Geogebra og funksjonar

Elevane si tilnærming til representasjonsskifte i arbeid med funksjonar, med og utan bruk av Geogebra, i matematikk på vidaregåande skule .

Torstein Taranger Westermoen

Masteroppgåve i matematikkdidaktikk

MAUMAT 650

Matematisk institutt, Universitetet i Bergen

Juni 2018

Forord

Hausten 2014 begynte eg på eit fireårig deltidsstudium ved UiB: *Erfaringsbasert master med fordjuping i matematikk*. Etter nesten to år med mest fokus på ulike matematiske emne, var eg våren 2016 i full gong med å tenkje ut kva eg ville undersøke i masteroppgåva eg skulle til med hausten same året. Mange idear, nokre betre enn andre, vart diskutert og forkasta. Eg var blant anna innom tema som modellering og anvendt matematikk knytt til fysikkfaget. Men, til slutt fall valet på eit emne innan matematikk som eg er spesielt glad i, nemleg funksjonar. Eg kontakta rettleiaren min, Arne Jakobsen, som hjelpte meg i gong med gode innspel og tankar for arbeidet vidare.

Eg har lest mange masteroppgåver, studert interessante artiklar og anna faglitteratur om matematiske funksjonar. Dei fleste knytt til undervisning. No, to år seinare, er eg kommen dit at eg kan sjå tilbake på oppturar og nedturar undervegs i prosessen med å skrive masteroppgåve sjølv. Det har vore ei spennande og lærerik «reise», og det har gitt meg erfaringar som eg trur vil vere med å styrke meg som matematikklærar.

No vil eg nytte anledninga til å takke. Først alle elevane som var villige til å delta på undersøkinga, leiinga ved skulen som har lagt til rette for at eg kunne gjennomføre dette studiet og gode kollegaer for støtte og hjelp. Vidare vil eg også takke medstudentar for kjekke studiesamlingar med interessante samtalar, diskusjonar og godt samarbeid. Ikkje minst vil eg og rette ein velfortent takk til rettleiaren min Arne Jakobsen, for konstruktive og tydelege tilbakemeldingar undervegs i arbeidet med masteroppgåva. Heilt til slutt vil eg rose kona mi Britt for all støtte og oppmuntring, og samtidig takke borna mine Bjarne, Vegard og Magnhild for den tolmodighet dei har vist desse åra.

Torstein Taranger Westermoen

Bergen, mai 2018

Samandrag

Digitale hjelpemiddel har for lengst fått sin plass i matematikkundervisninga i norsk skule. I den vidaregåande skulen har dataprogram med grafteiknar også langt på veg erstatta kalkulatorar, som digitalt hjelpemiddel i arbeid med funksjonar. Frå og med våren 2015 vart det og eit krav, å nytte grafteiknar til å svare på einskilde oppgåver på eksamen. I den samanheng vart det interessant å sjå nærmare på korleis elevane arbeider med funksjonar med grafteiknar (i denne oppgåva Geogebra) samanlikna med det å bruke tradisjonelle metodar (papir, blyant og eventuelt kalkulator).

Målet for denne oppgåva byggjer på denne problemstillinga:

> *Elevane si tilnærming til representasjonsskifte i arbeid med funksjonar, med og utan bruk av Geogebra, i matematikk på første trinn på vidaregåande skule.*

Problemstillinga gav også følgjande forskingsspørsmål:

> *Kva utfordringar har elevane i 1P og 1T når dei løyser oppgåver i funksjonar i dei to kontekstane, med og utan Geogebra?*

For å svare på dette har eg undersøkt korleis elevane arbeider med representasjonsskifte i funksjonar og om det er noko skilnad på korleis dei lukkast i dei to kontekstane. Det er åttiseks elevar frå 1P og 1T som har vore med i undersøkinga. Først gjennomførte eg ein skriftleg prøve i to delar. Den fyrste delen inneheld oppgåver som skulle løysast utan bruk av Geogebra, medan del to består av oppgåver som skulle løysast med bruk av Geogebra. Alle elevane svara på prøven, og i etterkant intervjua eg tre av desse, blant anna på bakgrunn av interessante svar frå den skriftlege prøven. Resultatet frå prøven og intervjua vart koda og analysert for å best mogleg svare på problemstillinga og forskingsspørsmål(et).

Undersøkinga viser at det var signifikante forskjellar på kva elevane fekk til av oppgåver, ved å samanlikne svara deira i dei to kontekstane, med og utan bruk av Geogebra. Både elevane i 1P og i 1T hadde betraktelig lågare score på den delen som var med Geogebra. Dette heng nok saman med eit anna funn, nemleg alle dei «manglande svara», særleg i den sistnemnte konteksten. I undersøkinga kjem det fram at mange elevar har vanskar med å gå i frå ein representasjon i funksjonar til ein annan. Enkelte elevar teiknar grafen til ein lineærfunksjon som eit punkt, andre blandar stigningstal og konstantledd. Vi ser også teikn til at ein del elevar vegrar seg mot å lese av *x*- eller *y*-verdiar frå ein graf, men vil heller rekne desse ut ved hjelp av likninga til grafen. Nokre av desse vanskane kjem berre fram i dei oppgåvene der ein ikkje skulle bruke Geogebra, medan andre dukkar opp også her. Interessant er det å sjå at enkelte «drar med seg» løysingsstrategiar (algoritmar) frå den eine konteksten og over i den andre, med blanda hell. Andre utfordringar med Geogebra går på tekniske innstillingar, slik som avrunding av desimalar og skalering av aksar.

Innhald

1 Innleiing

1.1 Bakgrunn for studien

Generasjonar som veks opp i dagens samfunn blir stadig møtt med ny og spennande teknologi, noko til leik, anna til nytte. Det har naturlegvis også påverka dei som legg føringar for kva som skal vere med i læreplanar og pensum i norsk skule. I løpet av dei siste tre tiåra har digitale verktøy blitt ein stadig viktigare del av matematikkopplæringa. Avanserte dataprogram, eigna til å teikne grafar og løyse likningar med meir, har langt på veg erstatta kalkulatorar med store skjermar. Denne utviklinga er kanskje mest synleg innan emnet funksjonar. Funksjonar har ein stor og viktig plass i matematikkfaget i den vidaregåande skulen. I første klasse på vidaregåande arbeider elevane blant anna med lineære samanhengar, proporsjonalitet og tolking av grafar. Det handlar også om å forstå samanhengar mellom ulike måtar funksjonar kan framstillast på, som for eksempel tabell, graf og likning (funksjonsuttrykk). Ein god del av dette bør vere kjent stoff i frå ungdomsskulen. Men, etter kvart får dei også kjennskap til meir avanserte funksjonar (andregrads- og eksponentialfunksjonar) kor bruk av dataprogram med grafteiknar kjem til sin rett.

Det er mange grunnar til at kompetanse om funksjonar er viktig. Ragnhild Hansen (2010, s. 29) nemner ein av dei, som: «*evne til å kritisere, vurdere og analysere anvendelser av matematikk i samfunnet*». Slik kompetanse er viktig for å kunne tolke og forstå det vi til dagleg vert presentert for av media, i form av grafiske framstillingar og ulike forskingsresultat (Hansen (2010). Høines, Rinvold og Selvik (2007, s. 101) beskriv grafen si rolle i samfunnet slik:

Grafer brukes i kommunikasjon i samfunnet. De brukes for å støtte andre muntlige og skriftlige tekster, for å beskrive situasjoner og problemstillinger. Tolkning av og formidling ved hjelp av grafer er nødvendige demokratiske kunnskaper. Skolespråket inneholder grafspråket i matematikkfaget og i andre fag.

Vi høyrer ofte i media om det «grøne skiftet» og kor viktig det er med forsking på og bruk av ny, «grøn» teknologi. Då er det også naudsynt at elevane har kompetanse til å bidra til dette skiftet og om ikkje anna forstå kva dei ulike prosessane som styrer samfunnsutviklinga dreier seg om. Også Duval (2006) påpeikar kor viktig det er med grunnleggjande kunnskapar i matematikk for å førebu studentar på den stadig aukande kompleksiteten i det moderne teknologi- og dataorienterte samfunnet vårt. Men, auka fokus på kunnskap om matematikk generelt og funksjonar spesielt, betyr nødvendigvis ikkje at alt er vel med elevane sine kunnskapar. Fleire studiar syner at elevar strevar med funksjonar og dei ulike representasjonane (*graf, tabell, likning, situasjon*) innanfor dette viktige emnet (Adu-Gyamfi, Bossé & Stiff, 2012; Duval, 2006; Knuth, 2000). Etter fleire år som lærar i vidaregåande skule er dette også noko eg har lagt merke til, og ein av grunnane til at eg ville skrive om funksjonar. Mange elevar har vanskar med å gå frå ein representasjon til ein annan, heretter kalla *representasjonsskifte*, i arbeid med ulike typar funksjonar. Eksempel på slike representasjonsskifte kan være;

- å lese av og å tolke ein graf (*å gå frå graf til tabell*).
- å framstille ein graf utifrå ein tabell (*å grå frå tabell til graf*).
- å systematisk samle inn data frå ein situasjon, i ein tabell (*å gå frå situasjon til tabell*).

Vi kan ikkje behandle omgrep som funksjonar eller grafar kvar for seg, i følgje Leinhardt, Zaslavsky og Stein (1990). Funksjonar og grafar er både kommunikative system, og samansette, organiserte idear som er meint å belyse eller forklare kvarandre. Sjølv om mange elevar kan teikne grafar i matematikktimane, betyr ikkje det at dei nødvendigvis klarer å nytte denne kunnskapen i andre samanhengar som til dømes i fysikk. Kunnskap om funksjonar handlar derfor om å både sjå på det spesifikke og det generelle. Slik kunnskap kan då bli eit glimrande verktøy til å undersøke ulike mønster (til dømes samanhengen mellom temperaturen i ein termos som funksjon av tida), både i matematikk og andre fag. Leinhardt et al. (1990) hevdar at bruk av dataprogram med grafteiknar vil spele ei viktig rolle her. I mange slike program vil ein kunne arbeide med fleire funksjonar på ein gong og ha muligheita til å følgje fleire representasjonar samtidig. Noko som gir mange fordelar. Men, resultat frå internasjonale undersøkingar som TIMSS[1], viser også at det er viktig å vere klar over at auka tilgang på digitale verktøy i matematikkundervisninga ikkje nødvendigvis gir auka kompetanse (Grønmo, 2017).

Årsakene til at ein del elevar slit med funksjonar er nok mange og av ulik art. Det kan være «hol» eller manglar i matematikk-kunnskapane dei har med seg frå tidleg grunnskule eller ungdomskule, misoppfatningar eller meir tilfeldige feil, som slår negativt ut på statistikken. Eg ynskjer å undersøkje nærmare kva kunnskapar elevane har om funksjonar, både med og utan digitale hjelpemiddel (grafteiknar), gjennom å sjå på vanskane elevane erfarer i dette emnet (eller kva dei får til).

[1] PISA og TIMSS (grunnskulenivå) og TIMSS Advanced (vidaregåande skule): Internasjonale komparative studiar (Grønmo, 2017)

1.2 Problemstilling

Vi har sett argument for at kunnskap om funksjonar er viktig (og kanskje nødvendig?) for å kunne drive fram ny teknologi, vurdere forsking og elles ha eit kritisk blikk på det ein møter av informasjon i kvardagen, blant anna gjennom media.

Med bakgrunn i skulen si auka fokus på bruk av digitale hjelpemiddel i matematikkundervisninga, er det interessant å sjå kva innverknad slike hjelpemiddel har på elevane si forståing av funksjonar. Det kan vere kjekt å bruke ein grafteiknar til å lage fine grafar av funksjonar på ein enkel og snar måte, men kva gjer det med elevane si heilskapsforståing av funksjonar? Ved å bruke eit dataprogram i arbeid med funksjonar kan elevane med enkle «taste-trykk» også gjere mange rekneoperasjonar. Men, spørsmålet er om dei forstår matematikken bak det programmet gjer for dei? Eller legg ein til rette for at dei kan «hoppe» lettvint over nødvendig kunnskap ved å ta i bruke slike dataprogram? Dette er noko eg synes det er interessant å kikke nærmare på og det er med å forme problemstillinga i denne oppgåva.

Eg har valt å undersøke kva kunnskapar elevane i 1P og 1T har om funksjonar. 1P og 1T er dei to variantane av fellesfaget matematikk for elevar som går første trinn på studieførebuande (Vg1), på vidaregåande skule i Norge. Dei to kursa har ulike læreplanar. 1T er den mest teoretisk orienterte medan 1P er den praktiske varianten av matematikk for Vg1. Begge kursa inngår i første del av generell studiekompetanse. Elevane vel anten 1P eller 1T, men må i tillegg minst ha eit år til med matematikk (2P, 2T, S1 og S2 eller R1 og eventuelt R2) i løpet av vidaregåande skule. Bruk av digitale hjelpemiddel er ein del av kompetansemåla i matematikk for 1P og 1T.

Det finst fleire gode dataprogram til bruk i matematikkundervisning. Men, eg vel å avgrense digitale hjelpemiddel i funksjonar til å gjelde Geogebra. Geogebra[2] er eit prisvinnande, gratis, dynamisk matematikkprogram med eit brukarvennleg grensesnitt. Geogebra har fått meir og meir plass i norsk ungdomsskule og vidaregåande skule (Hals, 2010; Hinna, Rinvold & Gustavsen, 2011). Hals (2010) sin kvantitative studie om IKT i matematikkopplæringa viser kor utbredt Geogebra var i Norge allereie i 2010 og korleis dette programmet i aukande omfang vert brukt av lærarar og elevar på 10. og 11. trinn (der 11. trinn omfattar 1P og 1T). I følgje Hinna et al. (2011) var Geogebra det mest utbreidde dataprogrammet for bruk i funksjonar i norsk ungdomsskule og vidaregåande skule i 2011.

[2] https://www.geogebra.org/about (Info om Geogebra)

Lærebøkene for 1P og 1T har etter kvart også sett av god plass til instruksjonar for opplæring i Geogebra. Noko som igjen viser kor utbredt dette programmet er i norsk skule. Bruk av Geogebra i emnet matematiske funksjonar er derfor med å danne grunnlaget for utforming av problemstillinga. Eg ynskjer blant anna å undersøke korleis elevane meistrar det å gå frå ein representasjon i funksjonar til ein annan (representasjonsskifte), på «tradisjonell» måte, det vil sei utan grafteiknar (grafisk kalkulator eller dataprogram) og ved å bruke Geogebra. Dette for å betre kjennskap til elevane sine utfordringar og vanskar i dei to ulike kontekstane. I sin doktoravhandling skriv Postelnicu (2011) at det er lite forsking på læraren si forståing av elevane sine vanskar, spesielt med linearitet og lineære funksjonar. Ho viser til fleire studiar som bekreftar den nære samanhengen mellom læraren sin pedagogiske og faglege kunnskap på den eine sida og viktigheita av at læraren lukkast i å avdekke elevane sine vanskar på den andre. Dette er også med å på å forme problemstillinga for denne oppgåva. Eg vil undersøke elevane si tilnærming til representasjonsskifte i arbeid med funksjonar, med og utan bruk av Geogebra. Spesielt vil eg sjå på elevar som får til ei oppgåve i tradisjonell kontekst, men som ikkje får det til i Geogebra og omvendt. Problemstillinga mi er då:

> *Elevane si tilnærming til representasjonsskifte i arbeid med funksjonar, med og utan bruk av Geogebra, i matematikk på første trinn på vidaregåande skule.*

Denne problemstillinga gir også følgjande forskingsspørsmål:

> *Kva utfordringar har elevane i 1P og 1T når dei løyser oppgåver i funksjonar i dei to kontekstane, med og utan Geogebra?*

For å svare på dette vil eg også sjå på desse underspørsmåla:

1. Korleis arbeider elevane med representasjonsskifte i funksjonar?
2. Er det noko skilnad på korleis dei lukkast i dei to kontekstane?

1.3 Utforming av oppgåva

I innleiinga har eg skrive litt om bakgrunn for val av problemstilling og kva eg ynskjer å undersøke i denne oppgåva.

I kapittel 2 (Teori) vil eg fortelje litt om den historiske utviklinga til funksjonar og om kva ein funksjon i matematikk er. Vidare tenkjer eg også at ulike representasjonsskifter i funksjonar sentralt. Kapittelet vil handle om funksjonar i vidaregåande skule og om kva rolle digitale verktøy har. Dette vil eg belyse med utgangspunkt i kva gjeldande læreplan og kompetansemål seier om bruk av digitale hjelpemiddel i arbeidet med funksjonar i matematikken. Eg vil og presentere teori som handlar om læring, forståing og forming av omgrep hos elevane. I den samanheng vil eg også skrive litt om kva forskingslitteraturen seier om feil og misoppfatningar og kva som skil desse. Det er også naturleg å komme inn på korleis matematikkundervisninga kan leggjast til rette for å redusere talet på slike.

Kapittel 3 handlar om metoden og instrumentet som er nytta i denne studien. Eg nyttar både ein kvantitativ og ein kvalitativ metode for å svare på forskingsspørsmåla mine. Dette for å få ei vidare/fyldigare/djupare innsikt om det eg undersøker. Måten dette er gjort på vert presentert i dette kapittelet. Her reflekterer eg også rundt reliabilitet og validitet i sjølve forskingsprosessen, og drøftar etikk knytt til studien.

I kapittel 4 vil eg presentere og analysere resultatet frå undersøkinga og intervjua, med tabellar og figurar, eksempel på elevsvar og utdrag frå intervjumaterialet.

I det siste kapittelet (5) drøftar eg funna mine opp mot teoridelen og forskingsspørsmåla. Eg vil og diskutere om teorien og metoden gir grunnlag for å svare på forskingsspørsmåla.
Til slutt følger ein konklusjon og tankar for vidare forsking.

2 Teori

Målet med denne studien er å undersøke kva utfordringar elevane møter når dei løyser oppgåver i funksjonar, i to ulike kontekstar, med og utan bruk av Geogebra. I førre kapittel presenterte eg bakgrunn for studien og kva eg ynskjer å undersøke. Under teori vil eg først fortelje litt om funksjonsomgrepet si historiske utvikling og definere kva ein funksjon er (2.1). Her vil det og passe å sjå korleis funksjonar inngår i kompetansemåla for 1P og 1T, med vekt på digitale hjelpemiddel. Vidare, i teorikapittelet presenterer eg teori og forsking som handlar om representasjonar av funksjonar og overgangar mellom desse, altså representasjonsskifte (2.2). Deretter beskriv eg nokre aktuelle syn på læring og forståing og ser nærmare på korleis elevane lærer matematikk (2.3). Til sist presenterer eg utfordringar elevar har i matematikk, som feil og misoppfatningar, generelt men og spesielt knytt til funksjonar, i lys av didaktisk forsking på området (2.4).

2.1 Funksjonar

2.1.1 Eit historisk innblikk i utviklinga av funksjonsomgrepet

Historia til funksjonar er nært knytt til framsteg og utvikling av naturvitskapen og då særleg fysikk. Kjeldsen og Lützen (2015) gir eit innblikk i korleis funksjonsomgrepet har oppstått, endra seg og utvikla seg over tid. Dei legg vekt på utviklinga gjennom dei siste 400 åra og beskriv det nære samspelet med naturvitskapen. Men, dei er også tydelege på at ein finn utrekningar og tankar som går lenger tilbake i tid. Babylonarane (for om lag 4000 år sidan) sine tabellar med kvadrattal og kubetal (x^2 og x^3) passar godt med Lejune Dirichlet (1805-1850) sitt funksjonsomgrep (Kjeldsen & Lützen, 2015, s. 545). Også egyptarane undersøkte samanhengar mellom ulike diametrar på sirklar og det tilhøyrande arealet. I den kjende *Rhind Papyrusen,* datert 1550 f.Kr.[3], kan det visast at dei lagde oppskrifter eller formlar med samanhengen mellom volum på kornlager, basert på gitt diameter og høgd, trass i at dei brukte tal i staden for vilkårlege variable (Rogers, 2011, s. 180). Også den egyptiske astronomen og matematikaren Klaudios Ptolemaios (ca. år 150 e.Kr) beskreiv astronomiske fenomen som «funksjonar» av tida. Ptolemaios publiserte og den første kjende trigonometriske tabellen for kordane i ein sirkel som «funksjon» av vinkelen (Kjeldsen & Lützen, 2015, s. 545). Dette var tabellar som var konstruert for å beskrive naturen eller den fysiske verda. Det kan argumenterast for at dette er bevis for at opphavet til funksjonsomgrepet kjem frå babylonske og greske matematikarar, men i følgje Kjeldsen og Lützen (2015, s. 545) blir desse tabellane meir praktiske hjelpemiddel enn matematiske konsept. Funksjonar som matematisk konsept bygger på utviklinga av *Kalkulus* (matematisk analyse;

[3] http://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details.aspx?objectId=117389&partId=1

derivasjon og integrasjon) som igjen har nære band til fysikk (Kjeldsen & Lützen, 2015, s. 545). Kalkulus vart i hovudsak utvikla som eit middel for å studere kurver. To viktige bidragsytarar i dette arbeidet er den kjende matematikaren og filosofen René Descartes (1596–1650) og matematikar og advokat Pierre de Fermat (1601–1665). Både Descartes og Fermat innførte koordinatar i deira studiar av samanhengen mellom geometri og algebra (Holme, 2004, s. 265). Descartes brukte kunn første kvadrant av det vi i dag kjenner som det Kartesiske koordinatsystemet, som er oppkalla etter han sjølv. Han innførte bruken av *x* som ukjend, men anerkjende ikkje negative tal. Det var grafen som gav grunnlag for ein funksjon (algebraisk uttrykk), og ikkje motsett. Fermat tok på si side i bruk alle fire kvadranta i koordinatsystemet. Han var på saman vis som Descartes med å utvikla den analytiske geometrien, som eit bindeledd mellom geometri og algebra. Dei to la stor vekt på det formelle symbolspråket i matematikk for å knyte likningar til kurver (Rogers, 2011). Dette viktige arbeidet var også grunnlaget for utviklinga av Isaac Newton (1642–1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) store verk, *Kalkulus*. Medan Newton arbeidde med fysiske storleikar som endra seg med tida (naturvitskapen, Newton sine lovar i mekanikken/dynamikken) og integrerte matematikken og kinematikken (del av dynamikken der ein ikkje tek omsyn til krefter og masse) fullstendig, var Leibniz sin matematikk i mindre grad knytt til fysikk. Leibniz reknast som den første til å bruke ordet funksjon om geometriske kurver. Han brukte blant anna omgrepet til å beskrive ei mengd som varierer frå punkt til punkt på ei kurve, slik som ein tangent, ein normal eller ein ordinat (Kjeldsen & Lützen, 2015).

På 1700 talet auka avstanden mellom matematisk analyse og geometri, og funksjonskonseptet følgde med. Først kom Johann Bernoulli (1667–1748) med sin definisjon av funksjonskonseptet, som er lausriven frå geometrien: *«Here a function of a variable quantity denotes a quantity composed in any arbitrary manner from this variable quantity and constants.»* (Kjeldsen & Lützen, 2015).

Men, den dominerande definisjonen på siste halvdel av 1700-talet og byrjinga av 1800-talet var Leonhard Euler (1707–1783) si omforming av Bernoulli sin definisjon: *«A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any manner of this variable and of numbers or constants.»* (Kjeldsen & Lützen, 2015). Euler såg på analyse som ein vitskap om funksjonar og ikkje om kurver, sjølv om det også kan nyttast til geometri. Men, Euler måtte seinare formulere om sin definisjon, etter lange og mange diskusjonar med blant anna Jean le Rond D`Alembert (1717–1783). D`Alembert er kjend for si fullstendige løysing av den berømte *bølgjelikninga.* Bakgrunnen for debatten var denne bølgjelikninga og korleis kontinuitet og initialvilkår i løysinga passa med Euler sin definisjon på funksjonar. Striden stod også om kva som kjenneteikna ein kontinuerleg funksjon og Euler måtte etterkvart endre sin definisjon. Euler innførte symbolet *f(x)*, i 1734, og utvida sitt funksjonsomgrep:

Når x står for ein variabel størrelse, så er alle størrelsar som på ein eller annan måte er avhengig av x eller er bestemt av x, funksjonar av x. (Holme, 2004; Kjeldsen & Lützen, 2015, s. 549).

På byrjinga av 1800-taIet fann Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) at det var nødvendig med eit skilje mellom analytiske uttrykk og funksjonar. Hans forsking på varmeleiing og utvikling av vilkårlege funksjonar av trigonometriske rekkjer førte til at funksjonskonseptet måtte endrast. Blant anna meinte Fourier at ein ikkje lenger kunne betrakte integral som berre ein *anti-derivert*, men enno enklare, som området under grafen. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), arbeidde vidare med Euler og Fourier sine funksjonskonsept og definerte ein kontinuerleg funksjon på denne måten:

Dersom kvar verdi av x gir ein eintydig verdi y på ein slik måte, at når x går kontinuerleg gjennom intervallet frå a til b, så endrar y = f(x) seg litt etter litt og y kallast ein kontinuerleg funksjon av x i dette intervallet. Det er ikkje nødvendig at y avhenger av x etter den same lova i heile intervallet. Ein treng heller ikkje ha ein avhengighet som kan uttrykkjast med matematiske operasjonar (Dirichlet, 1837). (Kjeldsen & Lützen, 2015, s. 550).

I denne definisjonen ser ein at det ikkje er nødvendig med ei felles lov, eller same funksjon på heile intervallet. Men dette vart også eit av ankepunkta mot denne formuleringa. Sjølv om den, i motsetning til Euler sin definisjon, føreset kontinuitet i eit intervall og var svært utbreidd og akseptert på si tid, fekk den kritikk for å være for generell. Korleis skulle ein funksjon definerast? Kva reglar skulle leggjast til grunn for at det kunne kallast ein funksjon? Desse utfordringane vart seinare løyst med utviklinga av mengdelære og mengdeteori på byrjinga av 1900-talet. Georg Cantor (1845–1918) var med å legge grunnlaget for det «moderne» og gjeldande mengdeteori funksjonskonseptet frå 1939, også kalla *Bourbaki* [4]:

> La *A* og *B* være mengder. Ein funksjon *f* frå *A* til *B* er ei delmengd av det kartesiske produktet *A x B* slik at om $x \in A$, så finns det eit unikt element $y \in B$, slik at $(x, y) \in f$. I dette tilfellet skriv vi *y* som *f(x)* (Kjeldsen & Lützen, 2015, s. 551; Rogers, 2011).

[4] Nicolas Bourbaki er eit pseudonym brukt av ei gruppe, franske, matematikarar frå 1900-talet, med det som mål å gjere matematikken meir sjølvstendig, abstrakt og formell. Nicolas Bourbaki. (2017, 18. januar). I Store norske leksikon. Hentet 19. desember 2017 fra https://snl.no/Nicolas_Bourbaki.

2.1.2 Funksjonar i vidaregåande skule

Historia viser at funksjonsomgrepet har gjennomgått trinnvise endringar og forma seg til det vi kjenner i dag. Funksjonar vert definert på ulike måtar i dei ulike lærebøkene for vidaregåande skule. Her er nokre eksempel henta frå dei mest brukte lærebøkene i 1P og 1T:

- Aschehoug, Matematikk 1P og 1T:

  «Når kvar verdi av x gir éin viss verdi for y, seier vi at y er ein funksjon av variabelen x.»
  (1P og 1T,Heir, Engeseth, Moe & Borgan, 2014, s. 94).

- Cappelen Damm, Sinus 1P og 1T:

  «y er ein funksjon av x dersom kvar moglege verdi for x gir nøyaktig ein verdi for y»
  (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl & Hals, 2014, s. 214)

Begge desse definisjonane vidarefører arven etter Dirichlet og Bourbaki.

Digitale hjelpemiddel og funksjonar

Det er viktig å sjå kva læreplanen seier om bruken av digitale hjelpemiddel og korleis desse skal nyttast i matematikkundervisninga. Kva som definerer ein funksjon kjem tydeleg fram i lærebøkene. Likevel vil eg presisere at det å kunne definisjonen til ein funksjon ikkje er eit av kompetansemåla i 1P, men berre i 1T. Kompetansemåla etter gjeldande læreplan (L06) for høvesvis 1P og 1T om funksjonar er vist nedanfor:

Kompetansemål i funksjonar etter 1P – Vg1 studieførebuande utdanningsprogram
Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- gjere greie for omgrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske døme, også digitalt
- omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar
- undersøkje funksjonar som beskriv praktiske situasjonar, ved å fastsetje nullpunkt, ekstremalpunkt og skjeringspunkt og tolke den praktiske verdien av resultata

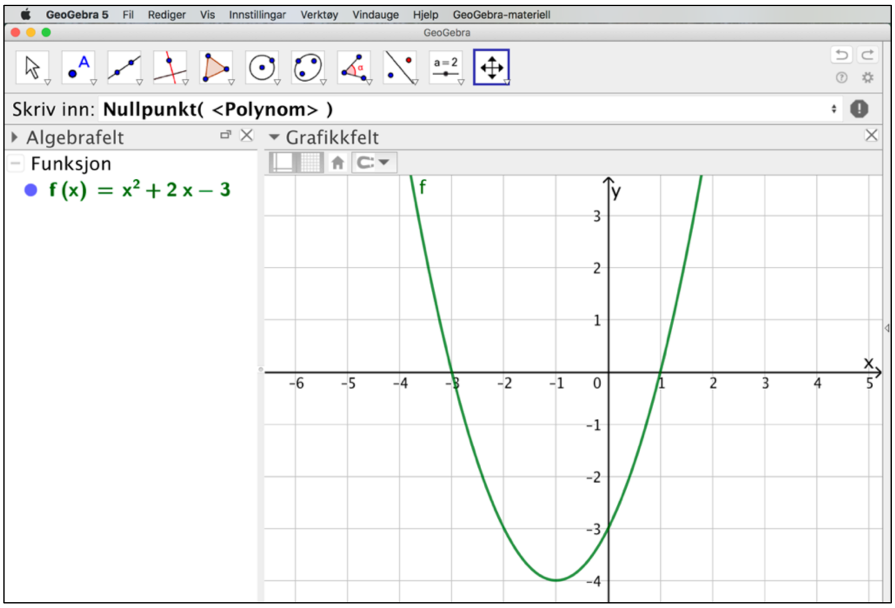
Kompetansemål i funksjonar etter 1T – Vg1 studieførebuande utdanningsprogram
Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- gjere greie for funksjonsomgrepet og kunne omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar

- berekne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjeringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta
- gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar
- lage, tolke og gjere greie for funksjonar som beskriv praktiske problemstillingar, analysere empiriske funksjonar og finne uttrykk for tilnærma lineære samanhengar, med og utan bruk av digitale verktøy
- bruke digitale verktøy til å framstille og analysere kombinasjonar av polynomfunksjonar, rotfunksjonar, rasjonale funksjonar, eksponentialfunksjonar og potensfunksjonar

Vi ser tydeleg korleis digitale verktøy har fått innpass i kompetansemåla ovanfor. Frå og med våren 2015 vart elevane også pålagd å bruke digitale verktøy for å løyse enkelte av eksamensoppgåvene på del 2 i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2015). Denne endringa er framleis gjeldande. Både 1P og 1T elevar må derfor nytte ein grafteiknar til å svare på eksamensoppgåver med funksjonar på del 2. Bruk av digitale hjelpemiddel i funksjonar er altså ein del av kompetansemåla i læreplanen og eit krav på eksamen. Dette gir mange fordelar, men kanskje også ulemper. Elevane kan no raskt teikne ein graf utifrå likninga (funksjonsuttrykket) til funksjonen, i staden for å bruke tid på å rekne ut y-verdiar ved å bruke likninga og så teikne etterpå. Dette frigir også meir tid til å tolke grafen eller samanlikne denne med andre grafar.

Den digitale kvardagen har allereie fått ein stor plass i funksjonslæra i norsk skule. Det er ikkje lenger berre kalkulatorar med stor skjerm som gjeld. No har mange skular meir og meir gått over til å bruke dataprogram, som Geogebra, MS Excel og TI-Nspire til blant anna å teikne og analysere grafar. Mac (Apple) har også ein innebygd grafteiknar (Grapher) i programvaren. Elevane skal altså ha kunnskap om funksjonar både med og utan digitale verktøy. I den samanheng og i forhold til problemstillinga, er det spennande å sjå om det er skilnad på kva feil eller misoppfatningar elevane har i dei to kontekstane.



Figur 2.1.2 Figuren viser likninga til funksjonen f i algebrafeltet og grafen til f i grafikkfeltet teikna med Geogebra. I inntastingsfeltet ser ein kommandoen ein brukar for å finne nullpunkta til ein polynomfunksjon.

For å få den digitale kompetansen ein treng i matematikk i vidaregåande skule er det nødvendig med god opplæring. Det krev at lærarane har den nødvendige kompetansen til å bruke og undervise i digitale hjelpemiddel og at både elevar og lærarar har tilgang på dette verktøyet. Sjølv om læreplanane vektlegg digital kompetanse er det ulike måtar å løyse dette på. Ikkje uventa, byr det også på utfordringar. I ein nyare amerikansk studie, som ikkje var spesielt retta mot matematikk, vart det gjort eit eksperiment som undersøkte eksamensresultat opp mot bruk av datamaskinar og nettbrett (Carter, Greenberg & Walker, 2016). Denne studien syner at resultata til studentane som har «fri» bruk av digitale hjelpemiddel som pc og nettbrett, er klart dårlegare enn for dei som ikkje har slike tilgjengeleg. Sjølv om dette ikkje var ein studie om fordelar og ulemper med bruk av digitale hjelpemiddel i matematikk, peikar den på utfordringar som matematikklærarar må vere bevisste på. Med slike hjelpemiddel har ein ofte tilgang på variert underhaldning, anten med eller utan internett, og det i undervisningstida. Men, desse utfordringane er ikkje noko eg vil komme nærmare inn på i denne oppgåva.

Fleire forskarar peikar på dei mange mulegheitene ein får ved bruk av dataprogram med grafteiknarar (Leinhardt et al., 1990, s. 36). Slike program gir studentane mulegheita til å veksle mellom ulike representasjonar, på ein effektiv måte. Dei slepp å bruke tid på rekne, plotte og teikne for hand, noko som frigjer tid til å undersøke fleire grafar med tilhøyrande likningar samtidig. Det gir ein unik sjanse til å oppnå ei djupare forståing for ulike typar funksjonar. Men Leinhardt et al. (1990, s. 44) viser også til utfordringar, som handlar om skalering, eller innstilling av aksar. Det dreier seg om både programtekniske og matematiske ferdigheitar. Korleis grafen er presentert i *grafikkfeltet* er til ein stor grad styrt av innstillingar av koordinatsystemet og dataprogrammet generelt. Men samtidig krev det gode matematiske kunnskapar for å sikre at programmet gir eit tilfredstillande eller godt svar.

2.2 Representasjonsskifte i funksjonar

Claude Janvier (1987c) skil mellom fire ulike hovudformer ein kan presentere funksjonar på. Dette er ein situasjon (munnleg eller skriftleg presentert), tabell, graf og likning (algebraisk uttrykk eller formel). Han er vidare oppteken av korleis ein kan gå i frå ei form til ei anna og kva utfordringar elevar møter på i ein slik prosess. Ein translasjonsprosess eller representasjonsskifte inneber dei psykologiske prosessane som er involvert når ein går i frå ei representasjonsform til ei anna, til dømes frå likningsform til graf (Janvier, 1987a, s. 27). Tabell 2.2.1 nedanfor viser denne mykje brukte, systematiske oversikta over desse formene.

Til: / Frå:	**Situasjon** (verbal beskriving)	**Tabell**	**Graf**	**Likning** (algebraisk uttrykk)
Situasjon (verbal beskriving)		Måling	Skisse	Modellering
Tabell	Avlesing		Plotting	Tilpassing
Graf	Tolking	Avlesing		Kurvetilpassing
Likning (algebraisk uttrykk)	Attkjenning	Utrekning	Skisse	

Tabell 2.2.1 Janvier (1987c) sin tabell for overgangar mellom ulike måtar funksjonar kan framstillast på.

Eit enkelt døme kan illustrere korleis tabell 2.2.1 kan brukast: Ein har ei sylinderforma bøtte som skal fyllast med vatn (**situasjon**), og ein skal med *jamne mellomrom* registrere kor mykje vatn som er i bøtta, heilt til den er full (**tabell**). Denne prosessen kan ein også skissere (**graf**) og (til slutt) finne eit algebraisk uttrykk for vassmengd i bøtta etter ei gitt tid (**likning**).

Vi kan også ha *transposisjonar*, som er dei ledige blå felta på diagonalen, men det vil ikkje vere med i denne oppgåva. Det er mange ulike måtar å utrykke ein funksjon med symbol. For ein bestemt lineær funksjon kan vi både skrive:

$$y = 2x + 3 \qquad -2x + y = 3 \qquad f(x) = 2x + 3$$

Det er også fleire ulike namn som er i bruk, som funksjonstuttrykk, likning eller formel. I denne oppgåva brukar eg for det meste likning.

Ein direkte og «korrekt» translasjonsprosess involverer to representasjonsformer, og inneber eit semantisk skifte frå den eine til den andre forma, der målet er å bevare det matematiske innhaldet. Studiar viser at mange elevar vel ein indirekte prosess, ved at ein går «innom» ein annan representasjonsform på vegen til målforma (Janvier, 1987a). Eit døme på dette er at elevar ofte lagar ein tabell når dei skal teikne ein graf. Janvier skil mellom representasjonar og symbol (illustrasjon) og definerer ein representasjon på denne måten:

> *A representation may be a combination of something written on paper, something existing in the form of physical objects and a carefully constructed arrangement of idea in one`s mind.* (Janvier, 1987b, s. 68)

Omgrepet representasjon kan seiast å vere *noko som står for noko anna*. Likevel kan denne definisjonen fort bli for upresis eller for formell (Duval, 2006). Duval (2006, s. 104) viser til Piaget sin omtale av representasjonar slik: *«representations can be individuals´ beliefs, conceptions or misconceptions to which one gets access to through the individuals´ verbal or schematic productions»*. Altså kan representasjonar vere synonymt med tankar, forståing eller misoppfatningar hos eit individ, som vert uttrykt anten munnleg eller skriftleg. Duval (2006, s. 104) legg sjølv til at representasjonar kan vere teikn og komplekse tilknytingar, som er framstilt i følgje reglar, og som gjer det mogleg å beskrive eit system, ein prosess eller ei mengd fenomen. Det at ein representasjon er semiotisk vil sei at den baserer seg på eit system der det er einigheit om korleis teikn skal tolkast og kva meining som ligg i representasjonen. Ulike semiotiske system har då forskjellige teikn og reglar som representerer eit register. Duval (2006) skil mellom to ulike *operasjonar* på representasjonar. Den første handlar om å gjere endringar på representasjonen innan det same representasjonssystemet, altså ein *behandlar* representasjonen. Den andre handlar om å gå frå ein representasjon til ein annan (representasjonsskifte). Registeret eller systemet vert endra utan å endre objekta ein tar for seg og lovane dei imellom. Desse to operasjonane kan illustrerast med følgjande eksempel:

1. Endring innanfor same representasjon: $4x+2y=6 \;\rightarrow\; 2x+y=3 \;\rightarrow\; y=-2x+3$
2. Omsetjing eller transformasjon av likninga $4x+2y=6 \;\rightarrow$ til graf (representasjonsskifte)

Denne siste, som er eit representasjonsskifte, er meir krevjande enn den operasjonen som går på endring innanfor eit system. Ein må endre sjølve registeret, samt dei symbola og samanhengane som er mellom desse (Duval, 2006). Duval stiller spørsmål ved korleis elevar som står overfor to ulike register i to representasjonar skal kunne skilje kva som er matematisk relevant og kva som ikkje er det.

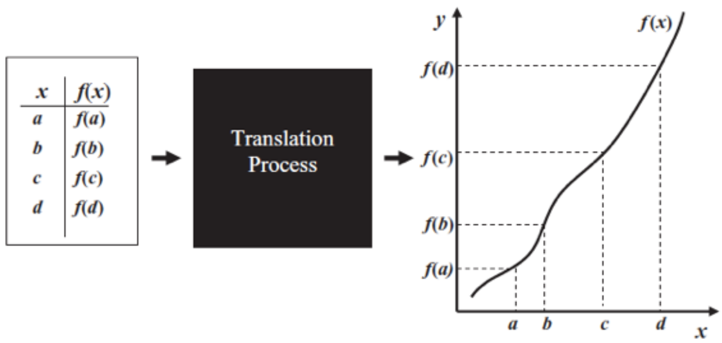
Det er snakk om to ulike semiotiske system kor ein skal kjenne att og skilje dei ulike registera og konstruere samanhengar mellom desse.

Det å gå i frå ein representasjon til ein annan krev både global og lokal omsetjingsaktivitet (Bell & Janvier, 1981). Om ein brukar graf som eit døme, handlar global tilnærming om å sjå på grafen som ein heilskap, eller ved å studere trendar over større intervall, som til dømes om grafen veks eller minkar. Ei lokal tilnærming går meir på konkrete detaljar som å finne eit eller fleire punkt. Enkelte representasjonar har også ein høgare eigenskapstetthet (*attribute density*). Det handlar om kor mykje informasjon ein representasjon inneheld, eller tettleiken av karakteristiske eigenskapar i ein representasjon samanlikna med overflødig informasjon i denne. Dette kan illustrerast med eit generelt døme med ein lineær funksjon. I tabellen er ikkje skjering med y-aksen gitt, eller den er ein av mange andre punkt. Også stigningstalet er vanskeleg å oppdage eller lese utifrå tabellen. I dette tilfellet kan ein hevde at eigenskapstettleiken er låg, på grunn av all den unødvendige informasjonen i tabellen. Ser ein på likninga ($y = ax + b$) til denne grafen, eller på grafen, har begge desse ein høgare eigenskapstettleik enn tabellen. Det er mindre unødvendig informasjon å sjå gjennom. Såleis vil einskilde representasjonsskifte i utgangspunktet vere meir utfordrande for elevane å gjennomføre, enn andre (Adu-Gyamfi et al., 2012).

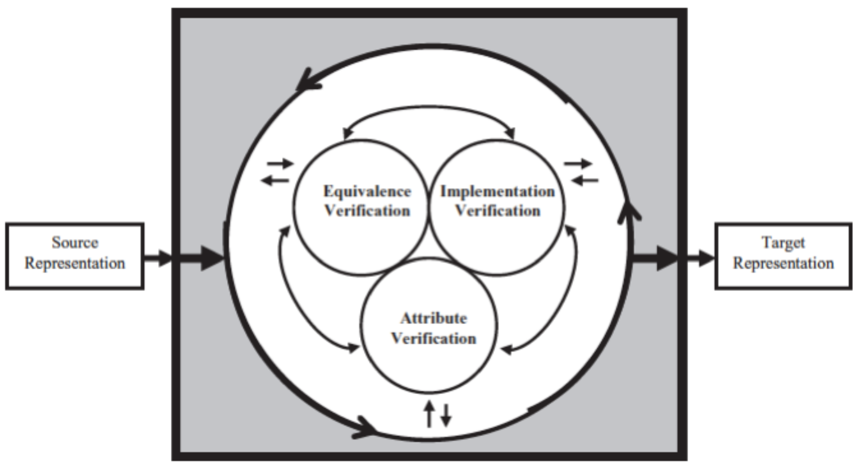
Leinhardt et al. (1990) viser i sin artikkelsamling om forsking på funksjonar i skulen at elevar for det meste vert presentert for oppgåver som krev at dei meistrar overgangen mellom likning og graf. Det vil sei at dei brukar likninga til å lage ein tabell basert på forma $y = ax+b$, før dei teiknar grafen til funksjonen. Dei viser også til forsking som syner at kvalitativ tolking av grafar er sterkt underrepresentert i lærebøker og læreplanar i matematikk. Noko som også er litt av årsaken til at elevar manglar ei heilskapleg forståing for grafar. Fokus har vore på ei kvantitativ og lokal tilnærming til grafar som fokuserer mest på konkrete punkt og mindre på trendar, slik som form, vekstrate og retning. Desse forfattarane refererer også til forsking som syner at elevar har store vanskar med å gå frå ein graf til ei likning og at ein del elevar har vanskar med representasjonsskifte som involverer konstantfunksjonar.

Knuth (2000) undersøker korleis elevar brukar «The Cartesian connection», det at koordinatane til eit kvart punkt på ei linje vil tilfredstille likninga til linja. Studien handlar om på kva måte elevane meistrar det å gå i frå likning til graf og motsett. For å svare effektivt på oppgåvene i undersøkinga måtte elevane meistre både grafisk og algebraisk (likning) representasjon. Dei måtte også komme med alternative løysingsmetodar. Funna frå denne studien viser at over tre fjerdedelar av elevane som var med i undersøkinga nytta ein algebraisk metode, sjølv om ei grafisk tilnærming ville vore meir effektiv og kanskje enklare. Mange elevar hadde heller ikkje grafisk løysing som eit alternativ i det heile. Knuth (2000) trur noko av grunnen til at elevane føretrekk å bruke likninga til ei linje skyldast læreplanar og undervisninga, som han hevdar vektlegg bruk (manipulering) av funksjonar på likningsform. Ei anna årsak til overvekt av algebraisk løysingsmetodar kan være måten oppgåvene var formulert på. Elevane trur dei må svare eksakt og stolar då mest på eit svar som baserer seg på ei likning. Det å lese av ein graf, tenkjer dei blir for unøyaktig, og grafen blir på ein måte unødvendig. Knuth (2000) viser også til anna forsking som hevdar elevar har ein sterk tendens til å tenkje «algebraisk» framfor «visuelt». Sjølv om dei gjennom oppgåveutforming vert forsøkt pressa mot det siste, vel dei det trygge og eksakte. Men, trass i dei forklaringane som kjem fram i studien, meiner Knuth (2000) det er tankevekkjande at mange elevar heller ikkje hadde grafisk løysing som ein alternativ metode. Han stiller spørsmål om ein tar for lett på representasjonsskifte graf til likning og om denne overgangen er blitt overflødig. Det vil sei at så lenge elevane kan teikne ein graf utifrå likninga, så er det tilfredstillande. Duval (2006) er ein av fleire som også påpeikar at mange elevar kan konstruere ein graf frå punkt i ein tabell eller frå ei likning utan å kjenne att dei karakteristiske eigenskapane som høyrer til både kjelde og målrepresentasjon.

