sammen den algebraiske uttrykket i figur 5.7, og få: $\frac{x^2-4}{2x-3} + \frac{7x}{x^4+1} = \frac{(x^2-4)(x^4+1)+(7x)(2x-3)}{(2x-3)(x^4+1)}$.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD}$$

Figur 5.8: Metoden for å legge sammen to brøk med forskjellige nevnere, Wu (2009)

Det man ser her er hvordan man kan ta i bruk generalisering i aritmetikk for så å knytte dette opp mot det nye konseptet i algebra delen. Det er slike oppgaver / aktiviteter som er med på å utvikle abstrakt tenkning, altså algebraisk tenkning, hos elevene. Men dessverre legges ikke undervisningen opp til at elevene skal se en slik sammenheng i aritmetikken som man kan ta i bruk i algebra, noe som vil gjøre algebra lettere for elever.

Men det er ikke nok å bare gi elever oppgaver og la de jobbe med dem og tro de har fått forståelse i algebra. For som Piaget mener så lærer elevene ved at de konstruerer den nye informasjonen slik at det enten passer til tidligere erfaringer eller ved å omforme eksisterende skjemaer. Siden konstrueringen skjer i elevenes hode, kan det være stor mulighet til at elevene da konstruerer den nye kunnskapen på en feil måte slik at misoppfatning oppstår. For å få en bekreftelse på om elevene har forstått den nye informasjonen riktig, må vi som lærere la dem få uttrykke det de har forstått. Et av punktene i læreplanen for grunnleggende ferdighet, står det at elevene skal kunne uttrykke seg muntlig også i matematikk (Udir). I flere artikler som jeg har lest tidligere kommer det også fram at elever selv må være aktive for å kunne lære noe og tilegne seg ny kunnskap. Når man bruker samtaler i matematikk blir det i form av antagelser og overbevisninger for å få fram og sette ord på hva det er man har forstått, samtidig prøve å overbevise medelever om at din tankemåte er korrekt. Til dette må det være rom til at elevene får mulighetene til å uttrykke seg. Antagelser og overbevisning blir også tatt opp i boken *Å lære algebraisk tenkning* (Mason, 2011) som en evne elevene må kunne få ta i bruk for å få en forståelse for hvordan man tenker algebraisk, ved at de snakker om det de har forstått vil det føre til at eleven samtidig får et overblikk over tankegangen sin. Dette kan da være nyttig med tanke på at enten faller alt på plass, eller alt faller sammen. Da ser både eleven, medelever og lærerne sammenhengen i tankegangen og kan komme inn med kommentarer om noe er uklart i uttalelsen. Dette vil da være med på å redusere misoppfatninger i det elevene prøver å lære, og man tar tak i misoppfatningen før den blir lagret i minnene.

I både boken til Mason (2011) og ressursheftet fra utdanningsdirektoratet (2012) kommer det fram forskjellige type aktiviteter og oppgaver som kan brukes i undervisningen for å få elevene til å utvikle algebraisk tenkning, hvor det også blir nevnt måter å arbeide på som kan fungere. Dette er ved å arbeide individuelt, noe som alltid er greit i starten for da kan man utvikle en ide som kan prøves ut på oppgaven. Når elevene har tenk en stund på oppgaven kan det være greit å la elevene få uttrykt dette ved forskjellige type diskusjoner. Det kan da enten være diskusjon i par, i en liten gruppe eller som en klasse. Meningen med diskusjonene er at elevene skal få mulighet til å utrykke ideen de har kommet fram til og overbevise medelevene om denne ideen. Samtidig vil det i diskusjoner være rom for å endre sin ide/tankemåte om den ikke skulle være god nok, ved og høre ideene fra de andre elevene i gruppen. På denne måten får elevene et inntrykk av at det er mulig å løse problemet på forskjellige måter og andre måter enn de selv hadde tenkt. Altså at det ikke alltid er slik at man trenger å komme fram til løsningene med fasitmetoden, men da må lærerne også ikke fokusere på en spesiell løsningsmåte men heller gi rom for at elevene kan være kreative.

I TIMSS Advanced rapporten (Grønmo, 2016) blir det tatt opp bruken av lekser i skolene, og at det variere i hvor vidt de gis lekser spesielt på videregående skoler. Personlig pleier ikke jeg og gi lekser som skal gjøres til neste time, men innimellom kan det være at jeg gir dem 2 – 3 små oppgaver som elevene får i oppgave å jobbe med til neste time eller iallfall få sett gjennom å tenkt ut en måte å løse oppgaven på. Dette er ikke for gi elevene mer arbeid i fritiden, med tanke på at det er noen elever som faktisk jobber utenom skoletiden, men for at elevene skal få mulighet til å reflektere over det som har blitt gjennomgått den siste undervisningstimen hjemme. Rapporten (Grønmo, 2016) tar for seg at det har blitt gjort studier som viser at det er en effekt i elevenes læring når det gjelder å gi lekser, spesielt da hos elever på høyere trinnet. Det er også viktig å tenke på hvor mye lekser, hvilke type oppgaver som gi i lekser, hvordan er oppfølgningen av lekser er. Fra rapporten (Grønmo, 2016) kommer det fram at i Norge er det typiske å gi oppgaver som elevene må løse, blant seks typer lekser som ble undersøkt. Dette stemmer nok helt, for når jeg gir lekser så er det oppgaver som elevene skal løse. Årsaken til at jeg gir elever slike oppgaver er for at elevene skal se en sammenheng og forstå når de kan bruke de forskjellige metodene for å løse oppgaver på. Blant annet lærer elever i R2 å løse trigonometriske ligninger, i alle slike ligninger vil de inneholde sin(x), cos(x) eller tan(x), men måten ligningene er satt opp på fører til at man må bruke forskjellige metoder. Når de da ser denne sammenheng vil de forstå at trigonometriske ligninger på denne formen (1) løses med denne metoden, mens ligning på en annenform (2) løses med en annen metode igjen.

1. $\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 1$
   $Metode: omforme\ uttrykket\ til\ en\ ren\ sinusfunksjon. Før\ man\ løser.$
2. $\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 0$
   $Metode: dele\ alle\ ledd\ med \cos(x)\ \ for\ å\ omforme\ til\ en \tan(x)\ \ ligning. For\ så\ og\ løse\ oppgaven.$

Eller det kan være og gi to forskjellige produktfunksjoner som må integreres, ved å bruke enten variabelskiftet eller delvis integral. Når elever da jobber med oppgaver vil elevene få et bilde på hvordan funksjonen må være for å kunne bruke delvisintegral, og når man skal bruke variabelskifte. For når leksene blir gitt er det viktig å spesifisere at elevene må legge merker til når de bruker de forskjellige metodene, og hvilken type oppgave metoden kan anvendes på. Så lærere må bli bevist å ta i bruk generaliseringsprinsippet og spesialisering prinsippet for å hjelpe elevene med å se en generell sammenheng fra spesielle tilfeller, slik at elevene forstå når de skal bruke de forskjellige metodene og hvordan oppgavene må se ut.

Så hovedansvaret ligger da hos lærere, og hvordan man velger å legge opp undervisningen. Om man velger å følge bokens måte og framstille temaet på, eller i tillegg også knytte inn måter elevene kan generalisere på ved å bruke metoden som har blitt gjennomgått. Dermed bør man ikke introdusere algebra slik som bøkene legger opp, men heller finne en annen vinkling/fremgangsmåte. Til dette kan man da bruke Kongelf (2015) resultater fra forskningsrapporten om introduksjonskapittelet i lærebøkene, om å bygge algebraen videre på tall-lære. Dette kan vi da gjøre ved å la elever generalisere tallmønstre, slik at de ser et mønster i systemet for deretter å kunne uttrykke et generelt uttrykk ved å trekke inn en bokstav som da kan variere (figur 2.11). På denne måten blir elevene tvunget til å ta i bruk bokstaver i regningen sin, som igjen vil gi en bedre forståelse for hva bokstaven er, og i tillegg vil variabelaspektet kommer tydeligere fram. I dette tilfelle snakker vi da om generalisering for å få forståelse. Tidligere i denne teksten tok jeg opp hvordan man kan bruke generalisering i undervisning, da dette er en viktig nøkkel i algebra for å få forståelse og kategorisere kunnskapen opp mot tidligere kunnskap, ved å se en sammenheng mellom det nye som læres, og det som allerede har blitt lært.

