

Stanley-Reisner ringer med sykliske gruppevirksomheter

Kirsti Loe

MASTERAVHANDLING I
ALGEBRA/ALGEBRAISK GEOMETRI



MATEMATISK INSTITUTT
UNIVERSITETET I BERGEN

2. juni 2009

TAKK TIL

Jeg vil gjerne takke min veileder Gunnar Fløystad for å ha introdusert meg for kombinatorisk kommutativ algebra, et utrolig spennende og interessant område innenfor matematikken, og for gode diskusjoner og hjelp underveis i arbeidet med denne oppgaven. Takk til alle på matematisk institutt som har bidratt med hjelp og gode råd, spesielt takk til Erlend for gjennomlesning av oppgaven. Og takk til min samboer Hans Philip for all støtte og oppmuntring.

Innhold

1	Innledning	7
2	Innledende definisjoner og resultater	9
2.1	Kvadratfrie idealer og simplisielle komplekser	9
2.2	Homologi	11
2.3	Cellulære resolusjoner	14
3	Sykliske polytooper	15
3.1	Innføring i sykliske polytooper	15
3.2	Stanley-Reisner idealene tilordnet sykliske polytooper	16
4	Minimale frie resolusjoner	19
4.1	Noen spesielle Stanley-Reisner ringer	19
4.2	Lengde 2 og 3	22
5	Lengde 4	25
6	Lengde 5, nedre skranke	33
7	Lengde 5, øvre skranke	45
8	Cohen-Macaulay ringer	61
8.1	Dimensjon, dybde og Cohen-Macaulay ringer	61
8.2	Cohen-Macaulay Stanley-Reisner ringer	63
9	Lineære cellulære resolusjoner	67
9.1	Litt om lineære resolusjoner	67
9.2	Noen spesielle minimale lineære resolusjoner	67
9.3	To n-kanter	72

Kapittel 1

Innledning

Kombinatorisk kommutativ algebra, som ble introdusert av Melvin Hochster og Richard P. Stanley på midten av 70-tallet, er et forholdsvis nytt område innenfor kommutativ algebra. Man studerer simplisielle komplekser, som er kombinatoriske objekter, og kopler dem opp mot Stanley-Reisner ringer, som er algebraiske objekter. En stor del av denne oppgaven baserer seg på homologi-teori, en gren av matematikken som oppstod rundt 1940, med blant andre Samuel Eilenberg i spissen. Denne teorien lar oss måle antall hull av ulike dimensjoner i topologiske rom. Her bruker vi denne teorien som et redskap til å se på frie resolusjoner av Stanley-Reisner ringer. I kapittel 2 gis en grunnleggende innføring i den viktigste teorien som blir brukt: Kombinatorisk kommutativ algebra, homologiteori og cellulære resolusjoner. Gjennom hele denne oppgaven kommer vi til å jobbe over polynomringen med n variable over en kropp \mathbb{k} , $S = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

En spesielt interessant klasse av simplisielle komplekser fås ved å se på sykliske polytooper $C(n, d)$, som vi vil se i kapittel 3. Disse polytopene er ekstremale i den forstand at de har det maksimale antall fjes av dimensjon j , for alle j som er mindre eller lik dimensjonen d , i klassen av d -polytooper. Til enhver konveks simplisiell polytop kan vi tilordne et simplisielt kompleks Δ . Vi har beskrevet hvordan Stanley-Reisner idealene til noen av disse simplisielle kompleksene ser ut; når d er jamn så er Stanley-Reisner idealet er generert av alle kvadratfrie monomer \mathbf{x}^τ av grad $\frac{d}{2} + 1$ slik at τ ikke inneholder noen etterfølgende hjørner (modulo n). De er altså generert av noen monomer \mathbf{x}^τ , der $|\tau| = \frac{d}{2} + 1$ og mengden av disse τ 'ene er invariant under gruppevirkningen fra gruppen av sykliske permutasjoner.

Så har vi sett på noen Stanley-Reisner idealer som er definert på en tilsvarende måte, de som er generert av alle monomer \mathbf{x}^σ , der σ er definert slik: La G være gruppen generert av den sykliske permutasjonen $(1, 2, \dots, n)$ på $\{1, 2, \dots, n\}$, og la σ gjennomløpe elementene i orbiten til $\{1, 2, \dots, i\}$ under virkningen fra G , for en i der $1 \leq i < n$. Så disse er også invariante under gruppevirkningen fra gruppen av sykliske permutasjoner. Vi har prøvd å beskrive hvordan de minimale frie resolusjonene for restklasseringene S/I_Δ til disse ser ut. Generelt har vi sett på lengden på resolusjonene, som gir en idè om hvor "langt" disse ringene er fra å være frie S -moduler. Vi har i noen tilfeller sett på Bettitallene for den minimale resolusjonen, noe som gir oss litt mer detaljert informasjon. Og i noen tilfeller har vi beskrevet resolusjonen cellulært, noe som gir en enda finere beskrivelse av resolusjonen. Dette arbeidet utgjør den største delen av denne oppgaven (kapittel 4-7), og inneholder noen til dels svært omfattende beviser.

Videre, i kapittel 8, har vi beskrevet codimensjonen for disse spesielle Stanley-Reisner idealene. Så gis en kort innføring i dimensjons- og dybdeteori, før vi bruker dette resultatet til

å vise at noen av restklasseringene S/I_Δ er Cohen-Macaulay, altså at de har den egenskapen at for ethvert maksimalt ideal så er dybden lik kodimensjonen.

En annen metode for å finne eksempler på Cohen-Macaulay Stanley-Reisner ringer er å finne lineære minimale resolusjoner. Vi har nemlig et resultat fra Eagon og Reiner som sier at en Stanley-Reisner ring S/I_Δ er Cohen-Macaulay hvis og bare hvis det Aleksanderduale idealet I_{Δ^*} har en lineær fri resolusjon. Dette ser vi på i kapittel 9, der vi prøver å finne eksempler på idealer som har en lineær minimal fri resolusjon av lengde 3, ved å konstruere resolusjonene cellulært. Vi studerer noen spesielle typer 2-dimensjonale cellekomplekser; $u \times v$ -rutenett og to sammenlimte n -kanter, og viser at dersom man merker dem med monomer på en gitt måte så vil de tilhørende cellulære kompleksene være lineære resolusjoner.

Kapittel 2

Innledende definisjoner og resultater

I dette kapitlet innfører vi begreper som *simplisielt kompleks*, *Stanley-Reisner ideal*, *Bettitall* og *reduisert homologi*. Disse kommer vi til å møte i stor grad gjennom hele denne oppgaven. I delkapittel 2.2 kommer et av hovedresultatene i dette kapitlet, Hochsters formel, som blir viktig i bevisene som kommer i kapittel 4-7. Til slutt i dette kapitlet viser vi hvordan vi kan beskrive en resolusjon cellulært, som er en veldig naturlig og fin teknikk for å konstruere resolusjoner.

2.1 Kvadratfrie idealer og simplisielle komplekser

Aller først trenger vi noen innledende definisjoner og resultater fra kombinatorisk kommutativ algebra, disse er hentet fra [4].

Definisjon 2.1.1 (Monomialideal). *Et monom i $S = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ er et produkt $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ for en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$. Et ideal $I \subseteq \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ kalles et monomialideal dersom det er generert av monomer.*

Lemma 2.1.2. *Ethvert monomialideal har et unikt minimalt sett av monomiale generatorer, og dette settet er endelig.*

Bevis. For bevis, se [4]. □

Vi sier at et monom $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ er *kvadratfritt* dersom hver koordinat i \mathbf{a} er enten 0 eller 1. Et ideal er kvadratfritt dersom det er generert av kvadratfrie monomer.

Definisjon 2.1.3 (Simplisielt kompleks). *Et simplisielt kompleks Δ på hjørnemengden $\{1, \dots, n\}$ er en samling av undermengder av $\{1, \dots, n\}$, som vi kaller fjes, slik at:*

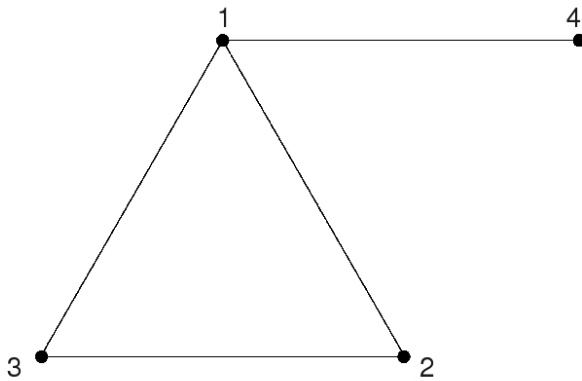
$$\text{Dersom } \sigma \in \Delta \text{ og } \tau \subseteq \sigma \text{ så er } \tau \in \Delta.$$

Et fjes $\sigma \in \Delta$ med kardinalitet $|\sigma| = i + 1$ har dimensjon i , og kalles et i -fjes i Δ . Dimensjonen til Δ ,

$$\dim(\Delta) = \begin{cases} -\infty & \text{hvis } \Delta = \emptyset \\ \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in \Delta\} & \text{ellers.} \end{cases}$$

Gitt en tilfeldig samling $\{F_1, \dots, F_m\}$ av undermengder av $\{1, \dots, n\}$ så finnes det et unikt minste simplisielt kompleks $\langle F_1, \dots, F_m \rangle$, som inneholder alle disse undermengdene F_j . Det består av alle undermengder $G \subseteq \{1, \dots, n\}$ som er inneholdt i en av F_j 'ene og kalles det simplisielle komplekset generert av $\{F_1, \dots, F_m\}$. Et simpleks er et simplisielt kompleks som er generert av nøyaktig ett fjes. De maksimale fjesene i et simplisielt kompleks kalles fasetter. Dersom et hjørne $v \in \{1, \dots, n\}$ er inneholdt i alle fasettene til Δ sier vi at Δ er en kjegle fra v , Δ er da kontraktibel. Komplementet til et fjes τ er $\bar{\tau} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \tau$.

Eksempel 2.1.4. Det simplisielle komplekset Δ på $\{1, 2, 3, 4\}$ som er generert av fasettene $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ og $\{1, 4\}$ ser slik ut:



Dersom vi har et simplisielt kompleks Δ kan bruke det til å konstruere et ideal I_Δ i polynomringen $S = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Vi identifiserer en undermengde $\tau \subseteq \{1, \dots, n\}$ med den kvadratfrie vektoren i $\{0, 1\}^n$ som har i 'te koordinat 1 dersom $i \in \tau$.

Definisjon 2.1.5 (Stanley-Reisner ideal). *Stanley-Reisner idealet til det simplisielle komplekset Δ er det kvadratfrie monomialidealet*

$$I_\Delta = \langle x^\tau \mid \tau \notin \Delta \rangle, \text{ der } x^\tau = \prod_{i \in \tau} x_i.$$

Restklasseringen $k[\Delta] = S/I_\Delta$ kalles *Stanley-Reisner ringen til Δ* .

Eksempel 2.1.6. Stanley-Reisner idealet til det simplisielle komplekset Δ i eksempelet over er $I_\Delta = \langle x_1x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4 \rangle$.

En fri modul M over en ring R er en modul som er isomorf med en direkte sum av kopier av R . Dersom M er endelig generert så kan vi skrive $M \cong R^n$, og vi sier da at n er rangen til M over R .

Definisjon 2.1.7 (Fri resolusjon). *En fri resolusjon av en R -modul M er et kompleks*

$$F_\bullet : 0 \leftarrow F_0 \xleftarrow{\phi_1} F_1 \xleftarrow{\phi_2} \dots \leftarrow F_{l-1} \xleftarrow{\phi_l} F_l \leftarrow \dots$$

av frie R -moduler, slik at

$$\ker(\phi_i) = \text{im}(\phi_{i+1}) \text{ for } i = 1, 2, \dots$$

(komplekset er eksakt utenom i F_0), og

$$M = F_0/\text{im}(\phi_1) = \text{coker}(\phi_1).$$

Lengden på en fri resolusjon er det største tallet l slik at $F_l \neq 0$.

Dersom vi ser på $S = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ som en \mathbb{N}^n -gradert ring så kan vi la $S(-\mathbf{a})$ være den frie S -modulen generert i grad \mathbf{a} , så $S(-\mathbf{a}) \cong \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \rangle$ som \mathbb{N}^n -graderte moduler. Dette kalles den \mathbb{N}^n -graderte tvistingen av S i grad \mathbf{a} .

Og tilsvarende hvis vi ser på S som en \mathbb{N} -gradert ring, så er $S(-r) \cong \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}} : |\mathbf{a}| = r \rangle$ den frie S -modulen generert i grad r , eller den \mathbb{N} -graderte tvistingen av S i grad r .

Definisjon 2.1.8 (Bettitall). La F_\bullet være en minimal fri resolusjon av en endelig generert \mathbb{N}^n -gradert modul M , og la $F_i = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} S(-\mathbf{a})^{\beta_{i,\mathbf{a}}}$. Da er invarianten $\beta_{i,\mathbf{a}} = \beta_{i,\mathbf{a}}(M)$ det i 'te \mathbb{N}^n -graderte Bettitallet til M i grad \mathbf{a} .

Vi kan også se på M som en \mathbb{N} -gradert modul. Da er

$$\beta_{i,r} = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n, |\mathbf{a}|=r} \beta_{i,\mathbf{a}}$$

det i 'te \mathbb{N} -graderte Bettitallet til M . Og modulene i den minimale frie resolusjonen er gitt ved

$$F_i = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} S(-r)^{\beta_{i,r}}.$$

Teorem 2.1.9 (Hilberts Syzygyteorem). La $S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Da har enhver endelig generert gradert S -modul en gradert fri resolusjon av endelig lengde $\leq n$.

Bevis. Bevis for dette teoremet kan man finne i kapittel 19 i [2]. □

2.2 Homologi

Vi trenger også en kort innføring i homologi-teori. Legg spesielt merke til teorem 2.2.4 og korollar 2.2.8, disse resultatene vil bli mye brukt senere i oppgaven. Definisjoner og resultater i dette kapitlet er hentet fra [3] og [4].

Definisjon 2.2.1 (Homologi). Et kjedekompleks over en ring R er en sekvens av R -moduler (abelske grupper) og homomorfier

$$\mathcal{G} : \dots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} G_i \xrightarrow{\phi_i} G_{i-1} \longrightarrow \dots,$$

slik at de sammensatte avbildningene $\phi_i \circ \phi_{i+1} \equiv 0$ for hver i . Homologien til \mathcal{G} i G_i er definert til å være

$$H_i \mathcal{G} := \ker \phi_i / \text{im} \phi_{i+1}.$$

Definisjon 2.2.2 (Minimale komplekser). Et kjedekompleks

$$\mathcal{G} : \dots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} G_i \xrightarrow{\phi_i} G_{i-1} \longrightarrow \dots$$

over en lokal ring (R, P) er minimalt dersom alle avbildningene i det tensoriserte komplekset $\mathcal{G} \otimes R/P$ er 0, det vil si at bildet til $\phi_i : G_i \rightarrow G_{i-1}$ er inneholdt i PG_{i-1} , for hver i .

I denne oppgaven vil vi kun jobbe med simplisiell homologi, som er noe enklere enn generell homologi.

Definisjon 2.2.3 (Simplisiell homologi). *La Δ være et simplisielt kompleks. Vi bygger et kjedekompleks $C(\Delta; \mathbb{k})$ over \mathbb{k} der modulene er gitt ved*

$$G_i = \mathbb{k}^{F_i(\Delta)},$$

vektorrommet over \mathbb{k} der basiselementene e_σ korresponderer til i -fjesene σ i Δ , for $i = 0, 1, 2, \dots$. Og homomorfiene er definert ved at

$$\phi_i(e_\sigma) = \sum_{j \in \sigma} \text{sign}(j, \sigma) e_{\sigma \setminus j} \text{ for } i = 1, 2, \dots,$$

der $\text{sign}(j, \sigma) = (-1)^{r-1}$ dersom j er det r 'te elementet i mengden σ .

I simplisiell homologi kan man få redusert homologi $\tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{k}) = \ker(\phi_i) / \text{im}(\phi_{i+1})$ dersom man i kjedekomplekset $C(\Delta; \mathbb{k})$ legger til G_{-1} og ϕ_0 definert på samme måte som over. Vi får da det reduserte kjedekomplekset

$$\tilde{C}(\Delta; \mathbb{k}) : 0 \leftarrow \mathbb{k}^{F_{-1}(\Delta)} \xleftarrow{\phi_0} \dots \leftarrow \mathbb{k}^{F_{i-1}(\Delta)} \xleftarrow{\phi_i} \mathbb{k}^{F_i(\Delta)} \leftarrow \dots \xleftarrow{\phi_{n-1}} \mathbb{k}^{F_{n-1}(\Delta)} \leftarrow 0.$$

Når man studerer simplisielle komplekser jobber man generelt sett heller med redusert homologi enn med vanlig homologi. Grunnen til det er at all redusert homologi forsvinner når Δ er kontraktibel. Dimensjonen til $\tilde{H}_0(\Delta; \mathbb{k})$ er en mindre enn antall sammenhengende komponenter i Δ , og dimensjonen til $\tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{k})$ er lik antall $(i+1)$ -dimensjonale hull i Δ . Når $i < 0$ eller $i > n-1$ får vi $\tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{k}) = 0$. Det eneste unntaket er det irrelevante komplekset $\Delta = \{\emptyset\}$, som kun har redusert homologi i grad -1, der $\tilde{H}_{-1}(\Delta; \mathbb{k}) = \mathbb{k}$.

Et viktig redskap innenfor homologiberegning finner vi i Mayer-Vietoris sekvensen:

Teorem 2.2.4 (Mayer-Vietoris sekvensen for redusert homologi). *La A og B være simplisielle underkomplekser av et simplisielt kompleks X , slik at $X = A \cup B$ og $A \cap B \neq \emptyset$. Da er*

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi} \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow 0$$

en eksakt sekvens, som kalles Mayer-Vietoris sekvensen.

Bevis. Man danner først en kort eksakt sekvens av reduserte kjedekomplekser

$$0 \rightarrow \tilde{C}(A \cap B) \rightarrow \tilde{C}(A) \oplus \tilde{C}(B) \rightarrow \tilde{C}(A \cup B) \rightarrow 0$$

Deretter får man en lang eksakt sekvens av homologigrupper assosiert til denne. For detaljer, se [3], kapittel 2.2. □

Definisjon 2.2.5 (Lenken). *Lenken til σ i det simplisielle komplekset Δ er*

$$lk_\Delta(\sigma) = \{\tau \in \Delta \mid \tau \cup \sigma \in \Delta \text{ og } \tau \cap \sigma = \emptyset\},$$

mengden av fjes i Δ som er disjunkte fra σ , men hvis union med σ ligger i Δ .

Definisjon 2.2.6 (Stjernen). La Δ være et simplisielt kompleks på $\{1, \dots, n\}$ og la $v \in \{1, \dots, n\}$. Stjernen til v i Δ er

$$st_{\Delta}\{v\} = \{F \text{ fjes i } \Delta \mid v \in F\}.$$

Definisjon 2.2.7 (Restriksjonen). La Δ være et simplisielt kompleks på $\{1, \dots, n\}$ og la $R \subseteq \{1, \dots, n\}$. Restriksjonen av Δ til R er

$$\Delta|_R = \{\sigma \in \Delta \mid \sigma \subseteq R\}.$$

La R^C være komplementet til R i $\{1, \dots, n\}$. Da definerer vi $\Delta|_{-R} = \Delta|_{R^C}$.

Fra Mayer-Vietoris sekvensen får vi da følgende korollar:

Korollar 2.2.8. La Δ være et simplisielt kompleks på $\{1, \dots, n\}$ og la $v \in \{1, \dots, n\}$. Da er

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_i(\Delta|_{-\{v\}}) \rightarrow \tilde{H}_i(\Delta) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(lk_{\Delta}\{v\}) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(\Delta|_{-\{v\}}) \rightarrow \dots$$

en eksakt sekvens.

Bevis. La $A = \Delta|_{-\{v\}}$ og $B = st_{\Delta}\{v\}$. Da er $A \cap B = lk_{\Delta}\{v\}$, og B er en kjegele fra v , så den har ingen redusert homologi. Dermed får vi at

$$\tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) = \tilde{H}_i(A) \oplus 0 \cong \tilde{H}_i(A) = \tilde{H}_i(\Delta|_{-\{v\}}).$$

□

Homologiberegning er veldig nyttig i arbeidet med å beregne resolusjoner, spesielt på grunn av det neste teoremet.

Definisjon 2.2.9 (Alexanderdualen til et simplisielt kompleks). Dersom Δ er et simplisielt kompleks, så vil det Alexanderduale simplisielle komplekset

$$\Delta^* = \{\bar{\tau} \mid \tau \notin \Delta\},$$

bestå av komplementene til de undermengdene som ikke er fjes i Δ .

En ekvivalent definisjon er at

$$\Delta^* = \{\tau \mid \bar{x}^{\tau} \in I_{\Delta}\}.$$

Teorem 2.2.10 (Hochsters formel). Alle ikke-null \mathbb{N}^n -graderte Bettitall til I_{Δ} og S/I_{Δ} ligger i kvadratfrie grader σ , og disse er gitt ved formelen

$$\beta_{j,\sigma}(I_{\Delta}) = \beta_{j+1,\sigma}(S/I_{\Delta}) = \dim_{\mathbb{k}} \tilde{H}_{j-1}(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k}).$$

Bevis. For bevis, se [4], kapittel 1.5. □

For å forkorte notasjonen noe skriver vi $\tilde{h}_j(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k})$ i steden for $\dim_{\mathbb{k}} \tilde{H}_j(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k})$.

2.3 Cellulære resolusjoner

En resolusjon kan ofte beskrives som en *cellulær resolusjon*, dvs. at det er en korrespondanse mellom resolusjonen og en type geometrisk objekt som vi kaller *topologisk cellekompleks*. Dette cellekomplekset er bygget opp av punkter, linjestykker, flater, 3-dimensjonale celler, osv. Og de er bestemt ut i fra generatorene til modulene i resolusjonen, og minste felles multiplum (lcm) av disse.

En undermengde $K \subseteq \mathbb{R}^d$ er konveks dersom: For to vilkårlige punkter $x_0, x_1 \in K$ så er linjesegmentet med endepunkter x_0 og x_1 ,

$$\{x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 | \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

inneholdt i K . Desom vi har en vilkårlig undermengde $X \subseteq \mathbb{R}^d$ så definerer vi den konvekse innhylningen til X , $\text{conv}(X)$, til å være snittet av alle konvekse mengder $K \subseteq \mathbb{R}^d$ som inneholder X .

Definisjon 2.3.1. *En en konveks polytop er den konvekse innhylningen til en endelig punkt-mengde i \mathbb{R}^d .*

Definisjon 2.3.2 (cellekompleks). *Et polyhederalt cellekompleks X er en endelig samling av konvekse polytoper, kalt fjes i X , slik at*

- Dersom \mathcal{P} er en polytop i X og F er et fjes i \mathcal{P} , så er F med i X .
- Dersom \mathcal{P} og \mathcal{Q} er med i X , så er $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ et fjes i både \mathcal{P} og \mathcal{Q} .