I forskingsstudien «*Lost in Translation*» viser Adu-Gyamfi et al. (2012) til undersøkingar som syner at ein del elevar som beherskar både grafar og formlar, likevel ikkje klarar å gå frå den eine forma til den andre. Det er ulike oppfatningar om kva som er årsakene til dette og i den samanheng har forskarar også konstruert modellar i forsøk på å skildre translasjonsprosessane (Adu-Gyamfi et al., 2012). Adu-Gyamfi et al. (2012) viser til *«Black-box»* modellen (Sjå figur 2.2.1) som eit samleomgrep på korleis forsking har beskrive translasjonsprosessane hos elevane, som ein svart boks med vagt definerte eigenskapar. Eigenskapar som ein ikkje kan observere, der algoritmane er skjulte. Ein ser berre om ein elev har fått det til eller ikkje. Om ein elev ikkje meistrar overgangen frå ein representasjon til ein annan, skyldast det anten ein triviell feil eller ei «djupare» misforståing. Denne *svart-boks* modellen gir ikkje ei tilstrekkelig forklaring på elevane sine feil eller svakheitar i arbeid med representasjonsskifter, i følgje Adu-Gyamfi et al. (2012). Dei presenterer sin «*modell for verifikasjon av representasjonsskifte*» (sjå figur 2.2.2) som eit verktøy for å betre forstå korleis elevane tenkjer i denne prosessen. Desse forskarane undersøker også om det er nokre overgangar som er vanskelegare enn andre, om overgangar frå ei kjelde er vanskelegare enn frå ei anna eller om representasjonsskifte til ein målrepresentasjon er vanskelegare enn til ein annan. Adu-Gyamfi et al. (2012) tar i bruk omgrep som «*implementation verification*» og «*attribute verification*». Den første handlar om å heile tida verifisere at aktiviteten som føregår under eit representasjonsskifte er passande og korrekt gjennomført. Plotting av punkt tilhøyrande ein funksjon frå tabellform (kjelde) til graf (mål) kan gjerast som ei rein prosedyre oppgåve, utan at ein går nærmare inn på eller forstår kva ein gjer reint matematisk. Men, for å unngå feil må ein sjekke eller undersøke om operasjonane ein gjer samsvarar med det matematisk innhaldet, før og etter. Når det gjeld «*attribute-verification*» går det ut på å sjå til eller sikre at dei karakteristiske eigenskapane som høyrer med til kjelderepresentasjonen har blitt korrekt ivaretatt i målrepresentasjonen. Det kan for eksempel vere at stigninga til ei rett linje er den same før og etter representasjonsskifte. Då er det også viktig at elevane kan tolke og manipulere dei eigenskapane som kjenneteiknar den einskilde representasjonen slik at desse kan bevarast i ein translasjonsprosess. Men i tillegg til desse to første, «*implementation verification*» og «*attribute verification*», peikar Adu-Gyamfi et al. (2012) på «*equivalence verification*». Denne siste kan minne om den føregåande, som går på verifikasjon av eigenskapar, men den handlar meir om å attestere at både kjelde og målrepresentasjon formidlar same informasjon (Adu-Gyamfi et al., 2012, s. 163).



Figur 2.2.1 «Black-box model» for overgangsprosessen: tabell som kjelde, og graf som mål (Adu-Gyamfi et al., 2012, s. 160)



Figur 2.2.2 «Translation-Verification Model» (Adu-Gyamfi et al., 2012, s. 161)

Adu-Gyamfi et al. (2012) viser til forsking som omtalar tettleiken av karakteristiske eigenskapar i ein representasjon samanlikna med overflødig informasjon i denne. Dei viser til eit døme med ein gitt lineær funksjon. I tabellen er ikkje skjering med y-aksen gitt, eller den er ein av mange andre punkt.

Også stigningstalet er vanskeleg å oppdage eller lese utifrå tabellen. I dette tilfellet kan ein hevde at eigenskapstettleiken er låg, på grunn av all den unødvendige informasjonen i tabellen. Ser ein på likninga (på forma $y = ax + b$) til denne grafen, eller på grafen, har begge desse ein høgare eigenskapstettleik enn tabellen. Det er mindre unødvendig informasjon å sjå gjennom. Såleis vil einskilde representasjonsskifte i utgangspunktet vere meir utfordrande for elevane å gjennomføre, enn andre (Adu-Gyamfi et al., 2012).

2.3 Perspektiv på læring

Kva legg vi i omgrepa læring og forståing? Konstruktivistiske læringsteoriar har i fleire tiår sett sterke preg på undervisninga i norsk skule. Sentralt her er Jean Piaget sine tankar om korleis den kognitive utviklinga hos barn føregår, og har vore og er framleis med på å forklare korleis norsk skule sitt syn på læring. *Den kognitive konstruktivismen* kjenneteiknast av at den ser på læring som eit samspel mellom individet og den fysiske omverden. Kunnskap er ikkje noko som finns av seg sjølv, men det er individet som strevar etter å forstå og forklare verden rundt (Imsen, 1998). Etterkvart har også Lev Vygotsky sin *sosiokulturelle* tilnærming fått påverke læringssyn verden over, med språket som det viktigaste reiskapen for læring/ kunnskap. Dei to syna på læring er svært forskjellige men saman dannar dei *sosialkonstruktivismen*, som også er den pedagogiske bakgrunn for denne studien (Imsen, 1998). Schoenfeld (1994) er ein av dei som argumenterer for eit sosialkonstruktivistisk syn på korleis vi best lærer matematikk. Han viser til at læring for ein stor del er knytt til samspel med andre menneske, noko som vanlegvis også er situasjonen for elevane i ein matematikk-klasse.

2.3.1 Kva ligg i ordet forståing?

I følgje eit konstruktivistisk læringssyn er læring ein konstruktiv og aktiv prosess der det enkelte individ byggjer sin unike form for kunnskap gjennom si personlege tolking av erfaringar. Piaget meinte at ein lærte gjennom kognitive konfliktar. Slike konfliktar kan føre til at ein forkastar tidlegare oppfatningar og endar opp med nye, på eit høgare kunnskapsnivå (Swan, 2002). Ein evaluerer, på ein logisk måte, skilnader ved ulike oppfatningar. Assimilasjon handlar om å oppta nye idear (skjema[5]) medan akkommodasjon dreier seg om modifikasjon av allereie eksisterande kognitive strukturar (skjema). Nye tankar eller idear vert altså tilpassa dei rammene som er frå før (Swan, 2002, s. 156).

[5] Omgrepet er brukt om mentale strukturar innan psykologien.

Piaget var også oppteken av utforskande læring, læring som rusta den einskilde elev til å vere kreativ og ikkje berre repetere det andre hadde gjort før (Swan, 2002, s. 156). Han meiner forståing ikkje handlar om å kunne lage noko eller å utføre ei praktisk handling, men meir om å tenkje, å forstå konsept og kunne knyte saman slike (Sierpinska, 2013). På same måte som Piaget skildrar forming av kunnskap gjennom utvikling av skjema, er også Skemp (1971) oppteken av dette. Han skriv: *«A schema has two main functions. It integrates existing knowledge, and it is a mental tool for the acquisition of new knowledge.»* (Skemp, 1971, s. 39). Vi lærer stadig nye omgrep som kan sorterast under *primære* eller *sekundære* omgrep (Eksempel: Den kjende Disney-figuren Bambi, som lærte om fuglar og sa fugl då han såg ein sommarfugl). Som lærande individ organiserer vi kunnskapen hierarkisk, slik at dei sekundære omgrepa har eit høgare abstraksjonsnivå enn dei primære. Omgrep av høgare orden kan ikkje kommuniserast til ein person gjennom definisjonar, men ved å nytte passande eksempel. Ordet møbel er meir abstrakt enn til dømes stol, bord eller kommode. Om ein liten gut ikkje er kjend med ordet møbel, vil ordet stol eller bord vere døme som knyt omgrepa saman, slik at guten kan forstå kva det handlar om. Skemp (1971, s. 23) er også oppteken av forskjellen mellom eit omgrep og namnet på dette. Der den første er ein *ide*, er namnet ein *lyd* eller eit skriftleg teikn. Skemp (1971) har to grunnprinsipp for korleis omgrep vert danna, som han først og fremst rettar mot dei som kommuniserer matematiske idear (blant anna lærarar). Det første er:

1) Concepts of a higher order than those which a person already has cannot be communicated to him by a definition, but only by arranging for him to encounter a suitable collection of examples. (Skemp, 1971, s. 32)

Bruk av eksempel er altså avgjerande. Ein definisjon held ikkje når omgrep av høgare orden skal lærast vekk. Det andre prinsippet byggjer på det første:

2) Since in mathematics these examples are almost invariably other concepts, it must first be ensured that these are already formed in the mind of the learner. (Skemp, 1971, s. 32)

Forståing blir då eit resultat av assimilasjon til eit allereie eksisterande, passande skjema (Skemp, 1971, s. 46). På grunn av denne subjektive naturen til forståing, kan ein då og så oppleve ei *subjektiv kjensle av forståing*, gjennom assimilasjon til ufullstendige skjema. Eit døme på dette er at torever kan forklarast med fysikken sine lover (elektrisk utladning, lyd- og lysbølgjer), men også slik kanskje folk flest omtalar dette fenomenet, med lyn etterfølgd av tåren og ofte regn (Sierpinska, 2013). Sierpinska (2013, s. 91) skriv at ein formar konsept gjennom bruk av eksempel, og at desse ikkje kan direkte overførast frå lærar til elev. Eleven må sjølv konstruere eller rekonstruere eksempel, men læraren kan legge til rette for situasjonar og eksempel som kan være til hjelp i prosessen med forming av skjema.

Vi gjer våre første gjettingar basert på eksempel. Etterkvart formar vi abstrakte matematiske konsept eller teoriar på definisjonar. Men, for å komme til definisjonane og for å forstå teorien, må ein starte med eksempel (Sierpinska, 2013).

Skemp (1971, s. 81) skildrar forklaring som kommunikasjon meint å hjelpe ein person til å forstå noko denne ikkje forstod tidlegare. Han påpeikar tre årsaker til at denne kommunikasjonsprosessen kan slå feil:

1. Den eine er «bruken av feil skjema», ved at ein til dømes knyt ei anna meining til eit matematisk omgrep, enn det som var tenkt. Omgrepet er altså tatt ut av konteksten. Orda funksjon, bilde og gruppe kan ha ulik tyding i kvardagsspråket enn det dei har i matematikk språket.
2. Ei anna utfordring er at avstanden mellom «den nye ideen» og allereie eksisterande skjema kan bli for stor. Derfor må læraren vere merksam på at denne ikkje går for fort fram, men bruke fleire døme, eventuelt forklaringar, for at eleven skal få «knaggar å henge stoffet på».
3. Eit siste hinder for forståing er når ny kunnskap vert presentert og eit eksisterande skjema står i vegen for assimilasjon av denne kunnskapen. Då må det allereie eksisterande skjema gjennomgå ein akkommodasjonsprosess for å modifiserast tilstrekkeleg.

Skemp (2006, s. 2) skil mellom det han kallar «*rules without a reason*» og «*understanding*» (forståing). Han definerer forståing som kunnskap ein har til å vite kva ein skal gjere og kvifor ein kan gjere dette. Det er denne første Mellin-Olsen (1984) også kallar instrumentell kunnskap. Den handlar om å lære seg ein metode (algoritme) som ein kan nytte til å løyse gitte oppgåver, utan at ein treng å vite noko meir om kvifor den fungerer. Altså «*rules without a reason*» eller prosedyrekunnskap. Dersom ein elev kunn har instrumentell forståing innanfor eit matematisk felt er det større sjanse for at misoppfatningar kan oppstå. Relasjonskunnskap inneber eit vidare syn på forståing. Men, sjølv om det bør være plass til begge typane innanfor undervisning i matematikk, påpeikar Skemp (2006) fordelane med den siste. Mellin-Olsen (1984) er også oppteken av kva måte elevane lærer matematikken på. Han skil mellom regeloppfatning og strukturoppfatning, eller «*instrumentell forståing*» og «*relasjonsforståing*». Sjølv om han nyttar andre omgrep enn Skemp (2006) kan ein lett dra parallellar mellom desse to syna på forståing. Både regeloppfatning og instrumentell forståing handlar om å læra seg ein metode å løyse oppgåvene på, utan at eleven nødvendigvis har forstått kvifor oppgåva kan løysast slik. Det blir litt slik at; *det fungerer og då må det være greitt.* Derimot, om ein elev har relasjonskunnskap eller strukturoppfatning har denne ei forståing for *kvifor* ein kan løyse ei matematikkoppgåve på den eine eller den andre måten, og ikkje berre korleis. Mellin-Olsen (1984, s.

198-199) brukar også omgrep som *«feilalgoritmar»,* og viser til at forsking ved hjelp av «*kliniske*» undersøkingar har oppdaga at elevane utviklar eigne algoritmar for løysing av oppgåver. Han skil mellom systematiske feil og tilfeldige feil elevane gjer og meiner at det er det første som er av interesse. Lærarar må prøve å fange opp systematiske feil, diagnostisere, og forsøke å rettleie elevane slik at dei får retta opp desse feila (meir om dette i kapittel 2.4).

Leinhardt et al. (1990) skildrar forklaringar som demonstrasjonar, analoge representasjonar og eksempel. Dei saknar diskusjon om korleis forklaringar bør konstruerast for å best mulig dra fordel av det elevane allereie kan og forstår. Dette er ikkje vektlagt nok innan funksjonar (matematikkdidaktikken), i følgje desse. Dei hevdar også at ei avgjerande side ved forklaringar er bruken av godt gjennomtenkte eksempel. Målet er å få fram poenget og fremje forståing utan å vere for generell. For generelle døme kan i verste fall lede til misoppfatningar (sjå kap. 2.4). Dei meiner målet med matematikkopplæringa er å utvikle omgrep hos elevane. Desse omgrepa eller oppfatningane er tileigna ferdigheitar hos elevane i eit spesifikt emne i matematikken, som det vanlegvis har vore undervist i. Omgrepa omtalast også som meiningsfulle idear eller tankar som elevane utviklar og som fungerer som kraftfulle arbeidshestar i strevet etter stadig djupare forståing innan eit område av matematikken. Av natur er oppfatningane heile vegen i ein overgangsfase mot stadig nyare og djupare kunnskap. Det er også derfor dei til tider kan synast sårbare, situasjonsbundne eller verte misbrukte (Leinhardt et al., 1990).

Duval (2006) viser til ein kognitiv konflikt som oppstår når elevane skal ta i bruk semiotiske representasjonar, men utan å blande desse med dei matematiske objekta dei skal bruke. Han stiller spørsmål ved korleis elevane skal kunne skilje det gitte, matematiske objektet frå den semiotiske representasjonen som er brukt, når dei ikkje kan få tilgang til det matematiske objektet utan gjennom den semiotiske representasjonen. Enklare blir det ikkje av at matematikk er faget med flest representasjonssystem, både språklege og matematiske (Duval, 2006). Duval (2006) hevdar matematisk aktivitet eller handling handlar om å ta i bruk registeret til fleire representasjonar (minst to) samtidig eller gå i frå eit register til eit anna. Forståing av funksjonskonseptet inneber derfor ein synergi mellom to eller fleire representasjonsregister på same tid, sjølv om det matematisk held med ei representasjonsform. Dette er med på å forklare kvifor det å bygge tilsynelatande enkel matematisk kunnskap og forståing, er kognitivt komplekst heilt frå starten av (Duval, 2006). Han skriv: «*the root of the troubles that many students have with mathematical thinking lies in the mathematical specificity and the cognitive complexity of conversion and changing representation.» (Duval, 2006, s. 127).*

I følge forskingslitteraturen handlar altså forståing om meir enn det å kunne ein metode for å løyse ei oppgåve (instrumentell forståing). Det dreier seg om å bruke matematiske omgrep i kjende og nye samanhengar, i ulike representasjonar og å sjå heilskapen (operasjonell- eller relasjonsforståing).

2.4 Matematikkvanskar

2.4.1 Kva er ein misoppfatning og kva er ein feil?

Brekke (2002) skil mellom det vi reknar som feil og såkalla misoppfatningar. Ein feil er ofte tilfeldig og kjem kan hende av at ein er uoppmerksam eller ikkje les oppgåva godt nok. Misoppfatningar forklarer han med «*ufullstendige tanker knyttet til et begrep*» (Brekke, 2002, s. 10). I følgje Brekke er ikkje slike tankar tilfeldige men kjem av ein bestemt måte å tenkje på. Dette samsvarar med annan faglitteratur (Botten, 2011; Mellin-Olsen, 1984). Ein skil altså mellom tilfeldige og systematiske feil.

Leinhardt et al. (1990) peikar, i sin gjennomgang av forsking og litteratur på funksjonar i skulen, på fleire punkt som kjenneteiknar misoppfatningar. Ein misoppfatning kan utvikla seg som eit resultat av generalisering av ein, i utgangspunktet, rett oppfatning. Dei er ikkje tilfeldige, men vil gjenta seg over tid eller være svært tydelege. Mangelfull opplæring vil kunne auke sjansen for misoppfatningar. Men, det kan også vere kvardagskunnskap som blandar seg inn og skapar konflikt med dei eksisterande matematikk-kunnskapane, gjennom logiske intuisjonar. Eit godt døme på dette er at einskilde elevar ser på ein graf som eit bilde av ein situasjon (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt et al., 1990).

Nygaard og Zernichow (2006) samanliknar misoppfatningar med eit tett vassrøyr. Proppen eller proppane som stengjer for matematikkforståinga må bort for at elevane skal henge med i vidare undervisning og få ei heilskapleg forståing. Dette kan også knytast til Sierpinska (2005) sine teoriar om det å forstå matematikk. Tidlegare kunnskap er ofte ufullstendig og nyare kunnskap kjem i konflikt med eksisterande (Sierpinska, 2005). Misoppfatningar dreier seg om at elevane har ufullstendige tankar knytt til eit omgrep. Her kan ein dra parallellar til Brekke (2002, s. 10) som hevdar at misoppfatningar ofte er eit resultat av for stor grad av generalisering av tidlegare kunnskap. Kunnskap som blir brukt på nye områder der denne ikkje har same gyldigheit.

2.4.2 Diagnostisk undervisning - korleis oppdage feil og misoppfatningar?

På byrjinga av 80 talet var det aukande merksemd på matematikkvanskar blant elevar. Kartlegging og koding av slike vanskar og forsøk på å systematisera og diagnostisera «feil» var utbredt (Swan, 2002, s. 151). Det var vanleg å bruke ord som «feil», «misoppfatningar», «diagnostisering» og «reseptar», ord meir kjend frå helsevesenet. Ein leita etter underliggjande misoppfatningar som forklaring på feila elevane gjorde i matematikk. Med medisinske metaforar og analogiar til helsevesenet var «slagordet»; *førebyggjande undervisning framfor kur eller botemiddel*. Ein skulle finne betre måtar å undervise på slik at feil og misoppfatningar ikkje oppstår og største delen av ansvaret vart lagt på læraren. Swan (2002) meiner denne «medisinske tilnærminga» av matematikkundervisninga er alt for enkel. «*Concepts are essentially organic; that is, they are an individual`s attempt to make sense of the world and as such they constantly change and evolve.»* (Swan, 2002, s. 152). Einaste måten å unngå at det dannast fastlåste misoppfatningar er gjennom diskusjon og samhandling. Eit problem som vert delt med andre innanfor ein matematisk diskurs kan i neste omgang være eit løyst problem. Swan (2002, s. 150) hevdar misoppfatningar og feil heller må ønskast velkommen og gjerast tydelege. Ved å arbeide med og diskutere det som er vanskeleg, kan ein leggje grunnlag for varig kunnskap/forståing. Han beskriv det sjølv slik: «*Frequently, a 'misconception' is not wrong thinking but is a concept in embryo or a local generalisation that the pupil has made. It may in fact be a natural stage of conceptual development»* (Swan, 2002, s. 150). Han viser til eit eksempel med multiplikasjon. Mange har oppfatninga at «multiplikasjon gir større tal». Dette stemmer for naturlige tal, men kan ikkje brukast på rasjonale tal. Om ein lærar oppdagar dette hos ein elev kan denne få sjansen til å rettleie eleven til auka forståing. Og det er nettopp gjennom samtale eller intervju med eleven at ein best kan oppdage misoppfatningar (Botten, 2011; Hinna et al., 2011). Botten (2011) deler diagnostisk undervisning inn i fire fasar:

1. Identifisering av misoppfatningar hos elevane.
2. Legge til rette undervisning gjennom å skape kognitive konfliktar som vil framheve misoppfatningar.
3. Løyse dei kognitive konfliktane gjennom diskusjonar og refleksjonar.
4. Bruke utvida eller nye omgrep i andre samanhengar.

Den første fasen er den «destruktive» delen, der ein startar med eit vanskeleg problem, for å avdekke mangelfull forståing. Ein ynskjer å vise at gamle idear ikkje held mål. Deretter kjem ein løysingsorientert fase eller konstruktive fase som fokuserer på diskusjonar og refleksjonar om dei nye eller omforma ideane (Botten, 2011). Leinhardt et al. (1990) understrekar også kor viktig det er at undervisning tar utgangspunkt i dei ideane og erfaringane elevane allereie har knytt til eit bestemt omgrep. Men, det kan vere ulike oppfatningar om korleis oppgåvene skal utformast for å avdekke misoppfatningar hos elevane. I følgje Hinna et al. (2011) skal ei diagnostisk oppgåve utformast basert på følgjande to kriterier:

1. Elevar med den aktuelle misoppfatninga skal ikkje kunne få rett svar.

2. Det skal, i størst mulig grad, vere mulig å sjå frå eit feil svar, om feilen skyldast denne misoppfatninga eller andre grunnar.

2.4.3 Vanlege misoppfatningar og feil knytt til funksjonar

Clement (1985) viser til forsking, av blant anna Janvier (1981) som syner to vanlege misoppfatningar hos elevar knytt til oppgåver som handlar om grafar. Den eine er at dei ser på grafen som eit bilde av ein situasjon og har vanskar med å gå mellom det konkrete (situasjon) og det abstrakte (graf). Den andre er at elevane blandar stigningstal og høgd. Det kan til dømes være ved tolking av ein graf som viser posisjon (meter) som funksjon av tida (sekund). Dette støttast av blant anna Brekke (2002) og Sierpinska (2005) som har funne desse misoppfatningane om funksjonar hos elevane:

- Dei ser på grafen som eit bilde eller kart eller kart av ein situasjon.
- Dei har problem med å forholda seg til to variablar samtidig.
- Dei har eit lineært bilde av funksjonar, alle linjer skal avbildast som rette linjer.
- Dei teiknar punkt i staden for linje.
- Dei trur at alle lineære grafar går gjennom origo.

Mevarech og Kramarsky (1997) skil mellom *elevoppfatningar* og *alternative oppfatningar*. Skilnaden på desse to er at den siste gjeld meir gjentakande feil eller systematiske feil. Elevoppfatningar er i samsvar med det som *skal* lærast i følge læreplanen, medan *alternative oppfatningar* kan samanliknast med misoppfatningar. I denne oppgåva vel eg å betrakte alternative oppfatningar som misoppfatningar. Mevarech og Kramarsky (1997) viser til fleire undersøkingar som avslører elevane sine vanskar med å gå frå ein representasjon til ein annan. Dette gjeld teikning av grafar, tolking av grafar og bruk av grafar i andre fag og samanhengar, som i til dømes fysikkfaget. Dei skildrar vanlege misoppfatningar som at elevane:

- blandar stigningstal og høgd.
- blandar intervall og punkt.
- ser på grafen som eit bilde eller eit kart.
- oppfattar grafane som ein samansetning av åtskilde punkt.

At elevane les grafane punkt for punkt kan ha samanheng med deira vanskar med å forstå dei reelle tala sin kontinuitet (Mevarech & Kramarsky, 1997, s. 233). Sjølv fann dei desse kategoriane i sin studie:

- At elevane konstruerte ein graf som eit enkelt punkt.
- At elevane teikna fleire grafar, der kvar graf representerte kvar sin faktor frå relevant informasjon.

- At elevane bevarte forma på ein veksande funksjon uansett vilkår (informasjon).

Desse forskarane nemner fleire mulige årsaker til misoppfatningane som kjem fram i studien deira. Det kan vere manglar som går på korleis informasjon vert handtert, negative overføringar *(*sjå lenger nede*)*, vanskar med å sjå for seg lineær avhengighet mellom to varierande størrelsar, dei blandar *prosess og produkt* og det kan være misoppfatningar knytt til språk eller feil bruk av språk jamfør det Skemp (1971) skriv om omgrepsdanning (sjå 2.3.1). Negative overføringar kan samanliknast med misoppfatningar, og handlar om at elevane har lang erfaring, eller har arbeidd grundig med ein metode, som er rett å bruke i ein samanheng, men ikkje i ein annan (Mevarech & Kramarsky, 1997).

Tidlegare forsking innan kognitiv psykologi viser at elevar har problem med å gå frå eit punkt til å sjå ein større samanheng over eit intervall, for eksempel ein graf (Bell & Janvier, 1981). Dette kan forklare at elevane teiknar ein graf som eit punkt. Dei slit med å gå frå det *enkle* til det meir *abstrakte,* frå å sjå på eit punkt til å sjå på trendar i einskilde intervall, eller grafen som heilskap. Det handlar om å trekke fokus bort frå eit einskild punkt til å sjå på korleis ein graf veks eller minkar i eit intervall. Det er dette ein del forskarar omtalar som lokale (punkt) og globale (intervall eller deler av grafen) eigenskapar (Bell & Janvier, 1981; Duval, 2006). Men, Mevarech og Kramarsky (1997) hevdar at det å teikne ein graf som eit punkt også kan forklarast utifrå negative overføringar. Det at elevane er vane med å bruke tabellar og koordinatpar til å teikne grafar, kan føre til at dei til dømes vil teikne eit einskild punkt eller ei søyle (i eit søylediagram). Om dei i lang tid har vorte eksponert for funksjonar med positiv stigning kan dei generalisere dette til å gjelde alle funksjonar. Dei kan bruke denne tilnærminga eller «*overgeneraliseringa*», sjølv om dei har forstått oppgåva eller den nye situasjonen rett. Resultatet er mange kreative måtar å bevare ei positiv stigning trass i at informasjon og omstende rundt seier noko anna. Dei elevane som blandar prosess og produkt betraktar kunn den siste delen i ein prosess som viktig og som det *rette* svaret. Identifisering av misoppfatningar (og *alternative oppfatningar*) kan ha både ein teoretisk og ein praktisk betyding. Teoretisk sett kan det gi ei auka forståing for læringsprosessane. Praktisk sett kan det legge til rette for utforminga av læringsmiljø der studenten si allereie eksisterande kunnskap vil tene som eit fundament for vidare læring (Mevarech & Kramarsky, 1997).

Rogers (2011) peikar også på viktigheita av at lærarar bind saman dei uformelle oppfatningane elevane har om funksjonar frå før og dei førestillingane lærarane skal undervise i. Det handlar om å la elevane få relatere sine tidlegare oppfatningar og kunnskap opp mot det som skal gjennomgåast. Denne «kartlegginga» vil, i følge Rogers, gi elevane muligheit til å kjenne att og bruke alle dei ulike representasjonane av funksjonar. Noko som er nødvendig for å få ei heilskapleg forståing.

Knuth (2000) viser i sin studie at elevar har ein tendens til å føretrekke algebraiske representasjonar (likningar) og at dei har vanskar med å gå frå ein graf til eit algebraisk uttrykk (likning). Han peikar ut matematikkundervisninga som hovudkjelde for desse vanskane. Elevane arbeider mest med representasjonar på algebraisk form og nyttar grafisk representasjon beste fall som ei støtte til det første. Einsidig fokus på ei representasjonsform framfor ei anna medverkar kanskje til mestring av rutineoppgåver (instrumentell forståing) men er ikkje vegen å gå om målet er at elevane skal få ein robust og fleksibel forståing (operasjonell forståing) for funksjonar (Knuth, 2000).

Ei anna kjelde til misoppfatningar kan tenkjast kjem frå den utbreidde bruken av proporsjonalitet. Proporsjonale samanhengar og proporsjonalitet har ein sentral plass i matematikkundervisning over heile verda. Men, denne sterke posisjonen har også ei bakside i følge Bock, Neyens og Dooren (2016). Dei syner til fleir systematiske, empiriske undersøkingar på området, som viser at ein del elevar brukar proporsjonalitet i «alle» samanhengar. Årsakene til denne «misbruken» deler dei i tre grupper:

1. Intuitiv, heuristisk natur (erfaring).
2. Elevane sine matematikkerfaringar frå klasserommet og deira tankar om matematisk modellering og problemløysing.
3. Faktorar som gjeld matematiske særeigenskapar knytt til situasjonen kor den proporsjonale feilen førekjem.

Bock et al. (2016) vektlegg den siste gruppa og relaterer den til elevar si mangel på ein djupare forståing for den matematiske funksjonen eller modellen som kjenneteiknar ein gitt situasjon. I sin studie skildrar dei elevar som i for stor grad generaliserer bruken av både proporsjonalitet og linearitet. Årsakene er fleire i følge desse forskarane. Dei nemner blant anna at elevar brukar den distributive lova[6] for addisjon og multiplikasjon feil, ved at dei adderer og multipliserer tal inn i ikkje-proporsjonale funksjonar. Bock et al. (2016) gjennomførte to ulike undersøkelsar om elevane si konseptuelle forståing for typiske funksjonar eller modellar (proporsjonale-, lineære-, omvendt proporsjonale- og konstantfunksjonar), deira representasjonar og i kor stor grad den gitte representasjonsforma verkar inn på overgeneralisering eller feil bruk av proporsjonalitet. I den første studien undersøkte dei kor flinke elevar er til å knyte saman beskrivelsar av realistiske situasjonar til ulike representasjonar (situasjon til graf, likning og tabell) av dei nemnde funksjonane. Dei fann at elevane blanda proporsjonale og ikkje-proporsjonale funksjonar, men at det hadde veldig mykje å bety for resultatet kva representasjonsform dei vart presentert for. Den neste studien deira viste mykje av dei same

[6] Distributive lov $a(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$

funna. Dei undersøkte i kor stor grad elevane klarte å sjå samanhengen mellom ein proporsjonal, lineær og omvendt proporsjonal funksjon i form av graf, likning eller tabell og ytre representasjonsformer (situasjon) av dei same funksjonane.

Også Leinhardt et al. (1990, s. 33) peikar på at det at ein del elevar har ein tendens til å velje lineære funksjonar framfor andre, i samband med teikning av grafar. Sjølv om det ikkje er ein lineær funksjon, «tilpassar» elevane grafen slik at det blir ei rett linje. Rønningstad (2009) har i si masteroppgåve funn som støttar opp om resultatet frå fleire av dei studiane som er presentert i denne oppgåva, nemlig at elevar strevar med representasjonsskifte i funksjonar. Ho påpeikar fleire av dei same misoppfatningane som er presentert over (Bock et al., 2016; Brekke, 2002; Knuth, 2000; Mevarech & Kramarsky, 1997; Sierpinska, 2013). Også doktoravhandlinga til Postelnicu (2011) frå USA, som blant anna handlar om elevar i 8.-10. trinn sine vanskar med linearitet og lineære funksjonar, peikar på fleire av dei same utfordringane. Postelnicu (2011) viser til forsking som antyder at vedvarande vanskar (systematiske feil eller misoppfatningar) i arbeid med funksjonar kan skyldast at «pensum» vert presentert med dei same emna, på same måten over fleire år. Det hindrar nye innfallsvinklar som kan hjelpe til med å bryte systematiske feilalgoritmar, gjennom kognitive konfliktar (Postelnicu, 2011).

Tidlegare forsking har vist at elevar har ein veldig avgrensa oppfatninga av kva som er ein funksjon og kva som ikkje er det (Leinhardt et al., 1990, s. 30-31). I frå oppfatningar om at ein funksjon må ha ei viss form, lineær, symmetrisk eller kunn være strengt aukande eller minkande, har desse etterkvart endra seg til å være meir i tråd med den matematiske definisjonen (2.1.1). Men sjølv om elevar kjenner den formelle definisjonen klarar dei ikkje ta den i bruk når dei skal avgjere om ein graf er ein funksjon eller ikkje. Dette heng saman med kva erfaringar dei har med ulike typar funksjonar. Ofte arbeider ein med funksjonar der det er lett å kjenne att mønster frå tidlegare eksempel. Verre blir det då om grafane ein møter skil seg veldig ut og ser «kunstige» ut (Leinhardt et al., 1990).

3 Metode

I dette kapittelet vil eg først presentere mitt val av metode og forskingsdesign (3.1). Deretter vil eg gjere greie for korleis eg har gått fram i arbeidet med oppgåvene til den skriftlege prøven (3.2) og utforming av intervjuet (3.3). Eg vil også beskrive utval, gjennomføring av datainnsamling (3.4) og koding og analyse av data (3.5). Til slutt vil eg diskutere truverdigheten og gyldigheten i undersøkinga og forskingsetiske omsyn (3.6).

3.1 Metodeval

Ein må som forskar vere medviten på kva metode som best mogleg svarar på den problemstillinga ein har valt (Sollid, 2013). Det er nok fleire måtar som kan gi svar på denne. Eg har valt å bruke ein sekvensiell, forklarande metodetriangulering, som er ein variant av «mixed methods» (Creswell, 2015; Danielsen, 2013, s. 139; Kvale & Brinkmann, 2015, s. 151). Ein slik metode er nyttig om ein ynskjer å få statistiske data, men samstundes meir djupnekunnskap om det ein vil undersøkje. Det er også ulike måtar å komponere ein slik metode. Eg har valt å først gjennomføre ei *kvantitativ* undersøking, ein skriftleg *prøve* med fleire diagnostiske oppgåver. Dette blir ei tverrsnittsundersøking for å få ei viss oversikt over kva elevane kan om funksjonar med og utan bruk av Geogebra. Eit mål er å få kartlagt eventuelle feil og misoppfatningar. Det statistiske datamateriale frå testen dannar så grunnlaget for den etterfølgjande *kvalitative* metoden, med intervju. Intervjua skal vere med å belyse og forklare interessante funn frå den skriftlege prøven. Men, intervjua skal også opne opp for meir generelle tankar elevane har om bruk av Geogebra. Slik får ein ei oversikt over kva utfordringar elevane har når dei arbeider med representasjonsskifte i funksjonar, kva feil og misoppfatningar som finst og kor utbreidde dei er. I følgje Botten (2011) er samtalar og intervju med elevar svært viktige reiskap for å avsløre eventuelle misoppfatningar.

3.2 Kvantitativ metode

Under arbeidet med den skriftlege testen og oppgåvene i den, har eg stilt meg sjølv spørsmåla:

- Kan eg finne passande, gode oppgåver som har vore brukt i liknande undersøkingar?
- Viss ikkje, korleis skal eg sjølv formulere oppgåver på best mogleg måte?
- Kva testar oppgåva?
- Kvifor skal den vere med?
- Korleis passar oppgåvene i testen med det som eg ynskjer å undersøkje?
- Får eg svar som seier meg noko om det eg ville finne ut?

- Er dette ei diagnostisk oppgåve og må den være diagnostisk?

Oppgåvene på prøven er forma med tanke på å kartleggje elevane sine kunnskapar og utfordringar i arbeid med representasjonsskifte i funksjonar og finne eventuelle feil og misoppfatningar (Brekke, 2002). Oppgåvene er forma slik at det ikkje skal vere tvil om kva ein spør om og samtidig minst mogleg skriving. Dette for at det skal vere ei tilsynelatande overkommeleg arbeidsmengd for elevane. Blir det for omfattande vil fleire elevar kvi seg med å ta fatt på prøven eller dei vil gi seg undervegs. I fleire av oppgåvene må elevane likevel forklare og vise korleis dei tenkjer. Oppgåvene er delt inn i ulike kategoriar, basert på fleire av representasjonsskifta i Janvier (1987c) sin modell (Tabell 2.2.1).

For å best mogleg svare på forskingsspørsmålet har eg designa ein todelt prøve. Første del er utan Geogebra, med kalkulator og skrivesaker som hjelpemiddel. Del to er med Geogebra, for å sjå om dette digitale verktøyet viser «noko nytt», samanlikna med svara frå del ein. Fordeling av oppgåver er omlag «femti-femti». Ei oversikt over oppgåvene, kva dei testar og kor dei er henta frå er vist i tabell 3.2.1 og 3.2.2 nedanfor.

Oppgåve	Kva oppgåva testar	Kvar oppgåva kjem frå
1	Frå likning til graf, lineære funksjonar. Attkjenning av type funksjon. Teikne graf.	Ide frå Postelnicu (2011).
2	Frå likning til graf og graf til likning (polynomfunksjonar). Attkjenning av lineære, 2. grad og 3. grads-funksjonar	Oppgåve 8 frå eksamen 1P, hausten 2015, del 1. Modifisert ved å legge til to tredjegradsfunksjonar.
3	Frå tabell (to punkt) til graf (3a). Frå graf til likning (3b) eventuelt frå tabell til likning (3b). Frå graf til tabell (tolking av graf) (3c og 3d). Tolking av stigningstal (3e).	Sjølvkonstruert.
4	Frå graf til tabell (Frå situasjon til tabell).	Sjølvkonstruert. Ide frå fysikk.
5	Frå situasjon til graf. Tolke ein situasjon med bilde og finne grafen som passar til situasjonen.	(Rønningstad, 2009), KIM prosjektet.
6	Frå likning til graf, via tabell (6a). Ein andregradsfunksjon. Definisjonen av ein funksjon (6b)	Sjølvkonstruert.

Tabell 3.2.1 Oversikt over oppgåver del 1

Oppgåve	Kva oppgåva testar	Kvar oppgåva kjem frå
G1	Frå tabell til graf (G1a). Lineær funksjon. Frå graf til likning (G1b). Graf til tabell (G1c og G1d). Oppgåva handlar om å teikne grafen, finne likninga og etterpå lese av x- og y-verdiar.	Sjølvkonstruert.
G2	Frå likning til graf (G2a). Teikning av lineære funksjonar. Stigningstal (G2b) og konstantledd (G2c).	Sjølvkonstruert.
G3	Frå likning til graf (G3a). Finn y når x er kjend (Frå graf til tabell) (G3b). Definisjonen av ein funksjon (G3c).	Sjølvkonstruert.
G4	Frå likning til graf (G4a). Tolking av graf. Frå graf til tabell (G4b, G4c og G4d). Finne toppunkt til funksjonen. Andregradsfunksjon med definisjonsmengd.	Idé frå ein kapittelprøve om funksjonar, 2P, Aschehoug.
G5	Frå likning til graf (G5a). Attkjenning av graf (G5b).	Sjølvkonstruert.

Tabell 3.2.2 Oversikt over oppgåver del 2.

Eg har så godt som råd forsøkt å velje oppgåvene slik at del ein og to testar mykje av den same kunnskapen. Dette for få å lettare kunne samanlikne svara i etterkant. 1P og 1T har ulike kompetansemål og eg valte å forme spørsmåla slik at nivået på oppgåvene er tilpassa 1P (utanom dei to oppgåvene som handlar om kva som definerer ein funksjon). Dette vil naturleg nok verke inn på datainnsamlinga, men utan at det skal bety noko for det eg forskar på. Eg er ikkje ute etter å sjå på skilnader mellom elevar i 1P og 1T, sjølv om eg også vil samanlikne resultata frå desse gruppene.

Det finst mykje litteratur som handlar om funksjonar og ein god del er også om misoppfatningar. Likevel var det vanskeleg å finne faglitteratur og oppgåver knytt til digitale hjelpemiddel og funksjonar. I søk etter passande litteratur og oppgåver til prøven, brukte eg ulike nettbaserte databaser som Oria, Eric, MathEduc og Google Scholar. Men, tidlegare eksamenssett i matematikk, og litteraturlister frå relevante masteroppgåver og doktorgradsavhandlingar har også vore til god hjelp. Dette skriv Danielsen (2013, s. 145) om spørsmål til ei kvantitativ undersøking:

«*Det gjelder å formulere målbare indikatorer som gjenspeiler definisjonen av begrepene. Hvor godt man lykkes med dette, er noe av det viktigste i en vitenskapelig undersøkelse, og noe av det vanskeligste. Det kan derfor være en stor fordel å bruke spørsmål som andre forskere har prøvd ut.*»

Trass i at det kan vere ein styrke for både reliabilitet og validitet å bruke andre velprøvde oppgåver var det likevel naudsynt å tenkje ut ein del oppgåver på eigehand, ettersom eg fann få oppgåver knytt til bruk av Geogebra i forskingslitteraturen.

3.3 Kvalitativ metode

Medan den skriftlege prøven gir ei oversikt over elevane sine kunnskapar om funksjonar, er hensikta med intervjua å få ei innsikt i korleis elevane løyser oppgåvene og kva tankar dei har i denne prosessen. Einskilde forskarar går også så langt som å hevde at intervju er den einaste og sikraste måten å diagnostisere på, om ein ynskjer å avdekke misoppfatningar (Botten, 2011).

Elevane vart intervjua ein og ein, der eg for det meste stilte konkrete spørsmål til elevane med utgangspunkt i svara frå den skriftlege prøven. For å ha ein viss struktur på intervjua laga eg også ein intervjuguide (sjå vedlegg 2), med både opne og lukka spørsmål (basert på svara i prøven). Målet med ein slik guide var å auke kvaliteten på intervjua (Sollid, 2013, s. 128-130). Intervjuguiden gav ei oversikt over kva eg ynskja å snakke med intervjupersonane om og fungerte som ei «rettesnor». Om det var ein av dei eg intervjua som ikkje hugsa eller klarte å forklare kva dei hadde tenkt om ei oppgåve dei hadde gjort, fekk dei ei liknande oppgåve under intervjuet. På den måten kunne dei på ny få vise og forklare korleis dei ville løyse denne.

«Lukka» spørsmåla er med å halde intervjuet i gong og samtidig *sikre svar*. Svar som lettare kan samanliknast i ein analyse i etterkant. Slike leiande og konkrete spørsmål er også med på å skape tryggleik i intervjusituasjonen (Sollid, 2013, s. 128), og vert i følgje Kvale og Brinkmann (2015, s. 201) for lite brukt i forskingsintervju. Men, «opne» spørsmål gir eleven i større grad muligheit til sjølv å få utdjupe korleis han går fram for å løyse ei oppgåve (eller anna). Målet var å balansere mellom desse ytterpunkta, med elevane sine svar som utgangspunkt for intervjua (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 187-189). Heilt til slutt i intervjuet opna eg for kva tankar dei hadde om bruk av Geogebra i matematikkundervisninga om funksjonar. Dette for å få belyst eventuelt andre sider av problemstillinga enn det dei fekk vist på prøven. Intervjua varte mellom 30 og 40 minuttar.

For å få ei mest mulig heilskapleg forståing av intervjupersonane sin tankeprosess, transkriberte eg intervjua sjølv. Det same gjeld for kodinga og kategoriseringa av transkripsjonane. Slik fekk eg som forskar kontroll over dette viktige arbeidet, sjølv om det då kan stillast spørsmål ved reliabilitet til transkripsjonane. For å gjere nødvendige avgrensingar la eg ikkje vekt på dei oppgåvene der eleven ikkje hadde svart.

3.4 Gjennomføring – innsamling av data

3.4.1 Pilot

For å få mest mulig ut av den skriftlege prøven gjennomførte eg ein pilottest på to klassar med elevar i 2P (avsluttande matematikk, studiespesialiserande på vg2) hausten 2016. Den eine klassen var min eigen. Om lag 50 elevar gjennomførte testen. Sjølv om eg oppmoda elevane til å gjere så godt dei kunne og eg var tydeleg på at resultata ikkje skulle brukast til vurdering i faget, var det ikkje alle som viste like stor interesse. Men, mange elevar følgde oppmodinga og ytte god innsats. Noko som bidrog til at piloten vart svært nyttig. Alle svara frå testen vart gjennomgått og resultata systematisert i eit rekneark slik: To poeng for rett svar, eitt poeng for delvis rett og null poeng for feil eller ikkje svar. Spor av misoppfatningar eller andre interessante svar og forklaringar, la eg inn som kommentarar i reknearket.

Resultatet viste at ein god del elevar strevar med å forstå funksjonar. Dette kom særleg fram på den delen som var utan Geogebra. Det var også fleire teikn til misoppfatningar i datamaterialet. Men, den delen som var med Geogebra gav ikkje like tydelege resultat og eg fann ut at den måtte finpussast.

Konsekvensen vart at einskilde oppgåver vart tatt bort. Dette var oppgåver som ikkje gav noko, sett ut frå problemstillinga, eller det var allereie fleire liknande oppgåver. Målet var å ha «passeleg» med arbeid til 60 minuttar og då var det nødvendig å korte ned på omfanget. Før den endelege prøven la eg også til eit par oppgåver (oppgåve 6 i del 1 og oppgåve G5 på del 2).

Sidan målet med ein pilot er å styrke den endelege datainnsamlinga, intervjua eg også to elevar for å prøve ut intervjuspørsmåla og den praktiske gjennomføringa (Kvale & Brinkmann, 2015). Intervjuobjekta peika eg ut blant mine eigne elevar, kor kriteriet mitt var at dei hadde svara på både del ein og to, og at det var frivillig. Då eg lytta til intervjua i etterkant av opptaka, merka eg meg at eg var stundom litt for ivrig til å snakke sjølv. Eg var tidvis snar med eit leiande oppfølgingsspørsmål. Kan hende var eg for oppteken av å få mest mogleg ut av tida vi hadde til rådigheit. Denne erfaringa tok eg med meg til intervjua i den endelege datainnsamlinga.

3.4.2 Endeleg datainnsamling

Medan piloten vart gjennomført i desember 2016, vart den endelege datainnsamlinga halden i juni 2017, etter skriftleg eksamen i matematikk. Tidspunktet var fredag 2. juni 10:50-12:00. Val av tidspunkt for gjennomføring av testen vart bevisst lagt til slutten av skuleåret. Sjølv om mange elevar har «vore borti» Geogebra på ungdomsskulen, veit eg av erfaring at det er veldig varierande kor mykje tid den enkelte skule og elev har brukt programmet. Då er det større sjanse for å få eit godt datagrunnlag mot slutten av skuleåret, etter at elevane har fått meir erfaring i arbeid med både Geogebra og funksjonar.

