Elevar si grafiske forståing av derivasjon

- Ei kvalitativ tilnærming -

Hovudoppgåve for graden Cand. Scient.
Matematikkdidaktikk

Jon Arild Jørgensen

Universitetet i Bergen
Matematisk institutt
Bergen 2006

FØREORD

Denne hovudfagsoppgåva er ein del av eit hovudfagsstudium i matematikkdidaktikk ved Matematisk Institutt, Det matematisk-naturvitskaplege fakultet, UiB. Dette er eit tilbod som etter kvalitetsreforma vart erstatta av ei integrert lærarutdanning, som mellom anna tilbyr eit femårig masterprogram.

Etter fullført 4-årig allmennlærarutdanning, starta eg hausten 2000 på det som seinare vart mi emnegruppe i matematikk ved UiB. Motivasjonen var auka kompetanse som skulle koma meg og mine framtidige elevar til gode. Matematikk var eit fag eg alltid hadde likt og eit fag der eg med litt innsats fekk bra resultat. Eg vart difor overraska då eg starta på M100, grunnkurs i matematikk, og for fyrste gong opplevde at matematikk var vanskeleg. Oppgåver som kunne løysast ved hjelp av ein algoritme gjekk bra, men *forståinga* var det verre med, sjølv om eg la ned mykje arbeid.

I staden for å ta motet frå meg vart denne oppdaginga ein inspirasjon, og eg sette meg mål om å få ei betre forståing av dei matematiske begrepa. Prosessen eg då gjekk gjennom er mykje av grunnen til at eg hausten 2002 valde å starta på eit hovudfagsarbeid i matematikkdidaktikk. Kunnskap om ulike måtar å forstå matematiske begrep er vesentleg for å leggja til rette for undervisning i matematikk. Det ville eg arbeida vidare med!

I arbeidet med denne oppgåva vil eg fyrst og fremst takka rettleiarane mine. Hovudrettleiar Ole Einar Torkildsen, fyrsteamanuensis ved Høgskulen i Volda har gjeve gode bidrag i alt frå problemformulering til drøfting av resultat. Birettleiar Cristoph Kirfel, fyrsteamanuensis ved Universitetet i Bergen, kom inn på eit seinare tidspunkt og har kome med gode innspel i drøftinga av oppgåva og i den avsluttande skrivefasen.

Samtidig må det nemnast at denne oppgåva ikkje hadde blitt til utan velvillige lærarar og elevar på utvalde skular. Ein stor takk til dykk!

Eit hovudfagsarbeid er til tider eit egoistisk føretak. Eg vil takka kona mi, Linda, som har vore positiv heile vegen.

Molde 21. Mai 2006

Jon Arild Jørgensen

SAMANDRAG

Denne oppgåva handlar om elevar si grafiske forståing av derivasjon. Målet med oppgåva har vore å få ei oversikt over elevar sitt begrepsbilete i samband med ei grafisk framstilling av den deriverte, samt sjå på samanhengen mellom begrepsbilete og løysingsstrategiar i derivasjonsoppgåver der dei skal tolka den deriverte grafisk.

Derivasjon er eit stort emne for elevar som vel å fordjupa seg i matematikk på vidaregåande skule. For å forstå den deriverte til fulle er elevane avhengig av mellom anna begrep som funksjonar, grenseverdi, kontinuitet og stigningstal. Det er ikkje muleg å gå inn på alle delar av elevar si forståing av derivasjon innafor ramma av eit hovudfagsarbeid. Eg har difor vald å gå nærare inn i elevar si grafiske forståing av den deriverte.

Motivasjonen for å velja ei grafisk vinkling er at den deriverte kan tilnærmast på ein meir intuitiv måte enn den tradisjonelle grenseverditilnærminga, som er vald i læreplan og mange lærebøker. David Tall har forska mykje på dette området. Bakgrunnen for arbeidet hans er Piaget og konstruktivismen. Det er også teorigrunnlaget i denne oppgåva.

Vidare er den kvalitative metode nytta som arbeidsreiskap i denne oppgåva. Bakgrunnen for det er at dei store kvantitative undersøkingane (til dømes TIMSS) seier meg lite om *kvifor* elevar svarer som dei gjer når dei løyser oppgåver. Eg har difor vald å intervjua seks elevar som arbeider med derivasjonsoppgåver og analysera desse intervjua grundig.

Resultata tyder på at elevane har god oversikt over den fyrstederiverte til ein funksjon. Dei har eit tilfredsstillande bilete av stigninga til grafen i eit punkt, og nyttar ofte tangentar for å visualisera dette. Dei har likevel nokre kognitive konfliktar som gjer det vanskeleg å tolka den fyrstederiverte grafisk. Dei har også problem med å visualisera den andrederiverte. Vidare ser ein at elevar som har eit rikt begrepsbilete og mange kognitive einingar er meir fleksible når dei skal løysa oppgåver.

På bakgrunn av desse resultata kan det difor argumenterast for at det bør arbeidast meir med den grafiske tolkinga av den deriverte i klasserommet. Dei grafiske framstillingane og dei kognitive konfliktane elevane møter bør nyttast som springbrett mot ei høgare forståing av derivasjonsbegrepet. Det finst mange gratis, lett tilgjengelege digitale verktøy som med fordel kan nyttast i undervisninga. Dette kan gjerast på ein måte som er lite arbeidskrevjande for læraren, men likevel er med på å gje elevane eit rikare begrepsbilete.

INNHALDSLISTE

1 INNLEIING OG PROBLEMSTILLING

1.1 Innleiing

Matematikk har i nær sagt uminnelige tider vore forska på, både i teoretiske og anvendte samanhengar. Den vitskaplege disiplinen knytt til forsking på korleis ein underviser og lærer matematikk er derimot ein langt yngre disiplin. The International Commission for Mathematics Instruction (ICMI) vart stifta på ein internasjonal matematikkonferanse i Roma i 1908, og etter kvart har globale konferansar som International Congress on Mathematics Education (ICME), medverka til at ein har fått eit internasjonalt fellesskap av forskarar på området *matematikkdidaktikk*. Biehler *et al.* (1994) definerer matematikkdidaktikk som den vitskaplege disiplinen som er relatert til forsking og forskingsbasert utviklingsarbeid på korleis ein underviser og lærer matematikk.

Dette er ein ganske vid definisjon, og eit studie i matematikkdidaktikk kan såleis ha mange ulike fokus. Motivasjonen bak dette studiet er å sjå nærare på kva forståing elevar har av matematiske begrep, og korleis dette påverkar deira løysingsstrategiar i arbeid med oppgåver. Dersom ein skal seie noko om dette innafor ramma av eit hovudfagsarbeid, må ei avgrensing til. I denne oppgåva har eg vald å sjå nærare på elevar si forståing av derivasjonsbegrepet.

Som mange andre matematiske begrep nyttar me derivasjonsbegrepet i kvardagen, ofte utan å reflektera over det. Til dømes kan ein medpassasjer på biltur kommentera at "akkurat i det me passerte fotoboksen køyrde me heldigvis i 50 km/t." Fart og akselerasjon er kvardagsbegrep, men er samstundes den fyrste- og andrederiverte når me ser på avstand som ein funksjon av tid. Også politikarar andrederiverar: "Det går nedover, men det går ikkje så mykje nedover som det gjorde førre månad!"

Elevar vert introdusert for derivasjonsbegrepet på grunnkurset i matematikk i vidaregåande skule, men derivasjon er hovudsakleg ein del av matematikkurset i VK1 og VK2. Vidare møter ein begrepet i mange samanhengar i høgare utdanning. Frå dei reine matematikkfaga på universitet som går nærare inn i definisjonar, teorem og prov, til anvendte fag som nyttar derivasjon i ulike modelleringar. Derivasjon finn ein og i andre realfag som fysikk, kjemi og biologi. Også dei økonomiske faga nyttar derivasjon i ulike samanhengar.

For å forstå derivasjon må ein mellom anna ha eit godt utvikla funksjonsbegrep, ein må forstå gjennomsnittleg og momentan vekstfart og ha god kontroll på grenseverdiar. Det er ikkje muleg å undersøkja alle delane av derivasjonsbegrepet innafor tidsramma eit hovudfagsarbeid gjev. Eg har difor vald å fokusera på grafisk forståing av derivasjon. Motivasjonen bak valet er at derivasjonsbegrepet kan tilnærmast på ein meir intuitiv måte enn ved den tradisjonelle grenseverditilnærminga (Tall 1985a), og det kan auka forståinga for begrep som er viktige grunnlag for derivasjon, men som er opphav til kognitive vanskar hjå elevane (til dømes tangent, grenseverdi og vekstfart).

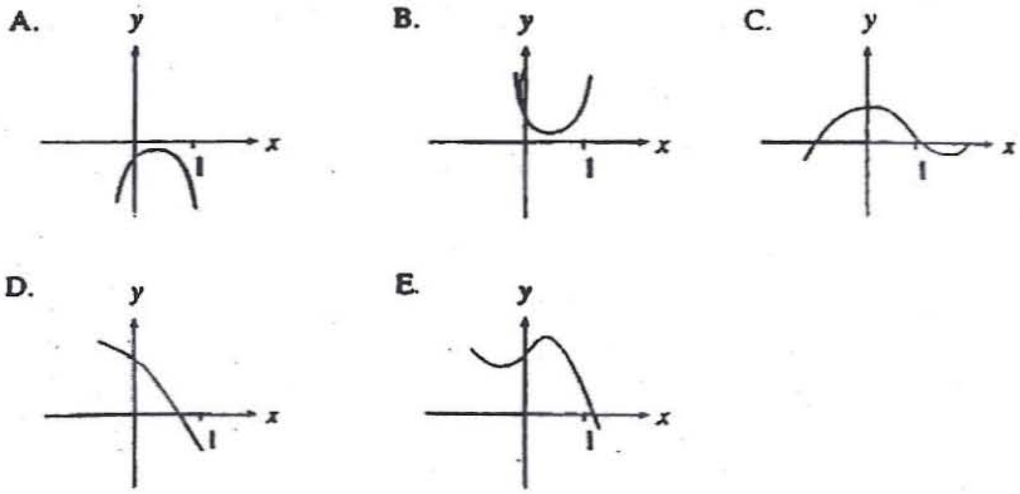
Derivasjon er vidare eit døme på eit matematisk begrep som lett kan nyttast utan at ein har ei djup forståing av det. Derivasjonsreglane kan puggast og nyttast i algoritmar og ein kan mellom anna finna botnpunkt, toppunkt og vendepunkt for ein graf berre ved hjelp av derivasjonsreglane, utan at ein nødvendigvis forstår kva ein har gjort. Den djupare forståinga har ein derimot når ein oppfattar derivasjon som eit objekt i seg sjølv, ikkje som ein prosess.

Ei viktig kjelde til elevar sine kunnskapar i matematikk er dei store internasjonale undersøkingane Programme for International Student Assassement, PISA og Third International Mathematics and Science Study, TIMSS[1]. PISA-undersøkinga ynskjer mellom anna å måla skuleelevar sine kunnskapar i matematikk ved avslutta obligatorisk skulegang. I Noreg vil det vera elevar frå 10. klasse. Desse elevane har enno ikkje møtt begrepet derivasjon. TIMSS er ei internasjonal undersøking om matematikk og naturfag i skulen, og vert gjennomført på ulike alderstrinn. I den eine gruppa er det elevar frå siste året på vidaregåande skule. Nokre av oppgåvene omhandlar derivasjon, og undersøkinga kan difor seia noko om elevar si forståing av derivasjonsbegrepet.

Mellom anna viser det seg at 46,5 % av dei norske TIMSS-deltakarane svarer feil på oppgåva i figur 1 – ei av oppgåvene som omhandlar grafisk forståing av derivasjon (Vikse, 1999). Problemet er at kvantitative undersøkingar som TIMSS ikkje seier noko om *kvifor* deltakarane svarer som dei gjer. Kva framgangsmåtar ligg bak når ein deltakar til dømes meiner at alternativ B er det rette svaret?

Hvilken av grafene nedenfor har følgende egenskaper:

$f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$ og $f''(x)$ er negativ for alle x?



Figur 1: Oppgåve K05 frå TIMMS tilleggsundersøking 1998.

Det vert difor tilnærma umogleg å finna ut kva den enkelte deltakar tenkjer i slike store undersøkingar. Ei alternativ framgangsmåte er ein *kvalitativ* forskingsmetode, som er mykje nytta i matematikkdidaktisk forsking. Då får ein ikkje resultat som automatisk kan generaliserast til ei stor gruppe, men ein kan gå nærare inn i korleis eit individ tenkjer i møte med til dømes oppgåva over. Den kvalitative metoden er vald for å gje svar på mine problemstillingar.

[1] Den siste undersøkinga vert no kalla "Trends in International Mathematics and Science Study".

1.2 Problemområde og problemstillingar

1.2.1 Problemområde

Som nemnt i innleiinga var motivasjonen bak dette studiet å *sjå nærare på kva forståing elevar har av matematiske begrep og finna ut meir om korleis dette påverkar deira løysingsstrategiar i arbeid med oppgåver.*

For å avgrensa oppgåva har eg vald å sjå nærare på begrepet derivasjon og eg har vald ei kvalitativ tilnærming. I oppgåva har eg difor eit utval av elevar som har fordjuping i matematikk og såleis har gjennomgått emnet derivasjon slik læreplanen legg opp til. Utvalet består difor av elevar som har fullført 2MX.

1.2.2 Problemstillingar

Med bakgrunn i problemområdet vert difor problemstillinga for denne hovudfagsoppgåva todelt. Eg ynskjer fyrst å sjå nærare på:

Begrepsbiletet hjå eit utval elevar i vidaregåande skule i samband med ei grafisk framstilling av den deriverte.

Tall og Vinner, 1981 definerer begrepsbiletet slik:

We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes.

(Tall og Vinner, 1981, s. 2)

Med utgangspunkt i intervju og observasjon av elevar som løyser derivasjonsoppgåver i ein grafisk kontekst, ynskjer eg å få ei oversikt over (delar av) deira kognitive struktur knytt til begrepet derivasjon. Mellom anna vil eg prøva å svara på desse forskingsspørsmåla:

- Har elevane eit "funksjonelt" begrepsbilete av den deriverte i høve til den formelle begrepsdefinisjonen. Nyttar dei eventuelt den formelle definisjonen?
- Har elevane mange bilete i samband med den deriverte. Har dei "rike" eller "fattige" begrepsbilete?
- Kan ein identifisera kognitive konfliktar i begrepsbiletet?

Vidare ynskjer eg å:

Sjå på samanhengen mellom begrepsbilete og løysingsstrategiar i derivasjonsoppgåver der ei grafisk tolking av den deriverte er føremålstenleg.

Med bakgrunn i resultata frå den fyrste delen av problemstillinga vil eg sjå nærare på om elevane sine ulike begrepsbilete har noko å seia for korleis dei løyser eit utval grafiske derivasjonsoppgåver. Følgjande forskingsspørsmål er eit utgangspunkt for arbeidet:

- Klarer elevane å tolka den deriverte grafisk, eller vel dei andre løysingsmetodar?
- Er det slik at eit "rikt" begrepsbilete gjer det lettare å løysa grafiske derivasjonsoppgåver?
- Kva har kognitive konfliktar å seia for elevane når dei arbeider med oppgåvene?

1.3 Oppgåva sin struktur

Eg vil no kort skildra den vidare oppbygginga av oppgåva.

I kapittel 2 vert det teoretiske grunnlaget for oppgåva presentert. Teorikapitlet går nærare inn i kva aktuell forsking seier om korleis ein tileigner seg matematiske begrep. Utgangspunktet er kognitiv psykologi og konstruktivismen. David Tall er sentral i dette kapitlet. Han ser mellom anna nærare på eit individ sin kognitive struktur knytt til eit begrep. Han innfører uttrykka *begrepsbilete*, *begrepsdefinisjon* (Tall og Vinner, 1981), og *kognitive eining* (Barnard og Tall, 1997), som hjelpemiddel for å drøfta kognitive strukturar knytt til begrep[2]. Det vert også drøfta korleis eit individ kan ha ulike forståingar av eit begrep. I tillegg vert teori som ligg nært Tall sine teoriar presentert.

Dei vurderingar som ligg til grunn for val av metode og dei avgrensingane som er gjort gjer eg greie for i kapittel 3. Det vert argumentert for eit kvalitativt forskingsdesign. Sjølve gjennomføringa av datainnsamlinga, med skriftleg test, observasjon og intervju vert presentert og det vert gjeve ein gjennomgang av korleis det innsamla materialet er handsama. Til slutt vert begrepa reliabilitet og validitet drøfta.

Det innsamla materialet med skriftleg test og transkripsjon av intervju vert analysert i kapittel 4. Utgangspunktet er dei to problemstillingane, og kapitlet er difor todelt, slik at desse vert analysert og drøfta kvar for seg. Det vert gjeve ei oppsummering av elevane sitt begrepsbilete, kvar for seg og samla, før samanhengen mellom begrepsbilete og løysingsstrategiar vert presentert som ei grafisk framstilling av tre elevar sine løysingsstrategiar.

I kapittel 5 drøftar eg resultata samla og prøver å trekkja nokre konklusjonar, samt gje nokre mulege konsekvensar for undervisning. Til slutt kjem ei kort oppsummering av hovudfagsarbeidet, og nokre idear å arbeida vidare med vert nemnt.

[2] Tall har samarbeida med andre når han har utvikla desse uttrykka. Til dømes er begrepsbilete og begrepsdefinisjon like knytt til Shlomo Vinner.

2 TEORI

Det teoretiske grunnlaget for denne oppgåva er basert på konstruktivistiske læringsteoriar. Det har samanheng med forfattaren sitt syn på læring, samt at dette synet er rådande i den litteraturen som vert nytta i oppgåva og læreplanen. Det konstruktivistiske synet har påverka ein monaleg del av forskinga innan læring og lærevanskar. Dette kapitlet vil ta for seg teori som er relevant i høve til dette hovudfagsarbeidet.

2.1 Piaget og konstruktivismen

Kognitiv psykologi er, i motsetnad til behaviorismen, oppteken av at det ikkje berre er ytre stimuli og responsar som er viktig i studiet av læring. Mennesket er eit aktivt og handlande vesen. Dei ytre stimuli vert tolka på eit sjølvstendig grunnlag gjennom indre, høgare mentale prosessar før ei handling (Imsen 2001). Eit prinsipp for individet, i følgje kognitivistar, vert å finna meining og samanheng i tilværet.

Det konstruktivistiske læringssynet er nært knytt til kognitiv psykologi. Utgangspunktet er at mennesket konstruerer eigen kunnskap. Individet er med andre ord aktivt og konstruerande. Det er ein vekselverknad mellom påverknaden og det ein sjølv gjer med påverknaden – også kalla interaksjonisme.

Jean Piaget (1896 – 1980) var utviklingspsykolog og konstruktivist. Arbeidet hans har hatt stor innverknad på matematikkundervisninga i fleire land. Han har og påverka og inspirert andre som har lansert alternative teoriar kring kognitiv utvikling, til dømes Ausubel. Piaget laga ein teori for intellektuell utvikling basert på intervju med barn. På bakgrunn av forskinga si sat han opp stadium for intellektuell utvikling knytt til alder.

2.1.1 Begrep knytt til læringsprosessen

Piaget hadde ei relativt snever tolking av begrepet læring. Han såg på det som å lagra kunnskap frå ytre påverknad. Læring som krev forståing kalla han utvikling (Imsen, 2001). Det viktige var å finna struktur i kunnskap – korleis vert kunnskap konstruert? Han kom til at me tolkar den informasjon me får frå omverda, og dersom gamle syn på verda ikkje held lenger, revurderer med desse. Fire viktige begrep knytt til læringsprosessen skildrar hovudtrekka i teorien; Begrepet for indre representasjon, *skjema*. Begrepa i sjølve læringsprosessen, *assimilasjon* og *akkomodasjon*, og motivasjon bak læringa, *ekvilibrium* (Piaget, 1970).

Individet lagrar kunnskap i skjema. Skjema er indre representasjonar av ytre fenomen. Skjema vert mellom anna nytta for å sjå samanhenger, forstå og organisera situasjonar. Det er den kunnskap me har om eit begrep. Av den grunn har me mange skjema. I matematikk er det skjema for prosessar og objekt, grafar, grenseverdiar, forhold, derivasjon osv.

I følgje Piaget har individet behov for å vera i likevekt (ekvilibrium) med miljøet. Når ny kunnskap kjem i konflikt med eksisterande, vert denne likevekta forstyrra. I ein overgangsperiode vil individet prøva å tilpassa den eksisterande kunnskapen til den nye slik at det igjen er likevekt, men no på eit høgare nivå. Piaget skildra den intellektuelle utviklinga i fire stadium; *det sensori-motoriske*, *det pre-operasjonelle*, *det konkret operasjonelle*, og *det formal-operasjonelle*. Fyrst på det formal-operasjonelle stadiet er vitskapeleg tenking muleg då ein ikkje lenger er avhengig av konkrete døme, men kan gjera abstraksjonar som er nødvendig i store delar av matematikken.

Piaget sin teori om overgang frå eit mentalt steg til eit anna er og viktig. Her nytter han to begrep, assimilasjon og akkomodasjon. Assimilasjon er knytt til det å akseptera ny informasjon. Dersom me møter eit problem, og ved hjelp av dei skjema ein har tilgjengeleg klarer å løysa problemet, vert problemet assimilert av skjemaet. Dersom me ikkje klarer dette, ønskjer me at skjema verta endra, akkommodert, slik at problemet kan løysast. Akkommodasjon er prosessen der individet sin kognitive struktur vert endra/tilpassa og assimilasjon utan akkomodasjon er difor ikkje muleg. Desse overgangane går ikkje alltid smertefritt. Dei fører ofte til kognitive vanskar.

Piaget sin teori er omdiskutert og delar av teorien, mellom anna stadia er kritisert. Det som likevel er grunnleggjande og som mykje anna forsking byggjer på er at barnet (eleven) konstruerer sin eigen kunnskap. Ein kan ikkje, i følgje Piaget, overføra kunnskap direkte frå voksen til barn (eller lærar til elev).

2.1.2 Konstruksjon av matematiske strukturar – abstraksjon og begrepsmessige heilskapar

Piaget skil mellom to typar kunnskap. *Figurativ kunnskap* er kunnskap som vert lagra i minnet utan at den (nødvendigvis) er knytt til kognitiv struktur. Pugg og fysisk kjennskap til objekt er døme på figurativ kunnskap. *Operativ kunnskap* er varig kunnskap som er konstruert av individet sjølv. Det er kunnskap som er knytt til skjema basert på korleis ein behandlar objekta og ikkje berre dei eigenskapane objekta sjølv har. Piaget kalla slik kunnskap for *logisk-matematisk læring* (Dubinsky, 1991).

Reflekterande abstraksjon er eit begrep introdusert av Piaget for å skildra eit individ sin konstruksjon av logisk-matematiske strukturar gjennom kognitiv utvikling. I følgje Piaget har reflekterande abstraksjon inga absolutt byrjing, men er tilstades allereie i det sensori-motoriske stadiet. Det er også til stades i alle andre stadium (Piaget 1970).

Piaget skilde mellom tre typar abstraksjon:

- *Empirisk abstraksjon.* Ein får kunnskap direkte frå eigenskapane til eit objekt.
- *Pseudo-empirisk abstraksjon.* Ein får kunnskap om ein situasjon på bakgrunn av handlingane ein sjølv utfører på eit objekt.
- *Reflekterande abstraksjon.* Subjektet er kjelda til kunnskap ved at ein dreg generelle koordineringar av handlingar.

Dei ulike typane abstraksjon er ikkje heilt uavhengige av kvarandre. Ein får kunnskap direkte frå objekta, eller ved å utføra handlingar på dei (empirisk og pseudo-empirisk abstraksjon). Handlingane vert så koordinert og det vert konstruert (nye) indre prosessar og (matematiske) objekt (reflekterande abstraksjon). Empirisk abstraksjon kan vidare dra kunnskap direkte frå dei nye objekta.

Reflekterande abstraksjon står for sjølve konstruksjonen av matematiske strukturar. Piaget meinte at det var reflekterande abstraksjon som førte til matematisk tenking der form/prosess vert separert frå innhald og prosessane sjølv vert konverterte til objekt (hjå matematikaren) (Dubinsky, 1991). Reflekterande abstraksjon startar ved at ein trekkjer ut eigenskapar frå handlingar (mentale eller fysiske). Deretter konstruerer ein nye kombinasjonar. Denne *konstruksjonen* er svært viktig. Det er den som fører til matematisk utvikling.

Piaget finn fire typar reflekterande abstraksjon i matematisk tenking i følgje Dubinsky (1991):

- Konstruksjon av indre prosessar. Ein overset mange synlege handlingar til eit system av indre operasjonar. Piaget kalla dette *fortetting/fortruleggjering (interiorization)*.
- Å *koordinera* to eller fleire prosessar til ein prosess.
- *Generalisering*. Å utvida eit skjema slik at det passar fleire fenomen.
- *Encapsulation*, eller å gjera ein prosess om til eit objekt. Dette er kanskje den viktigaste og vanskelegaste konstruksjonen.
- Dubinsky ser i tillegg *reversering*, å sjå på ein prosess baklengs, som ein konstruksjon.

Den matematiske strukturen vert i følgje Piaget lagra i skjema. Det at me konstruerer denne strukturen, samt at konstruksjonane kan tilpassast og endrast (assimilerast og akkommoderast) tyder på at ein ikkje skal oppfatta skjema som noko statisk.

Dreyfus (1991) ser også på abstraksjonsprosessen og meiner at eit av dei viktigaste måla i høgare matematisk utdanning er å tileigna seg evna til å abstrahera. Når ein student bevisst kan abstrahera frå matematiske situasjonar er han/ho på eit høgt nivå i matematisk tenking.

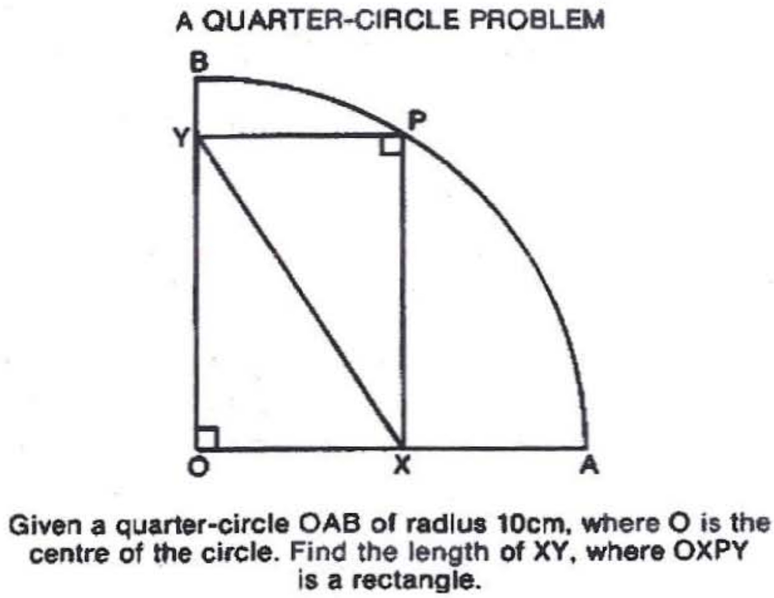
Dreyfus nemner tre prosessar som viktige grunnlag for abstrahering. *(Mental) representasjon*, som er dei skjema eit individ nyttar i møte med ulike situasjonar, matematiske eller daglegdagse. Desse kan vera ulike frå individ til individ. T.d. kan ein person si mentale representasjon i møte med derivasjonssymbolet $\frac{d}{dx}$ innehalda ingenting anna enn symbolet i seg sjølv. Ein annan person kan tenkja stigningstalet til ein graf. Mentale representasjonar er skapt på bakgrunn av konkrete representasjonssystem. Å kunna gå frå det spesielle til det generelle, *generalisera*, er viktig for å seinare kunna abstrahera. Nokre generaliseringar inkluderer eit behov for å laga nye begrep. Den tredje prosessen Dreyfus nemner er *syntesebygging* (synthesizing) der ein kombinerer/set saman delar til eitt heile.

Abstraksjonsprosessen er nært knytt til generalisering og syntesebygging, men å abstrahera stiller mykje større kognitive krav. Ein kan ikkje lenger støtta seg til konkrete situasjonar. Dette er ein konstruktiv prosess der ein endrar fokus frå objekta til strukturen og relasjonane mellom objekta. Når ein student til dømes skal forstå det algebraiske begrepet kropp, kan han/ho ikkje lenger fokusera på tala sjølv, men må sjå på forholdet mellom tala (Dreyfus, 1991).

Representasjon og abstrahering er i følgje Dreyfus komplementære prosessar i motsette retningar. Eit begrep er ofte abstrahert frå mange ulike representasjonar, men representasjonar er alltid representasjonar av abstrakte begrep. Ein treng ofte ein konkret representasjon for å utføra matematiske oppgåver. Det gjev eit kognitivt krav i tillegg til det matematiske; det kan vera lettare å tenkja matematisk dersom ein klarer å nytta til dømes ein visuell representasjon. Med andre ord er det ein komplementaritet også mellom det kognitive og det matematiske aspektet i representasjon av matematiske strukturar. Dreyfus finn med dette fire steg i læringsprosessen; nytta ein enkelt representasjon (1), nytta meir enn ein representasjon parallelt (2), laga samanhengar mellom parallelle representasjonar (3) og integrera representasjonar og skifta til den som til ei kvar tid er mest passande (4). Dreyfus seier vidare at "*...når ein har abstrahert begrepet har ein kontroll over eigne representasjonar, ein eig begrepet...*" (Dreyfus, 1991, s. 39).

Piaget si førestilling om danninga av *begrepsmessige heilskapar* (Harel og Kaput, 1991) er vidare viktig for å skilja mellom form og innhald og har vore til hjelp for andre i forsking på undervisning i matematikk. Liknande definisjonar er nytta, som *encapsulation* (Ayers, Davis, Cobb, 1988). Greeno (1983) definerer ein begrepsmessig heilskap som eit kognitivt objekt der det mentale systemet kan ta objektet som eit argument.

Harel og Kaput, (1991) ser på konstruksjon av slike begrepsmessige heilskapar som ein vertikal vekst i kunnskap. Konstruksjon av slike heilskapar gjev fleire fordelar. Harel og Kaput (1991) nemner tre; Dei *lettar arbeidsminne* ved at ein ser på heile prosessen som eit objekt. Dei gjev *betre forståing av komplekse begrep*. Til dømes er ein ved derivasjon avhengig av å sjå på delar av funksjonen (regelen, definisjonsmengd, verdimengd) som eit heile og nytta ein derivasjonsoperator på funksjonen. Vidare hjelper dei til å halda rett fokus når ein skal løysa oppgåver. Når ein skal løysa ei oppgåve er det viktig at ein klarer å leggja vekt på dei delane av problemet som er relevant for å løysa problemet. Figuren under viser eit døme på ei enkel oppgåve, men der ein må sjå den overliggande strukturen for å finna den enkle løysinga:



Figur 2: Finn lengda XY (Orton 2004, s. 89).

2.2 Sfard sin teori om utvikling av matematiske begrep

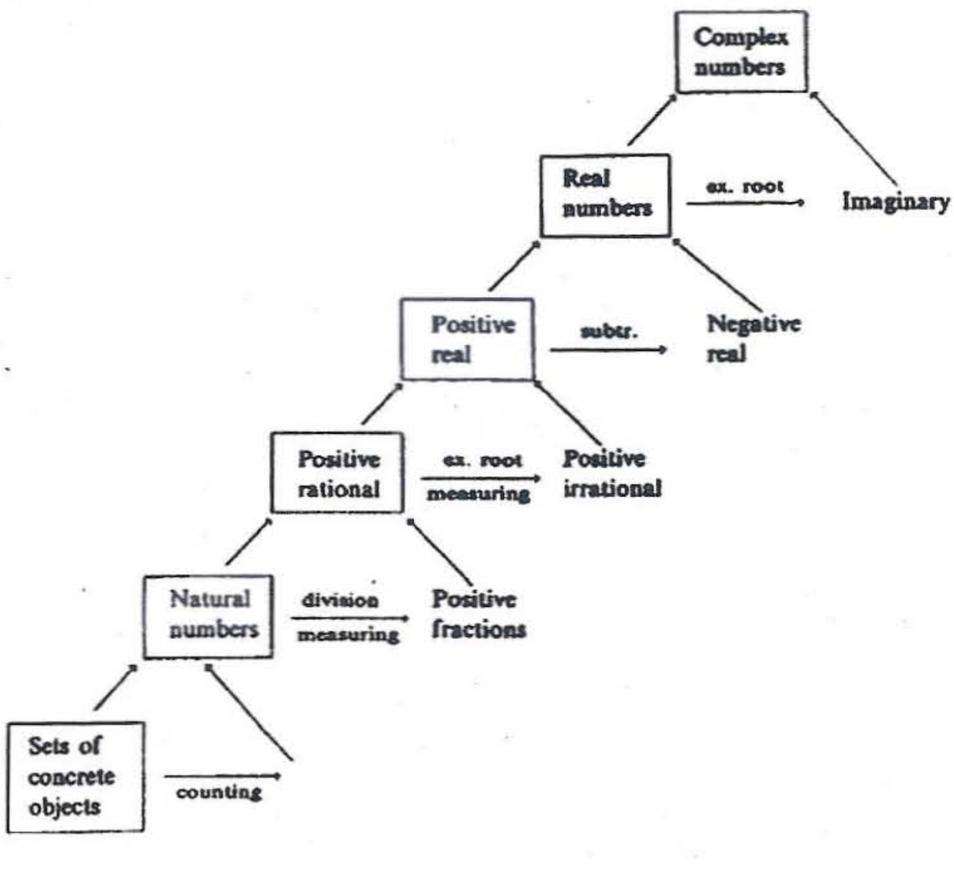
Anna Sfard (1991) presenterer ein teori for korleis begrepsmessige heilskapar vert konstruert. Teorien legg vekt på at begrep kan oppfattast på to måtar og at det er ein kvalitativ skilnad i desse begrepsførestillingane.

Det matematiske universet består av matematiske objekt. Desse objekta har visse eigenskapar og me kan utføra prosessar på dei ved hjelp av gjevne lovar og reglar (Sfard, 1991). Dei matematiske objekta er derimot abstrakte og me treng ulike representasjonar for dei. Ein funksjon kan til dømes representerast algebraisk eller ved hjelp av ein graf. Den deriverte av ein funksjon i eit punkt er ein grenseverdi, men kan også illustrerast med ein tangent.

Sfard hevdar vidare at matematiske begrep kan oppfattast *strukturelt* og *operasjonelt*. I ei operasjonell førestilling vert matematiske begrep behandla som prosessar, handlingar og algoritmar, medan ein i ei strukturell førestilling behandlar det matematiske begrepet som eit objekt. Ei strukturell førestilling av brøken (objektet) $\frac{5}{8}$ kan ein også sjå på operasjonelt som prosessen $5:8$. Liknande begrepspar finn me i litteraturen som figurativ/operativ, instrumentell/relasjonell, prosess/produkt, men Sfard hevdar at hennar skildring skil seg frå dei andre ved at ho legg vekt på at oppfattingane er komplementære. Det er ikkje slik at ein nødvendigvis oppfattar brøken ovafor enten operasjonelt eller strukturelt (på same måte som at dei matematiske objekta ofte er prosessar og objekt samstundes).

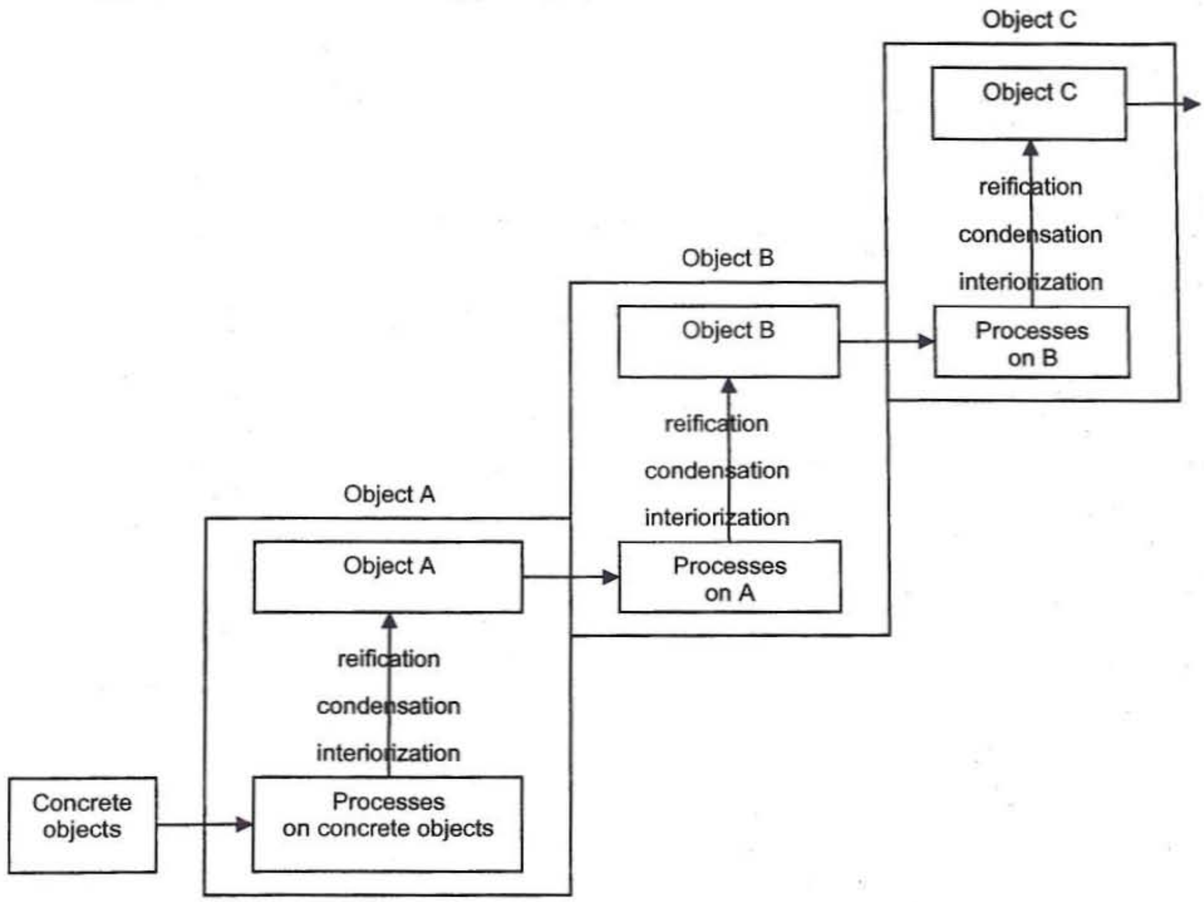
Generelt kjem dei operasjonelle førestillingane før dei strukturelle i begrepsdanninga. Til dømes må barn telja mange gonger til fem med ulike konkret før dei kan nytta talet 5 strukturelt. På same måte tek det tid før derivasjonsregelen $\left(x^r\right)' = r \cdot x^{(r-1)}$ vert oppfatta strukturelt. Vegen til ei strukturell forståing er i mange samanhengar lang og for nokre elevar ikkje oppnåeleg (slik Piaget hevda at nokre barn aldri kom på eit formal-operasjonelt nivå i nokre samanhengar).

Eit anna viktig poeng for Sfard er at dei matematiske begrepa historisk har vore oppfatta operasjonelt i lange tider før dei har fått ein strukturell definisjon og dette har noko å seia for korleis ein lærer matematiske begrep. Sfard viser til den historiske utviklinga både av talbegrepet og funksjonsbegrepet (Sfard 1991). Figuren under viser korleis talbegrepet i følgje Sfard vert konstruert:



Figur 3: Konstruksjon av talbegrepet (Sfard, 1991, s. 13).

Danninga av begrep skildrar Sfard i tre fasar, kjeder av overgangar frå operasjonelle til strukturelle førestillingar. Dei tre fasane vert kalla *interiorization* (*fortetting/fortruleggjering*), *condensation* (*sjølvstendiggjering*) og *reification* (*tingleggjering, reifikasjon*). Figuren under viser ein generell modell for danning av begrep:



Figur 4: Ein generelle modell for danning av begrep (Sfard, 1991 s.22).

Interiorization viser til fasen der ein utfører operasjonar på kjende begrep. Til dømes arbeider ein med gjennomsnittleg og momentan vekstfart for ein del grafar. Grafane er kjende objekt og ein ser nærare på kor fort grafen veks for eit gitt intervall og etter kvart for eit gitt punkt. Elevane vert på denne måten kjend med prosessar som leiar mot grenseverdi og derivasjonsbegrepet. Etter kvart er ein ikkje lenger avhengig av konkrete objekt, men ein utfører prosessen ved hjelp av mentale representasjonar.

I den neste fasen, *condensation*, gjer ein lengre sekvensar av operasjonar om til einingar som er lettare å behandla. Sjølv om begrepet framleis er prosess-relatert, er det muleg å utføra vanskelegare operasjonar på ein tilfredsstillande måte. Det vert danna nye begrep i denne fasen og ein er ikkje nødvendigvis lenger avhengig av ein bestemt representasjon. Ein treng kanskje ikkje å teikna opp tangenten med tilhøyrande hjelpeliner for å finne momentan vekstfart. Likevel er begrepet framleis oppfatta som ein prosess.

I den siste fasen, *reification*, er ein ikkje lenger avhengig av ein bestemt prosess. No er begrepet fullt utvikla. Ein ser no heile prosessen som eit objekt, ein statisk struktur. Dette er ein enorm og plutseleg overgang, i motsetnad til interiorization og condensation, som er gradvise overgangar. Overgangen til reification medfører nye muligheiter til matematisk behandling av objekta, mellom anna generelle eigenskapar, relasjonar mellom representantar og problemløysing. Reification er og starten på ei ny interiorization; av begrep på høgare nivå (figur 4). Det må og nemnast at reification, som er eit stort sprang i forståing, eit ontologisk skifte (Sfard 1991), ikkje er ein lett overgang. Mange elever klarer aldri å fullt utvikle somme begrep, for andre tek det svært lang tid. Halmos (1985) fortel at han brukte 4-5 år på å verkeleg forstå begrepet λ-matriser[3]. På same måte kan det ta langt tid for elevar før derivasjonsbegrepet er tingleggjort. Ein må mellom anna oppfatta den deriverte som ein funksjon av x, som ein kan utføra nye operasjonar på.

2.3 Prosess og begrep samstundes – proceptual thinking

Dubinsky (1991) formulerer ein teori, der dei finn tre steg i innkapslinga av ein prosess til eit objekt (Sfards tingleggjering). Ein dannar seg etter kvart førestillingar av konkrete handlingar (action) slik at dei vert prosessar. Desse vert innkapsla som mentale objekt som seinare vert ein del av mentale skjema, APOS. Dei finn difor at det er fleire måtar å konstruera objekt på:

... an individual can reflect on a schema and act upon it. This results in the schema becoming a new object. Thus we now see that there are at least two ways of constructing objects — from processes and from schemas.

(Tall *et al.* 1997, s. 2)

Gray og Tall (1994), Gray *et al* (1999, 2001), Tall *et al* (1997, 2001a) utvikla denne teorien vidare og såg på symbola si rolle i skilnaden mellom det dei kalla *procedural and proceptual thinking* (Gray og Tall, 1994). Procedural thinking er karakterisert ved at ein fokuserer på relativt enkle manipuleringar av (matematiske) objekt representert på ulike måtar (symbol, bilete, ord). Ein kan til dømes derivera uttrykket $2x^2+4$ og få $4x$ ved hjelp av ein derivasjonsalgoritme. Men den deriverte kan også oppfattast som eit begrep. Her er dei på line med Sfard. Gray og Tall ser nærare på symbola si rolle i denne samanhengen. Til dømes er symbolet $\frac{3}{4}$ eit uttrykk for både divisjonsprosessen og begrepet. På same måte er $\frac{d}{dx}$ eit uttrykk for derivasjonsprossen og begrepet den deriverte. For å unngå å sjå på denne todelinga mellom prosess og begrep innførte Tall og Gray ordet *procept* som ei samansmelting av dei to førre orda. Dette kan direkte oversetjast med ordet progrep, men i det vidare vert likevel procept nytta. Også her er dei på line med Sfard som legg vekt på at begrep vert oppfatta strukturelt og operasjonelt samstundes. Dei definerer procept slik:

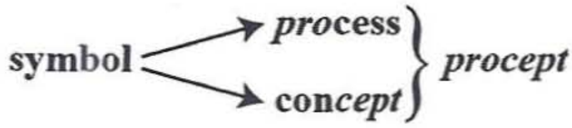
An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object.

A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object.

(Gray og Tall, 1994, s. 6)

[3] λ-matriser er eit begrep i høgare matematikk innan emnet kombinatorikk.

Symbolet uttrykkjer såleis både prosessen og begrepet og kan på den måten vera ei omdreiingsakse mellom desse:



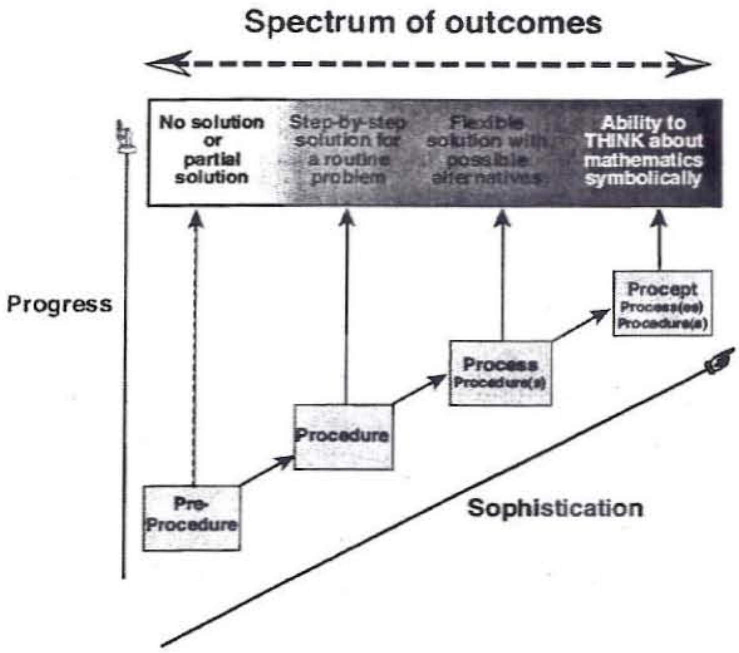
Figur 5: Symbolet som ei omdreiingsakse mellom prosess og begrep (Tall *et al*, 2001a, s. 5).

