HORISONTKUNNSKAP I AKSJON

OM LÆRERNES SYN PÅ RELEVANSEN AV AVANSERT MATEMATISK KUNNSKAP I UNDERVISNINGSARBEIDET

ERFARINGSBASERT MASTER I UNDERVISNING

MED FORDYPNING I MATEMATIKK

SABINE LAUW

MATEMATISK INSTITUTT

UNIVERSITETET I BERGEN

VÅREN 2018

FORORD

I 1996 avla jeg hovedfagseksamen i fiskeribiologi. Siden har jeg knapt tatt i en fisk, bortsett fra dem man tilbereder til middag. Derimot har jeg undervist matematikk i 20 år, mest i videregående skole, men også noen år i matematikk på allmennlærerutdanningen. Det har vært et arbeid som har vært fascinerende, krevende og givende på en gang. Interessen for og gleden ved matematikkundervisning har fått vokse og utvikle seg i årenes løp.

For omtrent fire år siden startet jeg endelig på det studiet som til slutt skulle ende i en mastergrad i undervisning med fordypning i matematikk. Tanken og lysten til å gjøre dette har vært der lenge og jeg skulle sikkert gjort det for lenge siden, men når man allerede har et hovedfag, sitter det langt inne å ta en ny mastergrad. Det har vært en interessant og lærerik prosess å fullføre dette masterstudiet og det har gitt meg nye perspektiver og ny inspirasjon i læreryrket mitt.

Men jeg skal ikke legge skjul på at det også har vært en krevende prosess å ta en mastergrad ved siden av en full undervisningsstilling. Dette hadde ikke latt seg gjennomføre uten støtte fra menneskene rundt meg og det er flere som jeg i den anledning vil takke.

Først og fremst vil jeg takke min veileder Ove Gunnar Drageset for konstruktive innspill, oppmuntring og interessante diskusjoner. Det har vært lærerikt og hjulpet meg å rydde i kaoset. Og du har lært meg å snu på ting.

En kjempestor takk til alle de lærerne som velvillige stilte på intervju og delte sine tanker og erfaringer fra sin undervisning. Uten dem hadde det aldri blitt noen oppgave.

Jeg vil også takke min familie som tålmodig har holdt ut med en mentalt fraværende kone og mor. En mor som har latt kleshaugen vokse til uante dimensjoner, og som har sittet med nesen i artikler under ballettimer, orkesterøvinger og fotballkamper, og som har servert i overkant mye hurtigmiddager. Takk også til min vesle hund som har sørget for å få meg ut på tur, så jeg fikk luftet hjernen. Mange fruktbare tanker har dukket opp på disse turene.

En stor takk retter jeg også til mine kollegaer som har lagt til rette for at jeg har kunnet delta på samlinger. Og ikke minst takker jeg alle mine elever som har inspirert med gjennom alle mine år som lærer.

Bergen, mai 2018.

Sabine Lauw

SAMMENDRAG

I denne oppgaven har jeg undersøkt på hvilken måte lærere på ungdomstrinn og videregående trinn mener at de har bruk for avansert matematisk kunnskap i sin undervisningspraksis og diskutert dette opp mot begrepet horisontkunnskap. Jeg har også sett på hva slags former for avansert kunnskap som kan være nyttig for undervisningsarbeidet.

Jeg har intervjuet fem lærere fra ungdomstrinnet og fem lærere fra videregående trinn som alle hadde mer enn 60 studiepoeng i ren matematikk. Ved hjelp av datastyrt koding og kategorisering av datamaterialet har jeg på bakgrunn av lærernes beskrivelser utviklet ni kategorier for nyttige anvendelser av den avanserte matematiske kunnskapen i undervisningen. Disse kategoriene kan sorteres i de tre hovedområdene (1) *faglig dybde og tyngde*, (2) *fleksibilitet* og (3) *måter å jobbe med elevene på*. Faglig dybde og tyngde omfatter kategoriene *faglig trygghet* og *faglig ressurs i undervisningen.* Fleksibilitet omfatter kategorien *å fristille seg fra læreboka* og *å kunne håndtere uforutsette situasjoner*. Måter å jobbe med elevene på omfatter *differensiering, motivering, veiledning, å ha et blikk fremover* og *å forstå hvordan det er å lære matematikk sett fra elevenes perspektiv.*

Studien min viser at lærerne i stor grad har bruk for avansert matematisk kunnskap i sitt undervisningsarbeid. Denne kunnskapen gir læreren faglig selvtillit og utgjør også en kunnskapsressurs som kan anvendes direkte i undervisningen. Men selvtillit og faglig innsikt gir i tillegg læreren en høy grad av fleksibilitet både i forhold til lærebok og utvelgelse av fagstoff, og også fleksibilitet til å håndtere de spontane situasjonene som oppstår underveis i undervisningen. Fleksibiliteten gjør læreren bedre i stand til å kunne differensiere, motivere, veilede, posisjonere elevene for sin matematiske fremtid og til å forstå hvordan det oppleves å lære matematikk.

Ulike typer av lærerens avanserte matematiske kunnskap kan være nyttig i undervisningen. De bruker den matematikkfaglige innsikten som de har tilegnet seg i løpet av ulike kurs på universitets- og høyskolenivå, men også kunnskap om sammenhenger og kunnskap på metanivå, det vil si kunnskap om matematikkens karakter og egenart.

I prosessen med å omdanne avansert fagkunnskap til nyttig undervisningspraksis, er både erfaring og didaktisk kunnskap nødvendig, i tillegg til lærernes egen refleksjonsevne.

INNHOLD

1. INTRODUKSJON

Mange snakker om at noen mennesker kan lære fra seg mens andre ikke kan det, og mener at dette ikke har noe med utdannelse å gjøre. Å være en god lærer blir av enkelte oppfattet som noe man ikke kan lære eller utdanne seg til, og mer som en iboende eller medfødt egenskap. Også blant lærere kan vi finne denne oppfatningen. I en norsk undersøkelse der man kartla 40 læreres syn på om evnen til å undervise er medfødt eller kan læres, svarte flere at en del aspekter av denne evnen er medfødt (Fauskanger, Mosvold & Kristensen, 2016). Men resultatene var sprikende, og flere mente at dette er noe som man også kan lære seg, eller i hvert fall lære seg å bli bedre til.

Hvordan lærer man seg å bli flink til å undervise matematikk? Og hva skal man lære når man skal lære seg dette? Trenger man fagkunnskap utover det elevene skal lære? Eller trenger man først og fremst didaktisk kunnskap og talent for å undervise? Dette har vært gjenstand for diskusjon i en årrekke. Det er relevant for innholdet i lærerutdanningene og også for innholdet i etterutdanningskurs.

1.1 Bakgrunn for valg av tema

For en del år siden var jeg vikar ved matematikkseksjonen på Allmennlærerutdanningen i Bergen. Jeg møtte mange studenter som stilte spørsmål ved deler av innholdet på det grunnleggende matematikkurset. Mange av dem mente at det var unødvendig å lære om matematikkfaglige tema som var utenfor det pensum de selv skulle undervise. De så ingen relevans i dette i sin fremtidige yrkesutøvelse, noe jeg var sterkt uenig i. Et av min argumenter den gangen, var min personlige oppfatning om at de i det minste måtte kjenne til hvilken skoleverden elevene senere skulle møte, slik at de kunne forberede dem til dette på en god måte.

Jeg har også vært ute og besøkt studenter i praksis både for Høgskolen i Bergen og for Universitetet i Bergen. Her har jeg av og til møtt lærere i ungdomsskolen som lurer på om de forbereder studentene sine godt nok for den videregående skolen. Også i faggrupper for matematikklærere i sosiale media som Facebook ser jeg ungdomsskolelærere som spør hva lærere i videregående skole ønsker at elevene skal kunne fra ungdomsskolen.

Jeg husker også godt uttalelser fra elever om at lærere med mye fagutdanning er dårligere lærere fordi de ikke klarer å komme ned på elevens nivå og forstå det de strever med.

Slike hendelser har gjort meg nysgjerrig på hva det er en lærer egentlig trenger av kunnskap for å kunne utføre sitt arbeid på en god måte, og hva man trenger å vite for å utruste elevene for et langt og helhetlig utdannelsesløp. Har en lærer egentlig bruk for matematikkunnskap utover det de selv skal undervise? Og hvis de har det, på hvilken måte kommer slik kunnskap til nytte i undervisningen?

Læreres arbeid er en kompleks sammensetning av ulike kompetanser, kunnskapstyper og ferdigheter. I hvilken grad de har bruk for matematikkfaglig kompetanse og på hvilke måter de har bruk for denne kompetansen i sitt undervisningsarbeid har det vært lite fokus på. Hva tenker egentlig lærerne selv om dette?

Synet på hva en matematikklærers kompetanser bør være og hva disse kompetansene rommer, har endret seg over tid. Opp gjennom historien var lenge det rådende syn at den viktigste kompetansen var solid fagkunnskap og at de beste lærerne var de som var eksperter i sine fag. På 1970-tallet ble det gjennomført flere studier der man uten å lykkes, prøvde å finne en sammenheng mellom antall matematikkurs som en lærer hadde tatt og kvaliteten på undervisningen (Eisenberg, 1977). Det finnes også nyere studier som viser at det å gi lærerne rene matematikkurs ikke nødvendigvis fører til økt læring hos elevene (f. eks. Garet et al., 2016). Dette viser at lærerens egen matematikkforståelse ikke nødvendigvis gjør vedkommende i stand til å forbedre andres forståelse i faget.

Manglende sammenheng mellom avansert matematisk kunnskap og elevenes prestasjoner kan fort føre til konklusjoner om at slik kunnskap ikke er nødvendig. Petrou & Goulding (2011) skriver imidlertid at det er opplagt at lærerens matematiske fagkunnskap er en viktig komponent for å undervise faget, men at dette alene ikke er tilstrekkelig for å sikre elevenes faglige fremgang. Hvor mye fagkunnskap trenger lærerne egentlig utover det de selv skal undervise? Hvis det å ha avansert matematisk kunnskap ikke er tilstrekkelig, hva er det da lærere må kunne for å gi god og effektiv undervisning? Det fins flere studier som viser at visse former for matematikkunnskaper har en positiv innvirkning på elevenes læring (Monk 1994; Hill, Rowan & Ball, 2005; Campbell et al. 2014), men at denne kunnskapen skiller seg fra vanlig allmenn fagkunnskap.

I 1986 skrev Lee Shulman en artikkel som den gang var banebrytende og nytenkende i forhold til tidligere arbeid innen området matematikkundervisning (Shulman, 1986). Her ser han nærmere på hva slags kunnskap en lærer trenger for å kunne gi god undervisning og fokuserer spesielt på tre hovedkomponenter, nemlig *Content Knowledge*, *Pedagogical Content Knowledge* og *Curriculum Knowledge*. Hovik & Kleve (2016) beskriver disse på norsk som henholdsvis *ren fagkunnskap*, *fagkunnskap for undervisning* og *læreplankunnskap*.

Flere har siden forsøkt å operasjonalisere Shulmans ideer. Blant annet har Deborah Ball og hennes team ved University of Michigan valgt å videreutvikle modellen til Shulman og strukturere den på en annerledes og mer detaljert måte (Ball, Thames & Phelps, 2008). Her innføres begrepet Mathematical Knowledge for Teaching, forkortet til MKT. En av komponentene i MKT-modellen til

Ball, er det som kalles Horizon Content Knowledge (HCK) eller horisontkunnskap på norsk. Dette er kunnskap om hvordan matematikken som undervises strukturelt henger sammen med det utvidete matematiske landskapet som vil møte eleven senere. Horisontkunnskap fanget min interesse, fordi dette begrepet muligens forteller noe om hvordan den avanserte fagkunnskapen læreren innehar kan være nyttig i undervisningssituasjonen.

En gjennomgang av flere artikler om dette emnet viser at forskerne ikke er helt enige om hva slags type kunnskap horisontkunnskap egentlig er, hvordan denne typen kunnskap utvikles og hvordan den påvirker undervisningen. Dette kommer jeg nærmere inn på i teoridelen. Det er gjort spesielt lite forskning på dette i Norge, selv om det finnes noen publiserte artikler om dette også her til lands (f. eks. Mosvold & Fauskanger, 2014). Mye av forskningen er preget av teoretiske betraktninger og/eller noen få eksempler eller vignetter fra praksis. Det finnes riktignok enkelte studier basert på mer omfattende spørreundersøkelser (f.eks. Guberman & Gorev, 2015), men disse studiene er i mindretall.

1.2 Forskningsspørsmål og problemstilling

Ved hjelp av begrepet horisontkunnskap håper jeg å finne svar på de spørsmålene jeg i innledningen stilte. Opplever lærerne at matematisk fagkunnskap utover det de selv skal undervise er relevant for undervisningsarbeidet, eller hadde lærerstudentene rett i at dette var kunnskap de aldri kom til å få bruk for? Mener lærerne at de har bruk for det de har lært på sine høyskole- og universitetskurs i undervisningen? Og i så fall på hvilken måte? Er det grunnlag for å hevde at lærere blir dårligere til å undervise desto mer utdannelse de har slik som enkelte elever har ment? Og hvorfor bør en ungdomsskolelærer bry seg om det elevene skal lære senere?

Med dette som utgangspunkt blir problemstillingen for oppgaven min derfor å finne ut litt mer om hvilken innvirkning horisontkunnskap kan ha på lærernes undervisningspraksis her i Norge.

Forskningsspørsmål som jeg stiller for å belyse denne problemstillingen er:

> På hvilken måte opplever matematikklærere at avansert matematisk kunnskap er nyttig i undervisningsarbeidet?
>
> Hvilke typer matematisk kunnskap kan være nyttige for lærernes undervisningsarbeid?

1.3 Strukturering av oppgaven

I de neste kapitlene skal jeg først gå gjennom teori om temaet horisontkunnskap og avansert matematisk kunnskap i undervisningen. Jeg vil se på hva begrepet horisontkunnskap rommer, hvordan det kommer til uttrykk og hvordan denne typen kunnskap kan utvikles og hvilken sammenheng den har med avansert matematisk kunnskap. Videre presenterer jeg forskningsmetode og deretter resultater og analyse og knytter funnene opp mot teori. Så følger en diskusjon der jeg i lys av eksisterende teori ser på funnene mine i et mer overordnet perspektiv og til slutt en kort oppsummering av de viktigste funnene samt en konklusjon.

2. TEORETISK BAKGRUNN

Matematikk er et fag som blir ansett som et viktig fag. Det er et fag som er av stor samfunnsmessig betydning. Dette kommer tydelig frem av de første linjene i *Læreplan i matematikk fellesfag*:

> Matematikk er ein del av den globale kulturarven vår. Mennesket har til alle tider brukt og utvikla matematikk for å systematisere erfaringar, for å beskrive og forstå samanhengar i naturen og i samfunnet og for å utforske universet. Ei anna inspirasjonskjelde til utviklinga av faget har vore glede hos menneske over arbeid med matematikk i seg sjølv. Faget grip inn i mange vitale samfunnsområde, som medisin, økonomi, teknologi, kommunikasjon, energiforvalting og byggjeverksemd. Solid kompetanse i matematikk er dermed ein føresetnad for utvikling av samfunnet. Eit aktivt demokrati treng borgarar som kan setje seg inn i, forstå og kritisk vurdere kvantitativ informasjon, statistiske analysar og økonomiske prognosar. På den måten er matematisk kompetanse nødvendig for å forstå og kunne påverke prosessar i samfunnet. (Utdanningsdirektoratet, 2006, s.6)

I dette sitatet blir det slått fast at matematikk griper inn i mange andre fag og har drevet utviklingen i vår verden fremover. Læreplanen konstaterer at matematisk kompetanse er nødvendig for utviklingen av samfunnet, og at denne kompetansen også har et demokratisk aspekt ved seg som innebærer det å kunne forstå og vurdere kvantitativ informasjon. En konsekvens av dette er at skolene trenger dyktige lærere som kan gi undervisning som er effektiv og av høy kvalitet slik at elevene utstyres med nødvendig kompetanse for å kunne bidra til utvikling av samfunnet, og at de kan fungere som aktive, kritiske medlemmer av vårt samfunn.

Men hva innebærer undervisning av høy kvalitet? Hill et al. (2008) bruker følgende kriterier for å se på sammenhengen mellom læreres matematiske undervisningskunnskap og kvaliteten på undervisningen: I hvor stor grad aktivitetene i klasserommet henger sammen med matematikk, passende og upassende respons overfor elever, matematisk språk, forekomst av matematiske feil og matematisk mangfold. Studien konkluderer med at det er en sterk sammenheng mellom en lærers kunnskap og hva en lærer kan få til i undervisningen. Senere er det i prosjektet «Learning Mathematics for Teaching Project» (2011) blitt utviklet et redskap for å måle kvaliteten i undervisningen som stort sett korresponderer med disse kriteriene, men med et ekstra kriterium kalt *equity* som handler om at matematikken skal gjøres like tilgjengelig for alle. I asiatiske land som for eksempel Japan, mener man at høy kvalitet på undervisningen kjennetegnes ved at elevene skal engasjere seg intellektuelt i sentral matematikk (Corey, Peterson, Lewis & Bukarau, 2010). I kontrast til dette skriver Fauskanger (2016) at norske lærere fremhever elevenes respons som den mest avgjørende faktoren for undervisning av høy kvalitet og at de dernest fremhever lærerens egenskaper som avgjørende, mens kunnskapen deres kommer lenger nede på listen. Betyr dette at de har liten bruk for sin fagkunnskap når de utfører sitt undervisningsarbeid?

2.1 Matematikklærerens mange ulike kompetanser

Hva er det egentlig en matematikklærer har bruk for å kunne for å gi god undervisning? I *Retnings-linjene for grunnskolelærerutdanningen* står det:

> For eksempel skal lærerne kunne analysere elevenes matematiske utvikling, være gode matematiske veiledere og samtalepartnere, kunne velge ut og lage gode matematiske eksempler og oppgaver, og kunne evaluere og velge materiell til bruk i matematikkundervisningen. De må kunne se på matematikk som en skapende prosess og kunne stimulere elevene til å bruke sine kreative evner. (Kunnskapsdepartementet, 2010, s. 34)

Videre slås det fast at gjennom faget matematikk i lærerutdanningen skal lærerstudenten

> …utvikle undervisningskunnskap i matematikk. Dette innebærer at de må ha en solid og reflektert forståelse for den matematikken elevene skal lære og hvordan denne utvikles videre på de neste trinnene i utdanningssystemet. Videre kreves matematikkfaglig kunnskap som er særegen for lærerprofesjonen. Slik kunnskap omfatter, i tillegg til selv å kunne gjennomføre og forstå matematiske prosesser og argumenter, også å kunne analysere slike som foreslås av andre med tanke på å vurdere deres holdbarhet og eventuelle potensial. (Kunnskapsdepartementet, 2010, s. 34)

Vi ser i dette utdraget at lærerutdanningen blant annet skal gi studentene forståelse for hvordan matematikken som elevene deres skal lære, utvikles videre på de neste trinnene i utdanningssystemet. På hvilken måte er slik kunnskap viktig for en lærers undervisningsoppgave?

Matematikklærerens oppgaver er mange og sammensatte. Noen av disse oppgavene er f.eks. å presentere matematiske ideer, å besvare elevers «hvorfor» spørsmål, å vurdere og tilpasse innholdet i lærebøkene, å stille fruktbare matematiske spørsmål, å knytte emnet en underviser i til emner fra tidligere år eller til emner i kommende år og å knytte representasjoner til underliggende ideer og andre representasjoner (Ball et al., 2008). Noen undervisningsoppgaver er først og fremst knyttet til planleggingsfasen, andre til gjennomføringen og andre igjen til evaluering og refleksjon etter undervisningen (Fauskanger & Mosvold, 2016). Listen over oppgaver er imidlertid lang og det vil neppe være mulig å lage en uttømmende liste over lærerens oppgaver. For å kunne gjennomføre alle de mangfoldige og sammensatte oppgavene kreves det den rette kunnskapen, og man må vite noe om hva denne kunnskapen består i.

2.2 Shulman

I artikkelen fra 1986 introduserer Shulman begrepet «Pedagocial content knowledge» og beskriver denne som «the particular form of content knowledge that embodies aspects of content most germane to its teachability» (Shulman, 1986, s. 9). Shulman (1987) presenterer siden syv ulike kategorier for kunnskap som han mener bør inngå i en lærers kunnskapsplattform (min oversettelse i parentes):

- General pedagogical knowledge (Generell pedagogisk kunnskap)
- Knowledge of learners and their characteristics (Kunnskap om elevene og deres særtrekk)
- Knowledge of educational contexts (Kunnskap om utdanningsmessige kontekster)
- Knowledge of educational ends, purposes, and values (Kunnskap om utdanningens mål, hensikt og verdier)
- Content knowledge (Fagkunnskap)
- Curriculum knowledge (Læreplankunnskap)
- Pedagogical content knowledge (Fagdidaktisk kunnskap)

Han fokuserer så på de tre siste kategoriene som er fagspesifikke og da spesielt på den siste som han kaller for «the missing paradigm», det som ligger mellom fagkunnskap og pedagogiske kunnskap og som binder disse sammen. Men Shulman understreker at han ikke dermed anser de andre kategoriene som mindre viktige. Det er viktig å legge merke til at Shulman ikke snakker spesielt om matematikkfaget, men om kunnskapstyper som alle lærere bør ha innen sitt fag.

Content knowledge innebærer mer enn bare kunnskap om fakta og begreper. Det omfatter også å forstå fagets struktur dvs. hvordan begreper er relatert til hverandre og hvordan man for eksempel etablerer validitet eller falsifiserer påstander. Dette betyr blant annet å forstå fagets syntaks og egenart.

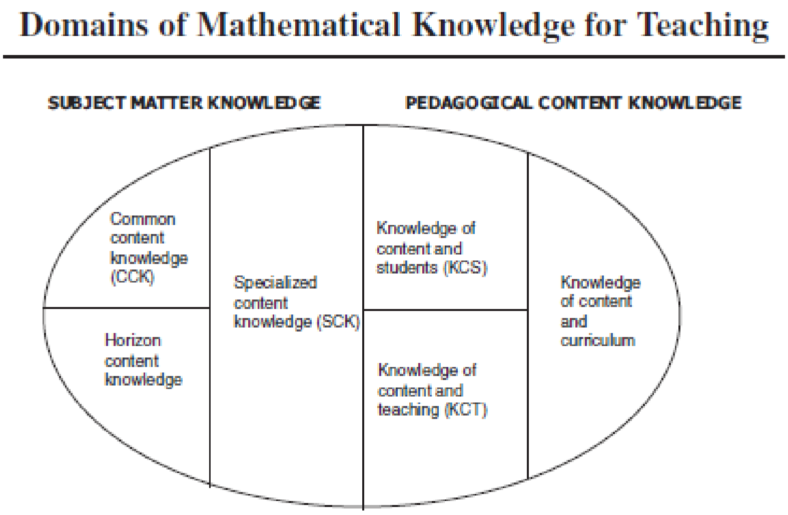
Curriculum knowledge handler ikke bare om pensumet en skal undervise elever i på et bestemt trinn, men også kunnskap om pensum før og etter i utdanningsløpet (vertikal pensumkunnskap), og om kjennskap til hvordan pensumet er knyttet til andre fagdisipliner (horisontal pensumkunnskap). Det handler også om oversikt over lærebøker og læremidler og annet verktøy til bruk i undervisningen.

Pedagogical content knowledge handler ifølge Shulman (1986) bl.a. om å kunne velge gode representasjoner, forklare hvorfor og hvordan ting henger sammen og forstå hva som gjør faget lett eller vanskelig å forstå. Denne formen for kunnskap representerer en sammensmelting av fag og pedagogikk til en forståelse for hvordan emner og problemstillinger er organisert og hvordan de bør presenteres for elevene (Shulman, 1987).

2.3 Domains of Mathematical knowledge for Teaching

Begrepet Pedagogical Content Knowledge som Shulman introduserte har dannet grunnlag for mye forskning og utvikling av flere teoretiske rammeverk.

Mest kjent er kanskje rammeverket «Domains of Mathematical Knowledge for Teaching» slik det presenteres hos Ball, Thames & Phelps (2008). Her introduseres begrepet «Mathematical Knowledge for Teaching», forkortet til MKT, og det defineres som «the mathematical knowledge needed to carry out the work of teaching mathematics» (Ball et al., 2008, s. 395). Praksisbasert teori om MKT (mathematical knowledge for teaching) har blitt utviklet og MKT blir videre inndelt i ulike komponenter (Figur 1).



Figur 1. MKT modellen til Ball et al.(2008)

Dette rammeverket deler kunnskapen inn i hovedområdene *subject matter knowledge* og *pedagogical content knowledge*. Fauskanger, Mosvold & Bjuland (2010) har oversatt denne modellen til norsk og kaller den for UKM-modellen, der UKM står for undervisningskunnskap i matematikk. Her får hovedområdene *subject matter knowledge* og *pedagogical content knowledge* henholdsvis de norske navnene *fagkunnskap* og *fagdidaktisk kunnskap*. Begge disse hovedområdene deles så inn i underkategorier. Hvis vi sammenlikner med Shulmans komponenter, så ser vi at kategorien *curricular knowledge* til Shulman er blitt erstattet med en underkategori av *fagdidaktisk kunnskap* som kalles «Knowledge of content and curriculum (KCC)» eller læreplankunnskap i Fauskanger et al. (2010) sin oversettelse.

Fagkunnskap deles inn i generell fagkunnskap (CCK), spesialisert fagkunnskap (SCK) og horisont kunnskap (HCK). Den generelle matematiske fagkunnskapen (eller allmenn fagkunnskap som Fauskanger et al. (2010) har kalt det) blir her definert som matematisk kunnskap som finnes generelt hos alle som i mer eller mindre grad har fått undervisning i faget, og som ikke er spesielt knyttet til undervisning. Det kan blant annet være å kunne anvende en algoritme for å finne svar på et multiplikasjonsstykke med flersifrede tall. Spesialisert fagkunnskap er derimot kunnskap som også gjør deg i stand til å forklare hvorfor algoritmen fungerer. Denne formen for kunnskap omfatter kunnskaper og ferdigheter som er nødvendige for å undervise faget, men som ikke nødvendigvis er nyttige i andre sammenhenger enn undervisning (Ball et al. 2008).

I tillegg inneholder modellen en tredje underkategori av fagkunnskap kalt horisontkunnskap. Denne komponenten har ikke fått like mye oppmerksomhet som de andre komponentene i MKT-modellen, og den er heller ikke like klart definert. Denne kunnskapskategorien blir beskrevet som det å være oppmerksom på hvordan matematiske emner henger sammen i det matematiske landskapet. Man må både kjenne pensumet som eleven vil møte senere og se forbindelsene til mer avanserte matematiske ideer, og kjenne til hvordan ulike ideer og emner henger sammen. Dette samsvarer blant annet med Shulmans horisontale og vertikale pensumkunnskap.

2.4 Hva er horisontkunnskap?

I dette delkapittelet vil jeg se nærmere på hva horisontkunnskap er, ulike tolkninger og aspekter av begrepet og om det er mulig å komme nærmere en definisjon.

2.4.1 Horisontkunnskap i Domains of Mathematical knowledge for Teaching

Flere år før Ball og hennes kolleger ved Universitetet i Michigan utviklet sin MKT- modell, skrev Ball en artikkel med tittelen *With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics* (Ball, 1993). Her tar hun for seg utfordringen med å knytte matematikk som skolefag til matematikk som et intellektuelt vitenskapsområde og beskriver hvor vanskelig det kan være å undervise på en måte som fremmer reell matematisk tenking. Hun skriver blant annet om sitt arbeid med matematikkundervisning av 9-åringer:

> My understandings and assumptions about nine-year-olds equipped me to make decisions about mathematical representation and activity that served their opportunities to learn. Similarly, my notions about mathematics allowed med to hear in students' ideas the overtures to important understandings and insights. (Ball, 1993, s. 32)

Ball snakker her altså både om *kunnskap om elevene* som gjør at hun kan velge representasjoner og aktiviteter med omhu, og hun snakker om hvordan *matematisk innsikt* hjelper henne til å finne spirene til denne typen innsikt hos elevene.

Da MKT-modellen ble utviklet og begrepet horisontkunnskap ble introdusert, skrev Ball et al. (2008):

> We also provisionally include a third category within subject matter knowledge, what we call «horizon content knowledge». Horizon content knowledge is an awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum. (….) It also includes the vision useful in seeing connections to much later mathematical ideas.
> (Ball et al. 2008, s. 403)

Dette er ingen presis definisjon, men vi ser her at det er to ulike fasetter som antydes. En som er knyttet til oversikt over pensum i skolen og en som handler om sammenhenger i matematikk som ligger mye lengre frem.

Senere skriver Ball & Bass (2009) at det er lærerens ansvar å sørge for at elevene får tilstrekkelig med muligheter til å lære betydelig matematikk og til å møte matematikken med intellektuell integritet. Det å være oppmerksom på den matematiske horisonten er viktig for å ivareta både pedagogisk fremsynthet og matematisk integritet. Ball & Bass (2009) kaller horisontkunnskap for «*a kind of ‘peripheral vision’, a view of the larger mathematical landscape that teaching requires*.»

Videre beskriver de at denne type kunnskap består av fire elementer:

1) En fornemmelse for de matematiske omgivelsene til den «lokale» undervisningen.
2) Faglige hovedideer og strukturer
3) Sentrale matematiske praksiser (F.eks: føre bevis, velge representasjoner, bruke definisjoner)
4) Matematiske kjerneverdier og varhet/fornemmelser (sensiblities) som presisjon, matematisk språk, stringens osv.

(Ball & Bass, 2009)

Horisontkunnskap vil ifølge Ball & Bass (2009) gi lærere en bredere og samtidig mer fokusert innsikt og retningsorientering av sitt arbeide. I deres definisjon hører også det å kunne se bakover i elevenes tidligere pensum med til denne typen kunnskap.

De referer også til Felix Klein som i sine lærebøker for matematikklærere på 20-tallet innførte begrepet «et avansert perspektiv på elementær matematikk» (Klein, 2004) og mener at horisontkunnskap er det komplementære til dette, nemlig et elementært perspektiv på avansert matematikk. De er også klar på at det gjenstår mye forskning på begrepet horisontkunnskap for å kunne definere dette begrepet fullt ut.

2.4.2 Prosessen mot en definisjon av begrepet horisontkunnskap

Et av problemene med å gi en presis definisjon av horisontkunnskap, er at ordet er knyttet til en metafor. Metaforer gir rom for tolkninger og metaforer kan være interaktive og kan skape nye måter å se ting på (Tourangeau & Sternberg, 1982). Metaforer kan også lett skape assosiasjoner som ikke nødvendigvis har vært tilsiktet i utgangspunktet. Det kan føre til misforståelser.

Ordet horisont skaper lett assosiasjoner til noe som ligger langt fremme. Ball & Bass (2009) snakker imidlertid ikke bare om mer avansert kunnskap i sin beskrivelse av den matematiske horisonten, men også om den kunnskapen som ligger før det nåværende. De skriver at horisontkunnskap også kan handle om «capacity to see backwards, to how earlier encounters inform more complex ones» (Ball & Bass, 2009, s. 10). I deres beskrivelse er det altså snakk om oversiktskunnskap over det totale matematiske landskapet, ikke bare det fremtidige. Det handler om å se de store linjene, også om hvordan det nåværende pensum har basis i mindre komplekse sammenhenger.

Det kan også være et problem med ordet horisont versus ordet horisontal. Det er flere eksempler på at kunnskap om fremtidig matematikk og matematiske idéer betegnes som vertikal kunnskap slik Shulman (1987) snakker om *vertical curricular knowledge* og Freudenthal om *vertikal matematisering* (Gravemeijer & Terwel, 2000). *Horisontal curricular knowledge* er derimot kunnskap om hvordan elevens pensum er knyttet til andre fagdisipliner (Shulman, 1987) og *horisontal matematisering* handler hos Freudenthal om å bevege seg fra hverdagens realiteter til matematikkens symbolisering.

En annen kilde til forvirring er at Ball et al. (2008) beskriver horisontkunnskap som «an awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum» (s. 403), mens Ball & Bass (2009) har utviklet beskrivelsen til «a kind of mathematical 'peripheral vison', a view of the larger mathematical landscape» og presiserer at dette ikke er det samme som detaljert kunnskap om pensum og læreplaner. Den første beskrivelsen har ført til at mange har tolket horisontkunnskap til å handle om oversikt over pensum, men Jacobsen, Thames & Ribeiro (2013) presiserer at horisontkunnskap ikke handler om progresjon i pensum, men om avansert matematisk kunnskap som gir forståelse hvordan matematikken som undervises i skolen er relatert til et større matematisk landskap. Derfor dreier horisontkunnskap ifølge Dreher, Lindemeier & Heinze (2016) seg mer om å forstå årsakene til pensumstrukturen enn å kjenne selve strukturen.

Flere har derfor understreket at det er viktig å utvikle en klar definisjon av hva horisontkunnskap er, slik at det kan skapes konsensus om begrepet (Figueiras, Ribeiro, Carrillo, Fernandéz and Deulofeu, 2011; Jacobsen et al., 2013).

Det finnes eksempler på dem som velger å fullstendig omstrukturere MKT-modellen til Ball og hennes kolleger. Carillo, Climent, Carreras & Muñoz-Catalán (2013) velger blant annet å erstatte begrepet horisontkunnskap med kategoriene *Kunnskap om matematikkens struktur* og *Kunnskap om matematikkens praksis*. De skriver: «The first of these elements, knowledge of the structure of the discipline, includes knowledge of the main ideas and structures…. The second of these elements refers to ways of proceeding in mathematics…» (s. 2990)

Videre skriver de at kunnskap om matematikkens struktur handler om å se faginnholdet i perspektiv og at det også inkluderer idéen om økende kompleksitet. Årsaken til at de foreslår denne omstruktureringen, er at begrepene horisontkunnskap og spesialisert fagkunnskap i Balls modell etter deres mening er overlappende begreper. Man kan ikke nødvendigvis skille fagkunnskap som er nyttig for undervisningsarbeidet fra den mer avanserte kunnskapen.

Mange velger likevel å beholde begrepet horisontkunnskap, men har prøvd å finne ut mer om hva denne typen kunnskap kan være, hva som kjennetegner den og hvordan den kommer til uttrykk i praksis og jeg skal se litt nærmere på dette i de neste avsnittene.

2.4.3 Fasetter av horisontkunnskap

Zaskis & Mamolo (2011) er blant dem som har forsøkt å utdype og utforske begrepet horisontkunnskap slik vi finner den i Ball's MKT-modell. Som nevnt tidligere antyder Ball & Bass (2009) to fasetter av horisontkunnskap. Zaskis & Mamolo (2011) understreker at Ball & Bass (2009) snakker om lærerens kunnskap, men elevenes horisont og stiller så spørsmål om hva lærerens horisont i så fall vil være. De velger å utvide begrepet med en indre og ytre horisont for matematiske objekter i tråd med filosofen Edmund Husserls begreper om indre og ytre horisont for objekter. Dette blir eksemplifisert med grafen til funksjonen $y = 2x^2 + 3$. Fokus for denne grafen kan for eksempel være formen på grafen og hva som er toppunkt. Indre horisont vil være aspekter ved denne funksjonen som ikke er i fokus, f.eks. at den ikke har noen reelle røtter eller at den er deriverbar. Ytre horisont vil være aspekter ved den verden objektet eksisterer i som f. eks. mengden av deriverbare funksjoner, mengden av kjeglesnitt, krummingsegenskaper og det å kjenne til hvordan en slik funksjon både har en geometrisk kontekst og en calculus kontekst og hvordan disse er knyttet til hverandre. Denne formen for avansert matematisk kunnskap kan være avgjørende for de valg en lærer gjør i sin undervisning.

