Matematisk modellering i undervisning

En kombinert metode studie av elevers utvikling av matematiske konsepter i arbeidet med modelleringsoppgaver.

Michael Kristiansen

Masteroppgave i matematikkdidaktikk MAT399K

Universitetet i Bergen

Matematisk institutt

Våren 2020

Forord

Fire nydelige år på lektorutdanningen ved UiB er snart over. Dette har vært en utrolig spennende og lærerik tid, både sosialt og faglig. Jeg ser nå veldig frem til å begynne å undervise på fulltid, og kunne benytte meg av kunnskapen jeg har tilegnet meg gjennom studiet, men også å videreutvikle meg som lærer. Dessverre gjorde den noe spesielle tiden vi har vær gjennom denne våren, at semesteret ikke ble en avslutning på studiet slik jeg hadde sett for meg. Men jeg er uansett veldig takknemlig for å få skrive masteroppgaven om matematisk modellering i undervisning, da den både har generert kunnskap og inspirasjon som jeg tar med meg inn i lærerrollen. I den sammenheng ønsker jeg virkelig å takke læreren som lot meg gjennomføre studien i sin klasse, samt elevene som deltok i studien. Dere forblir anonyme i denne teksten, men vet selv hvem dere er!

Jeg ønsker også å utrette en stor takk til Mette Andresen, min veileder gjennom denne masteroppgaven. Hun har ledet meg bort fra mange villspor i prosessen, og løftet mine refleksjoner til høyere nivå gang på gang i gode diskusjoner. Tusen takk Mette!

Samtidig vil jeg trekke frem medstudentene på kull 15 og 16, der jeg har befunnet meg i den gunstige situasjonen med å være innlemmet i begge kullene i løpet av studiet. Medstudentene mine består av fantastiske personligheter som kommer til å bli dyktige lærere i nær fremtid. Jeg er veldig takknemlig for å ha studert sammen med dere i fire år, både når det gjelder det faglige samarbeidet, men spesielt det gode sosiale miljøet vi har hatt disse årene. Dette har gitt meg vennskap for livet.

Til slutt vil jeg takke min nydelige samboer Margrete Jian Øye, som har vært en fantastisk støttespiller gjennom alle årene mine på lektorutdanningen.

Sammendrag

Målet med studien var å oppnå høyere innsikt i hvordan elever kan bygge ansats til nye matematiske konsept i undervisning med matematisk modellering.

Det ble benyttet kombinerte metoder i studien, der datamaterialet er samlet inn ved hjelp observasjoner, intervju og spørreundersøkelse. Modelleringsopplegget ble utformet til studiens formål, og ble gjennomført i undervisningen ved en S2 klasse over to økter i en periode på en uke. Elevene arbeidet med modelleringsopplegget i grupper, der observasjonene ble gjort basert på samtlige grupper. I spørreundersøkelsen deltok majoriteten av elevene, selv om det også var en betydelig andel som ikke besvarte spørreskjemaet. Intervjuet ble gjennomført som et gruppeintervju med to elever. Utvalgt datamaterialet ble inkludert i analysen basert på deres relevans mot problemstillingen i besvarelsen.

Studiens funn indikere fire kategorier som virket å påvirke hvordan og hvorvidt matematisk modellering kan bidra til at elevene bygger ansats mot nye matematiske konsept. Henholdsvis «ulike løsningsstrategier», «vanskelighetsgrad», «interaksjon» og «formulering av oppgaven». De ulike kategoriene hadde ikke et tydelig og klart skille. Innen og på tvers av de ulike kategoriene kom det frem faktorer som virket avgjørende i henhold til problemstillingen i studien. Dette ved at faktorene enten virket å fremme elevenes utvikling av ansats mot nye matematiske konsept, eller at de virket å hemme den samme målsetningen.

Blant fremtredende faktorer var det å bygge modelleringsopplegget på elevenes forkunnskaper. Analysen tyder da på at å legge til rette for ulike løsningsstrategier var med å gjøre disse forkunnskapene enklere tilgjengelig for elevene. I denne sammenheng fremkom formulering av oppgaven som avgjørende for å nettopp åpne opp for de ulike løsningsstrategiene. Samtidig antydet funnene at den virkelige konteksten i modelleringsopplegget var viktig ved at den ledet til horisontal matematisering, som igjen gav elevene mulighetene til å komplementere og videreutvikle forkunnskapene ved å se dem i nye sammenhenger. Lærers veiledning og interaksjon mellom elevene var andre faktorer som virket avgjørende i henhold til problemstillingen. Til slutt viste analysen at flere elever ikke deltok aktivt i modelleringsarbeidet. Funnene antydet at mengden informasjon som beskrev situasjonen kan ha vært en av forklaringene bak dette problemet.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Matematisk modellering er en undervisningsform jeg har fattet stor interesse for underveis i min tid på lektorutdanningen ved UiB. Jeg har selv prøvd ut matematisk modellering ved flere anledninger, med vekslende hell, der interessen for denne undervisningsformen bare har økt. Samtidig så opplever jeg det som flere matematikkdidaktikere påpeker, at matematikkundervisningen domineres av såkalt "tradisjonell undervisning", der det innledningsvis blir presentert teori og definisjoner og videre arbeides med oppgaver (Blomhøj, 2003; Tall & Vinner, 1981; Gravemeijer & Stephan, 2002). Dette er noe andre undervisningsformer som blant annet matematisk modellering, og dernest elevene, blir lidende av, da potensialet som ligger i matematisk modellering ikke blir utnyttet til det fulle. Videre har jeg et inntrykk at matematikk er et fag mange elever har et dårlig forhold til og at det er mange, både elever og personer i samfunnet generelt, som ikke ser nytteverdien av matematikk i den virkelige verden. Dette underbygges av Schoenfeld (2016, s. 27) som blant annet påpeker at et utbredt elevsyn på matematikk, er at matematikk som læres på skolen har liten eller ingen sammenheng med den virkelige verden. Schoenfeld peker på at bakgrunnen for dette er at «problemene» elevene vanligvis arbeider med i matematikkundervisningen ikke kan anses som problemer, men heller som øvelser der man skal reprodusere det læreren nettopp har demonstrert.

I denne sammenheng understreker (Blomhøj, 2003; Blum, 2015; Freudenthal, 1991; Schoenfeld, 2016) viktigheten av å koble matematikken til en realistisk kontekst. Blum (2015, s. 81) påpeker at dette kan hjelpe elever til å forstå og mestre situasjoner fra den ekte verden, samtidig som disse situasjonene kan være med på å vekke interesse og motivasjon for matematikk, samt føre til bedre forståelse av matematisk innhold. Undervisningsteorien «realistisk matematikkundervisning» (RME) har nettopp denne koblingen av matematikk mot virkeligheten som et av sine grunnprinsipp. Videre er RME også kritisk til den «tradisjonelle undervisningen», og samtidig opptatt av å la elevene selv få utforske de realistiske problemene de står overfor. Læringssynet i RME samsvarer i stor grad med mitt eget læringssyn, og er en læringsteori jeg anser til å passe godt sammen med matematisk modellering som undervisningsform.

Som lærer ønsker jeg å legge til rette for at elevene kan utvikle et mer positivt syn på matematikk. Basert på det ovenforstående anser jeg derfor å la elevene arbeide realistiske problemer som et viktig virkemiddel, da dette både kan være motiverende, gi større innsikt i nytteverdien av matematikk og gi økt forståelse av matematisk innhold. Noe som kan indikere et skifte og gi matematisk modellering en mer sentral rolle i norsk matematikkundervisning er at modellering blir angitt som et av kjerneelementene i matematikk i fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2018). Fagfornyelsen trer som kjent i kraft allerede ved skoleåret 2020-2021. I fagfornyelsen står også dybdelæring sentralt, der deler av definisjonen er bruke det «vi har lært i kjente og ukjente situasjoner». Realistiske problemer kan da være med på å bidra til dybdelæring, ved at de kan representere både kjente og ukjente situasjoner, og da gi elevene mulighet til anvende kunnskap i disse situasjonene. Med bakgrunn i dette ønsker jeg med denne oppgaven å oppnå økt kompetanse av matematisk modellering som undervisningsform, samtidig som vil lære mer om læringsteorien RME.

1.2 Problemstilling

På grunnlag av mitt mål om å lære mer om både matematisk modellering og RME, ønsker jeg å studere nærmere hvordan elever kan utvikle forståelse av matematiske sammenhenger i arbeid med modelleringsoppgaver, anvendt med RME sine prinsipper. Mer spesifikt ønsker jeg å arbeide ut ifra problemstillingen:

Hvordan matematisk modellering kan stimulere til å bygge ansats til "nye matematiske konsept".

Med ansats mener jeg her en begynnelse eller et tilløp til, da det nye matematiske konseptet. Dette innebærer å se på hvordan et matematisk modelleringopplegg, forut for presentasjon av formelle definisjoner, kan tilrettelegge for at elevene kan utvikle ideer, tanker, eller "se behovet" for et gitt matematisk konsept. Med nye matematiske konsepter inkluderer jeg både å utvikle ideer til ukjente konsepter, men også å utvikle kjente konsepter ved å se dem i nye sammenhenger.

1.3 Oppbygging av oppgaven

Denne masterbesvarelsen er bygget opp av 6 kapitler. I kapittel 2 presenteres først teori om matematisk modellering, før jeg tar for meg realistisk matematikkundervisning (RME) som er læringssynet denne oppgaven bygger på. Deretter gjør jeg rede for noen ulike forutsetninger for matematisk problemløsning, mens jeg avslutningsvis gir en oppsummering av teorien som er lagt frem i kapittelet.

I kapittel 3 gjør jeg rede for hvilken metode som er benyttet for å svare på problemstillingen i studien. Her presenteres konteksten for undersøkelsen, hvilke innsamlingsmetoder som ble brukt, hvordan de ble gjennomført og begrunnelse for dette. Videre tar jeg for meg analysen av dataene og hvordan jeg gikk frem for å sikre kvalitet i studien.

Utvalgt datamaterialet og analyse av disse presenteres i kapittel 4. Dette deles inn i fire kategorier som, av datamaterialet fra undervisningen, virket avgjørende i henhold til problemstillingen i oppgaven. Her vil det komme frem ulike kjennetegn ved modelleringsopplegget og faktorer som kan ha vært avgjørende for elevers utvikling av matematiske konsept.

Kapittel 5 tar for seg diskusjon av funnene fra kapittel fire. Det vil her trekkes noen linjer mellom de ulike funnene, samtidig som de drøftes basert på teorien som er presentert i kapittel 2.

En avsluttende konklusjon gis i kapittel 6, der jeg svarer jeg på problemstillingen i oppgaven. Til slutt følger en kildeliste og vedlegg til besvarelsen.

2 Teori

2.1 Matematisk modellering og modelleringssyklusen

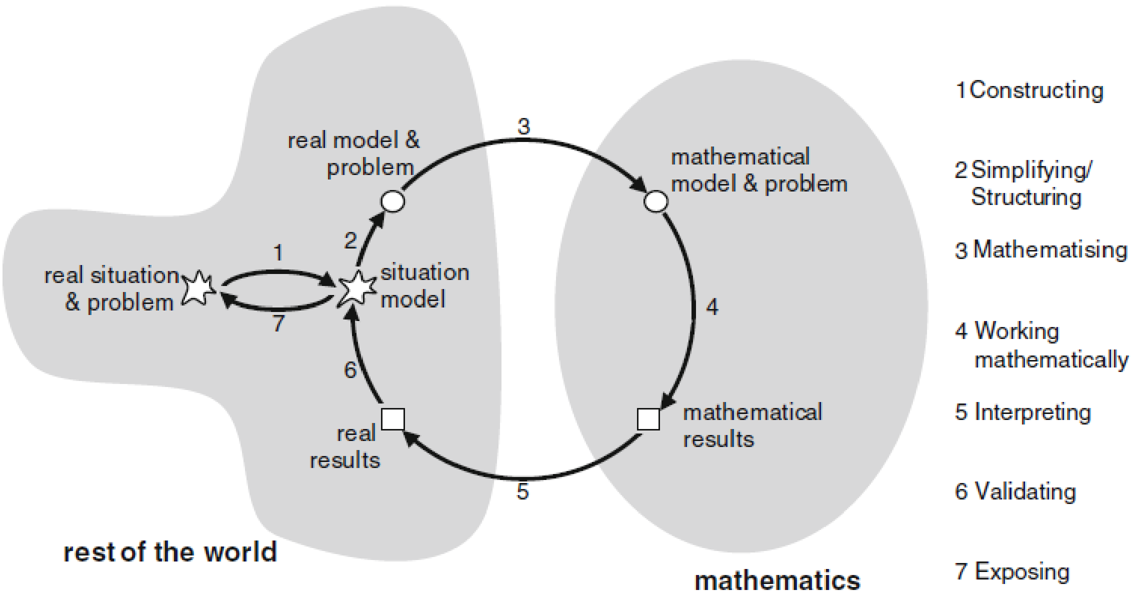
Morten Blomhøj skriver at all anvendelse av matematikk utenfor matematikken selv forutsetter en eller annen form for modelldannelse, hvor størrelser og relasjoner, som selv ikke er matematikk, modelleres ved hjelp av matematiske objekter og relasjoner (Blomhøj, 2003, s. 51). Blomhøj betegner videre matematisk modellering som den prosessen der en matematisk modell oppstilles og anvendes til å beskrive, forutsi eller foreskrive forhold utenfor matematikken. Han vektlegger videre at denne prosessen etablerer en modellrelasjon mellom et fenomen eller et system og noe matematikk. Blomhøj poengterer at denne modellrelasjonen kun kan oppfattes, etableres og analyseres under en synsvinkel. En synsvinkel som omfatter både objekt eller system og de matematiske representasjonene som inngår i modellen. Samtidig gjengir den matematiske modellen kun utvalgte trekk ved det systemet den prøver å beskrive. Dette medfører da at en modell ikke er selve systemet, men kun beskriver enkelte deler av det, noe som medfører at en matematisk modell vil ha et gitt gyldighetsområdet. Ifølge Blomhøj kan modelleringsprosessen foregå ubevisst ved enklere situasjoner. Når situasjonene derimot blir mer kompliserte kan det være nyttig å kunne gjennomføre og analysere modelleringsprosessen mer bevisst og detaljert (Blomhøj, 2003, s. 53). For å beskrive disse modelleringsprosessene finnes det flere ulike *modelleringssykluser*, som kan brukes som et verktøy når modellering inngår i undervisningen. Jeg kommer straks tilbake til nettopp en slik modelleringssyklus, men først dra frem hvordan Werner Blum (1993) beskriver matematisk modellering.

Han starter med å påpeke at det finnes mange forskjellige definisjoner på hva matematisk modellering er (Blum 1993, s.1). Deretter, når Blum gir en egen forklaring på begrepet, går han egentlig direkte igang med å beskrive en enkel modell for matematisk problemløsning:

Ifølge Blum (1993, s. 2) er startpunktet for modellering i en situasjon fra den *virkelige verden*, altså en situasjon utenfor matematikken. Normalt sett må situasjonen forenkles, struktureres og gjøres mer presis for å få en *ekte modell* av situasjonen. Modellen er da ekte i den forstand at den gir et forenklet, men sant, bilde av noen deler av den originale situasjonen.
Deretter lages en matematisk modell av original situasjonen ved å *matematisere* den ekte modellen. Det vil si at den ekte modellen oversettes til matematikk.

Prosessen fortsetter ved arbeide matematisk. Det må da velges og benyttes passende matematiske metoder for å få et matematisk resultat av den matematiske modellen. Resultatet må så oversettes tilbake til den ekte verden, ved å tolke det matematiske resultatet i sammenheng med den originale situasjonen. Dette medfører å validere den matematiske modellen. Finner man da feil eller avvik, som er helt naturlig, så må sykelen starte om igjen.

Som nevnt finnes det mange forskjellige modelleringssykluser, jeg velger her å ta ibruk *syv-stegs-modellen* til Blum og Leiß (Blum & Leiß, 2007), som vises i figur 1. Denne illustrerer i stor grad den prosessen som nettopp ble forklart, kanskje ikke så overraskende da Blum også står bak denne modelleringssyklusen. Blum og Leiß understreker også, i tråd med forklaringen over, at denne syv-stegs-modellen er mer orientert mot problemløsning enn mange andre modelleringssykluser.



Figur 1: syv-stegs-modellen (Blum & Leiß, 2007, s. 225)

Som navnet tilsier har denne modellen syv steg problemløseren må igjennom når det jobbes med modelleringsoppgaver. Jeg har her valgt å basere meg på (Leiß, Schukajlow, Blum, Messner & Pekrun, 2010, s. 122) når jeg forklarer de ulike stegene:

1. Problemet fra den virkelige verden må tolkes og forstås av problemløseren, som da konstruerer en individuell mental modell eller situasjonsmodell av den ekte situasjonen.

2. Deretter lages en *virkelig modell* av problemet gjennom at situasjonen struktureres, forenkles og gjøres mer presis. Her må det ofte gjøres antagelser og valg av hvilken informasjon fra situasjonen som inkluderes og ekskluderes i den virkelige modellen. Som gjengitt av Blum tidligere er modellen da virkelig i den forstand at den gir et forenklet, men sant, bilde av noen deler av den originale situasjonen.
3. Den virkelige modellen oversettes til en matematisk modell ved å benytte relevante matematiske konsepter. Det er dette vi kaller å *matematisere*.
4. Arbeider matematisk for å få et *matematisk resultat*. Problemløseren benytter seg da av ulike matematiske verktøy som å gjøre beregninger og løse likninger.
5. Tolke de matematiske resultatene i den ekte verden som et *ekte resultat* av den ekte situasjonen.
6. De ekte resultatene *valideres*. Er resultatet fornuftig og nøyaktig, er forenklingene og antagelsene tilstrekkelige? Valideringen vil ofte vise at det er nødvendig å gå gjennom loopen en gang til, dvs gå igjennom steg 2 til 6 på nytt.
7. Prosessen avsluttes med å legge fram resultatet på det originale problemet.

I tillegg til at syklusen ofte må gjennomgås flere ganger, er det viktig å få frem modelleringsprosessen vanligvis ikke er så lineær som den tilsynelatende kan virke. Blum og Leiß (2007, s. 227) skriver her at det er helt vanlig at man i prosessen hopper frem og tilbake mellom den ekte og matematiske verden, samt mellom de ulike stegene.

Det er også tydelig at matematisk modellering i undervisning krever en rekke ferdigheter av elevene. De må selv evne å sette opp og analysere en modell. Ferdigheter som å trekke ut den essensielle informasjonen fra en situasjon og gjøre fornuftige forenklinger, forstå hvilken betydning disse valgene har for modellen og modellens gyldighetsområde. Videre må både elevene matematisere og gjøre matematiske beregninger, i tillegg til å kunne validere resultatene. Når jeg sier at modellering krever ferdigheter av elevene, mener jeg det i den betydningen at dette er ferdigheter som inngår i modelleringsprosessen, og ikke ferdigheter som allerede må være tilegnet i forkant av modelleringsprosessen. Dette er ferdigheter som kan utvikles gjennom arbeid med matematisk modellering, noe som Blomhøj (2003, s. 52) er inne på. Leiß skriver også at modelleringskompetansen til elevene avgrenses av deres svakeste ledd i prosessen (Leiß et al, 2010, s. 122). I så måte kan man anse det som viktig å jobbe med hele modelleringsprosessen for å utvikle dette mangfoldet av ferdigheter, men også enkelte deler av den for å heve modelleringskompetansen. Sistnevnte er riktignok noe

Blomhøj (2003, s. 52) kritiserer, da han hevder det er slik matematisk modellering i hovedsak blir benyttet i skolen. Matematisk modellering blir da ikke utnyttet til sitt fulle potensial i undervisningen, noe han mener oppstilling av modeller og mulige konsekvenser av modellens anvendelser blir spesielt lidende av.

2.1.1 Hvorfor modellering i undervisning

Werner Blum argumenterer for hvorfor en kognitiv krevende aktivitet som modellering bør være en del av matematikkundervisningen (Blum, 2015, s.81). Han forklarer at matematikk er inkludert i skolen på bakgrunn av å gi elevene grunnlag for å delta i samfunnet på en uavhengig og ansvarlig måte. Basert på dette kommer Blum med fire begrunnelser for å inkludere modellering i matematikkundervisningen:

1. Den *pragmatiske begrunnelsen* handler om evne til å forstå og mestre situasjoner i den ekte verden. Passende og modelleringsoppgaver må derfor arbeides med eksplisitt, da slik kompetanse ikke kan forventes å utvikles fra reine matematiske aktiviteter.

2. Den *formative begrunnelsen* er at modelleringsaktiviteter kan fremmer ulike matematiske kompetanser. Blum påpeker at modelleringskompetanse bare kan utvikles på denne måten, men han eksemplifiserer argumentasjon som en kompetanse som kan fremmes gjennom "virkelighetsnære bevis".

3. Den *kulturelle begrunnelsen* grunngir at relasjoner til den ekstra-matematiske verden, eller den ekte verden, er uvurderlig for at det dannes et omfattende bilde av matematikk som vitenskap.

4. Den *psykologiske begrunnelsen* går ut på at eksempler fra den ekte verden kan være med på å vekke elevers interesse for matematikk. Videre kan dette bedre struktur av og motivasjon for matematisk innhold, samt økt forståelse og sørge at denne forståelsen "sitter lengre".

Av Blum sine begrunnelser ser man at modellering er viktig av flere årsaker. Sett opp mot problemstillingen vil jeg spesielt fremheve de formative og psykologiske begrunnelsene. Fra den formative er utvikling av modelleringskompetanse viktig blant annet for at matematisk modellering skal bli en effektiv undervisningsmetode i henhold til de andre begrunnelsene for å implementere modellering i undervisningen. Samtidig kan det fremme andre matematiske kompetanser som igjen kan være med på å hjelpe elevene å danne ansats mot nye matematiske begrep. Den psykologiske begrunnelsen forteller om viktigheten med koblingen til den ekte verden, noe som også sentralt i realistisk matematikkundervisning (RME). Dette utdypes senere i besvarelsen. Elevers interesse og motivasjon er allmenn kjent for å være viktige faktorer for læring uansett fagfelt, dernest også matematikk. Videre er økt forståelse og langtidslæring av matematikk viktige faktorer i dannelsen av nye matematiske konsepter.

Blomhøj (2003, s. 69-70) snakker også om hvorfor matematisk modellering bør ha en viktig rolle i matematikkundervisningen. Han drar fram flere av de samme årsakene som Blum, men også noen årsaker som ikke er nevnt. Modellering i undervisningen gir elevene mulighet til å oppleve matematikk som et redskap til å forstå beskrive fenomener fra verden rundt seg. Denne koblingen med den ekte verden påpeker han i likhet med Blum, det samme gjelder denne koblingens avgjørende rolle for forståelse av matematisk innhold. Blomhøj tilfører her at gjennom arbeid med de relevante fenomenene, som modellering kan hjelpe elevene å beskrive, så kan modellering tilrettelegge for tverrfaglig samarbeid. Tverfaglig samarbeid er som kjent noe som står sentralt i fagfornyelsen. Videre skriver Blomhøj at matematisk modellering kan være viktig for elevenes utvikling av kritisk dømmekraft. Dette grunngir han med matematiske modellers sentrale rolle innen teknologi og administrative systemer som danner grunnlag for samfunnsmessige beslutninger.

2.2 RME (Realistic mathematics education)

Tall og Vinner (1981, s. 153) hevder, i likhet med blant annet Freudenthal (Gravemeijer & Stephan, 2002, s. 146) og Blomhøj (2003, s. 52), at lærere ofte innleder undervisning av et nytt emne innen matematikk ved å introdusere en formell definisjon. Videre arbeider elevene kort med generell notasjon før de bruker en lengre periode på eksempler som er gitt ved formler. Til tross for at disse kildene er datert noe tilbake i tid, må jeg si at dette er noe jeg kjenner godt igjen fra både egen skolegang og perioden som lektorstudent. De kritiserer alle denne måten å presentere matematikk på, der Freudenthal mener dette starter med sluttproduktet for en lang matematisk prosess (Skott & Jess, 2008, s. 380). Tall og Vinner hevder denne metoden kan "fungere" i startfasen, men at elevene kommer til kort når de matematiske konseptene skal brukes i en bredere kontekst. Freudenthal på sin side mener at dette fratar elevene muligheten til å engasjere seg i læringsprosessen og dernest i matematikk som en levende aktivitet.

På bakgrunn av dette vokste det fram en ny teori for matematikkundervisning, med et konstruktivistisk læringssyn, i Nederland på tidlig 70- tallet, kalt *Realistic Mathematics Education* (RME) eller Realistisk Matematikkundervisning på norsk. Teorien, som ble utviklet av Hans Freudenthal og hans kolleger, baserte seg på ideer om at matematikk må være koblet til en realistisk kontekst og være relevant for samfunnet. I RME lærer elevene matematikk ved å utvikle og bruke matematiske konsepter og verktøy i dagligdagsnære problemsituasjoner som gir mening for elevene. Van den Heuvel-Panhuizen understreker at ordet «realistisk» når det oversettes i denne sammenheng har betydningen «å forestille». Kravet til en realistisk kontekst er ikke da nødvendigvis at matematikken må være knyttet til den ekte verden, men at matematikken må ha rot i noe som er nærliggende for elevene å forestille seg. Når jeg bruker ordet realistisk videre i dette kapittelet omhandlende RME vil jeg ilegge det samme betydning som jeg nå har beskrevet, med mindre jeg påpeker noe annet.

Videre skriver Van den Heuvel-Panhuizen at Freudenthal mente at matematiske strukturer ikke utvikles etter noen «fast dato», men at de oppstår fra virkeligheten og utvides kontinuerlig i individuelle og kollektive læringsprosesser. I RME sees elevene altså som aktive deltakere i en læringsprosess som skjer innenfor de sosiale kontekstene i klasserommet (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, s. 10-11). Matematisk kunnskap ansees da som et produkt av menneskers sosial aktiviteter og oppfinnsomhet. Gravemeier og Stephan, som også skriver om RME i sin tekst "Emergent models as an instructional design heuristic" er inne på mye av det samme som Heuvel-Panhuizen og drar frem tre sentrale trekk ved RME: "guided reinvention" gjennom progressiv matematisering, "emergent models" og didaktisk fenomenologi (Gravemeijer & Stephan, 2002, s. 148). Disse vil alle tre utdypes videre i de fire neste delkapitlene, der jeg har delt opp "guided reinvention" og matematisering og gitt uttrykkene vers et delkapittel. I beskrivelsen av begrepene bruker jeg teori fra nevnte Heuvel-Panhuizen, Gravemeijer & Stephan og Freudenthal, selv om det skal nevnes at hovedvekten av teorien igjen viser til Freudenthal.

2.2.1 Guided reinvention

Hans Freudenthal (1991) skriver om et undervisningskonsept innen matematikk som han kaller for "*guided reinvention"*. Metoden går ut på at elevene skal finne opp noe som for dem er nytt, men som er kjent for læreren (Freudenthal, 1991, s. 48). Han mener at helt grunnleggende matematikk som for eksempel tallrekken blir re-oppfunnet av barn. Videre hevder Freudenthal at det er veletablert sannhet at noen barn viderefører aktiviteten til å også re-oppfinne aritmetikk til varierende nivå på egenhånd, avhengig miljøet og individuelle forskjeller (Freudenthal, 1991, s.47). Hvorvidt denne «re-oppfinningen», med litt veiledning, kunne vært en metode for læring av matematikk for alle barn er i henhold til Freudenthal vanskelig å fastlå. Dette av den enkle grunn at barn på generelt grunnlag ikke har fått muligheten til å reoppfinne på egenhånd, men heller blitt påtvunget kunnskap og handlingsmønstre. Ifølge Freudenthal kan en begavet elev «reoppfinne» mye matematikk på egenhånd, han ser da ingen grunn til at ikke normale elever kan gjøre det samme under veiledning fra andre. Elevene bør da få muligheten til å utforske og strekke seg så langt deres potensial og vilje tillater det. Han mener at alle elever vil kunne oppnå et visst matematisk kunnskapsnivå på denne måten. Freudenthal formulerer seg videre slik:

«*Learners should be allowed to find their own levels and explore the paths leading there with as much and as little guidance as each particular case requires.*» (Freudenthal, 1991, s.47).

Dette innebærer mye frihet til å utforske for elevene, samtidig som det fra lærerens side setter krav til både innhold og mengde av veiledning som gis hver enkelt elev. Viktig å understreke at «guidet reinvention» ikke innebærer at elevene på egenhånd skal "oppfinne" all matematikk på nytt. «C*hildren should repeat the learning process of mankind, not as it factually took place but rather as it would have done if people in the past had known a bit more of what we know now*.» (Freudenthal, 1991, s.48). Med dette mener han blant annet at veiledningen skal hjelpe elevene i hvor og hva de skal utforske. Elevenes frihet i «guidet reinvention» er tross alt begrenset av både veiledning og at noe skal **re**-oppfinnes. Målet er da at elevene skal finne opp noe som er nytt for dem, men som allerede er kjent for læreren.

Freudenthal argumenterer for "guided reinvention" av ulike pedagogiske årsaker. Den første årsaken er at kunnskap og evne «sitter bedre» og er lettere tilgjengelig når det oppnådd gjennom egen aktivitet, i stedet for å være pålagt av andre. Neste årsak er læring gjennom «reinvention» kan være motiverende, da oppfinnelse kan være gøy. Samtidig understreker han at elever enklere kan forstå behovet for definisjoner, begrep og notasjon. Til slutt fremmer det en holdning om matematikk som en menneskelig aktivitet.

2.2.2 Matematisering

En grunntankene bak RME er Freudenthal sin ide om matematikk som en menneskelig aktivitet (Heuvel-Panhuizen, 2003, s. 11). For Freudenthal handlet matematikk om å søke etter- og løse problemer, eller mer generelt om å *matematisere*. I henhold til Heuvel-Panhuizen handler matematisering da om å organisere materialet fra virkeligheten, eller matematisk materialet, på en matematisk måte. «According to Freudenthal, mathematics can best be learned by doing and mathematizing is the core goal of mathematics education.» (Heuvel-Panhuizen, 2003, s.11). Ifølge Heuvel-Panhuizen var Freudenthal mest opptatt av å matematisere virkeligheten, selv om han ikke ønsket å begrense begrepet til å bare omhandle dette.

