MATEMATIKK I KJEMI

Hva er så vanskelig?

Aina Elisabeth Fardal

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

MAUMAT 650

Matematisk institutt, Universitetet i Bergen

1. juni 2018

Forord

Etter flere år som lærer i videregående skole startet jeg høsten 2014 på et deltidsstudium ved UiB: «Erfaringsbasert master med fordypning i matematikk». Jeg har hatt gleden av å undervise i både matematikk og kjemi og alltid vært nysgjerrig på hvorfor enkelte elever opplever matematikken som vanskelig i kjemifaget.

I masteroppgaven min har jeg undersøkt vansker kjemielever på videregående skole har med matematikkemner som kreves i kjemifaget, spesielt innfor emnet forhold og proporsjoner. Arbeidet har vært krevende, men veldig verdifullt med tanke på hvordan prosessen og oppdagelsene underveis kan komme framtidige elever til gode. Spesielt har det vært viktig å oppdage at den matematikken i kjemi jeg som lærer forventer at elevene kan og som tilsynelatende virker å være enkel ungdomsskolematematikk, i utgangspunktet er et enormt fagfelt innenfor matematikkdidaktikken som viser hvor kognitivt vanskelig den kan være.

Når jeg ser tilbake på de siste fire år, er det mange som fortjener en stor takk:

Tusen takk til min veileder, Arne Jakobsen, for all hjelp og gode tilbakemeldinger i prosessen. Takk til mine medstudenter, spesielt kull-14: Lena, Kine, Torstein, Sabine, Hilde og Ola Kåre for utrolig hyggelig samvær og samtaler. Takk til min avdelingsleder for all hjelp med å tilrettelegge arbeidsdagen slik at det har vært mulig å gjennomføre studiet ved siden av jobb. Tusen takk til fantastiske kjemikollegaer som sørget for å sende meg datamaterialer fra prøver når jeg var i Florida. Takk til elevene som deltok i denne undersøkelsen, spesielt de som lot seg intervjue. Takk til Kine som har lest korrektur på oppgaven og kommet med gode råd. En stor takk går også til min tålmodige familie som har godtatt en stadig fraværende kone og mamma.

Bergen, 01.06.2018

Aina Elisabeth Fardal

Sammendrag

I denne masteroppgaven har matematikk i kjemi hatt hovedfokus. Følgende forskningsspørsmål har vært grunnlag for arbeidet:

- Med utgangspunkt i matematikkemner som kreves i kjemi, hvilke matematikkoppgaver viser flest elever som skal starte Kjemi 1 vansker med å løse? Hva kjennetegner disse ikke-korrekte løsningsmetodene?
- Er det forskjell på elevenes prestasjon på relevante matematikkoppgaver med og uten kjemikontekst?
- Hva avslører elevene, som scoret lavt på oppgaver med forhold og proporsjoner på kartleggingstest i matematikk, om sin proporsjonale resonnering?

Femtifire elever har deltatt i undersøkelsen. Disse gjennomførte en kartleggingstest i matematikk høsten 2017. Denne testen og flere analoge kjemioppgaver har blitt analysert kvantitativt og kvalitativt. McNemar test er brukt for å sammenligne prestasjon på oppgaver med og uten kjemikontekst. Et semistrukturert intervju ble gjennomført med 4 elever for å få større innsikt i elevenes proporsjonale resonnering. Tilslutt ble en ettertest gjennomført på 29 elever for å følge opp funnene fra intervjuene.

Studien viser blant annet at noen elever har vansker med områder i matematikk som forhold og intensive størrelser, skissering av grafer, sammenhengen mellom tall på standardform, brøk og desimaltall, forkorting av brøker og rasjonale uttrykk og logaritmer. Det er en signifikant forskjell i prestasjon på logaritmeoppgaver med og uten kjemikontekst, men dette kan skyldes forskjeller i tilgang på kalkulator. Elever med lave prestasjoner på oppgaver med forhold og intensive størrelser virker å løse slike oppgaver ulikt i matematikk og kjemi. I matematikk ble en bygge opp-strategi og halvering/dobling brukt. I kjemi ble beregninger med intensive størrelser brukt, men ofte feil. Kontekst påvirket flere av elevenes oppfatning av den multiplikative sammenhengen mellom to størrelser. Dette kunne trigge en additiv strategi og bruk av proporsjonale metoder i ikke-proporsjonale situasjoner. Enkelte elever virker å ha en svak oppfattelse av enheten. I blandingsforhold ble hele løsningen og del vann oppfattet likt, noe som påvirket tolkningen av del-del og del-hele og dermed forskjellen mellom ekstensive og intensives størrelser.

Innhold

1 INNLEDNING

1.1 Bakgrunn og motivasjon

I mine år som lærer på videregående skole i fagene kjemi og matematikk, har jeg hvert år erfart at elever får problemer i kjemifaget når matematikken integreres. Forklaringen har vært innføringen av begrepet «mol», siden matematikken i kjemi regnes for å være enklere enn den matematikken de ellers har møtt i videregående. Man kan selvfølgelig ikke forvente en enkel forklaring på hva som er årsaken til vanskene elevene opplever, men jeg har etter hvert blitt nysgjerrig på hvilke mangler i matematikkferdigheter og kunnskap i matematikk som hindrer tilgang til kjemifaget. Kanskje dette har grunnlag i en matematikk de ikke har jobbet med siden tidlig grunnskole og som kanskje heller ikke har vært tilstrekkelig forstått? Ville det vært noen forskjell om elevene hadde løst lignende oppgaver de får i kjemi, men uten kjemibegreper? En studie av Scott (2012) var en inspirasjon til å undersøke denne analogien.

Bekymringer over manglende matematikkferdigheter hos studenter som starter kjemiutdanning og kartlegging av disse er ikke nytt (Denny, 1971; Grove, 2014; Perkins, 1978; Scott, 2012; Shallcross & Yates, 2014; Weisman, 1981). Jeg har aldri gjennomført en kartleggingstest i matematikk i forkant av kjemiopplæringen. Mye av grunnen til det er fordi jeg tenker at matematikken som kreves er enkel, noe elever som velger realfag helt sikkert kan men som blir vanskelig å bruke pga. begrepene i kjemi. Leopold og Edgar (2008) avslørte at studentene ikke hadde den grunnleggende kompetansen i matematikk du som lærer forventer og at disse manglene var innenfor temaer studentene selv trodde de forstod. De mente også at en elev som ikke er tilstrekkelig flytende i matematikk, ofte kan forklare dette med kompleksiteten i selve faget som skal læres framfor manglende matematikkferdigheter. Dette var interessante betraktninger som motiverte for å starte undersøkelsen innenfor et bredt spekter av matematiske oppgaver. Interessen for proporsjonal resonnering kom under arbeidet med analysen av matematikk- og kjemioppgavene og avhandlingen til Kilner (2014) ledet fokus inn mot proporsjonal resonnering som viktig framfor ren testing av formell matematikkunnskap. Det har vært få studier som knytter proporsjonal resonnering med kjemi og jeg har ikke funnet noen studier på elever i Norge. Få studier har undersøkt proporsjonal resonnering på videregående nivå. Derimot er proporsjonal resonnering et omfattende forskningsfelt på barne- og tidlig ungdomsskolenivå. Akatugba og Wallace (1999; 2009) registrerte at det var lite oppmerksomhet i forskningen på matematiske aspekter ved elevers proporsjonale resonneringer innenfor fagspesifikke kontekster i realfag på videregående. Dette gjør det til et relevant tema og undersøke videre.

1.2 Mål med studien

Jeg ønsket å undersøke hvilke vansker elevene har med å løse matematikkoppgaver som regnes som relevant for kjemi og matematikkrelaterte kjemioppgaver. Hensikten har ikke vært å undersøke kjemifaglige vansker, selv om disse også selvfølgelig er relevant for suksess i kjemi. Forskjellen i evnen til å løse oppgaver i matematikk- og kjemikontekst var ønskelig å undersøke. For å få en dypere forståelse for noen av vanskene var det viktig å avgrense videre undersøkelse. Dette ble gjort med et semistrukturert oppgaveintervju der jeg hadde mulighet til å stille oppfølgende spørsmål til elevenes strategier. Forskningsfeltet på proporsjonal resonnering er stort og har gitt ulike resultater (Booth, 1981). Elever kan ta i bruk intuitive løsningsmetoder i noen situasjoner og formelle metoder så fort de blir klar over at de eksisterer. Vergnaud (1994) mener at matematiske, naturvitenskapelige og tekniske tekster er full av variasjoner i betydningen av ord. Kompleksitet kommer ikke bare fra handling, men også fra det å sette ord på ting. Det er viktig å teste elevers aktivitet i situasjoner der de må tilpasse sine kognitive ressurser til problemer de aldri har møtt før. Målet har derfor vært å undersøke elevenes strategier i den komplekse konteksten de møter. Det er valgt et konstruktivistisk læringssyn som grunnlag for denne undersøkelsen.

1.3 Forskningsspørsmål

Følgende spørsmål er lagt til grunn for denne oppgaven:

Med utgangspunkt i matematikkemner som kreves i kjemi, hvilke matematikkoppgaver viser flest elever som skal starte Kjemi 1 vansker med å løse? Hva kjennetegner disse ikke-korrekte løsningsmetodene?

Er det forskjell på elevenes prestasjon på relevante matematikkoppgaver med og uten kjemikontekst?

Hva avslører elevene, som scoret lavt på oppgaver med forhold og proporsjoner på kartleggingstest i matematikk, om sin proporsjonale resonnering?

1.4 Avklaring om undersøkelse av matematisk kompetanse

I denne studien gjøres det undersøkelser på elevenes evne til å løse ulike typer oppgaver på kartleggingstest i matematikk og på matematikkrelaterte oppgaver i kjemikontekst. Studien har ikke som mål å undersøke spesifikke matematikkompetanser elevene har. Jeg vil allikevel mene at undersøkelsen legger opp til å kunne avsløre deler av den matematiske kompetansen. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskrev fem komponenter innenfor matematisk kompetanse: forståelse, beregning (prosedyrekunnskap), anvendelse (strategisk tenkning), resonnering og engasjement. Med utgangspunkt i disse vil den første delen av min undersøkelse kanskje i større grad plasseres under komponentene beregning og anvendelse. Jeg ser på elevenes evne til å utføre matematiske prosedyrer og ferdigheter, variasjon av metoder og bruk av hensiktsmessige strategier. Jeg ser også på elevenes evne til å gjenkjenne og formulere matematiske situasjoner og spesielt i problemer der matematikken skal anvendes i kjemi. I andre del av undersøkelsen min, der intervjuet undersøker nærmere området forhold og proporsjoner, vil komponenten med resonnering synliggjøres. Elevene må i større grad forklare og begrunne sine løsninger.

1.5 Avklaring av kjemiske begreper

Det vil i oppgaven brukes en del begreper innenfor kjemi som naturlig nok ikke anvendes innenfor matematikk. I stedet for å forklare disse begrepene hver gang de brukes, lages en begrepsliste her:

- **Støkiometri:** læren om mengdeforhold i kjemiske reaksjoner. Denne er basert på størrelsen stoffmengde.
- **Stoffmengde:** mengden av et stoff angitt i mol.
- **Mol**: en SI-enhet som angir et fast antall, gitt ved Avogadros tall, $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ entiteter. Dette antallet er eksperimentelt bestemt fra antallet entiteter (karbonatomer) i 12 gram av isotopen C-12.
- **Reaksjonsligning:** en beskrivelse av en kjemisk reaksjon med kjemiske symboler der tallene foran symbolene er koeffisienter som angir reaksjonsforhold: $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$
- **Molmasse (g/mol):** massen i gram av $6{,}023 \cdot 10^{23}$ entiteter av et stoff
- **Molar konsentrasjon (mol/L):** konsentrasjonen til en løsning i mol per liter.

1.6 Oppbygning av oppgaven

I innledningen har jeg forklart kort hvorfor jeg har valgt å undersøke matematikken i kjemikontekst og hvorfor jeg ønsket å fordype meg i elevenes proporsjonale resonneringer. Videre har forskningsspørsmålene blitt presentert og avklaringer gitt. Sentrale begreper innenfor teorien om proporsjonal resonnering vil bli gitt i teoridelen.

Kapittel 2 utgjør teoridelen av oppgaven. Denne er tredelt der første del tar for seg forskning på matematikkens betydning for suksess i kjemi. Andre del tar for seg overføring av kunnskap. Overføring av kunnskap studeres ikke direkte, bare om forskjellen i prestasjon i to kontekster er signifikant forskjellig. Analogi har derimot en sentral plass i evnen til proporsjonal resonnering. Tredje del presenterer et utdrag av forskningen innenfor proporsjonal resonnering som omfatter definisjon og utvikling, ulike intuitive strategier, proporsjonale resonneringer i ikke-proporsjonale situasjoner, tilknytning til multiplikativ og additiv resonnering og forståelsen av ekstensive og intensive størrelser.

Kapittel 3 er en presentasjon av metoden og her begrunnes valg av *mixed method design*. Valg av oppgaver på kartleggingstest, analoge kjemioppgaver, intervjuoppgaver og oppgaver til ettertest begrunnes. Utvalg av elever til de ulike testene blir redegjort for i tillegg til en detaljert beskrivelse av gjennomføring av intervju. Behandling av kvantitative og kvalitative data beskrives og reliabilitet og validitet kommenteres.

Kapittel 4 er en presentasjon av resultater. Først presenteres kvantitative resultat, blant annet oppgavenes vanskegrad og resultatet på McNemar test over eventuelle signifikante forskjeller ($p < 0,05$) i prestasjon i matematikk- og kjemikontekst. Deretter presenteres kvalitative resultater. Strategier på ikke-korrekte og delvis korrekte løsninger på matematikk- og kjemioppgavene er beskrevet under egne delkapitler. Tilslutt presenteres analysen av intervjuet ut fra fire kategorier: Tolkning av oppgavetekst, Brøkregning, Tolkning og bruk av forhold og Ekstensive vs. intensive størrelser. Teori er brukt for å løfte fram enkelte resultater.

Kapittel 5 blir resultatene diskutert opp mot teori. I tillegg diskuterer jeg hvorvidt metoden har fungert til å svare på mine forskningsspørsmål. Til slutt gir jeg en kort konklusjon før jeg kommer med forslag til videre forskning.

2 TEORI

Teorien som presenteres i de neste delkapitlene er tredelt. Den første delen som presenteres i kapittel 2.1 tar for seg matematikken i kjemi, hvordan tidligere forskning har forsøkt å finne fram til hva som fremmer suksess i kjemi og hvilke matematiske ferdigheter som er viktige i denne sammenheng. Deretter presenteres et utvalg av forskning som har vært gjort innenfor kunnskapsoverføring. Selv om denne studien ikke direkte undersøker om kunnskap er overført mellom to kontekster, er det viktig å vite noe om hvilke utfordringer som ligger bak det å skulle løse tilsynelatende strukturlike oppgaver innenfor ulike fagområder. I tillegg er analogisk resonnering en viktig del av proporsjonal resonnering. Til slutt presenteres et utdrag av forskning gjort innenfor proporsjonal resonnering. Prosessen med utvalg av denne teorien vokste fram etter hvert som analyse av resultater fra oppgavetesting viste vansker med forhold og sammensatte størrelser.

2.1 Matematikk i kjemi

2.1.1 Betydningen av matematikk for suksess i kjemi

Det har vært gjennomført mye forskning utover 1900-tallet som identifiserte indikatorer på framtidig suksess i kjemi. Dette har vært studier på både videregående nivå og universitetsnivå. Selv om de har kommet fram til ulike sammensetninger av indikatorer (bakgrunn innenfor kjemi og tidligere fagsammensetning, ulike typer tester i kjemi og matematikk, gjennomsnittskarakterer, leseferdigheter, motivasjon etc.), så er felles for mange av dem at gode matematikkresultater peker i retning av suksess i kjemi (Andrews & Andrews, 1979; Ozogomonyan & Lofthus, 1979). For eksempel ble det funnet at høy score på Scholastic Aptitude Test (SAT) ikke var noen garanti for god kjemikarakter, men at lav SAT score var en sterk indikator på lav karakter i kjemi (Andrews & Andrews, 1979). Forskningen har vært litt uenige om hvor mye kjemibakgrunnen indikerte suksess i kommende kjemifag (i Perkins, 1978).

2.1.2 Manglende matematikkferdigheter i møte med kjemi

Bekymringer over manglende matematikkferdigheter hos studenter er ikke noe nytt. Ved overgangen til begynnerkurs i kjemi på universiteter har det over flere år vært registrert at studenter ikke innehar de kunnskaper i matematikk som kreves av dem for kjemistudier. Kinzer og Fawzett (1946, i Perkins 1978) rapporterte i 1945 at av 1439 studenter på et universitet var det 534 studenter som løste færre enn 1/3 av problemene i en kartleggingstest i matematikk korrekt. Problemene inkluderte temaer som forkorting av brøk, omgjøring fra brøk til desimaltall, forhold og proporsjoner, prosentregning og regning med eksponenter i potenstall. Marcus (1973, i Perkins 1978) fant at temaer som gav størst problemer i overgangen til college var oppgaver som involverte logaritmer, grafer, enheter og algebraiske ligninger. Moduler, elektroniske ressurser, læreverk til støtte i matematikk for kjemikere og artikler i relevante undervisningsteknikker har blitt produsert for å kompensere for spriket i matematikkunnskap. The Royal Society of Chemistry (2009a) har bidratt med flere tiltak for å heve studenters matematikkferdigheter, blant annet opplæringsheftet *Maths for Chemists* (Cockett & Doggett, 2012), *Maths Resource Database* (Royal Society of Chemistry and the Higher Education Academy, 2009) og en fast spalte om elevers typiske vansker med matematikk i magasinet *Education in Chemistry* der de seneste innslag er av Yates (2013). *The Discover Maths* er en ressurs som også er utviklet av Royal Society of Chemistry i samarbeid med Pfizer (Royal Society of Chemistry, 2009b i Shallcross og Yates, 2014).

Prosjektet Higher Education Academy, Science, Technology, Engineering and Mathematics (HEA STEM) ble satt i gang i UK for å sammenfatte forskningsfunn. Dette skulle danne bevisgrunnlag for den problematikken som universiteter opplevde med studentenes manglende førkunnskaper i matematikk. Prosjektet gjennomførte litteraturgjennomgang av forskning (tilbake til 1975) på ferdigheter i matematikk som var relevant for kjemi. I tillegg ble det gjennomført tre nettbaserte spørreundersøkelser: til skoleadministrasjonen, lærerne og studentene fra 3 universiteter i Skotland og 18 universiteter i resten av UK. Lærerne rapporterte at studenter sliter med å overføre matematiske kunnskaper til kjemikontekst og å lære nye matematiske begreper samtidig med nye begreper i kjemi når matematikken læres i kjemikontekst. Elevene rapporterte at de alltid eller vanligvis opplever matematikk som vanskelig (26%) og at de presterer dårligere på oppgaver som krever matematikk (24%). Scott (2012) ønsket å finne kilden til de vanskeligheter studenter ofte opplever når de skal gjøre beregninger i kjemi. Det ble gjort ved å teste prestasjonen til 52 kjemielever (16-17 år) ved en high school i Skottland. Et oppgavesett på 8 oppgaver i kjemi ble konstruert. Disse oppgavene var utgangspunkt for å lage et analogt sett med oppgaver der kjemikonteksten ble fjernet. De analoge oppgavene ble løst i matematikktimen. Siden kjemioppgavene har flere like numeriske prosedyrer, ble matematikksettet konstruert med 5 oppgaver. Da prestasjonene på matematikk- og kjemioppgaver ble sammenlignet med McNemar test fant man ingen signifikant forskjell på de to settene for de enkle oppgavene. Årsaken til feil på de enkle oppgavene var ofte aritmetiske regnefeil og slurv. På de vanskeligere oppgavene opplevde elevene at kjemioppgavene var mer utfordrende enn matematikkoppgavene. Siden det ikke var store forskjeller i prestasjon på de to oppgavesettene, mente Scott det var lite sannsynlig at dårlige prestasjoner i kjemi kan forklares med forståelsen av molbegrepet. Det ble foretatt en undersøkelse av de ikke korrekte løsningene for å skille mellom «noe forståelse» og «ikke forsøkt/ikke korrekt». Dette avslørte at vanskelige oppgaver i matematikk ble ofte besvart enten korrekt eller ikke korrekt, mens vanskelige kjemioppgaver avslørte en viss grad av forståelse. Elevene gjorde det bedre i matematikk enn i kjemi, men det trengte ikke bety at de hadde bedre forståelse i matematikk. De matematiske løsningsstrategiene var veldig like og tydet på en instrumentell tilnærming. Kjemioppgavene hadde større variasjon i løsningsstrategier.

Ifølge Grove (2014) vedvarer vanskene med matematikk selv om flere og flere elever tar matematikk på høyeste nivå i forkant av sine universitetsstudier, gjerne med gode karakterer. Intervjuer med lærere gav et inntrykk av at studenter ikke får tilstrekkelig og kontinuerlig mulighet til å anvende sine matematikkferdigheter i kjemi, og når de gjør det er det ofte med fokus på bruk og lite på forståelse av matematiske ideer. De uttrykte også at selv om studentene med høyeste nivå i matematikk var gode til å bruke formler og utføre prosedyrer i matematikk, slet de med å identifisere den nødvendige matematiske kunnskapen og teknikken som krevdes for å løse kjemiproblemer. Det virket ikke som det var fundamentale matematikkferdigheter som var problemet, men å bruke matematikk til å løse ukjente problemer. Konsekvensen er at studentene ikke øver opp forståelse eller lærer nøkkelen bak de matematiske ideer som ligger til grunn for deres praksis. Dette kan lede til manglende overføringsevne på nye problemer.

2.1.3 Matematikkunnskaper i kjemi og dens innvirkning for suksess i kjemi.

Denny (1971) isolerte ti ferdigheter i matematikk fra lærebøker i kjemi. Dette var innenfor regning, parentes, fortegn, brøk, desimal, bruk av eksponenter og sammenhengen mellom potenstall og logaritmer, prosent, ligninger, forhold og proporsjoner og tolke og tegne grafer. *Mathematics Skill Test* (MAST) ble laget ut fra disse ferdighetene og gitt til elever på High school etter endt kjemikurs. Elevene gjennomførte også en kjemitest (American Chemistry Society Practice Exam, ACS) og korrelasjoner mellom hver av ferdighetene i matematikk og testscore i kjemi ble undersøkt. Funnene gav ingen eksempler på elever med høy ACS-score og lav MAST-score. Men det var flere eksempler på elever med høy MAST-score som hadde lav ACS-score. Perkin (1978) undersøkte også hvilke spesifikke ferdigheter i regning og anvendelse av matematikk som kunne ha en positiv sammenheng med suksess i begynnerkurset i kjemi på høyskolenivå. Forskjellen var at hvert av de 26 matematikktemaene ble gitt i to versjoner, en ren regneoppgave og en anvendt oppgave og den ble utført på to grupper med og uten kjemibakgrunn. Det ble konkludert med at suksess på de fleste matematikkoppgavene hadde en signifikant sammenheng med suksess i kjemi. En oversikt over prosentvis score for den totale gruppen innenfor ulike temaer avslørte at den sjelden oversteg 50%. Spesielt lav score var det for regning med potenstall med negative eksponenter, tall på standardform og proporsjonale og omvendt proporsjonale problemer. Det var ikke store forskjeller på score for rene regneoppgaver og anvendte oppgaver. Scoren var tydelig høyere for anvendte oppgaver med grafer, tall på standardform og fortegn, men lavere for oppgaver med omvendt proporsjonalitet, enheter og potenstall.

Weisman (1981) designet en mestringstest med seks kunnskapsområder for å undersøke om elevene hadde et minimum av kompetanse nødvendig for oppstart med kjemi på high school (Mathematics readiness test):

- utføre matematisk beregning når en algebraisk formel er gitt?
- konvertere tekst til matematisk uttrykk?
- gjenkjenne ligninger og ulikheter?
- tolke grafiske data?
- skille mellom proporsjonal og omvendt proporsjonal?
- løse flertrinnsproblemer ved å:
    a. oppfatte problemet som skal løses?
    b. identifisere de matematiske prinsippene som er involvert?
    c. utføre den nødvendige matematikken?

Testen var designet ut fra matematikk som ofte anvendes i kjemi og var ikke en test på helhetlig måloppnåelse i matematikk. Innholdet fokuserte på proporsjoner, omgjøring av enheter, fortegnsregler, gjennomsnitt, eksponenter, tall på standardform, grafer og ulikheter. Score på over 80% var et tegn på god grunnkompetanse, score mellom 70% og 80% indikerte at eleven hadde nødvendig grunnkompetanse, men en score på under 70% var et tegn på at eleven manglet nødvendige kunnskap i matematikk for studiet i kjemi.

Leopold og Edgar (2008) ønsket å finne ut i hvilken grad kjemistudenter anvendte matematikken «flytende» innenfor spesifikke matematiske områder de brukte på lab, i diskusjoner, hjemmearbeid og forelesninger. Forfatterne bruker ordet «flytende» som en sammenligning til språket. Dersom studenter ikke er flytende i det språket det undervises på, så vil den lingvistiske barrieren hindre læring, og dette problemet er lett å oppdage. En elev som ikke er tilstrekkelig flytende i matematikk kan ofte forklare dette med kompleksiteten i selve faget som skal læres framfor manglende matematikkferdigheter. Temaer som ble testet var algebra, grafer, logaritmer og tall på standardform. Leopold og Edgar (2008) fant at studentene var kjent med de formelle reglene som kreves for regning med logaritmer, men at meningen med logaritmer var glemt. Mange blandet logaritmer med kvadratrot. Noen tenkte på logaritmer som størrelser uten numerisk verdi og behandlet logaritmen med formelle regler for manipulasjon. Oppgaver med tall på standardform virket enkle fordi studentene hadde høy score på disse oppgavene, men det viste seg at de fleste gjorde om tallene uten standardform, regnet og skrev tallet på standardform til slutt i svaret. Dersom elever gjør feil i slike problemer med kalkulator, kan elevene ha manglende evne til å vurdere og gjøre overslag på om størrelsesordenen er realistisk. Oppgavene som omhandlet graf avslørte at studentene slet med å trekke ut kvantitativ informasjon fra eksponentielle og logaritmiske grafer. De algebraiske oppgavene avslørte at studentene kunne trenge repetisjon på beregning av forhold mellom potenser med heltallseksponenter før dette introduseres i kjemikontekst. Det samme gjaldt forenkling av rasjonale uttrykk og betydningen av felles faktor. Leopold og Edgar (2008) kommenterte at deres resultater avslørte matematiske misoppfatninger hos studenter, men også at resultatene satte søkelys på andre pedagogiske misoppfatninger som eksisterer hos studenter og de som underviser dem. Testen viste at bare 1/3 av studentene fikk et resultat som lå innenfor det som var forventet, noe som viser at studenter ikke har den grunnleggende kunnskapen undervisere forventer. Testen avslørte også mangler innenfor temaer studentene selv trodde de forstod. Dette var misoppfatninger som ofte vedvarte og ble kamuflert ved bruk av kalkulator. Kalkulatoren skjulte manglende forståelse hos studentene og deres evne til å reflektere over matematikken de brukte. For de fleste studenter betyr allikevel ikke en dårlig score på matematikktesten at studenten har store matematikkvansker. Matematikken som kreves i kjemi har ikke komplekse problemløsningsoppgaver som favoriserer «matematikktalentene». Å referere til matematikkoppgaver når man innfører kjemitemaer kan hjelpe elever til å korrigere feilene sine. Studien viste at studenter som var mer «flytende» i anvendelsen av sine matematikkferdigheter også presterte bedre på kjemiprøven selv om kalkulator var tillatt. Det kan bety at det å løse matematikkoppgaver uten kalkulator ikke behøver å være unødvendig selv om kjemiprøver tillater kalkulator.

Adigwe (2013) gjorde undersøkelser på 400 studenter (100 menn og 100 kvinner i kontrollgruppe og eksperimentgruppe) der hensikten var å se på sammenhenger mellom måloppnåelse i støkiometri og matematikk. Studien hadde også til hensikt å identifisere spesifikke matematikkferdigheter som hadde signifikant sammenheng med elevenes måloppnåelse i støkiometri. Testoppgavene i støkiometri ble laget fra eksempler i seks kjemilærebøker og matematikkoppgavene ble laget ved å ekstrahere kjemikonteksten fra støkiometrioppgavene. Ferdighetene i matematikk skulle testes ved at oppgavene ble delt mellom rene regneoppgaver og mer anvendte oppgaver innenfor åtte matematikkemner: Hele tall (de fire regnearter), brøk, desimaler, algebra (fortegn, løse ligninger, forhold, proporsjonale og omvendt proporsjonale størrelser), prosent (også i sammenhengen med desimal), graf (tegne og tolke), potenstall (tall på standardform, regning med potenstall med negativ og positiv eksponent) og målinger (omgjøring av enheter, volum og overflate). Evnen til å anvende matematikk ble i større grad funnet å være signifikant relatert til måloppnåelse i kjemi enn evnen til å regne. Tendensen var at en forbedring i matematikk gav forbedring i kjemi.

Kilner (2014) brukte 5 år med aksjonsforskning på å bygge opp en levedyktig opplæringsmodell som kunne adressere matematikken som var en betydelig barriere for læring i kjemi på universitetet. Dette resulterte i 27 undervisningsenheter (*ChemMath Units*) som tok utgangspunkt i kjemiemner og deres tilhørende matematiske begreper. Det overordnede målet var å finne hvilke matematikkferdigheter elever manglet og hvordan man best kunne bygge opp ny kunnskap. Mye forskning med utgangspunkt i dette er basert på standardiserte tester. Eksempler er *American College Test* (ACT), som er en form for adgangstest til universitetet, eller *Scholastic Aptitude Test* (SAT), som er en test i hvor godt forberedt en student er for sitt første år på universitetet. Dette er tester som er validert og godt etablerte. Men mistanken til Kilner (2014) var at slike enkeltstående tester ikke identifiserte godt nok elever som er minst klare for å studere kjemi. De fungerte på en stor andel elever, men bommet ved å over- eller underestimere elevers sluttresultater. Slike tester inneholder ofte oppgaver fra den mer formelle matematikken, som algebra II eller tidlig calculus. Kilner (2014) mente derimot at matematikk i kontekst var viktigere og mer anvendelig predikator. Blant annet vil det å jobbe med algebraiske ferdigheter isolert sett ikke bidra til å adressere viktige emner i kjemiske beregninger. Gode ferdigheter i regning er viktig, men den må integreres i kjemi for at den fullt ut skal forstås. Elevene i studien hadde manglende forståelse for begreper som «funksjon», «variabel», «ligning» og «uttrykk» i tillegg til at de slet med å skille symboler og enheter. Dette fikk konsekvenser for problemløsning i kjemi fordi elevene forvirret grep tak i en algoritmisk, mekanisk løsningsstrategi uten å forstå de underliggende prinsippene i kjemi og hvordan de kunne pakkes ut fra matematikken. Når det gjaldt grafer slet elevene med skalering og navnsetting av akser og grafiske kalkulatorer bidro til mekanisk bruk. Mange elever tenkte at alle brøker er ekte brøker og fikk dermed vanskeligheter med å regne ut stoffmengde der molforholdet var større enn 1. De hadde vanskeligheter med å gå fra masseforhold til prosent, fordi de ikke oppfattet prosent som en form for proporsjonalitet. Det ble avdekket spesielt store problemer med forhold og proporsjoner, som hindret studentene i å vurdere kvantitative kjemiske sammenhenger. Dersom elevene ble overveldet av matematikk, var begrepene i kjemien ikke innen rekkevidde for studenten. Karakteristikker av ulike ferdighetsnivå hos en student ble funnet:

- Manglende regneferdigheter: det er usikkert om disse elevene vil mestre kjemi gitt tilfredsstillende repetisjon i matematikk.
- Grunnleggende matematikkferdigheter fra tidligere trengs oppfriskning.
- Vanskeligheter med å forstå forhold, kontrollere variabler, konservering av masse, etc.
- Manglende forståelse for hvordan en kjent matematisk ferdighet kan øves inn i en ny type utregning. Elevene mestrer utregningene, men ser ikke hvordan dette passer inn i kjemi. Må bli komfortable med en spesifikk matematikkferdighet i en kjemisk kontekst.
- Manglende begrepsforståelse for kjemiske prinsipper som ligger under den matematiske anvendelsen.
- Tilbøyelighet til å bli overveldet. Hardt arbeidende elever som opplevde at arbeidet ikke umiddelbart gav resultater havnet i «educational darwinisme», der arbeidsinnsatsen ble redusert til å bare skulle «overleve».

Dette var karakteristikker av elever med svake ferdigheter i matematikk og kjemi. Det var også flinke elever, med gode førkunnskaper i tidligere matematikkfag, som fikk middels suksess i kjemi. Gode karakterer i formelle matematikkfag betød ikke nødvendigvis at man gjorde det bedre i kjemi, noe som bekrefter tidligere nevnte studier. Dersom tidligere undervisning i matematikk hadde vært abstrakt var den vanskelig å overføre til kjemi.

2.1.4 Ikke-matematiske faktorer som kan relateres til suksess i kjemi

Furio et al. (2002) har gjennomført et litteratursammendrag på forskning som er gjort rundt læring og undervisning av begrepene «stoffmengde» og «mol». I dette sammendraget nevnes funn av blant annet Cervallati et al. (1982), Duncan og Johnstone (1973), Gabel og Sherwood (1984), Krishnan og Howe (1994), Furio et al. (1993), Schmidt (1990; 1994), Staver og Lumpe (1995), Vincent (1981). Jeg vil gi et kort sammendrag av disse her.

Gabel og Sherwood (1984) gjorde tester på molbegrepet der de brukte mer kjente navn som erstatning for kjemiske navn i oppgavene. De fant at årsaken til vanskene elevene har i kjemi lå i bruken av molbegrepet og andre ukjente begreper framfor manglende forståelse for størrelser som volum, masse og antall partikler. Krishnan og Howe (1994) oppdaget tilsvarende mangler i forståelse av kjemiske begreper ved at elever oppfatter at «mol» har å gjøre med «molekyl» og ikke atomer og at mol betød «konstant masse». Cervallati et al. (1982) og Furio et al. (1993) viste at elever på videregående oppfattet mol som en form for masse og brukte ikke begrepet som en enhet for «mengde av stoff». Begrepet «stoffmengde» ble identifisert som masse og i mindre grad volum. Cervallati et al. (1982) knyttet disse manglene til problemene med å løse støkiometriske problemer og antydet at undervisningen er årsaken til manglende forståelse for molbegrepet.

Men selv om tidligere forskning legger årsaken til misoppfatning av begreper i kjemi, rapporteres det også at mangler i matematikkrelatert kunnskap kan være årsak til elevenes vansker i kjemi. Forskning på ikke-matematiske årsaker til vansker i kjemi omfatter gjerne forståelse av begreper (f.eks. mol og stoffmengde) i kjemikonteksten som gjerne er relatert til problemstillinger som krever matematiske prosedyrer.

Staver og Lumpe (1995) verifiserte at noen elever identifiserer mol som antall partikler, mens andre identifiserer det som masse i gram. I tillegg fant de at elevene har en instrumentell tilnærming til bruk av algoritmer og regler ved regning med disse. Duncan og Johnstone (1973) fant at elever hadde problemer med støkiometriske beregninger med forhold som ikke var 1:1, og de fant at studentene hadde problemer med å beregne konsentrasjoner av løsninger ved fortynninger fordi volumet av løsningen endres. Vincent (1981) fant også tilsvarende problemer ved at elevene skulle nøytralisere to løsninger av natriumhydroksid med saltsyre. Elevene gjorde feil ved at de så på molforholdet 1:1 mellom syren og basen som lik forholdet 1:1 mellom volum av syren og basen. Samtidig ble det i denne studien funnet misforståelser relatert til kjemiske begreper ved at molaritet (konsentrasjonen i mol/L) ble brukt i betydningen «antall mol» og det var vansker med å skille stoffmengde og konsentrasjon. Når Schmidt (1990) skulle undersøke støkiometriske beregninger hos studenter, fant han at forholdet mellom antall molekyler ble oppfattet som likt med forholdet mellom masse. Forholdet mellom molar masse til reagerende substanser er lik forholdet mellom massen (uten å tenke på støkiometriske forhold). For han kunne det virke som at elever ikke tenker at ulike atomer har ulik masse. Schmidt (1994) fant at elever ikke bruker beregningsmetoder de har lært, men utvikler sine egne og mener årsaken kan ligge i manglende forståelse av molbegrepet.

Novick og Menis (1976) gjorde en intervjustudie i Israel av studenters (15 år) oppfatning av molbegrepet. Intervjuinstrumentet avslørte grunnlaget for elevenes misoppfatninger og tre misoppfatninger var framtredende:

- Mol er en type masse og ikke en type antall. Det er mulig at årsaken er at de kvantitative beregningene er basert på målinger av masse.
- Mol er et gitt antall partikler i en gass.
- Mol er egenskapen til et molekyl.

Furio et al. (2002) konkluderte med at mangler i undervisningen er årsaken til de vansker i kjemi som litteraturen rapporterer. Mange studenter har vanskeligheter med å takle begreper som «stoffmengde» og «mol» i tillegg til at løsningsstrategiene sjelden er brukt på basis av å regne ut «stoffmengde». Når det gjelder læring, understreker litteraturen at studenter mangler en vitenskapelig forståelse for mol. De fleste studenter identifiserer mol med masse, volum og/eller antall partikler (Avogadros tall). Siden mange studenter ikke vet betydningen av «stoffmengde», unngår de å bruke det og identifiserer ikke mol som enheten til denne størrelsen. Studenter forveksler ofte makronivå (representerer substanser) med mikronivå (representerer atomer og molekyl). Dette kommer tydelig til uttrykk når det ikke skilles mellom molar masse (g/mol) og atommasse/molekylmasse (u). Studenter identifiserer ofte forholdet mellom antall molekyler av ulike stoffer med forholdet mellom masser av disse stoffene og de identifiserer forholdet mellom oppgitte masser av stoffer med forholdet mellom molar masse til stoffene.

2.2 Overføring av kunnskap

2.2.1 Overføring av matematisk kunnskap

Det er to definisjoner av *overføring* («transfer»). Den tradisjonelle forklaringen på overføring går tilbake til Thorndike (1906, i Lobato & Siebert, 2002) og «identiske elementer», dvs. at man bruker kunnskap lært i en situasjon i en annen situasjon. Deltakerorientert overføring («actor oriented transfer») er i større grad bestemt av hvordan tenkeren knytter sammen den nye situasjonen til de spor han har av tidligere situasjon. Disse to definisjonene vil ha mye å si for hvordan forskerne begrunner at overføring har skjedd. Det er nyttig å skille mellom tre generelle klasser av informasjon som kan definere betingelser for anvendelse: overflateinnhold, underliggende strukturer og kontekst. Innhold og underliggende strukturer påvirker tilgang til tidligere eksempler av problemer. Hint fra kontekst kommer fra situasjoner der startinformasjonen kodes fra. Dersom konteksten på overføringsoppgaven er veldig ulik, vil overføring bli hemmet. Kontekst er ikke begrenset til de fysiske komponentene til situasjonen. Den psykologiske konteksten, som forventninger til oppgaven, kan påvirke tilgangen på kunnskap. Overføring av kunnskap fra en situasjon til en annen er også en prosess som tar tid. Det skjer gjerne overføring av kunnskap, men den kan være mangelfull fordi ideer som var konstruert fra tidligere situasjoner ikke var kompatible med ny situasjon (Lobato & Siebert, 2002). Hint om innhold trigger minner, men disse er ikke perfekt korrelert med underliggende strukturer. Dette kan føre til negativ overføring på tvers av problemer som bare er overfladisk like og dermed svikter tilgang til relatert kunnskap på tvers av ulike domener (Bassok & Holyoak, 1989). Overføringen er ikke nødvendigvis et problem i seg selv. Manglende overføring til kjemi kan skyldes manglende matematikkunnskap (Hoban, Finlayson & Nolan, 2014).

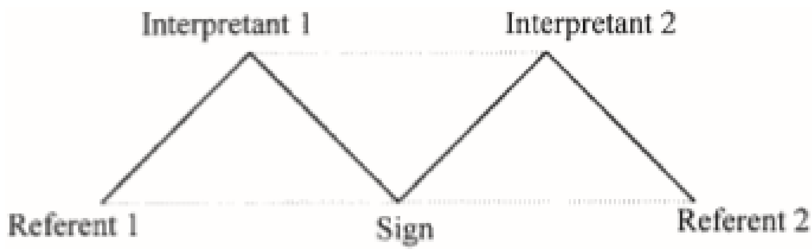
2.2.2 Analog resonnering

Å overføre strukturell informasjon fra ett system («*base*») til et annet system («*target*») er en generell definisjon på å resonnere analogt. Denne overføringen av kunnskap oppnås via prosesser med «*mapping*» eller «*matching*», som innebærer å finne den relasjonelle korrespondansen mellom to systemer. For at dette skal skje må man kjenne de generaliserte relasjonelle strukturene til oppgavekilden (basen), som er den oppgaven du kjenner løsningsmetoden til. Man må også se etter og identifisere den relasjonelle korrespondansen mellom oppgaven som skal løses (target) og utgangsoppgaven (basen). Mange har gjerne problemer med dette mellom oppgaver som har ulik kontekst. Ofte kan det være fordi de mentale modellene fokuserer på framtredende overflateegenskaper og derfor ikke gir tilstrekkelig relasjonelle strukturer for å kunne resonnere analogt. Det at målproblemet og utgangsproblemet ikke er fullstendig isomorfe gjør valg av riktig metode vanskelig (English, 1997). Elever med dårlig forståelse for matematiske begreper og regler har en tendens til å utnytte korrelasjonen direkte ved å tenke at oppgaver med likheter mellom innhold og oppgavelyd gjerne skal løses på samme måte. Elever med god forståelse bruker i større grad innhold til å tolke strukturen (English, 1997; Novick, 1988). Direkte match eller mismatch i innhold betegnes som «the interference hypothesis». Men kunnskap om egenskaper til spesifikke objekter i en oppgavetekst kan også bidra til begrensninger i overføringen av metode mellom to isomorfe oppgaver. Dette kalles en tolket struktur («the interpretation hypothesis») (Bassok, 1997). Bassok (1997) beskrev hvordan de, blant collegestudenter med gode matematikkunnskaper, hadde funnet flere slike tolkende effekter av innhold som ikke kunne forklares av «interference» hypotesen. De brukte egenskaper til objekter til å skille mellom oppgaver med kontinuerlig og diskret forandring og symmetriske og asymmetriske matematiske strukturer. Eksempelvis lærte studentene å regne avstand ut fra produktet av gjennomsnittshastighet og tid i fysikk. To problemer som tilsynelatende virket like analoge til fysikkproblemet med avstand, hadde veldig forskjellige resultater. Den ene oppgaven skulle finne hvor mange folk som var tilkommet populasjonen over 12 år med konstant vekst fra 3000 mennesker/år til 15000 mennesker/år. Den andre oppgaven skulle finne hvor mange mennesker som totalt hadde deltatt på en årlig fest med samme vekst som i populasjonsoppgaven. Det var bare 27% som løste den siste oppgaven med avstandsformelen ($D = \frac{(v_i - v_f)}{2} \cdot t$) fra fysikkoppgaven, sammenlignet med 72% i den første oppgaven. Årsaken var studentenes tolkninger av objektene i den første oppgaven som kontinuerlig, som var i overensstemmelse med fysikkoppgaven. Når det gjaldt deltakelse på festen, ble dette oppfattet som diskret vekst. Det er mulig dette skillet mellom kontinuerlig og diskret egenskaper blir respektert av studentene fordi de vet den er viktig i matematikk. Slike tolkede egenskaper kan påvirke prestasjonen når oppgaver skal løses.

2.2.3 Modeller, analogier og metamorfier

Fram til nå har jeg fokusert på hvilke matematiske ferdigheter som er viktig for å mestre kjemifaget. Samtidig er det ikke gitt at matematikkunnskapen automatisk anvendes korrekt i kjemi. Det har vi sett eksempler på fra teorien om overføring. Det blir like viktig å ta hensyn til individets forståelse av et system, dets mentale modell. Mentale modeller reflekterer erfaring og er ofte innholdsspesifikke (Doerr & Tripp, 1999; English, 1997). Forskning på mentale modeller antyder et skille mellom indre (mentale) modeller og ytre (fysiske) modeller. Den forslår at modellbasert resonnering fortsetter primært fra analogi av godt forståtte kildesystemer til mindre forståtte målsystemer, altså at det går en vei. Doerr og Tripp (1999) foreslo at den modellbaserte resonneringen kunne være toveis fordi man prøver gjerne å løse mismatchene mellom systemene like mye som innenfor ett system. Mening oppstår i utvekslingen mellom internt system, eksternt system og representasjoner som distribueres på tvers av disse systemene. Den mentale modellen kan være forskjellig fra den ytre beskrivelsen av modellen som gis av samme individ og beskrivelsen av systemet kan bidra til endringer i indre modell. For eksempel kan de indre modellene som lærende har om bevegelse i hverdagen være godt forståtte systemer, men allikevel ikke gode nok til å resonnere analogt om Newtons systemer innenfor mekanikk. Den godt forståtte modellen trenger å modifiseres og raffineres for å kunne ta inn bredden av fenomenet som forklarer Newtons lover. Tilstedeværelsen av flere hendelser samtidig (teknologi, ulike formodninger, uenigheter og spørsmål som utfordrer tolkning og oppklaring) bidrar til endringer og justeringer av representasjonssystemer og indre modeller. Det er enighet om at introduksjon til bruk av matematiske modeller og modellering har positiv innvirkning på matematikklæring fordi det gir mening til matematikken. Carreira (2001) mente matematiske modeller var et resultat av tolkninger og krever tolkere. Hun mente det manglet en solid forklaring på påstanden om at det å linke matematikk til virkeligheten hadde kvalitative implikasjoner på prosessen med matematikklæring. Derfor stilte hun spørsmålet om metaforisk tenkning kunne være tilstrekkelig struktur for å forklare måten matematikk kan linkes til folks ideer og oppfatninger om verden. En metafor er korrespondanse mellom to begrepssystemer og inneholder en mekanisme som gjør at vi kan forstå ett område på grunnlag av et annet. Denne forklaringen har likheter med analogi og det er uenigheter blant forskere om dette. Carreira mener at Ricoeur (1983, i Carreira, 2001) og ideen om ikonisk moment av metafor kan vise vei ut av konflikten mellom analogi og metafor. Metaforiske uttrykk trigger analogi, men i stedet for å være dens årsak er analogi et resultat av metamorfien. I en metamorfi kan en semantisk konflikt genereres og for å overkomme denne settes det opp paralleller mellom situasjonene som guider ikonisk overføring fra en situasjon til en annen. Det semiotiske trapeset linker metafor til mening (se Figur 1). For å bygge opp en matematisk modell krever det en viss artikulering mellom to begrepsdomener, men for å utvikle sammenkoblingene må det være en metafor tilstede (Black, 1963 i Carreira, 2001). Dette semiotiske trapeset bygger på triangelmodellen til Pierce (1931, i Carreira, 2001) der mening alltid er et produkt av tolkeren.

Denne trekantmodellen består av objektet man har fokus på (eller tegnet i Figur 1), «representamen» (tilsvarer referent i Figur 1) som er de observerbare sider ved objektet og «interpretant» som er effekten tegnet har på den som skal tolke det. Når studenter blir utfordret med realistiske problemer som involverer modellering eller bruk av modeller, utfordres de også på å pakke ut den metaforiske matrisen som ligger under matematisk modellering. Metaforisk tenkning som en måte å projektere slutninger fra et domene til et annet beskriver det kjente i det ukjente og genererer nye ideer fra tidligere ideer (Carreira, 2001).



Figur 1 Det semiotiske trapeset (Carreira, 2001)

2.3 Proporsjonal resonnering

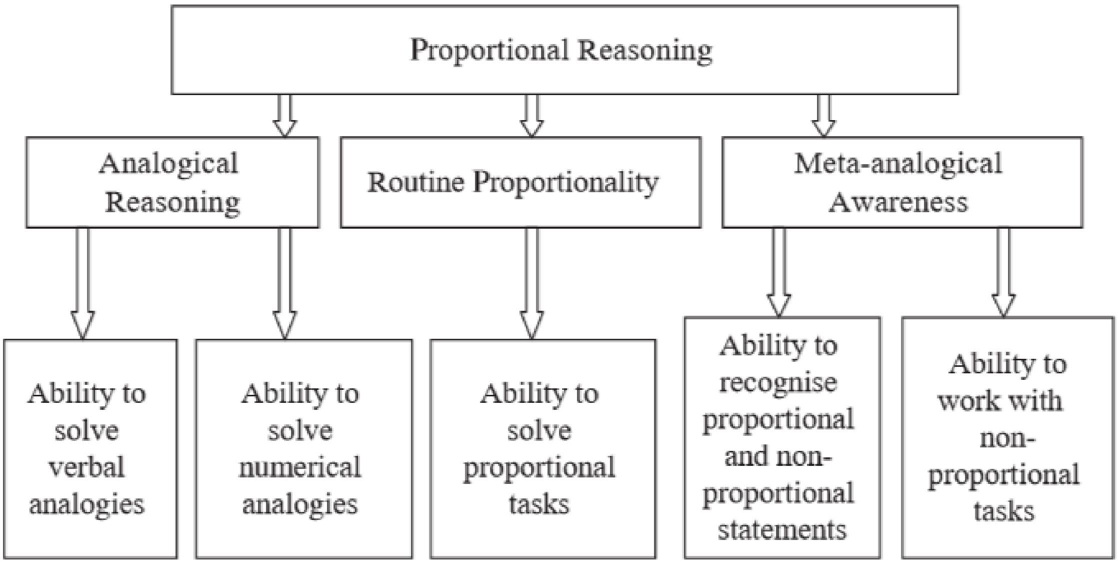
Til tross for økt innsats med å styrke studenters matematikkferdigheter, virker det som om kjemifaget fortsetter å være vanskelig tilgjengelig for mange, også dem med gode ferdigheter i matematikk. Isolerte matematikkferdigheter utfordres i kontakt med nye kontekster (Grove, 2014). Hvor solid er studentenes evne til å anvende matematikken i andre kontekster? Kilner (2014) konkluderte at matematikk i kontekst var en viktigere og mer anvendelig predikator for suksess i kjemi enn ferdigheter i matematikk alene. Begreper som omfatter forhold og proporsjoner er fundamentale i matematikk og naturvitenskapelige fag, og er viktig for å utvikle evnen til analytisk matematisk resonnering. «Proportional reasoning» omfatter evnen til å resonnere omkring sammenhenger mellom spesifikke variabler. Lawson (1976, i Trifone,1987) oppgav denne type vurderingsevne til å ha spesiell relevans for å lære naturvitenskapelige fag. Manglende evne til slike resonneringer kan bety at elever får vanskeligheter med temaer innenfor kjemi som tolkning av ligninger, molbegrep, støkiometri, gasslovene, hastighet og tetthet.

2.3.1 Hva betyr proporsjonal resonnering?

Gjennomgangen av teorien viser tydelig at proporsjonal resonnering er en utviklingsprosess over lang tid der forståelse på ett nivå danner grunnmuren for forståelse på høyere nivå (Cramer

& Post 1993; Hilton, 2012; Lamon, 2005; Noelting, 1980). Som ordet antyder, krever «resonnering» argumentasjon og forklaringer utover blind anvendelse av regler og symboler. Ordet «resonnering» peker også på sunn fornuft og god dømmekraft. Å forstå et begrep er også å forstå hva begrepet ikke er og i hvilke situasjoner det ikke kan anvendes. Proporsjonal resonnering innebærer dermed å resonnere opp og ned i situasjoner der det eksisterer en konstant sammenheng mellom to størrelser som varierer i forhold til hverandre (Lamon, 2007; 2012). Domenet «forhold og proporsjoner» har tradisjonelt vært definert ut fra to typer problemløsninger: sammenligningsoppgaver, der to komplette forhold vurderes mot hverandre og «missing value», der tre numeriske verdier er oppgitt og ett mangler. Om proporsjonal resonnering defineres ut fra evner til å forstå strukturelle sammenhenger i problemtyper som numerisk sammenligning og «missing-value», vil det være en nødvendig men utilstrekkelig forutsetning for å forstå proporsjonalitet (Lamon, 2007). Proporsjonal resonnering betyr å supplere med årsaker som støtter påstander om den strukturelle sammenhengen mellom fire størrelser i en kontekst og som samtidig involverer kovarians av størrelser og bevaring av forhold og produkt. Evnen til å gi korrekt svar gir ingen garanti for at man har forstått den proporsjonale sammenhengen som eksisterer mellom to størrelser. Ofte kan proporsjoner løses mekanisk ved hjelp av algoritmiske prosedyrer. Samtidig hevder Lamon (2007) at proporsjonal resonnering er en konsekvens av å forstå rasjonale tall gjennom ulike erfaringer med deres personligheter. Rasjonale tall har en proporsjonal natur, dvs. at innenfor en ekvivalensklasse er hvert element en konstant multippel av hverandre. Personlighetene av rasjonale tall er beskrevet å være «del-hele»-brøker, forhold, operatorer, kvotienter og målinger (Lamon, 2007; Nunes & Bryant, 2008). Men å forstå rasjonale tall og forstå proporsjonalitet er heller ikke ekvivalente. Å forstå proporsjonalitet er mer krevende enn forståelse for rasjonale tall og proporsjonal resonnering. Det knyttes til å undersøke og lete etter prinsipper og regulariteter i problemsituasjoner før man bruker proporsjoner til å uttrykke disse sammenhengene symbolsk, og deretter tolke symbolene og det man har lært om den spesifikke konteksten den brukes i. Evnen til å bruke proporsjonalitet som en matematisk modell for virkelige situasjoner utvikles bare gjennom studier i høyere matematikk og naturvitenskap (Lamon, 2007).