Det er difor ein fordel å sjå på eit symbol både som prosess og begrep og å fleksibelt vera i stand til å endra fokus frå å utføra ei algoritme til å tenkja på eit begrep. Det er dette Tall og Gray kallar proceptual thinking (Gray og Tall, 1994).

...It is proceptual thinking that gives great power trough the flexible, ambiguous use of symbolism that represents the duality of process and concept using the same notation.

(Gray *et al*, 1994, s. 7)

Figuren viser korleis Gray *et al.* ser for seg at ein løyser problem etter utviklingsnivå



Figur 6: Ulike utfall i arbeid med matematiske prosessar (Gray og Tall, 2001, s. 69).

Dersom ein møter eit problem som berre krev ein rutinemessig framgangsmåte (procedural) er det å løysa oppgåva eller ikkje berre skilnaden mellom dei to fyrste stega i figuren. På prosessnivået kjenner ein fleire måtar å komma fram til svaret. Ein vert meir fleksibel og vel ofte den mest effektive løysinga. Det mest effektive er likevel når symbola fungerer både som prosess og begrep.

2.4 Begrepsbilete og begrepsdefinisjon

Tall og Vinner (1981) nyttar nemningane *begrepsbilete* (concept image) og *begrepsdefinisjon* (concept definition) for å synleggjera kva rolle individet sin begrepsmessige struktur speler.

Begrepsbiletet er den totale kognitive struktur som er assosiert med eit begrep. Det inkluderer alle mentale bilete og dei eigenskapane og prosessane som er knytt til desse. Det mentale biletet ein har i samband med eit begrep har ein bygd opp over tid, gjennom erfaring, og det er eit bilete som har endra seg i møte med nye situasjonar.

Begrepet funksjon er eit døme. Det vert nytta i ulike situasjonar, mellom anna som eit geometrisk bilete av ein graf, ein algebraisk formel eller som eit forhold mellom ein avhengig og ein uavhengig variabel. Ofte vert det knytt symbol som $f(x)$ til funksjonen. Ein elev møter desse ulike representasjonane i undervisninga og dei vil påverka og endra eleven sitt begrepsbilete av begrepet funksjon. Begrepsbiletet utviklar seg og er ikkje det same heile tida.

... ulike stimuli aktiverer ulike delar av begrepsbiletet, og utviklar det på ein måte som ikkje nødvendigvis er eit koherent heile...

(Tall og Vinner, 1981, s. 152)

Den delen av begrepsbiletet som vert aktivert i ein gitt situasjon vert kalla *det framkalla/vekka/aktiverte begrepsbiletet* (evoked concept image) (Tall og Vinner, 1981). Når eleven møter funksjonen $f(x) = x^2 + 2$, og får i oppgåve å finne eventuelle nullpunkt, kan det framkalla begrepsbiletet føra til at han/ho vel ein algebraisk framgangsmåte. Eit anna framkalla begrepsbilete kan gje ein grafisk framgangsmåte. Sjølv om Tall og Vinner nyttar ordet framkalla begreps*bilete* er det viktig å presisera at det også kan vera framkalla *prosessar*.

Begrepsdefinisjonen har ei anna rolle. Det er "*... ord som er nytta for å spesifisera eit begrep...*" (Tall og Vinner, 1981, s. 152). Det er altså dei orda ein person nyttar for å forklara sitt begrepsbilete. Dersom det er ein definisjon som er allment (matematisk) godkjend, seier me at det er ein formell begrepsdefinisjon, i motsetnad til ein personleg. Definisjonar vert ofte lært gjennom pugg, andre gonger klarer ein å knytta definisjonar til det begrepsbiletet ein har. Ein definisjon vil uansett framkalla eit begrepsbilete. Det vert kalla *begrepsdefinisjonsbilete* (concept definition image) (Tall og Vinner, 1981). Det er ikkje alltid dette er riktig relatert til andre delar av begrepsbiletet.

Begrepsbilete som tilsynelatande er i konflikt kan aktiverast i ulike situasjonar. Likevel treng det ikkje føra til kognitiv konflikt. Berre når ulike bilete vert aktivert samstundes er det ein muleg konflikt eller forvirring. Difor kan ein ha syn som er i konflikt me kvarandre, men ikkje vere klar over det før dei vert aktiverte samstundes. I mekanikk lærer me at krafta er proporsjonal med akselerasjonen. Likevel er det svært mange elevar som trur at krafta er proporsjonal med fart. Eit syn som er svært resistent mot undervisning. Likeins finn Roper at mange elevar trur at kraft verkar i retninga av rørsla i vertikal sirkulær rørsle (Orton, 2004). Tall og Vinner (1981) kallar delar av begrepsbiletet eller -definisjonen som kan vera i konflikt med andre delar av begrepsbiletet eller -definisjonen for *potensielle konfliktfaktorar*. Dersom dei vert vekka samstundes vert dei kalla *kognitive konfliktfaktorar*.

Vinner meiner at ein må ha eit begrepsbilete for å forstå eit begrep til fulle.

...we assume that to acquire a concept means to form a concept image for it. To know by heart a concept defenition does not guarantee understanding of the concept...
(Vinner, 1991, s. 69)

Difor er det ikkje nok å vita at $f'(x)$ er grenseverdien for $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ når Δx går mot null for å forstå den deriverte til ein funksjon i eit punkt.

For å tileigna seg eit begrep er det difor ei samhandling mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilete over lengre tid. Definisjonen er såleis til hjelp når begrepsbiletet vert "forma". Eit døme er at ein har nokre idear om korleis ein graf endrar seg når det er stor og liten vekst. Seinare ser ein nærare på korleis stigninga er i eit punkt på grafen og dette vert kalla stigningstalet til tangenten og definert som $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Figuren under viser korleis denne interaksjonen går føre seg over tid:

$$\boxed{\text{Begrepsdefinisjon}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Begrepsbilete}}$$

Figur 7: Interaksjon mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilete (Vinner, 1991, s.70).

I undervisninga meiner Vinner derimot at lærarar (og lærebokforfattarar) har eit bilete av at begrepsdanninga er "einvegskøyrd" – begrepsdefinisjonen styrer danninga av begrep. Vinner er her på line med fleire andre, mellom anna Tall (1985a), Cornu (1991), og Østerlie (2005):

$$\boxed{\text{Begrepsdefinisjon}} \longrightarrow \boxed{\text{Begrepsbilete}}$$

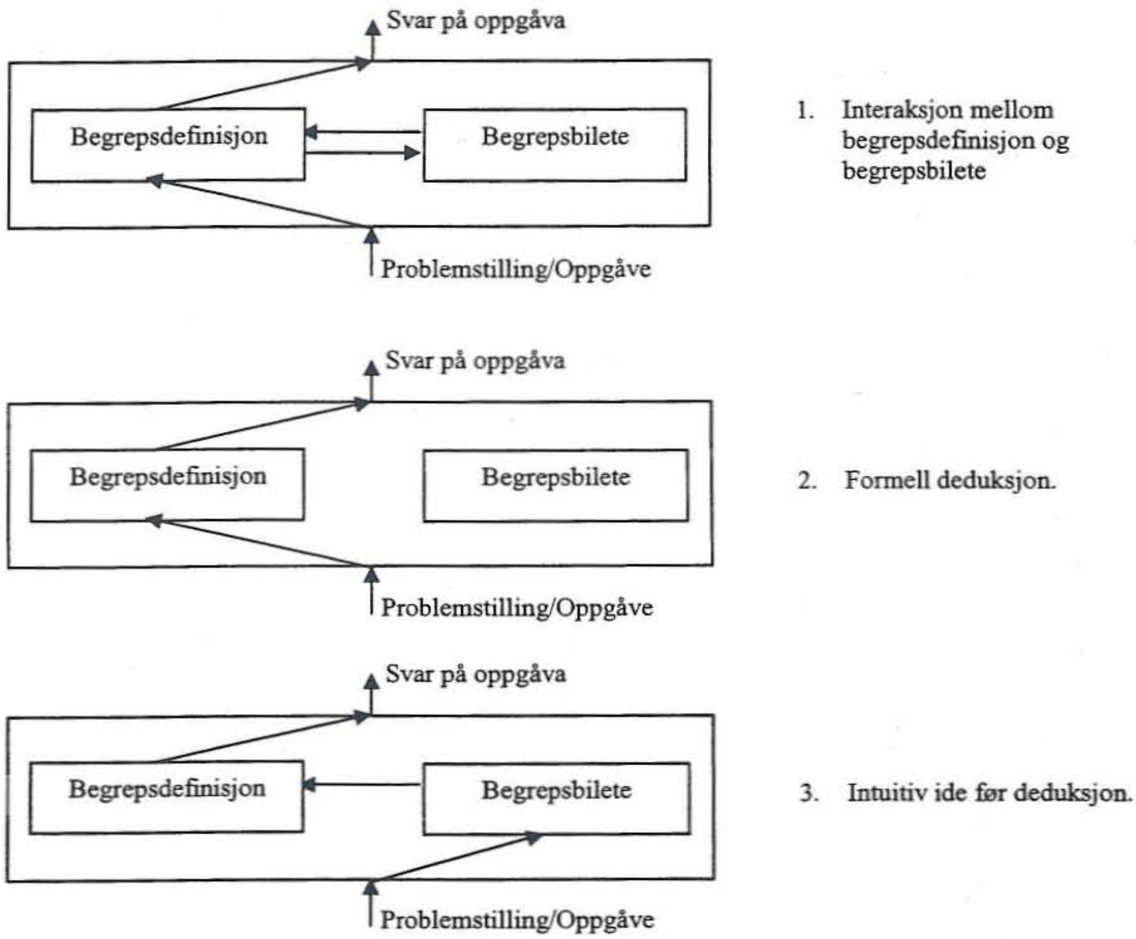
Figur 8: Begrepsdanninga (Vinner, 1991, s.71).

Ein framgangsmåte for å tileigna seg eit begrep vert difor å introdusera begrepet ved hjelp av definisjonen samt utfyllande døme. Begrepsbiletet vil gradvis verta rikare.

I møte med (matematiske) problem og oppgåver vil det vera naturleg at både begrepsdefinisjonen og begrepsbiletet vert "aktivert"[4]. Vinner meiner at lærarar har ei oppfatting av at elevane alltid nyttar begrepsdefinisjonen før den endelege løysinga vert presentert. Ei av følgjande tre oppsett vil difor skjematisk uttrykkja kva som skjer:

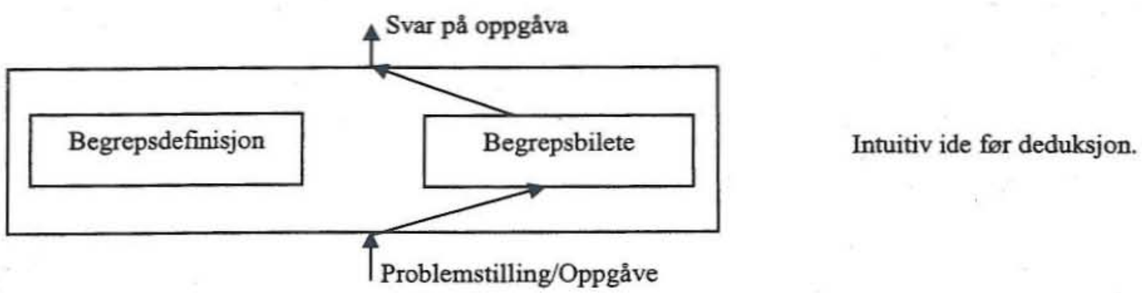
[4] Boksane med begrepsdefinisjon og begrepsbilete skal ikkje oppfattast som biologiske/fysiske delar av hjernen.

...In order to present our ideas by means of diagrams, assume the existence of two different "cells" in our cognitive structure... (Vinner, 1991, s. 69).



Figur 9: 3 modellar for løysing av eit (kognitivt) problem. (Vinner, 1991, s. 70 – 72).

Me ser at her vil eleven gå via definisjonen før ei løysing vert presentert. Dette er ikkje alltid tilfelle. Både Davis og Vinner (1986), Tall og Vinner (1981), Vinner (1983), Orton (2004) og Nygaard *et al.* (1999) gjev døme på at elevar ikkje nyttar definisjonen i møte med eit problem. Ei betre skjematisk framstilling er:



Figur 10: Ein alternativ modell for løysing av eit (kognitivt) problem (Vinner, 1991, s. 73).

2.5 Kognitive einingar, kognitive røter

Eit begrep som er nært knytt til det vekka begrepsbiletet er *kognitive einingar* (cognitive units) (Barnard og Tall, 1997, 2001).

A piece of cognitive structure that can be held in the focus of attention all at one time will be called a cognitive unit.

(Barnard og Tall 1997, s. 1)

Kognitive einingar og (vekka) begrepsbilete er difor mykje to sider av same sak Alle bilete som er vekka/framkalla er nødvendigvis kognitive einingar sidan dei er noko som ein fokuserer på i eit gjeve tidspunkt. Delar av vår kognitive struktur som refererer til eit bestemt begrep er knytt til det vekka biletet. Motsett er det muleg for ulike begrep å vera relatert til same kognitive eining.

Det som er ei kognitiv eining for nokon er ikkje nødvendigvis det for andre. Evna til å tenkja seg og manipulera kognitive einingar er heilt nødvendig for matematisk tenking. Barnard og Tall tenkjer seg to komplementære faktorar som er viktige for ein fyldig kognitiv struktur:

1) the ability to *compress* information to fit into cognitive units.
2) the ability to *make connections* between cognitive units so that relevant information can be pulled in and out of the focus of attention at will.

(Barnard og Tall 1997, s. 1)

Ein måte å pressa saman informasjon slik at dei passar i ei kognitiv eining er å sjå på til dømes eit symbol som ein prosess og objekt samstundes, det Tall kallar procept. Dersom ein også evnar å setta fleire kognitive einingar saman vert det ein rik kognitiv struktur til god hjelp i arbeid med matematiske oppgåver. Konstruksjon av kognitive einingar er såleis relatert til det Harel og Kaput kalla begrepsmessige heilskapar. Mellom anna lettar kognitive einingar arbeidsminne ved at dei "pressar saman" informasjon. Dei gjev også betre forståing ved at den kognitive strukturen vert styrka.

Ei spesiell gruppe kognitive einingar er *kognitive røter* (Tall, 1989). Dei vart fyrst sett i direkte samanheng med korleis ein legg opp undervisning. Tall nytta grenseverdibegrepet som døme. Grenseverdibegrepet er eit matematisk grunnlag/fundament (Tall 1992) som er godt definert, men det viser seg at den formelle definisjonen av ein grenseverdi er vanskeleg å forstå og nytta for studentar. I staden for å jobba med dei formelle definisjonane i oppstarten av eit tema er det i følgje Tall (1992) betre å finna ei tilnærming som byggjer på begrep som både er kjende for studenten og kan vere grunnlag for seinare matematisk utvikling. Slike tilnærmingar kallar han kognitive røter.

... ei kognitiv rot er ulik frå eit matematisk fundament; der det matematiske fundamentet er eit passande startpunkt for ei logisk utvikling hjå subjektet, er ei kognitiv rot meir passande for utviklinga av pensum...

(Tall 1992, s. 497)

Seinare gav Tall *et al.* (2000b) følgjande definisjon på ei kognitiv rot der samanhengen med kognitive einingar vert tydelegare:

Ei kognitiv rot er eit begrep som:

(i) Er ei meiningsfull kognitiv eining av kjernekunnskap for studenten i starten av læringssekvensen.
(ii) Tillet byrjande utvikling gjennom ein strategi der kognitiv utvikling er meir framtredande enn kognitiv rekonstruksjon.
(iii) Inneheld muleg langvarig meining i seinare steg i utviklinga.
(iv) Er så robust at den er nyttig sjølv når meir sofistikert forståing utviklar seg.

(Tall *et al*, 2000b)

Tall (1989) nytta lokal linearisasjon som eit døme på ei kognitiv rot i tilnærminga til den deriverte. Seinare er funksjonsmaskina nytta som kognitiv rot for eit rikt begrepsbilete i samband med funksjonsbegrepet (Tall *et al* 2000b, 2000c) og datamaskina som ei støtte for matematisk tenking og læring (Tall 2000a).

2.6 Vygotsky og språk av 1. og 2. orden

Piaget la lite vekt på språket i sine teoriar. Her skil han seg frå den russiske utviklingspsykologen Lev Vygotsky, som i større grad la vekt på korleis individet nyttar språket som ein reiskap for tanken. Språket er såleis ein del av kunnskapsbegrepet. For Vygotsky er eit begrep sett saman av språk og tanke. Alle tankar, erfaringar, handlingar som er knytt til begrepet vert kalla *begrepsinnhald.* Alle språkuttrykk som, munnleg språk, symbol, skrift, teikningar, kroppsspråk vert kalla *begrepsuttrykk* (Høines, 1998).

Vidare skil Vygotsky mellom språkuttrykk som er i direkte kontakt med begrepsinnhaldet, *språk av 1.orden,* og språkuttrykk som ikkje er knytt til begrepsinnhaldet og difor treng oversetjing, *språk av 2.orden.* Denne oversetjinga krev språk av 1.orden som *oversetjingsledd.*

I denne samanhengen er det naturleg å sjå på *likskapane* mellom Vygotsky og Tall/Vinner. Ein kan seie at alle tankar, erfaringar og handlingar som er knytt til eit begrep (begrepsinnhaldet) berre er ei anna formulering for ein kognitiv struktur som er assosiert med eit begrep (begrepsbiletet). Vidare ser ein at Tall og Vinner definerer begrepsdefinisjonen som ord ein nyttar for å spesifisera eit begrep. Desse orda kan ein sjå på som eit språkuttrykk (begrepsuttrykk) hjå Vygotsky.

Tall er også oppteken av å finna tilnærmingar til ny matematikk som byggjer på kjende begrep. Desse tilnærmingane kalla han kognitive røter. Vygotsky var og oppteken av dei same prinsippa og meinte at eleven fyrst skulle få arbeida med sin uformelle matematikk og vinna ny kunnskap i kjende språkstrukturar (1.ordens språk). Når ein så skal tilføra den nye matematikken er oversetjingsleddet viktig for å gjera 2.ordens språk om til språk av 1. orden. Ein ser at ei kognitiv rot på denne måten kan vera eit oversetjingsledd.

Likevel er det viktig å skilja mellom desse framstillingane. Vygotsky forma ein teori for korleis kunnskapsbegrepet utviklar seg. Tall og Vinner prøver derimot berre å synleggjera ein begrepsmessig struktur. Det er ikkje ein teori om utvikling, slik mellom anna Piaget og Vygotsky formulerer. Men det er interessant at mange av begrepa til Vygotsky kan nyttast i samband med framstillingane til Tall og Vinner. Utgangspunktet deira var Piaget sine teoriar, som skil seg frå Vygotsky på sentrale punkt.

2.7 Tidlegare publiserte forskingsresultat om derivasjon

Dette avsnittet vil kort ta føre seg noko av forskinga som er gjort på elevar si forståing av derivasjon. Det er forska mykje på dette området og ein grundig gjennomgang av all tilgjengeleg forsking er eit studie i seg sjølv. Dette vert difor berre ei kort gjennomgang av hovudtrekka i noko av litteraturen på området, med hovudvekt på den grafiske forståinga av derivasjon.

Orton (1983) undersøkte 110 studentar si forståing av elementær kalkulus ved hjelp av kliniske intervju. Han nytta ein skala frå 0 – 4 i vurderingane av svara, og grupperte dei etter om elevane hadde gjort strukturelle, vilkårlege eller utøvande feil. Gjennomsnittsresultata var av svært varierande grad alt etter oppgåve. Ein av konklusjonane på arbeidet var at ein måte å betra forståinga på vil vera å nytta grafiske hjelpemiddel i innlæringa. Han seier mellom anna at arbeid med grafar er av stor nytte for å utvikla begrepet veksthastighet, og han nemner at den grafiske kalkulatoren er eit nyttig hjelpemiddel i skulen

Tanken om at grafiske hjelpemiddel kan hjelpa elevar i innlæringa av matematiske begrep er mykje forska på dei siste tiåra. Tall og Sheath (1983) såg at elevar hadde problem med grunnleggjande idear som krev relasjonell forståing av matematiske begrep. Dei nytta mellom anna programma Gradient og Blancmange i undervisninga av ei gruppe høgskulestudentar. (Gradient teiknar stigninga til grafar, Blancmange kan teikna kontinuerlege funksjonar som aldri er deriverbare). Målet var å finna ut kva påverknad programma kunne ha på innlæringa av matematiske begrep. Resultata på grafiske oppgåver var tilfredsstillande og reaksjonane frå studentane var positive.

Undersøkinga er difor eit tidleg døme på at rett bruk av grafiske hjelpemiddel i undervisninga kan vere positivt. Ein kan og leggja merke til at hjelpemidla ikkje nødvendigvis må vera avanserte. Så tidleg som i 1983 var datamaskin og programvare lite utvikla, likevel fekk elevane god hjelp i den kognitive prosessen.

Fordelen med datamaskina er at elevane kan sjå kva som skjer og dermed få ei intuitiv kjensle av kva begrep som stigninga til ein graf og derivert er, utan at ein krev forkunnskapar om grenseverdi og tangent. Tall (1985b) nyttar datamaskina til å introdusera det han kallar ein lokal rettlina graf som ei kognitiv rot i innlæringa (lokal linearisasjon). Målet er at elevane etter kvart utviklar så god forståing at overgangen til formelle bevis går lettare. Då har i tilfelle datamaskina vore ein god "advanced organizer" (Ausubel, 2000), og ein betre innfallsvinkel til kalkulus enn meir tradisjonell undervisning. I Tall og Blackett (1986) og Tall (1987) vert denne undervisningsforma prøvd ut, med gode resultat og i England er denne framgangsmåten no med i læreplanen (Artigue 1991).

Med bakgrunn i svake resultat på prøver (Mundy og Graham 1991) og mange studentar som ikkje fullfører kurs i grunnleggjande matematikk, har universitet og høgskular i USA gjort forsøk med grafiske hjelpemiddel i undervisninga. Dette medfører ei utradisjonell matematikkundervisning og ofte total omlegging av kursa. Bruk av PC og grafiske kalkulatorar gjennomsyrer undervisninga. Studentane må sjølve skaffa seg ein grafisk kalkulator. Datamaskiner er lett tilgjengelege og dei nytter programvare som True Basic, Matematica, Derive og Maple.

Undersøkingar av studenthaldningar tyder på at dei generelt er positive til den nye undervisninga. Etter eigne utsegn jobbar dei hardare og får meir utbytte i form av betre forståing av dei matematiske begrepa. Skulane har derimot ikkje kvantitative resultat som viser at denne type undervisning gjev betre resultat på prøver. Høgskulen i Darthmouth gav elevane som hadde gjennomført den nye modellen nøyaktig den same eksamen som dei hadde hatt tidlegare (Tucker, 1990). Dei fann ingen signifikant forskjell, noko som viser at undervisninga i alle høve ikkje har vore øydeleggjande.

Tall og Watson (2001b) undersøkte om ei undervisning som legg vekt på ei visuell/konkret tilnærming i arbeid med grafar, medfører at elevane i større grad også nyttar visuelle prosessar i oppgåveløysing. I testutvalet nytta ein lærar ei visuell tilnærming der ho følgde kurva til grafen med handa, frå venstre mot høgre, for å knyta visuelle og symbolske idear saman. Dei andre lærarane nytta ei meir tradisjonell undervisning, i stor grad basert på ei algebraisk tilnærming. Det var 40 elevar i heile utvalet, 13 av desse vart undervist visuelt.

Elevane frå klassen til "den visuelle læraren" viste større fleksibilitet i måten å løysa oppgåvene på. Dei hadde fleire tilnærmingar til oppgåvene i og med dei ikkje var så avhengig av ein formel for å sjå korleis stigninga endra seg. Ein større del av dei andre elevane var avhengig av å kunna løysa oppgåvene algebraisk. Dei hadde ikkje intuitiv kunnskap om stigninga, noko som er eit nyttig hjelpemiddel i slike oppgåver.

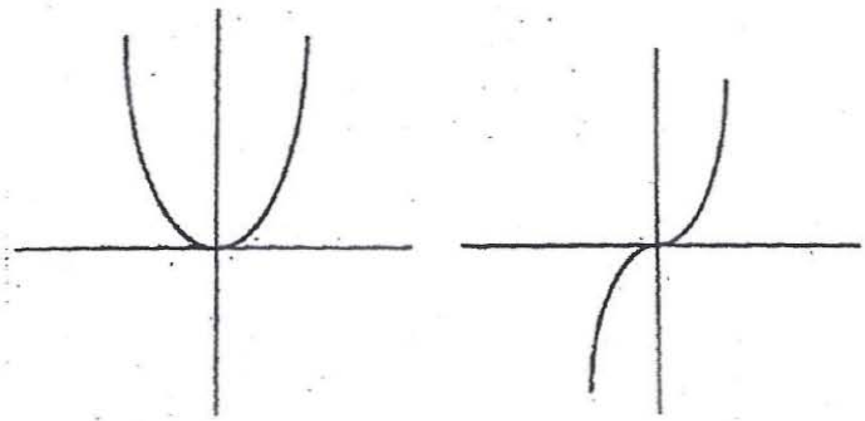
Denne undersøkinga viser også at det ikkje er nødvendig med mykje avansert utstyr for å endra undervisninga noko. Samstundes er eit vanleg hjelpemiddel som lommereknaren etter kvart blitt så avansert at den gjev mange mulegheiter i undervisninga. Østerlie (2005) gjorde eit forsøk med å nytta ein symbolregnande kalkulator (kalkulator med såkalla CAS-teknologi) i undervisninga. Han meiner at eit godt argument for å nytte CAS i undervisninga er at dei multiple representasjonane (grafisk/algebraisk/numerisk) kan gje fordelar i læringsprosessen.

Kalvø (2002) viser korleis dataloggar kan vera eit godt, praktisk hjelpemiddel til begrepsforståing av den deriverte. Ho nytta mellom anna ein rørslesensor og eit dataprogram for grafiske framstillingar av ei posisjon-tid kurve og ei fart-tid kurve. Ho fann at mange av elevane etter dette arbeidet klarte å gje uttrykk for den deriverte med eigne ord, noko som kan tyde på ei god begrepsforståing

Mange forskarar legg altså vekt på at visualisering er viktig for forståinga av matematikk, og at pensum er for sterkt prega av ei algebraisk tilnærming til matematiske tema. (Tall og Vinner 1981, Tall, 1991b; Tucker, 1990; Vinner 1989, referert i Aspinwall *et al.* 1997, Eisenberg 1991). Eit argument er ofte at studentar presterer dårleg på oppgåver som krev grafisk/visuell forståing.

Aspinwall *et al.* (1997) argumenterer derimot for at det visuelle kan øydeleggja for forståinga i nokre tilfelle. Dei nytter begrepet *ukontrollerbart bilete*, som er eit hinder for ein meir fruktbar tankegang og finn døme på dette i eit case-studie av ein kalkulus student.

Tim, ein kalkulus III student (har fullført eit års studium i kalkulus), fekk ulike oppgåver som omhandlar den deriverte. Fyrst fekk han tre oppgåver som gjekk ut på å finna den deriverte av funksjonar. Desse, samt andre liknande oppgåver viste at han meistra (dei algebraiske) reglane for derivasjon. Det vart og gjeve ei oppgåve for å undersøkja forståinga av samanhengen mellom den deriverte og den grafiske framstillinga til ein funksjon. Figuren under viser grafen som vart gjeven og Tims respons då han fekk i oppgåve å skissera grafen til den deriverte:



Figur 11: Grafen til x^2 og Tims respons (Aspinwall, 1997, s. 309).

Det viste seg i løpet av intervjua (som gjekk føre seg over fleire dagar) at Tim hadde eit ukontrollerbart bilete av at parabelen vart brattare. Grafen til den deriverte ville difor til slutt verta tilnærma loddrett. Dette synet var problematisk. Intervjuaren minna han om kva grafen til den deriverte av $y = x^2$ var. Då klarte han å finna ei løysing, sjølv om denne ikkje vart heilt godteke.

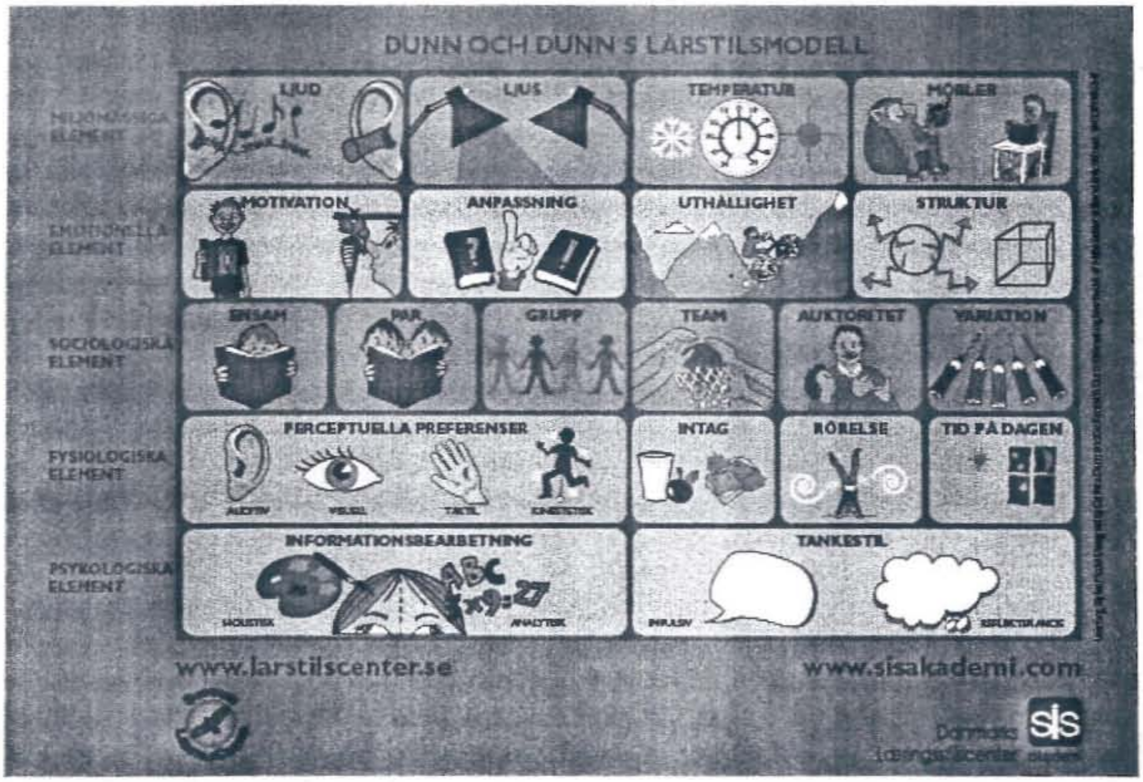
Aspinwall meiner at dette er eit døme på eit levande bilete som ikkje lenger er kontrollerbart, og det resulterer i eit mentalt bilete som gjer ting uklart i staden for å forklara. Dei konkluderer med at ein må moderera argumentet om at all forståing vil auka med grafiske hjelpemiddel. Studiet deira viser korleis ukontrollerbare bilete kan vera barrierar i forståinga av grunnleggjande matematikk.

I dette tilfellet er det likevel ikkje nødvendigvis Tim som tek feil. Dersom ein samanliknar grafen til x^2 og grafen til x^4, vil ein sjå at dei er svært like. Dersom Tim i dette tilfelle tenkjer seg at grafen er x^4, vil svaret hans vera rimeleg, då den deriverte av ein fjerdegradsfunksjon er ein tredjegradsfunksjon.

I samband med dette kan ein også minna om at det ikkje er sikkert at ei grafisk tilnærming er lettast for alle elevar. Mellom anna har Krutetskii (i Orton, 2004) gjennomført ein stor studie av matematisk evne hjå elevar. Studia er basert på observasjon og samtale med elevar. Krutetskii sitt syn var at "*... matematiske evner er ikkje medfødd, men er eigenskapar, tileigna i løpet av livet, som er basert på preferansar. Nokre har medfødde karakteristikkar som er ekstremt gunstige i utviklinga av matematiske evner...*" (Orton, 2004, s.114).

Krutetskii fann tre typar matematiske evner, *analytisk*, *geometrisk* og *harmonisk* (Aspinwall *et al.* 1997), der den analytiske ikkje nyttar visuelle tilnærmingar i problemløysing.

Det er forska mykje på korleis kvart enkelt individ lærer best. Mange meiner at det er gunstig å jobba såkalla læringsstilbasert. Det finst mange læringsstilmodellar. Modellen til Dunn og Dunn tek utgangspunkt i 5 stimuli:



Figur 12: Dunn og Dunn sin læringsstilsmodell (Sveriges Lärstilcenter).

Me ser her at dei fysiologiske elementa tilseier at nokre elevar er visuelle av natur, medan andre elevar har andre preferansar. Eg har vald å ikkje gå nærare inn i denne teorien sjølv om det er ein interessant innfallsvinkel.

2.8 Oppsummering

Dette teorikapitlet har teke for seg noko av den forskinga som er gjort på begrepsdanning i matematikk frå eit konstruktivistisk synspunkt. Slik eg ser det går det ei line frå Piaget sine begrep om læringsprosessen (akkomodasjon og assimilasjon) og konstruksjon av matematiske strukturar (reflekterande abstraksjon og begrepsmessige heilskapar) via Sfards reification til Tall (og andre) sine idear om procedural og proceptual thinking og procepts.

Vidare er det gjeve ei innføring i korleis ein kan skildra individet sin begrepsmessige struktur ved hjelp av begrepsbilete og begrepsdefinisjon, begrepsinnhald og begrepsuttrykk. Nært knytt til begrepsbiletet er kognitive einingar/kognitive røter – fokus på ein del av den kognitive strukturen til hjelp i løysing av matematiske oppgåver.

Til slutt er det kort vist til noko av forskinga på elevar si forståing av derivasjon. Elevar slit med grenseverdibegrepet og det er mykje som tyder på at den mest vanlege måten å starta opp undervisninga i derivasjon, med utgangspunkt i grenseverdiar, ikkje er den mest gunstige for elevane. Ulike grafiske hjelpemiddel kan derimot vera støttande i innlæringa av derivasjonsbegrepet.

3 METODE

I dette kapitlet ynskjer eg å gjera greie for metodiske problemstillingar og utfordringar knytt til hovudfagsarbeidet. Ulike forskingsdesign vert drøfta og det vert argumentert for ei kvalitativ tilnærming til problemstillinga. Vidare vert det gjort greie for utval, innsamling og handsaming av data, validitet og reliabilitet.

3.1 Ulike tilnærmingar til forsking

3.1.1 Kvalitativ og kvantitativ metode

Ulike forskingsarbeid har ulike metodiske innfallsvinklar og stiller difor ulike krav. Dei store internasjonale undersøkingane TIMSS og PISA har eit klart mål om å vera metodisk gode. *"It is not enough to be good, you must prove that you're good!"* (Kjærnsli og Lie, 2003) er eit motto for TIMSS. Difor er dei heile tida i utvikling for å gjera resultata mest muleg pålitelege. Sjølve mottoet kan nyttast også i andre forskingsarbeid, både små og store.

TIMSS og PISA er døme på forskingsarbeid som nyttar *kvantitativ* metode. Dei inneheld store mengder data som kan teljast og målast. Ved hjelp av statistiske testapparat kan ein samanlikna dei ulike landa som er med i undersøkinga. Kvantitativ metode vert også nytta i mindre skala. Ein kan mellom anna tenkja seg eit kvantitativt forskingsdesign for mitt hovudfagsarbeid; Ein skriftleg test til eit stort tal (>100) elevar. Svara kan teljast opp og samanliknast. Såleis finn ein kva oppgåver som er vanskelege og lette. Ein kan og fastslå med ein gjeven sannsynsgrad kva typar feil elevar gjer når dei løyser oppgåver knytt til grafisk forståing av derivasjon. TIMSS gjer også dette (Johansen *et al.*, 1998).

Slike deskriptive og eksperimentelle design gjev viktige bidrag til forskinga og har tradisjonelt sett vore dominerande. Dei seinaste tiåra har derimot den *kvalitative* metoden vunne hevd i det matematikkdidaktiske fagmiljøet. I denne oppgåva har eg vald eit kvalitativt forskingsdesign. Bakgrunnen for det er at det ut frå mine problemstillingar ikkje er sjølve svaret som er av interesse. Eg ynskjer å sjå nærare på tenkinga som ligg bak svaret. Då er det lite nyttig med eit stort tal svar på skriftlege oppgåver.

3.2 Eit konstruktivistisk kunnskaps- og læringssyn som grunnlag for ei kvalitativ tilnærming

Carr og Kemmis-typologien viser til ulike innfallsvinklar til forsking (Merriam 1998). Dersom ein ser på det saksområdet ein studerer som noko ein kan få objektiv kunnskap om (røynda er stabil, observerbar og målbar), vel ein kvantitative metodar. Dette er ein *positivistisk* innfallsvinkel til forskinga. Med ein *fortolkande* innfallsvinkel vert saksområdet oppfatta som komplekst med ei mengd ikkje-målbare prosessar (kvar einskild konstruerer sin eigen kunnskap). For å få ny kunnskap vel ein kvalitative metodar som intervju, observasjon og analyse av dokument.

Kvale nyttar to metaforar for korleis forskaren jobbar, forskaren som gruvearbeidar eller reisande reporter (Kvale 2002). Gruvearbeidaren oppfattar verda som objektiv gjeven. Oppgåva er å avdekkja den eigentlege meininga. Grev ein djupt nok, finn ein gull. Ein reisande reporter jobbar derimot ut frå at meininga ligg i ein interaksjon mellom til dømes intervjuaren og intervjuobjektet.

Dette hovudfagsarbeidet er basert på eit konstruktivistisk lærings- og kunnskapssyn. Den som lærer er aktiv. Kunnskap vert konstruert, ikkje (passivt) motteke. Det er stor interesse for det konstruktivistiske synet på undervisning og læring, og forsking framhevar kvalitative forskingsmetodar (Lythcott og Duschl, 1990). Likevel kan det diskuterast kva forskarsyn eg jobbar ut frå. Forskingsarbeidet er designa for å avdekkja delar av elevar si forståing av derivasjon. Eg leitar etter gull. Men eg nyttar det kvalitative forskingsintervjuet som hovudreiskap[5]. På den måten vert eg ein slags "reisande gruvearbeidar", men det som for meg veg tyngst er kva kunnskap eg er ute etter. Eg er ikkje ute etter kva svar elevane gjev på ei oppgåve, men korleis dei tenkjer når dei løyser oppgåva.

Eit kvalitativt forskingsdesign er kjenneteikna av at det er forskaren sjølv som er instrumentet for datainnsamlinga og analysen. Observasjon og intervju er vanlege framgangsmåtar og forskaren er ofte ein aktiv deltakar. Ein naturleg konsekvens er at ein utfører ein eller annan form for feltarbeid. Ein oppsøkjer situasjonar og skildrar og tolkar det ein opplever. I analysen prøver ein ofte å finna eit mønster i det innsamla materialet.

Ein ser med andre ord at den kvalitative tilnærminga har noko å seia for alle delar av forskingsprosessen, val av informantar, instrument for datainnsamling og analyse.

3.3 Etiske problemstillingar og krav til forskaren

Det finst mange etiske "kodar" og retningsliner for korleis ein skal gjennomføra eit studie. Desse er ulike for ulike disiplinar. Ein har også nasjonale/internasjonale retningsliner og lovar (Kvale, 2002)

I kvalitativ forsking er det viktig å vurdera forskar-deltakar-relasjonen, som skil seg mykje frå ein eksperimentell situasjon. Der forskaren har kontroll er det fare for overgrep. I kvalitativ forsking er det etiske dilemma knytt til både innsamling av data, analyse og formidling av funn.

Det er mange etiske dilemma knytt til observasjon og intervju. Ikkje minst kan det kvalitative forskingsintervjuet by på utfordringar. I ein intervjusituasjon kan ein mellom anna oppleva at informanten kjem med sensitiv informasjon, eller at sjølve intervjusituasjonen vert så ubehageleg at informanten ikkje taklar han. I denne oppgåva vert intervjuet nytta for å løysa matematikkoppgåver. Det er ein ganske "ufarleg" situasjon for elevane. Det kan sjølvsagt vera ubehageleg å ikkje få til ei oppgåve medan intervjuaren ser på, men elevane vert trass alt ikkje konfrontert med personlege meiningar, problem o.l. Eg prøvde likevel under heile intervjuet å leggja til rette for ei roleg atmosfære og pressa ikkje elevane unødig når dei var usikre på oppgåvene.

Det viktigaste for meg i datainnsamlinga var å sikra at informantane var anonyme. Elevane noterte namna sine på den skriftlege testen slik at eg lettare kunne ta kontakt med eventuelle intervjuobjekt. Anonymiteten er difor sikra ved at skulen ikkje er nemnd i oppgåva og namna på elevane er fiktive. Dette vart elevane gjort merksam på før dei godtok å vera med på undersøkinga. Intervjua var også friviljuge. Elevane hadde høve til å "reservera" seg mot intervju. Det gjorde dei ved å skriva ein merknad på den skriftlege testen.

[5] Kvale ser på forskingsintervjuet som *"Inter views"* – kunnskap konstruert gjennom utveksling av synspunkt (Kvale, 2002).

Også analysen av data kan gje etiske dilemma. I kvalitativ forsking er det forskaren sjølv som er hovudinstrument i datainnsamlinga, og det er forskaren som vel korleis dei innsamla data skal nyttast. Det er fullt muleg å (meir eller mindre medviten) ta med i studiet det som passar, og utelata det som motseier forskaren. Det eksisterer ingen metode som tek vekk alle forskarbiasar. Sjølv om eg ikkje har noko personleg ynskje om at elevane skal ha god eller dårleg grafisk forståing av derivasjon er det ikkje tvil om at eg har på meg briller som er farga av den teorien eg har lest om emnet. Kanskje dette fører til at eg tolkar data slik at det passar med tidlegare teori?

Eit botemiddel er å skildra analysen så godt som råd er. Dersom ein har data som ikkje til fulle støtter forskaren sitt syn, bør ein inkludera så mykje data at lesaren kan gjera opp si eiga meining (Merriam, 1998). Av den grunn har eg vald å ta med delar av den transkriberte teksten i analysen av datamaterialet. Då vert det lettare for lesaren å vurdera om mine slutningar er rimelege.

3.4 Utval og innsamling av data

Når problem og val av forskingsdesign er identifisert er det tid for å velja eit utval som gjer ein i stand til å kasta lys over problemstillinga. Merriam opererer med to typar utval, *probability sampling* (sannsynsutval) og *nonprobability sampling* (ikkje-sannsynsutval) (Merriam, 1998). Det siste er mest vanleg i kvalitativ forsking sidan ein ikkje nødvendigvis skal generalisera resultata til ein stor populasjon. Vidare treng ein eit utval som gjev den informasjonen ein treng, eit *føremålstenleg* utval. For å velja ut dei tilfella treng ein *utvalskriterium*.

Mitt føremålstenlege ikkje-sannsynsutval vert elevar i den vidaregåande skulen. Eit utvalskriterium som vil gje meg informasjonsrike tilfelle er at elevane har møtt derivasjonsbegrepet i undervisninga. Elevane må ha kunnskapar som tilsvarer 2MX/2MY. Eit anna kriterium var at elevane, sjølv om dei formelt hadde 2MX/3MX, skulle ha eit minimum av kunnskapar om derivasjonsbegrepet. Difor er dei svakaste elevane utelukka frå dette forskingsarbeidet. Det er ingen tvil om at elevar med store vanskar i matematikk er interessante "forskingsobjekt", men desse informantane er ikkje føremålstenlege for å finna svar på mine problemstillingar. Dersom elevar ikkje har kunnskapar om den deriverte i det heile, vert det meiningslaust å diskutere kvifor dei ikkje klarar å tolka den andrederiverte grafisk.

3.5 Pilotundersøkinga – deltakarar, skriftleg test og intervju

Hovudfagsarbeidet er for mange studentar det fyrste møtet med forsking. Difor er det svært viktig å førebu seg godt slik at ein eliminerer feil og kompenserer for manglande rutine. Pilotundersøkinga vart gjennomført for å betra kvaliteten på hovudfagsarbeidet ved at eg fekk testa utval av elevar, oppgåver og intervjuform.

Den skriftlege testen vart gjennomført i ein 2MX-klasse på ein vidaregåande skule, allmennfagleg line. Det var 18 elevar med i undersøkinga. Elevane vart delt vilkårleg i to grupper og begge grupper hadde ein skriftleg test med 7 oppgåver. Ved å dela gruppa i to fekk eg prøvd ut fleire oppgåver enn om eg hadde gjeve same test til alle elevane. Oppgåvene omhandla ulike delar av derivasjonsbegrepet. Grenseverdiar, definisjonen på den deriverte, tolking av grafar. Oppgåvene var henta frå ulike lærebøker i matematikk (Erstad *et al*, 2004, Oldervoll *et al* 2001, Adams, 1999), samt TIMSS-undersøkinga (Johansen *et al.*, 1998).

Med bakgrunn i denne testen valde eg ut to intervjuobjekt. Intervjua gjekk føre seg eit par veker etter den skriftlege testen. Intervjuet var friviljug og begge elevane samtykka i å vera med. Under intervjuet fekk dei oppgåver dei ikkje hadde i testen. For å strukturera intervjuet og førebu meg best mogleg nytta eg ein intervjuguide[6]. Erfaringane frå denne pilotundersøkinga tok eg med meg i den vidare datainnsamlinga (Denne hovudundersøkinga vert frå no av kalla "datainnsamlinga").

