

Statens pensjonsfond utland: Gevinsten av å ta hensyn til eksogen formue

av

Kristin Njå Sekse

Masteroppgave

Masteroppgaven er levert for å fullføre graden

Master i samfunnsøkonomi

Universitetet i Bergen, Institutt for økonomi

Juni 2011

UNIVERSITETET I BERGEN



Innhold

Sammendrag	ix
1 Innledning	1
1.1 Bakgrunn for oppgaven	1
1.2 Oppgavens struktur	2
2 Statens pensjonsfond utland	5
2.1 Rammeverk i forvaltningen	7
2.1.1 Investeringsstrategi	7
2.1.2 Etske retningslinjer for forvaltningen	13
3 Porteføljemodellen med eksogen formue	15
3.1 Innledning og notasjon	15
3.2 Investorens sluttformue	17
3.3 Investorens tilpasning	18
3.4 Gevinsten av å ta hensyn til eksogen formue	19
4 Antakelser og datagrunnlag	23
4.1 En periode	23
4.2 Udekket renteparitet og sikker rente	24
5 Utlandet	27
5.1 Historiske data	27
5.2 Datagrunnlagets regions - og sektorinndeling for aksjer	28
5.2.1 Datagrunnlaget for obligasjoner	31
5.3 Verdensmarkedsporteføljen	32
6 Norges formue utenom SPU	35
6.1 Størrelse, avkastning og risiko til den eksogene formuen	37
7 Kovarians og korrelasjon	41
7.1 Samvariasjon mellom de utenlandske investeringsmulighetene	42
7.2 Samvariasjon mellom den eksogene formuen og de utenlandske investeringsmulighetene	45
8 Forventede avkastningsrater	49
8.1 Kapitalverdimodellen	50

9 Referanseporteføljen til SPU	53
9.1 Referanseporteføljens allokering	53
9.2 Forventet avkastning og risiko	54
10 Resultater uten restriksjoner	57
10.1 Optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue	57
10.1.1 Den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue og referanseporteføljen	59
10.2 Optimal portefølje med hensyn til eksogen formue	60
10.2.1 Gevinsten av å ta hensyn til eksogen formue	63
11 Resultater med restriksjoner	65
11.1 Optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue	66
11.1.1 Den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue og referanseporteføljen	67
11.2 Optimal portefølje med hensyn til eksogen formue	68
11.2.1 Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue	69
12 Oppsummering og avsluttende kommentarer	71
12.1 Videre utvikling og forslag til endringer	72
A Korrelasjon og kovarians	75
A.1 Korrelasjonsmatrisen til aksjene	75
A.2 Kovarianmatrisen, Σ	79
A.3 Kovariansvektoren, c'_E	85
B Optimale porteføljer med hensyn til eksogen formue	87
Bibliografi	89

Figurer

4.1	Effektive porteføljer, tangentporteføljen og verdensmarkedsporteføljen.	25
5.1	Avkastningsrater i den komponerte verdensmarkedsporteføljen, \mathbf{a}^W	33
5.2	Dow Jones (2011a) World indeks av aksjer og den komponerte aksjeporteføljen, \mathbf{a}_{rs}^W	34
6.1	Sektorandeler i Norges aksjemarked (Dow Jones, 2011b)	38
10.1	Effektive porteføljer uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}(\mu)$ og $\hat{\mathbf{a}}(\mu(\sigma^2))$, referanseporteføljen og verdensmarkedsporteføljen.	60
10.2	Gevinst i økt forventet avkastning, $\mu(\hat{\sigma}_x^2(0,004)) - 0,004$, ved investering i $\mathbf{a}(\hat{\sigma}_x^2, x_E)$ fremfor $\hat{\mathbf{a}}(\mu)$	63
11.1	Gevinst i meravkastning ved å investere i $\mathbf{a}(\mu(\hat{\sigma}_x^2, x_E))$ fremfor $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$	70

Forord

Arbeidet med å skrive masteroppgave har vært den største utfordringen i min studietid. Dette har vært spennende, lærerikt og til tider meget frustrerende.

Min veileder, Bjørn Sandvik, foreslo problemstillingen jeg tar for meg i denne oppgaven. Jeg vil takke Sandvik på det varmeste for forslaget, usedvanlig god oppfølging, gode diskusjoner og smarte hint på veien mot målet. Engasjementet han har vist har vært veldig motiverende.

For å kunne gjennomføre analysen i masteroppgaven var det en utfordring å samle et datagrunnlag. I denne forbindelse lærte jeg hvor viktig det er å utvikle og ta i bruk nettverk. Med dette vil jeg gjerne takke mine kollegaer i Statoil Kapitalforvaltning ASA for hjelp. En spesiell takk går til Trond Todnem og Thomas Ludvigsen som har stilt seg disponibel for diskusjon og som har hjulpet meg med å få tak et datagrunnlag.

Takk til mor, far, Thomas og Christine som har bidratt med korrekturlesing.

Til slutt vil jeg gjerne takke mine studiekamerater som har gjort tiden som student fabelaktig både faglig og sosialt. Jeg har mange minnerike opplevelser å se tilbake på.



Kristin Njå Sekse, Bergen 01. juni 2011

Sammendrag

**«Statens pensjonsfond utland:
Gevinsten av å ta hensyn til eksogen formue»**

av

Kristin Njå Sekse, Master i samfunnsøkonomi

Universitetet i Bergen, 2011

Veileder: Bjørn Sandvik

Den såkalte referanseporteføljen til Statens pensjonsfond utland (SPU) bestemmer i all hovedsak den fremtidige avkastningen til fondet.

Denne oppgaven viser hvordan en kan øke den forventede avkastningen til SPU, uten å øke risikoen til Norge, gjennom å endre referanseporteføljen.

Jeg finner at en omlegging av referanseporteføljen kan gi en gevinst på omtrent 0,6-0,7% i årlig meravkastning. Dette er en høy gevinst, sammenlignet med at den aktive forvaltningen i SPU ser ut til å gi en gevinst på 0,25 % i årlig meravkastning.

Kapittel 1

Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

«Eierne av Statens pensjonsfond er det norske folk, representert ved Stortinget.»
(Finansdepartementet, 2011b, s.11)

En rasjonell investor er interessert i avkastningen og risikoen til sin totalposisjon. I følge Finansdepartementet (2011b) avhenger en god investeringsstrategi for Statens pensjonsfond utland (SPU) blant annet av eieren (det norske folk) sin risikotoleranse. Den totale risikoen til det norske folk består ikke bare av risikoen til SPU, og dermed burde en ikke tenke på pensjonsfondet som en totalposisjon, men som en andel av Norges totalformue.

Den norske formuen utenom SPU kaller vi den eksogene formuen.¹ Forvalterne av SPU har kun mandat til å styre verdipapirinvesteringene i utlandet, og må dermed ta den resterende formuen for gitt. I praksis består den eksogene formuen blant annet av naturressurser, realkapital, humankapital og andre eiendeler den norske stat og den norske befolkningen sitter med.

I følge klassisk porteføljeteori, hvor en ikke tar hensyn til slik eksogen formue, skal en investor holde sin usikre posisjon i verdensmarkedsporteføljen. *Verdensmarkedsporteføljen* er en portefølje bestående av alle investeringer som er tilgjengelig på internasjonal basis, med verdivekter (Berk og DeMarzo, 2007, kap. 10).

I litteraturen finnes argumenter for at land med eksogen formue bør investere anderledes enn investorer som ikke har noen gitt formue i utgangspunktet. Gintschel og Scherer (2008), Scherer (2009) og Scherer (2011) tar for seg nettopp denne problemstillingen. Utgangspunktet er et land hvor den totale formuen består av finansielle aktiva og oljereserver. De diskuterer hvordan et land hvor deler av formuen er eksogen, optimalt sett bør allokere finansielle aktiva for å redusere den totale risikoen til staten. Gintschel og Scherer (2008) fokuserer på et land hvor den eksogene formuen er gitt ved oljereserver, men påpeker at også andre verdier som realkapital og humankapital bør inkluderes i den eksogene formuen. I analysen fremkommer det blant annet at land som er eksponert for risiko forbundet

¹I litteraturen kalles den eksogene formuen blant annet bakgrunnsrisiko/background risk, ikke-finansiell formue og bakgrunnsformue/background wealth. De ulike betegnelsene er ekvivalente, og i denne oppgaven brukes betegnelsen eksogen formue eller innenlandsformue.

med ikke-finansielle verdier som oljereserver bør investere i sektorer og land hvor svingninger i eksempelvis oljeprisene ikke påvirker avkastningen på de finansielle investeringene, eller i beste fall er negativt korrelert med slike svingninger.

I dag forvaltes SPU av Norges Bank Investment Management (NBIM). Investeringsstrategien er nedfelt i en referanseportefølje. Forvalterne forsøker å oppnå en høyere avkastning enn referanseporteføljen gjennom *aktiv forvaltning*, det vil si avvik fra referanseporteføljen. Den aktive forvaltningen har bidratt til en gjennomsnittlig årlig meravkastning på 0,25 prosent fra 1998 til 2009 (Enge, 2010, s. 8). I følge resultatene i denne oppgaven er det mulig for staten som investor å oppnå en adskillig høyere meravkastning til fondet enn bidraget fra den aktive forvaltningen ved å endre referanseporteføljen, uten å øke risikoen til Norges totalformue.