I tillegg til å generere for å få en forståelse for bokstaven i algebra, så mener Nickson (2004) at elevene må få eksplisitt uttrykt hvilke forskjellen det er mellom algebra og aritmetikk for at algebra skal bli meningsfullt. Ellers vil elevene ta i bruk prosedyrer / metoder brukt i aritmetiske konsepter direkte på algebraiske konsepter uten å være klar over forskjellene som gjelder aritmetikk men ikke i algebra. For eksempel at likhetstegnet i aritmetikk betyr «å komme fram til en løsning», men i ligninger i algebradelen betyr «likevekt» eller at utrykket på venstre side er lik uttrykket på høyre side. Eller bokstav bruk i aritmetikk brukes for forkortelse for enheter (m = meter, l = liter), mens i algebra så står ikke bokstaven for gjenstand. Uten å ha en slik forståelse for forskjellene, så vil overgangen fra aritmetikk til algebra ikke bli så effektivt. *«It is not possible to have an understanding of and an ability to «do» algebra without first of all having an understanding of an ability to «do» arithmetic.»* (Nickson, 2004, s. 94). Altså må elevene ha en god forståelse for aritmetikk, tallbehandling, for å kunne få en forståelse i algebra, som også rapporten fra utdanningsdirektoratet kommenterer (2012). Dermed er vansker innenfor algebra relatert til ufullstendig forståelse i aritmetikk og på grunn av nye konsepter man lærer i algebra (eks: variabel).

Dermed er det viktig for oss lærere å være bevist på at man tar i bruk generalisering og spesialisering for å knytte sammen aritmetikken og algebra. Dette er en god metode og ta i bruk for å få elevene til å lære seg algebraisk tenking. Først når eleven vet hva generalisering går ut på, vil de ha mulighet til å kunne bruke denne evnen videre i sin fremtidige studie som en type studieteknikk. Videre må elevene så kunne få uttrykke seg muntlig det de har generalisert ved at vi som lærere må legge opp undervisningen slik at elevene får sjansen til å diskutere. Vanligste formen for undervisning i matematikk er at lærer gjennomgår teori på tavlen, og så får elevene jobbe med relaterte oppgaver. For å få en helhet i læringsprosessen må elevene uttrykke seg, ved å kunne sette ord på tankene sine som kan hjelpe dem med å se helheten og sammenheng mellom gammel og nye kunnskaper som igjen gjør det lettere og organisere kunnskapene sine.

Så jeg som lærer kommer til ta i bruk generalisering slik at elevene får generalisere de forskjellige regneoperasjoner både med tall og bokstaver for å få en bedre forståelse, og samtidig la elever få mulighet til å snakke om hvordan de løste oppgaven. For gjennom diskusjon vil elevene få oppleve hvorfor oppgaven ble løst riktig eller hva det var som var feil, eventuelt hva som var feil i tankegangen og får mulighet til å endre denne tankegangen. For jeg tenker at det ikke vil være for seint å begynne og generalisere på videregående skole selv om man har R2 matematikk, viktigste er at elevene som har problemer da har mulighet til å begynne og forstå det grunnleggende med algebra. I tillegg vil jeg fortsette og gi de små lekser, ikke nødvendigvis etter hver time, men noen ganger for at elevene skal få mulighet til å reflektere og generalisere. Det er dermed viktig at det skjer læring med forståelse, og at dette skjer ved at elevene selv er aktive og deltar i faget. Elevene må kunne få være kreative og finne forskjellige måter å løse oppgaver/problemer på, da skjer det en generalisering når man begynner å tenke hva skjer med oppgaven om tallene / regneoperasjonene endrer seg. Samtidig må elevene kunne få uttrykke seg slik at generaliseringen de har gjort skal gi en mening og sitte i minnet. Dette tror jeg vil hjelpe å redusere problemene elever har i algebra i dag.

6. AVSLUTNING

Målet med denne oppgavene for meg som en nyutdannet lærer var å få en forståelse for hvorfor elevene har vansker med algebra, og hva årsaken til dette kan være. Gjennom denne oppgaven har jeg fått et bilde på hva grunnen til problemene i algebra kan være. Ved å ta i bruk oppdagelsen min gjennom denne oppgaven kan jeg som lærer kunne hjelpe elevene ved å ta utgangspunkt i de vanligste problemene elevene kan ha i algebra, og bruke dette til å forberede min undervisningen. Arbeidet med denne oppgaven har derfor gitt meg en pekepinn på hva som må fokuseres på for å redusere misoppfatningene elevene har fra tidligere.

6.1 KONKLUSJON

Problemstilling min for denne oppgaven var:

Hva er årsaken til at elevene syns algebra er vanskelig?

Er det hull i grunnleggende kunnskap og/eller misoppfatninger hos elever på videregående skole som gjør at algebra er en vanske for dem?

Det jeg har erfart gjennom denne masteroppgaven, og gjennom utført testoppgaver blant elever i matematikk R1 klasse er at elever som går på videregående skole, og som også i tillegg tar fordypning i faget har misoppfatninger med seg videre fra grunnskolen. Misoppfatningene eller problemene elevene har i algebra som gjør emnet vanskelig for dem som ble oppdaget i undersøkelsen var:

- Problemer med grunnleggende basiskunnskap fra aritmetikk, og om dette blir forfulgt i algebra. Som for eksempel prioritering av regneoperasjoner, potens regler, brøk og likhetstegnet
- Forståelsen for variabel
- Oversetting fra tekst til algebraisk uttrykk og generalisering

Vi kan se at disse samme misoppfatningene finner vi igjen fra elever i tidligere trinnet. Fra rapporten av utdanningsdirektoratet (2012) som er resultater basert på elever fra 10. trinnet viser det seg at mange av disse elevene har de samme misoppfatningene som elevene i klassen jeg undersøkte hadde. Dermed ligger mye av vanskene elevene har i algebra på videregående skole, og som er grunnen til at elever på videregående skole gjør det dårligere i algebra i TIMSS undersøkelse i forhold til andre land er problemene listet over, som er områder elevene blir introdusert i for første gang på ungdomsskolen og grunnskolen. Dermed kan vi si at grunnmuren til misoppfatningene i algebra er introduksjonsdelen av ferdigheter både i aritmetikken fra barneskolen og algebra på ungdomsskolen, og at elevene ikke får lært seg algebraisk tenkning gjennom måten undervisningen er lagt opp. Siden fokuset er å komme seg gjennom pensumet.

For å få elevene til å forstå algebra emnet og få dem til å tenke algebraisk så vil det å spesialisere og generalisere være et nyttig verktøy å ta i bruk i undervisningen. Ved at man ser på reglene i algebra ved å spesialisere seg først ved å bruke kjente tall, deretter anvende denne forståelsen man har oppdaget i spesialiserings delen over til noe generelt med bokstaver. Dette vil gjøre at elevene blir tryggere i bruken av grunnleggende ferdigheter i aritmetikk i algebra, men også samtidig vil elevene gjennom generalisering også få en bedre forståelse for bruken av variabel, da de blir tvunget til å ta i bruk bokstaver i uttrykket. Disse verktøyene er ikke kjent for elevene, derfor ligger det i måten lærerne velger å underviser på. Om læreren følger boken slavisk, som etter funn viser at variabelaspektet ikke kommer tydelig nok fram, introduksjonen bygger ikke videre på tall-lære, finnes feilaktige formuleringer, illustrasjoner og resonnement som er forhold som ligger til grunn for å utvikle misoppfatninger, vil dette heller ikke gi rom for å utvikle algebraisk tenkning hos elevene. Fokuset i undervisningen vil da være å gjennomgå de grunnleggende reglene innenfor emnet og teste ut reglene ved å jobbe med noe oppgaver. Elevene vil ikke da få mulighet til å utforske reglene på andre måter, ved å generalisere og se hva som skjer om man bruker regelen og gjør oppgaven baklengs. Noe som vil gi en bedre forståelse for bruk av de grunnleggende ferdighetene i aritmetikk i algebra, og se en sammenheng i metodene som brukes i aritmetikken og som kan anvendes i algebra.