Jacobsen, Thames, Ribeiro & Delaney (2012) har brukt vignetter utviklet på bakgrunn av praksis til å definere begrepet horisontkunnskap nærmere. De presenterer til slutt følgende arbeidsdefinisjon:

> Horizon Content Knowledge (HCK) is an orientation to and familiarity with the discipline (or disciplines) that contribute to the teaching of the school subject at hand, providing teachers with a sense for how the content being taught is situated in and connected to the broader disciplinary territory. HCK includes explicit knowledge of the ways of and tools for knowing in the discipline, the kinds of knowledge and their warrants, and where ideas come from and how "truth" or validity is established. HCK also includes awareness of core disciplinary orientations and values, and of major structures of the discipline. HCK enables teachers to "hear" students, to make judgments about the importance of particular ideas or questions, and to treat the discipline with integrity, all resources for balancing the fundamental task of connecting learners to a vast and highly developed field. (Jacobsen et al., 2012, s. 4)

Denne kunnskapen er hverken allmenn eller spesialisert og handler heller ikke om progresjon i pensum, men om kunnskap som gjør læreren i stand til å respondere på hva elevene sier og være oppmerksom på sammenhenger som elevene kan møte i fremtiden (Jacobsen et al., 2013). Her er det viktig å være oppmerksom på at horisontkunnskap altså ikke dreier seg om organiseringen av selve pensumet siden denne typen kunnskap sorterer under *Knowledge of content and curriculum* i Balls modell.

Siden horisontkunnskap handler om det kommende matematiske landskapet, så må denne typen kunnskap nødvendigvis være forskjellig for lærere på ulike trinn, skriver Wassermann & Stockton (2013). De videreutvikler spørsmålene om lærerens kunnskap og elevens horisont som Zaskis & Mamolo (2011) stiller. Begrepet har ifølge dem to sider:

1) Horisont knyttet til pensum som vil være skolematematikk på høyere nivå enn det læreren underviser, altså elevens horisont.

2) En avansert matematisk horisont som relaterer seg til mer avansert matematikk som derfor handler om lærerens horisont.

Også Hurst (2016) understreker at dette er to fasetter av begrepet horisontkunnskap som kan ses på som separate, men likevel er de knyttet til hverandre fordi elevene skal undervises for sine matematiske fremtid. Man kan derfor også snakke om nær horisont (de neste klassetrinnene) og mer distansert horisont (mer avansert matematikk).

Guberman & Gorev (2015) har gjort en større spørreundersøkelse blant israelske lærere om horisontkunnskap der de velger å se på andre komponenter enn nær og fjern horisont. Undersøkelsen deres førte dem til tre underkategorier av horisontkunnskap:

- *Matematikkfaglig innsikt:*
  Dette er beskrives som grundig fagkunnskap med relasjonell forståelse som grunnlag for effektiv undervisning
- *Matematiske sammenhenger:*
  Dette omfatter kunnskap om sammenhenger mellom matematiske begreper, mellom matematiske emneområder og mellom matematikk og andre fagområder
- *Forståelse for metamatematikk:*
  Dette omfatter kunnskap om matematikkens karakter og egenart slik som bevisføring, argumentasjon, logikk og struktur.

Lærernes uttalelser i denne studien viser til en bred og presis matematisk kunnskap som gjør lærerne i stand til å omsette skolematematikken til systematisk og sammenhengende læring. Uttalelsene er mer i tråd med tolkningen til Ball et al. (20099 og plasserer horisontkunnskap under kategorien fagkunnskap.

2.4.4 Horisontkunnskap i andre rammeverk

Ordet horisontkunnskap eller begrepet kunnskap ved den matematiske horisonten som Guberman & Gorev (2015) kaller det, er først og fremst eksplisitt i rammeverket til Ball et. al. (2008). I jakten på en større forståelse og kanskje en mer presis definisjon, har jeg valgt å også undersøkt andre rammeverk. Finnes det analogier til horisontkunnskap? Eller finnes det overlappende begreper? Kan beslektede begreper kaste mer lys over hva begrepet horisontkunnskap rommer? Hvis denne typen kunnskap faktisk er viktig, burde det være mulig å finne spor av dette også i andre rammeverk. Jeg skal derfor ta for meg noen andre rammeverk og teorier der vi finner begreper som enten er analoge til horisontkunnskap eller som er tett knyttet opp til dette.

The Knowledge Quartet

The Knowledge Quartet er et teoretiske rammeverk utviklet i England og Wales (Petrou & Goulding 2011). I dette rammeverket snakker man om *Mathematical Knowledge* **in** *Teaching* som ikke er helt det same som *Mathematical Knowledge* **for** *Teaching*. I denne modellen vektlegger man kunnskap i aksjon i undervisning, altså den kunnskapen som man kan observere i klasserommet, i stedet for kunnskap som grunnlag for aksjon. Rammeverket ble til på grunnlag av studier av lærerstudenters matematiske fagkunnskap. Det inneholder de fire dimensjonene *foundation, transformation, connection* og *contingency.*

De viktigste elementene i *foundation* (grunnlag) er lærerens kunnskap om matematikk og forståelse av matematisk pedagogikk samt forestillingene om dette. *Transformation* (omdanning) handler blant annet om valg av representasjoner, måter å forklare emner på og tilpasning av oppgaver og spørsmål. Kort oppsummert handler det om lærerens evne til å omsette sin fagkunnskap til former som er nyttige i undervisningssammenheng. *Connection* (sammenbinding) handler om å fokusere på sammenhenger. Det kan være sammenhenger mellom ulike emner og begreper eller sammenhenger mellom prosedyrer og strategier. Den fjerde dimensjonen *contingency* (eventualitet) tar for seg lærerens evne til å respondere passende på spontant oppståtte situasjoner, svare på spørsmål som dukker opp eller avvike fra sin opprinnelige plan for timen.

I modellen The Knowledge Quartet finner vi ikke noe eksplisitt begrep som dekker ordet horisontkunnskap. Men de ulike dimensjonene rommer likevel mye av det samme som horisontkunnskap inneholder. Dimensjonen *foundation* handler om den kunnskapen læreren besitter. Denne kunnskapen omfatter også lærerens fagkunnskap tilegnet gjennom skole og høyere utdanning, uavhengig om den blir omsatt til pedagogisk nytte eller ikke (Turner & Rowland 2011). Slik omfatter denne dimensjonen blant annet *general content knowledge* i Balls MKT-modell*.* Ser man på *foundation* i sammenheng med *transformation* vil disse kunnskapsdimensjonene både kunne romme *specialized content knowledge* og begrepet horisontkunnskap. Dette fordi *specialized content knowledge* handler om spesifikk matematikkunnskap som er nyttig utelukkende for undervisning mens horisontkunnskap handler om avansert matematisk kunnskap som gir læreren perspektiver som er nyttige for lærerens undervisningspraksis. Begge deler handler altså om fagkunnskap som omdannes til nyttig praksis.

Om *connection* skriver Rowland, Huckstep & Thwaites (2003):

> This category binds together certain choices and decisions that are made for the more or less discrete parts of mathematical content. It concerns the coherence of the planning or teaching displayed across an episode, lesson or series of lessons. Our conception of coherence includes the

> sequencing of topics of instruction within and between lessons, including the ordering of tasks and exercises, which reflect deliberations and choices entailing both knowledge of structural connections within mathematics and an awareness of the relative cognitive demands of different topics and tasks. (Rowland, Huckstep & Thwaites, 2003, s. 2)

Vi ser her at det blant annet er snakk om å forstå de strukturelle sammenhengene i faget som virker inn på planleggingen av undervisningen slik at den blir sammenhengende. Dette er nært knyttet til forståelsen av horisontkunnskap som kunnskap om hvordan de matematiske ideene henger sammen og utvikles i et langtidsperspektiv slik de er beskrevet hos Ball & Bass (2009).

Om dimensjonen *contingency* skriver Rowland et al. (2003) at det handler om å kunne respondere passende på elevers ideer og at det er viktig å ha god faglig selvtillit for å være i stand til dette. Nettopp dette med planlegging av undervisning og det å kunne avvike fra den oppsatte planen er de to områdene der horisontkunnskap gjerne kommer til uttrykk i undervisningssammenheng (Wasserman & Stockton, 2013). Dette passer også med det Rowland & Zaskis (2013) skriver: «Indeed, knowledge of mathematics beyond the demands of the immediate curriculum offers some guidance to teachers in making an in-the-moment judgement of the mathematical potential of deviating from the intended instructional path» (s. 150).

Man kan derfor se horisontkunnskap som en forutsetning for å utvikle de nødvendige kompetansene *connection* og *contingency*. Hurst (2016) mener til og med at horisontkunnskap ikke bare hjelper læreren i å planlegge og i å respondere på det uforutsette, men at det også gjør læreren i stand til å regissere situasjoner som kan fremkalle uforutsette øyeblikk som kan danne utgangspunkt for interessante samtaler.

Dimensjonene i The Knowledge Quartet er utviklet på grunnlag av observasjoner. Det betyr også at f.eks. *connection* og *contingency* er observerbare kompetanser. Hvis disse er en måte horisontkunnskap kommer til uttrykk på, vil det være mulig å se etter disse kompetansene når man ønsker å observere horisontkunnskap.

Proficiency in teaching mathematics

Schoenfeld & Kilpatrick (2008) utviklet et teoretisk rammeverk kalt «Proficiency in teaching mathematics» (Dyktighet/ferdigheter i matematikkundervisning) for å bestemme hvilke kompetanser som bør utvikles hos en matematikklærer. De nevner syv kompetanser og blant disse finner vi kompetansen *Å kunne skolens matematikk i dybden og bredden*. Å kunne matematikk i dybden betyr å kjenne til pensumets opprinnelse og å forstå hvordan matematiske ideer vokser frem begrepsmessig. Man må kunne mer enn skolepensumet selv, man må vite hvor begrepene kommer fra og hvor de fører hen, basert på bredere ideer eller sentrale emner i matematikken. Denne beskrivelsen er veldig lik horisontkunnskap som vi finner hos Ball & Bass (2009), der de bl.a. skriver at læreren i sitt undervisningsarbeid må kunne fornemme hvordan den nåværende matematikken er relatert til større matematiske ideer, strukturer og prinsipper. Ball & Bass (2009) skriver også at horisontkunnskap handler om både å forstå hvordan elevens tidligere møter med matematikk virker inn på nåværende møter med mer komplisert matematikk, og hvordan det de lærer nå vil forme den fremtidige kunnskapen. Det harmonerer også med Dreher et al. (2016) sitt syn på horisontkunnskap som forståelse for årsakene til for pensumets struktur.

Profound Understanding for Fundamental Mathematics

I tillegg til rammeverkene som allerede er nevnt, kan man ta med begrepet «Profound Understanding for Fundamental Mathematics» som vi finner hos Ma (1999). En slik kunnskap krever en grundig forståelse både i dybde og bredde. En lærer med slik kunnskap vil ha følgende egenskaper:

- Å se sammenhenger mellom matematiske begreper og prosedyrer og undervise med intensjon om å hjelpe elevene til en sammenhengende forståelse så ikke kunnskapen deres blir fragmentert
- Å ha flere perspektiver på en ide og se ulike løsningsmetoder og forstå styrker og svakheter ved de ulike tilnærmelsene
- Å være oppmerksom på de grunnleggende ideene og fokusere på disse
- Å skape coherens/sammenheng i stoffet fordi de har oversikt og forståelse for hele grunnskolepensumet og vet hva elevene skal lære senere og legger det rette grunnlaget for dette.

Også her er det flere elementer som tydelig er i slekt med begrepet horisontkunnskap. For eksempel vil det å se sammenhenger mellom matematiske ideer være noe vi finner i Guberman & Gorev (2015) sine beskrivelser av horisontkunnskap, og som harmonerer med det Ball & Bass (2009) kaller fornemmelser for det matematiske miljøet som omgir den lokale undervisningen. Vi kan også se hvordan elementet *faglige hovedideer og strukturer* i Balls modell kommer frem hos Ma (1999) som *grunnleggende ideer.* Og ikke minst ser vi at Ma (1999) skriver at lærere med denne typen kunnskap ikke lar seg begrense av den kunnskapen de skal undervise på et bestemt klassetrinn, men også ser hva elevene skal lære i fremtiden og benytter muligheten til å legge et skikkelig grunnlag for dette.

Dette er helt i samsvar med det Ball & Bass (2009) skriver om horisontkunnskap som kunnskap som gir læreren perspektiver på hvordan den lokale undervisningen former og virker inn på elevens fremtidige møter med mer kompleks matematikk.

Big Ideas

Et av de sentrale punktene i begrepet horisontkunnskap er det å se hvordan emner er relatert til hverandre og hvordan matematiske ideer henger sammen og utvikler seg gjennom pensumet. Dette innebærer at man må få tak i matematikkens store ideer, og er sterkt beslektet med teorien om såkalte «Big Ideas». Charles & Carmel (2005) definerer dette slik: «A Big Idea is a statement of an idea that is central to the learning of mathematics, one that links numerous mathematical understandings into a coherent whole» (s. 10).

Videre skriver Charles & Carmel (2005) at «Big Ideas» burde være grunnlaget for en lærers matematiske fagkunnskap, for undervisningspraksiser og for matematikkpensumet. Når man forstår «Big Ideas» blir matematikken ikke lenger en mengde med isolerte konsepter, begreper og ferdigheter, men et sammenhengende nettverk av idéer. Effektive lærere vet hvordan «Big Ideas» henger sammen på tvers av klassetrinn og hvordan begreper og ferdigheter utvikles på et klassetrinn og bindes sammen med tidligere og etterfølgende klassetrinn. Vi ser her at koherens er sentralt akkurat som i horisontkunnskap og likedan er kunnskap om hvordan matematiske idéer utvikles over flere klassetrinn sentralt. Når Ball et al. (2008) skriver at horisontkunnskap handler om hvordan matematiske emner er relatert til hverandre gjennom det totale pensumet, er det vanskelig å se de store forskjellene til «Big ideas».

Ifølge Kuntze et al. (2011) har «Big Ideas» blant annet potensiale til å fremme læring av begreper med forståelse, inkludert sammenhenger og forankring av kunnskap, og de er relevante for oppbygging av metakunnskap om matematikk. Det er nærliggende å trekke paralleller til Guberman & Gorev (2015) som skriver at horisontkunnskap både omfatter matematisk innsikt, kunnskap om sammenhenger og kunnskap om matematikk på metanivå.

Hurst (2016) argumenterer for at den komponenten av horisontkunnskap som handler om en avansert matematisk horisont er analog til «Big Ideas» eller i hvert fall uløselig knyttet til dette. Den gjør læreren i stand til å få overblikk og binde sammen hovedidéer og baner vei for den avansert matematiske kunnskapen.

COACTIVE og TEDS-M

I tillegg til de rammeverkene jeg har nevnt overfor har jeg også sett på den tyske studien «Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers», forkortet til COACTIVE (Krauss et al. 2013) og på den internasjonale Teacher Education and Development Study in Mathematics, forkortet til TEDS-M (Döhrmann, Kaiser & Blömeke, 2012) som er en komparativ studie av lærerutdanning i en rekke land der man ser nærmere på hvordan fremtidige lærere forberedes på sin gjerning i grunnskolen. Ingen av disse rammeverkene har begreper som kan dekke innholdet i horisontkunnskap, men ser likevel på avansert matematisk fagkunnskap som viktig.

Målet med COACTIVE var blant annet å utvikle et verktøy til å måle lærernes kompetanser og kunnskap, og blant disse finner vi også matematisk fagkunnskap. Krauss et al. (2013) skriver at uttrykket «Matematisk fagkunnskap» kan forstås på flere nivåer:

Nivål 1: Den hverdagslige matematiske kunnskapen som enhver voksen bør ha.
Nivå 2: Å beherske matematisk kunnskap på skolenivå omtrent på nivå til en middels til svært flink elev
Nivå 3: En dyp forståelse for innholdet i skolematematikken på ungdoms-/videregåendeskole-nivå
Nivå 4: Kunnskap på universitetsnivå som ikke overlapper med innholdet i skolematematikken

Denne måten å dele inn den matematiske fagkunnskapen på er mer presis enn i MKT-modellen til Ball og klargjør hvilket kunnskapsnivå man til enhver tid snakker om. Fagkunnskap hos Ball deles inn i tre områder som ikke nødvendigvis sier noe om nivået, men forteller noe om hvorvidt kunnskapen er nyttig for undervisningen eller ikke. I Balls MKT-modell er det etter min mening litt uklart hvilke nivåer den allmenne fagkunnskapen omfatter, og hvor den avanserte matematiske kunnskapen som danner grunnlag for horisontkunnskap eventuelt begynner, eller om disse områdene overlapper. Jacobsen skriver at allmenn fagkunnskap handler om kunnskap på det nivået man underviser. Det er da nærliggende å stille spørsmål om all kunnskap på høyere nivå enn dette er en form for avansert matematisk kunnskap, altså om begrepet avansert er relativt til nivået læreren underviser på.

Krauss et al. (2013) skriver videre at

> Teachers need to have a command of the material they teach at a level that is higher than that generally taught in the classroom. Not only do teachers need to be able to cope with mathematically challenging instructional situations, rather—here, again, we draw on Shulman—they need a solid base of CK in order to be able to present arguments,

> establish connections, and thus develop students' conceptual knowledge in a way that is aligned with the typical processes of knowledge construction in a subject, here, mathematics. For teachers, more CK not only means being "ahead" of students as they progress through the curriculum. Rather, their CK must include a deeper understanding of the contents of the school mathematics curriculum. As well as seeing "elementary mathematics from a higher standpoint" (Klein 1933), meaning that they are able to relate certain structures of school knowledge to more general mathematical concepts, teachers need an awareness of how mathematical methods apply to everyday objects. (Krauss et al. 2013, s. 155)

Vi ser her etter min mening noen klare fellestrekk med horisontkunnskap. Det å kunne relatere skolekunnskap til mer generelle matematisk konsepter, finner vi hos Ball som elementet *faglige hovedideer og strukturer*. Vi ser også at fagkunnskap ses på som grunnlaget for å kunne presentere argumenter og etablere sammenhenger. I likhet med Ball et al. (2008) refereres det her også til Klein (2004) og at en lærer må ha en fornemmelse for hvordan matematiske metoder anvendes på hverdagsobjekter, det som Guberman & Gorev (2015) beskriver som kunnskap om sammenhenger mellom matematikk og andre områder. Videre ser vi at det her ikke bare er snakk om å være foran elevene, men også om å ha dybdekunnskap. Krauss et al. (2013) skriver imidlertid at de ikke har testet på nivå 4 i denne studien og at man derfor heller ikke kan si noe om hvorvidt kunnskap på dette nivået er av betydning for lærerens profesjonsutøvelse. Det mangler altså datagrunnlag for dette.

I TEDS-M ser man også på lærerens kompetanser og deler den inn i profesjonskunnskap og en affektiv-motiverende side (forestillinger, motivasjon og selvregulering). Profesjonskunnskapen deles inn i fagkunnskap, fagdidaktisk kunnskap og generell pedagogisk kunnskap i tråd med Shulmanns modell. Om sitt arbeide med utviklingen av begrepet *matematisk fagkunnskap* i TEDS-M skriver Döhrman et al. (2012) følgende:

> Thus, a teacher's mathematical knowledge was expected to cover from a higher and reflective level at least the mathematical content of the grades the teacher would teach. In addition, a teacher was considered to need to be able to integrate the educational content into the overall mathematical context as well as to connect the content to higher levels of education. (Döhrman et al., 2012, s. 327)

Det er altså nødvendig at læreren må kunne relatere det lokale pensum til et større matematisk landskap, både i kontekst og nivå. Å relatere det til en større matematisk kontekst kan tolkes som kunnskap om sammenhenger mellom matematiske begreper og mellom ulike matematiske emner, som er en del av horisontkunnskapen slik som beskrevet hos Guberman og Gorev (2015). Å relatere innholdet i undervisningen til høyere nivå er i slekt med Ball et al. (2008) sin beskrivelse av horisontkunnskap som «the vision useful in seeing connections to much later ideas» (s. 403).

Alle rammeverk ser på solid fagkunnskap som viktig

De ulike rammeverkene som jeg nå har sett på, har forskjellige styrker og svakheter, men samtidig underbygger, utvikler og utfyller de hverandre og de har deler som likner hverandre. Viktig å merke seg er at absolutt alle rammeverkene fremhever behovet for matematisk fagkunnskap og at læreren må kunne relatere sin undervisning til mer avanserte matematiske ideer, noe som forutsetter at man faktisk har kunnskap om dette.

2.5 Hvordan horisontkunnskap kan komme til uttrykk i lærerens arbeid

I dette avsnittet skal jeg se nærmere på hvordan horisontkunnskap kan komme til uttrykk i undervisningsarbeidet.

Ball & Bass (2009) skriver at horisontkunnskap er en type kunnskap som kan fremme handlinger som det å se spiren til matematisk innsikt i elevers utsagn, å kunne fremheve og understreke det sentrale, å kunne se sammenhenger og å fange opp misoppfatninger eller årsaker til senere misforståelser. Dette er altså eksempler på hvordan læreren kan anvende sin horisontkunnskap.

Wassermann & Stockton (2013) fremhever at horisontkunnskap kan være nyttig i planleggingsfasen av undervisningen ved at læreren bevisst velger oppgaver og eksempler som forbereder elevene på en mer avansert matematikk. Hurst (2016) beskriver dette slik: «Part of a teachers role can be conseptualised as recognising where the student's mathematical horizon is and position the student to be able to move beyond it» (s. 6) og poengterer at en lærer som har dyp forståelse for sammenhengene mellom begreper i kraft av sin kunnskap, er bedre rustet til å hjelpe elevene til dette.

Jacobsen et al. (2012) viser hvordan horisontkunnskap kan være nyttig også i gjennomføringen av selve timen når læreren må respondere på elevers spørsmål og vurdere deres løsninger i undervisningssituasjonen. Det siste er elementer som i The Knowledge Quartet hører hjemme under dimensjonen *Contingency*.

Fernández & Figueiras (2014) ser på horisontkunnskap i forbindelse med overganger mellom skoleslag, spesielt med fokus på overgangen mellom barnetrinn og ungdomstrinn. De ser på horisontkunnskap som nødvendig for at undervisningen skal ha kontinuitet også i overganger mellom skoletrinn og mellom grunnutdanning og høyere utdanning. De foreslår imidlertid at horisontkunnskap ikke er en underkategori av fagkunnskap, men at det er en type overbyggende kunnskap som former den delen av lærerens kunnskap som kommer til uttrykk i undervisningen. De oppsummerer horisontkunnskap som en type matematisk kunnskap som er spesifikk for undervisningspraksis og som krever både et langtidsperspektiv på de matematiske emnene, og også evnen til å kommunisere disse perspektivene i undervisningen. Dette kommer til utrykk i lærerens undervisningspraksis både i planleggingen av undervisningen, gjennom identifisering og reorientering av elevers misoppfatninger og gjennom å improvisere med utgangspunkt i elevenes besvarelser. Mens Wassermann & Stockton (2013) har fokusert på planleggingsfasen, Jacobsen et al. (2012) på gjennomføringen av timen, tar Fernandez & Figueiras (2014) også med evalueringsfasen.

Guberman & Gorev (2015) definerer horisontkunnskap som den matematiske kunnskap til lærere som omfatter

- evnen til å respondere på uventede situasjoner på en passende måte
- evnen til å etablere sammenhenger mellom ulike matematiske emner, deres representasjoner og hvordan de forholder seg til hverandre
- kunnskap om matematikkens karakter som man kan begynne å utvikle allerede i barneskolen
- evnen til å bruke den matematiske kunnskapen til å planlegge timer og oppgaver som fremmer forståelse av matematiske begreper og utvikler strategier for å håndtere uvante problemoppgaver.

(Guberman & Gorev, 2015)

Her snakker de altså mye om lærernes *evne* og hvordan denne evnen gjør lærerne i stand til å omsette sin kunnskap i undervisningspraksisen på ulike måter.

Kort oppsummert kan vi si at horisontkunnskap kan komme til uttrykk i tre faser av undervisningsarbeidet:

1) Planleggingsfasen
    - Gjennom bevisst valg av oppgaver, eksempler og materiale for å legge det rette grunnlaget for mer avansert matematikk (Posisjonere)
    - Ved å kunne forenkle uten å miste den matematiske integriteten (Integrity)
    - Ved å fokusere på strukturelle sammenhenger (connections)

- Ved å være bevisst på å utvikle matematisk tenking hos elevene og ha fokus på matematikkens egenart (metamatematikk)

2) Gjennomføringsfasen (contingency)
   - Ved å kunne respondere på elevers spørsmål/innspill
   - Ved å se spiren til matematisk innsikt hos elever og støtte den videre utviklingen
   - Ved å kunne improvisere med utgangspunkt i elevenes besvarelser

3) Elevevaluering
   - Ved å kunne vurdere feil og misoppfatninger i elevbesvarelser og vite hvordan man kan reorientere elevene og utnytte deres feil til noe fruktbart

2.6 Hvordan tilegner man seg horisontkunnskap?

2.6.1 Horisontkunnskap og avansert matematisk kunnskap som grunnlag

Det er stort sett bred enighet om at en lærer må kunne mer avansert matematikk enn det de selv skal undervise. Ball & Bass (2009) skriver at horisontkunnskap er avansert kunnskap som gir læreren perspektiv på sitt arbeid. Flere forfattere har påpekt at horisontkunnskap er uløselig knyttet til avansert matematisk kunnskap. Men det er ikke enkelt å definerer hva slags avansert matematisk kunnskap læreren trenger og på hvilken måte den er nyttig for lærerens undervisningsarbeid.

Først må man definere hva vi mener med avansert matematisk kunnskap. Begrepet avansert matematisk kunnskap brukes på ulike måter i litteraturen. Blackburn (2009) anvender begrepet på to måter. Det ene er avansert matematisk kunnskap som en type fagkunnskap man tilegner seg i en grad på universitet eller høyskole i tråd med definisjonen til Zaskis & Leikin (2010) og den andre er avansert matematisk kunnskap som referer til en solid og sammenhengende kunnskap om matematikkens strukturer og ideer slik som f.eks. *profound understanding of fundamental mathematics* som Ma (1999) omtaler.

Zaskis & Mamolo (2011) skriver at «*Teachers' horizon is, for us, deeply connected to their knowledge of advanced (university or college level) mathematics*» (s. 9). På den andre siden har flere studier som tidligere nevnt, vist at antall universitetskurs læreren har, *ikke* har betydning for elevenes resultater. Horisontkunnskap bør derfor på en eller annen måte handle om å omsette denne kunnskapen på en måte som er nyttig for elevene. Eller som Jacobsen et al. (2012) skriver: «…we are convinced that advanced mathematics for teachers needs to be demonstratively related to the work of teaching in school».

En artikkel som ser på former for avansert kunnskap som kan være nyttig for undervisning i skolen, er Stockton & Wasserman (2017). Her er fokuset ikke en liste over hva man bør vite, men på hvordan det å kunne avansert matematikk kan ha innvirkning på lærerens undervisningsarbeid. Gjennom teoretiske betraktninger identifiseres fem typer av avansert matematisk kunnskap som kan ha betydning for undervisning, men det presiseres også at dette ikke er en uttømmende liste. De fem typene er:

- Perifer kunnskap: Å forstå hvordan enkle ting senere blir komplekse
- Evolusjonær kunnskap: Å forstå hvordan matematiske ideer utvikler seg. Omfatter også kunnskap om den historiske utviklingen av ideer og begreper
- Aksiomatisk kunnskap: Å forstå hvordan matematiske systemer er grunnfestet i spesifikke aksiomatiske basiser.
- Logisk kunnskap: Å forstå hvordan matematisk resonnering involverer logiske strukturer og regler om slutninger. Dette omfatter også bevisføring og bruk av et presist matematisk språk.
- Kunnskap om slutninger: Å forstå hvordan statistiske slutninger skiller seg fra andre former for slutninger

Horisontkunnskap er altså ikke det samme som avansert matematisk kunnskap, men avansert matematisk kunnskap er grunnlaget for å utvikle horisontkunnskap. Eller som Blackburn (2014) skriver: Horisontkunnskap er det verktøyet som trengs for å omsette lærerens avanserte matematiske kunnskap til et nyttig redskap for undervisning. Blackburn (2014) definerer den matematiske horisonten som grensen eller overgangen mellom matematiske strukturer og objekter i elevens pensum på den ene siden og de matematiske strukturene og objektene som strekker seg utover dette på den andre siden. Dette gjør at horisontkunnskap kan ses på som en type avansert matematisk kunnskap som binder sammen de matematiske strukturene i elementær og avansert matematikk og det er først når dette skjer, at den avanserte matematiske kunnskapen blir til horisontkunnskap.

Zaskis & Leikin (2010) har gjennomført en spørreundersøkelse blant lærere om deres bruk av avansert matematisk kunnskap i undervisningen på secondary school, altså på ungdomsskole- og videregående skole-nivå. Blant annet rapporterte lærerne om at avansert matematisk kunnskap ga dem bedre selvtillit, gjorde dem i stand til å se sammenhenger og gjorde dem flinkere til å respondere på elevers spørsmål. Vi kan kjenne igjen det å se sammenhenger som et sentralt trekk ved horisontkunnskap i beskrivelsen til Guberman & Gorev (2015) eller som *faglige hovedideer og* *strukturer* hos Ball & Bass (2009). Kunnskap som gjør læreren i stand til å respondere på spørsmål er også sentralt i beskrivelsen av horisontkunnskap hos Wassermann & Stockton (2013).

Even (2011) har gjort en studie av lærere fra ungdomsskole- og videregående skole som deltok på et masterprogram der avansert matematisk kunnskap utgjorde en sentral del av programmet. I denne studien tar man for seg lærere som allerede har jobberfaring når de lærer seg den avanserte matematiske kunnskapen. De vil derfor ha et litt annet blikk på matematikken de lærer enn en som ikke har undervisningserfaring. Alle lærerne i dette masterprogrammet anså avansert matematisk kunnskap som relevant for deres yrkesutøvelse fordi (1) denne kunnskapen kunne brukes som ressurs i undervisningen, (2) kunnskapen ga dem bedre forståelse av hva matematikk er og (3) den minnet lærerne om hvordan det oppleves å lære ny matematikk. At lærerne utviklet en større forståelse for hva matematikk er, kan sammenliknes med det som Guberman & Gorev (2015) kaller for metamatematikk, eller det Ball & Bass (2009) kaller for «core mathematical values an sensibilities»

2.6.2 Utvikling av horisontkunnskap utfra erfaring og praksis

Vi har nå sett at horisontkunnskap er knyttet til avansert matematisk kunnskap. Når man skal tilegne seg eller utvikle horisontkunnskap vil noe av grunnlaget i denne prosessen være å lære seg tilstrekkelig med avansert matematikk (Zaskis & Mamolo, 2011). Men som tidligere nevnt er dette alene ikke noen garanti for at læreren klarer å gjøre dette om til nyttig undervisningskunnskap.

Matematikk som vitenskap er preget av formalisme, symbolisering og stringens. Skolematematematikk er preget av uformell logikk, konkretisering og utgangspunkt i elevenes erfaringsverden gjennom et konstruktivistisk syn. I løpet av årene skal man binde disse to verdener sammen. Til det trenger man lærere med horisontkunnskap som har basis i avansert matematisk kunnskap.

Men å forberede elever på å strekke seg mot sin horisont handler om mer enn bare ren fagkunnskap. Wassermann (2017) skiller mellom horisontkunnskap og den matematiske horisonten. Den matematiske horisonten er en form for ikke-lokal kunnskap, der ikke-lokal kunnskap også omfatter kunnskap om det som ligger før det nåværende. Men ikke all slik kunnskap er horisontkunnskap. Horisontkunnskap er ifølge Wassermann (2017) å kjenne den matematiske horisonten på måter som er produktive for matematikkundervisningen i skolen. Dette står for øvrig i kontrast til Blackburn (2014) som beskriver horisonten som *grensen* mellom elevens pensum og den avanserte matematikken, og horisontkunnskap som et verktøy som binder disse to områdene sammen. Horisontkunnskap handler også om undervisningspraksiser og sentrale matematiske verdier (Ball &

Bass, 2009). Man kan se på horisontkunnskap som kunnskap som lærere utvikler fra sin egen praksis (Hurst, 2016) og dermed handler det også om erfaring.

Ma (1999) skriver at *profound understanding of fundamental mathematics*, som altså kan ses på som en type avansert matematisk kunnskap, utvikles gjennom å fordype seg i ulike typer undervisningsmateriell, gjennom å utveksle erfaring med kolleger, ved å lære av elevers tankemåter og gjennom å gjøre matematikk selv. Kunnskapen er dynamisk av natur og vil utvikle seg gjennom et langt yrkesliv som lærer. I denne prosessen vil lærerens evne til refleksjon og evaluering av egen undervisning være sentral.

Man kan også undervise i hvordan mer avansert matematisk kunnskap kan brukes i undervisning i lærerutdanning eller videreutdanningskurs. I et australsk videreutdanningsprogram lyktes man med å øke ungdomsskolelæreres forståelse for matematiske sammenhenger og deres totalinnsikt i matematisk struktur (Vale, McAndrew & Krishnan, 2010). Dette programmet fokuserte ikke bare på å utvikle lærerens avanserte matematiske kunnskap, men fokusert også på pedagogiske og praktiske sider, altså mer på hvordan man kan anvende denne kunnskapen. Opprinnelig var programmet designet med tanke på å øke lærernes kompetanse så de skulle kunne undervise på videregående nivå, men det viste seg at de også ble bedre til å undervise på ungdomsskolenivå.

Vi ser også av studien til Even (2011) at å gi matematiske fagkurs til allerede praktiserende lærere, gir disse lærerne kunnskap som de ser som nyttige for sin undervisning. Her ligger erfaringen før fagkunnskapen og former måten lærerne tar til seg fagkunnskapen på.

Horisontkunnskap utvikles altså gjennom et samspill mellom avansert matematisk kunnskap og undervisningserfaring og gjennom en bevisstgjøring av hvordan den avanserte matematiske kunnskapen kan ha anvendelse i undervisningen. Man kan på den ene siden tenke seg at en person først tilegner seg avansert matematisk kunnskap og at deler av denne kunnskapen kan foredles til horisontkunnskap gjennom erfaring og refleksjon. På den andre siden kan undervisningserfaringen komme først og den avanserte matematiske kunnskapen tilegnes i etterkant. Erfaringen vil da gjøre at deler av den nye fagkunnskapen blir filtrert og omsatt til nyttig kunnskap i undervisningssammenheng allerede fra starten av. Nøkkelen til å utvikle undervisningserfaring og fagkunnskap til horisontkunnskap, er lærerens evne til refleksjon.

2.7 Foreløpig oppsummering

Det ser ikke ut som begrepet horisontkunnskap så langt har fått noen endelig definisjon. Man kan imidlertid identifisere noen foreløpige hovedtrekk utfra forskningen som så langt har vært gjennomført.