Et cellekompleks er merket dersom de r hjørnene i X er merket med vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ i \mathbb{N}^n . Et vilkårlig fjes F i X er merket med eksponenten \mathbf{a}_F til $\text{lcm}(\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} | i \in F)$. Vi sier at fjeset F har vekt $|\{j \in \mathbf{a}_F | j \neq 0\}|$.

Dersom X er et merket cellekompleks kan vi velge en tilfeldig orientering på X og definere funksjonen *sign* på fjesene i X ved at

$$\text{sign}(F, G) = \begin{cases} 1 & \text{hvis orienteringen til } G \text{ er indusert av orienteringen til } F \\ -1 & \text{ellers} \end{cases}$$

Definisjon 2.3.3. *La X være et merket cellekompleks. Det cellulære frie komplekset \mathcal{F}_X støttet på X er gitt ved*

$$\mathcal{F}_i = \bigoplus_{F \in X, \dim F = i-1} SF,$$

der

$$\delta(F) = \sum_{\text{fasetter } G \text{ i } F} \text{sign}(G, F) \mathbf{x}^{\mathbf{a}_F - \mathbf{a}_G} G.$$

Definisjon 2.3.4 ($X_{\preceq \mathbf{b}}$). *La $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$. $X_{\preceq \mathbf{b}}$ er underkomplekset av X som består av alle fjes F i X slik at $\mathbf{b} - \mathbf{a}_F \in \mathbb{N}^n$*

Vi sier at et cellekompleks er asyklisk dersom det enten er tomt eller ikke har noen redusert homologi.

Proposisjon 2.3.5 (Fra [4]). *Det cellulære frie komplekset \mathcal{F}_X støttet på X er en cellulær resolusjon hvis og bare hvis $X_{\preceq \mathbf{b}}$ er asyklisk over \mathbb{k} for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$. Når \mathcal{F}_X er asyklisk så er \mathcal{F}_X en fri resolusjon av S/I , der $I = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}_v} | v \in X \text{ er et hjørne} \rangle$ er generert av de monomiale merkingene på hjørnene.*

Kapittel 3

Sykliske polytoper

Vi skal i dette kapittelet se på en spesiell klasse av polytoper, kalt sykliske polytoper. Disse polytopene er ekstremale i den forstand at en syklisk polytop med dimensjon d har det maksimale antall j -fjes en d -polytop kan ha, for enhver j med $1 \leq j \leq d$. Dette ble vist av McMullen i 1970, for en skisse av beviset se [1], side 227.

For (blant annet) sykliske polytoper kan man definere et tilhørende simplisielt kompleks. Jeg har sett på de tilhørende Stanley-Reisner idealene til disse, og funnet ut at når dimensjonen d er jamn så kan disse idealene beskrives på en fin måte. De er nemlig generert av monomer \mathbf{x}^τ , alle av samme grad, der τ ikke har noen etterfølgende hjørner (modulo n).

3.1 Innføring i sykliske polytoper

Definisjoner og resultater i dette delkapittelet er hentet fra [1]. For definisjon av konvekse polytoper, se kapittel 2.3.

Definisjon 3.1.1 (Polyeder). La $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ og $\beta \in \mathbb{R}$. Mengden

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$$

er et hyperplan med normalvektor \mathbf{a} . ($\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$ er definert som indreproduktet mellom \mathbf{a} og \mathbf{x}). Mengden av punkter som ligger på den ene siden av hyperplanet (inkludert hyperplanet selv), kalles et lukket halv-rom. Et polyeder er snittet av endelig mange lukkede halv-rom.

En annen definisjon på en konveks polytop er at det er et avgrenset polyeder.

La P være et polyeder, og H et hyperplan. H kalles et støttende hyperplan til P dersom $H \cap P \neq \emptyset$ og P er inneholdt i et av de lukkede halv-rommene som defineres av H . Dersom H er et støttende hyperplan til P så kalles $H \cap P$ et fjes i P . Vi sier også at P selv og den tomme mengden \emptyset er fjes i P , de såkalte uekte fjesene. Fjesene i et polyeder (polytop) er selv polyedere (polytoper).

Dimensjonen, $\dim P$, til et polyeder P er dimensjonen til $\text{aff}(P)$, den affine innhylningen til P . Den affine innhylningen til en vilkårlig mengde $X \subseteq \mathbb{R}^d$ er snittet av alle affine undermengder av \mathbb{R}^d som inneholder X . Et j -fjes er et fjes som har dimensjon j som polyeder (vi setter $\dim \emptyset = -1$).

La $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$. Elementene x_0, \dots, x_k kalles affint uavhengige dersom ethvert element $y \in \text{aff}\{x_0, \dots, x_k\}$ har en unik presentasjon $y = \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k$ for $\mu_0, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}^d$ med $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_k = 1$.

Definisjon 3.1.2. Et d -simpleks er den konvekse innhylningen til $d + 1$ affint uavhengige punkter. En konveks polytop P er simplisiell dersom alle ekte fjes i P er simplekser.

Proposisjon 3.1.3. La P være et d -simpleks. Da har vi:

- (i) Ethvert j -fjes i P er et j -simpleks, og
- (ii) Enhver mengde med $j + 1$ hjørner i P er hjørnene i et j -fjes i P .

Teorem 3.1.4 (Korollar). La P være en simplisiell konveks polytop med hjørnemengde V , og la $\Delta(P)$ være samlingen av undermengder av V som består av den tomme mengden og hjørnemengdene til de ekte fjesene i P . Da er $\Delta(P)$ et simplisielt kompleks.

Se på den algebraiske kurven $M \subset \mathbb{R}^d$, gitt ved $\mathbf{x}(\tau) = (\tau, \tau^2, \dots, \tau^d)$ $\tau \in \mathbb{R}$. M kalles momentkurven. Det er en kurve med grad d , og vi har da at ethvert hyperplan som ikke inneholder M snitter M i høyst d punkter.

Definisjon 3.1.5 (Sykliske polytooper). La $n \geq d + 1$ være et heltall. En syklisk polytop $C(n, d)$ er den konvekse innhylningen til n vilkårlige distinkte punkter på M .

Teorem 3.1.6. $d + 1$ vilkårlige distinkte punkter på M er alltid affint uavhengige. Og $C(n, d)$ er dermed en simplisiell d -polytop.

Bevis. La τ_0, \dots, τ_d være de distinkte paramterne til $d + 1$ distinkte punkter på M . Vi må vise at vektorene $\mathbf{x}(\tau_1) - \mathbf{x}(\tau_0), \dots, \mathbf{x}(\tau_d) - \mathbf{x}(\tau_0)$ er lineært uavhengige. Altså må vi vise at matrisen med disse rekkevektorene er ikke-singulær. Det er den hvis og bare hvis

Vandermondematriksen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \tau_0 & \tau_0^2 & \dots & \tau_0^d \\ 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \dots & \tau_1^d \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & \tau_d & \tau_d^2 & \dots & \tau_d^d \end{pmatrix}$$

er ikke-singulær. Determinanten til A regnes ut til å være $\prod_{0 \leq i < j \leq d} (\tau_i - \tau_j)$, og dette uttrykket er ikke null siden τ_i 'ene er parvis distinkte. \square

3.2 Stanley-Reisner idealene tilordnet sykliske polytooper

I dette kapitlet skal vi se på de tilhørende simplisielle kompleksene til sykliske polytooper, og gi en beskrivelse av Stanley-Reisner idealene til noen av disse. Men først innfører vi noen begreper som vi vil trenge i dette arbeidet.

La $C(n, d)$ være den konvekse innhylningen til punktene $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(\tau_i)$ der $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n$ og $n \geq d + 1$. La W være en undermengde av $V = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$. W er en endemengde dersom det eksisterer et heltall i , $1 \leq i \leq n$, slik at $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i\}$ eller $W = \{\mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n\}$. W er en kontiguerlig mengde dersom det eksisterer heltall $1 < i \leq j < n$ slik at $W = \{\mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_j\}$. W er en odde/jamn kontiguerlig mengde dersom W er kontiguerlig og $|W|$ er odde/jamn. Enhver undermengde $W \subseteq V$ har en unik dekomposisjon

$$W = Y_1 \cup X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m \cup Y_2,$$

der Y_i 'ene er endemenger eller tomme, og X_i 'ene er kontiguerlige mengder. En mengde W er av type (r, s) dersom $|W| = r$ og det er nøyaktig s odde kontiguerlige undermengder X_i av W .

Teorem 3.2.1 (Fra [1]). *La j være et heltall med $0 \leq j \leq d - 1$. En undermengde $W \subseteq V$ er et j -fjes i $C(n, d)$ hvis og bare hvis W er av type $(j + 1, s)$ for en s med $0 \leq s \leq d - j - 1$.*

Bevis. Vi viser først påstanden for $j = d - 1$. Siden $C(n, d)$ er en simplisiell polytop så har enthvært $(d - 1)$ -fjes nøyaktig d hjørner. Så vi må vise at hvis $W \subseteq V$ er av type (d, s) , så har vi at: $\text{conv}(W)$ et fjes $\Leftrightarrow s = 0$. Fra forrige teorem har vi at punktene i W er affint uavhengige, og dermed danner de et hyperplan $H \subset \mathbb{R}^d$. Vi ser at $W \subseteq H \cap M$ (der M er momentkurven av grad d). Men faktisk så er $W = H \cap M$, siden M er en kurve av grad d , og dermed vil punktene på W dele M inn i $d + 1$ deler, som ligger alternerende på hver sin side av H . $\text{conv}(W)$ er en fasett i $C(n, d)$ hvis og bare hvis H støtter $C(n, d)$, eller ekvivalent; hvis og bare hvis alle punktene i $V \setminus W$ ligger på en og samme side av H . Dette skjer nøyaktig når hvert par av punkter i $V \setminus W$ er separert av et jamnt antall av punkter i W , altså når $s = 0$.

Så ser vi på det generelle tilfellet, og vi antar at $|W| = j + 1$. Anta at W har høyst $d - j - 1$ odde kontiguerlige undermengder. Da er det mulig å finne en undermengde T av M med $d - j - 1$ punkter, slik at $V \cap T = \emptyset$, og $W \cup T$ har kun jamne kontiguerlige undermengder. Siden $|W \cup T| = d$ så følger det fra første del av beviset at $\text{conv}(W \cup T)$ er en fasett i $C(n + d - j - 1, d)$ støttet av hyperplanet $H = \text{aff}(W \cup T)$. Siden $W = H \cap V$ kan vi konkludere med at $\text{conv}(W) = H \cap C(n, d)$ er et fjes i $C(n, d)$.

Motsatt, hvis $\text{conv}(W)$ er et j -fjes i $C(n, d)$ så eksisterer det en fasett $\text{conv}(W')$ i $C(n, d)$ med $W \subseteq W'$. Siden W' ikke har noen odde kontiguerlige undermengder så kan W ha høyst $d - j - 1$ odde kontiguerlige undermengder. \square

Vi har sett på Stanley-Reisner idealet til de tilhørende simplisielle kompleksene til de sykliske polytopene, og under er et resultat vi fant. Dersom $C(n, d)$ er en syklisk polytop så skriver vi $\Delta(n, d)$ for det tilhørende simplisielle komplekset.

Teorem 3.2.2. *La $C(n, d)$ være en syklisk polytop der d er jamn. Da er generatorene i Stanley-Reisner idealet $I_{\Delta(n, d)}$ nøyaktig de kvadratiske monomene $\mathbf{x}^\tau \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ der $|\tau| = \frac{d}{2} + 1$ og τ ikke inneholder noen etterfølgende hjørner (mod n).*

Bevis. Fra forrige teorem har vi at fasettene i $\Delta(n, d)$ er alle mengder av type $(d, 0)$. Så det at en mengde F er en fasett i $\Delta(n, d)$ er ekvivalent med at $|F| = d$ og alle etterfølgende sekvenser (mod n) av hjørner i F har jamn lengde (siden d er jamn). Så dersom F er en fasett i $\Delta(n, d)$ kan vi skrive F på formen

$$F = \{v_1, v_1 + 1\} \cup \dots \cup \{v_{\frac{d}{2}}, v_{\frac{d}{2}} + 1\}$$

(mod n), altså som en union av parvis disjunkte undermengder av kardinalitet 2. Og alle mengder på denne formen er fasetter i $\Delta(n, d)$. Vi har fra definisjonen av Stanley-Reisner idealet at $I_\Delta = \langle \mathbf{x}^\tau \mid \tau \notin \Delta \rangle$, så hvis \mathbf{x}^τ skal være med i $I_{\Delta(n, d)}$ så har vi to muligheter:

- $|\tau| \geq d + 1$, eller
- $\frac{d}{2} < |\tau| \leq d$ og minst en sekvens av sammenhengende hjørner (mod n) i τ har odde lengde.

Dersom $|\tau| \leq \frac{d}{2}$ så er τ en undermengde av en fasett $F = \{v_1, v_1 + 1\} \cup \dots \cup \{v_{\frac{d}{2}}, v_{\frac{d}{2}+1}\}$ for passende valg av $v_1, \dots, v_{\frac{d}{2}}$.

Fra Pigeonhole-prinsippet får vi at dersom $|\tau| = \frac{d}{2} + 1$ så er \mathbf{x}^τ med i $I_{\Delta(n, d)}$ hvis og bare hvis

τ ikke har noen etterfølgende hjørner (mod n), (τ er ikke en undermengde av en av fasettene i $\Delta(n, d)$ hvis og bare hvis τ ikke har noen etterfølgende hjørner (mod n)).

Dersom $|\tau| \geq d + 1$ så er $\mathbf{x}^\tau = p(\mathbf{x})\mathbf{x}^{\tau'}$ for et monom $p(\mathbf{x})$ og en τ' som ikke har noen etterfølgende hjørner (mod n), og $|\tau'| = \frac{d}{2} + 1$ (bare fjern annenhvert hjørne og eventuelt noen til fra τ , så får man τ'), så \mathbf{x}^τ er da ikke en generator i $I_{\Delta(n, d)}$.

Så vi må nå bare vise at $\frac{d}{2} + 2 \leq |\tau| \leq d$ medfører at $\tau \in \Delta(n, d)$ eller at $\mathbf{x}^\tau = p(\mathbf{x})\mathbf{x}^{\tau'}$ for et monom $p(\mathbf{x})$ og en τ' som ikke har noen etterfølgende hjørner (mod n), og $|\tau'| = \frac{d}{2} + 1$.

La $d \geq |\tau| \geq \frac{d}{2} + 2$. Skriv τ på formen $\tau = s_1 \cup \dots \cup s_a \cup t_1 \cup \dots \cup t_b$, der s_i 'ene er odde undermengder og t_j 'ene er jamne undermengder (Alle disse undermengdene skal være sammenhengende og ingen par av dem skal kunne settes sammen til en sammenhengende mengde). For å få et fjes som ikke har noen odde undermengder så må vi legge til minst a hjørner. Så vi har at $\frac{d}{2} + 2 + a \leq d$ impliserer at $\tau \in \Delta$. Og dermed har vi også det motsatte, nemlig at $\tau \notin \Delta$ impliserer at $a > \frac{d}{2} - 2$.

Vi har at $|\tau| = \sum_{i=1}^a |s_i| + \sum_{i=1}^b |t_i|$. Vi antar at $\tau \notin \Delta$, og lar τ' være undermengden av τ som vi får ved å fjerne annenhvert hjørne i τ . (Så i de jamne undermengdene t_i fjerner vi altså halvparten av hjørnene og i de odde undermengdene s_i fjerner vi $\frac{|s_i|-1}{2}$ hjørner). Da har τ' ingen sammenhengende hjørner (mod n).

Vi finner at

$$|\tau'| = |\tau| - \sum_{i=1}^b \frac{|t_i|}{2} - \sum_{i=1}^a \frac{|s_i| - 1}{2}.$$

Så bruker vi at $|\tau| = \sum_{i=1}^a |s_i| + \sum_{i=1}^b |t_i|$, og får at

$$|\tau'| = \frac{|\tau|}{2} + \frac{a}{2}.$$

Vi har at $|\tau| \geq \frac{d}{2} + 2$, og siden $\tau \notin \Delta$ har vi også at $a > \frac{d}{2} - 2$. Setter vi dette inn i uttrykket over, får vi at

$$|\tau'| > \frac{\frac{d}{2} + 2}{2} + \frac{\frac{d}{2} - 2}{2} = \frac{d}{2}.$$

Siden d er jamn og $|\tau'|$ må være et heltall får vi at $|\tau'| \geq \frac{d}{2} + 1$, og at $\mathbf{x}^{\tau'}$, og dermed at \mathbf{x}^τ , er generert av et monom \mathbf{x}^σ i $I_{\Delta(n, d)}$, der $|\sigma| = \frac{d}{2} + 1$ og σ ikke har noen etterfølgende hjørner. Så \mathbf{x}^τ er ikke en generator i $I_{\Delta(n, d)}$. \square

Kapittel 4

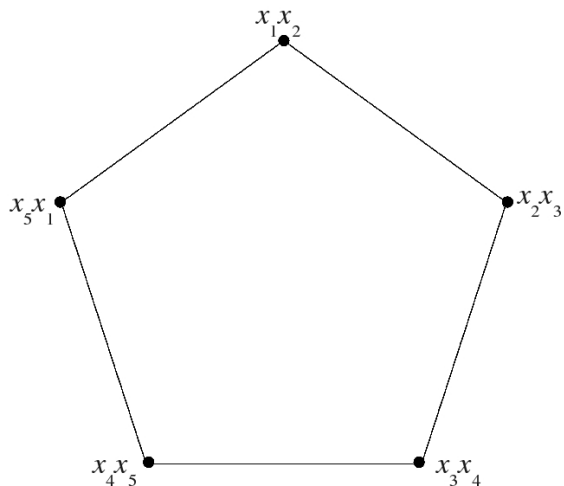
Minimale frie resolusjoner

Dette kapittelet og de fire neste er viet til en spesiell type Stanley-Reisner idealer. Vi skal se på lengden til den minimale frie resolusjonen av restklasseringen, vi skal beregne Bettitall, vi skal beregne kodimensjonen til idealet og se på når restklasseringen er Cohen-Macaulay. Alle resultater i kapittel 4-7 er egne resultater.

4.1 Noen spesielle Stanley-Reisner ringer

Vi tar et polygon med $n \geq 3$ hjørner og merker hjørnene med monomer \mathbf{x}^σ , der σ er definert slik: La G være gruppen generert av den sykliske permutasjonen $(1, 2, \dots, n)$ på $\{1, 2, \dots, n\}$, og la σ gjennomløpe elementene i orbiten til $\{1, 2, \dots, i\}$ under virkningen fra G , for en i med $1 \leq i < n$. La I_Δ være idealet generert av disse monomene.

Eksempel 4.1.1. Et eksempel på dette er at vi ser på en femkant og merker de fem hjørnene med \mathbf{x}^σ , der σ gjennomløper orbiten til $\{1, 2\}$ under virkningen av gruppen generert av den sykliske permutasjonen $(1, 2, 3, 4, 5)$ på $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:



Her er altså $n = 5$ og $i = 2$, og vi har at $I_\Delta = \langle x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, x_4 x_5, x_5 x_1 \rangle$ og $k[\Delta] = S/\langle x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, x_4 x_5, x_5 x_1 \rangle$.

Vi har studert minimale frie resolusjoner av restklasseringene S/I_Δ til disse spesielle idealene, og prøvd å lage en beskrivelse av lengden på disse. I dette arbeidet har vi brukt dataprogrammet Macaulay2, som blant annet regner ut minimale resolusjoner av moduler. For disse spesielle idealene I_Δ , gitt antall variabler n i ringen og graden i på generatorene i idealet, har vi laget en tabell over lengden på den minimale resolusjonen til S/I_Δ for de første tilfellene:

	i														
n		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2		2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
3			2	3	3	3	4	5	5	5	6	7	7	7	8
4				2	3	3	3	3	4	5	5	5	5	6	7
5					2	3	3	3	3	3	4	5	5	5	5
6						2	3	3	3	3	3	3	4	5	5
7							2	3	3	3	3	3	3	3	4
8								2	3	3	3	3	3	3	3
9									2	3	3	3	3	3	3
10										2	3	3	3	3	3
11											2	3	3	3	3
12												2	3	3	3
13													2	3	3
14														2	3
15															2

Ut i fra denne tabellen satte vi opp en formodning for når den minimale resolusjonen av S/I_Δ har lengde l :

<p>Dersom l er et partall, så er $n = \frac{l}{2}(i + 1)$</p> <p>Dersom l er et oddetall, så er $\frac{l-1}{2}(i + 1) < n < \frac{l+1}{2}(i + 1)$</p>

Eller med en litt annen formulering:

<p>Dersom $n \equiv 0 \pmod{(i + 1)}$, så er $l = \frac{2n}{i+1}$</p> <p>Dersom $n \equiv t \pmod{(i + 1)}$ for en $t \in \{1, \dots, i\}$, så er $l = 2 \left(\frac{n-t}{i+1} \right) + 1$</p>

Vi viser først at formodningen stemmer når $i = 1$:

Teorem 4.1.2. *La $I_\Delta = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Da er S/I_Δ en minimal resolusjon av lengde n .*

Bevis. Vi har ved Hilberts Syzygyteorem at lengden er $\leq n$, så vi trenger bare å vise at lengden er minst n . Vi skal vise at Bettitallet $\beta_{n,n} = 1$, ved induksjon på antall variable n :

1. La $n = 3$. Da er $I_\Delta = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, og $\Delta^* = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$, som er en hul trekant. Så ved Hochsters formel får vi at

$$\beta_{3,3} = \tilde{h}_1(lk_{\Delta^*} \emptyset) = \tilde{h}_1(\Delta^*) = 1$$

2. Anta OK for $n - 1$ variable. Vi bruker Hochsters formel og ser på det Alexanderduale simplisielle komplekset Δ^* . Det er generert av fasettene

$$\begin{aligned} &\{1, 2, \dots, n - 1\} \\ &\quad \{2, 3, \dots, n\} \\ &\quad \quad \{3, \dots, n, 1\} \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ &\quad \quad \quad \{n, 1, \dots, n - 2\} \end{aligned}$$

La nå $A = \{1, 2, \dots, n - 1\}$, og la B være det simplisielle komplekset generert av

$$\begin{aligned} &\{2, 3, \dots, n\} \\ &\quad \{3, \dots, n, 1\} \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ &\quad \quad \quad \{n, 1, \dots, n - 2\} \end{aligned}$$

Da har vi at $\Delta^* = A \cup B$, A er et simpleks, B er en kjegle fra n og $A \cap B$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} &\{2, 3, \dots, n - 1\} \\ &\quad \{3, \dots, n - 1, 1\} \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ &\quad \quad \quad \{n - 1, 1, \dots, n - 2\} \end{aligned}$$

Så $A \cap B$ er lik det simplisielle komplekset Γ^* , som er definert på samme måte som Δ^* , men med $n - 1$ variabler. Og ved Mayer-Vietoris sekvensen får vi at siden hverken A eller B har noen redusert homologi, så er

$$\tilde{h}_n(\Delta^*) = \tilde{h}_{n-1}(A \cap B) = 1.$$

Dermed har vi vist at $\beta_{n,n} = 1$ for alle $n \geq 3$, og dermed at den minimale resolusjonen av S/I_Δ har lengde minst n . □

4.2 Lengde 2 og 3

For å prøve å vise denne formodningen generelt tar vi først for oss de restklasseringene med minimal resolusjon av antatt korteste lengde. Vi viser først at de ringene S/I_Δ der $i = n - 1$ har en minimal resolusjon av lengde 2. Dette gjør vi ved å se på Bettitallene til S/I_Δ . Legg merke til at $F_0 = S$, siden modulen vi tar resolusjonen til er S/I_Δ . Så $\beta_{0,0} = 1$ og $\beta_{j,0} = 0$ når $j \neq 0$ for alle ringene av denne typen.