Modestou og Gagatsis (2010) fant en ny modell for proporsjonal resonnering som utvidet egenskapene foreslått av bl.a. Cramer og Post (1993). Modellen satte spørsmål ved den implisitte antakelsen om at proporsjonal resonnering var en prosess bestående av en komponent, nemlig evnen til å løse rutineoppgaver. Denne komponenten ble kalt rutineproporsjonalitet. I tillegg bestod den nye modellen av to andre komponenter, analog resonnering og metaanalogisk bevissthet (se Figur 2). Testingen av modellen bekreftet godt samsvar med data og at proporsjonal resonnering også betyr evnen til å takle verbale og aritmetiske analogier i tillegg til å skille mellom proporsjonale og ikke-proporsjonale situasjoner.



Figur 2 Modell av proporsjonal resonnering (Modestou og Gagatsis, 2010)

Sowder et al. (1998) mente at proporsjonal resonnering inkluderer forståelse som assosieres med ekvivalens, algebraiske sammenhenger og transformasjoner. Kunnskapen om proporsjonale situasjoner utvikles videre gjennom studier av multiplikative emner i algebra, trigonometri, geometri og statistikk. Den vil danne basis for å kunne forstå anvendelsen av matematikken på ulike naturvitenskapelige felt. Historisk sett har både matematikere og psykologer hevdet at det er nær sammenheng mellom analogisk resonnering og proporsjonal resonnering. De argumenterer med at det ikke er sannsynlig at man vil forstå alle proporsjonale sammenhenger dersom man ikke kan gripe fatt i relasjonelle likheter i analogier. Slike analogier må diskuteres fordi det er fullt mulig å fullføre en analogi på bakgrunn av assosiasjoner uten å tenke på den relasjonelle sammenhengen (Lamon, 2012). Akatugba og Wallace (1999; 2009) registrerte at det var lite oppmerksomhet i forskningen på matematiske aspekter ved elevers proporsjonale resonneringer innenfor fagspesifikke kontekster i realfag på videregående (high school). Utviklingsmodellen for proporsjonal resonnering svarer ikke tilstrekkelig på den intellektuelle prosessen når det tas hensyn til kontekst, effekt av innhold og språk. De antydet et behov for et integrert perspektiv på undersøkelser av proporsjonal resonnering som fokuserer på evnen til å resonnere om komplekse problemløsningsstrategier. Elevenes forklaringer på hvordan de forstår de matematiske karakteristikker av proporsjonale situasjoner er viktig. I etterkant har Tjo og de la Torre (2014) funnet seks egenskaper de mente bidro til teoretisk og operasjonell forståelse innenfor proporsjonal resonnering:

1. **Grunnleggende ferdigheter og konsepter som kreves for å resonnere med proporsjonale problemer**. Dette kan være matematikkferdigheter som er lært tidligere.
2. **Sammenligne brøker og sortere brøker etter størrelsesorden.** Å sammenligne brøker er ferdigheter som kreves for å ordne brøker etter størrelsesorden. Dette gjelder forhold oppgitt i brøkform.
3. **Konstruere forhold og proporsjoner.** Å konstruere forhold er en ferdighet som kreves for å konstruere proporsjoner.
4. **Identifisere en multiplikativ sammenheng mellom mengder av variabler.** Det er ikke tilstrekkelig å kunne anvende metoder for å løse «missing-value» problemer. «Proportional reasoning» krever konseptuell forståelse for og tenkning omkring tilstedeværelsen av en multiplikativ sammenheng. Multiplikativ resonnering ble innlemmet av Lamon (2007) som en kognitiv ferdighet.
5. **Skille en proporsjonal sammenheng fra en ikke-proporsjonal sammenheng**. Her har man for eksempel omvendt proporsjonale problemer (vs proporsjonale), konstante forskjeller (vs konstant forhold), ikke-lineære proporsjoner (vs lineære).
6. **Anvende algoritmer for å løse problemer som krever proportional reasoning.**

Egenskapene har innlemmet mye av den tidligere teorien som knytter proporsjonal resonnering til multiplikativ resonnering og rasjonale tall. I tillegg virker egenskapene å være tilknyttet det Modestou og Gagatsis (2010) kalte meta-analogisk bevissthet. Men det ser ikke ut som analogisk resonnering inngår som element i egenskapene slik de er konkludert.

2.3.2 Utvikling av proporsjonal resonnering

Nolting (1980) tok utgangspunkt i Piaget sine teorier når han ønsket å finne ut om utviklingen av å kunne resonnere proporsjonalt var hierarkisk ved at høyere ordens systemer kontrollerer lavere ordens systemer og hvilke mekanismer som styrer en slik utviklingsprosess. Han fant at forandringer i utvikling kan deles i kvalitative forandringer mellom stadier, der tidligere forståelse på nye data fører til omstrukturering av strategiene, og kvantitative forandringer innenfor stadiet, der strategiene styrkes via øvelse og bruk på varierende data. Men utviklingsstadiene kan bare fastslås innenfor et univers der innholdet er strengt ivaretatt og variasjoner bare skyldes kompleksiteten av innholdet. I de fleste matematiske domener er det umulig å trekke ut en ordnet sti gjennom ulike innhold som fører til forståelse. Tidligere kunnskaper er såpass omfattende at det blir meningsløst å spørre hvordan studenten ankom et gitt punkt i sin læring (Lamon, 1994). Vergnaud (1994) mener at man ikke kan redusere proporsjonal resonnering, konseptet brøk og forhold eller multiplikasjons- og divisjonsalgoritmen til logiske, informasjonsprosesserende og lingvistiske årsaker. Teorien hans om konseptuelle felt er pragmatisk der et problem bare oppfattes som et problem for et individ som innehar de begreper som bidrar å oppfatte problemet for seg selv. Når individet har løst oppgaver av en type, er ikke dette problemer lenger men gir evner til å takle nye situasjoner med andre egenskaper og sammenhenger. En mengde situasjoner og begreper knyttes sammen i et begrepsfelt og utvikling av dette feltet involverer situasjoner, skjemaer og symbolsk verktøy for representasjon. Matematiske, naturvitenskapelige og tekniske tekster er full av variasjoner i betydningen av ord. Kompleksitet kommer ikke bare fra handling, men også fra det å sette ord på ting. Å forstå og tolke matematisk tekst har en signifikant rolle i vanskelighetene som elever opplever. Det er viktig å teste elevers aktivitet i situasjoner der de må tilpasse sine kognitive ressurser til problemer de aldri har møtt før.

Noelting (1980) gjennomførte sitt «Appelsinjuice-eksperimentet» på subjekter fra 6 til 16 år, med 23 oppgaver om sammenligning av ulike blandinger appelsinjuice og vann i glass. Oppgavene ble konstruert ved å ta i betraktning alle mulige variasjoner av en gitt situasjon. Hver situasjon hadde to kombinasjoner av forhold mellom juice og vann, representert av tallpar som f.eks. (1,3) vs. (3,1). Studentene begrunnet hvilken kombinasjon som gav sterkest appelsinsmak, eller om smaken var lik. Resultatene organiserte oppgavene etter vanskegrad og stadier som korresponderte til ulike typer strukturert adferd og løsningsstrategier. Tre stadier (intuitiv, konkret operasjonell og formell operasjonell) ble delt inn i lavere og høyere vanskegrad. Det intuitive stadiet bestod av strategier som baserte seg på forskjellen i antall glass juice eller saft. Det konkrete operasjonelle nivået startet en ny periode ved å inkludere operasjoner med forhold. To ulike typer forhold ble identifisert, der «within-ratio» er forhold innenfor en tilstand og «between-ratio» er forhold mellom to tilstander. Dette stadiet innfører også et skille mellom forhold og kvantitet, der to forhold (1:1 og 2:2) kan ha samme verdi men ulik størrelse. Videre på det formelle operasjonelle stadiet ble disse forholdene supplert med bruk av fellesnevner eller prosent eller man sammenlignet kvotienter og multiplikative sammenhenger.

2.3.3 Multiplikativ resonnering vs. Additiv resonnering

Å gi en størrelse et tall er å måle, mens det å kvantifisere sammenhenger og manipulere dem er kvantitativ resonnering. For å komme fram til riktige konklusjoner ved kvantitativ resonnering må man bruke passende representasjon av sammenhengen mellom størrelsene. Additive resonneringer forteller oss om forskjellene mellom størrelser. Dette er problemer som løses med addisjon og subtraksjon. Multiplikativ resonnering forteller om forholdet mellom størrelser. Dette er problemer som løses med multiplikasjon og divisjon. Denne måten å tenke på fokuserer mer på problemstrukturen enn på selve de aritmetiske operasjonene. Sammenhengen mellom addisjon og subtraksjon på en side og multiplikasjon og divisjon på den andre siden relaterer seg til sammenhengen mellom størrelsene innenfor hver av disse resonneringsområdene. Sammenhengen mellom addisjon og multiplikasjon er prosedyrisk ved at man kan se multiplikasjon som repetitiv addisjon. Tilsvarende vil divisjon være repeterende subtraksjon. Til tross for en slik prosedyrisk link mellom addisjon og multiplikasjon, vil forskjellene være såpass distinkte til at de regnes som separate domener. Additiv resonnering har sitt opphav i handlinger som å slå sammen, separere og plassere mengder i en-til-en korrespondanse. Multiplikativ resonnering har sitt opphav i handlinger som danner en-til-mange korrespondanser, noe som bevarer forholdet mellom variablene konstant. Dersom elever løser problemer innenfor det additive og multiplikative domenet ut fra implisitte modeller, vil de kunne oppleve det vanskelig å skille mellom de to modellene. Multiplikativ resonnering danner grunnlaget for proporsjonal resonnering og lineære funksjoner (Kaput & West, 1994; Vergnaud, 1983). Dersom studenter skal gjenkjenne proporsjonale sammenhenger må de kunne identifisere en multiplikativ sammenheng mellom to verdier. De må også forstå at den multiplikative sammenhengen er konstant, enten i proporsjonal eller omvendt proporsjonal form. En student som gjenkjenner disse kriteriene innehar evne til å resonnere multiplikativt og vil normalt ikke ha problemer med å løse slike oppgaver (Ben-Chaim et al., 2012). Proporsjonal eller multiplikativ resonnering er i kontrast til additiv resonnering. Ved å trene på multiplikative situasjoner og analysere sammenhenger mellom variabler, vil elever etter hvert forstå at additive transformasjoner ikke fungerer. Men dette tar tid og krever erfaring og det er ikke mulig dersom ikke eleven oppdager intensive størrelser. De intensive størrelsene (f.eks. tetthet, konsentrasjon, hastighet etc.) er ikke direkte observerbare eller målbare. De er sammenhenger mellom målbare ekstensive størrelser (masse, volum, lengde, tid etc.). Forskjellen på disse størrelsene er viktig med tanke på hvordan vi opererer på dem: Dersom du spiser 1/3 av en pai til frokost og 1/3 av en pai til kvelds, så har du spist 2/3 av paien i alt. Det er en additiv situasjon som vil forandre seg når mengden pai forandrer seg. Lager du en blanding med 1/3 blåmaling på morgenen og senere fyller opp med en annen blanding med 1/3 blåmaling, så vil blandingen fortsatt ha 1/3 blåmaling. Andelen blåfarge vil aldri forandre seg uansett størrelsen på blandingen. Det er usikkert om brøk som er utviklet i en type situasjon lett kan overføres til en annen situasjon eller ikke, men det er god grunn til å konkludere med at det bør brukes rasjonale tall til å representere intensive størrelser i skolen (Nunes & Bryant, 2007).

2.3.4 Forhold, proporsjoner og rasjonale tall

Vi har sett på hvilke egenskaper forskningen framhever som viktige for å kunne resonnere godt om proporsjonale sammenhenger. Begreper som forhold, proporsjoner og rasjonale tall har vært nødvendige grunnsteiner.

2.3.4.1 Ulike typer forhold

Nolting (1980) definerte "*within-state ratio*» som forhold innenfor en tilstand. I appelsinjuiceeksperimentet tilsvarte det forholdet mellom antall glass appelsinkonsentrat og antall glass vann i en gitt situasjon. «*Between-state ratio*» ble definert som forhold mellom like størrelser innenfor ulike situasjoner. Dette tilsvarte forholdet mellom antall glass juice (eller vann) gitt i en situasjon og antall glass juice (eller vann) gitt i en annen situasjon. Dette skillet bekreftet tidligere forskjeller i type forhold gitt av Freudenthal et al. (1976, i Nolting 1980). Freudenthal skilte mellom interne forhold (mellom termer innenfor et system) og eksterne forhold (mellom termer av ulike systemer) på en måte som er motsatt av definisjonen til Nolting. Forhold innenfor et system betyr f.eks. forhold mellom to lengder eller to tider, mens forhold mellom systemer kan være mellom lengde og tid. Noeltings definisjon hadde utgangspunkt i en naturvitenskapelig tradisjon der det er naturlig å tenke sammenhenger mellom størrelser i en gitt situasjon eller system. Forhold mellom størrelser innenfor et system tilsvarer dermed Freudenthals eksterne forhold. For å unngå slike misforståelser kan man bruke Vergnauds (1983; 1994) «*measure spaces*»: Interne forhold (*within*) er mellom størrelser som deler samme måleområde der strategien er en skalar metode. Eksterne forhold (*between*) er mellom størrelser i ulike måleområder der strategien er en funksjonsmetode. Slike sammenligninger innenfor og mellom måleområder har vært utgangspunkt for å definere forhold og rater. Forhold ble gjerne sett på som sammenligningen mellom like størrelser (f.eks. gram: gram) og rater var sammenligning av ulike størrelser (f.eks. avstand: tid) (Lamon, 2007). Slike rater blir omtalt som «intensive» og får sin egen enhet fra en multiplikativ sammenheng mellom to ekstensive størrelser (Ben-Chaim et al., 2012). Men dette skillet mellom forhold og rater har vært i utvikling. Jeg tar utgangspunkt i det skillet Thompson (1994) foreslår, nemlig at forskjellen ikke ligger så mye i kontekst og situasjon, men heller i de mentale operasjonene vi bruker. Det betyr at man oppfatter et forhold som en multiplikativ sammenheng mellom to størrelser og at dette forholdet blir en rate dersom man forstår at forholdet kan anvendes utenfor den spesielle situasjonen den oppstod i og kan tenke på den som en karakteristikk av en hel klasse kovarierende størrelser. Thompson (1994) skilte mellom forhold som var «interiorized» og «internalized». Innenfor et «interorized» nivå kan elever relatere størrelser ved å assosiere (forhold som per en) og koordinering (forhold som måling). Innenfor «internalized» nivå relateres de spesifikke størrelsene som identiske grupper (eks. 7 pakker sjokolade for 5 pakker vann).

2.3.4.2 Intensive størrelser

Kaput og West (1994) mente enhetsraten (per èn) kunne forstås på to fundamentalt forskjellige måter, det spesielle (*particular*) versus rate (*rate-ratio*). Selv om det er to forskjellige begreper av intensive størrelser bruker vi samme notasjon og språk for dem begge. Forståelsen for rate bygger på erfaringer med det spesielle og har tre hovedideer: Numerisk ekvivalens på tvers av spesielle intensive forhold, semantisk ekvivalens på tvers av situasjonsbeskrivelser og homogenitet. Numerisk ekvivalens menes ofte med ekvivalente brøker og forhold. Dersom man sier at «for hver fjerde elev som er fraværende, så er det tolv elever tilstede», vil dette være numerisk og semantisk ekvivalent med å si at «forholdet mellom fraværende og tilstedeværende elever er en til tre» (og også ekvivalent til del-hele beskrivelsen der en fjerdedel av elevene er fraværende). Homogenitet er f.eks. ideen om at alle kjøp er styrt av samme pris eller at homogene blandinger har samme forhold mellom ingredienser. Semantisk og numerisk ekvivalens gjelder bare når egenskapen til situasjonen som modelleres er homogen i denne situasjonen. Det å forstå homogenitet og når den gjelder er viktig for å forstå intensive størrelser («rate-ratio»). I eksempelet med forholdet mellom fraværende og tilstedeværende elever kan situasjonen være en generell beskrivelse av skolen på en spesiell dag eller det kan være et gjennomsnitt over flere dager. Denne definisjonen av rate uttrykker hvordan en som oppfatter forhold som måling kan forstå rate som en homogen sammenheng mellom størrelser (Johnson, 2015; Thompson, 1994). Kaput og West (1994) legger også til en fjerde faktor for å forstå intensive størrelser, nemlig ideen om variasjon. Ekvivalensen på tvers av ulike prøver med fast blandingsforhold, ulike kjøp med fast kilopris eller ideen om samme hastighet over ulike intervaller av tid og avstand krever en forståelse av at det finnes flere tilfeller av en stor mengde mulige verdier. Dette krever en underliggende idé om variabler. Elever må jobbe mye med de spesielle forholdene innenfor samme og i forskjellige kontekster for at de skal forventes å forstå hvordan rater kan beskrive situasjonen mer abstrakt, som for eksempel med et lineært funksjonsuttrykk. De må danne en begrepsforståelse som tar hensyn til begge variablene samtidig og forstå inverse sammenhenger. Booth (1981) fant at elever (12-15 år) hadde en begrenset forståelse for inverse sammenhenger, spesielt når det gjaldt brøk, og dette kan hindre forståelsen for algebra. Rasjonale tall har en multiplikativ invers, noe som kanskje kan virke uviktig når brøk læres, men som blir viktig i algebra. For eksempel kan det være vanskelig å tenke på brøk som en divisjon (kvotient situasjoner) dersom eleven tenker at brøken representerer antall deler en hel kuttes i (nevner) og antall deler som tas (teller). Dermed blir det også vanskelig å forholde seg til en invers når to brøker skal sammenlignes. Tidligere forskning antyder at vanskelighetene med intensive størrelser ligner på vanskelighetene elevene har med å tenke på brøker som er mindre enn en enhet. De behandler verdiene enkeltvis, det er vanskelig å tenke på inverse sammenhenger og de kan tenke på sammenhengene som additive i stedet for multiplikative. Forskning viser at elever ofte behandler intensive størrelser som ekstensive. Nunes og Bryant (2008) bruker betegnelsen «cultural protection» om hvordan vi i hverdagen omgir oss med intensive størrelser som forenkler brøken ved at størrelsene oppgis per enhet. Nevneren holdes derfor fast og vi trenger bare forholde oss til teller i mange sammenhenger. Johnson (2015) fant at elever kvantifiserte rate på ulike måter avhengig av om deres forestilling av rate var stykkevis (*chunky*) og dermed en diskret prosess eller helhetlig (*smooth*) og mer kontinuerlig prosess. I tillegg kunne dette påvirke om studentenes kvantitative operasjoner var koordinerende eller sammenlignende og om størrelsen på raten (eller forholdet) ble oppgitt fra intensive eller ekstensive størrelser. Studenter som hadde et stykkevis bilde på rate anvendte gjerne sammenlignende operasjoner og oppgav rate ut fra ekstensive størrelser. Dersom en beholder fylles med vann i konstant hastighet kan studentene for eksempel beskrive sammenhengen mellom forandring i volum med forandring av høyde på vannsøylen, eller oppgi hvor mange enheter volumet øker per enhet av høyde. Studenten med helhetlig bilde på rate anvendte en koordinerende operasjon og oppgav raten som intensiv størrelse. Eksempel kunne være å oppgi hvordan økningen i volumet sakket etter som høyden økte eller at man oppgav saktere økning som en størrelse i seg selv.

2.3.4.3 Rasjonale tall og brøker

Lamon (i Harel & Confrey, 1994) trekker fram «*norming*» som en anvendelig konstruksjon for å analysere prosesser med rasjonale tall. Begrepet «*norming*» kan beskrives som en rekonseptualisering av et system ut fra en gitt enhet, dvs. at man tolker en situasjon på nytt ut fra nye sammensetninger av enheter («*units*»). Etablering av slike sammensatte enheter beskrives som «*unitizing*», og er viktige for å utvikle mer sofistikerte matematiske ideer. «*Norming*» og «*unitizing*» spiller en viktig rolle i utviklingen av brøkforståelse. Brøk er et symbol og kan representere ulike mengder alt etter hva enheten og helheten er. Brøk har gjerne vært sidestilt med «del-hele»-sammenligninger i undervisningen. Det er heller ikke unormalt at brøk brukes når man egentlig mener «rasjonale tall». Brøk refererer derimot til et symbol som er et ikke-negativt rasjonalt tall. Tidligere har vi sett at Lamon (2007) har nevnt de ulike underkonstruksjonene av rasjonale tall: «del-hele»-brøker (unitizing: «3 deler ut av 4 like deler»), forhold («3 av A sammenlignes med 4 av B»), operatorer («3/4 av noe»), kvotienter («3 delt på 4») og målinger (3(1/4enheter)). Alle rasjonale tall kan skrives som en brøk, men det betyr ikke at alle brøker er rasjonale tall ($\frac{\sqrt{2}}{2}\ og\ \frac{\pi}{3}$ er irrasjonale tall). Den største forskjellen på forhold og de andre typene rasjonale tall, er måten de kombineres gjennom aritmetiske operasjoner. De andre tolkningene av rasjonale tall er konseptuelt forskjellige, men umulig å skille ut fra måten de skrives symbolsk og regnereglene er de samme. Men man opererer ikke med forhold som man gjør med brøk.

2.3.5 Ulike kategorier av proporsjonale problemer og kontekst

«The rationale number project» (Behr et al., 1979) er et forskningsprosjekt som ble opprettet av National Science Foundation i 1979. Prosjektet argumenterer for å undervise brøk ved å bruke en overføringsmodell basert på arbeidet til Jerome Bruner og Zoltan Dienes. Modellen gir mulighet for flere representasjoner og sammenhengene mellom de ulike representasjonene. Det tidligere utfallet av denne forskningen inkluderer en dypere forståelse for hvordan barn utvikler sin tenkning omkring brøkbegrepet. I den sammenheng har det blitt utviklet flere undervisningsopplegg som fremmer brøkforståelsen. I prosjektet ble det funnet tre ulike typer proporsjonale problemer:

«Missing value» (proporsjonale problemer der tre numeriske verdier er oppgitt og ett mangler).

Numerisk sammenligning (to komplette forhold utleveres, og disse må sammenlignes; eks. Noltings appelsinjuiceeksperiment)

Kvalitativ sammenligning (krever sammenligning som ikke er avhengig av spesifikke numeriske verdier)

De første to typene problemer kan lett løses ut fra memorerte ferdigheter, mens den kvalitative oppgaven gjerne krever mer forståelse. Tidligere forskning har avslørt hvordan tallverdien på størrelsene i et problem kan påvirke vanskegrad og løsningsstrategier (Noelting, 1980; Fishbein et al., 1985). Cramer og Post (1993) avdekket at konteksten også har betydning. Av fire kontekster som ble testet (fart, skalering, blandinger og tetthet), var skalering signifikant vanskeligere. Heller et al. (1989) undersøkte påvirkningen av to aspekter ved kontekst, «problemsetting» og ulike typer forhold, på studenters suksess med proporsjonale problemer. «Problemsetting» omfattet objektene, variablene som beskriver objektene og måleenhetene. Ulike typer forhold var basert på analyser av hvilke kontekster lærebokteksterbrukte på proporsjonale oppgaver (fart, forbruk, valuta). Oppgavene ble gitt i to versjoner der konteksten var forventet kjent eller fremmed og der formatet på problemet var «missing value» eller numerisk sammenligning. Det ble også gitt kvalitative resonneringsoppgaver. Type forhold viste seg å ha en signifikant påvirkning på vanskegrad. På de kvalitative problemene økte også effekten av en ukjent problemsetting når vanskegraden til forholdet økte. Dersom gjenkjennelse er viktig i disse kvalitative spørsmålene, som regnes som viktige utgangspunkt for evne til proporsjonal resonnering, får dette konsekvenser for introduksjon til nye typer forhold innenfor naturvitenskapelige fag. Det blir også viktig å tenke over problemsettingene i slike situasjoner, siden små forskjeller kan ha stor innvirkning på prestasjoner når kjennskapen til forholdet er liten. Saunders og Jesunathadas (1988) undersøkte også effekten av innholdet i oppgaven mot evne til proporsjonal resonnering ved å sammenligne oppgaver gitt i fremmed og kjent kontekst. Forskjellen var at den fremmede konteksten var tatt fra naturvitenskapelige fag og at type forhold var gitt utfra tre vanskelighetsnivåer på tallverdiene. Nivå I bestod av oppgaver med enkle forhold mellom heltall med ett siffer. På nivå II ble ett tall i forholdet justert fra ensifret til tosifret tall mens dette tallet ble justert til desimaltall på nivå III (f. eks. nivå I: 2:3, nivå II: 4:15, nivå III: 4:8,9). Studien fant også en høyere gjennomsnittsscore for oppgaver med kjent kontekst. Når oppgaven hadde forhold på nivå I, gav kjent kontekst en signifikant høyere score enn fremmed kontekst. Ved forhold på nivå II og III, hadde gjenkjennelseseffekten av konteksten ingen signifikant påvirkning på score. Spørsmålet er om studenter innehar evnen til proporsjonal resonnering men ikke klarer å anvende strategien dersom konteksten blir fremmed, eller om det er førkunnskapen hos studenten i identifiseringen av et ukjent problem som gjør at sammenhengen mellom variablene ikke nødvendigvis tolkes som lineær. Da vil man forvente at evne til proporsjonal resonnering vil øke når det skjer en forbedring i ferdigheter til å identifisere den matematiske sammenhengen mellom variablene i et problem og deretter anvende passende løsningsstrategi.

Lamon (1993) delte «missing-value»-oppgavene og oppgavene med numerisk sammenligning i fire ulike semantiske problemtyper: «well-chunked measures», «del-del-hele», «assosierte mengder» og «forstørring og forminskning» («stretchers» og «shrinkers»). Strategiene på disse problemtypene ble undersøkt. «Well-chunked measures» er sammensetningen av ekstensive størrelser til en velkjent intensiv størrelse, f.eks. at hastighet kan være kilometer per time og at pris kan være kroner per stk. Del-del-hele («part-part-whole») er en kontekst der den ekstensive størrelsen (kardinaliteten) til en delmengde gis ut fra kardinaliteten til to eller flere delmengder. Typiske eksempler kan være forholdet mellom jenter og gutter i en klasse. Assosierte mengder («associated sets») kjennetegner kontekster der sammenhengen mellom to eller flere elementer ikke er allment kjent. Man ville ikke vært oppmerksom på sammenhengen om ikke problemet pekte på den, f.eks. mellom elever og pizza. Når et kontinuerlig en-til-en-forhold er bevart mellom to størrelser som representerer en spesifikk karakteristikk, som f.eks. et mål på lengde, høyde, omkrets etc., eller mellom to slike karakteristikker (høyde og bredde), vil situasjonen involvere skalering. Lamon (1993) undersøkte om disse fire semantiske problemtypene ville resultere i forskjeller i hvordan elevene i 6.trinn på middle school tenker om forhold og proporsjonalitet. Hun fant at konteksten fungerte forskjellig på elevenes proporsjonale resonnering og det var ingen tydelig overføring av kunnskap fra en type problem til en annen. I tillegg kunne variasjoner i kontekst innenfor samme type semantiske problem påvirke elevenes respons. Resonneringen og strategiene kunne også relateres til elevenes evne til å konstruere sammensatte enheter. Relativ tenkning og «unitizing» virket å være prosesser som var kritiske for å utvikle gode evner til proporsjonal resonnering. Studien viste at det kunne være nyttig å se på et forhold som en enhet, nemlig et resultat av flere komposisjoner av sammensatte enheter. På den måten kan forhold bli en naturlig utvidelse av å sette sammen ekstensive størrelser og dermed gi en link mellom tidligere lærte matematiske strukturer og det mer komplekse multiplikative feltet.

2.3.6 Strategier for å løse proporsjonale problemer

Cramer og Post (1993) identifiserte fire ulike strategier for å løse proporsjonale problemer: Enhetsraten (*Unit-rate*), forandringsfaktoren (*factor of change*), brøkmetoden og kryssproduktalgoritmen. Tabell 1 viser de ulike strategienes løsningsmetode på problemet

Du kjører 4 miles på 20 minutter. Hvor lang tid bruker du på 12 miles med samme hastighet?

Tabell 1 Løsningsstrategier for oppgaver som involverer proporsjonale størrelser (Cramer & Post, 1994)

STRATEGI	FORKLARING	LØSNINGSMETODE
Enhetsraten (*Unit-rate*)	Innebærer å finne «hvor mye for én?»	$\frac{20min}{4miles} = 5\frac{min}{mile}$ $\frac{4mile}{20min} = \frac{1}{5}\frac{mile}{min}$ $5\frac{min}{mile} \cdot 12miles = 60min$
Forandringsfaktoren (*factor-of-change*)	Innebærer å finne «antall ganger så mye» og tar i bruk skalaroperator.	$20min \cdot 3 = 60min$
Brøkmetoden	Innebærer å finne ekvivalente brøker. Tilsvarer «unit-rate»-metoden, men metoden brukes uten enheter.	$\frac{20}{4} = \frac{20 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{60}{12}$
Kryssprodukt	Også kalt «den formelle ligningsbaserte tilnærmingen» av Kaput og West (1994)	$\frac{20min}{4mile} = \frac{x}{12mile}$

Enhetsraten er et resultat av det Lamon (1994) kaller «between strategy» eller det Noelting (1980) kaller «within state». Vergnaud (1983) vil kalle det funksjonelle forhold mellom størrelser i ulike målingsområder. Dette forekommer ved eksterne forhold (Freudenthal et al, 1976 i Nolting, 1980) og representerer intensive størrelser (Ben-Chaim et al., 2012; Kaput & West, 1994) der man finner «hvor mye for en?» eller «X per Y». Forholdet mellom tilhørende størrelser mellom to måleområder er alltid konstant. Kaput og West (1994) hevdet at kjente semantiske rater fremmer bruken av denne strategien. Lamon (1993) fant at elever gjerne kan ha sterk kjennskap til størrelser som hastighet og bruke riktig vokabular (km per time) uten å ha forståelse for sammenhengen mellom tallene som gir forholdet. Et eksempel kan være at eleven skal sammenligne to ekstensive størrelser, som tilbakelagte avstander over gitte tider. Eleven kan gjerne uttale seg om en multiplikativ sammenheng mellom avstand ved to tidspunkt og samtidig mene at problemet ikke forteller noe om hastighet. Elever som valgte denne metoden kunne også komme i fare for å ofre nøyaktigheten pga. avrunding fordi enheten de valgte ikke var optimal. Hvis prisen for tre ballonger er 4 kroner og du skal finne hvor mye du må betale for 24 ballonger, vil en mer optimal enhet være å finne at du har 8(3ballonger)-enheter. Å finne prisen per ballong kan gi en ugunstig avrunding.

Forandringsfaktoren er et resultat av det Lamon (1994) kaller «within»-strategien eller det Noelting (1980) kaller «between state». Vergnaud (1983) vil kalle det forhold mellom størrelser i samme målingsområder. Skalaren som relaterer enhver to størrelser innenfor samme måleområde er ikke konstant.

Brøkmetoden ligner det Bart et al. (1994) kalte for ekvivalensklasser, der flere brøker genereres for å finne en brøk som tilsvarer verdiene gitt i oppgaven. Pargenerering var også en strategi de fant som tilsvarte ekvivalensklasser, men der det bare ble generert en og ikke flere underklasser.

2.3.7 Intuitive modeller og ukorrekte strategier

Forskningen har vist viktigheten av interaksjon mellom formell og intuitiv kunnskap. Fishbein (1994) hevder at det finnes tre viktige komponenter av matematikk å ta hensyn til når studenters matematiske adferd skal analyseres: den formelle, den algoritmiske og den intuitive. Det formelle aspektet referer til aksiomer, definisjoner, teoremer og bevis. Den tilhører kjernen av den formelle matematikken, men det betyr ikke at vi kan se bort fra den når vi analyserer matematikk som en menneskelig prosess. Det er samtidig en illusjon å tro at så lenge man kjenner til aksiomer, teoremer, definisjoner og bevis, så kan man løse matematiske problemer. Ferdigheter, ikke bare forståelse, er nødvendig og kan bare oppnås gjennom praktisk, systematisk trening. Dette inngår i den algoritmiske komponenten. Det motsatte er også viktig. Matematisk argumentasjon kan ikke reduseres til et system av løsningsprosedyrer. Løsningsprosedyrer som ikke støttes av en formell, eksplisitt redegjørelse blir raskt glemt. Den intuitive komponenten derimot er en kjennelse som aksepteres uten behov for redegjørelse (Vergnaud, 1994). Dette er ideer som minner om tidligere forskning av Inhelder og Piaget (1958, i Ben-Chaim et al., 2012): På det konkrete stadiet er evnen til å se sammenhengen mellom to variabler fortsatt nært knyttet til direkte erfaringer av konkrete situasjoner, før de formelle tankeprosessene utvikles og de proporsjonale lovene er forstått på det formelle stadiet. En slik tilnærming til kognitiv utvikling hevder at man, ved å modnes naturlig gjennom det formelle stadiet, automatisk og spontant velger skjemaet for proporsjonalitet dersom problemet krever dette for å lage en logisk handlingsplan. Fishbein et al. (1985) hevder derimot at tause, intuitive modeller fortsatt kan være rigid knyttet til et begrep lenge etter at formell status er oppnådd.

Interaksjonene og konfliktene mellom disse tre er komplekse. Noen ganger kan dypt forankrede løsningsskjemaer hos en student anvendes feil selv om vedkommende innehar en potensielt korrekt intuitiv forståelse. Eksempel på dette kan være bruk av linearitet ved ikke-proporsjonale problemer (de Bock et al., 1998, 2002; van Doren et al., 2003). Dette er en type overgeneralisering, der løsningsprosedyrer blindt anvendes til å løse problemer og man glemmer å ta hensyn til formelle begrensninger. Ofte er det den intuitive tolkningen basert på primitive, begrensede og sterkt forankrede erfaringer som skygger for de formelle kravene til en løsningsmetode og blokkerer for en korrekt matematisk reaksjon. Eksempler kan være at «multiplikasjon gjør større» og «divisjon gjør mindre». Oppfatningen av multiplikasjon som repeterende addisjon kan bidra til at multiplikasjonen mellom to tall intuitivt tolkes ulikt avhengig av om operator er heltall eller desimal. Studier viste at multiplikasjon og divisjon ikke var konsistent med desimaltall (Fishbein et al., 1985; Greer, 1987). Konteksten i oppgaven blokker veien mellom data og en underliggende, ubevisst intuitiv modell. De etablerte modellene manipulerer en persons problemløsningsevner fra sidelinjen, og er derfor vanskelig å kontrollere.

Kaput og West (1994) mener at resonneringer kan være kompetente fordi de støtter løsningene til et problem, men uformelle fordi de ikke anvender algebraiske ligninger. En vanlig strategi er «bygge opp» eller «bygge ned», der elevene anvender addisjon eller subtraksjon (Booth, 1981; Kaput & West, 1994; Lamon, 1993; 2007). Booth (1981) mente metodene kunne lede dem til riktig løsning og mange hadde ganske sofistikerte metoder for å løse oppgaven, men samtidig vil slike metoder gjøre det vanskelig å løse mer generelle og kompliserte problemer. Erfaringer med slike enkle metoder har gitt suksess tidligere og gjør at de opprettholdes til fordel for de instruerte formelle metodene også i høyere alder og nivå. Booth (1981) satte søkelys på hvordan to ulike typer matematikk kommer til syne: en der du trenger å huske en formel og en der du bruker sunn fornuft. Det er også potensielle kilder for misforståelser ved at den voksne tolker tekstoppgavene som et utgangspunkt for bruk av en algoritmisk regel, mens for eleven er hver oppgave en ny situasjon der løsningsmetoden må velges ut fra formuleringen i oppgaven. Dette kan også forklare hvorfor slike studier gjerne gir ulike resultater. Det at elever ikke løser oppgavene slik voksne ønsker de skal gjøre, betyr ikke nødvendigvis at de ikke innehar evne til matematisk resonnering. Heller ikke at de ikke kan anvende det formelle systemet så fort de er klar over at det eksisterer og er relevant. Studier viser at elever raskt klarer å finne og anvende nye strategier dersom de får instruksjon eller hint som kan lede dem i en retning og gjøre dem oppmerksom på at det finnes andre muligheter. I stedet for å tenke at denne plutselige endringen i strategi er en økning i kognitivt nivå, slik vi kjenner fra Piaget, kan man se for seg at begge strategiene alltid er tilgjengelig for eleven og eksisterer samtidig. Dette gir mening til de sprikende funnene enn om man så på matematikkforståelse som ikkeeksisterende fram til et punkt i utviklingen der problemet løses på korrekt måte (Boyer et al., 2008).

Lamon (1993) observerte at oppgaver med «del-del-hele»-kontekster ble konsekvent løst på med bygge opp metoder. Dette kunne de gjøre dersom det var den enkleste metoden for å løse problemet uavhengig av om de mestret andre, mer sofistikerte løsningsmetoder. Dersom det er 2 gutter og 3 jenter settes sammen i gruppe og det er 25 elever til sammen i klassen, vil eleven finne antall jenter og gutter i klassen ved å bygge opp forholdet mellom jenter og gutter til summen blir 25. Det kan f. eks. se slik ut:

3	3	3	3	3	15	15 jenter
2	2	2	2	2	10	10 gutter

Battista og Borrows (1995) kalte strategien for «*iterating linked composits*». En serie av spesielle forhold utvikles (3:2; 6:4; 9:6; 12:8; 15:10). Kaput og West (1994) fant at problemer som innebærer begrensning («*containment-problems*») fremmet denne strategien så lenge enhetene var spesifisert. En slik begrenset enhet («*containment*») i et problem kan være en bordbrikke, som dekkes med 7 bestikkdeler og 4 tallerkendeler. Slike «bygge opp»-strategier kommer av at elevene bruker en-til-mange korrespondanser og det kan tyde på at mange elever ikke er klar over at det finnes en funksjonell sammenheng som kan beskrives av en lineær funksjon (Nunes & Bryant, 2009). Kaput og West (1994) introduserte også en forkortet «bygge opp/ned»-strategi (abbreviated building up/building down) der elevene fant antall enheter ved divisjon av en størrelse per enhet og multipliserte med korresponderende størrelse per enhet. Men denne metoden kan by på delingsproblemer for elevene dersom kvotienten ikke gir et heltall. Her fant de ut at elever gjerne gjør en justering av størrelsen på enheten før eller etter bygge opp/ned prosessen. Et eksempel var gitt med Park problemet. Kort fortalt gjaldt det å finne hvor mange piknikbord som ville skygge for 50 trær i en park, når de vet at 15 trær gav skygge for 21 bord i en annen park. Ved å dividere antall trær og bord (15 og 21) på 3 gav de en justering av enheten i forkant og derfor ville 50 trær gi skygge for 70 bord. Eventuelt kunne man justert i etterkant av prosessen. I parkproblemet ville man da bygget opp 15, 30, 45 trær så nær målet til 50 som mulig og gjort tilsvarende i like mange trinn for antall bord, 21, 42, 63. Deretter reduseres enheten med en gitt størrelse slik at resten passer. Her vil 45 og 63 deles med

9 for å få 5 og 7, der 5 trær tilsvarer den resten som kreves for å nå 50 trær og som igjen betyr at det er en tilvekst på 7 bord (63+7=70). Det er mulig at elever som bruker slike uformelle metoder bare bruker tallene og ikke objektene når de skal resonnere om størrelser i slike problemer.

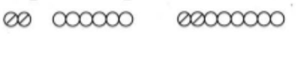
Kontekst kan trigge intuitive løsningsstrategier hos studenter. Lawton (1993) undersøkte i hvilken grad den fysiske likheten mellom objektene i et problem påvirket forståelsen av proporsjonale sammenhenger. Det kan være vanskelig å sammenligne ulike mengder elementer i en homogen blanding av to ulike mengder elementer. Det er lett å ledes til å tenke at elementene korresponderer en-til-en. Oppgavene var av typen «missing-value» og presentert med tegninger av to objekter der det ene varierte fysisk form (bred sylinder, ballong eller isbiter) og det andre objektet var en sylinder. Studentene (gj.alder=22,99 år) hadde fem ganger høyere korrekt respons når det ene objektet var iskuber sammenlignet med sylinder og tendensen til å bruke enhetsstrategi var høyere. Tendens til å anvende additiv strategi var høyere i de to andre problemene og endring av objektet fra sylinder til ballong forandret ingenting på studentenes resonnering. Muligens kan den distinkte forskjellen mellom formen på isbitene og den visualiserte isbitenheten forklare den store forskjellen. Jeong et al. (2007) fant at 6, 8 og 10-åringer ikke mestret proporsjonale problemer (kontekst: sannsynlighet) som involverte diskret størrelser, men at selv de yngste hadde suksess med kontinuerlige størrelser. Testen skilte mellom diskret og kontinuerlige variabler i måten inndelingen av røde og blå felt ble synliggjort på to runde skiver med ulik størrelse. De kontinuerlig fargede feltene bidro muligens til å hindre en feilaktig tellestrategi. Boyer et al. (2008) fant også en lavere prestasjon i proporsjonale oppgaver der størrelsene var diskret. Oppgavene tok utgangspunkt i Noelting´s appelsinjuiceeksperiment, men andelen juice og vann ble presentert med ulik inndeling av søyler. Søylene kunne deles inn i minste enheter juice og vann eller de kunne vise en kontinuerlig mengde juice og vann. I studien ble oppgaven og svaralternativene kombinert på fire måter utfra kontinuerlig eller diskret søyler i oppgaven kombinert med kontinuerlige eller diskret søyler i svaralternativene. Det var bare i oppgaver der både oppgaven og svaralternativene ble vist som diskret inndelte bestanddeler av juiceblanding at elevene presterte signifikant dårligere. De konkluderte derfor med at det ikke nødvendigvis er tilstedeværelsen av diskret størrelser som begrenser evne til å løse oppgavene. I stedet kan det virke som om det skjer en overdrivelse av den absolutte numeriske ekvivalensstrategien. De matcher antallet deler av juice eller juice pluss vann i oppgave og svaralternativer. Det betyr ikke nødvendigvis at elevene ikke kan kode «del-hele» sammenhenger, men at delene er mer fremtredende enn den hele. Elevene var ikke konsekvent med sine løsningsmetoder på tvers av oppgavekontekstene.

Misilidou og Williams (2014) fant også at ulike typer oppgaver trigget ukorrekt bruk av proporsjonale strategier på ulike måter. Elever kunne for eksempel bruke «bygge opp/ned»-strategi i kombinasjon med konstant differanse. Malingseksempelet viste dette: Sue og Jenny vil male med samme farge. Sue bruker 3 spann med gul maling og 6 spann med rød maling. Jenny bruker 7 spann med gul maling. Hvor mye rød maling trenger Jenny? Strategien starter med å iterere forholdet (3 gule: 6 røde; 6 gule: 12 røde). Deretter adderes 6 gule spann med 1 for å få 7 spann. Antall røde spann blir derfor $12 + 1 = 13$. Det er mulig flinke elever bruker denne metoden i møtet med vanskelige problem pga. tallverdier eller kontekst. Det var høy frekvens av elever som løste dette problemet med «konstant sum». Elevene adderte antall spann gul og rød maling ($3 + 6 = 9$). Siden Jenny hadde 7 røde spann fra før, mangler hun 2 gule spann for å få en blanding på 9 spann. Tendensen var at denne strategien ble trigget av blandingsoppgaver kombinert med tall som var enkle å summere. Oppgaver der forholdet ikke utgjorde heltallsmultipler trigget additive strategier. Kaput og West (1994) fant også at to størrelser med nære tallverdier også kunne trigge en slik strategi. I tillegg kan en ukjent kontekst fremme den additive tilnærmingen.

De Bock et al. (1998) fant at elever (12-13 år og 15-16 år) hadde enorm forskjell i korrekt besvarelse på proporsjonale problemer (12/13 år: 92%; 15/16 år: 93%) og ikke-proporsjonale problemer (12/13 år: 2%; 15/16 år: 17%). Hovedårsaken til elevenes ikke korrekte løsninger på ikke-proporsjonale oppgaver var bruk av lineær proporsjonal resonnering. Det er mulig at elevene undervurderte vanskelighetsgraden til disse oppgavene, og hadde en forventning om rutinepregede oppgaver. Kanskje ville resultatet blitt annerledes dersom elevene ble advart om at ikke alle oppgaver var rutinepregede. Forfatterne problematiserte også det at oppgavene ikke var virkelighetsnære nok for denne aldersgruppa. Det at elevene fikk beskjed om å tegne en skisse av problemet før de svarte på oppgaven gav ingen signifikant effekt på elevenes prestasjon. En tilsvarende tendens til bruk av lineær strategi på ikke-lineære problemer fant også Van Doren et al. (2003) da de intervjuet 12- og 16-åringer med utgangspunkt i en oppgave der høydene på to irregulære figurer (julenisser) var oppgitt der den ene var en forstørret versjon av den andre. Elevene skulle finne hvor mye maling som krevdes for å tegne den store figuren når de visste hvor mye maling som ble brukt på den lille figuren. Omtrent alle elevene i studien valgte spontant å bruke en proporsjonal sammenheng mellom høydene i figurene og forbruk av maling. En stor påvirkende faktor virket å være den lingvistiske oppbyggingen av oppgaveteksten. At oppgaven hadde tre kjente verdier og en manglende verdi gav assosiasjoner til «missing-value»-oppgaver, som igjen trigget en proporsjonal løsningsstrategi. Elevene var uoppmerksom på den kvadratiske veksten til arealet av den forstørrede figuren. Nunes og Bryant (2009) mente de Bock og Verschaffel et al. (2002; 2003) overdrev da de påstod at lærere faller for *den lineære illusjonen* av ikke-proporsjonale situasjoner. Et eksempel er oppgaven der Sue og Julie løper rundt en bane i samme hastighet. Sue startet først og hadde løpt 9 runder når Julie hadde løpt 3 runder. Oppgaven var å finne antall runder Sue hadde løpt da Julie hadde løpt 15 runder. Mange løste oppgaven multiplikativt, men ifølge Nunes og Bryant (2008) kan man ikke si at løsningsmetoden antyder illusjoner om linearitet fordi funksjonen er lineær. Problemet er heller evnen til å løse lineære oppgaver der skjæringspunktet ikke er 0.

2.3.8 Konsekvenser for kjemifaget

Ramful og Narod (2014) brukte Vergnauds (1983) teori om konseptuelt felt og «*measure space*» til å identifisere likheter og forskjeller mellom proporsjonale situasjoner innenfor støkiometri. Analysen av bredden av slike situasjoner ledet til fire nivåer av vanskelighetsgrad, basert på i hvor stor grad konvertering av enheter og antall reaksjonsforhold som var involvert i problemet. Situasjonene er stort sett av typen «missing value» og analyse av strategien til fem lærerstudenter viste at enhetsmetoden ble foretrukket.

Alle faktorene som synes å påvirke evne til proporsjonal resonnering kan forklare hvorfor forståelsen av proporsjonalitet i kjemifaget er komplekst og vanskelig. I kjemi er proporsjonalitet i støkiometri definert ut fra molbegrepet, et mikroskopisk nivå. Størrelsene i proporsjonale problemer kan være både være intensive og ekstensive, i tillegg til at de ofte innehar verdier som involverer brøk, tall på standardform og desimaltall. Konvertering av enheter er essensielt og oppgaven må gjerne utføres i flere trinn. I tillegg er det viktig å skille mellom en kjemisk reaksjonsligning og en matematisk ligning. Mange studenter regner ut mengder av stoffer i en reaksjon ut fra forhold mellom oppgitte masser i stedet for stoffmengde (Ramful & Narod, 2014). Studenter opp til universitetsnivå viser også svak forståelse av nåværende aksepterte stoffmodeller, ved at mange forestiller seg materie som et kontinuerlig medium i stedet for partikler. Det er enklere å forestille seg gass ut fra partikkelmodellen, men ikke væsker og faste stoffer. Det får også konsekvenser for tolkningen av kjemiske reaksjoner (Nakhleh, 1992): 

Med en kontinuerlig forståelse av stoffoppbygning, vil en korrekt «unitizing» være vanskelig. Det har vist seg at kontinuerlige og diskret objekter påvirker løsningsstrategier, og at den fysiske forskjellen og visualiseringen av enheter av objekter kan lette tolkningen av problemet. I kjemiske problemer er den fysiske forskjellen på objektene skjult bak symbolene, og kanskje kan en tolkning av stoffene som kontinuerlige bidra til at beregning av masseforhold intuitivt virker riktig å gjøre. I tillegg vil problemer som omfatter blandinger føre til vansker med å tolke en kontinuerlig, homogen væske bestående av bestanddeler som er diskret.

Akatugba og Wallace (1999; 2009) gjennomførte en casestudie på 6 elevers vansker med proporsjonal resonnering under arbeidet med 18 fysikkoppgaver. De fant at elevene brukte additive og multiplikative strategier i tillegg til noen fysikkalgoritmer. Dette var strategier som ikke nødvendigvis var forstått. Proporsjonale sammenhenger var gjerne basert på puggede matematiske mønstre fra grunnskoleopplæringen. De hadde aldri brukt tid på å forstå algoritmene. Det var lite bevissthet om at de matematiske proporsjonale mønstrene kunne være meningsfulle. Det var vanskelig å gjenkjenne proporsjonale variabler i fysikkoppgavene og derfor vanskelig å se at de kunne bidra som problemløsningsstrategi i fysikk. Fokuset var mer på løsning. Elevene hadde også vansker med å overføre kvalitativ informasjon i en oppgave til matematisk notasjon. Gjenkjennelse og relevans påvirket derimot evnen til å løse problemet på en positiv måte. Noen elever hadde også vansker med regneferdigheter i divisjon og multiplikasjon som påvirket hvor lang tid det tok å løse problemene. Intensive størrelser (f.eks. tetthet) ble oppfattet som ekstensiv størrelse. Det ble derfor vanskelig for elevene å finne løsninger på oppgaver med utgangspunkt i en intensiv og en ekstensiv størrelse. Ofte klaget elever på utilstrekkelig oppgaveinformasjon. Da elevene ble gjort oppmerksom på «skjult informasjon», dvs. kunnskaper i fysikk som viktig grunnlag for å velge riktig matematisk metode, klarte de allikevel ikke bruke sine proporsjonale strategier. Oppgavens språk, krav og integrering i tillegg til kunnskap om underliggende fysiske prinsipper og prosessering av informasjon var også viktige påvirkninger på proporsjonal resonnering. Dette kan også være relevant for de påvirkninger elevene har på sine proporsjonale strategier i møtet med kjemioppgaver.

3 METODE

I denne delen vil jeg informere om hvordan jeg har gått fram for å få svar på mine forskningsspørsmål. Jeg starter med å gi en kort informasjon om valg av metode før jeg presenterer utvalget og selve gjennomføringen av datainnsamlingen fra deltagerne på oppgavetester og intervju. Deretter gir jeg en oppsummering av de valg som er gjort ved utviklingen av testmaterialet og intervjumalen før jeg tilslutt beskriver valg av kvantitative og kvalitative analysemetoder på det materialet som er samlet inn.