1) Horisontkunnskap har to hovedfasetter (Ball et al., 2009; Zaskis & Mamolo, 2011; Wassermann & Stockton, 2013)

- Kunnskap om elevenes tidligere og kommende pensum. Dette kan kalles nær horisont eller elevens horisont.
- Kunnskap om hvordan matematikken man underviser er utviklet fra enklere ideer og relatert til fremtidige ideer, mer avansert matematikk og det matematiske landskapet forøvrig. Dette vil da være en mer distansert horisont, eller lærerens horisont

2) Horisontkunnskap vil virke inn på lærerens arbeid på flere områder:

- I lærerens planlegging av undervisningen sin, gjennom valg av sekvensering, valg av stoff, representasjoner osv. (Wassermann & Stockton, 2013; Hurst, 2016; Rowland et al. 2003)
- I lærerens evne til å respondere på elevenes uttalelser i mer spontant oppståtte situasjoner (Jacobsen et al. 2012)
- I evaluering av elevbesvarelser og reorientering av misoppfatninger (Ball & Bass, 2009; Fernandez & Figueiras, 2014)

3) Dette vil føre til:

- En mer koherent (sammenhengende) og mindre fragmentert undervisning fordi læreren ser strukturene og sammenhengene både i bredde, dybde og vertikalt, og er i stand til å tydeliggjøre disse for elevene (Ma, 1999; Guberman & Gorev, 2015; Ball & Bass, 2009; Rowland et al., 2013)
- En undervisning som tar hensyn til matematikkfagets egenart slik som f.eks. bevisføring, symbolisering og stringens, og som derfor bedre forbereder elevene på den avanserte matematikken (Stockton & Wassermann, 2017; Wassermann & Stockton, 2013)

4) Horisontkunnskap utvikles gjennom et samspill mellom avansert matematisk kunnskap, erfaring og lærerens evne til refleksjon (Guberman & Gorev, 2015; Ma, 1999; Vale et al., 2010; Blackburn, 2014; Even, 2011)

3. METODE

I dette kapitlet vil jeg presentere og begrunne mitt valg av metode. Jeg vil gjøre rede for utvalg av informanter og forklare hvordan jeg har gått frem for å belyse problemstillingen. Jeg vil også diskutere etiske betraktninger og beskrive hvordan jeg har gått frem for å analysere intervjuene.

3.1 Læringssyn

Når man skal utføre en studie er det viktig å avklare hvilket teoretisk ståsted den som gjennomfører studiet jobber ut ifra. Når det gjelder studier som omfatter læring og undervisning er det derfor viktig å klargjøre læringssynet til forskeren, i dette tilfelle meg.

Det finnes ulike syn på hva læring er og hvordan læring foregår. Det er vanlig å dele de ulike typene læringssyn inn i kategorier som *det positivistiske læringssyn*, *det kognitivistiske læringssyn*, *det konstruktivistiske læringssyn* og *det sosiokulturelle læringssyn*.

Det positivistiske læringssynet baserer seg på oppfatningen om at kunnskapen er objektiv og eksisterer utenfor individet. Erkjennelse og viten oppnås utelukkende gjennom empirisk observasjon og erfaring gjennom sansene. I den motsatte enden finner vi det kognitivistiske perspektivet som utelukker miljøets betydning for læring, og mener kunnskap er bygget på tanke og fornuft i kraft av individets kognitive prosesser. Det skilles mellom informasjon og kunnskap. Kunnskapen eksisterer ikke utenfor individet, men dannes gjennom individets tolkning av inntrykk. Et tredje læringssyn er det konstruktivistiske læringssyn som er beslektet med det kognitivistiske og derfor også kalles for kognitiv konstruktivisme. Her finner vi blant annet Piagets teorier om skjema og læring gjennom akkomodasjon og assimilasjon. Dette læringssynet legger vekt på samspill mellom individ og miljø i læringsprosessene. Individet konstruerer sin egen subjektive kunnskap ved å velge ut, tolke og tilpasse ytre stimulering. Det skjer slik en vekselvirkning mellom påvirkning og tanke som gjør kunnskapen dynamisk og individuell (Imsen, 1998). Det sosiokulturelle læringssyn kalles også for sosialkonstruktivisme og legger vekt på at læring skjer i sosiale relasjoner og ikke er et individuelt anliggende. Kommunikasjon og samhandling mellom mennesker er helt sentralt. Språk og sosiale forhold bidrar til å forme kunnskapen.

Mitt læringssyn plasserer seg et sted i den konstruktivistiske tradisjonen, men delvis også i den sosiokulturelle. Læring er en prosess der individet konstruerer sin kunnskap, men som også skjer i samspill med miljøet og i sosiale relasjoner. Kunnskap er ikke noe endelig og ferdig definert, men er dynamisk av natur og utvikles i samspill med individets erfaringer gjennom refleksjon og gjennom interaksjon mellom individer og i dialog med omgivelsene.

3.2 Begrepsavklaring

I teorikapittelet har jeg prøvd å redegjøre for mulige definisjoner og tolkninger av begrepet horisontkunnskap. Noe av formålet med denne oppgaven er å kaste mer lys over dette begrepet, og jeg velger derfor å ikke begrense meg til noen spesifikk definisjon av begrepet horisontkunnskap, men kombinerer de ulike beskrivelsene for å få frem forskjellige sider og aspekter av begrepet. Jeg baserer meg i utgangspunktet på Ball & Bass (2009) sin beskrivelse av horisontkunnskap som avansert matematisk kunnskap som gir perspektiv på undervisningen, men støtter meg også på bl.a. Wassermann (2017) sin beskrivelse av horisontkunnskap som ikke-lokal matematisk kunnskap som er nyttig for undervisningen og på Blackburn (2014) som beskriver horisontkunnskap som et verktøy som knytter sammen de matematiske objektene og strukturene som finnes i elevenes pensum med objektene og strukturene som finnes i den avansert matematikken.

Mer spesifikt vil jeg i denne oppgaven se på den delen som handler om avansert matematisk kunnskap som grunnlag for å utvikle horisontkunnskap. Jeg tar utgangspunkt i avansert matematisk kunnskap definert som avansert matematikk tilegnet gjennom kurs på universitets-/høyskolenivå slik som beskrevet hos Zaskis & Leikin (2010) og ser på horisontkunnskap som verktøyet for å nyttiggjøre seg av denne kunnskapen i undervisningssituasjonen. Jeg ser at denne definisjonen av avansert matematisk kunnskap kan være noe problematisk ettersom de ulike matematikkursene på universitets- og høyskolenivå kan være veldig forskjellige med hensyn på innhold. Men man kan likevel anta at en lærer med mer enn 60 studiepoeng i matematikk bør ha en kunnskap i matematikk som er mer avansert enn den man finner i programfag i matematikk på videregående skole. Definisjonen er nyttig også fordi den er konkret.

Her er det viktig å påpeke at horisontkunnskap i beskrivelsen til Ball & Bass (2009) er utviklet med tanke på lærere på barnetrinn, mens jeg her tar for meg lærere på ungdomstrinn og videregående trinn. På dette nivået vil avansert matematisk kunnskap forstått som matematikk på høyskole- eller universitetsnivå spiller en mer fremtredende rolle, enn den vil gjøre på lavere trinn.

3.3 Valg av metode for datainnsamling

Når man skal velge forskningsmetode, er det viktig å ta i bruk en metode som er egnet til å besvare forskningsspørsmålet. Jeg stiller i dette arbeidet to forskningsspørsmål:

1) På hvilken måte opplever matematikklærere at avansert matematisk kunnskap er nyttig i undervisningsarbeidet?
2) Hvilke typer matematisk kunnskap kan være nyttige for lærernes undervisningsarbeid?

For å besvare det første forskningsspørsmålet er det nødvendig å ta utgangspunkt i lærernes egne opplevelser og erfaringer. Her måtte jeg først gjøre en vurdering om jeg skulle velge kvantitativ eller kvalitativ tilnærming. En vanlig kvantitativ metode for datainnsamling er bruk av spørreskjema med ferdig kategorier for avkrysning. Dette anså jeg som problematisk fordi det rett og slett finnes for lite forskning som sier noe om hva slags typer kategorier som burde vært med i et slikt skjema. Jeg kunne ha valgt kvantitativ metode med åpne spørreskjema slik som Zaskis & Leikin (2010) har gjort i sin studie, men jeg ser at ved en slik metode vet man ikke alltid hva lærerne egentlig mener med sine formuleringer og man har ingen mulighet til å følge opp med utdypningsspørsmål. Man kan også risikere mange ubesvarte spørsmål.

Jeg valgte i stedet å gå for en kvalitativ metode for datainnsamling. Her vurderte jeg først å bruke observasjon som metode. Tanken var å skaffe informasjon om hvordan lærere bruker sin avanserte matematiske kunnskap gjennom å observere undervisningen deres i klasserommet. Dette ville imidlertid være en tidkrevende metode hvis jeg skulle observere mer enn én lærer i aksjon, og jeg kunne risikere at jeg ikke ville fått noe særlig data i løpet av den tiden jeg som masterstudent har til rådighet. Observasjon gir heller ingen informasjon om hvordan lærerne tenker når de omsetter fagkunnskap til undervisning. Jeg måtte derfor velge en annen metode.

Kvale og Brinkmann (2015) skriver at det kvalitative forskningsintervjuet søker å forstå verden sett fra intervjupersonenes side. Nettopp fordi jeg har ønsket å finne ut hva lærere selv tenker om nytten av avansert matematisk kunnskap i deres yrkesutøvelse, endte jeg opp med å velge kvalitativ analyse med intervju som metode i denne oppgaven. Det falt naturlig å velge intervju for å få frem deres egne stemmer, meninger og tanker. Intervju gir også muligheter for å stille oppfølgingsspørsmål slik at man kan gå i dybden og for å avklare uklarheter, noe man ikke har anledning til hvis man benytter seg av f.eks. spørreskjema.

Et alternativ til dette er å gjennomføre fokus-gruppeintervju. Dette kunne fått frem mer diskusjon og drøfting blant lærerne, men det ville generert noen praktiske utfordringer som det å finne tid og sted som passet for flere lærere, og det ville kanskje vært en i overkant utfordrende oppgave for en uerfaren intervjuer å styre disse dialogene. Jeg anså det derfor som tryggere å gjennomføre intervjuer enkeltvis.

Når det gjelder det andre forskningsspørsmålet, så var det et spørsmål jeg ikke stilte i utgangspunktet, men som har kommet til i etter tid. Jeg hadde altså ikke dette da i bakhodet da jeg valgte metode og det har derfor ikke påvirket de vurderingene jeg har gjort for å velge metode. Men jeg så etter hvert at de dataene jeg hadde samlet inn, åpnet for å belyse dette forskningsspørsmålet også.

3.4 Intervju som metode

Kvale og Brinkmann (2015) skriver at intervjuet er en aktiv kunnskapsproduksjonsprosess. Kunnskapen skapes i samspillet mellom intervjueren og den som blir intervjuet. Samtidig oppstår et asymmetrisk maktforhold der intervjueren stiller premissene gjennom å bestemme temaet, avgjøre hvilke spørsmål som skal stilles, hvilke svar som skal følges opp og ikke minst har monopol på å fortolke utsagnene.

Det finnes strukturerte intervjuer der alle spørsmål som stilles og rekkefølgen de stilles i, er fastlagt på forhånd. Så finnes det uformelle eller ustrukturerte intervjuer i den andre enden av skalaen der ingen spørsmål er planlagt på forhånd. Et sted imellom finner vi det semistrukturerte intervjuet der man for så vidt har forhåndsbestemt temaet og spørsmålene, men rekkefølgen ikke trenger å være fastlagt og heller ikke den endelige formuleringen av spørsmålene. Det semistrukturerte intervjuet åpner for mulighetene til å fylle inn med spørsmål som man ikke nødvendigvis har planlagt på forhånd. Det er altså hverken en åpen samtale eller et lukket spørreskjema (Kvale & Brinkmann, 2015).

I denne undersøkelsen var formålet å undersøke hvordan lærerne opplever nytteverdien av avansert matematisk kunnskap. Jeg hadde altså forhåndsbestemt temaet og også de fleste av spørsmålene som jeg ønsket å stille. Derfor kan man se på intervjuene mine som strukturerte. På den annen side skulle jeg jo undersøke lærernes egne oppfatninger og for å få tak i disse valgte jeg å følge opp tanker og svar uten faste oppfølgingsspørsmål og valgte også innimellom å avvike fra den oppsatte intervjuguiden der jeg så at det var hensiktsmessig for å få tak i noe interessant. Jeg har altså både hatt en viss struktur og en viss frihet, noe som er typisk for det semistrukturerte intervjuet.

3.5 Utvalg av intervjuobjekter

Siden jeg ønsket å undersøke hvordan avansert matematisk kunnskap kan være nyttig i undervisningsarbeidet, trengte jeg lærere som hadde denne formen for kunnskap. Jeg valgte ut lærere som hadde mer enn 60 studiepoeng i matematikk, som er minstekravet for undervisningskompetanse i ungdomsskole og videregående skole. Det var viktig at det var studiepoeng i faget matematikk, ikke bare matematikkdidaktikk ettersom studieemner i fagdidaktikk ikke nødvendigvis gir lærerne kunnskap som er av den avanserte typen.

Formålet med undersøkelsen min var å belyse begrepet horisontkunnskap. Flere har imidlertid påpekt at horisontkunnskap må være forskjellig for lærere på ulike trinn (f.eks. Wassermann & Stockton, 2013). Til intervjuene mine valgte jeg derfor ut fem lærere som underviser matematikk på ungdomstrinnet og fem lærere som underviser matematikk i videregående skole. I utgangspunktet ville det vært interessant å intervjue lærere fra barnetrinnet også, men jeg har valgt å avgrense utvalget til ungdoms- og videregående trinn både av hensyn til oppgavens omfang og arbeidsmengde og fordi jeg så det som en tidkrevende utfordring å finne lærere på barnetrinnet med mer enn 60 studiepoeng i ren matematikk.

Jeg har for det meste brukt mitt eget kontaktnettverk for å finne informanter. Dette gjorde jeg fordi det var vanskelig å vite hvor mye utdannelse en vilkårlig valgt lærer har. Jeg kontaktet derfor lærere som jeg visste hadde en god del studiepoeng i ren matematikk, enten fordi jeg hadde vært i kontakt med dem tidligere eller fordi andre bekjente fortalte meg om dem.

Å finne objekter til en studie ved å velge dem som er mest tilgjengelige, kalles gjerne for et bekvemmelighetsutvalg (Marshall, 1996). Denne formen for utvalg er gjerne kostnadseffektivt og tidsbesparende, men kan også lett bli gjenstand for manglende troverdighet, fordi det kan være vanskelig å sammenlikne utvalget med andre studier (Marshall, 1996). Mitt utvalg var imidlertid ikke et rent bekvemmelighetsutvalg, men også et kriteriebasert utvalg (Suri, 2011) siden jeg valgte ut lærere med mer enn 60 studiepoeng i matematikk. Dette er en fordel hvis man vil sammenlikne studien med andre som studerer samme problemstilling.

Det er fire kvinner og seks menn i utvalget. Dette var imidlertid ikke en faktor i utvelgelsesprosessen, siden jeg i denne studien ikke hadde til hensikt å undersøke kjønnsforskjeller. Utvalget er dessuten så lite at det å se på denne type forskjeller har lite for seg. Deltakerne varierte i alder fra 28 til 61 år, mens undervisningserfaringene var i spennet fra tre år til 33 år. Det er altså en god spredning blant informantene både når det gjelder alder, kjønn og undervisningserfaring.

Når det gjelder antall informanter viser enkelte studier at man når et metningspunkt ved rundt tolv personer (Guest, Bunce & Johnson, 2006). Andre studier viser at det kommer an på lengden av intervjuet og hvor dypt spørsmålene går. For et intervju på omtrent 30 minutter vil rundt tolv personer være passende, mens ved lengre intervjuer kan man gå ned på antallet informanter (Rowley, 2012). Jeg har altså ti personer i utvalget. De fleste intervjuene varte mer enn 30 minutter, så i forhold til lengden på intervjuene, er antall informanter passende.

I første omgang kontaktet jeg samtlige potensielle informanter via e-mail. Blant henvendelsene jeg sendte ut, var det bare en som ikke svarte. Alle de andre ga positivt svar på henvendelsen. Alle deltakerne fikk informasjon om at deltakelsen var frivillig og at de når som helst kunne trekke seg fra prosjektet. Etter dette avtalte jeg tidspunkt for intervju med hver enkelt av dem og gjennomførte intervjuene i en periode som strakte seg fra mars 2017 til juni 2017.

Prosjektet er meldt inn og godkjent av Personvernombudet for forskning, Norsk senter for forskningsdata NSD

Oversikt over intervjuobjektene.

(U = lærer på ungdomstrinn, V = lærer på videregående trinn)

	Utdanning	**Antall år som lærer**	**Erfaring fra**
U1	Allmennlærer. Master i matematikkundervisning	3 år	Ungdomstrinn VG1 (1 år)
U2	Allmennlærer + 75 studiepoeng i ren matematikk	33 år	Ungdomstrinn
U3	Faglærerutdanning i naturfag. Master i matematikkdidaktikk	29 år	Mellomtrinn Ungdomstrinn VG1 (1 år)
U4	Fagutdanning i matematikk og andre fag fra universitetet. PPU. Påbegynt master i matematikkundervisning	8 år	Mellomtrinn (2 år) Ungdomstrinn
U5	Integrert lærerutdanning fra universitet Master i matematikkundervisning	9 år	Ungdomstrinn
V1	Hovedfag i ren matematikk PPU	20 år	Videregående, alle trinn. Mest fordypning i matematikk Lærerutdanning
V2	Hovedfag i ren matematikk PPU	17 år	Videregående, alle trinn og alle kurs
V3	Allmennlærer Hovedfag i matematikkdidaktikk	33 år	Videregående, alle trinn Lærerutdanning
V4	Hovedfag i matematikkdidaktikk PPU	25 år	Videregående alle trinn, inkludert yrkesfag Lærerutdanning
V5	Universitetsutdannelse med mye matematikk. Påbegynt master i matematikkundervisning	20 år	Ungdomstrinn (15 år) Videregående alle trinn (5 år)

Tabell 1. Oversikt over intervjuobjektene. Betegnelsen «Lærerutdanning» omfatter alle former for utdanning, etterutdanning og videreutdanning av lærere.

3.6 Gjennomføring av intervjuene

Intervjuguiden ligger i sin helhet som vedlegg (8.1).

Jeg utformet i starten et førsteutkast til intervjuguiden, og deretter gjennomførte jeg et prøveintervju med en velvillig kollega. Dette intervjuet ble det ikke tatt lydopptak av og er heller ikke brukt videre i analysearbeidet. På bakgrunn av erfaringene med dette prøveintervjuet og tilbakemeldinger fra kollegaen gjorde jeg noen mindre justeringer av spørsmålene mine og skrev om bakgrunnsinformasjonen slik at den skulle bli lettere å forstå for informantene. Prøveintervjuet varte i 25 minutter og jeg antok derfor at ca. 30 minutter ville være en rimelig varighet av intervjuene.

Alle informantene fikk tilsendt en del av spørsmålene noen dager før intervjuet fant sted. Dette fordi de var av en slik karakter at de kanskje måtte tenke igjennom dem litt på forhånd. Her skrev jeg også litt informasjon om bakgrunnen for undersøkelsen, målet med studien og forsøkte å definere hva jeg har lagt i begrepene horisontkunnskap og avansert matematisk kunnskap på en enkel og lettfattelig måte. I tillegg fikk de noen spørsmål under selve intervjuet som de ikke hadde fått på forhånd.

Jeg startet intervjuet med noen spørsmål om bakgrunn slik som alder, utdannelse og antall år undervisningserfaring. Deretter fulgte noen spørsmål knyttet til deres egen opplevelse av nytteverdien av avansert matematisk kunnskap i sin profesjonsutøvelse. Her prøvde jeg å formulere spørsmålene slik at jeg skulle få frem noen konkrete eksempler på hvordan denne kunnskapen ble anvendt i undervisningen. Målet med disse spørsmålene var å finne ut måter lærerne kunne ha bruk for avansert matematisk kunnskap på i sitt arbeid.

Etter dette fulgte noen problemløsningsoppgaver til elever med spørsmål knyttet til disse om hva slags forkunnskap disse oppgavene krever og hvilken fremtidig type kunnskap disse oppgavene legger grunnlaget for. Hensikten med disse spørsmålene, var å se om dette var en måte å synliggjøre lærernes horisontkunnskap på og om jeg kunne få tak i noen aspekter som kunne være beskrivende for horisontkunnskap.

Etter disse oppgavene fulgte en del spørsmål som de ikke hadde fått forberedt seg til. Disse spørsmålene var først og fremst ment som oppfølgingsspørsmål for å klargjøre, presisere og utdype det som kom frem i den første delen. Her stilte jeg også spørsmål om hvor godt læreren kjenner til matematikkundervisningen på lavere/høyere trinn enn de selv underviser, siden det å kjenne til slik type pensum kan være en komponent av horisontkunnskap.

Et av intervjuene ble av praktiske grunner gjennomført over telefon. Alle andre ble intervjuet ansikt til ansikt i rolige, skjermede omgivelser som f.eks. grupperom. Det ble gjort lydopptak av alle intervjuene og disse ble siden transkribert.

Lengden på intervjuene varierte en del. Det korteste intervjuet var på omtrent 20 minutter mens det lengste varte 1 time og 11 minutter.

3.7 Transkripsjon

En transkripsjon blir ofte oppfattet som en nøytral prosess, men er likevel aldri helt verdinøytral. Den som transkriberer gjør alltid noen valg slik som det å omskrive dialekt til nøytralt skriftspråk eller å standardisere talesyntaksen (Sollid, 2013), bestemme hvor man skal sette komma og punktum og om man skal utelate stotring og pauser.

Alle intervjuene er transkribert av meg i perioden juni-august 2017. Jeg har valgt å omskrive alt til bokmål av hensyn til anonymitet, men har ellers prøvd å gjengi alle utsagn slik de ble uttalt. Enkelte steder har jeg utelatt navn på skoler som ble nevnt eller andre typer utsagn som kan identifisere intervjuobjektene. Jeg har noen steder utelatt å ta med utstrakt stotring og nøling i form av «eeeh» og liknende. Dette for at det skulle bli lettere å lese transkripsjonene og fordi jeg i denne sammenhengen ikke så dette som relevant for resultatene mine. Jeg har markert lengre pauser med (…) og avbrutte setninger med … Jeg har ikke foretatt noen beskrivelser av for eksempel latter, nøling osv. fordi jeg ikke anser slike typer beskrivelser for relevante for den informasjonen jeg ønsket å få tak i.

3.8 Analyse

I denne oppgaven ønsker jeg å finne ut hvordan lærerne selv opplever relevansen av avansert matematisk kunnskap i sin undervisningshverdag. Kapittel 4 omfatter resultater og analyse av datamaterialet. I den første og mest omfattende delen av analysen (Kap. 4.1) er målet å besvare disse forskningsspørsmålene:

- På hvilken måte opplever matematikklærere at avansert matematisk kunnskap er nyttig i undervisningsarbeidet?
- Hvilke typer matematisk kunnskap kan være nyttige for lærernes undervisningsarbeid?

Gjennom en form for datadrevet analyse eller konvensjonell innholdsanalyse (Fauskanger & Mosvold, 2014; Hsieh & Shannon, 2005) besvarer jeg det første forskningsspørsmålet. Denne metoden er nærmere beskrevet i neste avsnitt (3.8.1). Underveis forsøker jeg samtidig å besvare det andre forskningsspørsmålet ved å identifisere noen av de tre ulike formene for horisontkunnskap som Guberman & Gorev (2015) beskriver, nemlig *matematikkfaglig innsikt*, *matematiske sammenhenger* og *forståelse for metamatematikk*, som står beskrevet på side 19 i teorikapittelet. Jeg har også sett etter de kunnskapsformene som Stockton & Wassermann (2017) har identifisert som nyttige, og som alle kan kategoriseres som en form for forståelse for metakunnskap. Disse kunnskapsformene er kort beskrevet i teorikapittelet på s. 29. Men det vil først og fremst være i diskusjonskapittelet (kapittel 5) at jeg viser til hvordan ulike typer av avansert matematisk kunnskap kommer til anvendelse i lærernes undervisningsarbeid.

I del 2 av analysen presenterer jeg kort noen andre funn som ikke går direkte på disse to forskningsspørsmålene, men som er nyttige for den etterfølgende diskusjonen.

3.8.1 Analyseverktøy: Datastyrt koding

Studien min er en utforskende studie. Det er ikke forsket så mye på hverken begrepet horisontkunnskap eller på hvordan lærere anvender sin avanserte matematiske kunnskap. Det var derfor naturlig å ta utgangspunkt i data for å utvikle begreper eller koder for å beskrive lærernes svar. For å besvare det første forskningsspørsmålet har jeg derfor valgt å bruke åpen koding (datastyrt koding) og kategorisering som analyseverktøy. Det vil si at jeg har utviklet mine egne koder utfra det datamaterialet som jeg har samlet inn, i motsetning til lukket eller teoridrevet koding der man bruker ferdige utviklede koder. Kvale & Brinkmann (2015) skriver at koding har spilt en viktig rolle i grounded theory-tilnærmingen til kvalitativ forskning. Målet er å utvikle kategorier som gir oversikt og beskriver datamaterialet i sin helhet. I denne prosessen må man hele tiden se etter likheter og forskjeller og knytte nøkkelord til tekstsegmenter for å skape orden og oversikt.

Denne prosessen startet allerede mentalt mens jeg transkriberte intervjuene. Etter å ha transkribert intervjuene ferdig, leste jeg dem gjentatte ganger og prøvde å skrive ned hovedtrekk som jeg mente å finne og måter jeg kunne sortere dette på. Jeg samlet utsagn som jeg mente beskrev noenlunde de samme temaene og formulerte koder for dette. Disse puttet jeg så inn i noen provisoriske skjema sammen med eksempler på utsagn som passet til. Jeg lagde så et slags tankekart for å se hvilke koder som beskrev liknende fenomener og utviklet til slutt ni kategorier.

Prosessen med å utvikle koder og kategorier er en dynamisk prosess. Jeg måtte hele tiden revurdere kategoriene som jeg hadde laget, samt omskrive og omarbeide dem mens jeg jobbet meg gjennom intervjumaterialet. En slik prosess kalles gjerne for konstant sammenliknende metode. Metoden har sitt utspring i Grounded Theory utviklet av Glaser & Strauss (1967). Glaser (1965) skriver at denne metoden ikke er egnet til å teste allerede eksisterende teori, men metoden hjelper forskeren med å utvikle ny teori utfra data. Slik teori vil da være basert på observasjoner og være spesifikt knyttet til konteksten den blir utviklet i.

Det var ingen enkel prosess å utvikle koder og kategorier. Jeg var flere ganger i stuss over hvilke koder jeg skulle bruke på utsagnene og noen av utsagnene kan nok sorteres under andre koder også, men jeg har hele tiden prøvd å sortere dem på mest mulig hensiktsmessig måte. Denne prosessen vil alltid inneholde et element av meningsfortolkning fra den som analyserer materialet og dermed en viss grad av subjektivitet. På den annen side vil fortolkning også tilføre ny forståelse og differensiering av teksten (Kvale & Brinkmann, 2015).

3.9 Kvaliteten på studiet

Jeg opplevde at jeg som intervjuer var veldig uerfaren. I begynnelsen var jeg veldig lite flink til å stille oppfølgingsspørsmål og usikker på når det var passende å avbryte uten å virke uhøflig. Jeg var veldig opptatt av å ikke påvirke intervjuobjektet i starten, men det førte til at jeg ikke stilte tilstrekkelig med oppfølgingsspørsmål for å få dem til å utdype eller konkretisere sine uttalelser. Jeg ble flinkere til dette etter hvert. Jeg ble etterhvert også flinkere til å se hvor det passet å avvike fra rekkefølgen i intervjuguiden og heller sette inn spørsmålene der det falt seg naturlig ut fra samtalen. I sum har likevel alle fått noenlunde de samme spørsmålene.

Selv om jeg gjennomførte et prøveintervju, så var dette ikke tilstrekkelig trening for å bli en flink intervjuer og jeg kunne med fordel gjennomført flere prøveintervjuer. Dette førte til at en del av intervjuene forløp litt forskjellig. Noen av intervjuene ble alt for lange fordi personene jeg intervjuet snakket seg bort fra tema og jeg var usikker på når jeg faktisk skulle foreta meg noe for å få samtalen inn på rett spor igjen. Jeg ser også at jeg i de første intervjuene ikke var så flink med å stille oppfølgingsspørsmål, og at jeg ble tryggere på dette etter hvert. Jeg var også usikker på om når det var passende å tolke svarene og be om bekreftelse for at tolkningen min var rett, eller om dette kunne oppfattes som en måte å påvirke intervjuobjektet på og legge svar i munnen på dem. Jeg ble også her etter hvert flinkere til å forstå hva slags type oppfølgingsspørsmål jeg kunne stille, uten å være veldig styrende. Men til en viss grad må man som intervjuer også være styrende for å oppnå formålet man ønsker med intervjuet (Kvale & Brinkmann, 2015).

I utgangspunktet designet jeg ikke spørsmålene mine med tanke på å lete etter ulike kunnskapstyper. Dette var et forskningsspørsmål som har kommet til i etterkant. Jeg kunne nok fått bedre og mer optimale data på dette hvis jeg hadde hatt dette spørsmålet i tankene da jeg utformet intervjuguiden. Jeg ser likevel at jeg kan finne data som forteller meg noe om dette, men kanskje ikke av samme styrke og kvalitet som hvis jeg hadde tenkte på dette fra starten.

Jeg har i denne studien bare intervjuet ti personer og jeg kan derfor ikke trekke noen statistisk holdbare slutninger utfra kvantiteten. Generaliserbarheten vil derfor være begrenset.

3.9.1 Reliabilitet

Reliabilitet handler om hvorvidt studien er til å stole på, om observasjonene er presise og om studien er etterprøvbar. Det vil si om data man har funnet er konsistente over tid og om de vil kunne reproduseres for eksempel med et annet, liknende utvalg (Cohen, Manion & Morrison, 2002). Sollid (2013) skriver at det er et kvalitetsstempel hvis en gjentakelse av en undersøkelse måler det samme hver gang. I en kvalitativ studie kan det imidlertid være vanskelig å reprodusere nøyaktig samme funn (Sollid, 2013). Ulike forskere som studerer det samme kan ende opp med svært ulike resultater.

Det er viktig å sørge for at datainnsamlingen er beheftet med minst mulig feil og at det som forskeren registrerer som data i størst mulig grad stemmer med det som faktisk har skjedd. Lydopptak av intervjuet slik som jeg har gjort, vil langt på vei sikre at uttalelsene blir registrert som korrekte. I denne sammenhengen er det viktig å påpeke at jeg har hatt hånd om hele prosessen fra utarbeidelse av spørsmål, gjennomføring av intervjuene og transkribering av opptak. Det har derfor minsket risikoen for mistolkninger eller tap av informasjon i disse prosessene.

En type feilkilde som kan forekomme er at intervjueren søker å få bekreftelse for sitt syn og enten stiller ledende spørsmål eller velger å tolke utsagn til inntekt for sitt syn (Cohen et al. 2002). Jeg har tilstrebet å være så objektiv og nøytral som mulig i mine intervjuer. Jeg har prøvd å unngå å påvirke intervjuobjektene i noen somhelst henseende. Samtidig så vet jeg at jeg i utgangspunktet hadde en forestilling om at den avanserte kunnskapen på en eller annen måte måtte være nyttig, og jeg kan ikke se bort fra at dette har påvirket meg i intervjusituasjonen. Ifølge Sollid (2013) er imidlertid objektivitet ikke en målsetting i det i kvalitative intervjuet, fordi subjektive meninger og erfaringer er med på å kaste lys over tema som undersøkes. Men det er viktig å klarlegge forskerens ståsted. Dette har jeg forsøkt å gjøre gjennom å avklare hvordan jeg bruker begrepene horisontkunnskap og avansert matematisk kunnskap, og ved å avklare mitt læringssyn.

Et kvalitativt forskningsintervju bygger på antagelsen om at den som blir intervjuet er i stand til å uttrykke sine meninger og beskrive sine erfaringer og også er seg bevisst sine oppfatninger. Dette er viktig for reliabiliteten i dette studiet, siden jeg var ute etter lærernes egne synspunkter. Jeg opplevde et par ganger at intervjuobjektet ikke alltid hadde reflektert tilstrekkelig over sine egne oppfatninger. Selv om de hadde fått deler av spørsmålene noen dager på forhånd, så viste det seg at noen av dem ikke hadde leste dem så nøye da jeg kom til intervjuet. Dette kunne i noen tilfeller føre til at de hadde problemer med å uttrykke og beskrive sine erfaringer med bruken av avansert matematisk kunnskap i sin undervisningspraksis. Det førte også til at jeg fikk færre konkrete eksempler på bruk, enn det jeg hadde håpet å få. De fleste klarte likevel å beskrive sin bruk i mer generelle vendinger og jeg fikk også en del konkrete eksempler på anvendelser.

Ved noen få anledninger opplevde jeg at intervjuobjektet ikke helt forsto spørsmålet, men ved litt avklaring og reformulering av spørsmålet oppnådde jeg likevel forståelse. Jeg ser i etterkant at noen av spørsmålene kunne vært formulert klarere.

Også i transkriberingsprosessen har jeg prøvd å være så objektiv som mulig og prøvd å være tro mot intervjuobjektenes formuleringer og utsagn.

Når det gjelder koding og kategorisering så vil en kodingsprosess ideelt sett være mer pålitelig hvis flere personer koder materialet samtidig. Man kan da sammenlikne om kodene man har kommet frem til er sammenfallende og om man koder de samme utsagnene likt. Dette hadde jeg som student ingen mulighet til å gjøre, men jeg har i hvert fall prøvd å beskrive prosessen min med koding og kategorisering etter beste måte. Jeg har også forsøkt å etterstrebe mest mulig transparens gjennom bruk av nøyaktige sitater og vedlegg av et intervju.

3.9.2 Validitet

Validitet handler om at forskningsdata er troverdige og om datamateriale og metode er egnet til å finne svar på de forskningsspørsmål man stiller. Reliabilitet er en viktig, men ikke tilstrekkelig forutsetning for dette. I tillegg handler validitet blant annet om valg av egnet metode, utforming av egnete spørsmål og i hvilken grad utvalget er representativt. Det er viktig å unngå skjevhet i utvalget og viktig at alle sider av datamaterialet kommer frem.

I avsnittet om metodevalg har jeg allerede forsøkt å redegjøre hvorfor jeg mener kvalitativt intervju er en egnet metode for å besvare mine forskningsspørsmål. Jeg var ute etter lærernes eget syn på nytteverdien av avansert matematisk kunnskap, og mener at et kvalitativt intervju er best egnet fordi de da får komme med sine egne formuleringer, i motsetning til for eksempel et lukket spørreskjema. Åpne spørreskjema kunne vært et alternativ, men man har da ingen mulighet til å følge opp med nye spørsmål for å klargjøre eller utdype utsagn. Jeg kunne alternativt ha valgt et fokusgruppeintervju.

Metodetriangulering er en måte man kan sikre validiteten på. Hvis flere metoder gir de samme resultatene vil dette styrke troverdigheten. Men dette var ikke en realistisk mulighet innenfor de rammene et masterstudium gir.

Jeg har analysert utsagn fra hele ti personer og ikke bare utsagn fra enkeltpersoner. Det vil styrke validiteten hvis flere personer kommer med uttalelser som kan kodes likt. Dette er viktig fordi intervjuobjektene enkeltvis uttaler seg om sin subjektive opplevelse og ikke nødvendigvis om en objektiv sannhet. Da vil uttalelser fra flere personer styrke sannsynligheten for at resultatene er gyldige for flere enn bare akkurat dem som uttaler seg.

