Department
of
APPLIED MATHEMATICS

Sur le transport de masse produit par des oscillations en milieu compressible, dissipatif et inhomogène

par

Jacqueline Naze Tjøtta et Sigve Tjøtta.

Report No. 38. December 1972.

UNIVERSITY OF BERGEN
Bergen, Norway

Sur le transport de masse produit par des oscillations en milieu compressible, dissipatif et inhomogène

par

Jacqueline Naze Tjøtta et Sigve Tjøtta.

Report No. 38. December 1972.

Abstract: The mass transport produced by time-dependent oscillations of finite amplitude in an inhomogeneous, compressible fluid, is considered. The equilibrium is assumed to be isothermal and the fluid is a perfect gas. The mass transport is given by the Lagrangian mean velocity calculated to the second order in the Mach number of the oscillations.

We find no mass transport in a non-dissipative model. Taking into account dissipation, however, the theory leads to non-zero vertical drift and horizontal flow. The vertical drift becomes zero in an incompressible model.

Résumé. On étudie le transport de masse produit par des oscillations d'amplitude finie en milieu inhomogène, compressible et dissipatif au voisinage de l'équilibre isotherme dans un champ de gravitation à surfaces de niveau planes. Le transport de masse moyen est décrit par le vecteur vitesse lagrangienne moyenne calculé au second ordre du nombre de Mach de la perturbation.

1. On étudie le transport de masse produit par des oscillations d'amplitude finie en milieu inhomogène, compressible et dissipatif. Le transport de masse est décrit par le vecteur vitesse lagrangienne moyenne calculé au second ordre du nombre de Mach de la perturbation. On obtient les expressions de la composante verticale, de la divergence, et de la composante verticale du rotationnel de ce vecteur. On trouve que le transport de masse est différent de zéro en milieu dissipatif. Les résultats obtenus sont comparés à ceux que l'on obtient dans le cas non dissipatif et à l'approximation incompressible.

La mise en évidence d'un transport de masse associé à des oscillations est susceptible de présenter de l'intérêt en astrophysique (atmosphère solaire, voir [1,2] pour une discussion des observations), en géophysique (courants moyens dans l'océan et dans la haute atmosphère, voir par exemple [3,4] pour l'étude océanographique) et en biophysique (voir [5,6] pour de récentes observations d'ondes stationnaires). En acoustique des observations d'ondes stationnaires tendant à prouver l'existence d'un transport de masse ont été effectuées [7,8,9].

2. Afin de simplifier la présentation des résultats on se borne ici à étudier le cas du gaz parfait au voisinage de l'équilibre isotherme dans un champ de gravitation à surfaces de niveau planes. Après élimination de l'entropie les équations de l'hydrodynamique s'écrivent [10]

Résumé. On étudie le transport de masse produit par des oscillations d'amplitude finie en milieu inhomogène, compressible et dissipatif au voisinage de l'équilibre isotherme dans un champ de gravitation à surfaces de niveau planes. Le transport de masse moyen est décrit par le vecteur vitesse lagrangienne moyenne calculé au second ordre du nombre de Mach de la perturbation.

1. On étudie le transport de masse produit par des oscillations d'amplitude finie en milieu inhomogène, compressible et dissipatif. Le transport de masse est décrit par le vecteur vitesse lagrangienne moyenne calculé au second ordre du nombre de Mach de la perturbation. On obtient les expressions de la composante verticale, de la divergence, et de la composante verticale du rotationnel de ce vecteur. On trouve que le transport de masse est différent de zéro en milieu dissipatif. Les résultats obtenus sont comparés à ceux que l'on obtient dans le cas non dissipatif et à l'approximation incompressible.

La mise en évidence d'un transport de masse associé à des oscillations est susceptible de présenter de l'intérêt en astrophysique (atmosphère solaire, voir [1,2] pour une discussion des observations), en géophysique (courants moyens dans l'océan et dans la haute atmosphère, voir par exemple [3,4] pour l'étude océanographique) et en biophysique (voir [5,6] pour de récentes observations d'ondes stationnaires). En acoustique des observations d'ondes stationnaires tendant à prouver l'existence d'un transport de masse ont été effectuées [7,8,9].