1.2 Oppgavens struktur

Problemstillingen i denne oppgaven er å finne hvilken gevinst staten kan oppnå ved å ta hensyn til eksogen formue i forvaltningen av SPU. For å besvare problemstillingen beskriver jeg først hva SPU er og hvordan fondet forvaltes. I denne sammenheng er spesielt investeringsstrategien relevant for den videre analysen. SPU omtales i kapittel 2.

Kapittel 3 presenterer porteføljemodellen med eksogen formue. Denne modellen viser hvordan en kan ta hensyn til den eksogene formuen, og hvilken gevinst en kan oppnå av dette. Porteføljemodellen med eksogen formue i dette kapitlet antar en sikker rente. I selve analysen utelukker jeg muligheten for å investere i et sikkert verdipapir. Dette forklares i kapittel 4, sammen med antakelser jeg gjør i anvendelsen av modellen. En kan også løse modellen uten et sikkert verdipapir analytisk, men denne er litt mer komplisert enn modellen med et sikkert verdipapir. For intuisjonens del presenterer jeg dermed porteføljemodellen med et sikkert verdipapir, mens jeg finner resultatene ved løse modellen uten et sikkert verdipapir numerisk.

Kapittel 5 presenterer datagrunnlaget for de utenlandske investeringsmulighetene. Datagrunnlaget er hentet fra Dow Jones database for historiske aksjepriser, databasen til Statoil Kapitalforvaltning ASA og historiske avkastningsrater på Oslo Børs. Ingen av de ovennevnte er ansvarlig for de analyser eller tolkninger som er gjort i denne oppgaven.

Det er vanskelig å gi et presist anslag på den eksogene formuen til den norske stat (dvs. formuen utenom SPU), hvilken avkastning og risiko som er forbundet med denne, og hvordan den samvarierer med SPUs investeringsmuligheter. I kapittel 6 finner jeg et grovt anslag på den eksogene formuen med utgangspunkt i nasjonalformuen og med hovedindeksen på Oslo Børs som datagrunnlag. Børsen er trolig mer volatil enn den eksogene formuen. Dette tas det høyde for gjennom å skalere ned størrelsen på den eksogene formuen.

Kapittel 7 og 8 gir byggesteinen for det endelige resultatet. I kapittel 7 beregnes de nødvendige kovariansene som inngår i porteføljemodellen, og korrelasjonen mellom de ulike dataene diskuteres. I kapittel 8 beregnes de forventede avkastningsratene til investeringsmulighetene i datagrunnlaget, ved hjelp av kapitalverdimodellen.

Referanseporteføljen til SPU brukes som sammeligningsgrunnlag når vi finner gevinsten av å ta hensyn til eksogen formue. For å ha et sammenligningsgrunnlag trenger vi et anslag på forventet avkastning og varians til referanseporteføljen og forventet risiko til totalformuen ved investering i referanseporteføljen. I kapittel 9 ser vi hvordan referanseporteføljen er allokert og hvilken avkastning og risiko som er forbundet med denne gitt datagrunnlaget.

Oppgavens resultater, altså hvilken gevinst en kan oppnå av å ta hensyn til eksogen formue i forvaltningen av SPU, presenteres i kapittel 10 og 11. I kapittel 10 finner vi resultatene uten noen form for restriksjoner – alt er lov. Resultatene i dette kapitlet er urealistiske. I kapittel 11 finner vi derimot resultater under en rekke begrensninger som i større grad er oppnåelige i praksis.

Kapittel 12 avrunder oppgaven ved å oppsummere hovedresultatene og diskutere en del svakheter i datagrunnlaget og modellen. På bakgrunn av dette gir jeg forslag til videre utvikling og endringer i referanseporteføljen.

Kapittel 2

Statens pensjonsfond utland

Statens pensjonsfond utland (SPU) er et såkalt *Sovereign Wealth Fund* (SWF). Et SWF er et statlig eid fond og kan bestå av finansielle aktiva som aksjer, obligasjoner og andre finansinstrumenter, samt eiendomsinvesteringer. Fondene er hovedsaklig investert i utenlandske verdipapir og i andre lands valuta (SWF institute, 2008). Slike fond har typisk minimale forpliktelser på kort sikt, og forvaltes uavhengig av offentlige valutareserver for øvrig (Beck og Fidora, 2008).

SWFs får en stadig større betydning for det internasjonale finansmarkedet. Per i dag er over 4000 milliarder dollar under forvaltning av statlige investeringsfond. SPU er verdens nest største SWF. Kun de Forente Arabiske Emirater har et større fond enn Norge (SWF Institute, 2011). SPU utgjør omtrent 1 % av det totale internasjonale aksjemarkedet (Gjedrem, 2010). I følge SWF institute (2011) har SPU en markedsverdi på 557 milliarder dollar. Dersom dette er 1 % av det totale internasjonale aksjemarkedet, kontrollerer SWFs tilsammen omtrent 8 % av verdens aksjemarked. Investeringene fra disse fondene har ført til vekst, velstand og økonomisk utvikling i både kapitaleksporterende og kapitalimporterende land. I hjemlandene har gjerne fondene forbedret håndteringen av finanspolitikken, samt bidratt til makroøkonomisk stabilitet. SWFs langsiktige investeringshorisont har også vært en fordel i det internasjonale finansmarkedet, da det kan virke dempende på eventuelle konjunktursykler og makroøkonomisk stress (Caruana og Suwaidi, 2008, s. 3).

Betegnelsen *pensjonsfond* kan i sammenheng med SPU være noe villedende. Dette fordi SPU, motsetning til ordinære pensjonsfond, ikke har noen løpende pensjonsforpliktelser. Pensjonsforpliktelser er et mer langsiktig formål med fondet, dersom pensjonsutbetalinger i fremtiden krever dette. SPU er i dag ikke øremerket noe formål, ei heller pensjon (Finansdepartementet, 2010a). Ordinære pensjonsfond står derimot generelt ovenfor løpende pensjonsforpliktelser, og skiller seg dermed fra SWFs.

Det er land med overskudd på handelsbalansen som har etablert statlige investeringsfond. Overskudd på handelsbalansen innebærer at man bygger opp fordringer på utlandet, eksempelvis ved at man eksporterer mer enn man importerer. Som en løsning på håndtering av overskuddsreservene etableres det gjerne langsiktige statlige investeringsfond som SWF (Døskeland, 2010). Land med overskudd på handelsbalansen er typisk land som drar nytte av høy olje- eller varepris, og hvor disse inntektene kan tenkes å være midlertidige, slik som oljeinntektene i

Norge. SWF kan i slike land være etablert med formål å stabilisere offentlige inntekter og eksportinntekter, som ellers ville være svært avhengig av olje- eller vareprisene. Uten statlige investeringsfond som stabilisator, ville prisavhengigheten medføre høy volatilitet i offentlig sektors inntekter (Beck og Fidora, 2008). Inntektene til offentlig sektor i land med overskudd på handelsbalansen kommer av at myndighetene selv eksporterer goder, eller at de skattlegger privat sektors inntekt oppnådd av eksport (Døskeland, 2010).

Norge er et typisk eksempel på et land som opprettet et statlig investeringsfond basert på høye oljeinntekter, og hvor fondet skal underbygge langsiktige hensyn i bruken av statens oljeformue. Dette er spesielt relevant i land som Norge som er rike på ikke-fornybare ressurser, ettersom ressursene forsvinner over tid. SWF kan være med på å forhindre behov for kraftige endringer i finanspolitikken når oljereservene minsker eller tar slutt. Norge investerer i finansielle instrumenter mens det enda produseres olje, og på denne måten blir oljerikdommen gradvis omgjort til finansiell rikdom (Beck og Fidora, 2008). Olje og gass er ikke-fornybare ressurser, og gjennom at inntekter tilknyttet petroleumssektoren overføres til SPU kan en si at formuen fra olje og gass på havbunnen overføres til en diversifisert finansiell formue i utenlandske aktiva (Norges Bank Investment Management [NBIM], 2009).

Det kan være vanskelig å anslå hvor lang investeringshorisonten til SPU er. Dette vil avhenge av avkastning og bruken av fondsmidlene. Per i dag sier handlingsregelen at en kun skal bruke realavkastningen til fondet, som er antatt å være 4 % årlig (Finansdepartementet, 2011a). Hvis avkastningen til SPU fortsetter å være så høy at en kun trenger å bruke realavkastningen, samtidig som vi har petroleumsinntekter i fremtiden, er levetiden til fondet uendelig. Når en vet at formålet med fondet er å sikre finansiering av økende pensjonsutgifter, og må anta reduserte inntekter fra petroleumssektoren i fremtiden, vil en uendelig levetid for fondet antakelig være urealistisk.

Med utsikter til en spesielt lang investeringshorisont kan en si at SPU har en fordel når det gjelder evne til å bære risiko sammenlignet med tradisjonelle pensjonsfond som står ovenfor mer kortsiktige likviditetskrav gjennom løpende pensjonsutbetalinger og liknende (Finansdepartementet, 2008a). Et tradisjonelt pensjonsfond med løpende forpliktelser vil måtte realisere avkastning på løpende basis. Dette gjør at de har lavere toleranse for svingninger i fondsformuen. Mulighet til å kunne ha en høyere risikoeksponering og dermed kunne oppnå høyere avkastning gjør at SPUs investerings situasjon er nokså ulik situasjonen for tradisjonelle pensjonsfond som har et større løpende likviditetsbehov (Beck og Fidora, 2008).