Videre skilte han mellom to typer matematisering, nemlig *horisontal* - og *vertikal matematisering*, to begreper han adopterte fra Adrian Treffers. Heuvel-Panhuizen beskriver de to begrepene kort som at horisontal matematisering handler om å bruke matematiske verktøy til å organisere og løse problemer fra dagliglivet. Vertikal matematisering står for alle former for reorganisering og operasjoner utført av elever som ligger innenfor det matematiske systemet og kan eksempelvis være å lage snarveier og oppdage koblinger mellom ulike konsept og strategier (Heuvel-Panhuizen, 2003). Freudenthal formulerer seg slik når han tar i bruk begrepene til Treffers:

«Horizontal mathematisation leads from the world of *life* to the world of *symbols.* In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation.» (Freudenthal, 1991, s. 41- 42)

Samtidig påpeker Freudenthal at horisontal og vertikal matematisering ikke har et klart og tydelig skille, men at dette avhenger av situasjon, person og personens miljø. Heuvel-Panhuizen understreker også at Freudenthal likestilte viktigheten av begge formene for matematisering og at begge kan forekomme på alle nivåer innen matematisk aktivitet.

Videre tydeliggjorde Freudenthal, ifølge Heuvel-Panhuizen, at det er dette synet på matematisering som skiller RME fra andre tilnærminger til matematikkundervisning. Andre tilnærminger som da gjerne bare fokuserer på en av formene for matematisering, eller ingen av dem. Heuvel-Panhuizen viser videre til Treffers og Goffree (1985) når hun hevder at hvilken matematisering som blir vektlagt i undervisningen er avgjørende for hvilken rolle modeller spiller i ulike tilnærminger til matematikkundervisningen og for hvilke typer modeller som blir brukt.

2.2.3 Emergent models (modelldannelse)

Gravemeijer og Stephan skriver i sin tekst «Emergent models as an instructional design heuristic» om *emergent models* eller modelldannelse i norsk språkdrakt. De skriver her at i RME så er ikke modellene utledet av matematikken som skal læres, men grunnfestet i framgangsmåten elevene bruker til å løse et problem i en gitt kontekst. Problemet modelleres da for å kunne løse problemet ved hjelp av modellen som lages. Modellering blir da ikke sett på som en måte å oversette kontekstuelle problemer til matematikk, men som en organiseringsaktivitet der det skjer modelldannelse. Grunntanken er at disse modellene skal hjelpe elevene til å «reoppdage» den tilsiktede matematikken på en mer formell måte.

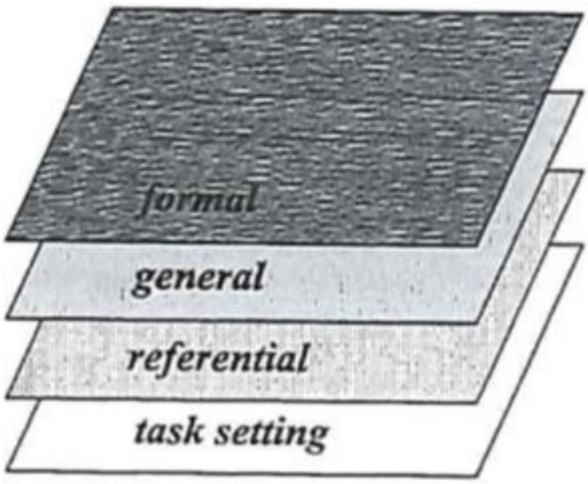
Gravemeijer og Stephan skiller her mellom formell- og uformell matematisk resonering, der førstnevnte blir beskrevet ved at argumentasjonen bygger på argumenter som befinner seg i den nye matematiske realiteten som formes. Formell matematikk blir da ikke sett på som noe spesifikt elevene skal tilegne seg, men som noe som vokser ut fra elevenes aktivitet. Elevene er da forventet å utvikle formell matematikk ved å matematisere deres egen uformelle matematikk. Målet er da at elevene ikke skal oppleve formell matematikk som noe forskjellig fra uformell matematikk. De viser her til Freudenthal som hevdet at matematikk starter med «common sense» og forblir ved «common sense». Premisset for dette er at «common sense» utvikles samtidig som matematikken utvikles (Gravemeijer & Stephan, 2002, s. 148). Målsetningen for undervisningen er da at elevene skal tilegne seg formell matematikk i den forstand at de skal utvikle en matematisk realitet som ikke er en del av deres «common sense» ved starten av undervisningen.

Videre skriver Gravemeijer og Stephan om hvordan modeller kan støtte elevenes utdypning av uformelle strategier og til å utvikle mer sofistikerte/formelle strategier. De eksemplifiserer dette med tallinjen som modell, men jeg kommer her til å forklare konseptet mer generelt. Elevene utvikler først en uformell løsningsstrategi hvor de deretter blir presentert for en modell som kan hjelpe dem å beskrive og begrunne sin egen strategi. Modellen er da ikke ment til å styre elevenes tenkning, men heller å bli tilpasset av elevene for å passe deres tenkning. Modellen kan sees på som en modell **av** situasjonen. Seinere kan elevene bruke modellen til å argumentere om matematiske sammenhenger og utvikle mer sofistikerte strategier. Vi har da fått en situasjon der modellen er en modell **for** matematisk argumentasjon. Det er, ifølge Gravemeijer og Stephan, dette skifte fra modell **av** uformelle løsningsstrategier til en modell **for** mer formell matematisk argumentasjon som er grunntanken bak «emergent models» (Gravemeijer & Stephan, 2002, s. 151-152). Heuvel-Panhuizen (2003, s. 14) påpeker at det i denne overgangen oppstår en større bevissthet over problemsituasjonen og et høyere nivå av forståelse hos elevene.

Gravemeijer og Stephan skriver så at modellen kommer først til forgrunnen som en modell av de uformelle løsningsstrategiene til elevene. Elevenes fokus vil gradvis skifte fra å tenke på problemsituasjonen til å tenke på matematiske sammenhenger. Konsekvensen av dette kan være at modellen blir meningsfull i seg selv og modellen kan da fungere som en modell for matematisk argumentasjon. Videre er det som modelleres i prinsippet en uformell løsingsstrategi. Det som er essensielt er at dette er en løsningsstrategi for det spesifikke problemet, ved at elevene viser hvordan de vil handle i den spesifikke situasjonen. Gravemeijer og Stephan underbygger viktigheten av at nøkkelelementene i løsningsstrategien for det spesifikke problemet fremheves, samtidig som disse må inkludere den matematiske meningen som danner grunnlaget for den konseptuelle utviklingen.

«Emergent models» skiller seg fra andre modeller ved at de skifter fra en uformell situasjonsavhengig løsningsprosedyre til mer formell matematisk resonering (Gravemeijer & Stephan, 2002, s. 157). Skiftet mot mer formell matematisk resonnering er knyttet mot dannelsen av en ny matematisk realitet. Et kritisk aspekt her er at elevenes forståelse av de nye matematiske sammenhengene overgår de individuelle situasjonene, og gir en mer generell forståelse av konseptet. Gravemeijer og Stephan velger videre å begrense «modell **av** til modell **for**» terminologien til de overgangene hvor det skapes en ny matematisk virkelighet. Likeledes kan dannelsen av en ny matematisk virkelighet relateres til «modell **av** til modell **for**» overgangen. Dette ved at elevenes aktivitet med en modell kan skape en ny matematisk virkelighet, samtidig som at modellen kan få en rolle som modell **for** matematisk resonering gjennom elevenes dannelse av nye matematiske virkeligheter.

I sammenheng med dette skriver Gravemeijer og Stephan om hvordan elevers tenkning utvikles. Startpunktet er i en situasjon eller kontekst som oppleves som realistisk for elevene, en situasjon som gjør elevene i stand til å resonnere med en modell mens de tenker på hvordan å handle i den modellerte situasjonen. Videre vil elevenes fokus rettes mer mot matematiske relasjoner, før de til slutt ikke er avhengige av modellens støtte for videre formell matematisk resonering. Dette leder Gravemeijer og Stephan videre inn på “fire nivåer av aktivitet”, som illustreres i figur 2. Heuvel-Panhuizen (2003, s. 12) omtaler disse aktivitetsnivåene som “the level theory of learning” og er inne på mange av de samme aspektene som Gravemeijer og Stephan. Hun påpeker at elevene her går igjennom forskjellige nivåer av forståelse hvor det kan forekomme matematisering.



Figur 2: Nivåer av aktivitet. (Gravemeijer & Stephan, 2002, s.158)

1. Det første kaller Gravemeijer og Stephan for «activity in the task setting» og omhandler aktivitet før modelleringen starter. Heuvel-Panhuizen (2003, s.15) navngir dette nivået som situasjonsnivået.

2. Andre nivå kalles «the referential level» eller referansenivået, der elevene handler med en modell som er meningsfull da dette innebærer en aktivitet som er virkelighetsnær for elevene.

3. Deretter endres aktiviteten når elevenes fokus skifter fra en kontekstuell betydning over til de matematiske relasjonene som er involvert. Elevene er da ikke lenger avhengig situasjonsbildet de har laget seg og deres aktivitet får en mer generell karakter. Dette kalles også det generelle nivået («general level»), og det er først her at modellen begynner å virke som en modell **for** matematisk resonnering.

4. Siste nivå er det formelle nivået («formal level») der elevene kan bedrive mer formell matematisk resonering uten støtte av en modell.

Sammen indikerer disse fire aktivitetsnivåene utvikling og progresjon. Gravemeijer og Stephan presiserer samtidig at disse ikke nødvendigvis går lineært, men at elevene kan bevege seg mellom de ulike nivåene når de diskuterer eller løser problemer.

2.2.4 Didaktisk fenomenologi

Som nevnt tidligere er didaktisk fenomenologi den siste av de tre sentrale aspektene ved RME, også dette uttrykket er utviklet av Hans Freudenthal. Heuvel-Panhuizen (2014) skriver om begrepet i teksten «Didactical Phenomenology (Freudenthal)». Hun starter da ved å forklare *fenomenologi* og *didaktisk* hver for seg. Freudenthal sin betydning av fenomenologi i en matematisk kontekst var: å beskrive matematiske konsept, strukturer eller ideer som tenkte objekt i relasjon til fenomen fra den fysiske, sosiale og mentale verden som kan bli organisert av disse tenkte objektene. Didaktisk ble av Freudenthal brukt som måten man lærer elever og hvordan man organiserer læringsprosessen. Didaktisk fenomenologi blir da å se på fenomenologien av matematikk fra et didaktisk perspektiv (Heuvel-Panhuizen, 2014). Freudenthal selv beskriver didaktisk fenomenologi slik:

«… it is didactical phenomenology, a way to show the teacher the places where the learner might step into the learning process of mankind. Not in its history but in its learning process that still continues, which means dead ends must be cut and living roots spared and reinforced.» (Freudenthal, 1983, s. ix)

Heuvel-Panhuizen drøfter dette videre og understreker at didaktisk fenomenologi da forteller oss hvordan å undervise i matematikk, noe som blant annet inkluderer hvordan tenkte matematiske objekt kan hjelpe oss å strukturere og organisere disse fenomenene i virkeligheten. Videre kan det hjelpe oss til å identifisere hvilke fenomener som kan medvirke til utvikling av spesifikke matematiske konsepter, hvordan elever kan komme i kontakt med disse fenomenene, hvordan fenomenene kan bli organisert av den aktuelle matematikken for undervisningen og til slutt hvordan elever kan bli løftet til høyere nivå av forståelse.

Fra sitatet over vil jeg selv også dra fram den sterke tilknytningen til «guided reinvention». Som i sitatet, snakker Freudenthal også om hvordan elevene kan «hoppe inn» i læringsprosessen til menneskeheten i «guided reinvention». Ikke som den faktisk skjedde, men ved å guide elevene utenom «dead ends», og styre og styrke elevenes utforsking mot og av «living roots».

Som påpekt tidligere er det i RME avgjørende med rike og realistiske situasjoner/problemer. Heuvel-Panhuizen drar opp igjen denne tråden ved å understreke at disse situasjonene virker som en ressurs for å initiere utvikling av matematiske konsept, prosedyrer og verktøy. Didaktisk fenomenologi er her relevant siden det hjelper å velge hvilke situasjoner som kan være gunstig for den relevante matematikken. Elevene kan da få tilgang til matematiske kilder i hverdagslige kontekster ved å spore fenomener i virkeligheten som kan fremkalle matematiske tanker. Å bygge på disse kildene kan elevene få en orienteringsbasis de opplever som reel, og som åpner muligheten for engasjement og for problemløsning på meningsfull måte (Heuvel-Panhuizen, 2014).

I boken «Didactical phenomenology of mathematical structures» kommer Freudenthal med eksempler på didaktiske fenomenologier innen ulike matematiske emner. Man kan kort se av innholdsfortegnelsen at det omfatter hele 16 emner, deriblant lengder, naturlige tall, negative tall, ulike underemner av geometri, og funksjoner. Heuvel-Panhuizen påpeker at disse eksemplene ikke bare omhandler situasjoner som utgangspunkt for læring av matematikk ved å koble tenkte objekter til fenomener. Eksemplene er grundig forankret i fagstoffet for bestemte matematiske emner, der nøkkelbegreper ble knyttet sammen med kontekster av modellkarakter. Dessverre, som Heuvel-Panhuizen selv sier det, fremlegger ikke Freudenthal, utover eksemplene, noen spesiell metode for hvordan man skal etablere de didaktiske fenomenologiene. Likevel drar han fram, gjennom Heuvel-Panhuizen (2014), viktigheten av kunnskap om matematikk, matematikkens bruksområder og historie. Videre også innsikt om hvordan matematiske ideer enten har, eller kan ha, vokst fram. Dette sammen forståelse om hvordan slike ideer kan vokse fram hos elever, og innsikt i læringsprosessen av matematiske begrep og strukturer.

Heuvel-Panhuizen konkluderer videre med at didaktiske fenomenologi da er et resultat av en rekke ulike analyser som har både didaktiske, fenomenologiske, epistemologiske og kultur-historiske perspektiv. Felles for analysene er at de har matematikk som et startpunkt. Didaktiske analyser finner kunnskap om didaktiske modeller som kan hjelpe elever å forstå de respektive matematiske konseptene. Fenomenologiske analyser finner mulige måter å koble disse konseptene mot virkeligheten og legger fram gunstige kontekster for elevene å møte disse konseptene. Epistemologiske analyser fokuserer på læringsprosessen til elevene og kan fortelle noe om hvordan det kan foregå et skifte elevenes matematiske forståelse gjennom interaksjon. Den siste av de fire, kultur-historisk analyse, kan vise mulige tilnærminger til undervisningen fra både nåtid og fortid. Tilnærminger som kan gi en bedre forståelse av å lære matematikk og hvordan undervisning kan bidra til det. Til slutt legger Heuvel-Panhuizen til at disse analysene, fra Freudenthal sitt synspunkt, danner kjernen for matematikkutdanningens forskning og utvikling.

2.3 Innsyn i ulike forutsetninger for matematisk problemløsning.

Alan Schoenfeld skriver om ulike forutsetninger for matematisk tenkning som er avgjørende for å karakterisere hensiktsmessig atferd ved matematisk problemløsing (Schoenfeld, 2016, s. 16). Schoenfeld hevder da at det generell enighet om fem ulike aspekter som er avgjørende i denne sammenheng:

- The knowledge base
- Problem-solving strategies
- Monitoring and control
- Beliefs and affects
- Practices

Videre vil fokuset her ligge på "the knowlegde base" og "beliefs and affects", som jeg på norsk vil omtaler som "kunnskapsgrunnlaget" og "syn på matematikk".

2.3.1 Kunnskapsgrunnlaget

Kunskapsgrunnlaget omhandler hvordan informasjon er organisert og lagret i minnet, hva som danner grunnlaget for forståelse, og hvordan individet har tilgang til relevant informasjon (Schoenfeld, 2016, s. 17). Således kunne "the knowledge base" også vært oversatt til forkunnskaper, og jeg kommer til å bruke begge begrepene litt om hverandre videre i denne besvarelsen. Grunntanken bak kunnskapsgrunnlaget er da at mennesker er "informasjons prosessorer" der tankesettet danner symbolske representasjoner av verden. Tanker om og handling i situasjoner omfatter da, i henhold til dette synet, å operere mentalt ut ifra representasjonene og handle eksternt basert på egen sinns interne arbeid. Konseptet baserer seg på antagelsen om at mentale representasjoner ikke er fullstendige, og at tenkning utnytter funksjonene ved situasjoner og ikke abstraksjoner av situasjonene.

For å forstå hvordan en person, eller elev, handler i en matematisk situasjon med problemløsning, er det viktig med innsikt i kunnskapsgrunnlaget til vedkommende. Dette omfatter innsikt i hvilken matematisk informasjon eller verktøy, relevant til det aktuelle matematiske problemet, personen er i besittelse av. Matematisk informasjon og verktøy innebærer da blant annet kjennskap til fakta, definisjoner og algoritmiske prosedyrer som eleven tar med seg inn i problemløsnings situasjonen. Samtidig krever det innsikt i hvordan disse verktøyene er tilgjengelig og hvordan de blir brukt. At mulige strategier i problemløsningsprosessen ikke benyttes, kan da ha ulike årsaker. Kjenner ikke eleven til løsningsstrategiene handler det da om at eleven ikke er i besittelse av relevante verktøy. Hvis løsningsstrategien simpelthen blir oversett, vil det omhandle utfordringer for eleven med å se de rette sammenhengene i verktøyene hen besitter. Et viktig poeng er at kunnskapsgrunnlaget til eleven ikke nødvendigvis trenger å være korrekt. Mulige misoppfatninger og misforståtte fakta som eleven tar med seg inn i problemløsnings situasjonen vil da være kunnskapsgrunnlaget eleven arbeider ut ifra.

2.3.2 Beliefs and affects

"Beliefs and affects" innebærer individets forståelse og følelse som former deres måte å se og engasjere seg i matematikk på (Schoenfeld, 2016, s. 26). Shoenfeld deler videre inn i tre ulike kategorier; nemlig elevers, læreres og det generelle samfunnets "beliefs" om matematikk. Vi ser derav at "beliefs and affects" blir et omfattende begrep. Jeg vil derfor videre fokusere på den delen av "beliefs" som omhandler elevers syn på matematikk.

Matematikk er, i henhold til Schoenfeld, generelt assosiert med sikkerhet; vite noe, og være kapabel til å få det rette svaret på kort tid. Den generelle oppfatningen er her formet av elevers skoleopplevelser, der "å gjøre matematikk" innebærer å følge reglene læreren har presentert og det "å kunne matematikk" omhandler å huske og bruke de rette reglene når læreren stiller et spørsmål. Matematisk sannhet avgjøres da av lærerens evaluering. Dette synet på matematikk stammer da fra årelang opplevelse av matematikk som nettopp dette i skolen.

Schoenfeld hevder videre at elever generelt ikke arbeider med problemer i matematikk, men i hovedsak med øvelser som er forventet å kunne løses på noen få minutter. Det underliggende budskapet, som ikke nødvendigvis er intensjonen, er da: "Hvis du har forstått materialet, så kan du gjøre øvelsene. Om du ikke kan løse øvelsene på relativt kort tid, så har du ikke forstått materialet. Dette er et tegn på at du bør spørre om hjelp." Av dette fremkommer det at Schoenfeld mener at et syn elever har om matematikk, er at matematiske problemer bør kunne løses på kort tid om man har forstått materialet. Videre lister han opp en rekke syn på matematikk han mener er typisk for elever (Schoenfeld, 2016, s. 27):

- Matematiske problem har ett og kun ett riktig svar.

- Det er bare en riktig måte å løse et matematisk problem på, vanligvis den måten læreren akkurat demonstrerte.
- Vanlige elever kan ikke forvente å forstå matematikk; de må simpelthen huske memorere det og benytte det de har lært mekanisk uten forståelse.
- Matematikk er en ensom aktivitet som gjøres individuelt.
- Elever som har forstått matematikken de har lært vil kunne løse problemet de får på fem minutter eller mindre.
- Matematikken som læres på skolen har lite eller ingen sammenheng med den ekte verden.
- Formelle bevis er irrelevant for prosesser med oppdagelse eller oppfinnelse.

I henhold til Schoenfeld har disse synene på matematikk en rekke uheldige konsekvenser, i måten de er med på å forme matematiske handlinger. Eksempelvis kan elever gi opp i med å løse et problem etter få minutter med mislykkede forsøk, til tross for at de kunne ha lykkes dersom de hadde holdt ut. Et annet problem kan, ifølge Schoenfeld, være at elever ignorerer konteksten i matematiske problemer og kun fokuserer på utføre algoritmer og skrive ned svaret. Svar som kanskje ikke gir mening i henhold til konteksten for problemet. Dette er to konkrete problemer Schoenfeld eksemplifiserer med, men synene på matematikk kan naturligvis også ha andre uheldige faktorer ved seg.

Videre skriver skriver Schoenfeld om hvordan lærerens syn på matematikk er avgjørende for hvilket klasseromsmiljø læreren skaper (Schoenfeld, 2016, s. 27). Og at dette klasseromsmiljøet igjen vil være med på å forme elevenes syn på matematikk. Likevel fremhever han et faremoment ved at selv lærere med holdninger som fremmer matematikk som problemløsning, kan ofre målsettinger innen problemløsning. Dette for å heller drille elevene inn mot læringsmålene som er avgjørende på prøver og eksamener.

2.4 Oppsummering teori

For å svare på hvordan matematisk modellering kan være med på å bygge ansats til nye konsepter, må jeg se modellering i lys av læringsteorien som er belyst i denne teksten. Det første fellestrekket mellom de to jeg vil underbygge er deres kritiske syn på den "tradisjonelle matematikkundervisningen". For RME teorien sin del utdypes dette i starten på kapittel 2.2. Blomhøj (2003, s. 52) skriver at man også, for å få fullt utbytte av matematisk modellering, er avhengig av å bryte med undervisningen som starter med teorigjennomgang og følges opp av oppgaveregning. Han skriver her at modellering generelt blir implementert i etterkant av elevenes tilegnelse av matematiske konsepter, samtidig som han påpeker at modellering også kan oppfattes som en integrert del av læringsprosessen. Dette er et syn som deles av RME og "guided reinvention". Påfølgende er koblingen mot den virkelige verden og realistiske problemsituasjoner sammenfallende i modellering og RME. Begge to er således avhengige av gode problemsituasjoner som startpunkt, der situasjonene både må oppleves som realistiske for elevene og legge til rette for modellering.

Videre er konseptet med matematisering sentralt i både RME og matematisk modellering. Den enklest tilgjengelige sammenkoblingen her ligger selvsagt i steg 3 fra gjeldende modelleringssyklus, der forklaringen av matematisering er veldig lik den måten horisontal matematisering har blitt beskrevet i kapittel 2.2.2. I samme delkapittel fremkommer det også at organiseringen av situasjonen fra virkeligheten er en del av den horisontale matematiseringen. Av dette tolker jeg det slik at forenklingene, antagelsene og utvalget av informasjon i steg 2, er en del av begrepet. Når jeg bruker begrepet horisontal matematisering videre i denne besvarelsen, omfatter det altså både steg 2 og 3 i syv-stegs-modellen. Vertikal matematisering er kanskje ikke like enkelt å identifisere i syv-stegs-modellen, men jeg anser det likevel slik at det forekommer. I steget som omhandler å arbeide matematisk, utføres det operasjoner innenfor det matematiske systemet og er også et steg hvor den dannes koblinger mellom ulike matematiske konsepter. Grunngitt i dette foregår det, etter min mening, også vertikal matematisering i arbeid med matematisk modellering. Jeg vil også hevde at det kan forekomme vertikal matematisering på andre punkt i modelleringsprosessen, eksempelvis i validering av resultat (steg 6). Der kan det fremkomme uoverensstemmelser som kan lede til nye matematiske oppdagelser for elevene. Jeg innrømmer at den koblingen ikke er like klar som foregående eksempel, og at det her kanskje er uoverensstemmelsene som tilhører steg 6, mens den vertikale matematiseringen forekommer, som en konsekvens av uoverensstemmelsen, i steg 4 på neste "loop" i syklusen.

Den siste koblingen jeg vil belyse er mellom "emergent models" og den matematiske modelleringsprosessen. Både "the level theory of learning" og modelleringsyklusen har et nokså likt utgangspunkt i en startsituasjon, samtidig som begge konseptene anses som ikke lineære i den forstand at de kan hoppe frem og tilbake mellom de ulike nivåene og stegene. Det forekommer også modelldannelse i ved begge tilfellene. Det er på bakgrunn av dette fellestrekket jeg vil hevde at elevene kan oppleve matematisk utvikling og progresjon gjennom matematisk modellering, på samme måte som i “emergent models”. Dette ved at elevene går fra en uformell løsningsstrategi til mer formell matematisk kompetanse. For elevenes del må ikke prosessen nødvendigvis ende opp i det siste “formelle nivået”. Men jeg vil opp mot problemstillingen, og på bakgrunn av nevnt teori, hevde at enhver utvikling til høyere aktivitetsnivå for elevene, med matematisk modellering som undervisningsform, kan være med på å bygge ansats til nye matematiske konsept.

3 Metode

Metode betyr opprinnelig veien til målet i henhold til Kvale og Brinkman (2015, s. 217). De vektlegger da at hvilken metode som benyttes for å analysere innholdet i stor grad avgjøres på grunnlag av den teoretiske oppfatningen av hva som skal undersøkes. I dette kapittelet vil jeg først skrive litt innledende om kvalitativ og kvantitativ metode, før jeg gjør rede for kombinasjonen av metoder som blir brukt i denne studien. Deretter sies det noe om konteksten for datainnsamlingen. Videre presenteres de forskjellige metodene som inngår i kombinasjonen, før det presenteres hvordan dataene analyseres. Til slutt sies det noe om kvalitet i studien.

3.1 Kvalitativ og Kvantitativ metode

Thomas Harboe skriver at den mest vesentlige formen for differensiering mellom ulike innsamlingsmetoder, er å skille mellom kvalitative og kvantitative metoder (Harboe, 2006, s. 31). I hovedsak defineres forskjellen mellom de to, på bakgrunn av de data som metodene produserer. Tall, svar og fakta som kan telles og statistisk beregnes, er kjennetegn på data som stammer fra kvantitativ metode. I motsetning er det, ifølge Harboe, snakk om kvalitativ metode dersom metoden ikke umiddelbart produserer kvantitative data.

Typiske eksempler på kvalitative metoder kan, ifølge Harboe, være kvalitative intervju, feltobservasjoner og historiske kildestudier. Et kjennetegn ved kvalitative metoder, som Harboe nevner, er at de regnes som *eksplorative*, i den betydning at de er mer utforskende eller undersøkende. Forskeren mangler da forutgående innsikt i undersøkelsesfeltet. Til tross for et teoretisk og erfaringsmessig grunnlag, vet ikke forskeren hva som møter hen undersøkelsen. I slike tilfeller vil ikke standardiserte metoder være tilstrekkelige. Kvalitative metoder er her godt egnet da de er mer fleksible overfor nyanser og individuelle situasjoner, og de åpner opp for ny og overraskende informasjon.
Harboe skriver videre at kvalitative metoder er *elaborative*, i den betydning at de er teoriutviklende. Teorien danner utgangspunktet for innsamlingen av data, men de innsamlede dataene kan endre og utvikle teorien. Den nyutviklede teorien danner da nytt utgangspunkt for nye innsamlinger av data. På den måten foregår elaborative undersøkelser som en utviklende spiral som vekselvirker mellom teori og data. Som denne vekselvirkningen antyder foregår da analysen samtidig med datainnsamlingen. Avslutningsvis skriver Harboe at kvalitative metoder undersøker et avgrenset empirisk felt og inkluderer vanligvis få respondenter. Målet

er ikke å få et representativt resultat som kan generaliseres til store befolkningsgrupper, men å skaffe nyansert informasjon som kan tolkes i henhold til sin kontekst.

Harboe drar frem spørreskjema, statisk databehandling og eksperimenter som eksempler på kvalitative metoder (Harboe, 2006, s. 33). Videre er slike metodene det motsatte av elaborative og man har da ikke mulighet til å tilpasse undersøkelsen løpende basert på data underveis. Dette krever at man tidlig danner seg et detaljert overblikk over hele undersøkelsen, og at man generelt planlegger undersøkelsen godt i forkant. Viktig er det blant annet at man lager en strategi for hvordan man skal analysere dataene før undersøkelsen gjennomføres. Misforståelser, feil og mangler i spørreskjemaet får man ikke gjort noe med i etterkant, dette må lukes bort i planleggingsfasen.
Videre er kvantitative metoder deskriptive, altså kartleggende eller beskrivende. Slike metoder er gode til å gi et overblikk over omfanget av et problem og gi innsikt i hvilke variabler som finnes innenfor feltet som undersøkes. Den store utfordringen i slike undersøkelser ligger i hovedsak i tolkningsarbeidet, da tallene som fremkommer ofte har en tilhørende kontekst. I motsetning til kvalitative metoder, har kvantitative metoder sin styrke i generaliserbarhet og testbarhet. De er mer generaliserbare av den enkle grunn at de har flere respondenter, samtidig som de enklere lar seg teste siden de bygger på standardiserte målinger.

3.1.1 Kombinasjon av kvalitativ og kvantitativ metode

Kvalitative og kvantitative undersøkelser er på mange måter hverandres rake motsetninger, der den enes muligheter er den andres svakheter. Det er nettopp derfor Harboe tar til ordet for å kombinere begge metodene, da de kan supplere hverandre ganske godt (Harboe, 2006, s. 34). Harboe går da dypere inn i tre forskningsdesign der begge metodene er inkluder:

Første forskningsdesign er kvalitativ metode som forundersøkelse til kvantitativ metode. Som nevnt tidligere stiller kvantitative undersøkelser store krav til forarbeidet. Kvalitative metoder kan hjelpe til i dette arbeidet ved å for eksempel avdekke problemfelt, finne ut hva som bør spørres om og hvilke svarmuligheter som finnes. Forkunnskaper som fremkommer av de kvalitative metodene, kan da være med på å strukturere og målrette de kvantitative metodene.