3.1 Valg av metode

Målet med studien var å kartlegge hvilke relevante matematikkoppgaver for kjemifaget elever som starter et kjemikurs på videregående skole høsten 2016 hadde vansker med og hva som kjennetegnet de løsningsstrategiene som ikke var korrekte. Hensikten var også å undersøke om det var noen forskjell på elevenes suksess med å løse disse oppgavene med og uten kjemikontekst. Det er derfor tatt et valg om en «mixed method» design og metodetriangulering. De kvantitative metodene kartla elevenes score på en kartleggingstest i matematikk høsten 2016 og på kjemioppgaver som krever matematikkferdigheter gitt på ulike prøver gjennom året 2016/17. McNemare test ble også foretatt på analoge oppgaver med og uten kjemikontekst for å undersøke om det var noen signifikant forskjell i gruppas suksess med å løse disse problemene. De kvalitative metodene fulgte opp de kvantitative undersøkelsene. Resultater fra de kombinerte kvantitative og kvalitative undersøkelsene av oppgavebesvarelser gav utgangspunkt for valg av tema til et kvalitativt intervju med fire elever. Metoden kan derfor i hovedsak karakteriseres som en forklarende kombinert metode (Creswell, 2012, Kap.16), der den kvalitative analysen forklarer to deler av den kvantitative analysen: Den kvalitative analysen av ikke korrekte og delvis korrekte oppgavebesvarelser forklarer kartleggingen av score på oppgaver. Intervjuet og den kvalitative analysen av ettertesten forklarer dypere ett aspekt av det kvantitative datamaterialet, nemlig deltagernes resonnering om forhold og sammenhengen mellom størrelser. Et kvalitativt intervju kan gi en dypere innsikt i elevenes resonnering og tolkning av en oppgave og valg av strategi. Intervjuet hadde derfor et eksplorativt formål ved å være åpent for hva deltageren fortalte og gå videre med det, men også til dels hypotesetestende ved å undersøke mistanker om deltagerens forståelse slik den ble vist på oppgaveløsninger (Kvalø & Brinkmann, 2009). På bakgrunn av funnene fra intervjuene, ble nye test laget for å undersøke hvor utbredt intervjudeltagernes resonneringer var for den andelen av gruppa som scoret lavt på oppgaver om forhold.

3.2 Utvalg

3.2.1 Deltakere til testgjennomføring

Det ble innhentet samtykke fra 58 elever til denne studien og 54 elever gav sin tillatelse. Disse elevene var i sitt andre år på en videregående skole på Østlandet. Grunnen til at disse elevene ble valgt var at de skulle gjennomføre kurset Kjemi 1 skoleåret 16/17. Deltagerne er også et bekvemmelighetsutvalg (Creswell, 2012, Kap. 5) fordi et allerede godt etablert samarbeid med faglærere og deltagere forenklet en stabil datainnsamling gjennom hele året. Elevene var delt i to grupper. Den ene gruppen var en teknologi- og forskerklasse der alle elevene har kommet inn på bakgrunn av høyt inntakskrav fra ungdomsskolen. Denne gruppen presterer i gjennomsnitt høyere enn andre grupper på skolen. Den andre gruppen er satt sammen av elever fra flere studieforberedende grupper, der felles for dem er at de har valgt kjemi. Et utvalg på 54 vil også ligge over det Creswell (2012) anbefaler for studier som ser på sammenhengen mellom variabler.

3.2.2 Deltakere til intervju

Fokuset på intervjuet var de vanskene elevene viste med sammensatte størrelser og forhold på kartleggingstesten i matematikk og på kjemiprøver. Utvalget ble først plukket ut på grunnlag av fire oppgaver fra to sentrale temaer som omhandlet forhold, der oppgavene er parvis gitt med og uten kjemikontekst (se oppgave 7 og 8 vedlegg 7.6 og oppgave $An7_1$ og An8 i vedlegg 7.7). Elever som hadde korrekt besvarelse på parvise oppgaver ble luket ut. Deretter ble elevene plukket ut fra middels og lav score på kartleggingstesten i matematikk. En anbefaling av faglærer om hvem som kunne egne seg som gode intervjuobjekter avgjorde hvilke åtte elever som ble forspurt og tilslutt hvilke 4 elever som ble valgt til intervju. Antallet ble valg på bakgrunn av tiden jeg hadde til rådighet og lengden på intervjuene. Evnen til å gi et dyptgående bilde minker med antallet individer og risikoen for overfladiske perspektiver blir større (Creswell, 2012, s. 209). Elevene som ble plukket ut hadde alle vist vansker med temaene disse oppgavene representerte, selv om de klarte seg bra på andre områder. To elever hadde en totalscore på 52%, en elev med 56% og en elev på 60% av totalscore på kartleggingstesten. To elever hadde ikke løst noen av de fire oppgavene korrekt. En elev hadde korrekt besvarelse på en oppgave i kjemikontekst (An8) og en elev hadde korrekt besvarelse på begge oppgavene i kjemikontekst. Ingen av disse to elevene hadde korrekt besvarelse på oppgavene i matematikkontekst. Utgangspunktet for å velge disse framfor elever med større vansker, var å sikre mer informasjon fra elever som kanskje lettere klarer å formidle sine tanker og strategier. Elevene hadde ikke nødvendigvis dårlige karakterer i kjemifaget helhetlig sett. Det ble gjennomført ett intervju per dag i forbindelse med elevenes kjemitimer. Det gav mulighet for å reflektere og justere mellom hvert intervju.

3.2.3 Utvalg av besvarelser for analyse av ettertest

På bakgrunn av funnene fra intervjuene ble det undersøkt hvor utbredt intervjudeltagernes resonneringer var for den andelen av gruppa som scoret lavt på oppgaver om forhold. Deltagerne ble sortert under intervaller av totale prosentvise score på kartleggingstesten i forkant av intervjuet. Vanskegraden for hver oppgave ble beregnet innenfor hvert intervall. Elevene med prosentvis score over 70% viste seg allikevel å ha vansker med oppgaver med intensive størrelser (se oppgave 5a og b,). Men det var et skille mellom elevene på 70% for forholdsoppgavene 7 og 8. Det ble derfor valgt å analysere besvarelsene på ettertesten for de 29 elevene som hadde lavere score enn 70%. Dette er i samsvar med Weisman (1981) som kategoriserte en score på under 70% (i matematikk) som et tegn på at eleven manglet nødvendige forberedelser for studiet i kjemi.

3.3 Gjennomføring

3.3.1 Testgjennomføring

Kartleggingstesten i matematikk ble gjennomført i uke 35 høsten 2016 for begge klassene, før undervisningen i både kjemi og matematikk ved skolen var kommet ordentlig i gang. De analoge kjemioppgavene tok utgangspunkt i ulike emner innenfor kjemi. Derfor ble disse oppgavene gitt ved ulike tidspunkt gjennom året for å sikre at elevene hadde fått opplæring i emnene. Matematikkrelaterte kjemioppgaver ble analysert fra 4 kjemiprøver gitt i desember, januar, april og mai. Oppgavene ble gitt på kjemiprøver for å holde testbyrden for elevene på et minimum. Samtidig er prøvesituasjonene ofte de tidspunktene elevene er best faglig og mentalt forberedt til å løse oppgaver, noe som sikrer et bedre datagrunnlag. Sluttesten på bakgrunn av intervjuene ble gjennomført i slutten av mai, etter at elevene var ferdige med kjemikurset.

3.3.2 Gjennomføring av intervju

Det ble laget en intervjuguide (se vedlegg 7.8) med oppgaver som var viktige utgangspunkt for intervjuet og som samtalen skulle dekke. Eleven skulle bare intervjues en gang og det skulle vare i 50-60 minutter. Det var allikevel viktig å komme nærmere elevens tolkninger av oppgavene som skulle løses og få bedre innblikk i valg av løsningsstrategier. Gilje og Grimen (1993, i Nilssen 2012) nevner tre typer forforståelse: forskeren ser verden gjennom det språket og de begrepene som hun har til rådighet, forskeren har ideer og antakelser om hva som er sant og forskeren har personlige opplevelser. Denne forforståelsen påvirket intervjuet ved at oppgavene og spørsmålene i intervjuguiden tok utgangspunkt i hva forskning og egne tidligere analyser av elevenes løsningsstrategier hadde avdekket av vansker. I tillegg har egne erfaringer som lærer bidratt med ideer om elevers vansker i kjemi og matematikk. Men det var viktig å åpne for identifisering av nye måter å se og forstå temaet. Det kan fort skje at en forforståelse kommer til kort i møte med elevenes utsagn i en intervjusituasjon. Det er derfor viktig å være åpen for å justere og tilpasse forforståelsen sin underveis og være bevisst egen forutinntatthet (Nilssen, 2012, s. 69). Derfor ble det viktig å ha en fleksibilitet i oppfølgingsspørsmål og en bevisst naivitet (Kvale & Brinckmann, 2009, s. 48). Et semi-strukturert intervju ville derfor passe denne undersøkelsen. Elevene fikk utlevert papir og blyant de kunne bruke til å løse oppgavene. Oppgavene ble utlevert en om gangen på ark og lest opp for eleven. Eleven og jeg satt på hver side av et bord, men jeg satt litt til venstre for eleven og ikke rett ovenfor. Intervjuet ble tatt opp på bånd. Målet var å få elevene til å forklare hvordan de tenkte uavhengig av om strategien var riktig eller gal. Elevene hadde en tendens til å tolke oppfølgingsspørsmålene som et tegn på at de hadde gjort feil. Det gjorde at de lettere korrigerte seg selv dersom de gjorde feil, men kunne også bidra til at de begynte å tvile på sine korrekte strategier. Det ble derfor viktig å være våken på hvordan eleven responderte på mine kommentarer underveis, og de ble gjort oppmerksom på at spørsmålene kom uavhengig om det eleven sa var riktig eller galt. Dette er en del av intervjuanalysen som beskrives av Kvale og Brinkmann (2009) der intervjupersonen foretar en selvanalyse av egne svar underveis samtidig som intervjueren foretar en fortetning og fortolkning av mening med det som blir sagt. Å være sitt eget instrument i en intervjusituasjon innebærer å være årvåken, sensitiv og lyttende for å vite når man skal be om utdypinger, når man bør endre retning på intervjuet og når man påvirker situasjonen (Nilssen, 2012, s. 30). Det var også viktig å gi eleven god tid til å lese, forstå og jobbe gjennom en oppgave. Her responderte elevene litt ulikt på å sitte overfor intervjueren med et problem de ikke umiddelbart klarte å se løsningen på. De kunne fort bli nervøse og miste evnen til å tenke klart. Det ble derfor viktig å få til en balanse mellom å gi eleven nok tid til å tenke, men samtidig ikke så lang tid at nervøsiteten hindret eleven i å forfølge tankerekkene. Man kan spørre seg om elevene ville fått til oppgaven bedre dersom de satt alene først. Tidligere oppgaveløsninger har imidlertid vist at slike typer oppgaver har vært vanskelig også i prøvesituasjoner, og at det ikke var overraskende at det også ville være vanskelig nå. Fordelen nå var at jeg fikk bedre innblikk i det som hindret eleven i en klar forståelse av oppgaven.

3.4 Datainnsamling

Det vil bli gitt en redegjørelse for valg av oppgaver på kartleggingstest i matematikk, analoge kjemioppgaver, intervjumal og ettertest på bakgrunn av intervjuet.

3.4.1 Kartleggingstest i matematikk

En kartleggingstest i matematikk ble laget for å undersøke elevenes vansker med relevante matematikkoppgaver som kreves i kjemikurset de skulle starte. Forskningsresultater tilbake til 1950-tallet er lest for å få et innblikk i hvilke undersøkelser som har vært gjort på matematikk i kjemi. Utgangspunktet for de tidligste undersøkelsene har vært å finne gode predikatorer for om en elev vil oppnå suksess i kjemi (Andrews & Andrews, 1979; Ozogomonyan & Lofthus, 1979; Perkins, 1978). Forskningene rapporterer ulike predikatorer, men felles for dem er at gode evner i matematikk framheves som viktig indikator på studentens videre suksess i kjemi. De fleste studiene tar i bruk amerikanske tester som ACT/SAT. Det ble tatt en avgjørelse på å ikke velge å bruke tilsvarende matematikktester. En av grunnene var at de fleste studiene er utført i USA, Irland og UK der innholdet i matematikk og kjemi er litt ulikt fordelt på trinnene sammenlignet med Norge. I tillegg har det vært kritikk mot at slike tester oftest inneholder oppgaver fra den formelle matematikken og at det er viktigere å teste matematikk i kontekst, spesielt evnen til å dekode tekstoppgaver og evnen til å forstå proporsjonalitet (Kilner, 2014). Av 23 oppgaver i kartleggingstesten er 8 gitt i ulike kontekster (oppgave 1e, 4, 5a, 5b, 6a, 6b, 7, 8, se 7.6). Valg av kontekst ble gjort på bakgrunn av forventet gjenkjennelsesfaktor fra tidligere matematikkurs og en struktur som var analog til en typisk kjemioppgave elevene vil møte i kjemikurset. Tallverdiene skulle være mulig å regne med uten digitale hjelpemidler. Utover dette ble det på dette tidspunkt ikke gjort noen vurderinger på størrelsenes egenskaper, tallverdier og problemsetting slik forskning innenfor «proportional reasoning» viser kan ha betydning for elevenes evne til å løse oppgaven. Alle oppgavenes tematiske innhold ble i stedet valgt ut fra tidligere forsknings konklusjoner om spesifikke matematikkferdigheter som knyttes til suksess i kjemi (Adigwe, (2013); Denny, 1971; Grove, 2014; Kilner, 2014; Leopold & Edgar, 2008; Perkin, 1978; Weisman, 1981). Dennys (1971) ti matematikkferdigheter (regning, parenteser, fortegnsregler, potenser, brøk, desimal, prosent, ligninger, forhold/proporsjoner og grafer) dekker konklusjonene fra forskningen bra og gir en god overskrift for det matematiske innholdet de valgte oppgavene har til hensikt å teste. I tillegg er det valgt å tilføre kategorier som er spesifikke tilfeller av ferdighetene nevnt ovenfor: Standardform, logaritme og enheter. Cunningham og Whelan´s (2014) *Math Skill* og Royal Society of Chemistry's nettressurs *Discover Math for Chemists* (i Yates, 2012) brukte denne inndelingen i tillegg til Dennys ti ferdigheter i sine læreverk i matematikk til støtte for kjemikere. De fleste oppgaver fra kartleggingstesten er hentet fra disse ressursene. Disse var ment å dekke et behov for en ressurs som kunne gi oversikt over nøkkelbegreper i matematikk, men som også kunne gi eksempler på hvilke kjemioppgaver som krever de ulike matematiske temaene. Inndeling og innhold i kategorier, kategorienes plassering i kjemikontekst og hvilke oppgaver i kartleggingstesten som tester hver kategori er gitt i Tabell 11 i vedlegg 7.5. En oversikt over kartleggingsoppgavene og hvor de er hentet fra er gitt i vedlegg 7.6.

3.4.1.1 Kjemioppgaver

For å finne ut om elevenes evner til å løse matematikkoppgaver er forskjellig for oppgaver med og uten kjemikontekst, var det nødvendig å finne kjemioppgaver som var analoge og strukturlike til oppgavene på Kartleggingstesten i matematikk. I denne studien har matematikkoppgavene blitt laget først og deretter «oversatt» i en kjemikontekst. Dette er motsatt rekkefølge av Scott (2012). Ved å gjøre det i denne rekkefølgen var det matematikkferdighetene som var utgangspunkt og som ble undersøkt i ulike kjemikontekster gjennom året. Siden oppgavene ble gitt på kjemiprøver og var en viktig del av elevenes vurderingssituasjoner, var faglærerne opptatt av at oppgavene gjenspeilte deres undervisning. Faglærerne har derfor vært involvert i utformingen av oppgaveteksten med utgangspunkt i deres læreverk (Aqua). Ikke alle prøvene ble gitt samtidig for de to klassene. Dette innebar at klassene fikk utdelt oppgavene med små forskjeller i tallverdier. Fordi kjemioppgavene ble gitt på prøver gjennom året, gav det en mulighet for å undersøke elevenes strategier underveis på ulike tidspunkt og med ulike problemsettinger. Dette førte etter hvert til et behov for å gå i dybden på elevenes resonneringer omkring problemer som omfattet forhold, proporsjoner og forståelsen av intensive størrelser (g/mol og mol/L). Det ble derfor gjort analyser på flere utvalgte oppgaver som dekket dette området av matematikken i kjemi. De analoge oppgavene er gitt i vedlegg 7.7.

3.4.1.2 Intervjuoppgaver

Prosjektet har prøver og kartleggingstester som grunnlag for å undersøke kvantitative forskjeller i prestasjoner på oppgaver gitt med og uten kjemikontekst. Ikke korrekte besvarelser har også blitt analysert kvalitativt for å avdekke hvilke typer feil de fleste elevene gjorde. Det var enklere å forstå og oppdage de algebraiske og regnetekniske svakhetene elevene hadde. Når det kom til å tolke tekstoppgaver og løse disse var ikke strategiene nødvendigvis konsekvente ved ulike problemsettinger, spesielt i oppgaver som omfattet forhold og proporsjoner. Det var imidlertid vanskelig å avdekke hvorfor disse feilene oppstod, og hva som trigget dem. Et intervju vil kunne gi et større innblikk i elevens tanker i forkant av og underveis i løsningsprosessen. Det var ønskelig å bruke intervjuet til å komme nærmere et svar på forskningsspørsmålet*: Hva avslører elevene, som scoret lavt på oppgaver med forhold og proporsjoner på kartleggingstest i matematikk, om sin proporsjonale resonnering?*

Det ble valgt å fokusere på problemstillinger som omfattet forhold og proporsjoner i problemsettinger med innslag av kontinuerlige og diskret størrelser med og uten kjemikontekst. Det ble laget 4 oppgaver med ulik kontekst. Intervjumalen er gitt i vedlegg 7.8. Oppgave 1 og 3 var gitt på tidligere kjemiprøver. Oppgavene omfatter beregninger på reaksjoner på to ulike måter. I oppgave 1 skal mengden av et produkt bestemmes ut fra en vurdering av forholdet mellom reaktanter og produkter og ut fra begrensende mengder utgangsstoffer. I oppgave 3 skal et forhold mellom produkter og reaktanter bestemmes når det skjer additive endringer i stoffenes konsentrasjoner fram mot likevekt (der konsentrasjonene ikke endres lenger). Oppgave 1 ble valgt på grunnlag av at elevene viste på prøver at flere mestret å bruke reaksjonsforholdet mellom stoffer til å bestemme mengder av produkter dersom den ene stoffet var i overskudd, men ikke dersom de selv måtte bestemme hva som begrenset reaksjonen. Dette problemet gjenspeilte seg også på kartleggingstesten (oppgave 7, se vedlegg 7.6) der elevene hadde vansker med å gjenkjenne hva som begrenser hvor mye saftblanding du kan få i et gitt blandingsforhold mellom saftkonsentrat og vann når en begrenset mengde oppgis for begge. Oppgave 2a tok utgangspunkt i en av de numeriske sammenligningene av appelsinsmak for to blandinger med appelsinkonsentrat og vann i Noeltings (1980) appelsinjuiceeksperiment. Oppgaven er modifisert ved at illustrasjonene viser antall glass appelsin og vann både på en diskret og kontinuerlig måte. Oppgaven ble også et utgangspunkt for å teste videre forståelse av blandingsforhold der begrensende mengder må vurderes (oppgave 2b), der to volum av appelsinjuice med ulike forhold mellom konsentrat og vann skal blandes og gi ny konsentrasjon av appelsin (oppgave 2c) og tilslutt der blandingsforholdet til en appelsinjuiceblanding skal endres (oppgave 2d). Oppgave 4 er en modifisert utgave av Ryan (2011, s. 64) som tester studenters forståelse av molar konsentrasjon (mol/L). Grunnen til valg av denne oppgaven er at flere elever har på prøver avslørt vansker med beregning med intensive størrelser som mol/L (og g/mol). Blant kollegaer har vi ofte diskutert elevenes manglende algebraiske ferdigheter når det gjelder å omforme enkle formler riktig under slike beregninger. Men problemet kan gjerne ligge i en grunnleggende mangel på forståelse for hva denne intensive størrelsen betyr.

3.4.1.3 Test på bakgrunn av intervju

Resultatet fra intervjuene genererte en ny type kartleggingstest med 17 oppgaver innenfor 6 delemner (se vedlegg 7.9). Intervjuene bekreftet noen mistanker som oppstod fra analyser av løsningsstrategier på prøver, men avklarte også hvordan elevene tolket situasjoner ulikt og at disse var inkonsekvente. For å få et større innblikk i hvor utbredt disse tolkningene var ble det gjennomført en ettertest. To oppgaver (1a og 1b) tar utgangspunkt i to numeriske sammenligninger av appelsinsmak mellom to blandinger med appelsinkonsentrat og vann i Noeltings (1980) appelsinjuiceeksperiment. Oppgave 2a og 2b er flervalgsoppgaver der svaralternativene er laget fra intervjuobjektenes uttalelser om forholdet 2:3 i den gitte konteksten med blandingsforhold mellom appelsinkonsentrat og vann og hvordan de tolker begreper som «begrensende faktor» og «i overskudd». Oppgave 2c er lik som intervjuoppgaven som testet forståelse av blandingsforhold der begrensende mengder må vurderes. En slik oppgave er også gitt i kjemikontekst (oppgave 3a). Det kan virke som om elever løser slike oppgaver ulikt ut fra reaksjonsligningens oppbygning. Dersom utgangsstoffer danner ett produkt, virker det som om eleven tolker dette som en blandingsoppgave der alle enkeltdeler summeres. Oppgavene om forhold og proporsjoner uten kjemikontekst har tatt utgangspunkt i blandinger. Blandinger er kontinuerlige størrelser, men allikevel har oppgaven en diskret tilnærming fordi størrelsene er oppgitt med antall glass. Lawton (1993) viste at ulike fysiske representasjoner av et proporsjonalt problem kan ha innvirkning på evnen til å løse oppgaven. Det ble derfor valgt å legge til en oppgave inspirert og modifisert fra Dole et al. (2012) som ikke har denne kombinasjonen av diskret og kontinuerlige egenskaper på størrelsene. Oppgaven tar utgangspunkt i en diskret setting der et begrenset antall gule og røde kuler skal blandes ut fra kriteriet om at en gul kule skal trekkes med 60% sannsynlighet. Oppgave 4 tar utgangspunkt i elevenes forståelse av den intensive størrelsen g/mol. Deltakerne på intervjuet forklarte den enten ved å ordlegge enheten («gram per mol») eller ved å beskrive hvordan den brukes i beregninger av stoffmengde eller masse. Elevenes oppfattelse av stoffmengde (mol) som en kontinuerlig størrelse i likhet med masse eller løsning framfor den diskrete størrelsen gitt med Avogadros tall ($6{,}023 \cdot 10^{23}\ antall\ partikler$) kan påvirke evnen til å tolke problemsettinger som krever resonnering om forhold og proporsjoner. I følge Nakhleh (1992) er denne misoppfatningen av partikkelnaturen til stoffer utbredt blant studenter helt opp på universitetsnivå. Siden tidligere forskning har funnet at fysisk representasjon av størrelser kan påvirke evnen til å løse oppgaver (Lawton, 1993), vil det være interessant å se hvordan elevene tolker de oppgitte størrelsene i oppgave 4b og 4c. Oppgave 4d er en flervalgsoppgave med svaralternativer laget fra intervjuobjektenes tolkninger av den intensive størrelsen mol/L. Konsentrasjonen av en løsning er ikke det samme som forholdet mellom andelen stoff og andel vann. Problemet i kjemi er at man ofte i blandingsoppgaver der faste salter løses i vann, ser bort fra volumøkningen saltet bidrar til. I slike oppgaver vil konsentrasjonen av stoffet være likt som forholdstallet mellom mengde salt og mengde vann. Men i blandinger mellom stoffer i flytende form og vann, utgjør stoffet en del av løsningens totale volum, noe som innebærer at 1L løsning ikke betyr 1L vann. Oppgave 5 er lik oppgave 2c på intervjumalen der to volum av appelsinjuice med ulike forhold mellom konsentrat og vann skal blandes og gi ny konsentrasjon av appelsin. Når blandingsforholdet for appelsinkonsentrat og vann var gitt for de to blandingene i stedet for konsentrasjonen, var det vanskelig for intervjuobjektene å finne en strategi. Oppgave 6a og 6b tar for seg to ulike situasjoner som krever beregninger med to ulike intensive størrelser. Oppgave 6a tilsvarer oppgave 4 fra intervjumalen, en modifisert utgave av Ryan (2011, s. 64) som tester studenters forståelse av molar konsentrasjon (mol/L). Oppgave 6b tar utgangspunkt i hastigheten km/h til tre løpere som løper ulike strekninger for å sammenligne tiden de har brukt. Oppgave 6c er hentet fra Bright et al. (2003), men er gitt uten svaralternativer. Oppgaven tar utgangspunkt i en additiv sammenheng mellom antall runder Susanne og Caroline løper, selv om strukturen i oppgaven ligner en proporsjonal «missing value»-oppgave.

3.5 Behandling av data

I denne delen vil jeg først gi en oversikt over hvordan jeg har behandlet datamaterialet fra kartleggingstest i matematikk og kjemiprøver kvantitativt. Deretter forklarer jeg hvordan disse oppgavene og intervjuet er analysert kvalitativt.

3.5.1 Kvantitativ behandling av data fra kartleggingstest og utvalgte matematikkrelaterte kjemioppgaver

Alle oppgavebesvarelser ble gjennomgått tre ganger. I analyse 1 ble oppgavene vurdert enten korrekt eller ikke korrekt. Det ble gitt 1 poeng for korrekt besvarelse og 0 poeng for ikke korrekt besvarelse. I analyse 2 ble alle ikke korrekte oppgaver vurdert på nytt for å undersøke hvilke feil som ble gjort av elevene. Dersom eleven hadde vist ferdigheter innenfor det temaet som oppgaven skulle teste, ble oppgaven justert med 0,5 poeng. Dette var viktig for å avdekke om årsaken til feilen lå i manglende regneferdigheter, i manglende strategi og/eller metodeforståelse. I tillegg var det viktig å få en oversikt over antallet med 0 poeng som falt i kategorien «ikke forsøkt». I tredje fase ble ikke korrekte og delvis korrekte besvarelser gjennomgått med hensyn på hvilke strategier elevene hadde valgt. Elever med lignende strategier ble samlet. Analyse av korrekte besvarelser er naturlig utelukket fra undersøkelsen i og med forskningsspørsmålet fokuserer på vanskene til elevene.

Det ble gjennomført en kvantitativ oppgaveanalyse for å undersøke kvaliteten på testoppgavene og hvor godt de skiller mellom høyt og lavt presterende elever på testen totalt. I denne sammenheng er det valgt å foreta en test på oppgavenes vanskegrad og oppgavediskriminering (Matlock-Hetzel, 1997). Vanskegrad er uttrykt med en *p*-verdi og er andelen poeng oppnådd totalt hos elevene på en oppgave i forhold til maksimal poengsum (dette må ikke forveksles med signifikansnivået ($p < 0{,}05$) for testing av nullhypotesen med McNemar test). Begrepet «vanskegrad» er oversatt fra «difficulty» og kan kanskje oppleves forvirrende fordi lav *p*-verdi betyr at oppgaven har høy vanskegrad siden få har klart oppgaven. Dersom $p = 1$ har alle klart oppgaven, noe som betyr at vanskegraden er lav og at oppgaven egner seg dårlig til å skille mellom elevenes prestasjoner. Oppgavediskriminering er funnet fra point-biserial korrelasjon og viser i hvilken grad suksess på hver oppgave samvarierer med suksess på hele testen.

Point-biserial korrelasjon: $\left(\frac{\bar{x}_C - \bar{x}_T}{SD_{total}}\right) \cdot \sqrt{pq}$

der $\bar{x}_C$ er gjennomsnittlig total score for de elevene som har svart korrekt på oppgaven (1 poeng) i analyse 1 og elevene som har svart delvis korrekt (0,5 poeng) og korrekt (1 poeng) i analyse 2.

$\bar{x}_T$ er gjennomsnittlig score på testen for alle elever regnet både for analyse 1 og analyse 2.

SD_{total} er det totale standardavviket for elevenes totale score regnet både for analyse 1 og analyse 2.

p er vanskegraden på oppgaven gitt ved andelen poeng oppnådd totalt hos elevene på en oppgave i forhold til maksimal poengsum på 54.

$q = 1 - p$, prosentfaktoren som angir avviket mellom andelen poeng oppnådd totalt hos elevene på en oppgave og full score.

Point-biserial korrelasjon sies å være et bedre mål enn biserial korrelasjon fordi den favoriserer middels vanskegrad (Matlock-Hetzel, 1997; McCowan & McCowan, 1999). Det er forventet å finne lave vanskegrader på kartleggingstesten fordi den dekker flere områder innenfor matematikken. Det er også valgt å bruke point-biserial framfor biserial fordi variablene er naturlig nominelle (korrekt; ikke korrekt). Kartleggingstesten i matematikk var utgangspunkt for utvalg av kjemioppgaver. Siden målet med testen i hovedsak var å kartlegge feilene elevene gjør når de løser matematiske problemer, ble det valgt å avgrense sammenligningen til de kartleggingsoppgavene som hadde en vanskegrad på 65% og under. Dette er i samsvar med Weisman (1981) som kategoriserte en score på under 70% (i matematikk) som et tegn på at eleven manglet nødvendige forberedelser for studiet i kjemi. Ett unntak er gjort for oppgave 6a og oppgave 4:

- I oppgave 6a i Kartleggingstesten skal ulike beholdere fylles med vann ved konstant hastighet. Forskjellige grafer viser hvordan høyden på vannsøylen varierer over tid. Elevene skulle matche bilde av graf med bilde av beholder, noe 70% av elevene klarte. Samtidig lå scoren på omtrent 30% når elevene skulle tegne beholderen som tilsvarte en gitt graf. Det er derfor tatt med en analog oppgave i kjemikontekst for oppgave 6a for å se på denne forskjellen også i kjemikontekst.
- Oppgave 4 hadde 90% score, men denne oppgaven er med for å sammenligne med Scott (2012). En annen grunn var at elevene hadde betraktelig lavere score på forholdsberegning med begrensende faktor (oppgave 7: 47,2% i analyse 2) og muligens er denne forskjellen tilstede i kjemikontekst.

De utvalgte matematikkoppgavene fra kartleggingstesten ble paret med strukturlike kjemioppgaver. Gruppas besvarelse av en matematikkoppgave og dens analoge kjemioppgave hadde kategoriske, dikotome utfall: ikke korrekt og korrekt. Det ble derfor valgt en ikke-parametrisk statistisk metode, McNemar test, for å undersøke om det var noen forskjell på besvarelsene av en matematikkoppgave og dens analoge kjemioppgave innenfor denne gruppa. Med McNemar test vil andelen av deltagere som endrer sin respons på tvers av de to kontekstene fortelle noe om statistisk signifikans på nivå $p < 0{,}05$ og 95% konfidensintervall. Utgangspunktet er å teste nullhypotesen, som sier at det ikke er noen forskjell i deltagernes besvarelse på oppgaver i matematikk og kjemi. For $p < 0{,}05$ vil hypotesen forkastes, noe som betyr at den endringen som skjer ikke er tilfeldig. Denne testen ble også brukt av Scott (2012) når han gjorde en tilsvarende undersøkelse på 52 kjemielever på en skole i Skottland. En viktig betingelse for testen er at gruppene ikke kan overlappe, de må gjensidig utelukke hverandre. En elev som har korrekt på matematikkoppgaven kan ikke samtidig befinne seg i gruppen av elever som har ikke korrekt på matematikkoppgaver. I utgangspunktet skal deltagerne være randomisert utvalg av populasjonen av kjemielever. Det er de ikke i denne studien. Det har vært en avveining om hvilken type McNemar test som skulle brukes, McNemar chi-squared statistic eller McNemar chi-squared statistic with Yates correction of 1,0. Det er uenighet blant fagfolk når disse skal brukes. Yates korreksjon skal ta hensyn til det at McNemar chi-squared test har en øvre bias som har en tendens til å gjøre resultatene større enn de burde. Grunnen til dette er at chi-squared fordelingen er kontinuerlig, mens en 2x2-krysstabell er dikotom. Vanligvis blir Yates korreksjon anbefalt dersom man har cellestørrelser som er mindre enn 10 (noen nevner også 5). Mange forskere mener derimot at denne versjonen er for streng og at den ikke bør brukes (Hitchcock, 2009). McNemar test med og uten Yates korreksjon gav ikke store forskjeller i resultat, selv om testen med Yates korreksjon i noen oppgaver er nærmere en forkasting av hypotesen i enkelte oppgaver. Dersom resultatene hadde endt på hver side av signifikansnivået for disse testene ville en eksakt versjon av testen gitt en klarere signifikans på 0,05 nivå (Fay, 2016). Det er valgt å bruke McNemar chi-squared kalkulator i denne studien (Ahmed, 2013). Nullhypotesen er gitt ved $H_0 : p(B) = p(C)$ og resultatene for McNemar test er gitt med utgangspunkt i formelen $\chi^2 = \frac{(B-C)^2}{B+C}$ der B og C er antall deltagere som har ulik respons på sine oppgaver i matematikk og kjemikontekst (se Tabell 2).

Tabell 2 McNemar test, 2x2 tabell over to variabler med dikotome kategorier

	Kjemi test Korrekt	Kjemi test: Ikke korrekt	Total
Matematikk test: Korrekt	A	B	A+B
Matematikk test: Ikke korrekt	C	D	C+D
Total	A+C	B+D	N

Oversikt over krysstabellene er gitt i vedlegg 7.11 og resultatet av McNemar test er gitt i Tabell 15.

Elevene ble også delt inn i intervaller etter prosentvis totalscore på kartleggingstesten: <30%,40%]; <40%,50%]; <50%,60%]; <60%,70%]; <70%,80%]; <80%,90%] og <90%,100%]. Innenfor hvert intervall ble det regnet ut andelen korrekte svar av mulige riktige svar på hver oppgave. Ut fra dette kan man få et inntrykk av hvilken type oppgaver elever med lav, middels og høy totalscore får til (se Tabell 7). Selv elever med total score på nærmere 70% hadde vansker med oppgaver med forhold og intensive størrelser som f.eks. oppgave 5a og b, 7 og 8. Derfor ble det besluttet å undersøke dette nærmere under intervju og ettertest og utvalget til denne undersøkelsen er gitt i Tabell 3.

Tabell 3 Antall deltagere plukket ut til analyse av besvarelse på ettertesten

		Prosentvis totalscore på Kartleggingstest i matematikk			
		<30%, 40%]	<40%, 50%]	<50%, 60%]	<60%, 70%]
Prosentvis totalscore på Analoge kjemioppgaver	<10%	**KJ1-7**	**KJ1-26**		
	<10%, 20%]	**KJ1-11**	**KJ1-30**	**KJ1-8**; **KJ1-10**	**KJ1-23**
	<20%,30%]		**KJ1-3; KJ1-6**	**KJ1-12**	**STF-2**
	<30%, 40%]		**KJ1-1; KJ1-25**	**KJ1-15**; **STF-17**	**KJ1-17; STF-10**
	<40%, 50%]				
	<50%, 60%]			**KJ1-4;KJ1-19**; **STF-4; STF-7; STF-23**	**KJ1-24; STF-16**
	<60%, 70%]			**STF-27**	**STF-12**; **STF-19; STF-29**
	<70%,80%]				**KJ1-21**

3.5.2 Kvalitativ behandling av data fra oppgaver

De delvis korrekte og ikke korrekte oppgavene fra analyse 1 og 2 i den kvantitative analysen av kartleggingstesten i matematikk ble gjennomgått kvalitativt. Tilsvarende ble gjort for analoge oppgaver i kjemi. Hver oppgave på hver elevbesvarelse ble gjennomgått for å finne type feil. Det ble konstruert to tabeller for hver oppgave, en for delvis korrekte besvarelser og en for ikke korrekte besvarelser. Besvarelser med samme type feil innenfor hver oppgave fikk egen rad i tabellen og antall besvarelser innenfor hver type elevsvar ble registrert. For ettertesten ble organiseringen av data gjennomført på en litt annen måte. Besvarelsene på hver oppgave ble organisert i en matrise der deltagerne ble plassert i celler ut fra den prosentvise totalscoren de hadde på kartleggingstesten i matematikk og de analoge kjemioppgavene (se Tabell 3) (Creswell, 2012, kap.8). Ettertesten ble anvendt for å lete etter supplerende, bekreftende eller avkreftende informasjon fra intervjuet (se delkapitlene under 4.5). I denne sammenhengen har alle besvarelsene blitt analysert, både korrekte og ikke-korrekte. Det har ikke vært hensikten i denne undersøkelsen å finne sammenhenger mellom suksess og feil for ulike oppgaver og strategier, men ved å sortere besvarelsene i matrisen kunne det gi en mulighet for å sjekke om deltakerne i de ulike grupperingene hadde noen likheter. Alle oppgaver er gjennomgått flere ganger og løsningsstrategiene er kodet med en beskrivelse av denne strategien (Creswell, 2012, Kap.8).

3.5.3 Kvalitativ behandling av data fra intervju

Alle fire intervjuer ble transkribert i sin helhet. Det er lagt vekt på mest mulig korrekt gjengivelse av det deltakeren sier, men overflødige småord (og, lissom, eller etc.) er tatt vekk for å få mer sammenheng i meningsinnholdet til deltakeren. Det er derimot valgt å notere ned pauser og småord som indikerer nøling og usikkerhet (som f.eks. ehh og hmm) og det er valgt å sette spørsmålstegn der deltageren avgir svar på en spørrende måte. Siden intervjuet var oppgavebasert var det viktig å synliggjøre hvor lang tid eleven tenkte før jeg avbrøt med spørsmål eller før eleven valgte å respondere. Usikkerheten gir også viktig informasjon om prosessen som fører fram til løsningsmetode og svar (Nilssen, 2012, s.49-50). Følelsesuttrykk, som latter og sukk, er også tatt med fordi de gir informasjon om hvordan deltakeren kan ha opplevd situasjonen i ulike øyeblikk. Evnen til å løse problemer i en situasjon kan påvirkes av følelser. Ved å ta med disse i transkripsjonene kan det gi viktig informasjon i analysearbeidet ved at jeg kan se hvordan min respons på elevenes følelsesuttrykk kan ha påvirket elevenes evne til å kommunisere sine løsningsstrategier (Kvale & Brinkmann, 2009, kap. 10). Fra transkripsjonene ble «rådata» redusert og sammenfattet for hver elev på hver oppgave. Data er gjennomgått mange ganger til det ikke lenger ble oppdaget ny informasjon (Creswell, 2012, kap. 8). Herfra ble det funnet sentrale deskriptive stikkord og tema som gav direkte uttrykk for det empiriske meningsinnholdet, men som også var påvirket av teorien omkring proporsjonal resonnering. Ut fra disse temaene ble det funnet kategorier etter en sammenligning på tvers av intervjuspørsmål og intervjudeltagere. Deretter startet prosessen med dekontekstualisering. Meningsbærende enkeltutsagn ble identifisert, kodet og systematisert innenfor kategorien de hørte hjemme i. Dette ble systematisert for hver elev på tvers av intervjuspørsmål og hvor hvert intervjuspørsmål på tvers av hver elev (Befring, 2007, kap. 13). Uttalelsene innenfor hver kategori ble forkortet og komprimert slik at man stod igjen med en meningsfortetting av det som ble sagt (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 232).

3.6 Validitet og reliabilitet

Reliabilitet handler om hvor presis innhenting og behandling av data har vært. Høy reliabilitet betyr at et forsøk gjentas med samme resultat. Validitet handler om gyldigheten til metoden og om vi måler det som er hensikten (Cresswell, 2012). For å øke validiteten ble oppgavene på forhånd kategorisert, med utgangspunkt i litteratur, ut fra hva de skal teste og dermed et grunnlag for vurdering av score, testinstruksjonen var klar og enkel og oppgavediskriminering og vanskegrad ble beregnet for å sile ut «dårlige» oppgaver. At oppgavene ble testet på prøver bidro til å øke reliabiliteten og validiteten fordi sjansen er stor for at eleven gjør sitt beste i en prøvesituasjon. Problemet med at oppgavene er gjennomført til ulike tider kan føre til at forskjellige faktorer påvirker prestasjonen til eleven på ulike måter på kjemiprøvene. Dette kan bidra til en forskjell i resultat som ikke måler en reell forskjell i suksess med de to kontekstene. Samtidig øker det også validiteten ved å undersøke prestasjoner flere ganger. Forskning viser at problemsettingen (gjenkjennelse av innhold og kontekst, presentasjon av størrelser og numeriske verdier) påvirker elevenes evner til å løse et problem. På kartleggingstesten i matematikk ble det derfor valgt ut noen problemsettinger som er forventet kjent for elevene. Men det er en mulighet for at valg av andre problemsettinger ville gitt et annet resultat. Forskjellen i prestasjon på matematikkoppgaver og kjemioppgaver må derfor ta hensyn til den konteksten oppgavene er gitt i. Samtidig har denne metoden bidratt til en gradvis innsikt i hvordan elevenes strategier endres ut fra kontekst og hvilke vansker som dukker opp i ulike situasjoner. For de analoge oppgavene i matematikk og kjemikontekst har hensikten vært å lage dem mest mulig strukturlike slik at sammenligningsgrunnlaget blir best mulig. Dette er en utfordring fordi elevenes prestasjoner påvirkes av problemsettingen. Dette kan senke validiteten ved en sammenligning med McNemar test. Enkelte tekstbaserte matematikkoppgaver har derfor blitt paret med flere strukturlike kjemioppgaver med ulik kontekst og til ulike tidspunkt for å øke reliabiliteten og validiteten. I denne studien var det gjort et valg om å finne den matematikkferdigheten som kreves i kjemi for deretter å lage analoge kjemioppgaver. Dette er motsatt av hva Scott (2012) gjorde. Fordelen med å lage kjemioppgavene først er at de analoge matematikkoppgavene også ble laget i en kontekst. Dette vil muligens gi et bedre sammenligningsgrunnlag. Noen av oppgavene som ble gitt innenfor matematikk i min studie var ikke tekstbaserte. Selv om slike regnestykker nevnes i litteraturen som viktige ferdigheter i kjemi, stiller de mindre krav til elevene sammenlignet med kjemioppgaver der regnestykket må settes opp fra en tekst. Samtidig gir disse matematikkoppgavene et godt innblikk i elevenes forståelse av uttrykkets oppbygging når de avslører hvordan de regner på dem.

En av antakelsene ved bruk av McNemar test er at kartleggingstesten i matematikk ikke påvirker resultatet på testene i kjemi. Scott (2012) gav elevene de analoge kjemi- og matematikkoppgavene samtidig før McNemar test ble utført. I denne studien var det viktig at elevene ikke hadde kunnskap om hensikten med undersøkelsen og at de ikke ble gjort oppmerksom på likheten i oppgavestrukturen til matematikk- og kjemioppgavene. Grunnen var at dette kunne føre til at prestasjoner på et oppgavesett forbedret prestasjonen på et annet. I min studie ble matematikktesten gjennomført ved oppstarten i kjemikurset, lenge før elevene hadde fått undervisning i beregninger i kjemi. Kjemioppgavene som ble analysert kom på kjemiprøvene underveis gjennom året og gav derfor lite grunnlag for å kunne se noen sammenheng med matematikktesten. Jeg mener derfor at man kan si med høy grad av sikkerhet at testene ikke har påvirket hverandre. Cellestørrelsen B+C (se Tabell 2) er liten for flere av krysstabellene (se Tabell 15), noe som kan redusere den statistiske styrken til testen. I tillegg er det ikke gitt at dataene er normalfordelte.

Fordi studien også metodisk bærer preg å ha et fremvoksende design, er det refleksive aspektet viktig å forstå. Som forsker har jeg ikke vært tilstedeværende på prøvesituasjonene, men min tilstedeværelse på intervju og mitt forhold til elevene kan påvirke adferden deres. I tillegg kan min forforståelse påvirke hva jeg spør om og hvordan jeg tolker svarene. Samtidig har metodetriangulering vært et viktig valg for å øke validiteten. Testene gav en overordnet oversikt over hvilke strategier og vansker elevene hadde med å løse oppgaver. Intervju gav innsikt i elevenes resonnering, noe som var viktig for å kunne svare på spørsmålet om hvordan elevenes proporsjonale resonnering kommer til uttrykk. Intervju med enkeltelever vil sjelden produsere nøyaktig samme resultat. Derfor var det viktig med gode rammer for intervjuet som var likt for alle. Alle fikk samme oppgaver og jeg forsøkt å unngå ledende spørsmål, samtidig som jeg har stilt oppfølgende, direkte og tolkende spørsmål for å sikre god reliabilitet. En ettertest ble laget på bakgrunn av funn fra intervjuet for å øke validiteten.

3.7 Etiske overveielser

De nasjonale forskningsetiske komiteer bidrar til å at forskning skjer i henhold til etiske normer og har utarbeidet retningslinjer som kan veilede en forsker til god etisk praksis. Det er viktig at alle deltagere i et forskningsprosjekt gis et informert samtykke der hensikten med studien er grundig forklart. De skal vite at det er frivillig å delta og at de kan trekke seg når som helst uten begrunning. Denne informasjonen ble gitt skriftlig til alle deltagerne på starten av skoleåret før kartleggingstesten i matematikk ble gjennomført (se vedlegg 7.2). Alle elevene var over 15 år og kunne selv samtykke til deltagelse. Det ble i tillegg sendt en ny skriftlig informasjon til de elevene som ble plukket ut til intervju, med ny mulighet for å trekke seg. Her ble også informasjon om utviding av lengden på intervjuet gitt (se vedlegg 7.3). Elevene som skulle intervjues ble også muntlig gitt muligheten til å trekke seg før intervjuet startet. Det ble også søkt om godkjenning av Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste NSD (se vedlegg 7.1). Deltagerne fikk informasjon om at datamaterialet om dem ble slettet etter prosjektets sluttdato.

Deltagerne i studien har krav på konfidensialitet. Det var to faglærere som samlet inn testbesvarelser fra elevene. Dette var prøver der originalene ble levert tilbake til elevene (med unntak av ettertesten der jeg fikk originalene). Kopiene ble behandlet med en kodenøkkel. Siden oppgavene skulle scannes og sendes digitalt fra faglærer til meg og siden ingen opplysninger var av sensitiv art, ble det tatt en avgjørelse på gi faglærerne tilgang på kodenøkkelen slik at besvarelsene kunne kodes før de ble sendt. Elevene var informert om dette. Faglærerne vurderte elevene på de samme oppgavene som jeg analyserte og var kjent med elevenes prestasjoner. Men det har aldri vært noen diskusjon mellom faglærer og meg om resultatene av prøvene og resultatene er ikke koblet opp mot enkeltpersoner på en slik måte at faglærerne umiddelbart vil kjenne dem igjen. Intervjuene ble tatt opp på lydopptaker og overført til min private pc rett etter at intervjuene var ferdig. Disse ble deretter slettet fra lydopptakeren. I transkripsjonen er elevene navngitt med betegnelsen E1, E2, E3 og E4 og det er i rapporten ikke gitt noen hentydning til om det er kvinne eller mann. Valg er tatt for å minske belastningen for elevene. Testoppgavene kom på prøver de allerede skulle gjennomføre og dermed minsket risikoen for at elevene ble satt i flere situasjoner med mulighet for å føle manglende mestring, prestasjonsangst og stress. Under intervjuet kunne et par elever bli stresset og nervøse av å ikke mestre oppgaver de i utgangspunktet anså som elementære. Her var jeg veldig varsom og påpasselig med å informere elevene om at den informasjonen de gav var verdifull. Jeg sørget også for å spørre elevene om det var greit å gå videre med ny oppgave.

4 RESULTAT OG ANALYSE

Jeg starter med å presentere kvantitative resultater fra kartleggingstesten i kapittel 4.1 og fra analoge kjemioppgaver i kapittel 4.2. Begge delkapitlene gir en oversikt over vanskegraden til oppgavene og hvordan ulike testkategorier plasserer seg på elevenes totale prosentvise score på oppgavene. For kartleggingstesten i kapittel 4.1 blir også resultatet av Point-biserial korrelasjonstest presentert som undersøker om det er sammenheng mellom høy vanskelighetsgrad på oppgave og høy totalscore på test hos eleven. Deretter gis en oppsummering av resultatene fra McNemar test i kapittel 4.3 som viser om det er noen signifikant forskjell i elevenes prestasjon på oppgaver på kartleggingstest og analoge kjemioppgaver. Tilslutt presenteres resultatene fra kvalitativ del av studien i kapittel 4.4 og kapittel 4.5. Kapittel 4.4 gir en oppsummering av løsningsstrategiene på ikke korrekte og delvis korrekte besvarelser fra kartleggingstest i matematikk og analoge kjemioppgaver. Kapittel 4.5 viser funn fra intervju med fire elever om oppgaver som omhandler forhold supplert med underbyggende resultater fra ettertest.

4.1 Kvantitative resultater på Kartleggingstest i matematikk

I uke 35, før oppstart av kjemi 1 kurset, gjennomførte elevene en kartleggingstest i matematikk. Vurderingen av disse oppgavene er delt i analyse 1 og 2.

I analyse 1 blir oppgavene vurdert enten korrekt eller ikke korrekt. Det ble gitt 1 poeng for korrekt besvarelse og 0 poeng for ikke korrekt besvarelse.

I analyse 2 ble alle ikke korrekte oppgaver vurdert på nytt for å undersøke hvilke feil som ble gjort av elevene. Dersom eleven har vist ferdigheter innenfor det temaet som oppgaven skulle teste ble oppgaven justert med 0,5 poeng. Oversikt over poengfordeling og vanskegrad (*p*-verdi) på de ulike oppgavene er gitt i Tabell 4. Begrepet *vanskegrad* er oversatt fra «difficulty» (Matlock-Hetzel, 1997) og gir informasjon om gjennomsnittsverdien av elevenes totale score på en oppgave. Det at en oppgave har høy *p*-verdi betyr at oppgaven er enkel og lite vanskelig.

Tabell 4 Gjennomsnittlig score på kartleggingstesten fra analyse 1 og analyse 2. Vanskegrad (p) er forholdet mellom summen av elevenes poeng på en oppgave og den maksimal poengsum som kan oppnås (N=54) (Matlock-Hetzel, 1997). En lav p-verdi er dermed en vanskelig oppgave

Oppgave	**Antall poeng analyse 1**	**Vanskegrad, *p***	**Antall poeng analyse 2**	**Vanskegrad, *p***
1a	49	0,907	51	0,944
1b	42	0,778	46,5	0,861
1c	44	0,815	48,5	0,898
1d	37	0,685	39	0,722
1e	16	0,296	20	0,370
2a	54	1,00	54	1,00
2b	32	0,593	38,5	0,713
2c	51	0,944	51,5	0,954
2d	35	0,648	36	0,667
2e	22	0,407	31,5	0,583
3a	19	0,352	19,5	0,361
3b	21	0,389	21,5	0,398
3c	12	0,222	24	0,444
4	49	0,907	49	0,907
5a	30	0,556	37	0,685
5b	25	0,463	30,5	0,565
6a	38	0,704	42,5	0,787
6b*	17	0,315	17	0,315
7	21	0,389	25,5	0,472
8	21	0,389	21	0,389
9a	7	0,130	10,5	0,194
9b*	51	0,944	51	0,944
9c*	21	0,389	21	0,389

*oppgavene ble bare vurdert ut fra kategoriene «korrekt» eller «ikke korrekt». Alle de andre oppgavene gav mulighet for «delvis korrekt»

Score på hver oppgave i prosent ble organisert i intervaller for å få en oversikt over hvilke testkategorier som havnet innenfor de ulike intervallene (se Tabell 5). Denne oppgitte p-verdien er mer et mål på adferd enn en definisjon på karakteristikker ved selve oppgaven. Vanskegraden sier derfor noe om både oppgaven og den som gjennomfører den. Oppgaver med ekstreme p-verdier ($p = 0$ eller $p = 1{,}0$) bidrar ikke til å måle individuelle forskjeller og vil være mindre brukbare i videre analyse (Matlock-Hetzel, 1997). I følge Hotiu (2006, ref. Quaigrain & Arhin, 2016) er oppgaver med p-verdier mellom 0,40 og 0,60 regnet som gode, mens p-verdier under 0,20 (for vanskelige) og over 0,90 (for enkle) ikke er akseptable oppgaver. Det ideelle nivået på vanskegraden kan bestemmes ut fra midtpunktet mellom 100% og prosentvis sjanse for å gjette riktig dersom det finnes svaralternativer. På tester med 5 svaralternativer vil den ideelle vanskegraden ligge på 0,60 (McCowan & McCowan, 1999). Siden oppgavene på kartleggingstesten er åpne vil den ideelle vanskegraden være 0,50. Oppgave 9a er eneste med vanskegraden under 0,20. Dette vil regnes som en veldig vanskelig oppgave, og man bør se nærmere på hva som kan være årsaken til at så få elever mestrer oppgaven. De fleste elever husker ikke andregradsformelen og har ingen andre strategier for å løse oppgaven. Denne oppgaven vil kunne løses lett med digitale hjelpemidler, og det er ikke sikkert at manglende evne til å løse oppgaven på det gitte tidspunktet har mye å si for evnen til å løse tilsvarende oppgaver i kjemikontekst senere. Oppgavene som ligger på en vanskegrad mellom 30% og 70% omhandler problemstillinger innenfor forhold, logaritmer, omgjøring av enheter og sammenhengen mellom standardform, brøk og desimaltall. Disse oppgavene ble viktige utgangspunkt for videre undersøkelser.