Inntektene som brukes til investeringer i pensjonsfondet kommer fra petroleumsvirksomheten. Inntektene overføres fra statsbudsjettet og består blant annet av skatte- og avgiftsinntekter fra petroleumsvirksomheten, inntekter fra statens direkte økonomiske engasjement i petroleumsvirksomheten, utbytte fra eierskapet i Statoil ASA og overføringer fra Statens Petroleumsforsikringsfond (Finansdepartementet, 2010b).

2.1 Rammeverk i forvaltningen

Opgaven med å forvalte Statens pensjonsfond utland er tildelt Norges Bank gjennom kapitalforvaltningsenheten Norges Bank Investment Management (NBIM, 2010a). Finansdepartementet styrer til en viss grad investeringene gjennom et rammeverk. Rammeverket beskrives i dette delkapittelet.

2.1.1 Investeringsstrategi

Investeringsstrategien er nedfelt i en referanseportefølje for pensjonsfondet (Finansdepartementet, 2010b). En *referanseportefølje* er en portefølje som brukes som sammenligningsgrunnlag for avkastning og risiko til den faktiske porteføljen. Den *faktiske* porteføljen er den porteføljen pensjonsfondet i praksis består av, altså de faktiske investeringene til SPU. En mer detaljert beskrivelse av referanseporteføljen og den faktiske porteføljen gis i neste avsnitt.

Midlene i SPU skal investeres i en svært diversifisert utenlandsportefølje. Forvalteren må forsøke å oppnå høyest mulig avkastning, innenfor moderat risiko (Finansdepartementet, 2010b). Hva som er moderat risiko for SPU er avhengig av risikoen til referanseporteføljen. Forvalteren forsøker å oppnå en høyere avkastning enn referanseporteføljen gjennom å foreta investeringer som ikke inngår i denne. Avviket fra referanseporteføljen omtales som *aktiv forvaltning*, og bidraget fra den aktive forvaltningen måles ved at avkastningen på den faktiske porteføljen sammenlignes med utviklingen til referanseporteføljen (Finansdepartementet, 2008b, s. 122 - 124). Aktiv forvaltning strider mot teori om at markeder er *effisiente*, og at det dermed ikke er mulig å oppnå høyere avkastning enn markedet i gjennomsnitt. Et effisient marked kjennetegnes ved at all informasjon er reflektert i markedsprisene. Allikevel er det åpnet for aktiv forvaltning i pensjonsfondet. Dette begrunnes blant annet med at informasjon i praksis ikke er fritt tilgjengelig, og at det er mulig å spesialisere den interne forvaltningen mot områder der man tror at er mulig til å predikere prisutviklingen bedre enn gjennomsnittsinvestoren. En annen begrunnelse er at tilpasning av porteføljen slik at den til enhver tid reflekterer referanseporteføljen medfører kostnader (Norges Bank, 2003).

Pensjonsfondets referanseportefølje benyttes til risikostyring gjennom at det er fastsatt en ramme for den *relative volatiliteten* til den faktiske porteføljen, dvs. standardavviket til avkastningen til den faktiske porteføljen i forhold til standardavviket til referanseporteføljen (Finansdepartementet, 2010c). Den forventede avkastningen til den faktiske porteføljen i pensjonsfondet skal maksimalt avvike med 1% i forventet relativ volatilitet sammenlignet med referanseporteføljen, på årlig basis (Finansdepartementet, 2010b). I følge Norges Bank (2010b) innebærer det at forskjellen i avkastningen på fondet og avkastningen på referanseporteføljen forventes å være større enn 1 prosentpoeng i kun ett av tre år.¹ Med dette er valg av referanseportefølje en viktig beslutning for porteføljens totalresultat.

Pensjonsfondet skal være en finansiell, og ikke en strategisk investor. Dette innebærer at eierskap i enkeltforetak ikke skal overskride 10 % av foretakets aksjer. Begrunnelsen for dette er at pensjonsfondet ikke skal oppnå stemmerett i enkelt-

¹Det kan virke som det i Norges Banks modellering er et lineært forhold mellom forventet relativ volatilitet og forventet avkastning med et stigningstall på omtrent 1.

foretak. Finansdepartementet kan for øvrig gi unntak, eller utfyllende retningslinjer for Norges Banks eierskapsutøvelse (Finansdepartementet, 2010b).

Den faktiske porteføljen og referanseporteføljen

Referanseporteføljen til SPU består av 60 % aksjer, 35 - 40 % obligasjoner og inntil 5 % eiendom. Referanseporteføljen består av indekser definert av FTSE Group, Barclays Capital og Investment Property Databank for aksjer, obligasjoner og eiendom henholdsvis.

Referanseporteføljen for aksjer er sammensatt av FTSE All-Cap indekser (Finansdepartementet 2010c). På global basis utgjør FTSE indeksene 95 % av det investerbare markedet (FTSE, 2010), og pensjonsfondets referanseportefølje er sammensatt av noteringer fra FTSE Group. Innenfor aksjer notert hos FTSE er 50 % av referanseporteføljen bestående av aksjer notert i Europa, 35 % i Amerika (Afrika/Midtøsten) og 15 % i Asia og Oceania. Referanseporteføljen for aksjer avviker dermed fra aksjeallokeringen i verdensmarkedet. I tabellen nedenfor ser vi hvordan referanseporteføljen og verdensmarkedsporteføljen fordeler seg over regionene:²

	USA	Europa	Asia og Oceania
Verdensmarkedsporteføljen	0,50	0,24	0,25
SPUs referanseportefølje	0,35	0,50	0,15

Referanseporteføljen for obligasjoner består av Barclays Global Aggregate Bond Index og Barclays Capital Global Inflation-Linked Index. Innenfor disse indeksene er 60 % av obligasjonene europeiske, 35 % fra USA og Canada og 5 % statsobligasjoner fra Asia/Oceania. (Finansdepartementet, 2010b).

De faktiske investeringene i SPU skal utelukkende plasseres i utlandet, med andelen 30 - 50 % i obligasjoner og andelen 50 - 70 % i aksjer og inntil 5 % i eiendom. I den faktiske porteføljen for aksjer skal andelen i Europa være 40 - 60 %, Amerika og Afrika 25 - 45 % og andelen i Asia og Oceania er 5 - 25 % av totale aksjeinvesteringer i SPU. Den faktiske porteføljen av obligasjoner skal investeres med andelen 50 - 70 % i Europa, 25 - 45 % i Amerika (og Afrika), og Asia og Oceania skal utgjøre 0 - 15 %.

Når det gjelder eiendomsinvesteringene er ikke en slik spesifikk geografisk inndeling fastsatt på dette tidspunkt, men det heter at eiendomsporteføljen skal være veldiversifisert geografisk og over sektorer og instrumenter (Finansdepartementet, 2010b).

Med den definerte referanseporteføljen og med begrensninger i forhold til hvor mye den faktiske porteføljen kan avvike i forhold til forventet relativ volatilitet, vil den faktiske porteføljen i stor grad følge avkastningen til denne referanseporteføljen. Svingningene i SPUs resultater kan i stor grad tilskrives valg av referanseportefølje (Finansdepartementet, 2008b, s.124). Avkastningen på de faktiske investeringene sammenlignes med avkastningen til referanseporteføljen, og referanseporteføljen bestemmer dermed pensjonsfondets avkastningskrav for den aktive forvaltningen.

²Verdensmarkedsporteføljen av aksjer er komponert gitt opplysninger fra Dow Jones (2011a). Verdensmarkedsporteføljen av aksjer blir nærmere omtalt i kapittel 4.3.

Valg av referanseportefølje

Da Statens petroleumsfond ble opprettet i 1996 (skiftet senere navn til Statens pensjonsfond utland), ble fondet investert relativt likt de øvrige valutareservene. Dette innebar at midlene utelukkende ble investert i sikre obligasjoner, altså statsobligasjoner. Fondet var da investert med regionvekt i Europa på 75 %, mens 18 % var investert i USA og 7 % i Japan. I 1998 kom de første endringene i investeringsstrategien. Da ble 40 % av porteføljen tatt ut av statsobligasjoner, og i stedet investert i aksjer. Videre ble også regionsvektene endret til 50 % i Europa, 30 % i USA og 20 % i Asia. Norges Bank begrunner dette med at fondet hadde en lengre investeringshorisont og høyere vekst enn det som var antatt i utgangspunktet (Norges Bank, 2002). Regionsvektene for aksjeinvesteringer i USA og Asia har senere blitt endret til hhv. 35 % og 15 %. I 2007 ble det videre vedtatt å øke aksjeandelen i referanseporteføljen fra 40 % til 60 % og redusere andelen i obligasjoner tilsvarende (NBIM, 2010a).

Fra 1. januar 2002 ble det også åpnet for å investere i ikke-statsgaranterte obligasjoner (NBIM, 2010a). Grunnet høy eksponering mot enkeltutstedere av obligasjoner medførte inkludering av ikke-statsgaranterte obligasjoner endringer i regionsfordelingen til obligasjonsporteføljen. Den nye regionseksponeringen i obligasjonsporteføljen var 55 % i Europa, 35 % USA og 10 % i Asia. Per i dag er, som nevnt, referanseporteføljen for obligasjoner bestående av andelen 60 % i Europa, 35 % i USA og 5 % i asiatiske statsobligasjoner (Norges Bank, 2002)

Investeringsstrategien er i stadig utvikling, og i det følgende drøftes Norges Bank (2002) og Finansdepartementet (2011b) sine argumenter for dagens investeringsstrategi.