Teorem 4.2.1. *La I_Δ være idealet i $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generert av monomene*

$$\begin{aligned} &x_1x_2 \cdots x_{n-1}, \\ &x_2x_3 \cdots x_n, \\ &\quad \vdots \\ &x_nx_1 \cdots x_{n-2}, \end{aligned}$$

Da har S/I_Δ en minimal resolusjon av lengde 2.

Bevis. La I_Δ være idealet i $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generert av monomene

$$\begin{aligned} &x_1x_2 \cdots x_{n-1}, \\ &x_2x_3 \cdots x_n, \\ &\quad \vdots \\ &x_nx_1 \cdots x_{n-2}, \end{aligned}$$

Da er Aleksanderdualet Δ^* til Δ gitt ved

$$\Delta^* = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}.$$

Vi ser at $lk_{\Delta^*}(\emptyset) = \Delta^*$ kun har homologi i grad 0, og at $\tilde{h}_0(\Delta^*; \mathbb{k}) = n - 1$. Dersom vi tar lenken til et hjørne $v \in \{1, 2, \dots, n\}$, så får vi at $lk_{\Delta^*}(\{v\}) = \{\emptyset\}$, som har homologi kun i grad -1 og $\tilde{h}_{-1}(lk_{\Delta^*}(\{v\}); \mathbb{k}) = 1$. Og dersom vi tar lenken til fjes av større dimensjon får vi det irrelevante simplisielle komplekset \emptyset , som ikke har noen homologi. Ved Hochsters formel (teorem 2.2.10) får vi da at $\beta_{2,n} = n - 1$, $\beta_{1,n-1} = n$ og $\beta_{0,0} = 1$ er de eneste ikke-null Bettitallene. Og vi har dermed vist at resolusjonen har lengde 2. \square

For å bevise formodningen over for de restklasseringene som har antatt lengde 3 bruker vi teorien fra kapittel 2.3 og beskriver resolusjonen cellulært.

Teorem 4.2.2. *La I_Δ være idealet i $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generert av monomene*

$$\begin{aligned} &x_1x_2 \cdots x_i, \\ &x_2x_3 \cdots x_{i+1}, \\ &\quad \vdots \\ &x_nx_1 \cdots x_{i-1}, \end{aligned}$$

der $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i \leq n - 2$. Og la X være det cellulære komplekset som består av en polygonet med n kanter, der hjørnene er merket med monomene som generer I_Δ . Da er det cellulære komplekset støttet X en minimal resolusjon for S/I_Δ .

Bevis. Det cellulære komplekset \mathcal{F}_X støttet på X er gitt ved

$$\mathcal{F}_i = \bigoplus_{F \in X, \dim F = i-1} SF.$$

Så vi har at:

$\mathcal{F}_0 = S$, siden vi har fjeset \emptyset , som har merking $\mathbf{0}$, og dermed vekt 0.

$\mathcal{F}_1 = S(-i)^n$, siden det er n hjørner, hvert med vekt i , i det tilhørende cellekomplekset.

$\mathcal{F}_2 = S(-i-1)^n$, siden det er n kanter, hver med vekt $i+1$, i det tilhørende cellekomplekset.

$\mathcal{F}_3 = S(-n)$, siden det er 1 flate med vekt n i det tilhørende cellekomplekset.

Så det cellulære frie komplekset støttet på X ser slik ut:

$$0 \leftarrow S \leftarrow S(-i)^n \leftarrow S(-i-1)^n \leftarrow S(-n).$$

Vi må vise at dette cellulære komplekset er en resolusjon. Ved proposisjon 2.3.5 må vi da vise at $X_{\preceq \mathbf{b}}$ er asyklisk over \mathbb{k} for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{N}$. Vi deler opp beviset i fire tilfeller:

1. Dersom $\mathbf{b} \succeq (1, 1, \dots, 1)$ får vi at $X_{\preceq \mathbf{b}} = X$, som er asyklisk.
2. Anta at $b_r = 0$ og $b_j = 1$ for $j \neq r$. Da blir i etterfølgende hjørner tatt vekk når vi går fra X til $X_{\preceq \mathbf{b}}$. Så da er $X_{\preceq \mathbf{b}}$ enkelt sammenhengende og uten sykler, og vi får ingen homologi.
3. Anta at $b_r = 0$, $b_s = 0$ og $b_j = 1$ for $j \neq r, s$. Først blir i etterfølgende hjørner tatt vekk når vi går fra X til $X_{\preceq (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}$, og så blir i etterfølgende hjørner tatt vekk når vi går fra $X_{\preceq (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}$ til $X_{\preceq \mathbf{b}}$. Vi har at $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i \leq n-1$.
Hvis n er jamn så er $\frac{n}{2} \leq i$. Da får vi enten at alle hjørnene blir fjernet, slik at $X_{\preceq \mathbf{b}} = \emptyset$, eller at de to hjørnemengdene snitter hverandre ikke-tomt, slik at $X_{\preceq \mathbf{b}}$ er sammenhengende og uten sykler.
Dersom n er odde så er $\frac{n-1}{2} \leq i$. Da får vi enten at alle hjørnene utenom ett blir fjernet, eller at de to hjørnemengdene snitter ikke-tomt, slik at $X_{\preceq \mathbf{b}}$ er sammenhengende og uten sykler.
4. Anta at antall koordinater i \mathbf{b} som er 0 er ≥ 3 . Etter at vi har fjernet de to første hjørnemengdene har vi mindre enn $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ hjørner igjen.
Dersom n er jamn er minst $\frac{n}{2} + 1$ hjørner blitt fjernet.
Dersom n er odde er minst $\frac{n-1}{2} + 1$ hjørner blitt fjernet.
Så hvis vi skal fjerne flere slike mengder av i etterfølgende hjørner så overlapper de med de hjørnene som allerede er fjernet og det som blir igjen er sammenhengende.

Vi har dermed vist at komplekset er en resolusjon.

Ved definisjonen er avbildningene i komplekset gitt ved

$$\phi_i(F) = \sum_{f \text{ setter } GiF} \text{sign}(G, F) \mathbf{x}^{\mathbf{a}_F - \mathbf{a}_G} G$$

og vi ser at $\text{im}(\phi_1) = I_\Delta$, så $S/I_\Delta = \text{coker} \phi_1$ og komplekset er dermed en resolusjon for S/I_Δ .

Vi må til slutt vise at resolusjonen er minimal. La $m = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, det maksimale idealet i $S = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Fra definisjonen av minimale komplekser i kapittel 2.2 har vi at

$$\mathcal{F} : 0 \leftarrow S \leftarrow S(-i)^n \leftarrow S(-i-1)^n \leftarrow S(-n)$$

er minimalt dersom alle avbildningene i komplekset $\mathcal{F} \otimes_S S/m$ er 0. Vi har at

$$S(-a) \otimes_S S/m = S(-a)/mS(-a),$$

og siden $S/m = \mathbb{k}$ har vi at

$$S(-a) \otimes_S S/m = \mathbb{k}(-a),$$

så det tensoriserte komplekset blir

$$\mathcal{F} \otimes S/m : 0 \leftarrow \mathbb{k} \leftarrow \mathbb{k}(-i)^n \leftarrow \mathbb{k}(-i-1)^n \leftarrow \mathbb{k}(-n).$$

Og når $a \neq b$ så vil enhver avbildning $\mathbb{k}(-a) \rightarrow \mathbb{k}(-b)^n$ være 0 og dermed må en eventuell avbildning inn i $\mathbb{k}(-a)$ være 0-avbildningen. Vi har at $0 \neq i$, $i \neq i+1$ og $i+1 \neq n$, og \mathcal{F} er dermed et minimalt kompleks. □

Korollar 4.2.3. *La I_Δ være idealet i $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generert av monomene*

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \cdots x_i, \\ & x_2 x_3 \cdots x_{i+1}, \\ & \quad \vdots \\ & x_n x_1 \cdots x_{i-1}, \end{aligned}$$

der $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i \leq n-2$. Da har den minimale resolusjonen til S/I_Δ lengde 3.

Vi har dermed vist formodningen vår på side 20 gjelder når $i = n-1$ og når $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i \leq n-2$. For å bevise neste skritt må vi bruke en litt annen fremgangsmåte.

Kapittel 5

Lengde 4

Vi ser nå på tilfellet når $i = \frac{n}{2} - 1$ og viser at i dette tilfellet har den minimale resolusjonen til S/I_Δ lengde 4. Dette gjøres ved å bruke Hochsters formel til å studere Bettitallene for resolusjonen. Mayer-Vietoris sekvensen blir et viktig hjelpemiddel her, for å bestemme redusert homologi. Den mest kompliserte delen av dette beviset finner vi når vi skal bestemme Bettitallene $\beta_{j,\sigma}$ der $|\sigma| = n$, da brukes induksjon.

Teorem 5.0.4. *La I_Δ være idealet i $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generert av monomene*

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \cdots x_i, \\ & x_2 x_3 \cdots x_{i+1}, \\ & \qquad \qquad \qquad \vdots \\ & x_n x_1 \cdots x_{i-1}, \end{aligned}$$

Dersom n er et partall og $i = \frac{n}{2} - 1$ så har S/I_Δ disse \mathbb{N} -graderte Bettitallene:

$$\begin{aligned} \beta_{0,0} &= 1 \\ \beta_{1,\frac{n}{2}-1} &= n \\ \beta_{2,\frac{n}{2}} &= n \\ \beta_{2,n-2} &= \frac{n}{2} \\ \beta_{3,n-1} &= n \\ \beta_{4,n} &= \frac{n}{2} - 1 \end{aligned}$$

Alle de andre Bettitallene er 0.

Bevis. Vi deler beviset inn i 7 ulike tilfeller.

- **Tilfelle 1**

Hvis vi har tilfellet $0 < |\sigma| < \frac{n}{2} - 1$ får vi at

$$|\bar{\sigma}| > n - \left(\frac{n}{2} - 1\right) = n - i,$$

så $|\bar{\sigma}|$ er ekte større enn strenglengden til fasettene i Δ^* , og da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$, som ikke har noen homologi. Ved Hochsters formel får vi da at $\beta_{j,\sigma} = 0$.

- **Tilfelle 2**

Vi ser på tilfellet $|\sigma| = \frac{n}{2} - 1$. Da er

$$|\bar{\sigma}| = n - \left(\frac{n}{2} - 1\right) = n - i,$$

som er størrelsen på fasettene i Δ^* . Vi har to muligheter:

- Den ene muligheten er at $\bar{\sigma}$ er sammenhengende (mod n). Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\emptyset\}$, så $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ har kun redusert homologi i grad -1 og $\tilde{h}_{-1}lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = 1$.
Vi har n mulige $\bar{\sigma}$ som er sammenhengende (mod n), så vi får da, ved Hochsters formel, at $\beta_{1, \frac{n}{2}-1} = n$.
- Den andre muligheten er at $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende (mod n). Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$ og vi får ingen redusert homologi.

Dermed har vi vist at $\beta_{1, \frac{n}{2}-1} = n$ og $\beta_{j, \frac{n}{2}-1} = 0$ for alle $j \neq 1$.

• **Tilfelle 3**

Dersom $|\sigma| = \frac{n}{2}$ så har vi at

$$|\bar{\sigma}| = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2},$$

som er en mindre enn strenglengden til fasettene i Δ^* . Dersom $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende (mod n) så får vi to muligheter:

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset, \text{ eller } lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\{v\}\} \text{ (nøyaktig ett hjørne).}$$

I disse to tilfellene har $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ ingen redusert homologi.

Dersom $\bar{\sigma}$ er sammenhengende (mod n) så får vi at

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\{v\}, \{w\}\}, \text{ (de to hjørnene på hver side av } \bar{\sigma}\text{).}$$

Og vi har n mulige $\bar{\sigma}$ som er sammenhengende (mod n). Så vi har nøyaktig n ulike $\bar{\sigma}$ som gir at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ har redusert homologi, disse har kun redusert homologi i grad 0, og $\tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}))$ er da lik 1. Vi bruker Hochsters formel og ser at $\beta_{2, \frac{n}{2}} = n$ og $\beta_{j, \frac{n}{2}} = 0$ for alle $j \neq 2$.

• **Tilfelle 4**

Vi ser på tilfellet $\frac{n}{2} < |\sigma| < n - 2$. Da er

$$2 < |\bar{\sigma}| < \frac{n}{2}.$$

Vi deler opp i to muligheter: $\bar{\sigma}$ er sammenhengende og $\bar{\sigma}$ er ikke sammenhengende (mod n).

Dersom $\bar{\sigma}$ er sammenhengende, la $v \in \{1, \dots, n\}$ og

$$\bar{\sigma} = \{v, v+1, \dots, v+l \mid (\text{mod } n)\}$$

for en $l \in \{2, \dots, \frac{n}{2} - 2\}$. Da får vi at fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ er

$$\begin{aligned} & \{v - \frac{n}{2} + l, \dots, v - 1\} \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & \{v - 1, v + l + 1, \dots, v + \frac{n}{2} - 1\} \\ & \{v + l + 1, \dots, v + \frac{n}{2}\} \end{aligned}$$

Vi bruker så Mayer-Vietoris sekvensen (korollar 2.2.8) for å bestemme den reduserte homologien til $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$. Vi tar først lenken og restriksjonen til $v + \frac{n}{2}$:

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma} \cup \{v + \frac{n}{2}\}) = \{\{v + l + 1, \dots, v + \frac{n}{2} - 1\}\}$$

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})|_{-\{v + \frac{n}{2}\}} = \{\{v - \frac{n}{2} + l, \dots, v - 1\}, \dots, \{v - 2, \dots, v + \frac{n}{2} - 2\}, \{v - 1, \dots, v + \frac{n}{2} - 1\}\}$$

Vi ser at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma} \cup \{v + \frac{n}{2}\})$ er et simpleks, så den har ingen redusert homologi. Og $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})|_{-\{v + \frac{n}{2}\}}$ er en kjegle fra $v - 1$, så den har heller ingen redusert homologi. Fra M-V sekvensen får vi da at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ ikke har noen redusert homologi.

Dersom $|\bar{\sigma}|$ ikke er sammenhengende får vi to muligheter:

1. $\bar{\sigma}$ er ikke inneholdt i noen av fasettene til Δ^* . Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$, og vi får ingen redusert homologi.
2. $\bar{\sigma}$ er inneholdt i minst en av fasettene til Δ^* , si $\{1, 2, \dots, \frac{n}{2} + 1\}$. Da finnes en $v \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} + 1\} \setminus \bar{\sigma}$, slik at det eksisterer to elementer $v', v'' \in \bar{\sigma}$ med $v' \in \{1, \dots, v - 1\}$ og $v'' \in \{v + 1, \dots, \frac{n}{2} + 1\}$ (siden $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende). Anta at det finnes en fasett F slik at $\bar{\sigma} \subset F$ og $v \notin F$. Da er $v', v'' \in F$, så vi må ha at $\{\frac{n}{2} + 2, \dots, n\} \subset F$ (siden $\bar{\sigma}$ er sammenhengende og $v \notin \bar{\sigma}$). Og siden $|F| = \frac{n}{2} + 1$, kan vi bare ha med to hjørner til i F . Men vi har at $\bar{\sigma} \cap \{\frac{n}{2} + 2, \dots, n\} = \emptyset$, så hvis $\bar{\sigma}$ skal være inneholdt i F så må $|\bar{\sigma}| = 2$, noe som gir en selvmotsigelse. Så dermed har vi vist at v er inneholdt i alle fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$, og denne lenken er dermed en kjegle fra v og har ingen redusert homologi.

Vi har dermed vist at $\beta_{i,\sigma} = 0$ når $\frac{n}{2} < |\sigma| < n - 2$.

• **Tilfelle 5**

Hvis $|\sigma| = n - 2$ så er $|\bar{\sigma}| = 2$. Vi lar $v \in \{1, \dots, n\}$ og deler inn i tre muligheter:

- Den første muligheten er at

$$\bar{\sigma} = \{v, v + \frac{n}{2}\}.$$

Da vil

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\{v + 1, v + 2, \dots, v + \frac{n}{2} - 1\}, \{v + \frac{n}{2} + 1, \dots, v + n - 1\}\},$$

som består av to ikke-sammenhengende simplekser. Så $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ har kun redusert homologi i grad 0, og $\tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k}) = 1$. Det er $\frac{n}{2}$ mulige valg for v som gir en unik mengde $\{v, v + \frac{n}{2}\}$, så ved Hochsters formel får vi da at $\beta_{2,n-2} \geq \frac{n}{2}$.

- Den andre muligheten er at $\bar{\sigma}$ er sammenhengende (mod n). Vi lar

$$\bar{\sigma} = \{v, v + 1\}$$

for en $v \in \{1, \dots, n\}$. Vi kan da bruke Mayer-Vietoris sekvensen (korollar 2.2.8) til å vise at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ ikke har noen redusert homologi. La oss se på lenken og restriksjonen av $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ til $\{v + \frac{n}{2}\}$:

Lenken $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma} \cup \{v + \frac{n}{2}\})$ har kun en fasett, nemlig

$$\{v + 2, v + 3, \dots, v + \frac{n}{2} - 1\}$$

Så den er et simpleks og har dermed ingen redusert homologi. $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})_{-\{v+\frac{n}{2}\}}$ har fasettene

$$\begin{aligned} & \{v + \frac{n}{2} + 1, \dots, v + n - 1\} \\ & \{v + \frac{n}{2} + 2, \dots, v + n - 1, v + 3\} \\ & \quad \vdots \\ & \{v + n - 1, v + 3, \dots, v + \frac{n}{2} - 1\} \end{aligned}$$

Vi ser at den er en kjegle ned fra punktet $v + n - 1$, så den har ingen redusert homologi. Og ved M-V sekvensen ser vi at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ da heller ikke har noen redusert homologi.

- Den tredje muligheten er at $\bar{\sigma}$ er ikke sammenhengende (mod n) og ikke lik det første tilfellet. Vi ser først på tilfellet der

$$\bar{\sigma} = \{v, v + k\}$$

for en $v \in \{1, 2, \dots, n\}$ og en $k \in \{2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$. Da har $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ fasettene

$$\begin{aligned} & \{v + \frac{n}{2} + k + 1, \dots, v - 1, v + 1, \dots, v + k - 1\} \\ & \{v + \frac{n}{2} + k + 2, \dots, v - 1, v + 1, \dots, v + k - 1, v + k + 1\} \\ & \quad \vdots \\ & \{v + 1, \dots, v + k - 1, v + k + 1, \dots, v + \frac{n}{2} - 1\} \end{aligned}$$

Vi ser at den er en kjegle ned fra punktet $v + 1$, og at den dermed ikke har noen redusert homologi.

Så ser vi på tilfellet der

$$\bar{\sigma} = \{v, v - k\}$$

for en $v \in \{1, 2, \dots, n\}$ og en $k \in \{2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$. Da har $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ fasettene

$$\begin{aligned} & \{v + \frac{n}{2}, \dots, v - k - 1, v - k + 1, \dots, v - 1\} \\ & \{v + \frac{n}{2} + 1, \dots, v - k - 1, v - k + 1, \dots, v - 1, v + 1\} \\ & \quad \vdots \\ & \{v - k + 1, \dots, v - 1, v + 1, \dots, v + \frac{n}{2} - k\} \end{aligned}$$

Vi ser at den er en kjegle ned fra punktet $v - 1$, og den har dermed ingen redusert homologi.

Vi har dermed vist at $\beta_{2,n-2} = \frac{n}{2}$ og at $\beta_{j,n-2} = 0$ for alle $j \neq 2$.

- **Tilfelle 6**

Dersom $|\sigma| = n - 1$ så er $|\bar{\sigma}| = 1$. Vi lar $\bar{\sigma} = \{v\}$ for en $v \in \{1, \dots, n\}$. Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$

gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{v + \frac{n}{2}, \dots, v - 1\} \\ & \{v + \frac{n}{2} + 1, \dots, v - 1, v + 1\} \\ & \quad \vdots \\ & \{v - 1, v + 1, \dots, v + \frac{n}{2} - 1\} \\ & \{v + 1, \dots, v + \frac{n}{2}\} \end{aligned}$$

Vi skal vise at $\tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k}) = 1$, ved å bruke Mayer-Vietoris sekvensen (korollar 2.2.8). Vi ser på lenken og restriksjonen av $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ til $\{v + \frac{n}{2}\}$:

Lenken

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma} \cup \{v + \frac{n}{2}\}) = \{\{v + \frac{n}{2} + 1, \dots, v - 1\}, \{v + 1, \dots, v + \frac{n}{2} - 1\}\}$$

består av to disjunkte simplekser, så den har kun redusert homologi i grad 0 og

$$\tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma} \cup \{v + \frac{n}{2}\}); \mathbb{k}) = 1.$$

Restriksjonen

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})|_{-\{v + \frac{n}{2}\}} = \{\{v + \frac{n}{2} - 1, \dots, v - 1, v + 1\}, \dots, \{v - 1, v + 1, \dots, v + \frac{n}{2} - 1\}\}$$

er en kjegle ned fra punktet $v - 1$ (også fra $v + 1$), så den har ingen redusert homologi. Vi bruker Mayer-Vietoris sekvensen og får at siden

$$\tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})|_{-\{v + \frac{n}{2}\}}; \mathbb{k}) = 0 \text{ og } \tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})|_{-\{v + \frac{n}{2}\}}; \mathbb{k}) = 0$$

så er

$$\tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k}) = \tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma} \cup \{v + \frac{n}{2}\}); \mathbb{k}) = 1$$

og $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ har ingen annen redusert homologi. Det er n muligheter for $\bar{\sigma} = \{v\}$, så da får vi, ved Hochsters formel, at $\beta_{3, n-1} = n$ og at $\beta_{j, n-1} = 0$ for alle $j \neq 3$.

• **Tilfelle 7**

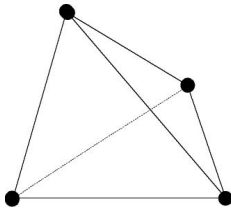
Dersom $|\sigma| = n$ så er $|\bar{\sigma}| = \emptyset$ og $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \Delta^*$.

Vi vil vise at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ kun har redusert homologi i grad 2, og at $\tilde{h}_2(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})) = \frac{n}{2} - 1$. Vi viser dette ved hjelp av induksjon på m , slik at $n = 2m$.

1. La $m = 2$. Da er $n = 4$ og $i = 1$, ved betingelsene i teoremet, og vi får at

$$\Delta^* = \{\{2, 3, 4\}, \{3, 4, 1\}, \{4, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Dette er det hule tetrahederet med hjørnemengde $\{1, 2, 3, 4\}$:



Så vi får da at $\tilde{h}_2(\Delta^*; \mathbb{k}) = 1$, og Δ^* har ingen annen redusert homologi.