Tabell 5 Oversikt over elevenes samlede score på en oppgave gitt i prosent og hvilken testkategori de er plassert under

Løsnings-frekvens (%)	**Oppgave Analyse 1**	**Oppgave Analyse 2**	**Testkategori**
≤ 10			
< 10,20]	9a	9a	Algebra: løse rasjonal ligning
< 20,30]	1e, 3c		Prosent Logaritme (i sammenheng med standardform og potens)
< 30,40]	3a, 3b, 6b, 7, 8, 9c	1e, 3a, 3b, 6b, 8, 9c	Prosent Logaritme (i sammenheng med standardform og potens) Graf: tegne skisse Forhold/proporsjon (endring av blandingsforhold) + brøk og desimal Forhold/proporsjon (begrensende faktor) + (brøk) og desimal Algebra: omforming av formel (kvadratrot) Algebra: løse logaritmisk ligning
< 40,50]	2e, 5b,	3c, 7	
< 50,60]	2b, 5a	2e, 5b	Standardform (divisjon og addisjon) i sammenheng med desimal og brøk. Potenser Desimal og Enheter
< 60,70]	1d, 2d	2d, 5a	
< 70,80]	1b, 6a	1d, 2b, 6a	Tolkning av grafer Brøk og forkorting Potens
< 80,90]	1c	1b, 1c	Regning: Brøk (multiplikasjon og divisjon)
90 <	1a, 2a, 2c, 4, 9b	1a, 2a, 2c, 4, 9b	Regning og parenteser: regnerekkefølge Potenser Brøk Forhold og proporsjoner i areal Algebra: Omforming av formel

De fleste oppgaver holder seg innenfor samme vanskegrad i analyse 1 og 2. I Tabell 5 kan det observeres en endring i vanskegraden for enkelte oppgaver. Flere delvis korrekte besvarelser i analyse 2 hever den prosentvise scoren slik at oppgaven forflyttes ett eller to intervaller. Oppgavene som forandrer intervall fra analyse 1 til analyse 2 kan fordeles i to grupper, oppgaver som ligger nær intervallgrensen i analyse 1 (1b, 1d, 1e, 2b og 7) og oppgaver som ikke ligger nær intervallgrensen (2e, 3c, 5a og 5b). Oppgavene som ikke ligger nær intervallgrensen er de oppgavene der flest elever har fått justert sin poengsum med 0,5 poeng. Dette er oppgaver der eleven viser relevant kunnskap, men ikke klarer å komme i mål pga. manglende regneferdigheter eller manglende kunnskap om omgjøring av enheter (5a, 5b) eller logaritme (3c). For oppgave 3c har 24 av 54 elever justert poengsummen med 0,5 poeng, noe som bidrar til det store spranget i vanskegrad.

Det ble gjennomført en test på om oppgavene gjenspeilte situasjonen slik at elever med høyest score totalt var de elevene som mestret vanskelige oppgaver. Resultatet er gitt i Tabell 6. Korrelasjonene er alle positive noe som tyder på at elever som har høy totalscore på testen også er de som har suksess på oppgavene. Noen av korrelasjonene er lave, noe som igjen tyder på at disse oppgavene i liten grad skiller mellom elever med høy og lav totalscore. Disse oppgavene får mange elever til, noe som også beregning av vanskegrad viser. Oppgaver med vanskegrad fra omtrent 0,60 og over har en korrelasjon på under 0,200 der vanskegrad over 0,80 gir en korrelasjon under 0,100. Det er ett unntak, nemlig oppgave 9c, som viser seg å ha høy vanskelighet (p = 0,39), men en korrelasjon $r_{pb} =$ 0,133. Her viser det seg at mange elever med høy score på testen, gjennomgående utfører rotuttagning feil. For oppgavene 1e, 3a, 3b, 6b, 7, 8, 9a ligger korrelasjonen over 0,200. Korrelasjon på 0,200 ansees som akseptabel (Matlock-Hetzel, 1997). Oppgave 2e, 3c, 5a og 5b er regnet som enklere oppgaver pga. høyere p-verdi. Korrelasjonen er høyere (unntatt 3c), men samtidig ble korrelasjonen veldig lav i analyse 2. Dette er de samme oppgavene som vi tidligere registrerte hadde en stor endring i vanskelighetsnivå fordi mange besvarelser ble justert til å være delvis korrekte, og økte sin poengsum med 0,5 poeng.

Tabell 6 viser sammenhengen mellom hvor bra elevene har gjort det på hver oppgave opp mot deres total score på testen ut fra point-biserial korrelasjon der $\bar{x}_C$ er gjennomsnittlig total score for de elevene som har svart korrekt på oppgaven i analyse 1 og elevene som har svart korrekt og delvis korrekt i analyse 2. Gjennomsnittlig resultat på testen i analyse 1 var $\bar{x}_T = 13{,}222$, med et standardavvik på $SD_{total} = 3{,}715$ Gjennomsnittlig resultat på testen i analyse 2 var $\bar{x}_T = 14{,}565$, med et standardavvik på $SD_{total} = 3{,}402$. Vanskegraden p viser til total oppnådd poengsum i forhold til total score

Oppgave	**Analyse 1**			**Analyse 2**		
	$\bar{x}_C$	p	r_{pb} Korrelasjon mellom suksess på oppgaven og suksess på testen totalt. (korrekt kontra ikke korrekt)	$\bar{x}_C$	p	r_{pb} Korrelasjon mellom suksess på oppgaven og suksess på testen totalt. (korrekt+delvis korrekt kontra ikke korrekt)
1a	13,714	0,907	0,038	15,010	0,944	0,009
1b	14,190	0,778	0,108	15,464	0,861	0,038
1c	13,222	0,815	0,00	14,456	0,898	0,008
1d	14,132	0,685	0,114	15,276	0,722	0,147
1e	15,375	0,296	0,265	16,375	0,370	0,201
2a	13,222	1,00	0,00	14,565	1,00	0,00
2b	14,031	0,593	0,107	15,203	0,713	0,037
2c	13,353	0,944	0,008	14,686	0,954	0,0096
2d	14,171	0,648	0,122	15,429	0,667	0,115
2e	15,409	0,407	0,289	16,432	0,583	0,098
3a	15,895	0,352	0,344	16,974	0,361	0,333
3b	15,381	0,389	0,283	16,595	0,398	0,262
3c	17	0,222	0,423	17,750	0,444	0,110
4	13,327	0,907	0,008	14,694	0,907	0,011
5a	14,833	0,556	0,216	15,867	0,685	0,069
5b	14,920	0,463	0,228	15,980	0,565	0,114
6a	14,184	0,704	0,118	15,421	0,787	0,043
6b*	15,176	0,315	0,244	16,441	0,315	0,256
7	15,476	0,389	0,296	16,690	0,472	0,231
8	15,381	0,389	0,283	16,476	0,389	0,274
9a	16,714	0,130	0,316	17,571	0,194	0,267
9b*	13,451	0,944	0,014	14,804	0,944	0,016
9c*	14,238	0,389	0,133	15,857	0,389	0,185

*oppgavene ble bare vurdert ut fra kategoriene «korrekt» eller «ikke korrekt». Alle de andre oppgavene gav mulighet for «delvis korrekt»

Det tyder på at mange av de svakt presterende elevene på testen klarer å løse deler av disse oppgavene. Men ut fra korrelasjonen i analyse 1 er det tydelig elever med høy score som løser disse oppgavene korrekt. Elever med totalscore nær 70% på kartleggingstesten bidro med lav verdi for *p* på oppgaver med logaritmer, graf, prosent og forhold. Det kan se ut som at elevene med høy totalscore mestrer flere av algebraoppgavene, men at flere allikevel kan slite med oppgaver som krever å tenke med forhold (se Tabell 7).

Tabell 7 Vanskegrad (p) beregnet ut fra undergrupper av elevers prosentvise score på kartleggingstesten (utgangspunkt i analyse 2). Ingen elever har score lavere enn 30%

Oppgaver	Vanskegrader innenfor prosentvis totalscore på kartleggingstest						
	<30%, 40%]	<40%, 50%]	<50%, 60%]	<60%, 70%]	<70%, 80%]	<80%, 90%]	<90%, 100%]
1a	0,626	0,917	0,962	0,954	1,00	1,00	1,00
1b	0,25	0,75	0,885	0,909	0,962	1,00	1,00
1c	1,00	0,5	0,962	1,00	0,885	0,9	1,00
1d	0	0,333	0,731	0,864	0,885	0,9	1,00
1e	0,25	0,25	0,154	0,455	0,385	0,7	1,00
2a	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2b	0,75	0,833	0,5	0,591	0,808	1,00	1,00
2c	0,75	1,00	0,923	1,00	0,962	1,00	1,00
2d	0	0,833	0,577	0,727	0,654	1,00	1,00
2e	0,25	0,333	0,385	0,727	0,769	0,7	1,00
3a	0	0	0,231	0,227	0,615	0,8	1,00
3b	0	0,167	0,192	0,454	0,538	1,00	0,5
3c	0,125	0,25	0,385	0,409	0,5	0,8	1,00
4	1,00	0,667	1,00	0,818	0,923	1,00	1,00
5a	0,5	0,25	0,692	0,636	0,808	1,00	1,00
5b	0,375	0,25	0,462	0,636	0,577	1,00	1,00
6a	0,375	0,667	0,692	0,818	0,962	0,9	1,00
6b*	0	0,167	0,154	0,363	0,385	0,6	1,00
7	0	0,25	0,308	0,409	0,769	0,7	1,00
8	0,25	0,167	0,231	0,091	0,692	0,8	1,00
9a	0	0,083	0,154	0,045	0,308	0,3	1,00
9b*	0,75	1,00	0,846	1,00	1,00	1,00	1,00
9c*	0	0,167	0,308	0,455	0,692	0,2	0,5
Antall elever	4	6	13	11	13	5	2

4.2 Kvantitative resultater fra analoge kjemioppgaver fra prøver

Gjennom skoleåret har elevene hatt ulike skriftlige vurderingssituasjoner i kjemi. Matematikkrelaterte oppgaver på disse prøvene er samlet. Vurderingen av disse oppgavene er delt i analyse 1 og 2. I analyse 1 blir oppgavene vurdert enten korrekt eller ikke korrekt. Det ble gitt 1 poeng for korrekt besvarelse og 0 poeng for ikke korrekt besvarelse. I analyse 2 ble alle ikke korrekte oppgaver vurdert på nytt for å undersøke hvilke feil som ble gjort. Dersom eleven har vist ferdigheter innenfor det temaet som oppgaven skulle teste, ble oppgaven justert med 0,5 poeng.

Tabell 8 Gjennomsnittlig score på analoge kjemioppgaver fra analyse 1 og analyse 2. Vanskegrad er forholdet mellom summen av elevenes poeng på en oppgave og den maksimal poengsum som kan oppnås

Oppgave	Antall poeng analyse 1	Vanskegrad, *p*	Antall poeng analyse 2	Vanskegrad, *p*	N
An1e	19	0,365	20	0,385	52
$An2b_1$	21	0,404	21	0,404	52
$An2b_2$	27	0,519	27	0,519	52
An2d	25	0,481	25	0,481	52
An2e	21	0,404	23,5	0,452	52
$An3a_1$	35	0,673	35	0,673	52
$An3a_2$	44	0,898	44	0,898	49
An3c	37	0,712	37	0,712	52
An4	34	0,642	40	0,755	53
$An5a_1$	20	0,385	21,5	0,413	52
$An5a_2$	18	0,346	19,5	0,375	52
$An5a_3$	27	0,551	27	0,551	49
$An5a_4$	21	0,429	25,5	0,520	49
$An5b_1$	17	0,326	17,5	0,337	52
$An5b_2$	29	0,591	29	0,592	49
$An6a_1$	33	0,623	33	0,622	53
$An6a_2$	30	0,566	30	0,566	53
$An6b_1$	11	0,212	11	0,212	52
$An6b_2$	19	0,388	21	0,426	49
$An7_1$	21	0,396	21	0,396	53
$An7_2$	23	0,434	27,5	0,519	49
$An7_3$	31	0,585	31	0,585	52
$An7_4$	14	0.264	14	0.264	52
An8	22	0,415	22	0,415	53
$An9a_1$	18	0,346	19	0,365	52
$An9a_2$	27	0,551	27	0,551	49
$An9a_3$	1	0,019	1	0,019	52
$An9c_1$	11	0,212	13,5	0,260	52
$An9c_2$	25	0,481	25,5	0,490	52

Sammenligning av vanskegraden for de analoge oppgavene på kartleggingstesten og prøvene i kjemi viste umiddelbart et skille mellom disse kontekstene når det gjaldt emnet logaritmer. Det virket som elevene hadde bedre prestasjon på logaritmeoppgavene i kjemi enn i matematikk (se Tabell 4 og Tabell 8). Utenom dette virket det som om fordelingen av testkategoriene i kjemi er i overensstemmelse med fordelingen av testkategorien i matematikk (se Tabell 5 og Tabell 9).

Tabell 9 Oversikt over elevenes samlede score på en analog oppgave gitt i prosent og hvilken testkategori oppgaven er plassert under.

Score på en oppgave (%)	**Oppgave Analyse 1**	**Oppgave Analyse 2**	**Testkategori**
≤ 10	$9a_3$	$9a_3$	Sette opp et algebraisk uttrykk, løse rasjonal ligning, andregradsligning, likevekt, uten kalkulator
$< 20{,}30]$	$6b_1$, $7_4, 9c_1$	$6b_1, 7_4, 9c_1$	Graf: tegne skisse, pH vs syrekonsentrasjon; Forhold: reaksjonsstøkiometri, masse/molar masse, flervalg; Algebra: formelregning m/tall (tredjerot), løselighet
$< 30{,}40]$	1e, $5a_1, 5a_2$, $5b_1$, $6b_2, 7_1$	1e, $5a_2, 5b_1$, 7_1	Prosent Desimal og enheter: regne molar konsentrasjon, titrering/løsning Desimal og enheter: regne volum ved fortynning. Graf: tegne skisse; gasslikevekt Forhold: reaksjonsstøkiometri, masse/molar masse
$< 40{,}50]$	$2b_1, 2d, 2e$, $5a_4, 7_2, 8$, $9c_2$	$5a_1, 6b_2$, $2b_1, 2d, 2e$, 8, $9c_2$	Desimal og enheter: regne molar konsentrasjon, ioner Graf: tegne skisse; gasslikevekt Forhold: reaksjonsstøkiometri, masse/molar masse, åpen. Forhold: endring av blandingsforhold Potenser, Standardform (addisjon og divisjon) Algebra: omforming av formel (tredjerot), løselighetsformel
$< 50{,}60]$	$2b_2, 5a_3, 5b_2$ $6a_2, 7_3, 9a_2$	$5a_4, 7_2$ $2b_2, 5a_3, 5b_2$ $6a_2, 7_3, 9a_2$	Desimal og enheter: regne molar konsentrasjon, ioner/titrering, tillaging av løsning Forhold: reaksjonsstøkiometri, masse/molar masse, stoffmengde, flervalg Algebra: løse rasjonal ligning, regne pH i svak syre, kalkulator Potenser Graf: flervalgsoppgaver, likevekt, tolkning av grafer.
$< 60{,}70]$	$3a_1, 4, 6a_1$	$3a_1, 6a_1$	Logaritme (i sammenheng med standardform og potens), uten kalkulator
$< 70{,}80]$	3c	3c	Logaritme (i sammenheng med standardform og potens), uten kalkulator, flervalg.
$< 80{,}90]$	$3a_2$	$3a_2$	Logaritme (i sammenheng med standardform og potens), med kalkulator

4.3 Sammenligning av suksess på oppgaver med og uten kjemikontekst

McNemar test viste en signifikant forskjell ($p < 0{,}05$) i elevenes prestasjon med og uten kjemikontekst i oppgavene (3a, An3a$_1$), (3a, An3a$_2$), (3c, An3c), (4, An4), (5a, An5a$_1$), (7, An7$_3$), (9a, An9a$_1$), (9a, An9a$_2$), (9a, 9a$_3$) og (9c, An9c$_1$). En sammenligning med vanskegraden som er beregnet for oppgavene viste at for seks oppgaver har elevene prestert bedre i kjemikontekst ((3a, An3a$_1$), (3a, An3a$_2$), (3c, An3c), (7, An7$_3$), (9a, An9a$_1$), (9a, An9a$_2$)). For de resterende oppgavene har elevene prestert bedre uten kjemikontekst (4, An4), (5a, An5a$_2$), (9a, 9a$_3$) og (9c, An9c$_1$)) (se vedlegg 7.11).

4.4 Kvalitative resultater på Kartleggingstesten i matematikk og utvalgte analoge kjemioppgaver

De kommende delkapitler inneholder en oppsummering av de kvalitative funnene fra besvarelser på analoge oppgaver gitt på kartleggingstest i matematikk og kjemiprøver. Funnene gjelder bare for de besvarelser som ble vurdert til «ikke korrekt» i analyse 1. Denne kvalitative gjennomgangen av besvarelsene har gitt innblikk i hvilken type feil elevene gjør. Oppgavenummereringen som anvendes i oppsummeringen tilsvarer den som er gitt i vedlegg 7.6 for kartleggingsoppgaver i matematikk og vedlegg 7.7 for analoge kjemioppgaver. Oppgave 1e på kartleggingstesten vil ha en analog oppgave i kjemikontekst nummerert med An1e.

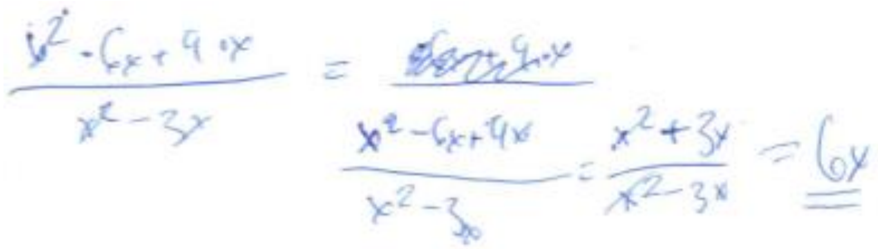
Det var i alle besvarelser eksempler på alternative løsningsmetoder som avslørte manglende matematisk forståelse. Alle disse enkeltbesvarelsene vil ikke bli presentert i detalj. Det legges i denne oppsummeringen mer vekt på å formidle den løsningsmetoden de fleste elever har valgt. Det er valgt en åpen tilnærming til datamaterialet framfor å snevre inn mot en undersøkelse av spesifikke strategier.

4.4.1 Regnerekkefølge og brøk

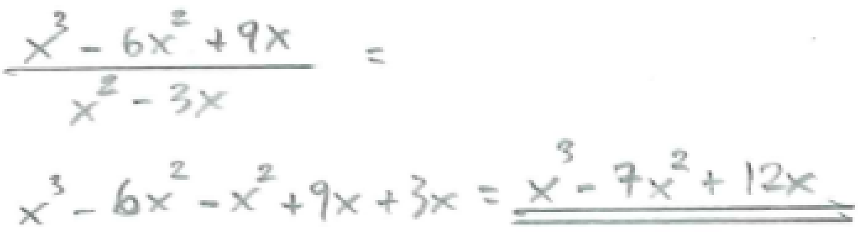
Emnet testes i oppgave 1a, b og c på kartleggingstesten (se vedlegg 7.6). De fleste elever klarte disse oppgavene. Hovedårsaken til delvis korrekt vurdering på disse oppgavene er regnefeil og/eller ufullstendige forkorting av brøker. Det var veldig typisk at elevene ikke forkortet brøkene i forkant av utregningen. Dermed fikk de problemer med å multiplisere riktig.

4.4.2 Forenkle rasjonalt uttrykk

Emnet testes i oppgave 1d på kartleggingstesten (se vedlegg 7.6). Elever som løste oppgaven delvis korrekte forkortet ikke faktor x. Elever som ikke løste oppgaven korrekt har feil forkorting, noe som kan sees i sammenheng med manglende faktorisering av nevner og teller. To strategier som utpekte seg var at brøkstreken ble behandlet som subtraksjon (mulig som et resultat av assosiasjon til potensregler) eller at ledd i teller ble forkortet mot eller subtrahert fra ledd av samme grad i nevner (se Figur 3 og Figur 4). Mange multipliserte x feil inn i parentesen i teller, gjerne bare med nærmeste ledd 9. Mange elever var inkonsekvente og kunne ha kombinasjoner av disse strategiene.



Figur 3 Forkorting av samsvarende ledd i kombinasjon med brøkstrek som subtraksjon



Figur 4 Brøkstrek som subtraksjon

4.4.3 Prosent

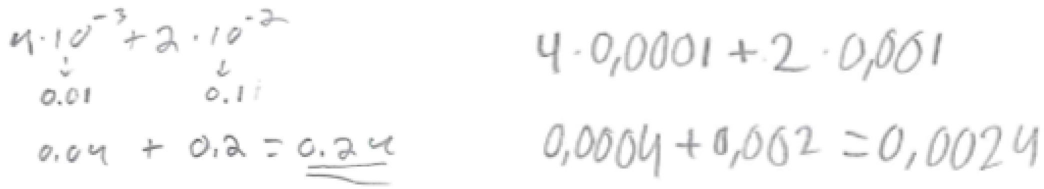
Emnet ble testet i oppgave 1e på kartleggingstesten i matematikk (se vedlegg 7.6) og An1e i kjemi (se vedlegg 7.7). Det var over dobbelt så mange som ikke svarte på oppgaven i kjemikontekst som på kartleggingstest (se vedlegg 7.10). Dermed er sammenligningsgrunnlaget lite optimalt. Allikevel kan vi se at summen av antallet elever som ikke forsøkte og antall elever som ikke svarte korrekt er omtrent likt i begge kontekster. Elever som har vansker med denne oppgaven kan samtidig oppleve denne oppgaven som lite kjent i kjemikontekst og dermed la være å prøve. Allikevel er strategiene til elevene med ikke korrekt besvarelse lik i begge kontekster. Felles for delvis korrekte besvarelser var at elevene viste forståelsen for at den nye produksjonen var 115% av den gamle, men de hadde ingen strategier for å regne det ut eller de regnet feil. De fleste ikke korrekte besvarelser hadde to ulike tilnærminger: 15% av ny produksjon trekkes fra ny produksjon eller de multipliserer ny produksjon med vekstfaktoren 0,85. Noen tolker at ny produksjon er 15% av gammel produksjon.

4.4.4 Potenser

Emnet ble testet i oppgave 2a, 2b og 2c på kartleggingstesten i matematikk (se vedlegg 7.6) og $An2b_1$ og $An2b_2$ i kjemi (se vedlegg 7.7). Oppgavene 2a og 2c regnes for å ha være enkle (høy *p*) (se Tabell 4). Elevene får til å regne slike potensoppgaver. Disse har ingen analog oppgave i kjemikontekst. Oppgave 2b regnes heller ikke for å være spesielt vanskelig, men skiller seg litt fra oppgavene 2a og 2c. Elevene unnlot å kvadrere tallet 2 i uttrykket $(2a^5)^2$. Tilsvarende feil gjorde elevene i kjemi, men her var det derimot mange som ikke forsøkte å løse oppgaven (se vedlegg 7.10). Dette gir et dårlig sammenligningsgrunnlag. Konteksten for uttrykkene i kjemi var løselighet og mange uttrykte på prøven at dette var et tema de ikke forstod. Flere prøvde seg på An2b$_2$, der uttrykket var oppgitt, enn på An2b$_1$, der de måtte skrive uttrykket selv.

4.4.5 Tall på standardform

Emnet testes i oppgave 2d og 2e på kartleggingstesten (se vedlegg 7.6) og An2d og An2e i kjemi (se vedlegg 7.7). Andelen elever som ikke har forsøkt disse oppgavene i kjemikontekst er endel høyere enn på kartleggingstesten i matematikk (se vedlegg 7.10). Dette gjør at man mister grunnlag for å vurdere hvilke vansker de møter med selve matematikken. Der det hovedsakelig ble observert tre ulike feil hos elevene på matematikkoppgavene, avslørte kjemikonteksten bare en av løsningsstrategiene. I begge kontekster ble det observert manglende kunnskap om sammenhengen mellom eksponenten til grunntall 10 og desimalposisjoner. Eksponenten kunne bety antall nuller etter komma eller det totale antall posisjoner i desimaltallet (se Figur 5).

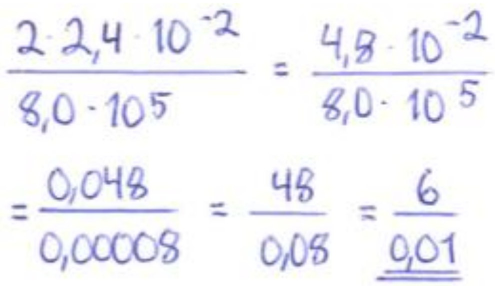


Figur 5 Tall på standardform og desimaltall

I tillegg ble det på kartleggingstesten funnet eksempel på en løsningsmetode som gav assosiasjoner til potensregler. Adderingen av to tall på standardform ble behandlet som multiplikasjon med regelen om addering av eksponent. Noen var også konsekvente med å multiplisere koeffisientene, andre adderte koeffisientene og multipliserte potenstallene (se Figur 6). Noen elever multipliserte også koeffisienten med grunntallet eller eksponenten, eller multipliserte eksponentene til hvert potenstall sammen.

Figur 6 Tall på standardform og potensregler

I divisjonen med tall på standardform er det mange elever som har delvis korrekt svar. Enten har de feil omgjøring til standardform, men riktig utregning eller feil divisjon av koeffisientene, men riktig potensregning. En annen ting som kom fram var at elevene hadde en tendens til å omdanne fra standardform til desimaltall for tidlig i utregningen og endte opp med et regnestykke de ikke hadde strategi for å løse (se Figur 7).



Figur 7 Divisjon med desimaltall

4.4.6 Logaritmer

Emnet ble testet i oppgave 3a, 3b og 3c på kartleggingstesten i matematikk (se vedlegg 7.6) og $An3a_1$, $An3a_2$ og An3c i kjemi (se vedlegg 7.7). Logaritmeoppgavene hadde ganske lav vanskegrad (p-verdi) på kartleggingstest (se Tabell 4) og regnes som vanskelig, men hadde høyere p-verdi i kjemikontekst (se Tabell 8). Oppgave $An3a_2$ kunne løses med kalkulator og ingen feil svar ble funnet for de som løste oppgaven. I oppgave $An3a_1$ var det mange som skrev opp riktig uttrykk, men manglet strategi for å regne det ut eller de gjettet på et tall. I flervalgsoppgaven An3c, der regning ble unødvendig, var største andelen av ikke korrekte svar at konsentrasjonen av H^+ er 0,00005 mol/L når pH = 5 (riktig svar er $10^{-5}\ mol/L$). Tre elever mente at konsentrasjonen var 0,5 mol/L. Disse har muligens tenkt at 5 divideres med 10, som er grunntallet for logaritmen. To elever oppgir 5 mol/L og har muligens en ide om at konsentrasjon og pH er det samme.

Feilene i An3c gjenspeiler omtrent feilene i oppgave 3a og b. Noen elever brukte grunntallet for logaritmen i beregningen på ulike måter, til å angi antall posisjoner i desimaltallet (for grunntall 10) eller som en faktor eller divisor. Ofte ble svaret gitt som potenstall, men med feil eksponent.

Logaritmeligningen i oppgave 3c hadde flere delvis korrekte besvarelser. Enten fant elevene at $x^2 = 10^{-2}$ eller at $2 \cdot lgx = -2$. Herfra manglet videre regnestrategi. Det var vanskelig å koble tierpotens og desimaltall ($10^{-2}\ eller$ 0,01) og regne kvadratrot.

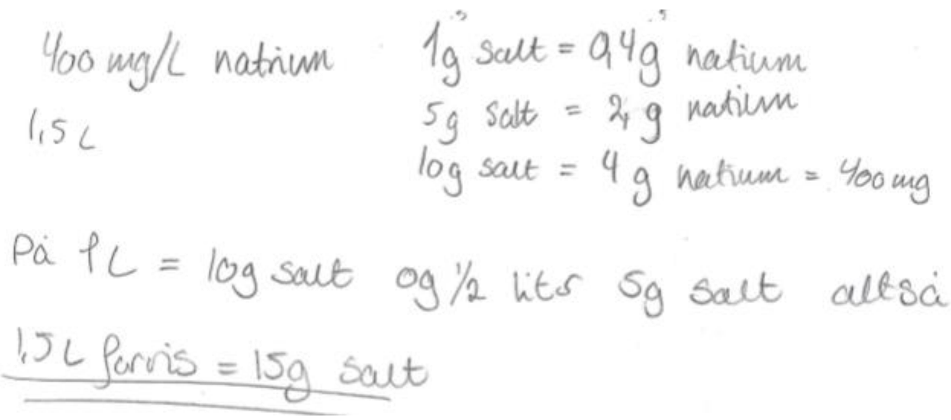
4.4.7 Forhold mellom areal av rektangler

Emnet ble testet i oppgave 4 på kartleggingstesten i matematikk (se vedlegg 7.6) og An4 i kjemi (se vedlegg 7.7). Oppgave 4 og An4 regnes å være enkle oppgaver (høy p-verdi) (se Tabell 4 og Tabell 8). Det var ingen elever som ikke forsøkte å løse oppgaven. To elever tolket figurene til å være formlike. Dette var også den vanligste løsningen Scott (2012) fant i sin studie. Begge brukte kryssmultiplisering med utgangspunkt i forhold mellom «samsvarende sider» mellom figurene. Tolkningen av samsvarende sider var derimot ulik. En vurdering av samsvarende sider ble gjort fra størrelsen på lengdene $\left(\frac{2}{3} = \frac{x}{4}\right)$. Dersom eleven sammenligner lengdene er det kanskje ikke like lett å se at x er større enn 4 m. Det at svaret $\left(x = \frac{8}{3}\right)$ oppgis som brøk gjør det muligens vanskeligere for eleven å oppdage at svaret er feil. Den andre vurderingen blir gjort ut fra plassering av figurene $\left(\frac{2}{4} = \frac{x}{3}\right)$. Eleven gjorde ingen vurdering av størrelsen på sidene slik de var tegnet.

I kjemikontekst skyldtes de fleste ikke korrekte og delvis korrekte besvarelsene feil i molmasse og feil utregning av brøken de får for stoffmengde (mol). Et par elever har feil regning med intensiv størrelse (som g/mol) der en divisjon mellom molmasse (g/mol) og masse (g) gir antall mol.

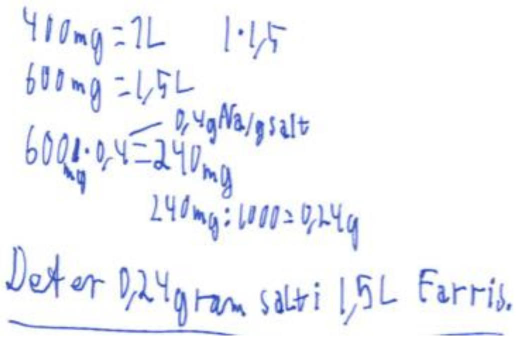
4.4.8 Regning med enheter og intensive størrelser

Emnet ble testet i oppgave 5a og 5b på kartleggingstesten i matematikk (se vedlegg 7.6) og $An5a_1$, $An5a_2$, $An5a_3$, $An5a_4$, $An5b_1$ og $An5b_2$ i kjemi (se vedlegg 7.7). Eleven svarte delvis korrekt dersom strategien var riktig, men regningen feil. Feil omgjøring av enheter i matematikk og feil molmasse (g/mol) gikk igjen. Av de delvis korrekte oppgavene i 5a brukte alle unntatt en elev strategien med skalar ved at mengde kalsium multipliseres med 4 fordi 250 mL farris går fire ganger opp i 1L. Den siste eleven brukte funksjonsmetoden ved å finne antall mg kalsium per liter Farris. Dette er metoder som samsvarer forskning av Vergnaud (1983) og Cramer og Post (1993). Av de delvis korrekte besvarelsene på 5b valgte flest elever en kombinasjon av halvering og «bygge opp» for å finne mengden salt i 1,5L Farris, som er metoder beskrevet av blant annet Lamon (2007). Måten tallene ble bygget opp varierte litt fra elev til elev (se eksempel i Figur 8). Noen elever valgte å finne antall mg natrium i 1,5 L Farris først, før de dividerte med 0,4 g natrium i 1g salt.



Figur 8 Halvering og bygge opp

Kjennetegnet på de ikke korrekte besvarelsene var at elevene manglet oversikt over de sammensatte størrelsene og hva de regnet på og med (se Figur 9). Muligens vil manglende oversikt over sammenhengen mellom størrelsene føre til at flere elever ikke klarer å skille mengde natrium og salt fra hverandre.



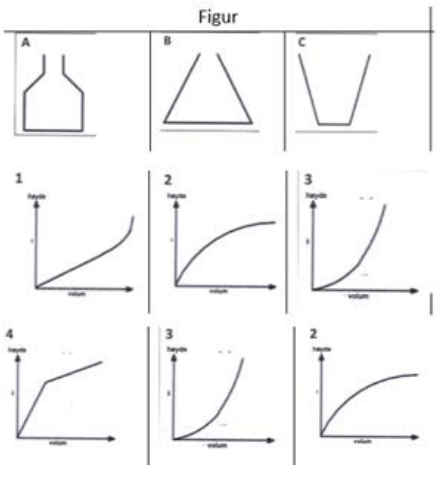
Figur 9 Feil valg av regning med intensiv størrelse

Det som også kjennetegnet alle besvarelsen var den uryddige måten å skrive løsningen på, feil bruk av likhetstegn og hvordan enhetene enten er brukt feil eller utelatt fra beregningene. Siden flere brukte en «bygge opp» metode kombinert med halvering for å løse oppgaven kan det være vanskelig å bruke enhetene under utregning. Dette kan igjen føre til at de mister oversikt over hva de regner på, spesielt i beregninger som involverer intensive størrelser. Konsentrasjonen i mg/L og sammenhengen antall g Na/antall g salt er intensive størrelser. Den første en kjent sammenheng, som Lamon (1993) ville kalt «well chunked». Den multiplikative sammenhengen mellom antall g salt og antall g natrium er derimot ikke gjenkjennbar på samme måte og presenteres i oppgaven som det Kaput og West (1994) beskriver som et spesielt forhold og ikke som intensiv størrelse.

De ikke korrekte besvarelsene på An5a (1, 2, 3 og 4) og An5b (1 og 2) har alle samme type feil som ligner de elevene gjorde på kartleggingstesten. Dette gjelder manglende regnestrategi og feil regning med intensiv størrelse. Eksempler på feil regning med intensiv størrelse er at molmassen i g/mol enten ble multiplisert eller dividert med masse i g for å finne antall mol. Størrelsen i mol kunne også bli dividert med størrelsen i g/mol for å finne massen i g. Det samme skjedde da eleven multipliserte størrelsen i mol og størrelsen i L for å finne konsentrasjonen i mol/L, eller at konsentrasjonen i mol/L ble dividert med antall liter for å finne størrelsen i mol. I tillegg var det noen elever som hadde mer kjemifaglige feil som ikke kan relateres til selve matematikken som f.eks. at stoffmengde ble beregnet i stedet for konsentrasjon, feil bruk av volum eller at syrekonstanten ble innrammet i konsentrasjonen.

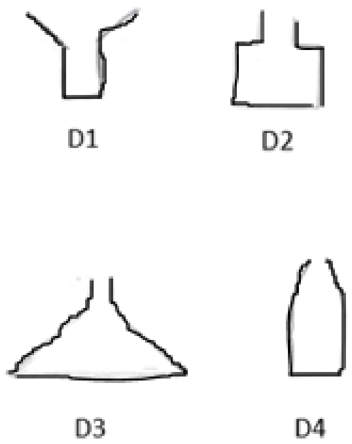
4.4.9 Tolkning og skissering av grafer

Emnet ble testet i oppgave 6a og 6b på kartleggingstesten i matematikk (se vedlegg 7.6) og An6a$_1$, An6a$_2$, An6b$_1$ og An6b$_2$ i kjemi (se vedlegg 7.7). De to deloppgavene hadde ganske stor forskjell i vanskegrad (se Tabell 4 og Tabell 8). På kartleggingstesten i matematikk klarte mange elever å koble riktig graf til riktig beholder (6a), men flere av dem klarte ikke tegne beholderen til en oppgitt graf (6b). Noen elever fikk delvis korrekt dersom de hadde plukket ut de riktige grafene men bare plassert en riktig, eller at de hadde riktig plassering på to grafer men feil valg av graf på siste beholder (se Figur 10).



Figur 10 Delvis riktige kombinasjoner av graf og beholder

I 6b ble besvarelsene vurdert som enten korrekt eller ikke korrekt. Det kom fram seks forslag til beholdere for graf 4, ett forslag for graf 2 og fem forslag til graf 1. Flest gav forslag til skisse for graf 4 (16 av 54) og er gitt som D1 (se Figur 11). Fire besvarelser var nærmest en korrekt skisse av graf 4. Beholderen hadde riktig form, men stod på hodet. Det er mulig elevene tenkte at grafen viser fylling av vann fra topp til bunn (se D2). Skissen gitt i D1 var også det forslaget flest elever hadde som representasjon på graf 1. Noen illustrasjoner av beholdere for graf 1 ser ut som at grafen følger beholderens form (se D3 og D4).



Figur 11 Forslag til skisse av beholder tolket fra oppgitt graf

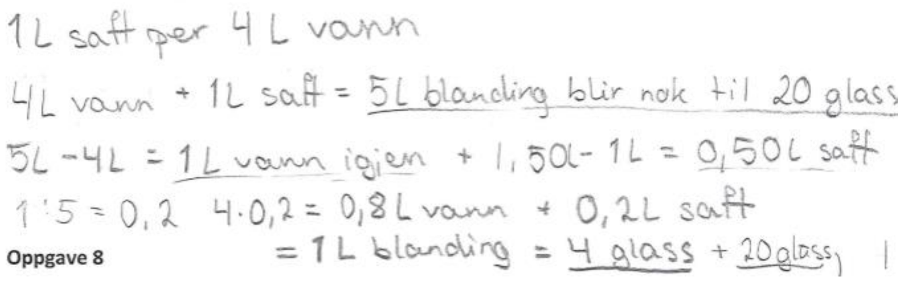
For oppgavene i kjemikontekst var Graf I riktig for oppgave An6a$_1$ og Graf III er riktig for oppgave An6a$_2$ (se vedlegg 7.7). I oppgave An6a1 viser graf I at en manglende katalysator vil senke reaksjonshastigheten, men at det fortsatt er likevekt i beholderen. Hastigheten til reaksjonen mellom A og B til C er like stor som oppspaltingen av C til A og B. De ikke korrekte besvarelsene fordeler seg jevnt på alternativene. Det virket som om elevene tenkte at y-aksen representerte konsentrasjon istedenfor hastighet og at de assosierte situasjonen med at en katalysator ikke endrer likevektskonsentrasjonene (velger graf III) eller ut fra Le Chateliers prinsipp som sier at konsentrasjonene vil øke igjen etter at den er senket av en ytre faktor (graf II og IV). Flere elever fikk til oppgaven når det spørres om endring av konsentrasjon enn endring av hastighet, som på oppgave An6a$_2$. Her vil Graf III vise at konsentrasjonen ikke vil endres ved at katalysatoren slutter å virke. Elever som ikke svarte korrekt her valgte enten graf I eller II. Ingen valgte Graf IV, noe som kan bety at de tenker at konsentrasjonen av C aldri kan bli like stor igjen etter at katalysatoren ble ødelagt. Elevene tenker at katalysatoren senker konsentrasjonen istedenfor hastigheten. Deretter hadde de ulike mening om konsentrasjonen etter hvert vil øke eller ikke.

Av 41 ikke korrekte oppgaver på An6b$_1$ var det 18 som ikke forsøkte å løse oppgaven. Dette er stor forskjell fra kartleggingen. Noe kan kanskje forklares med at på kartleggingen i matematikk hadde de en deloppgave i forkant som viste eksempler på beholdere som skulle stemme overens med en bestemt graf. Elevene hadde dermed noe å sammenligne med. Elevene skulle skissere en funksjon av pH gitt ved ulike konsentrasjoner av sterk syre. Av ikke korrekte løsninger var det størst andel elever som tegnet titreringskurve (sigmoid kurve). Det er mulig akseetikettene (x = konsentrasjon av syre og y = pH) gav en assosiasjon til syre-basetitrering (pH- målinger avsettes som y-verdier for hver ekvivalent av en sterk base som tilsettes en syre). Omtrent like mange tegnet en rett linje som enten synker eller stiger og det virket ikke som det var noen plan på hvilke punkter linjen gikk gjennom. Noen elever tegner riktig form, men grafen gikk gjennom feil punkter. På de fleste kurvene steg pH med økende konsentrasjon av syre (HCl). Det burde vært motsatt.

For oppgave An6b$_2$ var det bare 4 som ikke hadde forsøkt å løse oppgaven. Av de ikke korrekte besvarelsene var det fire elever som ikke fikk til å representere situasjonen med en graf. De valgte heller et energidiagram, tabell eller beholdere til å vise endringen av konsentrasjonen til reaktanter og produkter. Av de som tegnet graf var det mange som manglet eller hadde feil navn på aksene, hadde feil form på kurvene og de representerte ikke forholdet mellom reaktanter og produkter underveis i reaksjonene på en riktig måte. Flere besvarelser gav inntrykk av todeling av reaksjon der CO overføres til CO_2 og H_2O overføres til H_2. Ett eksempel var at de to reaktantene (CO og H_2O) representerte hver sin kurve, der den ene steg og den andre sank. Når kurvene møttes ble de omdannet til hvert sitt stoff (CO_2 og H_2). I tillegg fantes det flere alternative kurver som hver sin måte framstilte endringen av konsentrasjonene i forhold til hverandre på feil måte.

4.4.10 Forhold med begrensende faktor

Emnet ble testet i oppgave 7 på kartleggingstesten i matematikk (se vedlegg 7.6) og An7$_1$, An7$_2$, An7$_3$ og An7$_4$ i kjemi (se vedlegg 7.7). På kartleggingstesten i matematikk hadde elevene delvis korrekt svar dersom de hadde regnefeil eller brukte forholdet riktig, men ikke tok hensyn til begrensende faktor. Det var bare en elev som ikke forsøkte å løse oppgaven. Det virket derfor som at dette var en oppgave elevene trodde de kunne klare og at problemstillingen var kjent. Noen elever overså at det var to saftflasker. Det forenklet oppgaven en del fordi eleven unngikk en problemstilling med begrensende faktor. De fleste ikke korrekte besvarelser brukte forholdet til å regne saftblandingen ut fra mengden saft tilgjengelig uten å tenke over begrensende mengder. Noen tok ikke hensyn til forholdet i det hele tall og fikk 6,5 liter blanding. Det var flere som brukte forholdet feil fordi de tolket andelen vann til å være den totale saftblandingen. Dette kan være konsekvent eller ikke gjennom utregningene, der de vekslet mellom å regne andel vann og samtidig bruke denne andelen til å representere den totale saftblandingen (se Figur 12).


1L saft per 4 L vann

4L vann + 1L saft = 5L blanding blir nok til 20 glass

5L -4L = 1L vann igjen + 1,50L- 1L = 0,50L saft

1:5 = 0,2 4·0,2 = 0,8L vann + 0,2L saft

Oppgave 8 = 1L blanding = 4 glass + 20glass) |

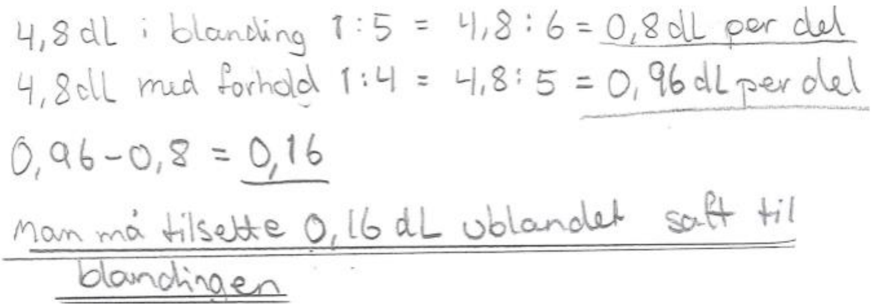
Figur 12 Inkonsekvent med tolkning av vann som "del" og "hele"

I kjemikontekst kan vi først se på oppgave $An7_1$ og $An7_2$. Felles for delvis korrekte og ikke korrekte besvarelser var at begge typer besvarelser inneholdt ulike regnefeil, forholdsfeil, feil molmasse (g/mol) og feil regning med intensive størrelser. Forskjellen var at de ikke korrekte besvarelsene ikke tok hensyn til begrensende mengder av reaktantene. De ikke korrekte besvarelsene på de to oppgavene skilte seg derimot ut når det gjaldt elevenes strategier for å finne mengden til et produkt. I oppgave $An7_1$ kom det fram to misforståelser som kanskje kan relateres til oppbyggingen av reaksjonsligningen. Den ene mente at to reaktanter ble til hvert sitt produkt siden forholdstallet på begge sider av reaksjonsligningen er 1:2. Det betydde at massene på 12g og 24g for reaktantene tilsvarte massene 12g og 24g på produktene. Den andre mente at massen til karbondioksid kunne bestemmes av summen til massene oksygen og metan. Siden disse oppgavene ble gitt til de to klassene med ulike tallverdier, og siden det virket som om oppbyggingen av reaksjonsligningen påvirket hvordan noen elever tolket settingen i oppgaven, ble det samlet inn og analysert flere slike oppgaver. I oppgave $An7_2$ kom det nemlig fram litt andre typer misforståelser. Felles for alle var at de regnet forholdstallet i reaksjonsligningen inn i den molare massen. Elevene tolket at koeffisienten 3 foran hydrogengass (H_2) i reaksjonsligningen betydde tre ganger så stor molar masse. Utenom dette kom det fram ulike varianter av tolkninger av reaksjonsligningen som en matematisk ligning der massen til ammoniakk var den ukjente. Noen tolket mengden ammoniakk som summen av mengden til reaktantene og hadde ulike varianter av summeringer. De kunne summere massene eller stoffmengdene (noen summerte også molmassen). Noen tolket koeffisientene i reaksjonsligningen som skalarer som ble multiplisert inn i den totale summen. Andre tolket koeffisientene som noe massen måtte fordeles på (for å få masse per enhet).

To tilleggsoppgaver ($An7_3$ og $An7_4$) ble hentet fra flervalgsoppgaver gitt på øvingsprøve i april 2017. Oppgavene er lik oppgave $An7_2$ på den måten at to reaktanter danner ett produkt, men koeffisientene er forskjellige. Reaksjonsligningen er den samme i begge oppgaver, men reaktantene oppgis med stoffmengde (mol) i $An7_3$ og masse (g) i $An7_4$. Av ikke korrekte besvarelser på oppgave $An7_3$ valgte de fleste elevene alternativ D. Dette stemte overens med en tolkning av at mengden produkt er summen av mengdene av reaktantene. På oppgave $An7_4$ har de fleste elever som ikke har korrekt svar valgt alternativ A som stemte overens med en tolkning av massen til produktet som summen av massen til reaktantene (0,8g+0,8g=1,6g; forholdstallene i reaksjonsligningen er oversett).

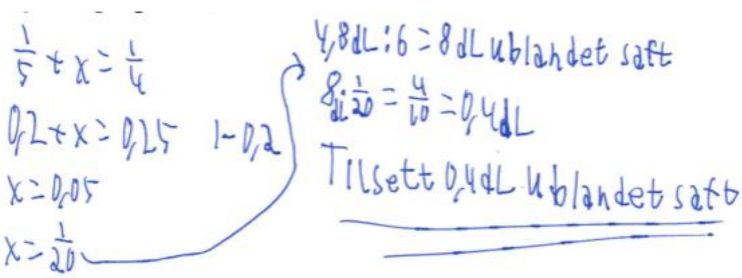
4.4.11 Endring av forhold

Emnet ble testet i oppgave 8 på kartleggingstesten i matematikk (se vedlegg 7.6) og An8 i kjemi (se vedlegg 7.7). Strategien de fleste elevene valgte var å regne mengden saft som 1/6 av opprinnelig blanding og 1/5 av ny blanding og finne differansen, men de regnet som om begge blandingene hadde likt volum (se Figur 13).



Figur 13 Differansen mellom 1/6 og 1/5 av saftblandingen

Det så ut som flere elever ikke skilte mellom forhold og «brøkdel av». Forholdet ble gjerne skrevet på brøkform, men samtidig virket det som om elevene da mistet oversikt over betydningen av brøken (se Figur 14).



Figur 14 Manglende forståelse for skillet mellom forhold og "brøkdel av"

På samme måten var en vanlig feil i kjemikontekst at elevene ikke forstod forandringen i mengdene stoff som skjedde i reaksjonen og hvordan dette påvirket forholdet mellom gasskonsentrasjonene i beholderen. Flertallet av de ikke korrekte besvarelsene brukte feil forholdstall i utregningene. Elevene hadde litt ulike løsningsmetoder. Noen overså at dette var en likevekt (betyr at reaksjonen går begge veier). De regnet mengden produkt fra utgangsstoffene ved hjelp av forholdet i reaksjonen eller de antok at stoffmengden for SO_3 og SO_2 var lik ved start. Noen tenkte at utgangsstoffene «eliminerte» hverandre slik at overskuddet (forholdet tas ikke med i utregningen) ble brukt til å lage produktet eller de valgte å ta summen av reaktantene for å finne produktet.

4.4.12 Omforming av formel og løsning av rasjonal ligning.

Oppgave 9a har høy p-verdi og regnes som vanskelig (se Tabell 4), og mye skyldes elevenes manglende strategi for å faktorisere andregradsuttrykk og gjøre riktige forkortinger. Eleven unngår dette i kjemi når det brukes kalkulator, men oppgave An9a$_3$ viste tydelig at elevene ikke forstår den grunnleggende algebraen som ligger bak uttrykkene de bruker i kjemi. Bare en elev løste oppgaven og det var mange som ikke forsøkte. Oppgaven er krevende fordi du må sette opp det algebraiske uttrykket for situasjonen. Dette gir derfor ikke et helt riktig grunnlag for sammenligning med kartleggingstesten. På kartleggingstesten var det bare krav til å løse et ferdig oppstilt regnestykke. Flere elever mestret oppgavene An9a$_1$ og An9a$_2$. Det var stor forskjell i antall elever som ikke forsøkte å løse oppgavene, 26 og 3 henholdsvis. Ser man på oppgave An9a$_2$ lå hovedårsaken til ikke korrekt besvarelse på denne oppgaven manglende kunnskap i kjemi. Elevene tolket den svake syren som en sterk syre eller base, noe som forenklet pH beregningene.

Omforming av enkle formler i oppgave 9b var enkelt for denne gruppen. Fra erfaring roter ofte elever med slike formler i kjemi. Det kan derfor virke som det ikke er selve omformingen av formelen som er problemet, men å forstå hvilken sammenheng det er mellom størrelsene. I oppgave 9c har flertallet av elever med ikke korrekt besvarelse tatt kvadratrot av hvert enkelt ledd. Overraskende mange dividerte med 2as for å forkorte dette leddet . Elevene hadde også problemer med riktig rotregning i oppgave An9c$_1$ og An9c$_2$. I oppgave An9c$_2$ var uttrykket for løselighet satt opp som eleven skulle omforme. I oppgave An9c$_1$ var spørsmålstillingen en annen. Eleven skulle finne løseligheten til et stoff og måtte dermed sette opp et uttrykk for løselighet. Flere prøvde seg på oppgave An9c$_2$ enn oppgave An9c$_1$. Elevene hadde muligens ikke koblet uttrykket i An9c$_2$ med begrepet løselighet An9c$_1$.

4.5 Intervjuer og supplerende ettertest

Hovedmålet med intervjuet var å forstå elevenes vansker med oppgaver som omhandlet forhold både innenfor matematikk- og kjemirelaterte temaer. Intervjudata ble analysert og svar kodet i kategorier som er knyttet opp mot intervjuets tematikk. Disse kodene var *Tolkning av oppgavetekst, Brøkregning, Tolkning og bruk av forhold* og *Intensive vs. ekstensive størrelser*. Intervjuet gav innblikk i elevenes identifisering av og forståelse for sammenhengen mellom størrelser. Dette ble dermed hovedkategorien som kom fram i intervjuet der de fire kodene er underkategorier av denne. Forklaringen på hva som er plassert under hver kode er gitt i Tabell 10. Hver kode vil utdypes under eget delkapittel med utdrag fra dialogen med deltagerne. Resultater fra ettertesten relateres til og supplerer utkommet av intervjuet underveis i delkapitlene.