Markedsinndeling Investorer har tradisjonelt sett hatt fokus på land- og/eller regionsinndeling i porteføljevalg, men økende integrasjon har ført til at det stilles spørsmål ved hvor relevant en slik inndeling er. Sektorinndeling av porteføljen har blitt mer relevant, det betyr at en velger hvilke sektorer eller industrier en skal investere i, fremfor bestemte land eller regioner. Dette begrunnes med at markedene globaliseres og i mange sektorer oppstår det da en verdensmarkedspris. Dermed er det av mindre betydning hvilket land sektoren tilhører. Dette har medført at investorer i økende grad har valgt en sektorinndeling fremfor en regionsinndeling i porteføljevalget. Norges Bank (2002) erkjenner at sektortilhørighet har blitt en viktigere forklaringsfaktor for utviklingen av aksjekursen til en bedrift sammenlignet med hvilket land aksjen er notert. Allikevel mener Norges Bank at det er mer relevant å fokusere på en regionsinndeling.

Til grunn for Norges Banks (2002) diskusjon av den valgte markedsinndelingen ligger en analyse av betydningen av sektor- og regionstilhørighet for aksjer i USA, Japan, Europa og Storbritannia. Analysen viser at aksjekursene påvirkes både av hvilket land aksjen er notert i og hvilken sektor aksjen tilhører, men at betydningen av region og sektor varierer over markeder og over tid. Norges Bank mener at det er hensiktsmessig å dele markedet inn i regioner og begrunner dette med at regioner fortsatt er en forklaringsfaktor for aksjekursutviklingen, og at det er en mer entydig sammenheng mellom land og valutaeksponering enn mellom sektor og valutaeksponering. I analysen senere i oppgaven vil vi imidlertid se på både

sektorer og regioner. Vi skal se at for den norske stat som eier av SPU er både regioner og sektorer relevant i allokeringen av en optimal portefølje. Det tolkes fra Norges Bank (2002) at allokering mellom sektorer eller regioner er et valg en må ta i forvaltningen av SPU, fremfor å åpne for muligheten til å velge en allokering hvor en både velger regioner og sektorer. Noen begrunnelse for dette fremkommer ikke.

Referanseporteføljen er delt inn i regioner fremfor land. Dette begrunnes med at land i samme region ofte opplever en høy samvariasjon når det gjelder markedsutviklingen til aksjer og obligasjoner. Hvis en region eller en gruppe land opplever samme tendens, kan en regionsfordeling være like tilfredsstillende som en landinndeling da utviklingen i en gruppe land er tilsvarende utviklingen i den samlede regionen. Dette gjelder spesielt i Europa hvor markedsintegrasjonen er høyest (Norges Bank, 2002).

Regionsinndeling Finansdepartementet har fastsatt at SPU skal investere i et land med landets valuta. Dette er ikke nødvendig på grunn av terminmarkedet for valuta. For SPU vil imidlertid en kontinuerlig fornying av terminkontrakter være nødvendig ettersom fondets levetid er lengre enn aktuelle terminkontrakter. Dette er igjen forbundet med høye transaksjonskostnader (Norges Bank, 2002). Dersom en kontinuerlig må fornye terminkontraktene, vil heller ikke den initiale terminkontrakten være sikker på lang sikt, og fondet kan dermed ikke oppnå en valutasisikkerhet som holder i hele fondets levetid.

Historisk sett har det vært fokus på at allokeringen av investeringene må gjenspeile formålet med fondet. Ettersom den norske stat kan benytte fondet til import av varer og tjenester har det vært sett på som en nødvendighet å maksimere fondets internasjonale kjøpekraft. Dette betyr at fondet skal maksimeres i forhold til en konsumkurv av fremtidige importgoder (Norges Bank, 2002; Finansdepartementet 2011b). Mer enn halvparten av SPU består per i dag av investeringer i Europa, og en av grunnene til dette er at hoveddelen av det fremtidige konsummønsteret forventes å importeres fra denne regionen (Finansdepartementet, 2011b). Finansdepartementet (2011b) påpeker for øvrig at valutasisikkerheten til SPU er mindre enn først antatt ettersom investeringshorisonten til fondet er lengre enn det som var forventet i fondets oppstartsfase. Ettersom investeringshorisonten til SPU er lang, gjør kjøpekraftsparitet valutasisikkerheten liten. Finansdepartementet (2011b) stiller dermed spørsmålsteget ved om en så sterk konsentrasjon av investeringer i Europa, som tidligere var ønskelig, er nødvendig med tanke på å maksimere den internasjonale kjøpekraften til fondet. Dette er etter min mening på høy tid.

Dersom den internasjonale kjøpekraften til fondet i liten grad er avhengig av valutakursen, noe som i følge Finansdepartementet (2011b) er tilfellet, kan en argumentere for at den optimale regionsallokeringen er mer lik verdensmarkedsporteføljen enn den vi ser i dag. Finansdepartementet (2011b) peker i denne forbindelse på andre hensyn som må tas i betraktning før en bestemmer om investering i verdensmarkedsporteføljen er relevant for SPU. Blant argumentene finner vi investerbarhet og konsentrasjonsrisiko i aksjemarkedet, samt forventet avkastning og risiko i ulike obligasjonsmarkeder. Dette diskuterer vi i det følgende.

Ikke alle typer investeringer i alle regioner er investerbar for en internasjonal

investor. I flere land f.eks Kina, eksisterer det begrensninger på graden av internasjonalt eierskap, og det kan dermed være vanskelig å investere i en verdensmarkedsportefølje av aksjer (Finansdepartementet, 2011b). Det er for øvrig klart at SPU ikke reflekterer det investerbare markedet til en internasjonal investor. I kapittel 5 skal vi se nærmere på hvordan det investerbare markedet ser ut i følge Dow Jones (2011a og 2011b).

Videre hevder Finansdepartementet (2011b) at en ved investering i verdensmarkedsporteføljen får konsentrasjonsrisiko ovenfor enkeltutstedere eller enkeltmarkeder. Som eksempel pekes det på at USA utgjør om lag 50 % av verdens aksjemarkedet. Dette stemmer for så vidt, men en kan argumentere for at en får en høyere eksponering mot enkeltutstedere om en investerer 50 % av aksjeporteføljen i Europa, enn om en fra verdensmarkedsporteføljen investerer 50 % i USA. Det europeiske aksjemarkedet utgjør omtrent 24 % av det totale verdensmarkedet for aksjer (Dow Jones, 2011a). Dermed får en høyere eksponering mot enkeltutstedere eller enkeltmarkeder om en investerer 50 % av formuen i Europa som er et relativt lite marked i forhold til å investere den tilsvarende formuen i et stort marked, som USA. At hensyn til investerbarhet og konsentrasjonsrisiko støtter referanseporteføljens avvik fra verdensmarkedsporteføljen virker derfor tvilsomt.

Når det gjelder en markedsportefølje av obligasjoner nevnes det at enkelte andeler i liten grad kan forklares av forventet avkastning, som eksempelvis statsobligasjoner. En kan si at markedsvekter er mindre aktuelt for investeringer i statsobligasjoner, da det samlede tilbudet av statsobligasjoner avhenger av lånebehovet til ulike stater. Om en allokerer investeringen i statsobligasjoner i forhold til markedsvekter for obligasjoner, vil en dermed få høy eksponering mot land med høy gjeld. Dette gir nødvendigvis ikke en god risikospredning. Finansdepartementet foreslår at en allokering av obligasjonsporteføljen i forhold til BNP-vekter kan være mer aktuelt. Et land med høyt BNP vil muligens ha bedre evne til å betale tilbake gjelden enn et land med lavt BNP. På en annen side trekkes det i et eksempel frem at japanske statsobligasjoner har en avkastningsrate tilnærmet null, og at slike investeringer vil utgjøre en vesentlig del av en verdensmarkedsportefølje og BNP-vekting. En annen allokering enn verdensmarkedsandeler og BNP-vekting kan dermed være aktuelt for obligasjonsporteføljen. Norges Bank foreslår allikevel at obligasjoner utstedt av private aktører muligens bør være markedsvektet, da det ikke er direkte sammenheng mellom et selskaps evne til å betale tilbake gjeld og lands BNP (Finansdepartementet, 2011b).

Både Norges Bank (2002) og Finansdepartementet (2011b) nevner at en må se på SPU som en del av den øvrige nasjonalformuen til staten. De erkjenner at pensjonsfondet bør investeres på en slik måte at avkastningen til fondet ikke samvarierer svært mye med den øvrige nasjonalformuen. Dette tilsier at en ikke bør være høyt eksponert for nærliggende land, eller land med svært lik næringsstruktur som Norge. Dette er blant annet et argument for å redusere investeringen i Europa (Norges Bank, 2002). I de følgende kapitlene i denne oppgaven fokuserer vi på den totale risikoen, det vil si at vi tar hensyn til den øvrige risikoen til nasjonalformuen og vi finner hvilken allokering av pensjonsfondet som vil minimere en slik total risiko. Norges Bank og Finansdepartementet ikke ser ut til å ta dette hensynet, snarere tvert i mot. En nærmere begrunnelse for dette fremkommer ikke, utenom at det er vanskelig å gjøre dette på en konsistent måte og at

Norge trolig vil importere relativt mer fra Europa enn fra andre regioner i fremtiden. I den siste Stortingsmeldingen (Finansdepartementet, 2011b) som omfatter investeringsstrategien til SPU ser det for øvrig ut til at argumentet som omfatter import er nedtonet.