Det neste forskningsdesignet er kvantitativ metode forut for kvalitativ metode. Denne kombinasjonen gir gode forutsetninger til en kvalitativ undersøkelse ved at problemfelter blir kartlagt i forkant. Man kan da få viktig informasjon om hvor man bør sette fokus, om egen oppfattelse av situasjonen er korrekt og om hvordan sammensetningen er i respondentgruppen.

Det siste forskningsdesignet som Harboe nevner er en vekselvirkning mellom de to metodene. I stedet for å starte med den ene metoden og avslutte med den andre, fortsetter man å veksle mellom metodene flere ganger. Her vektlegges det at kvantitative data kan gi et godt overblikk over situasjonen, men at det ofte er de kvalitative metodene som gir oss en forståelse for den dypere meningen i de kvantitative data.

Det er det tredje forskningsdesignet Harboe her nevner, som jeg har valgt å benytte i denne masteroppgaven. Undervisningen som datainnsamlingen er knyttet til, foregår over to økter. Ved den første økten blir det gjort observasjoner fra undervisningen og en innledende analyse av disse i etterkant. Disse observasjonene blir en del av det totale datamaterialet i oppgaven, men fungerer også som en forundersøkelse til utformingen av spørreskjemaet. På den måten kan innsikten som observasjonene gir være med på å strukturere og målrette det kvantitative spørreskjemaet, ved å eksempelvis finne ut hva som bør spørres om. Spørreskjemaet på sin side tjener den hensikt å gi et godt overblikk over situasjonen i klasserommet. Dette kan bidra til å sette fokus for analysen av datamaterialet fra de to andre kildene, og samtidig si noe om hvorvidt tolkningen av disse dataene samsvarer med opplevelsene til respondentgruppen. I utgangspunktet skulle en innledende analyse av spørreskjemaet også være med på å forme intervjuet som ble gjort i etterkant av den andre undervisningsøkten. Men grunnet tidsmessige hensyn til elevene som deltok i intervjuet, ble denne innledende analysen mye kortere og mer overfladisk enn hva som først var intensjonen fra min side. Sammen med observasjoner fra den andre økten, danner disse tre kildene grunnlaget for datamaterialet i denne masteravhandlingen med bruk av kombinerte metoder som forskningsdesign.

3.2 Kontekst for datainnsamling

Datainnsamlingen ble gjennomført i sammenheng med et gruppearbeid innen matematisk modellering i en S2 klasse i den videregående skole. Arbeidet hadde varighet på en uke, noe som innebar fem skoletimer fordelt på to økter. Inkludert i disse timene var også en kort introduksjon til matematisk modellering og en oppsummerende sekvens der gruppene delte sine ulike løsningsmetoder.

Lærer delte elevene inn i fem grupper på henholdsvis fire og fem elever, der alle gruppene jobbet med den samme modelleringsoppgaven. Modelleringsoppgaven gjengis i sin helhet i vedlegg 1, mens utarbeidelsen av oppgaven utdypes i neste delkapittel. I arbeidet med oppgavene fikk elevene støtte fra lærer, mens jeg hadde en observerende rolle i denne sekvensen. Observasjonene er gjort fra samtlige fem grupper i klassen. Valget om å observere samtlige grupper, kontra å fokusere på en eller noen, ble tatt på bakgrunn av at ønsket å kunne si noe om arbeidet som ble gjort i alle de respektive gruppene. På bakgrunn av dette kan dataene gi meg et bedre grunnlag til å sammenlikne arbeidet i de forskjellige gruppene. Uheldige sider av dette valget vil være at jeg må ta flere avgjørelser underveis i undervisningen om hvilke observasjoner som skal inkluderes og hvilke som ikke skal inngå som en del av datamaterialet. I den forbindelse valgte jeg å fokusere på de situasjonene som virket avgjørende i henhold til problemstillingen i oppgaven. Som støtte til mine observasjoner, fylte hver gruppe ut et "modelleringsskjema" (se vedlegg 4) underveis i arbeidet.

Oppmøtet ved de to respektive øktene varierte i noen grad. Gruppeinndelingen ble gjort på bakgrunn av de 22 elevene som var til stede den første økten. Blant disse elevene var det fire som var fraværende i den andre økten, samtidig som det var tre "nye" elever i den andre økten som ikke hadde vært med i den første økten. Til den andre økten var også læreren borte med planlagt fravær, slik at denne delen av gruppearbeidet ble gjennomført med vikar. Disse fraværsfaktorene er ikke inkludert for å kritisere klassen eller enkeltpersoner på noen som helst måte. Jeg har ingen kjennskap til årsakene bak de ulike fraværene og hvorvidt de er gyldige eller ikke. Det er også viktig å påpeke at fravær blant elever og vikarer for lærere er helt normalt i den norske skole, og at det på ingen måte var en unik situasjon som dette undervisningsopplegget gikk igjennom. Dette fraværet er likevel av interesse da det spiller en avgjørende rolle for konteksten til datainnsamlingen.

Spørreundersøkelsen ble gjennomført like etter at undervisningsopplegget var avsluttet. Samtlige elever ble forespurt om å delta i spørreundersøkelsen, som både var frivillig og ble gjennomført anonymt. Totalt 15 elever valgte å gjennomføre spørreskjemaet, noe som medfører at totalt 10 elever som hadde deltatt i modelleringsopplegget ikke besvarte spørreskjemaet. Bakgrunnen for dette var forskjellige årsaker. Noen av elevene var som kjent ikke til stede i den andre økten, noen måtte forlate undervisningen før de fikk gjennomført spørreskjemaet, mens noen ikke ønsket å besvare på bakgrunn av at de kun hadde deltatt den siste økten. Dette medførte da at av de 7 elevene som kun deltok i en av øktene, var det ingen av dem som besvarte spørreskjemaet.

Intervjuet hadde varighet på om lag 30 minutter og ble gjennomført som et gruppeintervju med to elever. I utgangspunktet hadde jeg et ønske om å gjennomføre intervjuet noe tid etter spørreundersøkelsen. Dette for å dra ekstra nytte av det kvantitative spørreskjemaet inn mot det kvalitative intervjuet, noe som ble utdypet i forrige delkapittel. Av ulike tidsmessige hensyn ble intervjuet likevel gjennomført like etter spørreundersøkelsen, der jeg kun hadde kort tid til å se på dataene fra spørreskjemaet i forkant. Intervjuet ble gjennomført med lydopptak og senere transkribert av meg.

3.2.1 Utforming av modelleringsoppgaven

Modelleringsopplegget, som gjengis i sin helhet i vedlegg 1, ble utarbeidet i samarbeid mellom meg og lærer i den respektive klassen. I planleggingsfasen tok vi flere hensyn og vi jobbet fram og tilbake mellom ulike opplegg. Det var tidlig viktig for oss å gjøre opplegget pensumrelevant for elevene, slik at modelleringsoppgaven ble utformet basert på gjeldene læreplan i faget. Vi landet til slutt på "økonomisk optimering" som et velegnet emnet for modelleringsopplegget, og innlemmet det i undervisningen der vi mente det var naturlig i henhold til klassens fremdriftsplan. Videre var både jeg og lærer opptatt av å bygge opplegget på elevenes forkunnskaper, et område læreren naturligvis hadde bedre innsikt enn meg. Et sentralt kunnskapsområde vi ønsket å inkludere var derfor funksjoner, med blant annet fokus på derivasjon, regresjonsanalyse og funksjonsdrøfting generelt, siden dette var emner klassen nylig hadde arbeidet med. Modelleringsopplegget ble derfor utformet på bakgrunn av dette, og elevene fikk også utlevert en punktliste som ved hjelp av regresjonsanalyse kunne benyttes til å beskrive utgiftene til bedriften. Utover dette antok vi at elevene hadde mange tanker og inntrykk innen økonomi, som stammer fra både tidligere skolegang og livet generelt. Disse forkunnskapene var noe mer uoversiktlig for meg og lærer. Vi valgte derfor å innlemme en kort sekvens om "økonomisk tankegang" i introduksjonen av oppgaven, slik at alle elevene skulle ha en nødvendig "grunnplattform" å jobbe ut ifra.

I tråd med læringsteorien som denne masteroppgaven baserer seg på, gjorde vi oss også klare tanker om hvilke matematiske konsepter vi så for oss at elevene kunne "reoppdage". Grunntanker vi håpet at alle gruppene kunne utvikle var å anvende egne ferdigheter innen funksjoner til å tolke og beskrive inntekt, utgifter og kanskje overskudd. Samtidig ønsket vi å tilrettelegge for at elevene kunne utforske nye ideer innen etterspørsel, grenseinntekt og grensekostnad. Oversikten over disse konseptene virket som godt støttemateriell når den endelige oppgaven skulle utformes.

Avslutningsvis i utformingen av modelleringsopplegget forsøkte vi å gi oppgaven en realistisk kontekst, da dette vektlegges både i teorien om matematisk modellering og RME som er beskrevet tidligere i oppgaven. Modelleringsoppgaven fikk derfor en medfølgende bakgrunnshistorie, som skulle være med på å virkelighetsgjøre problemet for elevene. Samtidig anså vi den realistiske konteksten som avgjørende for å gi elevene en mulighet til å se matematiske begrepene i sammenheng med virkeligheten. Dette innebærer både å se bruksområde for de nye konseptene som elevene kan utvikle, men også muligheter for å videreutvikle og komplementere forkunnskapene ved å arbeide med dem i nye sammenhenger. Temaet for oppgaven var batteriproduksjon for elbiler. Elbiler ble valgt da dette er et dagsaktuelt tema som mange av elevene har meninger om. Prisen på batteriene ble valgt på bakgrunn av tilgjengelig data om batteripriser, mens resten av tallmaterialet er funnet opp for å gi fornuftige tall i oppgaven. Resten av historien er oppdiktet, men ment å virke realistisk.

3.3 Kvalitative observasjoner

I henhold til May Britt Postholm handler observasjoner om å se, og påpeker at tidligere erfaringer og opplevelser er avgjørende for hvordan vi tolker det vi observerer (Postholm, 2005, s. 146). En forskers observasjoner skal derimot også systematiske og hensiktsmessige, samtidig som teori skal danne retningen for observasjonene. I de neste delkapittelet går jeg videre inn på hvordan observasjonene ble dokumentert, samt min rolle som observatør i undervisningen.

3.3.1 Dokumentasjon

Observasjonene fra undervisningen ble gjort uten støtte av video eller lydopptak, men dokumentert skriftlig i form av feltnotater. Postholm (2005, s. 152) understreker at observasjonene helst bør skrives ned mens observasjonen pågår. Samtidig bør det foreligge en plan på hvordan observasjonene skal skrives ned som feltnotater før observasjonene finner sted. Postholm anbefaler her å bruke en bok, der enkeltsidene deles i to. Den ene siden kan forskerens oppfatninger av hva som skjer under observasjonen skrives ned, sammen med beskrivelser av settingen. Den andre siden bør forbeholdes umiddelbare tolkninger av det som observeres. For å holde rede på når de ulike observasjonene er gjort, fremhever Postholm viktigheten av å merke de enkelte observasjonene med både dato og tid.

I mine feltnotater har jeg i stor grad fulgt Postholms anbefalinger som beskrevet ovenfor. Det ble i tillegg gjort noen moderate forandringer i organiseringen av feltnotatene, for å tilpasses situasjonen i klasserommet best mulig. Hver gruppe hadde sin egen plass i notatboken, slik at observasjonene enkelt kan fordeles mellom de respektive gruppene. Videre ble hver side i boken delt i to, i tråd med Postholms anbefalinger, for å skille beskrivelser av observasjon og situasjon fra egne tolkninger. I tillegg ble en del i boken satt av til observasjoner som var generell for hele klassen. Det ble ikke notert tidspunkt for de forskjellige observasjonene, da dette ble vurdert til å være for omfattende å gjennomføre. Likevel er observasjonene tidsmessig organisert ved å skille notatene fra de to ulike øktene, samt å dele inn notatene fra hver økt kronologisk i en innledning, midtdel og avslutning. For å støtte observasjonene, fylte gruppene også ut et "modelleringsskjema" (se vedlegg 4) underveis i modelleringsarbeidet.

3.3.2 Min rolle som observatør

Postholm (2005) skriver at forskeren må overveie sin rolle i feltet forut for observasjonene. I den sammenheng blir det naturlig å se nærmere på de fire ulike observatørrollene som Raymond L. Gold skiller mellom (Gold, 1958, s. 217). I norsk språkdrakt kan de gjengis som "fullstendig deltaker", "deltaker som observatør", "observatør som deltaker" og "fullstendig observatør". De ulike rollene kan sees på som verktøy for å sikre et visst nivå av informasjon, men alle fra ulike perspektiv (Gold, 1958, s. 222). I undervisningsopplegget valgte jeg å innta rollen "observatør som deltaker". Dette innebar at jeg var til stede som observatør i undervisningen, uten å støtte elevene i modelleringsarbeidet. Rollen innebar likevel noe interaksjon med elevene i enkelte tilfeller, for å få enda bedre innsikt i gruppenes arbeidsmetoder og løsningsstrategier. For å ikke virke som noe uromoment i undervisningen, ble min rolle tydeliggjort for klassen i forkant av modelleringsarbeidet. På den måten vet elevene hvordan forskeren kommer til å forholde seg til dem, og det kan være enklere for dem å forholde seg til forskeren (Postholm, 2005, s.154).

Det var flere ulike årsaker til at jeg valgte å innta nettopp denne rollen. Den ene var at jeg ønsket å holde fokuset mitt på observasjoner og skriving av feltnotater, da disse ble logget

uten støtte av hverken video- eller lydopptak. Videre påpeker Gold at det er mindre fare for å "go native" ved en slik rolle (Gold, 1958, s. 221). "Going native" er et uttrykk Gold bruker for å beskrive en klassisk felle for observatører med deltakende roller, der det nærgående forholdet til informanten gjør at de mister fokus på observasjonene.
Utfordringer ved "observatør som deltaker" rollen kan være at den korte kontakten med informantene fører til misforståelser, både ved at observatøren misforstår informantene, men også at informantene misforstår observatøren (Gold, 1958, s. 221).

3.4 Kvantitativt spørreskjema

I henhold til Fekjær er den store fordelen med spørreundersøkelser, og kvantitative metoder generelt, at man lettere kan nå ut til mange og at det gir gode muligheter for generalisering (Fekjær, 2016, s. 15 og 21). Slik spørreskjemaet blir brukt i denne sammenheng innebærer det da å kunne si noe om hvorvidt resultatene kan være gyldige for større deler av elevene i respektiv klasse, og ikke noe om hvorvidt resultatene kan være gyldige for elever generelt. Andre fordeler med spørreskjemaer som Fekjær drar frem, er at det gir tilgang til folks egne oppfatninger og opplevelser, samtidig som man kan spørre om det man er mest interressert i. Noe av målsetningen med metodevalget i denne masteroppgaven er å få innsikt i elevenes generelle oppfatninger og opplevelser angående modelleringsopplegget, for å supplere mine egne oppfatninger. Med bakgrunn i dette ble spørreskjema valgt ut til å inngå som en del av metodekombinasjonen.

En av begrensningene ved spørreskjemaer, som Fekjær trekker frem, er at forhåndsdefinerte spørsmål og svar ikke nødvendigvis stemmer overens med det respondentene ønsker å si. Pew Research Center er inne på noe av det samme når de viser til undersøkelser som skiller mellom åpne og lukkede spørsmål (Pew Research Center, 2020). Et lukket spørsmål blir da definert som et spørsmål med svaralternativer, og et åpent spørsmål er når respondentene svarer med egne ord. Undersøkelsen indikerer at de lukkede spørsmålene medfører høyere oppslutning til de svarene som ble lansert i alternativene, kontra de åpne spørsmålene som gir høyere oppslutning til svar som ikke er en del av alternativene i de lukkede spørsmålene.
Her må det påpekes at respondentene også hadde mulighet til å gi egendefinerte svar i de lukkede spørsmålene. Svaralternativene fikk da mye høyere oppslutning av respondentene dersom de ble foreslått som alternativer, i motsetning til om respondentene skulle svare med egne ord. Nå må det påpekes at verken Pew Research Center eller Fekjær er utelukkende

negativt til svaralternativer i spørreundersøkelser, men dette er en utfordring som trekkes frem. I utformingen av spørreskjemaet har jeg med bakgrunn i dette valgt benytte spørsmål som skal besvares med egne ord, med ett unntak. Dette for at elevenes meninger skal komme frem best mulig, og ikke påvirkes av at elevene sier seg enig i alternativer som jeg foreslår. Omfanget av spørreundersøkelsen, med relativt få respondenter, gjør også at dette vil være håndterbart i analysen av materialet.

3.5 Kvalitativt intervju

Ifølge Kvale og Brinkmann (2015, s. 22) søker det kvalitative forskningsintervjuet å forstå verden sett fra intervjupersonenes side. Et mål er da å få frem betydningen av folks erfaringer og avdekke deres opplevelse av verden. En form for forskningsintervju er det *semistrukturerte forskningsintervjuet*, som ble benyttet i datainnsamlingen i forbindelse med aktuell undervisningssituasjon. Et slikt intervju er verken en lukket spørreskjemasamtale, eller en åpen samtale (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 46). Den tar utgangspunkt i en intervjuguide som leder samtalen inn mot visse temaer og kan inneholde forslag til ulike spørsmål. Samtalen kan da styres inn mot visse temaer, men en har samtidig muligheten til å utforske interessante utsagn fra intervjudeltakerne. Intervjuguiden ble da utformet på bakgrunn av observasjonene fra undervisningen, problemstillingen i denne besvarelsen og min innsikt i matematisk modellering og annen teori på aktuelt tidspunkt. Som nevnt tidligere i kapittel 3.1.1 var det også intensjonen at en innledende analyse av spørreskjemaet skulle inngå i grunnlaget for intervjuguiden, men dette lot seg ikke gjøre på aktuelt tidspunkt. Intervjuguiden fremkommer av vedlegg 2.

Intervjuet ble gjennomført med to elever i etterkant av den andre undervisningsøkten. Min målsetning var da å få innsikt i elevenes opplevelser og synspunkter på modelleringsopplegget de hadde vært med på. Elevenes meninger kan da gi meg økt forståelse av hvilke elementer som er avgjørende når matematisk modellering skal inngå i undervisningen, sett fra deres perspektiv. Dokumentasjonen av intervjuet ble gjort ved lydopptak, men også enkelte notater underveis. I forkant av intervjuet ble det gjort en brifing med elevene, noe som Kvale og Brinkmann (2015, s. 104) understreker viktigheten av. Denne inneholdt informasjon om prosjektets formål, hvem som har tilgang til intervjuet og hvordan dette ble lagret og transkribert. De ble samtidig informert om egne rettigheter i forbindelse med deltakelse i intervjuet. Herunder at deltakelsen var frivillig, at de har rettigheter til å trekke tilbake samtykke og at de ble anonymisert i transkriberingen av lydopptaket. Samtykkeerklæringen, som kommer frem i vedlegg 5, virket som en veiledende mal i denne brifingen.

3.6 Analysearbeidet

Analysen av spørreskjemaene ble brukt til å finne områder elevene virket å være spesielt opptatt av. Som Fekjær (2016, s. 23) påpeker er det helheten som teller i data fra spørreskjema, og det er ikke enkelt svar som er avgjørende. Elevenes svar på hver av de respektive spørsmålene ble da notert ned i et dokument, der utsagn med liknende betydning ble samlet i respektive kategorier. To områder som skilte seg ut fra elevenes besvarelser var da vanskelighetsgrad og samarbeid. Disse to kategoriene ble derfor sentrale, og var med på å sette fokus for analysen av det øvrige datamaterialet.

Intervjuet ble gjennomført med lydopptak og senere transkribert. I denne overgangen fra samtalen i intervjuet til tekst som analyseres, skriver Kvale og Brinkmann (2015, s. 205) om abstraksjoner der informasjon går tapt. Lydopptaket har først en abstraksjon som medfører tap av kroppsspråk, mens transkripsjonen til en skriftlig form innebærer tapt informasjon om blant annet stemmeleie og åndedrett. For å redusere mengden informasjon som gikk tapt inkluderte jeg derfor ord og uttrykk som “eehm” og “mhm” for å indikere om elevene tenkte seg om eller sa seg enig. Videre ble også “…” benyttet for å indikere lengre pauser, mens det ble lagt inn kommentarer i paranteser for informasjon som kom frem av lydopptaket, men ikke direkte med ord. Jeg valgte også å transkribere på bokmål kontra dialekt, da dialekt ikke ble ansett å være avgjørende for fokuset i intervjuet. På bakgrunn av at det kun ble gjennomført ett intervju, ble intervjuet transkribert i sin helhet. Unntaket fra dette er en liten sekvens i starten av intervjuet som jeg anså som ikke relevant, i tillegg til to tilfeller der det ikke var mulig å tolke lydopptaket.

I analysen av intervjuet ble det benyttet meningskonsentrering, som Kvale og Brinkmann (2015, s. 230) angir som en måte å kategorisere uttalelsene fra et transkribert intervju. De nevner flere formål med denne kategoriseringen, blant annet å strukturere omfattende intervju og at det gjør det enklere å sammenlikne med andre undersøkelser. Jeg går ikke videre inn på alle kategoriene, men kan blant annet nevne samarbeid, vanskelighetsgrad med ulike underkategorier, og løsningsstrategi.

Som nevnt tidligere ble observasjonene notert som feltnotater underveis i undervisningen. Disse inneholdt også en innledende fortolkning av observasjonene, som ble nedskrevet mens observasjonene pågikk. I etterkant ble observasjonene kartlagt, der det ble sett etter likheter og forskjeller mellom observasjonene fra de ulike gruppene, men også etter funn som var enkeltstående for respektiv gruppe. Videre ble observasjoner inkludert som en del av den faktiske analysen, på bakgrunn av deres relevans opp imot problemstillingen og funnene fra de to andre datakildene.

3.7 Kvalitet i studien

Når man skal diskutere kvalitet i studien blir det naturlig å snakke om *validitet* og *reliabilitet*. I henhold til Kvale og Brinkmann (2015, s. 137) henviser reliabilitet til resultatenes pålitelighet, mens validitet innebærer hvorvidt man undersøker det man er ment til å undersøke.

<u>Reliabilitet</u>

Reliabilitet har da med forskningsresultatenes troverdighet å gjøre, og handler om hvorvidt et resultat kan reproduseres av andre forskere på andre tidspunkt (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). Slik denne studien er utformet, med datainnsamling fra et spesifikt undervisningsopplegg i en spesifikk klasse, vil resultatene ha vanskelig for å kunne bli "reprodusert". Selv ved å benytte det samme undervisningsopplegget vil det være et hav av faktorer som spiller inn og vil være med på å endre resultatene. Likevel kan man se på reliabiliteten i denne studien på enkelte områder. Resultatene fra intervjuet kan eksempelvis bli påvirket av ledende spørsmål, transkriberingen av lydopptaket og kategoriseringen av utsagn ifølge Kvale og Brinkmann (2015, s. 276). Når det gjelder ledende spørsmål viser de til en undersøkelse som indikerer at ulikt ordvalg i spørsmål kan gi ulike svar. Av dette kan måten spørsmålet formuleres på, være med på å påvirke svaret som elevene gir.
I transkripsjonsprosessen viser Kvale og Brinkmann (2015, s. 211-212) til hvordan to ulike forskere kan tolke samme utsagn ulikt, slik at det nedskrevne utsagnet kan ende opp med forskjellig betydning. Dette har da sin årsak i uklare deler av lydopptaket, hvordan setninger og pauser defineres, og hvordan emosjonelle aspekter inkluderes i transkripsjonen. Det samme gjelder da for kategoriseringen av utsagnene i intervjuet, der ulike forskere kan kategorisere de samme utsagnene ulikt. Sistnevnte kan også gjeldende for

spørreundersøkelsen og observasjonene i denne studien. Disse inneholder også en form for kategorisering, som kan tolkes og kategoriseres på en annen måte av en annen person. I denne sammenheng påpeker Postholm (2005, s. 153) at feltnotatene ikke kan oppfattes som en objektiv beskrivelse av handlingen som utspiller seg foran forskeren. Notatene vil være subjektive da de er et resultat av utvelgelsene som forskeren gjør. Disse er igjen, som påpekt i kapittel 3.3, påvirket av forskerens teoretiske bakgrunn, opplevelser og erfaringer.

<u>Validitet</u>

Validitet handler om i hvilken grad en metode er egnet til å undersøke det den skal undersøke (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). Dette blir da et omfattende felt, men jeg vil her gå i dybden på enkelte aspekter ved det. I studier med kombinerte metoder spesifikt, snakker Anthony Onwuegbuzie og Burke Johnson (2006, s. 57) om i hvilken grad de ulike datakildene overlapper hverandre. De skriver at det kan være problematisk å trekke slutninger basert på sammenlikner av resultater fra de forskjellige metodene, med mindre de ulike metodene inneholder akkurat de samme respondentene. Eksempelvis drar de frem hvordan funn fra kvantitative data integreres med funn fra kvalitative data. Problemet oppstår dersom de kvalitative dataene inneholder kun en del av, eller ingen av, de samme respondentene som de kvantitative dataene. Onwuegbuzie og Johnson understreker da at kvaliteten og generaliserbarheten til slutningene som trekkes på et sammenligningsgrunnlag da er svekket. I utgangspunktet burde ikke dette være problematisk i denne studien, da datainnsamlingene omhandler en og samme skoleklasse. Men der observasjonene omhandler samtlige elever som deltok i undervisningen, er intervjuet gjort med to elever, mens spørreskjemaet ikke ble besvart av 10 elever.

Fekjær (2016, s. 24) peker på frafall som det største problemet spørreundersøkelser står overfor i dag. Generelt antyder hun at en svarandel på over halvparten bra, men at det hovedproblemet ligger i hvorvidt de som har besvart også representerer frafallet på en god måte. Det er ikke blitt gjort noen analyse av dette spesifikt, men noen indikasjoner kan vi likevel få fra det som fremkommer av konteksten for datainnsamlingen i kapittel 3.2. Av totalt 25 elever, var det 10 elever som ikke deltok i spørreundersøkelsen. Inkludert i frafallet var da samtlige 7 elever som kun deltok på en av øktene i undervisningen. Vi ser da at frafallet innbefatter en spesifikk gruppe elever. Personlig anser jeg det som sannsynlig at denne gruppen elever kan ha hatt en annen opplevelse av modelleringsopplegget enn resten av klassen, da gjerne i negativ forstand. Vi ser da en viss variasjon i elevene som inngikk i de kvalitative observasjonene og hvem som besvarte det kvantitative spørreskjemaet. Den datakilden med størst variasjon i elevdeltakelse, kontra de to andre kildene, er uansett intervjuet som ble gjennomført med to elever. I henhold til Onwuegbuzie og Johnson medfører dette at slutninger som trekkes på et sammenligningsgrunnlag, da spesielt mellom data fra intervjuet og en av de to andre kildene, er svekket når det gjelder kvalitet og generaliserbarhet.

Vedrørende dette “problemet” som Onwuegbuzie og Johnson drar frem, kan kvaliteten i funnene fra i denne studien diskuteres. Generelt har jeg forsøkt å unngå generalisere funnene til å gjelde utover elevene i respektiv klasse. Når det gjelder sammenligninger av data fra de forskjellige kildene forekommer dette i noen tilfeller, noe som da kan være med på stille spørsmål ved slutningene disse leder til. Men jeg har i hovedsak forsøkt å bruke datamaterialet fra spørreundersøkelsen til å sette fokus for analysen av det kvalitative datamaterialet, og ikke benyttet det til sammenlikning i stor grad. Data fra spørreskjemaet blir likevel brukt til å si noe om hvorvidt funnene fra de kvalitative dataene kan gjelde for større deler av elevmassen i klassen, i noen tilfeller.

En av hovedfordelene med bruk av kombinerte metoder er at man kan spille på de respektive kildenes styrker og dekke over svakheter (Fekjær, 2016, s. 16; Onwuegbuzie & Johnson, 2006, s. 58; Harboe, 2006, s. 34). Observasjonene gir et godt overblikk over hvordan elevene i de forskjellige gruppene arbeider med modelleringsoppgaven, som kan være vanskelig å få innblikk i basert på de to andre kildene. Men observasjonene preges av stor grad av fortolkning fra min side. Spørreskjemaet kan gi bedre innsikt i elevenes generelle opplevelse av modelleringsopplegget, men har mindre muligheter til å gå dybden på elevenes meninger. Intervjuet gir dypere innsikt i opplevelsene til to elever spesifikt, men kan igjen ikke si mye om hvorvidt disse opplevelsene gjelder for flere elever. De to sistnevnte inneholder også tolkning fra min side, spesielt i analysearbeidet, men ikke i like stor grad som observasjonene som også går igjennom en tolkningsprosess i det de blir notert ned.

4 Analyse og funn

I dette kapittelet presenteres data fra observasjoner, spørreskjema og intervju, sammen med analyse av disse. Kapittelet er delt inn i ulike kategorier, der utvalgt datamaterialet presenteres i den kategorien de, etter min mening, passer best inn. Datamaterialet presenteres på denne måten, da jeg ønsker å enklere kunne sammenligne data fra de ulike kildene. I hver kategori belyses ulike funn i form av kjennetegn ved oppgaven, og eller viktige faktorer, som kan ha være avgjørende for elevers utvikling av ansats til nye matematiske konsept.