2. Anta at resultatet er OK for $n = 2m$ og se på når $n = 2(m + 1)$. Også her bruker vi Mayer-Vietoris sekvensen og vi ser først på lenken til 1:

$$lk_{\Delta^*}(\{1\}) = \left\{ \left\{ 2, \dots, \frac{n}{2} + 1 \right\}, \left\{ \frac{n}{2} + 1, \dots, n \right\}, \dots, \left\{ n, 2, \dots, \frac{n}{2} \right\} \right\}$$

For å finne ut mer om den reduserte homologien til $lk_{\Delta^*}(\{1\})$ tar vi lenken og restriksjonen til $\frac{n}{2} + 1$:

Lenken

$$lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n}{2} + 1\}) = \left\{ \left\{ 2, \dots, \frac{n}{2} \right\}, \left\{ \frac{n}{2} + 2, \dots, n \right\} \right\}$$

består av to disjunkte simplekser, så den har kun redusert homologi i grad 0, og

$$\tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n}{2} + 1\}); \mathbb{k}) = 1.$$

Restriksjonen

$$lk_{\Delta^*}(\{1\})|_{-\{\frac{n}{2}+1\}} = \left\{ \left\{ 2, \dots, \frac{n}{2} \right\}, \left\{ \frac{n}{2} + 2, \dots, 2 \right\}, \dots, \left\{ n, 2, \dots, \frac{n}{2} \right\} \right\}$$

er en kjegle ned fra punktet 2, så den har ingen redusert homologi.

Ved å bruke M-V sekvensen ser vi at siden

$$\tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\{1\})|_{-\{\frac{n}{2}+1\}}; \mathbb{k}) = 0 \text{ og } \tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\{1\})|_{-\{\frac{n}{2}+1\}}; \mathbb{k}) = 0$$

så får vi

$$\tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\{1\}); \mathbb{k}) = \tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n}{2} + 1\}); \mathbb{k}) = 1$$

Og $lk_{\Delta^*}(\{1\})$ har ingen annen redusert homologi.

Så ser vi på restriksjonen av Δ^* til 1:

$$\Delta^*|_{-\{1\}} = \left\{ \left\{ 2, \dots, \frac{n}{2} + 2 \right\}, \left\{ 3, \dots, \frac{n}{2} + 3 \right\}, \dots, \left\{ \frac{n}{2}, \dots, n \right\}, \left\{ \frac{n}{2} + 2, \dots, n, 2 \right\}, \dots, \left\{ n, 2, \dots, \frac{n}{2} \right\} \right\}$$

Her må vi også bruke Mayer-Vietoris sekvensen en gang til, og vi tar lenken og restriksjonen av $\Delta^*|_{-\{1\}}$ til $\frac{n}{2} + 1$:

Lenken $lk_{\Delta^*}(\frac{n}{2} + 1)|_{-\{1\}}$ har fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ 2, \dots, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 2 \right\} \\ & \left\{ 3, \dots, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 3 \right\} \\ & \quad \vdots \\ & \left\{ \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \right\} \end{aligned}$$

så den er en kjegle ned fra punktet $\frac{n}{2}$ og har ingen redusert homologi.

□

Korollar 5.0.5. *La I_Δ være idealet i $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generert monomene*

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \cdots x_i, \\ & x_2 x_3 \cdots x_{i+1}, \\ & \quad \vdots \\ & x_n x_1 \cdots x_{i-1}, \end{aligned}$$

Dersom n er et partall og $i = \frac{n}{2} - 1$ så har den minimale resolusjonen av S/I_Δ lengde 4.

Kapittel 6

Lengde 5, nedre skranke

Vi har videre forsøkt å vise formodningen i kapittel 4.1 for de idealene hvis restkropper har minimal resolusjon av antatt lengde 5. Hypotesen er at dette er nøyaktig de idealene som er generert av monomene

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \cdots x_i \\ & x_2 x_3 \cdots x_{i+1}, \\ & \vdots \\ & x_n x_1 \cdots x_{i-1}, \end{aligned}$$

der $2(i+1) < n < 3(i+1)$. Vi begynner med å se på den nedre skranken, tilfellet der $n = 2i+3$. Dette tilfellet bevises på lignende måte som tilfellet der den minimale resolusjonen har lengde 4 (kapittel 5), så det er ikke nødvendig å studere begge disse bevisene inngående. Den største forskjellen finner vi i tilfelle 7, der vi i dette beviset trenger noen flere steg for å komme i mål.

Teorem 6.0.6. *La idealet I_Δ i $S = \mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$ være generert av monomene*

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \cdots x_i, \\ & x_2 x_3 \cdots x_{i+1}, \\ & \vdots \\ & x_n x_1 \cdots x_{i-1}, \end{aligned}$$

der $n = 2i + 3$. Da har restklasseringen S/I_Δ minimal resolusjon av lengde 5.

Bevis. Vi skal bruke Hochsters formel,

$$\beta_{j+1, \sigma}(S/I_\Delta) = \dim_{\mathbb{k}} \tilde{H}_{j-1}(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k}),$$

og vise at $\beta_{5,n} = 1$ og $\beta_{j,|\sigma|} = 0$ for alle $j > 5$ når $|\sigma| \leq n$. Beviset deles inn i 7 tilfeller:

- $0 < |\sigma| < \frac{n-3}{2}$
- $|\sigma| = \frac{n-3}{2}$

- $|\sigma| = \frac{n-1}{2}$
- $\frac{n-1}{2} < |\sigma| < n-2$
- $|\sigma| = n-2$
- $|\sigma| = n-1$
- $|\sigma| = n$

Dersom idealet I_Δ er på formen som i teoremet over vil Alexanderdualet Δ^* til det tilhørende simplisielle kompleks ha følgende fasetter:

$$\begin{aligned}
& \{1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\} \\
& \{2, 3, \dots, \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}\} \\
& \quad \vdots \\
& \{\frac{n-1}{2}, \dots, n-1, n\} \\
& \{\frac{n+1}{2}, \dots, n-1, n, 1\} \\
& \{\frac{n+3}{2}, \dots, n, 1, 2\} \\
& \quad \vdots \\
& \{n, 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}\}
\end{aligned}$$

• **Tilfelle 1**

Vi ser først på tilfellet $0 < |\sigma| < \frac{n-3}{2}$.

Da er $\frac{n+3}{2} < |\bar{\sigma}| < n$, så $|\bar{\sigma}|$ er ekte større enn strenglengden til fasettene i Δ^* , og dermed er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$ og $\beta_{i,\sigma} = 0$ for alle i .

• **Tilfelle 2**

Så ser vi på tilfellet når $|\sigma| = \frac{n-3}{2}$.

Da er $|\bar{\sigma}| = \frac{n+3}{2}$ og vi deler igjen inn i to tilfeller:

1. $\bar{\sigma}$ er sammenhengende, modulo n . Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\emptyset\}$, som kun har redusert homologi i grad -1. Vi har n ulike muligheter for $\bar{\sigma}$, så vi får at $\beta_{1, \frac{n-3}{2}} = n$.
2. $\bar{\sigma}$ er ikke sammenhengende, modulo n . Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$, og $\beta_{i,\sigma} = 0$ for alle i .

Så $\beta_{1, \frac{n-3}{2}} = n$ er det eneste ikke-null bettitallet i grad $\frac{n-3}{2}$.

• **Tilfelle 3**

Dersom $|\sigma| = \frac{n-1}{2}$ så er $|\bar{\sigma}| = \frac{n+1}{2}$, som er én mindre enn strenglengden til fasettene i Δ^* . Vi har da to muligheter:

1. $\bar{\sigma}$ er ikke sammenhengende modulo n . Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$, eller $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\{v\}\}$ for en $v \in \{1, \dots, n\}$. I begge tilfellene får vi ingen redusert homologi.

2. $\bar{\sigma}$ er sammenhengende modulo n . Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\{v\}, \{w\}\}$, (de to hjørnene på hver side av $\bar{\sigma}$). I dette tilfellet får vi redusert homologi kun i grad 0, og vi får at $\beta_{2, \frac{n-1}{2}} = n$.

Så $\beta_{2, \frac{n-1}{2}} = n$ er det eneste ikke-null bettitallet i grad $\frac{n-1}{2}$.

• **Tilfelle 4**

Når $\frac{n-1}{2} < |\sigma| < n-2$ får vi at $2 < |\bar{\sigma}| < \frac{n+1}{2}$. Vi deler inn i to muligheter:

1. $\bar{\sigma}$ er sammenhengende modulo n . Da kan vi skrive $\bar{\sigma}$ på formen

$$\bar{\sigma} = \{v, v+1, \dots, v+l \mid \text{mod } n\}$$

for en $v \in \{1, \dots, n\}$ og en $l \in \{2, \dots, \frac{n-3}{2}\}$, og da kan vi skrive fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ på formen

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\{ v - \frac{n+3}{2} + l + 1, \dots, v-1 \right\}, \right. \\ & \left\{ v - \frac{n+3}{2} + l + 2, \dots, v-1, v+l+1 \right\}, \\ & \quad \vdots \\ & \left\{ v-1, v+l+1, \dots, v + \frac{n-1}{2} \right\}, \\ & \left. \left\{ v+l+1, \dots, v + \frac{n+1}{2} \right\} \right\} \end{aligned}$$

Vi har at $v - \frac{n+3}{2} \equiv v + \frac{n-3}{2}$ modulo n , så vi kan da skrive fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ på formen

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\{ v + \frac{n-1}{2} + l, \dots, v-1 \right\}, \right. \\ & \left\{ v + \frac{n-1}{2} + l + 1, \dots, v-1, v+l+1 \right\}, \\ & \quad \vdots \\ & \left\{ v-1, v+l+1, \dots, v + \frac{n-1}{2} \right\}, \\ & \left. \left\{ v+l+1, \dots, v + \frac{n+1}{2} \right\} \right\} \end{aligned}$$

Vi bruker så Mayer-Vietoris sekvensen (korollar 2.2.8) og tar lenken og restriksjonen til $v + \frac{n+1}{2}$:

Lenken

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma} \cup \{v + \frac{n+1}{2}\}) = \{\{v+l+1, \dots, v + \frac{n-1}{2}\}\}$$

er et simpleks, så den har ingen redusert homologi.

Fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})|_{-\{v+\frac{n+1}{2}\}}$ er

$$\begin{aligned} & \{v + \frac{n-1}{2} + l, \dots, v-1\}, \\ & \{v + \frac{n-1}{2} + l + 1, \dots, v-1, v+l+1\}, \\ & \vdots \\ & \{v-1, v+l+1, \dots, v + \frac{n-1}{2}\} \end{aligned}$$

Vi ser at denne er en kjegle fra $v-1$, så den har heller ingen redusert homologi. Ved Mayer-Vietoris sekvensen ser vi dermed at vi får ingen redusert homologi i dette tilfellet.

2. $\bar{\sigma}$ er ikke sammenhengende modulo n .

Da har vi to muligheter:

(a) Den første er at $\bar{\sigma}$ ikke er inneholdt i noen av fasettene til Δ^* . Da er

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset,$$

og vi får ingen redusert homologi.

(b) Den andre muligheten er at $\bar{\sigma}$ er inneholdt i minst en av fasettene til Δ^* , si $\{1, 2, \dots, \frac{n+3}{2}\}$. Da vet vi at det finnes en $v \in \{1, 2, \dots, \frac{n+3}{2}\} \setminus \bar{\sigma}$ slik at det eksisterer to elementer $v', v'' \in \bar{\sigma}$ med $v' \in \{1, \dots, v-1\}$ og $v'' \in \{v+1, \dots, \frac{n+3}{2}\}$ (siden $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende). Anta at det finnes en fasett F med $\bar{\sigma} \subset F$ og $v \notin F$. Vi har da at $v', v'' \in F$, så vi må ha $\{\frac{n+5}{2}, \dots, n\} \subset F$ (siden $v \notin F$). Men vi vet også at $\bar{\sigma} \subset F \setminus \{\frac{n+5}{2}, \dots, n\}$, noe som betyr at $|\bar{\sigma}| \leq 3$. Den eneste muligheten er da at $|\bar{\sigma}| = 3$, og siden F er sammenhengende får vi kun to muligheter for $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma} = \{1, 2, \frac{n+3}{2}\} \text{ eller } \bar{\sigma} = \{1, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\}$$

Og vi har at

$$lk_{\Delta^*}(\{1, 2, \frac{n+3}{2}\}) = \{\{3, 4, \dots, \frac{n+1}{2}\}, \{\frac{n+5}{2}, \dots, n\}\}$$

$$lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\}) = \{\{2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}\}, \{\frac{n+5}{2}, \dots, n\}\}$$

Begge disse lenkene består av to disjunkte simplekser, så vi får kun homologi i grad 0. Og dersom $\bar{\sigma}$ ikke er en av disse to så betyr det at v må være inneholdt i alle fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$, og denne blir dermed en kjegle fra v .

Dermed har vi vist at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ har homologi høyst i grad 0 når $\frac{n-1}{2} < |\sigma| < n-2$.

• **Tilfelle 5**

Dersom $|\sigma| = n-2$ får vi at $|\bar{\sigma}| = 2$. Vi deler inn i tre tilfeller:

1. $\bar{\sigma}$ er sammenhengende modulo n .

Da kan $\bar{\sigma}$ skrives på formen

$$\bar{\sigma} = \{v, v + 1\}$$

for en $v \in \{1, 2, \dots, n\}$. Og fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ kan skrives på følgende vis:

$$\begin{aligned} & \{v - \frac{n-1}{2}, \dots, v-1\}, \\ & \{v - \frac{n-3}{2}, \dots, v-1, v+2\}, \\ & \vdots \\ & \{v-1, v+2, \dots, v + \frac{n-1}{2}\}, \\ & \{v+2, \dots, v + \frac{n+1}{2}\} \end{aligned}$$

Vi har at $v - \frac{n-1}{2} \equiv v + \frac{n+1}{2}$ (modulo n), og igjen bruker vi Mayer-Vietoris sekvensen og tar lenken og restriksjonen til $v + \frac{n+1}{2}$:

Fasettene i restriksjonen $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})|_{-\{v + \frac{n+1}{2}\}}$ er på formen

$$\begin{aligned} & \{v - \frac{n-3}{2}, \dots, v-1, v+2\}, \\ & \vdots \\ & \{v-1, v+2, \dots, v + \frac{n-1}{2}\} \end{aligned}$$

Vi ser at denne er en kjegle fra $v-1$, så den har ingen redusert homologi.

Lenken

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma} \cup \{v + \frac{n+1}{2}\}) = \{\{v - \frac{n-3}{2}, \dots, v-1\}, \{v+2, \dots, v + \frac{n-1}{2}\}\}$$

er en union av to disjunkte simplekser, så den har redusert homologi kun i grad 0. Ved M-V sekvensen har vi da at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ ikke har noe redusert homologi i homologisk grad større enn 1.

2. $\bar{\sigma}$ er ikke sammenhengende modulo n og er på formen

$$\bar{\sigma} = \{v, v + \frac{n+1}{2}\}.$$

Da er

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\{v+1, \dots, v + \frac{n-1}{2}\}, \{v + \frac{n+3}{2}, \dots, v-1\}\},$$

som har redusert homologi kun i homologisk grad 0.

3. $\bar{\sigma}$ er ikke sammenhengende modulo n og er ikke på formen $\bar{\sigma} = \{v, v + \frac{n+1}{2}\}$.

La først

$$\bar{\sigma} = \{v, v + k\}$$

for en $k \in \{2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}\}$. Da har $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ fasettene (modulo n):

$$\begin{aligned} & \{v - \frac{n+1}{2} + k, \dots, v-1, v+1, \dots, v+k-1\}, \\ & \{v - \frac{n+1}{2} + k + 1, \dots, v-1, v+1, \dots, v+k-1, v+k+1\}, \\ & \vdots \\ & \{v+1, \dots, v+k-1, v+k+1, \dots, v + \frac{n+1}{2}\} \end{aligned}$$

Denne er en kjegle fra $v+1$, så den har ingen redusert homologi. Vi ser på samme måte at i tilfellet der

$$\bar{\sigma} = \{v, v-k\}$$

for en $k \in \{2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ får vi heller ingen redusert homologi,

Dermed har vi sett at når $|\sigma| = n-2$ så har $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ ikke noe redusert homologi i homologisk grad høyere enn 1.

• **Tilfelle 6**

Dersom $|\sigma| = n-1$ får vi $|\bar{\sigma}| = 1$. La

$$\bar{\sigma} = \{v\}$$

for en $v \in \{1, \dots, n\}$. Da er fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ gitt ved

$$\begin{aligned} & \{v+1, \dots, v + \frac{n+1}{2}\} \\ & \{v + \frac{n-1}{2}, \dots, v-1\} \\ & \{v + \frac{n+1}{2}, \dots, v-1, v+1\} \\ & \vdots \\ & \{v-1, v+1, \dots, v + \frac{n-1}{2}\}, \end{aligned}$$

Vi skal nå bruke Mayer-Vietoris sekvensen fra teorem 2.2.4.

La

$$A = \{\{v+1, \dots, v + \frac{n+1}{2}\}\}$$

og la B være gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{v + \frac{n-1}{2}, \dots, v-1\} \\ & \{v + \frac{n+1}{2}, \dots, v-1, v+1\} \\ & \vdots \\ & \{v-1, v+1, \dots, v + \frac{n-1}{2}\}, \end{aligned}$$

Da er

$$A \cap B = \left\{ \left\{ v+1, \dots, v + \frac{n-1}{2} \right\}, \left\{ v + \frac{n-1}{2}, v + \frac{n+1}{2} \right\}, \left\{ v + \frac{n+1}{2}, v+1 \right\} \right\},$$

som har redusert homologi kun i grad 1.

A er et simpleks og B er en kjegle fra $v-1$, så vi får at

$$\dim_{\mathbb{k}}(\tilde{H}_j(A) \oplus \tilde{H}_j(B)) = 0$$

for alle j . Og da har vi at

$$\tilde{h}_2(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})) = \tilde{h}_1(A \cap B) = 1,$$

og $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ har ingen annen redusert homologi.

• **Tilfelle 7**

Det siste tilfellet er når $|\sigma| = n$. Da er $|\bar{\sigma}| = 0$, så $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \Delta^*$. Også her skal vi bruke Mayer-Vietoris sekvensen, og vi starter med å ta lenken og restriksjonen til 1 av Δ^* .

Lenken $lk_{\Delta^*}(\{1\})$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ 2, \dots, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2} \right\} \\ & \left\{ \frac{n+1}{2}, \dots, n-1, n \right\} \\ & \left\{ \frac{n+3}{2}, \dots, n, 2 \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ n, 2, \dots, \frac{n+1}{2} \right\}, \end{aligned}$$

og restriksjonen $\Delta^*|_{-\{1\}}$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ 2, 3, \dots, \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2} \right\} \\ & \left\{ 3, 4, \dots, \frac{n+7}{2} \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ \frac{n-1}{2}, \dots, n-1, n \right\} \\ & \left\{ \frac{n+3}{2}, \dots, n, 2 \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ n, 2, \dots, \frac{n+1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Vi tar først for oss $lk_{\Delta^*}(\{1\})$ og tar lenken og restriksjonen til $\frac{n+1}{2}$.

Lenken $lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}\})$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ 2, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2} \right\} \\ & \left\{ \frac{n+3}{2}, \dots, n-1, n \right\} \\ & \left\{ n, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \right\}, \end{aligned}$$

og restriksjonen $lk_{\Delta^*}(\{1\})|_{-\{\frac{n+1}{2}\}}$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \{2, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}\} \\ & \{\frac{n+3}{2}, \dots, n, 2\} \\ & \vdots \\ & \{n-1, n, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}. \end{aligned}$$

Vi ser at $lk_{\Delta^*}(\{1\})|_{-\{\frac{n+1}{2}\}}$ er en kjegle fra 2, så den har ingen redusert homologi.

Vi går videre med $lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}\})$ og tar lenken og restriksjonen til $\frac{n+3}{2}$:

Lenken er gitt ved

$$lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\}) = \{\{2, \dots, \frac{n-1}{2}\}, \{\frac{n+5}{2}, \dots, n\}\},$$

så $\tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\}); \mathbb{k}) = 1$ og $lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\})$ har ingen annen redusert homologi.

Og restriksjonen

$$lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}\})|_{-\{\frac{n+3}{2}\}} = \{\{\frac{n+5}{2}, \dots, n\}, \{n, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}\}$$

er en kjegle fra n , og har dermed ingen homologi.

Ved å bruke Mayer-Vietoris sekvensen fra korollar 2.2.8 ser vi at siden

$$\tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}\})|_{-\{\frac{n+3}{2}\}}) = 0 \text{ og } \tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}\})|_{-\{\frac{n+3}{2}\}}) = 0$$

så er

$$\tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}\})) = \tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\})) = 1,$$

og $lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}\})$ har ingen annen redusert homologi.

Og ved å bruke M-V sekvensen enda en gang ser vi at siden

$$\tilde{h}_2(lk_{\Delta^*}(\{1\})|_{-\{\frac{n+1}{2}\}}) = 0 \text{ og } \tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\{1\})|_{-\{\frac{n+1}{2}\}}) = 0$$

så er

$$\tilde{h}_2(lk_{\Delta^*}(\{1\})) = \tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\{1, \frac{n+1}{2}\})) = 1,$$

og $lk_{\Delta^*}(\{1\})$ har ingen annen redusert homologi.

Videre må vi undersøke om $\Delta^*|_{-\{1\}}$ har noen redusert homologi. Vi starter med å ta lenken og restriksjonen til $\frac{n+1}{2}$:

Lenken $lk_{\Delta^*|_{-\{1\}}}(\{\frac{n+1}{2}\})$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \{2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}\} \\ & \vdots \\ & \{\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}, \dots, n-1, n\} \\ & \{n, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}, \end{aligned}$$

så $lk_{\Delta^*|_{-\{1\}}}(\{\frac{n+1}{2}\})$ er en kjegle fra $\frac{n-1}{2}$.

Restriksjonen $\Delta^*|_{-\{1, \frac{n+1}{2}\}}$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \{2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}\}, \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & \{\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}, \dots, n-1, n\} \\ & \quad \quad \quad \{\frac{n+3}{2}, \dots, n, 2\} \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & \{n-1, n, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}. \end{aligned}$$

Dersom vi greier å vise at $\Delta^*|_{-\{1, \frac{n+1}{2}\}}$ ikke har noen redusert homologi kan vi bruke den Mayer-Vietoris sekvensen på samme måte som tidligere, og konkludere med at $\tilde{h}_3(\Delta^*; \mathbf{k}) = 1$.

Ved avbildningen

$$\{2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2} + 2, \dots, n\} \xrightarrow{\cong} \{1, 2, \dots, m\},$$

der $m = n-2$, ser vi at $\Delta^*|_{-\{1, \frac{n+1}{2}\}}$ er isomorf med det simplisielle komplekset Γ generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \{1, 2, \dots, \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}\} \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & \{\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}, \dots, m-1, m\} \\ & \quad \quad \quad \{\frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \dots, m, 1\} \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & \{m-1, m, 1, \dots, \frac{m-1}{2}\}. \end{aligned}$$

Vi skal vise ved induksjon på m at Γ ikke har noen redusert homologi.