Finansdepartementet (2011b) skriver i Stortingsmeldingen at Norges Bank mener det bør vurderes om en videreføring av dagens regionsvekter i aksjeporteføljen er hensiktsmessig. Banken mener at det er mindre grunn til å legge fremtidige forventede importvekter til grunn i fremtiden. Dette begrunnes igjen med at bruken av fondsmidlene vil spres over et langt tidsrom, og at avvik fra kjøpekraftsparitet dermed er mindre relevant. Videre pekes det på at det er usikkert hvordan det fremtidige importmønsteret vil bli seende ut, ettersom konsumentene har substitusjonsmuligheter mellom tilbydere i verdensmarkedet. Norges Bank mener at en strategi med utgangspunkt i verdensmarkedsvektene kan være en bedre strategi. Dette vil både sikre diversifisering, og muligens gi et bilde av hvor fremtidig import kommer fra.

Finansdepartementet skal i fremtiden fastsette en ny geografisk inndeling av porteføljen til SPU, og endringer kan allerede være aktuelt nå i 2011. Videre i denne oppgaven tar vi allikevel utgangspunkt i dagens allokering av referanseporteføljen, ettersom en eventuell ny allokering fortsatt er uklar.

Faste eller flytende regionsvekter Dersom regionsvektene er *flytende*, vil det innebære at investeringsandelene i hver region avhenger av kursutviklingen i de ulike regionene. Dersom en region over en periode har høyere avkastning enn andre, vil en flytende regionsvekt medføre at andelen investert i regionen med høy avkastning øker ved at verdien av investeringen øker relativt mer der. Per i dag har SPU *faste* regionsvekter og dette gjennomføres på to måter, tilførsel og rebalansering. Faste regionsvekter gjennom *tilførsel* skjer ved at når nye midler tilføres fondet, så investeres midlene på en slik måte at regionsvektene går tilbake til en regionsfordeling tilnærmet lik referanseporteføljen. Midler tilføres fondet månedlig. I praksis plasseres altså de nye midlene i større grad i regioner som har hatt lav avkastning og dermed har en lavere andel i porteføljen, og relativt mindre i regioner med høy avkastning i foregående periode. Dersom en av regionsvektene for aksjer eller obligasjoner avviker med mer enn 3 % fra referanseporteføljen, foretas det en rebalansering. Ved rebalansering flytter en midler fra regioner med større vekt enn referanseporteføljen, og til regioner med mindre vekt enn referanseporteføljen.

Ved bruk av faste regionsvekter avviker SPU igjen fra tankegangen om å investere i verdensmarkedsporteføljen. I perioder med svært ulik kursutvikling i ulike regioner vil verdensmarkedsporteføljen endre seg, mens SPU holder konstante vekter i ulike regioner.

Norges Bank mener at en gjennom rebalansering av porteføljen kan oppnå en høyere avkastning enn dersom en tillater at regionsvektene flyter med aksjekursene. Eksempelvis kan det tenkes at en høy kursoppgang vil etterfølges av kursnedgang, og kursnedgang etterfølges av kursoppgang. Med dette sier Norges Bank at en gjennom faste regionsvekter er mindre eksponert for bobler og feilprising (Norges Bank, 2002).

2.1.2 Etske retningslinjer for forvaltningen

Investeringene i SPU skal være såkalte *samfunnsansvarlige investeringer*. En samfunnsansvarlig investor tar hensyn til at deres investeringsbeslutninger kan påvirke samfunnet, i tillegg til den finansielle siden ved investeringen (Social Investment Forum, 2010). Finansdepartementet fastsetter etiske retningslinjer for pensjonsfondet, og avgjør om enkelte foretak eller land skal utelukkes fra pensjonsfondet. De etiske retningslinjene er dermed med på å begrense SPU sitt investeringsunivers. Det er ikke ønskelig at pensjonsfondet skal være medvirkende til brudd på grunnleggende etiske normer, eller støtte opp om industri som kan virke ødeleggende eller krenkende. Pensjonsfondet skal altså støtte opp om god selskapsstyring, ivaretagelse av miljø og sosiale forhold (Finansdepartementet, 2010b).

Når det gjelder spesifikke industrier, skal SPU ikke plassere midler i foretak som produserer våpen eller militært materiell som ved anvendelse bryter med humanitære prinsipper. Det skal heller ikke investeres i tobakkindustri. Videre kan Finansdepartementet utelukke selskaper fra investeringsuniverset hvor det er en uakseptabel risiko for at selskapet medvirker til, eller er ansvarlig for grove eller systematiske krenkelser av menneskerettighetene, eksempelvis drap, tortur, tvangsarbeid, barnarbeid, mm. Investeringer som støtter opp om alvorlige krenkelser av individers rettigheter i krig eller konflikter og alvorlig miljøskade, skal også utelukkes. Videre skal fondsmidlene ikke plasseres i regioner eller selskap hvor grov korrupsjon eller grove brudd på andre grunnleggende etiske normer kan finne sted (Finansdepartementet, 2010b).

Når investeringer skal utelukkes fra investeringsuniverset til SPU, står det i retningslinjene at dette skal offentliggjøres. Offentliggjøringen skal selvsagt skje etter at posisjonen er ekskludert fra fondet, slik at uttrekket ikke medfører unødvendig lavere pris på aksjene som selges, eller i verste fall realisert tap (Finansdepartementet, 2010b). Generelt vil rollen fondene spiller i den internasjonale finansmarkedet føre til at deres investeringer blir etterlignet. Om mange investorer etterligner enkeltinvesteringer foretatt av et statlig investeringsfond, kan dette føre til overdreven kapitalbevegelse mot enkeltposisjoner. Dette fører igjen til overvurdering av verdien av enkeltaktiva og aktiva korrelert med investeringen. Denne «smitteeffekten» kan virke destabiliserende for deler av finansmarkedet (Kern, 2008).

Kapittel 3

Porteføljemodellen med eksogen formue

Fremstillingen av porteføljemodellen med eksogen formue tar utgangspunkt i Sandviks (2010a) presentasjon av modellen, men er også inspirert av Gintschel og Scherer (2008).¹ Porteføljemodellen med eksogen formue tar hensyn til at en investor sitter med en del verdier som en ikke enkelt kan kjøpe og selge, dvs. en gitt formue, eller at en har verdier en beholder uansett risiko og forventet avkastning. I klassisk porteføljet teori ser en gjerne bare på de finansielle og strategiske investeringene en foretar, og er interessert i avkastningen og risikoen til disse. Å ta hensyn til eksogene investeringer, vil så å ta hensyn til totalposisjonen til investoren. Det kan eksempelvis tenkes at en ønsker å beholde boligen sin uansett om en forventer en gevinst eller ikke, ettersom en bolig gjerne ansees som en nødvendighet. Det kan også tenkes at enkelte kan velge å beholde større investeringer i enkeltforetak for å sikre kontroll over foretaket. Noen verdier en har kan i praksis være vanskelig eller umulig å selge fritt i markedet, som humankapital.

Porteføljemodellen med eksogen formue viser hvordan risikoen til totalformuen med en slik fastlåst formue, kan reduseres gjennom kjøp og salg av finansielle aktiva. Resultatet er en portefølje som er optimal i forhold til å minimere den samlede risikoen til investoren, for en gitt forventning, og ikke bare risikoen forbundet med verdipapirinvesteringer (Gintschel og Scherer, 2008).

3.1 Innledning og notasjon

Anta en investor som ønsker å minimere risiko for en gitt forventning. Investoren har gitte (eksogene) verdier, E . Den eksogene formuen har investoren ikke kontroll over selv om han er eier av formuen, men inntekter fra denne formuen vil allikevel tilfalle investoren (Gintschel og Scherer, 2008). Videre har investoren en initialbeholdning som kan investeres i verdipapir. Ettersom vi ser på Norge som investor, antar vi at det kun kan investeres i utenlandske verdipapir i tråd med retningslinjene til Statens pensjonsfond utland. Modellen skal brukes til å definere den optimale utenlandsporteføljen, gitt den øvrige formuen.

¹Dersom ikke en annen kilde er oppgitt refereres det til Sandvik (2010a)

Vi normaliserer størrelsen på SPU til $x_0 = 1$. Formålet med en slik normalisering er at vi nå kan definere den eksogene formuen (den norske formuen utenom SPU) som en andel, x_E , av utenlandsinvesteringene. Dette forenkler sammenligning med den klassiske modellen uten eksogen formue.

Størrelsen på den eksogene formuen relativt til utenlandsinvesteringene, x_E , påvirker allokeringen i den optimale porteføljen. Dersom x_E er liten har den eksogene formuen mindre å si for den totale usikkerheten til investoren (Scherer, 2009).

I modellen spiller forventning, varians og kovarianser en viktig rolle, og disse defineres i det følgende.