3.6 Innsamling av data

3.6.1 Deltakarar

I pilotundersøkinga nytta eg elevar frå ei 2MX-klasse. Undersøkinga vart teken i vårsemesteret slik at dei kapitla som omhandla derivasjon var unnagjort. Eg kunne ikkje nytta den same klassen i datainnsamlinga. Det tok litt tid før eg hadde fått kontakt med ein ny skule som stilte klassar disponible. Datainnsamlinga vart difor gjennomført tidleg i haustsemesteret. Derivasjonsbegrepet er relativt ukjend for elevar i 2. klasse tidleg i haustsemesteret. Difor valde eg å nytta elevar frå 3MX-klassar. Då var eg sikra at elevane (formelt) hadde nødvendig bakgrunnskunnskap. X-retninga vart vald av di dei har større vekt på derivasjon enn Y-retninga. Datainnsamlinga er gjort i to 3MX klassar på ein vidaregåande skule, allmennfagleg line. Det var 15 elevar i kvar klasse. Begge klassane hadde nytta læreverket *Matematikk 1MX, 2MX og 3MX* (Erstad *et al.*, 2001, 2004, 2002).

3.6.2 Skriftleg test

Ei av erfaringane frå pilotundersøkinga var at oppgåvene i den skriftlege testen ikkje var einsretta nok for å undersøkja elevar si grafiske forståing av derivasjon. Nokre av oppgåvene frå pilotundersøkinga vart nytta vidare, men for å få eit betre utval av oppgåver tok eg ein ny gjennomgang av læreverk. I tillegg fekk eg oppgåver frå Cyril Martin Julie, professor ved University of the Western Cape (UWC) og professor II ved UiB. Den nye skriftlege testen bestod no av sju oppgåver der alle omhandla grafisk tolking av den deriverte[7].

Det same oppgåvesettet vart nytta i begge klassane. Elevane hadde ein dobbeltime til disposisjon. Elevane fekk såleis god nok tid til å prøva på alle oppgåvene. Det var eit poeng at tid ikkje skulle vera ein stressfaktor.

Det er eit poeng at målet med denne skriftlege testen ikkje nødvendigvis var å få svar på forskingsspørsmåla og problemstillingane mine. Den skriftlege testen var eit middel til å finna gode (føremålstenlege) informantar som seinare skulle intervjuast. Testen fungerte godt til det formålet. Det var elevar som av ulike grunnar ikkje var gode informantar. Mellom anna var nokre elevar så svake at det virka vanskeleg å seia noko om deira forståing av ulike sider av derivasjonsbegrepet. Andre elevar derimot peika seg ut som gode intervjuobjekt. Til dømes var det nokre elevar som svarte rett på oppgåver der funksjonsuttrykket til grafen var gjeven, medan dei fekk problem når berre grafen var gjeven. Det var observasjonar som var interessante å sjå nærare på.

[6] Vedlegg 7.1 og 7.2.
[7] Vedlegg 7.3.

3.6.3 Intervju

Som nemnt tidlegare valde eg eit kvalitativt forskingsdesign. Merriam (1998) meiner at kvantitativ forsking, der ein generaliserer frå mange individ ofte er lite nyttig. Mason og Davis (1991) gjev uttrykk for at ein ikkje skal fokusera på svara, men kvifor elevane gjer som dei gjer når dei løyser oppgåver, medan Grouws (1992) og Kvale (2002) påpeiker at intervju er svært viktig i forskinga.

Det kliniske forskingsintervjuet er difor hovudmetode i datainnsamlinga sidan det for meg var den beste måten å undersøkja korleis elevar tenkjer når dei arbeider med oppgåver knytt til grafisk forståing av derivasjon. Val av innsamlingsmetode er også knytt til problemstillingane. Dersom ein ynskjer å finna ut meir om kvifor elever svarer som dei gjer når dei løyser oppgåver, må ein vera til stades under oppgåveløysinga. Men observasjon vert for passivt. Intervju er ein god metode sidan det medfører ein dialog som kan kasta lys over problemstillingane. Vidare kan ein analysera notat og transkripsjonar grundig i etterkant av intervjuet.

Det er viktig å førebu seg godt for å sikra seg at intervjua vert så bra som muleg. Dette gjeld kanskje i særleg grad når ein er uerfaren. Eg vil no gjera greie for korleis intervjua vart planlagt og gjennomført.

Graden av struktur på intervjuet er avgjerande for kva type informasjon ein får ut av informanten. Merriam nemner tre typar intervju, gradert etter struktur, *veldig strukturerte (standardiserte), semistrukturerte og ustrukturerte (uformelle),* (Merriam 1998).

I dei standardiserte intervjua er spørsmåla og rekkjefølgja av dei bestemt på førehand. Spørjeundersøkingar, gallupar og marknadsundersøkingar er døme på standardiserte intervju. Problemet med desse intervjua er at det vert vanskeleg å få tilgang til informanten si verdsoppfatning. I staden får ein reaksjonar på forskaren si oppfatting av den same verda. I motsett ende av skalaen har ein dei ustrukturerte intervjua. Dei er meir som ein samtale å rekna. Intervjuaren stiller opne spørsmål og intervjuet kan ta mange vendingar. Dersom intervjuaren sjølv ikkje veit nok om fenomenet til å stilla gode spørsmål er dette ei god intervjuform. Dei semistrukturerte intervjua er ein kombinasjon av dei to førre og vanleg i kvalitativ forsking. Her er det ofte ei blanding av meir eller mindre strukturerte spørsmål. På den måten kan ein sikra seg at ein kjem inn på tema som er bestemt på førehand, samstundes som at ein har høve til å følgja opp interessante utsegn frå informanten.

Intervjua i datainnsamlinga var relativt strukturerte. Elevane løyste eit sett med gjevne derivasjonsoppgåver. Nokre oppgåver var felles for alle intervjuobjekta. I tillegg gjekk eg nærare inn på nokre oppgåver frå den skriftlege testen. Desse oppgåvene varierte med intervjuobjektet. Likevel vil eg ikkje kalla intervjua mine standardiserte. Eg var open for å endra rekkjefølgja av oppgåver, og dersom eg gjorde interessante observasjonar i løpet av intervjuet vart dei følgd opp umiddelbart. Eg vil difor seia at intervjua i stor grad var semistrukturerte.

For å bøta for manglande erfaring laga eg meg som nemnt ein intervjuguide før pilotintervjua Erfaringane frå pilotintervjuet var så positive at eg nytta omtrent same intervjuguide også i datainnsamlinga. Utvalet av oppgåver varierte likevel noko med informant. Intervjuguiden hadde to føremål. I tillegg til at den var ei hjelp i høve til det å strukturera intervjuet, var den eit nyttig reiskap til å finna gode intervjuspørsmål. Eg nytta intervjuguiden som ein mental gjennomgang av intervjuet *før* intervjuet fann stad.

Før kvart intervju valde eg ut kva oppgåver som skulle vera med. Eg såg for meg mulege løysingar av oppgåvene og problem som kunne dukka opp. Eg laga meg nokre hjelpespørsmål som kunne nyttast dersom eleven sat fast og eg ikkje ville gje løysinga direkte, eller dersom eleven svarte korrekt, men lite utfyllande. Eg hadde heile tida i baktankane at intervjua skulle gje meg nok informasjon til å kasta lys over problemstillingane. Kvale nemner at spørsmåla ein stiller i intervjuet kan evaluerast etter ein tematisk og ein dynamisk dimensjon (Kvale, 2002). Den tematiske dimensjon er kanskje viktigast. Spørsmåla ein stiller skal gje meir kunnskap om problemstillingane. Men spørsmåla skal samtidig vera dynamiske ved at dei skaper ein god samtale under intervjuet.

Difor var det viktig at eg stilte dei "gode" spørsmåla under intervjuet. Ein skil mellom forskingsspørsmål og intervjuspørsmål og eit godt forskingsspørsmål er ikkje alltid høveleg i ein intervjusituasjon. Derimot er forskingsspørsmåla opphav til gode intervjuspørsmål[8]. Eit forskingsspørsmål kan i denne oppgåva vera *"Er begrepsbiletet til elevane i samsvar med begrepsdefinisjonen?"*. Dette kan overførast til intervjuspørsmålet *"Kan du forklara kva den deriverte til ein funksjon er?"*

Det er også viktig at spørsmåla vert utforma slik at det er informanten som introduserer nye begrep. Det er betre å stilla spørsmålet: *"korleis kan ein sjå på ein graf at den deriverte er positiv?"* enn den alternative formuleringa *"stemmer det at grafen er stigande når den deriverte er positiv?"*.

I kvantitativ forsking er det avgjerande for kvaliteten på undersøkinga at ein har eit stort tal objekt med i undersøkinga. Det er ikkje tilfellet for kvalitative forskingsintervju. Det ideelle i kvalitativ forsking er at ein forset med nye intervju heilt til fleire intervju ikkje gjer meir informasjon. Dette må likevel sjåast i samanheng med den tida ein har til rådvelde. Eg valde å intervjua 6 av dei 30 elevane i datainnsamlinga, men grunna tekniske problem vart berre 5 av dei med i denne oppgåva. Det kan henda at fleire intervju ville gjeve ny informasjon, men dei 5 intervjua gav mykje datamateriale, og arbeidet var såpass tidkrevjande at fleire intervju ville sprengt rammene for denne oppgåva.

3.7 Handsaming av data

Eit kvalitativt forskingsarbeid gjev store datamengder. Det er viktig at ein held system og organiserer innsamla data. Då er det lettare å klargjera for vidare analyse. Særs viktig er det at ein finn ut korleis ein ynskjer å nytta intervjua.

På pilottesten retta eg oppgåvene og sat karakter på svara. I ettertid såg eg at talet rette svar på testen var lite relevant for dei problemstillingane eg hadde. Den skriftlege testen var i hovudsak eit middel til å finna føremålstenlege informantar. Elevsvara vart difor samla og eg tok ein grundig gjennomgang av kvart elevsvar. Eg laga meg for kvart elevsvar ei oversikt over interessante observasjonar og nytta desse oversiktene for å velja ut intervjuobjekt. Dette er ein del av analysen og vert diskutert nærare nedafor.

[8] I denne oppgåva kan også ei oppgåve vera eit intervjuspørsmål. Oppgåva er eit utgangspunkt, og måten eleven går fram på skal, på same måte som eit godt intervjuspørsmål, kasta lys over problemstillingane.

Ein minidisk med mikrofon vart nytta for å ta opp intervjua. Pilotintervjua viste seg å vera nyttige, då dei gav trening i å nytta det tekniske utstyret (mellom anna gløymde eg å slå på mikrofonen under det fyrste pilotintervjuet). Mikrofonen stod midt mellom intervjuar og informant, men stod så langt unna at den fekk stå uforstyrra under intervjuet. Lydkvaliteten vart svært god. Det var med få unntak lett å høyre kva som vart sagt under intervjua. I etterkant ser eg likevel at eg kunne ha betra kvaliteten på denne delen av datainnsamlinga ved å også ha filma intervjua. I nokre tilfelle var det som vart sagt tvetydig og notata ufullstendige. Då var det ei utfordring å rekonstruera elevane sine løysingsstrategiar.

Opptaka vart så nytta som grunnlag for transkripsjon. Eg nytta tekstbehandlingsprogrammet "Word" for dette arbeidet. Det som vart sagt av meg og informantane vart transkribert tilnærma ordrett. Av den grunn har eg nytta skriftforma nynorsk på meg sjølv. Derimot var bokmålsforma ei meir naturleg skriftform på intervjuobjekta. Dette har lite å seia for analysen, men det var arbeidssparande for meg å sleppa oversetjinga nynorsk til bokmål og andre vegen.

Transkripsjonen gjekk føre seg i to etappar. Fyrst ei "grovtranskribering", der eg gjorde tale til tekst. Her eit døme på korleis den transkriberte teksten såg ut etter dette:

Intervjuar:	Eeeh den neste oppgåva er og då har eg ein heilt vanleg ein graf det står ikkje noko som helst namn på han det er berre ein graf.
Mathias:	Ja
Intervjuar:	Dette er f av x då
Mathias:	Ja
Intervjuar:	Grafen heilt og så skal eg be deg om å teikne grafen til den *deriverte*

Den neste etappen hadde som mål å gjera den transkriberte teksten meir lik intervjusituasjonen. Eg fann at ein framgangsmåte som er nytta av Streitlien (2002) passa godt til mitt føremål:

/ = kort pause:	< 2 sek
// = lang pause	> 2 sek
Overlappande tale:	[
Ord med spesielt trykk:	i kursiv
Utrop:	!
Spørjande tonefall:	?

Aktivitet som ikkje kjem verbalt til uttrykk er skrivne i parentes.

Linenummerering vart også nytta, slik at det skulle vera lettare å henta døme frå transkripsjonen inn i oppgåva. I tillegg la eg luft inn i teksten slik at det heile vart meir oversikteleg. Dømet over såg slik ut når transkripsjonen var heilt ferdig:

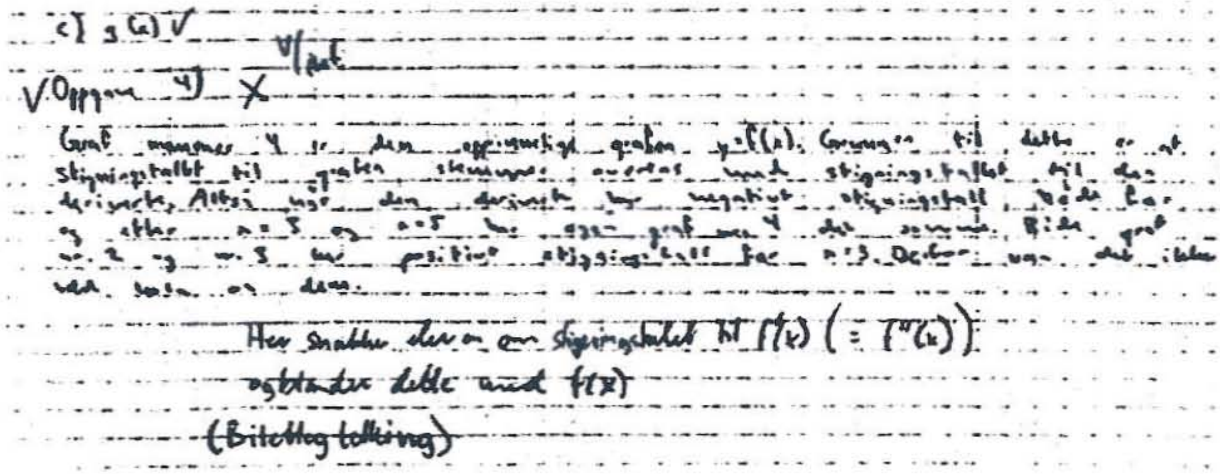
Intervjuar:	Eeeh den neste oppgåva / er og /då har eg ein heilt vanleg / ein graf det står ikkje noko som helst namn på han det er berre ein [graf
Mathias:	[Ja
Intervjuar:	[Dette er f av x då
Mathias:	Ja
Intervjuar:	Grafen heilt // og så skal eg be deg om å / teikne grafen til den *deriverte*

3.8 Analyse av data

Transkripsjonen, saman med dei skriftlege testane er grunnlag for ein grundig gjennomgang for å laga meining av data, dataanalysen. Desse meiningane er funna i studiet (Merriam, 1998). Intervjua er som sagt hovuddatakjelda, men også dei skriftlege testane er nytta som grunnlag for analysen.

Analysen startar *før* sjølve datainnsamlinga ved at ein legg til rette for ei fruktbar datainnsamling. (Kvale, 2002). Som nemnt tidlegare vart intervjuspørsmåla utarbeidd med tanke på at dei skulle gje kunnskap om problemstillingane, og er difor ein del av analysen.

Ein viktig del av planlegginga av intervjua (og ein byrjande analyse av data) var gjennomgangen av dei skriftlege testane. Eg studerte kvar enkelt prøve grundig og markerte interessante svar og feilsvar med tilhøyrande kommentarar. Eit døme illustrerer denne prosessen:



Figur 13: Elevsvar med kommentar.

Når dette var gjort for alle elevsvara hadde eg eit godt utgangspunkt for å velja ut føremålstenlege informantar, og det var muleg for meg å laga ein intervjuguide for kvart intervjuobjekt.

Bogdan og Biklen har utarbeidd ei tipunktsliste til hjelp under analysen som føregår medan ein samlar inn data. (Bogdan og Biklen, 1992 i Merriam, 1998). Fleire av desse punkta var relevante for meg:

- Snevra inn studiet etter beste evne (*grafisk* forståing av derivasjon).
- Bestemma seg for kva type studie ein ynskjer (kvalitativt studie).
- Laga relevante spørsmål (problemstillingar, forskingsspørsmål og intervjuspørsmål).
- Kommentera undervegs i datainnsamlinga (m.a. ved å notera under og umiddelbart etter intervjua).
- Prøve ut idear på informantane (m.a. lokal linearisasjon).
- Utforska litteraturen (har lese teori både før, under og etter datainnsamlinga).

Likevel, analysen er i hovudsak føreteke etter at intervjua var ferdige. Den transkriberte teksten, saman med notata frå intervjua vart såleis den viktigaste kjelda for å finna svar på problemstillingane mine.

Framgangsmåten eg nytta var å gå gjennom kvart intervju i detalj. Fyrst skildra eg korleis oppgåvene i intervjuet vart løyst. Utdrag frå transkripsjonen samt notat og teikningar gav ei god skildring av korleis eleven hadde arbeidd. Vidare leita eg etter relevante utsegner og framgangsmåtar som kunne seia noko om forskingsspørsmåla/problemstillingane mine. Teori var eit svært nyttig hjelpemiddel i dette arbeidet (t.d. ved at eg prøvde å få ein oversikt over eleven sitt begrepsbilete). Når dette var gjort hadde eg redusert den transkriberte teksten kraftig. T.d. vart ei transkripsjon på opphavleg 16 sider til eit dokument på 8 sider med relevante utdrag frå intervjuet, framgangsmåtar, utsegner og eigne notat.

Dei nye dokumenta vart så nytta til å få ei oversikt over elevane sin kognitive struktur (elevane sitt begrepsbilete) knytt til derivasjonsbegrepet. Metoden eg nytta var at eg gjekk grundig gjennom eit dokument (eit "komprimert intervju") og markerte interessante observasjonar. Vidare prøvde eg å oppsummera for kvart av intervjua kva forståing eleven hadde av derivasjonsbegrepet. Nokre utsegn/observasjonar var i samsvar med definisjonen på den deriverte, medan andre utsegn/observasjonar tyda på potensielle konfliktar. På denne måten fekk eg ei god oversikt over det eg vel å kalla eleven sitt begrepsbilete. I den same gjennomgangen såg eg etter kva løysingsstrategiar eleven nytta i oppgåveløysinga.

Når dette var gjort for alle dokumenta, samanlikna eg elevane sine begrepsbilete og val av løysingsstrategiar. Dette vart gjort både for å sjå om dei hadde noko til felles, og om det var ein samanheng mellom begrepsbilete og løysingsstrategiar. Dette arbeidet gjorde det også muleg å visualisera ulike måtar å løysa den same oppgåva på, og setja desse løysingsmetodane i samanheng med begrepsbiletet. Dei grafiske framstillingane er eigenproduserte, men inspirert av Crowley og Tall (1999).

3.9 Validitet og reliabilitet

Metodekapitlet vart innleia ved å visa til at det er ulike måtar å tilnærma seg forsking på, og at metodar ofte har samanheng med kva lærings- og kunnskapssyn ein har. I den kvantitative forskinga er det svært viktig at både resultat (og metode) er pålitelege og gyldige. Pålitelege i den forstand at dersom ein gjer det same studiet på nytt så skal ein få same resultat, og gyldige ved at studiet skal kunne nyttast i andre situasjonar, studiet skal kunna generaliserast. Begrepa *reliabilitet* og *validitet* må difor vurderast grundig. Som sagt skil den kvalitative forskinga seg frå den kvantitative ved at den har ei anna oppfatting av røynda. Røynda er ikkje stabil og målbar. Difor er også måla på om forskinga er påliteleg og gyldig annleis.

Kriteriet for om eit studie er til å stola på er annleis dersom forståing er målet for undersøkinga. I fagmiljøa vert det difor diskutert om ein skal utvikla alternative begrep for validitet og reliabilitet i kvalitativ forsking (Merriam, 1998). Eg vel likevel å nytte desse vel innarbeidde begrepa i mitt studie. I kvalitativ forsking kan validitet og reliabilitet tilnærmast gjennom å nøye vurdera om alle delar av studiet er gjennomført på ein god måte.

3.9.1 Indre validitet

I ei snever (positivistisk) tolking av ordet validitet kan ein stilla seg spørsmålet om ein "måler det me trur me måler?" Ei vidare tolking vil vera om ein metode undersøkjer det den skal undersøkja eller om resultata passar med den verkelege verda. Innafor denne tolkinga er kvalitativ forsking valid, vitskapleg forsking (Kvale, 2002).

Eg har tidlegare problematisert at eg i nokre samanhengar opptrer som ein gruvearbeidar. Eg har vald eit kvalitativt forskingsdesign på eit emne som ofte vert tilnærma kvantitativt. Difor har eg også i noko grad vurdert validiteten i snever forstand. Målet med den skriftlege testen og intervjuet var å undersøkja elevar si grafiske forståing av derivasjon. Difor nytta eg mykje tid på å finna gode oppgåver som gjorde meg i stand til å identifisera korleis elevar tenkjer når dei løyser derivasjonsoppgåver. Gode oppgåver gjer at eg med større sannsyn måler det eg trur eg måler.

Det er likevel det kvalitative synet på læring og kunnskap som er grunnlag for forskingsdesignet. Difor må spørsmålet om korleis resultata passar med røynda, eller indre validitet, vurderast. Den indre validiteten er som me ser avhengig av røynda. Men ei av føresetnadane i kvalitativ forsking er at røynda ikkje kan målast. Difor er samanhengen mellom data ein finn og røynda eit upassande mål på indre validitet.

Derimot kan ein utnytta det at forskaren er hovudinstrumentet både i datainnsamling og analyse. Eg var til stades under intervjua og mine tolkingar av røynda er knytt direkte til det eg såg og høyrde når elevane jobba med oppgåver. Det er ei styrke i høve til å få resultata frå ein standardisert prøve.

Likevel meiner eg at det viktigaste bidraget til å auka den indre validiteten er at eg i størst muleg grad har prøvd å gjera greie for eigne fordommar, førehandsoppfatningar og tankar, med andre ord eventuelle forskarbiasar.

3.9.2 Reliabilitet

I kvantitativ forsking er det viktig at ein får det same resultatet dersom ein gjentek forsøket. Det er eit krav som vanskeleg let seg gjennomføra i kvalitativ forsking. Eit menneske opptrer ikkje nødvendigvis likt kvar gong det vert stilt ovafor den same oppgåva. Gjentakingar gjev ikkje same svar sidan det er avhengig av korleis individet oppfattar røynda. Det fann eg konkrete døme på i datainnsamlinga. Elevar som svarte feil på ei oppgåve på den skriftlege testen gav eit anna svar på same oppgåva under intervjuet[9].

Sjølv om det er umogleg (i positivistisk forstand) med reliabilitet i kvalitativ forsking betyr ikkje det at resultata ikkje kan vera gode! Det er kanskje meir fruktbart å bytta ut begrepet reliabelt med påliteleg, og i staden stilla spørsmålet om resultata er samsvarande med innsamla data. For å sikra at resultata mine er pålitelege (reliabiliteten) har eg i størst muleg grad gjort greie for min eigen posisjon og skildra framgangsmåten som er nytta i studiet.

3.9.3 Ytre validitet

Ytre validitet tek for seg spørsmålet om studiet kan nyttast i andre situasjonar. Med eit lite utval er det vanskeleg å generalisera. Ein kan seie at det i dei fleste samanhengar er lite nyttig å generalisera til ein heil populasjon frå eit lite utval. Samstundes er det heller ikkje føremålstenleg å generalisera frå ein stor populasjon til eit enkeltindivid. I kvalitativ forsking vel ein eit lite utval nettopp grunna at ein ynskjer å forstå eit fenomen i djupna. Dei tidlegare nemnte internasjonale undersøkingane TIMSS og PISA seier noko generelt om kor gode mellom anna norske elevar er i matematikk, også derivasjon. Men dei går ikkje i djupna på

[9] Sjå analyse av Markus, line 377 – 464.

elevar si *grafiske* forståing av derivasjon og dei seier lite om kvifor elevane svarer som dei gjer.

Det er ikkje sikkert at mitt utval er representativt for elevar som tek fordjuping i matematikk på vidaregåande skule. På same måte kan ein ikkje seie at det er 53.5 %[10] sjanse for at Markus skal svare rett på oppgåve 1 i intervjuet, som hadde vore tilfelle dersom ein nytta TIMSS-resultata.

Likevel ynskjer eg at andre skal kunne dra nytte av dei resultata eg kjem fram til i oppgåva. For å auka generaliseringsmuligheitene har eg forsøkt å skildra datainnsamling, analyse og resultat så godt at lesaren kan setja seg inn i situasjonen og eventuelt nytta resultata. Eg har også prøvd å få fram typiske hendingar som kan nyttast i andre situasjonar, t.d. undervisningssituasjonar.

[10] Viser til landa sin prosentvise fordeling på svaralternativa på oppgåve K5, TIMSS.

4 RESULTAT, ANALYSE OG DRØFTING PÅ INDIVIDPLAN

4.1 Innleiing

I dette kapitlet går eg nærare inn i intervjutranskripsjonane. Kapitlet er lagt opp slik at det fyrst vert ein gjennomgang av kvart av dei fem intervjua. Her vert det lagt vekt på å skildra elevane si forståing av begrepet derivasjon, samt sjå nærare på korleis dei har løyst oppgåvene. Etter kvar gjennomgang kjem ei oppsummering av intervjuet, der eg prøver å samanfatta dei viktigaste "funna" i kvart intervju. Etter at dei fem intervjua er analysert på denne måten, vert resultata samla i ei kort oppsummering. Vidare vel eg ut tre av elevane frå intervjuanalysen. For kvar av desse vert det laga eit kart/diagram over korleis dei har løyst to av oppgåvene frå intervjua. Desse vert klassifisert for å sjå om det er ein samanheng mellom begrepsbilete og løysing av oppgåver.

Til hjelp i analysearbeidet nyttar eg begrepa frå teorikapitlet. I den samanheng vil eg klargjera korleis nokre av dei ulike begrepa vert nytta:

Med utgangspunkt i elevane sitt arbeid med oppgåvene i intervjuet prøver eg å skildra elevane sine begrepsbilete. På den måten ynskjer eg å få ei oversikt over elevane sin kognitive struktur (begrepsbiletet). Nokre bilete vil vera i konflikt med den matematisk korrekte framstillinga av (delar av) derivasjonsbegrepet, medan andre bilete ikkje vil vera det. Eg nyttar ordet "definisjon" noko lausleg i denne samanhengen. Definisjonen er "det korrekte svaret" og må ikkje blandast saman med "begrepsdefinisjonen". Når eg skriv at eit bilete er i konflikt med definisjonen, betyr det at eleven har ei eller anna form for misoppfatning og at biletet (i form av ei ytring, teikning, utrekning e.l.) ikkje stemmer overeins med det som er matematisk korrekt.

Det er ikkje muleg å "sjå" eit begrepsbilete. Når eg likevel prøver å skildra dette, tek eg som utgangspunkt at elevutsegnene (begrepsbileta/begrepsuttrykka) er representasjonar av delar av det totale begrepsbiletet. Difor nyttar eg formuleringa aktivert/vekka/framkalla bilete om elevane sine utsegn og løysingsstrategiar. Nokre av desse strategiane er medvetne delar av ein kognitiv struktur og elevane reflekterer over denne. Strategiane vert såleis døme på det ein kan kalla kognitive einingar.

Begrepa kognitiv eining og vekka bilete er vanskeleg å skilja. Alle vekka bilete er på ein måte kognitive einingar og kognitive einingar er ein del av begrepsbiletet. Og ulike delar av begrepsbiletet vert vekka til ulik tid[11]. Eg nyttar nemninga "vekka bilete" slik det er definert i Tall og Vinner (1981). Den kognitive einingа er for meg "kognitivt sterkare" og er eit bilete som eleven klarer å dra nytte av i oppgåveløysinga.

[11] Noko av grunnen til at dei to begrepa er så like er at David Tall nyttar dei primært til å *snakka* om sine idear. Tall seier på direkte spørsmål i e-post: "*Your question is interesting as it relates two concepts I have formulated which are related, but I have never related them myself*" (e-post motteke 14/12-05).

4.2 Analyse og drøfting av intervju

I denne delen av analysen tek eg ein grundig gjennomgang av elevintervjua. På den måten ynskjer eg å få ei oversikt over begrepsbiletet til kvar elev og kva konfliktar som eventuelt gjer seg gjeldande når dei løyser oppgåvene frå intervjuet. Pilotintervjuet og eitt av intervjua i datainnsamlinga er ikkje teke med i denne analysen grunna at dei i liten grad skil seg frå dei fem følgjande intervjua.

4.2.1 Intervju med Emma

Oppgåve 1: Kva graf har alle eigenskapane?

Emma: Okei / f innsatt *null* skal være større enn null da kan det jo ikke være nei hvis du deriverer den / så blir jo det.

Intervjuar: Det er A-en du tenker på?

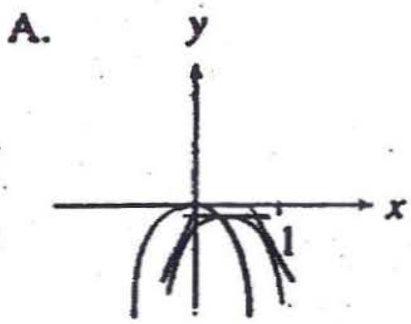
Emma: Ja / jeg må jo se på alle må jeg ikke det da?

Intervjuar: [Jo.

Emma: [he-he-he

Intervjuar: Det er veldig bra!

Emma: Ehm / og det at / *det* blir jo da / toppunktet der det er null / og / da vil den gå sånn // gjør han ikke det? / tror det / da tror jeg ikke det er *den* i hvert fall.



Figur 14: Emma teiknar grafen til $f'(x)$.

Emma prøver å teikna inn grafen til $f'(x)$. Ho meiner at den deriverte er null når graf A har eit toppunkt. Ut frå dette teiknar ho $f'(x)$ som ein parabel med toppunkt i origo. Her ser me at det er konfliktar mellom definisjonen og bileta til Emma. Fyrst ser me at Emma meiner at toppunktet på grafen til den deriverte skal gå gjennom origo. Det er uklart kvifor ho meiner det, men det kan ha samanheng med at den opphavlege grafen $f(x)$ er ein parabel med eit toppunkt. Då vil den deriverte vera null i toppunktet. Det kan tolkast som at grafen til den deriverte har "*toppunkt der det er null*". Vidare ser me det ein kan kalla ei biletleg tolking av grafen når Emma finn at grafen til den deriverte stig før toppunktet og søkk etter (sidan $f(x)$ gjer nettopp dette). Det er i dette tilfellet eit bilete av at grafen til den deriverte må stiga når den opphavlege grafen stig[12]. Dermed ser ein at $f'(x)$ ikkje er større enn null i origo, og A kan utelukkast. Sjølv om desse bileta er i konflikt med definisjonen fører det ikkje til noko kognitiv konflikt. Dei er likevel potensielle konfliktfaktorar.

Ho går no vidare til graf B der ho vel ein annan framgangsmåte:

Emma: Skal vi se / den går sånn det er en sånn / x i andre-funksjon.

Intervjuar: Ja det er riktig no er det B du snakkar om ja.

Emma: Ja / og det er en minus / x i andre-funksjon.

Intervjuar: Mm / ja.

Emma: Og x i andre / derivert er jo / to x // og / to x derivert er jo to / og hvis du andrederiverer to x / hvis du deriverer to x får du to / og da kan ikke den være negativ.

Intervjuar: Nei.

Emma: Nei he-he // og den her // den blir minus to // nå tenker jeg i ett.

Intervjuar: Det er veldig bra / berre tenk høgt.

Emma: Mm og så / på B så er jo det / x i andre / og x i andre derivert er to x / så da blir det to

Emma kjenner att graf B som x^2. (Eit framkalla begrepsbilete av at funksjonsuttrykket til parabelen er x^2). Ho ser og tilbake på A og kjenner den att som $-x^2$. Når funksjonsuttrykket er kjent vert det lettare å sjå at $f''(x)$ er negativ for alle x. Det er berre å derivera uttrykket to gonger. B vert difor utelukka av di den andrederiverte er positiv. Ho vurderer likevel ikkje graf A på nytt, sjølv om ho ved hjelp av funksjonsuttrykket kunne ha sjekka dei tre eigenskapane. Her dreg Emma nytte av eit begrepsbilete som ikkje er i konflikt med definisjonen.

Når Emma går vidare til graf C prøver ho som ved graf A å teikna grafen til $f'(x)$. Det fører ikkje til løysing.

Intervjuar: I C så får ein eit botnpunkt for x er lik null?

Emma: Ja / eller han krysser jo.

Intervjuar: Ja.

Emma: Han går / gjennom origo.

Intervjuar: Gjennom origo ja.

Emma: Og så / skal vi se // her går han jo sånn / der den er null det blir jo et / bunnpunkt / gjør det ikke det?

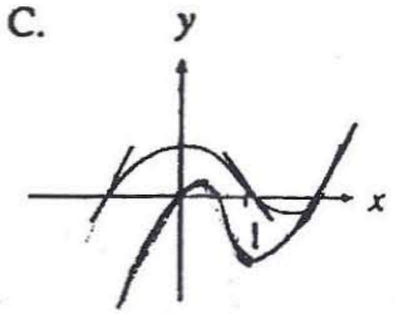
Intervjuar: Botnpunkt på den grafen til den deriverte?

Emma: Øøja.

[12] Uttrykket "biletleg tolking" vil i denne oppgåva verta nytta på denne måten, sjølv om uttrykket ikkje er eintydig. Problemstillinga vert drøfta nærare i kap. 4.2.6 og kap. 5.

Intervjuar: Ja.

Emma: Altså / den går liksom / den går noe / sånn.



Figur 15: Emma teiknar grafen til $f'(x)$.

Emma er klar over at grafen til $f'(x)$ vil gå gjennom origo. Det er det same framkalla begrepsbiletet som me såg tidlegare; $f'(x)=0$ når grafen til $f(x)$ har eit toppunkt. Ho meiner og at grafen til den deriverte vil ha eit botnpunkt der $f(x)$ kryssar x-aksen, *"der den er null"*. Det kan sjå ut som at grafen har eit vendepunkt der. I så tilfelle stemmer det at $f'(x)$ har eit botnpunkt der. Ho klarer likevel ikkje å skissera grafen. Me ser at ho har ei biletleg tolking av grafen og difor ynskjer at grafen til den deriverte skal stiga/søkka når den opphavlege grafen stig/søkk. Dermed justerer ho resten av grafen slik at den passar med det ho har funne (den passar med begrepsbileta).

Sjølv om ho no har teikna ein graf klarer ho ikkje å dra nytte av denne. Eg ber ho difor teikna inn nokre tangentar for å samanlikna med eigenskapane som var gjevne i oppgåva. Då vert C utelukka.

Emma: (Teiknar) ja tangenten går jo sånn sant / da er stigningstallet pos / itivt / men / ååh / dette var skumle greier he-he-he / mm skal vi se / mm / men det er i hvert fall ett nullpunkt / dette her blir // (utydeleg)

(Arbeider)

Intervjuar: No har du teikna inn nokre tangentar.

Emma: ja.

Intervjuar: Mm // viss du samanliknar dei tangentane nokre av eigenskapane / eeh / kan du utelukke *eller* stadfesta / at du er på rett graf då?

Emma: Eehm hvis vi ser på / at f innsatt null er større enn null.

Intervjuar: Då er det den [*deriverte*.

Emma: [Ja

Intervjuar: [som er større enn null ja

Intervjuar: Men / han er jo / null *akkurat*

Intervjuar: Han er null akkurat.

Emma: *Akkurat* i null / så han er jo ikke *større* enn null!

Emma klarer å teikna inn tangentar og nytta dei til å lesa av forteiknet til den deriverte. I dette tilfellet er det nok til å utelukka graf C.

Den neste grafen framkallar mange bilete som kjem i konflikt med kvarandre og gjer Emma usikker.

Emma: Ja / og *her* så er jo / skal vi se / det var en snål funksjon / ehm he-he / skal vi se / her må jo være sånn / toppunkt borti her da / eller noe sånt / men her / med et *vendepunkt* her liksom? / skal det forestille et vendepunkt?

Intervjuar: Det ser ut som eit vendepunkt / på D?

Emma: Ja / og dette er jo den andrederiverte / som skal være toppunktet.

Intervjuar: Ja.

Emma: I hvert fall // hvis [den

Intervjuar: [Så når du ser at / eller les at andrederiverte av x er negativ for alle [x

Emma: [og den

Intervjuar: [kva tenker du då? / Når du ser den der eigenskapen / at andrederiverte av x er negativ for alle x / korleis vil du finna det att på grafen?

Emma: Det må jo være for det at han synker.

Intervjuar: Ja.

Emma: Og det gjør han jo!

Intervjuar: Mm.

Emma: Så // (svakt) f innsatt *null* / er større enn null / er han det da? / ja! / er han ikkje det? f innsatt en er større enn null / den er jo der.

Intervjuar: F innsatt ein skulle vera *mindre* [enn

Emma: [*Mindre* enn null ja! / ja! / skal vi se / og der / det blir jo et toppunkt på den deriverte grafen // for det at / den / jeg er helt ute nå / jeg har en følelse av det / eehm.

Det kan sjå ut som at Emma har eit framkalla begrepsbilete av at når $f''(x)$ er negativ for alle x, då søkk grafen heile tida. Det kan likevel henda at ho meiner at det er vendepunktet som søkk. Seinare i intervjuet er det sitat som tyder på det (line 268 – 278). Me ser og at den deriverte vert sett på som positiv når grafen ligg over x-aksen og negativ når grafen ligg under x-aksen[13]. I tillegg finn ho eit toppunkt på den deriverte grafen. Det er usikkert kva ho meiner med dette, men ho nemner det i samband med den andrederiverte i line 142. Kanskje ho er kjend med at nullpunktet til den andrederiverte kan vera opphav til eit toppunkt for den

[13] Emma seier "f innsatt null" og "f innsatt en", men det vert seinare i intervjuet stadfesta at det er $f'(x)$ det er tale om (vedlegg 7.4.1, line 182 – 192).

deriverte. Det er i alle høve tydeleg at ho har problem med å utnytta informasjonen ho får frå grafen.

Eg ber ho difor om å sjå på eigenskapane ei gong til, slik ho gjorde på graf C. Då finn ho at D kan vera rett graf[14]. Ho har to begrepsbilete som ikkje stemmer med definisjonen, men som vert nytta som grunngjeving på at D kan vera rett graf. (Ein kan leggja merke til at Emma på graf C hadde eit framkalla begrepsbilete som *ikkje* var i konflikt med definisjonen, og som vart nytta til å utelukka grafen).

På graf E vert det nok ein gong gjort eit forsøk på å teikna grafen til $f'(x)$. Emma finn nullpunkta og toppunktet til $f'(x)$ ved hjelp av høvesvis tangentar og vendepunktet til graf E. Ved hjelp av denne grafen ser ho at dei to fyrste eigenskapane stemmer.

Emma: *Her* er i hvert fall / *her* er et vendepunkt / og / her er jo den deriverte / altså her er jo / den / sånn //

(Arbeider)

Skal vi se / og da er jo / toppunk / disse to skal jo gå gjennom null / begge to.

Intervjuar: mm.

Emma: (Arbeider) Så de blir sånn / og så blir den liksom / sånn / tror jeg / fordi at / det er jo et [vendepunkt

Intervjuar: [Mm.

Emma: [akkurat *her* / og siden den stiger så må det være positivt / så blir han sånn

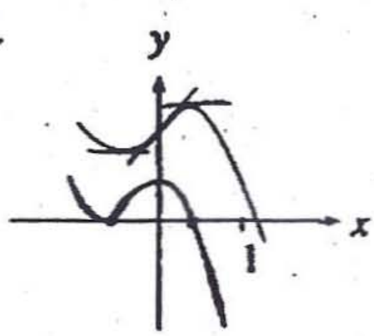
Intervjuar: Mm.

Emma: og så / går den nedover sånn? / tror eg he-he-he / jeg er ikke sikker! // eehm / noe sånt / kanskje / og der er i alle fall den større enn null i null / mindre / enn null med en [og

Intervjuar: [så då meiner du at den stemmer for dei to eigenskapane *der* i alle fall

Emma: Ja.

E.



Figur 16: Emma teiknar grafen til $f'(x)$.

[14] Vedlegg 7.4.1, line 173 – 205.

Dei framkalla begrepsbileta gjer Emma i stand til å teikna ein graf som er nesten rett. Ho har eit bilete av at grafen til $f'(x)$ vil få eit ekstremalpunkt i vendepunktet til $f(x)$, og i dette tilfellet vil det vera eit toppunkt sidan grafen stig i vendepunktet. Samstundes finn ho nullpunkta ved hjelp av tangentar. Me ser likevel at hennar biletlege tolking av grafen gjer at $f'(x)$ vert ein tredjegradsfunksjon i staden for ein parabel. Ho er likevel ikkje lenger i konflikt med definisjonen når ho finn at dei to fyrste eigenskapane stemmer.

Denne grafen vert derimot utelukka grunna den siste eigenskapen, sjølv om ho har ulike og uklare framkalla begrepsbilete av kva det grafisk vil seie at den andrederiverte er negativ for alle x.

Emma: Der er den jo positiv / er han ikke det? Så da *kan* det ikke være den / den er jo ikke det for null / for der er det jo vendepunkt / og det skal jo være *toppunkt* / og da er ikke den negativ.

Intervjuar: Så det at f / nei så då utelukkar du E på grunn av det.

Emma: Ja.

Intervjuar: Siste punktet / og det at f andrederivert av x er *negativ* / for alle x i ein graf.

Emma: Mm.

Intervjuar: Kva er det?

Emma: Da tenker jeg at den må *hele* tiden / synke.

Intervjuar: *Grafen* må heile tida søkka?

Emma: Ja altså vendepunktet kan ikke være / det kan ikke gå oppover det må gå nedover.

Emma nyttar biletet av at eit vendepunkt som gjev eit toppunkt på $f'(x)$ medfører at den andrederiverte er positiv. Det stemmer at vendepunktet her gjev eit toppunkt på $f'(x)$, og då vil i tilfelle den andrederiverte vera null, ikkje negativ. Samstundes meiner ho at dersom den andrederiverte er negativ for alle x, så må grafen søkka heile vegen. Vidare nemner ho på nytt at vendepunktet må gå nedover dersom den andrederiverte er negativ. Det kan sjå ut som at ho meiner at vendepunktet går nedover når det søkk frå venstre mot høgre (på same måte som at når den deriverte er negativ vert tangenten kalla søkkande) . Det er likevel usikkert om dette er to ulike bilete, eller om det berre er språket som er upresist. Ho seier at "*den må hele tiden synke*" (line 274). Kanskje er det vendepunktet ho meiner må søkke (dvs frå venstre mot høgre) heile tida, ikkje grafen. Dette vert i alle høve nytta for å stadfesta at det ikkje er graf E.

Ho er no av den oppfatning at det er graf D som er det rette svaret. Eg ber ho difor sjekka den fyrste eigenskapen ein gong til.

Intervjuar: Mm / ta å / den fyrste eigenskapen / f derivert av null skal vera større enn null.

Emma: Ja.

Intervjuar: Korleis må tangenten gå i null då?

Emma: I null? / da må den gå oppover.

Intervjuar: Ja.

Emma: Men han går jo nedover.

Intervjuar: Ja.

Emma: Da *kan* det ikke være den.

No utelukkar ho graf D grunna at tangenten "*går oppover*". Biletet av at den deriverte var positiv når grafen låg over x-aksen vert ikkje framkalla no, og skaper difor ikkje konflikt.

No vert graf A og B vurdert på nytt. Denne gongen går ho fram på ein algebraisk måte og tek utgangspunkt i at graf A og B er $-x^2$ og x^2 høvesvis.

Emma: Hvis du sant / hvis det er *minus* x i andre.

Intervjuar: Mm.

Emma: Så blir jo det / minus to x / og så deriverer du en gang til så blir det minus to

Intervjuar: Mm.

Emma: Og den skulle væra negativ for alle verdier.

Intervjuar: Mm.

Emma: Og da / hvis vi sier at det er den da / at den hadde gått helt oppi / men det gjør han jo ikke så han er minus et eller annet på slutten / men / så / så er jo han / minus to x null / så tar du null inn der så *er* jo han / er jo han null / er han ikkje det da?

Intervjuar: Viss du teiknar inn / slik du gjorde her / tangentar i dei tre punkta / ikkje i dei tre punkta men i *null* / og i *ein* for å sjå på dei deriverte eigenskapane.

Emma: Ja sånn *her* cirka er en da.

Intervjuar: Ja!

Emma: Og her er / null / i null så stiger han.

Intervjuar: Mm.

Emma: Og så / så då er jo han / positiv i null.

Intervjuar: Ja.

Emma: Og / i en så synker han.

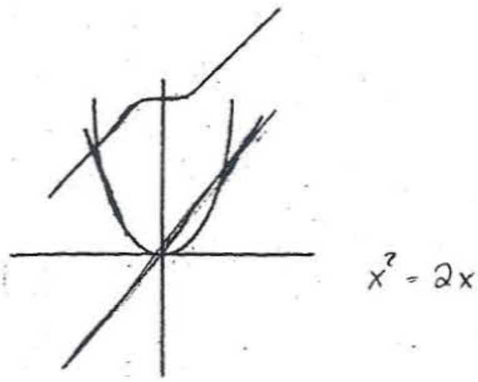
Intervjuar: Ja.