Hvert enkelt utsagn fra intervjuet blir nummerert i kronologisk rekkefølge basert på når utsagnet ble ytrer i intervjuet. Dette for å gi et visst innblikk i når de aktuelle intervju utdragene fant sted i forhold til hverandre. Observasjonene blir presentert slik jeg som observatør tolket situasjonen i undervisningen. Disse vil forekomme som både generelle observasjoner av situasjonen i klassen, og som spesifikke observasjoner av aktuell gruppe. I enkelte tilfeller blir også observerte dialoger presentert. I disse skilles det mellom utsagn fra lærer og elever, men ikke mellom de forskjellige elevene. Dette på bakgrunn av at notasjonstempoet til observatør ikke tillot det. Datamaterialet fra spørreskjemaet er primært brukt til å identifisere faktorer elevene virket å være spesielt opptatt av, dette fremkommer i de kategoriene hvor dette er aktuelt.

4.1 Ulike løsningsstrategier

Av modelleringsskjemaene kommer det frem at de forskjellige gruppene benyttet ulike løsningsstrategier for å løse oppgave 1 i modelleringsopplegget. Noe observasjonene fra undervisningen også underbygger. Gruppe A, C og D arbeidet med oppgaven ut ifra ideen om å finne en overskuddsfunksjon ved å trekke utgiftsfunksjonen i fra inntektsfunksjonen, altså $O(x)=U(x)-I(x)$. I beregningen av maksimalt overskudd varierte utførelsen mellom disse tre gruppene. Gruppe C fant løsningen ved bruk av derivasjon, mens de to andre gruppene fant maksimalt overskudd ved å benytte "ekstremalpunkt" kommandoen i geogebra. I motsetning gikk Gruppe E utenom bruken av en overskuddsfunksjon, og ønsket å finne maksimalt overskudd ved å løse likningen $U'(x)=I'(x)$. Gruppe B sin løsningsstrategi var en slags grafisk variant av $U'(x)=I'(x)$ metoden, der gruppens plan var å finne maksimalt overskudd ved å beregne den største avstanden mellom grafene til I og U. Denne metoden utdypes i kapittel 4.2.1.

Observasjonene indikerte videre at gruppene arbeidet på ulike måter for å komme frem til de ulike løsningsstrategiene. To av gruppene, henholdsvis C og E, fant en mer formell løsningsstrategi ved å lese seg opp på aktuelt emne på NDLA (digital læringsressurs). En metode som videre vil bli referert til som den "formelle metoden". De tre andre gruppene virket, fra observasjonene, å basere løsningsstrategiene på tidligere kjent kunnskap blant elevene innad i gruppen. Samtidig tyder funnene på at modellene som gruppene utvikler og bruker til resonnering, alle er representert i en slags kombinasjon av graf og funksjonsuttrykk. Forskjellen er derimot at gruppe C og E i hovedsak grunngir løsningen sin i funksjonen, mens de tre andre gruppenes strategier er vektet mest på den grafiske representasjonen.

Funnene her kan tyde på at oppgave 1 gav rom for bruk av forskjellige arbeidsmåter, ulike representasjoner og varierte løsningsstrategier. Således kan dette sies å være et kjennetegn på modelleringsoppgaven.

4.2 Interaksjon

I spørreskjemaet trekker 6 av 15 elever frem samarbeid som noe de likte med undervisningsopplegget. Observasjonene fra undervisningen inneholdt flere eksempler på hvordan samarbeid i gruppene kan ha ført til utvikling av nye matematiske ideer. I denne sammenheng virket dialoger, både elev-elev dialog og elev-lærer dialog, spesielt avgjørende. Samtidig indikerte observasjonene fra undervisningen at det i flere av gruppene var elever som ikke deltok i gruppearbeidet. Videre vil situasjonen i tre av gruppene bli analysert. Der den ene gruppen viser et eksempel på hvordan samarbeid og dialog kan lede til utvikling av matematiske ideer, mens de to andre viser hvordan noen elever var passive i gruppearbeidet.

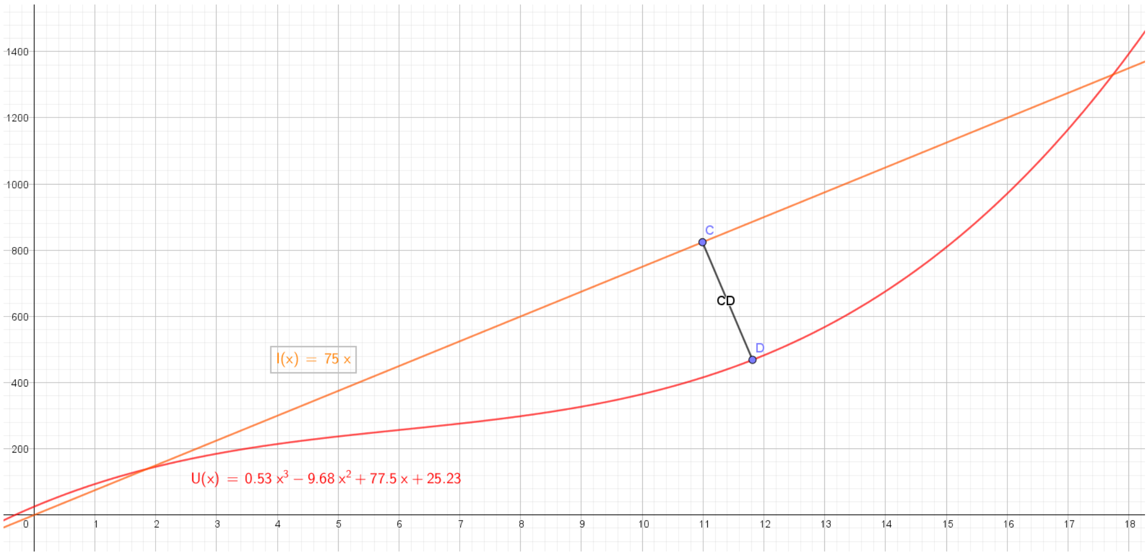
4.2.1 Samarbeid og samtale

<u>Observasjon av gruppe B</u>

En gruppe som benytter seg av en utforskende måte å løse modelleringsoppgaven, bruker aktivt dialog som verktøy i modelleringarbeidet. Samarbeidet i gruppen preges av at de ulike elevene til stadighet lanserer ideer til de andre elevene i gruppen, der dialogen i gruppen avgjør om disse ideene enten forkastes eller bygges videre på. Etter noen innledende samtaler arbeider gruppen med å finne hvor inntektsfunksjonen krysser utgiftsfunksjonen, for da å finne "det området der de tjener penger".

Videre har gruppen lagt inn funksjoner for inntekt og utgift i geogebra, og presenterer begge disse grafisk i grafikkfeltet som vist i figur 3. Dialogen som da utspiller seg i gruppen viser hvordan elevene utvikler forståelse ved å dele ideer:

- "De bør jo produsere der det er størst avstand mellom inntektene og utgiftene. Det er der de har mest "inntektsmargin", eller hva vi skal kalle det?"
- "Hvordan finner vi ut det da?"
- ...
- "Blir ikke det ca her da?" (Peker på avstanden som går normalt fra I(x) til U(x), illustrert ved linjestykket CD i figur 3)

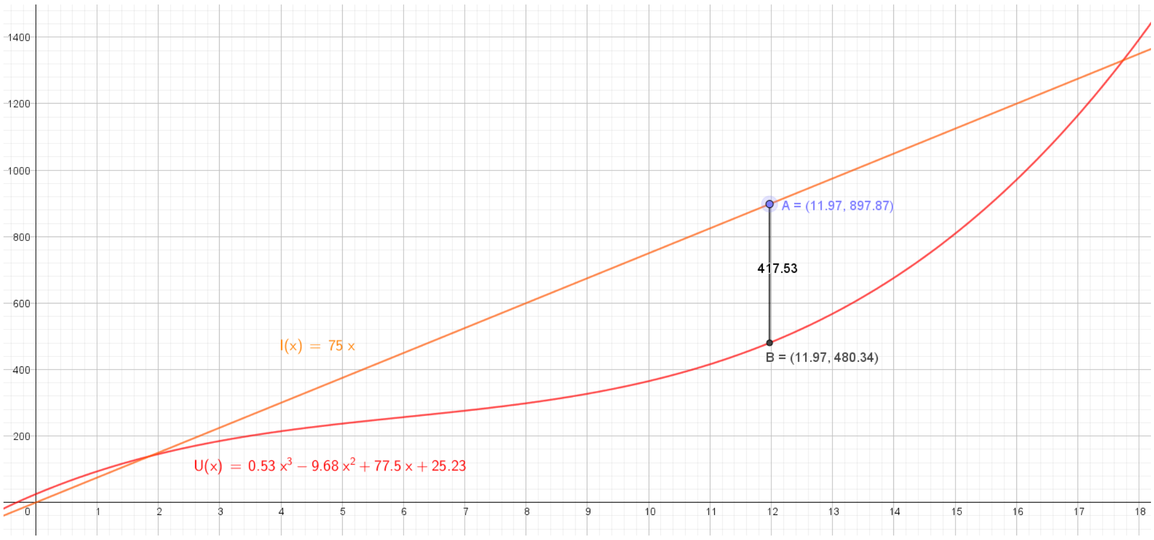


Figur 3: Illustrerer elevenes løsningsstrategi

Det blir da stille i ca 1 minutt mens elevene tenker over det siste utsagnet. Dialogen fortsetter deretter:

- "Det blir vel ikke riktig. Må jo bruke samme x-verdi for begge grafene, hvis ikke bruker vi jo ikke samme I og U."
- "Ja selvfølgelig."
- "Det tenker jeg også."
- "Kan gjøre det samme egentlig, bare vi tar linjen rett opp." (rett linje normalt på x-aksen)

Gruppen diskuterer det siste forslaget videre, og blir enige om at de kan finne størst "inntektsmargin" på denne måten. I arbeidet med denne ideen lager de et linjestykke AB normalt på x-aksen, som strekker seg mellom punkt A på I(x) og punkt B på U(x). Dette blir illustrert i figur 4 nedenfor. Verdien av "innteksmarginen", altså lengden på linjestykket AB, blir vist i grafikkfeltet. Videre flytter de punkt A frem og tilbake til de finner den største verdien til linjestykket AB.

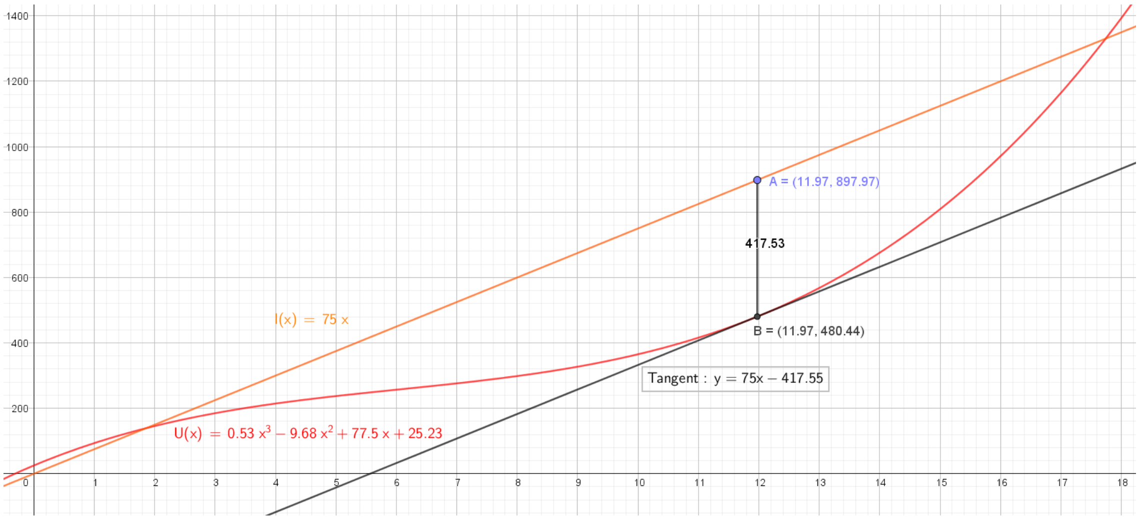


Figur 4: Illustrerer elevenes løsningsstrategi

Ved denne fremgangsmåten kommer gruppen frem til at bedriften bør produsere omlag 12000 batterier årlig, og sier seg i utgangspunktet ferdig med oppgaven. Frem til dette tidspunktet lar læreren denne gruppen jobbe med oppgaven uten å selv interagere i arbeidet. Læreren anerkjenner først metoden de har brukt, før han utfordrer gruppen til å finne en måte der de kan si helt sikkert at dette er den største avstanden mellom grafene. Elevene tenker først på egenhånd en kort periode, før dialogen i gruppen starter opp igjen:

- "Hvordan finne ut hvor denne (sikter til linjestykket AB) er størst? Vi vet jo sånn ca hvor det skal være."
- "Må finne der tangenten til U(x) er lik I(x). … Eller det vil vel ikke gå."
- …
- "Jo vil ikke det fungere da?"
- "Kanksje, jeg vet ikke helt."
- Vi kan jo bare prøve da, og se om det gir mening."

Som observatør var min tolkning at det elevene mener med denne ideen er å finne når tangenten til U(x) er parallel med I(x). Det er iallefall denne tankegangen de arbeider videre. De plasserer en tangent i punktet B på U(x) og forflytter punktet til tangenten er parallelt med I(x). Dette illustreres i figur 5 under.



Figur 5: Illustrerer elevenes løsningsstrategi

Gruppen virker fornøyd med løsningen og uttrykker i samtale med læreren at de nå “har funnet et sikrere svar”.

I “modelleringsskjemaet” forklarer gruppen selv ideen de har benyttet til å finne den endelige løsningen:
“Det lønner seg å produsere så lenge man går i pluss pr. stk. Så hvis vi finner en lineær graf for inntekten per enhet, og så finner vi punktet på polynomet som har tangent parallell med inntektlinjen, vil differansen mellom y-verdiene ved x-verdien til det punktet, være der overskuddet er størst.”

Under antagelser i modelleringsskjemaet skrev de følgende:
“Vi antok, i utgangspunktet, at differansen vi letet etter ville være det største overskuddet, men i ettertid sjekket vi dette og det stemte.”

Observasjonene av gruppe B tyder på at elevene aktivt bruker samtale som et verktøy i modelleringsarbeidet. Samtidig kan samtalene som er skissert over antyde at disse bærer preg av at ideer lanseres til gruppen og eventuelt forkastet eller bygges videre på, med bakgrunn i refleksjoner rundt ideene som lanseres. Den, etter min oppfatning, utforskende arbeidsmetoden bærer preg av dialog og resonnering rundt den grafiske fremstillingen av problemet som gruppen benytter. Observasjonene tolkes dit at modellen, den grafiske fremstillingen, i første omgang støtter elevenes uformelle strategi (se kapittel 2.2.3). Etter samtalen med læreren, tyder observasjonene på at gruppen videreutvikler modellen og tar i bruk en mer formell strategi. Gruppe B sin forklaring av egen ide i modelleringsskjemaet tyder også på at modellen blir brukt til mer formell matematisk argumentasjon. Vi ser her en forklaring som ligger tett opp imot den formelle definisjonen av å beregne maksimalt overskudd ved bruk av grenseinntekt og grensekostnad. Grunngitt i dette kan det her se ut som at gruppen har gjennomgått en "modell av til modell for" overgang i modelleringsoppgaven (se kapittel 2.2.3).

"Modell av til modell for" overgangen er sterkt knyttet mot matematisk utvikling i RME, og således en veldig gunstig situasjon i modelleringsarbeidet. Det er flere faktorer som kan virke avgjørende for utviklingen som skjer i gruppe B. Modellen gruppen benytter seg av er en grafisk fremstilling, som i så måte blir en viktig faktor. Samtidig tyder funnene på at lærer er viktig for denne gruppens overgang fra en uformell til mer formell strategi. Videre ser det også ut til at samtalene mellom elevene i gruppen er avgjørende.

4.2.2 Fravær av samarbeid

Som nevnt tidligere ble elevene delt inn i grupper på enten fire eller fem elever. Beskrivelsen over viser hvordan samarbeid og dialog kan være et viktig virkemiddel i modelleringsarbeidet. Men observasjonene fra undervisningen indikerer også at det i 3 av 5 grupper, var flere elever som ikke deltok aktivt i modelleringsarbeidet. Noe som selvsagt er problematisk da dette ikke gir disse elevene samme mulighet til å oppnå noe av det læringspotensialet som ligger i modelleringsoppgaven.

Observasjon gruppe D

I en gruppe bestående av fire elever, indikerer observasjonene fra den første økten en ujevn arbeidsfordeling i gruppen. Etter innledende "idemyldring" hvor tilsynelatende hele gruppen bidrar, ønsker gruppen å finne en overskuddsfunksjon ved å trekke utgiftsfunksjonen i fra inntektsfunksjonen, altså $O(x) = I(x)-U(x)$. Men i det videre arbeidet med denne ideen, er det primært kun to elever som utfører de faktiske regneoperasjonene i oppgaven. Disse to elevene, som sitter ved siden av hverandre, gjør hoveddelen av arbeidet på en av elevenes laptop. De to andre elevene sitter på motsatt side av bordet i forhold til de to første elevene, uten innsyn i arbeidet som blir gjort på laptopen. Elevene uten innsyn i arbeidet som blir gjort på laptopen slutter etter hvert å engasjere seg i modelleringsoppgaven, og bedriver i hovedsak dialog av ikke matematisk karakter.

I den andre økten av modelleringsopplegget er situasjonen i gruppen en helt annen. De to elevene som hadde gjort hoveddelen av det nedskrevne arbeidet er fraværende. Gruppesammensetningen ved den andre økten er da de to elevene som ikke deltok i utførelsen av regneoperasjonene den første økten, sammen med en "ny elev" som var fraværende den første økten. Denne gruppen starter da den andre økten uten noe "nedskrevet arbeid", men har til tross for dette tilsynelatende god progresjon i modelleringsoppgaven. De to elevene med kjennskap til oppgaven hjelper "den nye eleven" med å forstå oppgaven. På den måten blir oppgave 1 løst i et samarbeid mellom alle tre elevene på gruppen. De benytter da samme ide som gruppen hadde ved forrige økt, og viderefører også arbeidet ved å finne optimal produksjon ved å løse likningen O'(x)=0.

Observasjonene indikerer ikke noen entydig svar på hvorfor den uheldige situasjonen oppstår. Men observasjonene av den andre økten tolkes slik at de aktuelle elevene hadde forutsetninger for delta i hele modelleringsprosessen, og ikke bare idemyldringen i starten av arbeidet. At disse elevene ikke deltar aktivt i modelleringsarbeidet den første økten, skyldes altså ikke manglende forutsetninger for å delta.

<u>Intervjugruppe (Gruppe C)</u>

Intervjuutdrag 1

1. [...] kan dere kort si en negativ ting og en positiv ting om opplegget?
   [...]

3. 3: En ting jeg syntes var gøy det var at vi fikk masse tid til å tenke og reflektere over hva svaret kunne være. En dårlig ting var som sagt at oppgaven var litt dårlig formulert, også var det noen begreper som ikke var på plass. Og hvis du ikke forstår de begrepene så er det vanskelig å vite hva oppgaven eller hva for eksempel de grafene spør om. Og at ja, det var litt dårlig samarbeid med gruppen (latter begge)

Innledningsvis trekker "elev 3" frem dårlig samarbeid med gruppen som et negativt aspekt ved modelleringsopplegget. Akkurat hva som menes med "dårlig samarbeid" fremkommer ikke entydig i intervjuet. Men observasjonene av denne gruppen tyder på at det hovedsak var to elever, de to intervjudeltakerne, som gjorde arbeidet med modelleringsoppgaven i denne gruppen. Mens de andre elevene var mer passive i modelleringsarbeidet. Videre følger forskjellige kortere utdrag fra intervjuet, som kan fortelle noe om samarbeidet i gruppen.

Intervjuutdrag 2

[...]
136. 1: Når dere valgte den regresjonsmodellen. Var det på en måte enighet på gruppen for at vi går for den vi går for, eller hadde forskjellige meninger på hvilken modell dere burde gå for?
137. 2: Altså det var ingen som protesterte når vi sa regresjonslinje. Nei

[Elevene forklarer løsningen på oppgave 1]
161. 1: Diskuterte dere noe rundt det (løsningen på oppgave 1) på gruppen.
162. 3: Nei.
163. ⅔: Latter
164. 3: Det var et mirakel når vi fant ut av det, så det var ikke så masse diskusjoner

[Samtale rundt validering av oppgave 1]
192. 1: Ehm, skal vi se. Ja og i resultatet når dere nevnte at dere ikke gjorde alt for mange drøftinger rundt det, det var ikke så mye diskusjon. Men vet dere om det var noe på en måte alle var enige i på gruppen? Hadde dere noen ulik ide?
193. 2: Eeehm. Holdt på å si at enten var man enige eller så sa man ikke noe.

Kommentar 137, 164 og 193 tyder på at det var få faglige dialoger i denne gruppen. Dialog er som kjent en viktig faktor i et samarbeid, i så måte kan disse kommentarene være med på å støtte observasjonene fra denne gruppen. Det kan være nettopp dette "elev 3" mener når hun påpeker at det var "litt dårlig samarbeid i gruppen". I den grad det var dialog i gruppen, tyder kommentar 193 på at disse ikke løftet frem ulike faglige synspunkter. Noe som kan sees på som en forutsetning for godt dialogisk samspill.

De generelle observasjonene, sammen med beskrivelse av situasjonen i to av gruppene, viser at en tendens ved modelleringsopplegget var at flere elever ikke deltok aktivt i gruppearbeidet. I neste kapittel, 4.3, blir det analysert hvordan vanskelighetsgraden på oppgaven kan ha vært en avgjørende faktor i denne sammenheng. Men som observasjonene av gruppe D indikerer, er antageligvis ikke hele forklaringen på problemet knyttet til vanskelighetsgrad.

4.3 Vanskelighetsgrad

Av dataene fra undersøkelsen fremkommer vanskelighetsgrad som en viktig faktor i modelleringsarbeidet. Fra spørreskjemaet nevner hele 7 av 15 elever, enten direkte eller indirekte, vanskelighetsgrad som en negativ faktor ved modelleringsopplegget. Samtidig trakk 5 av 15 elever fram den samme faktoren som et positivt element ved opplegget. 3 av disse elevene anså vanskelighetsgrad som et aspekt som både var positivt og negativt ved opplegget. Videre vil vanskelighetsgrad bli delt opp i tre ulike aspekter. Nemlig vanskelighetsgrad med tanke på forkunnskaper, vanskelighetsgrad i henhold til oppgavens omfang og kompleksitet, og til slutt matematisk vanskelighetsgrad. De ulike aspektene har ikke nødvendigvis et klart og tydelig skille. Dataene fra observasjoner, spørreskjemaer og intervju vil da bli presentert under det aspektet de er mest relevant etter min mening.

4.3.1 Forkunnskaper

I analysen av datamaterialet er det flere av funnene i tilknytning vanskelighetsgrad som kan indikere at forkunnskaper er en viktig faktor i undervisning av matematisk modellering. Forkunnskaper blir et bredt begrep i denne sammenheng, da det blant annet omfatter kjennskap til matematiske konsept, erfaringer med arbeidsmåten og ulike inntrykk elevene har om den "virkeligheten" som situasjonen beskriver. Det vil derav være et vidt spekter av forkunnskaper som kan være relevante for dette undervisningsopplegget. Jeg ønsker ikke å begrense begrepet, men i det videre vil mitt fokus i hovedsak være på elevenes forkunnskaper innen matematisk modellering, samt faglige forkunnskaper innen økonomi og funksjoner.

I spørreskjemaet lyder spørsmål 3 slik: "Nevn en ting du likte dårlig med undervisningsopplegget?" På dette spørsmålet hadde 5 av 15 elever svar som kan indikerte at de syntes fravær av forkunnskaper gjorde modelleringsoppgaven utfordrende:

- "Det var litt "for" nytt, og det var vanskelig å kjenne igjen hva man burde eller kunne gjøre."
- "Hadde ingen formler å ta utgangspunkt i."
- "Var nytt stoff og derfor vanskelig."
- "Husket ikke så mye fra dette temaet fra S1, syns det var veldig vanskelig."

- “Vanskelig oppgave fordi vi ikke hadde jobbet noe med temaet og fikk lite hjelp. Generelt vanskelig, som gjorde det vanskelig å konsentrere seg og jobbe med oppgaven.”

De ulike utsagnene viser at en tredjedel av elevene, som besvarte spørreundersøkelsen, synes modelleringsopplegget var vanskelig på bakgrunn av at enten fagstoffet eller fremgangsmåten var ukjent for elevene. Dette kan tyde på at disse elevene selv følte at de manglet nødvendige forkunnskaper for å løse oppgaven. Selv om elevene her beskriver ulike utfordringer, er likevel vanskelig å tolke betydningen av disse utsagnene direkte opp mot enten faglige forkunnskaper eller forkunnskaper innen matematisk modellering. Det er derfor interessant å se på disse utsagnene i kombinasjon med datamaterialet fra observasjonene og intervjuet.

4.3.1-1 Faglige forkunnskaper

Fra observasjonene av undervisningen er min generelle oppfatning at elevene hadde gode faglige forkunnskaper innen økonomi og funksjoner, som blir ansett som aktuelle faglige forkunnskaper. Det er da av min oppfatning at samtlige grupper og elever hadde tilstrekkelig forståelse av relevante matematiske konsepter som var nødvendige for å kunne utvikle ideer å arbeide ut ifra. Disse oppfatningene kommer på bakgrunn av en rekke observasjoner, der noen av dem presenteres her:

- Det ble benyttet ulike løsningsstrategier fra de forskjellige gruppene, men samtlige strategier bygger på god forståelse av økonomiske grunnprinsipper. Eksempelvis var det flere grupper som utarbeidet en overskuddsfunksjon ved å legge sammen en inntektsfunksjon og utgiftsfunksjon.
- Samtlige grupper presenterer utvalgt informasjon fra oppgaven matematisk i form av enten eller og, funksjoner og grafer. Samtidig gjøres det fornuftige matematiske beregninger med funksjonene, som å benytte derivasjon til å finne maksimalt overskudd.

Av den første observasjonen viser de ulike gruppene god forståelse av begrepene inntekt og utgift når de benytter disse til å utvikle en overskuddsfunksjon. Videre tyder den andre observasjonen på gode kunnskaper innen funksjoner. Dette ved at elevene viser at de mestrer både det å matematisere informasjonen fra oppgaveteksten, og det å gjøre matematiske beregninger med funksjonene. Noe som kan relateres til steg 3 og steg 4 i syv stegs modellen.

Som observatør var derfor min tolkning at elevene hadde gode faglige forutsetninger for å arbeide med oppgaven.

Til tross for at jeg i utgangspunktet ikke vil knytte utsagnene fra spørreskjemaet, som er presentert ovenfor, direkte mot faglige forkunnskaper, kan de likevel tyde på at ikke alle elevene er enig i min tolkning som observatør. Det blir derfor interessant å se nærmere på intervjudeltakerne sine meninger angående dette temaet.

Intervjuutdrag 3

1. 1: [...]kan du kort si en negativ ting og en positiv ting om opplegget.

(…)

2. 2: Eeehm… En negativ ting, jeg syns oppgaven var litt rart formulert, så det hindres oss i å liksom skjønne opplegget, ehh.. greit liksom. Også en positiv ting var at det var veldig utfordrende (latter begge) også var det litt annerledes fra å bare gjøre oppgaver, hele tiden.
3. 3: En ting jeg syntes var gøy det var at vi fikk masse tid til å tenke og reflektere over hva svaret kunne være. En dårlig ting var som sagt at oppgaven var litt dårlig formulert, også var det noen begreper som ikke var på plass. Og hvis du ikke forstår de begrepene så er det vanskelig å vite hva oppgaven eller hva for eksempel de grafene spør om. Og at ja, det var litt dårlig samarbeid med gruppen (latter begge)
4. 1: Ehhm så, men begreper jeg brukte når jeg lagde opplegget da som var vanskelig. Eller var det begreper man måtte benytte seg av underveis du tenkte på?
5. 3: Jeg tenker på de begrepene som sto oppå de der grafene. Som for eksempel kostnad og utgifter. Jeg stusset litt på eeeh.. hva var forskjellen på kostnad og utgifter, det var jeg litt usikker på.
6. 1: Ja, okei. Riktig
7. 2: Ja (enig). men det er sikker fordi vi ikke har hatt om det.
8. - 3: Ja (samtykker) for det er så veldig lenge siden vi har hatt om dette.
9. 2: Vi skulle gjerne hatt en liten repetisjon før vi begynte på selve oppgaven.

Utdraget over viser at disse elevene var av den oppfatning at manglende forståelse av enkelte begreper gjorde det mer utfordrende å forstå oppgaven. De grunngir at dette kan være på bakgrunn av tidsaspektet siden begrepene sist inngikk i undervisningen, og påpeker at de hadde foretrukket en repetisjon i forkant. Det er mulig å spørre seg om elevene synes det er uvant å "reoppdage" ting på egenhånd, eller om de her mener mangel på forkunnskaper. Av kommentar 4 og 5 kommer det frem at det siktes til forståelse av begreper benyttet i oppgaveteksten. Dette kan tyde på at modelleringsoppgaven ikke var godt nok tilpasset elevenes forkunnskaper. I kommentar 5 eksemplifiserer "elev 3" med begrepene kostnad og utgift, og at det da var knyttet spesielt usikkerhet rundt forskjellen mellom de to begrepene. I oppgaveteksten blir begrepet kostnad og utgift brukt litt om hverandre, som om de var et og samme begrep, uten at dette var en bevisst handling i utformelsen av modelleringsopplegget. Utsagnet viser hvordan dette kan skape utfordringer for elevene, dersom elevene blir oppmerksom på bruken av begge begrepene slik som i dette tilfellet. Dette ved at forståelse av forskjellen mellom kostnad og utgift blir en del av forkunnskapene elevene føler er nødvendige for å tolke oppgaven.