Mitt ønske var å få gjennomført datainnsamlinga før eksamenstida. Dette fordi eg då truleg kunne fått endå større deltaking. Elevane verka vere meir «på» og innstilte på å arbeide med matematikk før eksamen, enn etter. Men, sidan det var ein del elevar som kom opp i skriftleg eksamen i matematikk, måtte all tid gå til generell førebuing og det var vanskeleg å samle alle til ein «ekstra» prøve. Etter eksamen var det betre tid til gjennomføring, men deltakinga på testen viser at då var nok ein del elevar litt skuletrøtte og meir opptekne av at det nærma seg sommarferie. Men, sett frå ei anna side så hadde mange elevar fått repetert og arbeidd mykje med Geogebra og funksjonar både til tentamen og eksamen. Slik sett bør ein kunne forvente at resultatet frå dei som deltok i testen har eit høgare nivå på slutten av eit skuleår, og etter eksamen og tentamen, enn på byrjinga.

Gjennomføringa av den skriftleg testen vart gjort klassevis av dei lærarane som elevane sjølv hadde i matematikk. Elevane vart sterkt oppmoda om å svare så godt dei kunne og bruke tida som var til rådigheit. Samtidig vart det poengtert at resultatet av denne testen ikkje skulle være med i noko form for vurdering av elevane og at dei ikkje trengte å øve. Eg gjekk sjølv rundt i klassane, veka før testen og informerte om prosjektet, om korleis data skulle behandlast og om informert samtykke (sjå 3.6.3). Det skulle ikkje vere noko risiko for å elevane å delta i forskingsprosjektet. Dei som ikkje ville delta måtte vere til stades i timen og arbeide med matematikk. For om mulig å oppnå enno større deltaking, vart det også utlyst ein premie på 300 kr til ein av dei deltakande på den skriftlege testen. Vinnaren vart trekt ut tilfeldig i etterkant, før skuleslutt. Men, ikkje overraskande, var det ikkje alle som ynskte å delta eller hadde muligheit. Den eine klassen måtte gjennomføre ein fagdag i musikk, og då vart den prioritert.

Det viste seg at ein del elevar fekk problem med tida under prøven. Dette gjekk nok særleg ut over del to, med Geogebra, sjølv om det var planlagt like lang tid på kvar av dei. Dei elevane dette gjaldt fekk sitte ti minuttar lenger. Her var det naturleg å velje ei meir grundig datainnsamling framfor planlagd tid på prøven. Det kan vere ulike årsaker til knapp tid på oppgåvene, men det skyldast truleg for mange oppgåver.

Av 86 respondentar er det to svar på del 2 som ikkje kan knytast til ein respondent i del 1, og heile 23 som ikkje leverte svar på Geogebra-delen. Dei fleste av desse hadde ikkje pc med eller dei fekk tekniske problem undervegs i prøva. Dette vil jo påverke det statistiske samanlikningsgrunnlaget mellom del 1 og del 2 på prøven, og må takast omsyn til i analysen og drøftinga av resultat. Den eine av respondentane der eg ikkje finn del 1, har svart alt rett på del 2. Noko som eg antar også ville gitt eit godt resultat i del 1. Den andre har derimot berre svart på eit spørsmål i del 2 og kan nok knytast til ein av dei tre anonyme svara i del 1, som alle har under 30 % rett på denne delen. For å få mest mogleg ut av intervjua var målet å gå gjennom alle svara i den skriftlege delen så snart som mogleg. Dette for å legge til rette for at intervjuobjekta skulle hugse mest mogleg av det dei hadde svara. Eg la inn resultata i eit rekneark, etter kodar (sjå 3.5.1) for å systematisere og dokumentere kva respondentane hadde svara. I tillegg la eg inn kommentarar, der elevane hadde forklart eller vist kva dei hadde gjort på ein spesielt interessant måte. Dette gjaldt svar som var delvis rette eller ikkje rette. I løpet av ei veke var alle svara behandla og eg kunne begynne å leite fram kandidatar til intervju. Dette var eit krevjande arbeid, men eg følgde desse prinsippa:

1. Elevane måtte ha samtykka i å bli intervjua.
2. Eg unngjekk elevar frå min eigen klasse (sjå forklaring nedanfor).
3. Dei måtte ha svart på både del ein og del to (utan og med Geogebra).
4. Det måtte vere teikn til misoppfatningar i svara, eller tydelege feil som gjekk igjen.
5. Dei måtte intervjuast før sommarferien, medan dei enno huska litt frå testen.

6. Dei måtte svare bekreftande då eg kontakta dei i etterkant av prøven, med spørsmål om intervju.

Slik det går fram av punkt 2. unngjekk eg elevar frå min eigen 1P klasse, av omsyn til elevane som skulle intervjuast. Dette handlar om maktforholdet i ein intervjusituasjon og korleis det kan påverke intervjuet og seinare tolking av data (Sollid, 2013, s. 136). Sjølv om eg valde intervjuobjekt blant dei som hadde svart på begge delane (sjå punkt 3.), vil ikkje det sei at funn som kom frå dei som berre hadde svart på eine delen vart oversett i analyse og drøfting av kvantitativ del. Målet var å få intervjue tre til fem elevar, som eg håpa kunne gi meg ny kunnskap utover det dei skriftlege delprøvane viste. Til slutt sat eg igjen med tre elevar som ville la seg intervjue. Desse vart intervjua innan fjorten dagar etter den skriftlege prøven og intervjua vart gjennomført på ledige klasserom, utan forstyrring frå andre. Det var også to andre elevar eg kontakta, men dei var ikkje lenger interesserte, trass i at dei hadde kryssa av for intervju. Etter det første intervjuet starta eg å transkribere.

3.4.3 Utval

Den skriftlege prøven vart gjennomført i alle 1P og 1T klassane ved skulen vår. Målet var at flest mogleg av førsteklassingane skulle være med i undersøkinga. Av dei 150 aktuelle elevane på vg1 var det til slutt 86 respondentar frå 1P og 1T som deltok. Vi snakkar her om eit strategisk utval og det er såleis ikkje representativt for alle 1P og 1T elevar i Norge (Creswell, 2015; Danielsen, 2013, s. 148). I ei kvantitativ undersøking handlar det om å få eit mest mogleg representativt utval. Samla sett er utvalet i denne studien for lite til å kunne generalisere stort, men det kan likevel gi eit representativt bilde av kva utfordringar elevane møter når dei arbeider med representasjonsskifte i funksjonar og korleis bruken av Geogebra kan vere med å påverke dette.

Av alle som deltok på prøven var det 56 elevar som samtykka til intervju. Eg intervjua 3 av desse. Det er ikkje mange, men her er det djupne-kunnskap og ikkje det kvantitative som er målet. Sollid (2013) meiner at ein skal intervjue så mange at ein får svar på det ein ønsker eller til ein ikkje får meir ut av intervjua. Samtidig er ho tydeleg på at her er det fleire faktorar som avgjer, som tid til rådighet, omfang på studien, talet på personar som samtykker og kven det er naturleg å intervjue.

3.5 Etterbehandling av innsamla data

3.5.1 Den skriftlege prøven

Korleis kan ein best mogleg bruke datamaterialet som ein har samla inn til å belyse og svare på forskingsspørsmåla? Eg fann det naturleg å nytte beskrivande eller deskriptiv statistikk i analysearbeidet. Ved å dele svara inn i ulike kategoriar og grupper kan ein då lage systematiske oversikter ved å presentere data i tabellar og diagram. Oppnådd score kan analyserast med høvelege sentralmål (middelverdi, median og modalverdi) og spreiingsmål (varians og standardavvik, normalfordeling). Ein kan også undersøkje om det er signifikante skilnader i svara mellom del ein og del to.

Eg valde å sjå på datamaterialet frå den skriftlege testen frå fleire sider; utifrå totalt oppnådd poengsum for kvar elev, oppgåve for oppgåve, poengsum totalt og ein samanlikning av del 1 og del 2. I tillegg føretok eg ein djupare analyse av svara. På spørsmåla i testen er det gitt 2 poeng for rett svar og rett forklaring (der det kravst), 1 poeng for rett svar utan forklaring eller der deler av svaret er korrekt og 0 poeng for galt svar. Det er også ein kategori for manglande svar (ikkje svart). I piloten vart desse rekna som 0 poeng. Men eg tenkjer det er ein stor skilnad på det å svare feil og det å ikkje svare eller få tid til å svare. Ein del elevar var tydelege på at dei «*ikkje fekk tid til resten*». Dette har eg derfor tatt omsyn til og endra i behandlinga av resultatet frå den endelege datainnsamlinga.

Svara med poeng vart systematisert i eit rekneark i Excel, for å få ei god oversikt over resultatet. Rad nummer ein var dei ulike spørsmåla, i etterfølgande kolonnar. I radene nedanfor la eg inn elevane sine poeng. Elev nummer 1, fekk namnet E1. Elev nummer 2, E2 osb. Eg la også inn nokre kolonnar til høgre for siste spørsmål, som viser totalsum for kvar elev, på dei ulike delane og samla sum. Under siste rad (elev eller respondent) la eg til ei rad som viser totalpoengsum for kvar oppgåve. Deretter føydde eg til felt som viste desse resultata i prosent, med fargekodar, i ulike nyansar av raudt, gult og grønt. Der grønt var over 75 % rett, gult var på 60-70 % og under 60 % vart det meir og meir raudt. Dette gjorde eg for både del ein og del to. På denne måten var resultatet meir oversiktleg, visuelt sett.

I tillegg til poengoversikta syntes eg det var viktig å få med korleis elevane hadde formulert seg. I dei oppgåvene der elevane skulle vise utrekning eller forklare korleis dei tenkte, skreiv eg også ned interessante svar som «kommentarar» i reknearket. Før eg gjekk vidare med analysen av det statistiske datamaterialet i SPSS[7], føretok eg ein ny gjennomgang av poeng på oppgåver og «kommentarane». Deretter systematiserte eg svara etter ulike kategoriar. Desse kategoriane gav eg heiltals kodar frå 0, 1, 2 og vidare, alt etter kor mange ulike kategoriar eg fann. Tala 0, 1 og 2 vart høvesvis knytt til verdiane «heilt feil svar», «delvis rett svar» og «rett svar» slik som i poengoversikta. I einskilde oppgåver passa

[7] SPSS (opprinnelig Statistical Package for the Social Sciences) er programvarepakke med grafisk grensesnitt for statistiske beregninger https://it.uib.no/SPSS

ikkje kategorien «delvis rett svar», og den vart tatt bort. Kategorien for «manglande svar» fekk koden 99. Enkelte av kategoriane er frå anna relevant forsking og litteratur om misoppfatningar og funksjonar (Bell & Janvier, 1981; Brekke, 2002; Rønningstad, 2009; Sierpinska, 2005).

3.5.2 Intervjua

Etter at eit intervju var gjennomført, noterte eg meg nokre stikkord om korleis det hadde gått, både praktisk og med tanke på funn. Deretter byrja eg lytte til lyd-opptaka og starta transkribere. I det første intervjuet transkriberte eg alt, og la vekt på alle ord og lydar som var med i lydopptaket. Etterkvart la eg meir vekt på å få med det som var interessant i forhold til problemstillinga.

«*Koding innebærer at man knytter et eller flere nøkkelord til et tekstsegment for å tillate senere indentifisering av en uttalelse, mens kategorisering er en mer systematisk begrepsdannelse rundt en uttalelse som skaper forutsetninger for kvantifisering.» (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 226).*

Transkripsjonane vart altså strukturert gjennom koding, basert på oppgåve eller det tema vi snakka om. Det vil sei at det som høyrde saman kom i same kategori (Postholm og Jacobsen, 2013, s. 104-107).

3.6 Reliabilitet, validitet og forskingsetiske omsyn

3.6.1 Reliabilitet

Den skriftlege prøven

«*Reliabilitet handler om pålitelighet, dvs. om vi kan stole på at undersøkelsen er presis, og at det ikke skjer feil underveis» (Danielsen, 2013, s. 147).*

Sitatet ovanfor gjeld for begge dei metodane som er nytta i denne undersøkinga. Eg trur det er fullt mogleg for andre forskarar å bruke same prøven og få same resultat. Er vurdering og koding av elevane sine svar påliteleg? Dette er spørsmål som handlar om forskinga sin reliabilitet. Kan hende andre forskarar ville koda litt annleis og kategorisert på ein annan måte, men eg trur at nyansane og hovudtrekka i funna frå denne undersøkinga likevel ville vore mykje dei same.

Intervju

Med den skriftlege prøven og ein intervjuguide som utgangspunkt for samtalane, kan ein stille seg spørsmål om kva meir ein eigentleg kan få ut av eit intervju. Er intervjuforma for lukka og styrt? Kunne eg funne ut meir ved å stilt andre spørsmål eller hatt ei meir open intervjuform? Det kan hende, men her må ein også ta omsyn til andre faktorar som tid og fagleg fokus. Eg vågar hevda at metoden som er brukt her også gjer det lettare for andre forskarar å gjenta forsøket, med same resultat. Eg har samtala med elevane om funksjonar og bruk av Geogebra. Det desse har tilført svara på testen, kunne eg ikkje fått utan at eg intervjua dei. Det er dette ein i kvalitative intervjuundersøkingar populært kallar «*thick descriptions*» (Kvale & Brinkmann, 2015).

3.6.2 Validitet

Ein godt gjennomført metodetriangulering vil styrke validiteten eller gyldigheita i eit forskingsstudie, ved at forskingsspørsmåla vert undersøkt med fleire metodar. Men, ein skal samtidig vere klar over at det er to veldig forskjellige metodar, som begge krev erfaring for å oppnå høg ekspertise (Kvale & Brinkmann, 2015). Eit viktig spørsmål er om metoden er eigna til å måle det eg ynskjer å finne ut? Eg tenkjer at pilotundersøkinga, bruk av einskilde, velprøvde oppgåver og openheit kring framgangsmåte uansett er med å styrke validiteten i denne studien.

Den skriftlege prøven

Av praktiske og tidsmessige årsaker vart prøven gjennomført i løpet av 60 minuttar. I ettertid ser eg at arbeidsmengda på prøven kunne med fordel vore noko kortare. Det var ein del elevar som ikkje fekk tid til å svare på alle spørsmåla. Det gjekk naturlegvis særleg ut over del to, med Geogebra, sidan den var til slutt.

Intervju

I følge Kvale og Brinkmann (2015) er det umulig å svare på spørsmålet om kva som er ein rett transkripsjon: «*Det finnes ingen sann, objektiv oversettelse fra muntlig til skriftlig form. Et mer konstruktivt spørsmål er: Hva er en nyttig transkripsjon for min forskning?»* (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 212). Sitatet frå Bjørndal (2013, s. 256): «*I kvalitativ forskning er forskeren det viktigste forskningsinstrumentet.»,* seier litt om kva ansvar som kviler på meg som forskar. Eg har vektlagt ein mest mogleg objektiv og ordrett transkripsjon av intervjua, etter prinsippet ovanfor, om kva som er nyttig for mi forsking. Eg har konsentrert meg om dei delane av intervjua som er med på å gi svar på forskingsspørsmåla. Samtalane i intervjua dreier seg om å finne ut mest mogleg om korleis intervjupersonen har tenkt under løysing av oppgåvene i den skriftlege prøven og kva tankar denne har om å bruke Geogebra. Ei slik tett oppfølging av den skriftlege teksten, styrkar, etter mi meining, truverda og gyldigheita av intervjua.

3.6.3 Forskingsetiske omsyn

Creswell (2015) er tydeleg på viktigheita av å informere deltakarar i ein studie om målet med studien, rettar til dei som deltek og korleis resultata skal brukast. Både i arbeidet med piloten og den endelege datainnsamlinga vart elevane gjort kjende med målet for studien og korleis resultata skal nyttast. Dei fekk og opplyst at det var frivillig å delta på dette forskingsprosjektet og at dei, utan grunngjeving, når som helst kunne trekkje seg (informert samtykke). Elevane som er med i prosjektet fekk i god tid på førehand, utdelt eit informasjonsskriv (vedlegg 3) kor dei måtte krysse av for og signere om dei ville vere med på den skriftlege prøven og/eller intervjuet. Dette skrivet inneheld også relevant informasjon om korleis sensitive opplysningar og data frå forskinga skulle handsamast og at studien er godkjend av NSD (Danielsen, 2013, s. 144; Kvale & Brinkmann, 2015).

Ein del av oppgåvene på prøven var laga slik at det skulle vere lett for elevane å gjere feiltolkingar. Ved utforming av diagnostiske oppgåver er det viktig at ein er klar over eventuelle etiske dilemma ved å lage oppgåver for å kartlegge misoppfatningar. Berre dersom ein kan avsløre misoppfatningar og samtidig hjelpe elevane over desse «hindera» er slike oppgåver hensiktsmessige (Høines et al., 2007, s. 102). Dette handlar vel at ein som lærar må legge til rette for at elevane får muligheit til å rette opp eventuelle misoppfatningar som vert «provoserte» fram.

Under intervjuet var eg interessert i å få meir innsyn i korleis elevane hadde tenkt då dei løyste oppgåvene. Eg forsøkte å ikkje fokusere på om dei hadde svara rett eller gale. Men, når ein snakkar om oppgåver dei er usikre på (skjønar dei har svara feil på), så kan det lett oppstå ubehag og stress hjå eleven. Denne kan ha vanskar med å forklare seg, men kjenner samtidig press på å «levere». Innimellom svara eg derfor bekreftande då elevane forklara måten dei hadde tenkt. I tillegg unngjekk eg for lange periodar med stillhet, som også kan virke stressande. Dette løyste eg blant anna ved å stille oppfølgingsspørsmål eller endre på måten spørsmålet vart stilt. Men, dette måtte igjen balanserast med ønsket om at intervjuet ikkje skulle vere for lukka og styrt. Målet mitt som intervjuar var å vise interesse for akkurat deira svar og lytte med respekt.

I arbeidet med å transkribere intervjua har eg av etiske omsyn forsøkt å best mogleg rette opp eventuelle språklege feil. Alle sitat eller transkripsjonar frå intervjua har dessutan fått ein «normalisert» nynorsk, skriftleg form. Eg har altså vektlagt det matematiske innhaldet frå intervjua og ikkje det lingvistiske, utan at det skal gå utover gyldigheita eller innhaldet. Dette for å betre ivareta anonymiteten til intervjupersonane. Ingen skal kjenne igjen personane som er med i undersøkinga (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 300). Elevane som er med i undersøkinga har også fått kvar sin kode, der eg startar med E1 (E1, E2,...og E86). Koplinga mellom namn og kode er det berre eg som kjenner til. Desse kodane vert brukt når eg seinare presenterer konkrete svar elevane har gitt på testen eller viser utdrag frå intervjua.

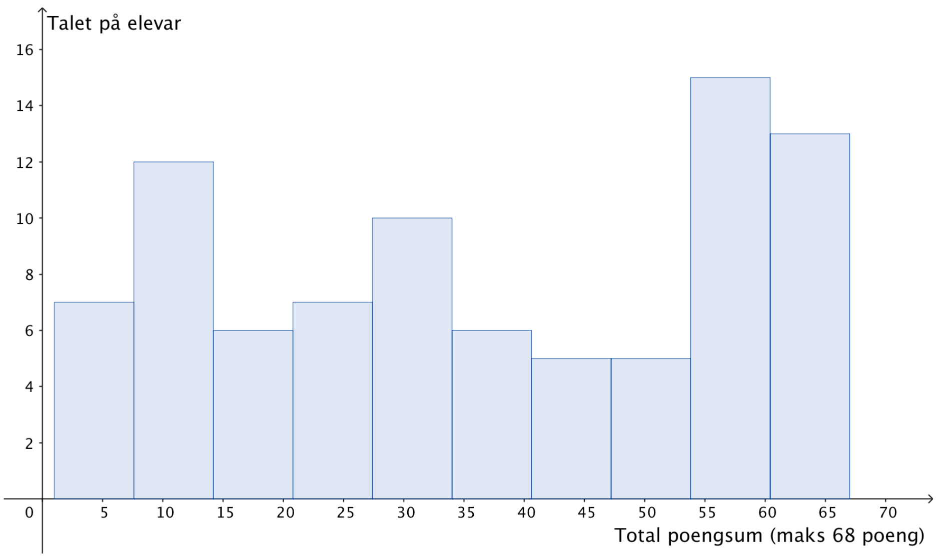
4 Resultat og analyse av data

Først i dette kapittelet vil eg presentere hovudfunn frå den skriftelege prøven (4.1). Deretter beskriv eg resultata frå denne delen meir i detaljar (4.2), og vil spesielt sjå på elevar som får til ei oppgåve i tradisjonell kontekst men ikkje med Geogebra (og omvendt). I det siste delkapittelet presenterer eg funn frå intervjua (4.3). Målet er å finne ut om innsamla data kan vere med å svare på problemstillinga og i så fall på kva måte. Her er det også interessant å samanlikne med teori.

4.1 Sentrale trekk frå skriftleg test

Før eg presenterer konkrete funn frå dei ulike oppgåvene, passar det å vise statistikk som syner hovudtrekk ved den kvantitative delen av undersøkinga. For å lette arbeidet med å strukturere datamaterialet og for å skilje del 1 og del 2, har eg valt å sette ein stor G framfor namnet på oppgåvene i del 2. Oppgåve 1 a) med Geogebra blir då G1a. Dessutan har eg delt oppgåve 2 og gitt dei ulike grafane i oppgåva namnet 2a, 2b, 2c og 2d.

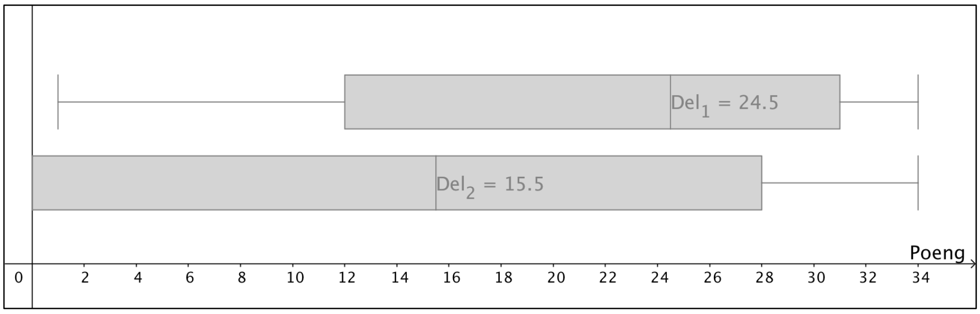
Eg har nytta det statistiske analyseverktøyet SPSS til å lage frekvenstabellar og diagram, i tillegg til MS Excel og Geogebra. Figur 4.1.1 viser fordeling av elevar etter oppnådd poeng totalt (del 1 og del 2). Maksimalt oppnåelig poengsum er 68 poeng, 34 på del 1 og 34 på del 2 (17 delspørsmål á to poeng). Gjennomsnittleg poengsum og median ligg nokså nær kvarandre med høvesvis 36,7 og 35 poeng. Høgaste poengsum er 67, medan lågaste er 1. Det gir ei variasjonsbreidd (maksimalverdi – minimumsverdi) på 66 poeng medan kvartildifferansen ($Q_3 - Q_1$) er på 38 poeng. Standardavviket er på 20,5. Desse tala fortel om stor spreiing i datamaterialet, noko som vi og kan sjå av figur 4.1.1.



Figur 4.1.1 Figuren viser fordeling av elevar etter kor mange poeng dei fekk totalt på den skriftlege testen.

Paired Samples Test								
	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference: Lower	95% Confidence Interval of the Difference: Upper			
Totalsum 1- Totalsum 2	6,11628	9,56023	1,03091	4,06656	8,16600	5,933	85	,00000

Tabell 4.1.1 Statistikk som syner at det er signifikante skilnader på resultatet på del 1 og del 2.



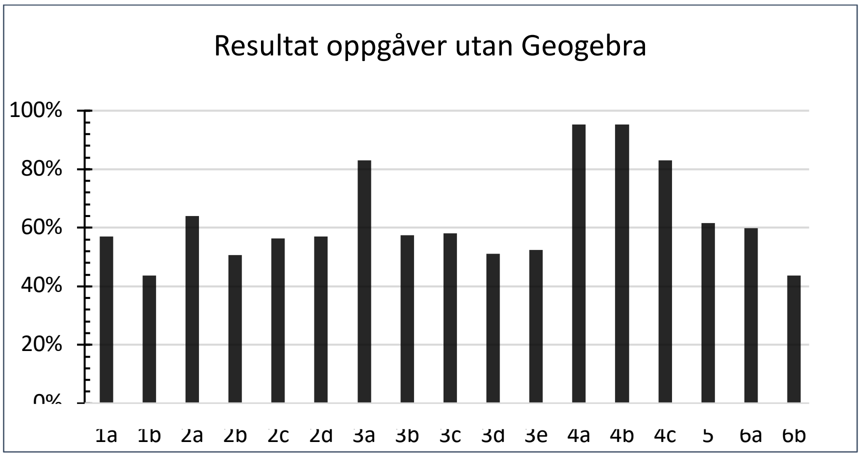
Figur 4.1.2 Boksplott som viser sentralmål og spreiing av poeng på den skriftlege testen. Tala i boksane syner medianen. Første strek er min. verdi, starten på boksen er første kvartil, enden på boksen er tredje kvartil og siste strek er maks. verdi.

Dersom vi samanliknar korleis elevane scorar på den skriftlege testen utan (Del_1) og med Geogebra (Del_2) ser vi av figur 4.1.2 at det er signifikante skilnader, noko som og støttast av resultatet i tabell 4.1.1. Boksplotta viser klart høgare score på del 1 og eit meir samla resultat enn det for del 2. Medianen går ned frå 24,5 til 15,5 frå del 1 til del 2. Interessant er det også å sjå at første kvartil (Q_1) for del 2 er 0 poeng, og kvartildifferansen (Q_3 - Q_1) er på heile 28 poeng (sjå også tabell 4.1.2). Det vil sei at det er svært mange elevar som ikkje har svart eller som har fått 0 poeng på del 2. Samanliknar vi med kvartildifferansen for del 1 er denne 19 poeng. Om ein ser i tabell 4.1.2, på gjennomsnittet for dei to delane vil ein sjå at gjennomsnittet for del 2 er 15,3 og dermed svært likt medianen (15,5). For del 1 er det litt større skilnad, med eit gjennomsnitt på 21,4 og ein median på 24,5 poeng. Standardavvika viser også at det er større spreiing i resultatet for del 2 (12,6) enn for del 1 (9,8).

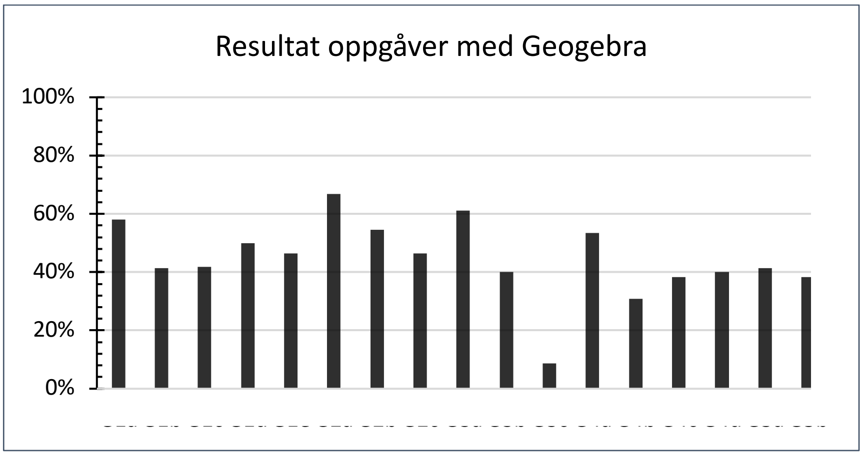
n	Gjennomsnitt	σ	s	Min	Q1	Median	Q3	Maks
86	21.4186	9.8116	9.8691	1	12	24.5	31	34
86	15.3023	12.5819	12.6557	0	0	15.5	28	34

Tabell 4.1.2 Statistikk som syner sentralmål og spreiingsmål for høvesvis del 1 og del 2 på den skriftlege testen.

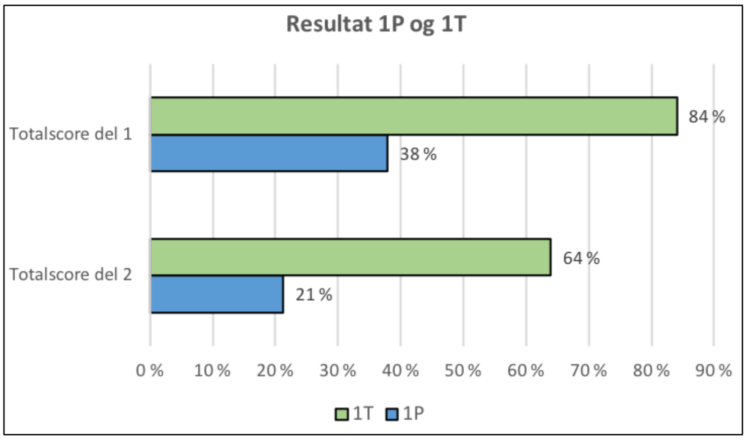
Figur 4.1.3 og 4.1.4 på neste side, viser samla oppnådd score på kvar av oppgåvene for høvesvis del ein og del to.



Figur 4.1.3 Resultat av samla oppnådd poengsum av mulige poeng, i prosent for kvar oppgåve i del 1, utan Geogebra.



Figur 4.1.4 Resultat av samla oppnådd poengsum av mulige poeng, i prosent for kvar oppgåve i del 2, med Geogebra.



Figur 4.1.5 Resultat i samla oppnådd poeng av mulige poeng, i prosent, på del 1 og del 2 for 1P og 1T.

Figur 4.1.5 syner resultatet for korleis elevane i høvesvis 1T og 1P gjer det basert på totalt oppnådd poengsum i forhold til mulige poeng. Vi ser klare skilnader på desse matematikkgruppene, noko som var venta. Likevel interessant å sjå at begge gruppene har ein markant (17 prosentpoeng for 1P og 20 prosentpoeng for 1T) nedgang i poeng frå del 1 til del 2. Det kan nok forklarast med at del to er til slutt og då er det mindre tid til oppgåvene der. Men, det er også mange fleire *manglande svar* på del 2. Årsaker som stor arbeidsmengde på prøven og det at enkelte elevar vegrar seg mot å bruke Geogebra (aversjon), kan verke inn på den store andelen elevar som ikkje har svart. I ettertid ser eg at denne mulige feilkjelda kunne vore unngått om ein hadde gitt annankvar elev oppgåvene med Geogebra først, eller at annankvar mattegruppe starta med Geogebra. Når det gjeld score på oppgåvene, får manglande svar uansett null poeng, og blir behandla som at dei ikkje fekk til desse oppgåvene.

4.2 Resultat frå kvantitativ del

Til analyse av datamaterialet har eg valt å nytte Janvier (1987c) sin tabell som utgangspunkt for korleis eg kategoriserer mine data. Den syner samanhengen mellom ulike måtar funksjonar kan framstillast på og er omtala og avbilda i teoridelen (Tabell 2.2.1). Forutan poengsum har eg også systematisert svara frå kvart spørsmål ved å kode etter ulike feil eller eventuelle misoppfatningar. Resultata frå desse er igjen plassert i ein av hovudkategoriane basert på representasjonsskifta; *frå tabell til graf*, *frå graf til tabell* eller liknande – etter Janvier (1987c) sin modell. Til dømes er svar på oppgåver som går på å finne likninga til ein funksjon utifrå ein graf, gruppert i kategori *frå graf til likning*. Dette for å få ei ryddig og oversiktleg framstilling av funn. Det skal nemnast at ikkje alle kategoriane for representasjonsskifte er med. Dei som er med er heller ikkje likt representert i oppgåvene. Årsaken til dette skuldast ei naudsynt avgrensing av prøveomfang og praktisk gjennomføring. Einskilde kategoriar er også berre med indirekte, slik som for eksempel *frå tabell til liknin*g eller *frå situasjon til likning*. Det vil sei at det er ingen oppgåver som direkte går frå tabell til likning. Flest er det i kategorien frå *likning til graf*.

Tabell 4.2.1 viser ei systematisk fordeling av oppgåver i delkapittel. Kategoriane med oppgåver der eg presenterer resultat får sitt eige delkapittel. Resultat frå oppgåver som passar inn under fleire overskrifter vert berre presentert ein gong, under eit delkapittel. Det vil derfor være einskilde kategoriar utan oppgåver, og dei kategoriane er ikkje med i tabellen. Svar på oppgåver som gir lite nyttig informasjon i forhold til problemstillinga har eg valt å ikkje presentere nærmare, men dei er likevel med i poengoversiktene for totalscore (i kapittel 4.1).

For oppgåver der det er svaralternativ, vil desse vere eigne kategoriar i tabellane. Der det er meir opne oppgåver har eg laga kategoriar på bakgrunn av det elevane har svara. Spesielt interessante svar vil eg presentere under den oppgåva dei høyrer til. Av plassmessige omsyn vil eg fokusere mest på dei svara som skil seg ut og på dei oppgåvene der det er elevar som får det til i den eine konteksten men ikkje i den andre. Eg har valt å ta med heile oppgåveteksten for dei oppgåvene som vert presentert, i forkant av tabellar og resultat. For dei deloppgåvene som ikkje er presentert under det gitte delkapittelet (eller som ikkje er med i det heile) har eg nytta svak skrift. Dette for å gjere presentasjonen meir oversiktleg.

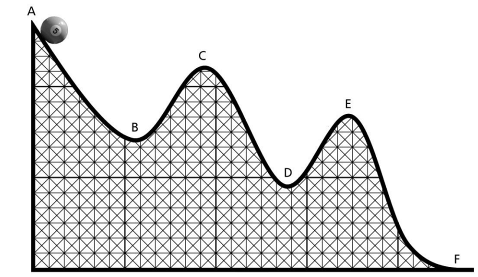
Kategoriar og delkapittel	Utan Geogebra	Med Geogebra	Kommentar
Frå situasjon til graf (4.2.1)	5		Finne grafen som passar med situasjonen.
Frå tabell til graf (4.2.2)	3a og 6a	G1a	3a og G1a: To punkt til graf. 6a: Frå likning til graf via tabell. Presentert i 4.2.6.
Frå graf til situasjon (4.2.3)	4	G4	G4: Teiknar og tolkar graf.
	4a og 4c	G4b	Finne x når y er kjend.
	4b	G4c	Finne ekstremalpunkt.
Frå graf til tabell (4.2.4)	3c	G1c, G1d, G3b og G4d	Finne y når x er kjend (Toppunkt, G4d)
	3d	G1e og G3d	Finne x når y er kjend
Frå graf til likning (4.2.5)	2 og 3b	G1b	I 2 kan ein finne likninga frå grafen eller rekne seg fram. I G1b kan ein bruke Geogebra, lese av eller rekne.
	2a, 2c og 3b	G1c	Finne stigningstal . 2: Presentert i 4.2.6.
	2a, 2c og 3b	G1c	Finne konstantledd.
	2b og 2d		Finne ekstremalpunkt.
Frå likning til graf (4.2.6)	1a, 2 og 6a	G2a, G3a, G4a og G5	6a: Frå likning til graf via tabell. 2: Frå likning til graf, men og motsett. G4a: Frå situasjon til graf via likning. Presentert i 4.2.3.
	1, 2, 6a	G3	Attkjenning av type funksjon .
	1a, 2a og 2c	G1c	Finne stigningstal.
	1a og 2	G1c	Finne konstantledd.
		G4a og G5a	Innstilling av aksar.
Definisjon av funksjon (4.2.7)	6b	G3c	
Oppsummering av resultat (4.2.8)			

Tabell 4.2.1 Oversikt som syner fordeling av oppgåver i delkapittel (delkapittelnummer i parentes).

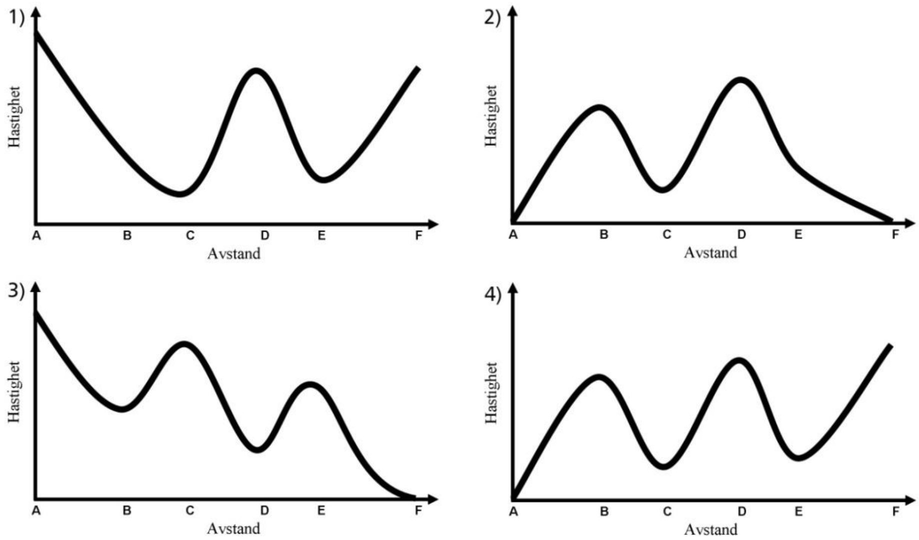
4.2.1 Frå situasjon til graf

Det er kunn ei oppgåve som går direkte frå ein situasjon til graf. Det er oppgåve 5 i del ein. Då er det heller inga samanliknings-grunnlag med oppgåver frå del to. Likevel er dette ei diagnostisk oppgåve som tydeleg skil ut elevar med misoppfatning og som dermed er høgst interessant å ta med her.

Oppgåve 5



Ei kule trillar fritt langs banen i figuren til venstre. Det er skissert fire ulike grafar nedanfor.
Kven av desse grafane viser best korleis hastigheten til kula varierer frå den vert slept i A og til den når enden av bana i F?



I denne oppgåva, skal elevane finne grafen som passar med den situasjonen som er presentert. Vi ser av tabell 4.2.1 at det er ei «klassisk» misoppfatning som utpeikar seg: *Elevane ser på grafen som eit bilde av situasjonen* (Brekke, 2002; Leinhardt et al., 1990, s. 39).

	Oppgåve 5	Frequency	Percent
Valid	Rett svar. Manglande eller mangelfull forklaring.	1	1,2
	Rett svar (Alternativ 4)	53	61,6
	Alternativ 1	1	1,2
	Alternativ 2	2	2,3
	Alternativ 3. (Ser på grafen som eit bilde av situasjonen.)	27	31,4
	Manglande svar	2	2,3
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.1 Svaroversikt til oppgåve 5.

Heile 31,4 % har svart at det er alternativ 3 som er det rette svaret. I overkant av 60 % av elevane har kryssa av for det rette svaret her. Merk at første aksen er merka med *avstand* og ikkje tid. Kan hende det hadde vore fleire rette svar om tida var variabelen her. Forsking viser at elevar lettare forstår funksjonar der den uavhengige variabelen er tid (Leinhardt et al., 1990). Det går likevel tydeleg fram av figurane til oppgåveteksten at avstanden er så langt kula har bevegd seg, og då blir tida ein indirekte storleik. Eksempel på forklaringar der elevane har svara alternativ 3:

E66:	Eg meiner enkelt figur 3, sidan der ser me alle svingningane til ballen. For den starter med å synke, med to kraftige toppar, og dermed synker igjen.
E69:	Fordi den begynn på en topp i A, blir sleppt nedover til B, går opp igjen til C, går ned til D, går opp til E og går ned siste gong til F.
E78:	Fordi den bana nesten er heilt lik den på teikninga.
E53:	Farta varierer mest ved auking i 3, pga. det er fleire toppar som jobbar med gravitasjonen.

Forma på grafen vert forveksla med forma på banen til kula. Det er eit av dei mest vanlege hindera elevane møter når dei skal gå frå ein situasjon til ein graf (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt et al., 1990). E80 er ein av dei elevane som har svara alternativ 2.

E80:	Ballen startar på eit «0» punkt der ballen ikkje har fart og ballen stoppar på eit «0» punkt der ballen ikkje har fart.

E80 ser for seg at kula startar i ro og kjem ned att, kor den til slutt ligg i ro. Det kan hende denne eleven forstår korleis farten varierer med banen, men får problem med å forklare at kula til slutt vil komme ned med høg fart. Dette skyldast kanskje intuisjon som byggjer på erfaringar frå kvardagslivet og som forvirrar eleven når denne skal forstå dei abstrakte eigenskapane til grafen (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt et al., 1990); ein ball vil jo normalt sett ende opp med å ligge i ro om den trillar utfor ein skråning. Det er ingen oppgåver med Geogebra som kan direkte samanliknast med denne oppgåva, men resultatet viser likevel litt av dei utfordringane elevar har når det er snakk om å gå frå ein praktisk situasjon til å finne grafen til ein funksjon.

4.2.2 Frå tabell til graf

Det er veldig vanleg å bruke tabell som eit middel eller «mellomrepresentasjon» for å teikne grafen til ein funksjon på likningsform (Janvier, 1987c). I oppgåve 3a og G1a skal elevane setje to punkt inn i eit koordinatsystem og teikne grafen som går gjennom desse punkta. To punkt som gir to forskjellige x-verdiar med tilhøyrande y-verdiar representerer ein tilstrekkelig tabell for å teikne grafen til ei rett linje. Dette synet støttast også av Adu-Gyamfi et al. (2012, s. 167). Resultata frå desse oppgåvene er derfor med her og den store skilnaden på desse to oppgåvene er at den eine skal løysast med Geogebra. Oppgåve 6a handlar om å gå frå likning til graf via tabell. Men, resultatet frå den er presentert i 4.2.6.

Oppgåve 3

Ei rett linje går gjennom punkta A=(-3, -2) og B=(1, 6).

a) Sett punkta inn i koordinatsystemet og teikne linja.
b) Finn likninga til linja (på forma y = ax + b).
c) Bestem y, når *x= 2*
d) Bestem x, når *y= -1*
e) Gi ei tolking av stigningstalet til linja.

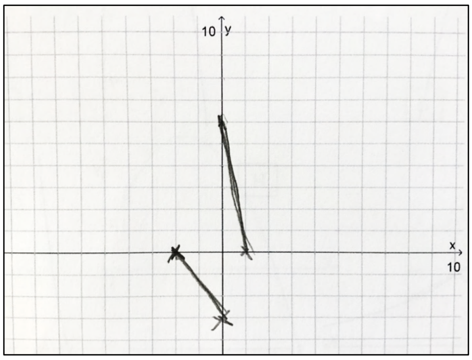
Oppgåve 3a		Frequency	Percent
Valid	Heilt feil svar	1	1,2
	Rett svar	67	77,9
	Teiknar graf ut frå eit punkt.	6	7,0
	Teiknar grafen som eit punkt.	3	3,5
	Bytar om x- og y-verdiar til koordinatane.	3	3,5
	Feil x- eller y-verdi i eine punktet.	4	4,7
	Manglande svar	2	2,3
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.2.1 Svaroversikt til oppgåve 3a.

Heile 77,9 % har svara rett på denne oppgåva. Det er to manglande svar og ein elev som har «heilt feil». Heilt feil vil her sei at det ikkje er mogleg å sjå noko samanheng mellom oppgåve og svar. 7,0 % teiknar grafen som eit punkt (Mevarech & Kramarsky, 1997). Av desse er det ikkje lett å vite om dei faktisk teiknar grafen som eit punkt eller om dei har unnlate å dra ei linje gjennom punkta (døme på elevar som teiknar grafen som eit punkt finn ein i kapittel 4.2.6, oppgåve 1).

Trass i at det er mange som svarar rett på oppgåve 3a er det likevel einskilde elevar som ikkje meistrar det å teikne to punkt i eit koordinatsystem og trekkje ei linje gjennom punkta. Mest oppsiktsvekkjande, synest eg, er det med dei som teiknar to linjestykke, slik som E26 (svar nedanfor). Nokre av desse brukar til dømes x-koordinaten som skjering med x-aksen (nullpunkt) og y -koordinaten som skjering med y-aksen (konstantledd). Andre bytar om, og har x-koordinat som skjering med y-aksen og y-koordinat som skjering med x-aksen.

E26:



E26 ser ut til å ha nytta punkt A (-3, -2) til å teikne det nedste linjestykke og punkt B (1, 6) til å teikne det øvste. For punktet A, har eleven også byta om *x*- og *y*-koordinat. Av oppgåveteksten går det tydeleg fram at det er snakk om *ei* rett linje, ikkje to. Når eleven likevel teiknar to linjestykke, kan det tyde på at dette er ei misoppfatning; *teiknar grafen til ei rett linje ut i frå eit punkt*. E26 har ikkje svart på nokon av oppgåvene med Geogebra.

4,7 % har feil x-eller y-verdi berre i det eine punktet. Noko som eg tenkjer skuldast slurv, og difor reknast som ein tilfeldig feil. Det er også tre elevar som systematisk byter om *x*- og *y*-verdiar når dei skal plotte punkta. Dei har likevel teikna ei linje gjennom punkta dei får, men får sjølvsagt feil linje og feila forplantar seg vidare i dei følgjande delspørsmåla. Ein av desse er E53, men denne eleven har ikkje svart på nokon spørsmål i del 2.