Tabell 10 Koder fra intervju som utdyper elevenes identifisering av og forståelse for sammenhengen mellom størrelser

Kategori	**Innhold**
Tolkning av oppgavetekst	Elementer som trigger eller hemmer løsningsstrategi: Illustrasjoner, assossiasjoner med kjemi og informasjon i tekst.
Brøkregning	Ulike tilnærminger til regning med brøk (faktorisering, desimaltall fellesnevner, sammenligne størrelser, addisjon, subtraksjon) og tolkning av brøk (kvotient, «del-hele», operator).
Tolkning og bruk av forhold	Tolkninger av forhold i oppgaveløsningen og hvordan dette kan symboliseres både som «del-hele» og «del-del» og anvendes som kvotient og operator. Forståelse for hvordan et forhold mellom størrelser relateres til de faktiske mengdene som er gitt for disse størrelsene.
Intensive vs. Ekstensive størrelser	Forståelsen for de multiplikative sammenhengene mellom stoffmengde og volum, masse og stoffmengde og konsentrasjon av appelsin (intensive størrelser som mol/L, g/mol og mL appelsin/mL blanding)

4.5.1 Tolkning av oppgavetekst

Hva elevene tenker i møtet med en ny problemstilling og hvordan de umiddelbart tolker oppgaveteksten er ikke alltid like lett å få innblikk i. I intervjuet var det viktig å be elevene formulere dette. I møtet med oppgave 1 (se vedlegg 7.8) uttalte Elev 3 følgende:

179 *I: Hvorfor tenker du at du må finne stoffmengden?*

180 *E3: Om jeg skal….ehhh, vent da… Eller når jeg ser oppgaven så tenker jeg at jeg må jo regne det en gang for jeg får jo oppgitt gram per mol [ler]*

Dette representerte innfallsvinkelen til alle fire elever på denne oppgaven. Siden molmasse (g/mol) var oppgitt i oppgaven gav det signal til elevene om at antall mol (stoffmengde) måtte beregnes.

I oppgave 2 (se vedlegg 7.8) kom det fram flere ulike kommentarer relatert til oppgavetekst.

292 E2: *Ja, men det forvirrer meg når det er sånn tre glass der og et helt glass der, når det står fem glass og så er det en enhet og så står det tre og så er det tre her og det er en av dem og så står det fem der. Da hadde det gitt mening hvis det hadde stått en der og så hadde det bare hvert en* [peker på den høye vannsøylen].

Elev 2 gav uttrykk for at mengden vann oppfattes å være et helt glass og dermed burde representert én del istedenfor fem deler (linje 292). Både Elev 1 og 2 ble forvirret av denne representasjonen fordi antall glass appelsin samtidig ble presentert med 3 diskret glass. Begge elevene endret illustrasjonene til en søyle for appelsin og en søyle for vann som ble delt inn i sine respektive deler på 3 og 5. Forskjellen på oppfatningen av kontinuerlige og diskret størrelser har vist seg å påvirke løsningsstrategier (Bassok, Boyer, 2008; Jeong et al., 2007; Lawton, 1993). For disse to elevene førte illustrasjonen til to ulike konklusjoner for sammenligning av appelsinsmak, der Elev 1 valgte «del-hele» og Elev 2 en additiv tilnærming. Dette skal vi se senere under kapittel 4.5.3.

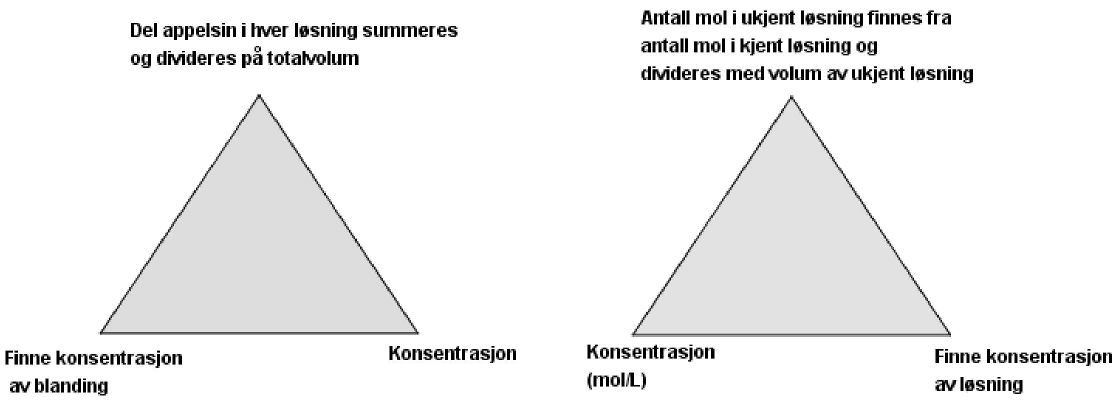
For oppgave 2c (se vedlegg 7.8) kom følgende fram når elevene skulle finne ny appelsinjuicekonsentrasjon fra blandingen av to volum med ulike appelsinjuicekonsentrasjoner:

282 *E1: I kjemi, da så ville det vært lurt å finne antall mol av hver av dem og konsentrasjonen i første løsningen*

295 *E1: Ja, for det er uvant når jeg ikke har benevningen, antall mol og gram per mol og mol per liter.*

83 *E3: Det første jeg tenker da er den konsentrasjonsformelen,[skriver* $c_1 \cdot V_1 = c_2 \cdot V_2$]. *Her er det ikke mol per liter da men..*

Elev 1 assosierte oppgaven med en kontekst som tilsvarer en kvantitativ analysemetode i kjemi for å finne en ukjent konsentrasjon (titreringsmetode) (linje 282). Elev 3 sa det samme ved å hente fram formelen der $c_1\, og\, c_2$ er konsentrasjonen i mol/L av to ulike løsninger med respektive volum $V_1\, og\, V_2$ (linje 83). Samtidig ble oppgaven vanskelig å løse fordi den ikke inneholdt benevning (linje 295). Det kan virke som elevene har fokus på overflateegenskaper. Analogien mellom oppgaven og kjemi er feilaktig og kan være trigget av likheten i innholdet og oppgavelyd (Bassok & Holyoak, 1989; Bassok, 1997; English, 1997; Lobato & Siebert, 2002). Samtidig kan det være en forventning om at kjemi kan anvendes siden intervjuet baserte seg på matematikken i kjemifaget (Lobato & Siebert, 2002). Med utgangspunkt i det semiotiske triangelet og trapeset referert til i Carreira (2001) (se Figur 1) har jeg forsøkt å forstå hva som trigget denne feilaktige dupliseringen (se Figur 15). De to trekantene representerer hver sin kontekst fordi det ikke er observert noen uttalt metafor som koblet dem sammen. Men konsentrasjon er felles objekt i begge kontekster og referenten «finne konsentrasjon i blandingen» kan oppfattes som likt med referenten «finne konsentrasjon av løsning». Dersom de mentale modellene fokuserer på framtredende overflateegenskaper kan dette gi en negativ overføring (Bassok & Holyoak, 1989). Eleven har ikke tilstrekkelig relasjonelle strukturer til å tolke metodene med å finne konsentrasjon som forskjellige (se spissen av trekanten i Figur 15).



Figur 15 Feilaktig analogi for konsentrasjon i to kontekster.

På ettertesten ble en assosiasjon til kjemikonteksten også observert for 2 av 29 elever på samme oppgave (se oppgave 5, vedlegg 7.9). Den ene brukte fortynningsformelen $c_1V_1 = c_2V_2$ slik som i intervjuet. Eleven manglet opplysninger fordi konsentrasjonen ikke var direkte gitt i oppgaven: $c_1 \cdot 100 = c_2 \cdot 100 \rightarrow \cdot 1L = 1L \cdot x$. Eleven måtte forstå at brøken «del-hele» utgjør konsentrasjonen. Opprinnelig konsentrasjon c_1 er derfor bare utelatt, mens den nye konsentrasjonen er ukjent x. Den andre eleven brukte formelen $c = \frac{n}{V}$ (c er konsentrasjon i mol/L, n er antall mol og V er volum i L) med konsentrasjonen av appelsin, 3/8, i blanding A.

Allikevel ble brøken tolket som mengde appelsin da konsentrasjonen skulle regnes: $\frac{\frac{3}{8}}{64} = \frac{0,375}{0,064}$. Konsentrasjon som intensiv størrelse representert med brøken «del-hele» kan være uvant og vanskelig, noe vi kommer nærmere inn på i kapittel 4.5.4.

4.5.2 Brøkregning

Siden oppgavene ble løst uten kalkulator, ble elevene utfordret på brøkregning:

193 *E3: Åja, jeg må gange med to. Delt på trettito, da. Tjuefire delt på trettito. Skal jeg klare det?*
194 *L: Kanskje det går an å forkorte?*
195 *E3: Kan starte med å dele på to*

Elevene var vant til å bruke kalkulator og Elev 3 var usikker på om det var forventet å regne divisjonen 24/32 uten (193). Generelt virket elevene usikre på den lille gangetabellen, og hadde lite effektive strategier å forkorte underveis for å lette utregningene, for eksempel da Elev 3 startet med å dividere på 2 (195). Omgjøring fra brøk til desimal var heller ikke enkelt.

100 E2: Kan forkorte begge med fire. Da blir det rundt null seks et eller annet.
101 I: Null komma seks? tre fjerdedeler?
102 E2: Ja, og et eller annet bortover. Nei det blir det ikke, null komma syv cirka.

Omgjøring av brøken ¾ til desimaltall var vanskelig å se for Elev 2, som først foreslo 0,6 (100) og deretter 0,7 (102). Eleven la til *et eller annet bortover* (102), noe som betydde at eleven visste det var flere desimaler.

På ettertesten var ikke vanskene med brøkregningen like synlige. En grunn kan være at mange ikke forsøkte å løse de aktuelle oppgavene (9 av 29 på oppgave 5 og 11 av 29 på oppgave 2c, se vedlegg 7.9). I tillegg var reaktantene i oppgave 2c gitt i mol, som reduserer det første divisjonstrinnet for omgjøring fra masse til mol. Allikevel dukket et nytt eksempel på feil brøkregning da andel appelsin skulle bestemmes i 64mL og 36mL juice $\left(\frac{3}{5} \cdot 64 = \frac{192}{320} \; og \; \frac{5}{7} \cdot 36 = \frac{180}{253}\right)$ og da brøkene ble summert for å finne ny konsentrasjon av appelsinjuice $\left(\frac{192}{320} + \frac{180}{252} = \frac{372}{572}\right)$. Dette gav nytt eksempel på hvordan mengde appelsin oppfattes som konsentrasjon. I tillegg ble forholdene (3:5) og (5:7) brukt som operator for å finne andel appelsin. Dette kommer vi nærmere inn på i kapittel 4.5.3. At elevene ikke er trygge i forståelsen for brøk og rasjonale tall kan hindre dem i gode evner til proporsjonal resonnering (Lamon, 2007; Tjo & de la Torre, 2014).

4.5.3 Tolkning og bruk av forhold

Intervjuene avslørte to vansker med tolkning og bruk av selve forholdet og forholdsnotasjonen i en kjemisk reaksjon eller en blanding av appelsin og vann. Den ene omhandlet tolkningen av selve forholdet eller forholdsnotasjonen for å kunne regne med denne. Den andre var å forstå forskjellen på et reaksjonsforhold eller blandingsforhold og forholdet mellom de tilstedeværende, oppgitte mengdene og hvordan disse kan begrense utbyttet. Eksempler på disse blir videre presentert i kommende delkapitler sammen med aktuelle resultater fra ettertesten.

4.5.3.1 Hva betyr egentlig forholdet?

Det kan virke som om noen elever tolker forholdsnotasjonen ulikt i forskjellige oppgaver. Elev 1 og 3 beskriver sin oppfattelse av forholdet i en reaksjonsligning i oppgave 1 (se vedlegg 7.8), $CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$:

53 *E1: Metan, ja og karbondioksid. Forholdet er en til en [skriver ned 1:1]*

178 *E3: De forteller at du trenger dobbelt så mye.., eller du trenger 2 oksygenmolekyler med ett molekyl av metan for å danne ett med karbondioksid og to med vann, så da trenger du dobbelt så mye oksygen som metan, da..og det har du jo her. Du har jo 24g og…..ehh, jeg må kanskje først finne stoffmengden.*

Alle elevene noterte ned forholdet slik som elev 1, f. eks. 1:1 (54). De kunne allikevel virke usikre på hva forholdet egentlig betydde. Elev 3 forklarte reaksjonsforholdet på molekylnivå ved å sammenligne to oksygenmolekyler og ett molekyl metan (178). Allikevel tenkte eleven et øyeblikk at forholdet var oppfylt for utgangsmassene (24g oksygen er dobbelt så mye som 12 g metan), men tenkte seg om og sa at stoffmengden kanskje måtte finnes. Dette tilsvarer andre resultater der elever anvender reaksjonsforholdet på masser (Furio et al., 2002; Novick & Menis, 1976). Det kan virke som en intuitiv strategi slo inn i og med eleven raskt endret strategi og regnet stoffmengde først. Det er også mulig at slike intuitive strategier slår inn når masseforholdet stemmer overens med reaksjonsforholdet, men kanskje kan det også være en mulighet for at molverdier mindre enn 1 gjør reaksjonsforholdet vanskelig å tolke. Elev 2 skulle forklare hva 0,75 mol var:

178 *E2: For det høres så teit ut at du bare har en del av et metanmolekyl, da er det ikke metan lenger. Da tar man bort elektroner som er med å skape metan. Det kan liksom ikke bare være en del av det. Det må jo være et molekyl for at det skal være metan. Du*

kan ikke kutte sånn.

L: Du har nok mye rett i det du sier der. Kan det bety noe annet, da. 0,75mol?

E2: Ja, det betyr vel antall et eller annet av et eller annet. Jeg bare husker ikke hva.

Denne usikkerheten i oppfattelsen av mol som diskret eller kontinuerlig størrelse kom til uttrykk her. Elev 2 hadde nettopp skravert ¾ av en sirkel, noe som kom i konflikt med elevens oppfattelse av et molekyl.

Da elevene på ettertesten (se vedlegg 7.9) ble bedt om å illustrere innholdet i ulike beholdere ut fra oppgitte mengder (4b: $16g\ O_2\ og\ 8g\ CH_4$ og 4c: $0{,}75mol\ H_2, 1mol\ H_2\ og\ 3mol\ CH_4$) var det bare 2 av 29 som hadde korrekt diskret forhold i begge situasjonene. Fire andre tok også riktig hensyn til forholdet, men hadde en kontinuerlig tolkning i begge situasjoner. Tre av disse valgte å skravere halve beholderen i oppgave 4b ($\frac{16}{32}mol = \frac{8}{16}mol = 0{,}5mol$) og ¾, 1/3 og hele beholderen i oppgave 4c. Den siste eleven illustrerte mengdene som brøkdel av sirkler. Det var 7 av 29 som ikke forsøkte å løse oppgaven, men de resterende deltagerne hadde en diskret tolkning av innholdet i beholderen som ikke tok hensyn til forholdet. Et tilfeldig antall prikker, molekyler eller rundinger ble tegnet. Bare i beholderne der massen av stoffene var oppgitt ble forholdet tatt hensyn til av noen, men da ut fra massen og ikke antall mol. Typisk illustrasjon var at 16 molekyler ble tegnet i beholderen med 16 g og 8 molekyler i beholderen med 8g. For seks deltagere er tolkningen usikker fordi bare ett molekyl/molekylformel oppgis. Det er derfor vanskelig å vite hvordan disse deltagerne har forstått forhold mellom antall molekyler og om de egentlig har en diskret oppfatning av antall mol og antall molekyler i en gitt masse.

Hva forholdet representerer i en appelsinjuiceblanding ble også samtaletema under intervjuet med Elev 3 og Elev 4. Følgende dialog med Elev 3 som løste oppgave 2b er valgt for å belyse dette (se vedlegg 7.8):

46 *E3: Om 2:3, vil det si to tredjedeler av en løsning? Eller, jeg tenker liksom hva…*

47 *I: Hva 2:3 betyr, eller?*

48 *E3: Ja, i forhold til når jeg har….[tenker]…, ja, men…det som jeg kanskje tenker er at det er, om jeg….og herregud nå tenker jeg bare for mye [ler]. Ja,……2:3…ehhm, om jeg har ett glass, jeg har 3 glass appelsin og fem glass vann. Om du starter med å ta to glass appelsin og ett glass vann. Da har du tre glass med appelsinjuice.*

49 *I: Vil du da ha forholdet 2:3?*

……

54 *E3: Nei, det er kanskje omvendt? Herregud, jeg klarer ikke tenke [ler] Og det er også litt basic matte, og, men, ja…mm. For da har du mer appelsin i blandingen i forhold til vann?*

55 *I: Hvis du har 2:1 i forholdet mellom appelsin og vann, hvor mye appelsin har du da i forhold til vann, tenker du?*

56 *E3: Ehhh, dobbelt så mye appelsin som vann.*

57 *I: Så hvis forholdet er 2:3, hva tenker du da?*

58 *E3: Da må du ha…ehh…vent da. Hva sa du nå igjen?*

Elev 3 omtaler forholdet 2:3 som en operator (46). Dermed ble 2:3 oppfattet å være «del-hele» med 2 glass appelsin og 1 glass vann (48). Eleven hadde vansker med å gjenkjenne den multiplikative sammenhengen mellom størrelsene i blandingen og det virket som verdien på forholdet påvirket dette i og med eleven endret sin tolkningen av forholdet da den ble endret til 2:1 (56). At tallverdiene i forholdet har betydning for evne til å løse en oppgave korrekt stemmer overens med resultater fra forskningen (Fishbein et al.,1985; Kaput & West, 1994; Noelting, 1980). Kaput og West (1994) fant også at homogene blandinger bidrar med en utfordring i oppgaveløsning fordi den separate identiteten til de ekstensive størrelsene forsvinner.

Elev 2 hadde tilsvarende tolkning av forholdet 3:5 som «del-hele» som kom fram under løsningen av oppgave 2c (se vedlegg 7.8):

305 *E2: 64 delt på 5*

306 *I: Da finner du?*

307 *E2: Glass vann*

309 *E2: Ja, og så skal det være 3 av de glass vanna appelsin*

313 *E2: F. eks å ta 64 delt på 5. F.eks hvis jeg tok 10 mL, så deler jeg det på 5, så er det 2 ganger 3 mL, altså 6 mL er appelsin og 4ml er glass vann. Sånn hadde jeg tenkt. For da blir forholdet 3:5*

Uttalelsene var upresise, noe som gjorde det vanskelig å tolke hva eleven mente. Eleven sa at ved å regne 64:5 ble resultatet antall glass vann (se linje 305-307) der 3 av disse var appelsin (309). Dette gjaldt blanding A der forholdet mellom appelsin og vann var 3:5. Eleven virket å ha fokus på andel vann uten å reflektere over at 64mL representerer juiceblandingen. Eksempelet eleven gav senere, da 64 mL ble endret til 10mL for å lette utregningene (313), ble formulert annerledes. Her gav eleven inntrykk av å likestille andel vann med total løsning og tolket forholdet som «del-hele». Det kan hende at elevens fokus på én del hindret eleven å se helheten og dermed manglene i forklaringene. For eksempel brukte eleven forholdet til å finne mengdene til én av størrelsene og resten var den andre størrelsen. Det ble aldri vurdert om «resten» stemte overens med forholdet til blandingen (313). Eleven konstruerte ikke et mengdeforhold mellom ingrediensene i juicen som holdt blandingsforholdet konstant. Denne egenskapen må være på plass for å kunne resonnere proporsjonalt (Lamon, 2007; Tjo & de la Torre, 2014). Å sentrere fokuset på én del i forholdet vil være et lavere intuitivt nivå (Noelting, 1980).

På ettertesten ble deltagerne bedt om å krysse av for riktig svaralternativ om forholdet 2:3 (se oppgave 2a, vedlegg 7.9). Det var 14 deltagere av 29 som hadde bare korrekte alternativer, men av dem hadde bare 9 funnet alle tre riktige svaralternativer. Det var bare 5 som konsekvent krysset feil på flere svaralternativer, men 9 hadde selvmotsigende kombinasjoner. For eksempel kunne disse deltagerne oppgi at «2 glass appelsin og 3 glass vann gir 5 glass appelsinjuice» samtidig med «forholdet 2:3 innebærer at 2/3 av blandingen er appelsin». Dette kan relateres til det Kaput og West (1994) kaller numerisk ekvivalens. Elevene opprettet en feilaktig numerisk ekvivalens mellom forholdet mellom appelsin og vann og brøkdelen $\frac{appelsin}{vann}$ som «del-hele».

4.5.3.2 Forhold og additiv tolkning

I oppgave 2a (se vedlegg 7.8) sammenlignet tre av elevene styrken på appelsinsmaken i blanding A og B ved å finne «del-hele», finne fellesnevner og sammenligne teller. Elev 2 skilte seg derimot ut:

226 *E2: Ja, tror jeg eller…mm hm [tenker 35 sek] mmm…5 glass appelsin…[tenker 10 sek] Forholdet mellom dem er på en måte 2, da*

227 *L: Forholdet mellom.....?*

228 *E: For eksempel det er jo 3 glass appelsin, 5 glass vann. Da vil det være igjen 2 glass vann på en måte da. Det vil det være her og [blanding B]. Så blandinga vil jo være det samme, hvis det er 2 glass igjen…at det skal være ett glass vann til hvert glass appelsin. Så vil det være igjen 2 glass vann her og 2 glass vann her. Så vil du blande det enda mer ut da, så da vil jo smaken bli lik. Mengden til sammen vil være mer*

Her gav eleven en additiv resonnering. Eleven ser at forskjellen mellom antall glass vann og antall glass appelsin er 2 (228) og oppgav det som forholdstallet (226). På ettertesten beholdt eleven denne strategien (se oppgave 1, vedlegg 7.9), men bare for sammenligning av blandingsforholdene (3:5) og (5:7). Selv om forskjellen også var lik mellom antall glass appelsin og vann for forholdene (2:1) og (3:2) argumenterte eleven med en multiplikativ sammenligning der forholdet (2:1) viste halvparten så mye vann som appelsin, mens det er mer enn halvparten så mye vann i blandingen med forholdet (3:2). De to forholdsparene har to ulike nivå. En sammenligning av styrken til (3:5) og (5:7) krever høyere formell operasjon fordi det er ingen heltallsmultippel hverken innenfor eller mellom forholdene. En sammenligning av (2:1) og (3:2) krever lavere formell operasjon, siden dette er ordnede par med to korresponderende termer som er multipler av hverandre (Noelting, 1980). Det var 4 av 29 deltagere som viste tilsvarende multiplikativ sammenligning for forholdene (2:1) og (3:2) og additiv sammenligning for forholdene (3:5) og (5:7), 2 deltagere hadde konsekvent additiv tilnærming for begge forholdsparene og 3 deltagere fokuserte bare på største mengde av én størrelse (del vann, appelsin eller volum) for forholdene (3:5) og (5:7). Dette er eksempel på en sentrering av forholdet og forekommer på intuitivt nivå (Noelting, 1980; Schwartz & Moore, 1998).

4.5.3.3 Utgangsmengder og deres begrensninger ved gitte reaksjons- og blandingsforhold

I oppgave 1 og 2b (se vedlegg ble deltagerne utfordret i situasjoner der komponentene i et reaksjonsforhold eller blandingsforhold ble oppgitt med en utgangsmengde. Forholdet vil dermed begrense hvor mye av utgangsmengdene som kan brukes i reaksjonen eller blandingen. I oppgave 1 er utgangsmengdene til metan og oksygen like (0,75mol for begge), mens forholdet mellom dem er 1:2 i reaksjonsligningen $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$. Følgende dialog med Elev 1 representerer elevenes strategier i starten:

105 *E1: Nei, jeg ser på forholdet mellom metan og karbondioksid, som er en til en og da tenker jeg automatisk at det er likt antall mol, da.*

106 *L: Mm, men hva med forholdet mellom oksygen og karbondioksid, da?*

107 *E1: Det er 2:1. Halvparten da. Fordi oksygen…*

108 *L: Ja, fordi egentlig har man på en måte to stoffer å forholde seg til, da. Så hva tenker du om det at du vet hvor mye du har av hver av reaktantene? Har det noe å si for hvordan du bestemmer produktet?*

109 *E1: Ja for begge to spiller jo inn fordi forholdet er 1 til 2 der og så burde det ikke vært samme antall mol. For forholdet er 1 til 1 og der er den 2 til 1 så det er dobbelt så mange mol der [peker på oksygen] som der [peker på metan]. Ja og siden jeg har*

begge oksygen der, så vil jo da, så det vil være en der og den ene der går dit [peker på O_2 i CO_2], mens den andre går dit [peker på O_2 i H_2O].

……….

129 *E1: At det er 1,5 mol av oksygen siden det er dobbelt antall av mol hvis vi ser på forholdstallet. Så vil det være 0,75 mol av den [peker på metan] og 1,5 mol av oksygen og 0,75 mol av karbondioksid hvis vi ser på forholdstallene.*

Eleven hadde fokus på bare en reaktant (metan) og forholdet 1:1 mellom CH_4 og CO_2 da mengden CO_2 skulle bestemmes (105). Da eleven ble konfrontert med forholdet mellom oksygen og karbondioksid (106) hadde eleven korrekt oppfatning av at mengden karbondioksid var halvparten av oksygen (107), men eleven mente at utgangsmengdene til metan og oksygen ikke burde være like store (109). Derfor multipliseres koeffisienten (del oksygen i reaksjonen) med utgangsmengden (129). Mengden på 1,5 mol oksygen fordeles på to produkter (CO_2 og $2H_2O$) (321). Dersom elevene mangler kjennskap til underliggende konsepter, som manglende kunnskap i kjemi, oppgaven og utilstrekkelig prosessering av informasjon, kan det påvirke elevens proporsjonale resonnering og bidra til at oppgavene gjerne løses på instinkt (Akatugba & Wallace, 2009).

To av elevene endret på et tidspunkt forklaringen sin da de etter hvert oppdaget at de måtte halvere utgangsmengden til oksygen fordi den begrenset mengden av karbondioksid og de overførte denne strategien til nye reaksjoner. For de andre to elevene ble oppgaven aldri løst. For elev 2 virket det som om oppbyggingen av reaksjonsligningen hadde mye å si for løsningsstrategien. Videre følger dialogen med denne eleven med utgangspunkt i reaksjonen $H_2 + I_2 \rightarrow 2HI$, der mengden av HI skulle bestemmes:

198 *E2: Forholdstallet der er 2. Gange begge de to* $[H_2 og\ I_2]$ *med 2 og så plusse dem sammen.*

203 *I: Hvorfor vil du plusse dem sammen?*

204 *E2: Fordi de reagerer med hverandre.*

205 *I: Men her oppe, da med metan og oksygen* [referer til forrige oppgave] *Hvorfor vil du ikke plusse dem sammen der? [eleven tenker] Er det noen forskjell på disse to?*

206 *E2: Det er to på den siden. At det fordeles på to produkter, men her har jeg bare en så alt må gå opp i en (208).*

209 *I: Hvordan ville du tenkt hvis du da hadde 0,80 gram av de to, da.. av hydrogengass og jodgass? At du får oppgitt masse i stedet for mol?*

210 *E2: Da ville jeg kanskje bare plusset dem sammen, ikke ganget med noe forholdstall eller noe for det kan på en måte ikke bli mer gram enn det det allerede er.*

Den additive tilnærmingen med å legge sammen antall mol H_2 og I_2 for å finne mengden HI (198) kan indikere en forståelse for stoffer som kontinuerlig medium i stedet for partikler. Dette stemmer overens med funn hos Nakleh (1992). Eleven velger allikevel å først multiplisere begge reaktantene med forholdstallet 2 istedenfor å bare summere. En mulig årsak kan være en mekanisk prosedyreforståelse for hvordan forholdstallene anvendes i reaksjonsstøkiometri når mol er oppgitt. Proporsjoner løses ofte mekanisk ved hjelp av algoritmiske prosedyrer (Lamon, 2007) og sammenhengene er gjerne basert på puggede matematiske mønstre (Akatugba & Wallace, 1999; 2009). Dersom reaktantene derimot ble oppgitt i gram valgte eleven å ikke bruke forholdstallet fordi det ville gi en større masse for produktet enn utgangsstoffene (310). En reaksjonsligning synliggjør den proporsjonale sammenhengen mellom antall mol av stoffer. Eleven klarer tydelig ikke skille denne fra den ikke-proporsjonale sammenhenger mellom massen til stoffene. Dette samsvarer med Ramful og Narod (2014). Eleven viste tegn på å tolke reaksjonsligningen mer som en matematisk ligning, noe Ramful og Narod (2014) også fant eksempler på i sin studie. Det at *alt må gå opp i en* betyr at A+B=2C i reaksjonen $A + B \rightarrow 2C$. *At det fordeles på to produkter* betyr at $A + 2B = C + 2D$, der A=C og 2B=2D (327).

På oppgave 3a på ettertesten kom det fram flere varianter av en additiv tolkning som kan relateres til matematisk ligning. Deltakerne skulle finne antall mol NH_3 fra 0,75mol av N_2 og H_2 i reaksjonen $N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3$ (se vedlegg 7.9). De korrekte løsninger anvendte tilsvarende strategier som funnet hos Cramer og Post (1993): forholdet som forandringsfaktoren ($0{,}75mol \cdot \frac{2}{3}$) eller med enhetsmetoden ($\frac{0{,}75mol}{3} = 0{,}25 \rightarrow 0{,}25mol \cdot 2 = 0{,}50mol$). To ulike additive strategier ble observert for tre deltagere: en matematisk ligning der x er ukjent mengde produkt $(3 \cdot 0{,}75 + 0{,}75 = 2x)$ eller en summering av antall mol reaktanter etter at molforholdet mellom hver reaktant og produkt $\left(\left(\frac{0{,}75mol}{3} + 0{,}75mol\right) \cdot 2\right)$ var beregnet. Fire deltagere skalerte utgangsmengden med koeffisienten foran H_2 ($0{,}75mol \cdot 3\ H_2$), noe som førte til feilaktig vurdering av begrensende reaktant og dermed feil svar. Det var 7 av 29 som ikke forsøkte denne oppgaven.

Begrensende mengder var også relevant for oppgave 2c (se vedlegg 7.9). Her skulle den maksimale mengden appelsinjuice som kunne lages i forholdet 2:3 mellom appelsin og vann bestemmes med utgangspunkt i 3 glass appelsin og 5 glass vann. Tre ulike tilnærminger ble funnet. Elev 2 forklarte følgende:

267 *E2: Og så har jeg igjen.., hvis jeg blander ett glass appelsinjuice først så har jeg igjen ett glass appelsin og 2 glass vann, men da blir jo ikke forholdet 2:3.*

…..

275 *E2: Jeg kan lage et halvt glass til i hvert fall. Kan jeg ikke det? Ett glass appelsin og to glass vann igjen er 1:2, det blir jo 0,5. 2:3 blir 0,666 et eller annet. Så jeg har igjen det [0,5] og trenger det [0,666].*

Eleven tolket at 2 glass appelsin og 3 glass vann gav ett glass appelsinjuice (267). Dette virket analogt til måten eleven tolket mengden produkt i reaksjonstypen $A + B \rightarrow C$. Eleven registrerte at restene ikke oppfylte kravet til blandingsforhold og gjorde en numerisk sammenligning av kvotienten beregnet fra restene av appelsin og vann og forholdstallet (275). Elev 1 og 4 klarte å løse denne oppgaven, men veien fram var vanskelig og lang. Her kommer utdrag fra siste del av løsningsprosessen til Elev 1:

222 *E1: Nei, da vil jeg få fem glass med juice.*

223 *I: Det kunne man jo gjort. Hadde du hatt muligheten for større blanding? Har du nok til å lage mer?*

224 *E1: ehhh, jeg kunne jo dobla, men mangler ett glass med appelsin hvis jeg hadde tatt fire glass med appelsin og seks glass med vann….men da har jeg ikke….*

230 *E1: Det skal jo sikkert være mulig å ta no sånn halv. To og en halv glass appelsin…[skriver og tenker litt til](232)*

233 *I: [etter 20 sek] Hva tenker du nå?*

234 *E1: Jeg tenker åssen jeg skal bruke det vannet. To til tre, da kan jeg ta…[skriver litt; halverer forholdstallet til 1:1,5] Mmm, så hvis jeg tar tre glass med saft og fire og et halvt glass med vann så vil jo forholdet være to til tre.*

Elev 1 fant først summen av forholdstallene og konkluderte at mengden juice er 5 glass (222). Deretter prøvde eleven seg fram med dobling (224) av forholdet og oppdaget at mengden overskred utgangsmengden. Deretter halverte eleven forholdet (230) og bygde det opp til 3 glass appelsin og 4,5 glass vann. Strategien er velkjent i litteraturen (se for eksempel Booth, 1981; Lamon, 1993, 2007; Kaput & West, 1994).

Elev 4 hadde samme vanskelighetene i starten. Følgende samtale fant sted rett før eleven klarte å løse oppgaven:

68 *E4: Det er noe med forholdet 2:3 som jeg har litt problemer med. Det blir vanskelig å se det for meg.*

71 *L: Hvis forholdet hadde vært 1:4, da?*

72 *E4: Da måtte jeg bare ganget det med fire, tenker jeg. Hvis jeg skulle ha tre glass appelsin, så måtte jeg ganga det med fire, eller blir det gæærnt? Jeg er usikker.*

Elev 4 beskrev at det var vanskelig å se det for seg da forholdet var 2:3 (68). Eleven hadde tidligere foreslått å bruke forholdet som skalar for å finne mengden vann av antall glass appelsin $\left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)$. Forholdet 1:4 hadde derimot eleven ingen problemer med å se (72). Dette var noe som satte eleven på riktig spor. Forholdet 1:4 har heltallsmultippel mellom delene, noe som kan påvirke evnen til å løse oppgaven. Dette samsvarer med funn hos Noelting (1980). Små forskjeller kan også ha stor innvirkning på prestasjon når kjennskapen til forholdet er liten (Heller et al., 1989). Denne oppgaven ble også gitt på ettertesten (se oppgave 2c, vedlegg 7.9). Elevene brukte i mye større grad kombinasjonen av å halvere forholdet $((2:3):2 \to (1:1{,}5))$ og å bygge opp antall glass $(2 + 3 = 5\ og\ 1 + 1{,}5 = 2{,}5)$ eller multipliserte med forholdstallet først, $(3 + 4{,}5)$ $(7\ av\ 29)$. Dette samsvarer med resultatene fra intervjuet. I tillegg ble det funnet ett tilfelle av brøkmetoden $\left(\frac{2}{3} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{3}{4{,}5}\right)$ som forklart i funn av Cramer og Post (1993). Denne strategien medførte ikke nødvendigvis alltid riktig løsning, for eksempel da en additiv justering ble utført for å få riktig forhold $((3:5) \cdot 2 = (6:10) \to 10 - 1 = 9\,;\ (6:9) = (2:3))$. Dette ligner på samme ukorrekte bruk hos Misilidou og Williams (2014) der strategien ble brukt i en oppgave med blandingsforhold for maling. De konkluderte med at strategien ble trigget av vanskelige tallverdier og ukjent kontekst. Et annet forslag var at forholdet først ble doblet, deretter halvert og alle deler summert uavhengig av utgangsmengder $\left((4:6)\ og\ (1:1{,}5)\ gir\ 4 + 6 + 2{,}5 = 12{,}5\right)$. Utenom dette ble både 5 glass eller 1 glass med rest foreslått.

4.5.3.4 Endring av forhold

Dersom forholdet mellom appelsin og vann i en blanding på 64mL skulle endres fra 3:4 til 3:5, som i oppgave 2d (se vedlegg 7.8), klarte alle elevene (elev 2 fikk ikke denne oppgaven) å se at mer appelsin måtte tilsettes. Ingen klarte å regne ut mengden appelsin som måtte tilsettes. Følgende samtale fant sted med Elev 4:

144 *E4: Ok [etter 75 sek] Fordi du begynner med 64mL og da er forholdet 3:5, da har du 24mL appelsin. 24 mL appelsin med 40 mL vann. Så skal vi få det til å bli 3:4. Da må vi ta 24 gange 3/7.*

145 *I: Men hva finner du ved å ta 3/7 av 24 ml appelsin?*

146 *E4: Jeg tenkte jeg skulle finne ut hvor mye appelsin….Nei, kanskje jeg tenkte gæærnt nå? Kanskje jeg heller burde tatt 40 delt på 7.*

……

151 *I: Tenker du at volumet i den blandingen er lik før og etter du har gjort endringen?*

152 *E4: Åhhh, det tenkte jeg ikke på. Nei, det vil den jo ikke være. Det tenkte jeg ikke på en gang. For du må jo tilsette noe mer, så det blir ikke 64 men 64 pluss et eller annet. Hvordan regner jeg ut det da?*

Eleven tok utgangspunkt i «del-hele» brøken til det nye forholdet, og brukte denne som operator for å finne mengden appelsin. Eleven var derimot usikker på hva man skulle ta brøkdelen av (144-146). Eleven tenkte tilbake til oppgave 2c der han fant mengden appelsin og vann i 64mL (144). Her hadde eleven brukt «del-hele» strategi. Dette kan ha bidratt til overføring av tilsvarende resonnering med å bruke det nye forholdet som «del-hele». Denne analogien virket å være preget av overfladiske kjennetegn i oppgavestruktur fordi selv om eleven vet at appelsin skal tilsettes blandingen, blir dette oversett. Eleven har ikke identifisert den multiplikative sammenhengen mellom størrelsene i den nye blandingen. Hint om innhold kan trigge minner som ikke er perfekt korrelert med underliggende strukturer (Bassok & Holyoak, 1989). Da eleven ble bedt om å tenke over volumendringen forsøkte eleven å løse oppgaven algebraisk ved å innføre x. Eleven beskrev x som *pluss et eller annet* (152). Eleven hadde derimot ingen algoritme for å løse problemet. Eleven så ikke muligheten for å kunne bruke det konstante innholdet av vann i blandingen som utgangspunkt for en sofistikert, intuitiv strategi. Måten elevene løste oppgaven på i intervjuet bekreftet strategien flest deltagere valgte på kartleggingstesten i matematikk (se oppgave 8, vedlegg 7.6) der forholdene før og etter ble omgjort til «del-hele» for deretter å ta brøkdelen av samme volumet. Differansen gav tilsettingen av mengde appelsin. Denne oppgaven ble derfor ikke gitt på ettertesten.

4.5.4 Ekstensive vs intensive størrelser

For å løse oppgavene i intervjuet var elevene avhengige av å anvende sin kunnskap om og forståelse for intensive størrelser. I kjemi vil dette omfatte størrelser som molmasse (g/mol) og molar konsentrasjon (mol/L). I appelsinblandingen vil den intensive størrelsen være brøken «del-hele» som beskriver andelen appelsin i blandingen.

4.5.4.1 Den intensive størrelsen molmasse, g/mol

I starten av oppgave 1 (se vedlegg 7.8) skulle elevene omgjøre masse til mol. Tre av elevene uttrykte utfordringen med dette slik som elev 1:

78 *E1: Jeg surrer alltid om det er molar masse delt på masse eller om det er masse delt på molar masse.*
79 *I: Åja, på formelen tenker du på? Har du noe knep for deg selv til å finne det ut?*
80 *E1: Nei, det er bare. Jeg prøver å huske. Jeg husker at det…*
…….
88 *E1: Så jeg deler gram på gram per mol så vil jeg stryke g på g, så sitter jeg igjen med mol.*

Eleven opplevde det vanskelig å vite om molar masse (g/mol) skulle divideres på masse (g) eller omvendt (78) og at dette bare var noe man prøvde å huske (80). På spørsmål om hva molar masse er, representerte Elev 1 og Elev 4 to forklaringer:

52 *E2: At per mol hydrogen så veier på en måte, stoffet veier en gram.*
217 *E4: Jeg tenker egentlig bare at det er den oppgitt verdien fra der [ser opp på periodesystemet] jeg må bruke for å finne mol og gram*

Elev 1 svarte på en måte som minner om det Johnson (2015) kaller en diskret («chunky») oppfatning av rate, i dette tilfellet massen av hydrogen per molenhet (52). For Elev 4 er molmasse en verdi fra periodesystemet (217). Den relasjonelle sammenhengen mellom masse og mol forsvinner i forklaringen til Elev 4. Kanskje kan dette bidra til en oppfattelse av størrelsen som ekstensiv. Forskning viser at elever ofte behandler intensive størrelser som ekstensive, ofte fordi vi omgir oss med intensive størrelser der brøken forenkles ved å oppgi størrelsene per enhet (Nunes & Bryant, 2008). I undervisning er man ofte opptatt av at elevene må bruke enhetene som utgangspunkt for å bestemme riktig regneoperasjon. Dette fraråder Thompson (1994). Metoden blir instrumentell og svikter forståelsen for rate. Dersom elevene er svake i brøk og forkorting kan det også kanskje være vanskelig å se hva enheten vil bli ved divisjon med en intensiv størrelse. Elev 1 forklarte hvordan man kunne forkorte gram på gram per mol (88) og viste $\frac{\cancel{g}}{\frac{\cancel{g}}{mol}} = mol$. Siden eleven brukte enheten som utgangspunkt for å se *om man sitter igjen med mol* (88), er det samtidig vanskelig å forstå at eleven sliter med å vite hva som skal deles på hva (78). Kanskje kan svak brøkforståelse hos eleven gjøre det vanskelig å se forskjellen på to divisjoner med intensiv størrelse, $\frac{\frac{\cancel{g}}{mol}}{\cancel{g}} = mol$ og $\frac{\cancel{g}}{\frac{\cancel{g}}{mol}} = mol$. Dermed blir det også vanskelig å vite hva som skal deles på hva. En vag forståelse for hvordan molar masse beskriver sammenhengen mellom de ekstensive størrelsene i et problem gjør kanskje elevene mer avhengige av en instrumentell formelbruk.

Elev 2 brukte molmasse for å forklare hva mol per liter var:

334 *E2: Det er jo molmasse bare man har gjort om gram til liter. Vent, mol per gram…Mol per gram, nei det er molar massen, er det ikke det?*
335 *I: Gram per mol, tenker du på?*
336 *E2: Ja*

For elev 2 fikk man molmassen ved å bytte ut liter i mol/L med gram (334). Det kan virke som eleven var usikker på om molmasse oppgis som mol/g eller g/mol.

Det kan ofte være vanskelig å avsløre slike problemer med intensive størrelser fordi elevene i mange tilfeller klarer å bruke dem riktig når de har øvd på slike oppgaver. I prøvesituasjoner kan feilene derfor virke tilfeldige. Ofte kan elevene svare riktig, men ha tenkt feil. Elev 1 forklarte sin oppfattelse av molar masse når antall mol i 0,80g jodgass skulle sammenlignes med antall mol i 0,80g hydrogengass:

164 *I: Er antall mol hydrogengass og antall mol jodgass likt?*
165 *E1: Nei, fordi de har jo forskjellig molar masse.*
169 *E1: Ehh, joden har minst masse fordi hydrogen er atom nummer en, og hvis jeg skulle finne molar masse ville jeg tatt 0,8 og delt på 2, da siden det er to hydrogen og det vil jo bli 0,40 gram per mol, mens jod er jo større atom så den vil få lavere molar masse, da og da lavere mol. Så det vil jo da være mere mol av hydrogengassen enn jodgassen.*

Elev 1 konkluderte helt riktig at jodgass ville inneholde færre mol enn hydrogengass (169) fordi de har forskjellig molar masse (165).

Eleven tenkte $\frac{0,8g}{2mol} = 0,40\frac{g}{mol}$, men det riktige er $\frac{0,8g}{2\frac{g}{mol}} = 0,40\ mol$. Riktige tall ble dividert på hverandre, men argumentasjonen avslørte at eleven hadde vansker med å skille mellom oppgitte masser og molmasse og at molmassen der og da ble forvekslet med antall mol.

På ettertesten ble elevene spurt om å forklare den intensive størrelsen g/mol (se oppgave 4a, i vedlegg 7.9). Som i intervjuet forklarte de fleste deltagerne (19 av 29) størrelsen med en beskrivelse av enheten, f.eks. «antall gram per mol». Dette avslører lite om forståelsen for enheten. Tre ulike tolkninger ble derimot funnet hos 8 deltagere. Noen refererte til atomvekt eller molekylvekt og at molmasse dermed ble vekten til denne atom- eller molekylenheten. Dette samsvarer med funn av Furio et al. (2002) der studenter ikke skilte mellom molmasse (g/mol) og atommasse (u). Et par beskrev enheten som «hvor mange mol et gram av stoffet utgjør». Disse har snudd enheten til mol/g. Dette var gjenkjennbart fra intervjuet med Elev 2. Et par gav uttrykk for en usikkerhet omkring to typer masse. De beskrev molmasse som «den massen 1g av et molekyl veier». Det virker som flere har vansker med å konstruere en referanseenhet eller «den hele». I følge Lamon (1994) er dette viktig for å utvikle matematiske ideer i tillegg til å kunne bruke denne til å tolke situasjonene på nytt.

4.5.4.2 Brøken «del-hele» som intensiv størrelse i en appelsinjuiceblanding

I oppgavene med appelsinjuice var kanskje ikke den sammensatte størrelsen like tydelig for elevene fordi den ble symbolisert som en brøk uten enheter. «Del-hele» brøken gir konsentrasjonen av appelsin i blandingen. På spørsmål om hva appelsinsmak er og hva det betyr å ha mest appelsinsmak svarte Elev 3 følgende:

31 *E3: Da har du mer appelsin i forhold til….eller, en høyere konsentrasjon av appelsin, da i forhold til vann. Flere deler av hele blandingen er appelsin.*

Elevene var inkonsekvente ved definisjonen av appelsinsmak. Samtidig var elevene bevisst at dette dreide seg om en sammenheng mellom appelsin og vann i en blanding. Men de kunne veksle mellom å kalle appelsinsmak for forholdet mellom appelsin og vann eller andel appelsin i den totale blandingen. Elev 3 har begge tolkningene i samme utsagn (31), men det interessante er måten eleven bruker begrepet *konsentrasjon* på. Konsentrasjon er en intensiv størrelse og appelsinsmak blir da konsentrasjonen av appelsin i en blanding. Men det at eleven formulerer appelsinsmak som *konsentrasjon av appelsin, da i forhold til vann*, gir inntrykk av å tenke på konsentrasjon av appelsin som delen appelsin.

Da elevene skulle bruke «del-hele» brøken til å finne ny appelsinjuicekonsentrasjon i en blanding fra to ulike juiceblandinger i oppgave 2c (se vedlegg 7.8) forklarte Elev 2 og Elev 3 hvordan de ville gjennomføre utregningene ved å finne mengden appelsin og vann i begge blandingene og dividere dem på hverandre, men klarte ikke gjøre beregningene. Litt overraskende var det at Elev 2, som i utgangspunktet hadde en oppfatning om at konsentrasjonen var lik i de to blandingene, allikevel prøvde å tenke ut en måte å regne ny konsentrasjon i stedet for å konkludere med at den må bli lik. Elev 1 og Elev 4 forsøkte å regne ut den nye appelsinjuicekonsentrasjonen. Følgende utdrag viser Elev 1 sitt første forsøk på å løse oppgaven:

290 *I: Hvor mye appelsin er det du egentlig får i den blandingen?*
291 *E1: [etter 30 sek] Hvis 24 er hele så har jeg 9/24, så har jeg 10/24 [noterer] Det høres litt mye ut.*
292 *I: 19/24? Ja du tenker tilbake til det du gjorde tidligere?*
……
298 *I: Men hvis du tar ut 64 mL av A. Hva har du bestemt er konsentrasjonen til appelsinjuice i A?*
299 *E1: 3/8*
300 *I: Ok, så hvor mye appelsin vil det være i 64 mL?*
301 *E1: 3/8 delt på 0,64 liter, for da vil det her være…?*

På spørsmål om hvor mye appelsin som er i blandingen (290) oppgav eleven konsentrasjonen av appelsinjuicen etter å ha funnet fellesnevner ($\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ og $\frac{5}{12} = \frac{10}{24}$) (291) og fikk dette til å bli 19/24. Eleven tok ikke hensyn til at volum av de to blandingene var forskjellig. På spørsmål om hva konsentrasjonen til appelsinjuice var (298) svarte eleven 3/8, som i utgangspunktet er riktig, men da eleven skulle finne mengde appelsin i 64 mL, ble konsentrasjonen dividert på volum (301). Dette gav inntrykk av at mengden appelsin og konsentrasjonen av juicen var det samme, noe som svaret 19/24 gir et inntrykk av (292). Det at elever behandler intensive størrelser som om de var ekstensive er rapportert av blant annet Booth (1981) og Nunes og Bryant (2008). Det er viktig at elevene ser forskjellen på størrelsene, om det er mengde eller andel, med tanke på hvordan man opererer på dem (Nunes & Bryant, 2008). For eksempel vil mengden appelsin dobles dersom man blander to like volum med appelsinjuice med samme konsentrasjon. Dette er en additiv operasjon. Men andelen appelsin er den samme som før de ble blandet.

Følgende utdrag viser elev 4 sitt første forsøk på å løse oppgaven:

121 *E4: Det er det kanskje…ehh, ja det er det kanskje, 64 delt på 8….jeg får jo ikke…svaret blir jo ikke….svaret blir jo ikke akkurat noe konsentrasjon, blir det det? Jeg fikk liksom 39, jeg…,jeg vet ikke helt…*

122 *I: 39, ja? Hva er det for noe?*

123 *E4: Jeg lurer litt på om det er….., jeg vet ikke.*

Eleven hadde regnet ut del appelsin for begge blandingene, summert dem sammen og fått tallet 39 (121), men var allikevel usikker på hva tallet var (123). Eleven kom etter hvert på at vann var en del av blandingen og klarte tilslutt å regne konsentrasjonen.

Ettertesten bekreftet mye av det som kom fram i intervjuet. Deltagerne som klarte oppgaven (6 av 29) var delt. Noen oppgav konsentrasjonen som andel appelsin av hele blandingen, andre som forholdet mellom appelsin og vann. Elevene var dermed forskjellige i måten de oppfattet konsentrasjon på, enten som intensiv og dermed mer kontinuerlig størrelse eller som en mer diskret sammenligning av to ekstensive størrelser. Dette samsvarer med oppfatninger av rate funnet i studier av Thompson (1994) og Johnson (2015). Det var mange som ikke forsøkte oppgaven (9 av 29). De som ikke fikk til å løse oppgave korrekt tolket forholdet som «del-hele» ved å regne andel appelsin fra 3/5 av 64mL i stedet for 3/8 av 64mL, brukte formler fra kjemi eller hadde alternative utregninger med forholdet uavhengig av de oppgitte volumene som for eksempel å summere «del-del» i begge forhold eller å multiplisere begge forholdstall.