Noe som er interessant i denne sammenheng er motsetningen i dataene fra intervjuet og observasjonene. Elevene i intervjuet mener selv at de mangler forkunnskaper innen økonomi for å gjennomføre modelleringsoppgaven, samtidig som mine observasjoner fra undervisningen indikerer at elevene hadde tilstrekkelige forkunnskaper innen dette emnet. Noe av forklaringen i dette tilfellet kan ligge i at jeg ikke ble oppmerksom på bruken av utgift og kostnad før i analysen av intervjuet. Samtidig kan svarene fra spørsmål 3 i spørreskjemaet, som ble presentert i starten av kapittel 4.3.1, indikere at forklaringen på motsetningene i dataene er mer sammensatt enn som så.

Intervjuutdrag 4

40. 1: (...) Dere nevnte at det var lett for å gi opp, var det noe som var spesielt viktig da for at man skulle på en måte gå fra å gi opp til å faktisk fortsette på oppgaven og fortsette å jobbe med den? Var det noen ting som var viktig der tror dere?
41. 2: Jeg vet ikke, det starter jo med at man liksom forstår fra begynnelsen sant, og når man leser sååååeh… så mye fra oppgaven så føler man at man ikke forstår noe av det. Sant så da gidder man liksom ikke å prøve sant. Men hvis man leser noe man kjenner igjen liksom, bare sånn okey greit: "dette her forsto jeg liksom", også ehm også prøver man sitt beste. Men eeeh, jeg tror det også har med vane å gjøre, at vi eeehm ikke er vant med å liksom å gjøre sånne oppgaver.

42. 3: Altså når eg leste første spørsmål så tenkte jeg at dette går ikke (latter). Også gikk jeg inn på NDLA også fant og leste jeg litt om hva er inntekt og kostnad, forholdet mellom de, og overskudd og alt det der.
43. 1: Ja
44. 3: Også fikk jeg litt sånn en idee, også prøvde jeg å lese oppgaven nøye for å forstå litt. Også bare jobbet jeg ut ifra det.
45. 1: Ja, men det er greit. Du gikk egentlig litt for å få den introduksjonen på egenhånd på NDLA da kan du si, ved å gå å lese der da?
46. 3: Ja
47. 2: …(uklart).. nesten litt derfor, vi må jo uansett liksom lese på det for å forstå noe sant. Så da er det liksom like greit at læreren bare kan ta det opp i begynnelsen av timen.

Kommentar 42 underbygger funnene fra intervjuutdrag 1, ved at "elev 3" valgte å lese seg opp på begrepene på egenhånd. Samtidig viser kommentar 44 hvordan "elev 3" begynner å utvikle ideer når de "nødvendige" begrepene var på plass. Dette kan indikere at modelleringsoppgaven ga rom for å videreutvikle ideer når elevenes faglige forkunnskaper samsvarer med begrepsbruken i oppgaveteksten.

I tillegg ser vi i kommentar 41 at "elev 2" påpeker at det å lese noe gjenkjennbart i oppgaveteksten kan være med på å opprettholde elevenes arbeid med oppgaven og unngå at elevene "gir opp". Han foreslår også, i kommentar 47, en lærerstyrt repetisjon i forkant av modelleringsopplegget. Dette kan indikere at denne eleven mener at samsvar mellom elevenes forkunnskaper og de matematiske konseptene som modelleringsopplegget bygger på, er viktig for å motivere elevene til å opprettholde arbeidet i modelleringsprosessen. Samtidig så fremkommer det av kommentar 41 at "elev 2" syntes oppgaven inneholdt mye informasjon og innebar en uvant arbeidsmåte for elevene. Han fremhever da dette som mulige årsaker til at elevene "gir opp" i modelleringsarbeidet. Disse to aspektene analyseres videre i delkapitlene 4.3.1-2 og 4.3.2.

4.3.1-2 Forkunnskaper innen matematisk modellering

Som observatør i undervisningen virket det for meg som at arbeid med matematisk modellering var ganske nytt og uvant for elevene. Flere av gruppene sliter med å starte opp med modelleringsarbeidet. Samtidig gjør usikkerhet i fremgangsmåte og delresultater at arbeidet i flere av gruppene stopper opp underveis. Selv om elevene ofte validerte resultater og løsningsstrategier opp mot kjente matematiske konsept, var likevel flertallet av elevene generelt lite opptatt av å validere egne antagelser, strategier og resultater i modelleringsarbeidet opp “mot virkeligheten”. Observasjoner som kan indikere dette:

1. 3 av 5 grupper hadde oppstartsvansker i modellerings arbeidet. På disse gruppene blir det ytret kommentarer som “det er så mye informasjon”, “hva er det oppgaven egentlig spør etter?” og andre kommentarer av lignende betydning.
2. 3 av 5 grupper stopper ofte opp i arbeidet med modelleringsoppgaven etter å ha fullført en deloperasjon. I disse situasjonene oppfattes det som at elevene ofte er usikker på om det de har gjort hittil er “riktig” og at de har utfordringer når det gjelder å verifisere egne resultater og løsningsstrategier. Samtidig hersker tvil blant elevene om hvordan de skal fortsette med modelleringsarbeidet etter å ha fullført en deloperasjon. Støtte fra lærer ser ut til å være spesielt viktig for å opprettholde framgang i gruppearbeidet i disse situasjonene.
3. En av gruppene oppgir som svar på oppgave 1 at fabrikken bør produsere 201 500 batterier. Gruppen sier seg i utgangspunktet ferdig med oppgaven og gjør ingen tegn til å verifisere svaret opp mot “virkeligheten” før lærer, etter noe tid, veileder dem til dette.

Disse observasjonene kan generelt tyde på at modelleringarbeidet var uvant for elevene, og at liten kjennskap til modelleringsprosessen gjorde oppgaven ekstra utfordrende. Den første observasjonen indikerer vanskeligheter med å forstå og tolke oppgaven, i tillegg til utfordringer med å hente ut relevant informasjon fra oppgaveteksten. Dette kan sees på som utfordringer med steg 1 og 2 i gjeldende modelleringssyklus. Observasjon 3 viser et eksempel på hvordan en gruppe er lite opptatt av å validere det matematiske resultatet opp mot “virkeligheten”, noe som kan indikere liten erfaring med steg 5 og 6 i syv-stegs-modellen. Dette forsterkes av observasjon 2, som mer generelt kan tyde på at elevene savner “tryggheten” med å kunne verifisere resultater opp mot en fasit. I tillegg til utfordringer med steg 5 og 6, indikerer også observasjon 2 utfordringer med steg 2 i modelleringssyklusen. Modelleringsarbeidet virker da å stoppe opp på bakgrunn vanskeligheter med tolkning og validering av delresultater, samtidig som utfordringer med steg 2 vanskeliggjør det for gruppene å velge ut informasjon som kan matematiseres og videre arbeides med matematisk.

Intervjuelevene har også utsagn som kan indikere at modelleringsprosessen var uvant for elevene.

Intervjuutdrag 5

10. 1: Ja sånn ja…. men det er gode innspill. Men dere nevnte og at opplegget var utfordrende, var det noe som var...ehm, dere anså som spesielt utfordrende da? 11. 2: Jeg tror det bare er at det ikke er en vanlig sånn regneoppgave, det er liksom en hel case også skal du liksom utarbeide… du skal liksom jobbe med data som du får oppgitt også sette det inn i en praktisk modell. 12. 1: mhm 13. 2: Og vi er ikke så veldig vant med det tror jeg. 14. 3: mhm (nikker enig) 15. 2: Vi jobber jo mest med kun sånn utregning. 16. 1: Ja 17. 2: Vil eg si, sa ja.

Av intervjuutdraget kommer det frem at disse elevene er mest vant å arbeide matematisk, altså med steg 4 i gjeldende modelleringssyklus. I kommentar 11 fremkommer det også at det oppleves uvant å selv utforme en modell basert på oppgitt data. Dette kan tyde på at modelleringsprosessen opplevdes uvant, kanskje spesielt i steg 2 og 3 av modelleringsprosessen. Vi ser derav noe samsvar mellom observasjoner og utsagn fra elevene i intervjuet.

Funnene angående elevenes forkunnskaper innen matematisk modellering kan generelt tyde på at elevene har størst utfordringer tilknyttet overgangene mellom den virkelige verden og det matematiske i modelleringsoppgaven. Dette blir synlig når elevene har vanskeligheter med å tolke og validere de matematiske resultatene opp imot virkeligheten. Spesielt ser dette likevel ut til å gjelde den horisontale matematiseringen ved utfordringer med steg 2 i syv-stegs-modellen. Det neste delkapittelet, som omhandler modelleringsoppleggets omfang, kan være med på å underbygge den sistnevnte oppfatningen.

4.3.2 Modelleringsoppleggets omfang

"Det er så masse informasjon her. Jeg forstår ingenting."

I avslutningen av delkapittel 4.3.1-1 kommer det frem at mengden informasjon i oppgaven kan være en mulig årsak til at elevene "gir opp" i modelleringsarbeidet. Kommentaren over ble gitt tidlig i undervisningsopplegget av en elev, som senere også meldte seg litt ut av arbeidet i gruppen. Eleven virket ikke å være aleine i denne oppfatningen, det ble ytret andre kommentarer av liknende betydning og det var også andre elever som ikke deltok nevneverdig i modelleringsarbeidet i sin gruppe. Med bakgrunn i dette var min oppfatning som observatør at mengden informasjon virket overveldende for flere elever, og at det kan ha medført at noen elever ikke deltok aktivt i modelleringsarbeidet. Mitt inntrykk kommer tydelig frem av det noe veiledende spørsmålet i kommentar 18, i intervjuutdraget under.

Intervjuutdrag 6

18. 1: Men dere nevnte at det var en del begreper og sånn, men …. var det og at det var veldig omfattende og det var mye?
19. 3: Ja det var veldig masse informasjon
20. 1: Ja
21. 3: Også måtte du forstå liksom, de minste detaljer og hva er det egentlig denne grafen spør om, hva er denne grafen..
22. 2: Mhm (enig)
23. 1: Ja
24. 3: Så du måtte liksom forstå hele oppgaven som helhet, også må du forstå hva oppgaven spør deg om. Og ehm ja det var litt vanskelig, altså oppgaven er jo på to sider på en måte. Det ble litt mye.

[...]

28. 1: Men var det, altså det utfordrende, var det noe som både var positivt og negativt eller var det...?
29. 2: Jojo, det er jo veldig bra at det var utfordrende, vi trenger jo å bli utfordret også. Men jeg tror det er mer at, eeeehm..., det blir sånn, det ser uoppnåelig ut, i stedet for at det er utfordrende (latter).
30. 1: Ja jeg skjønner
31. 2: Så man gir liksom opp med en gang, istedet for å prøve seg fram.
32. 3: Ja (enig). Veldig mange på gruppen de leste første spørsmål også bare ga de opp med en gang fordi de ikke skjønte bæret av det (latter).
33. 2: Men det er jo også det at vi ikke er vant med det sant

34. 3: Ja 35. 2: Så hvis man liksom har en liten sånn repetisjonsoppgave eller liksom sånn refleksjonstid i begynnelsen av timen. Siden det er jo nytt kapittel for liksom for oss sant.

Påliteligheten til informasjonen fra intervjuutdraget over, kan være noe svekket på bakgrunn av de noe veiledende spørsmålene fra min side i kommentar 18 og 28. Likevel kan det se ut til at disse elevene følte at mengden informasjon gjorde oppgaven mer utfordrende. Av kommentar 29 til 32 tolkes det at elevene i intervjuet mente at mengden informasjon kan ha medført at oppgaven virket uoppnåelig, og at mange elever "ga opp" på bakgrunn av dette. Sammen med mitt inntrykk som observatør, kan intervjuutdraget over tyde på at omfanget av oppgaven gjorde modelleringsarbeidet vanskelig for flere elever. Videre sees dette på som en mulig årsak til at flere elever "ga opp" i arbeidet med oppgaven.

Utfordringene elevene her ser ut til å oppleve, kan knyttes mot steg 1 og 2 i modelleringssyklusen til Blum og Leiß. Tolking av oppgaven er noe som kan bli vanskeligere basert på mengden informasjon, men det gir muligens elevene spesielt vanskeligheter med å skille ut hvilken informasjon som skal inngå i den matematiske modellen. Basert på dette kan mengden informasjon være med på å vanskeliggjøre den horisontale matematiseringen elevene gjennomgår i oppgaven.

4.3.3 Matematisk vanskelighetsgrad - "problemet med x-aksen".

I modelleringsoppgaven møtte gruppene på forskjellige utfordringer, som de håndterte forskjellige måte. I den sammenheng var det en spesielt en utfordring som flere av gruppene møtte på.

Oppgaveteksten inneholder "figur 3", se vedlegg 1, som viser en grafisk fremstilling av punktene til utgiftsfunksjonen som elevene har fått utlevert. I koordinatsystemet er enheten til y-aksen "millioner kr", mens enheten til x-aksen er "antall tusen batterier". Forenklingene jeg her har gjort gjelder også for alle punktene i punktlisten som gruppene får utlevert. Denne punktlisten benytter samtlige grupper til å lage utgiftsfunksjonen, ved hjelp av regresjonsanalyse. Men det er når elevene skal utforme en funksjon for inntekten at flere av gruppene får utfordringen med disse forenklingene. I oppgaveteksten står det at: "utsalgsprisen til batteriene det foregående året var gjennomsnittlig 75000 kr pr stk." Tre av gruppene benytter da i utgangspunktet 75000x som funksjonsuttrykk for inntekten. Gruppene er da innledningsvis ikke oppmerksom på forenklingene som er gjort i oppgaveteksten, og ser ikke at de selv må ta høyde for disse forenklingene i utformingen av inntektsfunksjonen. Utfordringen elevene i de respektive gruppene her står overfor vil i det videre bli referert til som “problemet med aksene”. Videre vil situasjonen der disse tre gruppene møter på “problemet med aksene” bli beskrevet.

<u>Observasjon av gruppe A</u>

En av gruppene som får utfordringer med “problemet med aksene” oppdager at det er “noe galt med grafene” på bakgrunn av at grafene for inntekt og utgift ikke samsvarer med hverandre. I møte med dette problemet stopper arbeidet i gruppen opp, og dialogene i gruppen skifter emne til en ikke matematisk karakter. Etter en gitt tid engasjerer læreren seg i samtalen til grupper, og dreier dialogen tilbake til å omhandle modelleringsoppgaven. Læreren spør da gruppen hva de har utfordringer med:

- “Vi skjønner ingenting her.”
- “Den ene grafen fyker jo bare rett til værs!”
- “Dette er jo alt for vanskelig!”

I den videre samtalen inntar læreren først en oppmuntrende rolle, før hen spør gruppen hvilken benevning som står på aksene.

- “På x-aksen står det “Antall produserte batterier (i tusen)””
- “Må vi gange med 1000 da?”
- Lærer: “prøv det da”

Gruppen multipliserer inntektsfunksjonen med 1000.

- “Den er jo fortsatt alt for høy.”
- Lærer: “Hva står det på y-aksen da?”
- “Den er oppgitt i millioner.”
- “Jeg forstår ingenting her.”
- “Skjønner ikke hva vi må gjøre.”
- Lærer: “Hvis det ikke fungerte å gange med 1000, hva kan dere gjøre da…?”
- “Dele på 1000?”
- Lærer: “Prøv det da.”

Elevene justerer deretter I(x) til å være 75x. Og virker meget fornøyde med at grafene nå ser ut til å stemme overens. Læreren utfordrer så gruppen til å forklare hvorfor det fungerte å dividere inntektsfunksjonen med 1000. Etter videre samtaler innad i gruppen, finner elevene i gruppen en forklaring på hvorfor 75x må være riktig inntektsfunksjon. De forklarer det med bakgrunn i at x-aksen er oppgitt i tusen, og at derfor må i utgangspunktet I(x)=75 000 000x. Men siden y-aksen er oppgitt i millioner så må inntektsfunksjonen deles med 1 000 000, slik at I(x)=75x.

Av observasjonene kan det se ut til at "problemet med aksene" forårsaker at arbeidet i utgangspunktet stopper opp. Problemet gruppen står overfor har da i utgangspunktet en negativ konsekvens ved at den hindrer matematisk arbeid og resonering mellom elevene i gruppen. Samtidig kan observasjonene tyde på at lærer spiller en avgjørende rolle for å "restarte" matematisk dialog og arbeid i gruppen. Sammen med lærers guiding, tolkes dette som viktige faktorer for å gjøre denne situasjonen om til læring. Gruppens forklaring avslutningsvis tyder på økt forståelse av betydningen av forenklingene som er gjort med aksene i modelleringsopplegget, således viser elevene økt modelleringskompetanse. Samtidig viser elevene matematisk kompetanse gjennom god forståelse av sammenhengen mellom graf, funksjon og enhet på aksene. Avgjørende for at problemet oppdages, virker å være verifisering av den grafiske representasjonen som gruppen benytter seg av. Derav ser vi at bruken av grafisk representasjon er betydningsfull for at situasjonen oppstår, og da også læringsutbytte som situasjonen kan se ut til å ha medført.

Gruppe C

I "modelleringsskjemaet" til gruppen som intervjudeltakerne var en del av, skriver de følgende om inntektsfunksjonen:

- "Glemte at 75000kr må deles på 1000. Dette er viktig slik at funksjonene samsvarer med hverandre."

Dette ble derfor et naturlig emne i intervjuet i etterkant.

Intervjuutdrag 7

[...]
72. 3: Når jeg lagde den dere inntektsfunksjonen så begynte jeg litt feil fordi jeg skrev, hva var det 75000 eller noe sånt?
73. 1: Ja
74. 3: I stedet for 75.
75. 2: Mhm

76. 3: Da fikk jeg til at, fordi når jeg lagde grafen så bare føyk den høyt opp i været
77. 1: Ja
78. 3: Så ja, jeg måtte tydeligvis dele på 1000 for å få den til treffe den kostnadsfunksjonen
79. 1: Hva som var… hva var det som liksom gjorde at du skjønte at den var gal da, den inntektsfunksjonen?
80. 3: Fordi… for å, vent litt… på grafen her så er det jo oppgitt i 1000 (peker på x-aksen), mens her er det pr stykk (peker på informasjonen om utsalgsprisen på batteriene i oppgaveteksten). Så det var derfor vi måtte dele på 1000 her for å få det til å samsvare med den…

Fra intervjuutdraget over ser vi at også denne gruppen har støtt på "problemet med aksene". Kommentar 76 tyder på at det også her er den grafiske representasjonen som er avgjørende for at "elev 3" oppdager "feilen", og som gjør at situasjonen oppstår. Samtidig ser vi også i kommentar 80 at forklaringen som "elev 3" gir på problemet ikke er matematisk korrekt. Likevel kan intervjuutdraget tyde på at eleven har utviklet forståelse for at forenklingene på aksenes enheter har betydning for modellen som skal utformes i etterkant. Kommentar 78 kan tyde på at det også er den grafiske representasjonen som er avgjørende for at hun ser at 75x må være den "korrekte" inntektsfunksjonen. Det er da muligheter for at denne oppdagelsen av at 75x er den "korrekte" inntektsfunksjonen gjør at resonneringen rundt problemet stopper opp, og ikke leder eleven videre inn mot en mer korrekt matematiske forklaring.

Observasjon av gruppe E

Den siste av de tre gruppene som støter på utfordringer rundt "problemet med aksene", benytter seg av den såkalte "formelle metoden" og ønsker å finne maksimalt overskudd ved å løse likningen U'(x)=I'(x). Gruppen finner innledningsvis en funksjon og graf for utgiftene til bedriften, ved bruk av regresjonsanalyse i geogebra. De benytter da polynom av grad 3 som regresjonsmodell og utelater "bompunktet". Dette gir dem utgitsfunksjonen U(x)=0.66x^3-13.71x^2+106.64x-17.27. Når de skal lage en inntektsfunksjon møter de på den omtalte utfordringen med "problemet med aksene", og benytter I(x)=75000x. Gruppen utfører de nødvendige matematiske operasjonene, her derivasjon og løsning av likninger, og ender opp med at bedriften bør produsere 201 500 batterier årlig. Årsaken til det høye antallet ligger naturligvis i bruken av I(x)=75000x og ikke I(x)=75x. Observasjonene tyder på at elevene på gruppen i utgangspunktet avslutter arbeidet med oppgave 1.

I etterkant av dette ble det observert en samtale mellom gruppen og lærer. Blant annet spør da læreren gruppen om hvor mange batterier de tenker at bedriften maksimalt kan produsere på et år, når de til nå har produsert 10 000 batterier? Observasjonene kan tyde på at det var liten progresjon i modelleringsarbeidet til gruppen i etterkant av denne samtalen. Men i "modelleringsskjemaet" skriver gruppe E en antagelse om at maksimal produksjon er 20 000 batterier, samtidig som de uttrykker at svaret de har fått må være feil. Videre uttrykker også gruppen i "modelleringsskjemaet" at det er problematisk at de ikke har en graf for inntekten.

Situasjonen i gruppe E skiller seg litt fra de to andre gruppene som møtte utfordringer med "problemet med aksene". Der de to andre gruppene oppdager at inntektsfunksjonen må være "feil", og får korrigert dette, tyder ikke observasjonene på at gruppe E gjør den samme oppdagelsen. En mulig forklaring på dette kan være at gruppen ikke kobler at inntekten som de har representert som funksjon, også har en grafisk representasjon. Dette kan hindre dem i å oppdage "feilen" grafisk, slik funnene tyder på at de to andre gruppene har gjort. Gruppen oppdager likevel at løsningen på oppgave 1 ikke kan stemme. Av observasjonene over kan det virke som at læreren var avgjørende for denne oppdagelsen. På dette tidspunktet har gruppen en mer omfattende feilsøkingsprosess foran seg for å finne hvor "feilen" ligger, i motsetning til de andre gruppene. Dette kan være noe av forklaringen på hvorfor gruppen, tilsynelatende, ikke finner "feilen" i inntektsfunksjonen. Likevel kan observasjonene tyde på at oppdagelsen av den gale løsningen leder elevene inn mot å gjøre en antagelse om maks produksjon på 20 000 batterier, samt forståelse av betydningen av denne antagelsen. På den måten kan det se ut som at elevene har utviklet modelleringskompetanse, ved at de viser økt forståelse for sammenhengen mellom modell og virkeligheten den beskriver.

Oppsummering av problemet med aksene

Ved at tre av totalt fem grupper fikk utfordringer med "problemet med aksene", ser det ut til at et kjennetegn ved modelleringsopplegget var å lede elevene inn mot nettopp dette problemet. Situasjonene som er beskrevet i de ulike gruppene viser at problemet har potensialet til å skape en læringssituasjon for elevene. Samtidig tyder funnene på at "problemet med aksene" ikke nødvendigvis er nok til skape denne en slik læringssituasjon på egenhånd. Lærerens guiding virket å være avgjørende for læringsutbytte ved den ene gruppen, samtidig som stadiet problemet ble oppdaget på kan ha vært essensielt. For det sistnevnte ser det ut til at bruken av en grafisk representasjon var viktig for å både oppdage og korrigere "feilen" i inntektsfunksjonen.

4.4 Formulering av oppgaven

I spørreskjemaet påpeker to elever at de syntes modelleringsoppgaven var litt dårlig formulert, hvor en av elevene understreker at dette gjelder spesielt oppgave 2.

- "Oppg 2 var litt vag og vanskelig å forstå. Hadde kanskje vært litt gøyere med en litt mer annerledes oppgave enn 1."

Utsagnet fra spørreskjemaet belyser to utfordringer med oppgave 2. Det ene er at oppgaven var formulert på en slik måte at den var vanskelig å tolke for elevene. I tillegg fremhever utsagnet at oppgave 2 ikke var veldig forskjellig fra oppgave 1.

I utformingen av modelleringsoppgaven hadde jeg i utgangspunktet to intensjoner med oppgave 2. Den ene var å lede elevene inn mot bruk av en ikke lineær inntektsfunksjon, mens den andre var lede elevene mot bruk av grenseinntekt og grensekostnad i modellen. Ordlyden på oppgavene var som følger:

1. Kan dere lage en modell som anslår hvor mange batterier bedriften bør produsere?
2. Siden prisene for elbil batterier varierer ønsker bedriften til enhver tid å ha kontroll på hvorvidt det vil lønne seg å produsere et ekstra batteri den dagen. Kan dere lage en modell som danner grunnlag for denne beslutningen?

Utsagnet fra spørreskjemaet samsvarer i stor grad med tolkningen av observasjonene omkring gruppenes arbeid med oppgave 2. Det var to grupper som påbegynte arbeid med denne oppgaven i modelleringsopplegget. Henholdsvis gruppe B, som har løst oppgave 1 ved å finne ut når tangenten til U(x) er lik I(x), og gruppe C som har løst oppgave 1 ved å løse likningen O'(x)=0. Observasjonene fra undervisningen viste at begge disse gruppene hadde utfordringer med å tolke oppgaven.

<u>Gruppe C</u>

Hvordan elevene i gruppe C opplevde oppgave 2 forklares best gjennom utdrag fra intervjuet der elevene selv beskriver.

Intervjuutdrag 8

1. [...] kan du kort si en negativ ting og en positiv ting om opplegget.

(...)

2. 2: Eeehm… En negativ ting, jeg syns oppgaven var litt rart formulert, så det hindres oss i å liksom skjønne opplegget, ehh.. greit liksom. [...]

3. 3: [...]. En dårlig ting var som sagt at oppgaven var litt dårlig formulert, også var det noen begreper som ikke var på plass. [...]

Innledningsvis i intervjuet nevner begge elevene at de syntes oppgaven enten var dårlig eller rart formulert. På bakgrunn av at elevene som stilte til intervju oppga en kode på spørreskjemaet sitt, kan det stadfestet at dette ikke var de to elevene som uttrykte noe liknende i spørreskjemaet. Det fremkommer ikke direkte at elevenes mening med den "dårlige formuleringen" er knyttet mot oppgave 2, men et utdrag senere i intervjuet kan tyde på nettopp det.

Intervjuutdrag 9

221. 1: Ja, også hva men på oppgave 2 da. Dere nevnte at dere hadde begynt på den og hadde noen ideer. Hva var ideene?

222. 3: Ja

223. 2: Eeehm, jo siden vi skjønte jo ikke helt oppgaven sant. den var jo litt sånn krokete. Siden det sto "den dagen".

224. 3: Vi visste ikke hvilken dag du mente.

225. 2: Ja. Hvilken liksom dag refererte du til?

226. 3: Fordi vi får jo ikke vite noe om dager, vi får bare vite kr og hvor mange batterier.

227. 2: Siden det sto jo årlige inntekter eller noe sånnt.

228. 3: Ja

Av intervjuutdraget over kan det sies at elevene syntes formulering av oppgave 2 gjorde oppgaven vanskelig å tolke. Det er fortsatt muligheter for at elevene også synes andre deler av modelleringsoppgaven var "dårlig formulert", men det kan tyde på at formuleringen av oppgave 2 var noe som var spesielt problematisk.

Intervjuutdrag 10

229. 2: Men så snakket vi med "lærer" også sa hen sånn "tror du dere han(meg) mener liksom hvilken som helst dag?" Og da tenkte vi sånn greit, hva kan vi gjøre da? Også gikk vi liksom på NDLA også fant vi det der med grensekostnader, var det ikke det?

230. 3: Jo

231. 2: jo også så vi at, eeehm det er så vanskelig å forklare. Eg skjønner ikke hvordan jeg skal si det

232. 3: Det var noe med tangenten, at stigningstallet til tangenten

233. 2: Ja

234. 3: Hvis du tar et punkt , for eksempel punktet 10. Okey, 10 000 blir det da. Også lager du en tangent ut fra det punktet, også finner du ut stigningstallet

235. 2: Ja. Også er det liksom 200 for eksempel.

236. 3: Ja

237. 2: Ja. Også så vi at, eeehm, for en ekstra enhet så måtte det liksom plusses på 200 til.

238. 3: Ja

239. 2: Så vi, eller jeg, tenkte da mer at vi måtte liksom måtte lage en slags tangent med en glider eller noe sånt for at man skulle ta den på hvilken som helst dag på den grafen.

240. 1: Ja

241. 2: Også kunne liksom addere de, eehm eller addere den kostnaden til den enheten til der og da. (latter) Samtidig som du liksom glider den tangenten over grafen, og det virket sykt sånn komplisert, men det ga veldig mening der og da. Også ja

242. 1: Ja, men dere hadde no en bra...

243. 3: Er vi på rett spor?

244. 2: Ja, gir det mening?

245. 1: Det… helt sånn på detaljnivå så er jeg litt usikker, men som en overordnet...Men ja det gir veldig mening, det er absolutt en bra tanke. Så eehm, jess. Jeg kan forklare dere litt den etterpå, hvis dere er interessert?

246. 2: Ja

Kommentar 229 viser at læreren har en avgjørende betydning for å gjøre oppgaven mer forståelig for disse elevene. Samtidig viser også intervjuutdraget at elevene er i utvikling av forståelse mot konseptet grensekostnad, og at de på dette tidspunktet har oppnådd delvis forståelse av begrepet. I denne sammenheng er det viktig å påpeke at gruppen hadde noe kort tid tilgjengelig i arbeidet med oppgave 2. Det er derfor muligheter for at elevene kunne utviklet et mer fullstendig begrepsbilde "på egenhånd" om de hadde hatt mer tid tilgjengelig. Det fremkommer også av kommentar 229 at elevene benytter seg av den "formelle metoden". Måten de utvikler egen forståelse for blir derav ikke et eksempel som samsvarer med måten læring skjer på i henhold til RME (se kapittel 2.2.3), læringssynet som denne oppgaven bygger på. I motsetning kan vi her si at elevene forsøker å oppnå formell forståelse av konseptet, for så deretter utvikle en modell på grunngitt i denne forståelsen. Avslutningsvis i intervjuutdrag 10, av kommentar 243-246, viser intervjuelevene en stor iver etter å finne ut om løsningsstrategien de benyttet var fornuftig. Akkurat hva som er grunnen til denne iveren kommer ikke direkte fram av datamaterialet, men det kan se ut til at elevene har utviklet en motivasjon for å finne ut av problemet de har stått overfor.