Emma: Så da er den *under* null og / f / dobbeltderivert av x / eeeh / den / vil være negativ / fordi / det er en x i andre funksjon / minus x i andre funksjon / kan jeg kan jeg si det sånn?

Graf B vert utelukka ved å derivera funksjonsuttrykket to gonger. No klarer ho å sjekka dei to fyrste eigenskapane med tangentar. Ved å nytta ein algebraisk framgangsmåte for å sjå på den andrederiverte slepp Emma å nytta eit bilete av den andrederiverte som i beste fall er uklart (dersom ho meiner at den andrederiverte fortel om grafen søkk, er det eit bilete som er i konflikt med definisjonen). Derimot fører ikkje derivasjonsteknikken (prosessen[15]) til konflikt.

Oppgåve 2: Teikna grafen til den deriverte (parabel).

Når Emma prøver å teikna grafen teiknar ho fyrst ein graf med terassepunkt i origo[16].



Figur 17: Emma teiknar grafen til $f'(x)$.

Det som viser seg å vera mest problematisk er at grafen ho har teikna stig sjølv om den opphavlege grafen søkk (den deriverte er negativ). Her er det to bilete som er i konflikt. Tangentane til grafen gjev at den deriverte er negativ. Men ho har og eit bilete som seier at då kan ikkje grafen til $f'(x)$ stiga.

Emma: Men da vil han jo faktisk stige / så det virker litt rart / for jeg har jo sagt at han er *negativ* her / men han er jo negativ / er det i funksjons / altså sånn / er det i sånn at det er minus /eller er det sånn at han synker? / det er det som er problemet

Ho set faktisk ord på denne konflikten sjølv, og dermed ser me at me har eit eksempel på ein potensiell konfliktfaktor som vert ein kognitiv konfliktfaktor. Denne konflikten løyser ho ved å sjå på kva som skjer dersom ein seier at funksjonen er x^2.

Emma: (arbeider) x derivert.

Intervjuar: mm.

Emma: Og da vil jo han egentlig / skulle han egentlig gå som en rett strek da / gjennom origo / da må jeg bare viske litt.

Intervjuar: Mm.

Emma: For det der er jo / altså hvis du setter inn minus en / så blir det jo minus to

Intervjuar: Ja.

Emma: Og setter du inn null / så får du null / setter du inn en så blir det / pluss to / så det skal jo egentlig bare gå sånn / jeg er ikke så veldig flink å tegne rette streker da men.

[15] Me hugsar at i samband med eit begrep inneheld den kognitive struktur (begrepsbiletet) ikkje berre mentale *bilete*, men og prosessar og eigenskapar.

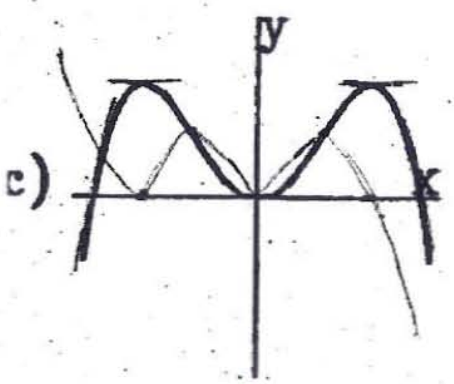
[16] Emma fortalde at grafen skulle gå gjennom origo sjølv om ho teikna den høgare oppe.

Intervjuar:	Nei men eg skjønar kva du meiner.
Emma:	(Arbeider) *sånn* // vil han gå.

Ein ser nok ein gong at derivasjonsteknikken gjer at ho er i stand til å løyse oppgåva, medan det er potensielle konfliktar mellom bilete når oppgåva skal løysast grafisk.

Oppgåve 3: Teikna grafen til den deriverte (fjerdegradsfunksjon).

Det er vanskelegare å finna funksjonsuttrykket til denne grafen. Emma kjem likevel fram til ein graf som er nesten korrekt.



Figur 18: Emma teiknar grafen til $f'(x)$.

Ho tek utgangspunkt i nullpunkta. Dei finn ho ved hjelp av tangentar. Vidare prøver ho å skissera grafen mellom desse. Grafen stemmer ikkje mellom fyrste og andre nullpunkt og det kan virka som at ho har eit bilete av at vendepunkt på graf fører til *toppunkt* på grafen til den deriverte. Det viser at ho ikkje er heilt trygg på den andrederiverte. Tidlegare har ho argumentert for at når grafen stig i vendepunktet fører det til eit toppunkt. Likevel får ho to toppunkt i grafen til den deriverte, sjølv om den opphavlege grafen søkk i det eine vendepunktet.

Emma:	(Arbeider) uansett / og da skal den gå her / og det vil den gjøre også her / for der er det et bunnpunkt / så den har i hvertfall tre nullpunkter / og så her / så stiger / han // veldig kraftig her / her har han ett / ett vendepunkt // det har han også her // (utydelig) her er jo ikkje noe vendepunkt på slutten her / der går han jo bare nedover.
Intervjuar:	Mm.
Emma:	Og her går han oppover.
Intervjuar:	Ja.
Emma:	Og / vendepunktene / til / for toppunkt / i den deriverte / så da blir det toppunktet *her* / (arbeider) da må det gå / sånn / sånn / sånn / sånn!

I tillegg kjem den potensielle konflikten me såg i linje 552 – 554 fram att. Emma har eit bilete av at den deriverte ikkje kan søkka når den deriverte er positiv. Difor er ho usikker på om ho har teikna rett før fyrste nullpunkt.

Intervjuar: Viss du ser / på grafen / korleis er grafen / *før* toppunktet / altså det som vil vera nullpunkt [på

Emma: [Der stiger han

Intervjuar: Der stig han heile tida.

Emma: Ja / så der vil / eehh.

Emma: Den deriverte være positiv?

Intervjuar: Der vil den deriverte vera positiv sant?

Emma: Og da kan ikke han *synke* her he-he-he.

Dette tek me ei lang runde på[17], og Emma forstår tilsynelatande at den deriverte kan søkka sjølv om den er positiv (eit begrepsbilete som ikkje er i konflikt med definisjonen). No klarer ho på eigenhand å teikna resten av grafen korrekt.

Intervjuar: Korleis er grafen til / y då?

Emma: Den / synker.

Intervjuar: Den søkk ja / korleis vil den *deriverte* vera då?

Emma: Da vil jo den // være negativ.

Intervjuar: Mm.

Emma: Da skal den gå *under* og opp igjen da?

Intervjuar: Kan virke slik.

Emma: (Arbeider) sånn?

Intervjuar: Mm.

Emma: (Arbeider) og så her stiger han / så da skal da må den være over null.

Det er vanskeleg å seia om det er biletet av at vendepunkt på $f(x)$ fører til toppunkt på $f'(x)$, eller om det er biletet av at den deriverte ikkje kan søkka når den deriverte er positiv som gjer at ho skisserer galt. Kanskje er begge to med på å stadfesta at den fyrste skissa er rett.

Oppsummering av intervju med Emma

Emma svarte rett på alle oppgåvene på den skriftlege testen. Likevel viser det seg at oppgåvene i intervjuet fell vanskeleg. Det kan virka som at dei framkalla begrepsbileta i samband med grafisk derivasjon ikkje er til god nok hjelp når ho skal løysa denne type oppgåver.

Me ser at Emma *til dels er avhengig av funksjonsuttrykket*. Mellom anna kjenner ho att parabelen som x^2. Dersom ho kan tenkja algebraisk, nytta derivasjonsprosessen vert

[17] Vedlegg 7.4.1, line 685 – 768.

oppgåvene lettare. *Når ho har funne funksjonsuttrykket er ho derimot ganske trygg.* Ho klarer difor å nytta seg av informasjonen ho får frå denne prosessen. Mellom anna ser ho at $\left(x^2\right)'' = 2$. Difor er den andrederiverte positiv for alle x i det tilfellet.

Når ho ikkje finn funksjonsuttrykket, prøver ho ofte å teikna grafen til den deriverte. *Bileta topp- og vendepunkt er ofte utgangspunkt for å teikna grafar.* Det er likevel to punkt som gjer at ho har vanskar med å skissera $f'(x)$. For det fyrste er ho *ikkje trygg nok på begrepsbileta sine.* Det kan sjå ut som at dei ikkje er kognitive einingar for Emma. Me kan sjå på biletet av at når grafen stig i vendepunktet, vil grafen til den deriverte ha eit toppunkt. Dette biletet er ikkje i konflikt med definisjonen, men for Emma vert det nokre gonger berre faktakunnskap som ho ikkje klarer å dra nytte av. Ein ser og at *nokre av begrepsbileta er i konflikt med definisjonen.* Ho veit at der $f(x)$ har toppunkt vil den deriverte vera null. Me finn døme på at dette vert tolka som at den deriverte har toppunkt i null (line 37 – 38).

Ei *biletleg tolking av grafen* spelar også inn når ho skal teikna grafen til den deriverte. Ho har bilete av at $f'(x)$ må søkka når $f(x)$ søkk (mellom anna figur 14 og 15), eller at når den deriverte er positiv kan ikkje grafen søkka (line 681 – 683). Her ser me likevel at den biletlege tolkinga fører til ein kognitiv konflikt. Den biletlege tolkinga av grafen vert såleis ein kognitiv konfliktfaktor.

Emma har kontroll på tangentar og *forstår kva den (fyrste)deriverte til ein funksjon er.* Ho set inn tangentar i nødvendige punkt og les av stigninga (til dømes line 99 – 128). Ho nyttar derimot ikkje tangentar som eit hjelpemiddel til å vurdera stigninga før ho vert oppfordra til det.

Emma gjorde det som nemnt sterkt på den skriftlege testen, men får problem med å løysa ein del av oppgåvene i intervjuet. Ho har få kognitive einingar og røter, "Grafspråket" vert ofte eit språk av 2. orden. Dersom ho kan tenkja algebraisk vert det lettare. Fyrst og fremst ser ein at ho har problem med å visualisera den andrederiverte, og at ho meiner at grafen til den deriverte ikkje kan søkka når den deriverte er positiv. Samstundes ser me at det i møte med visse problemstillingar vert nytta eit begrepsbilete som stemmer med definisjonen, medan andre tilsvarande problemstillingar vekker eit begrepsbilete som ikkje er korrekt. Ho har på mange måtar eit rikt begrepsbilete (kvantitativt sett, med tanke på de framkalla begrepsbileta), men det kan sjå ut som at ho ikkje har klart å gjera fakta om til kognitive einingar. Mellom anna klarer ho ikkje å nytta eit grafisk bilete av den andrederiverte, eit bilete som kunne vore eit godt hjelpemiddel.

4.2.2 Intervju med Markus

Oppgåve 1: Kva graf har alle eigenskapane?

Markus treng ein repetisjon på kva den deriverte er[18]. Etter repetisjonen finn han umiddelbart at det er graf A som er riktig svar.

Markus: Den er større enn null // (Tenker) det betyr altså at han / *øker* i / null.

Intervjuar: Mm.

[18] Vedlegg 7.4.2, line 1 – 109.

Markus: Og i x er lik null og minker i x er lik en.

Intervjuar: Mm.

Markus: Da er han er det *den* da?

Han vel graf A grunna at den held for dei to fyrste eigenskapane, men han vurderer ikkje den siste eigenskapen. På oppfordring utelukkar han dei andre grafane etter tur.

E vert utelukka grunna den andrederiverte.

Markus: Men den *andre*deriverte der / den øker jo borti her så.

Intervjuar: Den andrederiverte i graf E?

Markus: Den er positiv her / mellom.

Han ser at den andrederiverte er positiv på den fyrste delen av grafen grunna krumminga[19]. Han har difor ei visualisering av den andrederiverte som kan nyttast til å avgjera om det er rett graf.

Graf D og C vert utelukka grunna dei to fyrste eigenskapane

Markus: Ja for den *her* er jo / heilt bare negativ hele veien.

Intervjuar: Mm.

Markus: Både for null og x er lik den.

Intervjuar: Mm det er riktig / så då utelukker du graf D grunna?

Markus: På grunn av at / den deriverte / av null ikke er / større enn null

. .

. .

. .

Markus: Cen / der // der er den *lik* null.

Intervjuar: Mm.

Markus: Så da kan det ikke være den.

Me ser at Markus nyttar eit begrepsbilete av den deriverte som stemmer med definisjonen for å utelukka to av grafane. Vidare finn han at graf B ikkje stemmer for nokon av eigenskapane

Markus: Ja // her er den deriverte / mindre enn null der / og større enn null der.

Intervjuar: Mm.

Markus: Ja / og så er den andrederiverte / den er positiv.

Intervjuar: Ja.

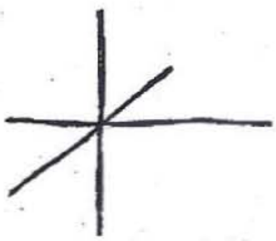
Markus: Så da må det være A.

[19] Vedlegg 7.4.2, line 54 – 57.

Ingen av dei framkalla begrepsbileta er i konflikt med begrepsdefinisjonen. Markus har kontroll over den deriverte og den andrederiverte og nyttar umiddelbart den/dei eigenskapan(e) som utelukkar eller stadfestar grafar.

Oppgåve 2: Teikna grafen til den deriverte (parabel).

Markus teiknar umiddelbart korrekt graf:



Figur 19: Markus teiknar grafen til $f'(x)$.

Markus: (Arbeider) Nullpunkt der i alle fall så da / det er et toppunkt / nei / det er et bunnpunkt på grafen til / f av x / nei! den *deriverte* / av f av x.

Intervjuar: Så i x er lik *null* så vil han ha eit null / vil den deriverte ha eit nullpunkt / nei eit [botnpunkt.

Markus: [Et bunnpunkt a / og så minker han / fram til null / og øker etterpå.

Intervjuar: Mm.

Markus: (Arbeider) men jeg er ikke helt sikker på hvordan den ser ut i hvert fall / men // det skal være *negativ* / foran / så da blir det noe sånt et eller annet.

Intervjuar: Ja han er negativ før null og så?

Markus: Og så er han positiv etter / null.

Det kan sjå ut som at Markus rotar litt med om det er botnpunkt på grafen eller på grafen til den deriverte, men dette vert oppklara litt seinare i intervjuet[20]. Ein legg merke til at Markus ikkje løyser denne oppgåva ved å dra nytte av at grafen er ein parabel (og at det er lett å finna funksjonsuttrykket). Etter eige utsegn er det like lett å finna grafen til den deriverte sjølv om ein ikkje har funksjonsuttrykket. Det tyder på at Markus har fleire begrepsbilete som han effektivt kan nytta og at han nyttar det biletet som til einkvar tid er passande.

Markus: Det er en sånn x i andre

Intervjuar: Ja.

Markus: Parabelfunksjon.

Intervjuar: Så viss det hadde vore / ein / viss det hadde stått ein funksjonsverdi der så hadde oppgåva vore? / korleis hadde oppgåva vore då? / lettare eller vanskelegare?

Markus: Nei at det tror jeg ikke hadde.

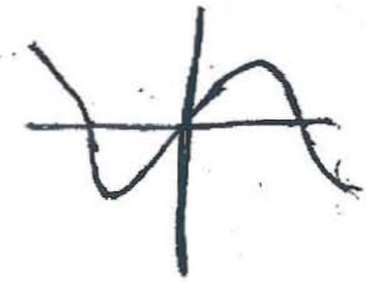
Intervjuar: Det var [like.

[20] Vedlegg 7.4.2, line 212 – 232.

Markus: [Spiller ingen rolle egentlig.

Oppgåve 3: Teikna grafen til den deriverte (fjerdegradsfunksjon).

Markus teikna også her korrekt graf.



Figur 20: Markus teiknar grafen til $f'(x)$.

Han finn nullpunkta, les av stigninga til grafen i intervalla mellom nullpunkta, og teiknar opp grafen[21].

Oppgåve 4: Oppgåve 7 på prøven

Markus svarte feil på to av spørsmåla på denne oppgåva på den skriftlege testen. No er han derimot ikkje i tvil og svarer korrekt utan å nøla.

Intervjuar: Kikke litt på / den / siste oppgåva og / den skulle vera med for å vera litt / vanskeleg / så på figuren her som sagt så er det den *deriverte* som er vist / og at den funksjonen den høyrer til det er / viser salet av ei ny mattebok dei fyrste åra / då spør eg fyrst a / kva viser / grafen til den deriverte her?

Markus: Mm den viser hvor mye det / om endringer i salget.

Intervjuar: Mm.

Markus: Om de selger mer eller mindre enn / ja.

.
.
.

Intervjuar: Ja / så viss me då / tar me kan gå vidare det er muleg at du svarte på dei men b / kva år er salet på topp?

Markus: Det er i år fem.

Intervjuar: Og det på grunn av at?

Markus: At da har det et toppunkt grafen til f av x / siden [da

Intervjuar: [ja.

Markus: [den deriverte er null.

Intervjuar: Mm / eehm oppgåve c då når auker salet mest?

[21] Vedlegg 7.4.2, line 264 – 311.

Markus: Det må være på tre det da.

. .

. .

. .

Intervjuar: At det på tre / det er heilt rett og / og viss me ser på / grafen til den deriverte / altså når aukar salet mest? / viss du hadde hatt den opphavlege grafen / korleis ville / kurva sett ut der salet auka mest?

Markus: Da ville da ha / krummet / krummet ganske masse.

Intervjuar: Ho ville vore brattast.

Markus: Mm.

Intervjuar: Og når / grafen er brattast / korleis er den deriverte altså viss du tenker viss du reknar ut stigningstalet i eit punkt? / korleis vil den vera då viss kurva er veldig bratt?

Markus: Da vil det være et høyt stigningstal.

Markus har eit tilfredsstillande bilete av kva den deriverte viser, han nyttar eit bilete av at $f(x)$ har toppunkt når $f'(x)$ er null, og finn at salet difor er på topp i år fem. Vidare veit han korleis $f(x)$ ser ut der salet aukar mest. Endå eit begrepsbilete som gjer at han kan løysa oppgåvene grafisk. Eg prøver difor å utfordra han med ei oppgåve om den formelle definisjonen.

Oppgåve 5: Definisjonen til den deriverte

Intervjuar: Eehm // sat og lurte på / skal me sjå / viss eg tek eit ark // hugsar du // viss du skal forklara meg / definisjonen på den deriverte.

Markus: Øøja / den / den som har en helt syk formel med masse xer og delta og sånn?

Intervjuar: Mm / så du koplar det til ein formel?

Markus: Ja.

Intervjuar: Ja / den er litt / hugsar du den slik i hovudet?

Markus: Nei.

Intervjuar: Klarer du å forklare det på nokon annan måte?

Markus: Jass.

Intervjuar: Viss eg ber deg teikne ein graf og visa det til meg.

Markus: Det er / jeg har lært et eller annet der ja

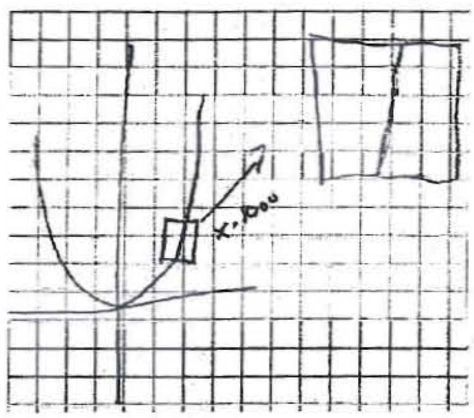
Intervjuar: (Arbeider) no berre teiknar eg dette er berre ein heilt slik vilkårleg / graf då / øøhm / definisjonen på den / deriverte / i eit punkt på den grafen / kva det vil vera? / viss du ikkje / tenker / slik formel då.

Markus: Det er vel hvor mye den / eller hvor mye den forandre seg / han stiger / så det er tangenten til / grafen i det punktet / for eksempel der så er det der er den deriverte.

Me ser at Markus ikkje har memorert definisjonen til den deriverte, men han klarer å gje uttrykk for kva den er på ein meir uformell måte. Ein kan seie at den personlege begrepsdefinisjonen ikkje er den same som den formelle, men Markus sin personlege begrepsdefinisjon er likevel ikkje i konflikt med den formelle.

At Markus er trygg på tangentar og den deriverte vert stadfesta når han får spørsmål om lokal linearisasjon.

	går / no teiknar eg sånn cirka x i andre då / var litt bratt sikkert og så viss du tenkjer deg at eg tek eit utsnitt der / sant? / og så forstørrar eg det opp / kanskje tusen gonger / slik at du får same ruta opp og forstørrar tusen gonger / klarer du å tenke deg korleis grafen vil / sjå ut?
Markus:	Ja han vil nå vel være / bortimot rett nesten / vet ikke jeg / (arbeider) noe sånn?
Intervjuar:	Mm / så vil det vera ei rett line altså?
Markus:	Ja bortimot.



Figur 21: Markus teiknar lokal linearisasjon.

Det hadde vore nyttig med nokre oppfølgingsspørsmål om dette, men det vart diverre ikkje gått nærare inn på i intervjuet. Svaret er i alle fall korrekt og kan tyde på at lokal linearisering kan vera ei kognitiv rot.

Oppsummering av intervju med Markus

Intervjuet tydar på at grafar og grafisk derivasjon er eit språk av 1. orden for Markus. I møte med oppgåvene finn han raskt nødvendig informasjon i grafane. Dei begrepsbileta som vert vekka i møte med oppgåvene leier Markus til det korrekte svaret.

Markus *vel grafiske løysingar* og er på den måten *ikkje avhengig av funksjonsuttrykket*. Mellom anna ser me at han i oppgåve 1 nyttar dei to fyrste eigenskapane til å utelukka tre av grafane, og den siste eigenskapen til å utelukka den siste. Når han skal teikna den deriverte til ein parabel teiknar han ei rett line utan å leita etter funksjonsuttrykket. Grafspråket er tydelegvis eit språk av 1. orden. Han har såleis *gode visuelle bilete både av den fyrste og den andrederiverte.* Desse bileta er ikkje i konflikt med definisjonen. Dei er heller ikkje berre faktakunnskap men kognitive einingar/røter. Han har samstundes *oversikt over eigenskapane til den fyrste- og andrederiverte til ein funksjon.* Mellom anna veit han at når grafen til den deriverte har eit toppunkt, er $f''(x)$ lik null og $f(x)$ har brattast stigning. Sjølv om han ikkje kan reprodusera den formelle definisjonen til den deriverte (grenseverdien), har han eit personleg bilete av den som ikkje er i konflikt med definisjonen. Han har ei god forståing av kva den deriverte er, og det er viktigare enn å pugga formlar.

Det som likevel er mest påfallande er at Markus er *svært trygg når han løyser oppgåvene.* Han vel (grafiske) løysingar som er effektive og han nyttar tilsynelatande ikkje begrepsbilete som er i konflikt med definisjonen. *Han har eit rikt og kompakt nettverk av kognitive einingar* og kan difor effektivt løysa dei oppgåvene han møter.

4.2.3 Intervju med Andreas

Oppgåve 1: kva graf har alle eigenskapane?

Andreas tek utgangspunkt i dei to fyrste eigenskapane. Han koplar den deriverte og stigningstalet til grafen. Eit begrepsbilete som høver med definisjonen.

Andreas: Nei nei okei / Ååh (mumler) nei ehm // ja! / når den deriverte er positiv.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så er altså stigningstallet positivt.

Intervjuar: Mm

Andreas: Når den deriverte er negativ er også stigningstallet negativt / så hvis f derivert av null er større enn / eller er *positiv* / så betyr det at stigningstallet er / positivt i punktet null.

Intervjuar: Ja.

Andreas: Hvis f derivert av *en* er mindre enn null så må den være negativ i punktet en.

Med hjelp av dette vert graf B og D utelukka. Begge grunna av at den deriverte ikkje er positiv for $x = 0$. Han ser og at dei andre grafane er positive for $x = 0$.

Andreas: Ja den så ikkje spesiell / B så ikke spesielt lovende ut.

Intervjuar: Nei.

Andreas: Men / eeh / og / det gjorde ikke D heller.

Intervjuar Nei.

Andreas: Så det er ikke de to.

Intervjuar: Ikkje D eller B nei.

Andreas: Nei og de andre er positiv.

Graf C vert derimot utelukka grunna at den er *positiv* for $x = 1$.

Andreas: Mens den er positiv i en.

Intervjuar: Mm / det er [C er positiv

Andreas: [Så da kan det ikke være C.

Det er usikkert kvifor han tek feil på akkurat denne eigenskapen. Dersom Andreas tenkjer på at $f(x)$ ligg over x-aksen, så kan det vera eit døme på eit begrepsbilete som er i konflikt med definisjonen. Då har Andreas i tilfelle to potensielle konfliktfaktorar, som ikkje vert kognitive konfliktar av di dei vert aktivert til ulik tid. Dette vart det diverre ikkje gått nærare inn på i intervjusituasjonen.

Når han skal avgjera om det er graf A eller graf E som er den rette grafen vert det tydeleg at han har vanskar med å visualisera den andrederiverte.

Andreas: Og Een er negativ så det ser bra ut / så da er det enten A eller E.

Intervjuar: Enten A eller E.

Andreas: Og når / og / skal vi se / hvis han dobbeltderiverte så skal den altså være negativ hele veien / altså stigningstallet skal være negativt / stigningstallet til stigningstallet skal he he / skal være negativt / eeh / skal vi se // da vil eg // hmm / da er det vel A da.

Intervjuar: Det er A ja.

Andreas: Ja.

Intervjuar: Mm / kvifor er det då ikkje E?

Andreas: Fordi at / ja / den er jo / altså det er jo forskjellig / altså stigningstallet *her* / er positivt.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Og så er det negativt / nedover her.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så er det null på toppen.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Og / ja / ehm / ja / så der / vet ikke hvordan jeg skal si / det altså // ja ehm / det / det endrer seg? / eller det er ikke det er i alle fall ikke negativt for alle x.

Intervjuar: Nei.

Andreas: Ehm vet ikke hvordan jeg skal forklare.

Andreas går no for graf A, men klarer ikkje å gje ei fullgod forklaring på kvifor det ikkje kan vera E. Den dobbelderiverte vert (heilt korrekt) referert til som stigningstalet til stigningstalet. Samstundes argumenterer Andreas for at stigningstalet (til grafen E) endrar seg. Då er det ikkje negativt for alle x. Men det er også tilfelle for graf A. Difor er ikkje det eit argument for å utelukka graf E. Det kan sjå ut som at Andreas ikkje har eit godt bilete av kva andrederiverte til ein graf er. Han gjer eit nytt forsøk på å tolka kva den andrederiverte er, til liten nytte.

Andreas: Ja / så må jo / eller hvis jeg sier det sånn da // ja altså / ja okei hvis den andrederiverte er positiv da så må den jo stige for alle / så må / så må / ehm / ja så må stigningstallet for alle / f derivert av x være positivt.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Og / hvis det skal skje så må // mmm.

Han har faktakunnskap om $f''(x)$. Stigningstalet til $f'(x)$ må vera positivt dersom den andrederiverte er positiv for alle x. Dette er likevel ikkje noko han klarer å dra nytte av i denne samanhengen. Det som i dette tilfellet vert forløysande er eit tips om krumminga til grafen.

Intervjuar: Hugsar du noko om eeh / ehm / *krumminga* til grafen / er det eit ord som / de nytta?

Andreas: Ja det var sånn hul side opp og hul side ned?

Intervjuar: Mm.

Andreas: Ja og den der har hul side ned.

Krumminga til grafen er eit døme på noko som kan vera ei kognitiv eining for Andreas. Krumminga til grafen (eller hul side opp/ned) vert eit verktøy til å tolka den andrederiverte i ein grafisk kontekst. Men det var ikkje Andreas sjølv som introduserte krumminga. Det var ikkje eit begrepsbilete som vart vekka når han såg grafen.

Oppgåve 2: teikna grafen til den deriverte (parabel)

Andreas stadfestar at han har oversikt over samanhengane mellom graf, den deriverte og stigningstalet til grafen. Begrepsbiletet kan nyttast til å trekka ei riktig slutning.

Andreas: Ja altså da har nullpunkt / *her*.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Og så har den *negativt* / stigningstall / eller / ja liksom / den stiger *etter* / her.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så da er stigningstallet positivt.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Altså på / ja positive del av x aksen.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Mens på den negative del av x aksen den er negativ / eller stigningstallet er negativt.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Og hvis den deriverte da skal vise stigningstallet / til / *grafen* så må den være positiv her og negativ der.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Og // vet ikke blir han / lineær? / eller blir det en rett linje? // hmm.

Denne oppgåva løyser Andreas grafisk. Han ser på grafen korleis stigningstalet endrar seg og meiner at resultatet vert ei rett line. Når $f'(x)$ skal skisserast møter likevel Andreas eit problem. Han ønskjer at grafen til den deriverte skal likna meir på den opphavlege grafen. Ei biletleg tolking av grafen fører til ei konflikt.

Andreas: Ja / for det at // for det at når / la meg se / hvis den deriverte blir vel // ja men hvis jeg har den sånn her så blir han jo positiv.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Og det er jo feil / det *kan* han jo ikke være / men den er jo positiv *her* da // ehm.

Intervjuar: Så du tykkjer at lina ser fornuftig ut i?

Andreas: [Nei.

Intervjuar: [Positiv / nei.

Andreas: Det jeg synes jeg ser her nå er / hvorfor den ikke blir veldig lik den som er der.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Den *må* jo nesten bli det.

Intervjuar: Grunna at?

Andreas: Fordi at / her er / her ser du at stigningstallet er [*negativt* hele veien

Intervjuar: [Mm / mm.

Andreas: Og så er den *positiv* på hele veien men / ja / (arbeider) så da må den jo bli noe sånt / noe som ligner i alle fall.

Andreas teiknar no ein graf som liknar den opphavlege. Han har eit bilete av at grafen til den deriverte må søkka når den deriverte er negativ. Dette biletet kjem i konflikt med det tidlegare vekka biletet som gav ei stigande, rett line. Sjølv om han vert gjort merksam på at dette er ein parabel løyser ikkje det konflikten.

Intervjuar: Liknar den på ein graf du har sett før?

Andreas: Ja x i andre.

Intervjuar: Liknar han på x i andre?

Andreas: Ja.

Intervjuar: Så viss du / set opp x i andre.

Andreas: Altså deriverer den?

Intervjuar: Og deriverer den.

Andreas: Så blir det to x.

Intervjuar: Så får du to x.

Andreas: Mm.

Intervjuar: Og viss du teiknar opp to x / korleis vil den gå?

Andreas: Det blir jo en rett linje opp sånn.

Intervjuar: Mm / og / det vil verta det vil verta slik du har teikna han.

Andreas: Ja.

Intervjuar: Mm / men det høyres ikkje fornuftig ut?

Andreas: Nei jeg synes ikke det // egentlig / for det at den er jo / sånn som *denne* grafen her da blir.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så / ja / så er jo dette / denne er jo *negativ* / og jeg synes ikke den ser spesielt negativ ut.

Intervjuar: [Nei

Andreas: [Bortsett fra at den er i den / bortsett fra at den er negativ for x verdiene *her* da / og y verdiene her.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så er han ja / og den er i positiv / så den *øker* jo og jeg liker ikke det helt.

Det er tydeleg at biletet av at grafen til den deriverte ikkje kan auka når den deriverte er negativ, er i konflikt med at $f'(x)=2x$, noko som gjev ei stigande rett line. Etter ei lengre forklaring[22], der det vert fokusert på at dei stigningstala ein kan lesa av grafen til $f(x)$ finn ein att som *y*-verdiar på grafen til $f'(x)$ (eller at den deriverte er ein *funksjon* av *x*), godtek Andreas den rette lina. Problemet, i følgje Andreas sjølv, er at han blandar dette med den andrederiverte (noko Andreas også nemnte i innleiinga).

Andreas: Vet ikke helt hva jeg tror / ehm // skal vi se // nei vent! // (utydeleg) // nei for at jeg / jeg blander et eller annet sånt / er det noe som heter / vendepunkt eller noe sånt?

Intervjuar: Ja.

Andreas: Og det er / det må være *her* eller noe sånt / begynner han å stige / et eller annet sånt?

. .

. .

. .

Andreas: Jo det er jo / når du forklarer så er det jo helt logisk / men / jeg vet ikke / jeg blander veldig med *dette* og så / dette med hul side opp og ned som [vi hadde i dobbelderiverte

Intervjuar: [Mm / mm.

Andreas: Det blander jeg veldig.

Det kan vera fleire grunnar til at Andreas blandar med den andrederiverte. I den skisserte parabelen går den deriverte frå å vera negativ til å vera positiv. I ein tredjegradsfunksjon til dømes kan den deriverte gå frå å vera aukande til minkande. Punktet (0,0) i parabelen kan då få rolla til vendepunktet i tredjegradsfunksjonen. Samstundes er parabelen relativt lik teikningane ein nyttar for å markera hol side opp/ned i eit forteiknskjema.

Oppgåve 3: Oppgåve 4 på prøven

Den neste oppgåva stadfestar at Andreas har eit bilete av at når grafen til $f(x)$ søkk vil og grafen til $f'(x)$ søkka, ei biletleg tolking av grafen.

[22] Vedlegg 7.4.3, Line 356 – 424.

Andreas: Nei vent // mmm skal vi se / ja! / nei da vil jeg tro at det er fire.

Intervjuar: Mm.

Andreas: For det at / ja /eller okei hvis vi tar det litt sånn / fra begynnelsen av / så er jo den deriverte har altså negativ / ehm / ehm negativt sti / nei vent ja / stigningtall? / eeh / eller okei / det den deriverte sier er at *grafen* har negativt stigningstall fra / x er lik null til x er lik tre.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Og *her* på / denne nummer tre her / så *øker* han jo.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så da kan det ikke være *den* / og det ser veldig ut som den øker i to og sånn.

. .
. .
. .

Andreas: Graf fire er den eneste som har negativt stigningstall fram til / eh punktet da tre.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så da *må* det jo være / den

. .
. .
. .

Andreas: Stigningstallet til grafen er null mellom tre og fem / ser det ut som / og / ja / på graf *to* så *stiger* han jo / mellom tre og fem.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så det er jo positivt stigningstall / mens / på graf tre og fire så er jo / stigningstallet null ser det ut som.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så da / kan det jo være en av de to / ehm // ja vent da // ja og den er jo ikke null i punktet seks så / så det ser mørkt ut for toeren / ehm skal vi se / i / ja / den skal jo være negativ fra fem og utover / stigningstallet skal være negativt for fem og utover.

Andreas gav tidlegare i intervjuet uttrykk for at han forstod at grafen til den deriverte kan stiga sjølv om den deriverte er negativ. Det begrepsbiletet vert likevel ikkje vekka her. Kanskje Andreas no har to bilete der det tidlegare dominerer (begrepsbiletet er ikkje tilfredsstillande akkommodert). Etter ein ny gjennomgang av dette ser Andreas samanhengane og gjev rett svar.

Intervjuar: Det er det du må tenke litt baklengs / viss du ser / her igjen / eeh / viss eg spør deg / om *grafen* sjølve f derivert av x ikkje om stigningstalet men om *grafen* er positiv eller negativ / frå mellom null og tre

Andreas: Ja den er vel negativ.

Intervjuar: *Stigningstalet* er negativt / for det at den går nedover.

Andreas: Å ja / ja men den er på riktig side av aksen.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så den er [positiv.

Intervjuar: [Det er der den det er lett å verta litt lurt / stigningstalet er negativt / men den *deriverte* er faktisk positiv / mellom null og tre.

Andreas: Men med en gang den kommer under / x aksen her borte så er den negativ.

Intervjuar: Då er den *deriverte* negativ.

Andreas: Betyr det at den er positiv for *alle* her?

Intervjuar: Heilt fram til.

Andreas: Helt frem til den kommer tilbake.

. .
. .
. .

Andreas: Ja da er det jo toeren.

. .
. .
. .

Intervjuar: Mm og så det siste litt interessante punktet *der* / er det null.

Andreas: Ja men ja / sånn i utgangspunktet så burde jo // vet ikke / det *ser* jo ut som ett *toppunkt* dette her.

Intervjuar: Det er eit toppunkt ja.

Andreas: Ja og men / [ja han er *positiv* her ja / det er sånn det er / ja og så er han negativ her

Intervjuar: [Her er // mm.

Andreas: Ååh.

No ser det på nytt ut som at Andreas forstår at grafen til $f'(x)$ viser stigningstalet til $f(x)$. Difor ser han no at den deriverte er positiv før $x = 6$ og negativ etter. Det gjev eit toppunkt for $x = 6$ på $f(x)$.

Oppgåve 4: Oppgåve 7 på prøven.

Allereie på den skriftlege testen viste det seg at Andreas hadde problem med å tolka grafen til den deriverte. Toppunktet til grafen vart tolka som at salet var på topp, og salet auka mest når grafen var brattast. Ei biletleg tolking av grafen. Etter å ha arbeida med tilsvarande oppgåver i intervjuet kan det sjå ut som at begrepsbiletet ikkje lenger er i konflikt med definisjonen.

Andreas: Altså stigningstallet til f av x er jo *positivt* helt til år fem / hvis vi skal ta [disse nye reglene vi har lært nå i dag.

Intervjuar: [Mm.

Andreas: Ehm / og det vil jo da si at / eeh / grafen f av x er / positiv og at / det selges / mer og mer bøker fram til år fem.

Intervjuar: Mm det er heilt riktig.

Andreas: Mens etter år fem så er stigningstallet *negativt* / på en litt variert måte ser det ut som men likevel.

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så etter år fem / så minker salget.

Intervjuar: Ja / det er heilt korrekt / så då eeh / (utydeleg) / kva år vil salet vera på topp?

Andreas: I år fem.

. .

. .

. .

Intervjuar: Og kvifor vil det vera i fem?

Andreas: For det at i punkt fem så blir / ehhm /så går stigningstallet fra å være positivt til å være negativt.

Intervjuar: Mm / og du vil då få eit toppunkt.

Andreas: Ja / men *da* i år *tre* så lurer jeg litt på hva som skjer her / da må jo vent / det må vent den / da må / Da må / selve *stigningen* må være brattest i år tre?

Intervjuar: Mm.

Andreas: Så de *øker* salget mest / men det er ikke der de har toppen av.

Intervjuar: Heilt korrekt.

Andreas: Økingen?

Intervjuar: Ja / så når auker salet mest?

Andreas: Det er i / år tre

Intervjuar: Ehe.

Andreas: Og så er det *minst* i år syv

No er det tydeleg at Andreas får hjelp av bilete som ikkje er i konflikt med definisjonen. Han klarer sjølv å finna ut at det er sjølve stigninga som er brattast i år tre (line 872). Og ser at salet aukar minst (eller minkar mest) i år sju.

Oppsummering av intervju med Andreas

Andreas har ei bra oversikt over samanhengane mellom graf, den deriverte og stigningstalet til grafen. Likevel vert det tydeleg at han har begrepsbilete som er i konflikt med begrepsdefinisjonen, og som gjer at han får vanskar med nokre oppgåver.

Det er tydeleg at Andreas har ei *biletleg tolking av grafen*. Dette biletet påverkar i stor grad når han skal tolka oppgåver grafisk. Me ser at han forkastar ei riktig løysing grunna dette biletet (line 241 – 267). I den oppgåva (oppgåve 2) ser me at det er ei kognitiv konflikt mellom to ulike bilete. I oppgåve 3 fører den biletlege tolkinga til feil svar, men der er det inga kognitiv konflikt då det ikkje vert vekka eit anna begrepsbilete samstundes. Det ein kan merka seg er at me hadde ein gjennomgang av den biletlege tolkinga før oppgåve tre, der Andreas tilsynelatande forstod at den biletlege tolkinga var feil. Likevel vert det same biletet vekka på nytt. Slike misoppfatningar kan vera svært resistente mot påverknad (Orton, 2004).

Me ser likevel at Andreas har *god kontroll på den (fyrste)deriverte til ein funksjon*. I oppgåve 1 ser han på stigninga i dei aktuelle punkta og utelukkar kjapt tre av grafane. Han les og av stigninga til parabelen i oppgåve 2. Han har derimot større *problem med å forklara den andrederiverte*. Han seier at $f''(x)$ er stigninga til stigninga og at når $f''(x)$ er positiv så er stigninga til $f'(x)$ positiv. To bilete som ikkje er i konflikt med definisjonen, men som han likevel ikkje klarer å dra nytte av.

Difor har Andreas *problem med å tolka den deriverte grafisk*, sjølv om han har fleire begrepsbilete i samhøve med definisjonen. (Grafspråket er eit språk av 2. orden for Andreas). Likevel *prøver han ikkje å finna funksjonsuttrykk*, sjølv om grafane er lett å kjenne att. Han prøver å løysa oppgåvene grafisk, men lukkast ikkje alltid grunna potensielle konfliktfaktorar som nokre gonger også skaper konflikt.

Me ser likevel ei utvikling i slutten av intervjuet. Når Andreas for andre gong vert konfrontert med at $f'(x)$ ikkje nødvendigvis stig/søkk, sjølv om $f(x)$ stig/søkk, ser me ei endring. Oppgåve 7 frå prøven, som var feil, vert no løyst med "...dei nye reglane..." (line 835 – 836). Han klarer no å dra nytte av begrepsbilete som ikkje er i konflikt med definisjonen. Grafen til $f'(x)$ er i dette tilfellet eit språk av 1. orden. Kanskje bileta no er kognitive einingar.

4.2.4 Intervju med Jonas

Oppgåve 1: Kva graf har alle eigenskapane?

Jonas: D.

Intervjuar: Då tenkjer du D.

Jonas: Ja.

Intervjuar: Eeeh okei og så må eg / be deg / forklara / eeh / kvifor.

Jonas: Det står her at / deriverte / eeh / av f / når x er lik null / er høyere enn null / da er den høyere enn null.

Intervjuar: Mm.

Jonas: Videre står det at den deriverte av / f / innsatt *en* skal være *mindre* enn null / da er den mindre enn null.

Intervjuar: Mm.

Jonas: I tillegg skal den *dobbel*deriverte av f av x være negativ for alle xer / og den krummer jo bare nedover / mer og mer.

Jonas sin spontane respons på oppgåva er D. Det kan her virka som at det begrepsbiletet som vert framkalla er at når grafen ligg over x-aksen er den deriverte positiv, medan den deriverte er negativ når grafen ligg under x-aksen. Det stemmer ikkje med definisjonen. Jonas nemner også ordet "krumming" saman med den andrederiverte, eit vanleg uttrykk i lærebøker for vidaregåande skule. Han finn difor korrekt at den siste eigenskapen stemmer. Det stadfestar for han at graf D er korrekt svar.

Vidare i intervjuet klarer Jonas på oppfordring å gje uttrykk for kva den deriverte til ein graf[23] er og endrar svar.

Intervjuar: Eeeh / den *deriverte* / til ein graf / kva fortel den?

Jonas: Forteller om hvordan tangentens stilling er.

Intervjuar: Mm.

Jonas: Så når / den deriverte / er positiv.

Jonas: Ja.

Intervjuar: Så vil tangenten?

Jonas: Den vil / være positiv og / grafen vil øke

Intervjuar: Grafen vil auka / det er det eg lurer på / *stemmer* det / i dette tilfellet her? / i *null* / er den grafen positiv? / eller *tangenten* vil den vera positiv? / tangenten til den grafen [der.

Jonas: [Nei selvfølgelig / ja den er // nei den vil være negativ selvfølgelig / ja / fordi at den peker negati / nedover.

Jonas har her eit bilete av eit matematisk begrep som ikkje er i konflikt med den matematiske definisjonen; Eit uttrykk for den deriverte til ein graf i eit punkt er tangenten si stilling (stigningstalet) i punktet. Når stigningstalet (til tangenten) er positivt vil grafen stiga (eller "*øke*" som Jonas seier). Jonas (samt intervjuaren) er likevel noko upresis når han nyttar orda "*positiv tangent*". Med dette biletet klarer Jonas å utelukka alternativa B og D. For å ekskludera E og C nyttar Jonas derimot eigenskapen til den andrederiverte.

Jonas: Ikke se at det er E fordi at her / *øker* jo / eh tangenten.

Intervjuar: Mm.

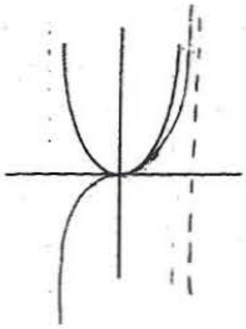
Jonas: Det blir mer og mer positiv / og så blir den negativ igjen / men her står det at den skal være negativ for alle / og det skjer jo tilsvarende her.

Språket er framleis upresist. Jonas seier at "*tangenten øker*", medan det er stigningstalet til tangenten som aukar. Dersom ein følgjer graf E frå venstre mot høgre ser ein at stigningstalet er negativt, men aukande og positivt ca. mellom $\mp x = 0{,}5$, negativt etter. Sjølv om formuleringane er noko uklare kan det sjå ut som at Jonas er i stand til å nytta tangentar som eit visuelt bilete på kva det vil seie at $f''(x)$ er negativ for alle x.

Oppgåve 2 og 3: teikna grafen til den deriverte (parabel og fjerdegradsfunksjon).

I denne oppgåva teiknar Jonas følgjande graf:

[23] "Den deriverte til ein graf" er eit uheldig uttrykk. Det er den deriverte til ein funksjon det er tale om her. Grafen er berre eitt av mange uttrykk for ein funksjon. Det kan likevel sjå ut som at Jonas forstår kva som er meint med spørsmålet.



Figur 22: Jonas teiknar grafen til $f'(x)$.

Dette vert grunngjeve med at grafen har ein asymptote[24], og då vert den deriverte uendeleg stor positiv og negativ.

Jonas: For det at her blir / tangenten // uendelig stor / nei uendelig altså / uendelig stor negativ.

Intervjuar: Mm.

Jonas: Og så blir han mindre og mindre negativ / før tangenten nærmer seg null / og det får du tilsvarende her for det at / veldig negativ / så blir han mindre og mindre og nærmer seg null / så når den har passert null eeh / nullpunktet / så begynner han å / bli mer og mer positiv / og det vil da tilsvarende skje med tangenten.