Oppgåve G1

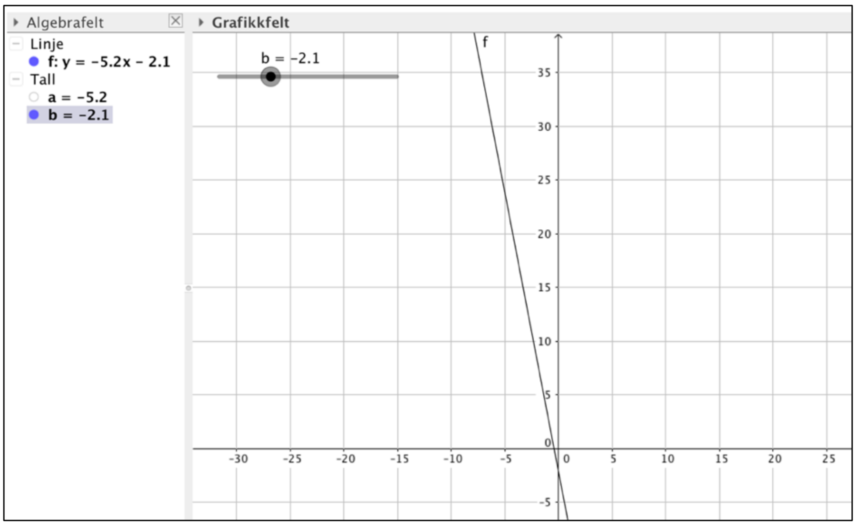
a) Teikne linja som går gjennom punkta (-5, 2) og (3, -2) med Geogebra.
b) Finn likninga til linja (på forma $y = ax + b$).
c) Kva er stigningstalet og kva er konstantleddet til linja?
d) Bestem y, når $x= -3$.
e) Bestem x, når $y= -3$.

Oppgåve G1a		Frequency	Percent
Valid	Brukar "glidar" for å teikne linja.	1	1,2
	Rett svar	50	58,1
	Manglande svar	35	40,7
	Total	86	100,0

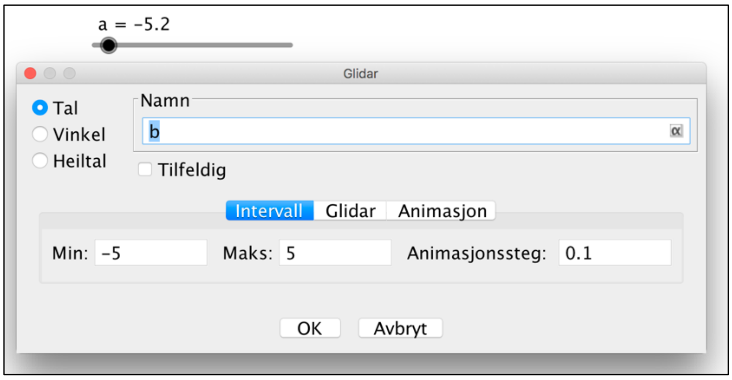
Tabell 4.2.2.2 Svaroversikt til oppgåve G1a.

58,1 % har svara rett på denne oppgåva. Det er heile 40,7 % som ikkje har svart. Av dei 51 som svarte er det kunn ein elev som ikkje klarer å teikne den rette linja gjennom dei to oppgitte punkta (E63).

E63:



E63 brukar glidar-kommandoen i Geogebra. Det vil sei at ein kan legge inn ein variabel, f.eks. *a*, som kan varierast i eit valt intervall (sjå figur 4.2.2.1).



Figur 4.2.2.1 Illustrasjon av oppretta glidar a (øvst i figuren), og neste glidar, b.

Denne variabelen kan brukast i ein formel eller funksjonsuttrykk. Slik får eleven ei linje med likninga $y = -5,2x - 2,1$. Namnet på glidarane er *a* og *b*, og kjem automatisk når ein opprettar ein glidar i Geogebra. Det kan fort forvekslast med *a* og *b* i den generelle likninga for ei rett linje; $y = ax + b$. Det ser ut som E63 forsøker å stille inn den første glidaren, etter koordinatane til det første punktet. Dette vert då stigningstalet, *a*. Den siste glidaren, *b*, er ikkje stilt inn etter det siste punktet. Men, det er kanskje ikkje så rart, med tanke på at punktet er (3,-2). Her kan det sjå ut som det å bruke Geogebra er med på å skape vanskar for E63, som til samanlikning har klart å teikne den første grafen i 1a (dei to andre var utan svar). Eleven har diverre ikkje gjort oppgåve 3a, slik at ein ikkje får ei direkte samanlikning for korleis eleven gjer ei slik oppgåve utan Geogebra. Men, ut frå svaret i oppgåve G1a, kan det tyde på at E63 ikkje veit korleis han skal løyse oppgåve 3a, men at han likevel er freista til å forsøke seg på G1a. Dette kan skyldast at det er meir motiverande å bruke Geogebra og at det kan verke lettare. Dette siste kjem også fram i intervjuet med E18 (4.3.2). Ein elev har teikna eit *linjestykke* mellom punkta, men får likevel godkjent, ettersom punkta er plotta rett og det er dratt ein strek mellom dei. I oppgåve 3a er det eit liknande tilfelle.

Det kan sjå ut som at det å gå frå tabell til graf for dei fleste elevar er «basic» kunnskap som dei meistrar godt. Likevel er det ein skilnad mellom 3a og G1a som er verd å merke seg. I 3a er det 19 elevar som har svart delvis eller heilt feil, og berre ein elev som ikkje har svart. I G1a derimot, er det heile 35 manglande svar. Årsaken til at det er så mange som ikkje har svart på G1a skuldast nok blant anna omfanget av prøven. Men, sidan dette er starten av oppgåvene med Geogebra, vil eg nok tru at det også er andre årsaker som gjer utslag her. Det å bruke Geogebra til slike oppgåver er ikkje det mest vanlege i undervisninga og det kan derfor tenkjast at mangel på opplæring eller erfaring verkar inn. Då er det også freistande å la være å løyse den oppgåva. Geogebra vert såleis eit hinder, så lenge elevane ikkje kjenner seg trygge på bruken av programmet. Likevel interessant å sjå at alle, utanom ein, som har gjort G1a har fått den til.

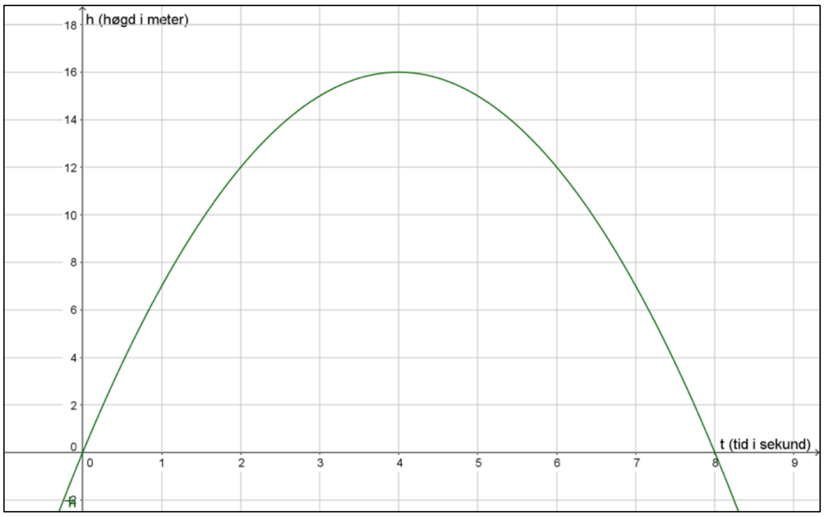
4.2.3 Frå graf til situasjon

Oppgåvene under denne kategorien, 4 og G4, testar om elevane klarer å lese av nullpunkt, ekstremalpunkt og finne *x*-verdiar ved gitte *y*-verdiar. Ein kan såleis argumentera for å plassere dei i kapittel 4.2.4 *frå graf til tabell* ettersom ein skal lese av punkt på grafen. Men, dei har også det til felles at elevane må forstå ein situasjon ut i frå ein graf og derfor er dei med her. Oppgåve 4 handlar om å tolke grafen knytt til ein bestemt situasjon, nemleg høgda til ein ball som funksjon av tida etter at den var kasta opp i lufta. I oppgåve G4 skal elevane svare på spørsmål om ein funksjon som syner overskotet til ei bedrift etter talet på produserte og selde einingar. I sistnemnde oppgåve må elevane i tillegg først teikne grafen til funksjonen (G4a er presentert i 4.2.6). Den første oppgåva er nok ein del enklare enn oppgåva med Geogebra, noko også resultata viser.

Oppgåve 4

Grafen til *h(t)* viser kor høgt ein ball er over bakken *t* sekund etter at den vert kasta.

a) Kor mange sekund er ballen i lufta?
b) Kva er tida når ballen er på det høgaste og kor høgt kjem ballen?
c) For kva verdi(ar) av t er ballen 12 m over bakken?



Oppgåve 4a		Frequency	Percent
Valid	Rett svar (8 sekund)	82	95,3
	Feil svar	1	1,2
	Manglande svar	3	3,5
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.3.1 Svaroversikt til oppgåve 4a.

Oppgåve 4b		Frequency	Percent
Valid	Rett svar (4 s og 16 m)	82	95,3
	Feil svar	1	1,2
	Manglande svar	3	3,5
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.3.2 Svaroversikt til oppgåve 4b.

Vi ser av begge tabellane ovanfor at 95,3 % svarar rett på 4a og 4b. Av dei som har svart er det kunn E53 som svarar feil. Sitat frå E53 på oppgåve 4b: *Hadde vore greit med nummer å jobbe med.* Eleven er tydelegvis van med å arbeide med tal og synes det å lese av og forstå ein graf er problematisk. Det er berre tre elevar som ikkje svarar på desse oppgåvene. Så høg svarprosent har nok å gjere med at oppgåvene er enkle, samtidig som det er meir lettvint å svare på eit utfyllingsskjema enn å skrive svaret sjølv, slik som er tilfelle med oppgåve G4, med Geogebra.

Oppgåve 4c		Frequency	Percent
Valid	Rett svar (t=2 og t=6)	62	72,1
	Har kunn med tida 2 sekund ved 12 meter over bakken.	19	22,1
	Manglande svar	5	5,8
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.3.3 Svaroversikt til oppgåve 4c.

I dette siste delspørsmålet i oppgåve 4, er det litt færre svar, men framleis høg prosent som svarar rett eller delvis rett, og få manglande svar. 19 elevar har berre med den eine t-verdien i svaret sitt. Det er ingen elevar som har svara kunn *t = 6*. Anten har dei med begge verdiane eller berre den første, *t = 2*. Det tenkjer eg kjem av at dei «går på» første og beste svar, utan å undersøke om det kan vere fleire muligheiter. Neste oppgåve, G4, undersøkjer mykje av den same kunnskapen, men med Geogebra.

Oppgåve G4

Ei bedrift produserer og sel *x* einingar av ei vare per dag. Overskotet per dag, i tusen kroner, er gitt ved funksjonen *O.*

$$O(x) = -x^2 + 20x - 19 \qquad for \quad 0 \le x \le 25$$

a) Teikne grafen til *O.*

b) Kor mange einingar må bedrifta produsere og selje per dag for å gå med overskot?

c) Kor mange einingar må bedrifta produsere og selje per dag for å få størst mulig overskot? Kor stort er overskotet då?

d) Ein dag vart det produsert og seld 14 einingar. Kva vart overskotet då?

Oppgåve G4b		Frequency	Percent
Valid	Rett svar (Frå 2 til 18)	21	24,4
	Bedrifta må produsere og selje 1 eller minst 1 eining per dag.	6	7,0
	Bedrifta må produsere og selje 2 eller minst 2 einingar per dag.	4	4,7
	Bedrifta må produsere og selje 19 eller minst 19 einingar per dag.	2	2,3
	Når grafen er positiv (mellom 1 og 10 einingar).	1	1,2
	Bedrifta må produsere 19-1=18 einingar for å få overskot.	1	1,2
	Manglande svar	51	59,3
	Total	86	100,0

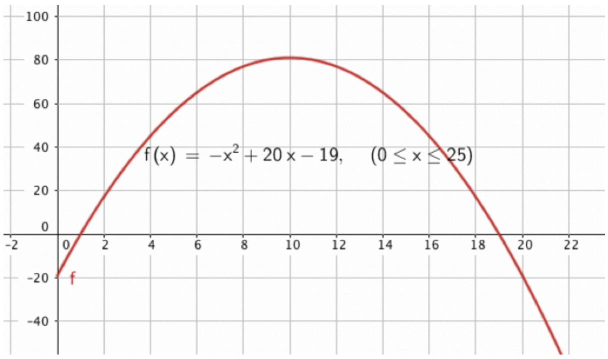
Tabell 4.2.3.4 Svaroversikt til oppgåve G4b.

Her handlar det om å tolke grafen og sjå at ein får overskot ved å produsere mellom 1 og 19 einingar (eller frå og med 2 til og med 18 einingar). Vi ser av tabellen at 24,4 % har svart rett, medan 59,3 % har ikkje svart. Alle som har svart ser ut til å ta utgangspunkt i anten det eine (ofte det første) eller begge nullpunkta til grafen. Men, det er tydeligvis ikkje like lett å svare presist på spørsmålet. Av dei 7,0 % som svarar at «*bedrifta må produsere og selje 1 eller minst 1 eining per dag*», er det nokon som svarar at det må vere nøyaktig ei eining, medan andre har ei djupare forståing og skriv at det må vere minst ei eining. Den same tenkjemåten finn ein hos dei 4,7 % som svarar at «*bedrifta må produsere og selje 2 eller minst 2 einingar per dag*». Dei tar ikkje med det andre nullpunktet for grafen.

E56:	Bedrifta må produsere og selje minst 1 eining for å gå med overskot. Det er sidan grafen er over 0 når x er over 1.

E56 har teikna grafen heilt rett, med rett definisjonsmengd. Likevel ser ein at eleven ikkje har ei heilskapleg forståing for korleis grafen skal tolkast, i og med at det andre nullpunktet ikkje er medrekna. E56 har heller ikkje med to verdiar i oppgåve 4c, noko som kan tyde på at eleven er van med å sjå på detaljar og punkt (lokale eigenskapar) meir enn på trendar og intervall (globale eigenskapar) (Bell & Janvier, 1981; Duval, 2006).

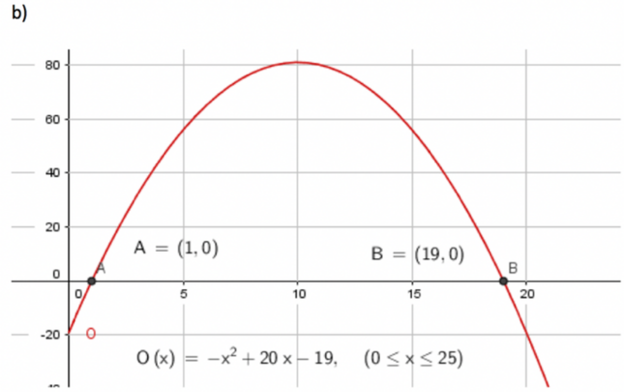
E1:



b) de må produserer og selje over 19 varer per dag

E58:

b)



Bedrifta må selje minst 20 einingar, og maks 19 einingar for å gå med overskot.

E1 og E58 svarar at bedrifta må produsere og selje 19 eller minst 19 einingar per dag. Desse elevane vel det andre nullpunktet for grafen. Men, det ser ut til at dei vert «lurt» av funksjonsuttrykket, som viser at konstantleddet er -19. Då kan det være lett å trekke den slutninga at berre ein produserer 19 einingar eller meir, så går bedrifta med overskot, over null på y-aksen (sjå E1 og E58 førre side). E1 og E58 ser ikkje samanhengen mellom likninga, grafen og situasjonen (Bell & Janvier, 1981).

I svaret til E58 kan det sjå ut som det er skjering med y-aksen (her tilnærma -20) som gir første del av svaret. Men, om så er, stemmer ikkje den tankegangen med at det er maks 19 einingar. Samanliknar ein med oppgåve 4c frå del 1, har eleven berre tatt med svaret for det første nullpunktet (Har kunn med tida 2 sekund ved 12 meter over bakken). Om ein også samanliknar med oppgåve 3d i kapittel 4.2.4 kan ein sjå at eleven flyttar konstantleddet (her -19) over på venstre sida av likskapsteiknet og så løyser for x-verdiar.

E66:	For at bedrifta skal gå med overskot, må me sjå når grafen er positiv, det er ifrå mellom det blir seld 1 og 10 einingar.

Elev E66 tolkar overskot på grafen frå første nullpunkt til toppunktet og grunngjev det med at då er grafen positiv. På høgre side av toppunktet går grafen nedover igjen og eleven ser ikkje lenger på det som overskot. Her kjem nok intuitiv tankegong inn. Det kan sjå ut som eleven forventar at grafen skal gi eit bilde av situasjonen, altså vere på veg opp når det er snakk om overskot (Leinhardt et al., 1990). E66 har svara heilt korrekt i oppgåve 4c, der dei skal finne for kva verdiar av *t* ballen er 12 m over bakken.

E72:	Bedrifta må produsere 19-1 einingar, altså 18 einingar for å få overskot.

E72 har skjønt kva x-verdiar som er interessante å ta utgangspunkt i for å svare, og reknar differansen mellom siste og første nullpunkt. Men, svaret vitnar også om ein manglande forståing for korleis grafen skal tolkast. Eleven kan også ha sett at det er i intervallet mellom 1 og 19 funksjonsverdien gir overskot. Likevel klarer E72 ikkje å uttrykke dette. I oppgåve 4c som eg samanliknar med, har E72 svart rett.

E63:	Dei må selje 1 eining for å gå i overskot.

E63 har berre med ein liten del av grafen i sitt *grafikkfelt* (grafikkfelt: sjå figur 2.1.2) og det forklarar noko av grunnen til at svaret berre inneheld det eine nullpunktet. Men, årsaken til kvifor grafen er teikna slik denne eleven har gjort det, vil eg kikke nærmare på i kapittel 4.2.6, der eg presenterer svar på G4a. Også E63 har svart rett på oppgåve 4c, med to t-verdiar.

I den neste oppgåva handlar det om å finne ekstremalpunktet til grafen. Elevane skal finne ut kor mange einingar bedrifta må produsere for å få største mogleg overskot og kor stort dette overskotet er. Resultatet på denne oppgåva kan samanliknast med oppgåve 4a, der det var heile 95,3 % som svarte rett.

Oppgåve G4c		Frequency	Percent
Valid	Rett svar (10 einingar, 81 000 kr)	33	38,4
	"Dei må produsere 19 varer."	1	1,2
	Manglande svar	52	60,5
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.3.5 Svaroversikt til oppgåve G4c.

I oppgåve G4c er det svært mange som ikkje har svart, 60,5 %. Men, om ein ser på kor mange som har fått til oppgåva av dei som har svart, så er det meir oppløftande lesing. 38,4 % får til denne medan det berre er ein elev som svarer feil. Svaret til denne eleven er gitt nedanfor (E59).

E59:	Dei må produsera 19 varer for å gå med størst mogleg overskot.

Kan hende E59 ser at det er overskot når grafen er over $y = 0$, men trur størst x-verdi gjer størst overskot, altså 19. E59 har fått til oppgåve 4a, der dei skal finne kva *t*-verdi der ballen er på sitt høgaste punkt. Det ser ut til at E59 her gjer ein tolkingsfeil av situasjon og graf. Sjølv om oppgåve 4 og G4 testar mange av dei same kunnskapane, tyder svara på at den siste oppgåva er meir krevjande å forstå.
I oppgåve G4d skal elevane finne y-verdien når dei kjenner x-verdien, overskotet ved produksjon og sal av 14 einingar. På same vis som i G4c er dette noko elevane skal vere godt kjend med.

Oppgåve G4d		Frequency	Percent
Valid	Rett svar (65 000 kr)	34	39,5
	Om 65 dagar.	1	1,2
	Manglande svar	51	59,3
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.3.6 Svaroversikt til oppgåve G4d.

Resultatet frå denne oppgåva viser også her at det er svært mange som ikkje har svart. Men, av alle dei som har svart er det kunn ein elev som ikkje har rett svar. Svaret til denne eleven viser forståing for at det er ein y-verdi som skal finnast, men det viser samtidig at eleven ikkje klarer å sjå kva denne y-verdien eigentleg betyr. Det at y-verdien, eller funksjonsverdien *O(x),* i denne oppgåva er gitt som overskot i tusen kroner, er nok med på å gjere oppgåva meir utfordrande. Svaret *«om 65 dagar»*, fortel at eleven ikkje har forstått heilt korleis situasjonen skal tolkast utifrå grafen, og kva denne grafen eigentleg viser. Ein metode, derimot, for å finne y-verdi ved gitt x-verdi, ser ut til å vere på plass.

Samanliknar ein resultata frå oppgåve 4 utan Geogebra og G4 med Geogebra er det svært stor skilnad i svarprosenten. Det er rundt 60 % manglande svar i oppgåve G4, medan i oppgåve 4 utan Geogebra er det mellom 3 % og 6 % som ikkje har svart. Begge oppgåvene handlar om å lese eller tolke grafen til ein andregradsfunksjon. Det er mykje som kan tyde på at talet på manglande svar hadde minka kraftig om også grafen i G4 var teikna på førehand. Likevel ser ein at elevane lett klarer å teikne grafar med Geogebra i andre oppgåver. Men, det er ingen av dei andre oppgåvene i del 2 der elevane vert bedne om å teikne ein graf med ei avgrensa definisjonsmengd. Elevane ser ut til å meistre det å lese av ein *y*-verdi ved ein gitt *x*-verdi og motsett. Her er det i begge oppgåvene, kunn ein elev av dei som har svart, som ikkje får heilt rett svar. Oppgåve 4c og G4b er litt ulike på den måten at i 4c skal ein finne to verdiar for tida, der ballen er 12 m over bakken (ikkje meir enn 12 m over bakken), medan i G4b er det snakk om å finne det intervallet eller området der bedrifta går med overskot (altså for $O(x) > 0$). Felles for dei begge er at mange elevar finn kunn den første verdien for x (eller t). Årsaken til dette kan vere at dei er vane med å løyse slike oppgåver grafisk med lineære funksjonar eller omvendt proporsjonale funksjonar. Dei finn då eit skjeringspunkt, ved å teikne ei hjelpelinje (t.d. $y = 12$) og ser for kva x-verdi denne skjer grafen. Ved andre typar funksjonar, der det kan vere fleire skjeringspunkt, som her, får dei kunn med seg det første. Det handlar kanskje om ei lokal tilnærming til grafen, der ein ikkje ser heilskapen (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt et al., 1990). Dette er kanskje tydlegast i G4b, der elevane skal sjå at funksjonen gir overskot for *x*-verdiar i eit gitt intervall. Denne oppgåva krev såleis ei djupare forståing enn 4c.

4.2.4 Frå graf til tabell

Oppgåve 3c og 3d handlar om å finne den eine koordinaten til eit punkt på ei linje, når ein får oppgitt den andre. Her viser det seg at det er ein del elevar som brukar likninga frå 3b til å finne desse koordinatane. Sjølv om det då dreier seg om å gå frå ei likning til tabell (punkt), er resultata gitt nedanfor, i dette delkapittelet. Også oppgåve G1 testar desse kunnskapane, berre at i G1 er det meininga at elevane kan bruke Geogebra til å svare. Resultat frå 3a og G1a er presentert under delkapittelet 4.2.2, «*Frå tabell til graf*», medan resultat frå 3b, G1b og G1c er beskrive i delkapittelet 4.2.5, «*Frå graf til likning*». Svar frå dei resterande delspørsmåla (3c, 3d, G1d, G1e og G3b) vert lagt fram under denne overskrifta.

Oppgåve 3

Ei rett linje går gjennom punkta A=(-3, -2) og B=(1, 6).

a) Sett punkta inn i koordinatsystemet og teikne linja.

b) Finn likninga til linja (på forma *y=ax+b*).

c) Bestem y, når *x= 2*

d) Bestem x, når *y= -1*

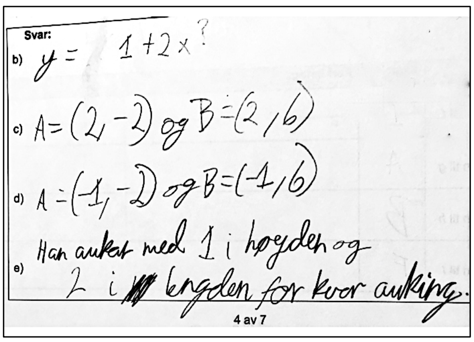
e) Gi ei tolking av stigningstalet til linja.

	Oppgåve 3c	Frequency	Percent
Valid	Heilt feil svar	5	5,8
	Rett svar (y=8)	48	55,8
	Reknar rett, men har feil likning frå b).	6	7,0
	A=(2,-2) og B=(2,6). Byttar ut x-verdiane med 2.	1	1,2
	Trur stigningstal er x-verdi.	1	1,2
	Manglande svar	25	29,1
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.4.1 Svaroversikt til oppgåve 3c.

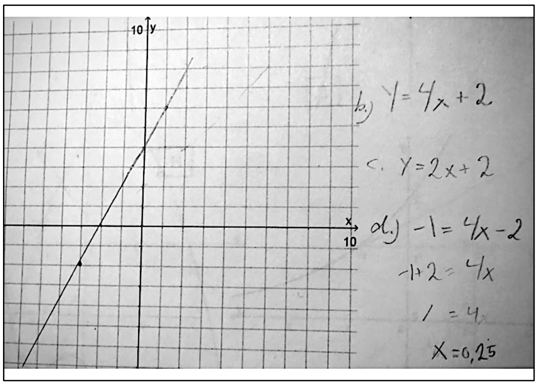
7,0 % brukar likninga frå 3b til å rekne ut y-verdi, men ser seg ikkje syn med å kontrollere med grafen. I følge Adu-Gyamfi et al. (2012) er det viktig å sjekke at det er semantisk kongruens mellom kjelde og målrepresentasjon.

E53:


Svar:
b) $y = 1+2x$?
c) $A=(2,-2)$ og $B=(2,6)$
d) $A=(-1,-2)$ og $B=(-1,6)$
e) Han aukar med 1 i høgden og 2 i lengden for kvar auking.
4 av 7

Det er verdt å merke seg E53 som bytar ut x-koordinat i begge punkta (A og B). Denne eleven brukar same metoden i 3d, men sjølv om det her er y-verdien ein får oppgitt, bytar eleven ut x-verdien også i denne oppgåva.

E54:



I svaret til E54 kan ein sjå at når eleven skal finne *y*-verdi ved oppgitt *x*-verdi, vert stigningstalet, som er 4 i 3b, endra til 2. Eleven erstattar stigningstalet med den oppgitte *x*-verdien.
Det ser ut til at E54 blandar *x*-verdi og stigningstal. I og med at stigningstalet er endra tilbake til 4 i 3d, tenkjer eg at dette ikkje dreier seg om ein tilfeldig feil, men at dette er ein misoppfatning. Om ein ser på svaret i 3d, der elevane skal finne *x*-verdi ved oppgitt *y*-verdi, gjer eleven det rette, ved å sette inn verdien -1 for y på venstre side i likninga. Problemet no er at eleven har byta ut + med – framfor konstantleddet. Då blir også svaret på den feil. E54 får til å legge inn to punkt i koordinatsystem og trekke ei linje mellom desse, men klarar ikkje å finne likninga til linja i G1b. E54 strevar også med å finne likninga til linja i oppgåve 3b, kor han bytar om stigningstal og konstantledd.

	Oppgåve 3d	Frequency	Percent
Valid	Heilt feil svar	9	10,5
	Rett svar (x=-2,5)	42	48,8
	Reknar rett, men har feil likning frå b).	5	5,8
	Byttar ut ax med oppgitt x, eller b med oppgitt y.	1	1,2
	A=(-1,-2) og B=(-1,6). Byttar ut x-verdiane med -1.	1	1,2
	Reknefeil, rett likning frå b). Sjekkar ikkje mot grafen.	3	3,5
	Manglande svar	25	29,1
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.4.2 Svaroversikt til oppgåve 3d.

48,8 % svarar rett når dei vert spurt om å finne x-verdien når y-verdien er -1. Det er, som tabell 4.2.4.2 visar, fleire elevar som har feil her, samanlikna med 3c.

E58:

c) $y = (2 \cdot 2) + 4$

$y = \underline{\underline{8}}$

d) $x = 2x + (-1)$

$\frac{1}{3} = \frac{3x}{3}$

$x = \frac{1}{3}$

E58 viser i 3c, korleis han bytar ut x i likninga med ein gitt *x*-verdi og reknar ut *y*-verdien. Det blir litt verre i 3d, når *y*-verdien skal bytast ut og ein skal finne x-verdien. E58 vel å erstatte konstantleddet (som er 4, sjå 3c) med oppgitt *y*-verdi, skriv x i staden for y på venstre sida i likninga og løyser som likning med omsyn på x. Dette kan ha samanheng med at elevane er vane med å bruke x for ein ukjend størrelse, og får då ei likning med x som ukjend i staden for y.

Oppgåve G1

a) Teikne linja som går gjennom punkta (-5, 2) og (3, -2) med Geogebra.

b) Finn likninga til linja (på forma $y = ax + b$).

c) Kva er stigningstalet og kva er konstantleddet til linja?

d) Bestem *y*, når *x= -3*.

e) Bestem *x*, når *y= -3*.

Oppgåve G1d		Frequency	Percent
Valid	Rett svar (y=1)	42	48,8
	Feil svar	2	2,3
	Manglande svar	42	48,8
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.4.4 Svaroversikt til oppgåve G1d.

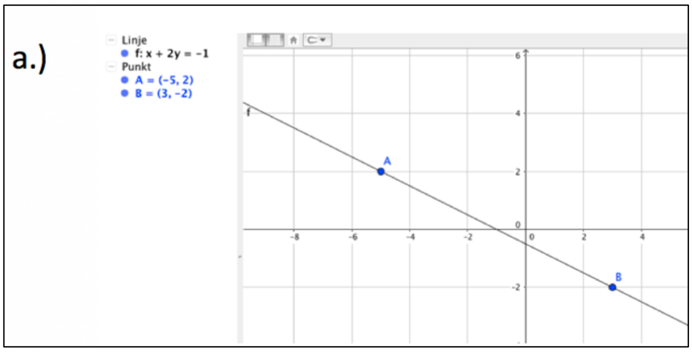
Svært mange har unnlate å svare, heile 48,8 %. Her er det berre to elevar som ikkje får til denne, av dei som har svart. Av dei som svarar rett er det ein god del som har rekna ut svaret med likninga frå G1b. Det er litt overraskande at dei ikkje les av grafen. Den eine eleven som får feil i denne oppgåva, har rekna ut y-verdien med likninga frå G1b, men kontrollerer ikkje opp mot grafen. Den andre eleven som svarar feil har ei likning som ville gitt *y*-verdi lik 7, men svarar *y = 1*. Det stemmer heller ikkje med grafen, som er teikna rett.

Oppgåve G1e		Frequency	Percent
Valid	Rett svar (x=5)	39	45,3
	Feil svar. Brukar likninga til å rekne ut x-verdi.	3	3,5
	Feil svar. Les av x når y er gitt.	2	2,3
	Manglande svar	42	48,8
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.4.5 Svaroversikt til oppgåve G1e.

Som i førre oppgåve er det også her 48,8 % som ikkje svarar og litt fleire elevar som får feil (5,8 % totalt). Her ser vi også at elevane ikkje kontrollerer svara sine opp mot grafen.

E54:



b.) Y=2x+1
c.) Stigningstalet er 2 of konstantleddet er 1
d.) Når x=3 er y=1
e.) Når y= -3 er x= -2

Om ein ser på svara E54 gir i G1 ovanfor, er det vanskeleg å finne noko samanheng. Det kan være eleven brukar likninga i *algebrafeltet*, bytar x- og y-koordinat og tenkjer slik: Når x=3 får vi $3 = 2 \cdot 1 + 1$ og når $y = -3$ blir $-3 = 2 \cdot (-2) + 1$. Det ser uansett ikkje ut til at eleven har brukt grafen til å svare på oppgåvene i G1, verken til å finne stigningstal og konstantledd eller til å lese av koordinatar på linja.

E58: Når eg skulle finne ut kva x var, når y=-3, så såg eg på grafen. Eg såg at når grafen var -3, kryssa grafen ved -0,5. Så x=0,5 når y=-3.

E58 har i G1d brukt Geogebra (ved å skrive *f (-3)* og få svaret *1*), og fått det til. I denne oppgåva derimot har E58 forsøkt å lese av grafen, utan at det går bra. Som vist i oppgåve 3d finn eleven *x*-verdien ved å byte ut konstantleddet i likninga med oppgitt y-verdi og byter ut y i likninga med x. Det ser ut til at eleven brukar same metoden her, berre ved avlesing (i svaret endrar eleven også verdien frå *- 0,5* til *0,5*). Dette er ein feil som går igjen, noko som kan tyde på at vi også å gjere med ei misoppfatning.

Oppgåve G3

Gitt utrykka

A: $y+x-6=0$ B: $y^2=x+6$ C: $x^2+2y=12$

a) Teikne grafane til A, B og C i same koordinatsystem. Merk med forskjellige fargar.

b) Bestem y når *x=2* for alle tre grafane til A, B og C.

c) Er det ein eller fleire av desse grafane der *y* ikkje er ein funksjon av *x*? Forklar.

Oppgåve G3b		Frequency	Percent
Valid	Rett svar (y=4 for A og C, y=+-2,83)	30	34,9
	Rett svar, men manglar negativ y-verdi for B.	6	7,0
	Rett svar for A og C (manglar B).	3	3,5
	Reknar ut positiv verdi for y i B (resten manlgar).	1	1,2
	Manglande svar	46	53,5
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.4.6 Svaroversikt til oppgåve G3b.

34,9 % svarar rett, når dei skal finne y-verdiane til grafane, når x er 2. 7,0 % har kunn funne den positive verdien for grafen til B. Det vil sei, dei har berre tatt med den positive delen. 3,5 % har berre med verdien for A og C. Men, som i mange av dei andre oppgåvene på del to, er det mange som ikkje har svart (53,5 %).

E74:	Når x er 2 på A er likninga parallell med seg sjølv. Då går det ikkje. Når x=2 i B blir y 4. når x=2 i c blir y og 4.

Her ser det ut som E74 bytar om namna på grafane. Den grafen som er «parallell med seg sjølv» må være B, noko som også stemmer med dei *y*-verdiane eleven finn (*y = 4*) og forklaringa for oppgåve G3c. Det verkar her som eleven ser at det er noko som ikkje stemmer samanlikna med dei funksjonane dei pleier å arbeide med.

Det som kanskje kjem tydlegast fram i svara som handlar om å gå frå ein graf til ein tabell, lese av ein *x*- eller *y*-verdi på grafen, er at mange elevar vel å rekne ut desse verdiane. I staden for å lese av grafen, brukar dei likninga som dei fann tidlegare i oppgåva eller som er gitt, til å rekne. Dette ser ein også i oppgåvene med Geogebra. Elevar føretrekk å bruke likninga (det algebraisk uttrykket) og ser ut til å stole meir på denne sjølv om ein grafisk tilnærming kan være både enklare og kjappare (Knuth, 2000). Likevel er det også verdt å merke seg at det er ein skilnad på korleis ein del elevar finn *y*-verdiar ved oppgitte *x*-verdiar for oppgåvene med Geogebra. I G1 ser det ut som at det er fleire som reknar eller les rett av grafen, medan det i G3 er fleire som nyttar seg av ei hjelpelinje. Det vil sei at dei brukar Geogebra til å teikne linja *x = 2* og så brukar kommandoen: *skjering mellom to objekt*. Årsaken til denne forskjellen kjem kanskje av kva oppgåver dei er vane med å løyse ved hjelp av Geogebra. Oppgåver med funksjonar forskjellig frå lineære vert ofte tenkt løyst ved hjelp av grafteiknar, som Geogebra. Då lærer elevane korleis dei brukar skjering mellom funksjonen i oppgåva og anten ei hjelpelinje (t.d. *x = 2*) til å finne ein *y*-verdi, eller ei hjelpelinje med ein gitt y-verdi til å finne ein *x*-verdi. I oppgåver med lineære funksjonar derimot, har elevane ofte lang erfaring med å anten lese av eller rekne ut koordinatane.

4.2.5 Frå graf til likning

Det er fleire oppgåver som handlar om å skifte mellom representasjonane graf og likning. Oppgåve 2 kan lett plasserast både under denne overskrifta og i kapittelet 4.2.6 *frå likning til graf*. Eg har valt å presentere den i sistnemnde. Men, i dette delkapitlet har eg valt å gjengi resultatet frå oppgåve 3b, G1b og G1c. G1c blir på ein måte ei oppfølgingsoppgåve eller kontroll på svaret i G1b. Desse oppgåvene testar om elevane klarar å finne likninga til den grafen dei først har teikna. Det skulle vise seg å skape vanskar.

Oppgåve 3

Ei rett linje går gjennom punkta A=(-3, -2) og B=(1, 6).

a) Sett punkta inn i koordinatsystemet og teikne linja.
b) Finn likninga til linja (på forma *y=ax+b*).
c) Bestem y, når *x= 2*
d) Bestem x, når *y= -1*
e) Gi ei tolking av stigningstalet til linja.

	Oppgåve 3b	Frequency	Percent
Valid	Heilt feil svar	3	3,5
	Rett svar (y=2x+4)	44	51,2
	Feil konstantledd.	7	8,1
	Feil stigningstal.	4	4,7
	Brukar skjering med x-akse som konstantledd eller stigningstal.	6	7,0
	Blandar stigningstal og konstantledd.	3	3,5
	Manglande svar	19	22,1
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.5.1 Svaroversikt til oppgåve 3b.

51,2 % svarar rett på denne oppgåva. Men, det er ikkje alle som les likninga til linja ut av grafen. Ein del elevar føretrekk å rekne ut både stigningstal og konstantledd (Knuth, 2000). Sjølv om det ikkje er nødvendig, kan det likevel vere ein slags kontroll på avlesing. Det er 22,1 % som ikkje har svara på denne oppgåva. Noko som kan tyde på at elevane finn det vanskeleg med dette representasjonsskifte. 6 elevar trur skjering med x-aksen er stigningstalet eller dei trur skjering med y-aksen er stigningstalet. Slår ein desse saman med dei tre som blandar stigningstal og konstantledd er det i overkant av 10 % som har denne feilen eller misoppfatninga.

E37:	y = 4x + 2.

E37 bytar om stigningstal og konstantledd, men eg finn ikkje andre svar hos eleven som kan avkrefte eller bekrefte om dette er ein misoppfatning eller ein tilfeldig feil. Eleven sendte feil dokument som svar på oppgåvene med Geogebra, og det kan derfor ikkje samanliknast med svar frå dei.

Vi ser på korleis elevane svarar på dei neste oppgåvene, G1b og G1c:

Oppgåve G1

a) Teikne linja som går gjennom punkta (-5, 2) og (3, -2) med Geogebra.

b) Finn likninga til linja (på forma $y = ax + b$).

c) Kva er stigningstalet og kva er konstantleddet til linja?

d) Bestem *y*, når *x*= -3.

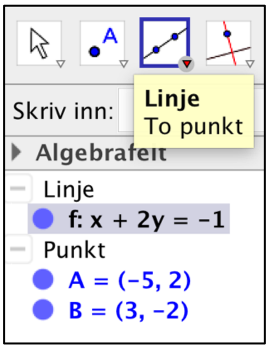
e) Bestem *x*, når *y*= -3.

Oppgåve G1b		Frequency	Percent
Valid	Heilt feil svar	7	8,1
	Rett svar (y = -0,5x - 0,5)	32	37,2
	Rett svar, men ikkje på forma y = ax + b.	4	4,7
	Blandar stign.t og konst.l	1	1,2
	Rett konstantledd. Feil stigningstal.	4	4,7
	Rett stigningstal. Feil konstantledd.	1	1,2
	Manglande svar	37	43,0
	Total	86	100,0

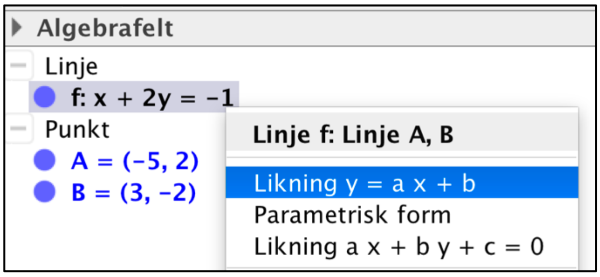
Tabell 4.2.5.2 Svaroversikt til oppgåve G1b.

Samanliknar ein denne oppgåva med oppgåve 3b, har talet på manglande svar auka frå 19 til 37. Det var også 35 elevar som ikkje svarte på G1a, der dei skulle teikne linja med Geogebra. Har ein først teikna linja rett, noko som alle utanom ein av dei som svarte fekk til, vil Geogebra gi svaret på likninga til linja i *algebrafeltet* (Sjå figur 4.2.4.1 nedanfor). Det «einaste» ein treng å gjere er å gjere om likninga til den forma som er kjend for elevane, $y = ax + b$. Dette kan ein gjere ved å «høgreklikke» på likninga og velje den forma som er etterspurd (Sjå figur 4.2.4.2). Men, ein må sjølvsagt kjenne framgangsmåten.

Det er ein forholdsvis høg prosentdel som ikkje får til denne oppgåva (rundt 15 %), og av dei som har fått den til er det overraskande mange som har rekna ut svaret eller prøvd å omforma likninga frå *algebrafeltet*, $x + 2y = -1$ sjølv. Fleire av dei elevane som ikkje får til denne oppgåva viser seg å få problem når dei skal flytte x-leddet over på høgre sida og etterpå dividere med 2, slik at y står igjen åleine på venstre sida. Desse funna samsvarar med anna forsking, som peikar på at mange elevar føretrekk ei algebraisk løysing (Knuth, 2000). Sjølv om dei i det eine tilfellet gjerne les av to punkt for å rekne ut stigningstalet til ei linje, vil dei heller rekne ut ein *x*- eller *y*-verdi på linja, ved hjelp av likninga, enn å lese av grafen.



Figur 4.2.4.1 Viser korleis ein teiknar linja gjennom punkta A og B med Geogebra, i oppgåve G1a.



Figur 4.2.4.2 Viser korleis ein kan omforma likninga til forma *y=ax+b*, oppgåve G1b.

I resultatet frå neste oppgåve (G1c) vil ein sjå kven av elevane som viser forståing for kva som er stigningstal og kva som er konstantledd. Sjølv om dei har rett likning i G1b, betyr nødvendigvis ikkje det at dei vil få til denne oppgåva. Eksempel på elevsvar for G1b og G1c har eg valt å presentere saman, etter resultatet frå G1c.

Oppgåve G1c		Frequency	Percent
Valid	Heilt feil svar	5	5,8
	Rett svar (-0,5 for begge)	28	32,6
	Feil stigningstal.	3	3,5
	Feil konstantledd.	3	3,5
	Forteiknsfeil på stigningstal og/ eller konstantledd.	5	5,8
	Trur at førstegradsleddet (*ax*) er stigningstalet.	2	2,3
	Blandar stigningstal og konstantledd.	1	1,2
	Manglande svar	39	45,3
	Total	86	100,0

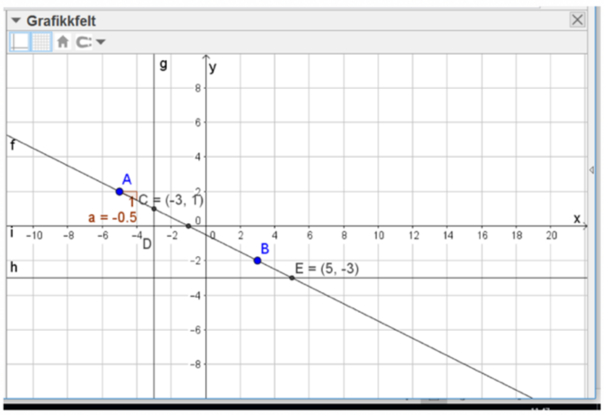
Tabell 4.2.5.3 Svaroversikt til oppgåve G1c.

Om ein samanliknar resultatet frå oppgåve G1b med resultatet frå G1c går det fram at det er 37,2 % som har rett svar på førstnemnde medan for den siste er denne prosenten gått ned til 32,6 %. Det viser at det er enkelte elevar som kjem fram til rett likning, anten ved rekning eller med Geogebra, men dei har ikkje tilstrekkelig kunnskap om stigningstal og konstantledd. Likevel er det verdt å merke seg at talet på svar som er *heilt feil* går ned frå 7 til 5. Det er også ein stor prosent manglande svar (45,3 %), men det heng naturlegvis saman med at det er allereie 40,7 % som ikkje har svart på G1a (Tabell 4.2.2.2) og vidare 43,0 % som ikkje har svart på G1b (Tabell 4.2.5.2). Den feilen som utmerkar seg handlar om forteiknsfeil på anten stigningstall eller konstantledd eller på begge. Feilen skuldast nok slurv ved omgjering av likninga i *algebrafeltet* eller manglande algebraiske ferdigheitar. Likevel er det oppsiktsvekkjande at elevane ikkje er meir opptekne av å kontrollere svaret sitt opp mot grafen.

E4:

oppgåve 1

a)



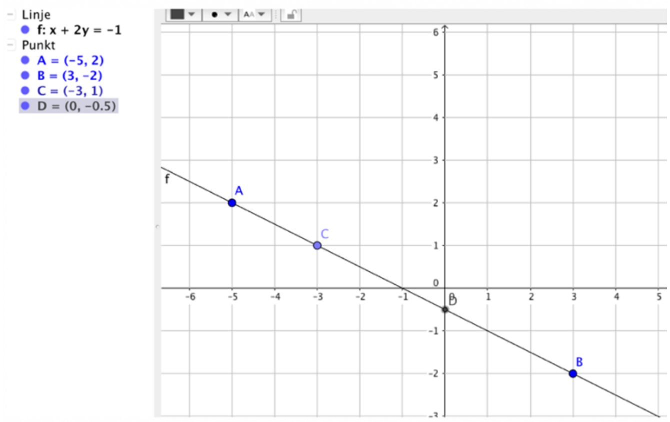
c) Stigningstalet4 er 0,5 som a viser. Konstantleddet er -1, som D viser.

I svaret til E4 er kjem det fram at stigningstalet er -0,5. Eleven svarar likevel at det er 0,5. Det tenkjer eg er ein slurvefeil og det er heller inga likning som kan vise noko anna (avkrefte dette). E4 har brukt Geogebra til å finne stigninga *a = -0,5*, men har lest av konstantleddet på *x*-aksen i *x = -1*. Det ser ut til at E4 trur at skjeringa med *x*-aksen er konstantleddet, sjølv om han også viser til punktet D.