<u>Gruppe B</u>

Gruppe B opplevde også utfordringer med oppgave 2, men på en litt annerledes måte enn gruppe C. Som observatør var min tolkning at også denne gruppen hadde vanskeligheter med å forstå oppgaven. Samtidig så vil løsningsstrategien som gruppen har benyttet i oppgave 1, med å finne ut når tangenten til U(x) er parallell med I(x), langt på vei også fungere som en modell for oppgave 2. På den måten har gruppen allerede benyttet en del av konseptene som oppgave 2 var ment å tilrettelegge for. Jeg engasjerte meg i en samtale med elevene, for å blant annet forklare oppgaven. I samtalen viser gruppen forståelse for hvordan modellen fra oppgave 1, også kan virke som modell for oppgave 2. Tidsmessige årsaker i etterkant av dette, tillater ikke gruppen å eksempelvis videreutvikle inntektsfunksjonen til å avhenge av etterspørsel.

<u>Oppsummering «formulering av oppgaven»</u>

Av datamaterialet som er fremlagt ovenfor, kan man si at et kjennetegn med modelleringsopplegget var at formuleringen av oppgave 2 gjorde det vanskelig for elevene å tolke oppgaven. Samtidig tyder funnene på at oppgave 2 ikke tar høyde for de ulike løsningsstrategiene som modelleringsopplegget legger til rette for i oppgave 1.

5 Diskusjon

Analysen av datamaterialet har gitt innsyn i faktorer fra undervisningsopplegget som virket avgjørende for elevers utvikling av ansats mot nye matematiske konsept i arbeidet med modelleringsopplegget. I tillegg har det kommet frem ulike kjennetegn ved modelleringsoppgaven, som av teoretisk grunnlag, er ansett som gunstig for elevers læringsutbytte. I motsetning har analysen også fremhevet ulike faktorer og kjennetegn ved oppgaven som kan hindre elevers utvikling av nye matematiske konsept, ved at flere elever ikke deltar aktivt i modelleringsopplegget.

I dette kapittelet vil det trekkes linjer mellom de presenterte funnene, samtidig som dette drøftes opp mot relevant teori og forskning. Først diskuteres funnene fra kapittel 4.1 og 4.4 sammen i et delkapittel. Deretter tar jeg for meg vanskelighetsgrad og interaksjon hver for seg.

5.1 Ulike løsningsstrategier og oppgaveformulering

<u>Ulike løsningsstrategier</u>

Som det kommer frem av analysen, bar oppgave 1 i modelleringsopplegget preg av at gruppene benyttet ulike løsningsstrategier. Således kan oppgave 1 anses som en “åpen oppgave”. Dette åpner opp for blant annet utforsking blant elevene, som kan sies å være en gunstig faktor i henhold til læringsteorien denne besvarelsen bygger på. Nærmere bestemt kan elevene utvikle løsningsstrategier som er grunngitt i deres egne, eller gruppens, kunnskapsgrunnlag (se kapittel 2.3.1). Dette innebærer, som funnene indikerer, at elevene kan utvikle, og resonnere ut ifra, en modell som er representert både som funksjon og graf. Dette tillater elevene å utvikle strategier med bakgrunn i begge representasjonene, gjerne den hvor elevene har sin styrke. “Guided reinvention” prinsippet som står sentralt i RME (se kapittel 2.2.1) bygger på at elevene skal oppdage noe som for dem er nytt, men som er kjent for lærer. Det nye kan selvsagt ikke oppdages ut ifra ingenting, det å åpne opp for at elevene kan utvikle ideer med bakgrunn i egen forkunnskap vil være styrke ved opplegget i så måte.
Men, som analysen også antyder, åpner også den åpne oppgaven opp for strategier som ikke er kjennetegn på utforskende arbeidsmåter. Den “formelle metoden”, som funnene indikerer at to av gruppene benytter seg av, vil være et eksempel i så måte. Her benyttes læreboken til å finne en bestemt løsningsstrategi, som deretter benyttes til å løse modelleringsoppgaven. I dette tilfellet er ikke arbeidsmåten utforskende, og det er heller ikke snakk om at elevene

reoppdager nye konsepter. I så måte vil ikke metoden samsvare med læringssynet i RME, og det vil begrense noe av læringspotensialet som utforskingen innebærer. Likevel vil metoden kunne åpne opp for utvikling av forståelse, spesielt hvis elevene er opptatt av å finne ut om hvorfor metoden fungerer, og ikke bare benytter den til å komme frem til løsningen. Analysen indikerer tilfeller av begge deler, der gruppe C sitt arbeid med oppgave 2 er et eksempel på førstnevnte (se kapittel 4.4), mens gruppe E sitt arbeid med oppgave 1 kan være et eksempel på sistnevnte (se kapittel 4.3.3). Viktig å påpeke at ikke all bruk av læreboken er noe som bryter med læringssynet i RME. Eksempelvis ble det også observert at noen elever benyttet seg av læreboken for å skaffe seg, eller vekke opp, det relevante kunnskapsgrunnlaget. Og på denne måten kunne løse oppgaven på en utforskende måte, men basert på "riktige" og relevante forkunnskaper.

De ulike løsningsstrategiene kan også ha et annet positivt aspekt ved seg, ved at elevene får innsikt i andre gruppers måte å løse problemet på. En måte å gjøre det på kan være en oppsummerende avslutning av undervisningsopplegget, hvor gruppene presenterer sine egne løsningsstrategier for de andre elevene. Dette ble også gjort i aktuell undervisningsøkt, uten at datamaterialet indikerer noe om betydningen av dette. I denne sekvensen kan likheter, forskjeller og styrker ved de ulike strategiene belyses. Samtidig kan lærer også vise frem andre ubenyttede metoder å løse oppgaven på. En slik oppsummering kan være med på å gi elevene økt innsikt i ulike måter å løse problemet på, og gjerne hjelpe dem å se sammenhenger mellom grafiske løsninger og løsninger grunngitt i funksjoner. Videre kan det også være med på fremme en holdning om at et matematisk problem kan løses på flere forskjellige måter, der den ene måten ikke nødvendigvis er noe bedre enn den andre. Sett opp imot det Schoenfeld skriver om elevers syn på matematikk (se kapittel 2.3.2), kan dette være et viktig budskap å få frem til elevene. Videre kan en slik oppsummering i etterkant være viktig for at elevene i klassen skal utvikle et felles fagspråk. Elevene har ulike forutsetninger, og utforskingen i modelleringsoppgaven vil derfor utvikle elevenes kompetanse i ulike retninger og til ulike nivåer. Oppsummeringen kan da bidra til at alle elevene oppnår et visst felles minimumsmål av matematisk utvikling.

<u>Formulering av oppgave</u>

Som det fremkommer av analysen i kapittel 4.4 var formuleringen av oppgave 2 et problematisk aspekt ved modelleringsoppgaven. I utformingen av oppgaven er jeg veldig bestemt på å lede elevene inn mot visse matematiske "oppdagelser", nemlig konseptet med grenseinntekt og grensekostnad, og at inntektsfunksjonen kan avhenge av etterspørselen. Konsekvensene av dette er, som funnene tyder på, at formuleringen gjør det vanskelig for elevene å tolke oppgaven, og da utfordringer med å danne et situasjonsbilde. Samtidig tar ikke oppgave 2 høyde for de ulike løsningsstrategiene som oppgave 1 åpner opp for, noe som blir tydeliggjort av observasjonene fra gruppe B (se kapittel 4.4). Læringsutbytte og mulighetene elevene har i oppgave 2, avgjøres altså mye på bakgrunn av hvordan de har løst oppgave 1. Ved at oppgaven 2 også forsøker å lede gruppene inn mot bestemte matematiske konsepter, er den også mer lukket enn oppgave 1. Dette åpner ikke opp for ulike løsningsstrategier i samme grad som oppgave 1, og elevene må da utvikle ideer ut ifra et mer bestemt kunnskapsgrunnlag. Det er da større sannsynlighet for at de aktuelle forkunnskapene ikke er en del av elevenes kunnskapsgrunnlag. Samtidig kan det vanskeliggjøre for elevene å vekke opp, eller gjøre de rette koblingene i, kunnskapsgrunnlaget sitt.

Til seinere bruk av dette modelleringsopplegget i undervisning, anser jeg oppgave 2 som den delen av opplegget med størst behov for korrigering. Formuleringen av oppgaven er kanskje det mest kritiske i så måte. I utgangspunktet er det ikke problematisk at elevene blir utfordret ved å danne seg et situasjonsbilde, som blir utfordringer med steg 1 i gjeldende modelleringssyklus. (Leiß et all) påpeker blant annet viktigheten med at elevene arbeider med alle delene av prossesen for å utvikle modelleringskompetanse (se kapittel 2.1). Men jeg mener at denne utfordringen ikke bør oppstå på bakgrunn av at elevene sliter med å forstå ordlyden i oppgaveteksten. Utfordringene elevene da opplever blir således et mer språklig anliggende, og tilhører kanskje ikke modelleringsprosessen i det hele tatt. Hvilke tilpasninger som burde gjøres, utover å forandre ordlyden i oppgaven, avhenger selvfølgelig av flere faktorer. Målsettinger for undervisningsøkten og hvilke elever som skal arbeide med opplegget, kan være viktig i så måte.

En mulig løsning er å fjerne oppgave 2 fra den skriftlige delen av modelleringsopplegget, og heller la lærer "guide" elevene til å utvikle egen modell i en retning som kan lede til oppdagelse de samme matematiske sammenhenger. Hvordan lærerens utfordring var viktig for gruppe B sin "modell av til modell for" utvikling, som ble beskrevet i kapittel 4.2.1, kan fungere som et eksempel i denne sammenheng. Mulighetene en slik løsning medfører er blant annet at hver gruppe kan få utfordringer og veiledning av lærer som er tilpasset deres løsningsstrategi spesifikt, og da også kunnskapsgrunnlaget til elevene. Opplegget kan da bli mer differensiert, på bakgrunn av at elevene kan få utvikle sin strategi, ut ifra eget kunnskapsgrunnlag. Elevene kan da bli “guidet” mot oppdagelse av nye matematiske sammenhenger av lærer, i motsetning til “å bli dratt” i en bestemt retning av ordlyden i oppgaven.

En slik måte å gjennomføre modelleringsopplegget på vil selvsagt avhenge mye av læreren. Lærer må evne å “guide” elevene mot oppdagelse av visse matematiske sammenhenger, men dette uten å “overta” oppgaven fra elevene. Samtidig må læreren klare å sette seg inn i de respektive gruppenes tankesett, for å best mulig kunne tilpasse veiledningen til hver enkelt gruppe. Deler av dette kan løses med gode forberedelser, der lærer kan planlegge for visse løsningsstrategier med utgangspunkt i oppgaven og ikke minst skaffe seg god innsikt i elevenes forkunnskaper. Lærer bør også ha klare målsettinger for hvilke matematiske sammenhenger hen ønsker å veilede elevenes oppdagelser mot. Likevel vil en slik måte også kreve en viss spontan dyktighet av lærer, da det også må gis god veiledning til grupper med løsningsstrategier som ikke kommer frem av lærerens forberedelser.

5.2 Vanskelighetsgrad

Analysen av datamaterialet kan tyde på at mange elever generelt hadde størst utfordringer knyttet til den horisontale matematiseringen i modelleringsopplegget. I kapittel 2.1 fremkommer det at elevenes modelleringskompetanse avgrenses av deres svakeste ledd i modelleringsprosessen (Leiß et al). I det aktuelle modelleringsopplegget kan det da tyde på at den horisontale matematiseringen var det svakeste leddet i modelleringskompetansen til flere av elevene. Det er da trolig at “det svakeste leddet” opptar mye av elevenes tid og fokus, slik at hoveddelen læringspotensialet til aktuelle elever vil være knyttet mot utvikling av kompetanse innen horisontal matematisering. Samtidig kan dette føre med seg mindre utvikling innen andre deler av modelleringskompetansen, som eksempelvis den vertikale matematiseringen.

<u>Forkunnskaper</u>

Analysen tyder generelt på at oppgaven var godt grunnfestet i elevenes faglige forutsetninger. En av fordelene med dette kan, som “elev 2” påpeker (se kapittel 4.3.1-1), være å motivere elevene til videre arbeid, på bakgrunn av at de finner noe gjenkjennbart i oppgaven. Sett opp mot det Schoenfeld skriver, som ble lagt frem i kapittel 2.3.1, ser det ut til relevant matematisk informasjon og verktøy var en del av kunnskapsgrunnlaget til elevene.

Et unntak som framkom av analysen i denne sammenheng, kan ha vært utfordringen tilknyttet forskjellen på kostnad og utgift som gruppe C fremhevet i intervjuet (se kap 4.3.1-1). Det er en viss forskjell på de to begrepene, der utgift er en utbetaling i tilknytning til en vare eller tjeneste, mens kostnad omhandler om økonomisk forbruket av respektive varer og tjenester. Det funnet likevel belyser er at jeg ikke har reflektert over denne forskjellen i utformingen av modelleringsopplegget. Innsikt i forskjellen mellom de to begrepene ble da ikke ansett som nødvendige forkunnskaper for å kunne forstå informasjonen i oppgaveteksten, noe som antageligvis også er tilfellet dersom elevene ikke blir oppmerksom på dette. Men som intervju utdraget tyder på, kan forståelsen av forskjellen mellom de to begrepene bli en del av forkunnskapene elevene føler er nødvendig for å kunne arbeide med oppgaven. Nå er det ikke negativt dersom vanskelighetene elevene her opplever fører til økt innsikt i de to begrepene. Men det viser at det, i utformingen av modelleringsopplegg, er viktig å være bevisst på hvilket ord og begreper man benytter seg av i oppgaveteksten.

Funnene fra kapittel 4.3.1-2 indikerer at elevene hadde større utfordringer med bakgrunn i forkunnskaper i tilknytning til matematisk modellering. Nærmere bestemt så dette ut til å gjelde overgangene mellom virkeligheten og matematikk, og da gjerne spesielt den horisontale matematiseringen. Knyttet opp mot det Schoenfeld skriver (se kapittel 2.3.1) er ikke utfordringen for elevene at de relevante matematiske konseptene ikke er en del av deres kunnskapsgrunnlag. Utfordringene ser da ut til å være å se sammenhengen mellom informasjonen fra oppgaveteksten og de matematiske verktøyene som elevene besitter. Noe som igjen kan gi dem vanskeligheter med å velge ut relevant informasjon som skal matematiseres. I neste delkapittel går jeg nærmere inn på hvordan elevene kan ha opplevd disse utfordringene som en svakhet ved opplegget. Personlig ser jeg utfordringene innen den horisontale matematiseringen som et aspekt ved oppgaven med stort læringspotensial. I kapittel 2.1 fremkommer det at dette, ifølge Blomhøj, er ferdigheter som inngår i modelleringsprosessen, men som ikke må være tilegnet i forkant av modelleringsarbeidet. Dette er derimot ferdigheter elevene kan utvikle gjennom arbeid med matematisk modellering (Blomhøj, 2003; Leiß et al, 2010). Nærmere bestemt kan elevene da få trening i å velge ut relevant informasjon fra situasjonen som modelleringsopplegget beskriver. Videre kan trening med å koble de relevante matematiske verktøyene med situasjonen som modelleringsopplegget beskriver, gi elevene mulighet til å se informasjonen i kunnskapsgrunnlaget sitt i nye sammenhenger. På den måten kan elevene videreutvikle og lage nye forbindelser i eget kunnskapsgrunnlag. Noe som kan være viktig med bakgrunn i at kunnskapsgrunnlaget til elever fremkommer som mentale representasjoner som gjerne ikke er fullstendige (Schoenfeld, 2016).

Modelleringsoppleggets omfang

Av analysen fremkommer det at mengden informasjon muligens var den enkeltfaktoren ved modelleringsopplegget som elevene var mest kritisk til. I så måte kan det se ut til at flere av elevene anså dette som en svakhet ved opplegget. Mye av teksten i oppgaven tjener først og fremst den hensikt å gi elevene et logisk og realistisk situasjonsbilde. Det samme kan sies om figur 1 og 2 i modelleringsoppgaven, se vedlegg 1. I så måte er det fullt mulig å korrigere opplegget til en versjon med mye mindre informasjon, men med det “samme problemet” som elevene skal finne ut av. Dette vil i så fall endre premisset for oppgaven og problemet vil selvsagt ikke være det samme, da det å skille relevant og irrelevant informasjon er en del av problemet. Men den horisontale matematiseringen vil da kunne oppleves som enklere for mange av elevene, ved at det er mye mindre informasjon å velge mellom i prosessen der informasjon skal oversettes til matematikk. Men dette vil trolig også medføre at mye av læringspotensialet knyttet til den horisontale matematiseringen vil forsvinne. Samtidig vil det kunne påvirke i hvilken grad problemet oppleves som “realistisk”, som ansees som en viktig faktor i matematisk modellering (se kapittel 2.1 og 2.2).

Hvorvidt mengden informasjon var en svakhet eller ikke, mener jeg er et spørsmål hvis svar ligger i målsetningen i undervisningssituasjonen modelleringsopplegget benyttes i. Dersom målsettingen for undervisningsøkten ligger i den vertikale matematiseringen, vil jeg hevde mengden informasjon er en svakhet ved modelleringsopplegget. Men da kan det også diskuteres om hvorvidt matematisk modellering er den best egnede undervisningsformen, uten at jeg går videre inn på akkurat det i denne besvarelsen. Om målsettingen derimot er at elevene skal utvikle modelleringskompetanse, enten dette er horisontal matematisering, flere deler av modelleringskompetansen, eller deres svakeste ledd spesifikt, mener jeg at informasjonen bør inngå i oppgaven. Dette ekskluderer ikke læringsutbytte innen eksempelvis vertikal matematisering, noe gruppe B er et eksempel på i denne sammenheng. Men for elevene med horisontal matematisering som sitt svakeste ledd i modelleringskompetansen, vil mengden informasjon være med på å spisse læringspotensialet i respektiv undervisningsøkt mot utvikling innen horisontal matematisering. Grunngitt i det ovenforstående kan da mengden informasjon ha vært en differensierende faktor ved modelleringsopplegget, ved at det tillater elevene å fokusere arbeidet mot den delen av modelleringskompetansen de opplever som mest utfordrende i aktuelt modelleringsopplegg.

Likevel tyder funnene fra analysen på at mengden informasjon kan ha vært en avgjørende faktor for at flere elever ikke deltok aktivt i modelleringsarbeidet. Noe som selvsagt er en uheldig situasjon, da disse elevene ikke har samme mulighet til å oppnå noe av det læringspotensialet som ligger i modelleringsoppgaven. Sett ut ifra dette ståstedet vil mengden informasjon være en svakhet ved opplegget. Årsaken til at flere elever gir opp, og at mange elever kanskje anså mengde informasjon som en svakhet ved modelleringsopplegget, kan være knyttet til Schoenfeld sin forklaring om elevers syn på matematikk (se kapittel 2.3.2). Et vanlig syn som nevnes er blant annet at et matematisk problem skal kunne løses på kort tid, gjerne mindre enn fem minutter, dersom man har forstått matematikken. I det aktuelle modelleringsopplegget vil bare det å lese og tolke oppgaven overgå denne tiden. For å komme frem til en løsning på oppgave 1, ser vi gjerne på et tidsbruk på flere timer for de fleste elever. En konsekvens som Schoenfeld drar frem er at mange elever gir opp lenge før de når så langt, til tross for at de gjerne har potensialet til å løse problemet. Jeg skal ikke ta for meg å knytte undervisningsopplegget opp mot alle de vanlige synspunktene elever har om matematikk, som Schoenfeld nevner i kapittel 2.3.2. Men ser man på analysen av undervisningen, kan det se ut til at modelleringsopplegget bryter med tilnærmet samtlige av dem.

Som det fremkommer av kapittel 2.3.2 vil, ifølge Schoenfeld, læringsmiljøet som lærer former være avgjørende for hvilke holdninger elevene har til matematikk. Elevene sitt syn på matematikk vil da formes av hvilket læringsmiljø de har vært en del av gjennom sin skolegang. Undervisningsopplegg innen matematisk modellering og problemløsning generelt, kan da være viktige virkemidler for å fremme et syn på matematikk som problemløsning. Det er likevel helt urealistisk at et undervisningsopplegg skal kunne forme disse holdningene alene. Da må denne type opplegg inngå som en integrert del av matematikkundervisningen. For dem som ønsker å fremme elevers syn på matematikk som problemløsning, vil fagfornyelsen, og de nye læreplanene i matematikk spesifikt, være et steg i riktig retning i så måte, uten at jeg går videre inn på akkurat dette. For mer enkeltstående modelleringsopplegg tror jeg det er viktig å forberede elevene på hva de nå skal arbeide med. Elevenes forventninger kan da samsvare med oppgaven de arbeide med i større grad. Dette ved at de blir forberedt på at problemet de nå skal løse vil være tidkrevende, det har ikke noen fast fremgangsmåte og heller ikke et fasitsvar. Dette var noe som også ble gjort i aktuelt undervisningsopplegg.

Problemet med aksene

Funnene i kapittel 4.3.3 indikerer at det "å utsette" elevene for "problemet med aksene" var et kjennetegn ved modelleringsopplegget. Situasjonene som oppstod i henholdsvis gruppe A, C og E, kan tyde på at dette problemet medførte et visst læringspotensial, spesielt innen modelleringskompetanse. Dette ved at gruppene ser ut til å utvikle bedre innsikt i sammenhengen mellom modellen de benytter og den virkelighet den beskriver. Ved gruppe A og C kom dette til uttrykk med større forståelse av forenklingene som er gjort med enhetene på aksene, og hvilken betydning disse får for modellen de utformer. Mens for gruppe E ser problemet ut til å lede elevene til å gjøre en antagelse om maksimal produksjon, og videre til å vise forståelse for hvilken begrensning denne antagelsen ligger på løsningen i oppgaven.

Samtidig tyder også funnene på at det å møte på problemet, ikke nødvendigvis var nok til å lede elevene inn mot nye oppdagelser alene. For to av gruppene virket lærerens guiding avgjørende i denne sammenheng. Likevel ligger kanskje den mest interessante forskjellen mellom de ulike gruppene i hvilke matematiske representasjoner de benyttet i modellen sin. Analysen i kapittel 4.3.3 antyder at de grafiske representasjonene av inntekt og utgift som gruppe A og C benytter seg av, var avgjørende for deres oppdagelser tilknyttet enhetene på aksene. Gruppe E gjør tilsynelatende ikke de samme oppdagelsene, og funnene kan tyde på at dette har en sammenheng med fraværet av en grafisk representasjon for inntekten. Funnene fra "modelleringsskjemaet" til gruppen viser også at gruppen selv fant det problematisk at de ikke hadde en graf for inntekten.

Som det kommer frem av kapittel 2.3.1, mener Schoenfeld at årsaken til at elever ikke benytter seg av mulige strategier, i utgangspunktet kan ha to mulige forklaringer. Den ene er at strategien, å benytte en grafisk representasjon for inntekt i dette tilfellet, ikke er en del av kunnskapsgrunnlaget til elevene. Andre forklaringen omhandler at elevene simpelthen overser strategien, og da ikke klarer å se de rette sammenhengene i de matematiske verktøyene som elevene besitter. Med bakgrunn i at elevene, gjennom "modelleringsskjemaet", uttrykker at de savner en graf for inntekten, tolker jeg det slik at det for denne gruppen trolig er snakk om et tilfelle av sistnevnte forklaring. At elevene i denne gruppen ikke klarer å koble de rette sammenhengene i kunnskapsgrunnlaget sitt, kan ha en sammenheng med løsningsmetoden de benyttet seg av. Som analysen i kapittel 4.1 og 4.3.3 indikerer, benytter gruppen seg av den såkalte “formelle metoden”, og ønsker å finne en løsning på oppgave 1 ved å benytte likningen I’(x)=U’(x) direkte. Det er da en mulighet for at når elevene finner denne likningen i læreboken direkte, for så å benytte den for å løse problemet de står overfor, så hopper de over mange ledd i prosessen som kunne blitt inkludert om de heller utviklet strategien ut ifra eget kunnskapsgrunnlag. Noen av disse leddene kunne da medført å utforme en grafisk representasjon for inntekten, og da muligens også noen av de positive aspektene denne representasjonen kan se ut til å føre med seg. En alternativ forklaring er at gruppen i utgangspunktet har forsøkt å løse modelleringsoppgaven basert på egne forkunnskaper, men har fått utfordringer knyttet til “mangel” av en graf for inntekten. Således kan det tenkes at elevene da har søkt til NDLA for å finne en løsningsstrategi som ikke krever bruk av en grafisk representasjon. Og på den måten finne en løsningsstrategi som passer med den informasjonen de har tilgjengelig. Uavhengig av forklaring kunne nok gruppen hatt større læringsutbytte av modelleringsopplegget, dersom de hadde benyttet seg av en grafisk representasjon for inntekten. Situasjonen viser at det som lærer kan være viktig å ha innsikt i hvilke representasjoner elevene benytter seg av i sine modeller. Og da samtidig være beredt til å guide dem inn mot bruk av andre representasjoner, dersom disse kan være med å fremme læringsutbytte i aktuell undervisningssituasjon. Dette underbygges av Freudenthals sitat i kapittel 2.2.4 der det understrekes at lærerens guiding bør innebære å lede elevene utenom blindveier, men å styre deres utforsking mot «living roots».

5.3 Interaksjon

Analysen av undervisningsopplegget indikerer at modelleringsopplegget la til rette for interaksjon mellom elevene. Med bakgrunn i læringssynet i RME (se kapittel 2.2) der matematisk kunnskap sees på som et produkt av menneskers sosiale aktivitet, kan dette ansees som en styrke ved opplegget. Det tydeligste funnet fra undervisningssituasjonen som indikerer at interaksjon var avgjørende for elevers utvikling av kunnskap, stammer fra observasjonene av gruppe B beskrevet i kapittel 4.2.1. Her fremkommer det at samtalen kan ha vært avgjørende for den nye kunnskapen som utvikles. Dette ved at elevene fikk prøvd ut egne ideer i gruppen, samtidig som de fikk innsikt i andre elevers tankesett. Videre så dette ut til å medføre at elevene resonnerte rundt de ulike ideene som ble lansert i gruppen, og på den måten utviklet egen kunnskap. Sett opp imot kunnskapsgrunnlaget, som Schoenfeld skriver om (se kapittel 2.3.1), kan samtalen her bidra til at elevene får “vekke opp” de rette sammenhengene i kunnskapsgrunnlaget sitt, ved at de får innsikt i andre elevers tanker. Videre tillater resonneringen som samtalen medfører, at elevene kan videreutvikle eller korrigere eget kunnskapsgrunnlag. Dette ved at de ulike ideene elevene lanserte ble bygget videre på, men også utsatt for kritikk. Sistnevnte kan være spesielt viktig da kunnskapsgrunnlaget, i henhold til Schoenfeld, både kan være ufullstendig og inneholde feil og misoppfatninger.

Funnene fra dette delkapittelet indikerer at samtalen mellom elevene i utgangspunktet fører elevene til en uformell strategi, der den grafiske modellen i hovedsak blir benyttet til å støtte elevenes resonnering mot det spesifikke problemet de står overfor (se kapittel 2.2.3). Den grafiske modellen er på dette tidspunktet en modell **av** situasjonen, og elevene er befinner seg på referansenivået i "the level theory of learning". Det er først etter dialogen med lærer at aktiviteten i gruppen retter fokus mot de matematiske relasjonene som inngår i modellen. Lærer utfordrer her gruppen til å finne en måte å si sikkert at de har funnet den største grafiske avstanden mellom I(x) og U(x). Som vist av analysen, virker denne "guidingen" fra lærer til å styre samtalen i gruppen mot å verifisere egen modell på et matematisk grunnlag. Den videre samtalen innad i gruppen virker igjen å være avgjørende for bruken av parallelle tangenter, som er det matematiske grunnlaget gruppe B gir for løsningen av oppgave 1. Som det kommer frem av analysen i kapittel 4.2.1 tyder forklaringen fra "modelleringsskjemaet" at gruppen ikke lenger avhengig av situasjonsbildet i oppgaven, men benytter modellen til matematisk resonnering. Gruppen befinner seg da på det tredje aktivitetsnivået, "the general level", hvor modellen virker som en modell **for** matematisk argumentasjon. Av dette har samtalen, både internt mellom elevene og mellom elevene og lærer, vært en avgjørende faktor for "modell av til modell for" overgangen i gruppe B. Som utdypet i kapittel 2.4 indikerer denne utviklingen i aktivitetsnivå at elevene i gruppe B har utviklet ansats mot nye matematiske konsept i modelleringsarbeidet.

Men som analysen kan tyde på, var det flere grupper som bar preg av mindre faglig interaksjon enn i gruppe B, ved at flere elever ikke deltok i gruppearbeidet. Beskrivelsene gjort av gruppe C og D i kap 4.2.2 kan være med på å illustrere dette poenget. Som antydet tidligere, kan noe av forklaringen på dette ligge i vanskeligheter med den horisontale matematiseringen. Likevel antyder funnene fra gruppe D at det, spesielt for denne gruppen, også var andre årsaker til at elever ikke deltok aktivt i modelleringsarbeidet. I aktuell gruppe kom det frem at to elever som ikke deltok nevneverdig den første økten, mestret arbeidet med modelleringsoppgaven på en god måte i den andre økten. Det er flere aspekter å ta i betraktning ved situasjonen i denne gruppen. Den ene er at de to elevene tilsynelatende deltok i idemyldringen i starten av modelleringsarbeidet. Det kan tenkes at de to respektive elevene har hatt stort utbytte av de innledende samtalene. I denne sekvensen kan gruppen gjort flere avklaringen rundt det som kanskje var det mest kritiske aspektet ved oppgaven, nemlig den horisontale matematiseringen. I så måte kan deltakelsen de to elevene hadde innledningsvis, gitt dem bedre forutsetninger til å gjennomføre modelleringsopplegget i den andre økten. Samtidig er det også en mulighet at elevene også har hatt faglig utbytte av den sekvensen i økt 1 som de ikke deltok i. Dette ved at de har fått innsikt i arbeidet som er gjort, selv som passive deltakere.