Læring hos elevene skjer ved at de selv må være aktiv i sin egen læring, dette gjelder også i matematikk. Elevene vil tilegne seg den nye kunnskapen, prøve å huske dette ved å reflektere for å knytte dette opp mot tidligere kunnskap for at det lettere blir lagret i langtidsminnet. Dette ved at de enten assimilerer eller akkomodasjon (Piagets læringsteorier, se. 18), som innebærer at ny kunnskap tilpasser seg eksisterende skjemaer eller ved at ny kunnskap ikke passer til eksisterende skjema som fører til at man må endre den. På grunn av denne aktive mentale prosessen, fører dette til at elevene konstruerer en forståelse for den nye kunnskapen.

Men siden konstruksjonen skjer oppi hodene på hver enkelt elevene, vil det bli vanskelig for oss lærer å vite hvordan elevene har konstruert den nye kunnskapen. Har de forstått det nye konseptet riktig? Dermed vil konstruksjonen som skjer oss elevene føre til misoppfatning av konsepter om de ikke har forstått dem riktig. Og hvis man som lærer ikke er klar over misoppfatninger elevene kan ha, vil dette føre til at elevene tar meg seg den nye konseptet de har konstruert videre i utdanningen sin siden de tror de har forstått det riktig. For å kunne få en bekreftelse på om elevene har forstått noe riktig, vil det være viktig å ta i bruk samtale og dialog med riktig spørsmål. Dette vil være til hjelp for elevene på en slik måte at de vil få en bedre forståelse for hva og hvordan man håndterer den nye kunnskapen, som blant annet i algebra emnet. Dermed er det viktig at elevene konstruerer sin kunnskap, men de må også få muligheten til å sette ord på hva det er de har forstått, og hvordan de har forstått det. Dermed vil en radikal konstruktivistisk læringssyn være den beste måten hvor læring skjer med forståelse, da man individuelt må være aktiv i læringsprosessen og samtidig kunne sette ord på forståelsen av det nye.

Gjennom teorier jeg har lest, har jeg kommet fram til at det finnes måter som lærere kan ta i bruk for å få elevene til å utviklet algebraisk tenkning og hva man må fokusere på i undervisningen for å redusere misoppfatninger. Det som kan hjelpe elevene med å rette opp i misoppfatninger de har:

- Spesialisere og generalisere (Mason, 2011) for å se en sammenhenger og se sammenhenger mellom aritmetikk og algebra. Hvordan man kan oppdage et mønster i en metode brukt i aritmetikk, for å kunne anvende dette i algebra (Wu, 2009). Og hvordan man kan ta i bruk generalisering av et tallmønster for å uttrykke et generelt uttrykk for utviklingen i tallmønsteret, hvor konsekvensen vil være å måtte ta i bruk bokstav som beskriver utviklingen og få en forståelse for hvorfor bokstaver brukes og hva det menes med ordet variabel.

- Diagnostisk undervisning hvor undervisningen blir lagt opp slik at elever møter på problemer som tydeliggjør misoppfatninger de har og det skaper en kognitiv konflikt hos dem. Eneste måten å løse denne konflikten på og oppklare misoppfatningene på er gjennom diskusjon og refleksjon. (Brekke, 2002).

- Diagnostisk oppgaver før en undervisningsøkt hvor målet vil være *Å oppdage hvilke tanker de har om ulike begreper, Å bli kjent med de vanskene som er knyttet til disse begrepene, Å hjelpe læreren med å planlegge undervisningen.* (Brekke, 2002). På denne måten får læreren en pekepinn i hvordan undervisningen bør legges opp for å unngå misoppfatninger.

- Gi elevene lekser hvor oppgavene framhever de forskjellige metodene. Men det er også viktig å tenke på hvor mye lekser, hvilke type oppgaver som gis i lekser og hvordan oppfølgningen av lekser er. (Grønmo, L.S., Hole, A. & Onstad, T., 2016). Elevene må føle at de lærer noe gjennom leksene de gjør, og ikke bare ta i bruk regler på standardoppgaver. Eksempel kan da være at elever får oppgaver hvor de må utprøve forskjellige type metoder, og selv komme fram på egenhånd hva kjennetegnet er for å kunne bruke de forskjellige metodene. Dette vil da øke forståelse hos elevene slik at de ikke bare pugger noe metoder for at de må kunne det. Som også Nickson (2004) sier når han referer til Kieran om at flertallet av elevene ser på algebra som «pugging av regler og prosedyrer», noe som fører til at læring ikke skjer effektivt, og uten forståelse. Dermed vil elever ikke forstå bruken av disse reglene og prosedyrene som et verktøy i problem løsninger.

- Starte tidligst som mulig å utvikle matematisk tenkning hos elevene å ta i bruk generalisering. Siden det i hvert stadie (Piagets fire stadier, s. 18) er mulig å utvikle og legge grunnlaget for matematiske konsepter og ideer, og dette kan gjøres allerede i det første stadiet, sensorimotoriske stadiet hvor barnet da er mellom 0 – 2 år og har forståelse for tall og telling. Utviklingen i dette stadiet kan være med på å gi barnet en solid matematisk grunnlag i aritmetikk. Da en solid forståelse om tallbegrepet, å kunne beherske ferdigheter i tallbehandling vil gjøre overgangen fra aritmetikk til algebra lettere. (Utdanningsdirektoratet, 2012).

- Å la elever få uttrykke seg mer muntlig i matematikk, slik at de kan sette ord på den forståelsen de har konstruert.

Dermed kan man redusere misoppfatninger hos elever ved at læreren starter og generalisere på en fornuftig måte allerede på barneskolen i aritmetikken, slik at overgangen mellom aritmetikk og algebra overlapper hverandre og at elevene få en følelse av at algebra bygger videre på aritmetikken (læren om tall), og i tillegg vil de ikke ha en følelse av at algebra bare er et isolert nytt tema de skal lære om.

Dermed kan vi se at årsaken til at elever spesielt på videregående syns algebra er vanskelig, er på grunn av misoppfatningene de har meg seg videre fra tidligere skolegang, fra barneskolen og ungdomsskole. Misoppfatningene elever har som gjør algebra vanskelig, og som jeg gjennom denne oppgaven har prøvd å finne ut er:

1. <u>Læreboken:</u> Elevene blir introdusert for algebra for første gang på ungdomsskolen hvor regning med bokstaver blir introdusert. Gjennom funn av hvordan introduksjonskapittelet av algebra i lærebøkene på ungdomsskolen er lagt opp, viser det at forholdet der gir grunnlag til misoppfatninger. Dette er da blant annet forståelse for hva variabelen / bokstaven som blir brukt i algebra representerer, og hva det vil si når man tar i bruk denne variabelen i regler og teknikker fra aritmetikken.