4.5.4.3 Den intensive størrelsen molar konsentrasjon, mol/L

Selv om Elev 4 hadde vansker med å tolke «del-hele» som en konsentrasjon av appelsinjuice var det imidlertid ganske uproblematisk å sammenligne konsentrasjoner og antall mol i beholdere med gitte volum av ulike løsninger (se oppgave 3a og 3b i vedlegg 7.8). De tre andre elevene hadde derimot litt alternative argumenter, og dette kunne gjerne endre seg fra om volumet av løsningene var like eller forskjellige. Elev 1 og 3 beskrev sammenhengene mellom konsentrasjon, antall mol og volum for to løsninger med samme volum i oppgave 3a:

352 *E1: I hvertfall konsentrasjonen av de er lik. Ehh, antall mol… for hvis det er like mye av begge to så vil vi jo kunne dele på likt antall liter og da vil jeg få likt antall mol av hver av løsningene i eller av hver av stoffene, da i løsningen. De vil ikke ha samme molar masse, siden de er forskjellige stoffer.*

143 *E3: At stoffmengden er høyere i eddiksyre og lut fordi…ehm…de har jo…ehm…flere mol per liter enn saltsyre [ler] eller nei, det blir feil å si for det er jo, eller ja, men…,ja…men…, ja.*

Elev 1 sammenlignet to løsninger med samme konsentrasjon og siden volum var likt var også antall mol likt siden løsningene *deles på likt antall liter* (352). Elev 3 sammenlignet to løsninger med ulik konsentrasjon og konkluderte med at beholderne med mer mol *(stoffmengden er høyere*) er de som har *flere mol per liter*. I utgangspunktet var konklusjonen riktig for like volum, men begrunnelsen gav inntrykk av at elevene ikke oppfattet løsningens konsentrasjon som en sammensatt størrelse, men behandlet den som en ekstensiv størrelse. Dette inntrykket forsterket seg da elevene skulle sammenligne to beholdere med lik konsentrasjon, men ulikt volum (se oppgave 3b, vedlegg 7.8):

368 *E1: Volumet er større der [venstre beholder] enn i midten. Konsentrasjonen er lik men det kan se ut som det er mindre der enn der.*

369 *I: Ja, for det ser jo ut som volumet er mindre på den første [venstre] enn den andre?*

370 *E1: Jaaæ [nøler] For jeg tenkte at du har en flaske og det er like mye vann i begge så skviser du den sammen så det blir mindre så vil jo vannet gå oppover ……*

373 *I: Hva tenker du om antall mol, da i hver av de tre beholderne?*

374 *E1: Siden volumet er mindre der [venstre] så vil jo antall mol være større i den første enn i den andre for når volumet er større, så når vi deler på den så vil vi få et lavere tall der enn i den første.*

Elev 1 pekte ut beholderen med den minst skraverte mengden av løsning og sa den hadde større volum enn løsningen med dobbelt så stort skravert område (368). Det syntes jeg var rart og kan i intervjuet ha påvirket eleven til å mene noe annet ved å si at volumet ser mindre ut i den beholderen (369). Svaret eleven gav i linje 370 tydet på at eleven tenkte at grunnen til forskjellen i høyde på de to løsningene med lik konsentrasjon var at volumet av selve beholderne var ulike (i den betydning at grunnflaten er ulik). Da eleven sa at *konsentrasjonen* *er lik men det kan se ut som det er mindre der enn der* (368), kan eleven ha sett for seg at lik konsentrasjon burde ha samme høyde markert på søylen. Et større volum (egentlig grunnflate) på beholderen betyr dermed at høyden på løsningen blir lavere. Etter en avklaring om at skravert område i beholder representerte volum av løsningen, mente eleven at større volum vil gi mindre mol fordi vi deler på et større tall (374). Elev 3 hadde følgende løsning på oppgaven:

151 *E3: Siden det er mindre volum av den første, så vil den ha…, eller hvis jeg tenker at det er 1 liter her da så vil det være 0,15 mol på den literen, men da er det 2 liter i den andre så vil det være halvparten så mye mol.*

155 *E3: Men det…vent da…mol per liter…2 liter så…ja, men det virker jo ikke helt logisk da.*

156 *I: Ok, hvorfor virker det ikke logisk?*

157 *E3: For det virker jo mer logisk…., men det er jo en konsentrasjon da så, ja, nei, vi sier det.*

158 *I: Men det var et eller annet som fikk deg til å tvile? Det ble jeg litt nysgjerrig på, hvorfor du begynte å tvile? Når du sa at dette virker ikke logisk.*

159 *E3: Nei, fordi du har jo et større volum, altså med konsentrasjon og da tenker jeg at da er det flere mol der hvor det er et større volum.*

160 *I: Så hva var det som gjorde at du tenkte det måtte være halvparten?*

161 *E3: Nei, da tenkte jeg at du delte….for..at du delte på 2 liter, da, sånn at du tok 0,15 delt på 2 og i den andre 0,15 delt på 1.*

Eleven sammenlignet mol per enhet av volum. Dette er lignende strategi vist hos Johnson (2015) for elever med en «chunky» og diskret oppfatning av rate. Istedenfor å tolke sammenhengen som proporsjonal mellom disse, foretok eleven en omvendt proporsjonal tolkning der dobling av volum gav halvering av antall mol (151). Dette virket å komme i konflikt med en intuisjon eleven hadde om en proporsjonal sammenheng (155-159). Løsningen kunne lett blitt funnet fra en «bygge opp» metode. I stedet valgte eleven å dividere konsentrasjonen med antall liter (161). Måten eleven gjorde dette på virket heller som at 0,15 mol/L ble tolket som at 0,15 mol skal fordeles på antall liter enn en tolkning av størrelsene som omvendt proporsjonale.

Elev 2 hadde en annerledes måte å tenke sammenhengen mellom konsentrasjon, volum og mol. Sammenhengen avhengte av om løsningen inneholdt like eller ulike stoffer. Følgende forklaring ble gitt da elev 2 sammenlignet to beholdere med lik konsentrasjon av saltsyreløsning

(HCl) der midterste beholder inneholdt dobbelt så stort volum som venstre beholder (se oppgave 3b, vedlegg 7.8):

368 *E2: Ja, fordi for å få 0,15 mol her så må du blande ut mer enn det du trenger her, så det betyr at det må være mindre HCl her enn her. For volumet er ikke likt.*

…

374 *E2: Konsentrasjonen er jo lik for det er blitt blandet ut lik at, eller det er blitt blandet ut med likt forholdstall.*

375 *L: Hva tenker du da om antall mol HCl i de to?*

376 *E: At antall mol er forskjellig. Ja, at det er mer mol i den [midten] enn det er i den [venstre] (378).*

Eleven konkluderte riktig om antall mol dersom løsningene inneholdt samme stoff (376). Det virket som eleven sammenlignet de to ekstensive størrelsene hver for seg, dvs. et fokus på «del-del» og dermed forholdet mellom vann og antall mol stoff (374). På en måte kan det forklares med en bygge opp metode. Da eleven skulle sammenligne antall mol i to løsninger med ulike stoffer med forskjellig konsentrasjon og volum, brukte eleven samme tankegang:

405 *E2: Ja, siden konsentrasjonen er så høy med så lite volum [venstre beholder med lavest volum], så er det sikkert… Det er mindre vann og så… Siden den [midterste beholder] trengte så mye vann, for eksempel da, så er det mer HCl her enn der. Og siden den [høyre beholder med størst volum] trenger så mye vann så er det sikkert mer [mol], det spørs jo egentlig litt også da, på molmassen?*

406 *I: Ja for hvilken sammenheng tenker du det er mellom konsentrasjon og volum her?*

407 *E2: Aner ikke…*

408 *I: Tenker du at volumet har noe å si for hvor mye mol som er i de forskjellige løsningene. Har volumet noe betydning for det?*

409 *E2: Det spørs jo hva forholdstallet er da. Det trenger jo ikke ha det. Du kan jo få 0.05 mol uten at du trenger så mye volum, liksom. Du kan bare ta mindre av det. Da får du også mindre vann fordi forholdet må være likt hele tida. Så hvis forholdet skal være sånn her er det bare å ta mindre av hver ting. I stedet for 5 ml kan du bare ta 1 ml, men da må du ta 5ml mindre på vann. For eksempel. Jeg tror ikke volumet har noe å si på det.*

Beholderen med lavest volum og beholderen med høyest volum inneholder like antall mol, men eleven konkluderte med at beholderen med høyest volum inneholdt mest mol (405). Elevens fokus på vannmengdens betydning for antall mol bidro til ignorering av den lavere størrelsen på konsentrasjonen. Dette kan være eksempel på en sentrering av fokuset på en størrelse i forholdet sett hos Noelting (1980). Eleven mente også at molmassen spilte en rolle for mengden mol (405). Det var derfor vanskelig å beregne. I tillegg avslørte eleven en additiv tilnærming til hvordan de ekstensive størrelsene kunne endres for å beholde konstant konsentrasjon, ved å forslå at en minking fra 5mL til 1mL på en del kunne kompenseres ved å ta 5mL mindre av en annen ting (409). Eleven ante ikke sammenhengen mellom konsentrasjon og volum (406-407) og trodde ikke volum hadde noe å si for antall mol i en løsning (409) fordi du bare øker tilsvarende mengde mol. Fokuset er tydeligvis på et sammenlignende nivå framfor et koordinerende nivå som beskrevet i Johnson (2015). Fra beskrivelser av Thompson (1994) kan dette tilsvare en internalisert oppfatning av rate. Kaput og West (1994) forklarte dette som å se på rate stykkevis og ikke homogent.

Underveis har elevenes tolkninger av et blandingsforhold gitt inntrykk av en usikkerhet omkring andel vann og total løsning. På ettertesten ble deltagerne bedt om å velge riktig svaralternativ for bestanddelene i en blanding med gitt konsentrasjon (se oppgave 4d, vedlegg 7.9). Hensikten var å undersøke om elevene tolket konsentrasjonen 0,75 mol/L HCl som for eksempel at 3 mol HCl er blandet i en løsning med volum 4L eller at 3 mol HCl er blandet med 4L vann. Av 29 var 10 deltagere konsekvente med å velge alternativer som oppgav konsentrasjonen ut fra totalt volum $\left(\frac{3mol\ HCl}{4L\ løsning}\right)$. Seks deltagere var derimot konsekvente med å velge konsentrasjon som et forhold mellom antall mol og antall liter vann $\left(\frac{3mol\ HCl}{4L\ vann}\right)$, mens fem deltagere så ingen forskjell mellom disse to tolkningene.

På ettertesten skulle deltagerne også sammenligne og regne med konsentrasjoner av løsninger i ulike beholdere og hastigheten til tre løpere (se oppgave 6a og 6b, i vedlegg 7.9). Omtrent ingen forsøkte å gjøre andre sammenligninger enn å skrive ned opplysningene om hastighet eller konsentrasjon. Av de som forsøkte en sammenligning, bestod den mest i å bruke sammenligningsordene «mer» eller «mindre» om konsentrasjon eller hastighet. Bare for sammenligningen mellom løper A og B i oppgave 6b hadde sammenligningen ofte en multiplikativ form, der B brukte dobbelt så lang tid som A. Ved beregning av ekstensive størrelser som antall mol og tid, klarte henholdsvis 17 og 13 av 29 dette, men bare syv klarte begge. Av de resterende var det flest som gjorde et forsøk på å regne tidsbruken til løperne. De feilene som ble observert var at tiden ble regnet ved å dividere eller multiplisere hastighet med avstand i km eller de dividerte hastigheten med 60 min. Det var en deltager som dividerte konsentrasjonen med volum for å finne antall mol. Problemet med denne oppgaven lå gjerne i kombinasjonen av løsningens volum som «del-hele» av beholderen og som størrelsen i antall liter som skal multipliseres med konsentrasjonen for å finne antall mol. Beholderen er 3L, men deltageren tolket volumet lik brøkdelen av en hel. I stedet for at volum var 1/3 av 3L, ble det regnet som 1/3 L og 2/3L helt til løsningen fylte beholderen. Da uteble brøkdelen og volumet ble 3L i stedet for 3/3 L.

5 DISKUSJON OG KONKLUSJON

Jeg har valgt en åpen tilnærming til datamaterialet for å danne et helhetlig bilde av elevenes vansker med oppgaveløsning i ulike kontekster. Fokuset har vært på gruppen og mindre på enkeltelever for å avdekke ulike tolkninger og løsningsstrategier på ulike problemer. Et mer individfokus kunne i større grad undersøkt konsistens i valg av strategier og tolkninger. Det ble gjort et forsøk på å lete etter ulike profiler i forbindelse med elevenes proporsjonale resonnering i intervju og på ettertest. Det viste seg å være vanskelig å avdekke noen fellestrekk hos grupper av elever som var konsistente på tvers av oppgavene. Studier innenfor proporsjonal og multiplikativ resonnering har vist seg å gi ulike resultater nettopp fordi elever kan ha med seg sin intuitive strategi samtidig som de kan anvende en mer formell metode så fort de blir klar over at den eksisterer og er relevant (Booth, 1981). De kan derfor raskt endre strategi dersom de får hint eller instruksjon som leder dem i nye retninger.

5.1 Kjennetegn på ikke-korrekte løsningsmetoder på testoppgaver

Kartleggingstesten (se vedlegg 7.6) i matematikk som elevene gjennomførte høsten 2017 ble laget på bakgrunn av teori om hvilke temaer i matematikk som bidro til relevant og viktig kunnskap for suksess i kjemifaget (se vedlegg 7.2). I litteraturen som har vært gjennomgått har det vært bred enighet om at ferdigheter og kunnskap innenfor områder som regnerekkefølge, potensregler, omgjøring av enheter og fortegnsregler, om sammenhenger innenfor brøk, desimaltall og prosent, om sammenhenger mellom logaritmer og tall på standardform og forståelse for forhold, proporsjoner, grafiske framstillinger og algebraiske ligninger er viktig for suksess i kjemi (Denny, 1971; Perkins, 1978; Weisman, 1981). Disse studiene har også avdekket at mange studenter mangler slik ferdighet og kunnskap for å løse problemer innenfor disse temaene. Dette stemmer også for elevene i min undersøkelse. Oppgavene som lå på en vanskegrad mellom 30% og 70% (se Tabell 5 og Tabell 9) omhandlet problemstillinger innenfor forhold, logaritmer, graf, prosent, omgjøring av enheter og sammenhengen mellom standardform, brøk og desimaltall. Oppgaver som undersøkte ferdigheter med regnerekkefølge, multiplikasjon og divisjon av ekte brøker, multiplikasjon og divisjon av potenstall med samme grunntall og omforming av formler der to størrelser er proporsjonale viste seg å være enkle oppgaver (oppgave 1a, b, c, 2a, 2c, 9b). Scott (2012) mente årsaken til feilene på de enkleste oppgavene i sin undersøkelse skyldtes aritmetiske regnefeil og slurv. Dette stemmer også med funn i min studie. Typiske feil kunne være at elevene multipliserte eller dividerte feil. Men kanskje kan slurvefeil være tegn på lite effektive regnestrategier, som igjen muligens gjenspeiler manglende forståelse for størrelsene som inngår. For eksempel forkortet ikke elevene brøkene i oppgave 1b og 1c først, noe som førte til store tall de regnet feil med. Brøk med enten tall på standardform eller rasjonal brøk ble da mye vanskeligere å løse. Ved regning med tall på standardform valgte mange tidlig å gjøre om tallene på desimalform (ofte feil), noe som kompliserte videre utregning (se kapittel 4.4.5). Strategiene bar også preg av ulovlige forkortinger (se kapittel 4.4.12). Dette samsvarer med funn av Leopold og Edgar (2008). En sammenblanding av brøk- og potensregning ble også oppdaget. Brøkstreken fungerte som minustegn, noe som virket som en sammenblanding med potensregler der eksponenten i teller trekkes fra eksponenten i nevner. Ved addisjon av to tall på standardform (med negativ eksponent) løste elevene gjerne dette med å addere eksponentene, og skilte dermed ikke addering fra multiplisering av potenstall. Dette tydet på en manglende forståelse for sammenhengen mellom tall på standardform med negativ eksponent, brøk og desimaltall, noe som er viktig for å forstå størrelsene de regner med i kjemi. Dette ble dermed også et problem for logaritmeregningen der mange delvis korrekte svar kom av feil overganger mellom desimaltall og potenstall. Leopold og Edgar (2008) avdekket i sin studie at mange studenter tolket logaritme som kvadratrot. I min studie kunne det virke som flere elever tolket logaritmen som en divisjon med tallet 10 (se kapittel 4.4.6). Sammenligning av vanskegraden for de analoge oppgavene på kartleggingstesten og prøvene i kjemi viste et skille mellom disse kontekstene når det gjaldt emnet logaritmer. Elevene hadde en signifikant forskjell i prestasjon på logaritmeoppgavene med og uten kjemikontekst, der prestasjon var bedre i kjemi enn i matematikk (se Tabell 4 og Tabell 8). Dette vil bli nærmere diskutert i kapittel 5.2. Leopold og Edgar (2008) oppdaget at studentene slet med å trekke ut kvantitativ informasjon fra eksponentielle og logaritmiske grafer. I min studie tolket flere elever sammenhengen mellom pH og konsentrasjonen til en sterk syre,$[H^+]$, (gitt ved $pH = -\log[H^+]$) grafisk som en titreringskurve (sigmoid kurve) eller rett linje. I kjemikontekst tolket flere elever riktig de grafiske framstillingene der konsentrasjonen endret seg over tid enn der hastigheten endret seg over tid, men tolkningen av endring i konsentrasjon virket å være påvirket av tolkningen av reaksjonsligning (se kapittel 4.4.9). Kilner (2014) avdekket spesielt store problemer med forhold og proporsjoner hos studenter i kjemi. Min studie samsvarer med dette. Allerede på kartleggingstesten i matematikk viste det seg at selv elever med høy gjennomsnittsscore hadde vansker med oppgaver med forhold og intensive størrelser, og løsningsstrategier på oppgaver i kjemi gjennom året, intervju og ettertest bekreftet dette. Vansker med forhold og intensive størrelser påvirker evnen til proporsjonal resonnering, og dette kan også påvirke elevenes forståelse for brøk, tall på standardform og desimaltall. I tillegg vil det kunne påvirke hvordan eleven oppfatter sammenhengen mellom størrelser, noe som også påvirker tolkning og skissering av grafiske framstillinger. Selv om jeg fram til nå har sett på vansker elevene har vist innenfor separate, matematiske temaer, kan det virke som flere av dem kanskje har opphav i elevenes proporsjonale resonnering. Dette vil bli diskutert nærmere i kapittel 5.3.

5.2 Sammenligning av suksess på oppgaver med og uten kjemikontekst

Forskning viser at studenter med bakgrunn fra matematikk på høyt nivå og som har en snever algoritmisk tilnærming til å løse matematiske problemer, sliter med å overføre kunnskapen sin til kjemiske kontekster (Grove, 2014; Scott, 2012). Tilsvarende funn er også gjort for overføring til fysikk (Akatugba & Wallace, 2009). Omtrent ¼ av studentene som var med i prosjektet HEA STEM rapporterte at de alltid eller vanligvis opplevde matematikk som vanskelig og at de presterte dårligere på oppgaver i kjemi som krevde matematikk (Shallcross & Yates, 2014). En av grunnene til det kan være at studentene ikke øver opp forståelse for de matematiske ideene som ligger til grunn for deres praksis (Akatugba & Wallace, 2009; Grove, 2014). Ut fra dette skulle man forvente at prestasjonen på oppgaver vil være høyere uten kjemikontekst. Samtidig er matematikken i kjemifaget et område elevene ble kjent med i tidlig ungdomsskole. Det var lenge siden de hadde løst tilsvarende oppgaver som på kartleggingstesten i matematikk, spesielt innenfor forhold og intensive størrelser med omgjøring av enheter. Shallcross og Yates (2014) rapporterte dette som en av hovedårsakene studentene oppgav på hvorfor matematikken var vanskelig. At det har gått lang tid siden kunnskap har vært anvendt kan bety at eleven bare trenger oppfriskning i grunnleggende matematikkferdigheter. Men det at man ikke husker kan også kjennetegnes av at kunnskapen er instrumentell og har vanskeligheter med å forstå forhold og hvordan en kjent matematisk ferdighet kan øves inn i en ny type utregning (Kilner, 2014). I såfall kan man kanskje like gjerne forvente at flere oppgaver ville vist en forskjell i prestasjon i favør av kjemikontekst pga. effekten av den undervisningen de har hatt underveis. McNemar test viste derimot at de fleste oppgavene ikke hadde noen signifikant forskjell i prestasjon på oppgavene med og uten kjemikontekst ($p < 0{,}05$). Scott (2012) konkluderte det samme i sin studie. Allikevel var det noen forskjeller i min studie sammenlignet med det Scott (2012) fant, noe som kan skyldes at jeg hadde flere oppgaver. Generelt oppdaget Scott (2012) at selv om studentene gjorde det bedre i matematikk enn i kjemi, var løsningsstrategiene i matematikk mer instrumentelle og like og oppgavene bar preg av å være løst enten korrekt eller ikke korrekt. I kjemi var det derimot større variasjon i bruk av strategier, noe som gav inntrykk av mer forståelse. I min undersøkelse virket det å være motsatt. Strategiene i kjemi var mer lærte og flere elever valgte enten prøve å løse oppgaven eller la være. På matematikkoppgavene var det flere forskjellige eksempler på løsningsstrategier og få av dem bar preg av å være innlærte instrumentelle og formelle metoder.

Siden testen peker ut noen oppgaver som viser en signifikant forskjell i prestasjon, kan det være interessant å se nærmere på noen av disse. Oppgavene som diskuteres videre gjelder oppgaver fra kartleggingstesten gitt i vedlegg 7.6 og analoge kjemioppgaver (An) gitt i vedlegg 7.7. Oppgavene (3a, $An3a_1$), (3a, $An3a_2$) og (3c, An3c) omhandler logaritmeregning. På kartleggingstesten krevde oppgaven at elevene visste hva logaritmeoperasjonen innebar og kunne se sammenhengen mellom desimaltall, potenstall og tall på standardform. I kjemikontekst krever oppgaven i tillegg at eleven vet at $pH = -\log\{[H_3O^+]\}$ og at HCl er en sterk syre. Disse oppgavene presterte elevene bedre i kjemikontekst enn uten. Grunnen til dette kan være en kombinasjon av effekten av opplæringen i forkant av prøvene og at pH-beregninger for sterke syrer er enkle oppgaver som krever få løsningstrinn. En sammenligning av elevenes prestasjon på $An3a_1$ (p = 0,673) og $An3a_2$ (p = 0,898) viser at den har økt. Oppgavene ble løst med en måneds mellomrom, noe som gir mulighet for at flere elever har tilegnet seg ny kunnskap. Men elevene hadde også tilgang på kalkulator i oppgave $An3a_2$, noe som senker kravene til hva elevene må kunne for å løse oppgaven. Med kalkulator trenger de ikke forstå sammenhengen mellom desimaltall, standardform, potenstall og logaritmeoperasjonen. Når det gjelder (3c, An3c) var dette en flervalgsoppgave i kjemikontekst, noe som kan ha bidratt til en høyere score totalt for elevgruppen.

Det er to andre tilfeller der en analog oppgave er gitt som flervalgsoppgave ($An7_3$ og $An7_4$). Det var en signifikant forskjell i prestasjon mellom oppgave $An7_3$ og oppgave 7, men ikke mellom oppgave 7 og $An7_4$. I begge oppgavene skal mengden produkt beregnes, men i oppgave $An7_3$ er reaktantene oppgitt i mol og antall mol av produkt skal bestemmes. I oppgave $An7_4$ er massene til reaktantene oppgitt og massen av produktet skal bestemmes. I tillegg er forholdet mellom reaktantene 1:1 i oppgave $An7_3$, mens den er 2:1 i An 7_4. Dette vil diskuteres nærmere i forbindelse med elevenes proporsjonale resonnering i kapittel 5.3.1 og kapittel 5.3.2.

McNemar viste også en signifikant forskjell for oppgavene (9a, $An9a_1$) og (9a, $An9a_2$), der elevene presterte bedre i kjemikontekst. Dette var en oppgave som på kartleggingstesten hadde lav p-verdi (se Tabell 4) og ble regnet som vanskelig. Det var veldig få elever som fikk til oppgaven fordi de hadde glemt andregradsformelen. Muligens hadde dette resultatet vært annerledes dersom oppgaven var gitt på et senere tidspunkt, etter mer repetisjon i matematikk. Samtidig var dette ingen tekstoppgave. Selv om oppgavene er strukturlike når det gjelder hvilken ligning som skal løses, krever oppgavene litt ulike ting av elevene. Matematikkoppgaven krever at eleven mestrer en algebraisk løsningsmetode av en ferdig oppstilt ligning, men kjemioppgaven krever at elevene setter opp uttrykket og ligningen selv. Dette ville man kanskje forvente ville være vanskeligere. De analoge oppgavene var *pH*-beregninger i svak syre eller base. Dette er oppgaveformuleringer som er velkjent for elevene. For at oppgaven skulle være strukturlik med matematikkoppgaven, var det egentlig ikke nødvendig å beregne *pH*. Allikevel var oppgaven valgt slik pga. relevansen for bruk av ligningen i denne konteksten, men elevene fikk korrekt score så lenge de hadde regnet ut konsentrasjonen. Dette krever at eleven vet at NH_3 er en svak base eller at *HCOOH* er en svak syre og kan sette opp uttrykk for *Ka* eller *Kb*. Flertallet av elevene som ikke fikk til denne oppgaven regnet ut konsentrasjonen og *pH* som om det var en sterk syre eller base, som derfor er en kjemifaglig årsak til ikke-korrekt besvarelse. Det er tydelig at å regne *pH* for en svak syre er mye vanskeligere enn for en sterk syre (An9a_1: p = 0,365; An9a_2: p = 0,551, i analyse 2 mot An3a_1: p = 0,673 og An3a_2: p = 0,898). I utgangspunktet var antall elever som fikk til An 9a_1 og An 9a_2 ganske få, selv om det skjedde en forbedring på den måneden som gikk fra elevene løste den første til de løste den andre oppgaven. Elevene hadde tilgang på kalkulator begge gangene, så det er ikke grunnen til forskjellen. Det at elevene løser ligningene i de analoge oppgavene med kalkulator, gjør at de slipper å kunne den algebraiske løsningsmetode. Det interessante er om elevene har en forståelse for hvorfor ligningen de løser er satt opp på denne måten, eller om de har en instrumentell tilnærming til løsningsmetoden. Alle uttrykkene for likevektkonstanten til syrer og baser er like i struktur. Oppgave An9a_3 er en gasslikevekt og analog oppgave til syre-base likevekter. Uttrykket kan settes opp som en ligning på samme måte. Det var en signifikant forskjell på prestasjonen på denne oppgaven sammenlignet med oppgave 9a i matematikk, og de gjorde det bedre i matematikk. Det var bare en elev som fikk til oppgave An9a_3, noe som kan tyde på at elevene ikke har forstått uttrykket for en likevekt, men kan bruke den korrekt i syre-baselikevekter pga. mange repetisjoner av like situasjoner.

Kalkulatoren kan skjule manglende forståelse hos studentene og deres evne til å reflektere over den matematikken de bruker. Dermed kamufleres eventuelle misoppfatninger som dermed vedvarer ut i studiet samtidig som studentene tror de har forstått stoffet selv om de har mangler i kunnskapen som tyder på det motsatte (Leopold & Edgar, 2008). Dette kommer til syne i diskusjonen her rundt forskjellen i elevenes evne til å løse konsentrasjonen i en syre-base-likevekt kontra en gasslikevekt. Det kan tyde på at elevene ikke har full forståelse for sammenhengen mellom situasjon og algebraisk modell og at den i enkelte oppgaver brukes instrumentelt fordi elevene kobler modell med kjent kontekst. Hoban, Finlayson og Nolan (2014) konkluderte med at mangler i matematikkunnskap var årsak til overføringsproblemer til kjemi og at elevene svarte riktig i kjemikontekst pga. treningseffekt. Kanskje har problemene innenfor konteksten av syrer og baser en slik oppbygning at de, kombinert med bruk av kalkulator, har hatt større effekt av trening når de løser oppgaver innenfor denne konteksten enn når de løser andre oppgavetyper. Ser man på analog resonnering innenfor kjemikonteksten har oppgaver med syre-base likevekter slik de er gitt her ganske isomorfe strukturer. Løsningsprosedyren fra tidligere løste oppgaver møter kravene for å løse målproblemet. Dersom de mentale modellene består av overflateelementer, vil det derfor være mulig å løse slike oppgaver korrekt uten fokus på og kunnskap om underliggende strukturelle egenskaper (English, 1997). Det at elevene ikke overfører strategien sin til oppgaven med gasslikevekt tyder nettopp på dette. Elever med dårligere forståelse har også en tendens til å tenke at oppgaver med likhet mellom innhold og oppgavelyd gjerne løses på samme måte (Novick, 1988; English, 1997). Dette kan forklare hvorfor elevene regner *pH* for svake syrer og baser som om de var sterke. Samtidig er dette et tegn på at elevene manglet forståelse for underliggende kjemiske prinsipper og som derfor hindret dem i å velge riktig metode. Dette er selvfølgelig en naturlig forutsetning og samsvarer med Adigwe og Wallace (2009).

Innenfor oppgaver med løselighet i kjemi virket det som om det var forståelsen for underliggende kjemiske prinsipper som hindret riktig løsningsstrategi. I oppgaveparet (9c, An9c_1) vurderer An9c_1 om eleven kan omforme formelen riktig for å beregne løselighet. Begge oppgavene ble gitt uten kalkulator, så ingen forskjell i prestasjon kan forklares med det. Forskjellen på oppgaven med og uten kjemikontekst var at eleven måtte sette opp uttrykket for løselighet i kjemi før beregning. Oppgaven uten kjemikontekst hadde uttrykket og ligningen ferdig oppstilt i begge oppgavene. Det var 27 elever som ikke forsøkte oppgaven i kjemikontekst sammenlignet med 2 på kartleggingstesten i matematikk. Oppgaven ble gitt som en øvingsprøve uten vurdering og det var tydelig at antall elevbesvarelsene skilte seg ut fra andre prøvebesvarelser. Oppgaven var nedprioritert og dette påvirker validiteten og gir stor usikkerhet i hva vi faktisk måler. Samtidig fikk de en tilsvarende oppgave An9c_2. Her ble formelen for løselighet av samme type salt som i An9c_1 stilt opp ($K_{sp} = x \cdot (2x)^2$). Elevene skulle omforme uttrykket med hensyn på *x*. Denne oppgaven var det omtrent dobbelt så mange som fikk til (p = 0,49), og prestasjonen med og uten kjemikontekst regnes ikke som signifikant forskjellig. Det forsterker vurderingen av at begrepet «løselighet» ikke var tilstrekkelig forstått på det tidspunktet testen ble gjennomført.

At oppgave (4, An4) var signifikant forskjellig var forventet siden omtrent alle elevene (unntatt 4) fikk til denne oppgaven på kartleggingstesten. I denne undersøkelsen svarte 90,7% korrekt på oppgaven sammenlignet med 65% hos Scott (2012). Alle unntatt fire elever løste denne oppgaven som en arealoppgave, og det er usikkert hvor mye fokus var på forhold i denne oppgaven. Hos Scott (2012) var det høy forekomst av tolkning av figurene som formlike.

Fordelingen av scoren på testkategoriene for de analoge kjemioppgavene og kartleggingstesten viste ganske stort samsvar mellom de to oppgavesettene når det gjaldt temaer som forhold, tall på standardform, desimaltall, regning med enheter og grafiske framstillinger. Det er riktignok en større fordeling av emnene på tvers av intervallområdene på kjemioppgavene enn for kartleggingstesten, noe som kan skyldes at flere kjemioppgaver enn matematikkoppgaver ble analysert (se Tabell 5 og Tabell 9).

5.3 Resonnere om multiplikative og proporsjonale sammenhenger

Studien har siden starten hatt fokus på de ikke-korrekte løsningsstrategiene. Det ble derfor tatt et valg om å undersøke hva elevene som scorer lavt på oppgaver med forhold og proporsjoner på kartleggingstest i matematikk avslørte om proporsjonal resonnering. Det hadde vært interessant å se hvordan strategiene eventuelt skiller seg fra elevene som mestret forhold og intensive størrelser, men det var nødvendig å avgrense omfanget og derfor er ikke disse elevene undersøkt. Jeg tok også et valg om å fokusere på elevene som en gruppe, med ønske om å avdekke framtredende strategier som totalt sett bygger et helhetlig bilde av gruppens resonnering om sammenhengen mellom størrelser i en oppgave. Studien gir dermed ingen innblikk i om eventuelle forskjeller i strategier og tolkninger påvirker proporsjonal resonnering ulikt for enkeltelever eller undergrupper av elever. Den bidrar heller ikke til en undersøkelse av om evne til å løse ett problem påvirker evnen til å løse et annet. Det er også tatt valg om å hovedsakelig undersøke strategiene innenfor oppgaver med blandingsforhold og reaksjonsforhold siden dette er kontekster som er relevant for kjemi. Strategiene er utdypende forklart og beskrevet for oppgavene fra kartleggingstest i matematikk og analoge kjemioppgaver i kapittel 4.4 og i analysen av intervjuene med supplerende resultater fra ettertest i kapittel 4.5. Jeg vil her gi et helhetlig sammendrag av resultatene med utgangspunkt i den foreslått i egenskapene til Tjo og de la Torre (2014), samt Modestou og Gagatsis (2010).

5.3.1 Rutinepreget proporsjonal resonnering

Evne til proporsjonal resonnering har tidligere blitt sidestilt med elevenes evner til å løse rutinepregede proporsjonale oppgaver, som missing-value oppgaver og numerisk sammenligning (Cramer & Post, 1993; Lamon, 1993; 2007; 2010). I sin tredelte modell av proporsjonal resonnering (se Figur 2) er *rutinepreget proporsjonal resonnering* brukt som begrep på denne evnen (Modestou & Gagatsis, 2010). Akatugba & Wallace (1999; 2009) mente forskningen hadde hatt for lite fokus på matematiske aspekter ved elevenes proporsjonale resonnering innenfor fagspesifikke kontekster i realfag på videregående skole. I min studie ble oppgaver som kan regnes å være av typen «missing-value» modifisert ved å involvere begrensende utgangsmengder som enten skulle reagere eller blandes etter et gitt forhold. Dermed øker kompleksiteten og kravet til resonnering hos eleven. Lamon (2007) forslår at proporsjonal resonnering betyr å supplere med årsaker som støtter påstanden om den strukturelle sammenhengen mellom fire størrelser i en kontekst som samtidig bevarer forhold eller produkt og involverer kovarians av størrelser. I vanlige missing-value oppgaver får eleven oppgitt tre kjente verdier og skal finne den siste ukjente. Disse kan ofte løses mekanisk ved en algoritmisk prosedyre (Lamon, 2007). I blandings- og reaksjonsforhold kan denne typen problemer karakteriseres av fokus på mengden til én ingrediens eller reaktant fordi den andre delen er i overskudd. Det er dermed fire størrelser involvert: Ingrediensen eller reaktanten, forholdet og den ukjente. Dersom begge reaktantene i et reaksjonsforhold eller begge ingredienser i et blandingsforhold oppgis med utgangsmengder der hensikten er å finne mengden til et produkt eller en blanding, må elevene forholde seg til flere enn fire størrelser. De må foreta en numerisk sammenligning av utgangsmengdene for å avdekke hvilken del som er i overskudd før de kan redusere problemet til et proporsjonalt problem med fire størrelser.

5.3.1.1 Reaksjonsforhold

Elever som mestret oppgaver med reaksjonsforhold brukte enten metoden som Cramer og Post (1993) kalte enhetsmetode, der de finner antall mol per en del av utgangsstoffet, eller forandringsfaktoren, der forholdet mellom reaktantene skalerer antall mol av utgangsstoffet. Prestasjonen på slike oppgaver gikk ned med innføring av begrensende mengder: oppgave An4 (uten begrensning, p = 0,755 i analyse 2) og oppgave $An7_1$ (med begrensing, p = 0,396 i analyse

2) selv om reaksjonen var den samme. Elevene tok ikke hensyn til at et stoff begrenset mengden til produktet. I stedet ble reaksjonsforholdet tolket på ny måte. Reaksjonsforholdet vises som koeffisienter foran stoffene i reaksjonsligningen, noe som betyr at koeffisientene er delen i et forhold. Flere elever hadde en tendens til å oppfatte koeffisienten som skalering av utgangsmengde eller molmasse (g/mol). I tillegg ble det oppdaget endringer i enkelte elevers oppfatning av den strukturelle sammenhengen mellom størrelsene i reaksjonen. Fra å bruke en multiplikativ sammenheng mellom størrelsene i en reaksjon ble sammenhengen tolket som additiv. Dette ble bekreftet av oppgave $An7_{2,}$ $An7_3$ og $An7_4$, gjennom intervjuet og på oppgave 3a på ettertesten. Dette diskuteres nærmere under kapittel 5.3.2.1.

5.3.1.2 Blandingsforhold

På oppgave 7 i matematikk skulle elevene blande saft og vann fra begrensende utgangsmengder (p = 0,472) i et gitt forhold. Elevene som ikke fikk til denne oppgaven tok ikke hensyn til begrensende mengder. Noen av disse klarte å anvende forholdet riktig ut fra enhetsmetoden ved å finne antall liter saft i en del. Noen brukte ikke forholdet eller de brukte det feil. Det kunne virke som tolkningen av forholdet vekslet mellom å være «del-del» og «del-hele» og at mengden vann ble sidestilt med mengde blanding. Dette blir diskutert nærmere under 5.3.2.1. For mange ble dette et vanskelig problem å løse på lik linje med begrensende mengder i kjemiske reaksjoner. Flere elever taklet ikke å fokusere både på utgangsmengder og forhold, noe som resulterte i enkleste løsning: forholdet 2:3 mellom glass appelsin og glass vann gav 2+3=5 glass juice uavhengig av utgangsmengder. Under intervjuet ble det enklere for to elever dersom forholdet ble endret til 2:1 eller 1:4. Løsningsstrategien som kom fram i intervju og ettertest viste flere løsningsstrategier. I tillegg til enhetsmetoden valgte noen å halvere forholdet og bygge opp $(2 + 3 = 5\ og\ 1 + 1{,}5 = 2{,}5)$, som ligner halvering og bygge opp-metoden funnet hos andre forskere (Booth, 1981; Lamon, 1993, 2007; Kaput & West, 1994). Andre brukte det Lamon (2007) kaller dobling $((2{:}\,3){:}\,2 = 1{:}\,1{,}5\ og\ (1{:}\,1{,}5) \cdot 3 = (3{:}\,4{,}5)$. Denne metoden ligner det som Lamon (2007) kaller *norming*, i dette tilfellet en halvering og multiplisering av blandingsforholdet som gjentolkes ut fra forholdet mellom utgangsstoffene. Disse strategiene ble ikke alltid utført riktig (se kapittel 4.5.3.3 for detaljer).

5.3.1.3 Oppsummering av egenskaper innenfor rutineproporsjonalitet

Selv om mange av elevene i gruppen har vist vansker med å løse oppgaver med forhold og intensive størrelser, har det kommet fram flere eksempler på hvordan elevene anvender ulike algoritmer for å løse problemer. For problemer med reaksjonsforhold i kjemi er det bare observert enhetsmetoden, noe som samsvarer med Ramful og Narod (2014), men for oppgaver med blandingsforhold er det i tillegg funnet eksempler på halvering og bygge opp og brøkmetoden. Metoden med å «bygge opp/ned» er en uformell strategi der elevene anvender addisjon eller subtraksjon (Booth, 1981; Lamon, 1993; 2007; Kaput & West, 1994). Lamon (1993) fant at del-del-hele problemer ble konsekvent løst med «bygge-opp»-metoder. Disse metodene er ikke gode indikatorer på proporsjonal resonnering fordi elever som bruker dem har en tendens til å ikke gjenkjenne alle de strukturelle sammenhengene i en proporsjon (Lamon, 2007). Mange har allikevel ganske sofistikerte varianter av denne metoden som har gitt suksess og som derfor opprettholdes. Men en slik metode kan gjøre det vanskelig å gå videre med mer sammensatte og komplekse problemer (Booth, 1981). Spesielt i kjemi vil tallverdiene gjøre en slik strategi lite effektiv. Norming-strategien kan allikevel være et naturlig trinn i prosessen med å forstå forhold som en enhet av enheter av enheter (Lamon, 2007). Et eksempel er at eleven koordinerer antall glass appelsin og antall glass vann og setter dette sammen til antall glass appelsin per glass vann. Hvilken kontekst forholdet inngår i har mye å si for vanskegrad (Heller et al., 1989). Saunders og Jesunathadas (1988) fant at dersom forholdet var komponert med enkle tall, gav kjent kontekst en signifikant høyere score på oppgaver, men ikke dersom tallverdiene var vanskeligere å regne med. Tallverdiene påvirker dermed elevens proporsjonale strategi, noe som også ble avdekket i intervjuet. I tillegg kan variasjoner i kontekst innenfor samme semantiske problem føre til ulik respons hos elever (Lamon, 1993). Dette var tydelig i oppgaven der reaksjonsforholdet var gitt med og uten begrensende utgangsmengder. Cramer og Post (1994) mente at kontekst ikke burde påvirke evnen til å løse en oppgave for en med gode evner til proporsjonal resonnering.

Ut fra dette har elevene vist at de kan anvende algoritmer for å løse problemer som krever proporsjonal resonnering, at de kan identifisere en multiplikativ sammenheng mellom ingredienser i en blanding og reaktanter i en reaksjonsligning og konstruere forhold mellom disse. Men det kan virke som kontekst i form av begrensende utgangsmengder, homogene blandinger og type forhold kan påvirke elevenes proporsjonale strategier.

5.3.2 Metaanalogisk bevissthet

Et veldig viktig trinn i proporsjonal resonnering er å kunne analysere størrelser i en gitt situasjon og avgjøre om en proporsjonal sammenheng finnes eller ikke. En bevissthet om dette er en integrert del av prosessen som kreves for å modellere proporsjonale situasjoner korrekt og ikke velge en løsningsmetode basert på overfladiske karakteristikker (Modestou & Gagatsis, 2010). Mye forskning har avdekket feilaktig bruk av additive strategier (Boyer et al., 2008; Jeong et al., 2007; Lawton, 1993; Kaput & West, 1994; Misilidou & Williams, 2014) og feilaktig bruk av proporsjonale strategier i ikke-proporsjonale situasjoner (de Bock et al., 1998; van Doren et al., 2003).

5.3.2.1 Ikke-proporsjonal tolkning av reaksjonsforhold

I min studie viste flere elever en endret tilnærming til den strukturelle sammenhengen mellom reaktanter dersom begrensende utgangsmengder ble gitt. Elevene i intervjuet formulerte en multiplikativ sammenheng ut fra koeffisientene da de beskrev reaksjonen, men klarte ikke koble dette sammen med utgangsmengdene (se kapittel 4.5.3.3 for mer detaljer). Typisk feil elever gjorde var at koeffisienten til et stoff ble en skaleringsfaktor for utgangsmengden til samme stoff. I tillegg ble oppbyggingen av reaksjonsligning viktig for valg av strategi. Følgende kom fram under intervjuet og flere elever har valgt lik eller lignende metoder på ettertest og analoge kjemioppgaver:

- *At det fordeles på to produkter*: $A + 2B \rightarrow C + 2D\ \ der\ A = C\ \ og\ 2B = 2D$
- *Alt må gå opp i en*:
  - $A + B \rightarrow 2C\ \ der\ A + B = C\ dersom\ A\ og\ B\ er\ gitt\ i\ gram$
  - $A + B \rightarrow 2C\ \ der\ 2(A + B) = C\ dersom\ A\ og\ B\ er\ gitt\ i\ mol$

Selv om elevene har en multiplikativ oppfattelse av reaksjonsforholdet, bryter de denne strukturelle sammenhengen ved å addere mengdene av utgangsstoffer til produkt. De virker ikke å skille mellom en proporsjonal sammenheng i selve reaksjonen og den ikke-proporsjonale sammenhengen mellom utgangsmengdene i reaksjonen. Samtidig beholder flere elever bruken av reaksjonsforholdet i beregningen. Muligens skyldes dette mekanisk innlært prosedyre. Lamon (2007) rapporterte at beregninger med forhold gjerne kunne bli instrumentelle og løses uten å være klar over de strukturelle sammenhengene som eksisterte mellom størrelsene. Akatugba og Wallace (2009) argumenterte for at beregningene ofte var basert på puggede matematiske mønstre. Å bruke massen til stoffene direkte i reaksjonen uten å gå veien om mol tyder også på at elevene ikke har et tydelig skille mellom den ikke-proporsjonale sammenhengen mellom massene i en reaksjon og det proporsjonale reaksjonsforholdet mellom antall mol, som er det reaksjonsligningen beskriver. Muligens kan denne intuitive strategien trigges av en analogi til blandingsforhold eller kanskje trigges den av en forståelse for stoffer som kontinuerlig medium. Funn av Nakleh (1992) viser at studenter oppfatter partikler som kontinuerlige. På intervjuet var det en elev som beskrev 0,75 mol som ¾ av et molekyl. Resultater fra ettertesten viste at bare 2 av 29 elever hadde en korrekt, diskret illustrasjon av forholdet mellom stoffer i en beholder uavhengig om de var oppgitt i gram eller mol og at fire hadde en kontinuerlig illustrasjon av 0,5mol som halve beholderen. Lamon (2007; 2010) fant at elever med god forståelse for konstruktet forhold også mestret konstruktene operator og «del-hele». I tillegg la metoden med «unitizing» til et dynamisk aspekt ved at elever fikk en veldig sterk forestilling av hva enheten var. Dersom eleven ikke har god forståelse for enheten mol kunne det vært interessant om økt fokus på unitizing i støkiometri hadde synligjort enhetene bedre. Det virket som elevene fokuserte mye på brøk som kvotient: ($\frac{8g}{16g/mol} = \frac{8}{16} mol = 0{,}5 mol$). Men konstruktene kan åpne opp for å se på $\frac{8}{16} mol$ som operator ($\frac{8}{16} av\ 1 mol$) som igjen betyr $\frac{8}{16} av\ 6{,}023 \cdot 10^{23} antall\ molekyler$. Med unitizing kan også nye enheter etableres, f.eks. 8 mol av 16 mol: $\frac{8mol}{16mol} = \frac{8(6 \cdot 10^{23} molekyler)}{16(6 \cdot 10^{23} molekyler)} = \frac{1(48 \cdot 10^{23} molekyler)}{2(48 \cdot 10^{23} molekyler)}$ som kan koble forhold mellom masse og molar masse til forholdet mellom antall partikler. Spørsmålet er om det medfører en fare for å likestille mol med masse. Forskning viser at synliggjøring og endring av hva som representerer enheten kan øke evnene til proporsjonal resonnering (Lamon, 2007).

5.3.2.2 *Sammenligning av appelsinstyrke med additiv eller multiplikativ resonnering*

Omtrent alle elever sammenlignet appelsinstyrken på to blandinger med brøken «del-hele». De to blandingene var oppgitt med ulike mengder appelsin og vann. Brøken ble utvidet til å ha felles nevner slik at tellerne kunne sammenlignes. Men det var også eksempler på additive strategier. På intervjuet var det en av fire elever som viste en slik strategi da forholdsparene var (3:5) og (5:7), men som endret til multiplikativ strategi for forholdsparene (2:1) og (3:2) på ettertesten. At forholdet ikke inneholder heltallsmultipler viser tidligere forskning kan trigge additive strategier, spesielt dersom tallverdiene ligger nær hverandre (Kaput & West, 1994; Misilidou & Williams, 2014). I tillegg var forholdsparet (2:1) og (3:2) illustrert med to kontinuerlige søyler, mens (3:5) og (5:7) var illustrert med diskret antall glass. Tidligere forskning viser at det er en mulighet for at kontinuerlige figurer hindrer at elevene velger en feilaktig tellestrategi (Boyer et al., 2008; Jeong et al., 2007). Noen elever som deltok i min studie sammenlignet bare appelsin, vann eller volum. Noelting (1980) og Schwartz og Moore (1998) gjorde også slike funn og beskrev det som en intuitiv sentrering av forholdet.

5.3.2.3 Ikke-konsistent tolkning av blandingsforhold

Det ble under intervjuet funnet flere tolkninger av et blandingsforhold. For eksempel kan et forhold 2:3 mellom appelsin og vann tolkes som:

- 2 glass appelsin og 3 glass vann gir 5 glass appelsinjuice
- 2 glass appelsin og 1 glass vann gir 3 glass appelsinjuice
- 2 glass appelsin og 3 glass vann gir 1 glass appelsinjuice.
- 2/3 av juicen er appelsin eller 2/5 av juicen er appelsin.

Omtrent halvparten av elevgruppen på 29 hadde enten konsekvent feil tolkning av forholdet eller den var selvmotsigende. Enkelte elever kunne oppgi at forholdet 2:3 mellom appelsin og vann ville gi 5 glass appelsinjuice samtidig som de mente at 2/3 av blandingen var appelsin. En slik oppfatning holder ikke den multiplikative sammenhengen konstant. Kaput og West (1994) fant i sin studie at det er vanskelig å oppfatte de separate identitetene i en homogen blanding. Kanskje kan dette forklare hvorfor det virker som elevene behandler delen vann som det totale volumet. Thompson (1994) forklarer at man har konstruert et forhold dersom man oppfatter sammenligningen av størrelsene som en sammenligning av deres uavhengige, statiske form. Det kan virke som enkelte elever kanskje ikke mentalt har konstruert en multiplikativ sammenheng mellom appelsin og vann som separate enheter ut fra forholdet og dette gjør at de forveksler løsning med delen vann. Under intervjuet gav elev 2 et eksempel på utregning av mengden appelsin i 10mL med forholdet 3:5 mellom appelsin og vann. Eleven gjorde dette ut fra en oppfatning av at appelsin var 3/5 av løsningen og konkluderte med *6mL er appelsin og 4mL er glass vann….for da blir forholdet 3:5*. Konstruksjonen av «del-hele» innebærer en overgang fra forhold til rate, som gir konsentrasjonen av appelsin i blandingen, og blir viktig for å forstå skillet mellom intensiv størrelse og de ekstensive størrelsene den er bygget opp av.

5.3.2.4 Intensive og ekstensive størrelser

På kartleggingstesten i matematikk skulle konsentrasjonen av kalsium bestemmes i mg/L (oppgave 5a i vedlegg 7.6). Alle unntatt en elev gjorde dette ved å skalere mengde kalsium og mengde Farris hver for seg. Vergnaud (1983) beskriver det ved å operer innenfor samme målerom. I oppgave 5b valgte flest elever en kombinasjon av halvering og «bygge opp» for å finne mengden salt i 1,5L Farris. Framfor å regne med 400 mg/L som intensiv størrelse ble størrelsen konstruert som 400 mg per 1L. Denne metoden fungerte godt, selv om svaret ofte hadde feil omgjøring av enheter. På analoge oppgaver i kjemi brukte ikke elevene slike strategier, men regnet med de intensive størrelsene g/mol og mol/L. Problemet var at de ofte ble brukt feil. Molmassen i g/mol ble multiplisert eller dividert med masse i g for å finne antall mol. Størrelsen i mol kunne ble dividert med størrelsen i g/mol for å finne massen i g. Størrelsen i mol og størrelsen i L ble multiplisert for å finne konsentrasjonen i mol/L, eller konsentrasjonen i mol/L ble dividert med antall liter for å finne størrelsen i mol. Det ble funnet tilsvarende vansker da elevene skulle regne tiden fra hastigheten i km/h og avstand i km. Under intervjuet virket det som elevene hadde vanskeligheter med å forstå og anvende intensive størrelser. Der kom det eksempler som kan tyde på at molmasse (g/mol), konsentrasjon av appelsin (del-hele) og molar konsentrasjon (mol/L) ikke alltid oppfattes som rate, men behandles som de ekstensive størrelsene masse, del appelsin og mol. En elev startet med en oppfatning om at lik konsentrasjon har samme volum, en annen at antall mol i to løsninger med samme konsentrasjon er forskjellig dersom det er ulike stoffer (se kapittel 4.5.4 for mer detaljer). Elevene beskrev de ekstensive størrelsene stoffmengde (mol) og volum hver for seg. Sammenlignet med beskrivelsen Johnson (2015) gjør av elevenes oppfatning av forhold, kan dette ligne en diskret sammenlignende oppfatning av to ekstensive størrelser (i mitt tilfelle mol og volum) framfor en kontinuerlig oppfatning av en konstant sammenheng mellom disse. For den molare konsentrasjonen beskrev to elever en omvendt proporsjonal sammenheng mellom mol og volum. En kombinasjon av elevenes fokus på del-del og det som tidligere har kommet fram om at volum av løsning sidestilles med del vann kan påvirke elevenes oppfatning av mol per liter når antall liter endres. En dobling av volum gir en halvering av antall mol av stoffet i løsningen. Min studie har dermed lignende funn som Ryan (2011), som også blant annet fant at flere elever hadde en mental modell av molar konsentrasjon som mol, som er inkompatibel med konsentrasjon som intensiv størrelse. Ryan (2011) rapporterte derimot at elevene ikke gjenkjente forholdet i oppgavene med molar konsentrasjon, selv om de fikk til dette i annen kontekst, som f.eks. fargeintensitet. I min studie virker det som at elevene er bevisst forholdet, men at det separate fokuset på del-del hindrer flere elever i å oppfatte konsentrasjon som intensiv størrelse. En annen elev viste en proporsjonal sammenheng mellom antall mol og antall liter vann, men ensidig fokus på mengden vann kunne føre til feil konklusjon da antall mol skulle sammenlignes for løsninger med ulik konsentrasjon.

5.3.2.5 Oppsummering av egenskaper innen metaanalogisk bevissthet

Elevene virker å oppfatte sammenhenger mellom størrelser som multiplikative, men kontekst, type forhold og forskjellen på diskret og kontinuerlige størrelser kan påvirke denne resonneringen. Vi har sett eksempler på additiv tolkning av kjemiske reaksjoner og additiv sammenligning av styrken på appelsinsmak i situasjoner som er proporsjonale. Det er også vist eksempler på at elever anvender proporsjonalitet i ikke-proporsjonale situasjoner ved å anvende reaksjonsforhold på masse i stedet for mol og elever har vist en omvendt proporsjonal sammenheng mellom stoffmengde (mol) og volum i løsninger der konsentrasjon (mol/L) er oppgitt og volum forandres. Noen elever har dermed vist at de ikke alltid skiller en proporsjonal sammenheng fra en ikke-proporsjonal sammenheng, som tidligere forskning fremhever er en viktig egenskap for evnen til proporsjonal resonnering (Modestou & Gagatsis; Tjo & de la Torre, 2014). Konteksten i en oppgave kan blokkere veien mellom data og en underliggende, ubevisst og intuitiv modell som igjen manipulerer løsningsevnene (Greer, 1987; Fishbein et al., 1985). Fishbein et al. (1985) mener de intuitive modellene alltid vil ligge der selv etter å ha oppnådd formell kompetanse. Mulig kan dette ha en forklaring i svak forståelse for mol som en enhet og sammenhengen del-del-hele i situasjoner som molare løsninger (mol/L) og andre blandingsforhold. Rollen en enhet har i brøksammenheng og det at man også kan se på forhold og rater som komplekse typer av enheter gjør at evnen til å bygge slike enheter også bidrar til en fleksibilitet i evnen til resonnering (Lamon, 2007).