Observasjonene indikerer ikke nøyaktig hva som er årsaken til at de to elevene ikke deltar aktivt i gruppearbeidet den første økten, bortsett fra at det ikke har noe med deres forutsetninger for å delta. Det er mange mulige forklaringer på hvorfor den uheldige situasjonen oppstår. Noen forklaringer kan ligge i faktorer som kunne vært forebygget i planlegging og gjennomføring av undervisningen, mens andre forklaringer kan ligge i mer uforutsette faktorer som er vanskelig å ta høyde for. Eksempler på sistnevnte kan være ulike hendelser i nær fortid eller framtid, som "stjeler" de respektive elevenes fokus bort i fra modelleringsoppgaven. Når det gjelder førstnevnte kan en mulig forklaring ligge i gruppesammensetningen. Var modelleringopplegget utformet på en slik måte at det var vanskelig å gjennomføre oppgaven som et gruppearbeid i samarbeid mellom fire elever? Kunne det da vært mer gunstig å gjennomføre undervisningen med færre elever i hver gruppe? Følte eleven seg trygge nok, faglig og sosialt, i gruppen til å bidra med faglige innspill? Som påpekt tidligere, sier ikke datamaterialet ikke noe spesifikt vedrørende dette. Men om jeg skulle fortsatt arbeidet med denne studien i en større sammenheng, er dette et aspekt jeg antageligvis hadde forsøkt å få bedre innsikt i.

6 Avsluttende konklusjon

Utgangspunktet for denne besvarelsen var å se nærmere på hvordan elever kan utvikle forståelse av matematiske sammenhenger i arbeid med modelleringsoppgaver. Problemstillingen jeg skal besvare er: *Hvordan matematisk modellering kan stimulere til å bygge ansats til "nye matematiske konsept"*.

Fra det teoretiske grunnlaget, undersøkelsene fra undervisningen og analysen av datamaterialet kom det frem fire kategorier som virket å påvirke hvordan og hvorvidt matematisk modellering stimulerte til å utvikle dypere innsikt innen matematiske sammenhenger. Det er her viktig å understreke at det finnes mange ulike faktorer i undervisningen, som ikke kommer frem i denne besvarelsen, men som likevel kan ha betydning i denne sammenheng. De fire kategoriene er henholdsvis «ulike løsningsstrategier», «vanskelighetsgrad», «interaksjon» og «formulering av oppgaven». Innenfor hver kategori kom det frem ulike faktorer og kjennetegn ved oppgaven som virket å ha innvirkning opp imot problemstillingen i besvarelsen. Dette ved at de enten var gunstig for elevers utvikling av nye matematiske konsept, eller ved at de i motsetning også kunne hemme denne utviklingen. Som påpekt tidligere er det ikke noe klart og tydelig skille på disse kategoriene, slik at enkelte av faktorene gjerne inngikk i flere av kategoriene.

En av faktorene som synes viktig for elevers utvikling av matematiske konsept, var å bygge på elevenes faglige forkunnskaper. Dette på bakgrunn av at det tillater elevene å utvikle nye matematiske ideer og se nye matematiske sammenhenger. Samtidig påpekes det, i kapittel 2.3.1, at elevenes forkunnskaper både kan være ufullstendige og inneholde feil og misoppfatninger. Det å aktivere disse forkunnskapene gir da elevene muligheter til å både komplementere og videreutvikle disse forkunnskapene. Analysen i kapittel 4.3.1 indikere at modelleringsopplegget gjennom oppgave 1, generelt sett, lykkes med akkurat det å bygge på elevenes faglige forkunnskaper. Likevel fremkommer det også at det å bygge på elevenes forkunnskaper aleine, ikke er nok til å aktivisere elevenes forkunnskaper.

Av diskusjonen i kapittel 5.1 argumenteres for hvordan det å gi rom for ulike løsningsstrategier var en viktig faktor i denne sammenheng. De ulike fremgangsmåtene elevene kan velge mellom gir da større muligheter for å utforske rundt sine egne forkunnskaper, av den grunn at det finnes flere deler av kunnskapsgrunnlaget de kan spille på. Elevene har da et mye bredere utvalg av forkunnskaper som kan aktiveres i møte med problemet de står overfor. Funnene fra analysen viser hvordan de ulike gruppene benytter seg av forskjellige løsningsstrategier i oppgave 1 av modelleringsopplegget. Innbefattet i dette utviklet gruppene modeller basert på en kombinasjon av representasjoner i form av graf og funksjonsuttrykk. Men gruppene varierte i hvilken grad utforskingen og resonneringen var vektet i funksjonene, grafene eller i en kombinasjon av begge. Dette tillater elevene å spille på den representasjonen hvor de har sin styrke, men også å se sammenhengen mellom de ulike representasjonene.

For å utvikle nye matematiske konsept eller å se forkunnskapene i nye sammenhenger, virket også den situasjonen som ble beskrevet i oppgaven avgjørende. Som analysen viser ga informasjonen i oppgaven, og den situasjonen den beskrev, elevene utfordringer med å koble den virkelige verden med de matematiske verktøyene de hadde til rådighet. Analysen kan tyde på at det var i nettopp den horisontale matematiseringen, som oppsto som en konsekvens av mengden informasjon i oppgaven, at det største læringspotensialet var for majoriteten av elevene som deltok i denne studien. Funnene indikerer at årsaken til at det nettopp var her det var størst læringspotensial, har en sammenheng med elevenes forkunnskaper innen matematisk modellering. Liten erfaring med modelleringsoppgaver gjør da at den horisontale matematiseringen var det svakeste leddet i flere av elevenes modelleringskompetanse, som igjen så ut til å medføre at hovedfokuset for aktuelle elever lå i nettopp denne delen av prosessen. I kapittel 5.2 belyses det spesifikt hvordan dette fokuset kan gi elevene trening i å koble relevant informasjon fra oppgaveteksten med relevante matematiske verktøy fra kunnskapsgrunnlaget sitt. Opp imot problemstillingen er dette gunstig da det gir elevene muligheten til å videreutvikle og lage nye forbindelser i eget kunnskapsgrunnlag. Samtidig vil det være med på å utvikle elevenes kompetanse innen horisontal matematisering spesifikt.

Men situasjonen som ble beskrevet i oppgaven, og mengden informasjon den inneholdt, fremkom også som et problematisk aspekt ved opplegget. Det argumenteres for hvordan flere elever kan ha ansett dette som en svakhet ved opplegget. Basert på læringspotensialet mengden informasjon kan medføre, vil det ikke være en svakhet ved modelleringsopplegget. Men i kapittel 5.2 argumenteres det for hvordan dette kan ha vært en avgjørende faktor for at flere elever ikke deltok aktivt i gruppearbeidet. Noe som helt klart er en uheldig situasjon. Diskusjonen peker på at forklaringen på dette kan ligge i at modelleringsoppgaven bryter med flere av, ifølge Schoenfeld (2016), de vanlige synene elever har på matematikk. Modelleringsopplegget samsvarer da ikke med forventningene elevene har til matematiske oppgaver. I enkeltstående tilfeller drøftes det hvordan å forberede elevene på at opplegget kommer til å være annerledes fra hva de er vant med, kan være et forebyggende tiltak. I det lengre løp derimot, påpeker Schoenfeld at elevenes syn på matematikk formes av læringsmiljøet læreren skaper. Dette læringsmiljøet bør da, i henhold til teorien denne studien bygger på, fremme et syn på matematikk som problemløsing, der problemene både kan være tidkrevende, ha ulike fremgangsmåter og ikke har noe fasitsvar.

Et annet problematisk aspekt ved modelleringsopplegget, som kom frem av analysen, var oppgave 2. I utformingen av denne oppgaven er jeg mye mer bestemt på å lede elevene inn mot bruken av gitte matematiske konsepter. Funnene tyder på at konsekvensene av dette er at formuleringen av oppgaven blir vanskelig å tyde for elevene, samtidig som oppgaven ikke tar høyde for de ulike løsningsstrategiene som oppgave 1 åpner opp for. Ved å lede elevene inn mot mye mer bestemte matematiske konsept, begrenser det deres mulighet til å utvikle forskjellige løsningsstrategier. Fordelen den åpne formuleringen i oppgave 1 gir med at elevene lettere kan bygge på egne forkunnskaper, blir da ikke gjeldende for oppgave 2 der elevene må bygge på mye mer bestemte forkunnskaper. Formuleringen av oppgaven ansees da som avgjørende i henhold til problemstillingen i studien. Der den åpne formuleringen i oppgave 1 av modelleringsopplegget, av analysen kan se ut til å fremme elevenes utvikling av nye matematiske konsept. Kan i motsetning den lukkede formuleringen i oppgave 2 se ut til å ha begrense elevenes muligheter til nettopp dette.

Gruppe B var en av gruppene som påbegynte arbeidet med oppgave 2, og det er funnene fra denne gruppen spesifikt som belyser hvordan oppgave 2 ikke tar høyde for mangfoldet av løsningsstrategier i oppgave 1. I analysen i kapittel 4.2.1 fremkommer det hvordan denne gruppen gjennomgår en «model av til modell for» overgang i arbeidet med modelleringsopplegget. Funnene indikerer her at overgangen tar elevene fra uformell strategi der elevene først benytter modellen til å resonere over den spesifikke situasjonen de står overfor, til å utvikle modellen til bruk for matematisk argumentasjon. Utviklingen i aktivitetsnivåene elevene her gjennomgår i «the level theory of learning» (se kapittel 2.2.3) er sterkt knyttet til hvordan matematisk utvikling skjer i henhold til RME. Og vil da være et eksempel på hvordan disse elevene bygget ansats til nye matematiske konsept i denne studien. Analysen tyder på at denne gruppen, allerede i arbeidet med oppgave 1, langt på vei har bygget ansats mot konseptene oppgave 2 mente lede dem inn på. Funnene tyder på at to faktorer var spesielt avgjørende for utviklingen i denne gruppen. Den ene var interaksjonen i gruppen, der elevene til stadighet lanserte ideer for hverandre. Elevene fikk da mulighet til å prøve ut egne ideer og samtidig innsikt i andres. Resonneringen rundt de ulike innspillene virket da avgjørende for den nye kunnskapen som ble utviklet.

Den andre faktoren som, av funnene i analysen, virket avgjørende for utviklingen i gruppen var lærerens guiding. Det er først når læreren gir elevene en utfordring, som var tilpasset deres løsningsstrategi spesifikt, at samtalen i gruppe B skiftet fokus til å omhandle de matematiske relasjonene som inngår i modellen. Det fremkommer også andre funn fra analysen som indikerer at veiledningen fra lærer var avgjørende for utviklingen som skjedde i andre grupper. Med bakgrunn i dette diskuteres det i kapittel 5.1 for hvordan en alternativ løsning til den ledende formuleringen av oppgave 2, kan være å heller la læreren guide elevene videre i utviklingen av gruppens modell. I stedet for «å bli dratt» i en bestemt retning av ordlyden i oppgave 2, kan da lærer veilede elevene til videre utvikling basert på løsningsstrategien de har benyttet seg av.

6.1 Veien videre

I denne studien er det gjort funn viser hvordan ulike faktorer innen fire kategorier kan være avgjørende for hvordan matematisk modellering kan stimulere til å bygge ansats til nye matematiske konsept. I arbeidet med oppgaven har jeg også blitt mer nysgjerrig på hvilke andre aspekter som kan være avgjørende når matematisk modellering benyttes som undervisningsmetode. Samtidig anser jeg det også som interessant å gå enda dypere inn i noen av aspektene jeg har sett på i denne oppgaven. Gjerne ved å snevre inn fokus og studere ett aspekt mer spesifikt.

Et område som «gnager» ved meg spesifikt etter denne studien, er de elevene som ikke deltok aktivt i modelleringsarbeidet. Funn fra studien indikerer at måten mengden informasjon i oppgaveteksten var med på å vanskeliggjøre den horisontale matematiseringen kan ha vært avgjørende i denne sammenheng. Likevel kan funnene fra gruppe D, med de to elevene som ikke deltok aktivt i gruppearbeidet den første økten, tyde på at hele forklaringen ikke nødvendigvis ligger i mengden informasjon. Innsikt i faktorer som er avgjørende for elevdeltakelse i gruppearbeid og matematisk modellering, er da et aspekt jeg er spesielt interessert i å studere videre.

Inn i læreryrke vil jeg ta med meg det jeg har lært i denne studien og benytte matematisk modellering i undervisningen. For å utvikle egen kompetanse innen bruk av matematisk modellering som undervisningsmetode, kan jeg som lærer gjennomføre aksjonsforskning. Da har jeg mulighet til å studere andre aspekter enn de som fremkom av denne studien, samtidig som jeg kan få dypere innsikt i noen av aspektene som fremkom i denne besvarelsen.

7 Kildeliste

- Blomhøj, M. (2003) Modellering som undervisningsform. I Skovsmose, O., & Blomhøj, M. *Kan det virkelig passe? om matematiklæring* (s. 51-71). København: L&R Uddannelse.

- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Red), *Mathematical modelling ICTMA 12: education, engineering, and economics* (s. 222- 231)

- Blum, W. (2015). *Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?*. I: Cho S. (red) The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. Springer, Cham. Hentet fra: https://core.ac.uk/download/pdf/81522786.pdf (21.10.2019)

- Blum, W. (1993). *Mathematical modelling in mathematics education and instruction*.

- Fekjær, S. B. (2016). *Statistikk i praksis* (1. utg). Oslo: Gyldendal Akademisk

- Freudenthal H (1983) Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel, Dordrecht

- Freudenthal H (1991) Revisiting mathematics education. China lectures. Kluwer, Dordrecht

- Gold, R. L. (1958). Roles in sociological field observations. Social forces, s. 217-223.

- Gravemeijer, K., & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (s. 145-169): Springer.

- Harboe, Thomas (2006) “Kap. 4: Kvalitative og kvantitative metoder”. I Indføring I samfundsvidenskabelig metode. Frederiksberg: Forlaget Samfundslitteratur, s. 31-39

- Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). Det kvalitative forskningsinterview som håndværk (3. ed.). Oslo: Gyldendal Akademisk Forlag.

- Leiß, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R. & Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling—Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 119-141. Hentet fra: https://doi.org/10.1007/s13138-010-0006-y

- Onwuegbuzie, A. J. & Johnson, R. B. (2006). The validity issue in mixed research. Hentet fra: https://www.researchgate.net/publication/228340166_The_Validity_Issues_in_Mixed_Research

- Pew Research Center. (2020) Questionnaire design. Hentet fra: https://www.pewresearch.org/methods/u-s-survey-research/questionnaire-design/

- Postholm, M. B. (2005) “*Observasjon som redskap i kvalitativ forskning på praksis*”. I Norsk pedagogisk tidsskrift årgang 89, s. 146-158

- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). Journal of Education, 196(2), 1–38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

- Skott, J., Hansen, H. C., & Jess, K. (2008). Delta: fagdidaktik. Denmark: Forlaget Samfundslitteratur.

- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. An International Journal, 12, 151-169.

- Utdanningsdirektoratet. (2018). *Siste utkast til kjerneelementer I matematikk fellesfag og programfag*. Hentet fra: https://hoering.udir.no/Hoering/v2/197?notatId=358

- Utdanningsdirektoratet. (2019). *Dybdelæring*. Hentet fra: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

- Van den Heuvel-Panhuizen, M.V. (2003). The Didactical Use of Models in Realistic Mathematics Education: An Example from a Longitudinal Trajectory on Percentage. Hentet fra: http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/2003_heuvel_panhuizen_model.pdf (14.01.2020)

- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014) Didactical Phenomenology (Freudenthal). In: Lerman S. (red) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Dordrecht

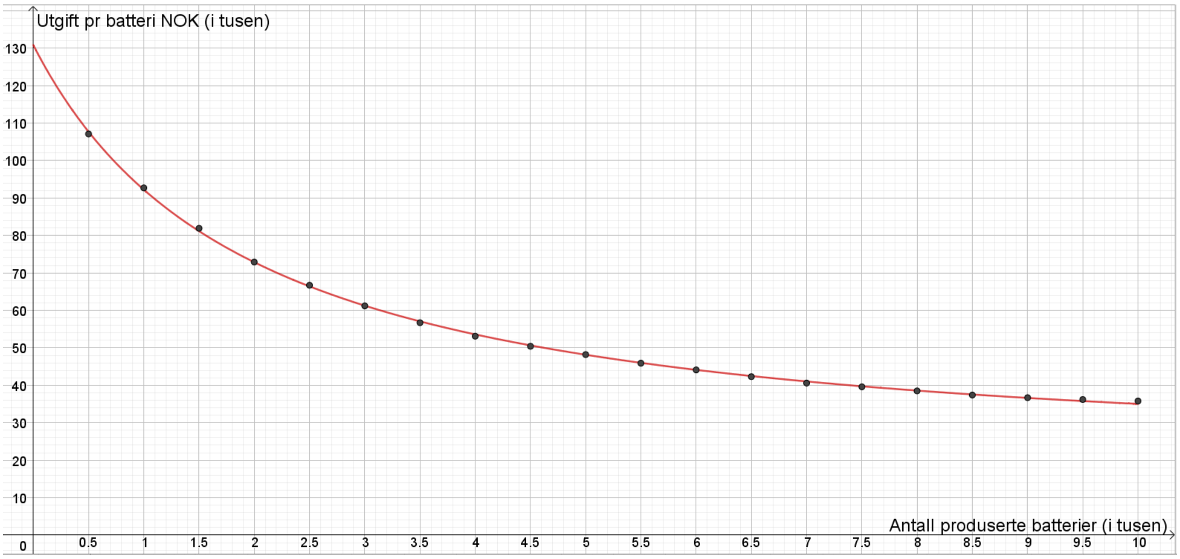
8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1: Modelleringsopplegget

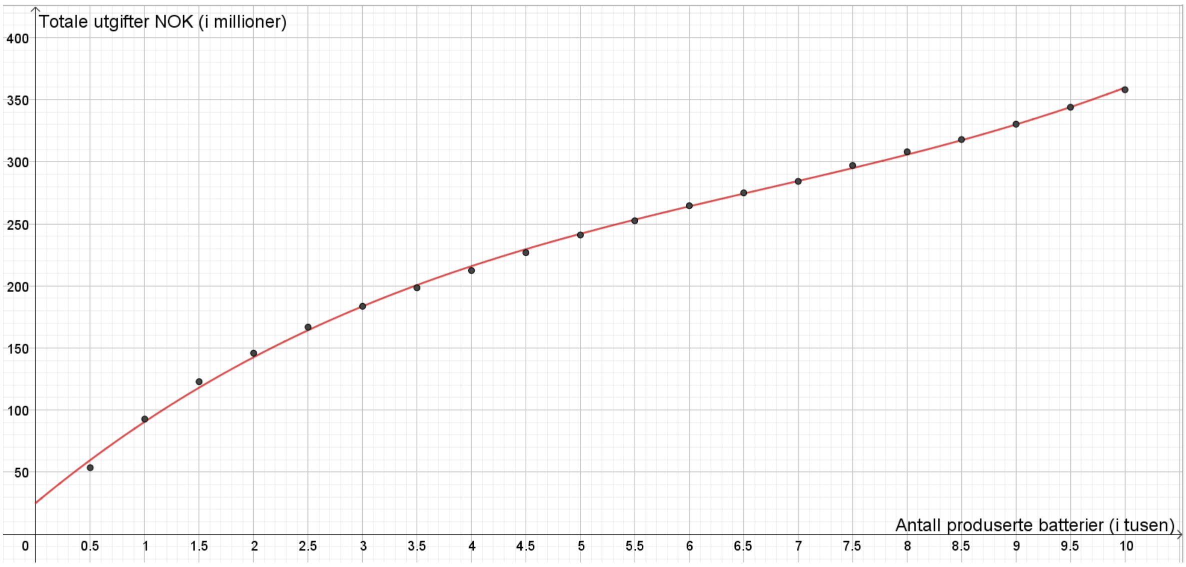
Batteriproduksjon til elbiler

En bedrift produserer årlig 10 000 batterier til elbiler. Til produksjonen trengs det blant annet store mengder av de dyre grunnstoffene litium, kobolt og nikkel. Samtidig krever produksjonen store mengder strøm, noe som er utfordrende da strømprisene i landet er markant høyere om dagen enn om natten. Dette har ført til at bedriften fram til nå kun har hatt produksjon 12 timer hvert døgn (om natten). Grunnet høy etterspørsel av elbiler verden over ser bedriften nå på mulighetene for å øke produksjonen. Bedriften har produsert batterier over en lengre tidsperiode og har derfor god oversikt over kostnadene tilknyttet produksjonen. Dere finner en oversikt over utgiftene til bedriften i figurene under.

Figur 6: Punktene og grafen viser antatt kostnad per batteri bedriften produserer

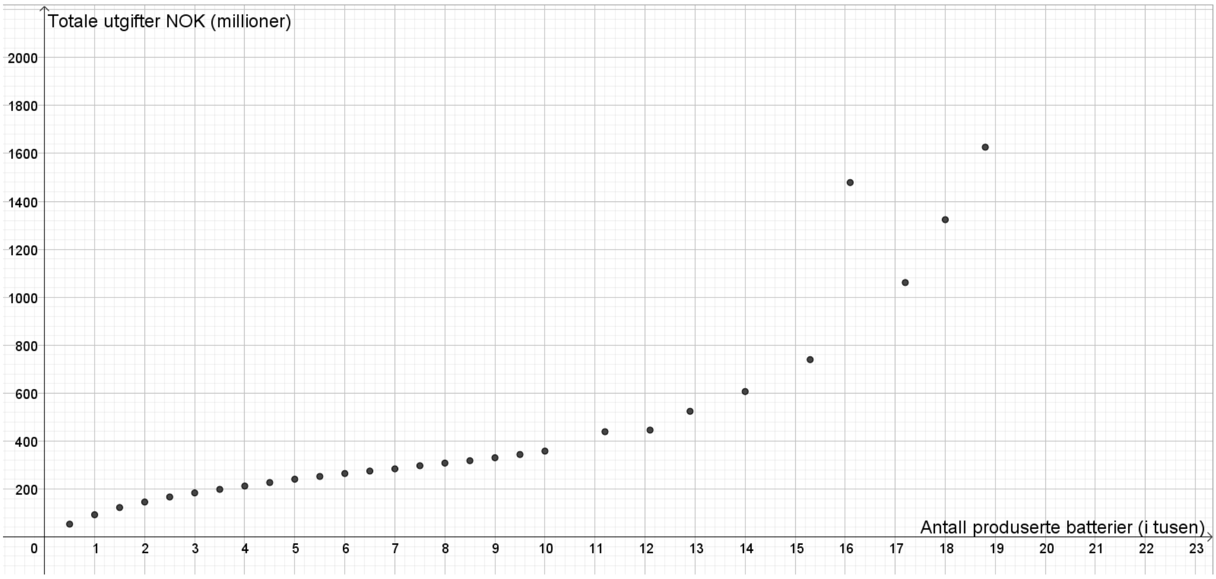


*Figur 7: Punktene og grafen viser bedriftens antatte **årlige** utgifter basert på antall produserte batterier.*



Det forskes mye på å produsere nye typer batterier til elbiler, og det er ventet at det vil lanseres en ny type batteri av langt høyere kvalitet innen noen år. I frykt for å bli utkonkurrert ved dette tidspunkt ønsker bedriften derfor å øke produksjonen uten å investere i ekstra maskiner eller større industrilokaler. For å bedre kunne estimere utgiftene ved økt produksjon, har bedriften testet ut økt produksjonstid over en kortere periode. Innsamlet data fra denne perioden, sammen med data tidligere kjent data, framkommer av figuren under.

*Figur 3: Punktene viser bedriftens antatte **årlige** utgifter basert på antall produserte batterier.*



Dere finner en geogebra-fil med disse punktene på its-learning.

Utsalgsprisen på batteriene har variert i noen grad de siste årene, men forrige år solgte bedriften batteriene for gjennomsnittlig 75000 kr pr stykk.

1. Kan dere lage en modell som anslår hvor mange batterier bedriften bør produsere?

2. Siden prisene for elbil batterier varierer ønsker bedriften til enhver tid å ha kontroll på hvorvidt det vil lønne seg å produsere et ekstra batteri den dagen. Kan dere lage en modell som danner grunnlag for denne beslutningen?

8.2 Vedlegg 2: Intervjuguide

Intervjueguide

Dette er noen grunnspørsmål til intervjuet. Spørsmål jeg stiller vil styres av hva elevene sier i intervjuet, har svart i spørreskjemaet og observasjoner jeg har gjort i løpet av undervisningsøkten. Gruppeintervjuet gjøres i utgangspunktet med elever fra samme gruppe.

1. Kan alle kort si en positiv og en negativ ting om undervisningsopplegget?

2. Var det noe som var spesielt utfordrende med opplegget?

3. Hvordan startet dere på oppgaven?
   - Var alle enige i denne måten å starte på

4. Hvilke ideer (strategier) benyttet dere for å løse oppgaven?
   - Var alle enige i denne ideen
   - Hvilke matematiske metoder inngikk i disse ideene

5. Gjorde dere noen antagelser underveis?
   - Eks antagelsene med kjempen
   - Var alle enige i disse antagelsene
   - Hvordan tror dere antagelsene påvirket resten av oppgaven

6. Hva tenkte dere om resultatene dere fikk til slutt eller underveis i opplegget?
   - Var alle enige i dette resultatet

7. Hvilken regresjonsmodell brukte dere i utgiftsfunksjonen og hvorfor?
   - Lineær, log, polynom, potens, exp 1-2, sin, log
   - Var alle enige i denne modellen
   - Tanker rundt «bommpunktet»
   - Tanker rundt gyldigheten til utgiftsfunksjonen

8. Hvordan satte dere opp inntektsfunksjonen?
   - Hadde dere noen diskusjoner rundt dette

8.3 Vedlegg 3: Spørreskjema

Du har nå vært med på et undervisningsopplegg innen matematisk modellering. Med dette spørreskjemaet ønsker jeg å få et innblikk i hva du tenker om undervisningsopplegget, samt hvilke matematiske metoder du og gruppen din benyttet for å løse oppgaven.

Gjenkjenningskode (IKKE navn!): __________ *Dette er kun nødvendig om du ønsker å stille til intervju.*

1. Hvor godt likte du undervisningsopplegget? (ring rundt)

   Veldig dårlig 1 2 3 4 5 6 Veldig godt

2. Nevn en ting du likte godt med undervisningsopplegget?

3. Nevn en ting du likte dårlig med undervisningsopplegget?

4. Syntes du problemet/oppgaven virket realistisk? (Hvorfor/ hvorfor ikke)

5. Hva startet dere med når dere skulle løse oppgaven?

6. Da dere benyttet regresjon til å lage en graf, var det ett av punktene som «bommet» ganske mye på grafen. Hva tenkte du og gruppen din om dette punktet?

7. Forkastet dere noen ideer eller metoder dere benyttet underveis? Eventuelt: Justerte dere noe på ideene eller metodene underveis?
   - I så fall, hvorfor?

8. Ordet fritt, noe annet du ønsker å si om opplegget?

8.4 Vedlegg 4: «Modelleringsskjema»

Gruppenr:

Idé

Antagelser/forenklinger (hvordan vil de påvirke)

Valg av matematiske metoder (og hvorfor)

Resultater

8.5 Vedlegg 5: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Matematisk modellering i undervisning"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke faglig utbytte ved matematisk modellering som undervisningsmetode. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med prosjektet er å undersøke hvordan matematisk modellering kan være med på å fremme andre faglige læringsmål(utenom modelleringskompetanse) som f.eks å kunne anvende matematikk i ulike situasjoner og det å lære/repetere ulike matematiske konsepter. Prosjektet er en del av en masteroppgave.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Matematisk institutt ved UiB er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Samtlige elever i klassen som har vært med i undervisningsøkten vil bli spurt om å besvare spørreskjema. Noen elevene som har utrykket ønske om å stille til intervju, kan bli spurt om å delta som intervjuobjekt.

Hva innebærer det for deg å delta?
Intervjuet vil ta opptil 30 minutter og kan gjennomføres enten individuelt eller i gruppe. Jeg vil ta notater og lydopptak fra intervjuet. Lydopptaket vil i etterkant transkriberes og deretter slettes.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli anonymisert. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- *Lydopptaket vil først bli transkribert av meg, Michael Kristiansen, og deretter slettet. I forkant av transkriberingen vil lydopptaket bli oppbevart innelåst i et skap.*
- *Lydopptaket fra intervjuet og transkriberingen av dette vil kun være tilgjengelig for meg, Michael Kristiansen, og min veileder, Mette Andresen.*
- *Navn vil bli anonymisert i transkriberingen.*
- *Det er kun elevenes faglige tenkning og synspunkter vedrørende undervisningsopplegget som vil bli benyttet i masteroppgaven. Utover dette skal ikke deltakerne kunne gjenkjennes i publikasjonen.*

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Prosjektet skal etter planen avsluttes *01.06.2020. Opplysninger og eventuelle lydopptak vi har av deg vil bli destruert så fort disse ikke er nødvendig lenger, og seinest 01.06.2020. Datamaterialet som er fullt anonymisert kan bli beholdt i etterkant for etterprøvbarhet.*

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Matematisk institutt ved UiB har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- *Matematisk institutt ved UiB* ved:
    - Veileder: Mette Andresen, Mette.Andresen@uib.no, tlf: 55584834.
    - Student: Michael Kristiansen, mickri92@gmail.com, tlf: 93229975
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig Student

(Forsker/veileder)

Mette Andresen Michael Kristiansen

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet Matematisk modellering i undervisning, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i *intervju*

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, ca. 01.06.2020

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

8.6 Vedlegg 6: Godkjenning fra Norsk senter for forskningsdata AS (NSD)

15.6.2020 Meldeskjema for behandling av personopplysninger

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

NSD sin vurdering

Prosjekttittel

Matematisk modellering i undervisning

Referansenummer

112862

Registrert

08.11.2019 av Michael Kristiansen - Michael.Kristiansen@student.uib.no

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Bergen / Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet / Matematisk institutt

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Mette Andresen, Mette.Andresen@uib.no, tlf: 55584834

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Michael Kristiansen, mickri92@gmail.com, tlf: 93229975

Prosjektperiode

09.12.2019 - 01.06.2020

Status

03.06.2020 - Avsluttet

Vurdering (1)

11.11.2019 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 11.11.2019. Behandlingen kan starte.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde:

https://nsd.no/personvernombud/meld_prosjekt/meld_endringer.html

https://meldeskjema.nsd.no/vurdering/5dc165cf-e383-400f-97ab-60749317f379 1/2

Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 01.06.2020.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!