2. <u>Lærer:</u> Siden det er lærerne som tar i bruker læreboken mest, og baserer undervisningen sin etter hvordan boken introduserer kapitlene. Når læreren da følger lærerbøkene, som inneholder manglende forklaringer og som ikke knytter algebraen opp mot tallære, da begynner elevene å syns at algebra er vanskelig og uforståelig og få en del spørsmål. Artiklene av Nøra, S (2015) *«Hvorfor er det så vanskelig med matte?»* og av Jakobsen, H (2012) *«Derfor er algebra vanskelig»*, kommer det fram at lærere som ikke behersker matematikk godt nok, og da algebra, vil være dem som legger opp undervisningen basert på boken. Noe som igjen medfører at det ikke er rom for elevens spørsmål eller innspill i undervisningen, da spørsmål som dukker opp hos elevene ikke vil bli besvart. Derfor er det viktig at lærere har en dyp forståelse av stoffet for å kunne undervise på en god måte. I tillegg til solid kunnskap, nevner artikkelen av Jakobsen, H (2012) at lærerne også må ha kunnskap om elevenes tankegang og ulike læringsstrategi, altså hvilke misoppfatninger elever kan ha. For når lærerne først er oppmerksom på hvordan elevene tenker, da kan de ta tak i måten elevene tenker på når stoffet blir introdusert slik at misoppfatninger blir oppklart. I tillegg endre undervisningsopplegget slik at ikke fokuset bare skal være i å løse standard oppgaver, men heller ta i bruk generalisering allerede på barneskolen i aritmetikk for å oppdage et mønster. Slik at når elevene blir introdusert for algebra, kan de ta i bruk generaliseringen fra aritmetikk over i algebra slik at fokuset da blir

kun å lære seg de nye konseptene i algebra. Slik at elever da ikke trenger å fokusere både på å få kontroll over tidligere kunnskap og i tillegg de nye kunnskapene som læres i algebra.

3. Grunnleggende ferdigheter i aritmetikk man tar i bruk i algebra: Gjennom oppgaven ser jeg at problemet ikke starter på ungdomsskolen når de blir introdusert i algebra, men allerede på barneskolen når de lærer forskjellige grunnleggende teknikker innenfor aritmetikk som brøkregning, potensregning, forståelse for likhetstegnet og rekkefølge for regneoperasjoner. Disse problemene sammen med forståelse av begrepet variabel er det som er hovedårsaken til at elever syns algebra er vanskelig.

Dermed ser vi at det finnes en årsak til at elever også på videregående skole som synes algebra er vanskelig, og gjør det dårligere i dette emnet. Dette er på grunn av at algebra ikke blir knyttet opp mot tallære som elever kan fra før, og dermed ser elevene på algebra som noe helt annet enn det de har erfart tidligere. I tillegg er algebra vanskelig på grunn av misoppfatninger, som grunnleggende ferdigheter i aritmetikk, elevene har med seg fra grunnskolen som gjør at elevene løser oppgaven feil. Men det finnes tiltak én som lærere kan ta i bruk for å rette opp i eventuelle misoppfatninger elever kan ha, og som er blitt nevnt tidligere.

Gjennom arbeidet med denne masteroppgaven har jeg som nyutdannet lærer fått en innsikt i hvilke problemer elever på videregående skole kan ha med seg, og hvorfor egentlig elever syns algebra kan være vanskelig. I og med at elever ikke alltid oppfatter konseptet på den måten vi som lærere ville at elevene skulle ha forstått på, noe som forårsaker misoppfatninger, så er det praktisk og kjenne til de forskjellige framgangsmåtene elevene kan tenke på når de løser oppgaver i algebra. Det jeg har kommet fram til i min oppgave, om de mulige misoppfatningene som oppstår hos elevene, vil jeg som nyutdannet lærer ta i hensyn til i min egen undervisningen, for å minske elevenes misoppfatninger.

7. KILDER

Aarnes, J (2009). François Viète. Hentet fra den store norske leksikon den 30.06.2017 fra: https://snl.no/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

Aubert, K. (2009). Tallsystem. Hentet den 11.08.2017 fra: https://snl.no/tallsystem

Aubert, K (2014). *Algebra.* Hentet 01.08.17 fra den store norske leksikon, fra: https://snl.no/algebra

Befring, E. (2015). Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap. Oslo: Cappelen Damm forlag, 1. utgave 2015.

Bell, A. (1995). *Purpose in School Algebra.* Journal of mathematical behavior 14, 41-73. The University of Nottingham.

Bondø, A (2010). Brøk – er det et problem, da? Tangenten, årgang. 21, nr. 1 (2010), s. 35 – 38. Hentet den 20.11.2017 fra: http://www.caspar.no/tangenten/2010/Bond%C3%B8-101.pdf

Booth, L. (1988). Children's diffeiculties in beginning algebra. Hentet den 10.08.2017 fra: http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf/142535729/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf

Botten, G. (2003). Meningsfylt matematikk. *Nærhet og engasjement i læringen.* Capar Forlag. ISBN 82-90898-23-1

Brekke, G. & Rosèn, B. (1996). Diagnostisk undervisning. *Nämnaren nr.2*, s. 35 - 40. Hentet den 19.08.2017 fra: http://ncm.gu.se/media/namnaren/fulltextpdf/1996/nr_2/3540_96_2.pdf

Brekke, G. (2002). Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk. *Kartlegging av matematikkforståelse.* Læringssenteret Norge: GAN grafisk AS.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). Forskningsmetoder for lærerutdanningene. Oslo: abstrakt forlag. 1. utgave 2012.

Dahl, C.M. (2011). *Hvilken informasjon kan lærere få ved bruk av diagnostiske oppgaver i undervisningen.* Diagnostiske oppgaver i matematikkundervisningen. Masteroppgave i realfagdidaktikk. Universitetet i Oslo. Hentet 15.04.2017 fra https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/32318/Dahl-Master.pdf?sequence=1

Dysthe, O. (1999). Ulike teoriperspektiv på kunnskap og læring. Publisert i *Bedre skole*. Hentet den 05.08.17 fra: http://www.stiftelsen-hvasser.no/documents/Teoriperspektivpaakunnskapoglering.pdf

Frost, D., (2007). Making meaning in Algebra: Examining Students' Understandings and Misconseptions. I A. H. Schoenfeld (Red.), *Assessing Mathematical Proficiency* (Vol.53, s. 163 – 176). Cambridge University Press.

Grønmo, L.S., Hole, A. & Onstad, T. (2016). *Ett skritt fram og ett tilbake.* Hentet 12.04.2017 fra https://press.nordicopenaccess.no/index.php/noasp/catalog/view/7/16/67-1

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between aritmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics 27(1). 59-78*

Holm, M. (2000). *Matematikkvansker og prinsipper for opplæring.* I Gunnar Gjone og Torgeir Onstand, *Mathema 2000, Festskrift til Ragnar Solvang.* Oslo: NKS-forlag. ISBN 82-508-2039-8

Holme, A (2004). Matematikkens historie 2. *Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel.* Bergen, Fagbokforlaget.

Holme, A (2008). Matematikkens historie 1. *Fra Babylon til mordet på Hypatia.* Bergen, Fagbokforlaget.

Husabø, I. (2016). *Difor er algebra vankeleg for norske elevar.* Hentet 21.11.2016 fra http://forskning.no/2016/11/difor-er-algebra-vanskeleg-norske-elevar/produsert-og-finansiert-av/hogskulen-i-sogn-og-fjordane

Høines, M., Rinvold, R., & Selvik, B. (2007) *Matematiske sammenhenger: Algebra og funksjonslære.* Caspar forlag as. Hentet den 01.08.17 fra: http://www.matemania.no/fordypning/pdf/algebra_1_4.pdf

Imsen, G., (2005). Elevenes verden. *Innføring i pedagogisk og psykologi.* 4.utgave. Oslo: Universitetsforlaget.

Jakobsen, H. (2012). *Derfor er algebra vanskelig.* Hentet 25.03.2017 fra https://forskning.no/matematikk-barn-og-ungdom-skole-og-utdanning/2012/05/derfor-er-algebra-vanskelig

Kieran, C (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics Vol.12, No.3*, pp. 317-326

Kongelf, T.R., (2015). *Introduksjon av algebra i matematikkbøker på ungdomstrinnet i Norge.* I: Nordic Studies in Mathmatics, NOMAD, 20 (3 – 4). Gøteborg: Gøteborgs Universitet

Krumsvik, R., & Säljö, R. (2013). Praktisk-Pedagogisk utdanning. En antologi. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS

Lunner, R (2012). *Norske elever forstår ikke mattebegrepene.* Hentet 01.08.17 fra: https://www.tu.no/artikler/norske-elever-forstar-ikke-mattebegrepene/235589

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2011). *Å lære algebraisk tenkning.* Caspar Forlag, Bergen. Oversatt av Johan Lie.