Multiplikativ resonnering danner grunnlaget for proporsjonal resonnering, men det er en prosedyrisk link til additiv resonnering ved repetetiv addisjon (Kaput & West; Vergnaud, 1983). Elevene i min studie har valgt å bruke metoder som «bygge opp», «halvering og dobling» i matematikk. Dette er strategier som er vanskelig å overføre på mer komplekse sammenhenger som i kjemi (Booth, 1981; Lamon, 2007). Ved å trene på multiplikative situasjoner og analysere sammenhengen mellom variabler, vil elever kunne forstå at additive transformasjoner ikke fungerer. Men det betinger at de har oppdaget intensive størrelser (Lamon, 2007). Elevene i min studie beskriver endringer i intensive størrelser ved å sammenligne de ekstensive størrelsene eller som «per enhet». Dette er en forestilling om rate som Johnson (2015) beskriver som en stykkevis og diskret prosess. Det at intensive størrelser ofte oppgis som per enhet kan også føre til det Nunes og Bryant (2008) kaller «cultural protection». Siden nevneren holdes konstant, trenger vi bare forhold oss til telleren, noe som gjerne fører til oppfattelse av intensive størrelser som ekstensive.

5.3.3 Analogisk resonnering

Det er nær sammenheng mellom proporsjonal resonnering og analogisk resonnering. Det er vanskelig å forstå alle proporsjonale sammenhenger dersom man ikke griper fatt i relasjonelle likheter i analogier. Men det er fullt mulig å fullføre en analogi på bakgrunn av assosiasjoner uten å tenke på den relasjonelle sammenhengen (Lamon, 2012). Elevene på intervjuet valgte å regne ut antall mol fra massen av et stoff fordi molmassen var oppgitt i oppgaven. Dette er en assosiasjon de har fra tidligere oppgaver, men intervjuet avslørte også manglende forståelse for hva molmasse er og viste også manglende overføring til oppgaver der begrensende utgangsmengder ble lagt til oppgaven. Dersom målproblemet og utgangsproblemet ikke er fullstendig isomorfe blir valg av metode vanskelig (English, 1997). Et annet eksempel på en slik negativ overføring var da elevene valgte titreringskurve eller lineær graf for å representere sammenhengen ($pH = -\log[H^+]$. Det viste seg at det var få oppgaver som hadde signifikant forskjell i prestasjon mellom kjemi og matematikk. Manglende kunnskaper i matematikk kan derfor skyldes manglende overføring til kjemi, noe som samsvarer med funn hos Hoban, Finlayson og Nolan (2014). Flesteparten av elevene valgte metoder som «bygge opp» og «halvering/dobling» når de løste proporsjonale oppgaver i matematikk, som vanskelig lar seg overføre til kjemiproblemer. De er avhengig av en større forståelse for intensive størrelser. Det skjer gjerne overføring av kunnskap av matematikkunnskaper til kjemi, men den kan være mangelfull fordi ideer som var konstruert tidligere ikke er kompatible med ny situasjon (Lobato & Siebert, 2002). Dersom elever har assosiasjoner mellom reaksjonsforhold og blandingsforhold, kan dette muligens forsterke en forestilling om en kontinuerlig oppfattelse av mol og føre til en intuitiv forestilling om at massene eller antall mol av reaktantene skal adderes slik som i en blanding. Det ble funnet en analogi mellom kjemi og matematikk, der fortynningsformelen $c_1 \cdot V_1 = c_2 \cdot V_2$ fra kjemi ble brukt til å finne ny konsentrasjon i en appelsinjuiceblanding (se kapittel 4.5.1 for detaljer). Dette er tydelig et eksempel på hvordan fokus på overflateinnhold kan føre til negativ overføring, noe som også er rapportert av andre forskere (English, 1997; Bassok & Holyoak, 1989). Bassok (1997) rapporterte i sin undersøkelse at det var eksempler på at studenter overførte kunnskap fra algebra til fysikk, men ikke motsatt. At elever velger å bruke metode fra kjemi, kan bety at regning med rasjonale tall uten synlige måleenheter ble utfordrende og fremmed for elevene.

5.4 Diskusjon av metode og teori

Hensikten i dette forskningsprosjektet har vært å få svar på noen av de vanskene elever opplever med matematikk i kjemi. Det ble valgt å starte med en bred tilnærming ved å velge matematikkoppgaver på kartleggingstesten som favnet flere og ulike temaer. Matematikkoppgavene som er valgt er i godt samsvar med litteraturens rapportering av hvilken matematikk som kreves i kjemi. Et av forskningsspørsmålene har vært å ta utgangspunkt i matematikkferdigheter som kreves i kjemi og i denne undersøkelsen har matematikkferdigheter blitt brukt om evnen til å løse oppgaver innenfor områder som er relevant for kjemi. Innunder dette ligger kompetanse om matematiske representasjoner, symboler og formaliteter. Men analyse av løsningsstrategier og oppgaveintervju har også gitt innblikk i elevens forståelse ut fra deres tankegang, resonnering og skriftlige og muntlige kommunikasjon. Men det betyr ikke at det ikke også finnes annen kompetanse i matematikk som også kreves i kjemi. Å kunne anvende matematikken i form av modellering og problemløsning er også viktig, men dette ligger utenfor målet med denne oppgaven. Denne kompetansen er derimot vanskelig å oppnå dersom forståelsen og ferdighetene ikke ligger i bunn. Derfor er det tatt et valg om å undersøke de feil elevene gjør i sine strategier og resonneringer, noe jeg mener metoden har bidratt til.

Faren med å ha bredt utgangspunkt er at kartleggingen blir veldig generell, noe som gjør at man risikerer å ikke komme til kjernen av problemet. Samtidig var det et behov å gjøre undersøkelsen innenfor den komplekse situasjonen man daglig er i som lærer og elev i kjemifaget, med mangfoldet og spennet av både nivåer og temaer. Flere år som lærer i kjemi og matematikk har bidratt til en del erfaringsbaserte teorier om hvorfor elevene, gjerne med gode matematikkarakterer, opplever faget vanskelig når beregningene starter. Leopold og Edgar (2008) fant at lærere hadde en tendens til, i og med matematikken i kjemi er ganske grunnleggende og lite kompleks, å anta at elever innehar de matematikkferdigheter som kreves. Utgangspunktet mitt i starten var derfor at her er det et problem jeg ikke vet noe om eller vet om, men ikke har forstått roten av. Det var derfor viktig i min studie å «nullstille» erfaringene og antakelsene mine fra starten, noe som også var et argument for å starte bredt. Det var derimot er riktig og nyttig valg å avgrense den videre oppfølgingen av resultatene innenfor et tema. Jeg valgte temaet forhold og proporsjonal resonnering fordi litteraturen overbeviste meg om at dette var en viktig bærebjelke for å forstå naturvitenskapelige fag og forhold er en sentral del innenfor reaksjonstøkiometri. Intervjuene ble i denne sammenheng viktige og avgjørende for å komme dypere i forståelsen for hvordan elevene oppfatter sammenhengen mellom størrelser i en oppgave. Selv om intervjuene viste en del fellestrekk på hvor problemene lå var elevene samtidig ganske ulike i måten de uttrykte seg på rundt løsningen av en oppgave. Resultatene fra intervjuene bekreftet hverandre ikke nok til at jeg følte meg sikker på egen analyse av dem. Å følge opp med ettertest basert på resultater fra intervjuene gav derfor interessante opplysninger som styrket funn fra intervjuet eller som rammet dem inn i en helhet som gir et styrket utgangspunkt for videre undersøkelser. Med en smalere tilnærming fra start kunne gjerne denne prosessen vært enklere og mer spisset, med hovedfokus på resonnering om forhold og rater, men jeg hadde samtidig tapt den helheten jeg ser jeg trenger. Elevene får ikke oppgitt enkle forholdsoppgaver, oppgaver i «missing value»-format eller brøkoppgaver i kjemi. Den kommer i en kontekst der tolkning av innhold og overføring av kunnskap også er viktig. Det hadde muligens vært hensiktsmessig og gjennomført flere intervjuer. En annen mulighet hadde vært å intervjue de fire elevene over flere sesjoner med oppgaver som testet mer spesifikke temaer, men den tiden hadde jeg ikke til rådighet sammen med elevene.

Teorien har vært enormt viktig for de valg jeg har gjort i analysen. Selv om jeg hadde en stor teorigjennomgang i forkant av intervju og ettertest om proporsjonal resonnering er dette et enormt fagfelt, som også drar inn teori om analogier, kvantitative og multiplikative resonneringer. Jeg har stadig gjort nye oppdagelser i transkripsjonene og har lest gjennom dem til jeg ikke har oppdaget mer. Det har krevd en enorm teorigjennomgang bare å prøve å forstå og sette seg inn i elevenes måte å tenke på. Utfordringene er at elevene gjerne bruker ord og begreper riktig, men tenker og regner feil. Eller de tenker og regner riktig, men bruker ord og begreper feil. Det er lett som intervjuer å avfeie viktige detaljer som slurvefeil, som kunne avslørt viktige hindringer for forståelsen. Her har jeg prøvd å være godt teoretisk forberedt til intervjuet og har forsøkt å opparbeide meg nok kunnskap til å kunne starte jobben med analysearbeidet. Jeg opplever at jeg ut fra dette har oppnådd å komme nærmere noen svar på hvor enkelte problemer sitter med matematikken i kjemi, men allikevel påvirker det i stor grad det jeg ser. Uansett har denne delen vært et viktig utgangspunkt som kan brukes til videre undersøkelser av emnet.

Jeg valgte å bruke McNemar test fordi den var en egnet metode for å sammenligne prestasjoner i to kontekster der besvarelsene var korrekt eller ikke korrekt og fordi den var brukt i en tidligere studie av Scott (2012). Jeg er allikevel blitt mer usikker på om McNemar test gir et riktig bilde av situasjonen ut fra sammenligningen av oppgavene slik de er gitt. Scott (2012) konkluderte med at siden det ikke var signifikante forskjeller på de enkle analoge oppgavene i kjemi og matematikk, kunne det bety at selve molbegrepet ikke alene kunne forklare vanskene elevene hadde med kjemi. Det hørtes i utgangspunktet logisk ut fra start. Allikevel mener jeg at hvis dette skal være interessant, stiller det større krav til oppgavenes analoge struktur enn det som er gjort i min studie og også i studien til Scott (2012). Flere analoge oppgavepar i min studie oppleves å ha for store sprik i krav til elevenes kunnskap for å løse oppgaven (gjelder spesielt oppgave 3 og 9 i matematikk og de tilhørende analoge oppgavene i kjemi), for eksempel å sette opp et uttrykk i kjemi kontra å bruke et ferdig oppsatt uttrykk i matematikk. Hvis en elev scorer

0 på en oppgave i matematikk pga. feil brøkregning og scorer 0 på en oppgave i kjemi fordi han ikke husket formelen for løselighet, hva oppnår man da egentlig ved å si at det ikke er en signifikant forskjell i prestasjonene hvis man ikke trenger brøkregning for å sette opp formelen? Ser man på et analogt oppgavepar som Scott (2012) brukte, som også jeg anvendt i min studie (se oppgave 4 i vedlegg 7.6 og oppgave An4 i vedlegg 7.7), ble resultatet hos begge at det var en signifikant forskjell i prestasjon. I oppgave 4 skal areal regnes ut for et rektangel, dobles for å finne arealet av et annet rektangel og divideres med en oppgitt lengde i dette rektangelet for å finne den ukjente lengden. I oppgave An4 skal massen konverteres til mol for metan før molforholdet i reaksjonsligningen skal brukes til å bestemme antall mol av oksygen. Deretter skal antall mol multipliseres med molmassen for å finne massen til oksygen. Antall regnetrinn og regneoperasjoner er lik for begge oppgavene, men det er samtidig to oppgaver med store forskjeller i strukturelle sammenhenger spesielt fordi kjemioppgaven involverer intensive størrelser. I min studie virket det ikke som elevene en gang oppfattet arealoppgaven som en forholdsoppgave. Oppgavene må være mye mer fininnstilt i måten størrelsene forholder seg til hverandre i begge kontekster for å avgrense typer feil som kan oppstå ulikt. Da hadde det vært nyttig å bruke McNemar test. Eventuelt i en undersøkelse som testet prestasjon på samme oppgave før og etter en «behandling» i form av en kort modelleringsøkt eller annen læringssituasjon.

5.5 Konklusjon

Dataene i denne undersøkelsen er samlet inn fra 54 videregående elever som året 2016/17 gjennomførte faget kjemi 1.

Kartleggingstesten (se vedlegg 7.6) i matematikk som elevene gjennomførte høsten 2017 ble laget på bakgrunn av teori om hvilke temaer i matematikk som bidro til relevant og viktig kunnskap for suksess i kjemifaget. Høy *p*-verdi (vanskegrad) indikerte at oppgavene var enkle. Ingen oppgaver hadde lavere vanskegrad enn 0,30 bortsett fra oppgave 9a fordi elever hadde glemt andregradsformelen. Oppgaver med lavere score enn 70% regnes som utfordrende og dette var innenfor temaer som forhold, logaritmer, graf, prosent, omgjøring av enheter og sammenhengen mellom standardform, brøk og desimaltall. Point-Biserial korrelasjon viste at det var samsvar mellom høy total score på testen og korrekt svar på de vanskelige oppgavene (lav *p*-verdi). Fordelingen av scoren på testkategoriene for de analoge kjemioppgavene og kartleggingstesten viste ganske stort samsvar mellom de to oppgavesettene når det gjaldt temaer som forhold, tall på standardform, desimaltall, regning med enheter og grafiske framstillinger.

Det er riktignok en større fordeling av emnene på tvers av intervallområdene på kjemioppgavene enn for kartleggingstesten, noe som kan skyldes at flere kjemioppgaver enn matematikkoppgaver ble analysert (se Tabell 5 og Tabell 9).

Generelt var årsaken til de ikke-korrekte løsningsstrategiene på kartleggingstesten i matematikk og analoge kjemioppgaver mye regnefeil. Jeg vil her gi en kort oppsummering av de viktigste funnene. Elevene viste lite effektive regnestrategier for brøk, spesielt framtredende var hvordan de unngikk å forkorte før utregning. For rasjonale uttrykk var det mange ulovlige forkortinger og en spesiell oppfatning av brøkstreken som subtraksjon, som virket som en innblanding fra potensregler. Elevene manglet kunnskap om sammenhengen mellom tall på standardform med negativ eksponent, desimaltall og brøk, noe som fikk konsekvenser for logaritmeregning uten kalkulator. De hadde også vansker med å skissere og tolke grafiske framstillinger.

Når det gjelder elevenes (gjelder bare de 29 elevene som scoret lavt på oppgaver med forhold og intensive størrelser på kartleggingstesten) oppfattelse av multiplikative sammenhenger og evne til proporsjonal resonnering ble følgende funnet kort oppsummert: Elevene viste tegn til å fokusere på overflateinnhold, noe som kunne føre til negative overføringer på nye problemer både innenfor kjemikontekst og mellom matematikk- og kjemikontekst. Elevene hadde strategier for å løse oppgaver som krever proporsjonal resonnering. Innenfor matematikkoppgaver som involverer forhold mellom to ingredienser valgte elevene en tilnærming med «bygge opp» eller halvering/dobling, noe som vanskelig lar seg overføre til kjemi, der elevene regner med intensive størrelser. De intensive størrelsene er derimot ikke godt forstått hos flere av elevene, mye fordi de fokuserer på sammenhengen mellom de ekstensive størrelsene. Noen ganger blir de brukt i resonneringene som om de var ekstensive. Elevene har også vansker med å tolke sammenhengen del-del-hele i en blanding fordi del vann og total løsning er vanskelig å skille. Mengde appelsin per mengde vann blir tolket som andel appelsin i blandingen. Det virker som elevene har vansker med å etablere en oppfatning og forståelse av enheten i en blanding og enheten mol i en reaksjon. Endring av kontekst, type forhold og oppfatning av størrelser som kontinuerlige eller diskret kan gi feilaktige strategier. Det har vært eksempler på additiv sammenligning av appelsinstyrke, omvendt proporsjonal sammenheng mellom mol og liter i en løsning og proporsjonal sammenheng mellom masser i et reaksjonsforhold.

5.6 Veien videre

I denne undersøkelsen har jeg hatt en bred tilnærming til datamaterialet for å få et mer helhetlig inntrykk av hva elevene sliter med innenfor matematikk som kreves i kjemi. Resultatene kan brukes som utgangspunkt for å gå dypere inn i spesifikke undersøkelser på elevenes forståelse av forhold, brøk som måling (del-hele) og intensive størrelser i flere situasjoner, både diskret og kontinuerlige, og sette dette i sammenheng med elevenes evne til å konstruere enheter.

Det har vært interessant å se hvilke strategier som dukker opp i gruppen som helhet, men en mulighet for videre arbeid er å se på enkeltelever og undersøke korrelasjoner mellom ulike måter å resonnere om matematiske og kjemiske problemer på. Ved å gjennomføre flere intervjuer kunne man kanskje i større grad identifisert grupper av elever med lignende strategier og sett om disse hadde ulik sammenheng med evne til å løse kjemiproblemer.

Jeg har tatt utgangspunkt i å undersøke strategiene til den delen av gruppen som scoret lavt på oppgaver om forhold og proporsjoner i begge kontekster. Etterhvert som arbeidet med å analysere elevenes resonneringer og strategier pågikk, oppstod en nysgjerrighet på hvilke strategier elevene som scoret korrekt på oppgavene om forhold og proporsjoner hadde anvendt. Er det forskjeller i strategi og resonneringsmetoder hos disse sammenlignet med den gruppen jeg har undersøkt, og i tilfelle på hvilken måte er de ulike? Det var ikke tid til dette i denne studien.

Denne undersøkelsen har utgangspunkt i et kognitivt perspektiv ved å ha fokus på individets mentale aktivitet. Man kunne endret fokuset til et sosiokulturelt perspektiv der fokuset er mer på den sosiale konteksten og språket. For eksempel kunne man undersøkt elevenes resonneringer i samhandling og kommunikasjon med andre om analoge oppgaver i kjemi og matematikk, for eksempel i modelleringssituasjoner. Eller man kunne undersøkt effekten av å gjennomføre ulike typer undervisning om forhold og proporsjoner i forkant av kjemiopplæring og se hvordan dette innvirket på evnen til å løse problemer innenfor kjemi.

6 LITTERATUR

Adigwe, J. C. (2013). Effects of mathematical reasoning skills on students´ achivements in chemical stoichiometry. *Review of education institute of Education Journal*, *23*(1), 1-23.

Ahmed, A. (2013). McNemar's test calculator. Hentet fra http://scistatcalc.blogspot.com/2013/11/mcnemars-test-calculator.html

Akatugba, A. H., & Wallace, J. (1999). Mathematical dimensions of student's use of proportional reasoning in high school physics. *School science and mathematics, 99* (1), 31-40.

Akatugba, A. H., & Wallace, J. (2009). An integrative perspective on students' proportional reasoning in high school physics in a West African context. *International Journal of Science Education*, *31*(11), 1473-1493. doi: 10.1080/09500690802101968

Andrews, M., & Andrews, L. (1979). First year chemistry grades and SAT math scores. *Journal of Chemical Education*, *56*(3), 231-234.

Bassok, M. (1994). Two types of reliance on correlation between content and structure in reasoning about word problems. I L. D. English (Red.) *Mathematical reasoning. Analogies, metaphors and images* (s. 191-220). New York: Routledge.

Battista, M.T., & Borrow, C. van A. (1995). A proposed constructive itinerary from iterating composite units to ratio and proportion concepts *Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 17th PME-NA 1995.* Columbus: ERIC.

Befring, E. (2007). *Forskningsmetode med etikk og statistikk*. Oslo: Det Norske Samlaget.

Behr, M. J., Cramer, K., Harel, G., Lesh, R., & Post, T. (1979). The Rational Number Project. Hentet fra http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Units of quantity: Conceptual Basis Common to additive and multiplicative structures. I G. Harel & J. Confrey (Red.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 122-179). Albany: State University of New York Press.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion. Research and teaching in mathematics teacher's education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Booth, L. R. (1981). Child-methods in secondary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 29-41.

Bright, G., Joyner, J. M.,& Wallis, C. (2003). Assessing proportional thinking. *Mathematics teaching in the middle school 9*, 166-172.

Carreira, S. (2001). Where There's a Model, There's a Metaphor: Metaphorical Thinking in Students' Understanding of a Mathematical Model. *Mathematical Thinking and Learning*, *3*(4), 261-287.

Childs, P. E., & Sheehan, M. (2009). What´s difficult about chemistry? An Irish perspective. *Chemistry Education research and practice, 10*, 204-218.

Cramer, K. & Post, T. (1993). Proportional reasoning. *The mathematics teacher*, *86*(5), 404-407.

Creswell, J. W. (2012). *Educational Research. Planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research* (4.utg.). Boston: Pearson Education.

Cunningham. A., & Whelan, R. (2014). *Maths for chemists*. England: University of Birmingham and University of Leeds.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 311-334.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The Predominance of the Linear Model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, *35*, 65-83.

Denny, R. (1971). The Mathematics Skill Test (MAST) for Chemistry. *Journal of chemistry*, *28*(12), 845-846.

Doerr, H. M., & Tripp, J. S. (1999). Understanding How Students Develop Mathematical Models. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(3), 231-25.

Dogget, G. & Cockett, M. (2012). *Math for chemists*. Cambridge: RSC Publishing.

Van Dooren, W., De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2003). Improper applications of proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle school, 9*(4), 204-209.

English, L. D. (1994). Children's reasoning processes in classifying and solving computational word problems. I L. D. English (Red.) *Mathematical reasoning. Analogies, metaphors and images*, 191-220. New York: Routledge.

Fay, M. P. (2016). Exact McNemar's test and matching confidence intervals. Hentet fra https://cran.r-project.org/web/packages/exact2x2/vignettes/exactMcNemar.pdf

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. I R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser & B. Winkelmann (Red.) *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, 231–245. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17.

Furio, C., Azcona, R., & Guisasola, J.2002). The learning and teaching of the concepts amount of substance and mole: A review of the literature. *Chemistry education: Reasearch and practise in Europe 3*(3), 277-292.

Greer, B. (1987). Non-conservation of multiplication and division involving decimals. *Journal of Research in Mathematics Education, 18*, 37-45.

Grove, M. (2015). Is a conceptual understanding of maths vital for chemistry? Hentet fra http://www.rsc.org/eic/2014/12/mathematics-problem-chemistry-university

Harel, G., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1994). The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: Further investigations. I G. Harel, & J. Confrey (Red.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 363–384). Albany: State University of New York Press.

Heller, P. M., Ahlgren, A., & Post, T. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type and problem setting. *Journal of research in science teaching, 26*(3), 205-220.

Hitchcock, David B. (2009). *Yates and Contingency Tables: 75 Years Later*. USA: University of South Carolina.

Hoban, R. A., Finlayson, O., & Nolan, B. (2014). Transfer in chemistry: A study of students abilities in transferring mathematical knowledge to chemistry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(1): 14-5.

Howe, C. et al. (2010). Intensive quantities: Why they matter to developmental research. *British journal of development psyhcological society*, *28*, 307-329.

Jiang, B., Xu, X., Garcia, A., & Lewis, J. E. (2010). Comparing two tests of formal reasoning in a college chemistry context. *Journal of Chemical Education*, *87*(12), 1430-1437.

Johnson, H. L. (2015). Secondary Students' Quantification of Ratio and Rate: A Framework for Reasoning about Change in Covarying Quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 64-9.

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. I G. Harel, & J. Confrey (Red.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 236-289). Albany: State University of New York Press.

Kilner, W. C. (2014). *The Chem-Math Project. Enhancing success in general chemistry through the integration of mathematics, problemsolving and conceptual understanding. An action research study* (Doktoravhandling). University of New Hampshire.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Red.) (2001). The strands of mathematical proficiency. I National Reasearch Council (2001) *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Mathematics Learning Study Committee and Education. Washington DC: National Academy Press.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41-61.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. I G. Harel & J. Confrey (Red.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 89–120). Albany: State University of New York Press.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. I F. K. Lester (Red.) *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning, a project of the national council of teachers of mathematics* (s. 629–668). USA: Information age publishing.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching ratios and fractions for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New York: Routledge.

Lawton, C.A. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* 460–466.

Leopold, D., & Edgar, B. (2008.) Degree of Mathematics Fluency and Success in Second-Semester Introductory Chemistry. *Journal of chemistry*, *85*(5), 724-731.

Lobeto, J., & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 87-116.

Matlock-Hetzel, S. (1997). Basic concepts in item and test analysis. *The annual meeting of the Southwest Educational Research Association* (1997). Austin: Texas A&M University.

McCowan, R. J., & McCowan, S. C. (1999). Item analysis for criterion-referenced testes. *Center for development of human services*. New York: Buffalo State College.

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children´s proportional reasoning. *Journal of mathematical behavior, 22,* 335-368.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 36-53.

Nakhleh, M. B. (1992). Why some students don't learn chemistry. *Journal of Chemical Education*, *69* (3), 191-196.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ration concept. Part 1- the differentiation of stages. *Educational studies in mathematics*, *11*, 217-253.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ration concept. Part 2- Problem structure at successive stages; Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational studies in mathematics*, *11*, 331-363.

Novick, S., & Menis, J. (1976). A study of students' perceptions of the mole concept. *Journal of Chemical Education*, 53(11), 720-722.

Nunes, T., & Bryant, P. (2008). Rational Numbers and Intensive Quantities: Challenges and Insights to Pupils' Implicit Knowledge. *Anales de psicología*, *24*(2), 262-270.

Nunes, T., & Bryant, P. (2009). Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. I Nuffield Foundation (Red.). *Key understandings in mathematics learning*. London: University of Oxford.

Nunes, T., & Bryant, P. (2009). Paper 4: Understanding relations and their graphical representations. I Nuffield Foundation (Red.). *Key understandings in mathematics learning*. London: University of Oxford.

Ozsogomonyan, A., & Lofthus, D. (1979). Predictors of general chemistry grades. *Journal of Chemical Education*, *56*(3), 173-175.

Quaigrain, K., & Arhin, A. K. (2017). Using reliability and item analysis to evaluate a teacherdeveloped test in educational measurement and evaluation. *Cogent Education*, *4*.

Perkins, R. (1978). *The relationship of certain mathematics skills to success of students in introductory community college chemistry* (Doktoravhandling). Oregon State University.

Quaigrain, K. & Arhin, A. K. (2017). Using reliability and item analysis to evaluate a teacher-developed test in educational measurement and evaluation. *Cogent Education, 4*.

Ramful, A., & Narod, F. B. (2014). Proportional reasoning in the learning of chemistry: levels of complexity. *Mathematical education research journal*, *26*, 25-46.

Royal Society of Chemistry (2009a). Royal Society of Chemistry response to Towards level 3 mathematics in 2016 – A paper to provoke discussion by the Advisory Committee on Mathematics Education. Hentet fra http://www.acme-uk.org/media/4610/towards%20level%203%20mathematics%20in%202016%20-%20a%20paper%20to%20provoke%20discussion.pdf

Royal Society of Chemistry (2009b). Discover maths for chemists. Hentet fra http://discovermaths.rsc.org/

Royal Society of Chemistry and the Higher Education Academy (2009). Maths Resource Database. Hentet fra https://www.heacademy.ac.uk/resource/maths-resource-database

Royal Society of Chemistry (2016). *CPD for teachers. Advancing excellence in chemistry teaching.* Hentet fra https://www.rsc.org/cpd/resource/RES00001503/maths-skills

Ryan, S. A. C. (2011). *Student ratio use and understanding of molarity concepts within solutions chemistry* (Doktoravhandling). Illinois: UMI Dissertation Publishing.

Saunders, W. L., & Jesunathadas, J. (1988). The effect of task content upon proportional reasoning, *Journal of research in science teaching*, 25 (1), 59-67.

Scott, F. (2012). Is mathematics to blame? An investigation into high school students' difficulty in performing calculations in chemistry. *Chem. Educ. Res. Pract*., *13*,330–336.

Shallcross, D. E., & Yates, P. C. (2014). Skills in Mathematics and Statistics in Chemistry and tackling transition, The Higher Education Academy STEM project series, Hentet fra https://www.heacademy.ac.uk/system/files/resources/tt_maths_chemistry.pdf

Shwartz, D., & Moore, J. L. (1998). On the role of mathematics in explaining the material world: Mental models for proportional reasoning. *Cognitive Science Society*, *22*(4), 471-516.

Steen, B. G., Juel, L. A., & Fimland, N. (2010). *Aqua Kjemi 1*, *Grunnbok og Studiebok*. Oslo: Gyldendal Forlag.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. I G. Harel, & J. Confrey (Red.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 179–235). Albany: State University of New York Press.

Tjoe, H., & de la Torre, J. (2014). The identification and validation process of proportional reasoning attributes: an application of a cognitive diagnosis modeling framework. *Math. Educ. Res. Journal*, *26*, 237-255.

Trifone, J. D. (1987). The Test of Logical Thinking, *The American Biology Teacher*, *49*(8), 411-416.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. I R. Lesh & M. Landau (Red.) *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (s. 127—174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why?. I G. Harel, & J. Confrey (Red.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 41–59). Albany: State University of New York Press.

Weisman, R. L. (1981). A mathematics readiness test for prospective chemistry students. *Journal of Chemical Education*, *50*, 564.

Yates, P. C. (2008). *Tips for teaching maths skills to our future chemists:* rearranging equations, *Education in chemistry*, 45(6).

Yates, P. C. (2009). *Tips for teaching maths skills to our future chemists:* logarithms. *Education in chemistry*, 46(3).

Yates, P. C. (2011). *Tips for teaching maths skills to our future chemists:* Precedence. *Education in chemistry*, 188-189.

7 VEDLEGG

7.1 Godkjenning fra NSD

7.2 Samtykkeskjema

7.3 Infoskriv til elever som ble valgt ut til intervju

7.4 Tillatelse til innsamling av data til masteroppgave

7.5 Innhold på kartleggingstesten i matematikk

7.6 Kartleggingstest i matematikk

7.7 Analoge kjemioppgaver

7.7 Intervjumal

7.9 Test på bakgrunn av intervjuet.

7.10 Oversikt over antall besvarelser med ikke korrekt, delvis korrekt og ikke forsøkt på kartleggingstest og kjemioppgaver

7.11 Resultater fra sammenligning av prestasjon på analoge matematikk og kjemioppgaver

7.1 Godkjenning fra NSD

Arne Jakobsen
Matematisk institutt Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 23.08.2016 Vår ref: 49322 / 3 / AGL Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 28.07.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

49322	*Kan elevers vansker i kjemifaget på videregående skole relateres til den kjemifaglige konteksten eller manglende grunnleggende matematikkforståelse?*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Arne Jakobsen*
Student	*Aina Elisabeth Fardal*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 15.08.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Audun Løvlie

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

7.2 Samtykkeskjema

Samtykke til bruk av prøvebesvarelse i forskningsprosjekt

Til kjemi 1 – elev ved [redacted] videregående skole 2016/17

Bakgrunn og formål

Jeg er for tiden i gang med en mastergrad i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Bergen. Temaet for oppgaven er i hvor stor grad mestringen i kjemifaget på videregående skole kan relateres til matematikkforståelse og den kjemifaglige konteksten. Jeg ønsker å få innblikk i om utfordringer i kjemifaget hovedsakelig kommer av den kjemifaglige konteksten, eller om det er grunnleggende forståelser innenfor matematikkfaget som kan være et hinder. En slik kunnskap vil kunne hjelpe læreren til å gi riktig tilrettelegging i kjemifaget. Kanskje kan denne kunnskapen også gi utgangspunkt for å studere tilsvarende sammenhenger innenfor andre realfag. Du er valgt ut til å delta i studien fordi du gjennomfører kjemi 1 ved [redacted] videregående skole i skoleåret 2016/2017.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltagelse i studien innebærer å samtykke til at de obligatoriske prøvene (hovedsakelig heldagsprøver og to kartleggingsprøver) som gjennomføres i løpet av skoleåret 2016/17 i kjemifaget kan analyseres i forhold til løsningsstrategier. I tillegg ønsker jeg å intervjue noen utvalgte elever med utgangspunkt i oppgaveløsninger for å få et dypere innblikk i hvordan elevene har tenkt når de har løst oppgaven. Lengden på en slik samtale vil vare i 30 – 40 minutter.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta på intervjuet. Prøvene må du gjennomføre uansett grunnet vurderingsgrunnlag i kjemi 1, men det er frivillig å samtykke til at prøvebesvarelsene kan brukes i forskningsprosjektet.

Siden det ikke blir registrert sensitive opplysninger i dette prosjektet, trengs det ikke godkjenning fra foreldre eller foresatte og du kan som elev selv samtykke til å delta i studien. Du kan trekke tilbake ditt samtykke når som helst, uten å måtte begrunne hvorfor. Det vil ikke få konsekvenser i din skolehverdag dersom du ikke ønsker å delta.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt og anonymisert. Prøvene blir identifisert med et kodenummer. Bare jeg og faglærer i kjemi 1 har tilgang til kodelisten og kodenumre oppbevares adskilt fra prøvebesvarelsene. Ingen vil derfor kjenne seg igjen i opplysninger som gis i den ferdige masteroppgaven. Alt innsamlet materiale vil bli slettet når prosjektet er ferdig, som etter planen er innen 15. august 2018.

Dersom du lurer på noe kan du sende en epost til fardalaina@gmail.com. Du kan også ta kontakt på telefon [redacted].

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS. For at forskningsprosjektet skal bli vellykket trenger jeg mange deltagere. Håper du er en av dem.

Vennlig hilsen

Aina Elisabeth Fardal

Samtykke til deltakelse i studien

Mitt navn er (fornavn og etternavn): ______________________________________

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta.
Sett kryss for det du ønsker å samtykke til.

___ Jeg samtykker til at mine prøvebesvarelser kan brukes i forskningsprosjektet.

___ Jeg samtykker til å delta på intervju

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

7.3 Infoskriv til elever som ble valgt ut til intervju

Deltakelse på intervju

Til kjemielev ved [redacted] vgs.
Du mottar dette brevet fordi du, som kjemielev ved [redacted] vgs, deltar i en studie som skal gi innblikk i utfordringer knyttet til matematikk i kjemi. Du har vært og er fortsatt en viktig deltaker i prosjektet fordi du bidrar med viktig kunnskap om matematikkstrategier i en kjemifaglig kontekst.

Tidligere i høst gav du samtykke til å delta på et intervju. Jeg takker for ditt samtykke, og ønsker å gjennomføre et intervju med deg for å lære av dine erfaringer og strategier.

Intervjuet vil gjennomføres i perioden 24. – 27. april og vil vare i ca. 50 minutter. Jeg har avtalt med faglærer at du kan tas ut av kjemitimen og at dette ikke vil få konsekvenser for fravær.

Hensikten min med intervjuet er å få bedre innsikt i vurderinger og tanker du gjør deg når du møter ulike oppgavesituasjoner og må velge ulike strategier. Det er ikke en test, men en uformell samtale om ulike oppgavesituasjoner.

Du vil få en mer detaljert innholdsbeskrivelse av intervjuets struktur ved intervjuets start, men dersom du har spørsmål du ønsker svar på før det er det bare å ta kontakt med meg på epost: fardalaina@gmail.com

Intervjuene blir tatt opp og vil bli behandlet konfidensielt og anonymisert. Disse vil bli slettet når prosjektet er ferdig (planlagt august 2018).

Dette er fortsatt frivillig og du har derfor mulighet til å informere meg på epost dersom du ikke vil delta på intervjuet.

Vennlig hilsen
Aina Elisabeth Fardal

7.4 Tillatelse til innsamling av data til masteroppgave

Fra: [redacted]
Sendt: 7. juli 2016 22:06
Til: Aina Elisabeth Fardal
Emne: Re: datainnsamling for masteroppgave

Kjempespennende og interessant problemstilling Aina!!

Jeg er veldig positiv til å få til dette og hjelpe til MEF å få gjennomført testene og evt hjelpe faglærerne med skanning av prøver du skal vurdere. Jeg er sikker på at kjemilærerne også er positive til å bidra. Det er veldig fint om du sender en henvendelse til dem. Kanskje er det lurt å avtale et skypemøte med kjemilærerne ved skolestart? Jeg kan hjelpe til med utstyr til skypeoverføringen fra skolen.

Dette blir spennende Aina,og dette burde vi få til!

Ha en fin sommer du også, og masse lykke til med etableringen i nytt land! 😁
[redacted]

Sendt fra min iPhone

Den 6. jul. 2016 kl. 13.43 skrev Aina Elisabeth Fardal <ainaf@[redacted]<mailto:ainaf@[redacted]>>:

Hei [redacted]

Jeg ønsker å starte på masteroppgaven min. Målet er nok ikke å bli ferdig mens jeg er borte, jeg vil nok benytte anledningen til å prioritere andre ting også, men jeg har fått veileder som er villig til å veilede meg tross avstanden og UIB har gitt meg fritak for obligatorisk samling for at jeg skal få mulighet til å holde framdriften.
Min veileder sitter i Stavanger og heter Arne Jakobsen. Jeg hadde et møte med han for en uke siden og diskuterte problemstilling for oppgaven. Jeg ønsker å undersøke om elevers problemer i kjemi kommer av kjemikonteksten eller av problemer i matematikk. Det er gjort noen utenlandske studier på dette som konkluderer med at det er grunnleggende problemer i matematikk og ikke konteksten som gjør at elever sliter, mens jeg har inntrykk av at elevene rapporterer det motsatte her hjemme.
Veileder og jeg diskuterte mulige måter å gjennomføre datainnsamling på, og i den anledning er jeg avhengig av godkjenning til innsamling og hjelp fra gode kollegaer. Jeg husker du nevnte tidligere i våres at du gjerne bidro med å hjelpe til med utlevering og innsamling av skjemaer/tester. Har du mulighet til å og hjelpe meg med dette neste år? Dette vil også involvere Kjemi 1 – lærerne som gjennomfører prøvene i sine klasser.
Foreløpig er dette tenkt, og det er mye som må komme mer tydelig på plass innen oppstart av skoleåret: Gjennomføre en kartlegging i matematikk av Kjemi 1 elevene (vg2) i uke 34/35. Elevene testes i oppgaver som tilsvarer regneoppgaver i kjemi, men uten kjemikontekst. Kartleggingsprøven gjennomføres på nytt i

starten av 2.semester. Kjemiprøver elevene gjennomfører gjennom året analyseres i forhold til løsningsforslagene på beregningsoppgavene (to terminprøver + to kapittelprøver som omfatter beregninger) Her må oppgavene tilsvare oppgaver som er testet i matematikk. Disse prøvene skal jeg analysere, så derfor er jeg avhengig av å få dem på en eller annen måte. Dette må også avklares.
Tror du det er mulig å få gjennomført dette sammen med deg, [redacted], [redacted] og [redacted]? Jeg kommer til å spørre dem også, men synes det er viktig å avklare det med deg først. Uten din nøkkelperson med helhetlig oversikt og god organiseringsevne tror jeg det blir vanskelig å få til dette på avstand.

Ha en strålende sommer!

Hilsen Aina

7.5 Innhold på kartleggingstesten i matematikk

Tabell 11 Valg av innhold på kartleggingstesten i matematikk ut fra teori og oppgavesamlinger fra Math for chemists og Math Skill.

Denny (1971) Ferdigheter i matematikk som kreves i kjemi	**Matematikkferdigheter** **Math for chemists** **Math Skill**	**Kjemikontekst** **Math Skill** **Math for chemists**	**Vanlige vanskeligheter**	**Oppgaver Kartlegging**
Regning	addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon Regnerekkefølge	Utregning av relativ molekylmasse. Beregning av molar masse Beregninger av likevekter.	Feil bruk av likhetstegnet. Multiplikasjon gir alltid et større tall.	1a,1b,1c,9a
Parenteser	Faktorisering Regnerekkefølge		Forenkle inni parentesen er ikke det samme som å fjerne parentesen.	1a,1d,2b
Fortegnsregler	regning med negative tall		Regning med negative tall.	9a
Potenser	Regnerekkefølge Algebra: Potenstall Eksponential			2a,2b,2c,2d, 2e,3a,3b,3c
Brøk	Forenkle brøker Regning med brøk	Stoffmengde i deler av en løsning. Brøkdeler av elementers masse av massen til en forbindelse.	Addering av brøk: legger sammen teller og nevner. Forkortingsfeil mellom ledd i teller og nevner.	1b,1c,1d,2c, 2d,2e, (7), 8
Desimal	Avrunding, signifikante siffer og desimal.	støkiometri		5a,5b,7,8
Prosent	prosent Veksle mellom brøk, desimaltall og prosent	Prosentvis utbytte masseprosent Prosentvis usikkerhet.		1e
Forhold/ proporsjon	Proporsjoner	Forhold mellom atomer i en forbindelse. Stoffmengden er proporsjonal til massen til en forbindelse. Molforhold i reaksjoner Lineære funksjoner	Ofte problemer med å regne stigningstallet korrekt. Usikre på hva som skal deles på hva.	7,8, (5a,5b,6)

Ligninger	Symboler Algebraiske uttrykk Ligninger og omforming av formler Ligninger som omfatter logaritmer og eksponential. Ligningssett Andregradsligninger	Reaksjonshastighet Aktiveringsenergi Gibbs frie energi Nernst ligning Syre-base beregninger Omgjøring av formler i støkiometri Omforming av formel: pH vs $[H^+]$ Arrhenius ligning Massespekter Molekylers kinetiske energi	Algebraiske uttrykk kan manipuleres ut fra regler i matematikk, men dette kan gi uttrykk som er meningsløse i kjemi Forstå om symboler representerer rene tall eller fysiske størrelser. Skille mellom algebraiske symboler i kjemi og andre symboler som representerer kjemiske stoffer. Evnen til å trekke ut matematisk mening fra symboler. Yates (2008) lister opp og henviser til kilder som nevner flere hindre elever møter ved omforming av formler.	1d,3c,9a,9b, 9c
Grafer	Tabeller og grafer Hvilke grafer skal velges? Lineære funksjoner potensfunksjoner, logaritmefunksjoner Grafisk løsning av ligningssett	Lineære funksjoner: Lambert Beers lov, første ordens kinetikk, Nernst ligning Ikke-lineære funksjoner: endring av aggregattilstander, Reaksjonshastighet	Problemer med å lage tabeller. Tall infiltreres gjerne i tekst. Ofte ulike enheter i samme kolonne. Tolke tabeller: trekke konklusjoner fra tabeller ved store datasett, oversette data	6a,6b

			skriftlig eller muntlig. Tegne graf: sette navn på akser, skalere aksene, plotte punkter, enheter, tegne beste tilpassede kurve. Tolke grafer: lese grafen som et bilde istedenfor en mengde punkter, oversette data fra graf til skriftlig/verbal beskrivelse, tolke deler av grafen, lese skaleringen riktig.	
Logaritmer (tillegg til Denny)	Logaritmer Standardform/ Logaritmisk skala: sammenhengen mellom tall på standardform og logaritmer.	pH og H^+konsentrasjon Avogadros tall, små verdier på stoffmengder og lengder.		2d,2e,3a,3b, 3c
Enheter (tillegg til Denny)	Fysiske størrelser, enheter og omgjøringer. Omgjøringer settes i sammenheng med standardform.	Enhetene blir gjerne utledet fra formler. Vanlige enheter er L, mol, kg, J og kombinasjoner og omgjøringer av disse.	Omgjøring av enheter Enheter innenfor konsentrasjon i kjemi kan være utfordrende: ppm, volumprosent, masseprosent, g/L, mol/L	(4), 5a,5b

7.6 Kartleggingstest i matematikk

Oppgave 1 Regn ut.

Oppgave	Kilde
a) $6 + (7 \cdot 3^2 + 1) =$	Cunningham. A. og Whelan, R. (2014) Maths for chemists, University of Birmingham og University of Leeds, s.9
b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} =$	Cunningham. A. og Whelan, R. (2014) Maths for chemists, University of Birmingham og University of Leeds, s.14
c) $\frac{9}{16} : \frac{3}{4} =$	Cunningham. A. og Whelan, R. (2014) Maths for chemists, University of Birmingham og University of Leeds, s.15
d) $\frac{(x^2-6x+9)x}{x^2-3x} =$	Royal Society of Chemistry, Math Skills, Using algebra, Exploring understanding: Oppgaven er modifisert fra eksempel 3. Hentet fra: https://www.rsc.org/cpd/resource/RES00001508/using-algebra/RES00001503#!cmpid=CMP00003903 [31.05.2017]
e) **Produksjonen av varer har økt med 15%. Ny produksjon er 34500 varer. Hvor mange varer ble produsert før økningen?**	Royal Society of Chemistry, Math Skills, Percentages: Litt endret ved oversettelsen til norsk. Hentet fra: https://www.rsc.org/cpd/resource/RES00001511/percentages/RES00001503#!cmpid=CMP00003936 [31.05.2017]

Oppgave 2 Regn ut

Oppgave	**Kilde**
a) $a^5 \cdot a^2 =$	Hentet fra: Royal Society of Chemistry (2009) Discover maths for chemists, Indices of powers: http://discovermaths.rsc.org/Resource/Item/Indices%20or%20Powers Oppgavene har benyttet seg samme potenstall i alle tre situasjoner for å lettere sammenligne forskjellen i elevenes løsningstrategier.
b) $(2a^5)^2 =$	
c) $\frac{a^2}{a^5} =$	
d) $4,0 \cdot 10^{-3} + 2,0 \cdot 10^{-2} =$	Royal Society of Chemistry, Math Skills, Standardform, Spørsmål 1: Oppgaven er modifisert ved å bytte ut positive med negative eksponenter og endret tallverdien slik at det blir enklere å løse oppgaven uten kalkulator. Hentet fra: https://www.rsc.org/cpd/resource/RES00001505/standard-form/RES00001503#!cmpid=CMP00003868 [31.05.2017]
e) $\frac{2 \cdot 2,4 \cdot 10^{-2}}{8,0 \cdot 10^{5}} =$	Perkins, R. (1978) *The relationship of certain mathematics skills to success of students in introductory community college chemistry*, Oregon State University, s. 176. Tester sammenhengen mellom tall på standardform og bruk av potensregler for divisjon.

Oppgave 3

Oppgave	**Gjør utregningene her:**
a) Regn ut: $\log_{10} 0,010 =$	Royal Society of Chemistry (2009) Discover maths for chemists, med utgangspunkt i oppgaver fra Logarithms 3 Hentet fra: http://discovermaths.rsc.org/Resource/Item/Logarithms%203 [31.05.17]
b) Regn ut: $\log_2 32 =$	
c) Løs ligningen: $\lg(x^2) = -2$	

Oppgave 4

To ulike rektangler er tegnet nedenfor. Det første rektangelet har sider 4m og 3m. Den andre har dobbelt så stort areal som det første rektangelet og har en side som er 2m. Hva er lengden til den ukjente siden i andre rektangel?

Kilde: Scott, F. (2012) Is mathematics to blame? An investigation into high school students' difficulty in performing calculations in chemistry, *Chem. Educ. Res. Pract*., 13,330–336.

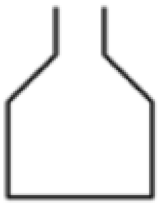
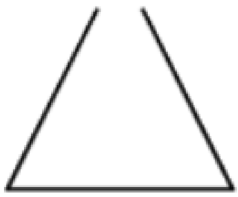
Oppgave 5

a) 250mL Farris inneholder 0,008 g kalsium. 1,0 L Farris har en masse på 1,0 kg. Regn ut konsentrasjonen av kalsium **i mg/L** for Farris.

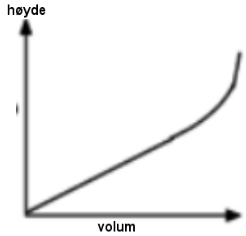
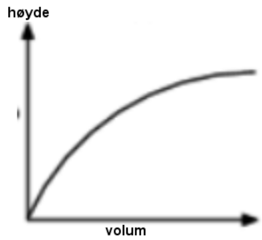
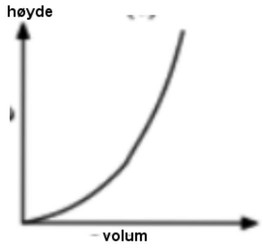
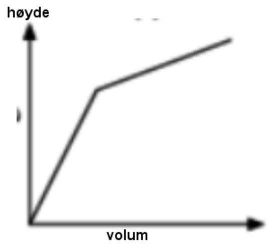
b) Farris inneholder 400 mg/L natrium. 1 g salt tilsvarer omtrent 0,4 g natrium.
Hvor mange g salt er det i 1,5 L Farris?
Tester beregninger med konsentrasjon av blandinger uten å involvere enheten mol.

Oppgave 6

De tre beholderne A, B og C skal fylles med vann ved konstant hastighet.

A	**B**	**C**
		

Grafene (1,2,3,4) representerer høyden til vannet i beholderen som en funksjon av volumet av vann i beholderen. Tre av dem korresponderer til hver av beholderne A, B eller C.

1	**2**	**3**	**4**
			

a) Velg grafen som korresponderer til hver beholder:

Beholder	**A**	**B**	**C**
Korresponderende graf (fyll inn nummer)			

b) Tegn en skisse av beholderen som korresponderer til grafen du ikke valgte i a):

Modifisert utgave av oppgave *Containers* hentet fra *Illustrative mathematics*, https://www.illustrativemathematics.org/content-standards/tasks/2082 **[31.05.2017]**

Oppgave 7
Du har 2 saftflasker som hver inneholder 0,75L saft og en kanne med 5L vann. Saft og vann skal blandes i forholdet 1:4. Et glass skal inneholde 0,25L saftblanding. Regn ut antall glass med saftblanding du kan få.

Selvlaget oppgave fra kjent kontekst fra typiske problemer fra ungdomsskolepensum som omfatter forhold. Oppgaven inneholder begrensende faktor, noe som gjør «missing value» oppgaven mer utfordrende og den krever «del-del»-vurderinger I tillegg er det lagt til et ekstra regnetrinn, der antall glass skal bestemmes. Dette gjøres for å matche de analoge støkiometriberegningene, der man finner massen av et produkt etter først å ha bestemt stoffmengden ut fra den begrensende faktor. Desimaltallene er valgt ut fra kjente brøker.

Oppgave 8
Du har 4,8dL saftblanding som var blandet i forholdet 1:5. Du synes saften er for svak og vil endre blandingsforholdet til 1:4. Hvor mye ublandet saft må du tilsette 4,8dL av den allerede ferdige blandingen?