Selve sammensetningen på utvalget kan være viktig for validiteten. Hvis man har et ensidig utvalg, f.eks. bare nyutdannete lærere eller bare kvinner, så vil det være vanskelig å kunne overføre resultatene til å gjelde andre grupper. Utvalget mitt har en god spredning både med hensyn på alder, kjønn og undervisningserfaring, og dette vil forhåpentligvis bidra med å redusere faren for systematisk skjevhet i datainnsamlingen og gjøre resultatene representative for andre enn akkurat bare disse ti personene som jeg har intervjuet. Antallet informanter kombinert med lengden på intervjuene bør som jeg allerede har nevnt, føre til en viss metning, så det er ikke sikkert at det å intervjue flere lærere enn dette ville tilført noen nye opplysninger.

Validitet kan også bli påvirket i andre faser enn forberedelse og gjennomføring. I kodingsprosessen er det viktig å være konsistent og det er viktig å gjennomgå hele materialet og ikke foreta et ensidig selektivt utvalg for å fremme sitt eget syn. Alle typer synspunkter og sider som kommer frem i intervjuet må tas med i analysen. Jeg har i denne prosessen gått gjennom absolutt hele materialet og har lest gjennom alle transkripsjonene gjentatte ganger for å få med meg alt, og jeg har overhodet ikke prøvd å underslå noen resultater. Som allerede nevnt tidligere er transparens viktig i denne sammenhengen.

En annen ting som kan påvirke gyldigheten av et resultat, er skjevheten i forholdet mellom intervjuer og intervjuobjektene (Cohen et al. 2002). Intervjueren er den som definerer spørsmålene og rammene for intervjuet. Da er det viktig at den som intervjuer ikke inntar en maktposisjon overfor den som blir intervjuet. Dette kan føre til at informanten ikke svarer ærlig, men prøver å tilfredsstille intervjueren med å gi de svarene intervjueren muligens ønsker å høre. På den andre siden kan en person som blir intervjuet av en person som blir ansett som underlegen også føre til et feil bilde. Det kan for eksempel være at man ikke tar intervjueren på alvor. Jeg er selv lærer og jeg mener det var en fordel at jeg som intervjuer var mer som en kollega for dem jeg intervjuet enn som en «opphøyet» forsker eller «uvitende» førsteårsstudent. Det skapte en passe avslappet atmosfære og gjorde at ingen av dem hadde noen oppfatning av at jeg satt med fasitsvar eller absolutte sannheter. Det var også viktig at de forsto hensikten med intervjuet og at jeg ikke var ute etter å teste dem eller avsløre svakheter. Samtidig hadde vi en felles forståelse for hva som skjer i klasserommene siden vi alle er praktiserende lærere.

Alle mine informanter har sin arbeidsplass i videregående skole eller ungdomsskolen. Et fåtall av dem har undervisningserfaring fra barnetrinnet. Det er derfor viktig å understreke at de funnene jeg har gjort ikke nødvendigvis kan utvides til å gjelde andre skoleslag og trinn.

3.10 Etiske betraktninger

Jeg har i denne oppgaven tilstrebet å følge etiske retningslinjer for kvalitativ forskning. Et viktig prinsipp i denne sammenhengen er informert samtykke, som ifølge Kvale & Brinkmann (2015) betyr at forskningsdeltakerne informeres om undersøkelsens formål, hovedtrekk i designen samt mulige risikoer eller fordeler ved å delta i prosjektet. Alle intervjuobjekter har gitt et informert, frivillige samtykke til deltakelse. De kunne når som helst trekke seg fra studien og studien ble som nevnt tidligere meldt inn til og godkjent av NSD. Informasjonen som deltakerne fikk, ligger som vedlegg (8.2)

Jeg har så langt som mulig forsøkt å bevare deltakernes anonymitet, gjennom f.eks. å velge personer fra mange ulike skoler, å omskrive dialekter i intervjuene til bokmål, og ved å ikke oppgi detaljer om arbeidsplass, kjønn og alder. Det største problemet i denne sammenhengen er at jeg stort sett har benyttet meg av mitt eget nettverk for å få tak i informanter og at det derfor kan oppstå spekulasjoner om hvem disse personene er. Det er imidlertid ingen sensitive opplysninger i den informasjonen jeg har samlet inn.

4. RESULTATER OG ANALYSE

4.1 Hva bruker lærerne den avanserte matematiske kunnskapen til?

I denne delen har jeg funnet ni ulike nyttekategorier som læreren mener at de bruker sin avanserte matematiske kunnskap til. Jeg skal nå vise hvordan jeg har utviklet kodene og kategoriene mine ved hjelp av datamaterialet mitt. Sitatene fra intervjuene er merket med f.eks. U1, 206 eller V4, 1052. Her betyr U1 ungdomsskolelærer nr. 1 og V4 lærer nr. 4 i videregående skole og det siste tallet refererer til linjenummeret i det transkriberte intervjuet. Underveis vil jeg også knytte noe teori til beskrivelsen av kategoriene mine. En oppsummering av alle kategoriene med tilhørende koder finnes i *tabell 2* på begynnelsen av kapittel 5. I kapittel 5 diskutere jeg også funnene mine opp mot teori på et mer overordnet plan.

4.1.1 Å fristille seg fra læreboken

Å frigjøre seg fra læreboka kan skje på flere ulike måter. Jeg har utviklet fire ulike koder for dette:

- Å velge andre oppgaver
- Å finne andre eller flere innfallsvinkler
- Å velge fokus
- Å styre og regissere undervisningen

I de neste avsnittene skal jeg prøve å forklare hvordan jeg har kommet frem til disse kodene og hva som binder dem sammen til en kategori.

Å velge andre oppgaver

En av lærerne som underviste på ungdomstrinnet sier dette:

> «Det gir jo litt større muligheter altså i valg av oppgaver at du kan ta noe annet enn det som står i boken. For eksempel at du må ikke ha en fasit til oppgavene du gir. Du kan lage en oppgave på tavlen hvis du ser at det som er i boken blir for vanskelig eller for lett.» (U1, 85)

En annen av lærerne på ungdomstrinnet poengterer at vedkommende i større grad enn andre lærere tør slippe elevene løs på vanskeligere oppgaver og sier videre at:

> «Jeg er ingen som på en måte er veldig bundet av boken og vil følge boken, og skrive av boken og tavla, men jeg bare tar en oppgave helt fritt og tilfeldig. Det tror jeg er en fordel.» (U4, 1419)

I det første sitatet kan vi legge merke til ordene *muligheter* og *valg* og at læreren forteller at å lage en oppgave selv kan være et eksempel på hva man kan bruke denne muligheten til. I det andre sitatet ser vi at valgfriheten blir beskrevet som en *fordel*.

Bakgrunnen for å kunne gjøre disse valgene kan synes å være den faglige tryggheten, slik som U1 beskriver i dette utsagnet:

> «Ja det *gir* en trygghet og så kan du gjøre litt andre ting enn å *bare* ha bokoppgaver, bokoppgaver» (U1, 78)

Som vi ser i sitatene over, vektlegger lærerne at faglig kunnskap gjør dem mer fleksible med henblikk på valg av oppgaver og at kunnskap åpner opp for flere muligheter. De kan både finne andre oppgaver og lage egne oppgaver og slik velge å være mindre bundet av boka.

Å finne andre og/eller flere innfallsvinkler enn læreboka gir

Her forteller en av lærerne som jobber på ungdomstrinnet følgende om hva avansert matematisk kunnskap kan være nyttig for:

> «Og så..har jeg tenkt.. også for å gi gode forklaringer. At du ikke bare tar akkurat det som er for eksempel i et eksempel.» (U1, 19)

Her antyder læreren at man kan velge å gjøre noe mer eller noe annet enn eksempelet i boka for å gi en god forklaring.

En annen lærer gir et helt konkret eksempel på hvordan vedkommende velger å ikke følge fremstillingen fra boka, men i stedet gjør dette på en annen måte:

> «Et eksempel er, som jeg bruker alltid i andre klasse i R1, det er når jeg skal introdusere dem for eulertallet, så har jeg en helt annen inngang til dette, der jeg bruker å spørre hvorfor kom noen på…
>
> (…)
>
> Og det å ha både litt bakgrunn og forståelse for hva dette tallet er, gjør at du kan heller begynne med problemstillingen som gjorde at de fant frem til tallet *e*. Nemlig det å prøve å finne en funksjon som hadde samme vekst som sin funksjonsverdi. Og så kan du begynne å grunne på det. Så det har jeg ofte brukt , og det er jo en form for horisontkunnskap, der jeg kjenner litt til både historien, er trygg på hvordan jeg kan derivere med dette på en litt annen måte enn det som boken gjør.» (V1, 2017)

Læreren beskriver videre at dette gjør undervisningen mer interessant og motiverende fordi man da går til røttene for hvordan eulertallet utviklet seg historisk. Flere steder understreker både denne læreren og andre lærere at det å ha emner i matematikkens historie er viktig for undervisningen både for å kunne forklare begreper og emner, og for å kunne motivere. Læreren formidler også noe om hvordan faglig trygghet innen derivasjon påvirker hans valg. Kunnskap om matematikkens historie hører ifølge Stockton & Wassermann (2017) til under evolusjonær kunnskap, det vil si kunnskap om hvordan matematiske ideer utvikler seg.

Det er ikke alltid slik at forklaringene, eksemplene og vinklingen i en lærebok er slik man ønsker at de skal være. Å kunne vurdere om et eksempel er hensiktsmessig krever både faglig innsikt og faglig trygghet. Det er flere utsagn fra lærerne som støtter opp om dette:

> «Og så hvordan jeg kan presentere noe annet, altså på en annen måte da enn at det bare blir sånn instrumentelt.» (U1, 36)
>
> «Jo, for det, jo mer du kan, jo mer du forstår, jo mere.. flere innfallsvinkler har du ofte til å hjelpe dem til å forstå» (U2, 281)
>
> «Og så tenker jeg jo det er en fordel at en… at en kanskje kan klare å belyse ting, hvis det er nødvendig, fra litt flere sider.» (V5, 3807)

Her kan vi se hvordan lærerne snakker om å presentere *noe annet*, *flere innfallsvinkler* og det å *belyse* noe fra flere sider. Dette er ord som kan romme tolkninger som bredde og variasjon. Det første av disse tre sitatene antyder noe om kvaliteten på undervisningen fordi det leder tanken på strukturell forståelse i motsetning til instrumentell forståelse. Det andre sitatet peker mer på differensiering og det tredje kan tolkes som et grep som fører til dypere innsikt fordi man ikke bare ser noe fra én side.

Samlet sett viser lærerne her hvordan det å ha faglig overskudd gjør dem i stand til å velge andre eller flere innfallsvinkler, og de peker på at dette er viktig for kvaliteten på undervisningen både med henblikk på motivasjon, differensiering og det å fremme forståelse.

Å velge fokus i undervisningen.

En annen ting som kan være verdt å merke seg, følger i dette utsagnet:

> «I bøkene er det ingenting som står uthevet som mer eller mindre viktig. Alt kommer i en smørje, og hvis du ikke kan så mye mer enn det som står i bøkene, du bare lærer deg det, så er det vanskelig for deg å vite: hva er viktig? Og hvorfor er det viktig?» (V1, 2008)

Vi ser her en interessant anvendelse av den avanserte matematiske kunnskapen. Denne læreren forteller at ikke alt som står i bøkene er like sentralt og bruker ordet *viktig.* Det er noen emner, oppgaver og problemstillinger som er viktigere enn andre for å bygge en god forståelse hos eleven. Men for å kunne vurdere dette, trenger læreren god faglig kunnskap og også trygghet til å våge å velge bort noe som boka tar med.

Slik uttrykker en annen av lærerne dette:

> «…jeg har vel en større evne til å finne hva som er det sentrale og hva som er det viktige i det vi skal formidle. At ikke vi begynner med en sånn enkel som ikke fører til så veldig mye, at vi er litt på det sentrale og bygger det ut. Det tror jeg.» (V3, 3042)

Også denne læreren bruker ordet *viktig* og i tillegg ordet *sentral.*

Disse lærerne beskriver altså hvordan den avanserte matematiske kunnskapen hjelper en til å kunne velge fokus fordi de vet noe om hvorfor et emne er viktig og sentralt og vet hvordan det i en større sammenheng kan brukes som grunnlag til å bygge videre på. Dette er eksempler på det Ball & Bass (2009) beskriver som «highlighting and underscoring key points», og som fremmes av horisontkunnskap.

Styre og regissere undervisningen

En av lærerne forteller dette:

> «Så selve undervisningen i seg selv legger ikke opp til at du skal bruke så mye mer, men det å ha oversikt, det å ha … det å ha dekket et større felt i matematikken, vite hvor du går videre eller kjenner til andre sammenhenger. Og ikke minst til historien bak til den matematikken du holder på med, gjør jo at du når du planlegger undervisningen og når du tenker på hvordan det er lurt å presentere det, ser hvilke sammenhenger det står i, så kan du gjøre noen andre valg enn det bøkene gjør. Så det er et av de store poengene da. At du kan gjøre dine egne valg. Du blir veldig mye tryggere på hvorfor du gjør ting, hvilken rekkefølge du gjør det i og hva du vil poengtere.» (V1, 1999)

I likheten med flere utsagn som vi allerede har sett på, snakkes det her om valg. I tillegg utdyper læreren mer om hvordan han anvender disse valgmulighetene som redskap i sin planlegging av undervisningen.

Videre forteller denne læreren:

> «Det er sånn en type ting, det å ha den tryggheten. Du *vet* du har egentlig en styring på hvordan ting går. Så for det at du kjenner til feltet, du kjenner terrenget du har innen diff. likninger, du kjenner terrenget når du har geometri eller vanlig likningsløsning.» (V1, 2077)

Her ser vi igjen et eksempel på hvordan faglig trygghet er den underliggende faktoren som hjelper læreren til å regissere undervisningen sin. Den gjør at læreren har oversikt over terrenget og kan sette stoffet inn i en større sammenheng. Det er flere andre lærere som beskriver hvordan de kan velge å gjøre ting i en annen rekkefølge enn boka gjør eller velge å trekke inn stoff på andre tidspunkt enn boka legger opp til.

Det er verdt å legge merke til at disse utsagnene beskriver hvordan den avanserte matematiske kunnskapen direkte påvirker undervisningssituasjonen ved å gi læreren faglig trygghet og den kommer elevene til gode gjennom de valg læreren er i stand til å gjøre. I følge lærerne gir slik kunnskap dem et verktøy til å kunne planlegge undervisningen bedre. De beskriver at når de legger opp undervisningen kan de i større grad ha kontroll og regi over undervisningssituasjonen fordi de har god fagkunnskap, og det å kjenne de faglige sammenhengene gjør at de kan styre undervisningen i den ønskede retningen.

Å ikke ha faglig overskudd

Hva det å ikke ha denne faglige tryggheten fører til, ser vi i disse sitatene:

> «de temaene jeg har god kunnskap om, de snakker jeg om på en mye friere måte, og bruker begrepene naturlig, mer naturlig, enn de temaene hvor jeg har litt lavere kunnskap om. Der blir jeg mye mere hengt opp i det som boken gjør, i det … sånn som blir fremstilt i boken, og bruker de begrepene mye mindre fritt. Jeg blir rett og slett litt mer bundet av det som står i boken enn hvis jeg har god kunnskap selv, for da har jeg kanskje min, altså mine egne tanker om et tema.» (V4, 3414)

> «Jeg har ikke hatt så mye statistikk i skolen. Jeg merker med en gang at der er jeg litt mer sånn … 'cling to the book'» (V1, 2407)

Å *ikke* ha tilstrekkelig kunnskap vil altså på den andre siden føre til man blir mindre fri. Flere av lærerne trekker frem opplevelser der de har måttet undervise et emne eller et fag uten å ha hatt solid fagkunnskap og beskriver hvordan de uten tilstrekkelig faglig innsikt og trygghet blir veldig bundet av læreboka, og undervisningen kan bli kjedelig og av dårligere kvalitet.

Oppsummering av kodene:

Jeg har nå sett nærmere på kodene «å velge oppgaver», «å finne andre eller flere innfallsvinkler enn boka gir», «Å velge fokus i undervisningen» og «styre og regissere».

I matematikken er oppgaver en viktig del av undervisningen. *Å velge oppgaver* handler mye om hvordan en lærer ønsker at *elevene* skal arbeide med stoffet. Valgene læreren kan gjøre handler både om å finne andre oppgaver, lage egne oppgaver og å velge bort oppgaver som står i boka.

Å finne andre eller flere innfallsvinkler enn boka gir handler mer om hvilken inngang en lærer velger til et emne og kan være en viktig faktor i forståelsen av hvordan et emne henger sammen med tidligere gjennomgåtte emner. Det handler også om måten læreren velger å tilnærme seg et emne på for å skape motivasjon og interesse.

Å velge fokus handler ikke så mye om hvordan læreren tilnærmer seg et emne, men å fremheve hva som er sentralt og viktig og å forstå hva som er en viktig basis å bygge videre på. Det handler altså først og fremst om tyngdepunktet i innholdet.

Den siste koden (*å styre og regissere*) handler mer om å ha kontroll på form og rekkefølge.

Jeg vil si at kodene representerer hvordan elevene skal jobbe med stoffet, inngangen til stoffet, innholdet i timen og strukturen på undervisningen.

Samtidig vil kodene også overlappe litt. Å finne andre innfallsvinkler eller å velge fokus kan for eksempel også ses på som en måte man styrer og regisserer timen på. Å styre og regissere en time kan også handle om å velge oppgaver og hvilken rekkefølge man vil at oppgavene skal gjøres i og når i timen de skal utføres. Å velge oppgaver kan være en del av å velge innfallsvinkel hvis man velger oppgaver som stemmer overens med den måten en ønsker å tilnærme seg temaet på.

Samtidig forteller alle fire kodene på ulike måter hvordan kunnskapen gjør læreren i stand til å gjøre valg uavhengig av læreboka. Lærerne kan velge andre oppgaver enn de som står i boken. De kan velge å bruke andre eksempler eller innfallsvinkler enn det boka legger opp til. De kan velge sitt fokus. Og de kan velge hvordan de vil strukturere stoffet uavhengig av læreboka. Til sammen utgjør de derfor en overordnet kategori som jeg har kalt «Fristille seg fra læreboka».

Å frigjøre seg fra læreboka virker først og fremst inn på planleggingsfasen av undervisningen. Når Wassermann & Stockton (2013) skriver at horisontkunnskap kan informere og forme lærerens planlegging av undervisningen, harmonerer dette godt med mine funn. I dette planleggingsarbeidet må lærere være i stand til å vurdere om innholdet i lærebøkene er presentert på en hensiktsmessig måte og med matematisk integritet (Ball et al., 2008; Dreher et al., 2016), og kunne avvike fra læreboka dersom de anser det for hensiktsmessig. Her må læreren altså både ha den matematiske kompetansen til å kunne overprøve læreboka og føle seg trygg nok til å avvike fra boka dersom det er hensiktsmessig.

Vi kan se av flere av sitatene i intervjuene mine at det er faglig trygghet forankret i avansert matematisk kunnskap som danner grunnlaget for å kunne frigjøre seg fra læreboka. Dette skal jeg diskutere nærmere i kapittel 5.

4.1.2 Å ha et blikk fremover

Det å ha et blikk fremover kan oppfattes på litt ulike måter. Her har jeg utviklet to koder som jeg har kalt

- Vite hvor du går videre
- Begrunne det nåværende med det fremtidige

<u>Vite hvor du går videre</u>

Her vil jeg ta utgangspunkt i dette utsagnet fra en lærer som jobber i ungdomsskolen:

> «Men sånn som når jeg planlegger, så tenker jeg at det er greit at jeg vet hva som er nødvendig å kunne, ikke bare akkurat det jeg skal ha om i den timen, men hva de bør ha av forkunnskaper og hvordan de trenger det i fremtiden.» (U1, 33)

Her er det verdt å legge merke til at læreren bruker ordene *planlegger*, *forkunnskaper* og *fremtiden.* Den enkelte timen blir her satt i en større sammenheng. Læreren ser det som nødvendig å kjenne til hva eleven kan fra før, men også hva de skal bruke kunnskapen til senere.

Her er et sitat fra en annen lærer:

> «Jeg har vel kanskje litt det at jeg ser tråden videre. Jeg vet hva de har behov for å *kunne* for å kunne lære seg avansert matematikk da. For å si det sånn da.» (U4, 1395)

Her poengterer læreren at han ser *tråden videre* og læreren understreker at han har kunnskap om hvilken basis elevene trenger for å kunne jobbe med mer avansert matematikk senere. Dette forteller at det å vite noe om det som kommer senere vil være nyttig for å kunne forberede elevene på deres matematiske fremtid.

Et annet eksempel som er interessant er dette:

> «Ja, jeg tenker litt på det spesielt i R2. Sier litt til dem om hva er forskjellen på når du begynner med grenseverdier, sier det litt på en måte som gjør at de lettere kan forstå det med epsilon-delta som er et stort… en stor barriere på universitetet. Begynne på den. Naturligvis kan man ikke begynne å innføre den på videregående, men man kan si litt… på en måte si «Hvis du nå tenker du skal komme nær den.. hvis grenseverdien skal være to… tenker hvis x da nærmer seg én, så skal du få f(x) til å bli kanskje en milliondel eller milliarddel fra to. Hvor nær må du da la x være én?» For å forklare på en sånn måte at det lettere kan abstraheres etterpå med epsilon-delta. Noen sånne ting.» (V2, 2667)

Her er et av få eksempler der læreren er konkret på hvordan vedkommende bruker sin avanserte matematiske kunnskap innen analyse og bevisføring for å forberede elevene på matematikk som kommer på universitetsnivå. Det læreren gjør her er mer enn bare å nevne hva man bruker matematikken til senere. Læreren foregriper matematikk som ligger utenfor skolepensumet, noe som Wasserman (2015) kaller for *foreshadowing.* I tillegg gjør læreren en form for forenkling siden han er mindre formell i sitt uttrykk. Å kunne forenkle uten å miste den matematiske integriteten er et viktig eksempel på hvordan lærerens avanserte matematiske kunnskap vil være nyttig for elevene (McCrory, 2012).

Alle tre sitatene som her er tatt frem viser noe om hvordan lærerne tenker fremover og hvordan de i planleggingsfasen tenker på hvordan stoffet de underviser legger et grunnlag for den matematikken elevene vil møte på senere.

<u>Begrunne det nåværende med det fremtidige</u>

En av lærerne sa dette:

> «egentlig spesielt med derivasjon og integrasjon, har jeg nok tenkt litt ut på det, altså brukt litt det. For da prøver jeg å relatere det til hva, hvorfor vi skal ha det og 'hvordan skal dere bruke dette her senere' og så videre.» (V3, 2778)

I dette utsagnet kan vi se at læreren snakker om å relatere temaene derivasjon og integrasjon til hva det brukes til senere og bruker dette blant annet til å begrunne overfor elevene hvorfor de skal lære dette. Dette impliserer at læreren faktisk må ha kunnskap om den videre anvendelsen av derivasjon og integrasjon utover det elevene skal lære.

Et annet utsagn som kan være verdt å ta med her, er dette:

> «Jeg tror og det er viktig at du kan trekke inn ting som kommer senere, inn i undervisningen din. At du kan si, dette her kan du bruke til den og den type matematikk, ha kunnskap om hva den typen matematikk blir brukt til, for eksempel.» (U5, 1951)

I likhet med det forrige utsagnet, ser vi hvordan læreren her setter undervisningen i sammenheng med det fremtidige og bruker dette i sin argumentasjon overfor elevene.

Hva *senere* betyr i denne sammenhengen får vi ikke vite noe om. Hurst (2016) skriver om nær og fjern horisont. Den nære horisonten ligger i det kommende skolepensumet, mens den fjerne horisonten dreier seg om den avanserte matematikken som kommer etter skolen. Begge deler kan være omfattet i ordet *senere*. Lærerne kan altså bruke fremtidig anvendelse som en begrunnelse og hjelpe eleven til å se at stoffet står i en større sammenheng.

Oppsummering av kodene

Her har jeg sett på to koder, nemlig «vite hvor du går videre» og «begrunne det nåværende med det fremtidige.»

Den første koden handler mer generelt om å vite noe om det kommende matematiske landskapet og hvordan man i planleggingen av et emne velger å posisjonere seg i forhold til det man vet elevene vil møte på senere. Dette er noe lærerne gjør uten å nødvendigvis å formidle noe til elevene om at dette er et grep man gjør.

Den andre koden handler mer om hvordan man synliggjør hvordan den fremtidig matematikken vil være forankret i den lokale timen og hvordan man overfor *elevene* begrunner innholdet i nåværende tema med det som kommer senere.

Begge kodene forteller noe om det å sette innholdet i undervisningen i sammenheng med fremtidig matematikk og viser hvordan læreren ser fremover når de planlegger sin undervisning. De danner derfor kategorien «å ha et blikk fremover».

Her er vi inne på noe av kjernen til horisontkunnskap, nemlig det som Ball & Bass (2009) betegner som å kunne fornemme de matematiske omgivelsene til den «lokale» undervisningen. Å kjenne de overordnede retningene som en bestemt idé peker mot, kan hjelpe læreren med å gjøre elevene klare for videre læring gjennom å fremme refleksjon rundt hva som må komme etterpå (Stockton & Wassermann, 2017). Schoenfeld & Kilpatrick (2008) skriver at kompetente lærere kjenner til lærestoffets opprinnelse og innholdets retning og hvordan ideer utvikles begrepsmessig, og at det hjelper dem organisere innholdet. Dette viser hvor viktig det er å undervise med fremoverblikk.

4.1.3 Å differensiere i undervisningen

Her har jeg brukt disse kodene:

- Forstå hva den enkelte elev trenger
- Utfordre de sterke elevene

<u>Forstå hva den enkelte elev trenger</u>

Her starter jeg med dette utsagnet fra en lærer på ungdomstrinnet om hvorfor avansert matematisk kunnskap er viktig.

> «Jeg tror i hvert fall at det, igjen i differensieringen, så vil det bli veldig greit å kunne det. Ja og så vite mer om det som kommer, sånn at du kan legge opp.. legge opp litt ulikt.» (U1, 206)

I dette utsagnet ser vi at læreren mener at det å kjenne til det som elevene vil møte senere, er nyttig for å kunne differensiere i undervisningen eller *legge opp litt ulikt* som læreren kaller det. Læreren sier ikke noe mer om på hvilken måte dette er en fordel. Men mer informasjon om hvordan dette er nyttig kan vi få i dette utsagnet fra en annen lærer:

> «jeg tror når du får noe du ikke kan, så har du ikke så mye å velge, har du ikke så mange innfallsvinkler. Den her… komme på noe hele tiden.. så treffer du lett.. du tar.. den *der*. Det var det som skal til med *deg*.» (U2, 284)

Her kan vi legge merke til at læreren snakker om innfallsvinkler som allerede er nevnt under kategorien «Frigjøre seg fra læreboka». I dette utsagnet beskriver læreren hvordan ulike innfallsvinkler kan være med på å hjelpe ulike elever frem til forståelse. Ikke alle elever forstår alle måter å legge frem et stoff på, men en lærer som har god kunnskap vil kunne se stoffet fra flere sider og dermed kunne tilpasse sine forklaringer til hvordan de ulike elevene tenker, til deres forutsetninger og erfaringsverden.

En variant av dette beskrives av en annen lærer:

> «Og da tenker jeg kanskje mer sånn tall og algebra, eller mer sånn tallforståelse, om det så er prosentregning, at en kan veksle der og finne en metode som faktisk fungerer for eleven da.» (V5, 3639)

Det interessante her er hvordan læreren bruker ordet *veksle* og snakker om å *finne en metode som faktisk fungerer*. Dette er en form for fleksibilitet som forutsetter at læreren har god kunnskap i emnene som undervises, slik at vedkommende kan bytte mellom ulike fremgangsmåter f.eks. i prosentregning som her er nevnt. Man må også ha god forståelse for ulike måter elever kan tenke på innen emnet.

Lærerne viser her hvordan de kan bruke sin fagkunnskap til å differensiere i undervisningen siden de kan velge mellom flere innfallsvinkler og metoder og slik tilpasse sine forklaringer til ulike elever og deres måter å forstå stoffet på.

Jeg vil også ta med dette utsagnet her:

> «Så er jo… det er jo noe, men det er jo også erfaringsbasert, tror jeg. Men du har vel kanskje litt flere hvis du har avansert kunnskap da. Dette med ulike innfallsvinkler til et problem og lett se… det er jo nesten enda mer viktig på disse P-klassene, ikke sant. At en ser, faktisk ser hvordan elevene har tenkt da. Og kan liksom veksle litt mellom ulike måter å regne på.» (V5, 3634)

I likhet med de andre utsagnene viser dette hvordan ulike innfallsvinkler og ulike måter å regne på er viktig i differensieringen. Men i tillegg sier informanten innledningsvis også noe om at dette også henger sammen med erfaring. Så både erfaring og avansert kunnskap i samspill kommer til anvendelse her.

<u>Utfordre de sterke elevene</u>

> «Jeg liker jo av og til å fortelle litt om hva som kommer i fremtiden. Hva man kan bruke matematikken til. Og for å prøve å tenne en gnist blant de sterkeste elevene i hvert fall. Hva… hvorfor bruker vi dette egentlig? Hva kan vi bruke denne matematikken til? Og da trenger en jo litt sånn avansert matematisk kunnskap for å vite hva en kan bruke det til i fremtiden.» (U5, 1692)

I dette utsagnet forteller læreren om at det er spesielt viktig å ha god matematisk fagkunnskap for å motivere de faglig sterke elevene. Dette er en form for differensiering som retter seg inn mot en bestemt gruppe elever. En annen av lærerne nevner en måte dette kan gjøres på:

> «Sånn hvis du har noen som trenger ekstra utfordringer, så kan du gi dem litt mer avanserte oppgaver innenfor et tema du vet kommer til å bli en del…» (U1, 208)

Her snakker læreren om elever som trenger *ekstra utfordringer* og sier at det å gi dem litt vanskeligere oppgaver kan være en måte å gjøre dette på. Dette gjør at også faglig sterke elever får mulighet til å strekke seg og utvikle seg faglig.

Det er flere utsagn der det poengteres at i møte med faglig flinke elever, er det nødvendig å ha god fagkunnskap både for at disse elevene skal kunne ha noe å strekke seg etter, for å opprettholde motivasjonen deres og for at læreren skal kunne svare på spørsmål som disse elevene stiller.

Oppsummering av kodene

I dette avsnittet har jeg sett på kodene *å forstå hva den enkelte eleven trenger* og *utfordre de sterke elevene*.

Den første koden er av mer generell karakter enn den andre, siden den ikke sier noe om en bestemt gruppe elever. Den begrenser seg heller ikke til faglig nivå. Det *å forstå hva den enkelte eleven trenge*r er viktig for å kunne gi tilpasset undervisning og å få med seg elever på ulike nivåer og med ulike måter å forstå matematikken på. Elever kommer til undervisningen med ulike ferdigheter, ulike kunnskapsnivåer og ikke minst ulike erfaringsbakgrunner. En lærer må derfor være i stand til å se fagstoffet på flere måter og ha flere innfallsvinkler og metoder. Lærerne jeg har intervjuet mener at avansert matematisk kunnskap hjelper dem i dette. Ma (1999) kaller dette for *multiple perspektiver* og skrive at lærere som har multiple perspektiver bedre kan hjelpe sine elever til en fleksibel forståelse. Også Guberman & Gorev (2015) beskriver at matematisk innsikt hjelper lærerne med å forklare komplekse emner på flere måter, og at denne faglige innsikten også gjør læreren i stand til å presentere flere løsningsstrategier.

Utfordre de sterke elevene er en kode som også handler om differensiering, men som fokuserer på en bestemt gruppe elever. Ofte tenker man på at det er viktig å ha tilpasset undervisning for å få med de faglig svake elevene. Her ser vi hvordan flere av lærerne velger å fokusere spesielt på dem som er faglig sterke. Også disse elevene har rett på å få strekke seg og utvikle seg og lærerne her mener at det er nødvendig med faglig overskudd for å kunne ivareta disse elevene.

Begge kodene handler altså om å bruke sin fagkunnskap i arbeidet med å tilpasse undervisningen til ulike elever og utgjør kategorien *Å differensiere i undervisningen*.

4.1.4 Å motivere

Motivasjon kan ifølge Kaufmann & Kaufmann (2009) defineres som «de biologiske, psykologiske og sosiale faktorene som aktiverer, gir retning til og opprettholder atferd i ulike grader av intensitet for å oppnå et mål.» (s. 93). Å motivere vil da handle om å frembringe motivasjon. Lærere kan bruke ulike grep for å skape motivasjon hos elevene. Dette krever ikke nødvendigvis dyp fagkunnskap. Jeg ser i denne sammenhengen bare på motivasjon som krever anvendelse av lærerens avanserte matematiske kunnskap.

Utfra materialet mitt har jeg i denne kategorien kommet frem til disse kodene:

- Å bruke fremtiden til å motivere
- Å bruke historien til å motivere

Å bruke fremtiden til å motivere

Her vil jeg begynne med to sitater:

> «Funksjonslæren er jo vanskelig fra... også på 1T og 1P. Og trigonometrien faller… syns jeg faller vanskelig, så prøver jo å motivere til at dette blir kjekkere når de kommer videre og at det har en nytte, men. Jeg syns det at det er nyttig å ha den, ha avansert matematisk kunnskap på de, spesielt på de to.» (V3, 2831)

> «Ja, det er jo mest for det at jeg føler med litt mer avansert kunnskap kan jeg mer fortelle dem egentlig hva det kan brukes til. Hva dette her egentlig fører til.» (U4, 3290)

I det første sitatet ser vi at læreren direkte snakker om å motivere innen emner som ofte oppleves som vanskelige, ved å fortelle noe om den fremtidige nytten. Også i det andre sitatet sies det noe om fremtidig bruk.

Det er ofte i møte med vanskelig stoff som elevene ikke mestrer umiddelbart, at de kan miste motivasjonen til å fortsette. Hvis man derimot kan fortelle elevene hvorfor de skal lære dette og hva det er nyttig til i fremtiden, så kan man kanskje forhindre at elevene gir opp.

Her er et sitat til som bygger opp under dette:

> «det blir gøyere rett og slett, når jeg kan det godt. Og så blir de kanskje litt mer nysgjerrige for faget og hvis jeg kan trekke inn og vise dem at dette er bare litt… vise dem en vei, gi dem noen små sånne glimt inn i hva dette her kan brukes til videre. Hva det kan føre til. Og vekke nysgjerrigheten deres, på en måte, enn om jeg bare hadde snakket om og undervist akkurat det de holdt på med der og da. Gi litt sånne… ja, glimt hva det har vært brukt til og litt hvordan de kan gå videre med det.» (V4, 3466)

Her kan vi for det første legge merke til at læreren mener at undervisningen blir *gøyere* når læreren kan stoffet godt. Gøyere undervisning kan tolkes som mer motiverende undervisning. Og for det andre ser vi hvordan læreren er opptatt av å vekke elevenes *nysgjerrighet* både gjennom å gi elevene små *glimt* inn i fremtidig bruk, men også hva det har vært brukt til i et historisk perspektiv (Noe som hører hjemme under den neste koden). Nysgjerrighet er ofte en sterk drivkraft for å ville lære noe nytt.

Å forklare hvorfor man underviser i et bestemt emne og hvordan man har bruk for dette senere, kan altså være en måte å gi elevene mer lyst til å jobbe videre med stoffet.