E7: y = -2x - 1

I algebrafeltet hos E7 står det: f: x + 2y = -1. Men eleven har problem med å gjer om til *y = ax + b*. Det ser ut til at E7 har flytta 2y over til høgre sida og skifta forteikn, samt bytta om på x og y. Det kan hende eleven trur stigningstalet er -2 sidan linja går to verdiar mot høgre for kvar verdi ned. Skjering med *x*-aksen er -1. Her tyder det på at konstantleddet er henta frå skjeringa med *x*-aksen.

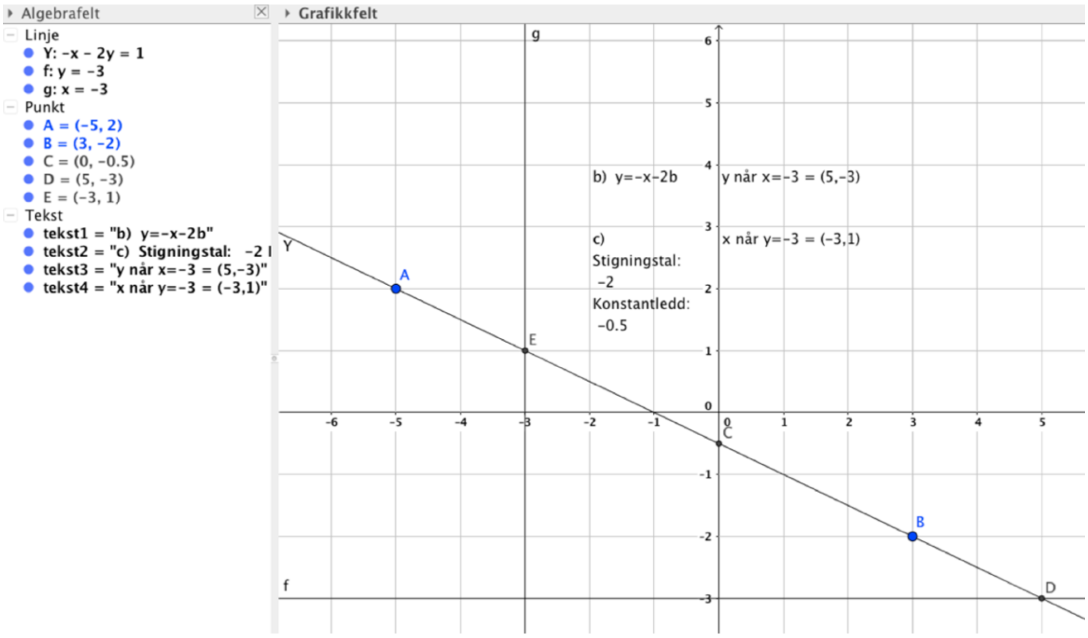
E52:



a)
b) likninga på grafen er y= 1x + 0,5
c) Stengingssalet er 0,5 og konstantleddet er 1

Vi ser frå svaret til E52 at her blir konstantleddet bytta om med stigningstalet, sjølv om det også skulle vore negativt forteikn på begge. Det kan virke som at E52 betraktar skjering med *x*-akse som konstantledd, men ser likevel ut til å tru at stigninga er på 0,5.

E61:



I svaret til E61 kjem det tydeleg fram at eleven bytar om *x*- og *y*-koordinatar i svaret til G1d og G1e. Eleven les likevel av rett konstantledd, *-0,5* (G1c). I svaret for likninga til linja er stigningstalet oppgitt som *-2b*, og seinare retta til *-2*. Det kan skuldast at det har stått *y = ax + b*, og så er bokstavane *a* og *b* tenkt byta ut. Stigningstalet har nok eleven lest av frå grafen, ved å sjå at linja går to mot høgre for kvar verdi den går ned.

E70:

b)

$$x+2y=-1$$

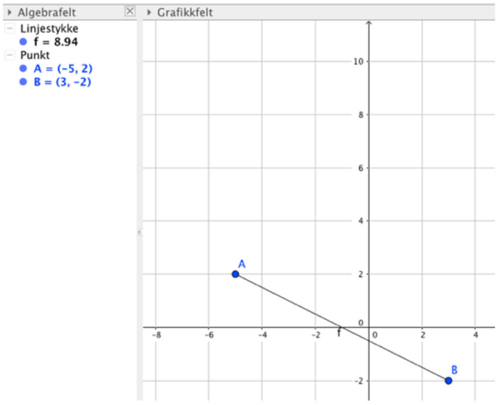
$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{2}=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{x}{2}+y=-0,5$$

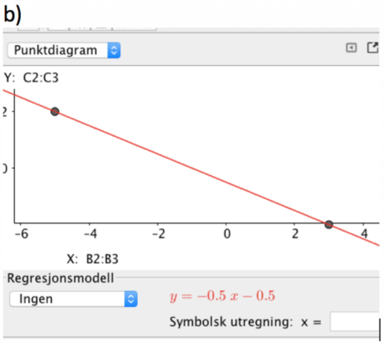
$$y=\frac{1}{2}x-0,5$$

Her ser ein at E70 reknar seg fint fram til den ønska forma på likninga (*y = ax + b*), men at det er ein forteiknsfeil på stigningstalet. Det tenkjer eg kjem av slurv, og kunne vore unngått om eleven hadde samanlikna grafen og likninga, for å sjå om representasjonsskifte var korrekt gjennomført (Adu-Gyamfi et al., 2012).

E72:

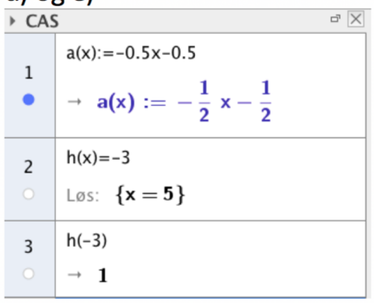


b)



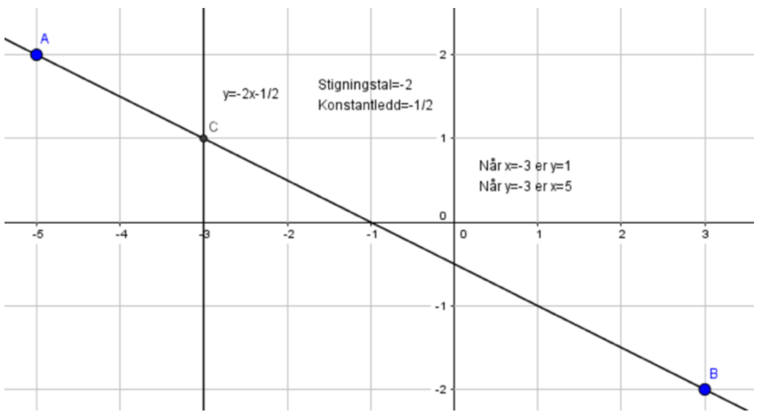
c) stigningstalet er -0,5 og konstantledder er -0,5

d) og e)



E72 har vore kreativ og tatt Geogebra i bruk på fleire måtar. Derfor er alle svara på oppgåve G1 med her. I G1a har eleven teikna eit linjestykke, i G1b har han brukt regresjon med punkta A og B og funne likninga til linja. Til slutt (G1d og G1e) har eleven nytta CAS (Computer Algebraic System integrert i Geogebra) til å løyse oppgåvene. Dette er kanskje unødvendig eller tungvindt, men det viser at E72 beherskar Geogebra slik at han får hjelp til å løyse oppgåvene.

E75:



Her er det tydeleg at E75 kan lese av punkt i koordinatsystemet. Men, i følge svaret til E75, stemmer ikkje stigningstalet med grafen. Det kan altså sjå ut til at eleven ser på stigningstalet som kor mykje x-verdien endrar seg når y-verdien minkar med 1. Samanliknar ein med svaret i oppgåve 1a, når dei skal teikne tre grafar, har eleven likevel klart dette heilt fint. Men, i sistnemnde oppgåve er det eit anna representasjonsskifte som testast, nemleg *frå likning til graf*. Om ein ser på oppgåve 3b, som kan samanliknast med G1b, har eleven fått denne til. At stigningstalet blir feil i oppgåve G1b kan då være tilfeldig, eller det kan skuldast at det er ein vanskelegare graf å finne stigningstalet til.

Resultatet frå oppgåvene som handlar om å gå frå graf til likning, viser store variasjonar i svar hos elevane og fleire kreative løysingsvariantar når elevane brukar Geogebra. Men, som vi ser i oppgåve G1b er det få elevar som *høgreklikkar* på likninga, slik at ein kan endre oppgjeven likningsform (i *algebrafeltet* i Geogebra) på ei rett linje til forma $y = ax + b$. Utifrå ein del av svara på denne oppgåva er det då naturleg å tenkje at om dei hadde kjent til denne metoden, så ville mange ha klart å endre forma på likninga utan å eigentleg forstå kva dei gjer, noko som ikkje er ønskjeleg. Men, det kan og tenkjast at ikkje alle las oppgåveteksten nøye nok, og dermed ikkje fekk med seg korleis likninga til linja skulle skrivast. Det kan også hende dei var nøgd berre ved å sjå at dei hadde fått til å teikne linja mellom punkt A og B. Som vi også såg i kapittel 4.2.4, er det mange elevar som føretrekk å rekne seg fram til likninga. I følgje Knuth (2000) kan det virke som om elevane stolar meir på ein algebraisk løysingsmetode, framfor det å lese av. Sjølv om det her ikkje handlar kunn om å lese av eit punkt på ein graf, men å finne både stigningstal og konstantledd, ser det ut som elevane trur ei algebraisk tilnærming er meir «skikkeleg». Kan hende handlar det om at dei då er meir trygge på at læraren gir dei full «score».

4.2.6 Frå likning til graf

I dette delkapitlet presenterer eg resultat frå oppgåve 1a, 2 (2a, 2b, 2c og 2d) og 6a frå del 1. Frå del 2 tar eg med interessante resultat frå G2, G4a og G5. Oppgåve 1a og 6a handlar om å teikne grafen til ein funksjon når likninga er kjend. Men, i oppgåve 2 går oppgåva ut på å kjenne att grafen til fire gitte likningar blant åtte grafar. Slik sett kan ein også sjå for seg at dette er å gå frå ein graf til ei likning, og ein må verifisere at det er ein semantisk kongruens mellom kjelde og målrepresentasjon, jamfør Adu-Gyamfi et al. (2012). Oppgåve 6a skil seg ut ved at ein her først skal rekne ut *y*-verdiar for gitte *x*-verdiar og fylle ut ein tabell, før ein teiknar grafen. Ein blir altså bedt om å bruke tabell som ein slags «mellomrepresentasjon» på vegen til målforma (Janvier, 1987a). 6a kunne såleis også vore presentert under andre overskrifter, sidan den også handlar om å gå frå ei likning til tabell eller frå ein tabell til graf. Oppgåvene har altså litt ulik form, men dei handlar alle om å gå frå ei likning til ein graf.

Oppgåve 1

a) Teikne grafen til: ***A*** $y = x - 3$ ***B*** $y = -3 - 2x$ ***C*** $y = 3$

i koordinatsystemet nedanfor og merk grafane med ***A, B og C***.

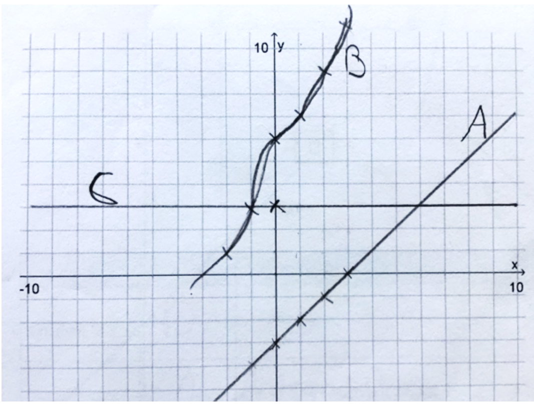
b) Kan du finne felles eigenskapar ved grafane?

	Oppgåve 1a	Frequency	Percent
Valid	Graf C er feil (resten rett).	4	4,7
	Graf A er feil (resten rett).	2	2,3
	Alle grafane er feil.	13	15,1
	Graf A er rett (resten feil).	5	5,8
	Graf B er rett (resten feil).	1	1,2
	Graf C er rett (resten feil).	2	2,3
	Rett svar (alle grafane er rett teikna)	38	44,2
	Teiknar grafane som eit punkt.	6	7,0
	Teiknar grafane som punkt, med stigningstal (*a*) som x-verdi og konstantledd (*b*) som y-verdi.	3	3,5
	Byttar om *x*- og *y*-koordinatar.	1	1,2
	Graf B er feil (resten rett).	6	7,0
	Manglande svar	5	5,8
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.6.1 Svaroversikt til oppgåve 1a.

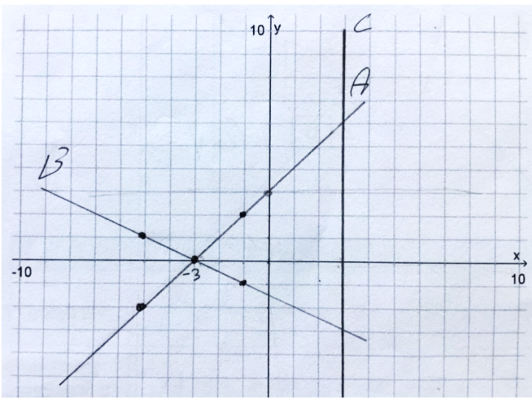
Det er berre 5,8 % av elevane som ikkje har svart på denne oppgåva. Sjølv om det er tre forskjellige variantar av lineære funksjonar som skal teiknast, hadde eg forventa at det var fleire enn 44,2 % som hadde alt rett. Vi ser at for dei som har kunn ein graf rett eller kunn ein graf feil, så er det grafen til A som er tilsynelatande enklast for elevane å teikne. Deretter følgjer C og så grafen til B, som den vanskelegaste. I følgje Bock et al. (2016) har elevar større vanskar med å forstå lineære funksjonar med negativt stigningstall. Noko som stemmer bra med dette resultatet. Eit mønster som går igjen hos enkelte elevar er at dei har stigningstalet (*a*) som x-verdi og konstantleddet (*b*) som y-verdi. Resultatet på denne oppgåva kunne også vore delt opp etter dei tre likningane, noko som kanskje ville vore meir oversiktleg. Men, eg tenkjer at tabell 4.2.6.1, likevel får fram både hovudtrekk og interessante funn frå denne oppgåva. Nedanfor ser ein nokre eksempel på korleis elevar har svart.

E3:



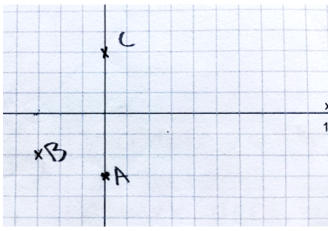
E3 teiknar både grafen til A og grafen til C korrekt. Det kan vere at det er forma på likninga til B som gjer det vanskeleg for E3 å teikne denne grafen. Konstantleddet og *ax*-leddet har byta plass, samanlikna med slik elevane normalt får presentert slike likningar. Likevel kan det virke som om eleven ikkje er klar over at det skal være ei rett linje. Han brukar stigningstalet 2, og får då eit «hopp» på grafen der den skjer y-aksen. Grafen gjer også ein «sving» nede mot venstre, slik at nullpunktet blir -3. Det kan sjå ut som om eleven blandar nullpunkt og skjering med y-aksen (konstantledd).

E9:



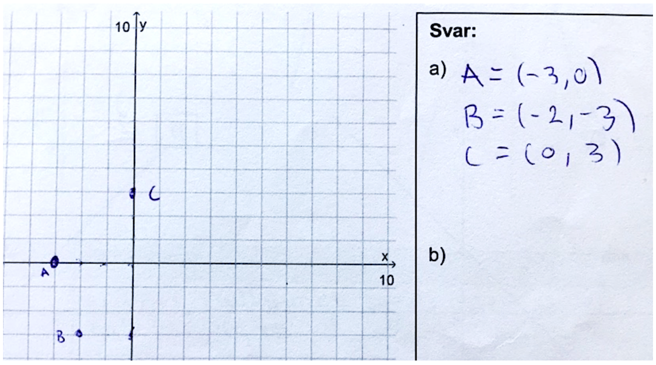
E9 bytar om på x- og y-aksen. Ein kan sjå at konstantledda blir skjering med x-aksen og at stigningstala stemmer i forhold til kvarandre. I intervjuet med E9 kjem det fram at eleven hadde ein misoppfatning om at x-aksen var loddrett og at y-aksen var vassrett, trass i at det er merka av namn på aksane. Men, eleven fann sjølv ut av dette undervegs i samtalen og «proppen» eller misoppfatninga vart fjerna (Brekke, 2002; Nygaard & Zernichow, 2006; Sierpinska, 2005). Dette er noko Botten (2011) trekk fram som ein stor fordel med intervju, som eit middel til å avdekke misoppfatningar. Ved å samtale med elevane om korleis dei løyser eller har løyst ei oppgåve er det enklare å spore misoppfatningar, samanlikna med det å gi ei skriftleg tilbakemelding eller vurdering.

E18:



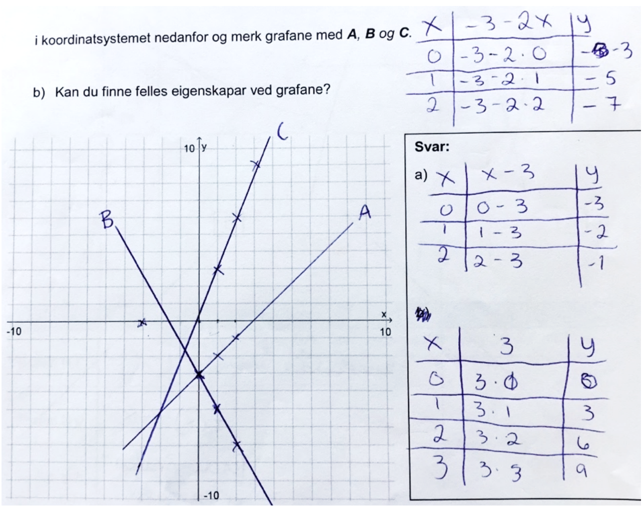
E18 (eleven er også intervjua) har teikna tre punkt med stigningstalet *a* som x-verdi og konstantleddet *b* som y-verdi. I tillegg så tolkar eleven *x* (i likninga for A), som at det står *0-x*, altså stigningstall *0*. Men E18 har også stigningstal *0* i C. Tenkjemåten ser dermed ikkje ut til å vere heilt gjennomført.

E52:



E52 teiknar også grafane som punkt A=(-3,0), B=(-2,-3) og C=(0,3). Noko vi også kan sjå til høgre i bildet. Det kan være eleven les x er -3, sidan det står *y = x - 3*. *y= -3* og -2 for x, sidan det står *-2x* i likninga. C blir då kunn eit punkt på y aksen.

E55:



Hos E55 er grafane til A og B rette, medan C er teikna som ein proporsjonal funksjon *y = 3x*. Eleven har tabell for alle tre grafane. I tabellen til C multipliserer eleven 3 med 0, 3 med 1, 3 med 2 og 3 med 3. Eleven behandlar C som om det er ein proporsjonalfunksjon. Dette kan ha ein samanheng med det Bock et al. (2016) fann i sin studie, nemleg ein «misbruk» av proporsjonalitet, sjølv om dette berre dreier seg om denne eine oppgåva. Kan hende svaret på C hadde sett annleis ut dersom det for eksempel også var ei oppgåve D, å teikne funksjonen *y = 2x*. Då ville eleven kanskje fått vanskar med å teikne C slik den er teikna her, og det hadde oppstått ein kognitiv konflikt, jamfør Piaget (Imsen, 1998). Men, det er ei kjend sak frå forskingslitteraturen at elevar har vanskar med representasjonsskifte som involverer konstantfunksjonar (Leinhardt et al., 1990).

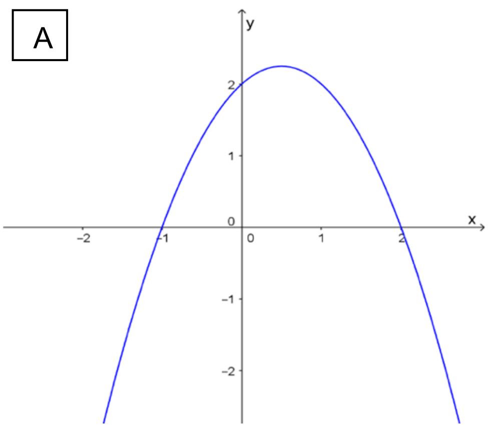
I neste oppgåve, 2, skal elevane finne grafen som passar med dei gitte likningane. Det er to lineære funksjonar, ein andregradsfunksjon og ein tredjegradsfunksjon. Elevane skal kjenne att eigenskapar som forma på grafane, stigningstal, konstantledd, ekstremalpunkt og eventuelle nullpunkt.

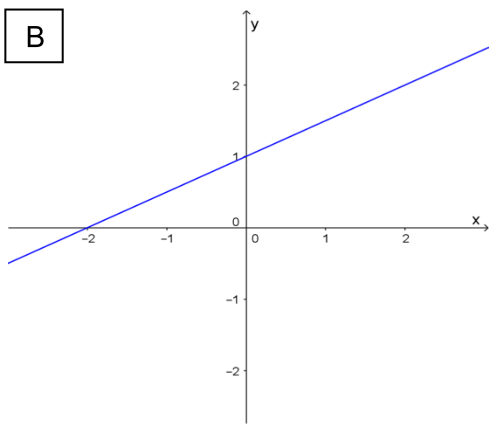
Oppgåve G2

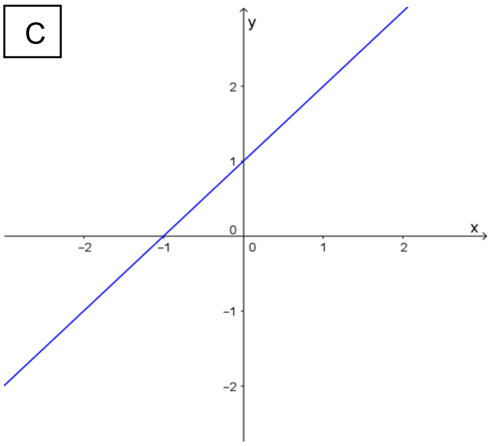
Funksjonane *f, g, h og i* er gitt ved

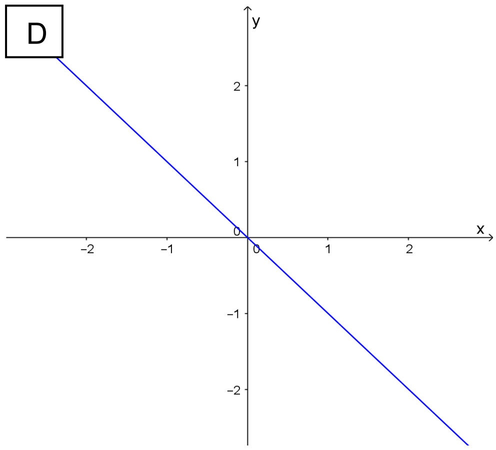
$$f(x) = -x \qquad g(x) = -x^2 + x + 2 \qquad h(x) = \frac{1}{2}x + 1 \qquad i(x) = 2x^3 + 1$$

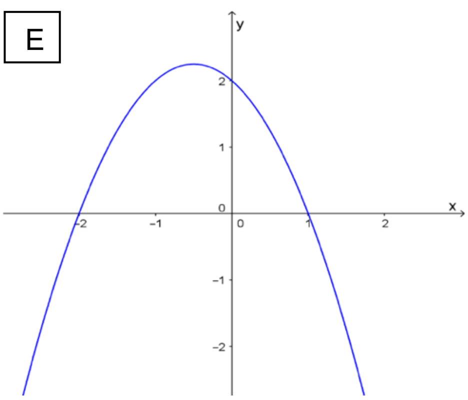
Nedanfor ser du grafane til *åtte* ulike funksjonar (A-H denne og neste side). Kva graf er grafen til *f,* kva graf er grafen til *g*, kva graf er grafen til *h* og kva er grafen til *i* ? **Grunngi svara dine**.

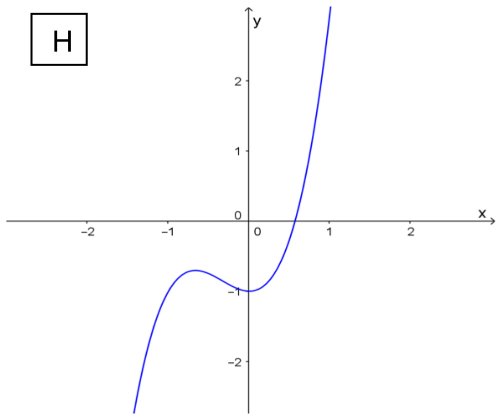


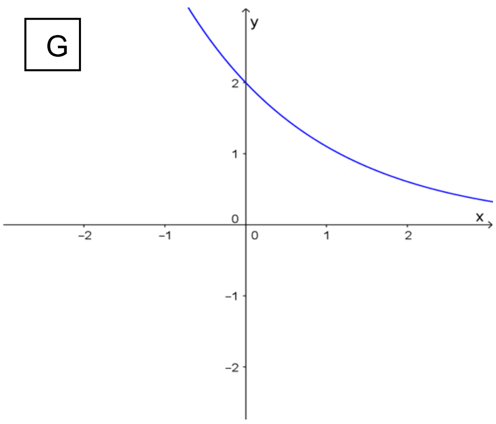


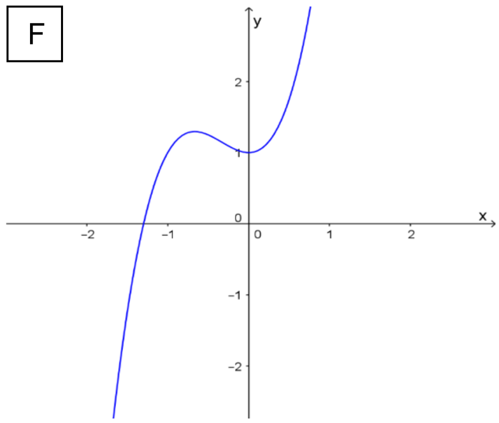












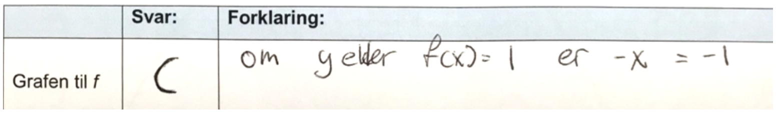
Svara frå oppgåva er delt inn i 2a, 2b, 2c og 2d for å skilje dei ulike funksjonane frå kvarandre. Resultata er presentert i tabell 4.2.6.2 på neste side.

Oppgåve 2a		Frequency	Percent
Valid	Rett svar. Manglande eller mangelfull forklaring.	27	31,4
	Rett svar (Graf D)	42	48,8
	Graf C.	10	11,6
	Graf A.	2	2,3
	Graf H.	1	1,2
	Graf B.	1	1,2
	Manglande svar	3	3,5
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.6.2 Svaroversikt til oppgåve 2a, grafen til *f(x).*

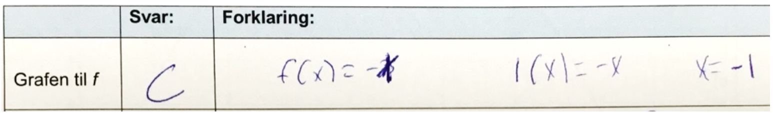
Det er omlag 80 % som har velt rett graf til likninga i denne oppgåva, men berre 48,8 % har gitt tilstrekkelig forklaring. Dette er den likninga i oppgåve 2 med flest rette svar (også dei utan eller med manglande forklaring). Heile 11,6 % har valt C, som også er ei rett linje. Eg trur ein del har valt denne grafen fordi den går gjennom -1 på x-aksen. Som vi ser av svara til E20 og E21, nedanfor.

E20:



	Svar:	Forklaring:
Grafen til *f*	C	om y elder f(x)= 1 er -x = -1

E21:

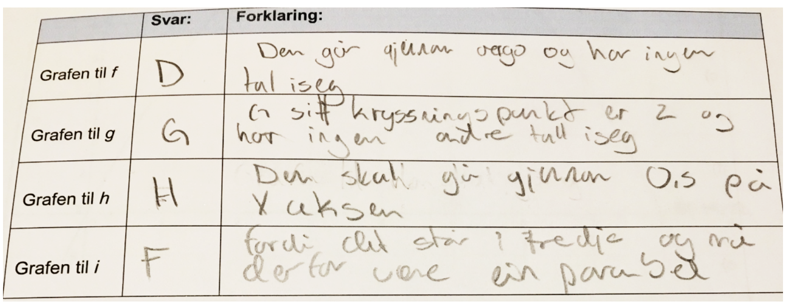


	Svar:	Forklaring:
Grafen til *f*	C	f(x)= -~~x~~ 1(x)=-x x=-1

E56: *D. Det er ein lineærfunksjon med stigningstall 1x. Det er ei rett linje som aukar med 1 og skjærer ved origo.*

Elev E56 vel rett alternativ og forklarer valet sitt på ein god måte. Det er likevel litt rart at stigningstalet vert omtala som positivt, aukande. Same eleven svarar alternativ G (eksponentiell funksjon) for *h(x),* som er den andre lineære funksjonen i oppgåva (2c). Det tydar på at E56 ikkje har klart for seg kva som kjenneteiknar dei ulike funksjonane i oppgåva og eigenskapane deira.

E59:



	Svar:	Forklaring:
Grafen til *f*	D	Den går gjennom origo og har ingen tal iseg
Grafen til *g*	G	G sitt kryssingspunkt er 2 og har ingen andre tall iseg
Grafen til *h*	H	Den skal gå gjennom 0,5 på X aksen
Grafen til *i*	F	fordi den står i tredje og må derfor være ein parabel

E59 tolkar *x* som *0x*, altså stigningstall *0*. Det er tydeleg at eleven brukar stigningstal *a* som skjering med x-akse. Sjølv om eleven skriv at grafen går gjennom origo, ser vi at metoden gjentek seg i oppgåve 2c, der eleven vel tredjegradsfunksjonen H, som grafen til *h(x)* sidan den skjer *x*-aksen i 0,5:

$$h(x) = \frac{1}{2}x + 1 .$$

Oppgåve 2b		Frequency	Percent
Valid	Rett svar. Manglande eller mangelfull forklaring.	25	29,1
	Rett svar (Altenativ A)	25	29,1
	Graf E.	11	12,8
	Graf G.	9	10,5
	Graf D.	1	1,2
	Graf F.	3	3,5
	Graf B.	5	5,8
	Graf C.	1	1,2
	Manglande svar	6	7,0
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.6.3 Svaroversikt til oppgåve 2b, grafen til *g(x)*.

Nærmare 60 % har valt rett graf til denne likninga. Men, som i 2a, er det ein del som ikkje klarer å gi ei grunngjeving for svaret (29,1 %). Medan det i 2a stort sett var valt alternativ blant dei rette linjene, er det litt meir variasjon her. Grafen til E kjem som ein god nummer to, med 12,8 %, og grafen til E med 10,5 %.

E56:	A. Denne grafen passar sidan skjeringspunktet på y-aksen er 2 og den er omvendt proporsjonal. Minna om E, men x er ulik.

Det er tydeleg at E56 ser på dei to andregradsfunksjonane, men utan å gi ei god forklaring på kvifor det er A som er rett.

E59:	G. G sitt kryssingspunkt er 2 og den har ingen andre tal i seg.

E59 sitt svar er også avbilda under resultatet for oppgåve 2a. Eleven vel G fordi den har skjering med *y*-aksen på 2 og det er ingen andre tal (koeffisientar framfor 2. grads- og 1. grads-leddet forskjellig frå 1), altså grafen er kunn borti ein av aksane og det er i y = 2. Det ser ut til at denne eleven ikkje er kjend med andregradsfunksjonar, verken graf eller likning.

E73:

	Svar:	Forklaring:
Grafen til *f*	D	-x = skjæring i origo. Grafen synker så den er negativ.
Grafen til *g*	A	Stigningstallet = -1 E-2:2 andregradsfunksjon betyr parabel. synker med -1 = 2:2.
Grafen til *h*	B	skjæring i y= 1 og stigningstallet blir y=1: x=-2 = $\frac{1}{2}$
Grafen til *i*	F	3.gradsfunksjon = flere svingninger og skjæring til y = +1

E73 vel rett graf til *g*, men forklaringa er ikkje heilt tilfredstillande. Eleven byrjar med ei «global tilnærming» ved å velje ein parabel (Leinhardt et al., 1990). Vidare blir det meir «lokalt», ved at eleven undersøkjer stigninga til grafen i eit intervall, og viser at den er -1. Problemet er at denne grafen har fleire intervall, med ulik stigning. Når E73 likevel svarar at stigninga er -1, tyder dette på at eleven har ein tendens til å føretrekke lineære grafar og funksjonar (Leinhardt et al., 1990, s. 33).

	Oppgåve 2c	Frequency	Percent
Valid	Rett svar. Manglande eller mangelfull forklaring.	12	14,0
	Rett svar (Alternativ B)	44	51,2
	Graf H.	5	5,8
	Graf D.	2	2,3
	Graf G.	4	4,7
	Graf A.	4	4,7
	Graf F.	4	4,7
	Graf C.	5	5,8
	Manglande svar	6	7,0
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.6.4 Svaroversikt til oppgåve 2c, grafen til *h(x)*.

51,2 % svarar rett graf, B, med godkjend forklaring. Det er omlag same andelen som har klarte den første lineære funksjonen i 2a (48,8 %), men då var det langt fleire som valte rett alternativ utan å ha forklaring. Det ser derfor ut til at denne likninga er litt vanskelegare å finne grafen til. Men, litt oppsiktsvekkande er det at fleire elevar har valt heilt andre typar grafar, enn dei lineære, som svar.

E18: B. Er verdiane 2 og 1 som blir oppgitt + brøk (0,5) så tenkte denne.

Her ser det ut til at eleven brukar skjering med aksane og at det gir ein passande brøk, til å forsvare valet av graf B.

E30: G. Når x = 0,5 er y = 1,5.

Det verkar som om eleven tenkjer at ein skal leggje saman stigningstalet og konstantleddet og at dette skal bli 1,5 til saman.

E59:	H. Den skal gå gjennom 0,5 på x-aksen.

Her er det tydeleg at E59 i oppgåve 2c brukar stigningstal som skjering med x-aksen. Stigningstalet til funksjonen *h(x)* er *0,5*, men eleven vel den siste tredjegradsfunksjonen og forklarer det med at grafen skjer x-aksen i 0,5. Dette er den einaste grafen som har 0,5 som skjering med x-aksen. Ein kan då dra slutninga at denne eleven har ei misoppfatning om at «talet med x» eller stigningstalet er skjering med x-aksen, sidan eleven brukar same argumentasjon i 2a. Dette passar likevel ikkje med det eleven svarar i 2b og 2d, men då er det også fleire variantar av ledd med x.

E77:	A. Fordi det er delestykke derfor er grafen bøygd.

E77 vel grafen til A, som er ein parabel. E77 grunngjev det med at likninga inneheld eit delestykke og at det må gi ein bøygd graf. Her kan det være at eleven blandar med omvendt proporsjonale funksjonar. Kan hende E77 hadde gitt eit anna svar om det stod *h(x) = 0,5x + 1.* Om så ikkje var, er dette ein misoppfatning (delestykke i ei likninga til ein funksjon gir bøygd/krumma graf).

Oppgåve 2d		Frequency	Percent
Valid	Rett svar. Manglande eller mangelfull forklaring.	21	24,4
	Rett svar (Alternativ F)	39	45,3
	Graf E.	6	7,0
	Graf G.	4	4,7
	Graf A.	3	3,5
	Graf C.	4	4,7
	Graf B.	2	2,3
	Graf H.	3	3,5
	Manglande svar	4	4,7
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.6.5 Svaroversikt til oppgåve 2d, grafen til *i(x).*

Av resultata på oppgåve 2d, ser ein at det framleis er mange som svarar rett alternativ (omlag 70 %), men at det er 45,3 % med fullstendig rett svar. Det er to grafar som høyrer til ein tredjegradsfunksjon, men av svara ser ein at elevane vel blant alle variantane. Berre grafen til *f(x),* D, er ikkje å finne i resultatet. Talet på manglande svar er lågare enn for 2b og 2c.

E42:	C. Einaste lineære grafen igjen....

Her er det tydeleg at ein tenkjer at grafen må være eit rett linje (Bock et al., 2016; Leinhardt et al., 1990).

E52:	E. Alle tredjegradsfunksjonar er bua, og stigningstalet er 1.

E52 vel den eine andregradsfunksjonen, kallar den ein tredjegradsfunksjon og blandar i tillegg inn stigningstal. Men om ein ser på svara eleven har for 2a, 2b og 2c, kjem det fram at denne eleven omtalar konstantleddet i likninga som stigningstal. (Svar 2a: D. «Kryssar nullpunkt fordi ingen andre var oppgitt», svar 2b: F. «Andregrad = Bua stigningstall = 2», svar 2c: C. «Stigningstal = +1»). Dette er tydeligvis ei misoppfatning denne eleven har. Men, eleven blandar ikkje stigningstal og konstantledd, for kunn to av grafane som er valt (2a og 2c) har konstantledd som stemmer med likninga.

E63:	G. proporsjonal.

Elev E63 går for ei proporsjonal løysing. Grafen til G liknar ein omvendt proporsjonal funksjon. Men, eleven ser ikkje på skjering med y-aksen eller eventuelle nullpunkt.

E77:	B. fordi den går gjennom –2 og 1.

Forklaringa ser ut til å vere basert på at likninga til *i(x)* inneheld koeffisientane 2 og 1. Ser ein på svara til E42 og E77 verkar det som om elevane først leitar blant dei rette linjene, men med ulike forklaringar.

Oppgåve 6

a) Gitt $y = x^2 - 2x$.

b) Fyll inn resten av verditabellen og skisser grafen.

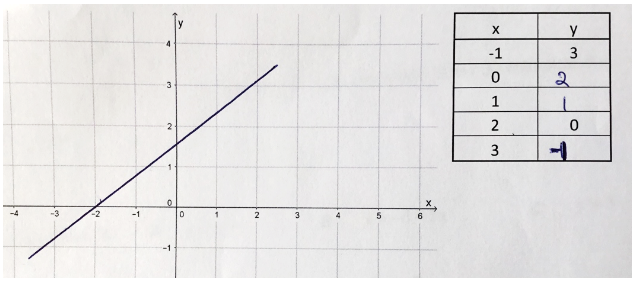
x	y
-1	3
0	
1	
2	0
3	

Oppgåve 6a		Frequency	Percent
Valid	Rett svar	44	51,2
	Tabellen er rett. Manglar/feil skisse.	5	5,8
	Tabellen er feil. Manglar/feil skisse.	27	31,4
	Manglande svar	10	11,6
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.6.6 Svaroversikt til oppgåve 6a.

Det er 51,2 % som har fått denne oppgåva til. Legg ein saman prosentane for dei som har svart rett og dei som har rett tabell, men har feil eller manglande skisse, er det 57,0 % som klarer å gå frå likning til tabell i denne oppgåva. Det er berre tre *y*-verdiar som skal reknast ut, men, vi ser likevel at det er heile 31,4 % av elevane som har feil i tabellen, og som dermed får feil skisse eller manglar denne.

E48:



E48 fyller inn *y*-verdiane 2, 1 og -1 og teiknar ei rett linje. Denne linja skjer *x*-aksen i *-2* og er veksande. Tabellen viser ei linje med negativt stigningstal og konstantledd 2. Det kan hende eleven trur grafen må skjere *x*-aksen i *-2*, sidan det står *-2x* i det andre leddet i likninga.

E18 og E38: Viser utrekning. Bommar berre med x = 0, får y = -2, $y = 0^2 - 2 \cdot 0 = -2$

Desse elevane har problem med å sette *x = 0* inn i likninga for x. I tillegg skisserer dei rette linjer utan å sjå av likninga at det skal bli ein parabel. Det tydar på ei instrumentell tilnærming til det å teikne ein graf (Mellin-Olsen, 1984; Skemp, 2006)). Elevane har lært seg ein algoritme for å fylle ut ein tabell dei skal bruke til å skissere grafen, men ser ikkje samanheng med likninga som her er utgangspunktet for både tabell og graf (Adu-Gyamfi et al., 2012; Duval, 2006).

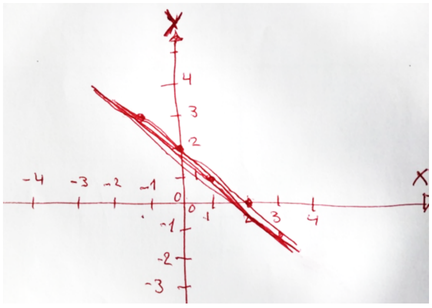
E55:	E55 fyller først ut tabellen med minkande y-verdiar (sjå E80, litt lenger nedanfor), etter linja y = -x + 2. Deretter lagar eleven tabell og viser utrekningar. E55 får då y-verdiar som aukar med ein for kvar x-verdi etter likninga y = x - 2. Men, den siste x-verdien skil seg ut, for då gjer linja eit «hopp», x = 3 gir y = 3, noko som ikkje stemmer med linja som er teikna.

Det som utmerkar seg her er trongen etter å få ei rett linje. Sjølv om oppgåva viser likninga til ein andregradsfunksjon, har E55 to gongar forsøkt å teikne ei rett linje. Denne eleven er også intervjua.

E62:	Har ein feil i tabellen, og det er utrekninga for x = 1. Her får eleven -2.

Det er fleire elevar som har same feilen. Det kan være dei les x^2 som at koeffisienten er null og at $y = x^2 - 2x$ dermed blir $y = 0{\cdot}1^2 - 2{\cdot}1 = -2$.

E80:



x	y
-1	3
0	2
1	1
2	0
3	-1

I svaret til E80, ser ein at eleven har funne y-verdiar som gir ei rett linje. Andregradsfunksjonen blir til ein lineær funksjon. Eleven viser at denne kan teikne grafen utifrå ein tabell, men syner samtidig ei lineær tilnærming. Denne måten å fylle ut tabellen på finn ein også hos E24, E25, E48, E55 og E83. Det kan vere at elevane berre fyller ut tabellen slik dei intuitivt tenkjer den skal være, utan å bruke eller sjå på likninga (Leinhardt et al., 1990). Då passar det med minkande verdiar for *y*. Det er likevel dette både Bock et al. (2016) og Leinhardt et al. (1990) omtalar som «misbruk av» eller «generalisering av» linearitet. Noko som går igjen fleire stader i resultatet.

I neste oppgåve, G2a handlar det om å teikne grafane til fire gitte funksjonsuttrykk (likningar) og samtidig kunne forstå nokre felles eigenskapar ved likning og graf. I G2b og G2c har eg valt å ikkje presentere, då dei ikkje gir noko ny informasjon som kan svare på problemstillinga.

Oppgåve G2

a) Teikne grafen til dei fire funksjonane nedanfor i same koordinatsystem:

$$f(x) = x - 3 \qquad g(x) = -2x - 3 \qquad h(x) = x \qquad i(x) = -x - 3$$

b) Kvifor kan vi sei at grafane til *f* og *h* er parallelle?

c) Korleis veit vi at $g(0) = i(0)$?

Oppgåve G2a		Frequency	Percent
Valid	Rett svar	57	66,3
	Har teikna h som *h(x)=0* (dei andre er rett teikna).	1	1,2
	Manglande svar	28	32,6
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.6.7 Svaroversikt til oppgåve G2a.

Det er 66,3 % som svarar rett på denne oppgåva, der ein skal teikne heile fire ulike lineære funksjonar. Dersom ein samanliknar med oppgåve 1a, der elevane skal teikne tre lineære funksjonar, er det over tjue prosentpoeng fleire elevar som har fått til oppgåve G2a. Samtidig ser vi at 32,6 % av elevane har ikkje svart. Den eine eleven som har svart feil, har teikna den eine grafen som *h(x) = 0.* Det verkar som ein del elevar trur at når det ikkje står noko tal framfor x, er det det same som at det står null x. Då blir det feil sjølv om ein brukar Geogebra til å teikne grafen.

Oppgåve G4

Ei bedrift produserer og sel *x* einingar av ei vare per dag. Overskotet per dag, i tusen kroner, er gitt ved funksjonen *O*

$$O(x) = -x^2 + 20x - 19 \qquad for \quad 0 \le x \le 25$$

a) Teikne grafen til *O.*

b) Kor mange einingar må bedrifta produsere og selje per dag for å gå med overskot?

c) Kor mange einingar må bedrifta produsere og selje per dag for å få størst mulig overskot? Kor stort er overskotet då?

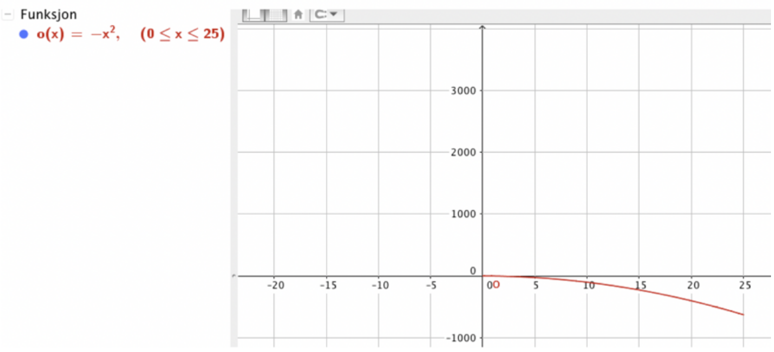
d) Ein dag vart det produsert og seld 14 einingar. Kva vart overskotet då?

Oppgåve G4a		Frequency	Percent
Valid	Rett svar	46	53,5
	Har kunn med andregradsleddet, men rett definisjonsmengd.	1	1,2
	Viser del av funk.utr. i algebrafeltet. Mangelfull innst. av aksar.	1	1,2
	Manglande svar	38	44,2
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.6.8 Svaroversikt til oppgåve G4a.