Intervjuar: Men tykkjer du då at / her ute ein eller anna plass / vil det vera eit / nok / ein rett og slett ein / sånn *asymptote*?

Jonas: Ja! / du vil ha en asymptote på begge steder.

Tangenten vert framleis noko upresist nytta som uttrykk for stigningstalet til grafen. Når grafen søkk kraftig og difor har eit stort (negativt) stigningstal seier Jonas at sjølve tangenten er "*uendelig stor negativ*". Her kan det sjå ut som at Jonas har eit "...ukontrollert bilete..." (Aspinwall, 1997) av at parabelen vert brattare slik at grafen til den deriverte etter kvart vert tilnærma loddrett. Dette fører til ein konflikt mellom begrepsbilete når eg gjer han merksam på at grafen er ein parabel.

Intervjuar: Eeh / liknar denne grafen på noko?

Jonas: Eehm / han ligner jo på ein parabel.

Intervjuar: Mm // Eehm // viss / eh viss grafen er x i andre.

Jonas: Ja.

Intervjuar: Korleis vil då den / vil den deriverte framleis vere slik? // viss dette er er x i / x i andre eg ber deg teikne grafen til den deriverte.

Jonas: Nei den deriverte vil da være mer / (arbeider) et øyeblikk / den deriverte vil da være sånn.

Intervjuar: Då vil han vera lineær.

[24] Det må merkast at ordet asymptote vert introdusert av intervjuar. Det ville vore ein kvalitativ betring om Jonas sjølv innførte dette begrepet, men linje 138 – 145 indikerer etter mi meining at det var ein asymptote Jonas tenkte på.

Jonas: Ja.

Intervjuar: Mm.

Jonas: Og det / vil den faktisk være her og.

Intervjuar: Kvifor vil han det?

Jonas: Nei vent / nei / fordi du har asymptoten så den vil ikke bli lik.

På den eine sida vekker grafen eit bilete av at stigningstalet vert uendeleg stort (negativt og positivt). Difor vil grafen til den deriverte verta tilnærma loddrett. Informasjonen om at dette kan vera ein parabel vekker derimot eit bilete av ein lineær graf[25]. Bileta er ikkje i konflikt med definisjonen, men Jonas vert forvirra av at grafen ikkje er tydeleg nok. Grafen i oppgåva vekker det eine biletet, mitt spørsmål om kva grafen liknar på vekker eit anna bilete. Det hadde difor vore interessant å sjå Jonas sin respons dersom parabelen ikkje (tilsynelatande) hadde hatt så kraftig stigning. Ein kan likevel leggja merke til at Jonas her vekslar mellom ulike begrepsbilete etter kva oppgåve han får.

Den neste oppgåva vert løyst utan problem. Jonas nyttar "*tangenten si stilling*" til å finna nullpunkta, og vurderer vidare om den deriverte er negativ eller positiv mellom nullpunkta. Språket er framleis noko upresist. Når stigningstalet til tangenten er lik null seier Jonas at stillinga til tangenten er lik null. Dette fører likevel ikkje til noko kognitiv konflikt.

Jonas: (Arbeider) da vil du fordi at tangentens stilling her er lik / null så vil du ha et nullpunkt der / her / og her i forhold til den deriverte.

Intervjuar: Mm.

Jonas: (Arbeider) ehm / og her skal den deriverte være *negativ* / her vil den deriverte være *positiv* / ehm negativ / og / positiv.

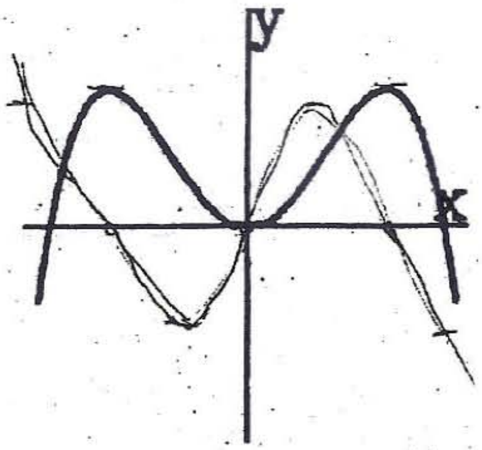
Intervjuar: Mm.

Jonas: (Arbeider) så da vil det jo / ha noe sånn som // det her.

Intervjuar: Mm / veldig bra.

Jonas: Det er vel en / fjerdegradsfunksjon?

[25] Her burde eg gått nærare inn på kvifor Jonas meiner at grafen til den deriverte vert lineær dersom $f'(x)$ er ein parabel. Dersom han t.d. nyttar funksjonsuttrykket (eg nemner i line 168 at dette kan vera x^2), er det ein annan framgangsmåte enn han har nytta tidlegare.



Figur 23: Jonas teiknar grafen til $f'(x)$.

Jonas seier og at *"den deriverte"* er negativ og positiv. No referer han ikkje lenger til tangenten, men "les" den deriverte av grafen. Dette tyder på at begrepsbiletet inneheld mykje informasjon om samanhengen mellom den deriverte og grafen til ein funksjon. Jonas veit kva det vil seie at $f'(x)$ er negativ, positiv eller null. Samstundes ser me at Jonas kjenner att funksjonen som ein fjerdegradsfunksjon, sjølv om uttrykket ikkje er gjeve. Denne grafen framkallar såleis fleire begrepsbilete. Desse er ikkje i konflikt med definisjonen og Jonas nyttar dei til å gje eit riktig svar.

Oppgåve 4: Oppgåve 7 på prøven

Intervjuar: Kva viser f derivert her?

Jonas: F derivert den viser / eehm / økningen i salget.

Intervjuar: Mm.

Jonas: Per tid.

Intervjuar: Ja / og kva år vil / sal salet vera på topp?

Jonas: Vil si at salget er på topp *her* for da har vi et nullpunkt / og når den deriverte er lik null så vil du få et ekstremalpunkt i / grafen.

Intervjuar: Mm.

Jonas: Og / siden / du også kunne få det *her* / er det mer naturlig siden det er starten på salget.

Intervjuar: Ja.

Jonas: Og så har du den / toppen på salg salget her.

Intervjuar: Mm / og kor tid vil / salet auke mest?

Jonas: Det vil nå toppunktet her / fordi at da / eeh / vet du at den deriverte / er størst / og da vil du ha brattest / salgskurve kan du si.

Måten Jonas løyser denne oppgåva på tyder på at begrepsbiletet inneheld mykje informasjon om samanhengen mellom den deriverte og grafen til ein funksjon. Han har tidlegare (line 56) vist at han veit kva den deriverte til ein graf er. Jonas fortel her at den deriverte viser korleis salet aukar (meir presist vil ein seie at grafen fortel korleis salet *endrar* seg. Det viser både auke og minke). Nullpunktet på grafen til $f'(x)$ vert lokalisert og Jonas er klar over at det gjev eit ekstremalpunkt på grafen til $f(x)$. Han kjenner også til at salet aukar mest når den deriverte er størst og verdien vert korrekt lest av grafen til $f'(x)$. Oppgåva vert lett å løysa sidan begrepsbiletet tydeligvis inneheld mange mentale bilete, prosessar og eigenskapar i samband med den deriverte.

Oppgåve 5: Lokal linearisasjon

Seinare i intervjuet vert Jonas utfordra til å sjå kva som skjer når ein forstørrar ein del av ein graf (i dette tilfellet $f(x)=x^2$), etter mønster av Tall (1985).

Intervjuar: X i andre / og så tek du å / bruker den.

Jonas: (Arbeider)

Intervjuar: Og så zoomer du endå ein gong til / fordi at du ikkje kan zooma.

Jonas: (Arbeider).

Intervjuar: Ser du kva det er som skjer med grafen?

Jonas: Ja den blir / blir selvfølgelig / den blir rettere og rettere og rettere.

Intervjuar: Mm.

Jonas: Ja.

Intervjuar: Det er grunna av det vert nesten som at du.

Jonas: Ja for at du måler / selvfølgelig / for at du finner tangenten.

Intervjuar: Mm.

Jonas: Tangenten i / punktet.

Jonas har sjølv ei god forklaring på kvifor grafen vert rettare når ein forstørrar ein del av den. Det er det same som å finna tangenten i punktet.

Oppsummering av intervju med Jonas

Det er tydeleg at Jonas har mange mentale bilete, og oversikt over prosessar og eigenskapar relatert til den deriverte til ein funksjon. Han har eit rikt begrepsbilete. Dette gjer at han er godt rusta til å løysa oppgåver som fokuserer på grafisk forståing av derivasjon.

Jonas *forstår kva den (fyrste)deriverte til ein funksjon* er og han nyttar i stor grad *tangenten* til å forklara denne. Tangenten vert ei viktig kognitiv rot i samband med den deriverte. Språket er likevel noko upresist. Han seier mellom anna at tangenten aukar, at den vert uendelig stor, og at tangenten er positiv og negativ, når det eigentleg er stigningstalet til grafen/tangenten i eit punkt på grafen som er rett nemning. Men slik han løyser oppgåvene tyder det på at han har god forståing av den deriverte til ein funksjon. Difor vert det enkelt å lesa tangenten si stilling av grafen. Han veit vidare at når grafen har eit topp- eller botnpunkt er den deriverte lik null (og motsett; når den deriverte er lik null har grafen eit topp- eller botnpunkt, avhengig av forteiknet til den deriverte før/etter nullpunktet). Ein ser og at han tolkar sjølve grafen til den deriverte korrekt. Han les verdiane av grafen og veit at dei fortel korleis den opphavlege grafen stig/søkk. Jonas har med andre ord kontroll på ulike representasjonar av den deriverte til ein funksjon. Både tangenten, symbolet $f'(x)$ og grafen til den deriverte er for Jonas berre ulike sider av det same – den deriverte til ein funksjon. Han vel oftast å løysa oppgåver ved hjelp av tangenten. Mellom anna lager han (mentale og fysiske) tangentar for å vurdera stigninga til ein graf eller teikna grafen til den deriverte. Men han er ikkje avhengig av tangentar. Grafen til den deriverte er også eit 1. ordens språk, og han finn den informasjonen han treng i denne.

Han *klarer å tolka den andrederiverte grafisk*, ofte ved hjelp av *tangenten*. Språket er upresist då han til dømes seier at tangenten vert meir og meir positiv, men han klarer å nytta tangenten som eit bilete på den andrederiverte – han argumenterer for korleis tangenten endrar seg (sjølv om det hadde vore meir korrekt å argumentera for korleis stigningstalet (til tangenten) endrar seg).

Han *vel grafiske løysingar*, sjølv om det er muleg å finna funksjonsuttrykket. Sidan han klarer å tolka den fyrste- og andrederiverte grafisk er det lett å skissera grafen til den deriverte. Ein kan seie at grafen er eit språk av 1. orden for Jonas. Han er difor *ikkje avhengig av funksjonsuttrykket for å finna grafen til den deriverte*. Samstundes som han ofte *klarer å finna funksjonsuttrykket til grafen*. Han kjenner att både parabelen og fjerdegradsfunksjonen i oppgåve 2 og 3. Likevel er han ikkje avhengig av dette uttrykket for å løysa oppgåvene.

Jonas viser i desse oppgåvene *få døme på konfliktar mellom begrepsbilete og definisjon, eller ulike begrepsbilete som er i konflikt med kvarandre*. Me ser at han i fyrste oppgåva ser ut til å ha ei biletleg tolking av grafen (line 29 – 43). Han seier at den deriverte er positiv når grafen ligg over x-aksen, og negativ når grafen ligg under x-aksen. Dette svaret vert likevel raskt forkasta når han vert minna på kva den deriverte til ein graf er, og det er ikkje noko som tyder på at dette biletet er opphav til kognitive konfliktar seinare i intervjuet.

Jonas har difor klart å gjera eigenskapane til den deriverte til noko meir enn fakta. Stigninga til grafen, den fyrste- og andrederiverte, tangentar er alle døme på bilete som ikkje berre er kjende fakta, men kognitive einingar[26].

4.2.5 Intervju med Kristian

Oppgåve 1: Kva graf har alle eigenskapane?

Kristian: (Tenkjer) // er det den?

Intervjuar: Viss du / tek for deg graf E / so tek du for deg / kan du forklare kvifor du trur det er den.

Kristian: Øøhm // den stiger jo i / i null.

Intervjuar: Mm.

Kristian: Den synker / synker i en.

[26] Det kom også fram i intervjuet at Jonas hadde studert eit år i Australia der dei jobba mykje med den grafiske forståinga. Kanskje det er noko av grunnen til at han har mange kognitive einingar i eit rikt begrepsbilete. Sjå vedlegg 7.4.4, line 302 – 325.

Graf E vert vald som grafen som har alle eigenskapane. Dette grunna at den stemmer for dei to fyrste eigenskapane. Det framkalla begrepsbiletet er i samhøve med definisjonen. Det er klart at Kristian veit kva den deriverte til ein funksjon er, og kan lesa av den deriverte på grafen. Den andrederiverte viser seg å vera eit større problem.

Intervjuar: Mm / når den / andrederiverte altså / kva seier den andrederiverte på ein graf?

Kristian: Eehm // (tenkjer) (svakt) husker ikke.

Intervjuar: Du hugsar ikkje det?

Kristian: Nei.

Intervjuar: Eehm / når du når du tok / tenker / viss du tek den deriverte då / den deriverte / kva fortel den?

Kristian: Den forteller jo / stigningen

Intervjuar: Ja / den fortel stigninga til grafen ja / og den andrederiverte.

Kristian: Den forteller stigningen til / stigningen på en måte.

Intervjuar: Mm.

Kristian: Så det er vel.

Intervjuar: Hugsar du frå / frå 2MX / eehm / nytta de vel ofte forteiknsliner.

Kristian: Ja.

Intervjuar: For å teikne opp grafar / hugsar du kva det var de nytta den andrederiverte til då / med forteiknslina?

Kristian: Toppunkter og bunnpunkter.

Intervjuar: Øøøh / på grafen?

Kristian: Okei // (utydeleg) // er det ikke det?

Den andrederiverte vekker ikkje noko bilete som er til hjelp i denne oppgåva. Kristian kjem fram til at den andrederiverte fortel om stigninga til stigninga. Dette biletet klarer han ikkje å nytta til ei grafisk løysing. Forteiknsliner vert difor nemnd som ei muleg kognitiv rot, men dei vert berre knytt til toppunkt og botnpunkt, den fyrstederiverte. Det er tydeleg at den andrederiverte ikkje vekker bilete av forteiknsliner.
Me tek no ein gjennomgang på forteiknsliner og den andrederiverte (krumming, hol side opp/ned[27]). Etter dette meiner Kristian at svaret er graf A. Han finn at grafen stemmer for dei to fyrste eigenskapane, men den andrederiverte er framleis problematisk.

Kristian: Mm // da er det heller A da kanskje?

Intervjuar: Du trur det er A?

Kristian: Mm.

Intervjuar: Eehm / viss du sjekkar eigenskapane.

[27] Vedlegg 7.4.5, line 123 – 146.

Kristian: (Utydeleg)

Intervjuar: Den fyrste eigenskapen.

Kristian: Stiger i null.

Intervjuar: Stig i null.

Kristian: Ehm / minker i / en.

Intervjuar: Ja // stemmer det at den er / andrederiverte der vil vera negativ?

Kristian: Nei.

Intervjuar: Gjer det *ikkje* det?

Kristian: Gjør det det da?

Det kjem no fram i intervjuet at Kristian trur at graf A – E er grafane til den deriverte[28]. Ein kan likevel merka seg at sjølv om Kristian trudde at grafane var dei deriverte, stemmer ikkje argumenta hans. Graf D vil i det tilfellet ha alle eigenskapane. Og alle argumenta hans så langt har tyda på at han oppfatta at grafane var $f(x)$.

Graf E vert difor vurdert på nytt. Dei to fyrste eigenskapane ser han direkte. Han er framleis usikker på om $f''(x)$ er negativ for alle *x*. Han prøver difor ein ny framgangsmåte. Grafen liknar på ein tredjegradsfunksjon. Då vert den deriverte ein parabel og då stemmer det i følgje Kristian.

Intervjuar: Då kan du ta den E ein gong til.

Kristian: Ja // der stiger den jo / den / deriverte er jo positiv eller.

Intervjuar: Mm.

Kristian: Den første stemmer / den andre stemmer // men / det siste stemmer vel ikke // (Utydeleg)

Intervjuar: Kven du trur at det ikkje stemmer på den siste?

Kristian: Øøh at / andrederiverte er negativ.

Intervjuar: Mm / kvifor ser det ut til å ikkje stemma?

Kristian: Eehm fordi at den har / stigning // men // når den andre // den andrederiverte av en // hvis dette er en x.

Intervjuar: Mm.

Kristian: X i tredje eller noe sånn.

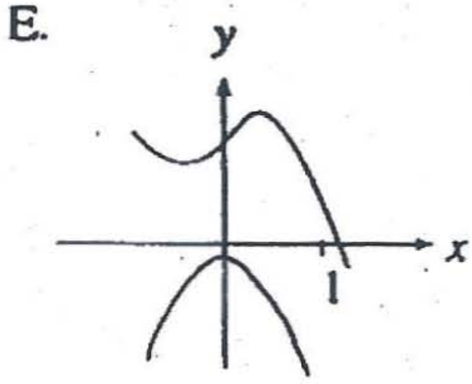
Intervjuar: Mm.

Kristian: Så er den andrederiverte sånn // (arbeider) deriverte kan være / parabel // okei hvis jeg tenker sånn da // deriverer den så vil du få / noe med x i andre så det vil være en parabel på en eller annen måte // er ikke det / stemmer ikke det?

[28] Vedlegg 7.4.5, line 180 – 198.

Intervjuar: Mm.

Kristian: Og / ja da kan det stemme tror jeg / jeg tror da kan / at E kan være riktig



Figur 24: Kristian teiknar grafen til $f'(x)$.

Eit anna vekka bilete gjer at han registrerer grafen som ein tredjegradsfunksjon. Denne kan deriverast, og han får ein parabel. Det er i samsvar med definisjonen. Men parabelen han skisserer stemmer ikkje med grafen. Det er ikkje sikkert at han prøver å teikna $f'(x)$ nøyaktig heller, men ein kan ikkje sjå at eigenskapane stemmer berre ved å vita at det er ein parabel, den må vera korrekt i høve til den opphavlege grafen.

Same framgangsmåte vert nytta for å utelukka graf A.

Kristian: Det kan være A men jeg tror ikke det er A / siden / hvis jeg hvis jeg bare tenker at det er en parabel.

Intervjuar: Ja.

Kristian: Hvis jeg ser for meg at det er en parabel.

Intervjuar: Mm.

Kristian: Så vil jo den deriverte bli en / rett linje

Intervjuar: Mm.

Kristian: Da tror jeg ikke det.

Det kan henda at det er biletet av forteiknslina til den andrederiverte som lagar konflikt i dette tilfellet. Me har tidlegare i intervjuet jobba med eit slikt døme, der hol side opp/ned vart skissert. Dette vart kanskje oppfatta som at når ein "andrederiverar" grafen skal ein få ein parabel (som liknar på teikninga av hol side opp/ned). Dette går me diverre ikkje nærare inn i. Konflikten vert difor ikkje løyst. Løysinga vert no gjeven. Likevel er dette uklart.

Intervjuar: Så skal den vera altså / (arbeider) slik / for alle x / skal den vende *nedover*.

Kristian: Ja.

Intervjuar: Gjer Aen det?

Kristian: *Grafen* gjør jo det.

Intervjuar: Ja grafen.

Kristian: Men / han [gjør jo det

Intervjuar: [(Utydeleg)

Kristian: Ja?

Intervjuar: For dette nedste her / liksom var eit hint om [korleis grafen .

Kristian: [Ja okei okei / okei / ja / da gjør den jo det.

Intervjuar: Så må me sjå på E.

Kristian: Den gjør jo ikke det.

Intervjuar: Kvar er det den ikkje gjer det?

Kristian: Den gjør ikke her.

Intervjuar: Nei.

Kristian: Da er det vel A da.

Intervjuar: Mm.

Kristian: Men / ja.

Intervjuar: Du er likevel ikkje heilt eining.

Kristian: Nei he-he / jeg *må* vel være enig for det er riktig men / det er litt vanskelig å se det for meg.

Det er tydeleg at Kristian ikkje har eit godt grafisk bilete av den andrederiverte. Slik det er no godtek han at den siste eigenskapen stemmer, men det er mykje som tyder på at han framleis ikkje har eit godt grafisk bilete av kva den andrederiverte er.

Oppgåve 2: teikna grafen til den deriverte (parabel)

Denne oppgåva vert løyst utan problem. Det viser seg at framgangsmåten som vart nytta i førre oppgåve (finna funksjonsuttrykket, derivera, skissere graf) er effektivt i dette tilfellet. Grafen er ein parabel og då er det lett å sjå at $f(x)=x^2$.

Kristian: Ehh fordi den har / negativ stigning / i her.

Intervjuar: Mm.

Kristian: Positiv på den siden.

Intervjuar: Mm.

Kristian: Tror jeg.

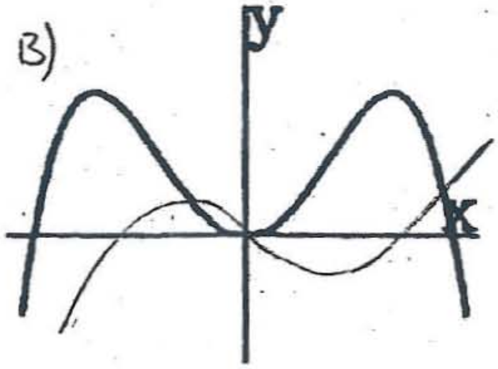
Intervjuar: Mm.

Kristian: For hvis det er / eeh // en x i andre / så blir det en to x / eller noe sånn.

Kristian er trygg på at funksjonsuttrykket gjev rett løysing. Han sjekkar heller ikkje om grafen $y = 2x$ stemmer med parabelen (dvs han vurderer ikkje løysinga grafisk).

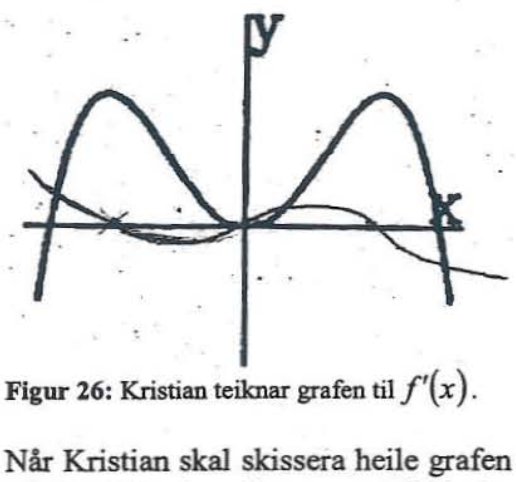
Oppgåve 3: teikna grafen til den deriverte (fjerdegradsfunksjon)

No vel Kristian ein anna framgangsmåte. Han finn nullpunkta og skisserer grafen med utgangspunkt i dei. Resultatet vert ein graf som er nesten lik den opphavlege.



Figur 25: Kristian teiknar grafen til $f'(x)$.

Det kan sjå ut som at det vert vekka eit bilete av at grafen til den deriverte stig/søkk når den deriverte er positiv/negativ (sjølv om Kristian i fleire andre samanhengar tolkar den deriverte til ein funksjon tilfredsstillande[29]). Etter eit tips om å sjå nærare på eigenskapane til grafen mellom nullpunkta skisserer Kristian den riktige løysinga.



Figur 26: Kristian teiknar grafen til $f'(x)$.

Når Kristian skal skissera heile grafen vert den biletleg tolkinga tydeleg. Men når han ser på mindre delar kvar for seg vert ikkje den biletlege tolkinga framkalla.

Oppgåve 4: Oppgåve 4 på prøven

I denne oppgåva vert det tydeleg at den deriverte til ein funksjon vekker ulike bilete, der nokre er i konflikt med definisjonen.

Kristian: Ja // enten tre eller fire for på seks til åtte så er den negativ.

[29] Til dømes line 17 – 25, 162 – 168, 218 – 222, 260 – 266.

627 Intervjuar: På seks til åtte så er den negativ.
628
629 Kristian: Ja det kan forsåvidt være den og / der er den.

Grafen til den deriverte, $f'(x)$, ligg under x-aksen frå $x=6$ til $x=8$, og den deriverte er dermed negativ i det intervallet. Graf 3 og 4 ligg også under x-aksen i same intervall, og dei har negativ stigning. Kristian meiner at ein av desse er dei opphavlege grafane. Kanskje er det biletet av at grafen skal søkka når den deriverte søkk som skaper konflikt. Det kan også henda at det er eit bilete av at når $f'(x)$ er negativ skal $f(x)$ ligga under x-aksen som er problemet. Kombinasjonar av desse bileta er også ei muleg løysing. Det ser i alle høve ut til at Kristian har ei biletleg tolking av grafen, slik me også såg i førre oppgåve. Difor vel han å utelukka graf 2 sidan den stig i intervallet $x=3$ til $x=5$, medan $f'(x)$ ikkje har stigning der.

653 Kristian: Den har jo / null stigning her da.
654
655 Intervjuar: Mm.
656
657 Kristian: Det har jo disse to også // så da / utelukker jeg den.

No står det mellom graf 3 og 4, og Kristian vel graf 3 grunna at den stig mellom $x=0$ og $x=3$.

661 Kristian: Fram til den så er den negativ // jeg tror det er tre.
662
663 Intervjuar: Mm.
664
665 Kristian: Jeg tror det er tre.
666
667 Intervjuar: Kvifor trur du det er tre då?
668
669 Kristian: Fordi han eehh / er positiv / stigning her.
670
671 Intervjuar: Mm.
672
673 Kristian: Den er jo positiv // men den blir likevel slakkere / oppover.
674
675 Intervjuar: Mm.
676
677 Kristian: Derfra så minker den.

Kristian nyttar eit bilete som er i samsvar med definisjonen i intervallet $x=0$ og $x=3$. Sjølv om grafen til $f'(x)$ søkk, ser han at den deriverte er positiv, men søkkande. Men frå $x=3$ og utover tolkar han grafen biletleg; "*derfra så minker den*" (line 677). Det kan sjå ut som at ulike intervall vekker ulike bilete. Eg ber difor Kristian om å fokusera på $x=6$, nullpunktet til $f'(x)$. Eit nullpunkt på $f'(x)$ vil gje topp- eller botnpunkt på $f(x)$.

Intervjuar: Viss me ser på / det nullpunktet i x er lik seks.

Kristian: Ja.

Intervjuar: Så er det eit nullpunkt.

Kristian: Ja.

Intervjuar: Eeh / så når f *derivert* av x er null / kva fortel det om / f av x / den opphavlege grafen.

Kristian: At den vil ha et toppunkt.

Intervjuar: Den har eit toppunkt.

Kristian: Ja.

Intervjuar: Det vil du ha i seks.

Kristian: Ja / det *har* du her.

. .
. .
. .

Kristian: Toppunktet stemmer med to

. .
. .
. .

Kristian: Her skulle vi // hm / nei det skulle ikke / nei hvorfor skulle det ikkje være rett / det er bare det at det er / konstant stigning her.

Intervjuar: Mm.

Kristian: Nei det er riktig denne her da toeren er riktig.

To bilete er no i konflikt. På den eine sida har me toppunktet[30] som ein finn att i graf 2. Men graf 2 stig i intervallet $x = 3$ til $x = 5$. Det stemmer ikkje med den biletlege tolkinga av grafen. Etter ein liten tenkjepause finn Kristian sjølv at graf 2 er rett svar. Når $f'(x)$ ikkje stig/søkk betyr det at $f(x)$ har konstant stigning. Diverre går eg ikkje nærare inn på korleis Kristian løyste denne konflikten. Kvifor valde han å sjå vekk frå den biletlege tolkinga?

Oppgåve 5: Oppgåve 7 på prøven.

I denne oppgåva nyttar Kristian begrepsbilete som ikkje er i konflikt med definisjonen. Då finn han og løysingane på oppgåvene utan store problem

Intervjuar: Kva viser f derivert her?

Kristian: Den viser / eehm // hvordan altså hvordan tendensen i salget har vært kan [du si det?

Intervjuar: [Mm / Ja.

Kristian: Her / har det vært ganske jevnt salg og så har han / økt og økt og økt og nådd / nei / det er feil / i hvert fall / salget har økt / så har det sunket igjen / mens toppen her / og / sunket.

Intervjuar: Mm så // eeh viss du seier kva år er salet på topp?

[30] Kristian seier at når $f'(x) = 0$ får me eit toppunkt, men nemner ikkje at det også kan gje eit botnpunkt.

Kristian: Fem.

Intervjuar: I år fem / og det er grunna at?

Kristian: Den deriverte er lik null.

Intervjuar: Mm.

Språket er noko upresist. Han seier at salet har auka og så har det søkke att. Det korrekte er at salet har auka heilt fram til år fem. Fram til år tre har det auka mykje, frå år tre til år fem har det også auka, men ikkje like mykje. Det er likevel liten tvil om at Kristian her har eit bilete i samsvar med definisjonen. Han les av verdiane og finn når salet er på topp grunna at den deriverte er lik null. Han argumenterer derimot ikkje for at det må vera eit toppunkt grunna at den deriverte er positiv før fem og negativ etter. Ein kan og leggja merke til at begrepsbiletet som var i konflikt med definisjonen på førre oppgåve ikkje er til stades no. Når han fokuserte på nullpunktet til den deriverte i line 679 – 697 møtte han ei kognitiv konflikt mellom den biletlege tolkinga av grafen og kva den deriverte til ein funksjon er. Kanskje konflikten er løyst med eit positivt utfall?

Tilsvarande finn me at han no har eit tilfredsstillande bilete av den andrederiverte som han nyttar til å svara på det siste spørsmålet.

Kristian: Da øker salget mest det er jo da den andrederiverte / andrederiverte er lik null.

Intervjuar: Mm.

Kristian: Eehm // hvis dette er den deriverte så // det er litt vanskelig å se da men.

Intervjuar: Viss den andrederiverte skal vera lik null.

Kristian: Ja.

Intervjuar: Kva seier [det ?

Kristian: [Da skulle man jo egentlig tro at det var den her oppe da?

Intervjuar: Ja / det høyres fornuftig ut men går / var [du?

Kristian: [Siden det er toppunktet på / deriverte.

Kristian finn at salet er på topp i år tre grunna at den andrederiverte er null. Eit bilete i samsvar med definisjonen. Det er litt interessant, sidan Kristian tidlegare i intervjuet hadde vanskar med den andrederiverte. Men situasjonen er noko annleis no enn kva den var i oppgåve 1. No er det $f'(x)$ som er gjeven. Dersom han veit at den andrederiverte er null når $f'(x)$ har eit toppunkt, så kan han lesa det rett av grafen. I oppgåve 1 var det $f(x)$ som var gjeven og han måtte vurdera eigenskapen $f''(x)$ negativ for alle x. Ein ser at dei to ulike situasjonane vekker ulike bilete, eventuelt at oppgåve 1 ikkje vekker nokre begrepsbilete.

Oppsummering av intervju med Kristian

Kristian har noko kunnskap om både den fyrste- og andrederiverte, man har samstundes nokre begrepsbilete som gjev konfliktar. Desse kjem klarast fram når han prøver å løysa oppgåvene grafisk.

Det som skaper mest problem for Kristian er at han *ofte tolkar grafane biletleg*. I mange samanhengar tenkjer han at $f'(x)$ stig/søkk når $f(x)$ stig/søkk. Det ser ein både når han skal skissera grafen til den deriverte, dvs. har oppgitt $f(x)$, og når han har oppgitt $f'(x)$. På same tid ser ein at han *har grei oversikt over kva den deriverte til ein funksjon er*. Han klarer å sjå på ein graf om stigningstalet er positivt eller negativt. Han er også klar over at ein får eit topp- eller botnpunkt når den deriverte er null. Det er ikkje alltid desse bileta kjem i konflikt med kvarandre sjølv om dei er potensielle konfliktfaktorar. I oppgåve 4 "lever dei side om side", han nyttar eitt bilete for ein del av grafen, og eit anna for ein anna del av grafen.

Kristian *prøver å finna funksjonsuttrykket til grafen*. Då kan han nytta derivasjonsprosessen til å finne løysingar. Det er likevel *ikkje alltid han klarer å nytta seg av informasjonen som funksjonsuttrykket gjev*. I oppgåve 1 klarer han å sjå kva polynomfunksjon som høyrer til nokre av grafane, men gjev likevel ikkje tilfredsstillande svar (til dømes line 239 – 245 og line 339 – 347). I dei samanhengane der han kan nytta seg direkte av resultata frå derivasjonsprosessen (line 489) er biletet til hjelp, men ikkje dersom prosessen gjev ein ny situasjon som må tolkast grafisk (line 339 – 347).

Det som skaper mest konflikt er den andrederiverte. Kristian veit at det er stigninga til stigninga. Me ser og at han i oppgåve 7 gjer uttrykk for at $f''(x)=0$ for toppunktet på grafen til den deriverte. Endå eit bilete som samsvarar med definisjonen. Men det kan sjå ut som at han ikkje har noko godt bilete av korleis $f(x)$ ser ut etter som $f''(x)$ varierer. Han har *vanskar med å visualisera den andrederiverte*. I oppgåve 7 dreg han nytte av faktakunnskap om $f''(x)$. "Salget øker mest når den andrederiverte er null" (line 911). Dersom han grafisk må tolka den andrederiverte fører det til konfliktar.

Kristian har såleis noko faktakunnskap om samanhengane mellom $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$. Det grafiske språket er derimot eit 2.ordens språk. Han har i stor grad ikkje klart å gjera fakta om til kognitive einingar. Det som skapar mest konflikt er den biletlege tolkinga av grafen, samt manglande grafiske bilete av den andrederiverte. Me ser og at dersom han møter oppgåver der han kan nytta faktakunnskapen direkte, lagar ikkje desse bileta konfliktar. Dersom han må tolka grafisk, er det større sjanse for at bilete i konflikt med kvarandre eller definisjonen vert vekka.

4.2.6 Oppsummering - elevane sitt begrepsbilete

Analysen av kvart intervju gjev ei oversikt over begrepsbiletet til dei fem elevane. Det varierer kor mange vekka bilete elevane har når dei møter den deriverte i ein grafisk kontekst, kor "kvantitativt rike" bileta er. Talet kognitive konfliktfaktorar varierer også. Konfliktane ser ut til å henga saman med i kor stor grad bileta er kognitive einingar. Markus er eit godt døme på ein elev som har eit rikt begrepsbilete med mange kognitive einingar og få konfliktar. Emma har også mange bilete, men færre kognitive einingar og fleire kognitive konfliktfaktorar. Her følgjer ei kort oversikt over dei tydelegaste "funna" i dei fem intervjua, uavhengig av elev.

Dei fem intervjua viser at desse *elevane har god oversikt over kva den (fyrste)deriverte til ein funksjon er*. Dei er kjend med at den deriverte er stigningstalet til ein graf i eit punkt og at tangenten viser om dette stigningstalet er positivt eller negativt. Dei *har totalt sett mykje faktakunnskap om den deriverte*. T.d. at $f'(x)=0$ når grafen til den opphavlege funksjonen har eitt topp- eller botnpunkt, og at grafen til den deriverte er ei rett line når $f(x)$ er ein parabel. Likevel ser me at *det varierer i kor stor grad dei klarer å dra nytte av denne kunnskapen*. For nokre vert det berre faktakunnskap, ikkje kognitive einingar, sjølv om dette ikkje er mest framtredande for den fyrstederiverte. Tangenten er då eit godt grafisk hjelpemiddel for alle elevane.

I samanheng med den andrederiverte er det tydelegare at elevane har færre kognitive einingar. Dei har vanskar med å visualisera den andrederiverte, og er difor meir avhengig av funksjonsuttrykket. Det at den andrederiverte til dømes er "stigninga til stigninga" er ikkje til hjelp i oppgåveløysinga for Andreas og Kristian.

For nokre av elevane er *funksjonsuttrykket nødvendig for å løysa oppgåvene*. Då kan dei løysa oppgåva algebraisk. I samband med dette viser det seg at *elevane av og til tolkar $f(x)$ feil slik at dei tek utgangspunkt i feil graf når dei nyttar derivasjonsprosessen*. Dei trur kanskje at ein fjerdegradsfunksjon er ein tredjegradsfunksjon, og at $f'(x)$ då skal vera ein parabel.

Det er tydeleg at *elevane ofte tolkar grafane biletleg*, sjølv om det varierer i kor stor grad dei gjer dette. Den biletlege tolkinga gjev fleire utslag i same kategori; den deriverte er negativ når $f(x)$ ligg under x-aksen, grafen til $f'(x)$ søkk når $f(x)$ søkk, det er vanskeleg å teikna grafen til den deriverte når $x < 0$. Dette gjeld også den andrederiverte som vert kalla negativ når $f(x)$ er søkkande[31].

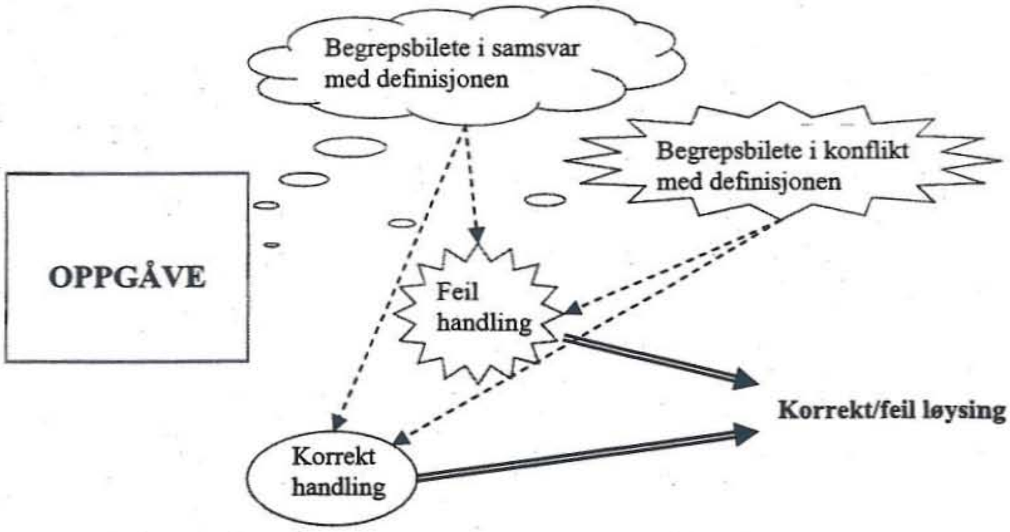
Det er vidare *lettare å teikna grafen til den deriverte når ein tek "små steg"*. Dersom ein til dømes fyrst finn nullpunkta, og etterpå skisserer grafen mellom nullpunkta, vert det lettare å teikna grafen til den deriverte.

[31] I mi oppgåve nyttar eg såleis uttrykket "biletleg tolking" ganske vidt. Det er sikkert muleg i større grad å skilja dei ulike biletlege tolkingane, men resultatet vart det same for elevane i mitt utval; grafen til den deriverte såg ut som den opphavlege grafen. Problemstillinga vert drøfta nærare i kapittel 5.

4.3 Analyse og drøfting av elevane sine løysingar av utvalde oppgåver

I denne delen av kapitlet ser eg nærare på korleis tre elevar har løyst to av oppgåvene frå intervjuet. Løysingane vert skildra ved hjelp av kart/diagram som viser begrepsbilete og utførte handlingar. Desse vert utgangspunkt for ei klassifisering av dei tre elevane som skil seg frå kvarandre ved at dei har ulike kognitivt nettverk i samband med den deriverte.

Karta/diagramma er bygd opp på denne måten:



Figur 27: Oversikt over kart/diagram.

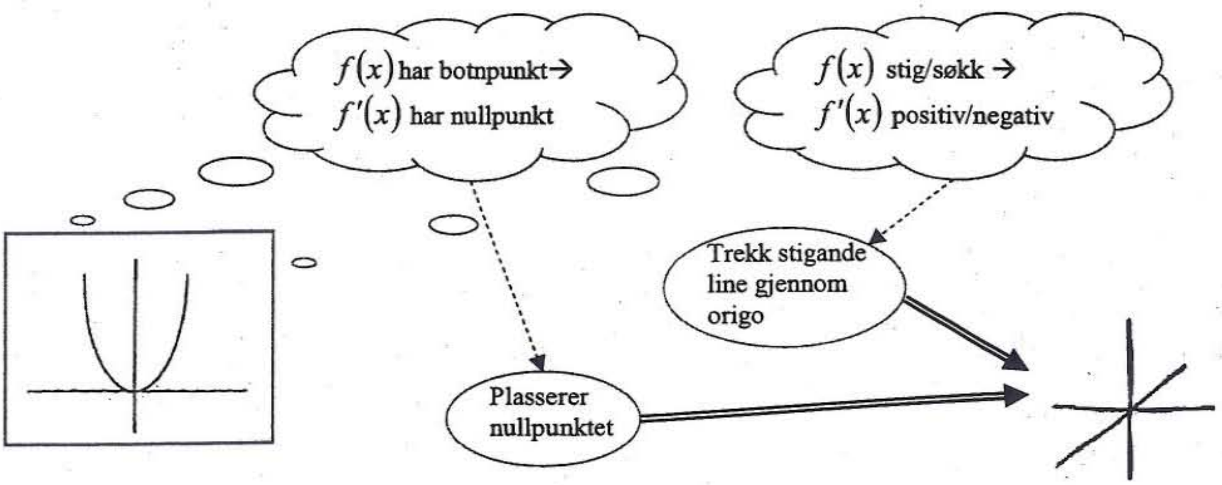
Oppgåva står til venstre i figuren og er alltid forma som eit rektangel/kvadrat. Det kan vera ei av de to intervjuoppgåvene, eller det kan vera eit spørsmål frå intervjuaren. Det er to ulike typar tankebobler knytt til oppgåva. Desse boblene er *dei vekka begrepsbileta* som eleven har i samband med oppgåva[32]. Bobla som er forma som ei sky, er eit bilete som er i samsvar med definisjonen, medan den taggete bobla er bilete som er i konflikt med definisjonen. Desse boblene er knytt til *konkrete handlingar* med stipla piler. Handlingane kan vera (matematisk) korrekte (forma som ein glatt sirkel/ellipse) eller feil (taggete sirkel/ellipse). Som ein ser av figuren kan bilete som er i samsvar med definisjonen føra til både feil og korrekt handling. Vidare er handlingane knytt til eit svar. Dette er markert med doble piler.

4.3.1 Oversikt over Markus sine løysingar

Markus er ein elev som har eit rikt begrepsbilete og mange kognitive einingar. Han er trygg på grafspråket og vel difor ofte grafiske løysingar. Figurane under viser at dette er til god hjelp i oppgåveløysinga.

[32] Som nemnt tidlegare kan ein ikkje sjå dei vekka begrepsbileta. Dei er berre mine tolkingar av kva som vert sagt i intervjusituasjonen.

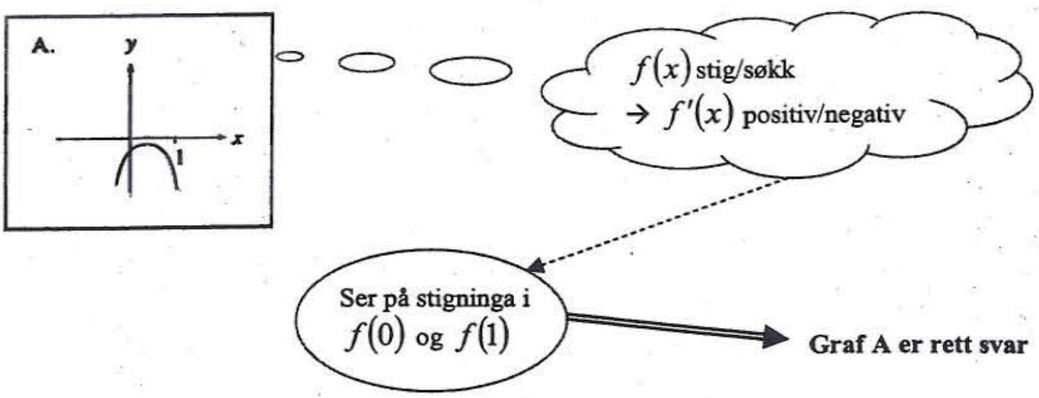
Oppgåve 2: Teikna grafen til den deriverte (parabel)



Figur 28: Markus teiknar grafen til den deriverte av ein parabel.

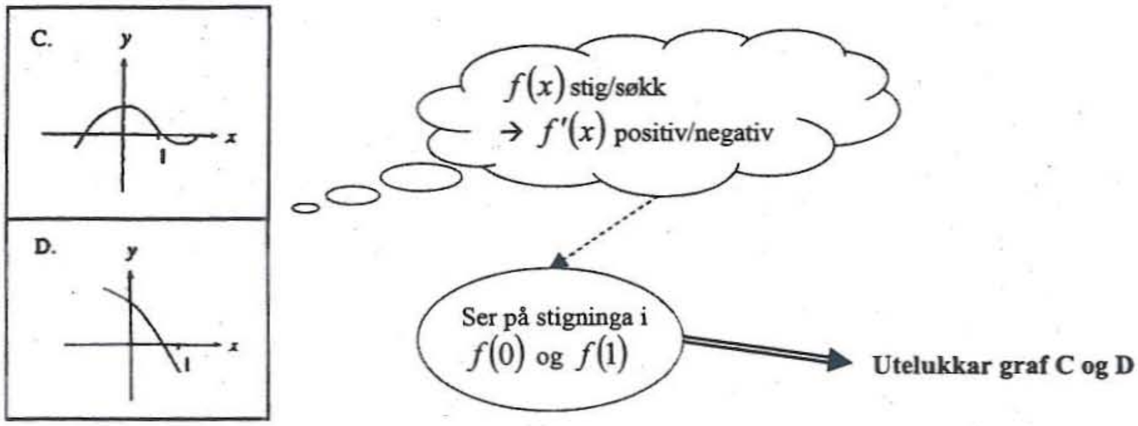
Som me ser av figuren gjer Markus umiddelbart to korrekte observasjonar som fører til rett svar. Begge observasjonane er direkte knytt til eigenskapane til den deriverte. Her er det ingen kognitive konfliktar som forvirrar. Ein kan også leggja merke til at han vel ei grafisk løysing, sjølv om denne oppgåva kan løysast ved å kjenna att grafen som ein parabel.