Å bruke historien til å motivere

Jeg har her tatt frem dette utsagnet:

> « Og jeg tenkte, jeg har jo en del… noen fag eller emner i matematikkens historie og jobbet jo en del med det. Og det har jeg av og til brukt for å vise elevene at det vi skal frem til, det har en gang vært et enkelt spørsmål, et praktisk spørsmål som er lett at problemet…. Altså det spørsmålet de hadde den gangen de hadde bruk for den matematikken, var et ganske forståelig spørsmål.» (V4, 3256)

Her ser vi en annen måte å gjøre undervisningen interessant på enn å snakke om fremtidig anvendelse. Man kan også bruke matematikkens historie til å sette tingene i et større og forhåpentligvis spennende perspektiv. Ved å vise hvordan matematikken har hatt en opprinnelse, en historie og ofte gjerne en nyttehensikt, kan man gjøre matematikken mer forståelig. Jeg tar med et eksempel til på nettopp dette:

> «Så er det noe jeg savner som jeg tror er for dårlig i norsk skole. Det at en er alt for dårlig skolert i matematikkhistorie. En skjønner alt for lite hvor resultatene kommer fra. Hva som er opphavet til dem. Og derfor så blir det ofte bare løsrevne ting, uten at de blir forankret i «Hvorfor tenkte de på dette? Hva ville de med det? Hvem begynte med dette her?» Jeg har sett det. Det gir ofte mening da.» (V1, 2325)

Her er det viktig å legge merke til ordet *forankret* og at det gir *mening*. Dette betyr at historien bak matematikken er av betydning for at emner ikke blir løsrevne og fragmenterte og at man gjennom et historisk perspektiv kan skape mening og helhet i det stoffet som undervises.

Flere steder snakker lærere om hvordan de bruker sin kunnskap om matematikkens historie til å introdusere emner slik at det gir en større mening for elevene. Nettopp det at stoffet har en mening kan være med på å fremme motivasjonen og gjøre undervisningen mer spennende.

Oppsummering av kodene

Jeg har nå sett på kodene «å bruke fremtiden til å motivere» og «å bruke historien til å motivere».

Den første koden handler om å fremme lysten til å lære ved å vise elevene noe om hvordan det de lærer nå er viktig og nyttig for emner de skal lære senere. Slik kan en lærer gi stoffet en mening og fremme motivasjonen til å lære og oppmuntre til å ikke gi opp når noe oppleves vanskelig eller kjedelig.

Den andre koden handler om å sette tingene i historisk perspektiv. Ved å la den historiske foranledningen være en spennende inngangsport som forteller noe om hvordan tidligere spørsmål driver frem utvikling i matematikken, kan man forankre stoffet, unngå at det oppleves som løsrevet og dermed gi det en meningsfylt sammenheng som gir lyst til å lære.

Begge deler handler om å motivere ved å sette det nåværende inn i en større sammenheng. Her er det altså viktig å ha kunnskap om sammenhenger og oversikt over hvordan ideer utvikler seg, noe som mange anser som viktige. Stockton & Wassermann (2017) skriver at kunnskap om hvordan ideer utvikler seg kan gi elever innsikt i hva matematikk er på et mer overordnet plan, og inspirere dem til å reflektere. Mosvold, Jacobsen & Jankvist (2014) skriver at en mulig tilnærming til å utvikle horisontkunnskap hos lærere, er gjennom matematikkens historie, og vi ser av mine data at matematikken historie kan brukes til både å motivere, variere undervisningen og gjøre lærestoffet mer tilgjengelig og meningsfylt for elevene.

En ting som kan være verd å merke seg er at en av lærerne sier at matematikken blir gøyere når man kan den bedre. I den forbindelse skriver Beswick, Watson & Brown (2006) at

> The notion of fun in this context is more than enjoyment of mathematics; rather, it incorporates a degree of confidence and delight in engaging in mathematics that goes beyond a utilitarian appreciation of the discipline. Such a capacity to play with mathematical ideas is dependent upon sufficient knowledge and understanding of mathematics to be able to see connections between ideas, and to imagine possible avenues for exploration. (Beswick, Watson & Brown, 2006, s. 69)

Man må altså ha tilstrekkelig fagkunnskap for å ha glede av å se sammenhenger og kunne forestille seg måter å utforske på. Kunnskap er derfor også en kilde til kreativitet.

4.1.5 Å veilede

I følge Løw (2009) kan veiledning ses på som en måte å stimulere veisøkerens egen læring på. Å veilede vil i denne sammenhengen si å hjelpe eleven til å finne sine egne svar gjennom refleksjon. I denne kategorien har jeg utviklet tre koder:

- Veilede elevene uten å gi svaret
- Hjelpe elevene å se mønstre og sammenhenger
- Kunne vurdere feilene elevene gjør og gi en passende respons

<u>Veilede elevene uten å gi svaret</u>

Her vil jeg trekke frem dette sitatet:

> «…det å ha horisontkunnskap gjør at du kan veilede elevene uten nødvendigvis å gi dem svaret. Det er en sånn ting at du vet hvilke hint du skal gi dem, det er ikke bare sånn at du kjenner løsningen. Men du kan kanskje gi dem litt mer generelt hint, vise til andre ting. Hva tenkte du, gjorde du der?» (V1, 2114)

Her kan vi for det første legge merke til at informanten bruker begrepet *horisontkunnskap* eksplisitt*,* at vedkommende snakker om å veilede elevene *uten nødvendigvis å gi dem svaret* og at læreren kan gi *hint*. Dette viser at denne læreren er opptatt av at vi ikke bare skal gi elevene svaret med en gang, men kunne stille de gode spørsmålene som kanskje hjelper eleven til å finne løsningen på egenhånd. Spørsmål som «hva tenkte du» kan være med på å fremme elevens evne til å resonnere. Å stille fruktbare spørsmål er en av lærerens mange oppgaver ifølge Ball et al. (2008).

Akkurat dette med å veilede uten å gi svaret, blir ikke nevnt av andre enn denne læreren. Men den peker på et viktig grep som lærere gjør i undervisningen når de fremmer elevenes evne til å resonnere seg frem til svar.

<u>Å hjelpe elevene til å se mønstre og sammenhenger</u>

I dette utsagnet får vi høre noe om hvilke fordeler en av lærerne mener han har sammenliknet med en lærer som ikke har like mye fagutdannelse:

> «Det blir jo en helt annen forståelse for det, det tror jeg. Det tror jeg positivt. Så man vet hvorfor ting skjer, det er mye du ser klarere enn du ellers ville gjort.
>
> …..

> Forskjellen blir jo gjerne at uten det så vet du *at* gjerne, kanskje. Men nå hvis du har mye, så vet du *hvorfor*.» (U2, 319)

Viktig å legge merke til her, er at læreren snakker om *forståelse* og at *man vet hvorfor ting skjer*. En slik form for kunnskap handler om strukturell eller relasjonell forståelse (Skemp, 1976) som er nødvendig for å hjelpe elever til å se sammenhenger og utvikle en tilsvarende forståelse hos dem.

Å vite *hvorfor* handler altså om å se sammenhenger. Her er hva en annen lærer uttaler om det å se sammenhenger:

> «Så det er viktig å kunne kanskje se sammenhenger som elever ikke ser og hjelpe dem til å se de sammenhengene.» (V2, 2456)

Her peker informanten på at l*ær*e*ren* må kunne se sammenhenger selv og at det er lærerens oppgave å hjelpe *elevene* å se sammenhenger som de ikke klarer å se på egenhånd. Dermed får læreren bruk for sin kunnskap om matematiske sammenhenger i undervisningsarbeidet. Lengre uti intervjuet forteller den samme læreren dette:

> «…det er mange ting som elevene hadde hatt nytte av om de kunne koblet det sammen. For det er jo veldig stort problem iallfall opplever jeg, nå i de siste årene, at elever på en måte lærer en metode og forstår veldig lite av det. Pugger det, og så ser de ikke sammenhengene det er i matematikken.» (V2, 2503)

Læreren opplever det som et problem at elevene pugger uten å se sammenhenger og dermed ikke kan gjøre seg nytte av de de har pugget. En konsekvens av dette blir at læreren må hjelpe elevene å utvikle evnen til å se sammenhenger, slik som denne læreren uttaler:

> «Og jeg syns at det er, ja, viktig å lære elevene og. Å tenke logisk. Å utvikle *den* egenskapen gjennom matematikken, og da tror jeg at de kommer lengre med matematikken, at de klarer det bedre.» (V4, 3455)

Hvis vi ser på disse utsagnene samlet, kan vi se at informantene mener at den faglige kunnskapen hjelper lærerne å forstå og se sammenhenger og at dette er en viktig forutsetning for å kunne hjelpe elevene å se sammenhenger. For elevene er dette viktig fordi de da forstår bedre og kan gjøre seg bedre nytte av det de lærer. Hvorfor slik kunnskap om sammenhenger mellom emner er sentral, kan vi se av dette utsagnet:

> «Og så det å se at ting henger sammen. At du kan ha om funksjoner, men da må du også knytte… du kan også knytte det til algebra og du kan knytte derivasjon til… altså du kan nytte så mye sammen fra de ulike læreplanmålene. Men så er de plassert litt sånn spredd utover, litt

> av læreplanmålene står i det kapittelet og litt i det. Da blir elevene veldig forvirret. Så kanskje det kan gi dem et litt bredere bilde av pensum, altså at faget er større og mer mangfoldig enn det de kanskje tror og at det… at ikke du kan… du kan ikke bare ha den lille biten der.» (V3, 3009)

Her ser vi hvordan læreren hjelper elevene med å knytte sammen bitene fra læreplanmålene til en sammenhengende helhet. Vi kan legge merke til at ulike matematiske emner knyttes sammen og læreren snakker om å gi et litt bredere og større bilde av pensum. Dette er det som gjerne kalles for koherens og som gjør at kunnskapen ikke blir fragmentert, men helhetlig og sammenhengende.

At læreren har kunnskap om sammenhenger i faget, er en form for horisontkunnskap (Guberman & Gorev, 2015). Man må se sammenhenger mellom matematiske begreper og mellom matematiske emner og også se sammenhengene til andre fag og hverdagssituasjoner. I rammeverket *The Knowledge Quartet* finner vi dette som dimensjonen *connections* (Rowland et al., 2003) der kunnskap om strukturelle sammenhenger i faget er grunnlaget for å skape k oherens i undervisningen. Schoenfeld & Kilpatrick (2008) skriver at en slik form for kunnskap hjelper læreren med å organisere innholdet i undervisningen slik at elevene kan introduseres for «big ideas» i stedet for at de roter seg bort i detaljer. Også Ma (1999) skriver om egenskapen *connectedness* som handler om fagforståelse som gjør læreren i stand til å utvikle elevenes kunnskap som en helhetlig, sammenhengende kunnskap i stedet for fragmenterte og isolerte kunnskapsbiter. Ifølge Silverman & Thompson (2008) er det nødvendig at læreren selv har utviklet kunnskap om matematiske strukturer ved å se faglige sammenhenger, før de selv kan utvikle en tilsvarende kunnskap hos elevene.

<u>Kunne vurdere feilene elevene gjør og gi en passende respons</u>

> «Men jeg har sett også i vurdering, så er det viktig at du har avansert matematisk kunnskap og så kan se hva elevene… hvor de har gjort feil. Prøve å finne ut hvordan de har kommet frem til den feilen og hva som skal til for å rette opp i det» (U1, 68)

Her legger vi merke til at læreren mener avansert matematisk kunnskap hjelper læreren å forstå hva eleven har gjort feil, hvorfor feilen oppstår og hvordan man kan *rette opp i det*. Å rette opp feil, kan for eksempel bety at man korrigerer en misoppfatning eller at man ser hvilken kunnskap eleven eventuelt mangler og finne ut hvordan eleven kan lære noe av feilen. Det er altså ikke nok at læreren ser at eleven gjør feil, men læreren må også ha tilstrekkelig fagkunnskap til å analysere feilene og veilede eleven slik at den ikke gjør samme feilen en gang til.

Dette er et enkeltstående eksempel der det å kunne vurdere elevenes feil, trekkes frem som en nyttig konsekvens av faglig innsikt. Men det er samtidig et viktig eksempel siden Ball & Bass (2009) skriver at «Making error a fruitful site for mathematical work» er en av lærerenes oppgaver som krever matematisk kunnskap og faglige ferdigheter

Oppsummering av kodene

I dette avsnittet har jeg tatt for meg kodene *veilede elevene uten å gi dem svaret, hjelpe elevene å se mønstre og sammenhenger* og *kunne vurdere de feilene elevene gjør og gi en passende respons.*

Å veilede elevene uten å gi dem svaret handler mye om å gi hint og å stille fruktbare spørsmål som fremmer et eget resonnement hos eleven. En slik måte å veilede på gjør at eleven ikke blir passiv mottaker, men at eleven aktivt kan konstruere kunnskapen sin med utgangspunkt i egne forkunnskaper.

Å hjelpe elevene til å se mønstre og sammenhenger handler gjerne om å kunne se det generelle, se strukturene, men også å kunne abstrahere. Dette er viktig for at kunnskapen ikke skal være fragmentert og isolert, men være til nytte som redskap for refleksjon. Læreren kan gjøre dette på ulike måter, enten ved å fortelle elevene hvordan sammenhengene er, rydde i fragmentene og lage en oversikt, eller gjennom å stille de gode spørsmålene som hjelper eleven til å få øye på sammenhengene. Det siste vil i delvis overlappe med den forrige koden.

Å kunne vurdere de feilene elevene gjør og gi en passende respons, forutsetter at eleven allerede har besvart en oppgave eller forsøkt å utføre et resonnement som ikke er riktig. Her kommer elevevaluering inn i bildet, noe som ikke omfattes av de andre kodene. Samtidig vil man gjennom hint og spørsmål også kunne hjelpe eleven til å oppdage og forstå sine egne feil, uten å direkte fortelle hva feilen består i. Og man kan bruke det å se mønstre og sammenhenger som en måte å fremme elevens forståelse på, så ikke samme feilen gjentas.

Til sammen er dette ulike måter å veilede elevene på. Å veilede elevene til å finne sine egne svar gjennom refleksjon, er i tråd med konstruktivistisk læringsteori. I denne prosessen er lærerens matematiske kunnskap en viktig komponent som sammen med fagdidaktisk kunnskap former lærerens mål og plan for læringsaktiviteter (Simon, 1995).

4.1.6 Faglig ressurs i undervisningen

Avansert matematisk kunnskap kan være en faglig ressurs på flere ulike nivåer og områder. Her har jeg utviklet disse kodene:

- Ressurs i bevisføring
- Presishet i språk og begreper
- Faglig ressurs innen matematiske emner

<u>Ressurs i bevisføring</u>

Her er et utsagn fra en lærer:

> «Særlig i geometri når du skal bevise, hvorfor er en trekant er 180 grader for eksempel.» (U2, 271)

I dette utsagnet kommer informanten inn på bevisføring og bruker vinkelsummen i en trekant som eksempel. Informanten utdyper ikke noe mer om på hvilken måte dette er viktig. Men vi vet at beviset for vinkelsummen i en trekant kan knyttes direkte til Euklids parallellpostulat. Bevisføring har tradisjonelt vært en viktig del av matematikken. Forståelse for rollen bevisføring har, er viktig for å utvikle den matematiske tankegangen, og også for matematisk argumentasjon slik som disse to utsagnene beskriver det:

> «… altså i alle disse kursene så kommer kanskje dette med bevisføring litt inn og sånt da, men det å ha et kurs der en… der det legges vekt på å fullføre resonnementer, det å også bevise ting, det tror jeg er også viktig. Men ikke for bevisets egen del, eller for den setningen, men for å lære seg argumentasjon.» (V1, 2331)

> «Og så synes jeg det er faktisk også litt viktig at de har vært igjennom en del bevisføring, for der utvikles også dette logiske resonnementet som er i matematikken.» (V4, 4353)

Her vil jeg peke på at den ene informanten tar frem at bevisføring er en kompetanse man kan få gjennom utdannelse. Og at dette ikke handler om den setningen man beviser, men om å lære seg matematisk argumentasjon. Begge disse utsagnene gir mye mer informasjon enn det forrige. Her får vi ikke bare et utsagn om at det å beherske bevisføring er viktig, men vi får en begrunnelse for hvorfor man bør ha denne typen kunnskap. Å kunne resonnere og argumentere er en viktig del av matematikkens egenart. Dette er nødvendige kompetanser som elevene trenger for å utvikle seg innen faget.

Slik beskrives det av Schoenfeld (1994, s. 76): «Proof is not a thing separable from mathematics, as it appears to be in our curricula; it is an essential component of doing, communicating, and recording mathematics. And I believe it can be embedded in our curricula, at all levels. »

<u>Presishet i språk og begreper</u>

Jeg vil her ta frem dette utsagnet:

> «Jeg kjenner til bakgrunnen til ordene, vet hvorfor ordene er brukt og vet og litt mer kanskje, kan du si. Begrepsdefinisjoner på en tydeligere måte. Så det kan gjøre at jeg er språklig mer nøyaktig.» (V1, 2124)

Her kan vi legge merke til at informanten mener det er viktig å vite noe om bakgrunn og betydning av ordene. Da er det lettere å forstå begrepene og en konsekvens av å forstå ordbruken er at man er mer nøyaktig. Det er flere andre lærere som understreker nøyaktighet i språket:

> «Jeg blir mere nøye med at de bruker de riktige symbolene, at de bruker… at de bruker matematisk språk på den måten. Altså litt… at de er presis i sitt matematiske språk.» (V4, 3431)

> «At en er mer forsiktig med hvordan en forklarer matematiske begrep. En vet litt om disse fellene som elevene av og til detter i, at de misforstår ting. På grunn av at en bruker litt sånn feilaktig språk.» (U5, 1702)

Her ser vi at presisjon i språket vektlegges og vi får også en argumentasjon for hvorfor dette er viktig. Feil språk kan føre til misforståelser. Det første utsagnet handler mest om at læreren er nøye på elevenes språk, mens det andre utsagnet tar for seg lærerens eget språk.

Samtidig var dette noe ikke alle lærerne var enige i. Noen av lærerne mente at de ikke var så nøye med dette, men tvert imot unngikk fagspråk bevisst. Her er et eksempel på dette:

> «Der tror jeg jeg må svare at jeg er ganske dårlig på å bruke sånn terminologi egentlig i undervisningen. Jeg er veldig dårlig på det. Det er litt fordi jeg vil ha alle med hele tiden. Så det har jeg gjort litt bevisst på en måte, at jeg unngår å bruke vanskelige ord da» (U4, 1432)

Argumentet er altså at matematisk språk er vanskelig og at man ikke klarer å få alle elevene med seg ved å bruke det formelle språket.

Faglig ressurs innen matematiske emner

Jeg har her plukket ut noen utsagn som viser hvordan lærere anvender den avanserte matematiske kunnskapen direkte som en ressurs innen enkelte emner.

Vektoraddisjon:

> «Fordi vektorer er jo et nytt matematisk objekt for elevene. De er vant med tall og bokstaver som står for tall. Nå kommer det noe helt annet. Du må på en måte redefinere pluss eller addisjon og multiplikasjon med skalar da. Så da har jeg bruk for det med grupper så jeg prøver på en måte å indirekte si til eleven om da. Hva en gruppe er og hvorfor, at de da ser det, sammenhengen mellom vektoraddisjon og skalaraddisjon.» (V2, 2462)

Her kan vi for det første legge merke til at læreren snakker om å redefinere operasjoner som elevene allerede kjenner til. Vi ser også hvilken type avansert matematisk kunnskap læreren mener det er bruk for her, nemlig kunnskap om grupper. Dette er interessant fordi det er en av få uttalelser som er veldig konkret på hvordan den avanserte matematiske kunnskapen blir anvendt i klasserommet.

Polynomdivisjon:

> «Ja, det er jo egentlig mange ting jeg tenker på, men innenfor algebra, når vi skal jobbe med polynom, så er det litt nyttig å ha en god del algebrakunnskap og også om avansert, altså abstrakt algebra. Å vite litt om… polynomdivisjon er jo et eksempel på en generalisering av vanlig divisjon da og vite litt om, ja, polynomgrader, irredusible polynomer og sånne ting. Der er det i hvert fall nyttig å kunne en del mer enn det som… for at elevene skal kunne lære.» (V2, 2487)

Igjen ser vi her hvordan avansert kunnskap innen algebra kommer til nytte. Jeg vil her påpeke at dette er samme læreren som kom med det forrige utsagnet og at informanten er alene om å gjøre en så klar kobling mellom abstrakt algebra og fagemner i skolesammenheng.

Derivasjon:

> «Kanskje 1T eller videre på R, at når en skal finne nullpunkter og toppunkter, eller ekstremalpunkter da, og en begynner med den deriverte for eksempel og så se de sammenhengene. At du og kanskje kan bruke… altså tegne grafer som viser den funksjonen og funksjonen til den deriverte i samme… for det er jo komplekst.» (V5, 3600)

I dette utsagnet fokuseres det på derivasjon og læreren påpeker at dette er noe som er komplekst. Vi kan også legge merke til at læreren snakker om å se på *sammenhengene*, altså handler det ikke bare om å kunne en teknikk for derivasjon, men å forstå selve begrepet derivasjon og se sammenhengene mellom begrepene.

Ulike trinn krever ulik kunnskap

Noen emner er imidlertid ikke like aktuell for alle trinn og nytteverdien som faglig ressurs kan derfor variere mellom skoleslagene. For eksempel kommer differensiallikninger ikke inn som kompetansemål før i R2 på VG3. Det betyr at mange elever aldri blir undervist i dette emnet. Jeg har i denne sammenhengen tatt frem disse to utsagnene:

> «Jeg har vel, sånn som jeg tenker selv, så har jeg veldig liten bruk for avansert matematisk kunnskap sånn som for eksempel differensiallikninger og sånt.» (U5, 1662)
>
> « Så jeg tok jo et fag, et kurs i differensiallikninger i fjor vår, for jeg tenkte at jeg må kunne litt mer om dette, på universitetet. Så det at det… og det var for min egen del for at jeg ville… ja, jeg kunne jo undervise det for jeg kunne jo det som sto i boken, men jeg ja, jeg fikk spørsmål fra elever som jeg ikke visste hva jeg skulle svare på.» (V4, 3499)

Det første utsagnet er fra en ungdomsskolelærer. Her trekker læreren frem differensiallikninger som et eksempel på avansert matematisk kunnskap som han egentlig ikke har særlig bruk for. Det andre utsagnet stammer fra en lærer på videregående skole som har undervist i emnet differensiallikninger i faget R2 uten å ha formell fordypning i dette og som har valgt å ta et kurs i dette. Årsaken er at denne læreren opplevde å ikke kunne svare på spørsmål som elevene stilte.

Til sammen viser disse to utsagnene at avansert matematisk kunnskap kan være nyttig for noen, men ikke for andre. Det handler om hvilket nivå og hvilken type matematikkurs man underviser på. Horisontkunnskap er altså ulik for lærere i ulike skoleslag.

Oppsummering av kodene:

Jeg har her sett på tre ulike koder som handler om å bruke den avanserte matematikken som en ressurs i undervisningen.

Ressurs i bevisføring fremheves som viktig fordi det handler om argumentasjon. Deduktiv resonnering i form av bevisføring er en sentral del av matematikken som vi finner i alle emner i matematikken og er derfor er viktig kompetanse å utvikle hos elevene.

Presishet i språk og begreper er viktig fordi det handler om å kommunisere matematikk på en entydig måte. Dette er også en sentral del av matematikken som ikke er begrenset til bestemte emneområder, men må utvikles fortløpende uansett hvilket emne man jobber med.

Begge disse kodene handler altså om sentrale matematiske praksiser og handler mye om å forstå matematikkens karakter og egenart. Innen bevisføring er presishet i språk og begreper veldig sentralt, så slik henger kategoriene også tett sammen.

Faglig ressurs innen matematiske emner handler om at man kan anvende den kunnskapen og innsikten man har tilegnet seg i høyere utdanning i de ulike emnene. Noen ganger kan det handle om å hente flere eksempler enn det vi finner i bøkene, men det kan også handle om å sette undervisningsstoffet i en større sammenheng og tydeliggjøre strukturer og sammenhenger i stoffet.

Til sammen viser dette at den avanserte kunnskapen kan brukes som ressurs på mange forskjellig måter i matematikkundervisningen, enten det er innen bestemte emner eller om man fokuserer på mer generelle og gjennomgripende egenskaper som språk og bevisføring.

4.1.7 Å kunne håndtere uforutsette situasjoner

I all undervisning vil det i større eller mindre grad oppstå uforutsette situasjoner som læreren må håndtere. Jeg har utviklet disse kodene:

- Å kunne svare på spørsmål fra elevene som man ikke har forberedt seg på
- Å kunne finne på oppgaver, eksempler og innfallsvinkler på sparket
- Å kunne utnytte en uforberedt situasjon til noe fruktbart

<u>Å kunne svare på spørsmål fra elevene som man ikke har forberedt seg på</u>

Her er to sitater om nytten av god fagkunnskap:

> «Det er jo det med å kunne undervise og svare på spørsmål, ta ting litt på sparket, hvis det oppstår noe at du kan det uten å ha måttet forberede deg til alt» (U1, 184)
>
> «man kan jo ofte ta de spørsmålene som elevene kommer med, med en gang. Jeg føler ikke at jeg blir satt på plass noen gang.» (U4, 1424)

Vi kan her se at lærerne snakker om å *svare på spørsmål* og å *ta ting litt på sparket* og *ta de spørsmålene elevene kommer med en gang.* Dette er altså en fordel fordi man slipper å forberede seg på absolutt alle detaljer og man føler seg ikke satt til veggs av elevene. Et annet sitat som forteller litt mer om dette, kommer her:

> «Altså, jeg tror det er viktig fordi at… Jeg tror man kan gi bedre svar på spørsmål som elever lurer på. For hvis man ikke vet så veldig mye, hvis man på en måte ligger på en-to sider foran, så har man, klarer man ikke å gi de gode svarene, tror jeg.» (V3, 3075)

Her er læreren ikke bare opptatt av å kunne svare, men at svarene skal være gode, noe man ikke har forutsetning for uten god fagkunnskap. I likhet med mange av de andre kategoriene, kan dette også her se ut til å henge sammen med trygghet slik som dette sitatet viser:

> «Man blir mye tryggere på det man underviser. Kommer det spørsmål fra elever sånn litt utenom eller… så kan man forklare det uten å måtte komme tilbake og lese seg opp på det, sant. (V2, 2640)

Vi kan legge merke til at faglig trygghet ses på som nødvendig for å svare på spørsmål og gi gode svar, samtidig som det sparer læreren for en del arbeid som det å lese seg opp faktisk innebærer.

<u>Å kunne finne på oppgaver og eksempler på sparket</u>

> «Du kan lage en oppgave på tavlen hvis du ser at det som er i boken blir for vanskelig eller for lett». (U1, 87)

> «Så har jo jeg mye mer å komme med da, føler jeg. Enn hvis jeg ikke kan mere, noe særlig mere enn de skal kunne. Jeg kan komme med mange flere eksempler. Jeg kan fortelle dem mer hva de kan bruke det til videre, selv om det ikke er det de skal gjøre nå da.» (V4,3238)

Her er to utsagn som viser måter en lærer kan ha nytte av sin matematiske fagkunnskap på i en uforberedt situasjon. I det første utsagnet nevnes det å lage en oppgave, mens det i det andre nevnes at man kan finne flere eksempler og også at man kan si noe om fremtidig anvendelse. Dette har jeg vært innom i andre koder også, som for eksempel det *å begrunne det nåværende med det fremtidige.*

<u>Å kunne utnytte en uforberedt situasjon til noe fruktbart</u>

> «Hvis man kan bare det man skal undervise så blir det vanskelig å trekke noen sammenhenger og vanskelig å ta ting på sparket som kommer opp.» (V2, 2632)

> «Sånn hvis det dukker opp situasjoner at du kan vri om litt for å belyse noe. Det tenker jeg, kanskje.» (V5, 3579)

I disse to utsagnene snakker lærerne hverken om å svare på spørsmål eller om det å finne på oppgaver eller eksempler på sparket. Derimot kan vi legge merke til at det snakkes om å trekke sammenhenger og om å *vri om for å belyse noe*. Utsagnene tar altså utgangspunkt i en situasjon som oppstår og viser her to måter en kan utnytte situasjonen til noe nyttig, selv om det ikke var planlagt. Å trekke opp sammenhenger har allerede tidligere vært pekt på som en viktig anvendelse og det er også viktig i mer spontant oppståtte situasjoner. Det samme gjelder det å belyse noe fra en annen side.

Oppsummering av kodene

Jeg har nå sett på kodene *Å kunne svare på spørsmål fra elevene som man ikke har forberedt seg på*, *Å kunne finne på oppgaver, eksempler og innfallsvinkler på sparket* og *Å kunne utnytte en uforberedt situasjon til noe fruktbart.* Jeg skal nå oppsummere hva disse kodene beskriver og peke på likheter og forskjeller mellom dem.

Å kunne svare på spørsmål fra elevene som man ikke har forberedt seg på handler om å være i stand til å respondere på innspill fra elevene. Dette krever altså at elevene er aktive og kommer med spørsmål. Slike spørsmål kan for eksempel dreie seg om selve forståelsen av stoffet, hva det kan brukes til eller hvordan det henger sammen med andre ting man har lært. Dette krever at læreren kan forklare stoffet på ulike måter og sette det inn i større sammenhenger, både i tidsperspektiv og i bredde. Det krever altså god faglig oversikt og fleksibilitet i kunnskapen til læreren, men også en del erfaring og forståelse for hvordan elever tenker.

Å kunne finne på oppgaver, eksempler og innfallsvinkler på sparket er noe som kan være nødvendig uavhengig av om elever stiller spørsmål eller ikke. Slike situasjoner kan oppstå hvis læreren for eksempel ser at elevene ikke henger med, men det kan også være hvis elevene synes stoffet er enklere enn man hadde regnet med. Man kan da konstruere oppgaver av annen vanskelighetsgrad eller kanskje av en helt annen type. Dette handler altså om å justere undervisningen underveis. Men noen ganger kan dette også være en måte å respondere på de uforutsette spørsmålene, så slik kan dette overlappe noe med den forrige koden

Å kunne utnytte en uforberedt situasjon til noe fruktbart kan være noe annet enn å svare på spørsmål eller finne på oppgaver og eksempler på sparket. Det kan for eksempel være å ta tak i en elevs begynnende resonnement og utvikle det videre ved hjelp av veiledende spørsmål, eller det kan være å ta frem en alternativ løsningsmetode som en elev har kommet opp med i timen og se på hvordan den henger sammen med andre løsningsmetoder. Slikt kan også skje gjennom å svare på elevers spørsmål eller gjennom å finne på en oppgave i farten, så også her vil det være noe overlapping mellom kategoriene.

Alle kodene dreier seg imidlertid om å håndtere uforutsette situasjoner. I The Knowledge Quartet (Rowland et al., 2003) kan vi gjenkjenne dette som dimensjonen *contingency*. Her beskrives dette som evnen til å ta ting på sparket og særlig det å respondere på elevenes ideer og være forberedt på å avvike fra den oppsatte planen. Rowland et al. (2003) skriver også at hvis man er usikker på sin faglige tilstrekkelighet så vil dette medføre engstelse, og med økende engstelse avtar vår evne til å lytte. En følge av dette er da redusert evne til å lytte til elevenes ideer eller svekket evne til å fornemme hva som er mulig å få til i øyeblikket.

4.1.8 Å forstå hvordan det er å lære matematikk sett fra elevens perspektiv

Kode: Å forstå hvordan det er å lære matematikk sett fra elevens perspektiv

En av lærerne uttalte følgende om nytten av å ha tatt kurs i avanserte matematiske tema:

> «Jeg tenker det ved at jeg har da… jobbet så mye med avansert matematikk selv så har jeg kanskje lært meg en del gode strategier for læring, eller hva skal jeg kalle det, læring ja, læringsstrategier da som gjør at jeg kan gi det videre til elevene.» (U4, 1375)

Her snakker læreren om at han gjennom egen erfaring med å lære matematikk har tilegnet seg en del læringsstrategier, og at han kan bruke denne erfaringen til å gi elevene læringsstrategier. Og videre sier samme lærer:

> «Jeg vet at det er på en måte byggesteiner videre hele tiden. Så er det det som jeg tenker at det er viktig at man har på en måte, man har jobbet så mye med matte selv, sånn at man på en måte vet at man må jobbe litt da. For elevene må faktisk jobbe hardt, ikke bare lære seg pensumet på ungdomsskolen. Man må på en måte holde arbeidsgløden oppe da for å kunne jobbe videre.» (U4, 1399)

Her ser vi at læreren snakker om byggesteiner og arbeidsvaner. Hvis man sammenlikner matematisk kunnskap med et byggverk, blir alle byggesteinene viktig og ikke minst er grunnmuren viktig. Denne læreren uttaler seg om sin egen erfaring med å lære matematikk, og mener at en viktig type kunnskap er å kjenne til selve læringsprosessen og forstå at læring også innebærer hardt arbeid.

En litt annen måte å ha nytte av sin egen erfaring med å lære matematikk tas frem i dette utsagnet:

> «det har jo gitt en forståelse av at… at jeg *vet* hvordan det er å ikke forstå ting. Sånn i forhold til svake elever, jeg vet…jeg vet den følelsen av å.. at matematikken den er uforståelig. Jeg forstår dem» (U3, 781)

Her beskriver læreren hvordan han har forståelse for elevenes frustrasjon. En følge av dette kan være at læreren inntar en mer empatisk innstilling til elevene fordi han vet noe om hvor vanskelig det er å ikke forstå det en jobber med, og dermed også hvor viktig følelsen av mestring er.

Jeg har her utviklet en kode som jeg ikke synes passet sammen med noen andre koder, så den har fått bli en kategori i seg selv. Koden rommer likevel noen nyanser. Den rommer et følelsesmessig aspekt om hvordan det kan oppleves å lære matematikk og den rommer et erfaringsrelatert aspekt som handler om hvordan den lærende bør jobbe med faget.

I litteraturen som jeg har funnet om MKT og horisontkunnskap er det skrevet lite om læreres egen erfaring med å lære avansert matematikk og hvordan den påvirker utviklingen av MKT. Men Even (2011) skriver at lærere som tok videreutdanning i matematikk, ble mer sensitive overfor elevenes følelsesmessige vanskeligheter i forbindelse med læring av matematikk fordi de gjenkjente frustrasjonen deres. Silverman & Thompson (2008) skriver at læreres utvikling av MKT starter med utviklingen av nøkkelforståelse av viktige begrep og så må denne forståelsen videreutvikles gjennom refleksjon for hvordan den kan anvendes i undervisningssammenheng. Dette forteller noe om at de personlige erfaringene lærerne gjør gjennom å forstå sin egen læring av faget, er viktige for utviklingen av deres undervisningskunnskap.

4.1.9 Faglig trygghet

Kode

- Trygghet

Her har jeg valgt å la koden trygghet omfatte alle varianter og beskrivelser av fenomenet trygghet, enten det er det eksplisitte ordet trygghet eller uttalelser om å føle seg trygg eller være trygg. Dette er bare ulike formuleringer for det samme.