1. La $m = 5$. Da er

$$\Gamma = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 1\}, \{4, 5, 1, 2\}\},$$

som er en kjegle fra 4 og den har dermed ingen homologi.

2. Anta OK for $m-2$ variable. Vi begynner med å ta lenken og restriksjonen til m av Γ :

Lenken $lk_{\Gamma}(m)$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}, \dots, m-1 \right\} \\ & \left\{ \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \dots, m-1, 1 \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ m-1, 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Vi ser at dette blir en kjegle fra $m-1$, så $lk_{\Gamma}(m)$ har ingen redusert homologi. Restriksjonen $\Gamma|_{-\{m\}}$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ 1, 2, \dots, \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2} \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}, \dots, m-1 \right\} \\ & \left\{ \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \dots, m-1, 1 \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ m-1, 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right\} \end{aligned}$$

Vi tar så lenken og restriksjonen til $\frac{m+1}{2}$ av $\Gamma|_{\{m\}}$:

Lenken $lk_{\Gamma|_{-\{m\}}}(\frac{m+1}{2})$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}, \frac{m+3}{2} \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}, \frac{m+3}{2}, \dots, m-1 \right\} \\ & \left\{ \frac{m+3}{2}, \dots, m-1, 1 \right\}. \end{aligned}$$

Vi ser at dette blir en kjegle fra $\frac{m+3}{2}$, så vi får ingen redusert homologi her.

Restriksjonen $\Gamma|_{-\{m, \frac{m+1}{2}\}}$ er generert av fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}, \frac{m+3}{2} \right\} \\ & \left\{ 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}, \frac{m+3}{2}, \frac{m+5}{2} \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}, \frac{m+3}{2}, \dots, m-1 \right\} \\ & \left\{ \frac{m+3}{2}, \dots, m-1, 1, 2 \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ m-1, 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right\} \end{aligned}$$

Ved avbildningen

$$\{1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}, \frac{m+3}{2} + 2, \dots, m-1\} \xrightarrow{\cong} \{1, 2, \dots, m-2\},$$

ser vi at $\Gamma|_{-\{m, \frac{m+1}{2}\}}$ er isomorf med Γ for 2 færre variabler. Og ved induksjon har vi da at $\Gamma|_{-\{m, \frac{m+1}{2}\}}$ har ingen redusert homologi. Ved å bruke Mayer-Vietoris sekvensen et par ganger (på samme måte som tidligere), ser vi at Γ ikke har noen redusert homologi. Og dermed har heller ikke $\Delta^*|_{-\{1, \frac{n+1}{2}\}}$ noen redusert homologi, og det var det vi ville vise.

Vi har dermed vist at $\beta_{5,n} = 1$ og at $\beta_{j,n} = 0$ for alle $j \neq 5$.

□

Kapittel 7

Lengde 5, øvre skranke

Etter å ha vist formodningen om lengden til den minimale resolusjonen av S/I_Δ i kapittel 4.1 når $n = 2i + 3$, fortsetter vi med å se på den øvre skranken for minimale resolusjoner av antatt lengde 5, nemlig når $n = 3i + 2$. Også her ser vi på Bettitallene til den minimale resolusjonen. Beviset i dette kapitlet har samme form som bevisene i kapittel 5 og 6, men er lengre og mer komplisert. Spesielt tilfellene 5-7 kan det være greit å studere mer inngående.

Teorem 7.0.7. *La idealet I_Δ i $S = \mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$ være generert av monomene*

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \cdots x_i, \\ & x_2 x_3 \cdots x_{i+1}, \\ & \quad \vdots \\ & x_n x_1 \cdots x_{i-1}, \end{aligned}$$

der $n = 3i + 2$. Da har den minimale resolusjonen av restklasseringen S/I_Δ lengde 5.

Bevis. Vi deler opp beviset i 9 tilfeller, og bruker Hochsters formel til å vise at:

- $\beta_{j,\sigma}(S/I_\Delta) = 0$ når $0 < |\sigma| < \frac{n-2}{3}$.
- $\beta_{1,\sigma}(S/I_\Delta) = n$ og $\beta_{j,\sigma}(S/I_\Delta) = 0$ for $j \neq 1$, når $|\sigma| = \frac{n-2}{3}$.
- $\beta_{2,\sigma}(S/I_\Delta) = n$ og $\beta_{j,\sigma}(S/I_\Delta) = 0$ for $j \neq 2$, når $|\sigma| = \frac{n+1}{3}$.
- $\beta_{j,\sigma}(S/I_\Delta) = 0$ når $\frac{n+1}{3} < |\sigma| < \frac{2n-4}{3}$.
- $\beta_{2,\sigma}(S/I_\Delta) = \frac{n(i+1)}{2}$ og $\beta_{j,\sigma}(S/I_\Delta) = 0$ for $j \neq 2$, når $|\sigma| = \frac{2n-4}{3}$.
- $\beta_{3,\sigma}(S/I_\Delta) = n(i+1)$ og $\beta_{j,\sigma}(S/I_\Delta) = 0$ for $j \neq 3$, når $|\sigma| = \frac{2n-1}{3}$.
- $\beta_{4,\sigma}(S/I_\Delta) = \frac{n(i+1)}{2}$ og $\beta_{j,\sigma}(S/I_\Delta) = 0$ for $j \neq 4$, når $|\sigma| = \frac{2n+2}{3}$.
- $\beta_{j,\sigma}(S/I_\Delta) = 0$ når $\frac{2n+2}{3} < |\sigma| < n$.
- $\beta_{5,\sigma}(S/I_\Delta) = 1$ og $\beta_{j,\sigma}(S/I_\Delta) = 0$ for $j \neq 5$, når $|\sigma| = n$.

Når idealet I_Δ er gitt på formen som i teoremet over så får vi at Δ^* er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{1, \dots, \frac{2n+2}{3}\} \\ & \quad \vdots \\ & \{\frac{n+1}{3}, \dots, n\} \\ & \{\frac{n+4}{3}, \dots, n, 1\} \\ & \quad \vdots \\ & \{n, 1, \dots, \frac{2n-1}{3}\} \end{aligned}$$

Vi tar for oss de forskjellige tilfellene for $|\sigma|$, og ser på $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$.

- **Tilfelle 1**

Vi ser først på tilfellene der $0 < |\sigma| < \frac{n-2}{3}$. Da får vi at $\frac{2n+2}{3} < |\bar{\sigma}| < n$. Men da er kardinaliteten til $\bar{\sigma}$ større enn lengden på fasettene i Δ^* , så $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$ og vi får ingen redusert homologi her.

- **Tilfelle 2**

La nå $|\sigma| = \frac{n-2}{3}$. Da er $|\bar{\sigma}| = \frac{2n+2}{3}$, så $|\bar{\sigma}|$ har samme størrelse som fasettene i Δ^* . Dersom $\bar{\sigma}$ ikke er sammehengende (mod n) så er $\bar{\sigma}$ ikke inneholdt i noen av fasettene til Δ^* , og dermed blir $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$ og vi får ingen redusert homologi. Dersom $\bar{\sigma}$ er sammehengende (mod n), så er den inneholdt i nøyaktig en fasett i Δ^* , og $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\emptyset\}$. Og $\{\emptyset\}$ har kun redusert homologi i grad -1. Siden det er n mulige $\bar{\sigma}$ på denne formen ($\{1, 2, \dots, \frac{2n+2}{3}\}, \{2, 3, \dots, \frac{2n+5}{3}\}$, osv.), så får vi ved Hochsters formel at $\beta_{1,\sigma} = n$.

- **Tilfelle 3**

Vi ser så på tilfellet $|\sigma| = \frac{n+1}{3}$. Da er $|\bar{\sigma}| = \frac{2n-1}{3}$, som er 1 mindre enn lengden på fasettene i Δ^* . Dersom $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende (mod n) så får vi kun to muligheter: $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$ eller $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\{v\}\}$ for en $v \in \{1, 2, \dots, n\}$. Og ingen av disse har noen redusert homologi. Dersom $\bar{\sigma}$ er sammenhengende (mod n) så er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\{v\}, \{w\}\}$ (de to hjørnene på hver side av $\bar{\sigma}$). Da består $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ altså av to disjunkte hjørner, så vi får at $\tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})) = 1$. Og siden vi har n muligheter for en slik $\bar{\sigma}$ ($\{1, 2, \dots, \frac{2n-1}{3}\}, \{2, 3, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$, osv.), får vi ved Hochsters formel at $\beta_{2,\sigma} = n$.

- **Tilfelle 4**

La så $\frac{n+1}{3} < |\sigma| < \frac{2n-4}{3}$. Da får vi at $\frac{n+4}{3} < |\bar{\sigma}| < \frac{2n-1}{3}$. Vi deler inn i to muligheter:

1. Det første er når $\bar{\sigma}$ er sammenhengende (mod n). Da kan vi skrive $\bar{\sigma}$ på formen

$$\{v, v+1, \dots, v+l\},$$

for en $v \in \{1, 2, \dots, n\}$ og en $l \in \{\frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-7}{3}\}$. Fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ kan da

skrives på formen

$$\begin{aligned} & \{v - \frac{2n-1}{3} + l, \dots, v-1\} \\ & \{v - \frac{2n-4}{3} + l, \dots, v-1, v+l+1\} \\ & \quad \vdots \\ & \{v-1, v+l+1, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\} \\ & \{v+l+1, \dots, \frac{2n-1}{3}\} \end{aligned}$$

Siden $l \in \{\frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-7}{3}\}$ så vet vi at $v + \frac{2n+5}{3} \leq v - \frac{2n-1}{3} + l \leq v-2$. For å finne homologien til $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ må vi bruke Mayer-Vietoris sekvensen (korollar 2.2.8). Vi ser på lenken og restriksjonen av $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ til punktet $v + \frac{2n-1}{3}$:

Lenken

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma} \cup \{v + \frac{2n-1}{3}\}) = \{\{v+l+1, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\}\}$$

er et simpleks, så den har ingen redusert homologi.

Restriksjonen $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})|_{-\{v + \frac{2n-1}{3}\}}$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{v - \frac{2n-1}{3} + l, \dots, v-1\} \\ & \{v - \frac{2n-4}{3} + l, \dots, v-1, v+l+1\} \\ & \quad \vdots \\ & \{v-1, v+l+1, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\} \end{aligned}$$

og den er en kjegle fra punktet $v-1$, så den er kontraktibel og har dermed heller ingen redusert homologi.

Og ved M-V sekvensen ser vi da at heller ikke $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ har noen redusert homologi.

- Den andre muligheten er at $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende (mod n). Vi antar at $\bar{\sigma}$ er inneholdt i minst en av fasettene til Δ^* (hvis ikke får vi at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$, og vi får ingen redusert homologi), si

$$\bar{\sigma} \subseteq \{1, 2, \dots, \frac{2n+2}{3}\}.$$

Siden $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende finnes det da en $v \in \{1, 2, \dots, \frac{2n+2}{3}\} \setminus \bar{\sigma}$ slik at det finnes to hjørner på hver side av v ($v' \in \{1, 2, \dots, v-1\}$ og $v'' \in \{v+1, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$) med $v', v'' \in \bar{\sigma}$. Videre antar vi at det eksisterer en fasett $F \in \Delta^*$ slik at $\bar{\sigma}$ er inneholdt i F , men $v \notin F$ (ellers blir $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ en kjegle fra v og vi får ingen redusert homologi). Siden F er sammenhengende må vi da ha at $\{\frac{2n+5}{3}, \dots, n\}$ er inneholdt i F . Vi har at

$$|F \setminus \{\frac{2n+5}{3}, \dots, n\}| = \frac{n+4}{3},$$

men $|\bar{\sigma}|$ er ekte større enn $\frac{n+4}{3}$ så $\bar{\sigma}$ kan ikke være inneholdt i F og vi får en selvmotsigelse.

Dermed har vi vist at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ ikke har noen redusert homologi når $\frac{n+1}{3} < |\sigma| < \frac{2n-4}{3}$.

• **Tilfelle 5**

La nå $|\sigma| = \frac{2n-4}{3}$. Da er $|\bar{\sigma}| = \frac{n+4}{3}$. Vi deler inn i to muligheter:

1. Det første er når $\bar{\sigma}$ er sammenhengende (mod n). Da kan vi skrive $\bar{\sigma}$ på formen

$$\left\{v, v+1, \dots, v + \frac{n+1}{3}\right\},$$

for en $v \in \{1, 2, \dots, n\}$. Fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ kan da skrives på formen

$$\begin{aligned} & \left\{v - \frac{n-2}{3}, \dots, v-1\right\} \\ & \left\{v - \frac{n-5}{3}, \dots, v-1, v + \frac{n+4}{3}\right\} \\ & \vdots \\ & \left\{v-1, v + \frac{n+4}{3}, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\right\} \\ & \left\{v + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}\right\} \end{aligned}$$

For å finne homologien til $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ må vi bruke Mayer-Vietoris sekvensen (korollar 2.2.8). Vi ser på lenken og restriksjonen av $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ til punktet $v + \frac{2n-1}{3}$:

Lenken

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma} \cup \{v + \frac{2n-1}{3}\}) = \left\{\left\{v + \frac{n+4}{3}, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\right\}\right\}$$

er et simpleks, så den har ingen redusert homologi.

Restriksjonen $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})|_{-\{v + \frac{2n-1}{3}\}}$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{v - \frac{n-2}{3}, \dots, v-1\right\} \\ & \left\{v - \frac{n-5}{3}, \dots, v-1, v + \frac{n+4}{3}\right\} \\ & \vdots \\ & \left\{v-1, v + \frac{n+4}{3}, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\right\} \end{aligned}$$

og den er en kjegle fra punktet $v-1$, så den er kontraktibel og har dermed heller ingen redusert homologi.

Og ved M-V sekvensen ser vi da at heller ikke $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ har noen redusert homologi.

2. Den andre muligheten er at $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende (mod n). Vi antar at $\bar{\sigma}$ er inneholdt i minst en av fasettene til Δ^* (hvis ikke får vi at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$, og vi får ingen redusert homologi), si

$$\bar{\sigma} \subseteq \left\{1, 2, \dots, \frac{2n+2}{3}\right\}.$$

Siden $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende finnes det da en $v \in \{1, 2, \dots, \frac{2n+2}{3}\} \setminus \bar{\sigma}$ slik at det finnes to hjørner på hver side av v ($v' \in \{1, 2, \dots, v-1\}$ og $v'' \in \{v+1, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$).

med $v', v'' \in \bar{\sigma}$. Videre antar vi at det eksisterer en fasett $F \in \Delta^*$ slik at $\bar{\sigma}$ er inneholdt i F , men $v \notin F$ (ellers blir $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ en kjegle fra v og vi får ingen redusert homologi). Siden F er sammenhengende må vi da ha at $\{\frac{2n+5}{3}, \dots, n\}$ er inneholdt i F . Vi har at

$$|F \setminus \{\frac{2n+5}{3}, \dots, n\}| = \frac{n+4}{3} = |\bar{\sigma}|$$

Da er $\bar{\sigma}$ på formen

$$\bar{\sigma} = \{1, \dots, a, a + \frac{n+1}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}\},$$

så de eneste fasettene i Δ^* som inneholder $\bar{\sigma}$ er $\{1, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$ og $\{a + \frac{n+1}{3}, \dots, n, 1, \dots, a\}$. Vi får da at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ blir en union av to disjunkte simplekser, så vi får kun redusert homologi i grad 0, og $\tilde{h}_0(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k}) = 1$. Vi har $\frac{n+1}{3} = i+1$ valg for a ($a \in \{1, \dots, \frac{n+1}{3}\}$), og etter at vi har valgt a har vi $\frac{n}{2}$ valg for "1", det første hjørnet i $\bar{\sigma}$ ($\bar{\sigma}$ kan også være $\{2, \dots, a+1, a + \frac{n+1}{3} + 1, \dots, \frac{2n+5}{3}\}$ osv.).

Vi har dermed vist at $\beta_{2,\sigma} = \frac{n(i+1)}{2}$ og $\beta_{j,\sigma} = 0$ for $j \neq 2$ når $|\sigma| = \frac{2n-4}{3}$.

• **Tilfelle 6**

Vi ser så på tilfellet der $|\sigma| = \frac{2n-1}{3}$. Da er $|\bar{\sigma}| = \frac{n+1}{3}$. Vi deler inn i to muligheter:

1. Det første er når $\bar{\sigma}$ er sammenhengende (mod n). Da kan vi skrive $\bar{\sigma}$ på formen

$$\{v, v+1, \dots, v + \frac{n-2}{3}\},$$

for en $v \in \{1, 2, \dots, n\}$. Fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ kan da skrives på formen

$$\begin{aligned} & \{v - \frac{n+1}{3}, \dots, v-1\} \\ & \{v - \frac{n-2}{3}, \dots, v-1, v + \frac{n+1}{3}\} \\ & \vdots \\ & \{v-1, v + \frac{n+1}{3}, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\} \\ & \{v + \frac{n+1}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}\} \end{aligned}$$

For å finne homologien til $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ bruker vi Mayer-Vietoris sekvensen (teorem 2.2.4). La $A = \{v - \frac{n+1}{3}, \dots, v-1\}$ og la B være gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{v - \frac{n-2}{3}, \dots, v-1, v + \frac{n+1}{3}\} \\ & \vdots \\ & \{v-1, v + \frac{n+1}{3}, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\} \\ & \{v + \frac{n+1}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}\} \end{aligned}$$

Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = A \cup B$, A er et simpleks, B er en kjegle fra $v + \frac{n+1}{3}$ og $A \cap B = \{v - \frac{n-2}{3}, \dots, v-1\}, \{v + \frac{2n-1}{3}\}$ er en union av to disjunkte simplekser. Dermed får vi fra M-V sekvensen at

$$\tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k}) = \tilde{h}_1(A \cup B; \mathbb{k}) = \tilde{h}_0(A \cap B; \mathbb{k}) = 1.$$

Og vi har n muligheter for valg av hjørnet v .

2. Den andre muligheten er at $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende (mod n). Vi antar at $\bar{\sigma}$ er inneholdt i minst en av fasettene til Δ^* (hvis ikke får vi at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$, og vi får ingen redusert homologi), si

$$\bar{\sigma} \subseteq \{1, 2, \dots, \frac{2n+2}{3}\}.$$

Siden $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende finnes det da en $v \in \{1, 2, \dots, \frac{2n+2}{3}\} \setminus \bar{\sigma}$ slik at det finnes to hjørner på hver side av v ($v' \in \{1, 2, \dots, v-1\}$ og $v'' \in \{v+1, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$) med $v', v'' \in \bar{\sigma}$. Videre antar vi at det eksisterer en fasett $F \in \Delta^*$ slik at $\bar{\sigma}$ er inneholdt i F , men $v \notin F$ (ellers blir $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ en kjegle fra v og vi får ingen redusert homologi). Siden F er sammenhengende må vi da ha at $\{\frac{2n+5}{3}, \dots, n\}$ er inneholdt i F . Vi har at

$$|F \setminus \{\frac{2n+5}{3}, \dots, n\}| = \frac{n+4}{3} = |\bar{\sigma}| + 1$$

Vi deler inn i to tilfeller her:

- (a) $\bar{\sigma} = \{1, \dots, a, a + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$
 (b) $\bar{\sigma} = \{2, \dots, a, a + \frac{n+1}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$

Men disse to tilfellene er like, så vi ser kun på det første tilfellet. Da er

$$lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \{\{a+1, \dots, a + \frac{n+1}{3}\}, \{\frac{2n+5}{3}, \dots, n, a+1\}, \{a + \frac{n+1}{3}, \frac{2n+5}{3}, \dots, n\}\},$$

og vi bruker Mayer-Vietoris sekvensen:

La $A = \{\{a+1, \dots, a + \frac{n+1}{3}\}\}$ og $B = \{\{\frac{2n+5}{3}, \dots, n, a+1\}, \{a + \frac{n+1}{3}, \frac{2n+5}{3}, \dots, n\}\}$. Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = A \cup B$, A er et simpleks, B er en kjegle fra n og

$$A \cap B = \{\{a+1\}, \{a + \frac{n+1}{3}\}\}.$$

Og fra M-V sekvensen får vi at

$$\tilde{h}_1(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k}) = \tilde{h}_1(A \cup B; \mathbb{k}) = \tilde{h}_0(A \cap B; \mathbb{k}) = 1$$

og $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ har ingen annen redusert homologi. Og vi har $\frac{n-2}{3} = i$ valg for a og n valg for "1", det første hjørnet i $\bar{\sigma}$.

Dermed har vi vist at $\beta_{3,\sigma} = n + ni = n(i+1)$ og $\beta_{j,\sigma} = 0$ for $j \neq 3$ når $|\sigma| = \frac{2n-1}{3}$.

• **Tilfelle 7**

Så har vi tilfellet $|\sigma| = \frac{2n+2}{3}$. Da er $|\bar{\sigma}| = \frac{n-2}{3}$ og vi deler inn i to muligheter:

1. Det første er når $\bar{\sigma}$ er sammenhengende (mod n). Da kan vi skrive $\bar{\sigma}$ på formen

$$\left\{v, v+1, \dots, v + \frac{n-5}{3}\right\},$$

for en $v \in \{1, 2, \dots, n\}$. Fasettene i $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ kan da skrives på formen

$$\begin{aligned} & \left\{v - \frac{n+4}{3}, \dots, v-1\right\} \\ & \left\{v - \frac{n+1}{3}, \dots, v-1, v + \frac{n-2}{3}\right\} \\ & \vdots \\ & \left\{v-1, v + \frac{n-2}{3}, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\right\} \\ & \left\{v + \frac{n-2}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}\right\} \end{aligned}$$

For å finne homologien til $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ bruker vi igjen Mayer-Vietoris sekvensen (teorem 2.2.4). La $A = \left\{\left\{v - \frac{n+4}{3}, \dots, v-1\right\}\right\}$ og la B være gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{v - \frac{n+1}{3}, \dots, v-1, v + \frac{n-2}{3}\right\} \\ & \vdots \\ & \left\{v-1, v + \frac{n-2}{3}, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\right\} \\ & \left\{v + \frac{n-2}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}\right\} \end{aligned}$$

(Vi ser at $v + \frac{2n-4}{3} = v - \frac{n+4}{3}$) Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = A \cup B$, A er et simpleks, B er en kjegle fra $v + \frac{n+1}{3}$ og $A \cap B = \left\{\left\{v - \frac{n+1}{3}, \dots, v-1\right\}, \left\{v+1, v - \frac{n+4}{3}\right\}, \left\{v - \frac{n+4}{3}, v - \frac{n+1}{3}\right\}\right\}$ har ett hull av dimensjon 2. Dermed får vi fra M-V sekvensen at

$$\tilde{h}_2(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k}) = \tilde{h}_2(A \cup B; \mathbb{k}) = \tilde{h}_1(A \cap B; \mathbb{k}) = 1$$

og $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ har ingen annen redusert homologi. Og vi har n muligheter for valg av hjørnet v .