Oppgåve 1: Kva graf har alle eigenskapane?



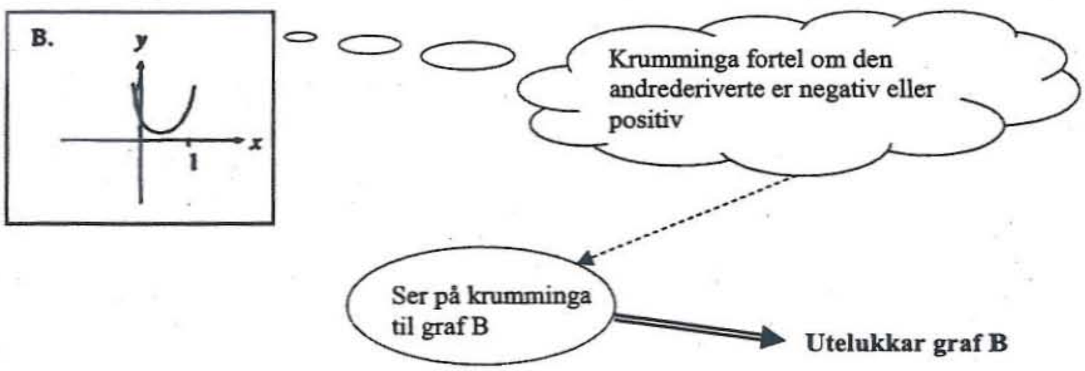
Figur 29: Markus finn at graf A gjev rett svar.

Her nyttar Markus seg berre av eitt begrepsbilete. Det er nok til å finna at dei to fyrste eigenskapane stemmer. På bakgrunn av det meiner han at graf A må vera det rette svaret. Han vel nok ei gong ei grafisk løysing. Han vurderer ikkje den siste eigenskapen. Eg ber han om å sjekka dei andre grafane, sidan han meiner at graf A er rett svar.



Figur 30: Markus utelukkar graf C og D.

På same måte som at han fann at dei to fyrste eigenskapane stemte i førre graf, finn han at dei ikkje stemmer for graf C og D. Det er difor nok med eitt (grafisk) begrepsbilete for å utelukka desse to grafane.



Figur 31: Markus utelukkar graf B.

Her nyttar Markus eit grafisk bilete av den andrederiverte som ikkje er i konflikt med definisjonen til å sjå at det ikkje kan vera graf B. Ein kan og leggja merke til at han (tilsynelatande) ikkje vurderer dei to fyrste eigenskapane. Det er nok å sjå at den andrederiverte ikkje er negativ for alle x.

Figur 32: Markus utelukkar graf E.

Denne grafen vert utelukka på same måte som graf B. Han registrerer at den andrederiverte er positiv på delar av grafen. Eitt bilete var nok til å gje rett svar.

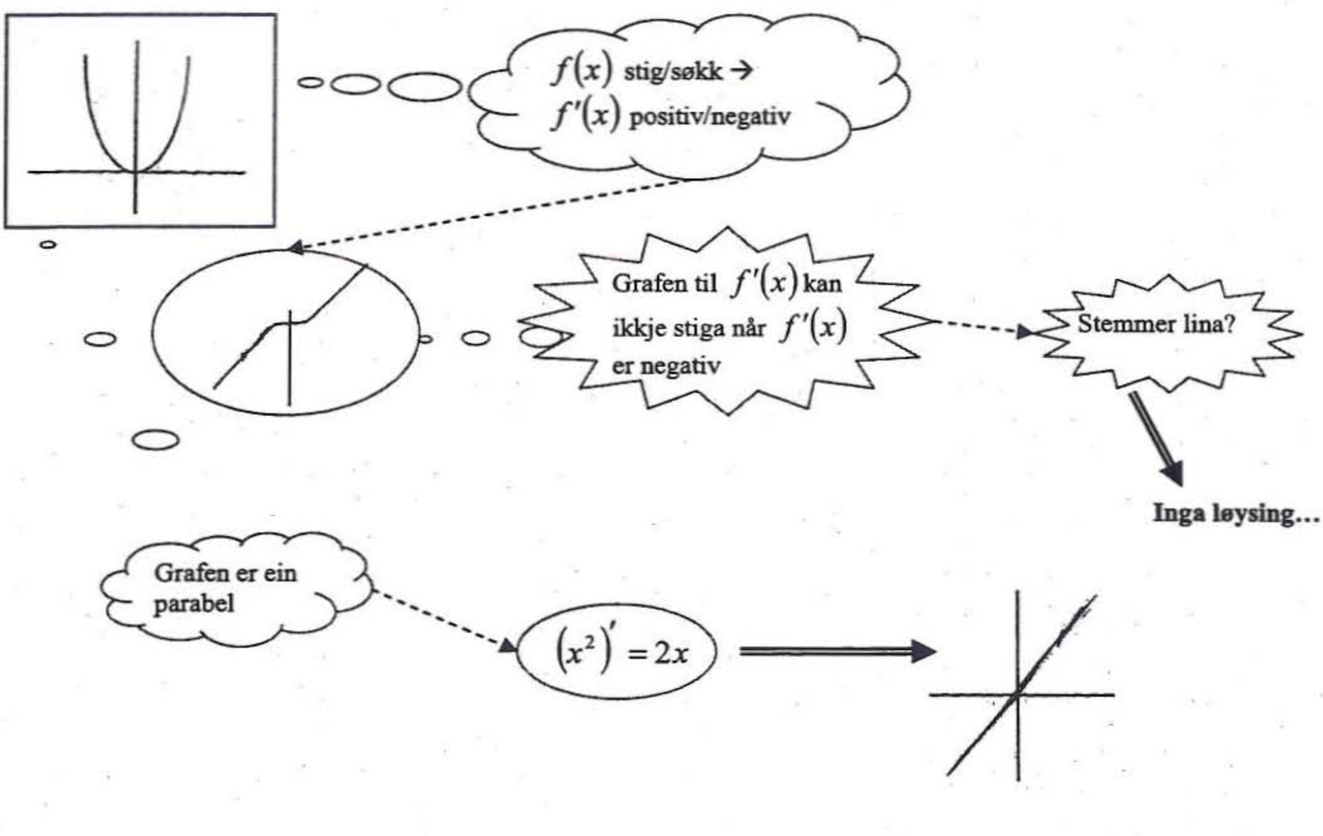
Oppsummering:

Det som er mest påfallande er at Markus er svært effektiv når han løyser desse oppgåvene. Oppgåve 1 vart løyst ved hjelp av berre to vekka begrepsbilete, som begge var i samsvar med definisjonen. Markus har difor evna til å fokusera på det som er vesentleg i oppgåva, og vert ikkje forvirra av kognitive konfliktar.

4.3.2 Oversikt over Emma sine løysingar

Emma er ein elev som har mange begrepsbilete i samband med den deriverte. Men ikkje alle bileta er kognitive einingar og nokre av bileta er i tillegg i konflikt med definisjonen. Ho er ikkje trygg på grafspråket, og er til dels avhengig av funksjonsuttrykket. Dette spelar naturleg nok ei rolle for korleis ho løyser oppgåvene.

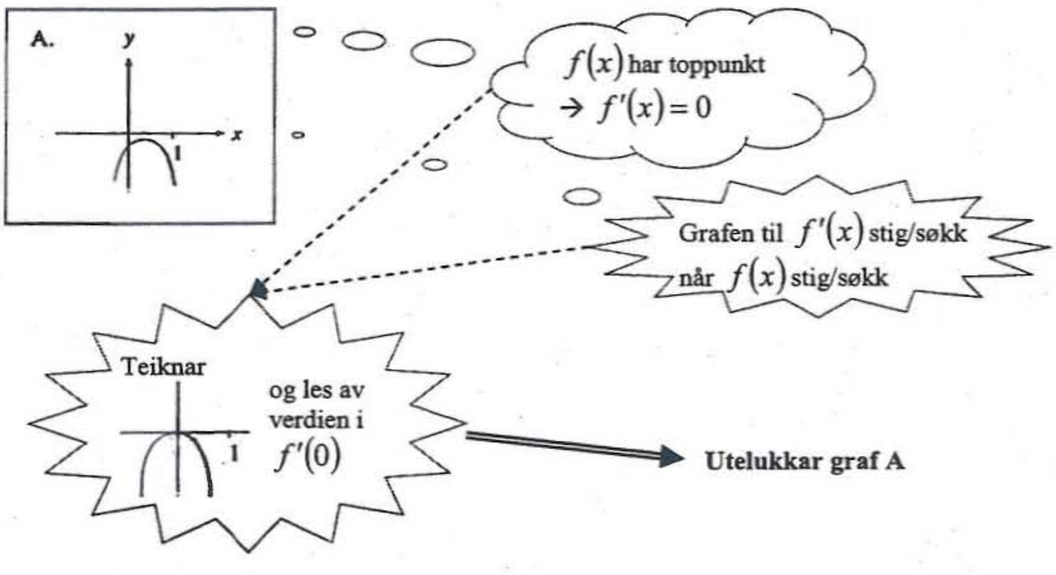
Oppgåve 2: Teikna grafen til den deriverte (parabel)



Figur 33: Emma teiknar grafen til den deriverte av ein parabel.

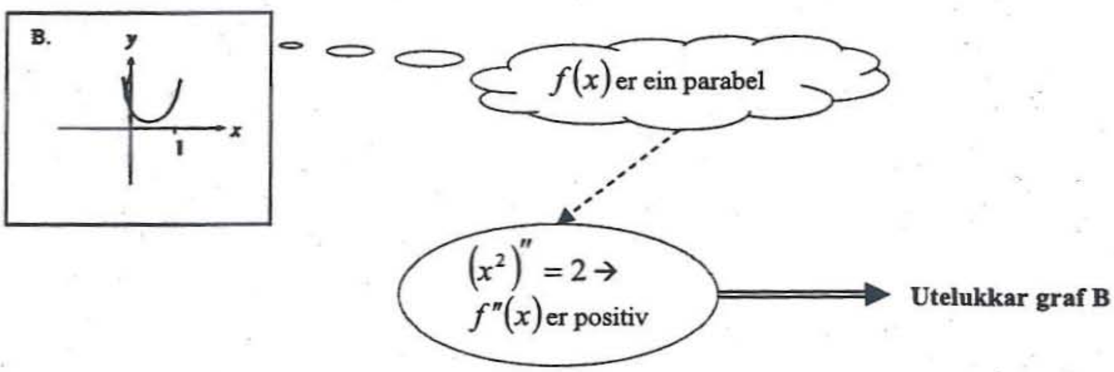
Grafen vekker eit korrekt begrepsbilete som vert nytta til teikna ein tilnærma korrekt graf. Når ho tenkjer over svaret viser det seg at eit begrepsbilete som ikkje er i samsvar med definisjonen lagar ein konflikt. Dette fører til at Emma vert usikker og kjem inn i ei blindgate. Konflikten vert ikkje løyst, men Emma finn ein algebraisk innfallsvinkel som løyser problemet. Ho klarte difor ikkje å løysa denne oppgåva berre ved hjelp av grafiske framgangsmåtar.

Oppgåve 1: Kva graf har alle eigenskapane?



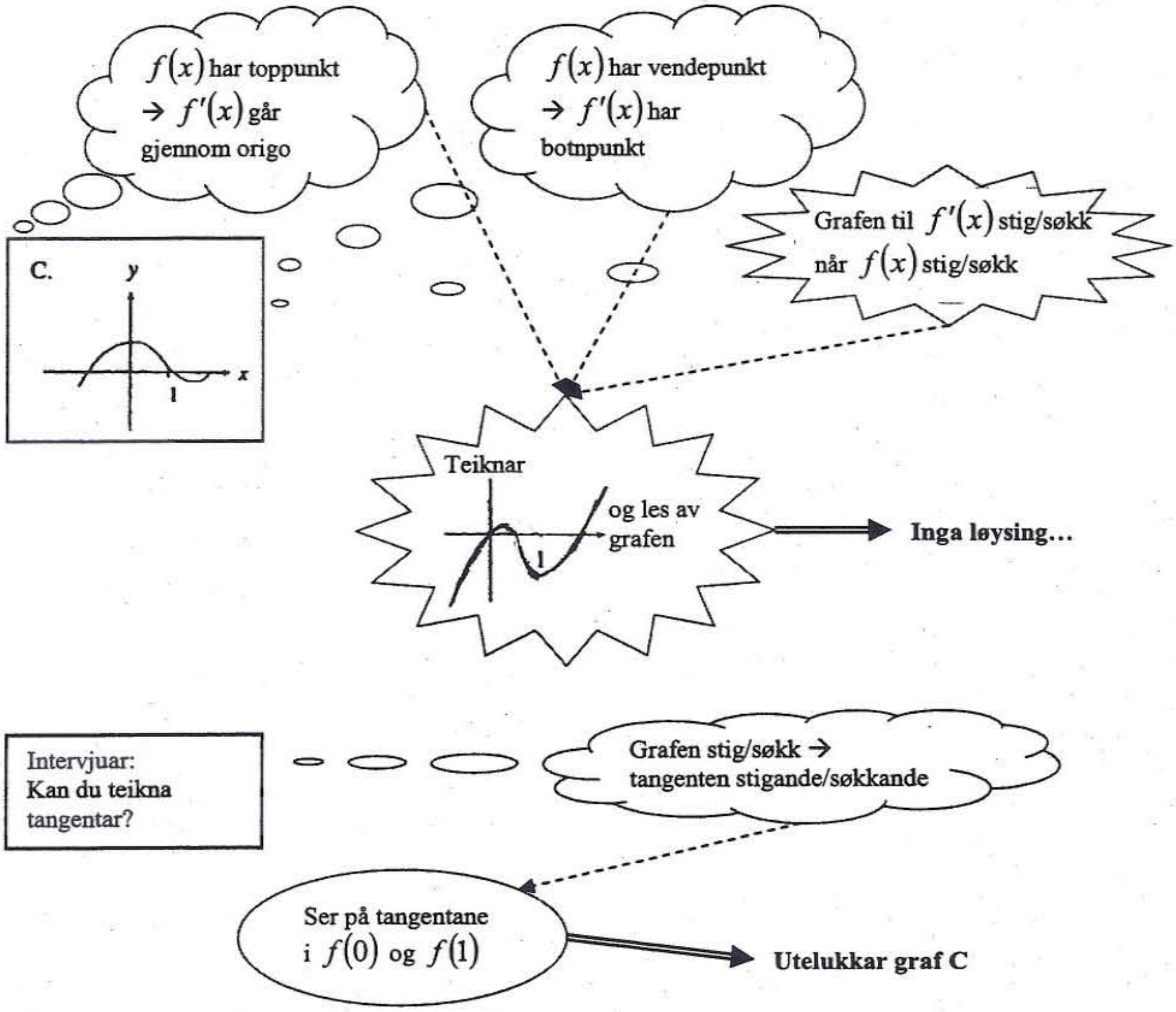
Figur 34: Emma utelukkar graf A.

Denne oppgåva vekker to begrepsbilete, der det eine er i konflikt med definisjonen. Det fører til at grafen til den deriverte vert feil. Difor vert også svaret feil Ein kan leggja merke til at den potensielle konfliktfaktoren mellom bileta ikkje vert ein kognitiv konflikt, sidan ho ikkje sjølv reagerer på at grafen ho teiknar er feil. Ho går difor vidare for å sjekka dei andre grafane.



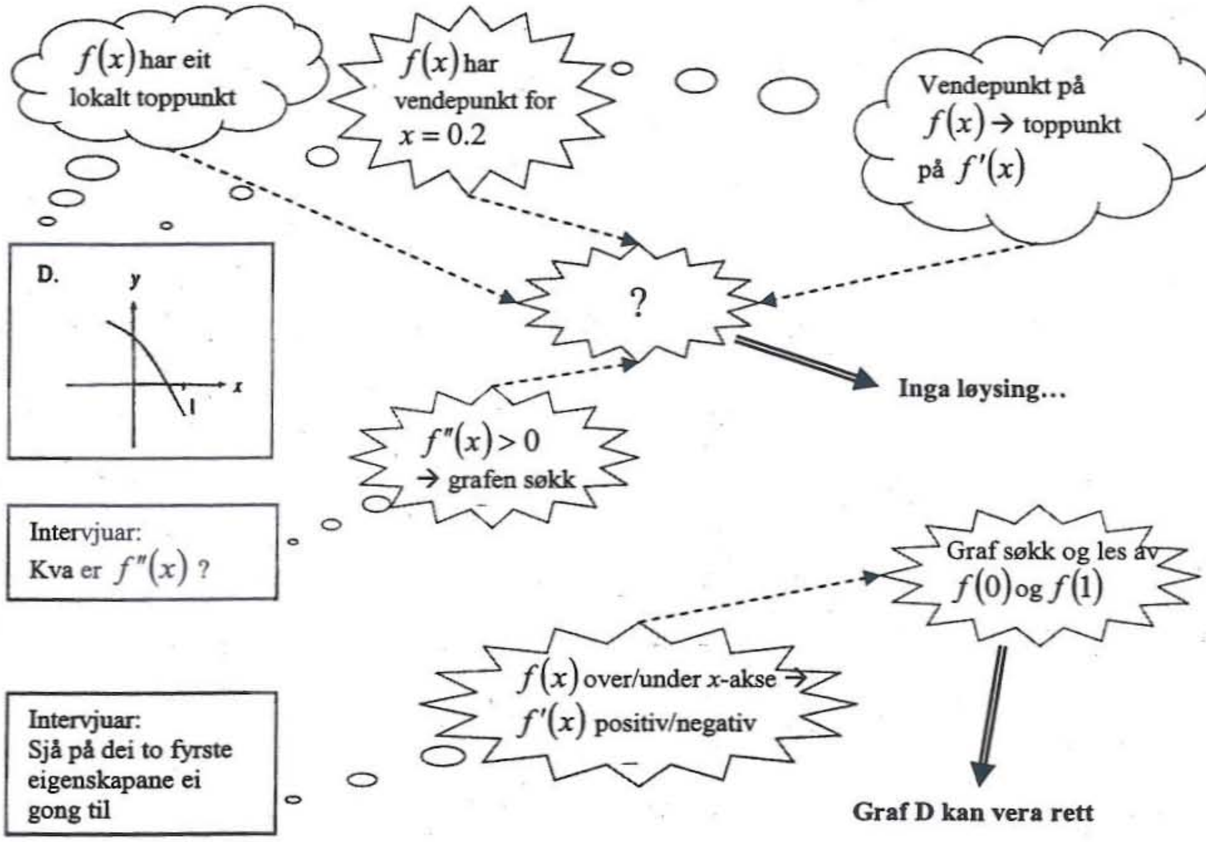
Figur 35: Emma utelukkar graf B.

Sjølv om denne grafen også er ein parabel (slik graf A var) vekker denne eit anna begrepsbilete. Dette biletet er ikkje i konflikt med definisjonen. Emma kan no nytta ein algebraisk framgangsmåte til å utelukka graf B. På neste graf prøver ho ein grafisk framgangsmåte.



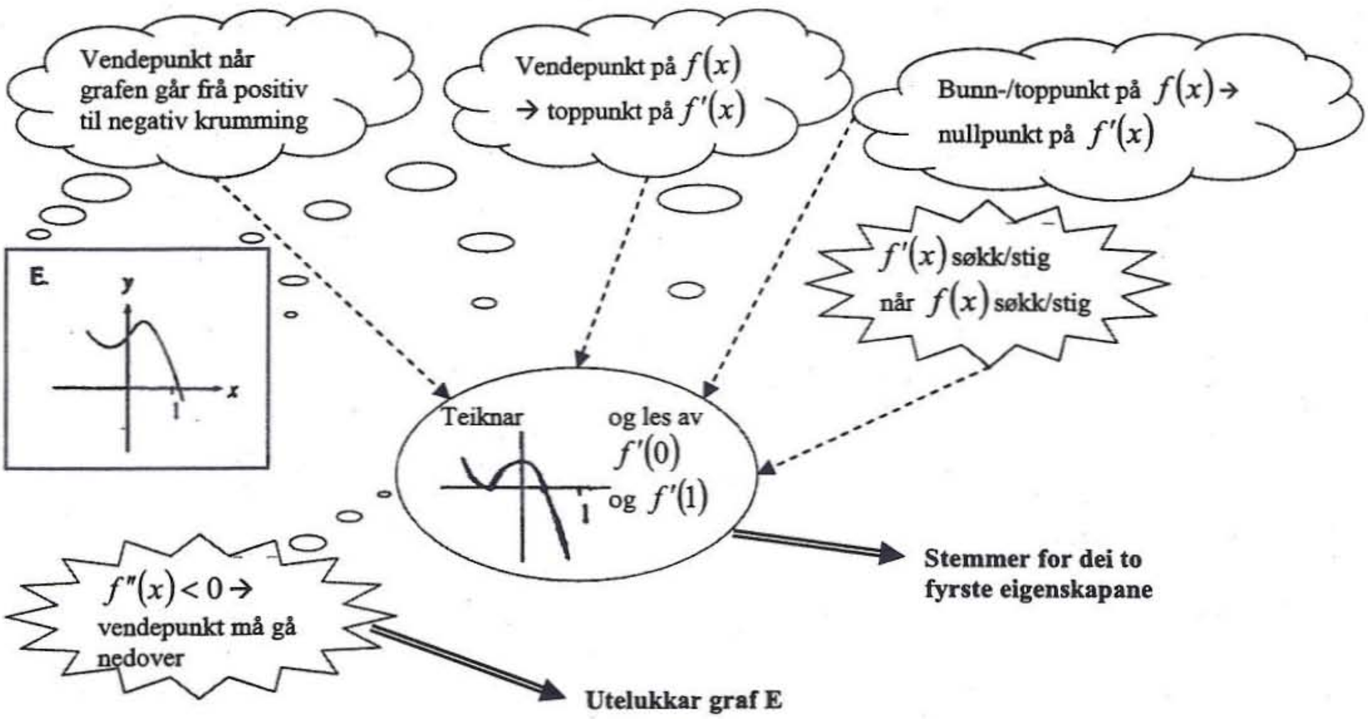
Figur 36: Emma utelukkar graf C.

Denne oppgåva vekker fleire begrepsbilete. Problemet er at det eine biletet er i konflikt med definisjonen, slik at Emma teiknar grafen feil (slik me også såg når ho skulle teikna grafen til den deriverte av graf A). Ho klarer heller ikkje å nytta seg av grafen ho har teikna, og ho vert difor spurd om å teikna inn tangentar på graf C. Det vekker eit bilete som ikkje er i konflikt med definisjonen og som ho klarer å dra nytte av for å utelukka graf C.



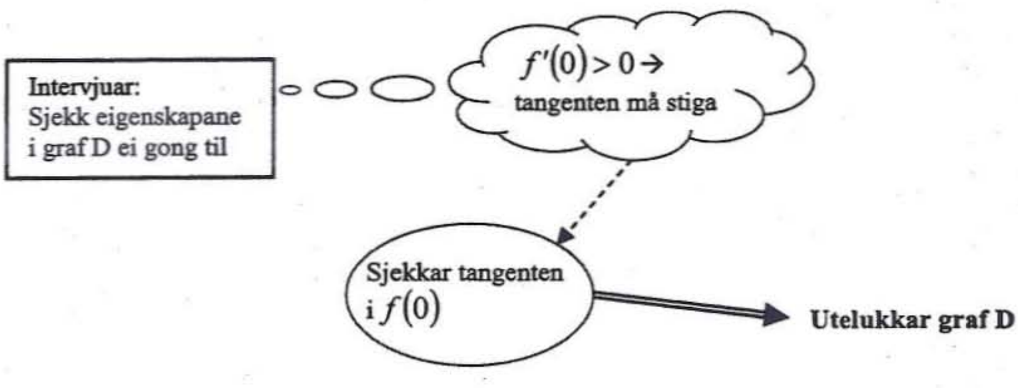
Figur 37: Emma finn at graf D kan vera rett.

Også denne oppgåva vekker mange begrepsbilete. Men ho klarer ikkje å gje svar på oppgåva ved hjelp av desse. Me ser og at ho har eit bilete av den andrederiverte som er i konflikt med definisjonen, og dette biletet er difor heller ikkje til hjelp. Ho vert difor spurd om å sjekka dei to fyrste eigenskapane ei gong til. Dei vekker no eit bilete som er i konflikt med definisjonen, og på bakgrunn av det meiner ho at graf D kan vera rett graf.



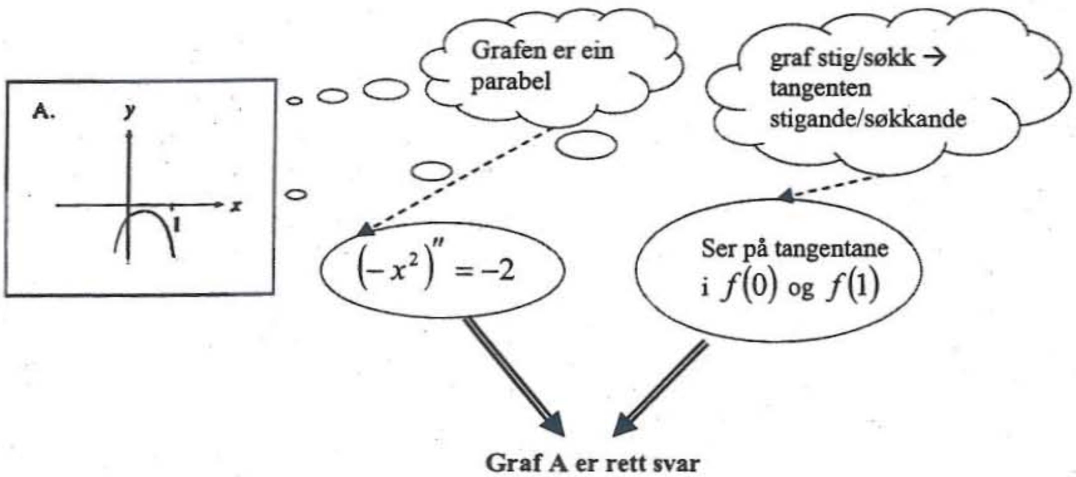
Figur 38: Emma utelukkar graf E.

Begrepsbileta som denne grafen vekker gjer Emma i stand til å teikna ein graf av $f'(x)$ som er nesten riktig. Heilt riktig vert den ikkje grunna ein potensiell konfliktfaktor. Men grafen er riktig nok til å sjekka dei to fyrste eigenskapane. For å utelukka denne grafen nyttar ho derimot eit grafisk bilete av den andrederiverte som er i konflikt med definisjonen. No har ho utelukka alle utanom graf D. Eg ber ho difor om å sjekka eigenskapane ei gong til.



Figur 39: Emma utelukkar graf E.

No vert berre eitt bilete vekka, og det er ikkje i konflikt med definisjonen. Det er difor enkelt å sjå at det ikkje kan vera graf D som er rett. Graf A vert difor vurdert på nytt.



Figur 40: Emma finn at graf A er rett.

No gjer Emma to korrekte observasjonar som er med på å bekrefta at alle eigenskapane stemmer. Det vert heller ikkje vekka nokre bilete som skapar konfliktar. Me kan også leggja merke til at ho nyttar ein algebraisk framgangsmåte for å sjekka den andrederiverte

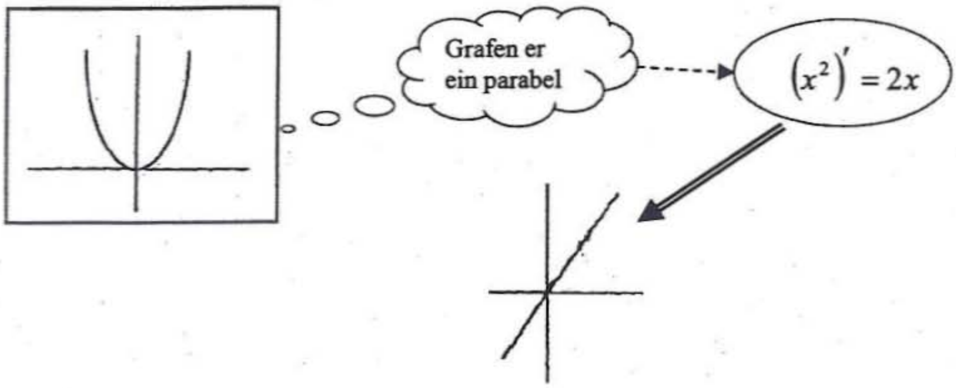
Oppsummering:

Emma har vanskar med å løysa desse oppgåvene. Me ser at sjølv om grafane vekker mange begrepsbilete så klarer ho ikkje alltid å dra nytte av desse. Samstundes har ho ein del bilete som er i konflikt med definisjonen. Desse gjer at ho ofte endar opp med feil løysing, eller inga løysing i det heile. Ho har også visse problem med å sjå kva som er det viktige for å løysa oppgåvene. Difor er ho ikkje effektiv i løysingsstrategiane sine. Me ser likevel at sjølv om ho ikkje har like gode grafiske bilete av den deriverte, så vel ho ofte grafiske løysingar. Men dei gongene ho vel å løysa oppgåvene algebraisk er ho effektiv og trygg.

4.3.3 Oversikt over Kristian sine løysingar

Frå 4.2.2 går det fram at Kristian er ein elev som har få kognitive einingar. Han har ein del faktakunnskap om den deriverte, men det er ikkje alltid desse bileta vert vekka i samband med oppgåver. Det tyder på at han i utgangspunktet har avgrensa kunnskap om den deriverte å dra nytte av når han skal løysa oppgåvene.

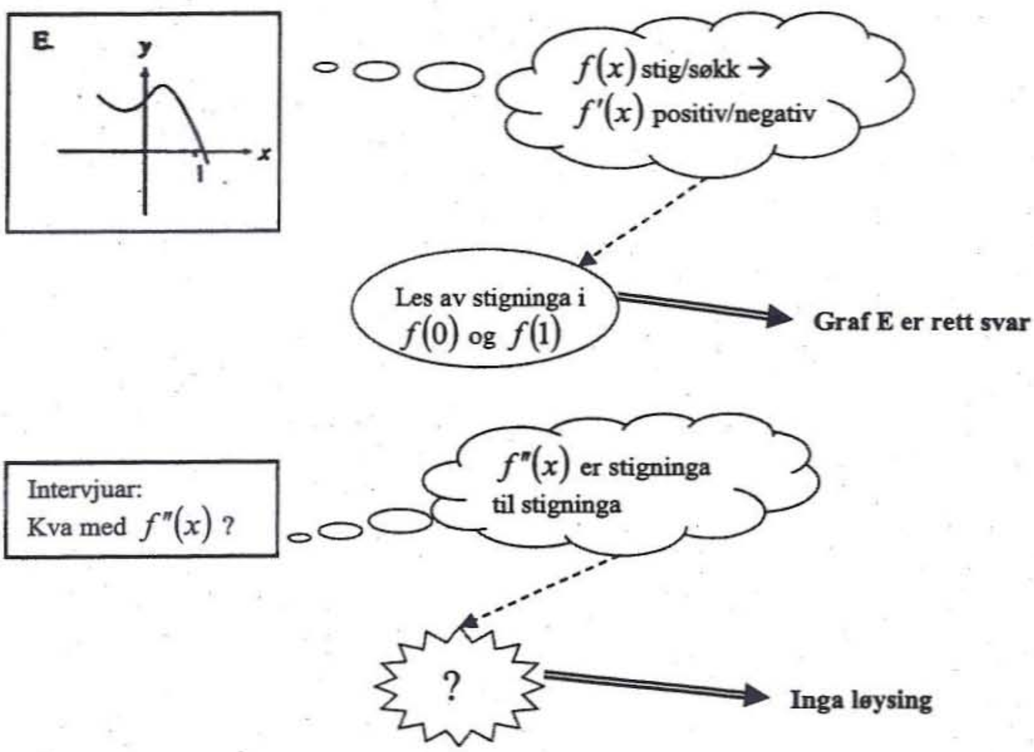
Oppgåve 2: Teikna grafen til den deriverte (parabel)



Figur 41: Kristian teiknar grafen til den deriverte.

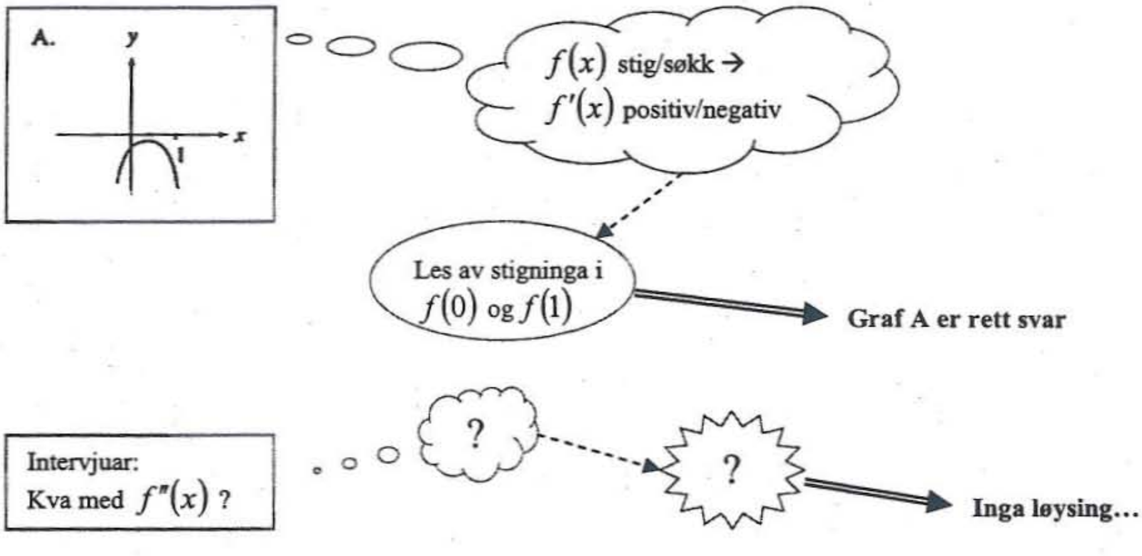
Me ser at Kristian umiddelbart registrerer kva graf det er. Han kan difor nytta ein algebraisk framgangsmåte til å gje eit korrekt svar. Ein kan leggja merke til at han ikkje vurderer grafisk om svaret er rimeleg, men stolar på den algebraiske utrekninga.

Oppgåve 1: Kva graf har alle eigenskapane?



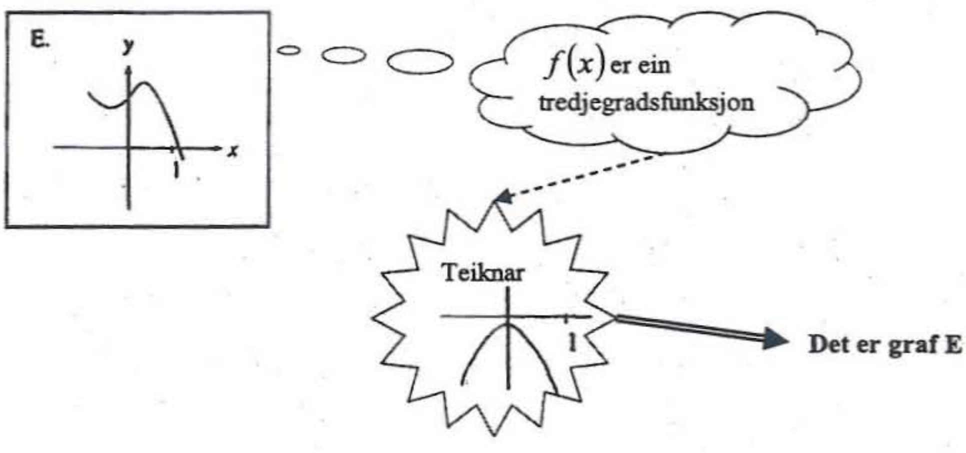
Figur 42: Kristian finn inga løysing på graf E.

Grafen vekker berre eitt begrepsbilete. Det vert nytta til å sjekka dei to fyrste eigenskapane. Han vert difor oppfordra til å sjå nærare på den siste eigenskapen. Det vekker eit bilete som han tilsynelatande ikkje klarer å dra nytte av sidan det berre er faktakunnskap. Han klarer difor ikkje å seia om denne grafen er korrekt eller ikkje. Han får no ein gjennomgang på kva den andrederiverte til ein funksjon er (forteiknsliner, vendpunkt, krumming). Han byrjar no på nytt med graf A.



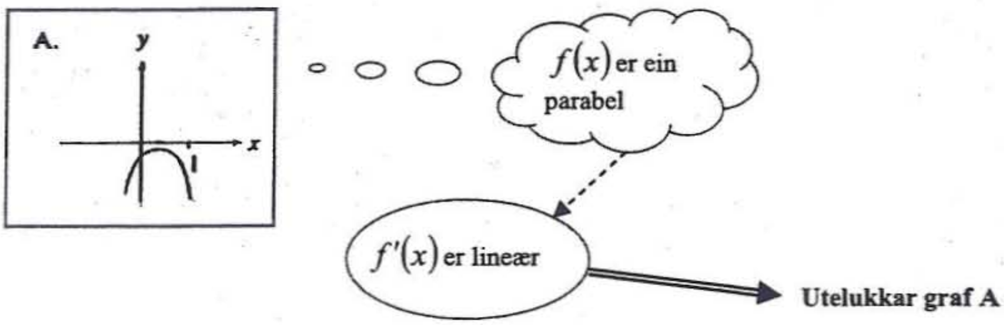
Figur 43: Kristian finn inga løysing på graf A.

Utfallet etter gjennomgangen av kva den andrederiverte er har ikkje hatt noko å seia for korleis Kristian løyser oppgåva. Graf A vekker eitt begrepsbilete som gjer Kristian i stand til å sjekka dei to fyrste eigenskapane, men den andrederiverte gjev ikkje meining. Grafen vekker ikkje nokre begrepsbilete som kan bidra til å løysa denne oppgåva. Han meiner no at han har oppfatta oppgåveteksten feil, og startar difor på nytt med graf E.



Figur 44: Kristian finn at graf E kan vera rett.

Grafen vekker no eit bilete som gjer at Kristian er i stand til å gje ei delvis algebraisk løysing. Likevel vert svaret feil grunna at den grafiske tolkinga er feil. Det eine begrepsbiletet er ikkje nok til å gje eit tilfredsstillande svar.



Figur 45 : Kristian utelukkar graf A.

Den same framgangsmåten som Kristian nytta for graf E vert no nytta til å utelukka graf A. Det eine begrepsbiletet er ikkje i konflikt med definisjonen, men konklusjonen er likevel feil. Kristian har ikkje nok oversikt til å dra nytte av det han finn ut. Det ender no med at løysinga vert gjeven

Oppsummering:

Kristian klarer ikkje å løysa den siste oppgåva. Totalt sett nyttar han berre to ulike måtar for å løysa desse oppgåvene. Han har ein metode (eitt begrepsbilete) for å vurdera $f'(x)$, og ein metode for å vurdera $f''(x)$. Begrepsbileta er i for stor grad faktakunnskap, ikkje kognitive einingar. Difor klarer Kristian heller ikkje overgangen til å tolka bileta i ein grafisk samanheng.

4.3.4 Markus, Emma og Kristian i høve til kvarandre

Begrepsbiletet i samband med den deriverte skil desse tre elevane frå kvarandre. Det har noko å seia for korleis dei løyser oppgåvene

Markus har eit rikt begrepsbilete, med eit kompakt nettverk av kognitive einingar. Han klarer såleis å dra nytte av dei vekka begrepsbileta i oppgåveløysinga. Han held fokus på det som er vesentleg i oppgåva og bruker ikkje tid på kognitive konfliktar eller tungvinne strategiar. Dette kjem tydeleg fram i diagramma som viser at Markus i oppgåve 1 berre nyttar eitt bilete for å utelukka graf C og D, og eitt bilete for å utelukka graf B og E. Vidare ser me at bileta er knytt til ei grafisk tolking av den deriverte. Han har grafiske bilete både av den deriverte og den andrederiverte som han er trygg på. Markus er heller ikkje avhengig av ein spesiell metode/prosess når han arbeider med desse oppgåvene. Han tenkjer *proceptual* (Gray og Tall 2001).

Emma har også eit rikt begrepsbilete. Likevel har ho større vanskar med å løysa oppgåvene. Det har ein samanheng med at dei vekka begrepsbileta ikkje er kognitive einingar. Ho evnar heller ikkje på same måte som Markus å sjå kva som er det vesentlege for å løysa oppgåvene. Mange bilete vert vekka i møte med ein graf, og nokre av bileta er i konflikt med kvarandre og/eller definisjonen. Totalt sett vert det difor ein meir "kaotisk" situasjon som krev mykje krefter mentalt. Ofte kjem Emma ut av dette med galt svar, slik me til dømes ser i oppgåve 1, graf D. Emma vel i større grad å løysa oppgåvene ved hjelp av ein prosess (*procedural thinking*, (Gray og Tall, 2001) Ho prøver å teikna grafen til den deriverte for lesa eigenskapane av den nye grafen. Det klarer ho ikkje alltid grunna bilete som lagar konflikt. Dette er også ein meir arbeidskrevjande metode enn den Markus nyttar i dei same oppgåvene.

Likevel fungerer denne metoden i nokre tilfelle. Når grafen er ein parabel (oppgåve 2 og graf A og B i oppgåve 2) vert derimot situasjonen så enkel at prosessen fungerer tilfredsstillande.

Kristian har eit fattigare begrepsbilete. Han har ein del faktakunnskap om den deriverte/andrederiverte, men bileta hans er ikkje kognitive einingar. Det fører i sin tur til at han ikkje løyser desse oppgåvene tilfredsstillande. På same måte som for Markus, vekker grafen i oppgåve 1 berre eitt bilete. Men Kristian klarer ikkje å dra nytte av det vekka biletet. Han dreg slutningar for raskt (fyrste gong han møter graf E), han dreg feil slutning (andre gongen han møter graf E), eller han klarer ikkje å dra noko slutning i det heile (når han vert utfordra på den andrederiverte). Han klarer likevel i oppgåve 2, på same måte som Emma, å teikna den deriverte til ein parabel. Han er likevel ikkje trygg nok på denne prosessen heller. Mellom anna finn han i oppgåve 1 at den deriverte til graf A er lineær. Men dette vert nytta til å utelukka graf A. Han er såleis ofte på eit *pre-procedural* (Gray og Tall, 2001) og av og til på ei *procedural* nivå.

Det er samstundes interessant å samanlikna dei grafiske framstillinga i kap. 4.3. Markus er til dømes langt meir effektiv enn Emma når han løyser oppgåvene. Men ut frå den grafiske framstillinga kan det sjå ut som at eit fattig begrepsbilete er positivt nå ein skal løysa oppgåver. Markus har tilsynelatande eit fattig begrepsbilete når ein ser på talet vekka bilete i samband med ei oppgåve, medan Emma har eit rikt bilete. Men Markus viste gjennom heile intervjuet at dei vekka bileta også var kognitive einingar. Difor er det tilsynelatande fattige biletet i dette tilfellet berre eit uttrykk for at Markus har fått til det Barnard og Tall (1997) finn som to viktige faktorar for ein fyldig kognitiv struktur. Markus har:

1. Pressa saman informasjon slik at den passar inn i kognitive einingar.
2. Knytt saman kognitive einingar slik at han fokuserer på relevant informasjon når det er nødvendig.

Dette nivået er Emma enno ikkje på, og hennar situasjon vert difor noko meir "kaotisk". Ho har likevel eit rikt begrepsbilete, men det er som nemnt tidlegare ikkje nok.

5 SAMLA DRØFTING AV RESULTAT

5.1 Innleiing

Førre kapittel drøfta problemstillingane på individplan. Eg har prøvd å gje ei oversikt over begrepsbiletet til den enkelte elev, samt sett nærare på korleis elevar med ulik kognitiv struktur løyser derivasjonsoppgåver. Kapittelet gav også ei kort oppsummering av dei sentrale funna i samanheng med elevane sin kognitive struktur, og det vart laga ei grafisk framstilling av korleis tre elevar med relativt ulik kognitiv struktur løyste eit utval av oppgåvene i datainnsamlinga. Eg vil no ta utgangspunkt i desse resultata og drøfta nokre av dei på eit meir generelt plan[33]. Drøftinga tek utgangspunkt i problemstillingane og forskingsspørsmåla frå kap. 1.2.2. Sjølv om problemstillinga og analysen er todelt har eg vald å sjå på utvalde resultat samla. Grunnen til dette er at dei to problemstillingane er nært knytt til kvarandre. Begrepsbiletet påverkar korleis dei løyser oppgåver og oppgåveløysing kan påverka begrepsbiletet.

5.2 Drøfting av utvalde resultat

Følgjande forskingsspørsmål var utgangspunkt for å svara på den fyrste delen av problemstillinga:

- Har elevane eit "funksjonelt" begrepsbilete av den deriverte i høve til den formelle begrepsdefinisjonen. Nyttar dei eventuelt den formelle definisjonen?
- Har elevane mange bilete i samband med den deriverte. Har dei "rike" eller "fattige" begrepsbilete?
- Kan ein identifisera kognitive konfliktar i begrepsbiletet?

Følgjande forskingsspørsmål var utgangspunkt for å svara på den andre delen av problemstillinga:

- Klarer elevane å tolka den deriverte grafisk, eller vel dei andre løysingsmetodar?
- Er det slik at eit "rikt" begrepsbilete gjer det lettare å løysa grafiske derivasjonsoppgåver?
- Kva har kognitive konfliktar å seia for elevane når dei arbeider med oppgåvene?