Jeg vil her starte med et utdrag fra et intervju med en lærer som jobber på ungdomstrinnet:

> Meg: Men hvis du tenker… sammenlikner deg med en som ikke har hatt noe særlig matematikkutdannelse. Hvilke fordeler tror du at du har da?
>
> U5: Jeg føler meg nok mye tryggere når jeg underviser da, absolutt. Om jeg ikke hadde hatt den matematiske bakgrunnen som jeg har så hadde jeg ofte stått i stampe om jeg skulle

> undervise de mest avanserte elevene. De som er flinkest. De raser ofte av gårde og så har de tekniske spørsmål som kanskje kan bli litt vanskelige å svare på om jeg ikke hadde hatt… om jeg hadde hatt den minste mulige antall studiepoeng som det går an å ha for å undervise.
>
> Meg: Er det andre måter du tror det påvirker undervisningen din på?
>
> U5: Nei. Det er den tryggheten som er ekstremt viktig for med en gang eleven merker at jeg er trygg, så blir de… får de mye mer tillit merker jeg, til det jeg sier. At det jeg sier stemmer. Sant, for om du har en vikar som er mye mer usikker så stoler de ikke så masse på den.
> (U5, 1670)

Her kan vi legge merke til at læreren eksplisitt snakker om trygghet i undervisningen som en konsekvens av sin solide faglige utdannelse, og at han peker på to områder der denne tryggheten er viktig. For det første er dette nyttig i møte med faglig sterke elever som kan stille læreren utfordrende spørsmål og for det andre vil en lærer som viser sin trygghet fremme tillit hos elevene.

At faglig kompetanse gir trygghet understrekes av mange lærere og jeg viser her noen flere eksempler på sitater som illustrerer dette:

> «Det er den tryggheten, og du av og til kan se linjene. At du vet litt mer om funksjoner, du vet litt mer om algebra, du vet litt mer om… på disse tingene.. på tallteori. Du vet litt mer sånn at du har den tryggheten. Du vet mer enn det som står i læreboka. (U3, 637)
>
> «Og det er klart at du skal ha en viss matematisk kompetanse for å håndtere og være veldig trygg i svaret eller være trygg i at du kanskje sier: Jeg kan ikke si sikkert at denne kan løses» (V1, 2072)
>
> «Og så tror jeg man blir tryggere, man blir bedre som lærer når man har, man er tryggere på seg selv når man har mer kunnskap» (V3, 3088)
>
> «Jeg tror det er ganske viktig for at en lærer skal føle seg trygg. Om en kun har kunnskap om det som står i læreboken til elevene så vil en fort bli avkledd, tror jeg, av de sterkeste elevene, om du får spørsmål som går videre. Om du da sier at det kan du ingenting om, så vil eleven føle at du ikke er en god nok lærer. Ja, det tror jeg. Så trygghet er veldig viktig.» (U5, 1946)
>
> «Men altså, jeg tenker det er jo en trygghet for meg, tenker jeg. Sant, det er jo, det er jo ubehagelig å undervise noe du ikke er så veldig sikker på. Det er nå en ting, da. Sånn personlig.» (V5, 3804)

Jeg fant mange utsagn i intervjuene som handlet om faglig trygghet. Dette er kanskje ikke særlig overraskende, men det er interessant å se hvordan det å ha faglig trygghet har innvirkning på undervisningen på flere plan.

For det første forteller lærerne at det er en del psykologiske aspekter knyttet til dette. Ifølge informantene mine gjør faglig trygghet at lærerne føler seg mer komfortable i undervisnings-situasjonen. De forteller videre om at en lærer som er trygg på faget også gjør elevene trygge, slik som dette utsagnet illustrerer:

> «Og så tror jeg det gjør noe for… Hvis eleven er trygg på at de har en lærer som vet hva han holder på med, at de kan overlate roret til han, så tror jeg det er en veldig god ting. Hvis du… hvis læreren begynner… hvis elevene begynner å lure på læreren faktisk kan dette her, da har du tapt. Det er ikke noe smart.» (V1, 2358)

I tillegg vil den faglige tryggheten komme til uttrykk ved at læreren tør å frigjøre seg fra læreboka, at læreren tør å gå inn på spørsmål fra elever som er faglig krevende og tryggheten vil gjøre at læreren i større grad kan utfordre faglig sterke elever. Dette er tilknyttet koder og kategorier som jeg har tatt for meg lenger oppe og det skal jeg diskutere nærmere i kapittel 5.

Faglig trygghet utvikler læreren gjennom solid fagkunnskap og formell utdannelse utover det elevene skal lære. Dette er en type kunnskap som Guberman & Gorev (2015) betegner som matematikkfaglig innsikt. Slik kunnskap er viktig innen alle matematikkemner som man skal undervise i. Dette gjør at det kan være litt vanskelig å si hvilke emner en lærer bør ha utdannelse i ettersom læreplaner gjerne forandres og gjennomgår reformer. Jeg spurte imidlertid lærerne om hva slags matematisk kunnskap de selv mente en lærer hadde bruk for. Algebra, tallteori, funksjonslære, geometri og statistikk med sannsynlighetsregning ble fremhevet og dette er derfor muligens emner alle lærere bør ha, uansett nivå. Det viktigste er at læreren har solid fagkunnskap og dyp innsikt i alle emnene de skal undervise i. Dette kan vi kanskje oppsummere med dette sitatet:

> «Sånn som jeg tenker, så er det jo det at når du er på en måte et hakk over det du trenger å vite, så når du ser tilbake, altså når du ser ned på det du skal undervise da, så er det veldig mye enklere og du har en helt annen forståelse for det når du har på en måte beveget deg litt videre fra det som de skal lære.» (V4, 3226)

Wassermann (2017) skriver at mange mener lærere bør lære seg mer avansert matematikk nettopp utfra argumentet om at dette gir lærerne økt selvtillit. En slik selvtillit kan gjøre at lærerne føler seg mer komfortable med å svare på elevers spørsmål og fremmer en mer fleksibel tilnærmelse til undervisningen. Samtidig har vi i flere utsagn fra lærerne jeg intervjuet sett at manglende trygghet fører til at man i større grad blir avhengig av læreboka og gir undervisning av dårligere kvalitet. En annen interessant konsekvens fortelles det om i dette utsagnet:

> «Noen ganger kan du si, … for å si det sånn når jeg av og til har studenter, så av og til når studentene ikke er godt forberedt eller merker at de ikke kan det, så bruker de maktspråk. Sånn at elevene kan si «Han var dårlig til å forklare, men kan i hvert fall matematikk». Mens sannheten er at når du bruker maktspråk så er det ofte et tegn på at du ikke klarer å svare for deg.» (V1, 2426)

Her refererer informanten til lærerstudenter i praksis som prøver å skjule at de er faglig usikre og dermed tyr til det han betegner som maktspråk. Maktspråk er gjerne avanserte ord som elevene ikke kjenner betydningen av, og som gir et inntrykk av at læreren kan noe som elevene ikke kan og gjerne brukes for å få elevene til kjenne seg underlegne. Trygge lærere behøver ikke å ty til dette.

4.2 Andre funn

I dette avsnittet vil jeg oppsummere noen andre trekk og funn jeg har gjort i materialet mitt som ikke går direkte på å besvare forskningsspørsmålene mine, men jeg tar dem likevel med fordi jeg ser dem som relevante for den etterfølgende diskusjonen.

Det var en del av informantene mine som åpnet med å si at de egentlig hadde lite bruk for avansert matematisk kunnskap i sin daglige undervisning, men senere i intervjuet sier de likevel at de har stor nytte av det sammenliknet med en som ikke har denne kunnskapen. Nytten er bare ikke så direkte og åpenlys, men den gir dem en faglig trygghet som basis. Ifølge Davis (2008) er mye av lærernes kunnskap av den tause og ubevisste sorten, noe som kan forklare hvorfor lærerne ikke umiddelbart klarer å sette ord på nytteverdien av den avanserte matematiske kunnskapen.

Horisontkunnskap kan dreie seg om både nær og fjern horisont. Noen ganger er den nære horisonten knyttet til et annet skoleslag. Horisontkunnskap omfatter blant annet også oversikt over elevenes utdannelsesløp så det kan skapes kontinuitet (Fernández & Figueiras, 2014). I studien min forteller lærerne at kunnskapen om det matematiske pensumet i skoleslag før og etter er noe mangelfull. De som har kunnskap om dette, har det gjerne litt tilfeldig gjennom for eksempel egne barn, familiemedlemmer som jobber i andre skoleslag eller gjennom at de selv har jobbet der. Noen skoler har litt samarbeid mellom for eksempel barnetrinn og ungdomstrinn, mens andre opplever at slikt samarbeid er fraværende, slik som dette sitatet viser:

> «Det er liksom vi står på tre ulike øyer. På barnetrinn og ungdomstrinn og videregående. Så å få til et mer samarbeid der, det tror jeg elevene ville tjent på.» (U5, 1918)

Flere av lærerne fremhever at fagutdannelse alene ikke er tilstrekkelig. Erfaring spiller også en stor rolle. Men hvilken del av kunnskapen man tilegner seg gjennom utdanningen og hvilken del som blir dannet gjennom erfaring, kan noen ganger være vanskelig å vite. Dette kom tydelig frem hos flere av de mest erfarne lærerne. Uten tilstrekkelig fagkunnskap kan man neppe gjøre gode undervisningserfaringer. Men erfaring kan forme den eksisterende fagkunnskapen og gi ny innsikt. Samtidig vil de erfaringene man gjør også bli tolket gjennom personens allerede eksisterende faglige innsikt. Erfaring og kunnskap påvirker altså hverandre gjensidig. Shulman (1997) kaller dette for «the wisdom of practice».

Jeg vil til slutt også ta med dette sitatet her:

> «nei det er viktig å ha… det er ikke bare… men det er også didaktisk tenker jeg. Ja, så det er rett og slett å kunne reflektere rundt det der, tenker jeg, er jo… så det er jo begge deler. Det er ikke bare matematikkfaglig kunnskap, men det er også matematikkdidaktisk kunnskap. Begge de to tingene er viktige tenker jeg.» (U3, 1055)

Dette utsagnet illustrerer noe som flere av lærerne poengterer, nemlig at faglig fordypning alene ikke er nok, og de fremhever både didaktikk, entusiasme og evne til refleksjon hos læreren som relevante og viktige elementer for god undervisning. Sammen med den avanserte kunnskapen vil altså både erfaring, refleksjon og didaktisk innsikt ifølge lærerne være viktige for kvaliteten på undervisningen.

5. DISKUSJON

I denne delen skal jeg oppsummere noen hovedtrekk av resultatene mine og så se på hvordan de ulike funnene henger sammen, samt drøfte dem i lys av eksisterende teori og litteratur. Men aller først skal jeg si litt om hvordan studien min plasserer seg i forhold til liknende studier.

5.1 Forholdet mellom studien min og andre studier

Det aller meste jeg har lest om horisontkunnskap og anvendelse av avansert matematisk kunnskap, er teoretiske betraktninger. Jeg har rett og slett ikke funnet så mange studier som likner på det jeg har gjort, men jeg har funnet noen. Zaskis & Leikin (2010) utførte undersøkelser blant israelske lærere som jobbet på et nivå tilsvarende norsk ungdomsskole og videregående skole. De foretok kvantitative studier i form av åpne spørreskjema. Guberman & Gorev (2015) brukte også åpne spørreskjema for å kartlegge hvilke typer kunnskap grunnskolelærere i Israel anså som nødvendig for å gi god matematikkundervisning. Min undersøkelse skiller seg metodisk fra disse undersøkelsene ved at jeg har færre informanter og i stedet har intervjuet dem for å få frem deres syn. Intervju har vist seg å være nyttig fordi informantene kunne ordlegge seg slik det falt naturlig for dem selv, de kunne utdype sine utsagn og jeg kunne følge opp med oppfølgingsspørsmål.

Nicholas Wassermann har gjort flere studier av hvordan typer av avansert matematisk kunnskap kan være nyttig for lærere i deres undervisningsarbeid (Wassermann, 2016; Wassermann & Stockton, 2014; Wassermann, 2017), men alle disse studiene er teoretiske betraktninger som ikke henter informasjon fra praksisfeltet. I min undersøkelse har jeg latt lærerne slippe til med sine synspunkter basert på deres undervisningspraksis.

Når det gjelder begrepet horisontkunnskap så har det vært lite forskning på dette i Norge. Mosvold & Fauskanger (2014) har undersøkt læreres forestillinger om horisontkunnskap og Jacobsen et al. (2012; 2013) har undersøkt aspekter ved horisontkunnskap ved å utvikle vignetter basert på erfaringer fra praksis og fokusgruppesamtaler til lærere. Hole & Kleve (2011) viser at norske lærere på barnetrinnet mangler horisontkunnskap i emnet brøk, mens Tyskerud (2012) har undersøkt hvordan manglende horisontkunnskap blir oppfattet av lærerne som en hindring for undervisning. Men ingen av disse har undersøkt i hvilken grad eller på hvilken måte lærere som innehar avansert matematisk kunnskap, anser denne kunnskapen som nyttig i sin undervisningspraksis. I norsk sammenheng er studien min derfor ganske unik.

Tidligere forskning har pekt på ulike faser av undervisningen som planlegging (Wassermann & Stockton, 2013), gjennomføring (Jacobsen et al., 2013) og evaluering (Fernandez & Figueiras, 2014) som viktige områder der avansert matematisk kunnskap kan være nyttig. Jeg har ikke fokusert på disse fasene, fordi en del av kategoriene mine kan være aktuelle i flere faser. F. eks. vil en kategori som *å motivere* være noe man kan planlegge å gjøre på forhånd, men det kan også være noe som oppstår spontant i undervisningssituasjonen.

5.2 Oversikt over funnene mine

I resultatkapittelet har jeg til sammen utviklet og beskrevet ni ulike kategorier som lærerne mente de brukte sin avanserte matematiske kunnskap til. I tabell 2 har jeg laget en oversikt over kategoriene med tilhørende koder. I tillegg har jeg identifisert flere ulike hovedtyper av kunnskap som kan være nyttige i en lærers undervisningsarbeid, slik som beskrevet i forrige kapittel.

Kategori	Koder
Å fristille seg fra læreboken	- Å velge andre oppgaver - Å finne andre eller flere innfallsvinkler - Å velge fokus - Å styre og regissere undervisningen
Å ha et blikk fremover	- Vite hvor du går videre (Posisjonere) - Begrunne det nåværende med det fremtidige
Å differensiere i undervisningen	- Å forstå hva den enkelte elev trenger - Utfordre de sterke elevene
Å motivere	- Å bruke fremtiden til å motivere - Å bruke historien til å motivere
Å veilede	- Å veilede elevene uten å gi svaret - Å hjelpe elevene til å se mønstre og sammenhenger - Kunne vurdere feilene elevene gjør og gi en passende respons
Faglig ressurs i undervisningen	- Ressurs i bevisføring - Presishet i språk og begreper - Faglig ressurs innen matematiske emner
Å kunne håndtere uforutsette situasjoner	- Å kunne svare på spørsmål fra elevene som man ikke har forberedt seg på - Å kunne finne på oppgaver, eksempler og innfallsvinkler på sparket - Å kunne utnytte en uforberedt situasjon til noe fruktbart
Å forstå hvordan det er å lære matematikk sett fra elevens perspektiv	
Faglig trygghet	- Trygghet

Tabell 2. Oversikt over koder og kategorier utviklet i kapittel 4

De ni ulike kategoriene for anvendelse av den avanserte matematiske kunnskapen representerer ulike måter avansert matematisk kunnskap kommer elevene til gode på. I følge Wassermann (2017) er det nettopp dette som kjennetegner horisontkunnskap. Han betegner horisontkunnskap som ikke-lokal matematisk kunnskap som er nyttig for undervisningspraksis.

Kategoriene mine er forskjellige, men de henger også sammen på ulike måter. Det har vært en vanskelig jobb å rydde, strukturere og utkrystallisere hovedtrekk, fordi de ofte ser ut til å være sammenfiltret og avhengige av hverandre. Hvis man ser på dem i et mer overordnet perspektiv, så kan man likevel se noen viktige hovedtrekk.

I de neste avsnittene skal jeg oppsummere noen av hovedtrekkene som finnes i datamaterialet, og prøve å vise hvordan de ulike kategoriene for anvendelse av avansert matematisk kunnskap henger sammen med hverandre, og hvordan ulike former for kunnskap kan virke inn på sammenhengene.

5.2.1 Faglig tyngde som basis

Faglig ressurs i undervisningen

Når man tar matematikkutdannelse på høyskole- eller universitetsnivå tilegner man seg først og fremst den kunnskapsformen som Guberman & Gorev (2015) kaller for *matematisk innsikt*. Denne typen kunnskap varierer i innhold alt etter hvilken type kurs man tar. Matematisk innsikt vil gi lærerne et verktøy de delvis kan bruke direkte i undervisningen. Informantene mine har fortalt om at denne kunnskapen er relevant når de jobber med bevisføring og når de ønsker å utvikle det matematiske språket hos elevene. I dette arbeidet kommer også *logisk kunnskap* som er en form for metamatematisk kunnskap, til anvendelse. I tillegg er avansert matematisk kunnskap i form av *matematisk innsikt* en faglig ressurs innen de ulike emnene man underviser i.

Even (2011) studerte nytteverdien av faglige fordypningskurs for lærere som allerede var i jobb. Også her ble det trukket frem at utdannelsen kunne brukes som faglig ressurs i undervisningen. Mine data indikerer at nytten av fagkunnskap som ressurs i undervisningen vil være avhengig av hvilket nivå og hvilken type matematikkurs man underviser i. Ungdomsskolelæreren syns kanskje ikke differensiallikninger er så nyttig, mens R2-læreren i videregående skole i høyeste grad har bruk for dette. Her ser vi hvordan horisontkunnskap tolket som avansert matematisk kunnskap som er nyttig for praksis, kan være forskjellig for lærere på ulike nivåer. Det som er nyttig på ett nivå, er ikke nødvendigvis nyttig på et annet nivå. Dette stemmer med det Wassermann & Stockton (2013) skriver om at horisontkunnskap vil være forskjellig for lærere på ulike undervisningstrinn.

Innen kategorien *faglig ressurs i undervisningen* fant jeg eksempler på kunnskap innen abstrakt algebra anvendt for å øke elevenes forståelse av operasjoner med vektorer og forståelse for polynomdivisjon. Dette er et eksempel på anvendelse av kunnskapsformen *matematisk innsikt*. Jeg fant også et eksempel på hvordan kunnskap om *sammenhenger mellom matematiske begreper* kan anvendes til å utvikle en forståelse om sammenhenger innen funksjonsdrøfting hos elevene. Her ser vi også hvordan koden *å hjelpe elever til å se mønstre og sammenhenger* som er en måte å veilede elevene på, har utspring i lærerens kunnskap om sammenhenger.

Faglig trygghet

En annen anvendelse av den tilegnete fagkunnskapen var det som lærerne betegnet som *faglig trygghet*. Det var totalt flest utsagn som kunne kodes med varianter av ord tilknyttet trygghet, så dette er en veldig tydelig konsekvens av å ha faglig overskudd. Det kom klart frem i intervjuene at den faglige tryggheten hadde innvirkning på flere områder. Først og fremst rapporterer lærerne om følelsesmessige faktorer som at de selv blir mer komfortable i undervisningssituasjonen, og at lærere gjennom sin faglige trygghet også skaper trygghet og tillit hos elevene. I tillegg utstyrer faglig trygghet lærerne med en form for selvtillit som virker inn på selve undervisningspraksisen deres, noe jeg skal beskrive nærmere etter hvert.

Faglig trygghet ser først og fremst ut til å være forankret i den faglige utdannelsen til lærerne, og her vil altså den matematikkfaglige innsikten tilegnet gjennom høyere utdanning være grunnlaget for dette.

Selvtillit eller faglig trygghet beskrives av Ma (1999) som en avgjørende faktor for lærerens evne og vilje til å undersøke nye og uvante faglige problemstillinger som dukker opp i undervisningen. En lærer som mangler denne tilliten vil prøve å unngå problemet i stedet for å prøve å jobbe seg gjennom det. Som tidligere nevnt vil en engstelig lærer også være mindre sensitiv overfor elevenes utspill (Rowland et al. 2003). Også i studien til Zaskis & Leikin (2010) var komfort og selvtillit en tydelig konsekvens av avansert matematisk kunnskap, noe jeg tolker som analogt med kategorien «faglig trygghet» som jeg har utviklet.

Sammenhengen mellom kategoriene: Faglig tyngde

Både kategorien *faglig trygghet* og kategorien *faglig ressurs i undervisningen* representerer etter min mening en form for faglig tyngde. De er begge lett å spore direkte til lærernes formelle faglige utdannelse. Ordet trygghet kan gi inntrykk av dette først og fremst handler om å føle seg komfortabel i undervisningssituasjonen. Men faglig trygghet gir mye mer enn bare en psykologisk effekt. Lærerne knytter effekten av faglig trygghet også opp mot det å kunne respondere på uforutsette situasjoner og å kunne regissere sin undervisning uavhengig av læreboka. Dette er igjen nyttig når det er behov for å differensiere, motivere og å kunne hjelpe elever til å se sammenhenger.

Også når lærerne anvender sin fagkunnskap mer direkte i undervisningen, vil dette ha innvirkning på de andre kategoriene jeg har funnet. Når en lærer kan bruke sin kunnskap innen abstrakt algebra direkte innen emner som vektorregning og polynomdivisjon, så kan dette for eksempel hjelpe elever til å se sammenhenger, eller det kan forberede eleven for sin matematiske fremtid, altså en form for fremoverblikk. Dette viser at faglig tyngde og matematisk innsikt er basisen for mange av de andre kategoriene som jeg har utviklet.

5.2.2 Fleksibilitet som verktøy

Å fristille seg fra læreboka

Jeg fant at lærerne i undersøkelsen min mener at de blir mer uavhengig av læreboka når de har avansert matematisk kunnskap. Dette kommer til uttrykk ved at de velger andre oppgaver fremfor dem som står i boka, eller supplerer med andre oppgaver og ved at de velger andre eksempler. De kan også velge andre eller flere alternative innfallsvinkler til et emne, og de kan velge å legge opp timene annerledes enn boka legger opp til med hensyn på rekkefølge på emner og hvor de ville legge fokuset sitt. Dette er en form for fleksibilitet.

Lærerne beskriver at de har frihet til å gjøre dette fordi de har en faglig trygghet. Årsakene til at de velger å avvike fra læreboka, kan være ulike ønsker om å differensiere eller å motivere. Det kan også være et ønske om å hjelpe elevene til å se sammenhenger eller tydeliggjøre hva som er viktig å fokusere på. Dette viser at fleksibiliteten er et verktøy som har basis i avansert matematisk kunnskap, og som anvendes på måter man jobber med elevene på. Når Ball & Bass (2009) skriver at horisontkunnskap kan hjelpe læreren med å understreke og fremheve sentrale punkter i undervisningen, så stemmer dette altså godt overens med mine funn. På den andre siden skriver Huckstep, Rowland & Thwaites (2003) at når en praksisstudent slavisk klynger seg til læreboka, blir dette ansett som uttrykk for svak fagkunnskap.

En lærebok sier ofte ingenting om når en lærer bør fokusere på bestemte ideer eller når det er nødvendig å utdype ideer (Nicol & Crespo, 2006). Da er det viktig at læreren har tilstrekkelig fagkunnskap til å ta slike avgjørelser på selvstendig grunnlag. Resultatene mine viser at den solide fagkunnskapen hjelper lærerne til å avgjøre hvordan de vil bruke læreboka og når de skal velge å bruke andre innfallsvinkler, rekkefølger eller på andre måter supplere eller erstatte bokas innhold. Det er en del av lærerens undervisningsoppgaver å kunne vurdere den matematiske integriteten til en representasjon og å kunne tilpasse det matematiske innholdet i lærebøkene (Ball et al., 2008) og vi ser her at den avanserte fagkunnskapen er et nyttig redskap i dette arbeidet. Dette betyr ikke at lærebøker er unødvendige eller at det å følge læreboka er det samme som dårlig undervisning, men kvaliteten på undervisningen avhenger av hvordan lærere bruker sine undervisningsressurser (Hill et al., 2008).

Kongelf (2011) har studert innholdet i norske læreverk for ungdomsskolen og konkluderte med at disse var veldig like i sine tilnærminger til stoffet. Det finnes imidlertid ingen krav til standard for norske læreverk, men de må være i samsvar med gjeldende læreplan. Imsen (1997) skriver at læreboka er et uttrykk for hvordan lærebokforfatteren har tolket læreplanen og at læreboka har tatt over tolkningen av læreplanen som læreren skulle foretatt. Tradisjonelt har norske matematikklærere i stor grad lagt opp undervisningen sin etter læreboka (Imsen, 2003). Dette gir en enorm makt til lærebokforfatterne og forlagene til å kunne definere undervisningens innhold. Det kan være interessant å merke seg at når lærere kan gjøre valg uavhengig av læreboka, så flyttes mye av denne makten over til lærerne slik at de i større grad eier sin egen undervisning.

Å håndtere uforutsette situasjoner

Lærerne som jeg intervjuet fortalte om at den avanserte matematiske kunnskapen også var nyttig når de skulle svare på spørsmål som de ikke hadde forberedt seg på, når de måtte finne på eksempler eller oppgaver på sparket og når det oppsto en uforutsett situasjon som åpnet for fruktbare muligheter. Ball & Bass (2009) kaller dette for å legge merke til og vurdere matematiske muligheter.

Alle disse måtene å håndtere uforutsette situasjoner på omfattes av dimensjonen *contingency* i The Knowledge Quartet og er en annen form for fleksibilitet enn å frigjøre seg fra læreboka. Petrou & Goulding (2011) skriver at *contingency* handler om lærerens evne til å reagere på situasjoner som det er tilnærmet umulig å planlegge på forhånd som for eksempel det å svare på spørsmål, å respondere passende på elevers feil og det å avvike fra den oppsatte planen for timen.

Rowland & Zaskis (2013) mener at lærere som har vært eksponert for mer avansert matematikk er mer villige til å ta risikoen med å avvike fra den planlagte undervisningen. Å gå utenfor de planlagte rammene er en type handling som både krever evne til å få øye på mulighetene som oppstår spontant, men som også krever en viss selvtillit og trygghet. Som nevnt i teorikapittelet skriver Rowland et al. (2003) at dimensjonen *contingency* handler om å kunne respondere passende på elevers ideer og at det er viktig å ha god faglig selvtillit for å være i stand til dette. Dette støtter opp om at fleksibiliteten har sitt utspring i faglig trygghet.

Lærerne i undersøkelsen min snakket mye om faglig trygghet. Faglig trygghet kan være grunnlag for å våge å eksperimentere, men også erfaring er et viktig element her, slik som flere av intervjuobjektene påpekte. Undervisningserfaring gir også trygghet og ikke minst gjør det at man over tid blir eksponert for mange spontant oppståtte situasjoner som igjen hjelper en å bli flinkere til å se mulighetene og gripe dem. På denne måten vil erfaring og fagkunnskap i samspill både utvikle evnene til å fornemme mulighetene og gjøre læreren tryggere i sine valg.

Ball & Bass (2009) påpeker at horisontkunnskap er en type kunnskap som blant annet hjelper læreren med å legge merke til betydningsfull matematikk i elevers uttalelser og være oppmerksom på matematiske muligheter som oppstår i en undervisningssituasjon.

Mine informanter viste ingen eksempler på hvordan de kunne stimulere elevene til mer matematisk tenking i en spontant oppstått situasjon, men var mest opptatt av at de kunne gi gode svar på uforutsette spørsmål og at man kunne finne på oppgaver og eksempler på sparket eller kunne finne alternative måter å forklare et emne på når elevene ikke forsto. Litteraturen viser derimot at begrepet *contingency* rommer mer enn det jeg fikk frem i intervjuene.

Sammenhengen mellom kategoriene: Fleksibilitet

Å fristille seg fra læreboka og *å kunne håndtere uforutsette situasjoner* er ulike former for fleksibilitet. Den ene formen handler om fleksibilitet i forhold til læremidler og regi av undervisningen, noe som først og fremst vil være nyttig i planleggingsfasen av undervisningen. Den andre formen er fleksibilitet i øyeblikket, dvs. i selve undervisningssituasjonen. Fleksibilitet er et nyttig verktøy som hjelper lærerne i sitt arbeid med elevene, noe jeg skal komme mer inn på etter hvert.

Guberman & Gorev (2015) sin undersøkelse støtter opp om mine funn. De skriver at grundig fagkunnskap er nødvendig for effektiv undervisning, og at slik fagkunnskap gir fleksibilitet og tilpasningsevne. Den gjør læreren i stand til å presentere ulike løsningsmetoder eller ulike representasjoner av et begrep slik at elevene kan eksponeres for ulike løsningsstrategier. De skriver også at fleksibilitet er en egenskap som vil utvikle seg med erfaring ettersom det å undervise i et emne gir dypere faglig innsikt.

Fleksibilitet som egenskap finner vi også beskrevet hos Ma (1999). Hun oppsummerer fire egenskaper ved undervisning som har utspring i lærerens grundige fagforståelse. En av dem er det hun kaller «Multiple perspectives» som handler om å se verdien av ulike aspekter ved en idé og kunne vurdere ulike tilnærminger til løsningsmetoder. Dette beskriver Ma (1999) som en fleksibel forståelse av matematikken som er forankret i et solid faglig fundament.

Et variert utvalg av representasjonsformer og eksempler er en sterk indikator på dimensjonen *transformation* i The Knowledge Quartet (Wassermann, 2017). *Transformation* handler om hvordan læreren omdanner sin kunnskap til pedagogisk nyttige formål, og dette viser at fleksibilitet kan være et verktøy i denne prosessen.

Zaslavski & Sullivan (2011) skriver at å utvikle tilpasningsdyktighet er et mål for utdanning av matematikklærere og at denne egenskapen er tett knyttet til fleksibilitet. Ofte er evne til tilpasning knyttet til handling i øyeblikket, altså til dimensjonen *contingency*, men også knyttet til det å kunne tilpasse kontekster, identifisere sammenhenger i pensumet og designe måter å knytte sammen emner på.

En måte fleksibiliteten kan utvikles på gjennom dyp fagforståelse er når man ser at matematiske objekter kan organiseres, klassifiseres og karakteriseres på ulike måter. Dette gir også økt forståelse for sammenhenger innen matematikken (Mason, 2011).

Vi kan også finne støtte hos Shulmann (1986) som mer generelt skriver at kunnskap gir frihet, fleksibilitet til å ta avgjørelser, til å veie alternativer mot hverandre og så handle på grunnlag av refleksjon.

5.2.3 Måter å jobbe med elevene på

Å motivere

Lærerne i undersøkelsen min rapporterte at de brukte sin avanserte matematiske kunnskap til å motivere. De brukte enten matematikkens historie til å motivere eller de brukte matematikk som lå i elevenes fremtid til å motivere.

Å kjenne til matematikkens historie er en form for evolusjonær kunnskap (Stockton & Wassermann, 2017). Jankvist et al. (2015) skriver at matematikkens historie tradisjonelt har blitt anvendt som motivasjonsredskap gjennom å «krydre undervisningen» med anekdoter og biografier. Lærerne i undersøkelsen min demonstrerte etter min oppfatning en annen måte å bruke historien på. Deres argumenter besto i å vise hvor teoriene har sin opprinnelse fra og motiverer først og fremst gjennom å sette det nåværende undervisningstemaet i en større sammenheng noe som er viktig for at det skal oppleves meningsfylt. Dermed anvender de også kunnskap om sammenhenger i tillegg til evolusjonær kunnskap.

Å bruke fremtiden som motivasjonskilde kan gjøres på ulike måter. Man kan gjøre det utfra perspektivet om at det man lærer nå er nyttig senere, eller man kan gjøre det utfra perspektivet om at det kommer til å bli mer interessant og spennende senere. Uansett om man velger et nytteperspektiv eller et mer lystbetont perspektiv, må man ha kunnskap om hva som er elevens horisont.

Jeg vil også hevde at lærerne antagelig bidro til å motivere elevene på en litt mer indirekte måte, nemlig gjennom økt mestring. Som lærer har jeg erfart at mestring er en av de mest fremtredende motivasjonsfaktorene i matematikkfaget. Bandura (1994) skriver at forventninger om mestring virker inn på elevenes motivasjon og høye mestringsforventninger er assosiert med høyere utholdenhet når man møter på problemer. En av nøklene til mestringsopplevelse for flest mulig elever er differensiering. På denne måten vil den neste kategorien også kunne knyttes opp mot motivasjon.

Å differensiere i undervisningen

Lærerne jeg har intervjuet forteller at avansert matematisk kunnskap er nyttig for å kunne differensiere. Det er nyttig som redskap til å kunne gi tilpasset undervisning generelt fordi man kan belyse tema og problemstillinger fra ulike sider, og det er nyttig spesielt for å kunne gi de sterke elevene faglige utfordringer. Dette kan føre til at flere elever opplever mestring, og det vil kunne bidra til å opprettholde motivasjon også hos de faglig sterke elevene gjennom at de får interessante utfordringer og i større grad får utviklet sitt potensiale. Dette er viktig siden elever som ikke får utfordringer kan oppleve undervisningen som meningsløs (Hinna, Rinvold & Gustavsen, 2011).

For å kunne finne ulike innfallsvinkler, vil det være nyttig med god matematisk innsikt i emnet man underviser i, men også kunnskap om matematikkens historie og kunnskap om sammenhenger har vist seg å være nyttig her. Også i studien til Zaskis & Leikin (2010) forteller lærerne om at avansert matematisk kunnskap er nødvendig for å kunne vurdere alternative løsninger, strategier og forklaringer til bruk i undervisningen.

Å veilede

I studien min fant jeg at avansert matematisk kunnskap hjelper lærerne med å veilede elevene. Veiledning omfatter å hjelpe elevene med oppgaver uten å gi dem svaret, å hjelpe elevene å se mønstre og sammenhenger og å kunne vurdere feil som elevene gjør og gi en passende respons. Å hjelpe elever å se sammenhenger krever at læreren selv har kunnskap om sammenhenger og også kjenner til multiple representasjoner for matematiske objekter, noe som igjen krever god faginnsikt i de enkelte emnene. Lærerne viser til at de må kunne begrunne og forstå hvordan og hvorfor ting henger sammen, og de forteller at matematikken blir lettere for elevene når de forstår sammenhenger. Når det gjelder elevevaluering, skriver Ball & Bass (2009) at «Making error a fruitful site for mathematical work» og «Analyzing student's work» er læreroppgaver som krever matematisk kunnskap og ferdigheter. Læreren må kunne vurdere om et rett svar er gyldig utfra et matematisk korrekt resonnement og om alternative elevløsninger er generelt gyldige og hvis ikke, avgjøre under hvilke forutsetninger de er gyldige.

Å ha et blikk fremover

Å undervise med fremoverblikk ser ut til å være nyttig på to måter. Det ene er at man kan bruke fremtiden til å begrunne det nåværende overfor elevene. Dette er nært knyttet til det å bruke fremtiden til å motivere, men det er også en måte man bruker til å skape oversikt og sammenheng i lærestoffet, og handler derfor ikke bare om motivasjon, men om å skape en mer helhetlig og strukturell forståelse hos elevene. Her kommer både kunnskap om sammenhenger til anvendelse og perifer kunnskap (Stockton & Wassermann, 2017), altså kunnskap om hvordan matematiske ideer gradvis blir mer komplekse, til anvendelse.

Den andre måten undervisning med fremoverblikk er nyttig på, handler om å vite noe om hvor en skal videre og undervise med tanke på å forberede elevene på sin matematiske fremtid. Dette krever i høyeste grad kunnskap om elevens matematiske fremtidshorisont, og Guberman og Gorev (2015) kaller det for å undervise uten å ødelegge for elevene på høyere klassetrinn, mens Ma (1999) betegner dette som å legge det rette fundamentet for det elevene skal lære senere. Hurst (2016) bruker betegnelsen «å posisjonere» elevene.

Å forstå hvordan det er å lære matematikk sett fra elevenes synspunkt

I studien min var det noen av lærerne som mente at det å lære avansert matematikk først og fremst ga dem en forståelse for hvordan det for elevene kan oppleves å lære matematikk. Dette kunne innebære forståelse for elevers frustrasjon, men også forståelse for hvor viktig det er å jobbe hardt for å mestre faget.