Matematikk.org (2013). *Hvorfor regne med bokstaver?* Hentet 01.08.17 fra: https://www.matematikk.org/trinn1-4/artikkel.html?tid=154015&within_tid=125799

Matematikk.org. (u.å.). *Algebra – bokstavregning.* Hentet 01.08.17 fra: https://www.matematikk.org/side.html?tid=68095

Ndla.no (2010). Regnerekkefølge. Hentet den 15.11.17 fra nettet: https://ndla.no/nb/node/22500?fag=54

Nickson, M., (2004). Algebra: the transition from Arithmetic. *Teaching and Learning Mathematics. A Teacher's Guide to Recent Research and Its Application*. 2nd Edition. Kapittel 4. New York, Continuum.

Nsd.uib.no: Norsk Senter for forskningsdata. Hentet 25.07.2017 fra: http://www.nsd.uib.no/personvernombud/hjelp/vanlige_sporsmal.html?id=2

Nygaard, O. & Zernichow, A. (2006). Den blokkerende misoppfatning. *Spesialpedagogikk, årg. 71, nr. 4, s. 34-38.* Hentet den 15.08.2017 fra: http://home.uia.no/olavn/blokkerende.pdf

Nøra, S. (2015). *Hvorfor er det så vanskelig med matte?* Hentet 25.03.2017 fra http://forskning.no/skole-og-utdanning/2015/09/hvorfor-er-det-sa-vanskelig-med-matte

Ojose, B. (2008). Applying Piaget's Theory of Cognetive Development to Mathematics Instruction. Publisert i The Mathematics Educator 2008, Vol.18, No.1, 26-30. Hentet den 06.08.17 fra http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ841568.pdf

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O., & Hals, S. (2014). Sinus matematikk 1P. Oslo: Cappelen Damm forlag.

Russell, M., O'Dwyer, L. & Miranda, H. (2009). Diagnosing student's misconseptions in Algebra: Results from an experimental pilot study. *Behavior Research Methods 41(2), s. 414-424.* doi: 10.3758/BRM.41.2.414

Ruth, N., (2014). Utfordringer og misoppfatninger knyttet til brøkbegrepet. Bacheloroppgave. Hentet den 23.11.2017 fra: https://fagarkivet.hioa.no/nb/item/asset/dspace:3125/Ruth_Nina.pdf

Sjøberg, S., (2016). *TIMSS*. Hentet den 20.11.2017 fra Store norsk leksikon fra: https://snl.no/TIMSS

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H. (2011). Matematikk for lærerstuderende. Delta fagdidaktik. Danmark: Forlaget Samfundslitteratur.

Store norske leksikon (2017). Variabel – matematikk. Hentet den 24.11.17 fra: https://snl.no/variabel_-_matematikk

UDIR. (2013). Læreplan i matematikk 2T og 2P (MAT5-02). Hentet fra: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/finn-lareplan/lareplan/?kode=MAT5-02

Uio.no (2015). *Om TIMSS Advanced.* Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. Det utdanningsvitenskaplige fakultetet. Hentet den 20.11.2017 fra: http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/timss-advanced/om-timss-advanced/

Utdanningsdirektoratet (2012). Læringsstøttende prøve. Ressurshefte i algebra. Matematikk 5. – 10. årstrinn. Hentet 15.04.2017 fra http://home.hit.no/~panderse/KIMhefter/ressursheftealge.pdf

Vestfold fylkeskommune (2014). Matematikkvansker. Hentet den 09.08.17 fra: https://www.vfk.no/Documents/vfk.no-dok/Utdanning/PPT%20-%20dokumenter/Fagvansker/Spesifikke%20matematikkvansker.pdf

Woolfolk, A. (2004). Pedagogisk psykologi. Trondheim: Tapir Akademisk forlag

Wu, H., (2009). From arithmetic to algebra. Slightly edited version of a presentation at the University of Oregon, Eugene, OR, February 20, 2009. Hentet den 20.11.17 fra: https://math.berkeley.edu/~wu/C57Eugene_3.pdf

8. VEDLEGG

Dette kapittelet inneholder vedlegger:

- 8.1: Innmelding til NSD (med tanke på om datainnsamlingen ikke hadde vært anonymisert, noe det var i dette tilfelle): Legger ved dokumentene fra NSD, selv om jeg klarte å utføre undersøkelsen helt anonymt.
    - 1. Tilbakemelding fra NSD
    - 2. Informasjonsskriv
    - 3. Intervjuguide
- 8.2: Testoppgaven som ble brukt
- 8.3: Sortering av datamaterialene
    - 1. Første registrering av data med prosent. Sortering med hensyn på svarene er riktig, feil eller ubesvart
    - 2. Tabell over hvilke type feil oppgaven hadde. Feil 1 er regnefeil, men feil 2 er feil på grunn av misoppfatning
    - 3. Endelige registrering av dataene med prosent og svaralternativer fra elevene

8.1 INNSENDING TIL NSD

1. Tilbakemelding fra NSD

NSD

Andreas Christiansen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 01.09.2017 Vår ref: 55211 / 3 / LH Deres dato: Deres ref:

Tilbakemelding på melding om behandling av personopplysninger

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 30.07.2017.
Meldingen gjelder prosjektet:

55211	*Analysere elevens forståelse av og vansker med algebra i videregående skole, og hvilke misoppfatninger de kan ha*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Andreas Christiansen*
Student	*Anne BR Balasundaram*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 31.01.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Dersom noe er uklart ta gjerne kontakt over telefon.

Vennlig hilsen

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

Marianne Høgetveit Myhren

Lise Aasen Haveraaen

Kontaktperson: Lise Aasen Haveraaen **tlf**: 55 58 21 19 / Lise.Haveraaen@nsd.no
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Anne BR Balasundaram,

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 55211

INFORMASJON OG SAMTYKKE
Utvalget informeres skriftlig om prosjektet og samtykker til deltakelse. Informasjonsskrivet er godt utformet.

UNGDOM I FORSKNING
I tilfeller hvor foreldre samtykker på vegne av sine barn, vil dette utgjøre et gyldig samtykke som behandlingsgrunnlag. Det er likevel viktig å påpeke at deltagelse i forskning alltid skal være frivillig for ungdommene, selv om foreldrene samtykker. Det innebærer at ungdommene bør få tilpasset informasjon og at forsker må få barnets aksept under datainnsamlingen.

REKRUTTERING
Personvernombudet legger til grunn at rekrutteringen skjer på en måte som ivaretar frivillighet og konfidensialitet. Ved forespørsel om deltakelse bør informasjon formidles via lærer/kontaktlærer, det bør ikke opprettes kontakt mellom elev og student, før eleven har samtykket til å delta.

FORSKNING I SKOLEN
Mens skole er en obligatorisk arena for barn, foreldrene og ansatte, skal deltagelse i forskning være frivillig. Forespørselen må derfor alltid rettes på en slik måte at de forespurte ikke opplever press om å delta, gjerne ved å understreke at det ikke vil påvirke forholdet til skole hvorvidt de ønsker å være med i studien eller ikke. Videre bør det planlegges et alternativt opplegg for de som ikke deltar. Dette er særlig relevant ved utfylling av spørreskjema i skoletiden.

DATABEHANDLERAVTALE
I følge meldeskjemaet skal personopplysninger muligens samles inn ved bruk av nettbasert spørreskjema. Personvernombudet antar derfor at det skal brukes en databehandler (som for eksempel Questback eller SurveyXact). Vi forutsetter derfor at det inngås en databehandleravtale. For råd om hva databehandleravtalen bør inneholde, se Datatilsynets veileder: http://www.datatilsynet.no/Sikkerhet-internkontroll/Databehandleravtale/.