2. Den andre muligheten er at $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende (mod n). Vi antar at $\bar{\sigma}$ er inneholdt i minst en av fasettene til Δ^* (hvis ikke får vi at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = \emptyset$, og vi får ingen redusert homologi), si

$$\bar{\sigma} \subseteq \left\{1, 2, \dots, \frac{2n+2}{3}\right\}.$$

Siden $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende finnes det da en $v \in \left\{1, 2, \dots, \frac{2n+2}{3}\right\} \setminus \bar{\sigma}$ slik at det finnes to hjørner på hver side av v ($v' \in \{1, 2, \dots, v-1\}$ og $v'' \in \{v+1, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$) med $v', v'' \in \bar{\sigma}$. Videre antar vi at det eksisterer en fasett $F \in \Delta^*$ slik at $\bar{\sigma}$ er inneholdt i F , men $v \notin F$ (ellers blir $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ en kjegle fra v og vi får ingen redusert homologi). Siden F er sammenhengende må vi da ha at $\left\{\frac{2n+5}{3}, \dots, n\right\}$ er inneholdt i F . Vi har at

$$\left|F \setminus \left\{\frac{2n+5}{3}, \dots, n\right\}\right| = \frac{n+4}{3} = |\bar{\sigma}| + 2$$

Vi deler inn i 4 tilfeller:

- (a) $\bar{\sigma} = \{1, \dots, a, a + \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$
 (b) $\bar{\sigma} = \{1, \dots, a, a + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}\}$
 (c) $\bar{\sigma} = \{2, \dots, a+1, a + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$
 (d) $\bar{\sigma} = \{2, \dots, a+1, a + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}\}$

I det første tilfellet får vi at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{a+1, \dots, a + \frac{n+4}{3}\} \\ & \{a + \frac{n+4}{3}, \frac{2n+5}{3}, \dots, n, a+1\} \\ & \{\frac{2n+5}{3}, \dots, n, a+1, a+2\} \\ & \{a + \frac{n+1}{3}, a + \frac{n+4}{3}, \frac{2n+5}{3}, \dots, n\} \end{aligned}$$

For å finne homologien til $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ bruker vi da Mayer-Vietoris sekvensen og lar

$$A = \{\{a+1, \dots, a + \frac{n+4}{3}\}\},$$

og B være gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{a + \frac{n+4}{3}, \frac{2n+5}{3}, \dots, n, a+1\} \\ & \{\frac{2n+5}{3}, \dots, n, a+1, a+2\} \\ & \{a + \frac{n+1}{3}, a + \frac{n+4}{3}, \frac{2n+5}{3}, \dots, n\} \end{aligned}$$

Da er $A \cup B = lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$, A er et simpleks, B er en kjele fra n og

$$A \cap B = \{\{a+1, a+2\}, \{a+1, a + \frac{n+4}{3}\}, \{a + \frac{n+4}{3}, a + \frac{n+1}{3}\}\}$$

er kontraktibel. Så vi får ingen redusert homologi i dette tilfellet.

I det andre tilfellet ($\bar{\sigma} = \{1, \dots, a, a + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}\}$) får vi at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{a+1, \dots, a + \frac{n+4}{3}, \frac{2n+2}{3}\} \\ & \{a + \frac{n+4}{3}, \frac{2n+2}{3}, \dots, n\} \\ & \{\frac{2n+2}{3}, \dots, n, a+1\} \\ & \{n, a+1, \dots, a + \frac{n+4}{3}\} \end{aligned}$$

Igjen bruker vi M-V sekvensen for å finne redusert homologi for $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$:

La $A = \{\{a+1, \dots, a + \frac{n+4}{3}, \frac{2n+2}{3}\}\}$ og la B være gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{a + \frac{n+4}{3}, \frac{2n+2}{3}, \dots, n\} \\ & \{\frac{2n+2}{3}, \dots, n, a+1\} \\ & \{n, a+1, \dots, a + \frac{n+4}{3}\} \end{aligned}$$

Da er $A \cup B = lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$, A er et simpleks, B er en kjegle fra n og

$$A \cap B = \left\{ \left\{ a+1, \dots, a + \frac{n+4}{3} \right\}, \left\{ a + \frac{n+4}{3}, \frac{2n+2}{3} \right\}, \left\{ \frac{2n+2}{3}, a+1 \right\} \right\}.$$

Vi ser at $A \cap B$ kun har homologi i grad 1, og $\tilde{h}_1(A \cap B; \mathbb{k}) = 1$. Og ved M-V sekvensen får vi da at

$$\tilde{h}_2(lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}); \mathbb{k}) = \tilde{h}_2(A \cup B; \mathbb{k}) = \tilde{h}_1(A \cap B; \mathbb{k}) = 1.$$

Og vi har $\frac{n-5}{3} = i-1$ valg for a , og $\frac{n}{2}$ valg for "1", det første hjørnet i $\bar{\sigma}$, så det er $\frac{n(i-1)}{2}$ mulige $\bar{\sigma}$ av denne typen.

Det tredje tilfellet ($\bar{\sigma} = \{2, \dots, a+1, a + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}\}$) er bare en annen versjon av det andre tilfellet.

I det fjerde tilfellet ($\bar{\sigma} = \{2, \dots, a+1, a + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}\}$) får vi at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ 1, a+2, \dots, a + \frac{n+1}{3}, \frac{2n+2}{3} \right\} \\ & \left\{ a+2, \dots, a + \frac{n+1}{3}, \frac{2n+2}{3}, \frac{2n+5}{3} \right\} \\ & \left\{ \frac{2n+2}{3}, \dots, n, 1 \right\} \end{aligned}$$

Vi ser at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ er en kjegle fra $\frac{2n+2}{3}$, så den er en kjegle og vi får ingen redusert homologi i dette tilfellet.

Dermed får vi at $\beta_{4,\sigma} = n + \frac{n(i-1)}{2} = \frac{n(i+1)}{2}$ og $\beta_{j,\sigma} = 0$ for $j \neq 4$ når $|\sigma| = \frac{2n+2}{3}$.

• **Tilfelle 8**

Så ser vi på tilfellet $\frac{2n+2}{3} < |\sigma| < n$. Da er $0 < |\bar{\sigma}| < \frac{n-2}{3}$.

Også her deler vi inn i to tilfeller:

1. Det første tilfellet er når $\bar{\sigma}$ er sammenhengende (mod n). Da kan vi skrive $\bar{\sigma}$ på formen

$$\bar{\sigma} = \{v, v+1, \dots, v+l\}$$

for en $v \in \{1, 2, \dots, n\}$ og en $l \in \{0, 1, \dots, \frac{n-8}{3}\}$. Og da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ v - \frac{2n-1}{3} + l, \dots, v-1 \right\} \\ & \left\{ v - \frac{2n-4}{3} + l, \dots, v-1, v+l+1 \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ v-1, v+l+1, \dots, v + \frac{2n-4}{3} \right\} \\ & \left\{ v+l+1, \dots, v + \frac{2n-1}{3} \right\} \end{aligned}$$

Vi observerer at

$$v - \frac{2n-4}{3} + l = v + \frac{n+4}{3} + l,$$

og $\frac{n+4}{3} + l \in \{\frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-4}{3}\}$. La nå $A = \{\{v - \frac{2n-1}{3} + l, \dots, v-1\}\}$ og la B være gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{v - \frac{2n-4}{3} + l, \dots, v-1, v+l+1\} \\ & \quad \vdots \\ & \{v-1, v+l+1, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\} \\ & \quad \{v+l+1, \dots, v + \frac{2n-1}{3}\} \end{aligned}$$

Da er $A \cup B = lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$, A er et simpleks, B er en kjegle fra $v+l+1$ og $A \cap B$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{v - \frac{2n-4}{3} + l, \dots, v-1\} \\ & \{v - \frac{n-5}{3} + l, \dots, v-1, v + \frac{n+4}{3} + l\} \\ & \quad \vdots \\ & \{v-1, v + \frac{n+4}{3} + l, \dots, v + \frac{2n-4}{3}\} \\ & \quad \{v + \frac{n+4}{3} + l, \dots, v + \frac{2n-1}{3}\} \end{aligned}$$

så $A \cap B$ er en kjegle fra $v - \frac{2n-4}{3} + l = v + \frac{n+4}{3}$, og er dermed kontraktibel og har ingen redusert homologi. Og vi ser da (ved å bruke Mayer-Vietoris sekvensen) at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ ikke har noen redusert homologi i dette tilfellet.

2. Så ser vi på de tilfellene der $\bar{\sigma}$ ikke er sammenhengende (mod n). Da er heller ikke $\{1, \dots, n\} \setminus \bar{\sigma}$ sammenhengende (mod n), og vi må ha $2 \leq |\bar{\sigma}| \leq \frac{n-5}{3}$. La τ være en maksimal sammenhengskomponent i σ , vi kan anta at $\tau = \{1, \dots, v\}$ for en $v \in \{1, \dots, \frac{n-8}{3}\}$. Vi ser på $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ og lar

$$A = \{\text{fasettene } F \subset lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) \text{ slik at } n \in F\}$$

og

$$B = \{\text{fasettene } F \subset lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) \text{ slik at } v+1 \in F\}$$

Da er $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) = A \cup B$, A er en kjegle fra n (eller $A = \emptyset$) og B er en kjegle fra $v+1$ (eller $B = \emptyset$). Og fasettene i $A \cap B$ er

$$\{v+1, \dots, \frac{2n+2}{3}\}, \{v + \frac{n+1}{3}, \dots, n\} \text{ og alle fasettene } F \subset lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) \text{ slik at } n, v+1 \in F$$

(eller $A \cap B = \emptyset$). Dersom $A \cap B \neq \emptyset$ så lar vi

$$A' = \{\text{alle fasettene } F \subset lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma}) \text{ slik at } n, v+1 \in F\}$$

og

$$B' = \{\{v+1, \dots, \frac{2n+2}{3}\}, \{v + \frac{n+1}{3}, \dots, n\}\}.$$

Da er $A \cap B = A' \cup B'$, A' er en kjegle fra n og $v + 1$, B' er en kjegle fra

$$v + \frac{n+1}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}$$

og

$$A' \cap B' = \left\{ \left\{ v + \frac{n+1}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3} \right\}, \left\{ v + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3} \right\} \right\}$$

er en kjegle fra

$$v + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}.$$

Nå kan vi bruke Mayer-Vietoris sekvensen to ganger og se at $lk_{\Delta^*}(\bar{\sigma})$ ikke får noen redusert homologi når $\frac{2n+2}{3} < |\sigma| < n$.

Det eneste tilfellet der dette argumentet ikke gjelder er dersom $v + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}$ alle er inneholdt i $\bar{\sigma}$. Men $|\{v + \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n-1}{3}\}| = \frac{n-2}{3} - v$ og da blir

$$|\bar{\sigma}| = \frac{n-2}{3} - v + v = \frac{n-2}{3},$$

og vi får en selvmotsigelse.

Dermed har vi vist at $\beta_{j,\sigma} = 0$ når $\frac{2n+2}{3} < |\sigma| < n$.

• **Tilfelle 9**

Det siste tilfellet er når $|\sigma| = n$. Da er $|\bar{\sigma}| = 0$.

Vi må vise at $\tilde{h}_3(lk_{\Delta^*}(\emptyset), \mathbb{k}) = \tilde{h}_3(\Delta^*, \mathbb{k}) = 1$, og vi gjør dette ved hjelp av induksjon på i .

1. Vi ser først på tilfellet der $i = 1$. Da er $n = 5$, og Δ^* er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, 4\} \\ &\{2, 3, 4, 5\} \\ &\{3, 4, 5, 1\} \\ &\{4, 5, 1, 2\} \\ &\{5, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{\{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 1\}, \{4, 5, 1, 2\}, \{5, 1, 2, 3\}\}$. Da er A et simpleks og B er en kjegle fra 5. $A \cup B = \Delta^*$ og

$$A \cap B = \{\{2, 3, 4\}, \{3, 4, 1\}, \{4, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

er det hule tetraederet med hjørnemengde $\{1, 2, 3, 4\}$. Vi ser derfor at $A \cap B$ har homologi kun i grad 2, og $\tilde{h}_2(A \cap B) = 1$. Og ved Mayer-Vietoris sekvensen får vi da at $\tilde{h}_3(\Delta^*) = 1$, og Δ^* har ingen annen redusert homologi.

2. Anta OK for $n - 3$ variable (strenglengde $i - 1$). Dersom $n = 3i + 2$ så er det Alexanderduale simplisielle komplekset Δ^* gitt ved følgende fasetter:

$$\begin{aligned} & \{1, \dots, \frac{2n+2}{3}\} \\ & \quad \vdots \\ & \{\frac{n+1}{3}, \dots, n\} \\ & \{\frac{n+4}{3}, \dots, n, 1\} \\ & \quad \vdots \\ & \{n, 1, \dots, \frac{2n-1}{3}\} \end{aligned}$$

Vi bruker Mayer-Vietoris sekvensen og tar lenken og restriksjonen til 1. Vi ser først på $lk_{\Delta^*}(\{1\})$. Den er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{2, \dots, \frac{2n+2}{3}\} \\ & \{\frac{n+4}{3}, \dots, n\} \\ & \{\frac{n+7}{3}, \dots, n, 2\} \\ & \quad \vdots \\ & \{n, 2, \dots, \frac{2n-1}{3}\} \end{aligned}$$

La $A = \{\{2, \dots, \frac{2n+2}{3}\}\}$ og $B = \{\{\frac{n+4}{3}, \dots, n\}, \{\frac{n+7}{3}, \dots, n, 2\}, \dots, \{n, 2, \dots, \frac{2n-1}{3}\}\}$. Da er $lk_{\Delta^*}(\{1\}) = A \cup B$, A er et simpleks og B er en kjegle fra n . Og $A \cap B$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{\frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}\} \\ & \{\frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}, 2\} \\ & \{\frac{n+10}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}, 2, 3\} \\ & \quad \vdots \\ & \{\frac{2n+2}{3}, 2, \dots, \frac{n+1}{3}\} \\ & \quad \{2, \dots, \frac{2n-1}{3}\} \end{aligned}$$

La nå $A' = \{\frac{2n+2}{3}, 2, \dots, \frac{n+1}{3}\}$ og la B' være gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{n+4}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3} \right\} \\ & \left\{ \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}, 2 \right\} \\ & \left\{ \frac{n+10}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}, 2, 3 \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ 2, \dots, \frac{2n-1}{3} \right\} \end{aligned}$$

Da er $A \cap B = A' \cup B'$, A' er et simpleks og B' er en kjegle fra $\frac{2n-1}{3}$. Og

$$A' \cap B' = \left\{ \left\{ 2, 3, \dots, \frac{n+1}{3} \right\}, \left\{ \frac{2n+2}{3}, 2, 3, \dots, \frac{n-2}{3} \right\} \right\},$$

som er en kjegle fra 2.

Ved Mayer-Vietoris sekvensen

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi} \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow 0$$

får vi da at, siden A' , B' og $A' \cap B'$ ikke har noen homologi, så har heller ikke $A \cap B = A' \cup B'$ noen homologi. Og siden A , B og $A \cap B$ ikke har noen homologi, så har heller ikke $lk_{\Delta^*}(\{1\}) = A \cup B$ noen homologi.

Vi ser så på restriksjonen $\Delta^*|_{-\{1\}}$. Denne er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \left\{ 2, \dots, \frac{2n+5}{3} \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ \frac{n+1}{3}, \dots, n \right\} \\ & \left\{ \frac{n+7}{3}, \dots, n, 2 \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ n, 2, \dots, \frac{2n-1}{3} \right\} \end{aligned}$$

For å komme videre med denne tar vi lenken og restriksjonen til $\frac{n+4}{3}$.

$lk_{\Delta^*|_{-\{1\}}}(\{\frac{n+4}{3}\})$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{2, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+5}{3}\} \\ & \{3, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+8}{3}\} \\ & \vdots \\ & \{\frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, n\} \\ & \{\frac{2n+5}{3}, \dots, n, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{3}\} \\ & \{\frac{2n+8}{3}, \dots, n, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}\} \\ & \vdots \\ & \{n, 2, 3, \dots, \frac{2n-1}{3}\}, \end{aligned}$$

Den er en kjegle fra $\frac{n+1}{3}$, så den har ingen homologi.

Restriksjonen $\Delta^*|_{-\{1, \frac{n+4}{3}\}}$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{2, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+5}{3}\} \\ & \{3, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+8}{3}\} \\ & \vdots \\ & \{\frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, n\} \\ & \{\frac{n+7}{3}, \dots, n, 2\} \\ & \vdots \\ & \{\frac{2n+2}{3}, \dots, n, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{3}\} \\ & \{\frac{2n+8}{3}, \dots, n, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}\} \\ & \vdots \\ & \{n, 2, 3, \dots, \frac{2n-1}{3}\} \end{aligned}$$

Vi fortsetter med å ta lenken og restriksjonen til $\frac{2n+5}{3}$ av $\Delta^*|_{-\{1, \frac{n+4}{3}\}}$.

Lenken $lk_{\Delta^*|_{-\{1, \frac{n+4}{3}\}}}(\{\frac{2n+5}{3}\})$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned} & \{2, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}\} \\ & \{3, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}, \frac{2n+8}{3}\} \\ & \vdots \\ & \{\frac{2n+2}{3}, \frac{2n+8}{3}, \dots, n, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{3}\} \end{aligned}$$

Så den er en kjegle fra $\frac{2n+2}{3}$, og har dermed ingen homologi. Restriksjonen $\Delta^*|_{-\{1, \frac{n+4}{3}, \frac{2n+5}{3}\}}$ er gitt ved fasettene

$$\begin{aligned}
& \{2, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}\} \\
& \{3, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}, \frac{2n+8}{3}\} \\
& \vdots \\
& \{\frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}, \frac{2n+8}{3}, \dots, n\} \\
& \{\frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}, \frac{2n+8}{3}, \dots, n, 2\} \\
& \vdots \\
& \{\frac{2n+2}{3}, \dots, n, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{3}\} \\
& \{\frac{2n+8}{3}, \dots, n, 2, 3, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}\} \\
& \vdots \\
& \{n, 2, 3, \dots, \frac{2n-1}{3}\}
\end{aligned}$$

Det som nå gjenstår å vise er at dette simplisielle komplekset har homologi i grad 3, og at

$$\tilde{h}_3(\Delta^*|_{-\{1, \frac{n+4}{3}, \frac{2n+5}{3}\}}, \mathbb{k}) = 1.$$

(Da kan vi bruke Mayer-Vietoris sekvensen og konkludere med at også $\tilde{h}_3(\Delta^*, \mathbb{k}) = 1$.) Men vi ser at ved avbildningen

$$\{2, 3, \dots, \frac{n+1}{3}, \frac{n+7}{3}, \dots, \frac{2n+2}{3}, \frac{2n+8}{3}, \dots, n\} \xrightarrow{\cong} \{1, 2, \dots, m\},$$

der $m = n - 3$, så er $\Delta^*|_{-\{1, \frac{n+4}{3}, \frac{2n+5}{3}\}}$ er isomorf med det simplisielle komplekset Γ^* , som er definert på samme måte som Δ^* , men med $m = n - 3$ variable og strenglengde $m - j$, der $j = i - 1$. Så

$$m = n - 3 = (3i + 2) - 3 = 3(j + 1) - 1 = 3j + 2,$$

og vi har ved induksjon at da er $\tilde{h}_3(\Gamma^*) = 1$.

□

Vi har dermed bevist at formodningen på side 20 gjelder når $n = 3i + 2$. Desverre har vi ikke greid å komme lenger enn dette i arbeidet med å bevise at formodningen gjelder for alle $n \geq 3$. Det er naturlig å tenke seg at vi kan vise at lengden er 6 når $n = 3(i + 1)$, med lignende fremgangsmåte som i beviset over. Men når $n > 3(i + 1)$ ser det ut til at denne argumentasjonsmetoden blir mer og mer avansert (at vi må sjekke flere og flere Bettitall på ulike måter). Vi har heller ikke fått til å lage et argument for at lengden på den minimale resolusjonen er 5 når $2i + 3 < n < 3i + 2$.

Kapittel 8

Cohen-Macaulay ringer

Cohen-Macaulay-egenskapen for ringer er et viktig begrep innen moderne kommutativ algebra fordi den er generell nok til å gi mange eksempler, men samtidig så smal at den gir en mengde struktur og teori for disse ringene. Vi skal i dette kapitlet se på restkroppene S/I_Δ til de spesielle Stanley-Reisner idealene vi definerte i kapittel 4.1, og prøve å finne ut om disse er Cohen-Macaulay. Vi vil se at dette er tilfellet dersom lengden på den minimale resolusjonen av S/I_Δ er lik kodimensjonen til idealet I_Δ , så vi er avhengige av de resultatene vi fant om lengden på minimale resolusjoner i kapittel 4-7.

8.1 Dimensjon, dybde og Cohen-Macaulay ringer

Før vi kan snakke om Cohen-Macaulay ringer må vi definere begreper som dimensjon og dybde. Denne teorien er hentet fra [2].

Definisjon 8.1.1 (Krull-dimensjon og kodimensjon). *La R være en ring. Krull-dimensjonen, $\dim(R)$, til R er supremum av lengder av kjeder av primidealer i R . Dersom I er et propriert ideal i R så definerer vi dimensjonen til I til å være $\dim(R/I)$. Dersom $I \subsetneq R$ er et primideal så definerer vi kodimensjonen, $\text{codim}(I)$, til I til å være Krull-dimensjonen til den lokale ringen R_I . Og dersom I ikke nødvendigvis er et primideal, så definerer vi kodimensjonen til I til å være minimum av kodimensjonene til primidealene som inneholder I . Dersom M er en R -modul (men ikke et ideal) så definerer vi dimensjonen/kodimensjonen til M til å være dimensjonen/kodimensjonen til annihilatoren til M .*

Kodimensjonen til et primideal I er altså supremum av lengder av kjeder av primidealer ned fra I i R . Vi fant følgende resultat om kodimensjonen til de spesielle Stanley-Reisner idealene fra kapittel 4.1:

Teorem 8.1.2 (Kodimensjon for I_Δ). *La $n \geq 3$ og $1 \leq i \leq n - 1$, og la I_Δ være idealet i $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generert av monomene*

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 \cdots x_i, \\ & x_2 x_3 \cdots x_{i+1}, \\ & \vdots \\ & x_n x_1 \cdots x_{i-1}, \end{aligned}$$

Da er $\text{codim}(I_\Delta) = \lceil \frac{n}{i} \rceil$.

Bevis. Kodimensjonen

$$\text{codim}(I_\Delta) = \min\{\text{codim}(P) \mid P \text{ primideal med } I_\Delta \subseteq P\},$$

og alle primidealer i $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ er på formen $P = \langle x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k} \rangle$. Så vi må finne minste k med $I_\Delta \subseteq \langle x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k} \rangle$. La

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 \cdots x_i \\ a_2 &= x_2 \cdots x_{i+1} \\ &\vdots \\ a_{n-i+1} &= x_{n-i+1} \cdots x_n, \\ a_{n-i+2} &= x_{n-i+2} \cdots x_n x_1, \\ &\vdots \\ a_n &= x_n x_1 \cdots x_{i-1} \end{aligned}$$

Da er $I_\Delta = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. For alle $r \in \{1, \dots, n\}$ så har vi at

$$x_r \in \begin{cases} a_{r-i+1}, \dots, a_r & \text{hvis } r - i \geq 0 \\ a_{n+r-i+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_r & \text{hvis } r - i < 0 \end{cases}$$

Så hver variabel er inneholdt i nøyaktig i av generatorene til I_Δ : x_i ligger i de første i generatorene, x_{2i} ligger de i neste, osv. Generelt har vi at x_{ri} ligger i $\{a_{(r-1)i+1 \pmod n}, \dots, a_{ri \pmod n}\}$. Vi konstruerer et primideal P på følgende måte: La $P = \langle x_i, x_{2i}, x_{3i}, \dots, x_k \rangle$, der k er det minste multiplum av i slik at $I_\Delta \subseteq P$. Da er $k = \lceil \frac{n}{i} \rceil$.