Også i studien til Even mente lærerne at avansert fagkunnskap var nyttig som en påminnelse på hvordan det føles å lære matematikk. Slik vil den avanserte matematikken gjøre læreren mer oppmerksom på de følelsesmessige vanskelighetene det å lære matematikk kan føre med seg og dermed kunne gjøre dem mer empatisk. Men de vil også ta med seg verdifull erfaring om hvilke behov elevene har, slik som behov for konkrete eksempler eller behov for en forståelig kontekst.

Sammenhengen mellom kategoriene: Måter å jobbe med elevene på

De fire første kategoriene som jeg her har nevnt, har til felles at de handler om måter å jobbe med elevene på. Å motivere, veilede og differensiere er typisk generelle pedagogiske kategorier som er viktige uansett hvilket fag man underviser. Det interessante her er at lærerne mener at avansert matematisk kunnskap gjør dem bedre til dette. Jeg vil anta at *å ha et blikk fremover* vil være en aktuell kategori også for andre fag, men kanskje spesielt viktig i et fag som matematikk siden dette faget ofte anses som et fag der man bygger stein på stein og man hele tiden må vurdere om fundamentet man bygger hos *elevene* er egnet for å bære de fremtidige konstruksjonene.

Mens kategoriene som sorterer under *faglig dybde* og *fleksibilitet* beskriver forhold hos læreren, ser vi at disse kategoriene retter seg mot arbeidet med elevene. Og i dette arbeidet er fleksibilitet et sentralt verktøy. Lærerne kan for eksempel belyse tema fra ulike sider eller finne alternative innfallsvinkler, noe som både kan være en form for differensiering eller veiledning, men også en måte å motivere på. Fleksibilitet gir lærerne anledning til å velge fokus og til å velge hvordan de best kan posisjonere elevene til å strekke seg mot horisonten.

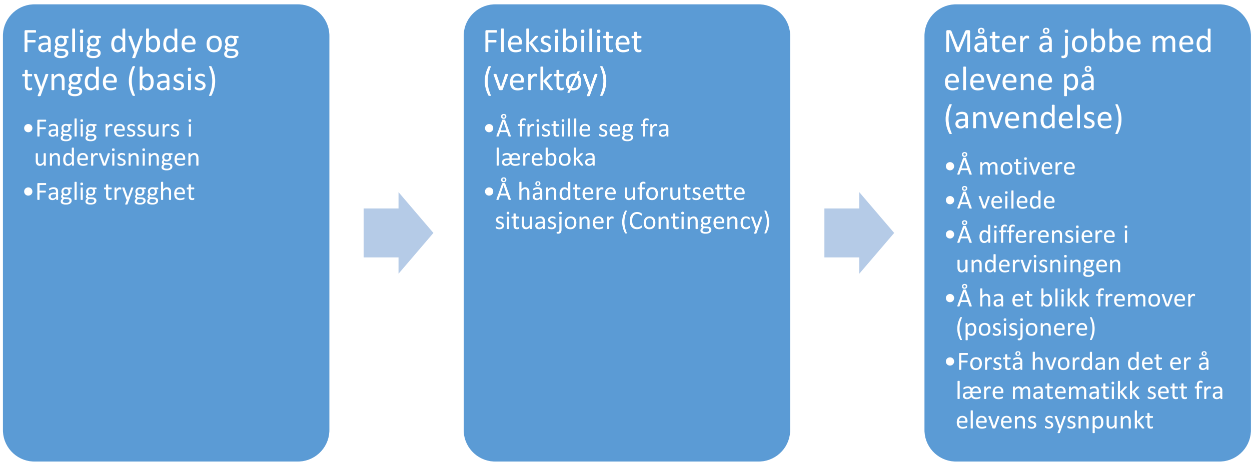
Å forstå hvordan det er å lære matematikk sett fra elevens synspunkt er en kategori som skiller seg litt ut fra de andre. Den handler også på en måte om å jobbe med elevene, men den har ikke nødvendigvis utspring i fagkunnskap. Den er kanskje mer forankret i erfaring, men det er likevel lærernes erfaringer med innlæringsprosessen av fagkunnskap som utstyrer dem med en innsikt som kan være nyttig i undervisningsøyemed og dermed gir dem et verktøy som gjør dem mer fleksible. Jeg har vært litt usikker på hvor denne kategorien plasserer seg i forhold til de andre, men mener at det går an å sortere den sammen med de andre måtene å jobbe med elever på. Å forstå hvordan det er å lære matematikk fra elevenes synspunkt er et nyttig verktøy som kan gi læreren nye perspektiver på sin undervisning og hjelpe dem til å forstå elevenes behov.

5.3 Overordnete sammenhenger mellom kategoriene

I denne oppgaven har jeg undersøkt på hvilke måter lærerne mener at avansert matematisk kunnskap kan være nyttig for deres undervisningsarbeid. Jeg har i det forrige kapittelet beskrevet hvordan jeg har identifisert ni ulike kategorier for dette basert på lærernes uttalelser.

To av kategoriene, nemlig *Faglig trygghet* og *Direkte relevans i undervisningen* er begge uttrykk for faglig tyngde. Begge deler er nokså umiddelbare og tydelig konsekvenser av utdannelse i faget. Kategoriene *Å fristille seg fra læreboka* og *Å kunne håndtere uforutsette situasjoner* har til felles at de er former for fleksibilitet. Disse kategoriene kan se ut til å ha sitt utspring i nettopp faglig trygghet og det å kunne anvende sitt faglige overskudd som ressurs i matematikkundervisningen. De fem siste kategoriene representerer alle ulike måter å jobbe med elevene på. Noen av disse arbeidsmåtene er typisk generelle pedagogiske kategorier som alle lærere kjenner til. Lærerne viser her at den avanserte kunnskapen gjør dem bedre på disse områdene. Og det gjør den fordi den utstyrer dem med den nødvendige fleksibiliteten. Fleksibiliteten er altså et verktøy som brukes i arbeidet med elevene.

Min modell for hvordan kategoriene henger sammen er derfor slik:



Figur 2. Sammenhengen mellom de ulike kategoriene

5.4 Avansert fagkunnskap alene er ikke horisontkunnskap

Ved hjelp av modellen som jeg på grunnlag av intervjuene har utviklet, har jeg vist at lærerne helt klart anvender sin avanserte matematiske kunnskap på måter som er produktive for undervisningen. Dermed er kunnskapen noe mer enn bare avansert kunnskap. Den er også horisontkunnskap. Modellen min er en hypotese over hovedtrekkene i omdannelsesprosessen fra ren fagkunnskap til nyttig redskap i undervisningen.

I intervjuene mine var det flere av lærerne som poengterte at erfaring også er viktig og at det av og til kan være vanskelig å skille erfaring fra kunnskap tilegnet gjennom studier. Dette blir forsterket av det faktum at man gjennom undervisningserfaring og gjennom å studere ulike typer læringsmateriell i faget, også får økt fagkunnskap. Denne økte fagkunnskapen er ikke det samme som den avanserte kunnskapen man får i studiene, men mer en form for dybdekunnskap. Som lærer opplever jeg stadig vekk at jeg gjennom dialog med elevene eller ved å studere ulike læreverk blir klar over nye sammenhenger i faget. Ny kunnskap om sammenhenger kan igjen anvendes i undervisningen og gir grunnlag for nye erfaringer. Slik virker fagkunnskap og erfaring inn på hverandre og utvikler horisontkunnskapen hos læreren. I teorikapittelet har jeg allerede beskrevet hvordan horisontkunnskap utvikles fra fagkunnskap gjennom erfaring og refleksjon. Blant annet skriver Ma (1999) om hvordan dybde i fagkunnskapen utvikles etter at læreren er begynt i sitt yrke. Sullivan (2017) viser hvordan lærere får økt fagkunnskap gjennom å jobbe med en type utfordrende problemløsningsoppgaver i sin undervisning. Lærernes utsagn om at erfaring er viktig og at den kan være vanskelig å skille fra kunnskap man har tilegnet seg i utdanningen, stemmer godt overens med dette.

Hovik & Kleve (2016) skriver at det å kjenne til ulike representasjonsformer eller ulike innfallsvinkler til et begrep eller en idé, er en form for horisontkunnskap. Men det å velge ut hvilken av disse som er mest hensiktsmessig å presentere for elevene sorterer under *knowledge of content and student* i Balls modell for undervisningskunnskap. Dette viser hvordan fagkunnskap virker positivt inn på den fagdidaktiske kunnskapen, men også at det kan være vanskelig å trekke helt klare skillelinjer mellom de ulike kunnskapsformene. En lærer som vil forberede elevene på den matematiske fremtiden må både ha kunnskap om mer avansert matematikk, oversikt over sammenhenger mellom matematiske begreper og mellom matematiske emner, men må også bruke læreplankunnskap og kunnskap om elevene for velge ut hvilke sammenhenger man bør fokusere på. Å velge hvilken innfallsvinkel man vil bruke for å øke motivasjonen, krever både fleksibel fagkunnskap og kunnskap om matematikk og undervisning. Altså ser vi at både fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap er nødvendig i disse prosessene. Nå lærerne i intervjuene forteller at didaktikk også er nødvendig, viser det at de er oppmerksom på denne sammenhengen.

Horisontkunnskap virker altså inn på den didaktiske kunnskapen og former denne slik som blant annet Fernandez & Figueiras (2014) beskriver. Det dataene mine ikke forteller noe særlig om, er hva som skjer på detaljnivå. Dette skyldes først og fremst at det kom inn få konkrete eksempler på anvendelser. Imidlertid skriver både Ball et al. (2008), McCrory et al. (2012) og Wassermann (2015) om noen typer grep læreren gjør i sin undervisning for å gjøre matematisk fagstoff tilgjengelig for elevene. Ball et al. (2008) skriver om *unpacking* mathematical knowledge, noe som er analogt til det McCrory et al. (2012) kaller for *decompressing.* I tillegg omtaler McCrory et al. (2012) grepene *trimming* som en type forenkling, og *bridging* som er å binde sammen ulike ideer og objekter.

Wassermann (2015) nyanserer ytterligere med *concealing*, altså å skjule kompleksitet, *abridging* som er å avkorte og *foreshadowing* som er å foregripe mer avansert pensum.

Slike grep er en del av prosessen med å omdanne fagkunnskap til stoff som er tilgjengelig for elevene. Det krever at læreren har både avansert fagkunnskap i form av horisontkunnskap, spesialisert fagkunnskap og fagdidaktisk kunnskap. Det er også viktig å huske på at fagdidaktisk kunnskap definert som kunnskap knyttet til undervisning av faget, også forutsetter fagkunnskap.

Grensene mellom de ulike kunnskapsformene er imidlertid ikke alltid så tydelige. Både horisontkunnskap og spesialisert fagkunnskap beskrives som matematisk kunnskap som først og fremst er nyttig for undervisningspraksis og ikke så nyttig for folk flest. Forskjellen består først og fremst i om dette er kunnskap som er lokal eller ikke. Da vil det som er lokal kunnskap for en lærer i videregående skole, være horisontkunnskap for en lærer i barneskolen.

6. AVSLUTNING

6.1 Oppsummering

I denne oppgaven har jeg undersøkt på hvilken måte lærere på ungdomstrinn og videregående trinn mener at de har bruk for avansert matematisk kunnskap i sin undervisningspraksis og diskutert dette opp mot begrepet horisontkunnskap. Jeg har også sett på hva slags former for avansert kunnskap som kan være nyttig for undervisningsarbeidet.

Jeg har intervjuet fem lærere fra ungdomstrinnet og fem lærere fra videregående trinn som alle hadde mer enn 60 studiepoeng i ren matematikk. Ved hjelp av datastyrt koding og kategorisering av datamaterialet, har jeg på bakgrunn av lærernes beskrivelser utviklet ni kategorier for nyttige anvendelser av den avanserte matematiske kunnskapen i undervisningen. Disse kategoriene kan sorteres i de tre hovedområdene (1) *faglig dybde og tyngde*, (2) *fleksibilitet* og (3) *måter å jobbe med elevene på*. Faglig dybde og tyngde omfatter kategoriene *faglig trygghet* og *faglig ressurs i undervisningen.* Fleksibilitet omfatter kategoriene *å fristille seg fra læreboka* og *å kunne håndtere uforutsette situasjoner*. Måter å jobbe med elevene på omfatter *differensiering, motivering, veiledning, å ha et blikk fremover* og *å forstå hvordan det er å lære matematikk sett fra elevenes perspektiv.*

Studien min viser at lærerne i stor grad har bruk for avansert matematisk kunnskap i sitt undervisningsarbeid. Denne kunnskapen gir læreren faglig selvtillit og utgjør også en kunnskapsressurs som kan anvendes direkte i undervisningen. Men selvtillit og faglig innsikt gir i tillegg læreren en høy grad av fleksibilitet, både i forhold til lærebok og utvelgelse av fagstoff, og også fleksibilitet til å håndtere de spontane situasjonene som oppstår underveis i undervisningen. Fleksibiliteten gjør læreren bedre i stand til å kunne differensiere, motivere, veilede, posisjonere elevene for sin matematiske fremtid og til å forstå hvordan det oppleves å lære matematikk.

Ulike typer av lærerens avanserte matematiske kunnskap kan være nyttige i undervisningen. De bruker den matematikkfaglige innsikten som de har tilegnet seg i løpet av ulike kurs på universitets- og høyskolenivå, men også kunnskap om sammenhenger og kunnskap på metanivå, det vil si kunnskap om matematikkens karakter og egenart.

I prosessen med å omdanne avansert fagkunnskap til nyttig undervisningspraksis, er både erfaring og didaktisk kunnskap nødvendig, i tillegg til lærernes egen refleksjonsevne.

6.2 Konklusjon

Jeg startet innledningsvis med å vise til uttalelser fra lærerstudenter som mente at det ikke var nødvendig å lære mer matematikk enn det man selv skulle undervise i. Jeg viste også til studier som ikke klarte å etablere noen sammenheng mellom elevers prestasjon og lærerens matematiske fagkunnskaper. Denne studien viser at avansert matematisk fagkunnskap spiller en viktig rolle i undervisningspraksis, og den forteller noe om måten denne kunnskapen former undervisningen på. Fagkunnskap påvirker undervisningen først og fremst ved å gi læreren fleksibilitet som verktøy. Men kunnskapen i seg selv må først foredles til horisontkunnskap gjennom praksis og didaktiske refleksjoner for at den skal være til nytte.

6.3 Mulige implikasjoner og veier videre

Resultatet av denne studien bør etter min mening ha implikasjoner for debatten om hva lærerutdanningen skal inneholde. Solid fagkunnskap bør være en viktig komponent i utdanningen av lærere som skal undervise matematikk, rett og slett fordi den kan gjøre undervisningspraksisen bedre. Men denne fagkunnskapen må gå hånd i hånd med bevisstgjøring av hvordan den kan anvendes i undervisningen. I tillegg må lærerne utstyres med didaktisk verktøy som hjelper dem til å reflektere når de kommer ut i praksis.

I teorikapittelet har jeg beskrevet at horisontkunnskap har to viktige aspekter, nær horisont som er knyttet til pensum på de neste klassetrinnene og fjern horisont knyttet til mer avanserte fremtidige ideer og objekter i matematikken. For en lærer som underviser i syvende klasse eller tiende klasse, betyr det at elevens nære fremtidshorisont ligger i undervisningen til et annet skoleslag. Det bør derfor være av betydning å kjenne til pensumstrukturen på klassetrinn også i skoleslag som er over eller under det nivået man selv underviser på. I intervjuene kom det frem at lærerne generelt visste lite om hva som rører seg i undervisningen til andre skolenivåer. Lærerne i studien mente de burde visst mer om det som ligger både før og etter det skoleslaget de underviser på, og økt samarbeid om matematikkundervisningen i overgangene mellom skoleslagene burde derfor være noe man burde løfte frem.

Det jeg ikke fikk så godt frem i studien min, var de konkrete eksemplene på hvordan avansert kunnskap blir anvendt. Jeg fant noen, men på langt nær så mange som jeg hadde ønsket. Konkrete eksempler er viktige fordi de mer på detaljnivå kan forklare hvordan avansert kunnskap transformeres til bruk i undervisningen og fordi eksempler kan hjelpe andre lærere og lærerstudenter med å forstå hva som skjer i klasserommene. Det kan hende at en vei å gå er å observere undervisningspraksisen i klasserommet til utvalgte lærere, men da vil man kanskje ikke få tak i det som foregår i planleggingsfasen. En annen måte å gjøre det på, kan være å be lærere loggføre eksempler fra sin undervisning over tid, slik at de blir mer bevisst på hva de faktisk gjør.

Jeg har i denne studien tatt for meg lærere på ungdomsskole og videregående skole og sett på deres meninger om relevansen av avansert matematisk kunnskap. Balls modell for undervisningskunnskap er først og fremst utviklet for grunnskolelærere. Det bør absolutt undersøkes mer rundt behovet for avansert matematisk kunnskap hos lærere på barnetrinn, spesielt fordi det er her man legger fundamentet som senere skal bære de mer avanserte matematiske kunnskapskonstruksjonene.

Jeg vil tilslutt avrunde med dette sitatet som langt på vei beskriver hvor viktig god fagkunnskap er:

> *A teacher who understands a topic may or may not be able to provide high quality instruction in it, but a teacher who does not understand the topic almost certainly cannot.* (Siegler & Lortie-Forgues, 2017)

7. REFERANSELISTE

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The elementary school journal*, 373-397.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Universitätsbibliothek Dortmund.

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.

Bandura, A. (1994). Self-Efficacy. *Enclyclopedia of human behavior, 4*, 71-81.

Baumert, J., & Kunter, M. (2013). The COACTIV model of teachers' professional competence. In *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers* (pp. 25-48). Springer US.

Blackburn, C. C. (2014). *Mathematics according to whom? Two elementary teachers and their encounters with the mathematical horizon* (Doctoral dissertation, THE UNIVERSITY OF ARIZONA).

Campbell, P. F., Nishio, M., Smith, T. M., Clark, L. M., Conant, D. L., Rust, A. H., ... & Choi, Y. (2014). The relationship between teachers' mathematical content and pedagogical knowledge, teachers' perceptions, and student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(4), 419-459.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In *Proceedings of the CERME* (Vol. 8, pp. 2985-2994).

Charles, R. I., & Carmel, C. A. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education*, *7*(3), 9-24.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. routledge.

Corey, D. L., Peterson, B. E., Lewis, B. M., & Bukarau, J. (2010). Are there any places that students use their heads? Principles of high-quality Japanese mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 438-478.

Davis, B. (2011). Mathematics teachers' subtle, complex disciplinary knowledge. *Science*, *332*(6037), 1506-1507.

Döhrmann, M., Kaiser, G., & Blömeke, S. (2012). The conceptualisation of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. *ZDM*, *44*(3), 325-340.

Dreher, A., Lindmeier, A., & Heinze, A. (2016). Conceptualizing professional content knowledge of secondary teachers taking into account the gap between academic and school mathematics. In *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Eisenberg, T. (1977). Begle Revisited: Teacher Knowledge and Student Achievement in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 8*(3), 216-222. doi:10.2307/748523

Even, R. (2011). The relevance of advanced mathematics studies to expertise in secondary school mathematics teaching: practitioners' views. *ZDM*, *43*(6-7), 941-950.

Fauskanger, J. & Mosvold, R. (2016). Lærerarbeidets matematiske undervisningsoppgaver. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 21 (3), 73–88.

Fauskanger, J. (2016). Matematikklæreres oppfatninger om ingrediensene i god matematikkundervisning. *Acta Didactica Norge, 10(3)*

Fauskanger, J., & Mosvold, R. (2014). Innholdsanalysens muligheter i utdanningsforskning. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *98*(02), 127-139.

Fauskanger, J., Mosvold, R., & Bjuland, R. (2010). «Eg kan jo multiplikasjon, men ka ska eg gjørr?» - det utfordrende undervisningsarbeidet i matematikk. I T. Løkensgard Hoel, G. Engvik & B. Hanssen (red.), Ny som lærer – sjansespill og samspill (s. 99-114). Trondheim: Tapir akademisk forlag

Fauskanger, J., Mosvold, R., & Kristensen, M. S. (2016). Født sånn, eller blitt sånn? Matematikklæreres oppfatninger om evnen til å undervise. *Acta Didactica Norge*, *10*(1), 15-sider.

Fernández, S. & Figueiras, L. (2014). Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. *REDIMAT*, *Vol 3*(1), 7-29. doi: 10.4471/redimat.2014.38

Figueiras, L., Ribeiro, C. M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deulofeu, J. O. R. D. I. (2011). Teacher's advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics*, *31*(3), 26-28.

Garet, M. S., Heppen, J. B., Walters, K., Parkinson, J., Smith, T. M., Song, M.. …& Borman, G. D. (2016). Focusing on mathematical knowledge: The impact of content-intensive teacher professional development (NCEE 2016-4010). *Washington, D.C.: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.* Hentet fra: http://ies.ed.gov/ncee/pubs/20164010/pdf/20164011.pdf

Glaser, B. and Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research*, Weidenfeld and Nicolson, London.

Glaser, B. G. (1965). The constant comparative method of qualitative analysis. *Social problems*, *12*(4), 436-445.

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of curriculum studies*, *32*(6), 777-796.

Guberman, R., & Gorev, D. (2015). Knowledge concerning the mathematical horizon: a close view. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(2), 165-182.

Guest, G., Bunce, A., & Johnson, L. (2006). How many interviews are enough? An experiment with data saturation and variability. *Field methods*, *18*(1), 59-82.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and instruction*, *26*(4), 430-511.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal*, *42*(2), 371-406.

Hinna, K. R. C., Rinvold, R. A. & Gustavsen, T. S. (2012). *QED 1-7: Matematikk for grunnskolelærerutdanningen*. Kristiansand: Høyskoleforlaget

Hole, A, Kleve, B. (2012). The need for Horizon Content Knowledge: Examplified by work with Fractions in Norway. In: Gunnarsdottir, Gudny Helga Hreinsdottir, Freyja Pálsdóttir, Guðbjörg Hannula, Markku Hannula-Sormunen, Minna Jablonka, Eva Jankvist, Uffe Thomas Ryve, Andreas Valero, Paola Wæge, Kjersti (Eds) *Proceedings of NORMA 11 The Sixth Nordic Conference on Mathematics Education. Regular Papers*. (s. 319-330). University of Iceland Press.

Hovik, E. K. & B. Kleve (2016): Mangfold i lærerutdanningens matematikk. In: Hovik, E. K. & B. Kleve (Eds) *Undervisningskunnskap i matematikk* (s. 13-30). Oslo: Cappelendamm Akademisk.

Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research*, *15*(9), 1277-1288.

Huckstep, P., Rowland, T., & Thwaites, A. (2003). Observing subject knowledge in primary mathematics teaching. *Proceedings of the British society for research into learning mathematics*, *23*(1), 37-42.

Hurst, C. (2016). Provoking contingent moments: Knowledge for 'powerful teaching'at the horizon. *Educational Research*, 1-17.

Imsen, G. (1997). *Lærerens verden: Innføring i generell didaktikk.* Oslo: Tano Aschehoug

Imsen, G. (1998). *Elevenes verden: Innføring i pedagogisk psykologi*. Oslo: Tano Aschehoug

Imsen, G. (2003). *Skolemiljø, læringsmiljø og elevutbytte: en empirisk studie av grunnskolens 4., 7. og 10. trinn*. Trondheim: Tapir akademisk forlag.

Jakobsen, A., Thames, M. H., & Ribeiro, C. M. (2013). Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching. In *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. In *12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME)* (pp. 4635-4644).

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Kaufmann, G. og Kaufmann, A.(2009) Psykologi i organisasjon og ledelse. *Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS*.

Klein, F. (2004). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis* (Vol. 1). Courier Corporation.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, 16 (4), 5–44.

Krauss, S., Blum, W., Brunner, M., Neubrand, M., Baumert, J., Kunter, M., ... & Elsner, J. (2013). Mathematics teachers' domain-specific professional knowledge: Conceptualization and test construction in COACTIV. In *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers* (pp. 147-174). Springer US.

Kunnskapsdepartementet. (2010) *Nasjonale retningslinjer for grunnskolelærerutdanningen 5.-10. trinn.* Hentet fra: https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kd/rundskriv/2010/retningslinjer_grunnskolelaererutdanningen_5_10_trinn.pdf

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H. S., & Winbourne, P. (2011). Professional knowledge related to Big Ideas in Mathematics–an empirical study with pre-service teachers. *From a study of teaching practices to issues in teacher education*, 290-306.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). Det kvalitative forskningsintervju: Gyldendal akademisk.

Learning Mathematics for Teaching Project. (2011). Measuring the mathematical quality of instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 25-47.

Løw, O. (2009). *Pædagogisk vejledning: Facilitering af læring i pædagogiske kontekster*. Akademisk Forlag.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marshall, M. N. (1996). Sampling for qualitative research. *Family practice*, *13*(6), 522-526.

Mason, J. (2011). Classifying and Charcteristing: Provoking Awareness of the Use of a Natural Power in Mathematics and in Mathematical Pedagogy. In: Zaslavsky, O., & Sullivan, P. (Eds.). *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (Vol. 6). Springer Science & Business Media.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584-615.

Monk, D.H. 1994. Subject Area Preparation of Secondary Mathematics and Science Teachers and Student Achievement. *Economics of Education Review*, Vol. 13, No. 2, pp. 125-145. 1994

Mosvold, R., & Fauskanger, J. (2014). Teachers' beliefs about mathematical horizon content knowledge. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *9*(3), 311-327.

Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & education*, *23*(1), 47-60.

Nicol, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational studies in mathematics*, *62*(3), 331-355.

Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers’ mathematical knowledge in teaching. In *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 9-25). Springer Netherlands.

Rowland, T., & Zazkis, R. (2013). Contingency in the mathematics classroom: Opportunities taken and opportunities missed. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(2), 137-153.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2003). The knowledge quartet. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *23*(3), 97-102.

Rowley, J. (2012). Conducting research interviews. *Management Research Review*, *35*(3/4), 260-271.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? Journal of Mathematical Behavior, 13, 55-80.

Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. E. R. E. M. Y. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. *International handbook of mathematics teacher education*, *2*, 321-354.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard Lessons: Why Rational Number Arithmetic Is So Difficult for So Many People. *Current Directions in Psychological Science*, *26*(4), 346-351.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, 114-145. Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education*, *11*(6), 499-511.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26.

Sollid, H. (2013). Intervju som forskningsmetode i klasseromsforskning. I M. Brekke, & T. Tiller. *Læreren som forsker-innføring i forskningsarbeid i skolen*, 124-137.

Stockton, J. C., & Wasserman, N. H. (2017). Forms of Knowledge of Advanced Mathematics for Teaching. *The Mathematics Enthusiast*, *14*(1-3), 575.

Sullivan, P. (2017). Supporting teachers in improving their knowledge of mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Suri, H. (2011). Purposeful sampling in qualitative research synthesis. *Qualitative Research Journal*, *11*(2), 63-75.

Tourangeau, R., & Sternberg, R. J. (1982). Understanding and appreciating metaphors. *Cognition*, *11*(3), 203-244.

Turner, F., & Rowland, T. (2011). The Knowledge Quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. In *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 195-212). Springer, Dordrecht.

Tyskerud, A. (2012). *Hvordan manglende kunnskap om matematikk og matematikkundervisning blir oppfattet blant lærere som hindringer for undervisning* (Master's thesis, University of Stavanger, Norway).

Utdanningsdirektoratet (2006): *Læreplanen i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Formaal

Vale, C., McAndrew, A., & Krishnan, S. (2011). Connecting with the horizon: developing teachers' appreciation of mathematical structure. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(3), 193-212.

Wasserman, N. (2015) Unpacking teachers' moves in the classroom: navigating micro- and macro-levels of mathematical complexity. *Educational studies in Mathematics, 90 (1) pp. 75-93*

Wasserman, N. H. (2016). Abstract algebra for algebra teaching: Influencing school mathematics instruction. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *16*(1), 28-47.

Wasserman, N. H. (2017). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Wassermann, N.H., Stockton, J.C. (2013). Horizon content knowledge in the work of teaching: a focus on planning. *For the Learning of Mathematics 33,* 3 (November, 2013) FLM Publishing Association, Fredericton, New Brunswick, Canada

Zaslavsky, O., & Sullivan, P. (2011). Setting the Stage: A conceptual Framework for Examining and Developing Tasks for Mathematics Teacher Education. In: Zaslavsky, O., & Sullivan, P. (Eds.). *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (Vol. 6). Springer Science & Business Media.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(4), 263-281.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8-13.

8. VEDLEGG

8.1 Intervjuguiden

Del 1: Bakgrunns spørsmål

Alder

Kjønn

Hvilken type lærerutdannelse har du?

Hvor mye matematikkfaglig utdannelse har du?

Hvor lenge har du vært lærer?

Hvilke klassetrinn/skoleslag har du undervisnings erfaring fra? (For VGS lærere: Hvilke type matematikkurs har du undervist i?)

Del 2: Forberedende spørsmål som gis skriftlig før intervjuet:

Kort om horisontkunnskap:

Jeg undersøker et begrep som heter horisontkunnskap. Kort fortalt er dette kunnskap om hvordan matematikken som undervises strukturelt henger sammen med det utvidete matematiske landskapet som vil møte eleven senere. Det handler om å se de store linjene og ha overblikk over matematikken og se sammenhenger både i skolepensum og i matematikken for øvrig.

Kort om avansert matematisk kunnskap:

I denne oppgaven definerer jeg avansert matematisk kunnskap som matematisk fagkunnskap som man har tilegnet seg på høyskole eller universitetsnivå.

Hva jeg undersøker:

Det er stort sett bred enighet i forskningsmiljøet om at det er viktig at en matematikklærer har solid fagkunnskap. Man har likevel ikke kunnet påvise noen direkte sammenheng mellom lærerens kunnskap i avansert matematikk og elevenes prestasjoner. Jeg ønsker å se på om slik kunnskap har betydning for lærerens horisontkunnskap og på hvilken måte læreren kan ha bruk for slik kunnskap i sitt arbeid.

1. I hvor stor grad og på hvilken måte har du bruk for avansert matematisk kunnskap i din undervisning?

2. Beskriv minst ett konkret eksempel der du har hatt bruk for avansert matematisk kunnskap i din undervisning (f.eks. i planlegging, gjennomføring, evaluering eller i samtaler). Prøv å være så detaljert og konkret som mulig i din beskrivelse.

3. Beskriv en oppgave, problemstilling eller et emneområde der det er nyttig å ha avansert matematisk kunnskap. Prøv å være så konkret som mulig i din beskrivelse.

4. Nedenfor følger to oppgaver som er tenkt til bruk i undervisningssammenheng. For hver av oppgavene skal du vurdere følgende:

   - Hva må en elev vite eller kunne for å løse en slik oppgave?
   - På hvilke måter kan en slik sekvens brukes i matematikk undervisningen?
   - Hvilket potensiale ser du i en slik oppgave? (Foreslå gjerne endringer, utvidelser o.l.)
   - Hvilke emner kan man knytte til denne oppgaven og hva slags type matematisk kunnskap kan man utvikle hos elevene ved hjelp av en slik oppgave?
   - Hvilken fremtidig matematikk kan man forberede/legge grunnlaget for gjennom en slik oppgave?

Oppgave A:

Vurder om disse påstandene stemmer og argumenter for din vurdering.

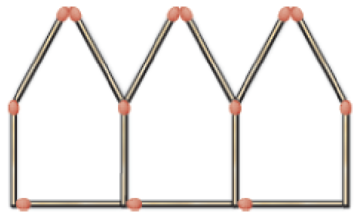
«Summen av tre oddetall må alltid bli et oddetall»

«Et tall som er delelig med 3 og med 6, må være delelig med 18»

«Produktet av tre etterfølgende, hele tall er alltid delelig med 6»

«Jo større et tall er, desto flere faktorer må det ha»

Oppgave B:



Her ser du en husrekke som er laget med fyrstikker. For å lage en husrekke med tre hus trengs 13 fyrstikker. Hvor mange fyrstikker trenger du for å lage

a) ett hus
b) en rekke med fem hus
c) en rekke med et hvilket som helst antall hus.

Del 3: Spørsmål stilt i intervjusituasjon

1. Ta utgangspunkt i de skriftlige spørsmålene de har fått på forhånd og ha en samtale rundt disse. Utdype mer med f.eks. spørsmål av typen:
   -- Er det etter din oppfatning en fordel å ha avansert matematisk kunnskap, og så fall hvorfor? På hvilken måte er dette en fordel? Hvordan vil slik kunnskap evt. ha innvirkning på din undervisning?
   - Hvilken innvirkning tror du avansert matematisk kunnskap kan ha på
     - Ditt valg av oppgavetyper?
     - Ditt valg av fokus i undervisningen?
     - Ditt valg av språk i undervisningen?
     - Ditt valg av fokus på fagets egenart slik som resonnering, symbolbruk og presisjon

2. Hva slags matematikkfaglig kunnskap mener du en lærer som skal undervise matematikk trenger?

3. Hvor viktig er det å ha god kunnskap om matematikk utover det du selv skal undervise i?

4. For ungdomsskolelærere:
   Hvor godt kjenner du til den matematikken og den matematikkundervisningen som elevene dine kommer til å møte på videregående skole?
   Hvor godt kjenner du til den matematikken og den matematikkundervisningen elevene dine har hatt på barneskolen?

   For lærere i VGS:
   Hvor godt kjenner du til den matematikken og den matematikkundervisningen som elevene dine har hatt i ungdomsskolen?
   Hvor godt kjenner du til høyere matematikk som elevene muligens vil møte i senere studier?

   Oppfølgingsspørsmål:
   - Ville det vært en fordel å vite noe om dette?
   - På hvilken måte vil kunnskap om dette påvirke undervisningen din?
   - På hvilken måte kan du tilegne deg denne kunnskapen?

5. Har du noen gang opplevd å ha utilstrekkelig *fagkunnskap* til å undervise et emne tilfredsstillende eller til å kunne svare tilfredsstillende på spørsmål fra elever? På hvilken måte har du håndtert dette?

8.2 Forespørsel om deltakelse i prosjektet

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

Bakgrunn og formål

Jeg, Sabine Lauw, er student ved Universitetet i Bergen og holder på med en erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk. Jeg undersøker et begrep som kalles horisontkunnskap og som er en underkategori av en matematikklærers undervisningskunnskap. Horisontkunnskap handler om å forstå hvordan matematikken som undervises strukturelt henger sammen med det utvidete matematiske landskapet som vil møte eleven senere. Det handler om å se de store linjene og ha overblikk over matematikken og se sammenhenger både i skolepensum og i matematikken for øvrig. En viktig forutsetning for å utvikle horisontkunnskap er å ha solide fagkunnskaper

Jeg ønsker spesielt å finne ut noe om hvordan avansert matematisk kunnskap har sammenheng med horisontkunnskap. Foreløpig problemstilling er :

I hvilken grad opplever matematikklærere at avansert matematisk kunnskap er nyttig for undervisningen deres? Hvordan omsettes denne kunnskapen i deres undervisningsarbeid?

Min problemstilling vil kunne bli endret, men den endelige problemstillingen vil inneholde de samme temaene som er nevnt i min nåværende problemstilling.

Du vil få tilsendt noen forberedende spørsmål noen dager før intervjuet. Det er ikke meningen at du skal svare skriftlig på disse, men at du tenker igjennom disse og eventuelt noterer noen stikkord hvis det er nødvendig. Disse spørsmålene vil danne utgangspunkt for en del av intervjuet. I tillegg vil det bli stilt noen oppfølgingsspørsmål/tilleggsspørsmål.