INFORMASJONSSIKKERHET
Personvernombudet legger til grunn at forsker etterfølger Universitetet i Bergen sine interne rutiner for datasikkerhet. Dersom personopplysninger skal lagres på privat pc, bør opplysningene krypteres tilstrekkelig.

PROSJEKTSLUTT OG ANONYMISERING
Forventet prosjektslutt er 31.01.2018. Ifølge prosjektmeldingen skal innsamlede opplysninger da anonymiseres. Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:

- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette/omskrive indirekte personopplysninger (identifiserende sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f.eks. bosted/arbeidssted, alder og kjønn)
- slette digitale lydopptak

Vi minner om at også databehandler må slette personopplysninger fra sine systemer. Dette inkluderer eventuelle logger av koblinger mellom IP-adresse/epost-adresser og besvarelser.

2. Informasjonsskriv

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

Algebravansker hos elever

Bakgrunn og formål

Jeg er en masterstudent ved Universitet i Bergen, og skal skrive en oppgave innenfor matematikkdidaktikk om algebravansker. Gjennom TIMSS Advanced kommer det fram at elever ved den videregående skole som tar den høyeste nivå innenfor matematikk (R-matte) gjør det dårligere innenfor algebra i forhold til andre land. Hva er grunnen til dette? Hvorfor er algebra vanskelig for elever, og hvilken forståelse/misoppfatninger er det de har? Gjennom denne undersøkelsen vil jeg derfor se om problemet ligger i at om grunnleggende algebraforståelse ikke er på plass, og se på hvilken misoppfatninger elever har.

Hva innebærer deltakelse i studien?

I denne studien vil det være en spørreundersøkelse enten på papirform eller via nettet. Spørsmålene i denne undersøkelsen vil være at dere skal løse en del matematikk oppgaver, hvor meste parten er grunnleggende algebraoppgaver. Dette for å kartlegge forståelsen hos elevene. Deretter kan det forekomme et intervju for å klargjøre hvordan dere har tenkt på de forskjellige oppgavene.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er bare jeg og min veileder som vil ha tilgang til personopplysningen. For at dette skal være anonymt, vil hver elev få et nummer (Elev 1, elev 2, osv), slik at man ikke kan identifisere noe navn fra besvarelsene. Når oppgaven min er publisert, vil ingen kunne spore tilbake og finne ut hvem som har svart hva.

Prosjektet skal etter planen avsluttes innen 31.01.18. Da vil all opplysninger bli anonymisert, slik at det er umulig å spore tilbake til personer, evt. Slettet.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert. Foreldre som samtykker for barn kan få se spørreskjema og intervjuguide.

Dersom du ønsker å delta eller har spørsmål til studien, ta kontakt med
Prosjekt leder: Anne Balasundaram på epost: Anne.Balasundaram@student.uib.no
Veileder/daglig ansvarlig ved UiB: Andreas Christiansen på epost: Andreas.Christiansen@uib.no

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Samtykke til deltakelse i studien fra foreldre

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å la barnet mitt delta.

Navn på deltaker (Barnets navn): --
--

(Signert av foresatte, dato)

3. Intervjuguide

INTERVJUGUIDE:

Meningen med å holde intervju er å få tak i hvordan elevene tenkte på oppgaver som flertallet har gjort feil/eller ikke har løst. Finne ut hvorfor elevene valgte akkurat denne metoden. Intervjuet vil dermed bli holdt etter at undersøkelsen er utført.

Varighet ca. 30 min

1. Les oppgaven, og forklar hva som skal gjøres?
2. Hvordan ville du ha løst denne oppgaven?
3. Hvorfor tenkte du slik?
4. Finnes det andre måte å løse oppgave på?

8.2 TESTOPPGAVENE

TEST I ALGEBRA FOR VIDEREGÅENDESKOLE

2017

AV:

Anne BR Balasundaram

Sett ring rundt (marker) hvilken matte du har hatt: 1P, 2P , 1T, 2T , S1, S2, R1 , R2

HA MED MELLOM REGNINGENE PÅ ALLE OPPGAVENE!

Takk for hjelpen.

Oppgave 1

Regn ut:

a) $10 + (-4 - 2) =$

b) $5 * (-4) =$

c) $(-6) * 3 + (-4) * (-5) =$

d) $-2^3 + 3 * (10 - 4)^2 =$

e) $2a - (b + a) =$

f) $5 * (a + 6) =$

g) $4 * (x - 1) - 2 * (2x - 2)^2 =$

Oppgave 2

Forkort brøken:

a) $\frac{5}{25} =$

b) $\frac{3+4}{21} =$

c) $\frac{2b^3}{3b} =$

d) $\frac{4x+2}{8x} =$

Oppgave 3

Skriv inn tallet som mangler

a) (   ) * 2 = 21

b) $3 + 2 * (\quad) = 4 + 6 + 5$

c) $\frac{1}{2} + (\_\_\_) = 4$

Løs ligningene

a) $2x = 8$+2

b) $5 - 2x = x - 4$

c) $(x + 1) * 2 + 3x + 6 = 4$

d) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 5$

e) $\frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{4}$

Oppgave 4

Jeg har m kroner og du har k kroner. Jeg har 6 kroner mer enn deg.

Hvilke ligning/uttrykk beskriver situasjonen best?

a) $6k = m$

b) $6m = k$

c) $k + 6 = m$

d) $m + 6 = k$

e) $6 - m = k$

Oppgave 5

Til høyre ser du tre figurer som er bygget opp etter samme mønster.

a) Hvor mange ruter trengs for å lage neste figur?

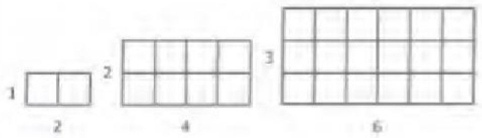
Svar:

b) Hvor mange ruter trengs for å lage en figur hvor det er 20 ruter langs den korteste siden?

Svar:

c) Hvor mange ruter trengs for å lage en figur hvor det er *k* ruter langs den korteste siden? (Bruk ^ for å angi potens)

Svar:



8.3 SORTERING AV DATAMATERIALENE

1) Første registrering av data med prosent

Oppgave 1:

FAG	R1	
Antall elever	29	

a)	Totalt	%
R= Riktig	28	97
U= Ubesvart		
F= Feil	1	3
totalt antall	29	100

b)	Totalt	%
R= Riktig	29	100
U= Ubesvart		
F= Feil		
totalt antall	29	100

c)	Totalt	%
R= Riktig	26	90
U= Ubesvart		
F= Feil	3	10
totalt antall	29	100

d)	Totalt	%
R= Riktig	18	62
U= Ubesvart		
F= Feil	11	38
totalt antall	29	100

e)	Totalt	%
R= Riktig	27	93
U= Ubesvart		
F= Feil	2	7
totalt antall	29	100

f)	Totalt	%
R= Riktig	29	100
U= Ubesvart		
F= Feil		
totalt antall	29	100

g)	Totalt	%
R= Riktig	18	62
U= Ubesvart		
F= Feil	11	38
totalt antall	29	100

Oppgave 2:

Antall elever	29

a)	Totalt	%
R= Riktig	28	97
U= Ubesvart		
F= Feil	1	3
totalt antall	29	100

b)	Totalt	%
R= Riktig	26	90
U= Ubesvart		
F= Feil	3	10
totalt antall	29	100

c)	Totalt	%
R= Riktig	24	83
U= Ubesvart	3	10
F= Feil	2	7
totalt antall	29	100

d)	Totalt	%
R= Riktig	20	69
U= Ubesvart	4	14
F= Feil	5	17
totalt antall	29	100

Oppgave 3:

Antall elever	29	

a)	Totalt	%
R= Riktig	25	86
U= Ubesvart	3	10
F= Feil	1	3
totalt antall	29	100

d)	Totalt	%
R= Riktig	29	100
U= Ubesvart		
F= Feil		
totalt antall	29	100

g)	Totalt	%
R= Riktig	19	66
U= Ubesvart	4	14
F= Feil	6	21
totalt antall	29	100

b)	Totalt	%
R= Riktig	23	79
U= Ubesvart		
F= Feil	6	21
totalt antall	29	100

e)	Totalt	%
R= Riktig	29	100
U= Ubesvart		
F= Feil		
totalt antall	29	100

h)	Totalt	%
R= Riktig	17	59
U= Ubesvart	9	31
F= Feil	3	10
totalt antall	29	100

c)	Totalt	%
R= Riktig	26	90
U= Ubesvart	1	3
F= Feil	2	7
totalt antall	29	100

f)	Totalt	%
R= Riktig	25	86
U= Ubesvart		
F= Feil	4	14
totalt antall	29	100

Oppgave 4:

Antall elever	29	
	Totalt	%
R= Riktig	20	69
U= Ubesvart		
F= Feil	9	31
totalt antall	29	100

Oppgave 5:

Antall elever	29	

a)	Totalt	%
R= Riktig	23	79
U= Ubesvart	1	3
F= Feil	5	17
totalt antall	29	100

c)	Totalt	%
R= Riktig	11	38
U= Ubesvart	9	31
F= Feil	9	31
totalt antall	29	100

b)	Totalt	%
R= Riktig	20	69
U= Ubesvart	3	10
F= Feil	6	21
totalt antall	29	100

2) Tabell over hvilken type feil oppgavene hadde

Oppgave 1a)

RIKTIG SVAR: 4

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	2	x		1

Oppgave 1c)

RIKTIG SVAR: -2

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	-38		x	3
2				

Grunn: Fortegnsfeil

Oppgave 1d)

RIKTIG SVAR: 100

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	244		x	2
2	92		x	1
3	116		x	1
4	284		x	2
5	180	x		1
6	108	X		1
7	356		x	1
8	114		x	1
9	-180		x	1

Grunn:

1) Fortegnsfeil
2) Potens regel.
   $(10-4)^2 = 20+8$. Tenkt: $(10-4)^2 = 10*2+4*2 = 20+8$
   $(10-4)^2 = 100-8$
   $(10-4)^2 = 100-16$
   $(10-4)^2 = 100+8$
   $-2^3 = 8$
   $3*(10-4)^2 = 300-8$
3) Regne rekkefølgen (Svar 9)
   $-2^3+3 = -5$. Lagt sammen og deretter multiplisert med parentesen.

Oppgave 1e)

RIKTIG SVAR: a-b

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	2-b		x	1
2	3a-b		x	1

Grunn:

1) 2a-b-a, har da kansellert vekk a'ene.
2) Fortegnsfeil og fått +a, når det skulle ha vært –a, på grunn av minustegn utenfor parentesen.

Oppgave 1g)

RIKTIG SVAR: $-8x^2 + 20x - 12$

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	$-4x^2 + 12x - 8$		x	1
2	0		x	1
3	$-8x^2 + 4x + 4$	x		1
4	$-4x + 4$		x	1
5	$4x^2 - 12x - 12$		x	1
6	$-8x^2 + 4x - 12$		x	1
7	$-8x^2 + 4x + 12$		x	1
8	$-4x^2 - 4x$		x	1
9	12x	x		1
10	$8x^2 + 20x + 4$	x		1
11	$2(x-1)$		x	1

Grunn:

1) Potens regel:
   $(2x-2)^2 = 2x^2 - 4x + 4$ Opphøyd x i 2, men ikke to tallet.
   Problem med potensuttrykket over. Åpnet opp, slik at det kansellerer alt det andre.
   $(2x-2)^2 = 2 * 2x - 2 * 2 = 4x - 4$
   $(2x-2)^2 = 2x^2 + 8x + 4$ Opphøyd x, men ikke 2 tallet + fortegnsfeil
   $(2x-2)^2 = 4x^2 + 4$
   $(2x-2)^2 = 4x^2 - 4$
   $(2x-2)^2 = 2(x-1)^2 = 2(x^2 - 2x + 1)$ Faktoriser, for å kunne bruke kvadratsetning
   $(2x-2)^2 = (2x-2)(2x-2) = 4x - 4x - 4x + 4 = -4x + 4$ regnefeil
   $-2 * (2x-2)^2 = -4x + 4$ Droppet at det som er i parentesen skal opphøyes i 2

Oppgave 2a)

RIKTIG SVAR: $\frac{1}{5}$

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	5			1

Grunn: Snudd brøken slik at delingen skulle bli enklere.

Oppgave 2b)

RIKTIG SVAR: $\frac{1}{3}$

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	$\frac{1}{2}$	x		1
2	3			1
3	$\frac{1}{7}$	x		1

Grunn: Snudd brøken for å gjøre delingen enklere, og fått 3 istedenfor 1/3.

Oppgave 2c)

RIKTIG SVAR: $\frac{2b^2}{3}$

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	$\frac{b^2}{1}$		x	1
2	2b		x	1

Grunn:

Faktorisert uttrykker slikt: $\frac{2*b*b*b}{2+1*b} = \frac{b*b}{1} = \frac{b^2}{1}$

$$\frac{2b^3}{3b} = \frac{2*3*b}{3b} = \frac{6b}{3b} = 2b$$

Oppgave 2d)

RIKTIG SVAR: $\frac{2x+1}{4x}$

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	$\frac{3}{2}$		x	2
2	$\frac{1}{2}x + 2$		x	2
3	$\frac{x+1}{2x}$	x		1

Grunn:

$$\frac{4x+2}{8x} = \frac{4x}{8x} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4x+2}{8x} = \frac{4}{8}x + 2 = \frac{1}{2}x + 2$$

Regnefeil: Sjapp med å faktorisere telleren. Men viser at har forståelse for hvordan man skal forkorte br øk med ukjent.

Oppgave 3a)

RIKTIG SVAR: 10,5

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	7	x		1

Oppgave 3b)

RIKTIG SVAR: 6

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	3		x	6

Grunn:

1) Regnerekkefølge: Lagt sammen tallene først, og deretter multiplisert.

Oppgave 3c)

RIKTIG SVAR: $\frac{7}{2}$

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	8	x		1
2	2			1

Grunn: $\frac{1}{2} + 8 = 4$. Enten har de tenkt at det er et gange tegn mellom, eller så har de ikke forstått hvordan man skal legge sammen brøk med ett tall.

Oppgave 3f)

RIKTIG SVAR: $x = -\frac{4}{5}$

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	$x = \frac{5}{6}$	x		1
2	$x = -\frac{1}{2}$	x		1
3	$x = -1$		x	2

Grunn

$(x + 1) * 2) = x + 2$

Oppgave 3g)

RIKITG SVAR: x=6

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	x = 1		x	4
2	x= 15		x	1
3	$x = 5 - \frac{1}{6}$		x	1

Grunn: Ganget hele ligningen med 6 for å fjerne nevnere, men ikke ganget tallet på høyre side av --

Oppgave 3h)

RIKTIG SVAR: x = 5

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	$x = \frac{5}{12}$		x	1
2	$x = -\frac{1}{4}$		x	1
3	x = 3			1

Grunn: Prøvd å fjerne nevneren, men ikke forstått det helt.

$$\frac{(x+1)*4}{(x+3)*4} = \frac{3*3}{4*3}$$

$$\frac{4x+4}{4x+12} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{4x}{4x} + \frac{4}{12} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{4x}{4x} = \frac{9-4}{12}$$

$$x = \frac{5}{12}$$

Misforstått forkorting av brøk. Skjønner at man kan forkorte like tall over og under brøkstreken, men ikke fått med seg at man kan bare forkorte når det er produkt i teller og nevner.

$$\frac{4x+4}{x+3} = 3$$

$\frac{4x+4}{x+3} - 3 = 0$ Prøvd å gjøre om slik at 3 tallet skal bli en brøk, for å slå dem sammen. Men har da ganget første brøken også

$$\frac{4x+4*(x+3)-3(x+3)}{x+3} = 0$$

$$4x+4-3=0$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Oppgave 4

RIKTIG SVAR: C)

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	d)			6
2	e)			3

Oppgave 5a)

RIKTIG SVAR: 36

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	14		x	4
2	128			1

Grunn:

Funnet hvor mange ekstra ruter man trenger for å lage neste figur, og ikke totalt hvor mange ruter som trengs for å lage neste figur.