2. Afin de simplifier la présentation des résultats on se borne ici à étudier le cas du gaz parfait au voisinage de l'équilibre isotherme dans un champ de gravitation à surfaces de niveau planes. Après élimination de l'entropie les équations de l'hydrodynamique s'écrivent [10]

$$(1)\quad \rho \frac{D\underline{V}}{Dt} + \nabla p + \underline{\lambda} g \rho = \underline{F}^V$$

$$(2)\quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla . \underline{V} = 0$$

$$(3)\quad \frac{Dp}{Dt} + \gamma p \nabla . \underline{V} = \Phi^T + \Phi^V .$$

$\underline{V}, \rho$, $p, \underline{\lambda}$, g, γ, R sont respectivement le vecteur vitesse eulérienne, la densité, la pression, le vecteur unitaire vertical, l'accélération de la pesanteur, le rapport et la différence des chaleurs spécifiques c_p et c_v. $\underline{F}^V$ est la force visqueuse, $\Phi^T/(\gamma-1)$ l'apport net de chaleur, Φ^V la fonction de dissipation visqueuse:

$$(4)\quad \underline{F}^V = (\frac{\mu}{3} + \mu_B) \nabla \nabla . \underline{V} + \mu \nabla^2 \underline{V}$$

$$(5)\quad \Phi^T = (\gamma-1)\, \nabla . (\sigma \nabla T)$$

$$(6)\quad \Phi^V = (\gamma-1)\left[\mu\left(\nabla \underline{V} : \nabla \underline{V} + \nabla \underline{V} : (\nabla \underline{V})^* - \frac{2}{3}(\nabla . \underline{V})^2 \right) + \mu_B (\nabla . \underline{V})^2 \right] .$$

La température T est donnée par l'équation d'état $p = R\rho T$. Les coefficients de dissipation μ, μ_B, σ sont constants.

L'état d'équilibre est tel que $\underline{V}_0 = 0$, $T_0 =$ const., $p_0 = p_s \exp(-z/H)$, $\rho_0 = \rho_s \exp(-z/H)$; l'indice zéro indique la valeur à l'équilibre. $H = RT_0/g$ est l'échelle de hauteur, z l'altitude, p_s, ρ_s sont la pression et la densité en $z = 0$. On suppose qu'hors de l'équilibre les variables peuvent être développées suivant les puissances du nombre de Mach M de la perturbation au moins jusqu'au second ordre, $\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \ldots$, $\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots$, etc... .

3. Substituant ces expressions dans (1)-(3) et négligeant les termes du second ordre en M, on obtient les équations linéarisées (7)-(9), i = 1. Retenant les termes du second ordre, on obtient les équations (7)-(9), i = 2. w est la composante verticale de $\underline{V}$. $\underline{F}_i^V$, Φ_i^V, Φ_i^T (i = 1,2) sont obtenus en substituant respectivement $\underline{V}_i$, T_i à $\underline{V}$, T dans (4)-(6). p_0', ρ_0' désignent les dérivées de p_0, ρ_0 par rapport à z.

$$(7)\quad \rho_0 \frac{\partial \underline{V}_i}{\partial t} + \nabla p_i + \underline{\lambda} g \rho_i = \underline{F}_i^V - \delta_{2i}\left[\rho_1 \frac{\partial \underline{V}_1}{\partial t} + \rho_0 \underline{V}_1 \cdot \nabla \underline{V}_1\right]$$

$$(8)\quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \rho_0' w_i + \rho_0 \nabla\cdot\underline{V}_i = -\delta_{2i} \nabla\cdot(\rho_1 \underline{V}_1)$$

$$(9)\quad \frac{\partial p_i}{\partial t} + p_0' w_i + \gamma p_0 \nabla\cdot\underline{V}_i = \Phi_i^T + \delta_{2i}\left[\Phi_1^V - \underline{V}_1\cdot\nabla p_1 - \gamma p_1 \nabla\cdot\underline{V}_1\right]$$

4. Pour mettre en évidence un éventuel transport de masse il est nécessaire d'introduire le vecteur vitesse lagrangienne $\underline{V}_{L2}$, soit aux différents ordres d'approximation

$$(10)\quad \underline{V}_{L1}(\underline{x},t) = \underline{V}_1(\underline{x},t) \quad , \quad \underline{V}_{L2}(\underline{x},t) = \underline{V}_2(\underline{x},t) + \left(\int_0^t \underline{V}_1(\underline{x},\tau)\,d\tau\right)\cdot \nabla \underline{V}_1(\underline{x},t) .$$

Le dernier terme en (10) est le vecteur vitesse de Stokes, voir ([11]) quant à sa signification en géophysique. Pour une oscillation d'amplitude finie, $\underline{V}_{L2}$ peut avoir une valeur moyenne non nulle même si $\underline{V}_2$ a une valeur moyenne nulle.