Bevis for at et primideal med færre elementer ikke inneholder I_Δ : La $P = \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_k} \rangle$ der $k < \lceil \frac{n}{i} \rceil$. Hver x_{j_t} er inneholdt i nøyaktig i generatorer for I_Δ , så det er maksimalt ki generatorer i I_Δ som er et multiplum av en av generatorene for P . La $n = mi + s$, for en $m \geq 0$ og en $s \in \{1, \dots, i\}$. Da er $\lceil \frac{n}{i} \rceil = m + 1$, så vi får at $k \leq m$. Men da er $ki \leq mi$, som er ekte mindre enn n (antall generatorer i I_Δ). Så minst én generator for I_Δ vil ikke være inneholdt i P . \square

Definisjon 8.1.3 (Regulær sekvens). *La R være en ring og la M være en R -modul. En sekvens av elementer $x_1, \dots, x_n \in R$ kalles en regulær sekvens på M (også kalt M -sekvens), dersom:*

1. $(r_1, \dots, r_n)M \neq M$, og
2. r_i er en ikke-nulldivisor i $M/(r_1, \dots, r_{i-1})M$ for $i = 1, \dots, n$.

En regulær M -sekvens (r_1, r_2, \dots, r_d) som er inneholdt i et ideal I er en maksimal regulær M -sekvens i I dersom $(r_1, \dots, r_d, r_{d+1})$ ikke er en regulær M -sekvens for noen $r_{d+1} \in R$.

Definisjon 8.1.4 (Dybde). *La R være en ring, $I \subseteq R$ et ideal, og M en endelig generert R -modul slik at $IM \neq M$. Dybden til I på M , $\text{dybde}(I, M)$, er lengden til de maksimale regulære sekvensene på M i I .*

Dersom $M = R$, ringen selv, skriver vi $\text{dybde}(I, M)$ som $\text{dybde}(I)$.

La (R, P) være en lokal ring med dimensjon d . Vi sier at R er regulær dersom P kan genereres av nøyaktig d elementer.

Definisjon 8.1.5 (Cohen-Macaulay ringer). Dersom en ring R er slik at $\text{dybde}(P) = \text{codim}(P)$ for ethvert maksimalt ideal P i R , så sier vi at R er Cohen-Macaulay.

Definisjon 8.1.6 (Projektive moduler). En modul P er projektiv dersom det for enhver epimorfi av moduler $\alpha : M \rightarrow N$ og enhver avbildning $\beta : P \rightarrow N$ eksisterer en avbildning $\gamma : P \rightarrow M$, slik at $\beta = \alpha\gamma$. Altså at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ \downarrow \gamma & \searrow \beta & \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N \end{array}$$

Frie moduler er projektive, siden en fri modul P er fri på et sett av generatorer p_i . Vi kan da velge elementer q_i i M som avbilder til elementene $\beta(p_i) \in N$, og la γ være avbildningen som sender p_i til q_i .

I det graderte tilfellet er *fri* og *projektiv* ekvivalente egenskaper for en modul.

Definisjon 8.1.7 (Projektiv dimensjon). La R være en Noethersk ring og M en R -modul. En *projektiv resolusjon* av M er et kompleks

$$\mathcal{F} : F_0 \xleftarrow{\phi_1} F_1 \xleftarrow{\phi_2} \dots \leftarrow F_{n-1} \xleftarrow{\phi_n} F_n \leftarrow \dots$$

av projektive R -moduler slik at $\text{coker}(\phi_1) = M$ og \mathcal{F} ikke har noen homologi. Den *projektive dimensjonen* til M , $\text{pd}(M)$ er minimum av lengdene til de projektive resolusjonene av M . Den er ∞ derom M ikke har noen endelig projektiv resolusjon.

Teorem 8.1.8 (Auslander-Buchsbaum formelen). La (R, P) være en lokal ring. Dersom M er en endelig generert R -modul med endelig projektiv dimensjon, så er $\text{pd}(M) = \text{dybde}(P, R) - \text{dybde}(P, M)$.

Bevis. For bevis, se [2]. □

8.2 Cohen-Macaulay Stanley-Reisner ringer

Vi skal nå tilbake til de spesielle Stanley-Reisner idealene vi definerte i kapittel 4.1, og se på når restklasseringene til disse er Cohen-Macaulay. Men først trenger vi følgende resultat:

Korollar 8.2.1 (Cohen-Macaulay ringer S/I). La $S = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, og $I \subset S$ et *propert* ideal. Da har vi at

$$S/I \text{ er en Cohen-Macaulay ring} \iff \text{pd}(S/I) = \text{codim}(I).$$

Bevis. S er en regulær lokal ring, med det unike maksimale idealet $P = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Regulære lokale ringer er alltid Cohen-Macaulay, så ved definisjonen av C-M ringer har vi at $\text{dybde}(P, S) = \text{codim}(P)$, og siden P er maksimalt så får vi at $\text{dybde}(P, S) = \text{dim}(S)$.

(S, P) er en lokal ring og S/I er en endelig generert S -modul av endelig projektiv dimensjon, så ved Auslander-Buchsbaum formelen har vi da at

$$\text{pd}(S/I) = \text{dybde}(P, S) - \text{dybde}(P, S/I)$$

Så vi får at $\text{dybde}(P, S/I) = \dim(S) - \text{pd}(S/I)$.

Siden P/I er det eneste maksimale idealet i S/I får vi fra definisjonen av C-M ringer at

$$S/I \text{ er Cohen-Macaulay} \iff \text{dybde}(P/I, S/I) = \text{codim}(P/I).$$

Men vi vet at

$$\text{dybde}(P/I, S/I) = \text{dybde}(P, S/I) = \dim(S) - \text{pd}(S/I),$$

og

$$\text{codim}(P/I) = \dim(S) - \text{codim}(I),$$

så vi får at

$$S/I \text{ er Cohen-Macaulay} \iff \text{pd}(S/I) = \text{codim}(I).$$

□

Teorem 8.2.2 (Cohen-Macaulay ringer S/I_Δ). *La I_Δ være idealet i $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generert av x^σ , der σ er definert slik: La $n \geq 3$ og la G være gruppen generert av den sykliske permutasjonen $(1, 2, \dots, n)$ på $\{1, 2, \dots, n\}$, og la σ gjennomløpe elementene i orbiten til $\{1, 2, \dots, i\}$ under virkningen fra G , for en i der $1 \leq i < n$. Dersom $i = 1$, $i = n - 1$, eller n er odde og $i = \frac{n-1}{2}$ så er S/I_Δ er Cohen-Macaulay.*

Bevis. Vi bruker her resultatene for lengde på minimale frie resolusjoner av S/I_Δ som vi fant i kapittel 4, i tillegg til teorem 8.1.2.

- Hvis $i = 1$ så er $I_\Delta = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Og da er $\text{codim}(I_\Delta) = \text{pd}(S/I_\Delta) = n$.
- Hvis $i = n - 1$ så er $I_\Delta = \langle x_1 x_2 \dots x_{n-1}, x_2 x_3 \dots x_n, \dots, x_n x_1 \dots x_{n-2} \rangle$. Og da er $\text{codim}(I_\Delta) = \text{pd}(S/I_\Delta) = 2$.
- Vi ser på tilfellet der n er odde og $i = \frac{n-1}{2}$. S/I er Cohen-Macaulay når lengden til den minimale resolusjonen til S/I_Δ er lik $\text{codim}(I_\Delta)$. Hvis $i = \frac{n-1}{2}$ og n er odde så er $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, og fra korollar 4.2.3 har vi da at $\text{pd}(S/I_\Delta) = 3$. Vi har vist at $\text{codim}(I_\Delta) = \lceil \frac{n}{i} \rceil$ (teorem 8.1.2), så

$$\text{codim}(I_\Delta) = \lceil \frac{n}{\frac{n-1}{2}} \rceil = \lceil \frac{2n}{n-1} \rceil,$$

og dersom $n \geq 3$ får vi at

$$3 \geq \frac{2n}{n-1} > \frac{2n}{n} = 2,$$

og dermed har vi $\text{codim}(I_\Delta) = 3$.

Så $\text{codim}(I_\Delta) = \text{pd}(S/I_\Delta) = 3$, og S/I_Δ er dermed Cohen-Macaulay.

□

Dette er mest sannsynlig også de eneste Stanley-Reisner ringene av denne spesielle typen som er Cohen-Macaulay, og vi har laget et argument for dette, som gjelder dersom formodningen for lengden på den minimale resolusjonen til S/I_Δ fra kapittel 4.1 gjelder.

Formodning 8.2.3. La I_Δ være idealet i $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ generert av \mathbf{x}^σ , der σ er definert slik: La $n \geq 3$ og la G være gruppen generert av den sykliske permutasjonen $(1, 2, \dots, n)$ på $\{1, 2, \dots, n\}$, og la σ gjennomløpe elementene i orbiten til $\{1, 2, \dots, i\}$ under virkningen fra G , for en i der $1 \leq i < n$. Dersom S/I_Δ er Cohen-Macaulay så er $i = 1$, $i = n - 1$, eller n er odde og $i = \frac{n-1}{2}$.

Bevis. (Gjelder dersom vi antar at formodningen på side 20 er sann). Anta at S/I_Δ er Cohen-Macaulay. Vi kan ikke ha $\text{codim}(I_\Delta) = 1$, siden $n \geq 3$ og $i \leq n - 1$.

- Anta at $\text{codim}(I_\Delta) = \text{pd}(S/I_\Delta) = 2$. Fra formodningen for lengden på den minimale resolusjonen til S/I_Δ fra kapittel 4.1 får vi at da må $i = n - 1$.
- Anta at $\text{codim}(I_\Delta) = \text{pd}(S/I_\Delta) = 3$. Vi har at $\text{codim}(I_\Delta) = \lceil \frac{n}{i} \rceil = 3$, og det gir at $2i < n \leq 3i$. Og siden lengden på den minimale resolusjonen er 3 så må $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i \leq n - 2$. Vi har altså at $2i < n$, så $i < \frac{n}{2}$. Så $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i$, som gir at

$$i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{hvis } n \text{ er partall} \\ \frac{n-1}{2} & \text{hvis } n \text{ er oddetall} \end{cases}$$

Men n kan ikke være partall, for da vil $i = \frac{n}{2}$ og $\text{codim}(I_\Delta) = \lceil \frac{n}{i} \rceil = \lceil \frac{n}{\frac{n}{2}} \rceil = 2 \neq 3$. Så vi må ha at $i = \frac{n-1}{2}$.

- Anta at $\text{codim}(I_\Delta) = \text{pd}(S/I_\Delta) = 4$. Vi har at $\text{codim}(I_\Delta) = \lceil \frac{n}{i} \rceil$, så $3i < n \leq 4i$. Det at lengden på resolusjonen er 4 impliserer at $\frac{2n}{i+1} = 4$, siden 4 er et partall, og vi får dermed at $i = \frac{n-2}{2}$. Fra formelen for kodimensjon får vi da at $3\frac{n-2}{2} < n \leq 4\frac{n-2}{2}$, så $4 \leq n < 6$, så n er 4 eller 5. $n = 4$ gir at $i = 1$, som er OK. $n = 5$ gir at $i = \frac{3}{2}$, som er umulig.
- Anta at $\text{codim}(I_\Delta) = \text{pd}(S/I_\Delta) = a$, for en $a > 4$. Vi antar først at a er odde. La $n = s(i+1) + t$ for en t med $0 < t < i+1$. Da er lengden på den minimale resolusjonen $\frac{2(n-t)}{i+1} + 1$. Og $\text{codim}(I_\Delta) = \lceil \frac{n}{i} \rceil = a$, så $(a-1)i < n \leq ai$. Dette gir at

$$(a-1)i = \frac{2(n-t)}{i+1}i < n,$$

slik at $2(n-t)i < n(i+1)$. Vi har dermed at $2ni - 2ti < ni + n$, så

$$ni - 2ti < n.$$

Fra dette får vi at $n(i-1) < 2ti$ og dermed at $n < \frac{2it}{i-1}$. Dersom vi antar at $i \neq 1, 2$ så får vi at $n \leq 3t$ og da er $s(i+1) + t \leq 3t$, slik at

$$s(i+1) \leq 2t < 2(i+1).$$

Så $s = 0$ eller $s = 1$. Vi sjekker disse tilfellene hver for seg:

1. $s = 0$. Da er $n = t$, så $a = \frac{2(n-t)}{i+1} + 1 = 1$, noe som gir en selvmotsigelse.
2. $s = 1$. Da er $n = (i+1) + t$, så $a = \frac{2(n-t)}{i+1} + 1 = \frac{2(i+1)}{i+1} + 1 = 3$, som også gir en selvmotsigelse.

Dersom $i = 2$ så kan vi også få tilfellet $s = 2$. Da er $n = 2(i + 1) + t$, så $a = \frac{2(n-t)}{i+1} + 1 = \frac{4(i+1)}{i+1} + 1 = 5$. Så vi får at $\text{codim}(I_\Delta) = \lceil \frac{n}{2} \rceil = 5$, og dermed at $n = 10$. Men lengden på den minimale resolusjonen til S/I_Δ , når $n = 10$ og $i = 2$, er 7.

Så ser vi på tilfellet når a er jamn. Da er lengden på den minimale resolusjonen $a = \frac{2n}{i+1}$, så $n = \frac{a(i+1)}{2}$. Vi setter dette inn i formelen for kodimensjonen og får at $\text{codim}(I_\Delta) = \lceil \frac{n}{i} \rceil = \lceil \frac{a(i+1)}{2i} \rceil$. Men vi skal ha at $\text{codim}(I_\Delta) = a$, så da får vi at

$$a - 1 < \frac{a(i+1)}{2i} \leq a.$$

Vi skal studere ulikheten til venstre; $a - 1 < \frac{a(i+1)}{2i}$. Dersom dette gjelder så er

$$(a - 1)2i < a(i + 1),$$

som medfører at

$$ai - a < 2i,$$

og dermed at

$$a < \frac{2i}{i - 1},$$

som er mindre eller lik 4 når $i > 1$. Dermed får vi en selvmotsigelse, siden vi antok at $a \geq 5$.

□

Så dersom formodningen på side 20 om lengden på minimale resolusjoner av S/I_Δ er sann, så har vi bestemt nøyaktig hvilke av disse spesielle Stanley-Reisner ringene som er Cohen-Macaulay.

Kapittel 9

Lineære cellulære resolusjoner

9.1 Litt om lineære resolusjoner

En annen metode man kan bruke for å finne Stanley-Reisner ringer som er Cohen-Macaulay er å se på lineære minimale frie resolusjoner. Samtlige resultater i kapittel 9.2 og 9.3, bortsett fra Proposisjon 9.3.4, er egne resultater. Følgende er hentet fra [4].

Definisjon 9.1.1 (Lineær resolusjon). *En \mathbb{N}^n -gradert fri resolusjon F_\bullet er lineær dersom matrisene for avbildningene i resolusjonen kan skrives på en slik måte at alle ikke-null posisjoner i matrisene er cx_i for en skalar c og en variabel x_i .*

Eksempel 9.1.2. Se på de spesielle Stanley-Reisner idealene vi definerte i kapittel 4.1. Når $i = n - 2$ har S/I_Δ en minimal lineær fri resolusjon

$$0 \leftarrow S/I_\Delta \leftarrow S(-n+2)^{n-1} \leftarrow S(-n+1)^n \leftarrow S(-n).$$

La M være en \mathbb{N}^n -gradert modul. Regulariteten til M er

$$\text{reg}(M) = \max\{|\mathbf{b}| - i \mid \beta_{i,\mathbf{b}}(M) \neq 0\}, \text{ der } |\mathbf{b}| = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Lemma 9.1.3. *La M være en \mathbb{N}^n -gradert modul. Regulariteten til M er større eller lik den minste totale graden til en generator i M . Dersom M er et monomialideal og alle de minimale generatorene til M har samme grad så har M en lineær fri resolusjon hvis og bare hvis graden til de minimale generatorene er lik $\text{reg}(M)$.*

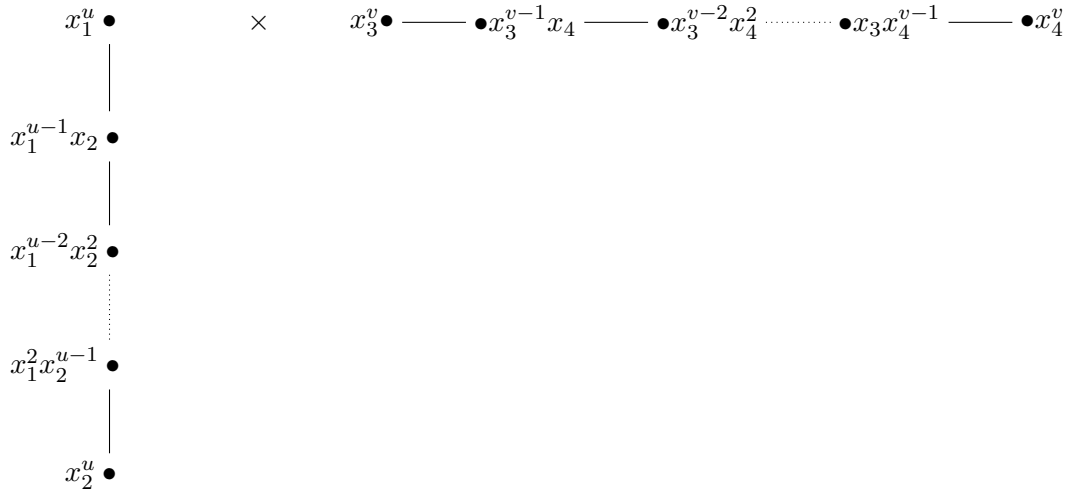
Vi vil gjerne finne eksempler på slike monomialidealer. Da kan vi også (ved hjelp av det neste teoremet) finne flere eksempler på Stanley-Reisner ringer som er Cohen-Macaulay.

Teorem 9.1.4 (Eagon-Reiner teoremet). *S/I_Δ er Cohen-Macaulay hvis og bare hvis I_{Δ^*} har en lineær fri resolusjon.*

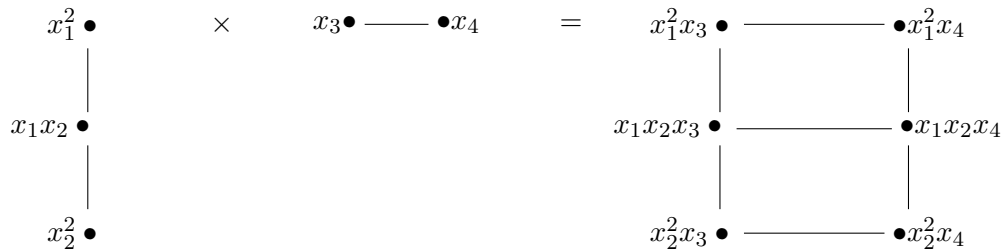
9.2 Noen spesielle minimale lineære resolusjoner

Vi skal her se på cellulære resolusjoner som er lineære. Målet er å finne idealer I med kodimensjon større eller lik 2, slik at S/I har en cellulær lineær minimal resolusjon av lengde mindre

eller lik 3. Og vi fant noen fine slike med kodimensjon 2 der S/I har projektiv dimensjon 3: Se på cellekomplekset X som er bygd opp av 2-dimensjonale firkantige ruter, et $u \times v$ -rutenett. Hjørnene merkes med monomer av grad $u + v$ ved å ta



Eksempel 9.2.1. For eksempel, la oss se på når $u = 2$ og $v = 1$:



Da får hjørnene merkinger $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$, der

$$\mathbf{a} \in \{(a, b, c, d) \mid a + b = u, c + d = v, a, b, c, d \geq 0\}.$$

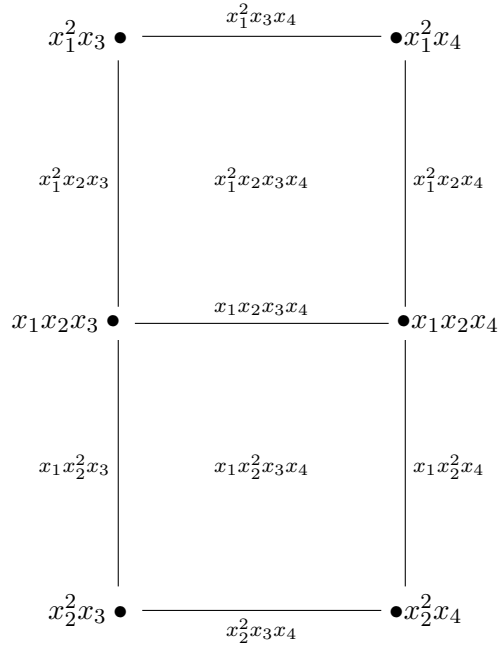
Kantene får merking lcm (minste felles multiplum) av de tilhørende hjørnene, så de får da merkinger $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$, der

$$\mathbf{k} \in \{(a, b, c, d) \mid u \leq a + b \leq u + 1, v \leq c + d \leq v + 1, a + b + c + d = u + v + 1, a, b, c, d \geq 0\}.$$

På samme måte får flatene merkinger $\mathbf{x}^{\mathbf{F}}$, der

$$\mathbf{F} \in \{(a, b, c, d) \mid a + b = u + 1, c + d = v + 1, a, b, c, d \geq 0\}.$$