Forventningen, $E[x]$, til en variabel x , er det vektete gjennomsnittet av verdiene, x_i , variabelen kan ta, med sannsynligheten for hver av verdiene, $p(x_i)$, som vektor:

$$E[x] = \sum_i x_i p(x_i).$$

Varians er mål en variabels på variasjon rundt forventningsverdien. Variansen til variabelen x finner vi fra:

$$\sigma_x^2 = E[x_i - E[x]]^2 = \sum_i (x_i - E[x])^2 p(x_i)$$

(Thomas, 2005, s. 41-42). *Standardavviket* til en variabel forteller oss hvor mye den variabelen gjennomsnitt avviker fra forventningsverdien, og er gitt ved kvadratroten til variansen. La den eksogene formuen ha avkastningsrate lik \tilde{r}_E , med standardavvik σ'_E . For å forenkle uttrykkene i modellen lar vi $\sigma_E = x_E \sigma'_E$.

Kovarians er et mål på lineær sammenheng mellom to variabler, x og y , og er generelt gitt ved:

$$\text{cov}(x, y) = E[xy] - E[x]E[y] = \sum_i (x_i - E[x])(y_i - E[y])p(x_i, y_i)$$

(Thomas, 2005, s. 192). La \mathbf{c}'_E være en kolonnevektor av kovarianser mellom avkastningsratene til de utenlandske verdipapirene og den eksogene formuen, $\mathbf{c}'_E = (c'_{E_1}, \dots, c'_{E_n})$, hvor $i = (1, \dots, n)$ er de mulige utenlandsinvesteringene i SPU.² La videre $\mathbf{c}_E = x_E \mathbf{c}'_E$, for å forenkle uttrykkene senere i modellen.

Anta at utenlandsporteføljen er (a_0, \mathbf{a}) . Her er a_0 andelen av SPU som er investert i et sikkert verdipapir med avkastningsrate r_0 , og $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ er andelen investert usikkert, med avkastningsrate $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n)$.³ Når vi har normalisert verdien av verdipapirinvesteringene $x_0 = 1$, har vi initialformuen til SPU er $a_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{1} = 1$. Her er \mathbf{a}^T den transponerte vektoren til \mathbf{a} , og $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ er en enhetsvektor.

²Notasjon i uthevet skrift er definert som en vektor eller en matrise. Vektorene er i utgangspunktet kolonnevektorer.

³I anvendelsen av modellen utelukker vi sikre investeringer, slik at $a_0 = 0$, begrunnelsen for dette kommer vi tilbake til i kapittel 4. Modellen med et sikkert verdipapir er mer intuitiv og lettere å tolke, og av denne grunn velger jeg å presentere denne versjonen av modellen.

3.2 Investorens sluttformue

En investor bør være interessert i verdien av sluttformuen til totalformuen sin. Med våre definisjoner er Norges sluttformue, \tilde{x} :

$$\tilde{x} = x_E (1 + \tilde{r}_E) + a_0 (1 + r_0) + \mathbf{a}^T (\mathbf{1} + \tilde{\mathbf{r}}). \quad (3.1)$$

Her er $x_E (1 + \tilde{r}_E)$ den eksogene sluttformuen, og de to siste leddene er sluttformuen til SPU.

Siden $a_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{1} = 1$ er $a_0 = 1 - \mathbf{a}^T \mathbf{1}$, noe som fører til at vi kan skrive:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_E (1 + \tilde{r}_E) + (1 + r_0 - \mathbf{a}^T \mathbf{1} r_0 + \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{r}}) \\ &= x_E (1 + \tilde{r}_E) + (1 + r_0 + \mathbf{a}^T (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_0)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Forventningen til sluttformuen

La $\mu_E := E[\tilde{r}_E]$ være den forventede avkastningsraten til den eksogene formuen, og $\boldsymbol{\mu} := E[\tilde{\mathbf{r}}]$ de forventede avkastningsratene verdipapirinvesteringene i SPU. Dermed er forventet sluttformue:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{x}} &:= E[\tilde{x}] = E[x_E (1 + \tilde{r}_E)] + E[1 + r_0 + \mathbf{a}^T (\tilde{\mathbf{r}} - r_0 \mathbf{1})] \\ &= x_E (1 + \mu_E) + 1 + r_0 + \mathbf{a}^T (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Her er $r_0 + \mathbf{a}^T (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1} r_0)$ den forventede avkastningen til SPU. *Risikopremiene* til investeringsmulighetene til SPU, det vil si de forventede avkastningsratene utover den sikre, er da $\boldsymbol{\varepsilon} := \boldsymbol{\mu} - \mathbf{1} r_0$. Dermed kan forventet avkastning på de utenlandske verdipapirinvesteringene skrives som $\boldsymbol{\mu} = r_0 + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon}$. Da er den forventede totalformuen:

$$\mu_{\tilde{x}} = x_E (1 + \mu_E) + 1 + r_0 + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.4)$$

Variansen til sluttformuen

Variansen til investorens sluttformue avhenger av variansen til verdipapirinvesteringene, variansen til den eksogene formuen, kovariansen mellom de utenlandske verdipapirinvesteringene, og kovariansen mellom de utenlandske verdipapirinvesteringene og den eksogene formuen. Vi ønsker å minimere variansen for en gitt forventning. La kovariansmatrisen til avkastningsratene til de usikre verdipapirinvesteringene være $\boldsymbol{\Sigma}$. Kovariansmatrisen er en symmetrisk matrise, hvor variansen til hvert av verdipapirene inngår på diagonalen.

Generelt er variansen til avkastningsraten til en portefølje, \mathbf{a} , med avkastningsrater, $\tilde{\mathbf{r}}$ gitt ved:

$$\sigma_{\mathbf{a}}^2 = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}. \quad (3.5)$$

Vi har imidlertid en ekstra kilde til usikkerhet, nemlig den eksogene formuen. Vi trenger derfor et utvidet uttrykk for variansen til Norges sluttformue. Variansen til totalformuen, $\sigma_{\tilde{x}}^2$, er:

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{x}}^2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{a} & x_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{c}'_E \\ \mathbf{c}'_E & \sigma_E^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ x_E \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T x_E \mathbf{c}'_E + x_E^2 \sigma_E^2 \\ &= \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{c}_E + \sigma_E^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Her er $\mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a}$ variansen til avkastningsraten til SPU alene. Når vi tar den eksogene formuen med i betraktningen, vil altså variansen til totalformuen også avhenge av kovariansen mellom investeringsmulighetene i utlandet og den eksogene formuen.

3.3 Investorens tilpasning

Ettersom den innenlandske (eksogene) formuen er gitt, vil vi ikke kunne endre denne delen av porteføljen for å oppnå en lavere varians for totalporteføljen til den norske stat. Dermed er det SPU-investeringene som må investeres på en slik måte at variansen til totalporteføljen blir lavest mulig. For en gitt forventet avkastning til SPU, $\bar{\mu}$, kan vi minimere variansen gjennom et minimeringsproblem. For å løse problemet kan man bruke Lagrange-metode gitt følgende sidevilkår: $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mu} - r_0$.

La $\varepsilon := \bar{\mu} - r_0$ være risikopremien til de utenlandske verdipapirinvesteringene for den gitte forventningen. Vi har med dette følgende minimeringsproblem:

$$\min_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{c}_E + \sigma_E^2 \quad \text{usv.} \quad \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon. \quad (3.7)$$

Lagrangeuttrykket blir da:

$$L = \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{c}_E + \sigma_E^2 - \lambda (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon). \quad (3.8)$$

Førsteordensvilkår:

$$\frac{\delta L}{\delta \mathbf{a}} = 2\mathbf{a}^T \Sigma + 2\mathbf{c}_E^T - \lambda \boldsymbol{\varepsilon}^T = 0. \quad (3.9)$$

Videre må selvsagt sidevilkåret holde. Nå kan vi løse førsteordensvilkåret (3.9) for de usikre utenlandsinvesteringene, \mathbf{a} . Ved transponering får vi at $2\Sigma\mathbf{a} + 2\mathbf{c}_E = \lambda\boldsymbol{\varepsilon}$. Siden Σ er en symmetrisk matrise er $\Sigma^T = \Sigma$. Generelt er kovariansmatrisen positiv semidefinit. Vi antar at den også er positiv definit. Da er Σ invertibel, det vil si at det er mulig å invertere kovariansmatrisen til Σ^{-1} , og den inverterte kovariansmatrisen er også positiv definit.

Venstremultipliserer nå med den inverterte kovariansmatrisen og gjennom følgende steg kan vi løse for \mathbf{a} :

$$\begin{aligned} \Sigma^{-1}(2\Sigma\mathbf{a} + 2\mathbf{c}_E) &= \Sigma^{-1}\lambda\boldsymbol{\varepsilon} \\ 2\mathbf{a} + \Sigma^{-1}2\mathbf{c}_E &= \Sigma^{-1}\lambda\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

og resultatet blir med dette:

$$\mathbf{a} = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - \Sigma^{-1} \mathbf{c}_E. \quad (3.10)$$

Løsningen (3.10) for de usikre utenlandsinvesteringene, \mathbf{a} , settes så inn i det transponerte sidevilkåret:

$$\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \left(\frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - \Sigma^{-1} \mathbf{c}_E \right) = \frac{\lambda}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \Sigma^{-1} \mathbf{c}_E.$$

For å forenkle uttrykket kan man eksempelvis definere at $b := \boldsymbol{\varepsilon}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$ og $c := \boldsymbol{\varepsilon}^T \Sigma^{-1} \mathbf{c}_E$. Disse definisjonene resulterer i at $\varepsilon = \frac{\lambda}{2} b - c$, som er ekvivalent med at

$\frac{\lambda}{2} = \frac{\varepsilon+c}{b}$. Setter vi inn for dette i (3.10) finner vi den *optimale porteføljen* til SPU med risikopremie ε , $\mathbf{a}(\varepsilon)$:

$$\mathbf{a}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon+c}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_E \right). \quad (3.11)$$

Dette er porteføljen av utenlandsinvesteringer som minimerer variansen, gitt risikopremien, ε , til de utenlandske verdipapirinvesteringene. Porteføljen i (3.11) er altså den porteføljen en skal investere i for å løse minimeringsproblemet (3.7). Det gjenstår å finne variansen til den optimale utenlandsporteføljen, samt forventning og varians til investorens totalportefølje dersom porteføljen fra (3.11) velges.