On suppose maintenant que $\underline{V}_1$, ρ_1, p_1 est une solution périodique de (7)-(9), i = 2, de période ω en t. La résolution de (7)-(9), i = 2, est un problème compliqué; on substitue à ces équations leurs moyennes; la moyenne est ici définie par $\overline{a} = \frac{\omega}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} a(\tau)\,d\tau$. Compte tenu de (10), on obtient un système contenant les inconnues $\overline{\underline{V}}_{L2}$, $\overline{\rho}_2$, $\overline{p}_2$, les moyennes de formes quadratiques des variables du premier ordre, et les moyennes de dérivées temporelles telles que $\partial\rho_2/\partial t$ par exemple. On suppose dans tout ce qui suit que

$$\overline{\frac{\partial \underline{V}_2}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial \rho_2}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial p_2}{\partial t}} = 0 .$$

(Pour justifier cette hypothèse il faudrait par exemple montrer que $\underline{V}_2$, ρ_2, p_2 ne sont pas séculaires; une étude aussi détaillée exigerait que l'on pose le problème aux frontières.)

5. Compte tenu de (10) et de l'identité (11), les moyennes de (8)-(9), i = 2, donnent respectivement (12)-(13).

$$(11)\quad \overline{\nabla \cdot \underline{V}_{L2}} = \nabla \cdot \overline{\underline{V}_2} + \overline{\left(\int_0^t \underline{V}_1\right) \cdot \nabla \nabla \cdot \underline{V}_1}$$

$$(12)\quad \rho_0' \, \overline{w}_{L2} + \rho_0 \, \nabla \cdot \overline{\underline{V}}_{L2} = 0$$

$$(13)\quad p_0' \, \overline{w}_{L2} + \gamma p_0 \, \nabla \cdot \overline{\underline{V}}_{L2} = \overline{\Phi}_1^v + (\gamma-1)\frac{\sigma}{T_0}\overline{(\nabla T_1)^2} + (\gamma-1)\sigma \, \nabla \cdot \overline{\left[\nabla\left(T_2 - \frac{T_1^2}{2T_0}\right) + \left(\int_0^t \underline{V}_1\right) \cdot \nabla^2 T_1\right]} .$$

Le déterminant du système (12)-(13) est $-c_0^2 \rho_0^2 N^2/g$ où N^2 est le carré de la fréquence de Väisälä, $N^2 = -g(\rho_0'/\rho_0 + g/c_0^2)$, $c_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$. Ici $N^2 = (\gamma-1)g/\gamma H$ et $c_0^2 = \gamma g H$ puisque l'équilibre est isotherme. (12)-(13) montrent qu'un transport de masse vertical ($\overline{w}_{L2} \neq 0$) est impossible en milieu non dissipatif ($\mu = \mu_B = \sigma = 0$). (11)-(12) montrent qu'un transport de masse vertical est également impossible pour le modèle incompressible ($\nabla \cdot \underline{V} = 0$). Ces résultats sont encore valables quand on tient compte de la force de Coriolis puisque l'équation du mouvement n'a pas été utilisée. Résolvant (12)-(13) on obtient

$$(14)\quad \rho_0 \overline{w}_{L2} = \frac{\overline{\Phi_1^v}}{(\gamma-1)g} + \frac{\sigma}{g T_0}\overline{(\nabla T_1)^2} + \frac{\sigma}{g}\nabla \cdot \overline{\left[\nabla\left(T_2 - \frac{T_1^2}{2T_0}\right) + \left(\int_0^t \underline{V}_1\right) \cdot \nabla^2 T_1\right]}$$