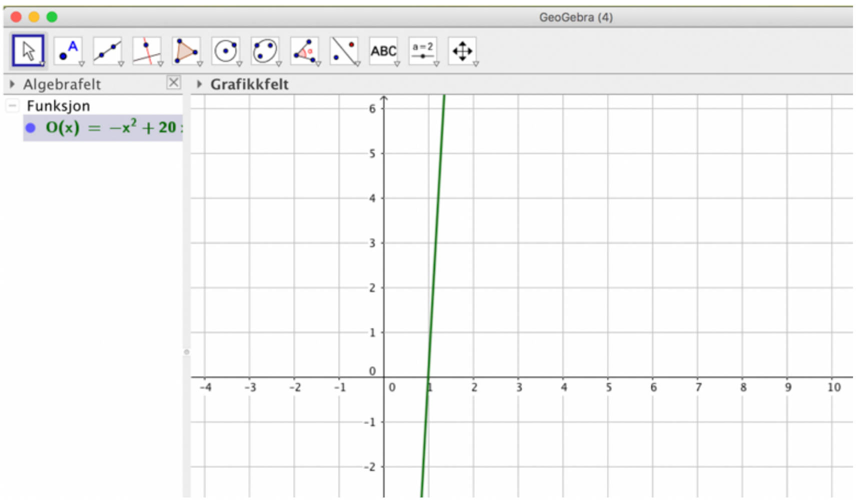
Elevane skal teikne grafen til *O*, for ei gitt definisjonsmengd. Berre to elevar som svarer på denne oppgåva har manglar ved svaret. 53,5 % svarar rett og heile 44,2 % svarar ikkje på oppgåva.

E54:



E54 har berre med første del av funksjonsuttrykket. Eleven teiknar likevel med rett definisjonsmengd, noko som er meir krevjande enn det å teikne ein graf definert for alle x.

E63:



Hos E63 kan ein ikkje sjå heile funksjonsuttrykket i *algebrafeltet* og heller ikkje heile grafen i *grafikkfeltet.* Det vitnar om manglande forståing for innstilling av aksar og for situasjonen denne grafen skal vise, sjølv om eleven har klart å teikne ein graf med Geogebra.

I oppgåve G5 skal elevane først teikne grafen til funksjonen *f*. Dersom elevane ikkje har endra innstillingane for «avrunding» i Geogebra, står desse normalt på to desimalar. Då vil det stå $f(x) = 0.01x^3 - x + 150$ i *algebrafeltet* etter at elevane har teikna grafen. Slike avrundingar skapar ofte frustrasjon og spørsmål hos elevane om dei oppdagar dette, og er årsaka til at denne oppgåva er med i undersøkinga. Resultatet frå G5b har eg valt å ikkje presentere.

Oppgåve G5

a) Teikne grafen til $f(x) = 0{,}005x^3 - x + 150$

b) Kven av grafane nedanfor gir eit rett bilde av grafen til *f* ? Forklar.

Oppgåve G5a		Frequency	Percent
Valid	Rett svar	13	15,1
	Rett svar, men det står 0.01 som koeffisient i tredjegradsleddet.	23	26,7
	Manglande svar	50	58,1
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.6.9 Svaroversikt til oppgåve G5a.

Det er 15,1 % som får rett svar, med rett funksjonsuttrykk i algebrafeltet og 26,7 % som har rett svar men der tredjegradsleddet er avrunda (0,005 til 0,01). Resultatet viser at alle som har forsøkt å teikne funksjonen får det til, sjølv om det er ein tredjegradsfunksjon med både små og store koeffisientar. Likevel ser ein og at det er heile 50 elevar som ikkje har svart. Alle svar, der funksjonsuttrykket til *f* er synleg (anten i *algebrafeltet* eller i *grafikkfeltet*) har $f(x) = 0.01x^3 - x + 150$ som funksjonsuttrykk med avrunda svar for tredjegradsleddet. Det er stor sjanse for at mange av dei andre elevane som har teikna grafen også har fått same utrykk og avrunding, men det kjem ikkje med i svaret. Eg fann kunn ein elev som viste rett funksjonsuttrykk. Det er viktig å presisere at her har det med programinnstilling og avrunding i Geogebra å gjere og at alle som har teikna grafen rett har fått 2 poeng. Standard innstilling for avrunding er 2 desimalar. Sjølv om grafen ein teiknar vert rett, kan dette likevel vere eit problem, til dømes på ein prøve. Eleven får eit anna funksjonsuttrykk enn det denne «la inn» i *inntastingsfeltet* og det skapar forvirring og usikkerhet. Ein får noko anna enn det ein forventa. Men, her handlar det mykje om trening med Geogebra og erfaring ein får ved å bruke programmet. Samtidig dreier det seg også om vere observant, og å vurdere grafen og likninga ein brukar opp mot den funksjonen som er gitt i oppgåva (Adu-Gyamfi et al., 2012). Slike vanskar er ofte ikkje eit problem om ein arbeider med funksjonar på tradisjonelt vis, altså utan Geogebra. Noko som sjølvsagt også heng saman med kva funksjonar ein møter i oppgåvene. Det er sjeldan fleire desimalar i likningar til funksjonar som er gitt i tradisjonell kontekst.

I dette kapittelet som handlar om korleis elevane klarer å gå frå likning til graf, er det mange interessante funn. Resultatet frå oppgåvene utan Geogebra viser at ein del elevar har vanskar med å teikne grafen til ein lineær funksjon. Nokre teiknar grafen som eit punkt (Mevarech & Kramarsky, 1997). Andre blandar stigningstal og konstantledd, eller ser på stigningstalet som skjering med x-aksen. Det at elevar teiknar grafen som eit punkt kan henge saman med at elevane ofte har vore eksponert for frekvenstabellar og stolpediagram, og at elevane er vane med å konstruere og tolke utifrå ordna par (x, y). Dette drar dei med seg når dei skal teikne grafar (Mevarech & Kramarsky, 1997). Det går også tydeleg fram av svara i oppgåve 6a at ein del elevar har ein «lineær tilnærming» eller «lineær-avhengighet» når dei skal teikne grafen til ein andregradsfunksjon (Bock et al., 2016; Leinhardt et al., 1990, s. 33). Vi har også sett at elevar har problem med at dei blandar nullpunkt og konstantledd eller nullpunkt og origo.

Samanliknar ein med svara der elevane skal bruke Geogebra til å teikne grafane, er funna der stort sett av ein annan karakter. Av dei som har svart har også mesteparten av elevane klart å teikne grafane rett. Det er likevel ein elev som «drar med seg» ein misoppfatning eller feil, der denne teiknar $h(x) = x$ som $h(x) = 0$. Men, det som ser ut til å vere krevjande for dei elevane som har svart, med Geogebra, går mest på innstillingar av *grafikkfeltet* og talet på desimalar uttrykt i *algebrafeltet*. *Grafikkfeltet* skal vise dei delane av grafen som er interessante for oppgåva, med rett definisjonsmengd (som i G4a) og namn på aksane. Leinhardt et al. (1990, s. 44) peikar på utfordringar som handlar om skalering, eller innstilling av aksar. Korleis grafen er presentert i g*rafikkfeltet* er til ein stor grad styrt av innstillingane i koordinatsystemet (aksar og namn på aksar). Men elevane må også velje kva deler av grafen og koordinatsystemet som skal være med i presentasjonen. Dei må forstå kva eigenskapar ved grafen som skuldast grafen sjølv og kva som er systemavhengig (koordinatsystem). Ei anna programinnstilling handlar om å ha tilstrekkelig eller passeleg avrunding for desimalar. Dette var berre aktuelt for oppgåve G5a, kor det viste seg at mange hadde for få desimalar, slik at koeffisienten i tredjegradsleddet vart 0,01 i staden for 0,005 som i oppgåveteksten. Men, desse utfordringane dreier seg mykje om å få erfaring med programmet.

4.2.7 Definisjonen av ein funksjon

Det er to oppgåver (6b og G3c) som testar om elevane veit kva som definerer ein funksjon i matematikken. I den første (6b) skal elevane berre setje eit kryss for det alternativet dei meiner er rett. Det gir ei statistisk oversikt over kven som kryssar av rett alternativ eller ikkje, men seier lite om kvifor dei vel som dei gjer. I oppgåve G3c, derimot, må elevane også grunngje valet sitt. Vi ser på oppgåvene og resultata.

Oppgåve 6

a) Gitt $y = x^2 - 2x$. Fyll inn resten av verditabellen og skisser grafen.

b) Kven av påstandane nedanfor er rette? Sett kryss.

☐ *x* er ein funksjon av *y*.

☐ *y* er ein funksjon av *x*.

☐ *x* er ein funksjon av *y* og *y* er ein funksjon av *x*.

Oppgåve 6b	Frequency	Percent
Rett svar (y er ein funksjon av x)	37	43,0
x er ein funksjon av y	16	18,6
Har kryssa av alle alternativa.	3	3,5
x er ein funksjon av y og y er ein funksjon av x	25	29,1
Manglande svar	5	5,8
Total	86	100,0

Tabell 4.2.7.1 Svaroversikt til oppgåve 6b.

Vi ser av tabell 4.2.7.1 at det er få (5,8 %) som ikkje har svart på denne oppgåva og at 43,0 % har kryssa av rett alternativ. Så mykje som 29,1 % vel å gå for det tredje alternativet. Sidan elevane ikkje må forklare valet sitt her, er det vanskeleg å sei noko særleg meir enn det som tabellen viser. Kanskje neste oppgåve, G3c, gir meir utdjupande informasjon.

Oppgåve G3

Gitt utrykka

A: $y + x - 6 = 0$ B: $y^2 = x + 6$ C: $x^2 + 2y = 12$

a) Teikne grafane til A, B og C i same koordinatsystem. Merk med forskjellige fargar.

b) Bestem y når *x=2* for alle tre grafane til A, B og C.

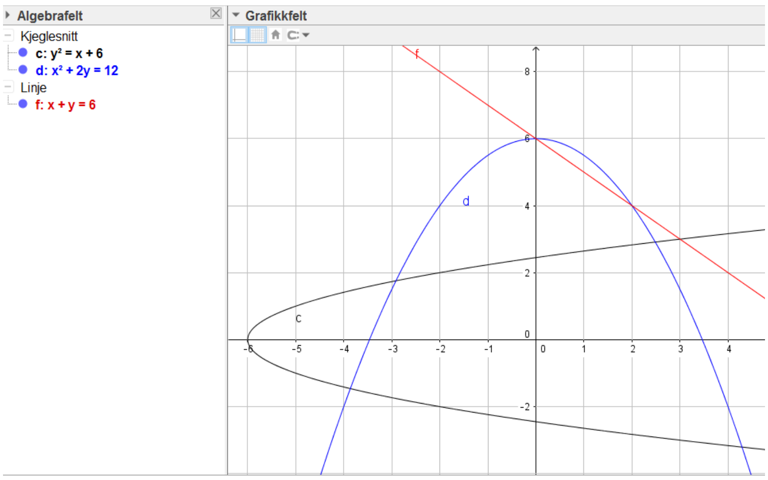
c) Er det ein eller fleire av desse grafane der *y* ikkje er ein funksjon av *x*? Forklar.

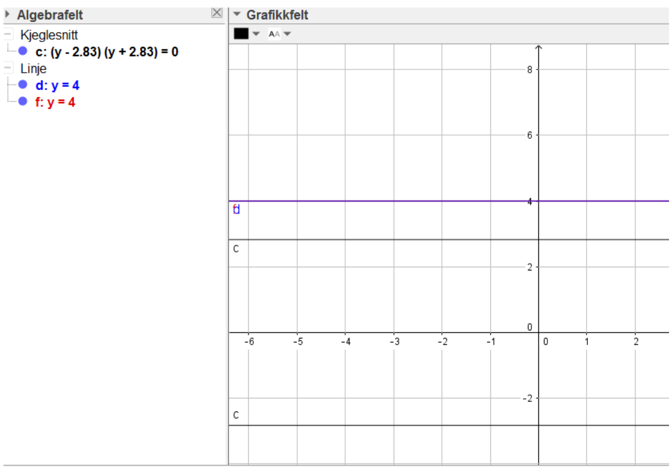
Oppgåve G3c		Frequency	Percent
Valid	Heilt feil svar, utan forklaring.	4	4,7
	Ja, fordi y er med i funksjonen.	1	1,2
	Rett svar (B)	7	8,1
	B. Rett svar men feil eller mangelfull forklaring.	4	4,7
	A og C.	3	3,5
	Funksjon så lenge det er samanheng mellom x og y.	4	4,7
	Manglande svar	63	73,3
	Total	86	100,0

Tabell 4.2.7.2 Svaroversikt til oppgåve G3c.

I denne oppgåva kom det fram mange interessante forklaringar på kva som kjenneteiknar ein funksjon. Fleire av dei er presentert nedanfor. Berre 8,1 % har svara rett her, medan det er heile 73,3 % som ikkje har svart.

E56: Det verkar ikkje som om y er ein funksjon av x til desse grafane sidan ein får berre ei rett linje som tyder på at dei ikkje bestemmer kvarandre på same måte som mange andre funksjonar.





E56 har først teikna grafane heilt rett i Geogebra (G3a i 4.2.6). Men når E56 skal svare på oppgåve G3b (det nedste bildet i svaret til E56 på førre side), der ein skal finne y-verdiar når *x = 2*, har han bytta ut *x*-verdiar direkte i likningane i *algebrafeltet*, og *y*-verdiane kjem naturligvis ut som rette linjer (nye grafar). Desse rette linjene er konstantfunksjonar som altså svarar på spørsmål G3b. Det er derfor fire rette linjer i *grafikkfeltet* (*d* og *f* ligg oppå kvarandre), og det er ikkje så rart at eleven svarer som han gjer på oppgåve G3c. Sjølv om E56 har fått til å teikne grafane til utrykka i oppgåva, får eleven problem med å svare på spørsmålet om det er ein eller av fleire av grafane der *y* ikkje er ein funksjon av *x*. Som vi har sett brukar E56 Geogebra «aktivt» til å svare, ved å byte ut *x* med *2* i likningane. Då endrar grafane seg til vassrette linjer, og det heile vert no for komplisert for eleven å svare på. E56 vel, å løyse oppgåva ved å bruke likninga, og vil rekne seg fram til ein *y*-verdi, slik eleven løyser oppgåver i tradisjonell kontekst (til dømes 3d). Dette er ein elev med høg «score» gjennom heile undersøkinga. Også i dette tilfellet får eleven det til, med rette *y*-verdiar, sjølv om dei to *y*-verdiane for likninga til B ligg «skjult» i parentesar i *algebrafeltet*. Det er interessant å sjå at E56 har kryssa av for rett alternativ i oppgåve 6b, at *y* er ein funksjon av *x*. Men, måten E56 brukar Geogebra på øydelegg for siste spørsmålet (G3c). Som vi har sett fleire eksempel på i denne undersøkinga, «overfører» elevane løysingsmetodar frå tradisjonelle oppgåver og kontekst, til å løyse oppgåver i Geogebra. Det fungerer i enkelte tilfelle, men kan også by på nye vanskar. Mevarech og Kramarsky (1997) peikar på funn, som viser at enkelte elevar brukar ein metode som er rett eller god i ein kontekst og ukritisk brukar den i ein annan.

E59:	A og C. B er det einaste utrykket der y står åleine på venstre sida. B liknar mest på ein vanleg måte å oppgi funksjon på, sjølv om y er opphøgd i andre.

B er den likninga som kanskje liknar mest på ein, for elevane, vanleg måte å skrive funksjonane på, med y åleine på venstre sida av likskapsteiknet. Det verkar være årsaken til E59 sin forklaring og val av kva grafar der y ikkje er ein funksjon av x.

E63:	Den omvendt proporsjonale er ikkje ein funksjon av x, då denne er omvendt!
E67:	Graf B er ikkje ein funksjon av x pga. kjeglesnittet til funksjonen.
E70:	Graf B er ikkje ein funksjon av x fordi den har nullpunkt på y-aksen.
E74:	Graf B går ikkje fordi det då blir 2 forskjellige grafar som er parallelle, men som eigentleg skal være ein graf.

E63 tenkjer nok på B, der grafen går på tvers i *grafikkfeltet*. Det står *kjeglesnitt* i *algebrafeltet* når ein skriv inn likningane i *inntastingsfeltet*. E67 brukar dette «kjeglesnittet» som argument for at grafen til B ikkje viser y som ein funksjon av x. E63, E67, E70 og E74 vel grafen til B, då dei ser at forma på denne skil seg ut samanlikna med grafar dei er vane med å møte i matematikken på skulen. Det er berre E67 som har fått til oppgåve 6b i del ein. Det er tydeleg at desse elevane skjønar at grafen til B skil seg ut, men dei brukar ikkje definisjonen på kva som kjenneteiknar ein funksjon til å svare på spørsmålet. Leinhardt et al. (1990) viser til forsking som støttar desse funna. Kan hende kjenner desse elevane til definisjonen, men dei klarar ikkje å bruke kunnskapen her.

Når det gjeld spørsmåla som går på definisjonen av ein funksjon, ser ein at her er det mange variantar av svar. Å gjere ei direkte samanlikning av resultata frå oppgåve 6b og G3c blir litt feil. I den første oppgåva er det berre å krysse av på eit av dei tre alternativa. Medan i G3c der elevane skal bruke Geogebra, må dei først teikne og vurdere tre ulike grafar og uttrykk, og deretter forklare valet sitt. Dermed gir det ikkje noko meining å sjå om elevane klarar seg betre med eller utan Geogebra her. Det som likevel er interessant er å sjå kva forklaringar som kjem fram i G3c, og samanlikne med svar frå 6b. Det at ein på ein rask og «enkel» måte kan teikne grafen til tre uttrykk, og så granske det ein ser, vil vere ein føremon med Geogebra (Leinhardt et al., 1990). Oppgåve 6b og G3c vil dermed kunne vise om ein elev veit kva som kjenneteiknar ein funksjon, men dei er for ulike i form til å gi direkte samanlikningsgrunnlag.

4.2.8 Oppsummering av resultat på kvantitativ del

Resultatet frå den kvantitative delen viser at elevane i denne undersøkinga strevar med mange av dei same utfordringane som deler av forskingslitteraturen refererer til. Som vi har sett er det snakk om både (mulige) misoppfatningar, som at dei ser på grafen som eit bilde av situasjonen, blandar stigningstal og konstantledd og meir tilfeldige feil. Her er det også nødvendig å kommentere at grunnlaget for å konkludere med at det er misoppfatningar er noko tynt. Det skulle gjerne vore fleire oppgåver som undersøkte det same. Men, ønsket om å sjå på fleire typar representasjonsskifter kom føre det å ha fleire liknande oppgåver. I ettertid ser eg at her kunne eg ha avgrensa oppgåva til å t.d. handle om representasjonsskifta frå likning til graf og graf til likning. Då kunne eg ha brukt fleire spørsmål som testa det same og fått større samanlikningsgrunnlag.

Sjølv om resultata frå oppgåvene med Geogebra, for dei elevane som har svart, er oppløftande med tanke på teikning av grafar, ser vi også her utfordringar, særleg kytt til det å beherske innstillingar av programmet. Det ser også ut til at ein del elevar drar med seg metodar og løysingsstrategiar frå tradisjonelle oppgåver og brukar dei på same måte i Geogebra. For einskilde elevar går dette bra, men som vi har sett er dette unødvendig tungvint, og det kan skape problem. Ein del av vanskane som kjem fram i del 1, føl også med når det kjem til oppgåvene med Geogebra. Men i den siste konteksten handlar det om å vise forståing for kva som kjenneteiknar dei ulike typane funksjonar, meir enn det å teikne dei. Det er også verd å merke seg at talet på manglande svar gjekk veldig opp i del 2. Om det skuldast for lite tid på prøven, vegring mot Geogebra eller tekniske utfordringar med datamaskinar som ikkje «spelte på lag» er vanskeleg å sei. Men, ein kan heller ikkje sjå vekk i frå at elevane rett og slett ikkje forstod oppgåvene og syntes det vart for vanskeleg å svare. Ein elev svarte følgjande på ei oppgåve i del 2:

E20:	Pcn hang seg opp, så eg mista deg eg gjorde, så eg kjappa meg gjennom det eg klarte.

4.3 Resultat frå kvalitativ metode – intervjua

Intervjua vart lagt opp slik at samtalane baserte seg på dei mest interessante svara i den skriftlege prøven. Målet var at elevane skulle få forklare og utdjupe korleis dei tenkte då dei svara på spørsmåla. Elevane som vart intervjua var E9, E18 og E55, og intervjua er presentert i den rekkjefølgja intervjua vart gjort. Einskilde svar frå desse elevane er også tatt med i den kvantitative delen.

4.3.1 Samtalar om spørsmål og svar frå den skriftlege testen

Oppgåve 1

På det første spørsmålet snakkar eg med E18 om korleis han tenkte då han skulle teikne dei tre grafane. E18 har teikna tre punkt, A, B og C og verkar veldig usikker på resultatet sitt og har problem med å forklare seg.

L:	Ja, men, viss du skulle teikna ei rett linje utifrå den (peikar på C), korleis ville du, teikna eller tenkt vidare no?
E18:	Kva...altså mellom desse punkta (A, B og C)?
L:	Ja, nei, for eksempel ut i frå den (peikar på likninga til A).
E18:	E...nei, eg hadde sikkert dratt ei linje mellom dei punkta då…?
L:	Ja, mellom...?
E18:	Mellom, e...A? Ja (Viser til punktet A, med ein x-verdi og ein y-verdi).

E18 blir indirekte bedt om å teikne ei linje, men endar opp med å ville bruke eit punkt (Mevarech & Kramarsky, 1997). Men, sjølv om E18 har teikna grafane som punkt, og held fast på det, forstår eg i den vidare samtalen, at eleven har ein viss kjennskap til og forståing for stigningstal og konstantledd. E18 har også klart å teikne grafane i oppgåve G2a og G3a, med Geogebra.

E55 har teikna alle grafane i oppgåve 1a ved hjelp av tabell. Tabellen til konstantfunksjonen C (C: *y = 3*) syner ein proporsjonalfunksjon (*y = 3x*), og eleven svarar slik når han vert spurt om korleis han tenkte:

E55: M…eg trur vel det må vere…at når det stod berre tre, så tenkte eg gonge null, ein, to, tre… eg veit ikkje korleis eg har tenkt der.
L: Ja.
E55: «Hæ»? Eg har jo skrive det…eg trur det berre er noko me har lært….eller så har eg berre tenkt heilt merkeleg.
L: Ja, at du gongar tre med?
E55: Først null og så ein liksom, sidan det først er null, og så ein og så to…Nei, eg veit ikkje (ler litt flaut)
L: Men, viss det stod at du skulle teikne grafen til y er lik fire…
E55: Ja.
L: Korleis ville du teikna den?
E55: Eg ville nok gjort det same, at eg ville tatt null, ein, to, tre og så fire liksom…(ler litt usikker)
L: Ja, du gongar med null, og så med ein og så to og så tre?
E55: Ja.

Som samtalen viser synes E55 at det er vanskeleg å forklare korleis han har tenkt, men står ved metoden sin når han vert stilt overfor eit anna eksempel på ein konstantfunksjon (*y = 4*). Det at E55 vil bruke tabell og endrar konstantfunksjonen til ein proporsjonalfunksjon er kjend problematikk i frå tidlegare forsking (Bock et al., 2016; Leinhardt et al., 1990). Mevarech og Kramarsky (1997) hevdar noko av årsaka til slike problem skyldast einsidig fokus på einskilde typar funksjonar i undervisninga. Då er det ikkje så rart om E55 vil lage tabell og gonge talet i likninga med forskjellige x-verdiar, om det er slik eleven er van med å teikne grafar.

Oppgåve 2

I oppgåve 2c, der elevane skal finne grafen som passar med funksjonen $i(x) = 2x^3 + 1$, har E9 valt grafen G, som er grafen til ein eksponentiell funksjon.

L: Kvifor har du valt G. Kan du sei litt om det?
E9: Ja…e…eg var usikker på det, men eg tenkte med meg sjølv at når vi har ein funksjon i tredje, x i tredje, så har vi ei sånn linje, som vi kan finne…mm (viser linjer som kan minne om asymptotar)
L: Ja…sånn ja, asymptote?
E9: Ja (bekreftande)
L: Ja, så du tenkte du kunne bruke asymptote på den?
E9: Ja.

Det at E9 har valt grafen til ein eksponentiell funksjon og blandar inn asymptotar (med hjelp frå intervjuar), viser at eleven ikkje veit korleis ein tredjegradsfunksjon kan sjå ut. Men, det er ikkje så rart at E9 byrjar å snakke om asymptotar, sidan grafen til G kan minne om ein omvendt proporsjonal- eller rasjonalfunksjon. E9 vert også spurd om å finne konstantleddet til funksjonen, noko han klarar med litt hjelp og hint. Samtalen viser likevel at eleven har manglande kunnskap i det å gå frå likning til graf i dette tilfellet. E9 har fått til alle oppgåvene med Geogebra, som handlar om å teikne grafen til ein funksjon med ei gitt likning. Samanliknar vi med svara på oppgåvene utan Geogebra, syner dei at eleven ikkje meistrar desse like bra.

Oppgåve 3

I oppgåve 3a og 3b, der elevane skulle plotte to punkt A = (-3, -2) og B = (1, 6), trekke linja gjennom punkta og deretter finne likninga for linja (3b), har E18 plotta y-koordinat for A i pluss 2. Likninga for linja er også feil, *y=2x-2*. Når eleven vert konfrontert med svaret sitt blir samtalen som følger:

L: Korleis forklarar du tala (peikar på stigningstalet og konstantleddet) i den likninga? Kan du huske korleis du tenkte?
E18: E…nei det huskar eg faktisk ikkje, eg har null peiling her…
L: Viss du tenkjer på konstantledd og stigningstall, ser du...
E18: Nei…e…den aukar jo med 2, og så e…nei eg veit ikkje…har null peiling kvifor eg har svart det (sukkar oppgitt).

E18 kan ikkje forklare korleis han har komme fram til svaret sitt. Det kan hende eleven kjenner på press i samband med intervjusituasjonen og at han derfor ikkje får fram det han ønsker. I resten av oppgåva brukar eleven likninga si til å rekne ut *x*- og *y*-verdiar, med kunn ein forteiknsfeil. Men, når det handlar om å forklare korleis ein finn likninga (frå graf til likning), ser vi at eleven sjølv seier han har «null peiling her».

E55 har teikna linja gjennom punkta A og B, og funne likninga for linja, sjølv om den har feil stigningstal (-2 i staden for 2). Eleven har likevel problem med å forklare kvifor han har valt negativt forteikn på stigningstalet, men ser til slutt at linja stig mot høgre på x-aksen. E55 klarer å rekne ut y-verdi når x-verdi er oppgitt, men vert veldig usikker på svaret sitt når vi begynner å snakke om korleis han har løyst oppgåva. Det same skjer når eleven skal finne x-verdi ved oppgitt y-verdi i 3d. E55 er på veg til å tru at ein her må teikne ei ny linje, i staden for å bruke den som er teikna. Dette svarar E55 når han vert spurt om å forklare kva som er stigningstal og kva som er konstantledd i likninga:

E55: Altså den der er vel konstantleddet? Då er vel den fire då? Og den er… a (peikar på -2 i likninga)
L: Ja, fire har du skrive der ja.
E55: Ja, men eg veit ikkje om minus to då, eller…korleis har eg fått det til å…(intervjuar og elev snakkar i munnen på kvarandre).
L: Kvifor valte du minus to?
E55: Nei, det veit eg ikkje. Mm…Korleis er det eg har tenkt då? Var det der krysset var då? (peikar på punkt A).
L: Ja, det var eit kryss, ja.
E55: To (tenkjer høgt)…er det ikkje ein då…eller er det ikkje to…at den går ned to…nei…(oppgitt og frustrert).
L: Nei...men…den går med to. Det er heilt rett.
E55: Men det er ikkje minus?
L: Går linja ned eller går den opp?

E55: Den går vel eigentleg opp?
L: Ja.

E55 synes det er vanskeleg å forklare kva som er stigningstal og kva som er konstantledd, og om linja går opp eller ned. Vidare skal eleven finne y, når x er 2, og har begynt heilt rett ved å erstatte x i likninga med 2. Men, E55 får problem med å forklare seg og tenkjer ikkje noko tid på å lese av grafen. Han vil helst bruke likninga til å rekne.

L: Bestem x når y er lik minus ein. Då veit du at y er lik minus ein. E…Der har du begynt å rekne på noko, men er det andre måtar du kan finne ut kva x er når y er lik minus ein?
E55: Mm…går det an å lage ein verditabell? Nei, me har jo lært for lenge sidan, ein sånn reknemåte, men eg huskar det ikkje….mm… (frustrert). Korleis var den då? Mm…eg huskar ikkje da…
L: Nei.
E55: Det var noko med at vi skulle setje inn nokre tal og sånn
L: Ja.
E55: Innsetjingsmetode eller et eller anna..
L: E, ja.
E55: Eller addisjonsmetoden?
L: Innsetjingsmetoden og verditabell, er og ein muligheit, ja
E55: Ja
L: Er det andre måtar…går det an å lese av på grafen og?
E55: M…å ja. Ja, der (peikar på y er lik minus ein på y-aksen).
L: Då peikar du på minus ein på y-aksen (bekreftande)
E55: Ja. Eg veit ikk…korleis veit eg korleis linja ville vore då? Eller ville den vore nett lik som den? (peikar på linja $y = 2x + 4$, som er den eleven har teikna), same…nei
L: Kva trur du?
E55: Den ville kanskje vore lik, nei, det trur eg ikkje. Bestem x når y er lik minus ein…nei…har ikkje peiling.

Det kan hende E55 har valt minus to sidan linja skjer x-aksen i minus to, men om ein samanliknar med korleis E55 teiknar grafen til A og B i oppgåve 1, ser det ikkje slik ut (sjå 4.2.6). E55 har ikkje gjort oppgåve G1 som testar mykje av det same som oppgåve 3, berre med Geogebra. Han seier at «dei» ikkje har lært å legge inn punkt med Geogebra. Noko som godt kan vere tilfelle. Det er ikkje så vanleg å gi oppgåver i Geogebra på den forma (legge inn to punkt og så trekke ei linje). Dette er derfor også ein treffande kritikk mot oppgåva. Eg valte å vise eleven framgangsmåten. Kommentaren etterpå var at «dette var jo enkelt».

Oppgåve 5

I oppgåve 5, skal elevane finne den grafen som passar med situasjonen, når kula vert slept ned ein bane. I samtalane om denne oppgåva, kjem det tydeleg fram at elevane ser på grafen som eit bilde av situasjonen. Dette er frå intervjuet med E18:

L: Du har valt alternativ tre. Kan du gjenta litt liksom korleis du har tenkt her?
E18: Nei, først såg dei to mest like ut (Banen og graf 3). Så må jo farten bli høgare når det går nedover...også når ballen går oppover så blir det saktare fart…det seier seg sjølv. Så derfor vart det den då (peikar på alternativ 3).

L: Ja, den alternativ tre. Men på y-aksen der eller den aksen der (peika på andre aksen der det står hastighet som eining) så står det hastighet.
E18: Ja.
L: Kva tid er det liten hastighet og kva tid er det stor hastighet?
E18: Nei, vi ser det på toppunkta då. At det begynner her (peikar på A) og så går det ned (peikar på B) og så aukar det igjen og så går det ned og så aukar det igjen og så går det nedover.
L: Ja…greitt. Synes du den var vanskeleg?
E18: Ja, litt...der…berre heilt ærleg så såg eg berre kven som likna mest…så ja.

E18 verkar temmeleg overtydd om at alternativ 3 er den rette grafen, men føyer samtidig til at valet fall på den som likna mest. I forklaringa viser eleven uansett forståing for situasjonen, at farten aukar i nedoverbakke, og minkar i oppoverbakke. Det ser ut til at E18 blandar høgd (posisjon) og fart, noko som påverkar val av graf. E55 har også valt alternativ 3 med forklaringa: «Den viser både startpunkt og sluttpunkt». I samtalen nedanfor forklarar E55 sitt val.

E55: Nei…eg tenkte at når du skal sjå hastigheten, så er det kanskje greitt…for du skal sjå kor mykje den varierer…frå den vert slept i A til F. Og A er jo byrjinga og F er jo slutten…
L: Mm…
E55: Og då må du jo sjå den heile vegen. Og det er jo litt vanskeleg å sjå det på ein der (Alternativ 1) då stoppe den jo der (peikar på F i alternativ 1, der grafen går opp til slutt). Eller du ser jo at den er høg då, men…eg tenkte i alle fall at det var lettare å sjå når den trefte linja i F (linja langs bakken i 3, avstandsaksen). Kunne jo for så vidt tatt den der også (peikar på alternativ 2).
L: To, alternativ to?
E55: Ja.
L: Men alternativ ein sluttar høgt oppe tenke du, så den?
E55: Ja…det viser jo at den har ein høg fart i slutten, men sånn som eg tenkte då, så var det kanskje lettare å sjå når den hadde eit tydeleg start og sluttpunkt på streken (langs bakken).
L: Mm...Derfor valte du tre.
E55: Ja.

E55 har også sine tankar om kvifor han valde alternativ 3, men er samtidig inne på at det kan vere alternativ 2. Det er interessant at han er oppteken av at grafen må ha eit tydeleg startpunkt og sluttpunkt. Noko som blir avgjerande for svaret. Kan hende eleven ser for seg at kula må starte i ro og at den uansett stoppar til slutt ein gong. Dette såg vi også eksempel på i 4.2.1, at erfaringar frå kvardagsliv og intuisjon kan vere med å øydelegge for den matematiske forståinga (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt et al., 1990).

Oppgåve 6

I oppgåve 6a skal elevane rekne ut tre y-verdiar i den oppgitte tabellen, gitt likninga $y = x^2 - 2x$. Vi snakkar først med E18 om korleis han gjekk fram for å fylle inn *y*-verdiane i tabellen, og startar med å sjå kva *y*-verdien blir når x er null. Først hadde eleven fått at $y = -2$ når $x = 0$, men endrar litt oppfatning undervegs, når vi ser på oppgåva på nytt.

E18: Minus to, eller null…(usikker)…ser eigentleg meir meining at den gir null no då, men...
L: Ja. Viss den gir null då…kor e…viss du vil endra på den tabellen då, kva?
E18: Nei…då hadde den blitt der då (peikar på grafen), i null.

L: Ja, korleis vil…viss du set kryss…viss du set kryss der då, korleis vil det stemme med…med andregradsfunksjonen (skulle sagt likninga her)?
E18: Mm...
L: Altså du hadde jo null…, du hadde y minus to for x er lik null… (avbroten av elev).
E18: Den hadde komme der då kanskje? Men då hadde ikkje…med mindre dei andre er feil då? Så hadde den gått sånn (teiknar i koordinatsystemet, slik at grafen passar betre med ein 2. gradsfunksj.).

E18 er usikker, men forsøker først å teikne ei rett linje etter tabellen. Etter eit hint om andregradsfunksjonen finn E18 etterkvart ut at han kanskje har gjort feil, og får til slutt punkt som passar med ein parabel. Dette verkar som eit godt eksempel på lineær-avhengighet (Leinhardt et al., 1990; Sierpinska, 2013). Også E9 har vanskar med å fylle inn rette verdiar i tabellen, og får feil y-verdiar for *x = 0* og *x = 1*. Sitatet frå samtalen med E9, nedanfor, stadfestar desse vanskane:

E9: Ja, eg berre legger disse tala på x-aksen og så finn eg kva det blir…når eg legg null på x-aksen, så blir det null opphøgd i to, det blir m….ein, og minus to gonger x, det blir ein, fordi…når…to gonger null blir, det blir null og det blir berre ein. Dersom eg legg ein inn for x, så blir det ein opphøgd i to, minus to gonger ein. Det blir minus ein minus og ein gonger ein opphøg i to, det blir ein.

E9 har tydelegvis ikkje kontroll på korleis ein skal rekne ut *y*-verdien når *x* er kjend.

E55 har valt ut tre av punkta og teiknar ei rett linje. Han grunngjev valet med at det er noko han har opplevd før, at ikkje alle punkta i ein tabell passar med grafen. Eleven ser på førstegradsleddet, *-2x*, og verkar usikker på om det betyr at linja skal gå opp eller ned mot høgre. Det kan virke som om denne eleven betraktar *-2x* som stigningstal. Først når intervjuar gjer han merksam på andregradsleddet, hugsar han at grafen skal vere bua (krumma, *liggjande v*).

L: Men, den x i andre der då? Kva trur du den gjer med grafen?
E55: Å…då er den jo…er den ikkje ein boge då?
L: Jo.
E55: (ler litt flau) Eg forstår ikkje kva eg har tenkt….ja.
L: Men du seier du har opplevd at det nokre gongar det er punkt som ikkje stemmer, sant?
E55: Å ja, skal den berre gå sånn? (ler og peikar).
L: Då tenkjer du i frå…?
E55: Ja, at det blir på ein måte ein «feil» v.
L: Ein liggjande v (eleven har teikna punkta slik at det kan passe med ein liggjande parabel)?
E55: Ja.
L: Med opning mot venstre?
E55: Kvifor har eg ikkje tenkt det…(oppgitt).

E55 verkar etterkvart overtydd om at grafen ikkje skal vere ei rett linje, men krumma og at det er ein liggjande parabel, *feil* v. Men i starten av forklaringa ser vi at eleven finn 3 punkt som passar med ei rett linje. Det ser ikkje ut til at E55 bryr seg særleg om at ikkje alle punkta i tabellen passar.

I oppgåve 6b (og G3c) undersøker ein om elevane kjenner til definisjonen av ein funksjon. E18 har kryssa av på alternativ 3, og svarar dette på oppgåve 6b når han vert spurt kva han tenkte:

E18: Nei…eg har alltid lært at, at y er ein funksjon av x og x er ein funksjon av y. At det går begge veier.

Her er eleven overtydd om at han har kryssa av rett alternativ utifrå det han har lært på skulen.

Som vi skal sjå nedanfor forklarar E55 sitt val utifrå at det er ei likning, at «det» skal være det same på begge sider av likskapsteiknet. Kanskje ikkje så rart då at eleven vel alternativ tre, der *x er ein funksjon av y og y ein funksjon av x.*

L: Kvifor valte du den? Veit du det?
E55: Eg var eigentleg ganske usikker, og så tenkte eg at det høyrtes mest logisk ut, men no så tenkjer eg litt at kanskje x er ein funksjon av y…
L: Alternativ ein?
E55: Nei, eg har ikkje peiling. …x er ein funksjon av y (mumlar)…skal ikkje x vere y då, på ein måte, at det skal vege opp mot kvarandre?…men det er jo likning.
L: Kva tenkjer du med å vege opp? At det er likt på begge sider?
E55: Ja, men det er jo likning. Eg tenkte vel eigentleg det at det kunne vere det same.

Vi ser her at E55 er veldig usikker og ikkje kjenner definisjonen. Eleven brukar likninga til å forsvare sitt val, at *x er ein funksjon av y og y ein funksjon av x.* Men det er ikkje så rart. Det er jo ei likning. E55 klarer ikkje å skilje mellom definisjonen av ein funksjon og denne likninga. Leinhardt et al. (1990) viser til forsking som peikar på elevane sine vanskar med å ta i bruk definisjonen, sjølv om dei kjenner til denne.

Oppgåve G1

I oppgåve G1 har E18 lagt inn punkta A og B i koordinatsystemet og dratt linja gjennom desse. I algebrafeltet står det at linja har likninga $x + 2y = -1$. Eleven har svart at likninga er y = -0,5x -1 og prøver å forklare korleis han kom fram til dette svaret.

L: Då har du svart y er lik minus null komma fem x minus ein.
E18: Ja. Fordi det var stigningstalet og det var konstantleddet…(peikar på tala i likninga si). Det var eigentleg sånn eg tenkte, fordi minus null komma fem, og så…ja. Minus ein, den veit eg ikkje kva eg tenkte på. Det var noko sånn i alle fall.
L: Men her…ser du at e…(intervjuar peikar på algebrafeltet i Geogebra, på svaret til eleven)…der står det f:, altså linje f då. (eleven ler). Så står det x pluss to y er lik minus ein (x+2y=-1).
E18: Ja. Det er sikkert det som er likninga.
L: Ja…men, forma y er lik ax + b, det er ikkje den forma (peikar på formelen i algebrafeltet).
E18: Ja. Nei det går ikkje…nei det er ikkje rett heller. Nei. Ja.

Intervjuar peikar på oppgåve 3 i del 1, der ein også skulle legge inn to punkt i koordinatsystemet og trekke ei linje. Målet er at eleven skal sjå ein samanheng, men denne har likevel vanskar med å forklare val av stigningstal og konstantledd. Samtalen held fram slik:

L: Stigningstalet sa du, da var?
E18: Minus null komma fem.
L: Ja, minus null komma fem. Mm…og konstantleddet då?
E18: Minus ein i følgje meg, men...ja. Det er sikkert fordi det…stod minus ein her (peikar på algebrafeltet) og så…ja
L: Stod minus ein i den likninga som var i algebrafeltet (x + 2y =-1).
E18: Ja. Noko sånt.

L: Synes du det er forvirrande det som du får opp der (algebrafeltet) eller?
E18: Ja, for eg vart jo usikker på om det var rett, men eg berre stolte på det eg hadde skrive.

Eleven har lest av stigningstalet på grafen. I svaret til E18 ser ein at linja skjer x-aksen i -1, noko som kan vere grunnen til at eleven valde dette konstantleddet. Men, i samtalen over er eleven sjølv inne på at konstantleddet kjem frå likninga i *algebrafeltet*. E18 tenkjer ikkje på å lese av konstantleddet og kjenner tydelegvis heller ikkje til den enklaste måten ein kan gjere om måten likninga til ei linje er framstilt på i Geogebra (som er å høgreklikke på likninga i *algebrafeltet* og velje på *y = ax + b* form).

Også E9 skal forklare korleis han løyser oppgåve G1a og G1b. Eleven har klart å teikne linja (*x + 2y = -1)*, og har lest av *x*- og *y*-koordinatar. No forsøker han å rekne ut stigningstalet frå dei oppgitte punkta. Samtalen nedanfor syner litt av korleis eleven tenkjer då han blir spurt om å finne stigningstalet på andre måtar.

E9: Stigningstalet? Eg berre skreiv dette…(viser til reknestykke og verkar litt spørjande og usikker)
L: Ja, det er ein rett måte å finne det på, men det finst fleire...så eg lurte på om du, du huskar fleire måtar å…kunne du brukt Geo...(avbroten av elev)?
E9: ...Kanskje, kanskje eg kunne brukt Geogebra? E…eg kan p…(avbroten av intervjuar).
L: Du kan få prøve…(intervjuar finn fram pc og Geogebra).
E9: Men dette var det første året som eg brukar Geogebra og eg er ikkje så flink…(ler litt flau)
L: Å ja, så det er første året (litt overraska, men prøver å vise forståing)…eg har ein, eg har eigentleg ei anna oppgåve som du kan prøve på, som er av same typen. Du kan prøve gjere den (peikar på ei ny oppgåve med punkta A = (-5, 4) og B = (3, 8)).
E9: Ok... (kort pause medan eleven jobbar med oppgåva).
L: Du må sikkert ned på den for å dra bildet litt (Viser korleis ein kan stille aksane)
E9: Ja, eg har teikna grafen. Kva var det…stigningstalet sånn…f. Det er sånn.
L: Ja, stigningstalet er null komma fem.

Det er tydeleg at E9 helst vil rekne ut svaret her. Eleven meistrar avlesing av punkt på grafen, men tenkjer ikkje på å bestemme stigningstal og konstantledd ved å lese av graf. E9 klarar likevel å finne stigningstalet med kommandoen: Stigning[<linje>], når han, under intervjuet, brukar Geogebra til å løyse oppgåva. E9 skriv at stigningstalet i G1b er 2, noko han har tatt i frå likninga i *algebrafeltet* og som han ikkje klarer å forklare. Same eins som med E18 kjenner heller ikkje E9 til snarvegen i Geogebra, for korleis ein endrar forma på likninga, til *y = ax + b.*

Oppgåve G3

I oppgåve G3 skal elevane først teikne tre grafar og så finne *y*-verdiar når *x = 2*. Tanken er at det skal dukke opp to *y*-verdiar for grafen til B. I det siste spørsmålet (G3c) der dei skal svare på om det er ein eller fleire av grafane der y ikkje er ein funksjon av x, kan ein då argumentere for at i B så kan ikkje y vere ein funksjon av x, sidan den har to *y*-verdiar for *x = 2*. Vi ser på resultatet frå intervjua med E9 og E55 på neste side.

L: Kvifor har du delt den i to (grafen til B)?
E9: E…fordi den er halv…
L: Kvadratrot, men kvifor har du ikkje med den andre delen? Huskar du det?
E9: Eg forstår det, men klarer ikkje forklare det.
L: Ja. Kva skjer viss du har ein sånn då om…
E9: Då må eg ha ein minus der (peikar framfor rotteiknet)

E9 forstår at det er noko spesielt med grafen til B og har valt å berre bruke den øvste delen av parabelen (positive delen kvadratrota). Men eleven klarar ikkje å forklare valet sitt. Det kan være E9 kjenner definisjonen av ein funksjon, men likevel ikkje får til å bruke den i praksis (Leinhardt et al., 1990).

E55 svarar slik når han vert spurt om å finne y-verdiane når *x = 2* i G3b:

E55: Det går vel an å lage ein tabell? Mm….ja.
L: Bestem y når x er lik to. Treng du å lage ein tabell når du har Geogebra her?
E55: Kan eg ikkje berre skrive inn i grafikkfeltet er lik… x er lik to? Nei.
L: x er lik to i inntastingsfeltet (rettar på eleven)?
E55: Ja.
L: Kva. kva ville du gjort då for å finne y-verdiane?
E55: Mm….eg veit ikkje
L: Har du prøvd det?
E55: Nei.

Som det går fram av samtalen er E55 inne på korleis oppgåva kan løysast med Geogebra (t.d. ved å legge inn linja *x = 2*, og sjå på skjeringspunkta mellom grafar og linja), men vert usikker og seier han ikkje har forsøkt dette. Vi ser at E55 først er inne på tanken om å lage ein tabell, men går sidan vekk i frå den. Kan hende eleven tenkte på å teikne ein ny graf.