Hentet fra Matematikk.org: https://www.matematikk.org/oss.html?tid=89020 [31.07.2017]

Oppgave 9

Oppgave	**Kilde**
a) Løs ligningen: $\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{2}$	Cunningham. A. og Whelan, R. (2014) Maths for chemists, University of Birmingham og University of Leeds, s.48-49 Oppgaven er modifisert for å gjøre det enklere å regne uten digitale hjelpemidler i tillegg til at det var ønskelig at uttrykket har samme struktur som uttrykket for utregning av ionekonsentrasjonen i en sur eller basisk løsning av svake syrer eller baser.
b) Du har følgende formel: $s = v \cdot t$ **Finn en formel for** v**.**	Tar utgangspunkt fra fysikken med to versjoner av bevegelsesligning. Konteksten er tatt vekk, men for de fleste vil b) være kjent. Dette blir derfor en test på symbolsk manipulering av ligninger og krever ingen forståelse av hva som skal regnes ut. Hentet fra: http://www.schoolphysics.co.uk/age14-16/Mechanics/Motion/text/Equations_of_motion/index.html [31.05.2017]
c) Du har følgende formel: $v^2 = u^2 + 2as.$ **Finn en formel for** u**.**	

7.7 Analoge kjemioppgaver

Oppgavenummereringen er gitt ved An (analog) etterfulgt av tilsvarende oppgavenummer på kartleggingstesten i matematikk. Det betyr at An1e er analog til oppgave 1e på kartleggingstesten. Noen oppgaver har flere analoge kjemioppgaver fordi resultater underveis har bidratt til et behov for å undersøke flere

Nr	Oppgave (gitt april 2017)	Forklaring
An 1e	Du og labpartneren din gjennomførte en organisk analyse to ganger. På andre forsøk fikk dere 4,6g produkt. Det var en økning på 15% fra første forsøk. Hvor mange gram produkt hadde dere i første forsøk?	Laget for å ligne kartleggingsoppgaven mest mulig. I tillegg til forskjell i konteksten regnes det med mindre tall på desimalform i stedet for store heltall.
An2b$_1$ An9c$_1$	$K_{sp}(FeF_2) = 4 \cdot 10^{-6} \left(\frac{mol}{L}\right)^3$ Regn ut løseligheten til FeF_2	Oppgaven er laget med utgangspunkt i vanlig løselighetsoppgaver gitt i læreverk i Kjemi 1. Det er gjort en avrunding av verdien for Ksp for å lette utregningene uten kalkulator. Oppgaven er tenkt analog til to ulike oppgaver fra kartleggingstesten. Dersom eleven regner $(2x)^2$ riktig men ikke resten av oppgaven, er det korrekt svar analogt til oppgave 2b på kartleggingstesten. Selv om oppgave 9c på kartleggingstesten er en symbolsk omforming av formel, kan det være interessant å se om det gjør noen forskjell på evnen til å løse oppgaven om Ksp er byttet ut med en tallverdi. $K_{sp} = [\,Fe^{2+}][F^-]^2$ der x er løseligheten i mol/L $x \cdot (2x)^2 = 4 \cdot 10^{-6}$ $4x^3 = 4 \cdot 10^{-6}$ $x^3 = 1 \cdot 10^{-6}$ $x = \sqrt[3]{10^{-6}} = \sqrt[3]{(10^{-2})^3} = 10^{-2}$ Løseligheten er $1 \cdot 10^{-2}\,\frac{mol}{L}$
An2b$_2$ An9c$_2$	$K_{sp} = x \cdot (2x)^2$ er generell formel for løselighetsproduktet til et salt av typen MX_2. Finn en formel for x og forklar hva formelen betyr.	Oppgaven er laget for å være analog med 9c når det gjelder den symbolske omformingen av en formel som involverer rotutdrag. Samtidig er det interessant å se om elevene løser deler av oppgaven analogt til oppgave 2b. Det er i tillegg bedt om en forklaring, for å få en ide om hva eleven tror han regner på.
An2d	En løsning med $4{,}0 \cdot 10^{-4} mol\ NaOH$ ble tilsatt en løsning med $1{,}4 \cdot 10^{-3} mol\ HCl$. Finn ut om syren eller basen er i overskudd, og regn ut overskuddet.	Oppgaven er laget som en subtraksjon i stedet for addisjon, fordi differanse i syre/basekonteksten er mer gjenkjennbar for elevene. Elever møter oppgaver med subtraksjoner og addisjoner av stoffmengder oftest i nøytraliseringssituasjoner. Det er derfor denne konteksten er valgt.

Nr	Oppgave (gitt april 2017)	Forklaring
An2e	Regn ut $[OH^-]$ når $2{,}4 \cdot 10^{-2} mol\ Ba(OH)_2$ er i 480mL løsning.	$Ba(OH)_2(aq) \rightarrow Ba^{2+}(aq) + 2OH^-(aq)$ $[OH^-] = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-2} mol \cdot 2}{480 \cdot 10^{-3} L} = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-2}}{(4{,}8 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3})L} = 10^{-2-2-(-3)} \frac{mol}{L} = 0{,}10 \frac{mol}{L}$
An3a1	Regn ut pH i en 0,010 mol/L HCl-løsning	Krever at eleven vet at $pH = -\log\{[H_3O^+]\}$ og at HCl er en sterk syre i tillegg til logaritmeregler og sammenhengen mellom desimaltall og tall på standardform.
An3a2	Regn ut pH i 0,10 mol/L HCl	Samme type oppgave som $3a_1$, men gitt på heldagsprøven mai 2017.
An3c	I en løsning er pH=5. $[H_3O^+]$ er: **A** 0,5 mol/l **B** 0,001 mol/L **C** 0,00005 mol/L **D** 5 mol/L **E** 0,00001 mol/L	Krever at eleven vet at $pH = -\log\{[H_3O^+]\}$ i tillegg til å løse ligningen med hensyn på $[H_3O^+]$ Oppgaven ble gitt som del 1 i kjemiprøven og er derfor gitt med svaralternativer.

An 4 Kjemiprøve gitt november 2016

Forbrenningen av metan danner karbondioksid og vann etter følgende reaksjon: $CH_4\,(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$ der molar masse til karbon, hydrogen og oksygen er gitt som $C = 12 \frac{g}{mol}$, $H = 1 \frac{g}{mol}$ og $O = 16 \frac{g}{mol}$ Bruk denne informasjonen til å svare følgende oppgaver:
Gitt at 12 g metan (CH_4) skal forbrennes. Hvor stor masse i gram kreves av oksygen (O_2)? Gitt at 40 g metan (CH_4) skal forbrennes. Hvor stor masse i gram kreves av oksygen (O_2)?

Kilde: Scott, F. (2012) Is mathematics to blame? An investigation into high school students' difficulty in performing calculations in chemistry, *Chem. Educ. Res. Pract.*, 13,330–336.

An $5a_1$ Kjemiprøve gitt april 2017

Hva er den molare konsentrasjonen til 14,0g NaOH som løses i 350mL vann? Bruk $M_m(NaOH) = 40{,}0 g/mol$ Kilde: Ryan (2011) Student ratio use and understanding of molarity concepts within solutions chemistry, University of Illinois, Chicago, s. 59 (figur 7, oppgave 4)

An 5a₂ Kjemiprøve gitt april 2017 (med kalkulator)

50,0 mL av den svake syren HCN ble overført til en erlenmeyerkolbe, og titrert med 0,103 mol/L natriumhydroksidløsning. Forbruket av standardløsningen var 31,2 mL. Hva var konsentrasjonen til HCN?

$HCN(aq) + NaOH(aq) \rightleftarrows NaCN(aq) + H_2O(l)$
$n(NaOH) = 31{,}2 \cdot 10^{-3}L \cdot 0{,}103 = 3{,}21 \cdot 10^{-3}mol = n(HCN)$
$c(HCN) = \frac{3{,}21 \cdot 10^{-3}mol}{50 \cdot 10^{-3}L} = 0{,}064\frac{mol}{L}$ mulig denne slettes siden det kom på et tidspunkt der elevene var mindre motivert.

An 5a₃ Kjemiprøve gitt mai 2017 (med kalkulator)

Vi vil bestemme konsentrasjonen i en maursyreløsning (HCOOH) og titrerer den med en 0,1 mol/L NaOH løsning. Det går med 22,3 mL NaOH i titreringen. Regn ut konsentrasjonen til maursyre.

An 5a₄ Heldagsprøve mai 2017 (med kalkulator) oppgave 7

Vi løser 13,4 g $AlCl_3$ i vann og fortynner løsningen til 400 mL. Regn ut konsentrasjonen av ionene i løsningen.

An 5b₁ Kjemiprøve gitt april 2017

Du skal lage en 0,1 mol/L NaOH-løsning i en 250mL målekolbe fra en 5,0 mol/L NaOH-løsning. Hvor mange mL av 5mol/L NaOH-løsning skal overføres til kolben?

$0{,}1\frac{mol}{L} \cdot 250 \cdot 10^{-3}L = V \cdot 5{,}0\frac{mol}{L}$
$0{,}1 \cdot 50 \cdot 10^{-3}L = V$
$V = 5{,}0 \cdot 10^{-3}L = 5{,}0\ mL$

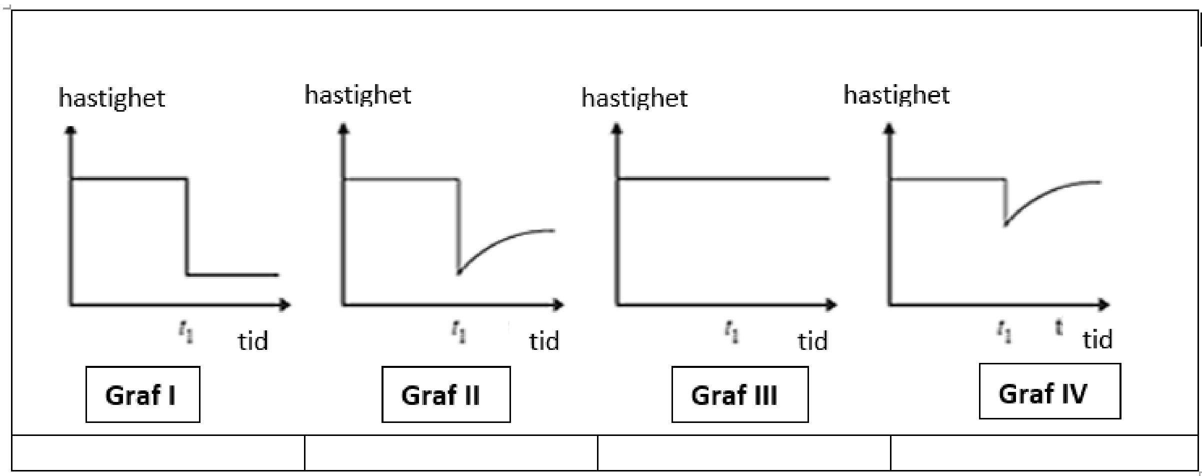
An 5b₂ Heldagsprøve mai 2017 oppgave 8

Du vil lage 0,5 L saltløsning med saltet $PbCl_2$ og løsningen skal ha konsentrasjon på 1,5mol/L. Gjør beregninger og forklar kort hvordan du vil lage løsningen.

An 6a$_1$ Kjemiprøve gitt januar 2017

Reaktantene A og B plasseres i en lukket beholder med en egnet katalysator og reaksjonen skjer etter følgende ligning: $A(g) + B(g) \leftrightarrows C(g)$. Når reaksjonen har nådd likevekt, blir det ved ***t1*** tilsatt en forbindelse som forurenser katalysatoren slik at den ikke virker lenger.

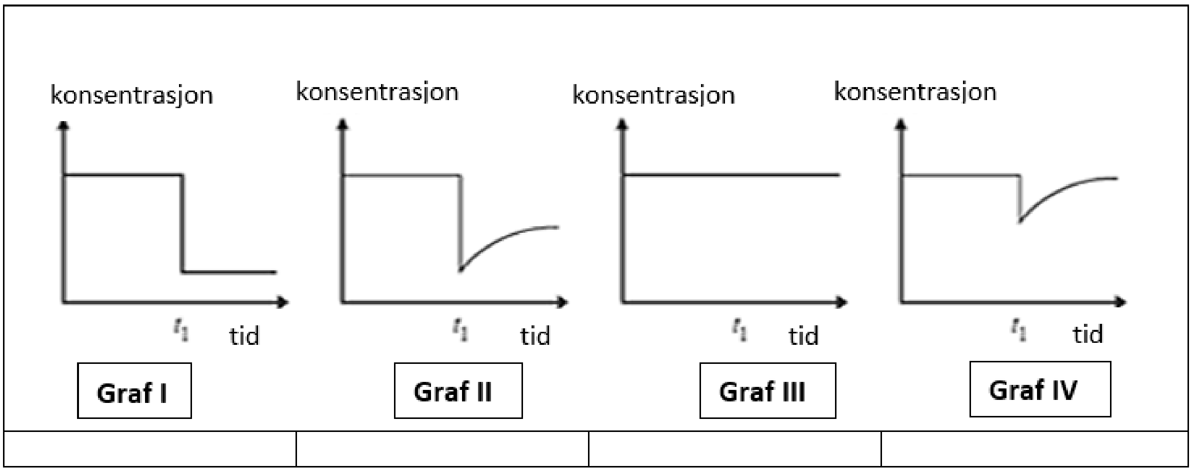
Sett kryss under den grafen du mener representerer hastigheten som en funksjon av tiden.



Kilde: Dynamic science, equilibrium 2010 examquestion. Hentet fra: http://www.dynamicscience.com.au/tester/solutions1/chemistry/pastexamquestion/2010equilibrium.html**[31.05.2017]**

An 6a$_2$ Kjemiprøve gitt januar 2017

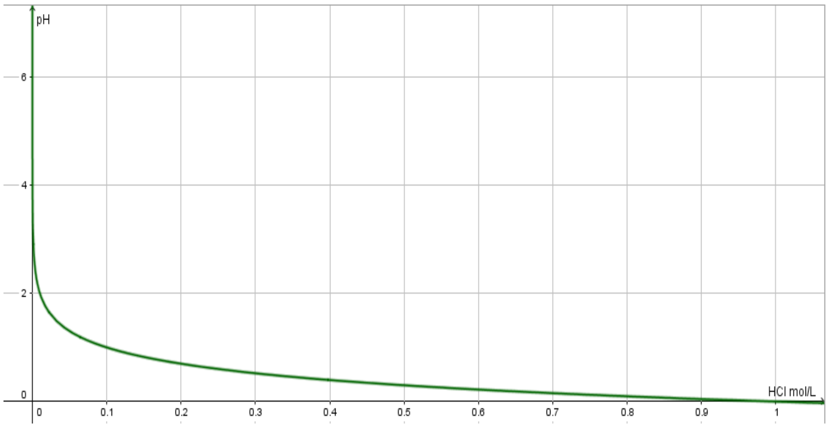
Sett kryss under den grafen du mener representerer konsentrasjonen av produktet C som funksjon av tid.



Kilde: Dynamic science, equilibrium 2010 examquestion. Hentet fra: http://www.dynamicscience.com.au/tester/solutions1/chemistry/pastexamquestion/2010equilibrium.html**[31.05.2017]**

An $6b_1$ Kjemiprøve gitt april 2017

Under ser du et koordinatsystem der konsentrasjonen av en sterk syre (HCl) er gitt langs x-aksen og pH-skalaen er gitt fra 0 til 6 langs y-aksen. Lag en skisse av en graf som viser pH som en funksjon av konsentrasjonen til HCl.



Kurven var ikke tegnet inn i koordinatsystemet.

An $6b_2$ Heldagsprøve mai 2017

Høyere utbytte av hydrogen kan oppnås ved å la biproduktet, CO(g), reagere med vanndamp:

$$CO(g) + H_2O(g) \rightleftarrows CO_2(g) + H_2(g) + energi$$

I en tom beholder blir $CO(g) og\ H_2O(g)$ ledet inn og etter en tid blir likevekt oppnådd. Lag et diagram som viser hvordan stoffmengdene av reaktanter og produkter endrer seg med tiden.

An 7_1 Kjemiprøve gitt desember 2017

Forbrenningen av metan danner karbondioksid og vann etter følgende reaksjon: $CH_4\ (g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$ der molar masse til karbon, hydrogen og oksygen er gitt som $C = 12\frac{g}{mol}$, $H = 1\frac{g}{mol}$ og $O = 16\frac{g}{mol}$ Bruk denne informasjonen til å svare følgende oppgaver: Gitt at 12 g metan (CH_4) skal forbrennes med 24 g oksygen (O_2). Hvor stor masse i gram dannes av karbondioksid (CO_2)?
Gitt at 40 g metan (CH_4) skal forbrennes med 40 g oksygen (O_2). Hvor stor masse i gram dannes av karbondioksid (CO_2)?

Modifisert fra Kilde: Scott, F. (2012) Is mathematics to blame? An investigation into high school students' difficulty in performing calculations in chemistry, *Chem. Educ. Res. Pract.*, 13,330–336.

De to klassene fikk samme oppgave, men ulike tall. Siden valg av mengder kan påvirke resultatet ble denne typen oppgaver testet i flere situasjoner ($An7_2$, $An7_3$, $An7_4$).

An 7_2 mai 2017

Vi har reaksjonen: $3H_2 + N_2 \rightarrow 2NH_3$

Vi lar 100 gram H_2 reagere med 50 gram N_2. Hvor mange gram NH_3 blir dannet?

An 7_3 april 2017

I Følgende reaksjon er gitt: $H_2(g) + I_2(g) \rightarrow 2HI(aq)$

Dersom 1,2 mol H_2 reagerer med 0,9 mol I_2, hvor mange mol dannes av HI?

A. 0,9 mol
B. 1,2 mol
C. 1,8 mol
D. 2,1 mol
E. 2,4 mol

An 7_4 april 2017

II Følgende reaksjon er gitt: $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g)$

$Mm(H_2) = 2{,}00\frac{g}{mol}; Mm(O_2) = 32{,}0\frac{g}{mol}$

Hvor mange gram H_2O dannes når $0{,}80g$ H_2 reagerer med $0{,}80g$ O_2?

- 1,60g
- 0,45g
- 0,90g
- 3,6g
- 4,05g

An 8 Kjemiprøve gitt januar 2017

Oppgavene er gitt med to tallmaterialer.

Reaksjonen under er en likevektreaksjon:

$2SO_2(g) + O_2(g) \leftrightarrows 2SO_3(g)$, $\triangle H = -198{,}4$ kJ

Vi blander sammen 0,60 mol SO_2 og 0,50 mol O_2 i et kar med volum 20 L og lar reaksjonen gå til det er oppnådd likevekt. Da er det igjen 0,45 mol O_2 i karet. Regn ut verdien av likevektkonstanten *K* ved den temperaturen vi har brukt her.

Vi blander sammen 0,60 mol SO_2 og 0,50 mol O_2 i et kar med volum 10 L og lar reaksjonen gå til det er oppnådd likevekt. Da er det igjen 0,48 mol SO_2 i karet. Regn ut verdien av likevektkonstanten *K* ved den temperaturen vi har brukt her.

An 9a Kjemiprøve gitt april 2017

Nr	Oppgave (gitt april 2017)	Forklaring
An 9a1 An9a2	Beregn pH i en $0{,}2\frac{mol}{L}\ NH_3-løsning.$ $K_b(NH_3)=1{,}8\cdot10^{-5}\frac{mol}{L}$ Eller Beregn pH i 0,10 mol/L HCOOH (Heldagsprøve oppgave 4b)	Krever at eleven vet at NH_3 er en svak base og kan sette opp uttrykk for Ka eller Kb. Eleven hadde tilgang på kalkulator, noe som gir muligheten for å løse oppgaven uten å beherske andregradsformel. Konteksten i slike oppgaver er gjerne beregning av pH. I denne oppgaven vil eleven få korrekt dersom beregning av konsentrasjonen er korrekt.
An 9a3	Det føres inn $1{,}0\ mol\ X_2$ og $1{,}0\ mol\ Y_2$ i en beholder på 1L og reaksjonen går mot likevekt, der likevektsreaksjonen er gitt ved: $X_2(g)+Y_2\rightleftarrows 2XY(g)$ Regn ut konsentrasjonen av $X_2\ og\ Y_2$ ved likevekt når $K=16\left(\frac{mol}{L}\right)^{-1}$	$\frac{[XY]^2}{[X_2][Y_2]}=16$ må regnes uten kalkulator $\frac{(2x)^2}{(1{,}0-x)(1{,}0-x)}=16$ $4x^2=16(1{,}0-x)^2$ $x^2=4(1{,}0-2{,}0x+x^2)$ $3x^2-8{,}0x+4{,}0=0$ $x=\frac{8{,}0\pm\sqrt{8^2-(4\cdot4\cdot3)}}{2\cdot3}=\frac{8{,}0\pm\sqrt{16}}{6}$ $x_1=\frac{8{,}0+4}{6}=2{,}0$ Kan ikke være løsning fordi konsentrasjonene blir negative $x_2=\frac{8{,}0-4}{6}=\frac{2}{3}$ Konsentrasjonene er $X_2=Y_2=\left(1{,}0-\frac{2}{3}\right)\frac{mol}{L}=\frac{1}{3}=0{,}33\frac{mol}{L}$

7.8 Intervjumal

Intervjuguiden er utarbeidet etter Kvale og Brinkmann (2009).

Problemstilling: Hvilke vansker opplever elever når matematikken skal forstås innenfor en kjemikontekst, og skiller disse vanskene seg fra når matematikken forstås utenfor kjemikontekst?

Forskningsspørsmål:

- Hvordan er elevenes prestasjoner på matematikkoppgaver som er relevant for kjemi?
- Er elevenes prestasjoner på matematikkoppgaver i kjemikontekst forskjellig fra matematikkoppgaver uten kjemikontekst?
- Hvilke vansker har elevene når de skal tolke og vurdere situasjoner som krever resonnering om forhold og proporsjoner?

Prosjektet har prøver og kartleggingstester som grunnlag for å undersøke kvantitative forskjeller i prestasjoner på oppgaver gitt med og uten kjemikontekst. Ikke korrekte besvarelser har også blitt analysert kvalitativt for å avdekke hvordan feilene oppstår og frekvensen av ulike type feil. Det er imidlertid vanskelig å avdekke hvorfor disse feilene oppstår, og hva som er grunnlaget for at de begås. Et intervju vil kunne avdekke mer av hvordan elevene tolker situasjonene i oppgavene og hvordan de tenker matematikken kan anvendes til å modellere denne situasjonen.

Intervjuene vil derfor fokusere på:

- Hvordan visualiserer eleven situasjonen når konkrete oppgaver skal løses?
- Hvordan velger eleven å løse oppgaven?
- Hvordan vurderer eleven besvarelsen sin?

Siden fokuset på intervjuet er vanskene som oppstår med matematikk i kjemi, utelukkes informanter som har vist høy måloppnåelse på matematikkrelaterte oppgaver på kartleggingstest i matematikk og kjemiprøver. Utvalget er først plukket ut på grunnlag av fire oppgaver fra to sentrale temaer som omhandler forhold, der oppgavene er parvis gitt med og uten kjemikontekst. Deretter er lav totalscore på kartleggingstesten vurdert. Det var bare en elev som hadde klart begge oppgavene uten kjemikontekst uten å mestre noen av oppgavene i kjemikontekst. Vedkommende hadde over 70% totalscore på kartleggingstesten i matematikk, men kan være viktig informant når det gjelder hvordan kjemikonteksten påvirker hans evner til å løse oppgaven. Flere elever hadde ikke klart noen av oppgavene. Fra disse blir 2-3 plukket ut blant dem med lavest score på kartleggingstesten i matematikk og som er anbefalt som gode intervjuobjekter av faglærer. En elev plukkes fra gruppen av elever som ikke klarte matematikkoppgavene, men som fikk til kjemioppgavene. Det kan være interessant å finne ut om disse elevene vil klare matematikkoppgavene bedre nå som de har lært tilsvarende løsningsstrategier i kjemikontekst, eller om den tillærte metoden de bruker i kjemi er instrumentell og ikke overførbar.

Hvert intervju vil vare i ca. 50 minutter og det vil bli tatt lydopptak som anonymiseres.

Innledning

Introduksjonsspørsmål: Varmer opp med enkle spørsmål som som tar utgangspunkt i elevens erfaringer og ikke kunnskap.

- Hva synes du om kjemifaget?
- Har du hatt matematikk i tillegg til kjemi i år?
- Hva synes du om matematikkfaget?
- Opplever du at matematikkfaget har vært viktig for å lære kjemi? (Hvorfor/hvorfor ikke?)
- Er det lettere å regne oppgaver i matematikk enn i kjemi?
- Hva synes du har vært vanskeligst å lære i kjemi?
- (Når) synes du det har vært vanskelig å bruke matematikk i kjemioppgaver?

Oppfølgingsspørsmål: naturlig for å utdype det svaret de gir i introduksjonsspørsmålet.

- Hva er det som gjør at et tema er vanskelig å lære?
- Hvorfor har matematikken vært vanskelig?

Inngående spørsmål: prøver å gå mer i dybden for å konkretisere de vanskene som oppleves.

- Kan du beskrive noen av de utfordringer du har møtt med beregninger i kjemi?

Oppgaver

Direkte spørsmål: Introduserer emner og oppgaver der eleven leser og tolker situasjonen i oppgaven for deretter å kommentere sin løsningsstrategi.

Oppgavene er ikke nødvendigvis nøyaktig lik de originale oppgavene. Originale oppgaver har vært gitt på prøver gjennom året og har ikke nødvendigvis en naturlig sammenheng seg imellom. Siden det har gått en del tid mellom sist eleven løste den originale oppgaven og tidspunktet for intervjuet er det sannsynlig at oppgaven allikevel oppleves som ny for eleven. Det er derfor valgt å holde fokus på at oppgaven er gjenkjennbar og at flere oppgaver innenfor en situasjon skal ha en sammenheng som gjør at ikke eleven trenger å bruke mye tid på å sette seg inn i oppgaven. Oppgavene vil gis en og en om gangen.

Oppfølgingsspørsmål: det vil være naturlig å stille spørsmål underveis der eleven slutter å kommentere sin løsningsstrategi eller når eleven ikke kommer videre i sine beregninger.

Fortolkende spørsmål: viktig å omformulere svarene i et spørsmål eller forsøke å klargjøre elevens tolkning av situasjonen gitt i oppgavene. Denne klargjøringen er viktig når det gjelder elevens fysiske oppfatning av størrelsene som skal beregnes (kontinuerlig vs diskret) og elevens oppfatning av situasjonen som proporsjonal eller ikke-proporsjonal (ikke-lineær, additiv, omvendt proporsjonal).

Oppgave 1

Direkte spørsmål: Regneoppgaver (utgangspunkt i oppgaver fra kjemiprøver)

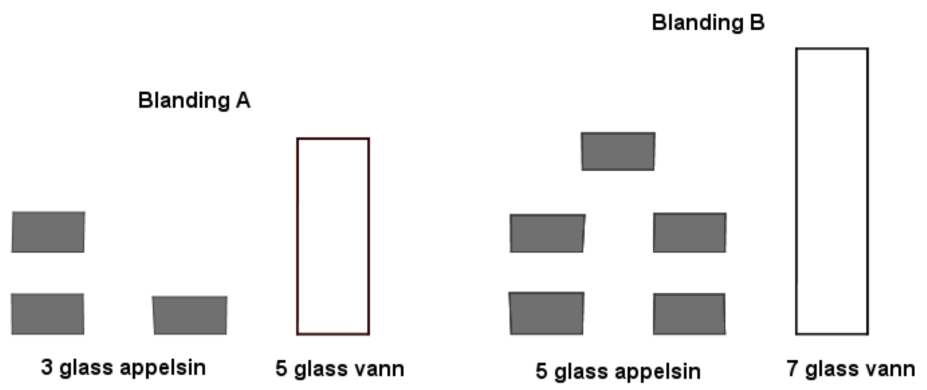
Hva handler denne oppgaven om? Hva er det ved teksten som gjør at du tenker det?
Er det noe i teksten som gjør oppgaven vanskelig å forstå? Hva? Hvorfor?
Hvordan vil du starte? Hvorfor?

Forbrenningen av metan danner karbondioksid og vann etter følgende reaksjon: $CH_4\ (g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$ der molar masse til karbon, hydrogen og oksygen er gitt som $C = 12\frac{g}{mol}\ \ ,\ \ H = 1\frac{g}{mol}\quad og\ \ O = 16\frac{g}{mol}$ Gitt at 12 g metan (CH_4) skal forbrennes med 24 g oksygen (O_2). Hvor stor masse i gram dannes av karbondioksid (CO_2)?

Oppfølgingsspørsmål:

Hva er molar masse? Kan du gi en beskrivelse av hva som skjer i reaksjonen? Hvordan vil en illustrasjon av denne reaksjonen se ut? Beskriv hvordan du vil gå fram for å regne ut mengden CO2. Hvordan ville du løst oppgaven dersom reaksjonene hadde vært annerledes: $H_2(g) + I_2(g) \rightarrow 2HI(aq)$, (1,2mol hydrogengass og 0,9 mol jodgass; 0,80g av begge reaktantene)

Oppgave 2



a) Appelsinkonsentrat og vann skal blandes til appelsinjuice med utgangspunkt i de mengder gitt i illustrasjonen. Ta i betraktning begge blandingene A og B:

   Dersom du bruker all mengde av appelsin og vann som er oppgitt for hver blanding, avgjør hvilken blanding (A eller B) som har mest appelsinsmak, eller om de smaker likt.

Oppfølgingsspørsmål:

Hvordan vil du definere appelsinsmak?
Hvordan tolker du illustrasjonen over?
Hvis den med mest appelsinsmak er den som inneholder mest appelsin, hvilken blanding vil det være?
Kan du forklare hvordan du tenker? Kunne du brukt andre metoder?

- Multiplisere med forholdstallet 5/3 med 5 glass vann i blanding A, og finner at 25/3 er mer enn 7 glass vann. Det er altså mindre vann i blanding B enn det som trengs for å ha lik smak som A.
- Kryssmultiplisere ved å la en størrelse være ukjent og regne for ut mengden dersom smaken skal være lik.
- Sammenligne 3/8 med 5/12 ved å finne fellesnevner: 9/24 og 10/24; B har sterkest appelsinsmak.
- Sammenligne 3/5 med 5/7; 21/35 og 25/35 som betyr at blanding B har flere glass appelsin i forhold til blanding A.

Jeg har eksempel på at noen mente de smakte likt fordi antall glass appelsin og antall glass vann øker likt med 2. Hva tenker du om det?

b) Ta i betraktning bare blanding A:
Ut fra mengdene appelsin og vann som er oppgitt for A skal du blande appelsin og vann i forholdet 2:3. Hvor mye appelsinjuice kan du få?

Oppfølgingsspørsmål:

Hva er det første du tenker på når du leser oppgaven?
Er det noe som gjør deg usikker? I så fall, hva?
Hva er det første du tenker du må gjøre for å løse oppgaven?
Er det appelsinkonsentrat eller vann som er i overskudd?
Hva ville vært i overskudd om blandingsforholdet ble endret til 3:2 mellom appelsin og vann? Ville vi fått mer, mindre eller like mye appelsinjuice?
Hvordan ville du løst oppgaven dersom forholdet skulle vært 1:4?

c) Du skal lage en blanding av A og B. Du måler opp 64 ml Blanding A og blander det sammen med 36 ml av Blanding B. Hva blir konsentrasjonen av appelsin i den nye blandingen?

Oppfølgingsspørsmål:

Forklar hvordan du visuelt ser for deg blandingen lages med utgangspunkt i figuren?
Hva menes med konsentrasjonen av appelsin?
Hva består 64ml blanding A av? Hva med 36ml blanding B?
Forklar hvordan du tenker når du løser oppgaven? Beskriv de ulike trinnene i løsningen din.

d) Du har 64 ml av Blanding A i forholdet 3:5 mellom appelsin og vann. Du vil endre blandingsforholdet til 3:4.

Oppfølgingsspørsmål:

Er det noe ved oppgaven som gjør deg usikker? I så fall hva? Hva betyr de to forholdene som er oppgitt i oppgaven? Hva tenker du om mengdene av appelsin og vann som finnes i blandingen ved de to forholdene? Vil blandingen smake mer eller mindre appelsin? Hva må du gjøre for å endre blandingsforholdet? **Hvor mye appelsinkonsentrat må du tilsette 64ml av den allerede ferdige blandingen?** Hvor stor andel skal appelsin ha i hver av de to blandingene? Hvor stor andel vann er det i de to blandingene?

Oppgave 3

Direkte spørsmål: Regneoppgaver (utgangspunkt i oppgaver fra kjemiprøver)

Hva handler denne oppgaven om? Hva er det ved teksten som gjør at du tenker det?
Er det noe i teksten som gjør oppgaven vanskelig å forstå? Hva? Hvorfor?
Hvordan vil du starte? Hvorfor?

Vi tenker oss at likevekten foregår i en lukket beholder: $2SO_2(g) + O_2(g) \leftrightarrows 2SO_3(g)$ Vi blander sammen 0,60 mol SO_2 og 0,50 mol O_2 i en beholder med volum 10 L og lar reaksjonen gå til det er oppnådd likevekt. Da er det igjen 0,48 mol SO_2 i beholderen. Regn ut verdien av likevektkonstanten *K* ved den temperaturen vi har brukt her.

Oppfølgingsspørsmål:

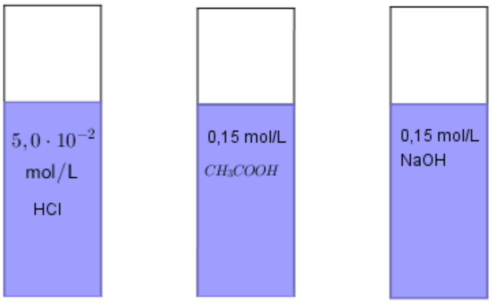
Gi en beskrivelse av K? Hva forteller den om stoffene i beholderen? Hvordan forandrer konsentrasjonene av stoffene i denne reaksjonen i forholdet til den forrige reaksjonen vi så på? Hva betyr det om forholdet er større enn K; mindre enn K? Hva må til for at forholdet skal være lik K? Hvilken verdi har K tilnærmet ved start? Hva tenker du om størrelsen til K for en reaksjon som løper fullstendig mot høyre? Kan du ha samme K med ulike konsentrasjoner? Hvordan?/Hvorfor ikke? Hvor mye svoveldioksid har reagert? Hvor mye oksygen har reagert? Hvor mye svoveltrioksid er dannet?

Oppgave 4

Direkte spørsmål: Regneoppgaver

a) Hva er forskjellig og hva er likt med de tre løsningene? Tenk at du zoomer inn på løsningene.

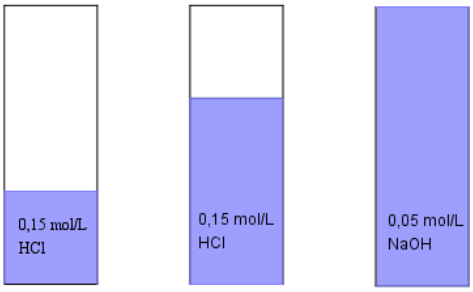
Beskriv hva resultatet blir når du blander sammen CH_3COOH og NaOH.



b) Hva er forskjellig og hva er likt i de tre løsningene?

Beskriv hva resultatet blir når du blander NaOH med hver av de to løsningene med HCl.

Hva blir resultatet når du blander de to beholderne med HCl?



Oppfølgingsspørsmål:

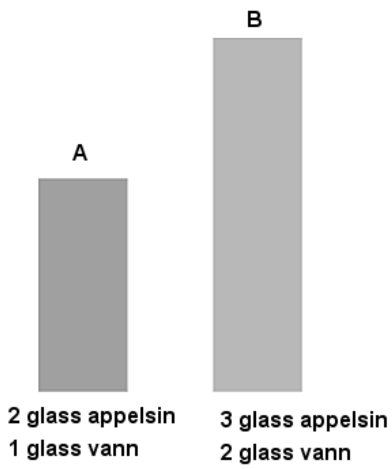
Hva betyr mol/L? Hvor mange mol av stoffene er det i hver beholder? Hvilken betydning har volumet når du sammenligner løsningene? Hvordan vil pH forandre seg når løsningene blandes? Hvordan vil du beskrive konsentrasjonen gitt i disse beholderne? Hvilken sammenheng er det mellom konsentrasjon og volum? Hvilken sammenheng er det mellom stoffmengde og volum?

7.9 Test på bakgrunn av intervjuet.

Oppgave 1

a) Appelsinkonsentrat og vann er blandet til appelsinjuice med to ulike blandingsforhold. Avgjør hvilken blanding, A eller B, som har mest appelsinsmak, eller om de smaker likt. Begrunn valget.

Svar:__________



Hvorfor?:______________________________

____

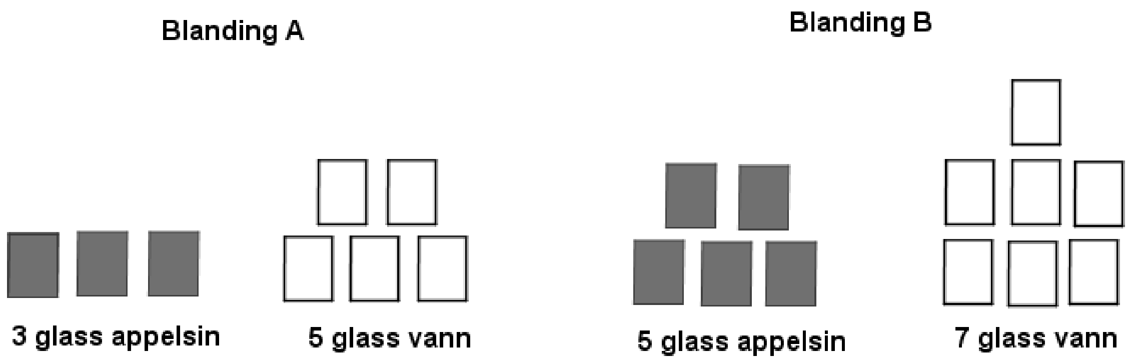
____

____

____

____

b) Glass med appelsinkonsentrat og vann skal blandes til appelsinjuice. Avgjør hvilken blanding (A eller B) som får mest appelsinsmak, eller om de vil smake likt. Begrunn valget.



Svar:________________

Hvorfor?:____

____

____

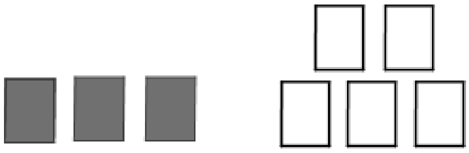
____

____

____

____

Oppgave 2



Ut fra mengdene appelsin og vann som er oppgitt i tegningen over, skal du lage en appelsinjuiceblanding der forholdet mellom appelsin og vann er 2:3.

a) **Avgjør hvilke påstander som er sanne** (flere riktige alternativer):

- 2 glass appelsin og 1 glass vann vil gi 3 glass appelsinjuice.
- 2 glass appelsin og 3 glass vann gir 1 glass appelsinjuice.
- 2 glass appelsin og 3 glass vann gir 5 glass appelsinjuice.
- Om du har 3 glass appelsinjuice, så er 2 av dem appelsin.
- Forholdet 2:3 innebærer at det er 1,5 ganger mer vann enn appelsin.
- Forholdet 2:3 innebærer at det er 1,5 ganger mer appelsin enn vann.
- Forholdet 2:3 innebærer at $\frac{2}{3}$ av blandingen er appelsin.
- Forholdet 2:3 innebærer at $\frac{2}{5}$ av blandingen er appelsin.

b) Avgjør hvilke påstander som er sanne (flere riktige alternativer)**:**

- Vann er begrensende faktor fordi, utfra forholdet 2:3, kreves det mer vann enn appelsin i blandingen. Derfor vil en gå tom for vann først.
- Vann er i overskudd fordi det er mer vann enn appelsin i blandingen.
- Appelsin er i overskudd fordi du skal ha mindre appelsin enn vann i blandingen.
- Appelsin er begrensende faktor fordi, ut fra forholdet 2:3, er det ikke er nok appelsin til at alt vann kan brukes.
- Vann er i overskudd fordi det er mer vann igjen som ikke kan brukes i blandingen.

c) Hvor mye appelsinjuice kan du maksimalt få? (det er lov å bruke deler av innholdet i glassene)

Oppgave 3 Regn ut

Oppgave	**Gjør utregningene her:**
a) Nitrogengass og hydrogengass reagerer til ammoniakkgass i følgende reaksjonsligning: $3H_2(g) + N_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$ Du har 0,75 mol H_2 og 0,75 mol N_2. Hvor mange mol NH_3 dannes?	
b) Du har 10 gule kuler og 10 røde kuler. Fra disse skal det legges så mange gule og røde kuler som mulig i en eske slik at sannsynligheten for å trekke en gul kule først blir 60%. Hvor mange gule og røde kuler legger du i esken?	

Oppgave 4

Oppgave	**Svar her:**
a) Forklar hva molar masse (g/mol) er.	
b) Tenk at du zoomer inn på molekylnivå. Gi en forenklet illustrasjon av hvordan innholdet i beholderne er likt og/eller forskjellig fra hverandre. Innholdet som skal illustreres er gitt under beholderne.	$16g\ O_2$(g) $Mm = 32g/mol$ $8\ g\ CH_4$(g) $Mm = 16g/mol$

c) Tenk at du zoomer inn på molekylnivå. Gi en forenklet illustrasjon av hvordan innholdet i beholderne er likt og/eller forskjellig fra hverandre. Innholdet som skal illustreres er gitt under beholderne.	$0{,}75 mol\ H_2(g)$ $1 mol\ H_2(g)$ $3 mol\ CH_4(g)$
d) Avgjør hvilke beskrivelser som er sanne om $0{,}75 \frac{mol}{L}\ HCl$ (flere riktige alternativer):	○ 3 mol HCl er blandet i en løsning med volum 4L. ○ 3 mol HCl er blandet med 4L vann. ○ 0,75 mol HCl og 1L vann er blandet sammen. ○ 0,75 mol HCl er blandet i en løsning med volum 1L.

Oppgave 5

Du har to blandinger A og B.

Blanding A har et forhold mellom appelsinkonsentrat og vann som er 3:5. Blanding B har et forhold mellom appelsinkonsentrat og vann som er 5:7.

Du måler opp 64 ml av Blanding A og blander det sammen med 36 ml av Blanding B. Hva blir konsentrasjonen av appelsin i den nye blandingen?

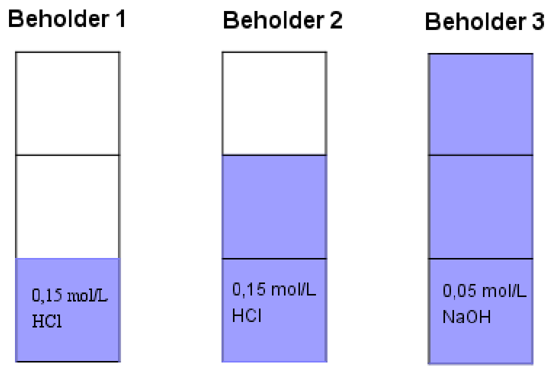
Svar her:

Oppgave 6

<table>
<tr><th>Oppgave</th><th>Svar her:</th></tr>
<tr><td>
a) Tre løsninger er gitt i hver sin beholder. To av beholderne inneholder $0{,}15\,\frac{mol}{L}\,HCl$. En beholder inneholder $0{,}05\,\frac{mol}{L}\,NaOH$.

Hver av beholderne rommer totalt 3L.

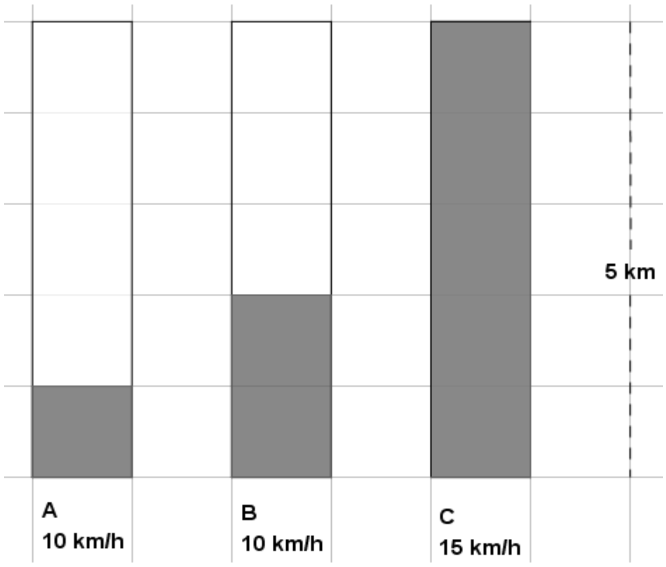
I. Sammenlign den molare konsentrasjonen (mol/L) i hver beholder.

II. Sammenlign og begrunn hvor mange mol det er av stoffene i hver beholder.
</td><td>


Svar her:
I.

II.
</td></tr>
</table>

Oppgave 6

Oppgave	Gjør utregningene her:
b) Tre løpere har tilbakelagt ulike distanser (grått område). I. Sammenlign hastigheten til løperne. II. Sammenlign hvor lang tid de har brukt i forhold til hverandre.	 Svar I. her: Svar II. her:
c) Susanne og Caroline løp like raskt rundt en bane. Susanne startet først. Når Susanne hadde løpt 9 runder, hadde Caroline løpt 3 runder. Når Caroline hadde løpt 15 runder, hvor mange runder har Susanne løpt?	

7.10 Oversikt over antall besvarelser med ikke korrekt, delvis korrekt og ikke forsøkt på kartleggingstest og kjemioppgaver

Tabell 12 Fordeling av antall besvarelser på kartleggingsoppgaver i matematikk som er kategorisert til ikke forsøkt, ikke korrekt og delvis korrekt

Oppgave	Ikke forsøkt	Ikke korrekt	Delvis korrekt	Antall Besvarelser
1a	0	1	4	54
1b	1	2	9	54
1c	0	10	9	54
1d	4	9	4	54
1e	8	22	8	54
2c	2	7	13	54
2d	4	13	2	54
2e	4	10	19	54
3a	4	30	1	54
3b	11	21	1	54
3c	14	4	25	54
4	0	4	0	54
5a	2	8	14	54
5b	1	17	12	54
6a	0	7	9	54
6b	1	36	0	54
7	1	23	9	54
8	10	23	0	54
9a	7	33	7	54
9b	0	3	0	54
9c	2	31	0	54

Tabell 13 Fordeling av antall besvarelser på analoge oppgaver i kjemi som er kategorisert til ikke forsøkt, ikke korrekt og delvis korrekt

Oppgave	Ikke forsøkt	Ikke korrekt	Delvis korrekt	Antall Besvarelser
An1e	19	12	2	52
An2c$_1$	27	4	0	52
An2c$_2$	15	10	0	52
An2d	23	4	0	52
An2e	16	12	5	52
An3a$_1$	9	8	0	52
An3a$_2$	5	0	0	49
An3c	2	15	0	52
An4	0	7	12	53
An5a$_1$	25	4	3	52
An5a$_2$	25	6	3	52
An5a$_3$	10	9	9	49
An5a$_4$	6	7	9	49
An5b$_1$	22	6	1	52
An5b$_2$	8	12	0	49
An6a$_1$	0	20	0	53
An6a$_2$	0	23	0	53
An6b$_1$	18	23	0	52
An6b$_2$	4	22	4	49
An7$_1$	1	19	14	53
An7$_2$	5	12	9	49
An7$_3$	2	19	0	52
An7$_4$	9	28	0	52
An8	3	23	5	53
An9a$_1$	26	6	2	52
An9a$_2$	3	19	0	49
An9a$_3$	38	13	0	52
An9c$_1$	26	15	5	52
An9c$_2$	14	12	1	52

7.11 Resultater fra sammenligning av prestasjon på analoge matematikk og kjemioppgaver

Tabell 14 Krysstabeller over korrekt/ikke korrekt besvarelse på matematikk- og kjemioppgaver fra analyse 1.

Oppgave 1e	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	9	7	16
	ikke korrekt	10	26	36
	sum	19	33	52

Delvis korrekt: 8 i matematikk; 2 i kjemi

Oppgave 2b1	Kjemi			
		Korrekt	Ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	11	19	30
	ikke korrekt	10	12	22
	sum	21	31	52

Delvis korrekt: 13 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 2b2	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	18	12	30
	ikke korrekt	9	13	22
	sum	27	25	52

Delvis korrekt: 13 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 2d	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	18	16	34
	ikke korrekt	7	11	18
	sum	25	27	52

Delvis korrekt: 2 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 2e	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	11	11	22
	ikke korrekt	10	20	30
	sum	21	31	52

Delvis korrekt: 18 i matematikk; 5 i kjemi

Oppgave 3a	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	13	5	18
	ikke korrekt	22	12	34
	sum	35	17	52

Delvis korrekt: 1 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 3c	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	9	2	11
	ikke korrekt	28	13	41
	sum	37	15	52

Delvis korrekt: 23 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 4	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	31	17	48
	ikke korrekt	3	2	5
	sum	34	19	53

Delvis korrekt: 0 i matematikk; 12 i kjemi

Oppgave 5a1	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	11	18	29
	ikke korrekt	9	14	23
	sum	20	32	52

Delvis korrekt: 13 i matematikk; 3 i kjemi

Oppgave 5a2	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	9	20	29
	ikke korrekt	9	14	23
	sum	18	34	52

Delvis korrekt: 13 i matematikk; 3 i kjemi

Oppgave 5a3	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	16	10	26
	ikke korrekt	11	12	23
	sum	27	22	49

Delvis korrekt: 13 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 5a4	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	11	15	26
	ikke korrekt	10	13	23
	sum	21	28	49

Delvis korrekt: 13 i matematikk; 9 i kjemi

Oppgave 5b/An5b1	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	10	15	25
	ikke korrekt	7	20	27
	sum	17	35	52

Delvis korrekt: 11 i matematikk; 1 i kjemi

Oppgave An5b2	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	14	8	22
	ikke korrekt	15	12	27
	sum	29	20	49

Delvis korrekt: 11 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 6a1	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	25	12	37
	ikke korrekt	8	8	16
	sum	33	20	53

Delvis korrekt: 9 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 6a2	Kjemi			
		korrekt	ikke korrekt	sum
Matematikk	korrekt	25	12	37
	ikke korrekt	5	11	16
	sum	30	23	53

Delvis korrekt: 9 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 6b1	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	6	11	17
	ikke korrekt	5	30	35
	sum	11	41	52

Bare korrekt/ikke korrekt som alternativ

Oppgave 6b2	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	6	10	16
	ikke korrekt	13	20	33
	sum	19	30	49

Delvis korrekt: 0 i matematikk; 4 i kjemi

Oppgave 7_1	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	9	12	21
	ikke korrekt	12	20	32
	sum	21	32	53

Delvis korrekt: 9 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 7_3	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	15	5	20
	ikke korrekt	16	16	32
	sum	31	21	52

Delvis korrekt: 9 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 7_4	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	4	16	20
	ikke korrekt	10	22	32
	sum	14	38	52

Delvis korrekt: 9 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 8	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	10	10	20
	ikke korrekt	12	21	33
	sum	22	31	53

Delvis korrekt: 0 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 9a1	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	5	2	7
	ikke korrekt	13	32	45
	sum	18	34	52

Delvis korrekt: 7 i matematikk; 2 i kjemi

Oppgave 9a2	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	4	3	7
	ikke korrekt	23	18	41
	sum	27	21	48

Delvis korrekt: 7 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 9a3	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	1	6	7
	ikke korrekt	0	45	45
	sum	1	51	52

Delvis korrekt: 0 i matematikk; 0 i kjemi

Oppgave 9c1	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	6	15	21
	ikke korrekt	5	26	31
	sum	11	41	52

Korrekt/ikke korrekt er eneste alternativ

Oppgave 9c2	Kjemi			
Matematikk		korrekt	ikke korrekt	sum
	korrekt	11	10	21
	ikke korrekt	15	16	31
	sum	26	26	52

Korrekt/ikke korrekt eneste alternativ

Tabell 15 Resultater fra McNemar test ($p < 0,05$)

Oppgave	McNemar chi-squared statistic, χ^2 med korresponderende *p*-verdi	H_0: det er ingen forskjell på elevenes evne til å løse oppgaven i kjemi eller matematikkontekst.
(1e, An1e)	0,529; p-verdi: 0,467	Opprettholdes
(2b, $An2b_1$)	2,79; p-verdi: 0,0947	Opprettholdes
(2b, $An2b_2$)	0,429; p-verdi: 0,513	Opprettholdes
(2d, An2d)	3,52; p-verdi: 0,0606	Opprettholdes
(2e, An2e)	0,0476; p-verdi: 0,827	Opprettholdes
(3a, $An3a_1$)	10,7; p-verdi: 0,001	Forkastes
(3a, $An3a_2$)	25,5; p-verdi: 0,00	Forkastes
(3c, An3c)	22,5; p-verdi: 0,00	Forkastes
(4, An4)	9,80; p-verdi: 0,017	Forkastes
(5a, $An5a_1$)	3,00; p-verdi: 0,083	Opprettholdes
(5a, $An5a_2$)	4,17; p-verdi: 0,041	Opprettholdes
(5a, $An5a_3$)	0,0476; p-verdi: 0,8273	Opprettholdes
(5a, $An5a_4$)	1,00: p-verdi: 0,3173	Opprettholdes
(5b, $An5b_1$)	2,91; p-verdi: 0,0881	Opprettholdes
(5b, $An5b_2$)	2,13; p-verdi: 0,144	Opprettholdes
(6a, $An6a_1$)	0,800; p-verdi: 0,371	Opprettholdes
(6a, $An6a_2$)	2,88; p-verdi: 0,0896	Opprettholdes
(6b, $An6b_1$)	2,25; p-verdi: 0,134	Opprettholdes
(6b, $An6b_2$)	0,391; p-verdi: 0,532	Opprettholdes
(7, $An7_1$)	0,000; p-verdi: 1,00	Opprettholdes
(7, $An7_2$)	0,800; p-verdi: 0,371	Opprettholdes
(7, $An7_3$)	5,76; p-verdi: 0,0164	Forkastes
(7, $An7_4$)	1,39; p-verdi: 0,239	Opprettholdes
(8, An8)	0,182; p-verdi: 0,670	Opprettholdes
(9a, $An9a_1$)	8,07; p-verdi: 0,0045	Forkastes
(9a, $An9a_2$)	15,4; p-verdi: 0,0001	Forkastes
(9a, $An9a_3$)	6,00; p-verdi: 0,0143	Forkastes
(9c, $An9c_1$)	5,00; p-verdi: 0,0253	Forkastes
(9c, $An9c_2$)	1,00; p-verdi: 0,317	Opprettholdes