et une expression analogue pour $\nabla \cdot \overline{\underline{V}}_{L2}$. $\overline{w}_{L2}$ n'est totalement connu que si le $\overline{T}_2$ du dernier terme peut être déterminé. $\overline{T}_2$ est obtenu en éliminant $\overline{\rho}_2$ et $\overline{p}_2$ entre les moyennes de (7), i = 2, et de l'équation d'état. Si on néglige les termes dissipatifs, on obtient

$$(15)\quad \overline{T}_2 = -\overline{\left(\int_0^t \underline{V}_1\right) \cdot \nabla T_1} + f(z) .$$

f est une constante d'intégration qui dépend des conditions aux frontières. Dans le cas d'une onde telle que le nombre de Stokes modifié S_M donne l'ordre de grandeur relatif des termes dissipatifs on peut substituer (15) en (14). On obtient alors $\overline{w}_{L2}$ au second ordr

près en S_M. Dans les autres cas, par exemple dans la couche limite, il peut être nécessaire de retenir les termes dissipatifs quand on calcule $\overline{T_2}$ afin d'obtenir $\overline{w_{L2}}$ au même ordre d'approximation. Ici δ est la diffusivité du son.

$$S_M = \frac{3\delta\omega}{4 c_0^2} \quad , \quad \delta = \frac{1}{\rho_0}\left[(\gamma-1)\frac{\sigma}{c_p} + \frac{4}{3}\mu + \mu_B\right] .$$

Etant une divergence, le troisième terme de (14) joue un rôle différent de celui des deux premiers termes qui sont strictement positifs.

$\overline{w_{L2}}$ et $\overline{\nabla\cdot\underline{V}_{L2}}$ étant connus, on détermine complètement $\overline{\underline{V}_{L2}}$ en calculant la composante verticale du rotationnel moyen, $\overline{\Omega} = (\nabla\times\overline{\underline{V}_{L2}})_z$. Dans le cas non dissipatif, on obtient Ω en prenant le rotationnel de (7), i = 2, et en tenant compte des autres équations du second ordre. Il vient $\partial^2\Omega/\partial t^2 = 0$. A cause de la condition de non sécularité (§ 4), Ω est égal à sa valeur initiale. Il s'en suit que dans le cas non dissipatif une oscillation d'amplitude finie n'engendre pas de circulation de masse. Dans le cas dissipatif, on obtient $\nabla^2\overline{\Omega}$ en prenant le rotationnel de la moyenne de (7), i = 2, et en utilisant (7)-(9), i = 1. Après division par μ il vient

$$(16)\quad \underline{\lambda}\nabla^2\overline{\Omega} = \overline{\nabla_\perp\times\left\{\left(\int_0^t\nabla\cdot\underline{V}_1\right)\left[(\gamma-1)\frac{\sigma}{\mu}\nabla_\perp\int_0^t\nabla^2 T_1 - \left(\frac{1}{3}+\frac{\mu_B}{\mu}\right)\nabla_\perp\nabla\cdot\underline{V}_1 - \nabla^2\underline{V}_{1\perp}\right]\right\}} +$$

$$+ \overline{\nabla_\perp\times\left[\left(\int_0^t\underline{V}_1\right)\times\nabla^2\nabla\times\underline{V}_1\right]_\perp} + \overline{\nabla_\perp\times\nabla^2\left[\left(\int_0^t\underline{V}_1\right)\cdot\nabla\underline{V}_{1\perp}\right]} .$$

Il est remarquable que le premier terme contienne les rapports $(\gamma-1)\sigma/c_p\mu$ et μ_B/μ ; il peut en particulier être grand en milieu faiblement visqueux mais à dissipation thermique relativement forte (atmosphère solaire). (14) et (16) montrent dans ce cas l'existence d'un transport de masse horizontal très supérieur au transport de masse vertical. A l'approximation incompressible ($\nabla\cdot\underline{V}\to 0$) les deux derniers termes de (16) dominent; le dernier est la contribution de la vitesse de Stokes.