Fra ligning (3.11) finner vi variansen til den optimale SPU-porteføljen:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{a}(\varepsilon)}^2 &= \mathbf{a}(\varepsilon)^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right) \boldsymbol{\Sigma} \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E \right) \\ &= \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \boldsymbol{\varepsilon}^T - \mathbf{c}_E^T \right) \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E \right) \\ &= \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \right)^2 \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - 2 \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \right) \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E. \end{aligned}$$

Om vi igjen bruker $b := \varepsilon^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$ og $c := \varepsilon^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E$ og definerer $\gamma := \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E$ fører dette til:

$$\sigma_{\mathbf{a}(\varepsilon)}^2 = \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \right)^2 b - 2 \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \right) c + \gamma = \frac{(\varepsilon+c)^2}{b} - 2 \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \right) c + \gamma = \gamma + \frac{\varepsilon^2 - c^2}{b}. \quad (3.12)$$

Variansen til Norges sluttformue er gitt ved (3.6). Setter vi inn (3.12) i leddet for variansen til verdipapirinvesteringene, $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}$, i (3.6) og bruker (3.11) får vi at:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(\varepsilon) &= \frac{(\varepsilon+c)^2}{b} - 2 \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \right) c + \gamma + 2 \mathbf{a}^T \mathbf{c}_E + \sigma_E^2 \\ &= \frac{(\varepsilon+c)^2}{b} - 2 \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \right) c + \gamma + 2 \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \right) \mathbf{c}_E + \sigma_E^2 \\ &= \frac{(\varepsilon+c)^2}{b} - 2 \left(\frac{\varepsilon+c}{b} \right) c + \gamma + 2 \frac{\varepsilon+c}{b} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E - 2 \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E + \sigma_E^2 \\ &= \frac{(\varepsilon+c)^2}{b} + \sigma_E^2 - \gamma. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4 Gevinsten av å ta hensyn til eksogen formue

Jeg ønsker å sammenligne avkastning og risiko når en investerer i den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue, $\mathbf{a}(\varepsilon)$, i forhold til en optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue. La i det følgende \hat{y} være størrelsen på y når vi ikke tar hensyn til eksogene verdier.

Porteføljen som minimerer variansen for en gitt risikopremie til verdipapirinvesteringene, uten hensyn til de eksogene verdiene er:

$$\hat{\mathbf{a}}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.14)$$

Dette finner vi direkte ved å sette $x_E = 0$ i (3.11). Dersom vi ikke tar hensyn til de eksogene verdiene vil vi behandle problemet som om $\mathbf{c}_E = 0$ og dermed

også $c := \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E = 0$ og $\gamma := \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{c}_E = 0$. Denne tilpasningen er optimal for en investor som ikke har noen annen risiko forbundet med totalposisjonen enn verdipapirinvesteringer, altså *tangentporteføljen* fra klassisk porteføljeteori.

Forskjellen mellom den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue og tangentporteføljen, $\mathbf{a}(\varepsilon) - \widehat{\mathbf{a}}(\varepsilon) = \mathbf{a}(0)$ kaller vi *differanseporteføljen*. Differanseporteføljen er den feilen vi gjør ved å investere i tangentporteføljen, $\widehat{\mathbf{a}}(\varepsilon)$, fremfor den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue, $\mathbf{a}(\varepsilon)$. Uttrykket for differanseporteføljen er:

$$\mathbf{a}(0) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\frac{\varepsilon + c}{b} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_E \right) - \frac{\varepsilon}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\frac{c}{b} - \mathbf{c}_E \right).$$

Det kan vises at variansen til differanseporteføljen er gitt ved:

$$\sigma_{\mathbf{a}(0)}^2 = \mathbf{a}(0)^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}(0) = \gamma - \frac{c^2}{b} \geq 0.$$

Intuitivt bør vi investere mer i verdipapir som er negativt korrelert med den eksogene formuen når vi tar hensyn til denne enn når vi ikke gjør det. Generelt holder dette i gjennomsnitt over alle verdipapirene, siden:

$$\mathbf{c}_E^T \mathbf{a}(0) = \mathbf{c}_E^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\frac{c}{b} - \mathbf{c}_E \right) = \frac{c^2}{b} - \gamma = -\sigma_{\mathbf{a}(0)}^2 \leq 0. \quad (3.15)$$

Resultatet fra (3.15) impliserer at vi ikke bør investere i land som er relativt like Norge, eller i sektorer som er høyt korrelert med innlandsformuen utenom SPU. Eksempelvis bør andelen investert i Europa i dagens referanseportefølje reduseres, og gjerne være negativ. Videre vet vi at olje og gass er en stor sektor i Norge, og SPU bør ikke investere i olje og gass utenlands. Bilindustri, som forventes å være lavt eller negativt korrelert med oljeprisen, vil i følge dette resultatet være en sektor SPU bør investere i.

Variansen til tangentporteføljen, $\widehat{\mathbf{a}}(\varepsilon)$, er gitt fra (3.13), med $c = 0$ og $\gamma = 0$:

$$\sigma_{\widehat{\mathbf{a}}(\varepsilon)}^2 = \frac{\varepsilon^2}{b}.$$

Når investerer i tangentporteføljen er dermed variansen til totalformuen:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_x^2(\varepsilon) &= \sigma_{\widehat{\mathbf{a}}(\varepsilon)}^2 + 2\mathbf{c}_E^T \widehat{\mathbf{a}}(\varepsilon) + \sigma_E^2 = \frac{\varepsilon^2}{b} + 2\mathbf{c}_E^T \frac{\varepsilon}{b} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \sigma_E^2 \\ &= \frac{\varepsilon^2}{b} + 2\frac{\varepsilon}{b}c + \sigma_E^2 = \frac{\varepsilon(\varepsilon + 2c)}{b} + \sigma_E^2. \end{aligned}$$

For en gitt risikopremie til SPU-investeringene, $\widehat{\varepsilon}$, uten å ta hensyn til eksogen formue, kan man sammenligne den totale risikoen investoren med og uten hensyn til den eksogene formuen. For en gitt risikopremie til verdipapirinvesteringene vil $\sigma_x^2(\varepsilon) \leq \widehat{\sigma}_x^2(\varepsilon)$. Dette betyr at investorens totalformue har en lavere risiko for en gitt risikopremie til SPU om en tar hensyn til den eksogene formuen.

Vi kan finne gevinsten av å ta hensyn til de eksogen formue gjennom å sammenligne risikopremien i porteføljene med og uten hensyn til eksogen formue for en gitt varians. Vi setter da $\sigma_x^2(\varepsilon) = \widehat{\sigma}_x^2(\widehat{\varepsilon})$ og finner den risikopremien en kan oppnå ved

å ta hensyn til eksogen formue, gitt variansen til totalposisjonen om en investerer i porteføljen uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}(\varepsilon)$. La nå ε være risikopremien en oppnår ved å investere i den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue, og $\hat{\varepsilon}$ er den gitte risikopremien uten å ta hensyn til denne. Fra $\sigma_x^2(\varepsilon) = \hat{\sigma}_x^2(\hat{\varepsilon})$ får vi:

$$\begin{aligned} \frac{(\varepsilon + c)^2}{b} + \sigma_E^2 - \gamma &= \frac{\hat{\varepsilon}(\hat{\varepsilon} + 2c)}{b} + \sigma_E^2 \\ (\varepsilon + c)^2 - \gamma b &= \hat{\varepsilon}(\hat{\varepsilon} + 2c) \end{aligned}$$

Om vi løser for ε resulterer dette i:

$$\varepsilon(\hat{\varepsilon}) = \pm \sqrt{\hat{\varepsilon}(\hat{\varepsilon} + 2c) + \gamma b} - c, \quad (3.16)$$

hvor bare resultatet med positivt fortegn er relevant. *Gevinsten* i økt risikopremie til verdipapirinvesteringene, ved å ta hensyn til eksogen formue, er fra dette gitt ved: $\varepsilon(\hat{\varepsilon}) - \hat{\varepsilon}$.

Vi har nå løst en porteføljemodell med eksogen formue analytisk. Videre i oppgaven tar vi for oss hvilke antakelser vi legger til grunn i vårt tilfelle for å finne en numerisk løsning, samt hvilket datagrunnlag resultatene baserer seg på.

Kapittel 4

Antakelser og datagrunnlag

For å gjennomføre analysen i denne oppgaven trenger vi noen antakelser, samt et datagrunnlag. I dette kapitlet går vi inn på de viktigste antakelsene som ligger til grunn. Videre blir datagrunnlaget presentert. Valg av datagrunnlag påvirker resultatene i analysen. Det er derfor viktig at vi har klart for oss hva grunnlaget er, og svakheter forbundet med utvalget.