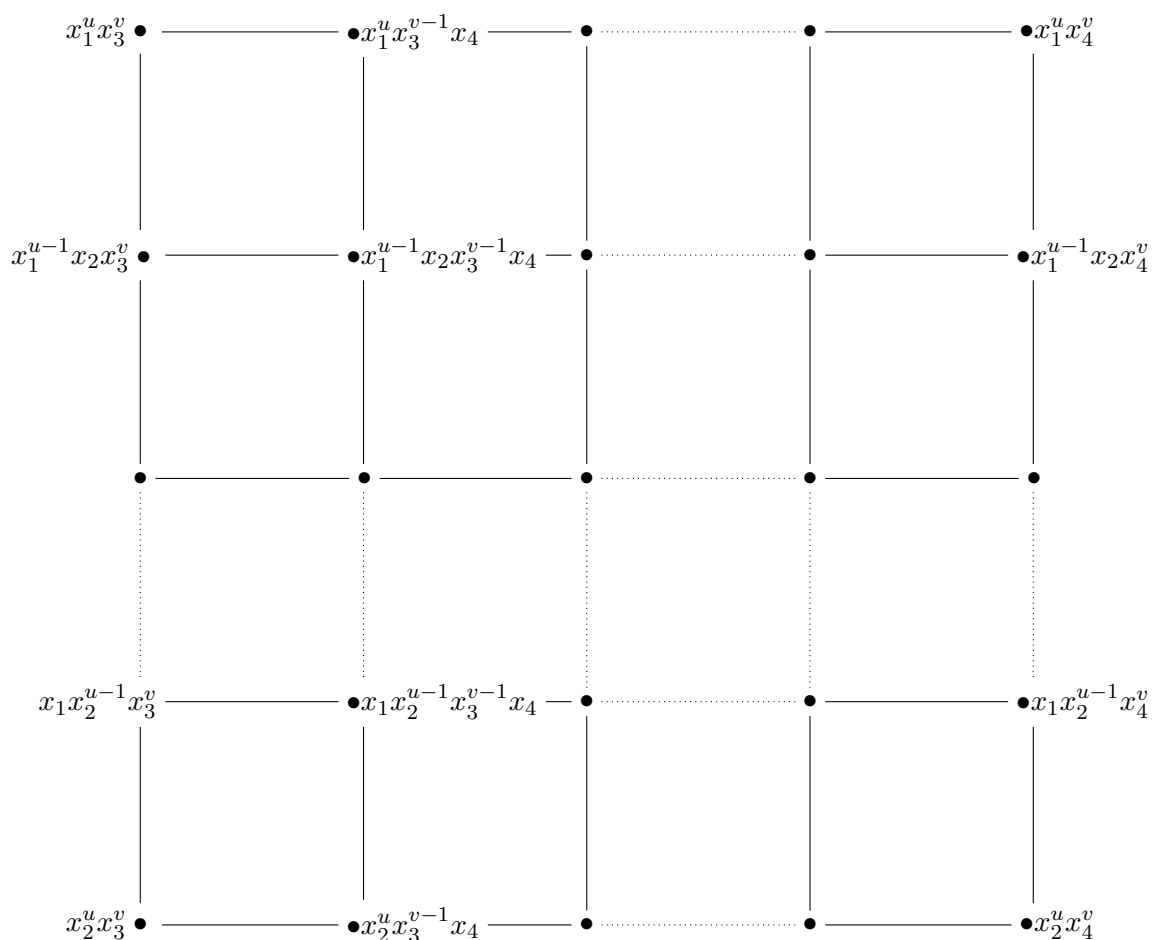
Eksempel 9.2.2. Når $u = 2$ og $v = 1$ får vi da dette merkede cellekomplekset:



Vi finner at antall hjørner i dette cellekomplekset er $uv + u + v - 1$, antall kanter er $2uv + u + v$ og antall ruter er uv , og vi ser så på det tilhørende cellulære komplekset

$$\mathcal{F}_X : 0 \xleftarrow{\varphi^1} S \leftarrow S(-u-v)^{u+v+uv-1} \leftarrow S(-u-v-1)^{u+v+2uv} \leftarrow S(-u-v-2)^{uv} \leftarrow 0.$$

Vi vil vise at dette er en resolusjon, og til å gjøre det bruker vi proposisjon 2.3.5 og viser at $X_{\leq \mathbf{b}}$ er asyklisk for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^4$. X er 2-dimensjonal, så vi trenger bare å sjekke at $X_{\leq \mathbf{b}}$ er sammenhengende og ikke har noen 2-dimensjonale hull, eller at det er tomt. La X være cellekomplekset



der hjørnene er merket med monomer $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$, der $\mathbf{a} = (a, b, c, d)$. La oss se på en vilkårlig vektor $\mathbf{b} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{N}^4$. Dersom vi skal se på underkomplekset $X_{\leq \mathbf{b}}$ så skjer følgende endringer fra X til $X_{\leq \mathbf{b}}$:

- Dersom $\alpha < u$ så fjernes de kolonnene der $a > \alpha$.
- Dersom $\beta < u$ så fjernes de kolonnene der $b > \beta$.
- Dersom $\gamma < v$ så fjernes de radene der $c > \gamma$.
- Dersom $\delta < v$ så fjernes de radene der $d > \delta$.

Vi dele inn i to tilfeller:

1. Det første tilfellet er når $\alpha + \beta < u$ eller $\gamma + \delta < v$. Da er $X_{\leq \mathbf{b}} = \emptyset$, det tomme cellekomplekset, siden vi da fjerner hhv. alle kolonnene eller alle radene.
2. Det andre tilfellet er når $\alpha + \beta \geq u$ og $\gamma + \delta \geq v$. La

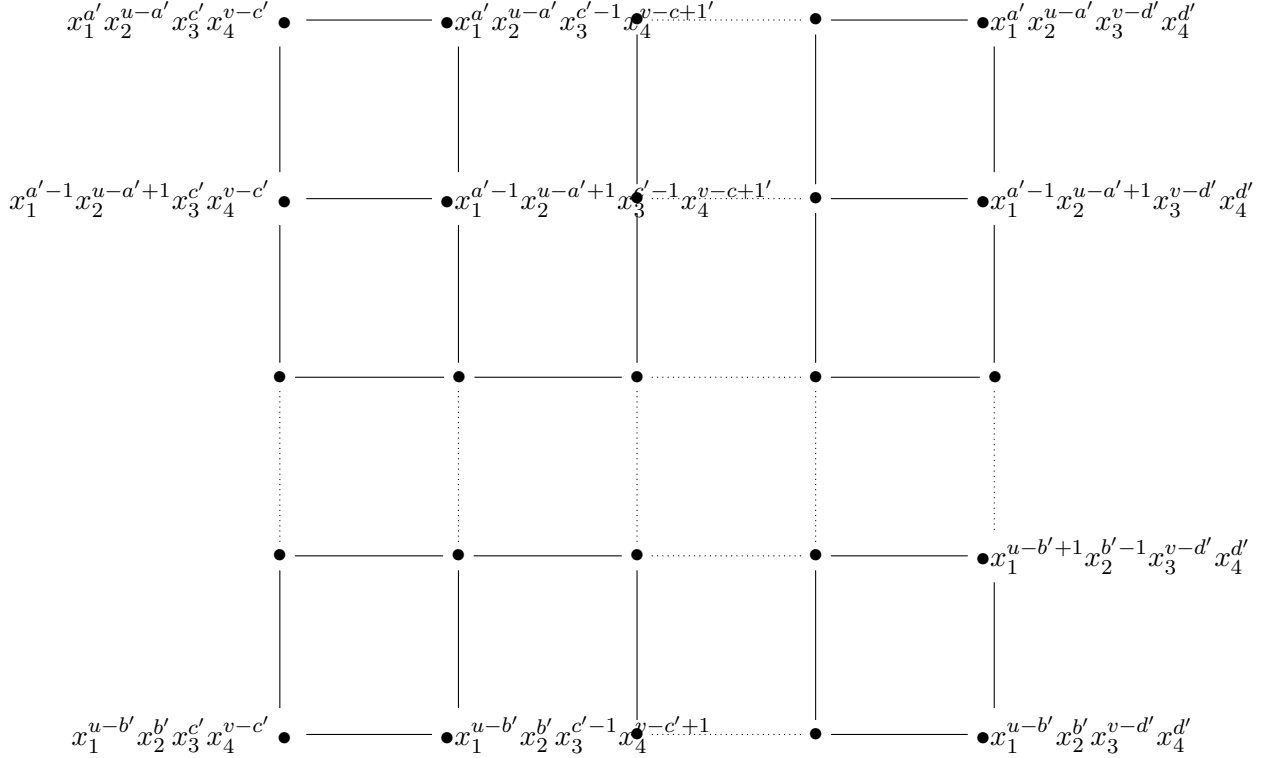
$$a' = \min\{\alpha, u\}$$

$$b' = \min\{\beta, u\}$$

$$c' = \min\{\gamma, v\}$$

$$d' = \min\{\delta, v\}$$

Da er $X_{\leq \mathbf{b}}$ gitt ved dette cellekomplekset (vi har bare merket hjørnene her, men kantene og rutene skal også være merket, med lcm av de tilhørende hhv. hjørnene og kantene):



Og vi ser at dette cellekomplekset er asyklisk (det har ingen hull, eller det er tomt).

Teorem 9.2.3. *Ethvert ideal $I = \langle x_1, x_2 \rangle^u \langle x_3, x_4 \rangle^v$ der $u, v > 0$ har en lineær minimal resolusjon*

$$\mathcal{F}_X : 0 \xleftarrow{\varphi_1} S \leftarrow S(-u-v)^{u+v+uv-1} \leftarrow S(-u-v-1)^{u+v+2uv} \leftarrow S(-u-v-2)^{uv} \leftarrow 0.$$

Bevis. Vi ser at $\text{im}(\varphi_1) = I$, og vi viste over at dette komplekset er en resolusjon. Og den er minimal fordi alle avbildningene i det tensoriserte komplekset $\mathcal{F}_X \otimes S/m$ er 0 (der $m = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ er det maksimale idealet i S). Dette ser vi pga. at tvistingen til F_i er nøyaktig èn mindre enn tvistingen til F_{i-1} for $i \geq 2$. \square

Disse idealene desverre ikke kvadratfrie, bortsett fra i tilfellet $u = 1, v = 1$, så for å kunne benytte oss av teorem 9.1.4 og finne Cohen-Macaulay Stanley-Reisner ringer må vi innføre konseptet *polarisering* av monomialideal. Se på et monomialideal $J = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}^1}, \mathbf{x}^{\mathbf{a}^2}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}^r} \rangle$. Prosessen med polarisering foregår på den måten at hver potens av en variabel, si potensen x^d av variabel x , byttes ut med et produkt av d nye variable, si x_1, x_2, \dots, x_d .

Eksempel 9.2.4. La $J = \langle x^3, x^2 y^4, z^3 x, y^2 z^2 \rangle$ Da er polariseringen av J gitt ved

$$I_{\Delta} = \langle x_1 x_2 x_3, x_1 x_2 y_1 y_2 y_3 y_4, z_1 z_2 z_3 x_1, y_1 y_2 z_1 z_2 \rangle.$$

Dette er nå et ideal i polynomringen med 10 variable, $\tilde{S} = \mathbb{k}[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3]$.

Idealet I_Δ har samme kodimensjon som J og en minimal lineær resolusjon av S/J gir en minimal lineær resolusjon av \tilde{S}/I_Δ . Grunnen til det siste er at dersom \mathcal{F} er en minimal resolusjon av \tilde{S}/I_Δ over \tilde{S} , så er $\mathcal{F} \otimes_{\tilde{S}} \tilde{S}/\Theta$ en minimal resolusjon av S/J over S , der $\Theta = \langle \theta_1, \theta_2, \dots \rangle$ er idealet generert av en regulær sekvens $\theta_1, \theta_2, \dots$ i \tilde{S} slik at hver θ er en differanse mellom to variable. Siden denne relasjonen bevarer tvistinger og minimale frie resolusjoner er unike, opptil isomorfi, får vi at dersom $\mathcal{F} \otimes_{\tilde{S}} \tilde{S}/\Theta$ lineær så er \mathcal{F} også det.

Dermed får vi at dersom idealet I_Δ i $S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ er polariseringen av idealet $\langle x_1, x_2 \rangle^u \langle x_3, x_4 \rangle^v$ der $u, v > 0$, så vil Stanley-Reisner ringen til det Alexanderduale idealet, S/I_{Δ^*} , være Cohen-Macaulay.

9.3 To n -kanter

Vi skal også se på en annen gruppe av cellekomplekser som gir lineære cellulære minimale resolusjoner. La $n \geq 4$ og la X bestå av to n -kanter som er limt sammen. Vi merker hjørnene på den ene n -kanten med monomene

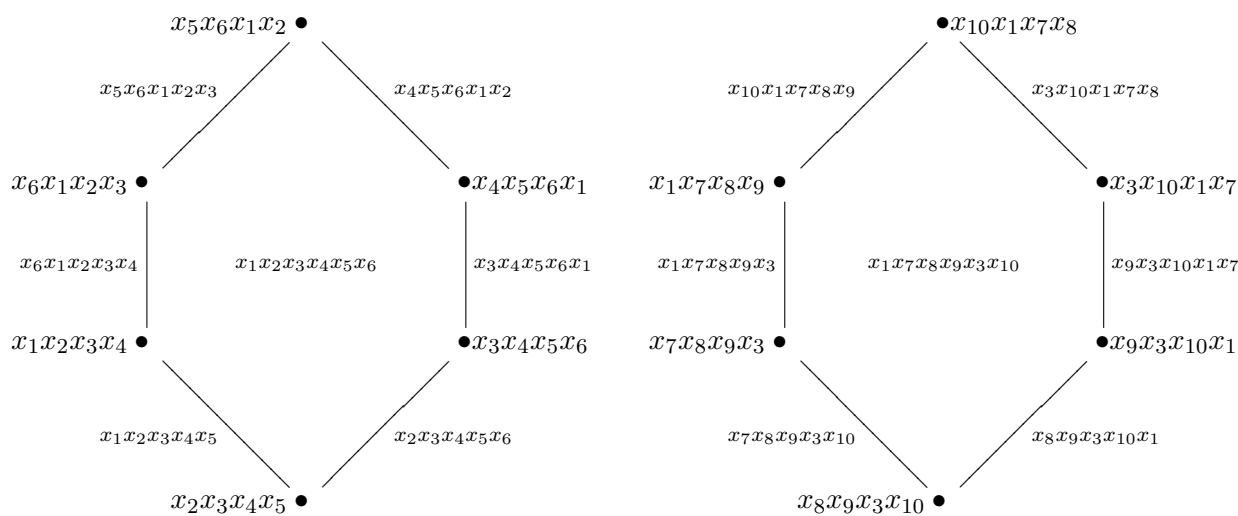
$$\begin{aligned} x_1 x_2 \cdots x_{n-2} \\ x_2 x_3 \cdots x_{n-1} \\ \vdots \\ x_n x_1 \cdots x_{n-3} \end{aligned}$$

Og hjørnene på den andre n -kanten får monom-merkingene

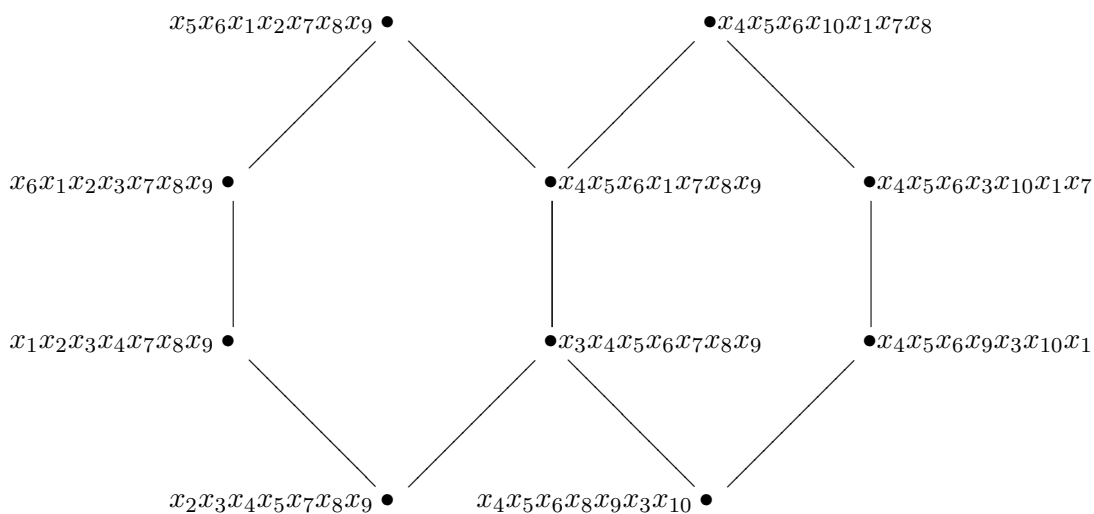
$$\begin{aligned} x_1 x_{n+1} \cdots x_{2n-3} \\ x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n-3} x_3 \\ x_{n+2} \cdots x_{2n-3} x_3 x_{2n-2} \\ x_{n+3} \cdots x_3 x_{2n-2} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-2} x_1 x_{n+1} \cdots x_{2n-4} \end{aligned}$$

Så multipliserer vi alle hjørnemonomene på den første n -kanten med $x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n-3}$, og vi multipliserer alle hjørnemonomene på den andre n -kanten med $x_4 x_5 \cdots x_n$. Da kan vi lime sammen de to n -kantene langs den kanten som går mellom hjørnene som har merkinger $x_4 x_5 \cdots x_{2n-3} x_1$ og $x_3 x_4 \cdots x_{2n-3}$. Totalt antall variable blir $N = 2n - 2$.

Eksempel 9.3.1. La $n = 6$. Vi tar først to sekskanter som vi merker med monomer som beskrevet over:



Så multipliserer vi hjørnemerkingene på sekskanten til venstre med $x_7x_8x_9$ og hjørnemerkingene på sekskanten til høyre med $x_4x_5x_6$, og limer dem sammen til ett cellulært kompleks (her skal også kantene og flatene være merket, med lcm av de tilhørende hjørnene/kantene):



Generelt får vi da det cellulære komplekset

$$0 \leftarrow S^1 \leftarrow S(-2n+5)^{2n-2} \leftarrow S(-2n+4)^{2n-1} \leftarrow S(-2n+3)^2 \leftarrow 0,$$

eller

$$0 \leftarrow S^1 \leftarrow S(-N+3)^N \leftarrow S(-N+2)^{N+1} \leftarrow S(-N+1)^2 \leftarrow 0.$$

Og dette cellulære komplekset er en resolusjon for S/I , der idealet I er generert av monomene som hjørnene i X er merket med.

For å vise dette bruker vi proposisjon 2.3.5 og ser på underkompleksene $X_{\leq \mathbf{b}}$, der

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{N}^N$$

og deler opp i 2 tilfeller:

1. Dersom $\mathbf{b} \succeq (1, 1, \dots, 1)$ får vi at $X_{\leq \mathbf{b}} = X$, som er asyklisk.
2. Anta nå at minst en av koordinatene i \mathbf{b} er 0, si $b_r = 0$.
 - (a) Dersom $r \in \{4, 5, \dots, 2n - 3\}$ så blir hele den ene n -kanten og nesten hele den andre fjernet, og vi står igjen med en kant. Og et slikt cellekompleks er asyklisk. Og ethvert underkompleks av dette er tomt.
 - (b) Dersom $r = 1$ eller $r = 3$ så vil kanten i midten (den kanten som går mellom hjørnene som har merkinger $x_4x_5 \cdots x_{2n-3}x_1$ og $x_3x_4 \cdots x_{2n-3}$) bli fjernet, og alle hjørnene utenom et av hjørnene som har merkinger $x_4x_5 \cdots x_{2n-3}x_1$ og $x_3x_4 \cdots x_{2n-3}$ og de to nabohjørnenene til dette blir også fjernet. Så da sitter vi igjen med to sammenhengende kanter, som gir et asyklisk cellekompleks. Og ethvert underkompleks av dette er enten tomt eller asyklisk.
 - (c) Dersom $r = 2$ eller $r = 2n - 2$ så vil vi sitte igjen med kun den ene n -kanten, og denne er asyklisk. Og ethvert underkompleks av dette cellekomplekset er asyklisk (dette ser vi i beviset for teorem 4.2.2).

Vi ser at denne resolusjonen er minimal, siden alle avbildningene i det tensoriserte komplekset $\mathcal{F}_X \otimes S/m$ er 0. Vi ser også klart at dette er en lineær resolusjon (pga. tvistingene i de frie modulene).

Teorem 9.3.2. *Gitt n , la X være cellekomplekset som består av to sammenlimte n -kanter, med merking som beskrevet over. La I være idealet generert av hjørnemonomene i denne merkingen. For den cellulære resolusjonen*

$$0 \leftarrow S^1 \leftarrow S(-2n + 5)^{2n-2} \leftarrow S(-2n + 4)^{2n-1} \xleftarrow{\beta} S(-2n + 3)^2 \leftarrow 0$$

får vi da at $\text{codim}(\text{coker}(\beta^\vee)) = n$, der β^\vee er dualavbildningen til β .

Før vi beviser dette trenger vi litt mer teori fra [2].

Definisjon 9.3.3 (Fittingidealet). *La M være en endelig generert modul over en ring R , og la*

$$\varphi : F \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$$

være en presentasjon av M der G er en endelig generert fri modul med rang r . Da definerer vi det i 'te Fittingidealet til M til å være

$$\text{Fitt}_i(M) = I_{r-i}\varphi \subset R,$$

der $I_{r-i}\varphi$ er determinantidealet til φ , altså idealet generert av $(r - i) \times (r - i)$ -minorene i φ .

Proposisjon 9.3.4. *For enhver R -modul M har vi at:*

1. $Fitt_0(M) \subseteq ann(M)$.

2. For enhver $j > 0$ har vi at $(ann(M))Fitt_j(M) \subseteq Fitt_{j-1}(M)$. Dersom M kan genereres av n elementer så er $(ann(M))^n \subseteq Fitt_0(M)$.

Bevis. Beviset for denne proposisjonen finner man i kapittel 20.2 i [2]. □

Bevis for teorem 9.3.2. La $M = coker(\beta^\vee)$. M er en R -modul, så kodimensjonen til M er definert som $codim(ann(M))$. La

$$\beta^\vee : S^{N+1} \rightarrow S^2 \rightarrow M \rightarrow 0$$

være presentasjonen av M . Vi har at M er endelig generert, så vi får fra proposisjon 9.3.4 at radikalet $r(ann(M)) = r(Fitt_0(M))$. Og dermed får vi at

$$codim(ann(M)) = codim(Fitt_0(M)).$$

Rangen til S^2 er 2, så $Fitt_0(M) = I_{2-0}\beta^\vee = I_2\beta^\vee$. Så vi må vise at kodimensjonen til $I_2\beta^\vee$ er n . Avbildningen β^\vee er gitt ved matrisen

$$\begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & -x_3 & -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_N & 0 & x_{N-1} & -x_{N-2} & -x_{N-3} & \dots & -x_{n+1} & -x_3 & x_1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $I_2\beta^\vee \subseteq \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, og $I_2\beta^\vee \subseteq \langle x_1, x_3, x_{n+1}, \dots, x_N \rangle$ som har kodimensjon $N - n + 2 = (2n - 2) - n + 2 = n$, men finnes det et primideal P med mindre enn n elementer slik at $I_2\beta^\vee \subseteq P$?

Anta at $I_2\beta^\vee \subseteq P = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}} \rangle$. Da finnes det minst en x_j i $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ som ikke er inneholdt i P , og en minst x_k i $\{x_1, x_3, x_{n+1}, \dots, x_N\}$ som ikke er inneholdt i P . Men $x_j x_k$ er inneholdt i $I_2\beta^\vee$, og vi får dermed en selvmotsigelse.

Det eneste unntaket får vi når $x_j = x_2$ og $x_k = x_N$, siden $x_2 x_N$ ikke er inneholdt i $I_2\beta^\vee$. Så anta at $P = \langle x_1, x_3, x_4, \dots, x_n \rangle$. Da vil $x_2 x_{N-1} \notin P$ dersom $N \geq 5$. Og vi har at $n \geq 4$, så $N = 2n - 2 \geq 6$. Anta så at $P = \langle x_1, x_3, x_{n+1}, \dots, x_{N-1} \rangle$. Da er $x_n x_N \notin P$ (siden $n \geq 4$), og vi får en selvmotsigelse.

Vi har dermed vist at kokjernen til β^\vee har kodimensjon n . □

Bibliografi

- [1] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*. Cambridge University Press, 1993.
- [2] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer, 2004.
- [3] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] Ezra Miller and Bernd Sturmfells. *Combinatorial Commutative Algebra*. Springer, 2005.