Det vil bli tatt lydopptak av intervjuet, og intervjuet vil vare omtrent en halv time. Vi avtaler nærmere tid og sted for gjennomføring av intervjuet.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å være med og du har mulighet for å trekke deg når som helst underveis, uten at du må begrunne dette noe nærmere. Dersom du skulle ønske å trekke deg, vil alle innsamlede data fra deg bli slettet. Opplysningene vil bli behandlet konfidensielt, og ingen enkeltpersoner eller skoler vil kunne gjenkjennes i den ferdige oppgaven. Opplysningene anonymiseres og opptakene slettes når oppgaven er ferdig, innen utgangen av juni 2018. Dersom du kunne tenke deg å delta på et intervju, er det fint om du kan skrive under på den vedlagte samtykkeerklæringen.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er kun meg og eventuelt veileder som har tilgang på lydopptaket av intervjuet. Transkribering av intervjuet vil bli lagret på personlig datamaskin som er passordbeskyttet.

Kontaktopplysninger:

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med meg på:
telefonnummer: [redacted] eller på mail: sablau@hfk.no eller bine@online.no

Hvis du ønsker det kan du også kontakte min veileder Ove Gunnar Drageset ved Universitetet i Tromsø (Førsteamanuensis II ved Universitetet i Bergen) på mail ove.drageset@uit.no
Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk senter for forskningsdata NSD.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

8.3 Godkjenning fra NSD

Ove Gunnar Drageset
Matematisk institutt Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 01.06.2017 Vår ref: 54176 / 3 / AGH Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 21.04.2017. Meldingen gjelder prosjektet:

54176	*Sammenhengen mellom avansert matematisk fagkunnskap og horisontkunnskap hos lærere på ungdomstrinn og videregående trinn*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Ove Gunnar Drageset*
Student	*Sabine Lauw*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 21.06.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Agnete Hessevik

Kontaktperson: Agnete Hessevik tlf: 55 58 27 97

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

8.4 Et eksempel på et transkribert intervju

M = meg (Intervjuer) V1 = lærer nr 1 fra videregående skole

De første minuttene av intervjuet er utelatt fordi de dreide seg om mer personlige opplysninger som kan identifisere personen.

Tid	Hvem	Utsagn
02:08	M	Mm. Da vil jeg spørre: I hvor stor grad og på hvilken måte har du bruk for avansert matematisk kunnskap i din undervisning?
02:17	V1	Em. Jeg vil si sånn: Egentlig er svaret på det at en har jo ikke bruk for mer i undervisningen enn det de skal lære. Men det betyr jo ikke at *jeg* ikke har behov for å kunne det. Så selve undervisningen i seg selv legger ikke opp til at du skal bruke så mye mer, men det å ha oversikt, det å ha… det å ha dekket et større felt i matematikken, vite hvor du går videre eller kjenner til andre sammenhenger. Og ikke minst til historien bak til den matematikken du holder på med, gjør jo at du når du planlegger undervisningen og når du tenker på hvordan det er lurt å presentere det, ser hvilke sammenhenger det står i, så kan du gjøre noen andre valg enn det bøkene gjør. Så det er et av de store poengene da. At du kan gjøre dine egne valg. Du blir veldig mye tryggere på hvorfor du gjør ting, hvilken rekkefølge du gjør det i og hva du vil poengtere. Hva er det viktige her. I bøkene er det ingenting som står uthevet som mer eller mindre viktig. Alt kommer i en smørje, og hvis du ikke kan så mye mer enn det som står i bøkene, du bare lærer deg det, så er det vanskelig for deg å vite: hva er viktig? Og hvorfor er det viktig?
03:37	M	Ja. Kjempebra. Klarer du å beskrive et konkret eksempel der du har hatt bruk for avansert matematisk kunnskap når du for eksempel planlegger din undervisning?
03:49	V1	Ja, jeg… Altså avansert. Det er jo et… jeg vil jo i grunnen tenke at når du snakker om avansert, at det er kunnskap utover det du tenker å bruke i klasserommet da. Et eksempel er, som jeg bruker alltid i andre klasse i R1, det er når jeg skal introdusere dem for eulertallet, så har jeg en helt annen inngang til dette, der jeg bruker å spørre hvorfor kom noen på… Altså pi er greit. Hvor kommer tallet pi ifra? Det var det at de fant ut at det var et forhold mellom radius i andre til en sirkel og kvadratet til den omskrevne… eller arealet til den omskrevne sirkelen. Altså forholdet var alltid det samme. Vi tenker jo alltid på diameter og omkrets da, den er også den samme. Så dermed er jo pi gitt et tall, mens *e* det er tall som ikke framstår som et forhold på noen naturlig måte som vi kommer på. Så i bøkene så blir det bare presentert som et tall som du får ved å ta en grenseverdi. Og det går lang tid fra du begynner å snakke om dette tallet *e* til tallet *e* gir noen mening. Og det å ha både litt bakgrunn og forståelse for hva dette tallet er, gjør at du kan heller begynne med problemstillingen som gjorde at de fant frem til tallet *e*. Nemlig det å prøve å finne en funksjon som hadde samme

		vekst som sin funksjonsverdi. Og så kan du begynne å grunne på det. Så det har jeg ofte brukt , og det er jo en form for horisontkunnskap, der jeg kjenner litt til både historien, er trygg på hvordan jeg kan derivere med dette på en litt annen måte enn det som boken gjør. Så snur jeg egentlig det helt opp ned i forhold til sånn som boken gjør det. Så gir jeg motivasjonen først og så kommer dette *e*-tallet naturlig ut og elevene får ofte finne det selv. At det er *det* tallet du må ha hvis du skal lage en eksponentialfunksjon *a* ^x , som tilfredsstiller dette. Og da må den a'en… så får de lov til å file på GeoGebra og så ser de at den a'en som passer det er… i hvert fall hvis stigningstallet skal være 1 i 0, så sant, for alle eksponentialfunksjoner skjærer y-aksen i 1 hvis de får fram a ^x. Og så sier jeg: Hvis den skal ha tangent som har stigningstallet 1 i null, så a'en være 2,71828.. Så der bruker jeg, tenker jeg, i hvert fall historisk matematikk og jeg har en inngang som jeg kan gjøre fordi jeg har matematisk kompetanse utover det som står i bøkene. Vet ikke om det var et…?
06:44	M	Joda! Det var et kjempefint eksempel.
06:47	V1	Et annet og, hvis du vil ha et eksempel til, så tenker jeg at det… Når jeg snakker om dette med uttrekksmodeller, urnemodeller i sannsynlighetsregning, som er vel i R1, så er det jo ofte sånn at vi lærer om de tre, sånn med og uten tilbakelegg og så er det med og uten rekkefølge, ordning, og så er det jo den der hvor du har tilbakelegging, men det er uordnet. Den lærer de ikke om i videregående skole.
07:16	M	Nei
07:17	V1	Og har du studert matematikk på universitetet så vet du at det er egentlig ikke så vanskelig. Og det virker veldig utilfredsstillende for elevene å ikke få noe om den. Jeg pleier jo å ta med dette og bruke det for å komplettere bildet som en naturlig ting. Så det er jo… Det blir mer at en gir et lite tillegg for en har kunnskapen og fordi det virker veldig tilfredsstillende for elevene å få med den siste.
07.47	M	Ja. Mm. Nei, for det har jeg også fått spørsmål om. Hvorfor er det ikke noe som heter det. Klart det er noe som heter det. Ehm. Kan du beskrive et konkret eksempel der du har hatt bruk for avansert matematisk kunnskap når du måtte håndtere en uplanlagt situasjon eller spørsmål i en uplanlagt situasjon?
08:07	V1	Ja, det er jo veldig ofte at det dukker opp spørsmål. For eksempel at: Fins det noen enkle metoder for å løse… hvorfor virker ikke det eller.. Det kunne kanskje være for eksempel med diff. likninger, sant, så lærer de å løse mange typer diff. likninger. Det er tre typer diff likninger i R2. Da kommer kanskje elevene med eksempler som er litt andre typer diff likninger og det å da ha en forståelse for at på samme måte som de fleste likninger, så kan heller ikke de fleste diff. likninger løses analytisk. De må løses numerisk. Og det er klart at du skal ha en viss matematisk kompetanse for å håndtere og være veldig trygg i svaret eller være trygg i at du kanskje sier: Jeg kan ikke si sikkert at denne kan løses, men det er ikke så unaturlig at den ikke kan løses

		på en vanlig måte, for det kan de fleste ikke, som de fleste likninger. Det er sånne type ting, det å ha den tryggheten. Du *vet* du har egentlig en styring på hvordan ting går. Så for det at du kjenner til feltet, du kjenner terrenget du har innen diff likninger, du kjenner terrenget når du har geometri eller vanlig likningsløsning. Samtidig så ser du jo det at dette med at kunnskapen på digitale verktøy for eksempel, så er det jo ofte at elever og også lærere kommer og sier: Nå er det noe galt med verktøyet, fordi at de ikke skjønner verktøyet sin begrensning. Eller skjønner at de stiller verktøyet et spørsmål som er av en karakter som ikke lar seg løse for eksempel. Så det… det er jo typisk med likningsløsning. På Geogebra med CAS, så bruker de NLøs og så får de bare *en* løsning. Og så er de veldig misfornøyde med det. Så lurer de på om det er noe galt med verktøyet, men NLøs er et verktøy som bruker numeriske metoder og der det itereres frem til en løsning. Og har det funnet en løsning så er det som regel fornøyd med det bortsett fra hvis det er enkle likninger som man kan løse analytisk. Da gjør den det. Så der tenker jeg at min matematiske forståelse gjør at jeg kan være mye mer trygg i rollen eller svare på sånne type spørsmål.
10:27	M	Ja. Kjempeflott. Kan du beskrive en oppgave eller en problemstilling eller et emneområde der det er nyttig å ha avansert matematisk kunnskap?
10:40	V1	Ja. Det tror jeg jeg kan. Det er kanskje… det er veldig lett i R1 som fagområdet som jeg tenker på er geometri. Det er helt klart at de fleste som… de fleste lærere har ikke mer forståelse i geometri enn den de lærer seg i R1 boken da. Og det skal veldig lite til med… med at du tar inn mer oppgaver eller en oppgave som er formulert på en litt rar måte, så ser en at en blir stående fast. Det gjelder for så vidt også emneområdet sannsynlighetsregning. Det er to områder der lærere ofte går seg inn i problemer hvis de ikke har kompetanse utover det som står i boken. Det ser jeg med en gang. Det er ikke vanskelig å lage oppgaver som er fint løsbare med det du skal ha lært i R1 som de fleste lærere har problemer med å løse. For eksempel hvis jeg sier: Gitt et punkt på en linje og gitt et punkt utenfor linjen. Konstruer en sirkel som tangerer linjen i punktet og som går igjennom det andre punktet. Det er en oppgave som er fint løsbare, men som på grunn av kanskje lite erfaring og lite kunnskap utover det vanlige, så sliter en ofte med å løse sånne typer oppgaver. Forresten en veldig god problemløsningsoppgave
12:04	M	Det er vel det med problemløsning at det ikke er noe du har standardiserte løsningsmetoder på.
12:10	V1	Nettopp. Det er jo kanskje generelt så tenker jeg at problemløsning, det krever at du har arbeidet mye på området, men og kanskje at du… det å ha horisontkunnskap gjør at du kan veilede elevene uten nødvendigvis å gi dem svaret. Det er en sånn ting at du vet hvilke hint du skal gi dem, det er ikke bare sånn at du kjenner løsningen. Men du kan kanskje gi dem litt mer generelt hint, vise til andre ting. Hva tenkte du, gjorde du der? Og så videre. For eksempel i geometri.

12:47	M	Ja. Hvilken innvirkning tror du at din kunnskap om avansert matematisk kunnskap har på for eksempel ditt valg av språk i undervisningen?
12:59	V1	Eh. Ja, jeg tror presishet i språk *kan* i hvert fall være bedre fordi at jeg klarer kanskje å sette de ordene som er brukt inn i en større kontekst. Jeg har kanskje en bedre etymologisk, heter det det? Jeg kjenner til bakgrunnen til ordene, vet hvorfor ordene er brukt og vet og litt mer kanskje, kan du si. Begrepsdefinisjoner på en tydeligere måte. Så det kan gjøre at jeg er språklig mer nøyaktig. Samtidig så håper jeg ikke at, det kan jo innvirke på den måten at du… at matematikken er et veldig maktspråk, hvis en bruker ord, hvis en bruker veldig mye faguttrykk, der en kunne la være å bruke faguttrykk da. Så det er på den andre siden så kan det virke negativt hvis en ikke er seg det bevisst. Men jeg tror at en positiv ting kan være nøyaktighet, at du er nøyaktig med de ordene du bruker. Så jeg tror det kan slå litt begge veier og at en må være seg bevisst det.
14:14	M	Ja. Tror du det har noen innvirkning på ditt valg av fokus på det som på en måte er fagets egenart?
14:24	V1	Eh, ja. Det tror jeg. Det tror jeg. Jeg har jo opplevd mange lærere og som har gode intensjoner, men sant, når du kommer inn som fersk lærer der du… det å undervise et fag handler om å gå gjennom boken fra perm til perm. Og du legger ikke spesielt trykk på noen delkapitler eller noen ting. Du bare behandler alt like mye, går like nøye gjennom alt og på den måten så, så vil du litt sånn… du klarer ikke å få fram the main points i det som er. Og også dette med hva er matematikkfagets egenart. En ting er hva er de viktige, på en måte faglige utfordringer, hva skal man legge trykket på når det gjelder kompetanser. Egenart som dette med resonnements kompetanse og problemløsningskompetanse er… blir jo… forsvinner jo totalt hvis en bare går gjennom boken fra A til Å da. Der tror jeg en, ja ikke bare, det handler også om erfaring, men hvis du bare har erfaring, men ikke den horisontkunnskapen, så vil du ha problemer uansett. Så jeg tror kanskje de ti siste årene er jeg blitt mye mer bevisst på dette. Med hva er vitsen med å gjennomgå et bevis for eksempel. Hva vil jeg med det? Er det beviset i seg selv eller er det kompetansen å resonnere eller… Det som er så veldig spesielt med matematikken, det der med å kunne fullføre et matematisk resonnement og at dette bare er et eksempel på en ide, derfor tar vi det med, problemløsning. Derfor tar vi denne oppgaven. Er det noe mer? Kan jeg løfte meg fra denne oppgaven og finne noen verktøy, noen måter å jobbe på som kan overføres, sant. Det tror jeg er en… ja, som handler om trygghet i faget og oversikt litt utover det som en underviser.
16:48	M	Ja, kjempeflott. Har du sett på de oppgavene? Det var[to oppgaver her
16:52	V1	[Ja. Jeg tror jeg fikk dem til kanskje.
16:57	M	Da lurer jeg litt på om den første. Hva tenker du at en elev må vite eller kunne for å løse en slik oppgave?
17:06	V1	Ja, egentlig i disse… i alle disse oppgavene her så tenker jeg at dette med å resonnere, dette med å… altså oddetall, det er ikke noen spesielle tall her, sant, så det handler om noe med evnen til å generalisere, evnen til på en

		måte å beskrive hva er et oddetall, hva er det som er spesielt med et oddetall. Sant. Er det noe de har felles som gjør at vi kan skrive sånn: et oddetall kan skrives på formen 2k + 1. Men så er det når det er tre oddetall, her er det noe som vil være typisk at elever ville skrive: Ja, vi har tre oddetall. 2k+1, 2k + 1 og 2k +1. De vil bruke samme k'en på alle, sant. Så de må ha den der, for det første evnen til å se «hva er det alle oddetall har felles?», sant, så de må løfte seg der. Og så må de spør seg om hvordan skal jeg vise at summen er et oddetall? Hva er det som skal være spesielt for summen da? Så dette handler om både at de må ha begrepsforståelse for oddetall, hva som er felles for oddetall og så er der en viss resonnementskompetanse, er det rett og slett dette, altså de må ha en plan, hvor vil de starte, og så må de skjønne hvor de skal til da. Det er egentlig veldig OK oppgaver.
18:29	M	Ja. På hvilken måte kan man bruke slike oppgaver i matematikkundervisningen?
18:34	V1	Ja, jeg tenker at dette her handler om resonnering. Det er jo ofte i R1 det vil være fint å bruke, men jeg tror at det kan være lurt å bruke på et tidligere stadium også. Kanskje i 1T, kanskje også i ungdomskolen. For det at det handler om å… mer enn å lage et vanntett bevis, tror jeg det handler om å få i gang elevenes språk. Det handler veldig mye om det språklige her. Istedenfor å skrive en halv side der du lager et bevis, så handler det om å prøve å sette ord på det. Prøve å forklare hvorfor det alltid må være sånn for de først vil prøve med tall. Du vil alltid gi masse tall og eksempler og så, fra å gå fra disse talleksemplene til det generelle er ofte… det viser seg at det veldig ofte er vanskelig for elevene å argumentere. De ser det er sånn, men de klarer ikke å argumentere vanntett. Og det er en… jeg tror det er noe som er litt forsømt i matematikken dette må lære dem det: Når tid har du argumentert godt nok for deg? Så…
19:47	M	Ja. Hvilke emner kan man knytte til denne oppgaven og hva slags type matematisk kunnskap kan man utvikle hos elevene ved hjelp av en slik oppgave?
19:56	V1	Ja, altså argumentasjon, muntlig forståelse og… eller muntlig, å bruke språket muntlig eller bruke matematikk muntlig. Og så er det dette med resonnement da. Hvis du skal knytte den til kompetanseområder her, dette vil jo være veldig typisk å bruke inne området algebra i R1 for eksempel og inn i 1T da. Men jeg tenker vi er veldig glad i å putte ting ned i bokser. Algebra, geometri, funksjoner. Og vi klarer ikke helt å finne plass til sånne oppgaver som dette her og så tenker vi at… det er derfor de blir så lett forsømt, men er det… Jeg har tenkt mange ganger, hva er det viktig at de kan når de kommer ut av videregående. Er det viktig at de kan abc-formelen? Eller er det viktig at de kan resonnere? Og det er kanskje et lite sånt, kanskje et varsko, at vi blir veldig opptatt av de konkrete formlene, og sier at annengradslikninger må de kunne løse. Hvorfor ikke tredjegradslikninger? Nei, vi har valgt å sette en strek ved annengrad. Tredjegrad det blir så komplisert, med Cardanos formel og så videre, men

		det handler bare om noen valg som er gjort. Og ikke nødvendigvis at de er så veldig godt begrunnet. De kan begrunnes kanskje i… kanskje i at i dagliglivet så kommer det ofte opp at de har andregradsformler, men det er kanskje litt vagt det også. Jeg syns kanskje… Men det problemet med at vi lager disse her kompetansemålene som skal tilhøre felt av matematikken, så blir det littegrann vanskelig å putte dette ned i. Det er jo en, for så vidt når du skriver oddetall, så er du innen algebra, for det at du har bokstaver med deg. Men ellers er det en form for, det er jo en form for utvidelse av matematikken. De begynner jo alltid i aritmetikken der de ser på dette med konkrete eksempler. Ja, jeg vet ikke om det ga noe svar?
21:53	M	Jo. Hvilken fremtidig matematikk kan man forberede eller legge grunnlag for gjennom en slik oppgave?
22:02	V1	All… Jeg tror dette er en type oppgaver som er veldig viktige, bare for å gi… Altså selve faget matematikk handler i stor grad om å se mønster, lage strategier og mønstre er viktige ord i matematikken. Kanskje du ser et mønster her og det neste er å lage en strategi på å prøve å begrunne at det er et mønster. Og dette er jo en sånn type oppgave. Det handler om, på en måte, du ser et mønster, du danner deg et bilde av det, du stiller en hypotese: «jo, summen av tre oddetall er et oddetall» Og så må du prøve å finne en strategi for å få overbevise en som hører på at, jo det er det. Jeg pleier ofte å komme med påstander til elevene som høres litt horribel ut, og så er elevene uenig med meg, men så sier jeg «Jo det er sånn». Og så sier de vi kan jo ikke bare godta at det er sånn. Og så sier jeg litt høyere: «jo det er sånn fordi det er sånn». Og det er litt sånn elever tenker ofte i matematikken: «Jo, men det bare er sånn. Jeg klarer ikke å sette ord på og begrunne at det er sånn». Men i det dagligdagse, hvis jeg sier at «Skoda er bedre enn Mercedes» så forventer du at du legger frem noen argumenter. For altså hva slags kriterier har du for å si det du sier. Og det å skjønne at det må du ha i matematikken også. Hele grunnlaget for det matematiske arbeidet er jo å kunne begrunne det du sier på en god måte. Kommunikasjon av det. Og dette er et veldig godt eksempel på det.
23:56	M	Hvor tror du det kommer fra, den der at de sier «det bare er sånn». For det hører jo jeg også veldig ofte.
24:03	V1	Ja, hvor kommer…Jeg… skal jeg være helt ærlig så tror jeg det er noe som kommer litt inn via skolen. Det handler kanskje om at, det er når du kommer til kort… Altså det er lett å tenke seg at du ser dette «Tre oddetall». Alle eksemplene jeg har er jo, jo det er sånn. Men du klarer ikke å begrunne det skikkelig og da sier du at det bare er sånn. Men jeg klarer ikke å begrunne det skikkelig. Det er en form for intuisjon da. Og samtidig så er det jo dette de hører av lærerne sine veldig ofte. «Dere må bare lære dette. Det bare er sånn». Det handler kanskje om at du vokser opp hele veien med lærere som sier at «det er ikke så lett å forstå dette, det er en mystisk formel, men den fungerer veldig fint». Det skjer dessverre ofte, da. Ja.
24:59	M	Hva med den andre oppgaven da?

25:03	V1	Vil du ned til husoppgaven?
25:06	M	Ja!
25:07	V1	Dette er jo en veldig mønsteroppgave, da. Veldig typisk mønsteroppgave. Det er en rekkeoppgave da. Og jeg har sett denne oppgaven brukt i en klasse. Fantastiske flott. Jeg var ute på et påhør på en ungdomsskole og jeg tror den er den største a-ha opplevelsen jeg har sett at en elev noen gang har hatt. Og det var nesten lik oppgave, og så begynte han med ett, to og tre. Og så begynte han med ti hus. Og han fikk ti svar på hvor mange stikker han måtte bruke. Det var veldig mange svar og folk prøvde om og om igjen. Og så skulle de begrunne. Det var en veldig fin matematisk samtale. Og så klarte de å komme ned på hvor mange det var og så generaliserte han. At han hadde en formel. Det blir tre, jeg tror det var firkanter, tre minus en, tre pluss en. Her blir det jo… jeg legger alltid til fire stikker her og så begynte du med fem sant, så med tre hus så blir det 3 ganger 4 pluss én. Sant. Og med endehus blir det fire ganger n pluss 1. 4n + 1 tror jeg det blir her. Og da ga han en formel og så spurte han: «hvorfor må du…må du putte inn denne n'en? Det gjør det bare så mye vanskeligere. Det er jo ingen vits i». Og så sa han dere lærerstudenten at «Jamen, hvor mange stikker må vi ha for å lage tusen hus?» Og så ble det veldig stille og så plutselig sa han «Ja! Nå skjønner jeg det. Den n'en kan jeg bare bytte ut med tusen». Da ga n'en en mening. Så dette med generalisering, her er det noe veldig fint. Og det var et veldig fint eksempel som ga på en måte den utskjelte bokstaven «n», hvorfor skal du blande inn noen sånne n'er og sånnting inni her. Det er ikke så veldig gøy. Det er bedre når det bare er tall. Så det var liksom det å gå fra aritmetikken og litt inn i algebraen, og det var så meningsfylt. Utrolig effektfullt i klasserommet, så jeg tror det der er n veldig sånn mønsteroppgave. Det handler om å gjenkjenne mønster. Det handler om å klare å beskrive og generalisere mønster da. Og jeg tror det, det er vel verdt. Dette er jo igjen algebraisk tenking. Det går jo på algebraisk tenking. Det går på å beskrive generelle ting. Og da ta i bruk bokstaver da. Og jeg tror dess tidligere en kan komme inn i dette her for å få elever til å skjønne det dess bedre. Det er vanskeligere på videregående skole å bare putte det inn i en bås: «Det er der vi må ha det». Og derfor så gis det så veldig lite plass til det. Og derfor så blir de ofte dårlige på algebraisk tenking.
28:00	M	Ja. Hvor tror du man pleier å putte dette inn i?
28:05	V1	Dette.. dette her er… i ungdomsskolen så putter de det inne med algebra, helt til starten av algebraen, eller når de begynner med ukjente. I videregående skoles matematikk så kan dette komme inn… ja det brukes ofte i forbindelse med rekker. Ses på som rekker både i S2 og R2 da. Kunne kanskje også få det så vidt inn i, men ikke så veldig tydelig i 1T i forbindelse med det som er algebra da. Men da er det mer at du.. da er det mer formelen, at du jobber med formelen og finne uttrykkene som er det viktigste. Selve det å utvikle mønsteret og å komme frem til en generell form på mønsteret, det er… Altså i rekker så vil du jo si at du begynner med fem, og så legger du til fire hver gang og da har du en aritmetisk rekke. Da

		har du en form, da gjenkjenner du den og så bare putter du inn n. Det er ikke så mye argumentasjon uten at du bruker en formel. Og da ødelegger du litt av oppgaven. Du må kanskje inn på et litt tidligere stadium, hvis du skal ha den effekten av «Hva er vitsen med disse bokstavene».
29:15	M	Ja. Skal vi se. Jeg har noen spørsmål som du ikke har fått se. (…) Ehm. Jeg vet ikke om jeg skal stille det spørsmålet. De fleste syns det var vanskelig å svare på… Men: hva slags matematikkfaglig kunnskap mener du at en lærer som skal undervise matematikk trenger? Jeg vet ikke om det går an å svare på det.
29:43	V1	Nei, altså, hvis jeg skal se ut i fra min… min egen… skoleslag da, så tenker jo jeg det at det å ha en Calculus, en god calculus forståelse, altså det at de har jobbet en god del med funksjoner og kjenner til litt analyse. Så et eller to calculus kurs kan være smart å måtte ha. Jeg tror det å ha litt, altså, hva skal vi med geometri? Geometri er jo litt lite vektlagt i skolen og kanskje enda mindre på universitetsnivå. Men geometri er noe *veldig* fint, for det at når vi har geometri i R1 for eksempel, altså årsaken til at vi har geometri i R1 og også i ungdomsskolen, det er ikke fordi at konstruksjoner er så viktige, men konstruksjoner er så veldig fint fordi at det handler om argumentasjon. Så det er beveggrunn til å ha konstruksjon og geometri i R1. Det er rett og slett denne argumentasjonen i matematikken. Resonnement og argumentasjon for det du gjør. Du konstruerer noe i mellom fag og så må du argumenter: For å lage en vinkel så gjør jeg det. For å få til dette så skjæres det mellom… så sant, *det* er årsaken til at vi har det. Ikke at det er så interessant nødvendigvis i seg selv med resultatene da. Så jeg ser jo at… jeg tror og at kurs og sånn som går i diskret matematikk, det å ha litt diskret matematikk bakgrunn, det gjør at du lærer å tenke på en litt annen måte, som kan være veldig fin å ha i matematikken, i hvert fall i videregående. SÅ er det noe jeg savner som jeg tror er for dårlig i norsk skole. Det at at en er alt for dårlig skolert i matematikkhistorie. En skjønner alt for lite hvor resultatene kommer fra. Hva som er opphavet til dem. Og derfor så blir det ofte bare løsrevne ting, uten at de blir forankret i «Hvorfor tenkte de på dette? Hva ville de med det? Hvem begynte med dette her?» Jeg har sett det. Det gir ofte mening da. Så jeg tenker det å ha et, altså i alle disse kursene så kommer kanskje dette med bevisføring litt inn og sånt da, men det å ha et kurs der en… der det legges vekt på å fullføre resonnementer, det å også bevise ting, det tror jeg er også viktig. Men ikke for bevisets egen del, eller for den setningen, men for å lære seg argumentasjon. Resonnement. Så nå snakker jo jeg bare om universitetet. Men jeg tror høgskolesektoren har og kurs som har en litt mer… der de tar tak i litt mer konkrete case ut ifra skolesituasjonen da. Det kan lett bli… da mister du horisontkunnskapen fordi at det blir bare *der*, og du ser ikke hvor du skal videre. Men samtidig så tror jeg det er viktig. Veldig mange som kommer i fra videregående skole har mye matematikk, de har altså tenkt igjennom hva slags prosesser er det som foregår i elevene sine hoder, når de møter disse tingene her. De tenker

		bare på hvordan de selv forstår det. Det er kanskje litt svakheten med et rent universitetsstudium. Ja, det var i hvert fall en form for et svar.
33:19	M	Ja, men det var kjempeflott det. Vi har jo snakket om det, men hvor viktig er det å ha god kunnskap om matematikk utover det du selv skal undervise i?
33:31	V1	Jeg tror det er… jeg merker jo at jeg har jo fysikk og jeg har matematikk som fag. Og liker godt å undervise begge, og føler at jeg kan gjøre en god jobb i begge, men den tryggheten jeg har i matematikken og det at jeg vet at jeg… at elever kan stole på det jeg sier og elevene kjenner og på seg at når jeg kommer inn i klasserommet, så har jeg en faglig tyngde. Og når jeg gjør noen valg så er det ikke noe problem for elevene å være trygge på at det er lurt. Hvis jeg hopper over to kapitler, eller går tilbake eller gjør det i en annen rekkefølge, eller sier: «Dette gjør vi på en annen måte». Så er det… så godtar de. De vet at (navn) har kontroll. Og det tror jeg er viktig for meg at de føler den tryggheten når jeg kommer inn. Det gjør noe med planleggingen. Det gjør noe med måten du strukturerer stoffet på og måten du tilnærmer deg stoffet. Og så tror jeg det gjør noe for… Hvis eleven er trygg på at de har en lærer som vet hva han holder på med, at de kan overlate roret til han, så tror jeg det er en veldig god ting. Hvis du… hvis læreren begynner… hvis elevene begynner å lure på læreren faktisk kan dette her, da har du tapt. Det er ikke noe smart.
35:01	M	Hvor godt kjenner du til den matematikken eller den matematikkundervisningen som elevene dine har hatt i ungdomsskolen?
35:09	V1	For dårlig, egentlig. Jeg kjenner jo litt til det da, men det er egentlig litt for dårlig. Det er jo litt sånn at det… når vi har jatt dem i 1T, får dem opp i 1T, så ser du at 1T er jo en form for repetisjon, bare at du skrur litt sånn kraftig til og går litt fort igjennom alt de har hatt før. Så.. og så går vi litt videre, spesielt på funksjonsområdet da. Ellers så har du jo i ungdomsskolen, de kjører jo igjennom samme løypen tre ganger, i en form for spiral. Men med veldig liten stigning. Det er ofte vanskelig å se forskjell på åttende og tiendeklasse bøkene i matematikk, for eksempel i sannsynlighetsregning. Det er liten… liten stigning i nivået, men det er liksom de kjører det opp igjen og opp igjen med repetisjon en gang i året. Så jeg vet fra fagfeltet, de har drevet *litt* med funksjoner, de lærer så vidt litt om kvadratiske ting, det er jo geometri, jobber faktisk en god del med aritmetikk og brøkregning, selv i viderergående, og i ungdomsskole og så har du algebra da. De jobber en god del med algebra. Geometrien er jo pytagoras inne. De har jo mye mer konstruksjon enn vi har. Og så løser de litt likninger og likningssett da. Så har de litt økonomi. De bruker litt regneark. Ja det var det, litt sånn oppsummering. Og så har jeg sett litt på eksamen, så det kan jo være en fordel.
36:46	M	Ja, så du har funnet ut litt ved å se på eksamener. Det er jo lurt. Tror du at det ville påvirket undervisningen din om du visste noe mer om hva de drev med i ungdomsskolen?
37:00	V1	Ja, det burde det kanskje gjøre? Jeg tenker det er noen som snakker om «Teaching to the test» og «Teaching to the mastery». Det altså å undervise

		for at de skal klare prøven. Jeg har litt sansen for at jeg vil lære dem matematikk for det at jeg har tro på at det er viktig kompetanse for dem å ha. Mens de er mest opptatt av hva slags karakter de skal få. Så… og sånn sett så er det jo klart at det å kjenne nivået, det å kjenne bakgrunnskunnskapen for det de skal ha er veldig viktig. Det som er litt sånn… klart at når vi får elever fra et stort antall ungdomsskoler i en klasse som jeg har, så kan det godt hende at jeg har elever fra ti ungdomsskoler. Det er veldig stor variasjon i hva de har hatt, hvordan de har tilnærmet seg det og spesielt kanskje bruk av digitale verktøy. Men også hvordan de ser kunnskapen. Vi har en liten test på dem for å ha litt forståelse for hvor de er. Og da er det sånn at en femmer fra en ungdomsskole og en femmer fra en annen ungdomsskole er veldig lite sammenliknbar ofte. Så, sånn er det.
38:29	M	Har du noen gang opplevd å ha utilstrekkelig fagkunnskap til å undervise noe tilfredsstillende eller til å kunne svare på spørsmål fra elever?
38:39	V1	Skulle gjerne likt å si nei. Jeg klarer ikke å komme på noen konkrete tilfeller, men jo det er helt klart at en har det. Det kan alltid komme en situasjon der en rett og slett, altså er… sannsynlighetsregning kan du nok kanskje eller statistikk når du kommer bort i det. Det er ikke så mye jeg har undervist i statistikk, men noe sentralgrenseteorem og disse tingene som er i S2 har jeg så vidt vært borti. Jeg har ikke hatt så mye statistikk i skolen. Jeg merker med en gang at der er jeg litt mer sånn… «cling to the book». Der er jeg mer der da. Veldig… jeg syns det er litt slitsomt… jeg har noenlunde kontroll på det da. Jeg har ikke undervist det på mange år da. Jeg tenker at det er… da må jeg kunne det som står i boken, og det er ikke så veldig hyggelig. For sier du i statistikken sentralgrenseteoremet, ja det er jo en sånn… det handler om tilnærmet… ting da. Og så spør de ja, når tid kan du si at det er en god tilnærming. Hvorfor tror du det? Hvorfor deler du på (n-1) når du skal ha standardfeil i stedet for å dele på n? Jeg husker at jeg kunne sette meg ned å se på det og det er ikke alltid så lett å svare på det. En type også er dette med regresjon, da kan læreren få et spørsmål som «Hva gjør datamaskinen» kan de si når det gjelder regresjon. Hva er vitsen med å lære dem å trykke på en knapp og så får du en linje opp. Og det er den linjen som passer best med data. Hva gjør det egentlig? Jeg vet jo litt om det nå da. Men det var mange år du bare gjorde det og så sa du at når R^2 var veldig nær 1, så er det bra. Sånn er det. Ja. SÅ jo da, det har vært noen med util…. Jeg har ikke opplevd det som så ubehagelig at jeg har måttet resignere. Jeg har vel alltid klart å få elevene til å tro at jeg har kontroll.
40:54	M	Så det er sånn du håndterer det?
40:58	V1	Ja, det blir ofte sånn der da. Noen ganger kan du si, … for å si det sånn når jeg av og til har studenter, så av og til når studentene ikke er godt forberedt eller merker at de ikke kan det, så bruker de maktspråk. Sånn at elevene kan si «Han var dårlig til å forklare, men kan i hvert fall matematikk». Mens sannheten er at når du bruker maktspråk så er det ofte et tegn på at du ikke klarer å svare for deg.
41:25	M	Ja, da sier jeg tusen takk!