La généralisation au cas d'équilibres non isothermes ainsi que le détail des calculs conduisant aux présents résultats seront présentés dans un rapport ultérieur (No. 42).

près en S_M. Dans les autres cas, par exemple dans la couche limite, il peut être nécessaire de retenir les termes dissipatifs quand on calcule T_2 afin d'obtenir $\overline{w_{1t}}$ au même ordre d'approximation. Ici δ est la diffusivité du son.

$$S_M = \frac{3\delta\omega}{4c_0^2} \qquad , \qquad \delta = \frac{1}{\rho_0}\left[(\gamma-1)\frac{\sigma}{c_p} + \frac{4}{3}\mu + \mu_a\right] .$$

Etant une divergence, le troisième terme de (14) joue un rôle différent de celui des deux premiers termes qui sont strictement positifs.

$\overline{w_{1t}}$ et $\nabla\cdot\overline{V}_{1t}$ étant connus, on détermine complètement $\overline{V_{1t}}$ en calculant la composante verticale du rotationnel moyen, $\bar{\Omega} = (\nabla\times\overline{V_{1t}})_z$. Dans le cas non dissipatif, on obtient $\bar{\Omega}$ en prenant le rotationnel de (7), i = 2, et en tenant compte des autres équations du second ordre. Il vient $\partial^2\bar{\Omega}/\partial t^2 = 0$. A cause de la condition de non sécularité (§ 4), $\bar{\Omega}$ est égal à sa valeur initiale. Il s'en suit que dans le cas non dissipatif une oscillation d'amplitude finie n'engendre pas de circulation de masse. Dans le cas dissipatif, on obtient $\nabla^2\bar{\Omega}$ en prenant le rotationnel de la moyenne de (7), i = 2, et en utilisant (7)-(9), i = 1. Après division par μ il vient

$$(16)\ \lambda\nabla^2\bar{\Omega} = \overline{V_1\times\left\{\left(\frac{1}{\rho_0}\nabla\rho_1\right)\left[(\gamma-1)\frac{\sigma}{\mu}\nabla_1\left(\nabla^2 T_1\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{\mu_a}{\mu}\right)\nabla_1\nabla\cdot V_1 - \nabla^2 V_{1t}\right]\right\}} +$$

$$+ \overline{V_1\times\left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\nabla^2\nabla\times V_1\right]_1} + \overline{V_1\times\nabla^2\left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\nabla^2 V_{1t}\right]} .$$

Il est remarquable que le premier terme contienne les rapports $(\gamma-1)\sigma/c_p\mu$ et μ_a/μ ; il peut en particulier être grand en milieu faiblement visqueux mais à dissipation thermique relativement forte (atmosphère solaire). (15) et (16) montrent dans ce cas l'existence d'un transport de masse horizontal très supérieur au transport de masse vertical. A l'approximation incompressible $(\nabla\cdot V \to 0)$ les deux derniers termes de (16) dominent; le dernier est la contribution de la vitesse de Stokes.

La généralisation au cas d'équilibres non isothermes ainsi que le détail des calculs conduisant aux présents résultats seront présentés dans un rapport ultérieur (Zb. 42).

6. Le travail présenté dans ce rapport a été commencé lors d'un séjour à l'Observatoire de Nice, France. Les auteurs remercient le personnel de l'Observatoire pour l'hospitalité qui leur a été offerte et pour de nombreuses discussions scientifiques.

Références

(1) H. Zirin, The Solar Atmosphere, Blaisdell Publ. Comp., 1966.
(2) R.W. Noyes, I.A.U. Symposium No. 28, Aerodynamic Phenomenas in Stellar Atmospheres, ed. R.N. Thomas, Academic Press, 1967, p. 293 ff..
(3) W. Munk and D. Moore, J. Fluid Mechanics, 33, Part 2, 1968, p. 241-259.
(4) M.S. Longuet-Higgins, J. Fluid Mechanics, 42, Part 4, 1970, p.701-720.
(5) M. Dyson, B. Woodward and J.B. Pond, Nature, 232, 1971, p. 572.
(6) N.Vashon Baker, Nature, 239, 1972, p. 398-399.
(7) W. Schaaffs and L. Haun, Acustica, 20, 1968, p. 348-359.
(8) W. Schaaffs,Acustica, 28, 1973, p. 171-176.
(9) H. Hobæk, communication privée.
(10) C. Eckart, Hydrodymanics of Oceans and Atmospheres, Pergamon Press, 1960.
(11) M.S. Longuet-Higgins, Deep-Sea Research, 16, 1969,p.431-477.