Det som er tydelegast etter intervjua er at:

- Elevane har god oversikt over den fyrstederiverte, men færre bilete knytt til den andrederiverte.
- Det er nokre potensielle konfliktfaktorar, men færre kognitive konfliktfaktorar.
- Elevane prøver i stor grad å nytta grafiske løysingsmetodar, men lukkast ikkje alltid.
- Eit rikt begrepsbilete er ikkje nok.
- Det er samanheng mellom mange kognitive einingar og effektive løysingsstrategiar.
- Det er effektivt å tenkja proceptual, men elevane er ofte ikkje på dette nivået.

---

[33] Eg minner om at det i metodekapitlet vart argumentert for at det er muleg å generalisera også frå eit lite utval. Difor vert også resultata i nokon grad vurdert mot undervisningsform, sjølv om dette ikkje har hatt noko plass i datainnsamlinga. Det gjekk fram av samtalar med lærar og elev før datainnsamlinga kva læreverk dei nytta og at undervisninga i stor grad tilnærma seg stoffet ved hjelp av dette læreverket. I tillegg er det naturleg å trekkja inn læreplanen.

Det var tydeleg at elevane hadde god oversikt over kva den (fyrste)deriverte til ein funksjon er. Dei møtte her den deriverte i ein grafisk samanheng og alle elevane hadde eit bilete av den deriverte som var funksjonelt og i samsvar med definisjonen til den deriverte. Dette var heller ikkje overraskande, og kan tyda på at elevane har jobba ein del med grenseverdien uttrykt ved tangenten til grafen i eit punkt. Dette er ei framstilling som læreverket til elevane nyttar. Vinner (1991) finn at elevar har misoppfatningar i samband med tangenten og meiner at det ikkje er uproblematisk å nytta denne tilnærminga til den deriverte. Denne analysen viser likevel at tangenten var ei kognitiv eining for elevane og eit godt hjelpemiddel i oppgåveløysinga.

Elevane hadde også mykje anna faktakunnskap om den deriverte. I følgje læreplanen skal elevane "*...forstå sammenhengen mellom forløpet til funksjoner og deres første- og annenderiverte...*" og "*...kunne tolke den deriverte i praktiske sammenhenger...*" (KUF, 1999, s. 10). Stort sett viste det seg at elevane til dømes kjende til at $f'(x)=0$ når grafen har eit topp- eller botnpunkt, at grafen stig når den deriverte er positiv, eller at grafen til den deriverte kunne fortelja kor mykje salet av ei bok auka og minka. Utvalet mitt består av elevar som har fullført 2MX, og dette kan tyda på at dei har fått med seg vesentlege delar av læreplanen sine mål 5. Det kom likevel klart fram at det varierte mykje i kor stor grad dei klarte å dra nytte av denne kunnskapen. Dei vekka begrepsbileta var ikkje alltid kognitive einingar. Det viser seg at det ikkje alltid er nok å ha eit "rikt" begrepsbilete (kvantitativt sett).

Spesielt tydeleg er det at elevane generelt har få kognitive einingar knytt til den andrederiverte til ein funksjon. Dei har ein del faktakunnskap, som at den andrederiverte er stigninga til stigninga, og at grafen til den deriverte har topp- eller botnpunkt når grafen til $f(x)$ har eit vendepunkt. Men dei har vanskar med å tolka den andrederiverte grafisk og å visualisera den andrederiverte.

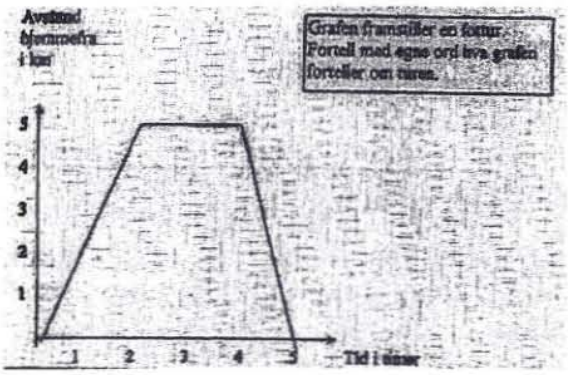
Sett i samanheng med det ein etter læreplanen skal kunna om den andrederiverte er ikkje dette overraskande. Elevar på vidaregåande skal kunna nytta den andrederiverte i samband med funksjonsdrøfting, (kjenna til krumminga til grafen). Det er likevel ein vanleg framgangsmåte å sjekka forteiknet til den andrederiverte algebraisk ved at funksjonsuttrykket vert derivert to gonger. Forteiknsliner vert også mykje nytta i denne samanhengen.

Likevel skulle ein kunna ønska at fleire av elevane nytta krumminga til grafen som eit hjelpemiddel i oppgåveløysinga sidan dette er eit begrep som vert mykje nytta i lærebøkene. For Markus er krumminga ei kognitiv eining og eit godt hjelpemiddel når han løyser oppgåve 1 i intervjuet. Det vert langt vanskelegare å sjå at $f''(x)<0$ for alle x dersom ein til dømes fyrst må finna funksjonsuttrykket til ein vilkårleg graf (ei procedural tilnærming til oppgåva). Det er lettare å løysa oppgåvene når ein tenkjer proceptual.

Totalt sett var det ikkje eit stort tal potensielle konfliktfaktorar hjå elevane, men det var spesielt to bilete som gjorde ei grafisk løysing av oppgåvene vanskeleg. Det som var mest tydeleg var at elevane i mange samanhengar tolka grafen biletleg. Dei vekka bileta varierte noko i "form", men det var ei biletleg tolking som låg bak i alle tilfella. Vanlege formuleringar var; "*korleis kan grafen til* $f'(x)$ *stiga når grafen til* $f(x)$ *søkk?*", og "*grafen til den deriverte kan ikkje stiga når den deriverte er negativ*".

Som nemnt i kap. 4.2.6 kan min bruk av uttrykket "biletleg tolking" diskuterast. Dei to utsegna i avsnittet over er ikkje nødvendigvis same vekka bilete, men dei *kan* vera det. Det fyrste er knytt til korleis $f(x)$ fysisk ser ut, medan det andre er knytt til ein eigenskap ved den deriverte og er ikkje nødvendigvis avhengig av ein oppteikna graf. Men det kan også henda at det *er* same vekka bilete, men at eleven har eit upresist språk (kanskje eleven meiner det same i dei to tilfella, men likevel uttrykkjer seg på forskjellig måte).

Vidare nyttar anna litteratur uttrykket på ein måte som ikkje fullt ut overlappar min bruk. Nygaard *et al.* (1999) gjev døme på at elevar på ungdomsskulen oppfattar ein graf som eit bilete av ein situasjon:



Figur 46: Graf som eit bilete av ein situasjon

Det er mange elevar som meiner at denne grafen fortel om ein fottur der dei først går to timar oppover, så går dei bortover i tre timar før dei til slutt går nedover ein time.

Det kan diskuterast om denne oppfattinga er av same slag som det eg definerer som biletleg tolking i denne oppgåva, men for begge misoppfattingane er noko av problemet relatert til funksjonsbegrepet. For å gje ei riktig tolking av ein graf må ein forstå at ein har ein uavhengig variabel på x-aksen, og ein avhengig variabel på y-aksen. I figur 46 er det slik at ein for ein x-verdi kan lesa av kor mange kilometer ein er frå startpunktet. Dersom ein skal skissera grafen til den deriverte til figur 46 må ein forstå at stigningstalet i eit punkt på grafen er y-verdien til grafen til den deriverte i for same x-verdi.

I tilfellet derivasjon er det difor nødvendig at ein oppfattar den deriverte som ein *funksjon* med den same uavhengige variabelen som den opphavlege grafen. $f'(2)$ gjev difor stigningstalet til grafen til $f(x)$ i punktet $(2, f(2))$. Dette er vanskeleg dersom ein ikkje har gjort den deriverte til eit objekt som ein sjølv kan utføra operasjonar på (reification/tingleggjering). Dermed opplever ein at elevar nyttar derivasjonsprosessane tilfredsstillande (Sfard si condensation, Sfard, 1999 og Tall sitt processnivå, Gray og Tall, 2001), men får vanskar når ein ikkje lenger kan nytta ein bestemt prosess.

Samstundes kan dette problemet delvis vera relatert til kva språk ein nyttar. Det er muleg at mitt språk ikkje var det same som det dei møtte i klasserommet. Det kan ha påverka elevane sitt språk. Uansett var ikkje elevane konsekvente i språkbruken. Ein graf kunne vera stigande/søkkande i ein samanheng og positiv/negativ i ein annan. Samstundes var både den deriverte og tangenten positiv/negativ eller aukande/minkande. Dette er ikkje nødvendigvis eit problem. Men uklart språk kan vera opphav til misforståingar. Det var i alle fall tydeleg at elevane ikkje såg at når grafen til den deriverte låg under x-aksen, var stigningstalet til den opphavlege grafen negativt. Eit uklart språk kan vera med på å bygga opp under misoppfattingar.

I tillegg til ei biletleg tolking av grafen, var spesielt eitt vekka bilete av den andrederiverte opphav til konflikt hjå nokre av elevane. Den andrederiverte seier noko om krumminga til grafen. Men elevane tolka dette (i samband med oppgåve 1 i intervjuet) som at grafen til $f(x)$ søkk når den andrederiverte er negativ (medan det eigentleg er eigenskapen til den deriverte). Det er vanskeleg å seia kvifor dei tolkar den andrederiverte slik. I lærebøkene vert den andrederiverte knytt til krumminga, grafen vender den hole sida opp eller ned. Kanskje elevane rett og slett ikkje har jobba nok med den andrederiverte, slik at begrepet ikkje vert ei kognitiv eining for elevane.

Sjølv om nokre av elevane hadde ein del potensielle konfliktfaktorar, var det få kognitive konfliktar. Ulike begrepsbilete vart vekka til ulik tid, der nokre av dei var i konflikt med kvarandre eller definisjonen. Men desse vart sjeldan vekka samstundes. Det tyder på at sjølv om begrepsbiletet, er "kvantitativt rikt", er ikkje nettverket i den kognitive strukturen godt nok for desse elevane. Dei har mange vekka begrepsbilete, men færre kognitive einingar.

Dei episodane der elevane hadde kognitive konfliktar var ofte knytt til ei biletleg tolking av grafen. Mellom anna sa Emma at "*...da vil han jo faktisk stige / for det er litt rart / for eg har jo sagt at han er negativ her...*" (line 552). Likeins sa Andreas at "*...så den øker jo og jeg liker ikke det helt...*" (line 317). Kognitive konfliktar kan vera eit teikn på at elevane er på veg mot eit høgare abstraksjonsnivå. Dei reflekterer over løysingane i staden for å nytta ein rutinemessig framgangsmåte.

Det var samstundes uvant for elevane å jobba med derivasjonsoppgåver som hadde ei grafisk vinkling. Læreverket dei hadde nytta i 2MX hadde ei tradisjonell tilnærming til derivasjon ved hjelp av grenseverdiar og tangentar. Den grafiske tolkinga er knytt til funksjonsdrøfting. Då er alltid funksjonsuttrykket gjeve og dei nyttar forteiknsliner og derivasjonsreglane for å undersøkja forteiknet til den fyrste- og andrederiverte. Det er difor tydeleg, og kanskje naturleg, at ei grafisk framstilling vert eit språk av 2.orden for elevane. Oppgåvene i intervjua viser i alle høve at den læringsprosessen dei har vore gjennom ikkje fullt ut har gjeve ein tilfredsstillande kognitiv struktur.

Intervjuanalysen viste vidare ein klar samanheng mellom mange kognitive einingar og effektive løysingsstrategiar. Som nemnt tidlegare er det viktig for ein fyldig kognitiv struktur at ein evnar å komprimera informasjon slik at den vert ein del av ei kognitiv eining og at ein koplar kognitive einingar saman, slik at ein har relevant informasjon tilgjengeleg når den trengs.

Markus er ein elev med ein rik kognitiv struktur som tenkjer proceptual. Han nyttar til ei kvar tid framgangsmåtar som er passande for problemstillinga. Han bruker heller ikkje krefter på vurderingar som ikkje er relevant for oppgåva. Han løyser difor alle oppgåvene i intervjuet på ein effektiv og oversikteleg måte. Dei andre elevane i denne datainnsamlinga hadde ikkje den same rike kognitive struktur som Markus. Det er i den samanheng eit poeng at elevane som vart vald til intervjua var flinke elevar. Dei gjorde det middels til svært bra på den skriftlege prøven. Det var difor lett å tru at dei hadde ei grei oversikt over emnet. Likevel er de fleste på eit prosessnivå. Dei har ikkje nok kognitive einingar og for fleire er derivasjonsbegrepet enno ikkje tingleggjort. Dette fører til vanskar når oppgåvene er av ein slik art at dei ikkje kan nytta ein algoritme eller liknande.

5.3 Grafisk derivasjon i klasserommet

Som nemnt tidlegare kan ikkje resultata frå analysen av datamaterialet vurderast direkte mot undervisningsform i denne oppgåva. Eg har ikkje vore til stades og observert undervisninga til desse elevane. Det har heller ikkje vore noko mål å vurdera ulike undervisningstypar mot kvarandre. Målet med denne oppgåva har vore å få ei oversikt over ei gruppe elevar sitt begrepsbilete innan (ein del av) eit matematiske emne, og sjå om det er nokon samanheng mellom begrepsbilete og løysingsstrategiar i utvalde oppgåver. Det er likevel interessant å sjå nærare på nokre av resultata med "lærarbriller". Dette delkapitlet er difor todelt. Med bakgrunn i analysen vil eg fyrst drøfta korleis ein kan jobba med grafisk forståing av den deriverte i klasserommet. Vidare vil eg ta for meg nokre utfordringar i samband med ei grafisk tilnærming.

Det er fleire gonger tidlegare i oppgåva nemnt at mange lærebøker nyttar grenseverdiar som ei tilnærming til den deriverte. I kurset 1MX vert gjennomsnittleg og momentan vekst nemnt og ein gjev døme på korleis lommereknaren kan finna den momentane vekstfarten utan at ein går nærare inn i korleis ein sjølv kan finna denne[34]. I kurset 2MX ser ein nærare på den momentane veksten ved hjelp av tangentar og grenseverdiar. Definisjonen til den deriverte vert gjeven og denne vert nytta til å derivera enkle funksjonar. Etter nokre få døme vert derivasjonsreglane gjevne. Desse vert vidare nytta i praktiske samanhengar og til funksjonsdrøfting.

Mange hevdar at ei visuell tilnærming til den deriverte kan hjelpa elevar med å forstå den deriverte betre[35]. Ein lokal rettlina graf (Tall, 1985b) kan til dømes vera ei kognitiv rot for elevane i starten av læringssekvensen, slik at ein i større grad unngår konfliktar knytt til grenseverdiar og tangentar (Vinner, 1991). Datamaterialet frå denne oppgåva viser derimot at elevane har god kontroll på den deriverte til ein funksjon. Dei veit at den deriverte gjev stigningstalet til grafen i eit punkt, den deriverte fortel kor mykje grafen stig eller søkk. Det kan tyda på at den tradisjonelle tilnærminga gjev tilfredsstillande forståing av grenseverdien og tangenten. Samstundes legg ikkje læreplanen vekt på at elevane skal arbeida mykje med grafisk forståing av den deriverte.

Eg vil likevel argumentera for ei undervisning som legg vekt på ei meir visuell tilnærming til emnet. Bakgrunnen for dette er dei kognitive konfliktane elevane hadde når dei måtte tolka den deriverte grafisk. Tall og Watson (2001b) fann at elevar som hadde hatt ei meir visuell tilnærming var meir fleksible når dei løyste oppgåver. Problemet for nokre av elevane i mitt utval var at dei mangla "grafspråket" og dermed *var* mindre fleksible, samt at dei ofte tolka grafar biletleg. Desse elevane hadde hatt god nytte av å møta den deriverte i ein grafisk samanheng.

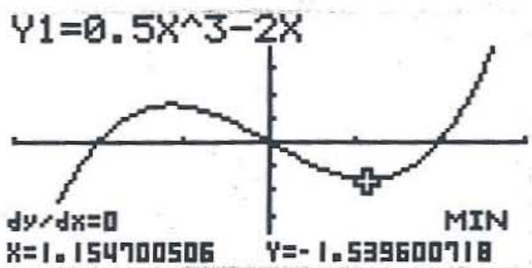
Eg vil allereie no poengtera at grafiske framstillingar ikkje utelukkar verken lærebok eller tavle. Elevane i undersøkinga til Tall og Watson (2001b) hadde ein lærar som underviste relativt tradisjonelt, men der det vart lagt vekt på mange grafdøme der læraren følgde grafen med hendene, slik at elevane kunne "sjå" korleis den deriverte endra seg.

Men det eksisterer mange lett tilgjengelege hjelpemiddel som kan integrerast i undervisninga. Det er også i tråd med den utviklinga skulen er i. Reforma *Kunnskapsløftet* vert sett i gang frå

[34] "Matematikk 1MX" (Erstad *et al.*, 2001) kallar dette lommereknarmagi!
[35] Eg viser til delkapittel 2.7, som gjev ein kort gjennomgang av litteratur på dette området.

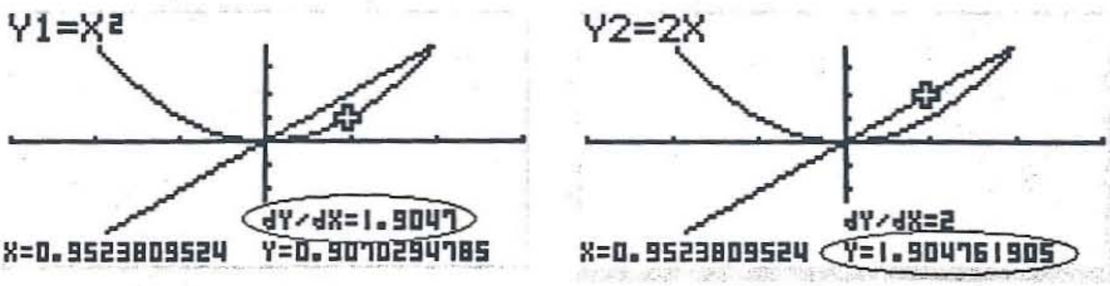
hausten 2006. I samband med denne reforma vert det utarbeidd nye læreplanar i alle fag. Det som allereie er klart er at det skal leggjast større vekt på elevane sine grunnleggjande dugleikar (KUF, 2004). Ei av desse grunnleggjande dugleikane er "*...å kunna nytta digitale verktøy...*" (KUF, 2004, s. 4). Eg vil no kort sjå nærare på følgjande digitale hjelpemiddel som lett kan takast i bruk i undervisninga; *grafisk kalkulator, Winplot* og *GEONExT*.

Førebels er det slik at alle elevar som tek grunnkurs i matematikk allmennfagleg studieretning må kjøpa ein *grafisk kalkulator*. Dersom ein nyttar den på rett måte er den eit godt hjelpemiddel til å framstilla den deriverte grafisk. Skjermbileta under viser korleis ein ved hjelp av kalkulatoren CASIO *fx*-9860 *SD* kan utforska ein graf og stigningstalet parallelt ved hjelp av ein innebygd funksjon som viser *dy*/*dx*[36]. Figur 47 viser at stigningstalet er 0 når grafen har eit lokalt minimum:



Figur 47: Grafen $0.5x^3 - 2x$ og stigningstalet i eit punkt.

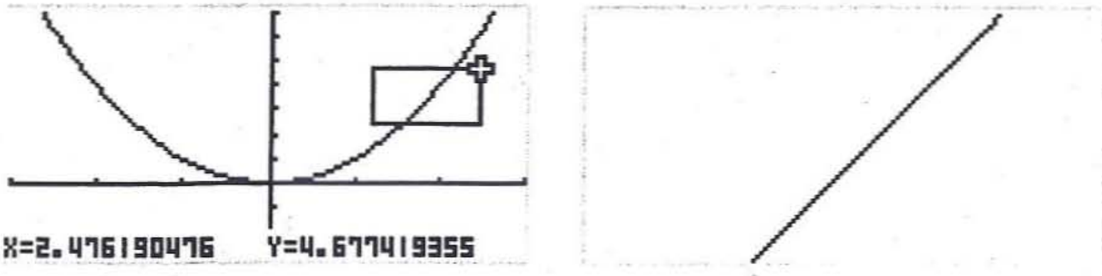
Dersom ein har funksjonsuttrykket til både $f(x)$ og $f'(x)$ kan ein teikna begge grafane i same skjermbilete og sjå at stigningstalet til $f(x)$ (*dy*/*dx*) har same verdi som funksjonsverdien til $f'(x)$ i eit punkt:



Figur 48: Grafen x^2, stigningstalet i eit punkt og grafen til den deriverte, $2x$.

Ein kan også sjå nærare på lokal linearisering. Dette var i følgje David Tall ei god kognitiv rot i samband med innlæringa av den deriverte. Figuren 49 viser grafen x^2 og eit utsnitt av denne der zoom-funksjonen er nytta nokre gonger. Det kjem tydeleg fram at grafen er lokalt rettlina:

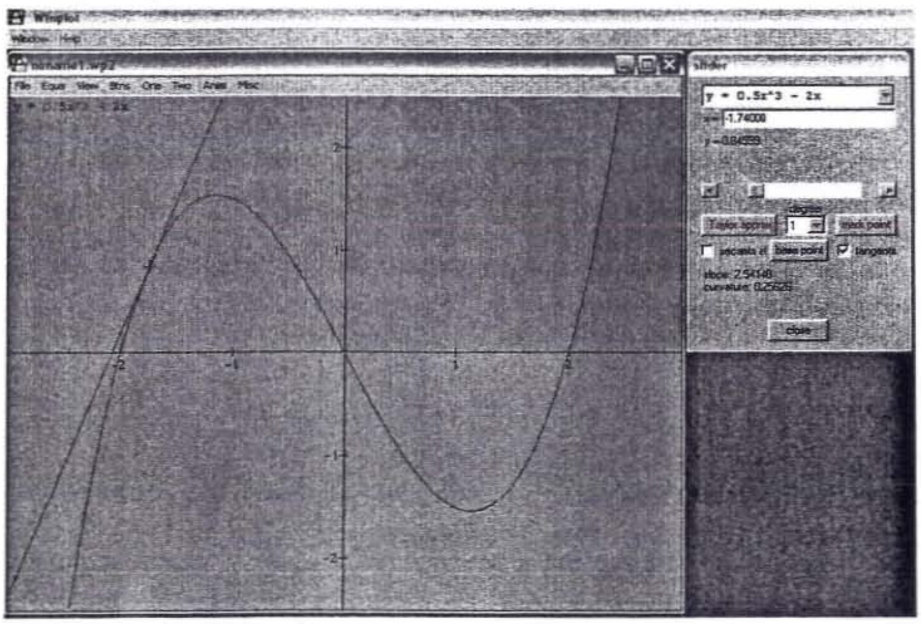
[36] Andre kalkulatorprodusentar, som til dømes TEXAS har naturlegvis dei same funksjonane og kan nyttast på same måte



Figur 49: Grafen x^2 og zoom-funksjonen.

Winplot er eit gratis dataprogram som kan teikna og animera kurver. Her kan du teikna grafar på data i staden for å nytta kalkulator. Desse grafane kan studerast ved hjelp av dei mange funksjonane som er tilgjengeleg. Programmet tilbyr mellom anna å finna koordinatar, null-, skjærings- og ekstremalpunkt. Det har også ein god zoom-funksjon.

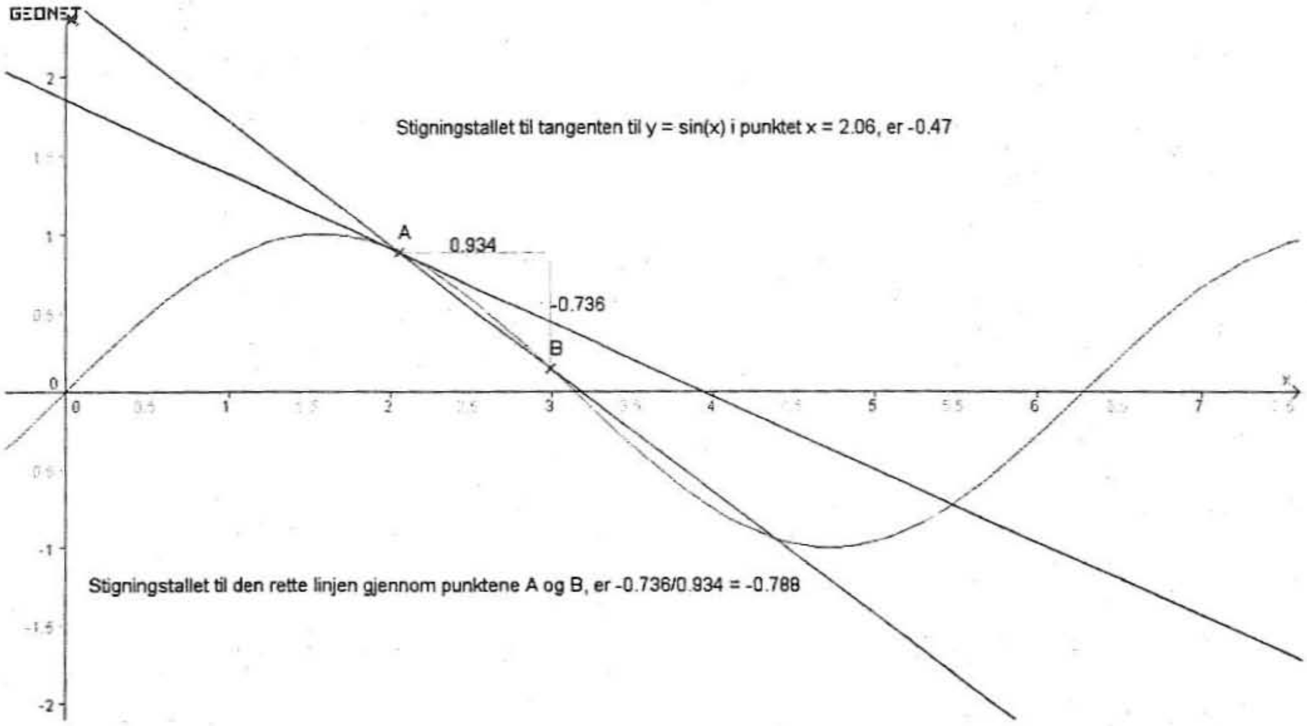
Eit konkret døme på korleis programmet kan nyttast i samanheng med den deriverte er å nytta programmet til å heile tida visa tangenten til ei kurve i eit punkt. Ein har eit såkalla "slider"-vindauga ("glidevindauga"), der ein kan kryssa av for tangent. Winplot vil no heile tida visa tangenten til kurva i eit punkt som er markert med eit trådkors. Elevane kan på denne måten sjå korleis tangenten si stilling er:



Figur 50: Tangenten i Winplot.

Ein kan også nytta Winplot til å teikna opp både $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$ i same bilete. Slik kan dei tre grafane vera eit utgangspunkt for diskusjonar i klassen. Selvik *et al.* (2002) gjev døme på dette.

GEONExT er eit gratis dynamisk geometriprogram som finst i norsk utgåve. Sjølv om programmet er eit geometriprogram inneheld det mange av eigenskapane til Winplot. Ein kan teikna grafar som kan studerast nærare. Figuren under viser korleis ein kan teikna inn både tangenten gjennom eit punkt, A, samt ein sekant mellom to punkt, A og B. Ein kan så dra fritt i desse punkta og på den måten sjå at stigningstalet til sekanten vert lik stigningstalet til tangenten i punktet A. Dette er ein god måte å framstilla gjennomsnittleg og momentan vekst og grenseverdien $\Delta y/\Delta x$.



Figur 51: Stigningstal til tangent og sekant (Riddervold, 2005).

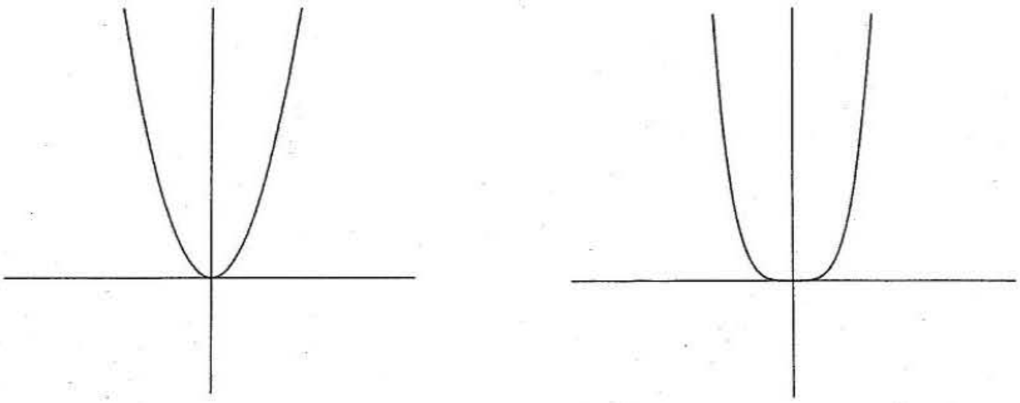
Det finst også mengder av Javaprogram på nettet som viser ulike animasjonar av tangentar, grenseverdiar, den deriverte av trigonometriske funksjonar og andre emne elevane møter i matematikk på vidaregåande skule. Det som er felles for alle desse digitale verktøya er at dei er enkle å ta i bruk, dei er gratis og dei krev lite tid og krefter. Tilgangen på datamaskiner i vidaregåande skulle er no så god at heller ikkje det er eit problem.

Dersom ein ynskjer ei meir heilskapleg integrering av teknologiske hjelpemiddel er dataloggarar eit godt alternativ. Ved hjelp av ein dataloggar og ulike sensorar kan ein gjera målingar og få ei praktisk tilnærming til matematiske begrep. Kalvø (2002) viser korleis dataloggarar kan nyttast som eit verktøy i begrepsforståinga av den deriverte.

På same måte som at eit einsidig fokus på grenseverdien, med overgang til reknereglane for derivasjon kan føra til kognitive konfliktar grunna manglande forståing er det "farar" knytt til visuelle framstillingar.

Som nemnt i teorikapitlet fann Krutetskii at nokre elevar hovudsakleg har analytiske evner. Desse elevane nyttar ikkje visuelle tilnærmingar i problemløysing. På same måte tek læringsstilmodellen til Dunn og Dunn utgangspunkt i at individ lærer på ulike måtar (kap. 2.7, s. 20-21). Den grafiske framstillinga er ikkje nødvendigvis best for alle. Difor er eit einsidig fokus på grafisk derivasjon like uheldig som eit einsidig algebraisk fokus. Men no er det ei gong slik at den deriverte *har* ei grafisk side, difor bør ein også arbeida med denne i undervisninga. Viktigare er det å vera klar over at også visuelle framstillingar kan vera uklare og gje elevar bilete som er i konflikt med definisjonen.

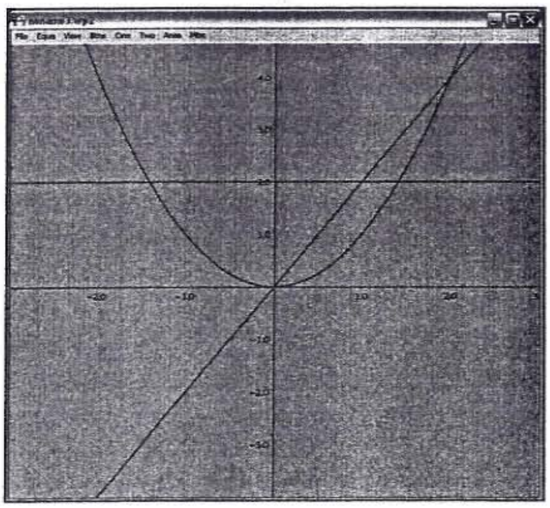
Figuren under viser dei to funksjonane x^2 og x^4



Figur 52: x^2 og x^4.

Som me ser er grafane ganske like. Men grafen til den deriverte er ei rett line for x^2 og ein tredjegradsfunksjon for x^4. I oppgåve 2 i intervjuet teikna Jonas ein tredjegradsfunksjon når han skulle teikna den deriverte til x^2 (slik Tim gjorde i Aspinwall, 1997). Figuren viser at det slett ikkje er opplagt at den deriverte vert ei rett line så lenge ein ikkje har gjeve funksjonsuttrykket. Dersom ein derimot veit at grafen er ein parabel, veit ein samstundes at den deriverte er ei rett line. Den grafiske framstillinga er ikkje alltid den tydelegaste!

Analysen viste at elevane hadde vanskar med å visualisera den andrederiverte. Krumminga til grafen var ikkje ei kognitiv eining for fleire av elevane. Dei digitale verktøya kan som nemnt vera eit hjelpemiddel til å forstå den andrederiverte ved at ein til dømes viser både opphavleg graf og grafen til den fyrste- og andrederiverte. Men heller ikkje det er uproblematisk. I mange samanhengar er det vanskeleg å finna meining i grafen til den andrederiverte sjølv om ein ser den på ein figur. Akselerasjon vert ofte nytta som eit praktisk døme på den andrederiverte i lærebøker. Men då er ofte $f(x)$ ein tredjegradsfunksjon og dei ser på $x > 0$. Det er nok ikkje tilfeldig. Figuren under viser grafen til funksjonen $f(x) = x^2$ samt grafane til den fyrste- og andrederiverte.



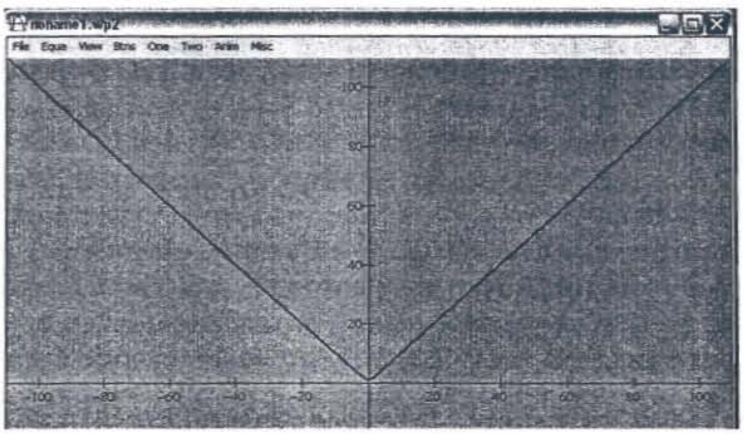
Figur 53: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ og $f''(x) = 2$.

Her ser me at akselerasjonen er konstant heile tida. Men det er vanskeleg å finna eit døme som passar for $x < 0$ og $x > 0$, og som kan vera ei kognitiv rot for elevane, slik vasstand kan vera for ein tredjegradsfunksjon (Selvik *et al.* 2002). Ein må passa på at ein ikkje gjer begrepa meir uklare i eit forsøk på å frigjera seg frå ei algebraisk vinkling.

I datainnsamlinga kom det fram at Markus og Jonas nytta krumminga til grafen for å avgjera om den andrederiverte var negativ for alle *x*. Krumminga var ei kognitiv eining for desse elevane. Deira forståing av den andrederiverte tyder på at læreboka si tilnærming har gjeve god begrepsforståing. Samstundes var det problematisk for dei fire andre elevane i datainnsamlinga å tolka den andrederiverte grafisk. Krumminga var ikkje ei kognitiv eining for dei. God begrepsforståing av den andrederiverte er ei utfordring.

I tillegg til visuelle framstillingar sine ibuande veikskapar er det viktig å vera klar over at datamaskina påverkar eit individ si konstruksjon av matematiske begrep. Datamaskina nyttar algoritmar for å komma fram til svar. Den måten datamaskina tenkjer på er ikkje nødvendigvis den mentale konstruksjonen ein ynskjer at elevane skal nytta. Den matematiske notasjonen $(x+3)^2$ kan representera to ulike mentale konstruksjonar (Dubinsky i Tucker, 1990, s. 178). Det er prosessen ein får ved å kombinere dei to prosessane "leggja til tre" og "ta kvadratet". Eller det er objektet ein får ved å ta kvadratet av $x+3$. Den fyrste konstruksjonen er å føretrekka. Den andre konstruksjonen kan vera ein algoritme utan forståing.

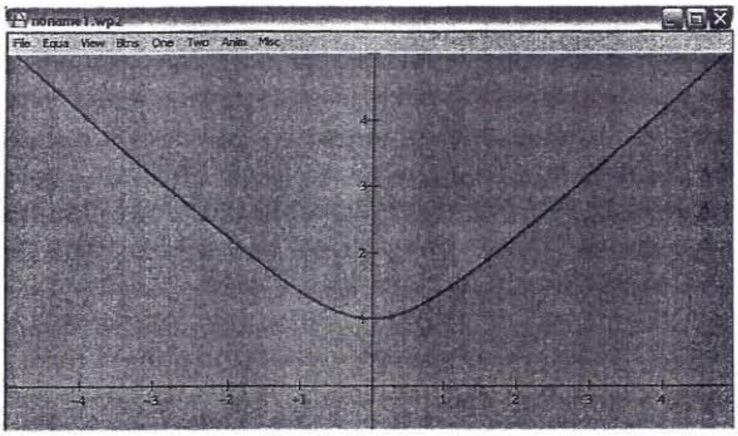
Giraldo *et al.* meiner at konfliktane som datamaskina får fram er lærerike (Giraldo *et al.*, 2002 og 2003). Figuren under[37] var utgangspunkt for ein diskusjon blant elevar. Dei fekk spørsmål om funksjonen var deriverbar for alle *x*. Funksjonen var $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.



Figur 54: Grafen til $f(x)=\sqrt{x^2+1}, x \in [-100, 100]$.

Me ser at grafen tilsynelatande har eit knekkpunkt i origo. Dersom ein nyttar zoom-funksjonen vil ein sjå at grafen *er* deriverbar:

[37] Figuren er laga i Winplot, medan Giraldo *et al.* nytta MAPLE. Programma gjev same resultat.



Figur 55: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in [-5, 5]$.

Dette er eit døme på at datamaskina skaper ein god læringssituasjon og gjer begrepsbiletet rikare. Giraldo *et al.* (2002) kallar dette "*theoretical-computational conflicts*". Vinner (1991) er noko meir forsiktig og seier at ein skal unngå unødvendige kognitive konfliktar, men provosera fram slike når dei er nødvendige.

Om ein nyttar digitale verktøy eller ikkje kan kognitive konfliktar vera eit "springbrett" mot ei høgare forståing av begrepa. Det var tydeleg i intervjua. Fleire av elevane viste ei god utvikling i løpet av intervjusituasjonen. Andreas tolka grafane biletleg og hadde problem med å tolka den andrederiverte grafisk. Samtalen utvikla seg i fleire tilfelle til ein læringssituasjon for Andreas ved at me greip fatt i dei kognitive konfliktane. I slutten av intervjuet tolka han ikkje lenger grafen biletleg. Han drog nytte av begrepsbilete som ikkje var i konflikt med definisjonen. Utgangspunktet for dei gode læringssituasjonane var grafar og grafisk tolking av den deriverte.

Som ei kort oppsummering vil eg peika på følgjande faktorar som er viktige å vurdera i undervisningssamanheng. Elevane er avhengig av eit rikt begrepsbilete - mange vekka bilete/ kognitive einingar for å vera fleksible når dei løyser oppgåver. Nokre gonger er ei algebraisk utleiing det enklaste, medan det i andre tilfelle er nødvendig at elevane kan tolka den deriverte grafisk. Elevane har visse problem med den grafiske tolkinga. Difor bør dei arbeida meir med den deriverte i ein grafisk kontekst. Det finst mange lett tilgjengelege, gratis digitale verktøy som kan nyttast i undervisninga. Ei visuell framstilling er ikkje den beste løysinga i alle tilfelle, og ein bør vera klar over at datamaskiner har veikskapar som kan gje kognitive konfliktar. I staden for å unngå bruk av digitale verktøy bør ein gripa tak i desse konfliktane slik at dei kan hjelpa elevane mot ei høgare forståing av derivasjonsbegrepet. Digitale verktøy og grafiske framstillingar i undervisning er med på å gje elevane eit rikare begrepsbilete ved at dei møter den deriverte på fleire måtar enn med eit einsidig fokus på derivasjonsreglar.

5.4 Kort oppsummering av hovudfagsarbeidet

Utgangspunktet for dette hovudfagsarbeidet var eit ynskje om å sjå nærare på elevar si forståing av matematiske begrep. Det vart tidleg klart at eg måtte gjera avgrensingar. Derivasjon er eit stort emne i matematikk på vidaregåande skule og har mange praktiske bruksområde. Det er tidlegare skrive ei oppgåve om elevar si forståing av derivasjon med utgangspunkt i TIMSS-undersøkinga i 1997. Slike store undersøkingar seier *kva* elevar svarer på oppgåver, men mindre om *kvifor* dei svarer som dei gjer. Difor vart ei kvalitativ tilnærming vald. I tillegg valde eg å sjå nærare på elevar si grafiske forståing av derivasjon. Noko av motivasjonen for dette valet finn ein i teorien til mellom anna David Tall, som meiner at derivasjonsbegrepet kan tilnærmast på ein meir intuitiv måte enn den tradisjonelle grenseverditilnærminga.

Problemstillinga i denne oppgåva vart todelt. I fyrste del av problemstillinga ville eg sjå nærare på "**begrepsbiletet hjå eit utval elevar i vidaregåande skule i samband med ei grafisk framstilling av den deriverte**". Den har eg prøvd å svara på ved grundig analyse av intervju/observasjon av nokre elevar som jobbar med den deriverte i ein grafisk kontekst. Teori har vore eit viktig analyseverktøy i dette arbeidet. Dei viktigaste funna kan kort oppsummerast slik:

- Alle elevane har god oversikt over den fyrstederiverte. Dei har mykje faktakunnskap, men dei klarer ikkje alltid å dra nytte av denne kunnskapen. Dei vekka begrepsbileta er ikkje alltid kognitive einingar.
- Fleire av elevane har større vanskar med å visualisera den andrederiverte, og samstundes få kognitive einingar knytt til den andrederiverte.
- Den største kognitive konflikten er at elevane ofte tolkar grafen biletleg. Den biletlege tolkinga tek ulike former, men resultatet er at elevane får vanskar med å teikna opp grafen til den deriverte. Det vert oftast enklare når dei har gjeve funksjonsuttrykket.
- To av elevane skil seg positivt ut ved at dei har eit rikt og kompakt nettverk av kognitive einingar. Desse elevane har få eller ingen kognitive konfliktar.

Den andre delen av problemstillinga skulle " **Sjå på samanhengen mellom begrepsbilete og løysingsstrategiar i derivasjonsoppgåver der ei grafisk tolking av den deriverte er føremålstenleg**". For å svara på dette har eg gjeve ei grafisk framstilling av korleis tre av elevane har løyst nokre av oppgåvene i datainnsamlinga. Dei tre elevane hadde kvalitativt ulike begrepsbilete. Markus har eit rikt begrepsbilete og mange kognitive einingar. Emma har også eit rikt begrepsbilete kvantitativt sett, men har færre kognitive einingar. Kristian er ein svakare elev, med eit fattigare begrepsbilete. Det er tydeleg at:

- Eit rikt og kompakt nettverk av kognitive einingar gjer det lettare å løysa oppgåvene grafisk. Det gjev mindre "kognitivt støy", og oppgåvene vert løyst effektivt.
- Eleven med det rikaste begrepsbiletet vel også grafiske løysingar. Dei andre to elevane prøver også å løysa oppgåvene grafisk, men møter problem grunna kognitive konfliktar og manglande grafiske bilete av den deriverte.

I ei slik oppgåve er det naturleg å seia noko om mulege konsekvensar for undervisning. Med bakgrunn i at fleire av elevane hadde vanskar med å tolka den deriverte grafisk vil eg argumentera for ei sterkare vektlegging av ei grafisk framstilling av den deriverte i undervisninga. I mange samanhengar var elevane lite fleksible i oppgåveløysinga, dei prøvde på ulike måtar å finna funksjonsuttrykket til grafen. Nokre begrepsbilete var i konflikt med det som var matematisk korrekt og gjorde at elevane feiltolka den grafiske framstillinga. Vidare såg eg at elevane fekk ei betre forståing av den deriverte etter å ha jobba med grafiske derivasjonsoppgåver. Difor vert følgjande argument viktige for å leggja meir vekt på grafisk derivasjon i undervisning:

- *Det er enkelt og kostnadsfritt* – gode dataprogram er lett tilgjengelege.
- *Det er lite arbeidskrevjande* – alle elevane har grafisk kalkulator og tilgangen på datamaskiner er etterkvart god i dei vidaregåande skulane.
- Digitale verktøy og grafiske framstillingar *gjev elevane rikare begrepsbilete ved at dei møter fleire representasjonar av den deriverte.*
- Grafiske framstillingar kan gje kognitive konfliktar som kan vera eit springbrett mot ei *høgare forståing av derivasjonsbegrepet.*

5.5 Aktuelle idear å arbeida vidare med

Den kvalitative tilnærminga som er vald i denne oppgåva har gjeve mykje datamateriale. Eg har fått ei god oversikt over korleis elevar tenkjer når dei arbeider med grafisk derivasjon. Det hadde vore interessant å sjå nærare på elevar si forståing av andre delar av derivasjonsbegrepet med ei kvalitativ tilnærming, gjerne med utgangspunkt i nokre av oppgåvene frå TIMSS.

Ei naturleg oppfølging av denne oppgåva kunne også ha vore å sjå om ei undervisning som legg vekt på ulike framstillingar av den deriverte (algebraisk/grafisk/numerisk) vil gje elevane eit rikt kognitivt nettverk med mange kognitive einingar. I denne oppgåva såg eg at kognitive konfliktar vart "løyst" når elevane arbeidde med grafiske oppgåver. Andre framstillingar vil kunna gje andre gode læringssituasjonar.

Vidare kunne analysen av intervjua tyda på at nokre av dei kognitive konfliktane hadde utgangspunkt i upresist matematisk språk. Kva er skilnaden på at grafen til den deriverte er stigande og at den er positiv? Det kunne sjå ut som at elevane vart forvirra av dette, men for å avgrensa oppgåva vart ikkje dette gått nærare inn på. Språkdimensjonen kan såleis vera eit utgangspunkt for vidare arbeid.