Kontaktperson hos NSD: Karin Lillevold
Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

8.7 Vedlegg 7: Transkripsjon av intervju

Spørsmål 1, Positiv og negativ ting

1. 1: Okei da er vi på lydopptak. Så da tenker jeg at hvis du(mats) begynner så kan du si navnet ditt, også kan du si koden din, også kan du kort si en negativ ting og en positiv ting om opplegget.

… urelevant

2. 2: Eeehm… En negativ ting, jeg syns oppgaven var litt rart formulert, så det hindres oss i å liksom skjønne opplegget, ehh.. greit liksom. Også en positiv ting var at det var veldig utfordrende (latter begge) også var det litt annerledes fra å bare gjøre oppgaver, hele tiden.

3. 3: En ting jeg syntes var gøy det var at vi fikk masse tid til å tenke og reflektere over hva svaret kunne være. En dårlig ting var som sagt at oppgaven var litt dårlig formulert, også var det noen begreper som ikke var på plass. Og hvis du ikke forstår de begrepene så er det vanskelig å vite hva oppgaven eller hva for eksempel de grafene spør om. Og at ja, det var litt dårlig samarbeid med gruppen (latter begge)

4. 1: Ehhm så, men begreper jeg brukte når jeg lagde opplegget da som var vanskelig. Eller var det begreper man måtte benytte seg av underveis du tenkte på?

5. 3: Jeg tenker på de begrepene som sto oppå de der grafene. Som for eksempel kostnad og utgifter. Jeg stusset litt på eeeh.. hva var forskjellen på kostnad og utgifter, det var jeg litt usikker på.

6. 1: Ja, okei. Riktig

7. 2: Ja (enig). men det er sikker fordi vi ikke har hatt om det. (1.53 ish)
8. - 3: Ja (samtykker) for det er så veldig lenge siden vi har hatt om dette
9. 2: Vi skulle gjerne hatt en liten repetisjon før vi begynte på selve oppgaven

Spørsmål 2, Utfordrende med opplegget

10. 1: Ja sånn ja…. men det er gode innspill. Men dere nevnte og at opplegget var utfordrende, var det noe som var...ehm, dere anså som spesielt utfordrende da?

11. 2: Jeg tror det bare er at det ikke er en vanlig sånn regneoppgave, det er liksom en hel case også skal du liksom utarbeide… du skal liksom jobbe med data som du får oppgitt også sette det inn i en praktisk modell.
12. 1: mhm
13. 2: Og vi er ikke så veldig vant med det tror jeg.
14. 3: mhm (nikker enig)
15. 2: Vi jobber jo mest med kun sånn utregning.
16. 1: Ja
17. 2: Vil eg si, sa ja.

18. 1: Men dere nevnte at det var en del begreper og sånn, men …. var det og at det var veldig omfattende og det var mye?
19. 3: Ja det var veldig masse informasjon
20. 1: Ja

21. 3: Også måtte du forstå liksom, de minste detaljer og hva er det egentlig denne grafen spør om, hva er denne grafen..
22. 2: Mhm (enig)
23. 1: Ja
24. 3: Så du måtte liksom forstå hele oppgaven som helhet, også må du forstå hva oppgaven spør deg om. Og ehm ja det var litt vanskelig, altså oppgaven er jo på to sider på en måte. Det ble litt mye.
25. 1: Hadde det da vært enklere hvis det var på en måte stykket opp i mindre biter da på en måte?
26. 3: Ja kanskje
27. 2: Ja, ehm ja ja

28. 1: Men var det, altså det utfordrende, var det noe som både var positivt og negativt eller var det...?
29. 2: Jojo, det er jo veldig bra at det var utfordrende, vi trenger jo å bli utfordret også. Men jeg tror det er mer at, eeeehm..., det blir sånn, det ser uoppnåelig ut, i stedet for at det er utfordrende (latter).
30. 1: Ja jeg skjønner
31. 2: Så man gir liksom opp med en gang, istedet for å prøve seg fram.
32. 3: Ja (enig). Veldig mange på gruppen de leste første spørsmål også bare ga de opp med en gang fordi de ikke skjønte bæret av det (latter).
33. 2: Men det er jo også det at vi ikke er vant med det sant
34. 3: Ja
35. 2: Så hvis man liksom har en liten sånn repetisjonsoppgave eller liksom sånn refleksjonstid i begynnelsen av timen. Siden det er jo nytt kapittel for liksom for oss sant.
36. 1: Så det er jo et spesifikt tips, å ha en liten repitisjonsbit der man kommer litt inn på ideene og tankegangene.
37. 2: Ja, sånn at man har lik tankegang fra starten av istedet for at man bare hopper fra, eeh jeg vet ikke hva vi hadde i forrige kapittel, hva var det vi hadde?
38. 3: Da hadde vi funksjoner.
39. 2: Ja, men dette her er mer omfattende sant. Det er jo flere ting man må ta til rette liksom.

40. 1: (04:15) Ja, det var bra innspill. Var det noe som var, altså dere nevnte at det var lett for å gi opp, var det noe som var spesielt viktig da for at man skulle på en måte gå fra å gi opp til å faktisk fortsette på oppgaven og fortsette å jobbe med den? Var det noen ting som var viktig der tror dere?
41. 2: Jeg vet ikke, det starter jo med at man liksom forstår fra begynnelsen sant, og når man leser sååååeh… så mye fra oppgaven så føler man at man ikke forstår noe av det. Sant så da gidder man liksom ikke å prøve sant. Men hvis man leser noe man kjenner igjen liksom, bare sånn okey greit: "dette her forsto jeg liksom", også ehm også prøver man sitt beste. Men eeeh, jeg tror det også har med vane å gjøre, at vi eeehm ikke er vant med å liksom å gjøre sånne oppgaver.
42. 1: Ja, eeehm, har du noe du vil legge til, altså noe som kunne ha hjulpet det her?
43. 3: Altså når eg leste første spørsmål så tenkte jeg at dette går ikke (latter). Også gikk jeg inn på NDLA også fant og leste jeg litt om hva er inntekt og kostnad, forholdet mellom de, og overskudd og alt det der.
44. 1: Ja
45. 3: Også fikk jeg litt sånn en idee, også prøvde jeg å lese oppgaven nøye for å forstå litt. Også bare jobbet jeg ut ifra det.
46. 1: Ja, men det er greit. Du gikk egentlig litt for å få den introduksjonen på egenhånd på NDLA da kan du si, ved å gå å lese der da? (05:36)
47. 3: Ja
48. 2: …(uklart).. nesten litt derfor, vi må jo uansett liksom lese på det for å forstå noe sant. Så da er det liksom like greit at læreren bare kan ta det opp i begynnelsen av timen.

49. 1: Ja, men det er bra innspill.
50. Hvordan startet dere på oppgaven, hva liksom, hva begynte dere med?
51. 2: Jeg tror man alltid prøver å bryte ned oppgaven, “sånn okey hva data har jeg liksom”. Så ser man litt på at “okey, greit. 12 timer hvert døgn de jobber liksom”, også er det så så mange batterier og prisen av dette her. Også ser man på grafen også tenker man okey hva er det jeg faktisk har, hvilken informasjon er relevant liksom og hva trenger jeg ut ifra at… ja.
52. 1: Var det en sånn felles inngang gruppen hadde, eller hadde dere… prøvde folk litt forskjellige ting, altså var alle enige, eller på en måte enige i den inngangs… den inngangen på en måte? (06:30)
53. 3: Eeehm? Altså vi startet først med litt sånn idemyldring på en måte. Stilte spørsmål hva er det egentlig denne grafen viser, hva er det vi får vite av informasjon, hva betyr dette her. Prøvde liksom å tolke (latter) det som sto der på et litt sånn enklere språk.
54. 1: Ja
55. 3: Også ut ifra det så tenkte vi litt på det vi hadde lært tidligere. Og ja ut ifra det så bare prøvde vi på forskjellige måter å løse oppgaven.

Spørsmål 4, ideer/strategier

56. 1: Ja, men den er god. Hva ideer og strategier var det dere... dere var jo på samme gruppe, gruppe 3, ikke sant?
57. 2: Ja
58. 1: Ja. Hvilke ideer eller/og strategier var det dere brukte for å løse oppgaven?
liten pause (07:13)
59. 2: Eeehm, jeg vet ikke. Jeg føler de aller fleste sånn når vi har tentamen for eksempel og vi kommer på en sånn her oppgave så prøver alle den der “prøv og feil metoden”. At man bar prøver forskjellige ting også… sånn ting man har lært fra før av også ser man om okey, passer det liksom, gir svaret mening eller liksom ser prosessen rimelig ut? Og det så ganske OK ut… tenkte vi.
(07:41)
60. 1: Ja…. Ja sånn “prøve og feile” da, men altså… men når man bruker “prøve og feile” metoden så er det jo på en måte, det er vel en ide man faktisk prøver ut da på en måte
61. 2: Jajaja
62. 1: Sant. Så hadde dere noen sånn grunnide dere jobbet…. altså... hva den første ideen dere hadde som dere prøvde ut da?
63. 3: Den ideen jeg hadde til å begynne med det var at overskudd er lik inntekt minus kostnad (latter) så bare jobbet jeg ut ifra den(latter). Prøvde å lage en kostnadsfunksjon og inntektsfunksjon også.. ja, det var egentlig det jeg begynte med…(uklart)(08:17)
64. 1: Var det liksom… Var alle enige med den på gruppen eller var det noen som hadde..?
65. 2: Ja det så jo veldig… Nei men det så riktig ut liksom sant, så man tenkte jo at det var riktig.
66. 1: Ja
67. 3: Vi hadde ikke så veldig mye kunnskap fra før av
68. 2: Ja det er det
69. 3: Så det var liksom bare det vi hadde som utgangspunkt, så bare jobbet vi ut ifra det. Selv om det kanskje var litt feil eller noe sånt.

70. 1: Ja. Men den ideen, altså… måtte dere gjøre noen, altså endringer, noen modifikasjoner, eller forkastet dere noe på en måte eller… altså underveis hvis dere forstår hva jeg mener?
71. 2: Jeg tror det mer sånn at vi ser på hvilke tall vi skulle bruke. Sånn okey er denne her.... siden det var jo tre forskjellige grafer på den oppgaven. Og da var det sånn okey

hvilke tall var det vi skulle bruke liksom, hvilke graf var det liksom som gav mening i forhold til inntekt eller…(skurring)... hva det skulle være sant.
72. 3: (9:15) Når eg lagde den dere inntektsfunksjonen så begynte jeg litt feil fordi eg skrev, hva var det 7500 eller noe sånt
73. 1: Ja
74. 3: I stedet for 75.
75. 2: Mhm
76. 3: Da fikk jeg til at, fordi når jeg lagde grafen så bare føyk den høyt opp i været
77. 1: Ja
78. 3: Så ja, jeg måtte tydeligvis dele på 1000 for å få den til treffe den kostnadsfunksjonen
79. 1: Hva som var… hva var det som liksom gjorde at du skjønte at den var gal da, den inntektsfunksjonen?
80. 3: Fordi… for å, vent litt… på grafen her så er det jo oppgitt i 1000, mens her er det pr stykk. Så det var derfor vi måtte dele på 1000 her for å få det til å samsvare med den…
81. 1: Så på en måte da så tok du den inntektsfunksjonen din da, og den strategien for å finne den, og da måtte du inn å justere på den da?
82. 3: Ja
83. 1: Ja men.. måtte dere gjøre noe med utgiftsfunksjonen da for eksempel. Var det første forsøk som ble gjeldene der, eller gjorde dere noen justeringer der og?
84. 3: Utgift?
85. 1: Utgiftsfunksjonen
86. 3: Åja. Jeg bare, nei. Jeg brukte denne her(grafen de fikk) også lagde jeg en inntektsfunksjon(mener utgiftsfunksjon?). Jeg brukte ikke… skulle vi bruke det? (de andre grafene)
87. ⅔: Latter
88. 1: Neinei
89. 3: Jeg trodde liksom den og den (de to første grafene) var denne her(siste grafen)
90. 1: (10:35) Ja det er riktig. De forklarer…
91. 3: Så jeg så ikke så veldig mye på denne her, jeg bare så på den
92. 1: Nei, men...jajaja. På figur 3 ja. Eeeh, men når dere la den inn i geogebra selv. Så fikk dere en utgiftsfunksjon ikke sant?
93. 3: Ja? Jajaja
94. 1: Men ehh, men det er helt riktig som du sier. At de to første er på en måte.. de forklarer egentlig bare hvordan du kommer fram til figur 3 da. Men gjorde dere noen justeringer underveis på den figur 3, altså på det dere gjorde i geogebra når dere fant den utgiftsfunksjonen?
:Pause
95. 1: Gjorde dere noen justeringer underveis.
96. 3: Ehhm, ja for vi må jo lage en sånn, er det graf det heter?
97. 2: Mhm
98. 3: Å for å få det til å liksom samsvare med de punktene så måtte vi prøve forskjellige. Vi måtte prøve sånn polynom-greie, eg husker ikke begrepene, men… Sånn at det blir liksom, følger de punktene
99. 2: Åja, Reglin.
100. 3: Ja
101. 2: Ja. Altså regresjonslinje
102. 3: Ja. Og da fant vi ut at polynom-greien var det som passet. Så der var det noen justeringer for å få det til å passe med de punktene.

Spørsmål 7, Regresjonsmodell

103. 1: Ja for vi kan jo gå litt på den regresjonsmodellen da egentlig… Ja for de alternativene dere har da, dere kan jo egentlig bare se her, det står under punkt 7 der. For å

si det sånn så hadde dere lineær, log, polynom, potens, exponensiell 1 og 2, sinus og logaritmisk.
104. 2: Er det to logaritmer
105. 1: Eeehm, nei det tror jeg ikke. Eller jeg vet ikke, det er mulig jeg har skrevet feil der. Men ja… Men ja, hva var det som gjorde at dere valgte den dere valgte? ...Du nevnte forsåvidt egentlig litt om det nå men
106. 2: Det var innenfor våre kunnskaps…
107. 3: eehm, ja
108. 1: Men husker dere hvilken dere gikk for spesifikt?
109. 3: Jeg tror det var polynom, jeg husker ikke (latter)
-pause
110. 3: Uklart
111. 3: Jeg tror ikke det kommer opp nå, nei. Men jeg tror vi brukte polynom
112. 1: Ja, men hva som gjorde at? Hvordan endte dere opp med den?
113. 3: Som jeg sa, så passet den best med punktene. De andre gikk enten sånn eller sånn, og da passet de ikke med alle punktene.
114. 1: Når dere brukte regresjon, så var det ett punkt som var veldig høyt. Hva tenkte dere om dette punktet?
115. ⅔: Latter
116. 1: Hadde dere gjort dere noen formening om det punktet?
117. ⅔: Latter
118. 3: Egentlig ikke
119. 2: Egentlig ikke nei
120. 1: Nei, men så den var inkludert?
121. 2: Nei, altså vi har jo hatt like oppgaver som det her før. så da er man vant til sånn okey, et av punktene er langt vekke fra resten av punktene sant. Så da tenker man ikke så mye over det siden det er sånn, okey alt har en feilmargin eller hva det skal være.
122. 1: Mhm
123. 2: Så da er det sånn okey uansett når man lager den linjen så ser den jo ganske fair ut, med hennhold til den… eller til det punktet som liksom var langt vekke og. Så ja
124. 1: Ja, men så dere hadde ikke noen diskusjoner eller noe sånn på gruppen om det punktet?
125. 2: Nei (latter)
126. 1: Men hva tenker dere nå da om det bompunktet, eller hvis vi kaller det det da? det som var veldig mye høyere enn de andre.
127. 2: Altså jeg tenker fremdeles ingenting om det
128. 3: Eehm, nei
129. 1: Nei, men det er fair det… Hvis dere tenker opp imot casen, altså storyen på casen da. Har dere tenkt noe på hvor det bompunktet kan komme fra liksom? Hva kan være skyld i at det plutselig var..
130. 2: Mye pris liksom.
131. 1: Ja
132. 2: Eeehm, nei
133. ⅔: Latter
134. 2: Har ikke tenkt på det
135. 1: Det er helt fair det.
136. 1: Når dere valgte den regresjonsmodellen. Var det på en måte enighet på gruppen for at vi går for den vi går for, eller hadde forskjellige meninger på hvilken modell dere burde gå for?
137. 2: Altså det var ingen som protesterte når vi sa regresjonslinje. Nei
138. ⅔: Latter
139. 3: Det var det eneste alternativet vi hadde, så bare gikk vi for det.
140. 2: Ja. Og det passet jo.
141. 3: Ja

142. 2: Så da gikk det fint liksom. Men eg tror vi bare hadde prøvd en av de andre funksjonene da liksom. Hvis de ikke hadde passet så godt.
143. 1: Ja
144. 2: Ja. Prøv og feil.

Spørsmål 5, Antagelser

145. 1: Så hvis vi går litt tilbake igjen her på rekkefølgen jeg har skrevet spørsmålene her da. Men gjorde dere noen antagelser underveis? Husker dere det eksempelet jeg ga dere med den kjempen?
146. 2: Mhm
147. 1: Så hadde vi noen antagelser vi gjorde med tanke på at vi gjorde en antagelse på at forholdet mellom menneske størrelse på føtter og høyde det var likt forholdet mellom kjempen sin høyde og…
148. 2: Ja
149. 1: Merket dere dere noen antagelser dere gjorde underveis her på en måte?
150. 2: Eeeehm, nei nei. (Latter) Denne oppgaven var liksom så mye. Og det var liksom så mye informasjon. Så det var liksom så mye informasjon, så det var sånn okey vet ikke helt hva jeg skal forvente før jeg har fått ned alt på PC'en først liksom. Så ser man liksom, åja okey overskuddet er liksom der. Og da skjønner man sånn okey kanskje liksom skal den der… så ser man liksom blablabla
151. 1: Men dere var på en måte ikke bevisst på noen antagelser dere gjorde underveis?
152. ⅔: nei

Spørsmål 6, Resultat (Validering og diskusjon)

153. 1: Ehm. Ja men den er grei. Og resultatet dere fikk da til slutt, eller underveis også forsovidt. Med at dere får jo på en måte et resultat, dere fikk jo på en måte et resultat av den inntekstsfunksjonen og, selv om det ikke nødvendigvis var resultatet oppgaven spurte om
154. 2: jaja
155. 1: Men gjorde dere dere noen tanker underveis her, altså på de resultatene dere fikk?
156. 3: Vi fikk jo bare et resultat
157. 2: Ja. Og det var jo akkurat det oppgaven spurte om og
158. 1: Hva fikk dere som resultat?
159. 3: Det var toppen på den overskuddsfunksjonen og det var 12040 ca
160. 2: Mhm
161. 1: Diskuterte dere noe rundt det på gruppen.
162. 3: Nei.
163. ⅔: Latter
164. 3: Det var et mirakel når vi fant ut av det, så det var ikke så masse diskusjoner
165. 1/2/3: latter
166. 1: Men hadde dere, altså når dere så svaret. Tenkte dere noe over om det var, om det ikke var en diskusjon, tenkte dere noe over om det ga mening på noen slags måte?
167. 2: Eeehm, ja altså for oss så så det bare logisk ut. (latter) Altså man tenker liksom ikke så mye på det, så hvis man føler at sånn at okey at dette var den eneste måten vi kunne gjøre det på også fikk dette resultatet og det gir mening iforhold til resten av grafene. Og den informasjonen vi har fått oppgitt av oppgaven. Så var det sånn okey, da er vi ferdig.
168. 1: Var det noe resultat dere kan tenke dere som ikke hadde gitt mening da, som på en måte dere hadde tenkt at dette må være feil?
169. 2: Ehm
170. 3: Hvis det er utenfor grafen sånn, hvis det liksom er helt oppe der
171. 2: Ja ja ja

172. 3: Men det var liksom innenfor grensen på en måte da, og da tenkte vi at okey det kan stemme.
173. 1: Ja
174. 2: Mhm
175. 1: Hva mener dere med grensene, hva grenser snakker dere om?
176. 3: Vi snakker om der de skjærer hverandre her
177. 1: Ja
178. 3: Og når det liksom er innenfor
179. 2: Ja. Og man ser også i forhold til disse punktene liksom. Hvis den hadde gått, hvis overskuddet liksom hadde vært helt borte her
180. 1: Ja, så med høyere x-verdi enn hva punktene hadde
181. 2: Ja, eller for høy y-verdi liksom
182. 1: Ja, men okey så nå sier jeg bare litt så jeg skal skjønne selv hva dere pekte på. Så det første dere tenkte at det måtte hvertfall ligge mellom rommet dere hadde mellom inntektsfunksjonen og utgiftsfunksjonen deres. Det var det ene.
183. 2: Ja
184. 1: Og samtidig at vi ikke kunne ha for høy eller for lav x-verdi, då utenfor der.
185. 3: Ja
186. 2: Ja. Eller hvis den hadde vært negativ så hadde det vært litt rart og.
187. 1: Ja
188. 2: Latter
189. 1: Og siste var med for høy y-verdi
190. 2: Ja
191. 1: Ja, men den er god.

192. 1: Ehm, skal vi se. Ja og i resultatet når dere nevnte at dere ikke gjorde alt for mange drøftinger rundt det, det var ikke så mye diskusjon. Men vet dere om det var noe på en måte alle var enige i på gruppen? Hadde dere noen ulik ide?
193. 2: Eeehm. Holdt på å si at enten var man enige eller så sa man ikke noe.
194. 1/2/3: Latter

Oppgave 2 (ikke et spesifikt spørsmål i guiden)

195. 1: Ja, men den er god. Eeehm. Når dere satt opp inntektsfunksjonen deres, på hvilken måte gjorde dere det? Du nevnte litt om den i sted faktisk.
196. 3: Ja. Fordi jeg glemte å dele på 1000 der
197. 1: Ja
198. 3: Men jeg bare satte inn 75x, det var egentlig bare det.
199. 1: Var det noen diskusjoener eller tanker rundt den på gruppen, eller var folk enige i at det var inntektsfunksjonen?
200. 2: Ja
201. 3: Ja
202. 2: Vil nå si det ja.
203. 1: Hadde dere noen andre tanker om at det kunne være, altså kunne den sett ut på noen annen måte? Var dere innom noen diskusjon der? Dere begynte jo litt på oppgave 2 gjorde dere ikke det for eksempel?
204. 2: Jo jo jo. Jo vi konkluderte nesten på oppgave 2
205. 3: Ja jeg tror vi skjønte oppgaven
206. 2: Ja jeg tror vi skjønte oppgaven veldig godt til slutt ja, eeehm men
207. 1: Men hadde dere noen ideer der om selve den inntektsfunksjonen? Altså hadde dere noe om hvordan den
208. 2: Jeg tror det bare er basert på tidligere kunnskap, også går man ut ifra det
209. 3: Hva er tidligere kunnskap?

210. 2: Nei altså det der med overskudd- og inntekts- formelen og alt det der
211. 3: Ja for jeg tenker at den stiger jo, inntekstfunksjonen. Så ja det blir litt rart hvis den synker. Hvis de får mindre inntekt.
212. 1: Ja det er jo sant
213. 3: Så at den stiger virker logisk
214. 1: (22:00) Ja, men med tanke på at den er lineær da. Altså spørsmålet leste jo, skal vi se. "Utsalgsprisen på batteriene har variert i noen grad de siste årene, men forrige år solgte bedriften batteriene for gjennomsnittlig 75000 kr pr stykk." Så ehm, også var spørsmål to, den gikk jo slik: "prisene for elbil batterier de varierer, sant. Så derfor ønsker bedriften å ha kontroll på om hvorvidt de bør produsere flere batterier eller mindre batterier." Men hadde da noen formening om hvordan den prisen kunne variere?

215. 3: Var det ikke sånn at jo mer de produserte jo mer kostnad var det.
216. 2: jo, jo, vi så at den var eksponensiell. Også sammenlignet vi med en annen sånn, no var det ikke oppgaven, men ett eksempel fra NDLA. Om at hvis den liksom sånn, selve grafen økte så økte også kostnaden pr enhet.
217. 1: Ja
218. 2: Eeehm, ja
219. 1: Neida, det går fint det. Det var et langt spørsmål, som gjerne var litt vanskelig å tolke.
220. 3: Ja, jeg skjønte det ikke helt
221. 1: Ja, også hva men på oppgave 2 da. Dere nevnte at dere hadde begynt på den og hadde noen ideer. Hva var ideene?
222. 3: Ja
223. 2: Eeehm, jo siden vi skjønte jo ikke helt oppgaven sant. den var jo litt sånn krokete. Siden det sto "den dagen".
224. 3: Vi visste ikke hvilken dag du mente.
225. 2: Ja. Hvilken liksom dag refererte du til.
226. 3: Fordi vi får jo ikke vite noe om dager, vi får bare vite kr og hvor mange batterier.
227. 2: Siden det sto jo årlige inntekter eller noe sånnt.
228. 3: Ja
229. 2: Men så snakket vi med "lærer" også sa (hen) sånn "tror du dere han mener liksom hvilken som helst dag?" Og da tenkte vi sånn greit, hva kan vi gjøre da? Også gikk vi liksom på NDLA også fant vi det der med grensekostnader, var det ikke det?
230. 3: Jo
231. 2: jo også så vi at, eeehm det er så vanskelig å forklare. Eg skjønner ikke hvordan jeg skal si det
232. 3: Det var noe med tangenten, at stigningstallet til tangenten
233. 2: Ja
234. 3: Hvis du tar et punkt , for eksempel punktet 10. Okey, 10 000 blir det da. Også lager du en tangent ut fra det punktet, også finner du ut stigningstallet
235. 2: Ja. Også er det liksom 200 for eksempel.
236. 3: Ja
237. 2: Ja. Også så vi at, eeehm, for en ekstra enhet så måtte det liksom plusses på 200 til.
238. 3: Ja
239. 2: Så vi, eller jeg, tenkte da mer at vi måtte liksom måtte lage en slags tangent med en glider eller noe sånt for at man skulle ta den på hvilken som helst dag på den grafen.
240. 1: Ja
241. 2: Også kunne liksom addere de, eehm eller addere den kostnaden til den enheten til der og da. (latter) Samtidig som du liksom glider den tangenten over grafen, og det virket sykt sånn komplisert, men det ga veldig mening der og da. Også ja
242. 1: Ja, men dere hadde no en bra...
243. 3: Er vi på rett spor

244. 2: Ja, gir det mening
245. 1: Det… helt sånn på detaljnivå så er jeg litt usikker, men som en overordnet...Men ja det gir veldig mening, det er absolutt en bra tanke. Så eehm, jess. Jeg kan forklare dere litt den etterpå, hvis dere er interessert?
246. 2: Ja

Ordet fritt

247. 1: Men er det ellers noe dere ønsker å.. Litt ordet fritt, er det noe dere ønsker å si om opplegget?
248. 2: Ja gjerne så kan arket, nei det trenger ikke å være ark. Det kan gjerne være på pc.
249. 3: Det var jo på pc.
250. 2: Ja, men trenger vi ikke på ark sant
251. 1: Ja sånn miljø
252. 2: Ja, der har du det, der har du miljøet
253. 2/3: Latter
254. 1: Ja okei, men tar jeg til meg.
255. 2: Som en lærer av fremtiden
256. 3: Ja men det er noen som liker å ha det på ark, fordi da er det enklere
257. 2: Nei men (navn), men ikke prøv å støtt de der miljøsvinene nå
258. 1/2/3: Latter
259. 3: Nei det er ikke så miljøskadelig å produsere ark i forhold til plastikk
260. 2: Nå ligger det fattige barn og har lyst på ett ark i verden, også sitter vi å kaster disse arkene rett etterpå. Jeg tenker vi kan bruke pc'en.
261. 1: Ja men den tar jeg til meg
262. 2/3: Latter
263. 1: Er det andre kommentarer dere ønsker å gi til?
264. 2: Ja, bare det der med å formulere oppgaven litt mer presist. Sånn at vi liksom skjønner hva, altså vi trenger ikke å skjønne oppgaven med en gang, det er ikke det som er greien. Men liksom det der med "den dagen" liksom, okey hvilken dag var det han refererte til liksom. Eeehm ja.
265. 1: Nei men den, jeg tar til meg den.
266. 2: Men opplegget var ganske greit. Det var liksom en veldig utfordrende oppgave, og man måtte virkelig tenke.
267. 1: Ja men bra.
268. 3: Kanskje introduseringen av oppgaven vi fikk, følte at vi fikk veldig lite informasjon. Eeehm, sånn bak teori og sånne greier, som vi måtte liksom huske.
269. 2: Ja
270. 1: Ja okei. Så men ikke nødvendigvis…. Så ikke introduksjon av oppgaven, men mer innen, altså at dere fikk mer bakgrunnsstoff da og fagstoff å gå på?
271. 3: Ja
272. 2: Ja
273. 1: Eeehm, men eller mente du og introduksjon av selve casen i seg selv?
274. 3: Ja også selve casen, jeg følte det gikk litt for fort.
275. 2: Ja, alt sammen, alt sammen.
276. 1: Ja okei
277. ⅔: Latter
278. 1: Så både introduksjon av casen og litt på en måte introduksjon av fagstoff for oppgaven på en måte?
279. 2: Ja
280. 3: Ja
281. 1: Ja… Yess, da er det ja. Har dere fått sagt det dere føler dere vil si?
282. 2: Joda
283. 3: Ja

284. 1: Okei, det er greit. da avslutter jeg lydopptaket.