Oppgave 5b)

RIKTIG SVAR: 800

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	200		x	3
2	40		x	3

GRUNN:

Tenkt at oppgitte verdi var antall ruter på den lengste siden (egentlig korte side), da vil figuren ha 10 ruter langs den korte siden. Totalt vil denne figuren da ha 200 ruter.

Funnet at den lengste siden er 40 ruter lang, når korte siden er 20 ruter lang. Ikke funnet antall ruter for figuren med 20 ruter langs den korte siden.

Oppgave 5c)

RIKTIG SVAR: $2k^2$

Nr:	Svar alternativ	Feil grunn regnefeil	Feil grunn en årsak	Antall elever
1	k^2	x		6
2	2k		x	3

GRUNN:

Funnet uttrykk for hvor mange ruter den lengste siden av figuren vil ha. Og ikke hvor mange ruter totalt den n-te figuren vil ha.

3) Endelig registering av dataene med prosent og svaralternativene fra elevene

Oppgave 1:

Antall elever: 29

a)	Totalt	%
R= Riktig	28	97
U= Ubesvart		
F= Feil 1)	1	3
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

b)	Totalt	%
R= Riktig	29	100
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

c)	Totalt	%
R= Riktig	26	90
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		0
F= Feil 2)	3	10
totalt antall	29	100

d)	Totalt	%
R= Riktig	18	62
U= Ubesvart		
F= Feil 1)	2	7
F= Feil 2)	9	31
totalt antall	20	100

e)	Totalt	%
R= Riktig	27	93
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		
F= Feil 2)	2	7
totalt antall	29	100

f)	Totalt	%
R= Riktig	29	100
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

g)	Totalt	%
R= Riktig	18	62
U= Ubesvart		
F= Feil 1)	3	10
F= Feil 2)	8	28
totalt antall	29	100

Oppgave 1c)

	Svar:	Antall	Prosent %	
1	-2	26	90	(Riktig svar)
2	-38	3	10	

Oppgave 1d)

	Svar:	Antall	Prosent %	
1	100	18	62	(Riktig Svar)
2	244	2	7	
3	92	1	3	
4	116	1	3	
5	284	2	7	
6	180	1	3,5	
7	108	1	3,5	
8	356	1	3	
9	114	1	3	
10	-180	1	3	

Oppgave 1e)

	Svar:	Antall	Prosent %	
1	a - b	27	93	(Riktig svar)
2	2 - b	1	3,5	
3	3a - b	1	3,5	

Oppgave 1g)

	Svar:	Antall	Prosent %	
1	$-8x^2+20x-12$ $-4x^2+12x-8$	18	62,00	(Riktig Svar)
2		1	3,50	
3	0	1	3,50	
4	$-8x^2+4x+4$	1	3,30	
5	$-4x+4$	1	3,50	
6	$4x^2-12x-12$	1	3,50	
7	$-8x^2+4x-12$	1	3,50	
8	$-8x^2+4x+12$	1	3,50	
9	$-4x^2-4x$	1	3,50	
10	12x	1	3,30	
11	$8x^2+20x+4$	1	3,30	
12	$2(x-1)$	1	3,50	

Oppgave 2:

Antall elever: 29

a)	Totalt	%
R= Riktig	28	97
U= Ubesvart		
F= Feil 1)	1	3
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

c)	Totalt	%
R= Riktig	24	83
U= Ubesvart	3	10
F= Feil 1)		0
F= Feil 2)	2	7
totalt antall	29	100

b)	Totalt	%
R= Riktig	26	90
U= Ubesvart		
F= Feil 1)	3	10
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

d)	Totalt	%
R= Riktig	20	69
U= Ubesvart	4	14
F= Feil 1)	1	3
F= Feil 2)	4	14
totalt antall	29	100

Oppgave 2c)

	Svar:	Antall:	Prosent %	
1	$\frac{2b^2}{3}$	24	83	(Riktig svar)
2	$\frac{b^2}{1}$	1	3,5	
3	2b	1	3,5	
4	Ubesvart	3	10	

Oppgave 2d)

	Svar:	Antall:	Prosent %	
1	$\frac{2x+1}{4x}$	20	69	(Riktig svar)
2	$\frac{3}{2}$	2	7	
3	$\frac{1}{2}x+2$	2	7	
4	Ubesvart	4	14	
5	$\frac{x+1}{2x}$	1	3	

Oppgave 3:

a)	Totalt	%
R= Riktig	25	86
U= Ubesvart	3	10
F= Feil 1)	1	3
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

d)	Totalt	%
R= Riktig	29	100
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

g)	Totalt	%
R= Riktig	19	66
U= Ubesvart	4	14
F= Feil 1)		0
F= Feil 2)	6	21
		100
totalt antall	29	200

b)	Totalt	%
R= Riktig	23	79
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		0
F= Feil 2)	6	21
totalt antall	29	100

e)	Totalt	%
R= Riktig	29	100
U= Ubesvart		
F= Feil 1)		
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

h)	Totalt	%
R= Riktig	17	59
U= Ubesvart	9	31
F= Feil 1)		0
F= Feil 2)	3	10
totalt antall	29	100

c)	Totalt	%
R= Riktig	26	90
U= Ubesvart	1	3
F= Feil 1)	2	7
F= Feil 2)		
totalt antall	29	100

f)	Totalt	%
R= Riktig	25	86
U= Ubesvart		
F= Feil 1)	2	7
F= Feil 2)	2	7
totalt antall	29	100

Oppgave 3a

	Svar:	Antall:	Prosent %	
1	10,5	25	86	(Riktig svar)
2	7	1	3	
3	Ubesvart	3	10	

Oppgave 3b

	Svar:	Antall	Prosent %	
1	6	23	79	(Riktig svar)
2	3	6	21	

Oppgave 3f)

	Svar:	Antall:	Prosent %	
1	$x = -\frac{4}{5}$	25	86	(Riktig svar)
2	$x = \frac{5}{6}$	1	3,5	
3	$x = -\frac{1}{2}$	1	3,5	
4	$x = -1$	2	7	

Oppgave 3g)

	Svar:	Antall:	Prosent %	
1	x=6	19	66	(Riktig svar)
2	x = 1	4	14	
3	x= 15	1	3	
4	$x = 5 - \frac{1}{6}$	1	3	
5	Ubesvart	4	14	

Oppgave 3h)

	Svar:	Antall	Prosent %	
1	$x = \frac{5}{12}$	1	3,3	
2	$x = -\frac{1}{4}$	1	3,3	
3	x = 3	1	3,3	
4	x = 5	17	59	(Riktig svar)
5	Ubesvart	9	31	

Oppgave 4:

Antall elever	29	
	Totalt	%
R= Riktig	20	**69**
U= Ubesvart		
F= Feil	9	**31**
totalt antall	**29**	**100**

Oppgave 4)				
	Svar:	Antall	Prosent %	
1	C)	20	69	(Riktig svar)
2	D)	6	21	
3	E)	3	10	

Oppgave 5:

	Antall elever	29	
a)		Totalt	%
	R= Riktig	23	**79**
	U= Ubesvart	1	**3**
	F= Feil	5	**17**
	totalt antall	**29**	**100**

c)		Totalt	%
	R= Riktig	11	**38**
	U= Ubesvart	9	**31**
	F= Feil	9	**31**
	totalt antall	**29**	**100**

b)		Totalt	%
	R= Riktig	20	**69**
	U= Ubesvart	3	**10**
	F= Feil	6	**21**
	totalt antall	**29**	**100**