Utvalet i denne oppgåva bestod av 6 elevar. I det enkelte intervju kom det likevel fram interessante situasjonar, som dei kognitive konfliktane nemnt over. Det kunne vore spanande å sjå nærare på ein elev over ein lengre tidsperiode, til dømes eit case-studie av ein elev i innlæringa av derivasjonsbegrepet. Er det ei rekkjefølgje i begrepsutviklinga? Kva kognitive konfliktar oppstår og kvifor? Kva skjer når eit begrepsbilete vert vekka/aktivert og kvifor vert eit bilete vekka i nokre situasjonar og ikkje i andre?

I forlenginga av det kan ein tenkja seg at ein også går nærare inn i problemstillingar knytt til dei grafiske framstillingane frå kap. 4.3. Det er interessant å sjå at det her kan vera parallellar til begrepskart (Grevholm, 2005) som kognitive verktøy. Begrepskart kan til dømes nyttast for ein enkelt elev. Kanskje slike kart kan gje ei god framstilling av korleis ein elev sitt begrepsbilete knytt til den deriverte utviklar seg.

6 REFERANSELISTE

Adams, R. A. (1999). *Calculus: A Complete Course*. Canada: Addison Wesley Longman Ltd.

Angell, C., Kjærnsli, M., Lie, S. (1999). *Hva i all verden skjer i realfagene i videregående skole?* Oslo: Universitetsforlaget.

Aspinwall, L., Shaw, K., L., Presmeg, N., C. (1997). Uncontrollable Mental Imaginery: Graphical Connections Between a Function and its Derivative. *Educational Studies in Mathematics*, **33**: 301-317.

Artigue, M. (1991). Analysis. I D. Tall (red), *Advanced Mathematical Thinking*, (s. 167-199). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ausubel, D., P. (2000). *The Acquisition and Retention of Knowledge: A Cognitive View*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Barnard, T., Tall, D. (1997). Cognitive Units, Connections and Mathematical Proof. *Proceedings of PME*, **21** (2): 41-48. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997d-barnard-cog-units.pdf

Barnard, A. D., Tall, D. (2001). A Comparative Study of Cognitive Units in Mathematical Thinking. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **25** (2): 89-96. Utrecht. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001d-pme25-barnard-tall.pdf

Biehler, R., Scholz, W., R., Strässer, R., Winkelmann, B. (1994). *Didactics of Mathematics as a Scientific Disipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cornu, B. (1991). Limits. I D. Tall (red): *Advanced Mathematical thinking*, (s. 153-167) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Crowley, L., Tall, D. (1999). The Roles of Cognitive Units, Connections and Procedures in Achieving Goals in College Algebra. *Proceedings of the Conference of PME*, **23** (2): 225-232. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999d-crowley-pme.pdf

Davis, R., B., Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *Journal of Mathematical Behaviour*, **5**: 281-303.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. I D. Tall (red), *Advanced Mathematical Thinking*, (s. 25-42). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, I D. Tall (red), *Advanced Mathematical Thinking*, (s. 95-127). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Eisenberg, T. (1991). Functions and Associated Learning Difficultes, I D. Tall (red), *Advanced Mathematical Thinking*, (s. 140-152). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Erstad, G., Heir, O., Bjørnsgård, I., Borgan, Ø., Pålsgård, J. (2001). *Matematikk 1MX/1MY*. Aurskog: H. Aschehoug & Co.

Erstad, G., Heir, O., Bjørnsgård, I., Borgan, Ø., Pålsgård, J. (2004). *Matematikk 2MX*. Otta: H. Aschehoug & Co.

Erstad, G., Heir, O., Bjørnsgård, I., Borgan, Ø., Pålsgård, J., Skrede, P, A. (2002). *Matematikk 3MX*. Oslo: H. Aschehoug & Co.

Giraldo, V., Carvalho, L., M., Tall, D. (2002). Theoretical-Computational Conflicts and the Concept Image of Derivative. *Proceedings of the BSRLM Conference,* **22** (3): s. 37-42. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002m-giraldo-carv.pdf

Giraldo, V., Carvalho, L., M., Tall, D. (2003). Descriptions and Definitions in the Teaching of Elementary Calculus. I: Pateman, N., A., Dougherty, B., J., Zilliox, J. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* **27** (2): 445-452. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003d-giraldo-carv-pme.pdf

Grevholm, B. (2005). Kognitiva verktyg för lärande i matematikk – tankekartor og begreppskartor. *Tangenten,* **1** 2005: 22-29.

Gray, E., M., Pitta, D., Pinto, M., Tall, D. (1999). Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary and Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* **38** (1-3): 111-133. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999k-ed-dem-marcia-esm.pdf

Gray, E., M., Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education,* **26** (2): 115-141. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994a-gray-jrme.pdf

Gray, E., M., Tall, D. (2001). Relationships between Embodied Objects and Symbolic Procepts: an Explanatory Theory of Success and Failure in Mathematics, *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* **25** (3): 65-72. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001i-pme25-gray-tall.pdf

Greeno, J. (1983). Conceptual Entities. I: *Mental Models*, Gentner, D., Stevens, A., L. (red) Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Grouws, D., A. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: Macmillan.

Halmos, P., R. (1985). *I Want To Be a Mathematician; With 46 Photographs: An Automatography in Three Parts*. Washington: Mathematical assosiation of America.

Harel, G., Kaput, J. (1991). The Role of Conceptual Entities and Their Symbols in Building Advanced Mathematical Concepts, I D. Tall (red): *Advanced Mathematical Thinking*, (s. 82-95). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Høines, M., J. (1998). *Begynneropplæringen: Fagdidaktikk for barnetrinnets matematikkundervisning*. Bergen: Caspar forlag.

Imsen, G. (2001). *Elevens verden*. Oslo: Tano Aschehoug.

Johansen, N., V., Lie, S., Kjærnsli, M., Caspersen, M., L., Turmo, A. (1998). *Hvor gode er matematikkspesialistene våre? Rapport nr. 33*. Oslo: Universitetet i Oslo.

Kjærnsli, M., Lie, S. (2003). Hva forteller de store internasjonale undersøkelsene om naturfag i norsk skole og på hvilket grunnlag forteller de det?, I Jorde, B., og Bungum, B. (red), *Naturfagdidaktikk. Perspektiver, Forskning, Utvikling*, (s.410-440). Oslo: Gyldendal akademisk.

Kalvø, T. (2002). *Den deriverte på skråplanet. Bruk av datalogger i begrepsforståelse av den deriverte*. Hovedfagsoppgave, Høgskolen i Agder.

Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet, KUF (1999). *Læreplanverket for videregående opplæring, matematikk, studieretningsfag i studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag*. Oslo, Juli 1999. Tilgjengeleg frå: http://utdanningsdirektoratet.no/upload/larerplaner/al_ok_adm/matematikk_2mx_3mx_2mz_3mz.rtf

Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet, KUF (2004). *Dette er kunnskapsløftet – rundskriv F-13/04*. Tilgjengeleg frå: http://www.kunnskapsloeftet.no/filer/rundskrivkunnskapsloftet200206.pdf

Kvale, S. (2002). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: ad Notam Gyldendal.

Lythcott, J., Duschl, R. (1990). Qualitative Research: From Method to Conclusion, *Science Education*, **74** (4): 455-460.

Merriam, S., B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Mason, J., Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving*. Victoria: Deakin University.

Mundy, J., F., Graham, K., G. (1991). An Overview of the Calculus Curriculum Reform Effort: Issues for Learning, Teaching, and Curriculum Development. *The American Mathematical Monthly*.

Nygaard O., Hundeland, P., S., Pettersen, P. (1999). *Aha: matematikk og matematikkdidaktikk*. Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A. (2001). *Sinus 2MX Grunnbok*. Oslo: J. W. Cappelens Forlag AS.

Orton, A. (1983). Students Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, **14**: 235-250.

Orton, A. (2004). *Learning Mathematics: Issues, Theory and Classroom Practice*. London: Continuum.

Piaget, J. (1970). *The Principles of Genetic Epistemology*. London: Routledge & Keegan Paul.

Riddervold, H., J. (2005). Dynamisk geometri i videregående skole. I C. Kirfel (red), *Inspirasjonsbok for matematikklærere*, (s. 71-76). Bergen: Caspar forlag.

Selvik, B., K., Høines, M., J., Rinvold, R. (2002). *Matematiske sammenhenger – algebra og funksjonslære*. Bergen: Caspar forlag.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, **22**: 1-36.

Streitlien, Å. (2002). "Nå må alle tenke litt, og så spør jeg en" - analyse av interaksjonen i en matematikktime. I I. Bråten (red): *Læring i et sosialt, kognitivt og sosialkognitivt perspektiv*, (s. 58-73). Oslo: Cappelens Akademiske forlag.

Sveriges Lärstilcenter (u.å). *The Dunn & Dunn Learning Styles Model (i en skandinavisk version)*. Tilgjengeleg frå:
http://www.larstilscenter.se/larstilramar.htm

Tall, D. (1985a). Understanding the Calculus. *Mathematics Teaching*, **110**: 49-53.
Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1985a-und-calc-mt.pdf

Tall, D. (1985b). The Gradient of a Graph. *Mathematics Teaching*, **111**: 48-52.
Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1985b-gradient-mt.pdf

Tall, D. (1987). Constructing the Concept Image of a Tangent. *Proceedings of the International Conference of PME*, **11** (3): 69-75. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1987c-tangent-pme.pdf

Tall D. (1989). Concept Images, Computers & Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics*, **9** (3): 37-42. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989e-conim-genorg-flm.pdf

Tall, D. (1991b). Recent Developments in the Use of the Computer to Visualize and Symbolize Calculus Concepts. *The Laboratory Approach to Teaching Calculus*, **20**: 15-25.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. I: D., A. Grouws (red), *Handbook of Research on Mathematics Teatching and Learning* (s. 495-509). New York: Macmillan Publishing Company.

Tall, D. (2000a) Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (How the Computer can Support Mathematical Thinking and Learning). I: Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (red), *Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics*, **5**: 3-20. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf

Tall D, Blackett, N. (1986). Investigating Graphs and the Calculus in the Sixth Form. I E. Bufton (red), *Exploring Mathematics with Microcomputers*, (s. 156-175). Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1986e-blackett-6form.pdf

Tall, D., Gray, E., Ali, M., B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., Yusof, Y. (2001a). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **1**: 81-104. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001a-symbol-bifurcation.pdf

Tall, D., McGowen, M., DeMarois, P. (2000b). The Function Machine as a Cognitive Root for Building a Rich Concept Image of the Function Concept. *Proceedings of PME-NA*, **1**: 247-254. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000e-functlon-theory.pdf

Tall, T., McGowen, M., DeMarois, P. (2000c). The Function Machine as a Cognitive Root. *Proceedings of PME-NA*, **1**: 255-261. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000d-functlon-empirical.pdf

Tall, D., Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, **7**: 357-362. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1983a-sheath-pme.pdf

Tall, D., Thomas, M., Davis, G. (1997). What is the Object of the Encapsulation of a Process?, I: F. Biddulph, K. Carr (red), *People in Mathematics Education*, **20** (2): 132-139. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997c-davis-thomas-merga.pdf

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12**: 151-159.

Tall, D., Watson, A. (2001b). Schemas and Processes for Sketching the Gradient of a Graph. Tilgjengeleg frå:
http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/drafts/dot2001-tall-watson-draft.pdf

Tucker T., W. (1990). *Priming the Calculus Pump: Innovations and Resources.* Washington: Mathematical Association of America.

Vikse, J., T. (1999). *Forståelse av derivasjon - Elevers forståelse av derivasjonsbegrepet.* Hovedfagsoppgave, Høgskolen i Agder.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Matematical Education in Science and Technology*, **14**: 293-305.

Vinner, S. (1991). The Role of Defenitions in the Teaching and Learning of Mathematics I D. Tall (red), *Advanced Mathematical Thinking*, (s. 65-82). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Østerlie, P., G. (2005). Om symbolregnende lommeregnere i den videregående skolen. I C. Kirfel (red), *Inspirasjonsbok for matematikklærere,* (s. 52-58). Bergen, Caspar forlag.

7 VEDLEGG

7.1 Intervjuguide

INTERVJUGUIDE:

OPPGÅVE KOS (Timss):

for me startar:
- Les/forklar oppgåva fyrst
- Be eleven tenke høgt

- La eleven jobbe utan store innvendingar

Hugs:

Inngåande spm?
-> Kan du seie meir om det?
-> Har du andre døme på det?

Fortolkande spm?
-> Du meiner altså at... (omformulera svar for å
-> Stemmer det at du... få bekrefta kva eleven meiner)

Direkte spm?
-> Er den deriverte til ein funksjon...? (på slutten av intervjuet,
-> Vil ein graf som er neg. $\forall x$ ...? for å dra meir info ut av det)

Dersom rett svar:
- kvifor / kva tenkte du?
- kvifor kunne det ikkje vere ein av dei andre? (gå gjennom b-e)

Dersom feil svar:
- be elev vise kvifor alle eigenskapane held -> hjelpe eleven på veg

Intervjuspørsmål:
- Kva fortel $f'(x)$ / $f''(x)$ oss om ein graf?
- Korleis er ein graf når $f'(x)$ er positiv/negativ?
- Kva seier eigenskapen $f'(0)>0$ / $f'(1)<0$ / $f''(x)<0$ $\forall x$ deg?
- Kan du utelukke nokon?
  ↳ kvifor?

OPPGÅVE: "def. på den deriverte":

- Innleie med at det er ei stund sidan dei har halt om det, men at me skal prate litt om den deriverte til ein funksjon i eit punkt

⇒ Kva er den deriverte til ein funksjon i eit pkt?

Intervjuspm:

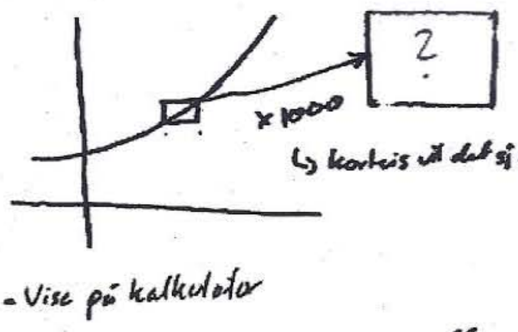
- ~~Korleis ville du forklart~~ ↑ til ein som ikkje kunne det?
- Kva ville du gjort for å gjere det forståeleg? (kva dersom er viktig å ha med?)
- Kan du skissere?
- Hjelpe eleven dersom han har gløymt

- Hugsar du def.? → Kan du forklare geom.?

→ Dersom problem:
- forklare eleven

- Vil du seie at du kan/forstår def?
  ↳ kvifor / kvifor ikkje
  ↳ kva er vanskeleg
- Korleis lærte du dette?

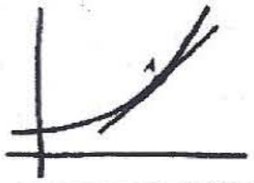
⇓ innføre local straightness



↳ korleis vil det sjå ut?

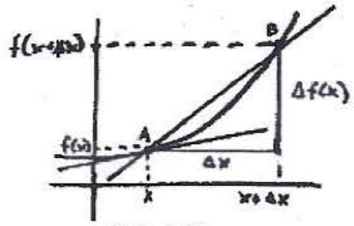
- Vise på kalkulator
- Kva samanheng har me mellom dette og def. "den der. til ein funksj. i eit pkt. er stigningstalet til tangenten i dette pkt."

Til hjelp:



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

⇓



A: (x, f(x))
B: (x+Δx, f(x+Δx))

OPPGÅVE "skissere den deriverte":

a) $f(x) = x^2$

· oppstart som forrige oppg.

Intervjuspm:

- Kva er grafen til den deriverte?
- Korleis er tangenten før, i, etter O?
  ↳ Kan du teikne inn nokre tangentar?
  ⋮ dersom du ikkje kjem i gang
- Kva liknar f(x) på?
- Kva om eg gjev deg formelen? ($f(x)=x^2$)
  - forteiknslinjer?
  - algebraisk framgangsmåte?

b) graf c); f(x) ≈  ca: $-x^4+x^2$...

· oppstart som forrige oppg.

Intervjuspm:

- som a)
- nytte tangenten som hjelpemiddel
- forteiknsskjema til hjelp

"fasit"

Inngåande spm:
- kvifor vert det slik?
- kan du seie meir om det?

OPPGÅVE J15 a)/b) (Timss):

(kanskje velje bort denne)

- I denne oppgåva skal du seie meg svaret, samt grunngjere det.

Intervjuguide:

a) - Må grunngje svaret grundig
  - Kva er det som gjer at ein graf ikkje er kontinuerleg?

(ein graf er samanhengande i eit intervall = kontinuerleg)

  - Kva med kontinuitet i eit pkt?

($\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ⇒ kont)

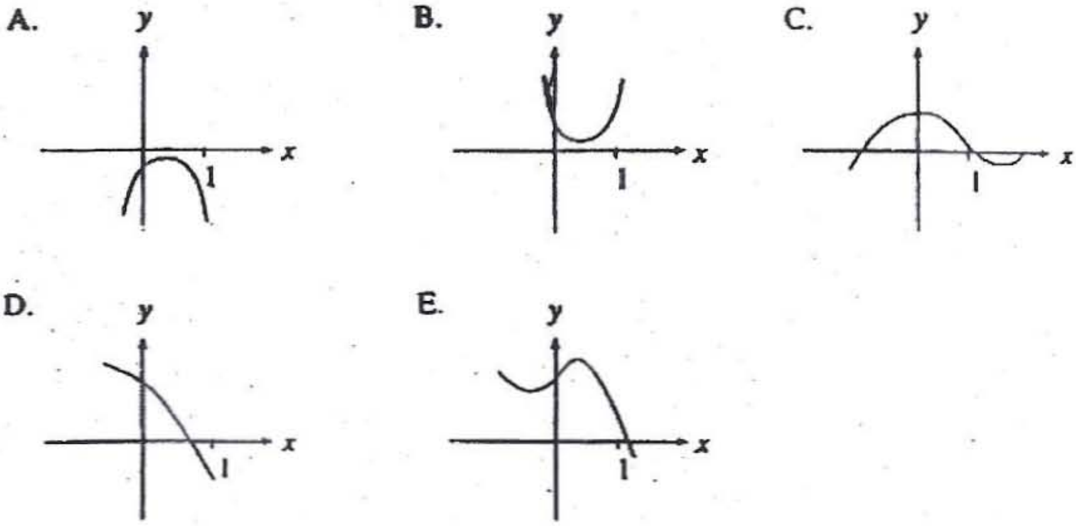
b) - Grunngje (men ikkje så grundig)
  - Når er ein graf ikkje derivarbar?
  (når den ikkje er kont, spiss)
  - [illegible]
  - [illegible]
  - når tangenten er [illegible]

7.2 Oppgåver på pilotintervju

PILOT-INTERVJU

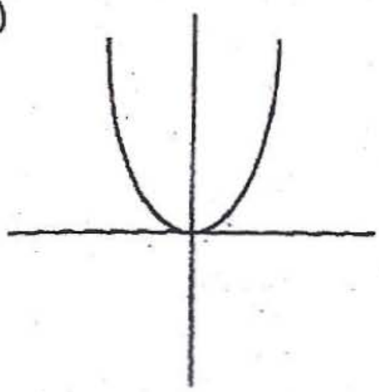
1) **Hvilken av grafene nedenfor har følgende egenskaper:**

$f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$ og $f''(x)$ er negativ for alle x?

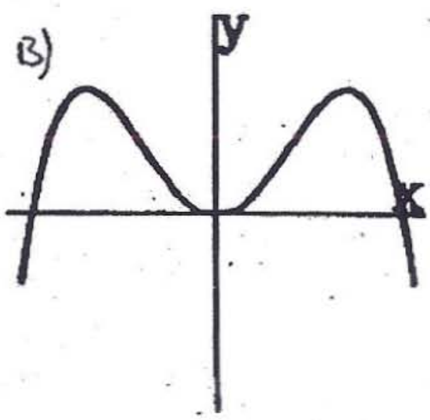


2) Teikne grafen til den deriverte

A)



B)



3) Kva er din derivate til ein funksjon i eit punkt ?

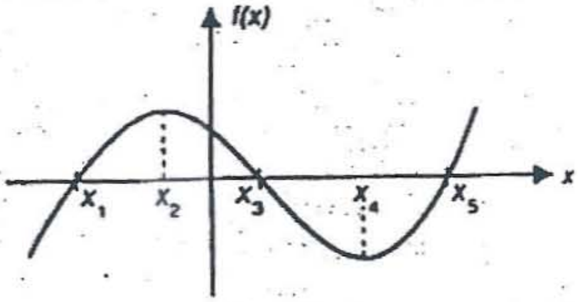
+ "local straightness"

7.3 Skriftleg test

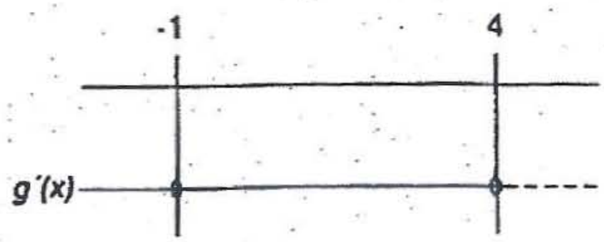
OPPGAVER I DERIVASJON

Oppgave 1

a) Tegn fortegnslinjen til den deriverte til funksjonen $f(x)$

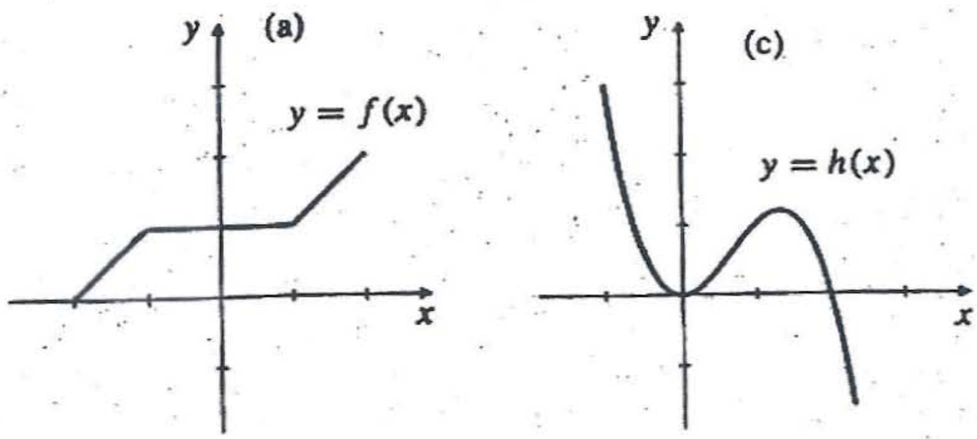


b) Nedenfor finner du fortegnsskjema for den deriverte til funksjonen $g'(x)$. Tegn en graf slik at den stemmer med fortegnsskjemaet



Oppgave 2

Figuren under viser grafene $f(x)$ og $h(x)$. Skisser grafene til de deriverte av funksjonene

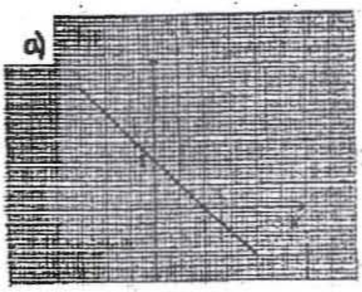


Oppgave 3

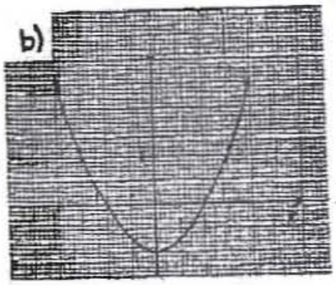
Figuren viser grafene til den deriverte av funksjonene $f(x)$, $g(x)$ og $h(x)$. Hvilke grafer og funksjoner hører sammen?

$f(x)=x^2-2x$ $\qquad$ $g(x)=x-\frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $h(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

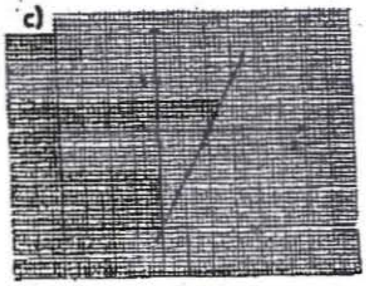
a)



b)

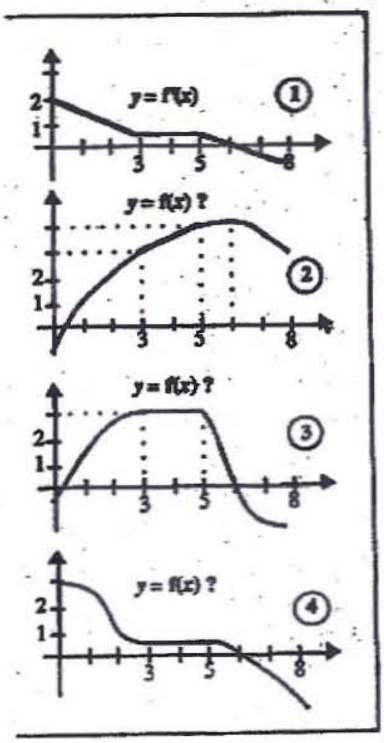


c)



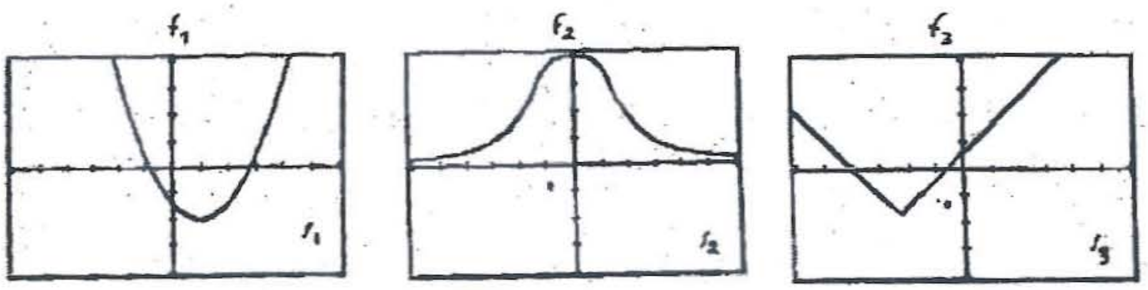
Oppgave 4

Graf 1 er den deriverte $y=f'(x)$ til en funksjon $y=f(x)$ Hvilken av grafene 2, 3, 4 er den opprinnelige grafen $y=f(x)$? Begrunn svaret ditt.

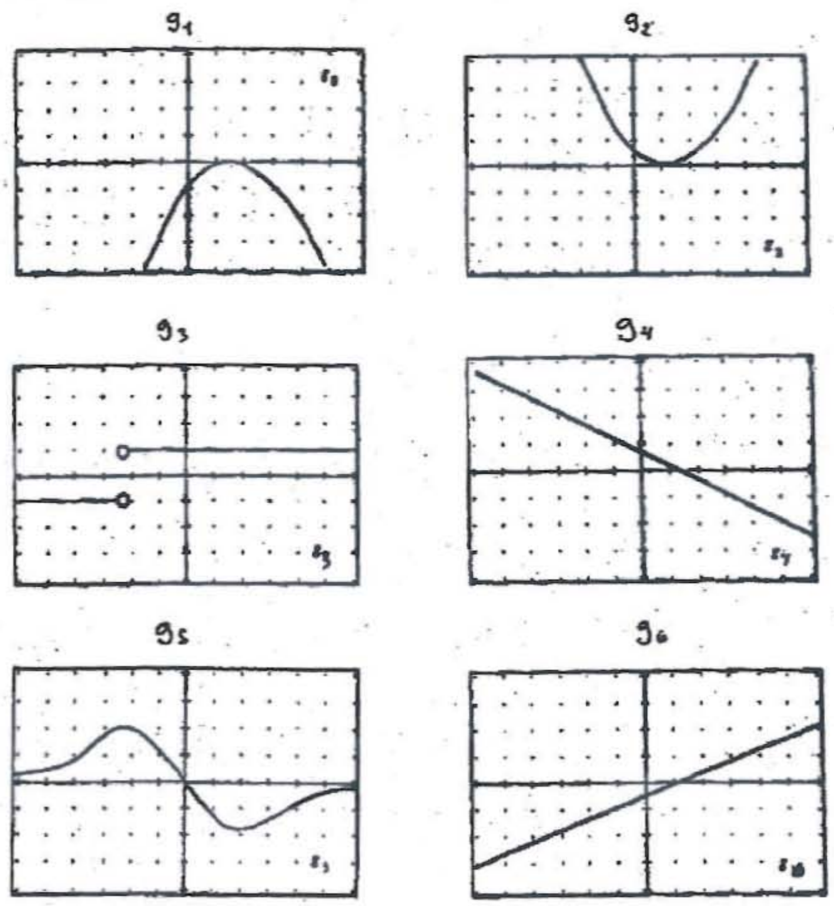


Oppgave 5

Grafene f_1 f_2 *og* f_3 er gitt nedenfor.



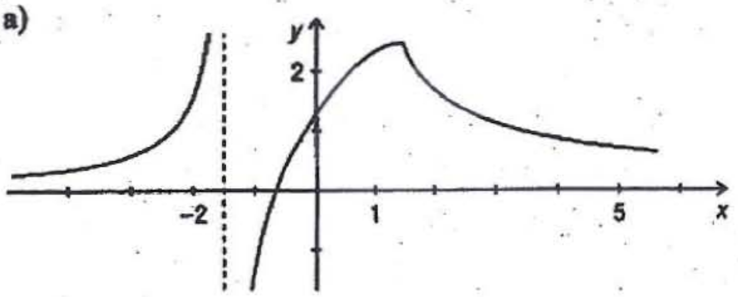
Blant grafene $g_1 - g_6$ finnes de deriverte til grafene f_1 f_2 *og* f_3. Finn grafene som hører sammen.



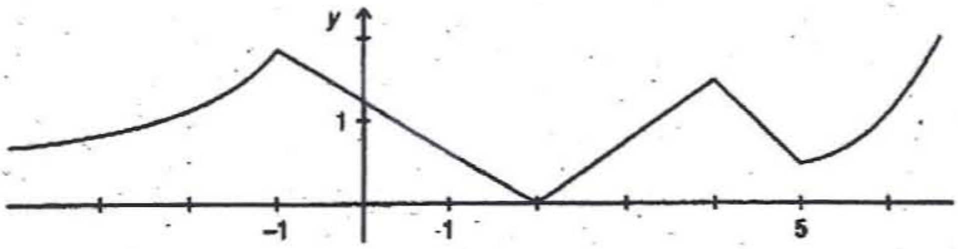
Oppgave 6

For kva verdiar av x er desse funksjonane ikkje deriverbare?

a)

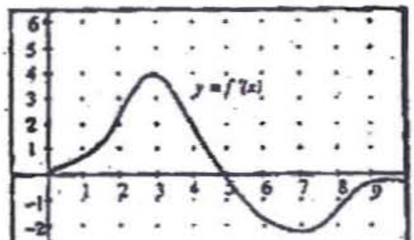


b)



Oppgave 7

Grafen $y=f'(x)$ er vist på figuren. Anta at funksjonen $y=f(x)$ viser salget av av en ny mattebok de første årene. **PS! Grafenpå figuren er grafen til den deriverte til f, ikke grafen til funksjonen selv.**



a) Hva viser f' her?

b) Hvilke/hvilket år er salget på topp?

c) Når øker salget mest?

Begrunn svarene dine.

7.4 Intervjutranskripsjonar:

7.4.1 Intervju med Emma

Intervjuar: Ja på *den* var det ikkje som du utelukka så viss me ser på den D no.

Emma: Så er den større enn null.

Intervjuar: Så er den større enn null / og så dersom me ser kvar er [ein

Emma: [(utydeleg)

Intervjuar: [er / f derivert av ein mindre enn 0?

Emma: Ja.

Intervjuar: Men / viss du ser / viss du no er over på grafen til den deriverte.

Emma: Ja.

Intervjuar: Og den ligg i / eeh den kvadranten her.

Emma: Ja.

Intervjuar: Altså i den firkanten her / er han positiv eller negativ då?

Emma: Den deriverte?

Intervjuar: Ja viss han ligg *her* // kan vis / prøva å visa det er litt vanskelegare å ha to grafar oppå kvarandre / viss eg prøver å teikne grafen til den deriverte // (arbeider) der har du teikna dei tre nullpunkta dine.

Emma: Mm.

Intervjuar: Så her er på ein måte f / y derivert kan du berre setja (utydeleg)

Emma: Ja.

Intervjuar: Og så sa du at / har du / no teiknar eg den same grafen som du har teikna då.

Emma: Ja.

Intervjuar: Her / der! / så sa du det / at grafen stig / og at han derfor vil den deriverte vera positiv.

Emma: Ja.

Intervjuar: Ja / så spør eg eg sier ikkje at du tek feil men eg berre spør deg om / er den deriverte positiv?

Emma: (utydelig) sikker? / nei.

Intervjuar: Nei.

Emma: Den er jo ikkje det! / men den går jo ikke under null / for det kommer an på hva du *spør* om liksom.

Intervjuar: Ja riktig for den går *ikkje* under null.

Emma: For det at den går jo *opp* igjen.

Intervjuar: Mm *her*.

Emma: Så *er* han fremdeles positiv [men

Intervjuar: [er han framleis [positiv.

Emma: [han synker.

Intervjuar: Ja / for det at / viss du ser på om han *søkk* der.

Emma: Mm.

Intervjuar: Om du ser på at grafen til den *deriverte* søkk / kva kikkar du eigentleg på då?

Emma: Da ser du på da ser du på vendepunktene og den andrederiverte.

Intervjuar: Då ser ein på den *andre*deriverte ja / så når grafen er positiv?

Emma: Så er den deriverte?

Intervjuar: Så *kan* han likevel søkka.

Emma: Ja for hvis han skal *stige* så går han jo under null og da blir jo det / feil.

Intervjuar: Mm.

Emma: Så hvis han går / liksom oppover sånn / *her* / så vil jo han være negativ.

Intervjuar: Då vil / ja.

Emma: For da er det under null.

Intervjuar: Mm.

Emma: Så da må den jo gå [ned

Intervjuar: [Det *ser* litt rart ut for han er positiv sjølv om han går.

Emma: Selv om han synker.

Intervjuar: Sjølv om han søkk ja / av di han er på den positive delen.

7.4.2 Intervju med Markus

Intervjuar: Der går microfonen / der / eehm / fyrst (utydelig) // fyrste oppgåve er ei oppgåve de ikkje hadde på / prøven då / noko som liknar litt / og det er den *her* / skal ta å lesa den fyrst / det står kva av grafane nedafor har fylgjande eigenskapar? / så står det tre eigenskapar / f derivert av *null* / den skal vera større enn null altså positiv / f derivert av *ein* / skal vera mindre enn null negativ / og f *andre*derivert av x er negativ for alle x / og så er det teikna opp fem grafar / *alle* er slike f av x grafar / øøh og *ein* av grafane har *alle* eigenskapane samstundes.

Markus: (Svakt) okei.

Intervjuar: Då / så / ja / så må du berre tenkja høgt.

Markus: (Utydelig) hva det blir her da? / f derivert av null // øøh / nei nå står det litt stille her altså.

Intervjuar: Viss den / deriverte er positiv / korleis er grafen då?

Markus: Da er den / positiv / sant?

Intervjuar: Ja og når grafen er positiv / korleis ser du det på / grafen?

Markus: Den er / da er x større enn null / eehm / nei.

Intervjuar: Så når ein graf / viss ein graf er eeeh / der x er mindre enn null altså viss du er nede på / viss du er på x mindre enn null sida / kan grafen ikkje vera positiv der?

Markus: Jo han kan vel egentlig det / det er yen som er / under null da.

Intervjuar: Ja / ehm / men korleis ser du det på grafen? / at den deriverte er positiv?

Markus: Uff nå er det lenge siden jeg har hatt om [det

Intervjuar: [Øøø ja

Markus: [så det har gjerne ramlet litt ut igjen.

Intervjuar: Ta ein / skal berre teikne ein heilt / (arbeider) vilkårleg graf / til dømes / til dømes / ein graf som går / ja / sånn! / øøh når den deriverte er positiv/ vil grafen / korleis vil grafen / ser du nokre stader på *den* grafen / der / den deriverte vil vera positiv?

Markus: Når den deriverte / det er valgt om den øker eller minker.

Intervjuar: Han auk / grafen aukar aller minkar ja.

Markus: Han er en av delene / hele veien.

Intervjuar: Ja / så *her* er denne denne er positiv heile vegen.

Markus: Ja.

Intervjuar: Mm / det er når den deriverte er / er større enn null / då auker grafen / og viss me ser på den andre type eigenskap då er det snakk om at den deriverte i eit punkt er mindre enn null?

Markus: Da minker den.

Intervjuar: Så då vil grafen minka / og / den siste eigenskapen / viss ein graf / den *andre*deriverte er negativ / kva tenker du då?

Markus: Øøhm / da / det var et eller annet hvor mye han / krummer eller noe sånt noe.

Intervjuar: Mm.

Markus: Ja.

Intervjuar: Hugsar du når de teikna dei der / forteiknslinene / viss de hadde / (arbeider) f av x så hadde du nokre nullpunkt / det har du sikkert nytta mykje sant?

Markus: Ja.

Intervjuar: (Arbeider) og så / viss du då såg på / *andre*deriverte // til dømes slik / så den andrederiverte vil her vera?

Markus: Negativ.

Intervjuar: Ja / og så vil han vera?

Markus: Positiv her.

Intervjuar: Og her vil han vera?

Markus: Negativ.

Intervjuar: Og kva var det i dei punkta som me kalla nullpunkt / nullpunkta til den andrederiverte / hugsar du?

Markus: Da / da var der *vende*punktet ja.

Intervjuar: Det var vendepunkta ja / så dei hadde du her / ehm / og viss du då etterpå skulle / teikne opp grafen / kva informasjon fekk du ut av den / andrederiverte? /hugsar du det?

Markus: Eehm // (svakt) nei nå står det helt stille.

Intervjuar: Eehm / hugsar du nokre slike / smilefjes og?

Markus: Ja // (utydeleg)

Intervjuar: Kjenner du att dei?

Markus: Ja nå husker jeg de.

Intervjuar: Ja / og / kva tyda dei?

Markus: Ehhm det var / hvor mye / nei / det er vel sånn grafen omtrent ser ut / at han krummer / som en r / oppe / toppunkta deriverte / førstederiverte er lik null.

Intervjuar: Så den fortalde altså den andrederiverte fortalte som du sa om / om krumminga til grafen?

Markus: Ja.

Intervjuar: Mmm repetert littegrann dei der tinga der / viss me no kikker her oppe // ser på dei ulike grafane.

Intervjuar: Mm / så det eineste / eg ikkje får til å stemme der var at du du sa / at når / eeh at i *null* på den grafen her / så vil den andrederiverte ha eit *botn*punkt / tenkte du på noko anna?

Markus: Eja det gjorde eg nok da.

Intervjuar: Nei du / nei den deriverte vil ha eit botnpunkt sa du.

Markus: Ja.

Intervjuar: Då tenkte du / litt skeivt?

Markus: Ja / det gjorde eg.

Intervjuar: Mm så du er ei / så du tykkjer at *den* ser meir rett ut enn at / for der har du jo ikkje noko botnpunkt.

Markus: Nei den ja / den *deriverte* / nei / den vanlige.

Intervjuar: Den *vanlege* har eit botnpunkt.

Markus: Ja.

Intervjuar: Den her / litt meir / krummelurer på / same oppgåve / teikne opp den deriverte.

Markus: (Arbeider) da er den i alle fall lik null der og der og der.

Intervjuar: Mm.

Markus: (Arbeider) og så er den positiv og negativ og positiv og negativ // ehm men jeg er ikke sikker på om det skal være eller / om det skal være sånne rette linjer eller om det er / buete grafer.

Intervjuar: Nei.

Markus: (Arbeider)

Intervjuar: Mm / skal me sjå litt på / eehm / der er grafen til den deriverte ja / øøh / kan du forklare den litt i høve til / den der?

Markus: Ja / *der* er i alle fall [nullpunktet

Intervjuar: [Ja.

Markus: [på den der.

Intervjuar: Det er på / på eine toppunktet til.

Markus: Ja.

Intervjuar: Ja.

Markus: Og der er på bunnpunktet og der er på toppunktet igjen.

Intervjuar: Ja.

Markus: Og så / men ellers så / ja jeg er ikke helt sikker på den der.

Intervjuar: Mm /og før / før / nullpunktet korleis går grafen då?

Markus: Da er den positiv.

Intervjuar: Ja / og mellom nullpunkta er den?

Markus: Der er han negativ.

Intervjuar: Mm / og så?

Markus: Positiv her nede.

Intervjuar: Ja / det ser heilt rett ut det er jo ikkje sikkert at den går opp att *der* det veit me ikkje / men det / ser me ikkje / så det var heilt riktig.

7.4.3 Intervju med Andreas

Intervjuar: Så det er eig heilt rett / men / då er det store spørsmålet / kan / den stig kan den grafen til den deriverte stiga / sjølv om den skal vise at stigningstalet er negativt?

Andreas: Ja det *må* den jo kunne gjøre hvis den er riktig!

Intervjuar: Ja det er for han *kan* det / og det er heilt rett det svaret du har teikna / for det den her viser / er jo at / til dømes dersom eg teiknar inn tangentar her / (Arbeider) sant / så går jo dei slik den deriverte ville gjort / så det er heilt rett slik du seier / at den deriverte er *negativ* her.

Andreas: Ja.

Intervjuar: Og den grafen her / er jo og som du seier den / delen her så er den jo negativ.

Andreas: Ja.

Intervjuar: Du får negative verdiar slik at viss / tangenten her / den har ein / ein verdi ein stignigsverdi som er negativ.

Andreas: Mm.

Intervjuar: Og den tangenten her viss du les av viss du hadde rekna har du lært / å rekne bort og ned slik for å måla verd.

Andreas: Ja.

Intervjuar: For å måla stingningstalet / så hadde det vore negativt du hadde fått minus på stigningstalet.

Andreas: Mm.

Intervjuar: Viss du skulle lest av same stigningstalet / på den grafen.

Andreas: Ja.

Intervjuar: Då hadde du og fått ein? / [negativ

Andreas: [Negativ verdi.

Intervjuar: Mm / og difor så stemmer det / sjølv om du / stigningstalet til den er jo positiv sjølv til den deriverte for den stig heile tida.

Andreas: Mm.

Intervjuar: Men sjølve den deriverte er jo negativ / og det viser han *her* / (arbeider) så vil du få / her er han ganske bratt så då vil du få ganske stor / negativ minking

Andreas: Mm.

Intervjuar: (Arbeider) og då vil det vise på grafen og at då kjem du heilt ned på minus / tre til dømes.

Andreas: Ja.

Intervjuar: (Arbeider) her så nærmar den seg null / og då ser du og at den deriverte nærmar seg null

Andreas: Ja.

Intervjuar: Og så *her* er det litt meir logisk då.

Andreas: Ja.

Intervjuar: For då er han positive verdiar for den deriverte / *og* tangentane er positive.

Andreas: Ja.

Intervjuar: Så du fann jo rett svar / men det høyrdes litt rart ut? / var det? / forstod du det no / eller er det fortsatt litt eeh.

Andreas: Jo det er jo / når du forklarer så er det jo helt logisk / men / jeg vet ikke / jeg blander veldig med *dette* og så / dette med hul side opp og ned som [vi hadde i dobbelderiverte

7.4.4 Intervju med Jonas

Jonas: Ja jeg har / jeg har vært *ett* år i utlandet da / i Australia / sånn at / vi gikk en god del gjennom / derivert og / hva / inverse / grafen / ganske mye.

Intervjuar: Ja.

Jonas: Vi hadde mye graflære der.

Intervjuar: Ja / ja så / for sånn som her ehm / då hadde de *meir* undervisning der de nytta / meir / *grafar* og ikkje berre algebraisk?

Jonas: Ja det var mye mer / mye mer at vi fikk en graf / og så stod det ingenting til grafen så måtte vi bruke grafen til å finne den deriverte ut av det.

Intervjuar: Ja.

Jonas: Eller vi fikk den deriverte så skulle vi finne / grafen.

Intervjuar: Mm.

Jonas: Så det var veldig mye.

Intervjuar: Ja.

Jonas: Mye på det / i stedet for at du sant sitter med / med tallene og så.

7.4.5 Intervju med Kristian

Intervjuar: Det er litt vanskeleg å sjå på grafen / men hugsar du // (arbeider) koplar du dette til noko? / viss ein ser / desse smilefjesa / og sure?

Kristian: Ja du vet jo / at den andrederiverte er negativ her men / og at / ja / fortegnet til den / andrederiverte er negativ / men / det vil jo være et bunnpunkt der / [vil det ikkje det da?

Intervjuar: [Ja / for desse her / desse som eg teikna opp no / (arbeider) skal visa litt korleis / grafen til den *deriverte* går

Kristian: Ja.

Intervjuar: At når den deriverte / *andre*deriverte er negativ.

Kristian: Ja.

Intervjuar: Så er det / slik krumming / slik at den vender den hule sida ned / og når den andrederiverte er *positiv* / er krumminga andre vegen / slik at den vender den hule sida opp / *slik* var det den der var då / at slik ser ein.

Kristian: Mm.

Intervjuar: Slik at viss andrederiverte av x er negativ / (arbeider) så vender den den hule sida ned / viss me veit det då / så tek me for oss desse grafane att / du kan berre fortsetje / du trudde det var E så kan så var den siste / det fant du ut stemte for f derivert og f derivert av ein.

Kristian: [For det var grafen til den deriverte var det ikkje det / aller var [det?

Intervjuar: [Jo det vil det fortel / andrederiverte [fortel

Kristian: [Er dette grafen til den deriverte eller er [dette?

Intervjuar: [Nei dette er *f* av x / alle [desse er f av x

Kristian: [Okei for jeg trodde det var grafen til den *deriverte*

Intervjuar: [Å du trudde at ei var?

Kristian: Ja

Intervjuar: alle var grafen til den deriverte?

Kristian: Ja / jeg synes du sa det.