L: Er det ein av dei som ikkje…der y ikkje er ein funksjon av x?
E55: Eg skjønar ikkje kva det betyr.
L: Du kjenne ikkje til det nei…(avbroten av elev)
E55: At y ikkje er ein verdi…nei ein funksjon av x? Mm…det såg ut til at det var den raude (Grafen til B), men eg har ikkje peiling. Den var litt sånn rar.
L: Den var litt utanom?
E55: Ja.
L: Men, på del ein hadde me ei liknande oppgåve med…der du ville teikne ein graf den andre vegen, sant?
E55: Ja.
L: Ein v den andre vegen.
E55: Ja. Det var vel ein andregradsfunksjon…mm.

Heller ikkje E55 ser at den eine grafen skil seg ut frå dei andre, men sjølv om han vert konfrontert med svaret i 6a, der denne eleven fekk ein «liggjande» parabel (ein *v den andre vegen*) vert dette litt for innvikla å svare på. Det er tydeleg at heller ikkje denne eleven er kjend med definisjonen av ein funksjon, sjølv om han ser at den eine grafen er litt «sånn rar».

Oppgåve G4

E9 vert konfrontert med svaret i G4b, der ein skal forklare kor mange einingar bedrifta må produsere for å gå med overskot (for kva x-verdiar grafen har O(x)-verdiar større enn null).

L: Ja, her har du skrive at 81 einingar må bedrifta produsere og selje for å størst mogleg…
E9: Ja, men det er her vi har toppunkt, i 81 tusen.
L: Ja, 81 tusen. Ja, men ser du når bedrifta har overskot?
E9: Ti til…(peikar på området frå x er lik 10 til origo).
L: Ja, du vel venstre side, frå ti og ned mot null.
E9: Ja.
L: Men kva med dei verdiane som går frå ti til 19 då eller bort her (peikar mot høgre på x-aksen)?
E9: Det går ned (grafen søkk etter toppunktet)
L : Det går ned, ja.
E9: Det går ned no. Frå null så går det opp til ti og frå der (peikar på toppunktet) så går det ned.

Etterkvart viser eg til oppgåve 4 frå del ein, som testar mykje av det same. Då skjønar E9 samanhengen og kjem med rett svar også her. Grafane til desse to oppgåvene viser to veldig ulike situasjonar, der den siste oppgåva nok er meir krevjande å forstå. Men dette er same elev som har byta om på aksane i oppgåve 1 (sjå kapittel 4.2.6). Det kan være grunnen til at svaret til denne eleven er 81 einingar. Ein kan likevel lese frå samtalen at E9 tolkar området eller intervallet der grafen veks (mot toppunktet) som overskot. Då handlar det om at eleven tolkar grafen som eit bilde av situasjonen (Bell & Janvier, 1981; Brekke, 2002; Leinhardt et al., 1990); veksande graf betyr overskot og minkande graf er underskot.

Oppgåve G5

Mot slutten av intervjua dukkar det opp eit interessant problem som ikkje kom tydeleg fram i den skriftlege testen. Dersom ein skriv 0.005 i *inntastingsfeltet* i Geogebra kan dette bli til 0.01, om ein ikkje ser til at avrunding er stilt inn i forhold til dei tala ein nyttar (kor mange desimalar ein ynskjer). Sjølv om grafen uansett vert rett teikna, og ein kan drøfte funksjonen, vil likninga i *algebrafeltet* kunne forvirre elevane om dei ikkje er klar over dette. Både E9 og E55 har svart rett på spørsmålet i G5, men vert spurt om dei har lagt merke til at Geogebra viser eit litt anna funksjonsuttrykk enn det som står i oppgåveteksten. Frå samtalen med E9:

L: Det stemmer det at det er g som er rette, slik du har svart. Men eg lurer på, kva tenkjer du om at det står i oppgåva at det er $0.005x^3$, og så har du fått $0.01x^3$?
E9: Å…eg har skrive feil.
L: Du kan prøve å skrive der (viser eleven inntastingsfeltet, og eleven skriv inn funksjonen i Geogebra) mm…grafen ser fin ut. Kva står det på funksjonen no? Det står f(x)=…
E9: Null…det står null komma null ein x i tredje, minus x pluss et hundre og femti…
L: Kva kan grunnen vere til at det står 0,01 i staden for 0,005?
E9: Det blir opphøgd i tre? Nei…
L: Trur du det kan ha noko med Geogebra å gjere?
E9: Ja, men eg veit ikkje.

E55 oppdagar også at funksjonsuttrykket i algebrafeltet ikkje er likt det som er gitt i oppgåva og det han skriv i *inntastingsfeltet*:

E55: Å ja, fem x i tredje minus, nei. Trur eg skriv den om igjen…sånn?
L: Mm.
E55: Men no blir jo den null komma null ein?
L: Null komma null ein, ja.
E55: Hæ? (undrar seg over svaret som kjem fram i algebrafeltet).
L: La ikkje du inn null komma null, null fem?
E55: Jo, eg trur eigentleg at eg gjorde det. Så skal eg gjere den på nytt? …null komma null null fem e…x.. Det vart…det vart den igjen (overraska over å få same resultat i algebrafeltet, $f(x)=0.01x^3$…)

I intervjuet med E55 er det tydeleg at eleven synes det er vanskeleg å bruke Geogebra, og det kan virke som intervjusituasjonen er med på å stresse eleven med eit visst forventningspress. Samtidig går det fram at eleven meistrar oppgåvene med litt hint og støtte.

Skalering av eit koordinatsystem høyrer med til det å teikne ein graf, og krev at elevane klarar skilje mellom eigenskapane til funksjonen og skalering av aksar (Leinhardt et al., 1990). Men, dette som her kjem fram i samtalane med E9 og E55, handlar kanskje meir om å meistre innstillingar i Geogebra enn kunnskap om å teikne grafar. Enno verre var det om tredjegradsleddet var $0{,}001x^3$, noko som ville gitt $0\ x^3$ i Geogebra, med avrunding til to desimalar. Også elevar som viser god forståing for å teikne polynomfunksjonar på papir vil ergre seg og bli usikre om dei oppdagar at funksjonsutrykket dei legg inn ikkje er heilt likt det dei får ut. Verre er det for dei elevane som strevar med å teikne ein slik funksjon på papir og som skal dra fordel av at Geogebra er ei hjelp, som skal gjere grafteikning enklare. Dei vil lett miste motet, om dei kjem over ein slik funksjon som i oppgåve G5. Utan erfaring og eller kjennskap til innstillingane i programmet blir dette eit hinder for enkelte av elevane.

4.3.2 Tankar om Geogebra

Intervjuobjekta har snakka om korleis dei løyste enkelte av oppgåvene, både dei utan og dei med Geogebra. Men, det er også interessant å høyre meir generelt om kva dei tenkjer om det å bruke Geogebra i arbeid med funksjonar. Desse tankane får vi eit innblikk i frå samtalane som er presentert i dette delkapittelet. Først ser vi på kva E18 seier i samtale om oppgåve G1:

L: Men, kva tenkjer du om Geogebra her på denne oppgåva…synes du det var lettare å ta det med Geogebra enn å enn å ta det på ark, sånn som me gjorde i del ein?
E18: Ark. Ja. Nei, eg synes ark er lettare då, men det er…det er fordi eg ikkje kan skikkeleg med Geogebra…for eg veit at Geogebra skal vere lettare…enn ark.
L: Har de jobba for lite med Geogebra då eller?
E18: Ja, eller så er det eg som ikkje har følgt skikkeleg med (ler lett).

Sitatet «*for eg veit at Geogebra skal vere lettare enn ark*» seier litt om kva syn eleven har på Geogebra. Samtidig viser E18 sjølvinnsikt, og legg litt av skulda for manglande ferdigheitar på seg sjølv. Slik går samtalene vidare:

L: Kva syns du er enklast, å gjere oppgåvene på ark eller med Geogebra?
E18: Eg veit ikkje heilt korleis eg gjer ting på ark. Og Geogebra, det kan jo plutselig vise deg feil og så veit du jo ikkje om det er feil likevel. Eg veit ikkje eg, men på ark…eg føler berre det blir meir skikkelig der.
L: Kva tenkjer du, når du seier at det viser deg feil?
E18: Viss du skal oppgi for eksempel verdiar eller ulike funksjonar og sånt...
L: Ja?
E18: Det har skjedd før at det, det berre blir heilt feil og så går det i andre retningar enn det det skal og så tenkjer du, nei det går heilt fint, det er jo Geogebra og så leverer du inn og så er det feil. Ja, mens på ark så kan du jo liksom skrive ned verdiane og rekne det ut og så ser du sjølv.
L: Ja, så har du meir kontroll då, tenkjer du? Tenkjer du at Geogebra er for lett eller for vanskeleg eller er det for teknisk eller...?
E18: (Tenkjer) Igjen, så har eg ikkje hatt så mykje med det, men det er heilt greitt liksom …det er ikkje krise å få det. Men ja, eg likar best å gjere det på ark.
L: Har du nokre tankar om kva fordelar og ulemper Geogebra kan ha i undervisninga? Du har jo vore inne på det, men?
E18: Ein fordel er at det sikkert er lettare når du kan det skikkeleg. Ulemper er…kan bli feil utan at du veit det, altså viss du ikkje kan skikkeleg med det. Når du først skal ha Geogebra så ville eg ha kunna det ordentleg. Altså…vite om dei ulike funksjonane og sånn.

E18 ser ut til å være litt frustrert over at det å bruke Geogebra verkar så enkelt, men at svara kan bli feil likevel. Dette kan knytast til det Sierpinska (2013) omtalar som ei subjektiv kjensle av forståing (assimilasjon til ufullstendige skjema). Ein trur at det ein har svart på oppgåva er rett, men så blir i alle fall deler av svaret feil. Det kjennest dermed tryggare å arbeide med funksjonar utan Geogebra (ark, på tradisjonelt vis), for då har ein kontroll over kva ein held på med. E18 synes også det blir «meir skikkelig» når ein arbeider med funksjonar på tradisjonelt vis. På same måte som ein del elvar føretrekk å bruke likninga til å rekne ut *x*- og *y*-koordinatar framfor å lese av grafen, kjenner E18 seg tryggare på å «skrive ned verdiane og rekne det ut sjølv» framfor å bruke Geogebra (Bock et al., 2016). Funksjonane E18 nemner heilt til slutt, dreier seg nok om korleis ein brukar programmet, altså kva kommandoar ein må kjenne til eller bruke.

Dette svarar E9 om å bruke Geogebra til oppgåver i funksjonar:

E9: Eg synes det er spennande, men det er litt vanskeleg. Geogebra er eit veldig interessant program, men det er vanskelig. Det er vanskeleg for meg, sidan eg ikkje har hatt Geogebra på ungdomsskulen, men for dei som har hatt det før er det sikkert enklare. Kanskje det er derfor eg slit med Geogebra…ja.
L: Du klarer jo å bruke Geogebra….det ser eg. Men, synes du det var lettare eller vanskelegare å jobbe med oppgåvene på prøven med Geogebra?
E9: Ja, det var veldig mykje lettare…å bruke Geogebra samanlikna med det å teikne sjølv. Sjølvsagt (ler godt).

E9 synes altså at det å arbeide med Geogebra er vanskeleg men at det er eit interessant program. Eleven presiserer likevel at det er mykje enklare å teikne grafar med Geogebra, men at han samtidig saknar meir opplæring.

E55 har desse tankane om korleis det er å arbeide med Geogebra og litt om kva andre elevar tenkjer:

E55: Eg synes det er veldig greitt å lage verditabell og sånn sjølv…men viss det er sånne høge tall og sånn, når me skal teikne, ja sånn som dette her (viser til grafen på pc-en).
L: Ja, tredjegrads, andregrads…større...
E55: Ja, då er det veldig greitt å bruke Geogebra… eller viss me skal berre ha sånn start og slutt og sånn som for eksempel den (peikar på G5, graf med gitt definisjonsmengd). For eksempel viss eg skal sjå samanhengar, viss eg vil lese av osv.
L: Kva er di oppfatning av kva andre elevar tenkjer om Geogebra?
E55: Mange seier det er vanskeleg, at me ikkje har lært det og sånn, og eg er eigentleg einig. Me har eigentleg aldri fått skikkeleg undervisning i det. Me har fått litt no på vidaregåande før tentamen og sånn, men eigentleg litt lite. Men eg merkar at med eingong me brukar det så er det bra. Så me bør vel kanskje lære meir av det!
L: Så du tenkjer at om de hadde hatt meir erfaring med Geogebra så hadde de fått meir nytte av det?
E55: Ja, det trur eg...

Her er det tydeleg at E55 ser veldig positivt på det å nytte Geogebra, både til å teikne grafar og til å analysere desse. Er det snakk om å teikne grafen til enklare funksjonar ser det ut til at det å lage verditabell er å føretrekke for denne eleven (Janvier, 1987c). Men, på same måte som for E9 og E18, saknar E55 meir opplæring og erfaring i bruk av Geogebra.

4.3.3 Oppsummering av intervju

Intervjua gir eit innblikk i korleis elevane har tenkt undervegs, i prosessen med løysing av oppgåvene. Dei tre som vert intervjua har litt ulike felt dei strevar med, men viser også ein del kunnskapar om funksjonar. Særleg oppgåve 1a, 2, 6a utan Geogebra, med representasjonsskifte frå likning til graf, syner ein del feil og nokre misoppfatningar. Oppgåvene er veldig ulike, men det viser seg at det å halde kontroll på kva som er stigningstal og kva som er konstantledd, om grafen veks eller minkar mot høgre, verkar vanskeleg. E18 teiknar grafane i 1a som punkt. E9 ser på konstantfunksjonen i 1a som ein proporsjonalfunksjon. Samtalane viser seg også at elevane ikkje er trygge på kva type graf likningane skal framstille. Men, i oppgåvene med Geogebra er dette mindre synleg, sidan det handlar meir om å skrive likninga inn i *inntastingsfeltet* og «få ut» ein graf. Det kravst uansett kontroll om grafen som er teikna passar med likninga. E55 fekk erfare dette då han skulle teikne funksjonen i G5, der innstilling av avrunding spelar ei rolle. Representasjonsskifte, frå likning til graf, byr altså på mange utfordringar. Dei er berre mindre synlege med Geogebra. Dei tankane som går igjen om Geogebra hos alle tre, er at Geogebra er eit godt hjelpemiddel til å teikne grafar, men at dei samtidig saknar meir opplæring. Dei er samd i at det skal vere enklare å bruke Geogebra i arbeid med funksjonar, samanlikna med det å arbeide utan. Samtalane syner likevel at det å kunne teikne ein graf, anten det er med eller utan Geogebra, ikkje løyser alle vanskar knytt til representasjonsskifter.

5 Drøfting og konklusjon

I dette kapittelet vil eg drøfte funn frå resultatdelen. Først vil eg diskutere utfordringar, som blant anna feil og misoppfatningar elevane har når dei arbeider med oppgåver knytt til representasjonsskifte i funksjonar. Eg vil og sjå om det er noko forskjell på korleis elevane lukkast med representasjonsskifte i dei to kontekstane, med og utan bruk av Geogebra og drøfte dette (5.1). Deretter vil eg sjå på utfordringar og bevisstgjering knytt til undervisning (5.2). Til slutt diskuterer eg val av metode og kjem med tankar for vidare forsking (5.3), før eg avsluttar med ein konklusjon (5.4).

5.1 Drøfting av resultat

Eit viktig funn frå sentrale trekk ved resultatet viser at det er ein signifikant skilnad på totalscore for kvar elev frå del ein til del to. Både 1P og 1T gjekk omlag 20 prosentpoeng ned i totalscore frå oppgåvene i tradisjonell kontekst til dei oppgåvene der ein skulle bruke Geogebra. Men, i den samanheng er det også viktig å understreke at det var veldig mange fleire manglande svar på oppgåvene med Geogebra enn på dei utan. Noko som vil påverke totalscore og skilnaden i score mellom dei to delane. Eg har vore inne på mulige årsaker til dette funnet. Det kan skuldast for lite tid på prøven, og at det då gjekk mest utover del to, sidan den kom til slutt. Men, det kan også vere at ein del elevar av ulike årsaker ikkje er så glad i å bruke Geogebra. Einskilde kommentarar i elevsvara tyder på dette. Eg intervjua berre elevar som hadde svara på spørsmål på begge delane. Det kunne vore interessant å snakke med nokre elevar som ikkje svarte på del to i det heile. Kanskje eg då ville fått meir utfyllande svar rundt dette funnet.

5.1.1 Grafar

Resultata frå undersøkinga viser at ein god del elevar har vanskar med å teikne grafar på papir, anten det er lineære funksjonar eller andregradsfunksjonar. I følgje teori er det størst utfordringar om likninga til ein lineær funksjon er oppgitt på ein «utradisjonell» måte, altså ulik forma $y = ax + b$ *(Leinhardt et al., 1990, s. 36)*. Det er denne siste forma som er brukt i del 1, utanom likninga til B i oppgåve 1. Likevel har vi sett at resultatet viser fleire kjende feil og misoppfatningar. Einskilde elevar blandar stigningstal og konstantledd. Dei kjenner til to eigenskapar dei kan bruke til å teikne grafen, men ser ikkje heilskapen, noko som tyder på at dei har ei instrumentell forståing (Mellin-Olsen, 1984; Skemp, 2006). Duval (2006) hevdar dette handlar om at elevar flest er kjend med algoritmen for å kunne teikne grafen til lineære funksjonar, men at dei manglar erfaring som går på å kjenne att ein gitt graf og kople den med rett likning. Duval (2006) er inne på at sjølv om dei fleste elevar ville klart å teikne grafen til ein lineær funksjon hadde fleire fått problem om dei skulle velje den grafen som passar med likninga, eller omvendt. Resultatet viser at mange elevar har vanskar med å finne likninga til ein lineær funksjon utifrå grafen. Det er altså først når ein kan gå begge veier, at ein har ei ønska relasjonsforståing (Mellin-Olsen, 1984; Skemp, 2006). Dette blir tydelig når dei i oppgåve 2 skal finne den grafen som passar med likninga (og motsett). Det er ei meir utradisjonell oppgåve, som Duval (2006) etterlyser, og som testar om elevane klarar å kjenne att, og kople graf til rett likning. Ein del av forklaringane som elevane gir på denne, avslører mangelfull forståing og teikn til misoppfatningar.

Resultatet viser også at fleire elevar teiknar grafen som eit punkt (Mevarech & Kramarsky, 1997). Andre brukar stigningstalet som skjering med x-aksen, eller dei trur konstantleddet er skjering med x-aksen (blandar nullpunkt og konstantledd). Datamaterialet viser også funn som tyder på at fleire elevar har ein «lineær avhengighet» (Bock et al., 2016; Leinhardt et al., 1990; Sierpinska, 2013). Dette var svært tydeleg i oppgåve 6a der elevane skulle fylle ut tabellen til andregradsfunksjonen og teikne grafen. Ein god del elevar forsøkte å tilpasse koordinatane i tabellen slik at dei passa med ei rett linje. I følgje Leinhardt et al. (1990) kan ein av årsakene til denne lineære tilpassinga ganske enkelt skuldast at denne typen funksjonar er det første elevane lærer om på skulen. Når dei seinare møter andre typar funksjonar, vil framleis den lineære ligge langt «framme» i minnet og bli brukt i feil samanhengar.

Kva så med Geogebra? Punkta nedanfor er problem eg har merka meg elevar kjem borti når dei arbeider med Geogebra:

- Elevane teiknar grafen, men finn den ikkje att i grafikkfeltet. Dette kjem av at dei ikkje ser samanhengen mellom likninga og dimensjonane på aksane. Deira grafikkfelt viser kanskje x-og y-verdiar frå -10 til 10, medan definisjonsmengda har x-verdi som startar på 50. Eller grafen skjer y-aksen i 10 000, medan aksane viser verdiar frå 0 til 100.
- Grafane får ulike former etter korleis aksane er innstilt. I verste fall kan ein andregradsfunksjon sjå ut som ei rett linje, dersom aksane er stilt inn «feil».

Teori viser at bruk av same skala for både x og y og ofte tall rundt -10 til 10, kan skape utfordringar når elevane seinare skal teikne grafar som er knytt til ein gitt situasjon i t.d. fysikk (Leinhardt et al., 1990, s. 17; Mevarech & Kramarsky, 1997). Anna forsking viser at skalering av aksane er ei av hovudårsakene til at elevar får grafiske, visuelle illusjonar som skapar vanskar når elevane skal gå frå graf til likning. For å kunne tolke ein graf på rett måte må ein kjenne til kva synlege eigenskapar ved grafen som endrar seg (t.d. vinkelen ei linje får i forhold til aksane) ved skalering av aksane og kva eigenskapar som ikkje endrar seg (t. d. skjering med y-akse og nullpunkt) (Leinhardt et al., 1990). Sjølv om dette handlar mykje om tekniske innstillingar i programmet, viser det kor viktig det er å ha kunnskapar i representasjonsskifte til og frå graf (og om graf), slik at ein kan foreta kontroll av dette skifte (Adu-Gyamfi et al., 2012).

Elevane legg inn funksjonsuttrykket i *inntastingsfeltet*, slik dei har lært, og dei får ein fin graf som viser «bildet» av funksjonsutrykket. Dette skal så brukast vidare til å svare på nye spørsmål. Men, for mange oppstår problemet når dei eigentleg ikkje veit kva dei har gjort. Dei har ikkje forstått kvifor grafen ser slik ut som den gjer og kva den fortel om samanhengen mellom to variablar. Dette kan illustrerast ved eit døme. Ein elev teiknar grafen til $y = x + 2$ på papir. Den same eleven teiknar ein andregradsfunksjon på papir, f.eks. $f(x) = x^2 + 2$. Begge desse funksjonane klarar eleven å teikne utan vidare problem. Kan hende forstår eleven også samanhengen mellom uavhengig og avhengig variabel. Men, så blir eleven bedt om å teikne grafen til $g(x)= \sqrt[3]{x^2}$ *eller* $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Mange elevar ville fått problem med å teikne denne på papir. Likevel, om ein elev beherskar Geogebra på eit normalt nivå, vil det vere forholdsvis enkelt å teikne grafen til g. Men, spørsmålet er kva følger det får for forståinga av representasjonsskifte, i og med at ein «hoppar over» eit trinn og to i translasjonsprosessen (jamfør Black-box modellen, figur 2.2.1). Det blir på ein måte ei form for instrumentell forståing, der det handlar om å kunne algoritmen for å teikne funksjonane (Mellin-Olsen, 1984; Skemp, 2006). Resultatet frå del 2 viser at dei elevane som har svart på oppgåvene i stor grad klarar å teikne grafane med Geogebra. Men, kva med dei som ikkje har svart?

5.1.2 Situasjon og kontekst

At ein graf eller ei likning representerer ein gitt situasjon er elevane i 1P og 1T vane med. Men å løyse oppgåver der dei skal finne grafen eller likninga som passar med situasjonen er mindre vanleg. I diagnostiske oppgåver, derimot, er det meir utbredt å undersøke om elevane klarar å finne den grafen som høver med situasjonen (Janvier, 1981; Leinhardt et al., 1990; Rønningstad, 2009). Det er ei slik oppgåve elevane møter i oppgåve 5 på del 1, kor det viser seg at mange elevar ser på grafen som eit bilde av situasjonen. Dette samsvarar med tidlegare funn (Leinhardt et al., 1990; Rønningstad, 2009) og kan ha samanheng med at elevane manglar trening med slike oppgåver. Dei har vanskar med å sjå for seg ein graf som passar med ein gitt situasjon. I følgje Leinhardt et al. (1990) har det vore for mykje fokus på tabellar med plotting av graf og det å finne punkt på ein graf. Ein har sett meir på deler av grafen (lokale eigenskapar) enn på grafen som heilskap (globale eigenskapar) og mistar noko av forståinga. Bell og Janvier (1981); Leinhardt et al. (1990) viser også til at erfaringar frå dagleglivet har betyding for korleis elevane tolkar ein gitt situasjon. Elevar som har leika med bilar og bilbanar i barndommen kan ha lettare for å forstå ein situasjon der dette er tema. Men, slike erfaringar kan også ha motsett effekt ved at ein blandar desse erfaringane med dei abstrakte eigenskapane til ein graf. Det verkar som om E80 møter ei slik utfordring i oppgåve 5, der eleven ser for seg at kula startar i ro og endar opp i ro. Dette og det at elevane ser på grafen som eit bilde av situasjonen er med å avgrense forståing for situasjonar.

5.1.3 Bruk av tabell

I oppgåve 1 er det mange elevar som vel å sette opp ein tabell når dei skal teikne grafane. Ein elev set også opp tabell for konstantfunksjonen C, og har i tillegg «hengt på» variabelen x (y = 2x i staden for y = 2). Her kan det være at bruken av tabell er med å tvinge fram ulike *y*-verdiar til valde *x*-verdiar. Uansett, samsvarar det med det Bock et al. (2016) omtalar som ei proporsjonal tilnærming av funksjonar. Mange elevar støttar seg altså til tabellar. Janvier (1987c) problematiserer den utstrakte bruken av tabell som «mellom» representasjon. Han stiller spørsmål om ein ikkje burde gå for meir direkte og (i følgje ham) korrekte representasjonsskifte. Det kan være fleire fordelar med det. Blant anna kan det tvinge fram fokus på dei eigenskapane som kjenneteiknar kvar funksjon, slik at elevane lettare klarar å sjå for seg korleis grafen til ein funksjon skal sjå ut utan å teikne den først (via tabell). I følge Bock et al. (2016) får elevane oftare til representasjonsskifter der dei brukar tabell. Men, det er kanskje ikkje så rart, ettersom lærebøker og undervisning ofte går vegen om tabell når ein graf skal teiknast. Likevel kan ein ikkje sjå vekk i frå at ein tabell kan virke tryggande for elevane når dei skal framstille ein funksjon grafisk. I oppgåve 6a skulle elevane fylle ut ein tabell for ein andregradsfunksjon, for sidan å plotte grafen. Det viste seg å vere vanskeleg for mange, som fekk problem med å rekne ut *y*-verdiane for gitte *x*-verdiar. Adu-Gyamfi et al. (2012) hevdar slike feil kan reduserast ved at elevane betraktar målrepresentasjonen (her tabell) frå kjelderepresentasjonen (her likning). Vidare må dei sjå til at alle spesielle eigenskapar ved kjelderepresentasjonen er ivaretatt etter representasjonsskifte. Men, dette er nok enklare for elevane etter at grafen er teikna. Om dei til dømes kjenner forma på ein andregradsfunksjon, kan dei då lettare sjå om deira graf passar med tabell og likning.

I dei tilfella elevane skal gå frå graf til tabell, handlar det ofte om å lese av eit eller to punkt på grafen. Som resultatet også viser er det mange elevar som ikkje stolar på avlesing, men som heller vil bruke likninga (om den er gitt) til å rekne ut ein *x*- eller *y*-verdi (Knuth, 2000). Dette gjeld også for oppgåvene med Geogebra, med delvis unntak av dei to siste oppgåvene (G4 og G5). I Geogebra er det ikkje naudsynt å teikne tabell om ein skal framstille ein funksjon grafisk. Det er det heller ingen elevar som gjer i denne undersøkinga (ein av dei som vart intervjua var inne på tanken å bruke tabell på G3b, men slo det fort frå seg). Arbeid med funksjonar i Geogebra fører såleis til at tabell på ein måte vert «overflødig». Likevel, når elevane skal lese av punkt på grafen eller finne ein bestemt *x*- eller *y*-verdi dreier det seg også om å bruke og forstå ein tabell. I vitskapleg samanheng handlar det om å observere og registrere empiri i tabellar, som igjen kan brukast til å lage matematiske modellar (funksjonar) av det talmaterialet ein får (Leinhardt et al., 1990). Modellering og regresjon er noko alle 1P og 1T elevane skal være innom i matematikkfaget i løpet av vidaregåande skule. I den samanheng er det nødvendig å bruke tabell (rekneark i Geogebra), også i Geogebra.

5.1.4 Likninga til ein funksjon

Resultatet viser at mange av elevane brukte likninga til funksjonen for å finne x- eller y-koordinatar i oppgåve 3 og G1. Det var få elevar som las av på grafen. Forsking viser at mange elevar føretrekk ei algebraisk løysing framfor grafisk, trass i at den siste kan være både lettare og kjappare (Knuth, 2000). Ofte vel elevane grafisk løysing som siste utveg. «Pensum» og undervisning må ta ein del av skulda for denne tendensen i følgje Knuth (2000); Leinhardt et al. (1990). Elevane blir ofte introdusert for likninga til grafen, som dei brukar til å lage ein tabell før dei til slutt teiknar grafen. Dette resulterer i at ein del elevar ikkje meistrar overgangen frå graf til likning og at dei stolar mest på svar som kjem frå likninga. Det vil også sei at dei er redd at det å lese av grafen ikkje er nøyaktig nok, sjølv om dei paradoksalt nok kan lese av punkt på grafen for å rekne ut stigningstalet til ei linje (Knuth, 2000).

Resultatet på oppgåve G1, med Geogebra, viser at mange brukte algebraisk metode til å finne likninga til linja, sjølv om den var gitt i *algebrafeltet*. Sant nok, var den oppgitt på ei anna form og måtte gjerast om for å svare på oppgåva. Dei fleste elevar er ikkje kjend med den likningsforma som er standard i Geogebra og det forklarar nok mange av dei svara som var feil. Det var ikkje nok å teikne linja og bruke uttrykket for likninga i *algebrafeltet*. Dei måtte gjere om dette uttrykket og mange valde då å omforma det algebraisk, sjølv, utan å vite korleis dette enkelt kunne gjerast med Geogebra. Det er også verdt å merke seg at ingen elevar leste av stigningstal og konstantledd, for å bestemme likninga. Noko som også kan skuldast at dei no skulle eller måtte bruke Geogebra for å svare, og at avlesing kanskje ikkje reknast som «godt nok». Dessutan er det fleire elevar som reknar ut *x*-eller *y*-verdiar i dei oppgåvene med funksjonen på likningsform (G1 og G3) enn det er på den oppgåva (G4) kor likninga er gitt som eit funksjonsuttrykk $O(x)$. Dette heng nok saman med korleis oppgåver vanlegvis blir presentert for elevane i undervisninga. Den sistnemnde forma er den som normalt vert brukt når elevane skal arbeide med funksjonar i Geogebra.

I følgje resultatet er det ein del elevar som trur at koeffisientane i likninga $y = ax + b$ gir skjering med høvesvis *x*-akse, i *a* og *y*-akse i *b* (som stemmer for *b*). Andre blandar desse og trur konstantleddet er stigningstalet og stigningstalet er konstantleddet. Dette tyder på at dei veit det er «nokre knaggar» ein kan klamre seg til, algoritmar som kan brukast, men den heilskaplege forståinga er ikkje til stades og det blir «rules without a reason» (Skemp, 2006). Desse feila eller misoppfatningane er tydlegast i samband med lineære funksjonar. Leinhardt et al. (1990, s. 46) forklarer noko av dette med einsidig fokus på det eine skjeringspunktet med aksane, konstantleddet, som også er med i likninga. Ein del elevar vil undra seg over kvifor ikkje skjeringa med x-aksen er like viktig.

Mangelfull forståing for lineære funksjonar lovar ikkje godt for vidare arbeid med meir avanserte funksjonar. Einskilde elevar ser også ut til å tru at når det ikkje står eit tal framfor x eller x^2 i ei likning så reknar dei det som «null» x (sjå t.d. resultat frå G2a, 4.2.6). Dette handlar om manglande kunnskapar i algebra, men viser samtidig at elevane ikkje ser heilskapen.

5.1.5 Definisjonen av ein funksjon

Kva som kjenneteiknar ein funksjon i matematikken handlar ikkje så mykje om representasjonsskifte. Definisjonen bør likevel vere kjend for elevane og eit fundament for vidare utforsking av funksjonar. Den skal og vere ivaretatt i alle representasjonsskifte. To oppgåver i den skriftlege testen handlar om å kunne definisjonen av ein funksjon. Det er oppgåve 6b og G3c. Resultatet på desse to viser at fleirtalet av elevane ikkje er kjende med definisjonen. Dette er ikkje uventa, men handlar vel mykje om kva som vert vektlagt i undervisninga og kva oppgåver elevane er vane med. Ein del elevar kjenner til definisjonen, men klarar ikkje bruke den i praksis (Leinhardt et al., 1990).

5.1.6 Tilfører Geogebra noko nytt?

Av resultatet kjem det tydeleg fram at både 1P og 1T elevar gjer det dårlegare på del 2 enn på del 1. Det er allereie nemnt at det kan ha samanheng med at alle oppgåvene med Geogebra kom til slutt. Sjølv om det er freistande å konkludere med at elevar får til meir når dei arbeider med funksjonar på tradisjonelt vis enn når dei får bruke Geogebra, må ein uansett ta høgd for at ein ikkje kjenner årsaken til alle manglande svar. Det er ingen tvil om at Geogebra og andre grafteiknarar framstiller grafar på ein enkel og tidssparande måte. Geogebra er også dynamisk. Det vil sei at om ein endrar litt på funksjonsutrykket (for eksempel ved å bruke ein glidar for ein eller fleire av koeffisientane i likninga til ein andregradsfunksjon) endrar grafen seg automatisk. Dette gjeld også om ein stiller på ein eller begge aksane. Det kan då vere lettare å sjå samanheng mellom for eksempel stigningstall og graf eller konstantledd og graf. Om ein utnyttar dei dynamiske eigenskapane i Geogebra til å trene på skalering av aksar, kan det bidra til auka forståing for kva eigenskapar som held seg og kva eigenskapar som endrar seg med innstilling av aksane (Leinhardt et al., 1990, s. 43). I Geogebra er det også enkelt å derivere ein funksjon, og å finne *x*- og *y*-verdiar, vel å merke om ein kan med programmet. Men, vi har også sett at det er utfordringar knytt til innstilling av gjeldande siffer og andre tekniske ferdigheitar som føl med når eit dataprogram skal lærast og takast i bruk.

Duval (2006) hevdar at, frå ei kognitiv side, vil matematisk aktivitet alltid involvere to eller fleire representasjonar samtidig, sjølv om ein matematisk sett berre arbeider med ein representasjon. Forståing av funksjonsomgrepet avhenger då av ein synergi mellom to eller tre representasjonar. Eg tenkjer at det å bruke Geogebra i arbeid med funksjonar vil teknisk sett kunne redusere denne avhengigheten, i og med at ein kan skrive inn ei likning i *inntastingsfeltet* og få grafen ferdig teikna. Vel å merke må aksane kanskje tilpassast (skalerast), og ein må passe på at likninga ein har lagt inn stemmer med den som kjem fram i *algebrafeltet*. Men det blir likevel meir som ein «black-box» modell (Adu-Gyamfi et al., 2012). Sjølv om resultatet frå den skriftlege testen og frå intervjua viser at programinnstillingar og tekniske ferdigheitar byr på vanskar for elevane, kan ei av utfordringane med å bruke Geogebra vere at programmet skjuler mangelfull forståing. Samtidig gir Geogebra muligheita til å tileigne seg kunnskap om funksjonar på andre og kanskje meir effektive måtar, som ein ikkje må undervurdere (Leinhardt et al., 1990).

5.2 Utfordringar knytt til undervisning

Som lærar i 1P og 1T må eit av måla vere å legge til rette for undervisning som får fram det beste frå to verdenar – utan og med Geogebra (eller andre dataprogram med grafteiknar) – slik at kompetansemåla blir ivaretatt. Schoenfeld (1994) er ein av dei som hevdar det ofte er for mykje mengdetrening av oppgåver i skulen, og at ein heller bør vektlegge god forståing av færre. Likevel kjem ein ikkje utanom undervisning der eit av måla er at elevane skal lære seg algoritmar dei kan bruke til å løyse oppgåver. Men, det langsiktige målet må være at elevane skal få ei mest mogleg heilskapleg forståing av funksjonsomgrepet, gjennom operasjonell forståing. Då kan ein også klare å løyse oppgåver som skil seg frå andre ein har løyst tidlegare (Schoenfeld, 1994). I følgje Skemp (2006) spelar bruken av gode døme ei viktig rolle i denne samanhengen. Det at lærarane tar for seg eksempel som utfordrar elevane, og gjerne på ein diagnostisk måte, slik at ein tvingar fram kognitive konfliktar og eventuelle misoppfatningar einskilde måtte ha, er positivt. Då kan ein gjerne bruke situasjonar frå dagleglivet, som elevane kjenner seg att i (Rogers, 2011). Men, det er samtidig viktig at eksempel ikkje blir for generelle, noko som kan lede til misoppfatningar, i følgje Leinhardt et al. (1990). Dei hevdar også at ein må ha auka fokus på kvalitativ tolking av grafar, slik at elevane kan få meir global forståing. Dette siste passar også godt inn med Knuth (2000) sine tankar for undervisning om funksjonar. Han skuldar skulen for å vektlegge likning som representasjon framfor grafisk. Noko også resultatet frå denne undersøkinga tydar på. Mange elevar brukar likninga og algebraisk løysingsmetode framfor andre representasjonar og stundom raskare metodar. Følgjande sitat frå E53 på oppgåve 4b kan synleggjere dette problemet og ein viss frustrasjon: *«Hadde vore greit med nummer å jobbe med».*

Swan (2002) hevdar det ikkje er mogleg å undervise på ein måte som hindrar at misoppfatningar oppstår, og ein må berre akseptere at elevar stundom vil gjere feil generaliseringar. Men, då er det samtidig opp til læraren om denne klarer å avdekke og «behandle» desse. I følgje Postelnicu (2011) har undervisning og pensum innan funksjonar ofte vore for einsidig, noko som igjen hindrar kognitive konfliktar (Swan, 2002), der feil og misoppfatningar får prøvd seg mot nye idear, tankar og omgrep. Også Grønmo (2017) etterlyser bruk av varierte metodar i matematikk og realfag. Ho synes det er problematisk at norsk skule i mange år «ukritisk» har følgt skiftande pedagogiske trendar som nærmast har gjort krav på å vere «den rette metoden» å undervise på; frå prosjektarbeid (1980-talet) til fokus på problemløysing (1990-talet) og seinare diagnostisk undervisning (rundt år 2000). I 2006 kom *Kunnskapsløftet* som er meir målstyrt men som gir større metodefridom. I følgje Grønmo (2017, s. 59) er det *«antakelig viktigere med variasjon og balanse mellom ulike metoder, enn å lete etter den ene rette metoden».* Ho viser til fleire undersøkingar (PISA, TIMSS og TIMSS Advanced[8]) som peikar på at einsidig metodebruk kjenneteiknar matematikkundervisninga i Norge, medan land som presterer betre, ofte har meir varierte metodar. Andre resultat frå internasjonale studiar syner også at land som i mindre grad brukar elektroniske hjelpemiddel (inkl. datamaskinar og kalkulatorar) presterer betre enn land som Norge og Sverige, der det er meir utstrakt bruk av slike hjelpemiddel (Grønmo, 2017). Dette viser blant anna at gode digitale verktøy ikkje på nokon måte kan erstatte systematisk, hardt arbeid når målet er å oppnå matematisk forståing (Grønmo, 2017).

Bruk av Geogebra kan vere ein fin og effektiv måte å samanlikne og analysere ulike funksjonar og studere deira globale og lokale eigenskapar. Det handlar om å vite kva eigenskapar som er felles og kva som skil funksjonar frå kvarandre. Dette siste støttast også av studien til Bock et al. (2016), som fann at elevar gjer tilsynelatande færre feil i representasjonsskifte når dei er gjort kjend med kva spesielle eigenskapar som skil ulike typar funksjonar. Det er fleire funn som tyder på at Geogebra kan vere med å bidra til auka forståing for funksjonar og representasjonsskifte i tillegg til å gi variasjon i undervisninga. Men, då er det også viktig at det blir brukt på ein gjennomtenkt måte, som kjem elevane til gode. Elevane eg har intervjua saknar *meir* og *betre* opplæring i Geogebra. Dette må ein ta på alvor, samtidig som ein også må variere dei delane av undervisninga der ein ikkje brukar Geogebra. Då kan det hende lærarar må vere flinkare til å lausrive seg frå lærebok og «pensum».

[8] PISA og TIMSS (grunnskulenivå) og TIMSS Advanced (vidaregåande skule): Internasjonale komparative studiar (Grønmo, 2017)

5.3 Diskusjon av metode og tankar for vidare forsking

Etter å ha sett gjennom resultat frå skriftleg test og intervju er det timeleg å stille spørsmål om eg har fått svar på det eg ville undersøkje. Når ein samanliknar elevane sin kunnskap om funksjonar i to ulike kontekstar, slik det er gjort i denne undersøkinga, vil det kunne ha stor betyding kva som kjem først og sist av oppgåvene. I denne undersøkinga er tydeleg at dei siste spørsmåla med Geogebra får «gjennomgå». Ikkje nødvendigvis fordi dei er så vanskelege, men fordi dei kjem til sist. Elevane var kanskje leie og fekk i tillegg problem med tida. Fleire elevar kommenterer dette. I ettertid ser eg at det kunne vore ei løysing å la halvparten av elevane starte med oppgåver der dei brukar Geogebra. Det at det er færre svar på Geogebra-delen, kan altså tyde på at omfanget av prøven var for stort. Men det kan også vere at forma på enkelte av oppgåvene var litt ukjende for enkelte, eller rett og slett for vanskelege. Sjølv om oppgåvene er innanfor kompetansemåla for 1P og 1T (om ein ser vekk i frå 6b og 3c for 1P) er det enkelte av dei som er litt utanom det elevane møter i læreboka. I oppgåver der elevane normalt skal bruke Geogebra, får dei oftast 2. eller 3. gradsfunksjonar eller eksponentialfunksjonar, skrive som funksjonsuttrykk (t.d. $f(x) = 2x^2 + 3$).

For å lettare samanlikne kunnskapar utan og med Geogebra kunne eg vore enno meir konsekvent og stilt meir (parvis) like spørsmål. Då ville det vore lettare å sjå på skilnader og diskutert for og mot. Men, eg trur ikkje det er alle representasjonsskifte det hadde passa for, som til dømes *frå situasjon til graf*. Sjølv om oppgåvene er laga slik at dei skal dekke dei fleste representasjonsskifta, er det enkelte overgangar som manglar. Sidan bruk av Geogebra er ein viktig del av denne undersøkinga, kunne eg også ha avgrensa talet på representasjonar, slik at eg berre undersøkte representasjonsskifte der det er naturleg å bruke dette programmet (der det faktisk blir brukt i dagens undervisning). Ein ide er å lage oppgåver med hovudvekt på funksjonar som er litt meir avanserte enn lineære, der ein verkeleg drar nytte av dei fordelane Geogebra har for teikning av grafar. I den samanheng ville det og vore passande å presentert meir teori om elevar si tilnærming til bruk av digitale hjelpemiddel i undervisninga.

Når det gjeld metoden, med kvantitativ del etterfølgd av intervju, støttast den av blant anna Bock et al. (2016). Men, det er fleire måtar å gjennomføre denne metoden på. Ovanfor drøfta eg litt val av spørsmål og struktur i oppgåvene utan å gå i detaljar. For å sjå korleis elevane klarer oppgåver med og utan Geogebra, kva vanskar dei har, kunne ein også gjennomført ei meir omfattande, rein kvantitativ undersøking, med både opne og lukka spørsmål, på fleire skular. Men, av praktiske og tidsmessige omsyn måtte denne undersøkinga avgrensast. Botten (2011, s. 100-101) trekkjer også fram intervju som den beste måten å avsløre misoppfatningar på, sjølv om dette er ei veldig krevjande form for datainnsamling. I etterkant ser eg at eit meir grundig arbeid med svara til intervjuobjekta (på den skriftlege prøven) før intervjua, kunne hjelpt meg til å stilt enno betre spørsmål om korleis dei tenkte, slik at eg fekk meir ut av samtalane. Eg har tidlegare også nemnt at det ville vore interessant å snakke med enkelte elevar som ikkje svarte på Geogebra-delen i det heile. Då kunne eg kanskje fått enno fleire vinklingar på kva vanskar og elevane opplev med Geogebra. Det hadde derfor vore spennande å gjennomført ein kortare kartleggingsprøve der elevane berre brukte Geogebra og latt intervjua få større plass.

5.4 Konklusjon

Målet med denne undersøkinga har vore å sjå kva vanskar elevane har i arbeid med representasjonsskifte i funksjonar, med og utan Geogebra og om det er noko skilnad i korleis dei lukkast i dei to kontekstane. Vi har sett at det er signifikante forskjellar på dei to, utan at ein utifrå resultatet kan konkludere med at elevane klarar seg betre i den eine konteksten enn den andre. Til det er talet på manglande svar i delen med Geogebra for stort. Vi ser uansett at både elevane i 1P og 1T utifrå poeng gjer det merkverdig dårlegare når dei får bruke Geogebra. Det er dessutan forholdsvis mange som ikkje svarer på oppgåvene med Geogebra. Noko av grunnen til dette skuldast truleg aversjon eller vegring mot Geogebra. I intervjua kjem det fram at elevane har stor tru på Geogebra, men at dei synes det er vanskeleg og at dei saknar meir opplæring.

Av spesielt interessante funn kan nemnast det at enkelte elevar drar med seg metodar dei brukar i tradisjonell kontekst og prøver å løyse oppgåver i Geogebra på same måten. Kanskje ikkje så rart, men det skapar unødvendige vanskar for elevane det gjeld, når dei skal gå i frå ein representasjon til ein annan. Andre elevar vil helst rekne seg fram til løysingar ved å bruke likninga, noko dei også held fram med i oppgåvene med Geogebra. For dei flinkaste 1T elevane, ser dette ut til å gå fint, men andre elevar slit med å setje inn rette tal i likningane og får problem med å snu på desse (finne *y*-verdi ved oppgitt *x*-verdi). Det verkar som om det å rekne og bruke likning gir ein følelse av betre kontroll, samtidig som dei ser ut til å stole meir på svara dei då får. Likevel kan dette og ha samanheng med kva erfaringar elvane har med funksjonar. Mange er opplærd i og vane med å bruke likninga som utgangspunkt og ein slags «mal» for å gå over i andre representasjonar. I Geogebra blir dette mindre viktig, sjølv om ein også då må beherske dei ulike representasjonane, blant anna for å kunne verifisere at representasjonsskifte er rett utført. Det er naturleg å tru at elevar som får meir opplæring og erfaring med Geogebra, etter kvart vil kunne bruke programmet på ein måte som kan gje «følelse av kontroll» også i den konteksten. Men ein må samtidig ikkje gløyme dei som strevar mest med å forstå dei ulike representasjonane av funksjonar og samanhengen mellom desse. For dei vil Geogebra være eit verktøy som opprettheld instrumentell forståing. Det vil sei at dei kan kanskje lære seg ei viss mengd algoritmar, og så vil dataprogrammet ordne resten. På den måten vil dette programmet kunne «skjule» mangelfull forståing.

Resultatet viser også at ein del av dei som brukar tabell til å teikne grafar i 1a, får det til, men avslører i oppgåvene som følger at dei ikkje heilt forstår omgrepa stigningstal og konstantledd. I undersøkinga kjem det også fram at enkelte elevar teiknar grafen som eit punkt, medan andre har ein lineær og eller proporsjonal tilnærming til funksjonar. Dette blir mindre synleg i del to, men her er det meir programtekniske utfordringar og vanskar som handlar om skalering av aksar og *grafikkfelt.*

Vi har sett korleis funksjonsomgrepet i matematikken har utvikla seg gjennom fleire hundre år til det vi kjenner i dag. Noko som også viser at det ikkje er gjort «over natta» å forstå dei ulike omgrepa, representasjonane og kunne skifte mellom desse. Resultatet på denne undersøkinga viser nokre av dei mange utfordringane elevane møter på vegen. Funksjonar har ein stor og viktig plass i matematikkundervisninga i norsk skule. Og for eit samfunn i endring, med stadig ny teknologi er også det digitale aspektet blitt meir og meir viktig. Som vi har sett i denne oppgåva, har det også innverknad på korleis elevane lærer matematikk.

Denne undersøkinga har ikkje hatt som mål å svare på om vi skal bruke Geogebra i arbeid med funksjonar eller ikkje. Den er meir tenkt som ei skildring av kva elevane får til og kva dei ikkje får til av representasjonsskifte i arbeid med funksjonar, og om denne kunnskapen endrar seg når dei arbeider med Geogebra. Som vi har sett, har bruk av Geogebra i arbeid med funksjonar både sine svake men og positive sider. Det er lite som tydar på at slike dynamiske dataprogram for teikning og behandling av funksjonar vil forsvinne ut av skulen med det første. Dei er nok kommen for å bli. I ein undervisningssituasjon handlar det då mykje om korleis ein nyttar desse programma og at ein som lærar og elev er bevisst på bruken. Som vi veit er det mange distraksjonar i ein moderne datamaskin, noko som kan vere ein utfordring også for dei mest skuleflinke elevar.

Geogebra kan på ingen måte erstatte arbeid med funksjonar på «tradisjonell» måte, for då vil viktig kunnskap gå tapt. Det er den kunnskapen som kjem inn under «black-box» delen (Adu-Gyamfi et al., 2012) i program som Geogebra. Dataprogrammet sørger for at representasjonsskifta blir korrekt gjennomført, om ein berre veit kva som skal skrivast inn i *inntastingsfeltet* eller kva kommando ein skal nytte. Den matematiske forståinga kan likevel komme i bakgrunnen, om elevane ikkje får tilstrekkelig opplæring utan Geogebra. Men, brukt på fornuftig vis er Geogebra eit særs nyttig hjelpemiddel i arbeid med funksjonar. På ein effektiv måte kan ein studere fleire funksjonar samtidig og sjå samanhengar mellom ulike representasjonar. Som Grønmo (2017) poengterer, er det inga enkel veg til forståing i matematikk. Det er ikkje nok med grafteiknarar som Geogebra for at elevane skal gripe dei ulike representasjonane av funksjonar og overgangane mellom desse. Resultatet frå denne undersøkinga viser at ein del elevar strevar med denne matematikken og at det ikkje nødvendigvis blir mykje enklare med Geogebra. Sjølv om teikning av grafar går raskare er det framleis feil og misoppfatningar som heng igjen. Som vi har sett dukkar det også opp andre utfordringar knytt til bruk av programmet (både tekniske og meir matematiske).

Ein kjem nok ikkje utanom opplæring i algoritmar og strategiar for å løyse oppgåver i arbeid med funksjonar. Men, som lærar ønsker ein mest av alt at elevane skal få operasjonell forståing, slik at dei kan dra nytte av kunnskapen også i møte med meir ukjende problemstillingar. Dette impliserer at matematikkundervisninga må ha som mål å skape ei heilskapleg forståing for funksjonsomgrepet, i begge kontekstane (tradisjonell og med Geogebra), og at ein først då klarar å dra full nytte av det potensialet som ligg i Geogebra.

Litteratur

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Stiff, L. V. (2012). Lost in Translation: Examining translation errors assiciated with mathematical representations. *School science and mathematics, 112*(3), 159-170.

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*(2), 34-41.

Bjørndal, K. E. W. (2013). Pedagogisk designforskning-en forskningsstrategi for å fremme beddre undervisning og læring. I M. B. o. T. TIller (red.), *Læreren som forsker*. Oslo: Universitetsforlaget AS.

Bock, D. D., Neyens, D., & Dooren, W. V. (2016). Students' Ability to Connect Function Properties to Different Types of Elementary Functions: An Empirical Study on the Role of External Representations. *Springer*, 939-955. doi:10.1007/s10763-016-9724-z

Botten, G. (2011). *Meningsfylt matematikk - nærhet og engasjement i læringen* (Vol. 4). Bergen: Caspar Forlag.

Brekke, G. (2002). *Kartlegging av matematikkforståelse - Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*: Læringssenteret (LS) Utdanningsdirektoratet.

Carter, S. P., Greenberg, K., & Walker, M. (2016). The imapct of computer usage on academic performance: Evidence from a randomized trial at the United states millitary academy. SEII Discussion Paper: MIT Department of economics.

Clement, J. (1985). *Misconceptions in graphing*. Paper presented at the Ninth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Noordwijkerhout, The Netherlands.

Creswell, J. W. (2015). *Educational research. Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research.* (4th. utg.): Pearson.

Danielsen, A. G. (2013). Kunnskapsbygging i skolen via kvantitative verktøy - statistikk og spørreskjema. I M. B. T. Tiller (red.), *Læreren som forsker. Innføring i forskningsarbeid i skolen.* s. 138-154. Oslo: Universitetsforlaget.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*, 103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Grønmo, L. S. (2017). Et matematikkdidaktisk perspektiv. I L. S. G. o. A. Hole (red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken. En nøkkel til å lykkes i realfag* s. 45-62: Cappelen Damm Akademisk.

Hals, S. (2010). *IKT i matematikkopplæringen – tidstjuv eller tryllemiddel? En studie av faktorer som kan påvirke bruken av IKT generelt og GeoGebra spesielt, hos lærere og elever på 10. og 11. årstrinn.* (Master), Universitetet i Agder, https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/138031.

Hansen, R. (2010). Modeller, miljø og kritisk demokratisk kompetanse. *Tangenten*(3), 29-35.

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H., & Borgan, Ø. (2014). *Matematikk 1P* (Vol. 3): Aschehoug.

Hinna, K. R. C., Rinvold, R. A., & Gustavsen, T. S. (2011). *QED 5-10 Matematikk for grunnskolelærerutdanningen* (1. utg. Vol. 1): Høyskoleforlaget. Norwegian Academic Press.

Holme, A. (2004). *Matematikkens historie 2*: Fagbokforlaget.

Høines, M. J., Rinvold, R., & Selvik, B. K. (2007). *Matematiske sammenhenger: Algebra og funksjonslære.* (3. utg.). Caspar Forlag AS: www.caspar.no.

Imsen, G. (1998). *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi.* (Vol. 3). Tano Aschehoug.

Janvier, C. (1981). Use of Situations in Mathematics Education. *Springer, 12*(1), 113-122.

Janvier, C. (1987a). Representation and understanding: The notion of function as an example. I C. Janvier (red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*: Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C. (1987b). Representation and understanding: The notion of function as an example. I C. Janvier (red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* s. 67-71: NJ: Lawrence Erlbaum Hillsdale.

Janvier, C. (1987c). Translation processes in mathematics education. I C. Janvier (red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* s. 27-31: Lawrence Erlbaum Associates.

Kjeldsen, T. H., & Lützen, J. (2015). Interactions between mathematics and physics: The history of the concept of function-Teaching with and about nature of mathematics. *Science and education*.
Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for research in mathematics education, 31*(4), 500-507.
Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal akademisk.
Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.
Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet* (Vol. 1): NKI-forlaget.
Mevarech, Z. R., & Kramarsky, B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: Stability and change in students´ alternative conceptions. *Educational studies in mathematics, 32*(3), 229-263. doi:https://doi-org.pva.uib.no/10.1023/A:1002965907987
Nygaard, O., & Zernichow, A. G. (2006). Den blokkerende misoppfatning. *Spesialpedagogikk, 12*(4), 34-38.
Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O., & Hals, S. (2014). *Sinus Matematikk 1P*: Cappelen Damm.
Postelnicu, V. (2011). *Student difficulties with linearity and linear functions and teachers' understanding of student difficulties* (Vol. Doctor of philosophy). UMI dissertation publishing: Arizona state university.
Rogers, R. (2011). Multiple representations of functions in the history of mathematics. I D. Jardine & A. Shell-Gellasch (red.), *Mathematical Time Capsules: Historical Modules for the Mathematics Classroom* Vol. 77, s. 179-188.
Rønningstad, K. (2009). *Misoppfatninger rundt funksjonsbegrepet - en undersøkelse blant elever i videregående skole.* (Masteroppgåve i realfagdidaktikk), Universitetet i Oslo.
Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. I A. H. Schoenfeld (red.), *Mathematical thinking and problem solving* s. 53-70: Routledge.
Sierpinska, A. (2005). *Understanding in Mathematics*. I D. P. Ernest (Series. utg.), Studies in Mathematics Education Series, (s. 206). Hentet fra doi
Sierpinska, A. (2013). *Understanding in Mathematics* (s. 206). Hentet fra doi
Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*: Penguin Books.
Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95.
Sollid, H. (2013). Intervju som forskningsmetode i klasseromsforskning. I M. B. T. Tiller (red.), *Læreren som forsker,*
Innføring i forskningsarbeid i skolen s. 124-137. Oslo: Universitetsforlaget.
Swan, M. (2002). Dealing with misconceptions in mathematics. I P. Gates (Red.), *Issues in Mathematics Teaching* (s. 147-165): Taylor and Francis.
Utdanningsdirektoratet. (2015). Revidert eksamensordning i matematikk. http://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/eksamensordning-skriftlig-eksamen-i-matematikk/.

Vedlegg

1. Godkjenning frå NSD
2. Intervjuguide
3. Informasjon om informert samtykke
4. Diagnostisk prøve i funksjonar

Arne Jakobsen
Matematisk institutt Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 03.11.2016 Vår ref: 50437 / 3 / HJP Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 07.10.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

50437	*Bruk av Geogebra i arbeid med funksjonar i matematikk. Korleis kan Geogebra bidra til å auke eventuelt minske misoppfatningar i funksjonar for matematikkelevar i første trinn på vidaregåande skule*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Arne Jakobsen*
Student	*Torstein Taranger Westermoen*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 20.06.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Hanne Johansen-Pekovic

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Intervjuguide

Innleiing av samtale

- Takkar for at eleven har sagt ja til å verte intervjua og fortel litt om prosjektet.
- Informerer om og er tydeleg på at:
    - Spørsmåla i intervjuet vil basere seg på svara frå den skriftlege testen og vil vare i omlag 30 minuttar.
    - Eleven når som helst kan trekkje seg frå intervjuet utan grunngjeving.
    - Intervjuet vert tatt opp på band og transkribert ved eit seinare høve.
    - Anonymiteten er i ivaretatt. Det er berre eg som får høyre opptaket og eventuelle attgjevne sitat vert anonymisert. Alle data vert sletta når oppgåva er ferdig.
- Spør om eleven har spørsmål om prosjektet eller intervjuet før intervjuet startar.

Intervjuspørsmål **[**Basert på Kvale & Brinkmann (2015, s. 166 – 171) *Det kvalitative forskningsintervju***]**

A - Spørsmål til introduksjon

1. Kan du fortelje meg korleis du tenkte då du løyste denne oppgåva?
    a. Dersom eleven ikkje huskar noko, kan ein be eleven gjere ei liknande oppgåve.
2. Kva var det mest utfordrande med denne oppgåva?
3. Er det noko som du synes er enkelt/rett fram – når du løyser denne oppgåva?

B - Spørsmål til oppfølging og utdjuping

1. Kvifor valde du vekk eventuelt andre svaralternativ?
2. Kunne du løyst oppgåva på ein annan måte?
3. Har du eksempel på det du seier her?
4. Kan du forklare kva du meiner med …og …?
5. Korleis opplevde du det å få bruke Geogebra til å løyse denne oppgåva?

C - Direkte og indirekte spørsmål

1. Kva har bruken av Geogebra betydd for din måte å arbeide med matematikk på?
2. Kva fordelar og kva ulemper trur du Geogebra kan ha for di forståing av funksjonar?
3. Vart det vanskelegare eller lettare å arbeide med oppgåvene i testen etter at du fekk bruke Geogebra?
4. Kva trur du medelevane dine tenkjer om det å bruke Geogebra?

D - Tolkande spørsmål

1. Så du tenkjer at …?
2. Forstår eg deg rett når du seier at …?

Avslutning

Spørje om det er andre ting eleven vil snakke om rundt erfaringane frå den skriftlege prøven og funksjonar. Takke eleven for det denne ville dele om tankar og metodar rundt svara på den skriftlege prøven.

Til elevar og føresette ved [redacted] vidaregåande skule vg1

Førespurnad om å delta i forskingsprosjekt:

Eg arbeider som realfagslærar ved [redacted] vidaregåande skule. I min kvardag som matematikklærar møter eg ein del elevar som strevar med å forstå funksjonar og det er ein del misoppfatningar knytt til dette. Kunnskap om funksjonar er nyttig og viktig og noko ein får bruk for i fleire fag og samanhengar. Digitale hjelpemiddel har fått stadig større plass i matematikkundervisninga, og då særleg det dynamiske dataprogrammet Geogebra.

Som deltidsstudent ved Universitetet i Bergen held eg på med å skrive ei masteroppgåve i matematikkdidaktikk. Eg ynskjer å finne ut om bruk av Geogebra bidrar til å auke, eventuelt minske misoppfatningar i funksjonar for matematikkelevar i første trinn på vidaregåande skule. Dersom vi får meir kunnskap om dette kan vi som lærarar vere betre budd på å fange opp og hjelpe elevar som strevar med funksjonar. Til å kartlegge elevane si forståing av funksjonar ynskjer eg å gjennomføre ein *skriftleg kartleggingsprøve* i emnet. Prøven er på om lag ein time.

Sidan ein skriftleg prøve ikkje alltid fortel så mykje om korleis elevane tenkjer når dei arbeider med oppgåver i matematikk, er det ynskjeleg å følgje opp einskilde svar med å *intervjue* nokre (3-5) av elevane, ein til ein. Ved å snakke med elevane om oppgåvene i etterkant kan eg få auka innsikt i eventuelle misoppfatningar eller andre vanskar dei har med funksjonar. Intervjua vil vare i om lag 30-45 minutt og samtalane vert tatt opp med «bandopptakar».

Eg vil understreka at det er frivillig å vere med på både den skriftlege testen og eit eventuelt intervju. Ingen sensitive opplysningar skal registrerast og personar over 15 år kan då sjølv samtykka i å delta. Elevar som ynskjer å trekkje seg frå undersøkinga, kan gjere dette når som helst, utan noko vidare grunngjeving. Det vil ikkje få negative følgjer for ein elev i skulekvardagen, om denne ikkje ynskjer å delta eller vil trekkje seg undervegs.

Alle opplysningar er anonyme og vert behandla konfidensielt. Identifisering av elevane skjer ved bruk av kodar, der kunn eg som lærar har tilgang til lista med kodar. Data frå kartleggingsprøve, lydopptak og transkripsjonar av intervju vert sletta etter at oppgåva er ferdig (planlagd innan 20. november 2018).

For meir opplysningar om forskingsprosjektet, kan de kontakte underteikna ([redacted]) eller rettleiaren min, professor Arne Jakobsen (tlf. 51 83 35 47, ved Universitetet i Stavanger, eller til mobil: 970 97 369). Arne Jakobsen er også professor 2 ved matematisk institutt, Universitetet i Bergen.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning (Norsk senter for forskningsdata AS, NSD).

Med helsing,

Torstein Taranger Westermoen
Lærar ved [redacted] Vidaregåande Skule

Samtykke til å delta i prosjektet

Eg har motteke informasjon om forskingsprosjektet, og ynskjer å delta:

- Eg samtykker til å delta på kartleggingsprøven _______ (set kryss)
- Eg samtykker til å delta på intervju _______ (set kryss)

Dato: Signatur:

Namn____

Brukte du du Geogebra på ungdomskulen? Ja ____ Nei ____. 1T ☐ eller 1P ☐

Del 1 - utan hjelpemiddel (ca 30 minuttar)

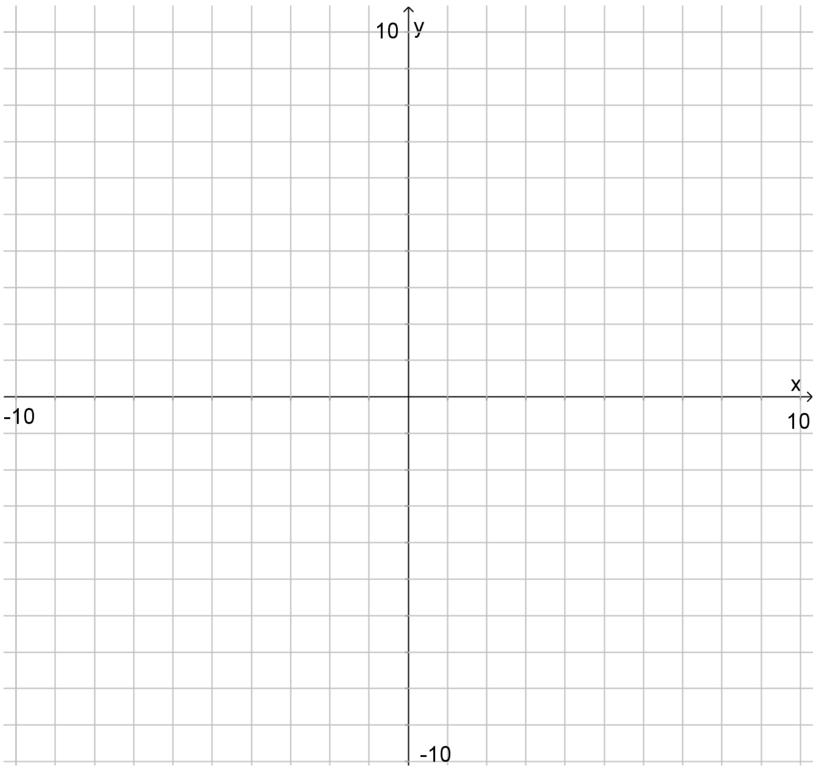
Alle utrekningar og svar på del 1 skal gjerast på oppgåvearket. Etter 30 min skal du levere del 1.

Oppgåve 1

a) Teikne grafen til: ***A*** $y = x - 3$ ***B*** $y = -3 - 2x$ ***C*** $y = 3$

i koordinatsystemet nedanfor og merk grafane med ***A***, ***B*** *og* ***C***.

b) Kan du finne felles eigenskapar ved grafane?



Svar:

a)

b)

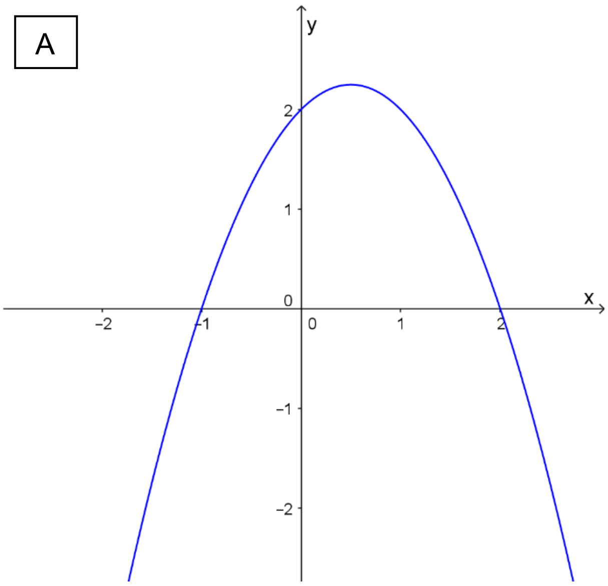
Oppgåve 2

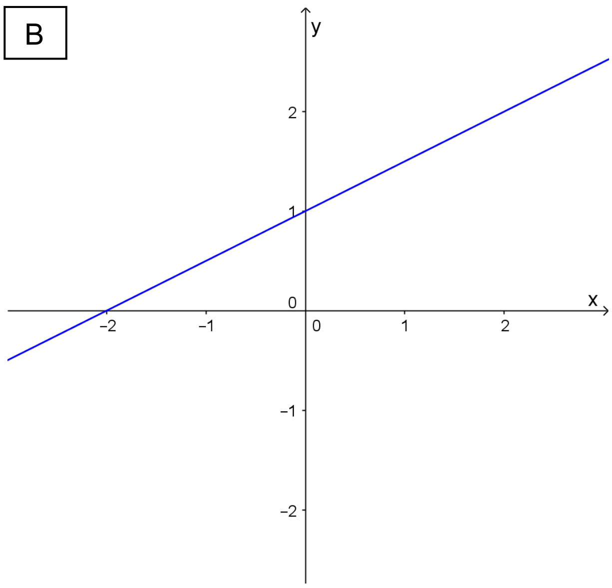
Funksjonane *f, g, h og i* er gitt ved

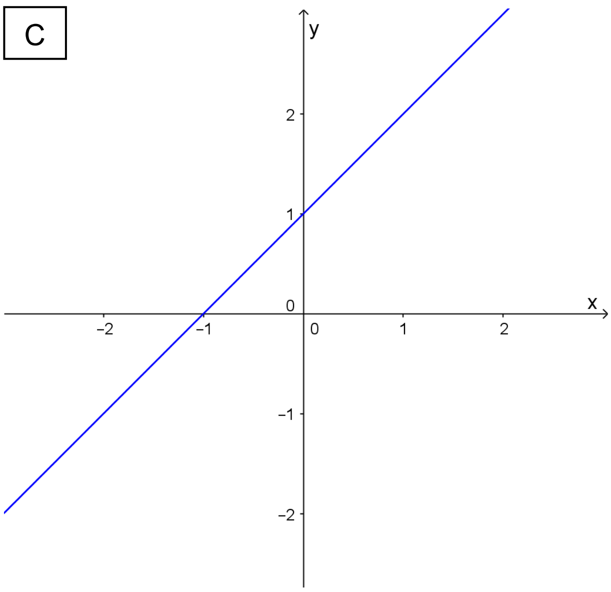
$$f(x) = -x \qquad g(x) = -x^2 + x + 2 \qquad h(x) = \frac{1}{2}x + 1 \qquad i(x) = 2x^3 + 1$$

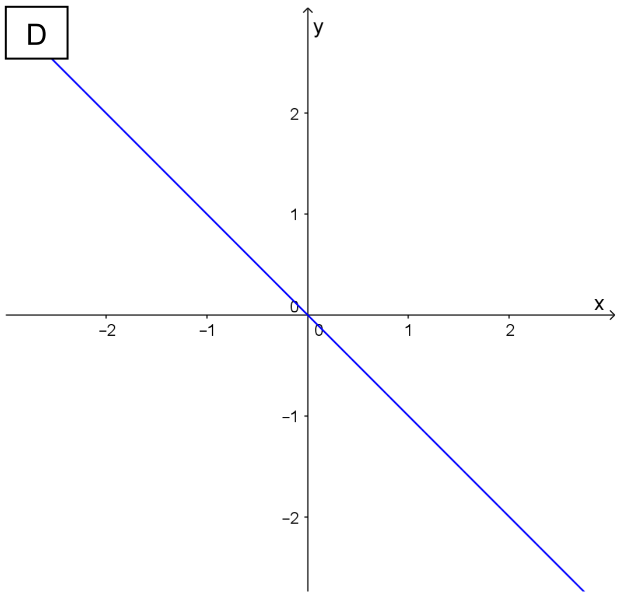
Nedanfor ser du grafane til *åtte* ulike funksjonar (A-H denne og neste side). Kva graf er grafen til *f,* kva graf er grafen til *g*, kva graf er grafen til *h* og kva er grafen til *i* ?

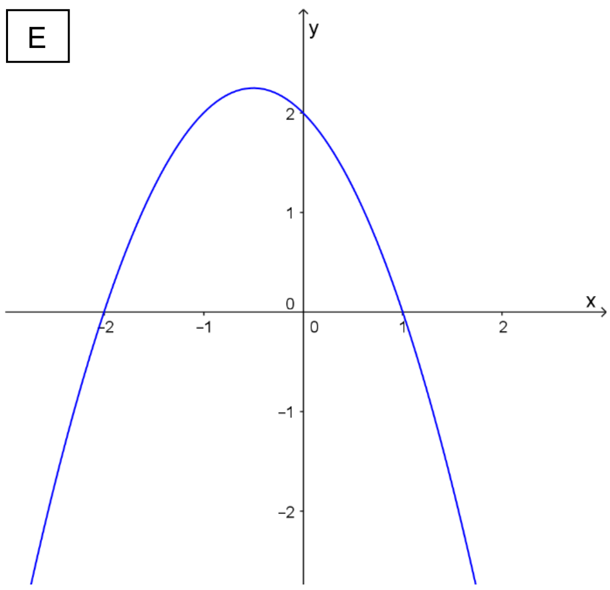
Grunngi svara dine.

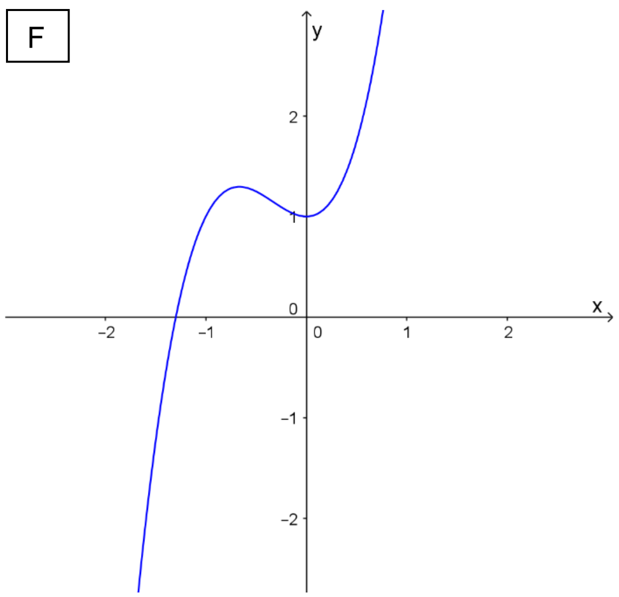


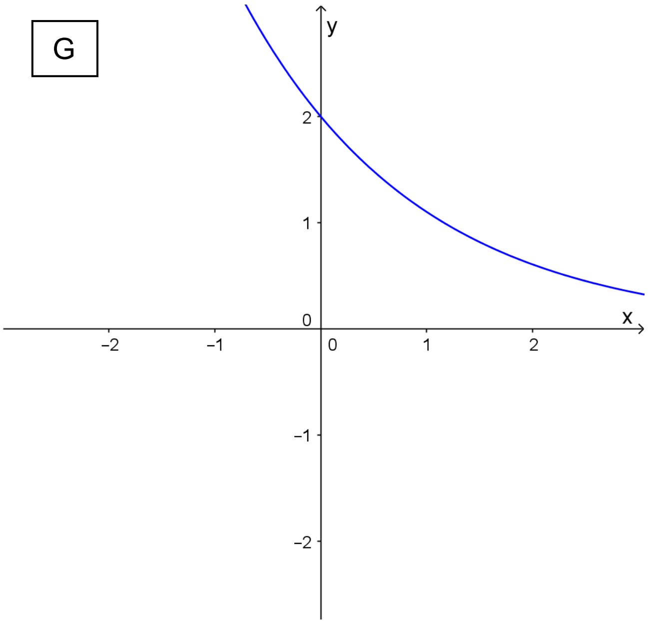


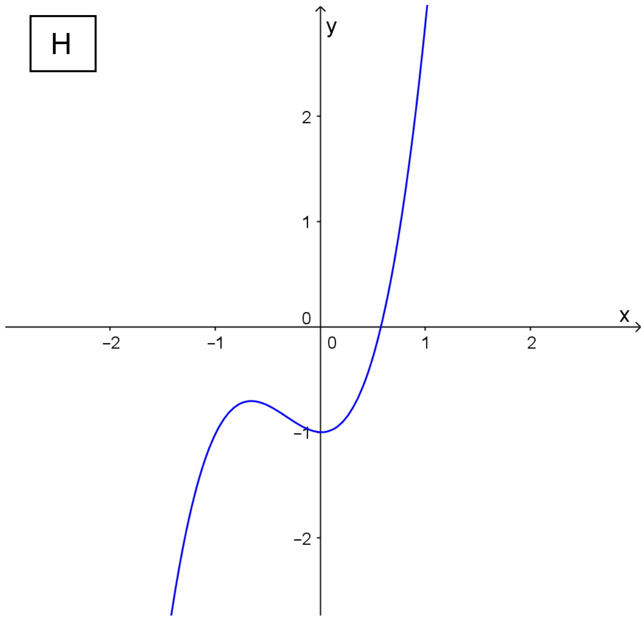












	Svar:	**Forklaring:**
Grafen til *f*		
Grafen til *g*		
Grafen til *h*		
Grafen til *i*		

Oppgåve 3

Ei rett linje går gjennom punkta A=(-3, -2) og B=(1, 6).

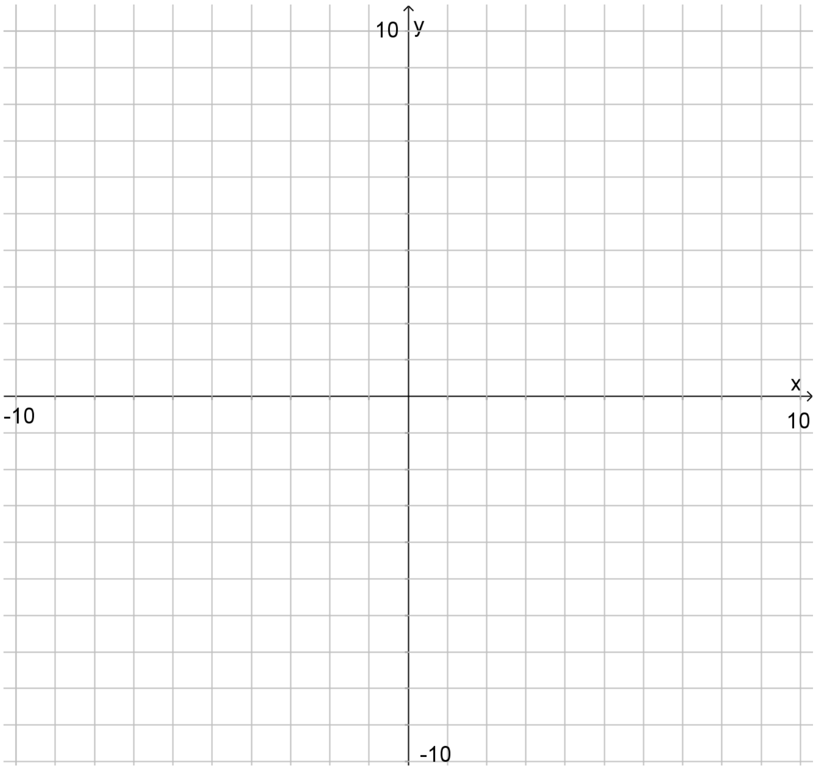
a) Sett punkta inn i koordinatsystemet og teikne linja.

b) Finn likninga til linja (på forma $y=ax+b$).

c) Bestem y, når $x= 2$

d) Bestem x, når $y= -1$

e) Gi ei tolking av stigningstalet til linja.



Svar:

b)

c)

d)

e)

Oppgåve 4

Grafen til *h(t)* viser kor høgt ein ball er over bakken *t* sekund etter at den vert kasta.

a) Kor mange sekund er ballen i lufta?

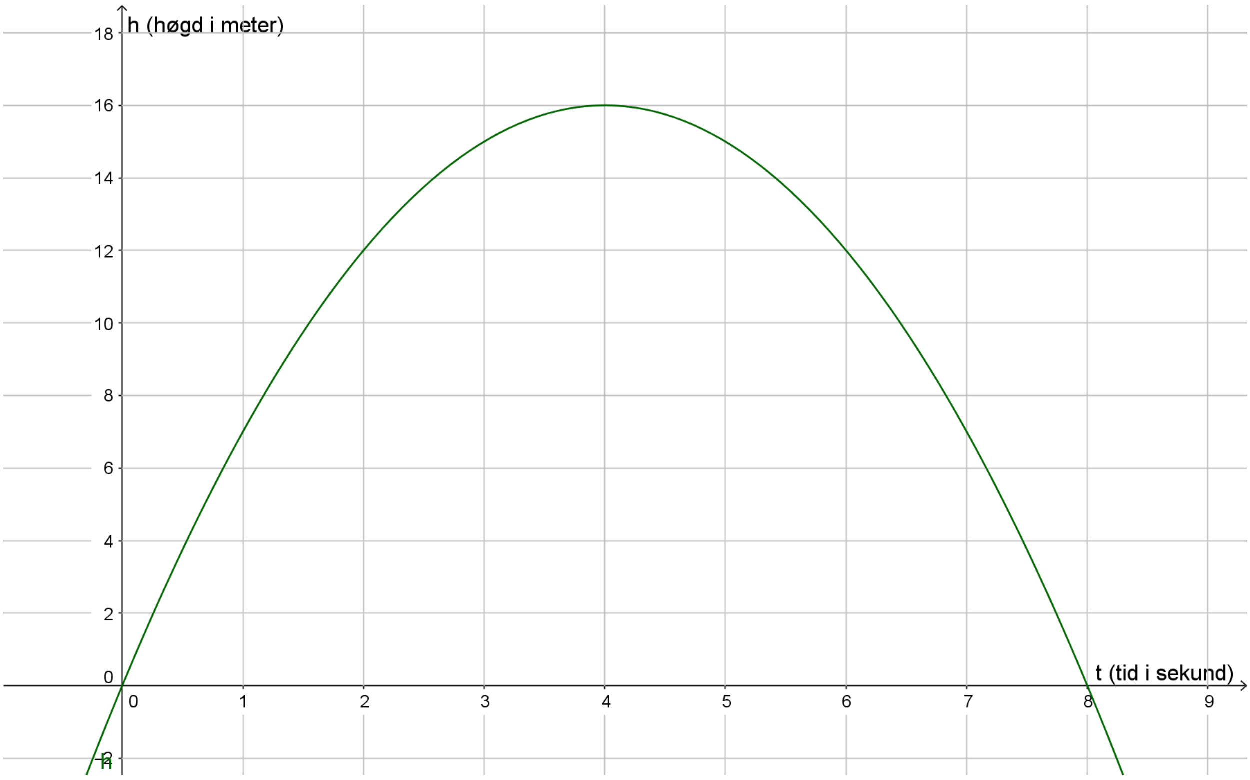
Svar:

b) Kva er tida når ballen er på det høgaste og kor høgt kjem ballen?

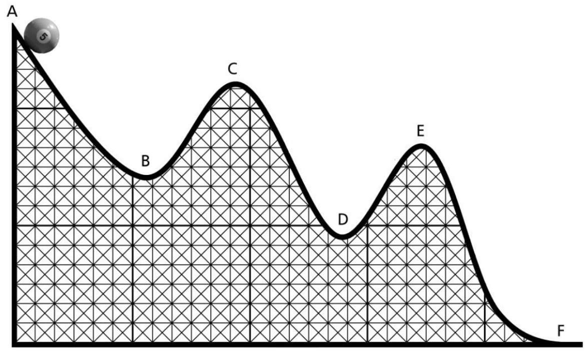
Svar: *Tida er* ______________ *s når ballen er på det høgaste.*
Svar: *Ballen kjem*_______________ *m over bakken.*

c) For kva verdi(ar) av t er ballen 12 m over bakken?

Svar:

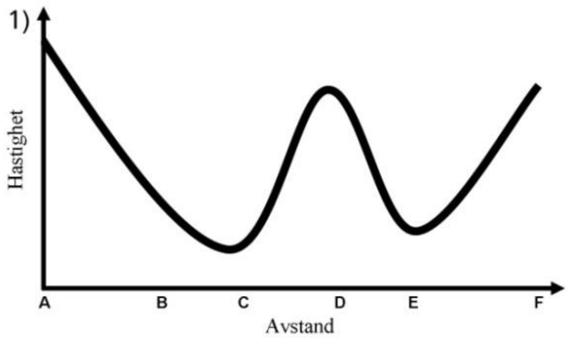


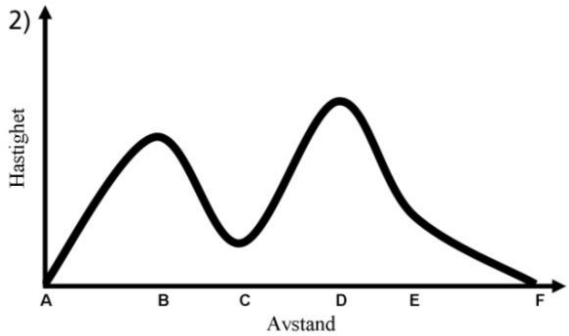
Oppgåve 5

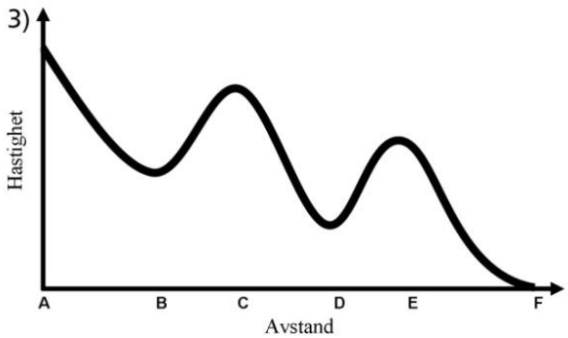


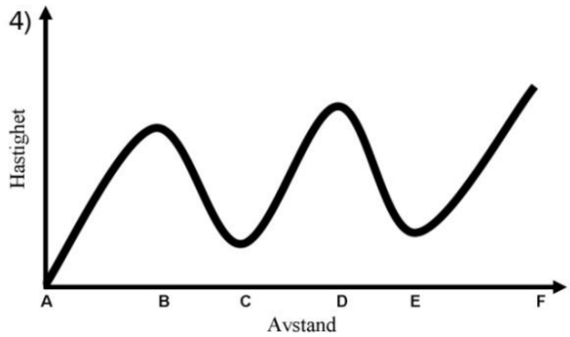
Ei kule trillar fritt langs banen i figuren til venstre. Det er skissert fire ulike grafar nedanfor.

Kven av desse grafane viser best korleis hastigheten til kula varierer frå den vert slept i A og til den når enden av bana i F?





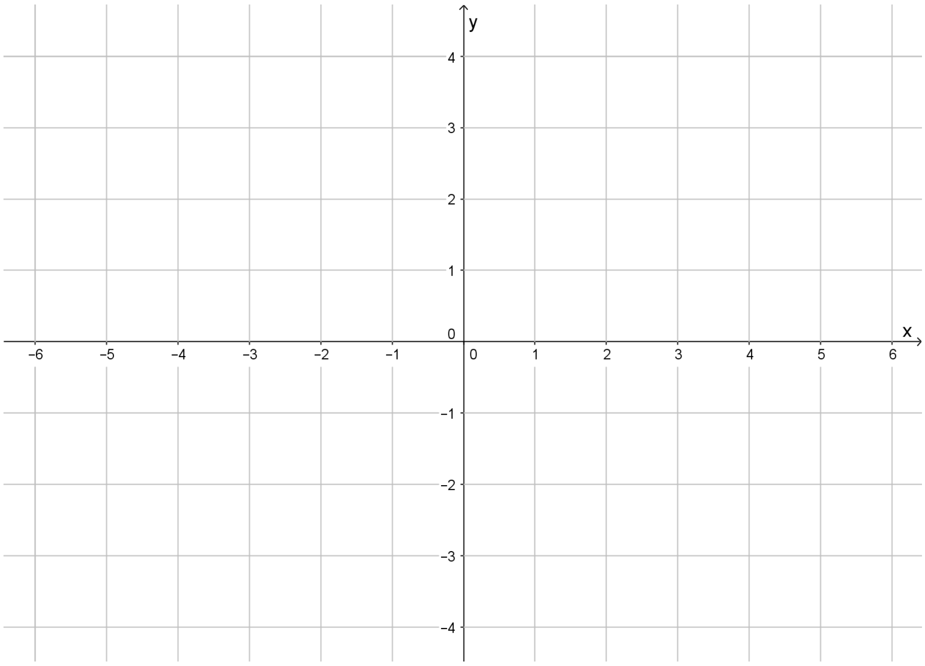




Svar:	**Forklaring:**

Oppgåve 6

a) Gitt $y = x^2 - 2x$. Fyll inn resten av verditabellen og skisser grafen.



x	y
-1	3
0	
1	
2	0
3	

b) Kven av påstandane nedanfor er rette? Sett kryss.

☐ *x* er ein funksjon av *y*.

☐ *y* er ein funksjon av *x*.

☐ *x* er ein funksjon av *y* og *y* er ein funksjon av *x*.

Del 2 - Med Geogebra

Bruk MS Word eller eit anna tekstbehandlingsverktøy til å svare på desse oppgåvene.

Lever dokumentet på *e-post,* send til [redacted]

[redacted]

Oppgåve 1

a) Teikne linja som går gjennom punkta (-5, 2) og (3, -2) med Geogebra.

b) Finn likninga til linja (på forma $y = ax + b$).

c) Kva er stigningstalet og kva er konstantleddet til linja?

d) Bestem *y*, når *x= -3*.

e) Bestem *x*, når *y= -3*.

Oppgåve 2

a) Teikne grafen til dei fire funksjonane nedanfor i same koordinatsystem:

$f(x) = x - 3$ $\quad g(x) = -2x - 3$ $\quad h(x) = x$ $\quad i(x) = -x - 3$

b) Kvifor kan vi sei at grafane til *f* og *h* er parallelle?

c) Korleis veit vi at $g(0) = i(0)$?

Oppgåve 3

Gitt utrykka

A: $y + x - 6 = 0$ $\quad$ B: $y^2 = x + 6$ $\quad$ C: $x^2 + 2y = 12$

a) Teikne grafane til A, B og C i same koordinatsystem. Merk med forskjellige fargar.

b) Bestem y når *x=2* for alle tre grafane til A, B og C.

c) Er det ein eller fleire av desse grafane der *y* ikkje er ein funksjon av *x*? Forklar.

Oppgåve 4

Ei bedrift produserer og sel *x* einingar av ei vare per dag. Overskotet per dag, i tusen kroner, er gitt ved funksjonen *O*

$$O(x) = -x^2 + 20x - 19 \qquad for \quad 0 \le x \le 25$$

a) Teikne grafen til *O.*

b) Kor mange einingar må bedrifta produsere og selje per dag for å gå med overskot?

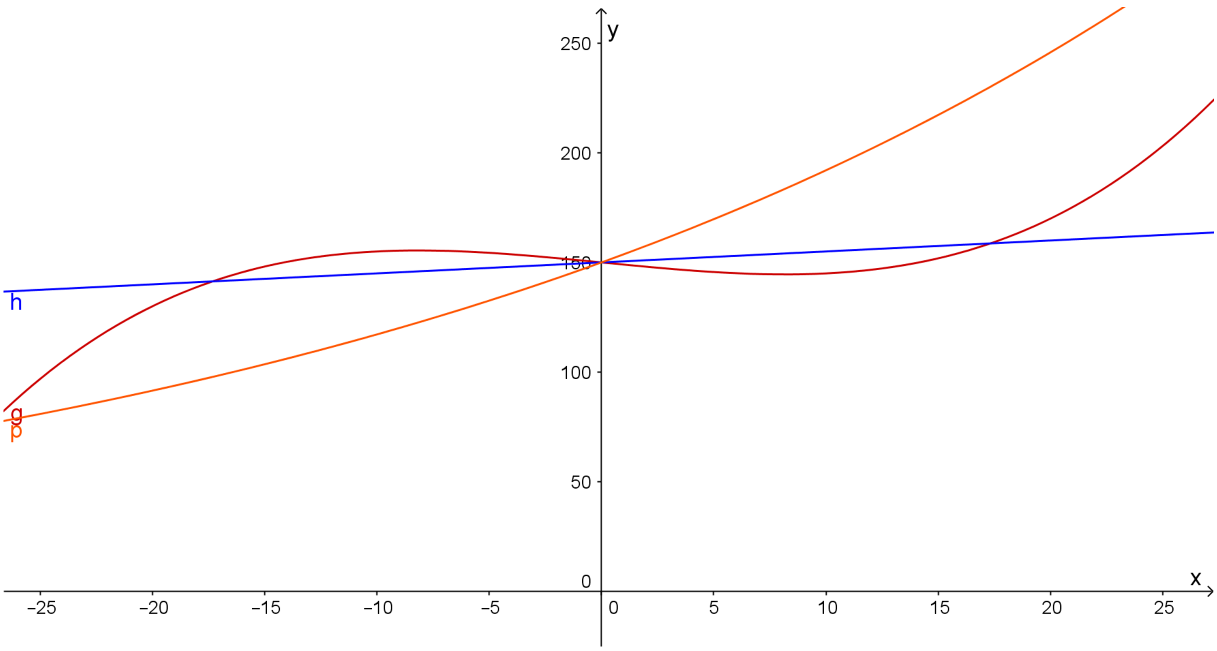
c) Kor mange einingar må bedrifta produsere og selje per dag for å få størst mulig overskot? Kor stort er overskotet då?

d) Ein dag vart det produsert og seld 14 einingar. Kva vart overskotet då?

Oppgåve 5

a) Teikne grafen til $f(x) = 0{,}005x^3 - x + 150$

b) Kven av grafane nedanfor gir eit rett bilde av grafen til *f* ? Forklar.



…takk for innsatsen!