4.1 En periode

Porteføljemodellen med eksogen formue er enperiodisk. At en modell er enperiodisk betyr at den kan brukes for å analysere problemstillinger fra et tidspunkt til neste. I tilfellet med den norske stat som investor kan det tenkes at en dynamisk modell ville være mer relevant, ettersom tidshorizonten er lang, og at oljerikdom som en del av den eksogene formuen gradvis overføres til finansielle aktiva i SPU. Dette vil igjen medføre at forholdet mellom finansiell rikdom og eksogen formue, x_E , vil endre seg over tid. I en dynamisk modell kunne en ta hensyn til at denne størrelsen endrer seg, under antakelse om at man kjenner utviklingen.

Scherer (2009) presenterer en dynamisk modell for et SWF med lang tidshorizont hvor inntektene kommer fra olje. Forholdet mellom utenlandsformuen og den gitte innenlandsformuen er konstant i en enperiodisk modell. I Scherers dynamiske modell tas det hensyn til tidshorizonten, og utvikling i den relative størrelsen på den eksogene formuen, x_E , over tid. Han kommer frem til at en investor med en lang tidshorizont, som er sikker på hvordan den relative størrelsen på eksogen formue i forhold til finansiell rikdom vil utvikle seg, kan investere mer aggressivt enn om en er usikker på hvor rik man egentlig er og har en kortere investeringshorizont. Dette begrunner han med mean-reversion prinsippet. *Mean reversion prinsippet* går ut på at en periode med usedvanlig lav avkastning etterfølges av en periode med høy avkastning. På relativt kort sikt finnes det ikke empirisk bevis på at dette stemmer, mens det ser ut å hvertfall til en viss grad gjelde på lang sikt (Berk og DeMarzo, 2007, s. 306). Det virker som også Finansdepartementet har tro på dette prinsippet da en gjennom rebalansering av porteføljen i SPU investerer nye midler i regioner hvor aksjer og obligasjoner har hatt relativt lav avkastning i foregående periode.

En svakhet med porteføljemodellen er at den er enperiodisk og dermed ikke tar hensyn til at forholdet mellom innenlandsformuen og SPU endrer seg over tid,

eller at investeringsmuligheter som i datagrunnlaget har lav forventet avkastning muligens vil ha høyere forventet avkastning i neste periode.

4.2 Udekket renteparitet og sikker rente

Modellen i kapittel 3 antar en sikker rente. En anser gjerne statsobligasjoner som sikre investeringer, men ettersom en kun investerer utenlands og i andre lands valuta, er det ikke garantert at vi i praksis har en sikker rente, r_0 , i norske kroner. Den faktiske avkastningen i norske kroner avhenger av valutakursen når avkastningen realiseres. For å kunne definere en sikker rente i modellen må en dermed enten måle avkastningen og sluttformuen på alle de usikre plasseringene i utenlandsk valuta, eller anta udekket renteparitet. Avkastningsratene i datagrunnlaget er målt i dollar, og om vi har sikre investeringer i eksempelvis amerikanske statsobligasjoner, vil avkastningen målt i dollar være relativt sikker. Allikevel vil vi til syvende og sist hvis fondsmidlene skal brukes innenlands, hovedsaklig ha behov for norske kroner. Da er ikke lenger en sikker posisjon i dollar sikker på vekslings tidspunktet. Vi antar derfor udekket renteparitet.

Udekket renteparitet er en likevektsteori for valutamarkedet og sier at på lang sikt vil utvikling i rentedifferansen være lik utviklingen i valutakursen (depresieringsraten). Udekket renteparitet sikrer dermed at plasseringer har samme forventede avkastning, uansett hvilken valuta man måler avkastningen i. Anta at R_N er forventet avkastning på plasseringer i norske kroner, og R_{US} er forventet avkastning i USA. Mer konkret er R_N og R_{US} renten en vil få ved å låne ut en enhet av valutaen, henholdsvis *NOK* eller \$, i en periode. La videre spotkursen mellom norske kroner og dollar i dag være $E_{NOK/\$}$ og forventet fremtidig valutakurs er $E_{NOK/\e . *Spotkursen* er den faktiske valutakursen på vekslings tidspunktet. Under udekket renteparitet har vi at:

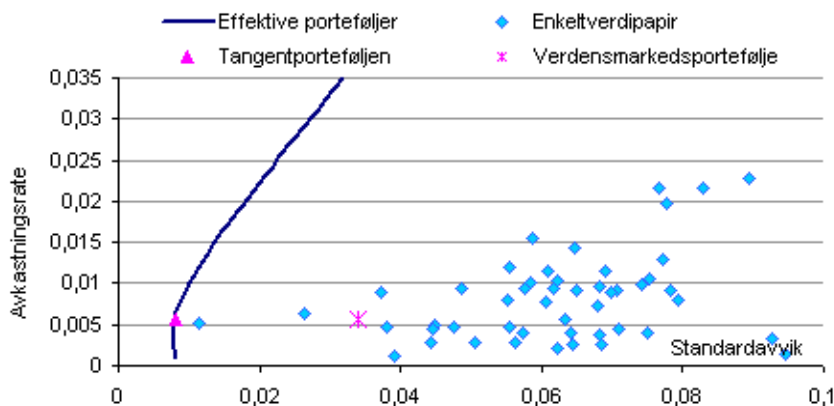
$$R_N = R_{US} + \frac{E_{NOK/\$}^e - E_{NOK/\$}}{E_{NOK/\$}} \quad (4.1)$$

Udekket renteparitet tilsier at dersom forventet avkastning på innskudd i norske kroner øker (R_N), så vil flere aktører ønske å plassere penger i Norge, dvs. etterspørselen etter norske kroner øker. Når etterspørselen etter en valuta øker vil valutaen appresiere. Vi ser fra udekket renteparitet, at depresieringsraten vil øke når innlandsrenten øker hvis pariteten holder (Krugman og Obstfeld, 2009).

Under denne antakelsen har vi en sikker rente i kroner, om noen aktører i finansmarkedet tilbyr det. Det er for øvrig vanskelig å finne noen sikker rente i finansmarkedet som gjelder for hele investeringsperioden. Selv om eksempelvis amerikanske statsobligasjoner er regnet som relativt sikre, vil renten på nye amerikanske statsobligasjoner sannsynligvis variere over en lang tidshorison.

I klassisk porteføljeteori bestemmer den sikre renten og tangentporteføljen de effektive porteføljene, eller kapitalmarkedslinjen (Berk og DeMarzo, kap. 10). Klassisk porteføljeteori gir tilsvarende resultater som modellen vi presenterte i det foregående kapitlet når vi *ikke* tar hensyn til den eksogene formuen. Anta at den forventede avkastningsraten til tangentporteføljen er gitt ved den gjennom-

snittlige avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen¹, $\bar{\mu}^W$. En kan da finne tangentporteføljen fra den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, gitt avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen. Kapitalmarkedslinjen er da tangenten til tangentporteføljen. Konstantleddet til kapitalmarkedslinjen ville da være den sikre renten. Gitt vårt datagrunnlag vil en slik tilnærming til den sikre renten, r_0 , gjøre den negativ. Dette kan vi se fra figur 4.1, hvor tangenten til verdensmarkedsporteføljen vil gi et negativt konstantledd.



Figur 4.1: Effektive porteføljer, tangentporteføljen og verdensmarkedsporteføljen.

Dette kan ikke være tilfellet, da en ville få utbetalt penger ved å låne til den sikre renten, noe som gir en arbitrasjemulighet. En *arbitrasjemulighet* er en situasjon hvor en har mulighet til å få gevinst uten risiko for tap (Berk og DeMarzo, 2007, s. G-1). Vi antar dermed en sikker rente lik null, $r_0 = 0$.

En sikker rente lik null er i realiteten tvilsomt. Dette ville medføre at en kunne låne gratis og risikofritt for så å investere i usikre aktiva med forventet positiv avkastning. For å delvis komme oss unna problemet med den sikre renten, vil vi i anvendelsen av modellen fra kapittel 3 senere i oppgaven se bort fra muligheten for sikre investeringer. Investoren må altså investere hele utenlandsformuen i usikre verdipapir. Det betyr at:

$$\mathbf{1}^T \mathbf{a} = 1,$$

hvor \mathbf{a} som tidligere er porteføljen av usikre utenlandsinvesteringer. Denne restriksjonen tilsvarer at $a_0 = 0$. En kan løse modellen analytisk også under denne forutsetningen. En vil da få lignende resultater som de vi fant i kapittel 3, men fremstillingen er mer komplisert. Vi nøyer oss imidlertid med å løse modellen numerisk i kapittel 10 og 11.

For å finne porteføljen med minst varians for en gitt forventning, μ , uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}(\mu)$, bruker vi følgende minimeringsproblem i stedet for ligning (3.14):

$$\hat{\sigma}^2(\mu) = \min_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} \quad \text{usv.} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{a} = 1 \quad \text{og} \quad \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} = \mu \quad (4.2)$$

¹Verdensmarkedsporteføljen presenteres i delkapittel 5.3. Det viser seg at verdensmarkedsporteføljen i seg selv ikke er en effektiv portefølje i datagrunnlaget. Derfor bruker jeg den gjennomsnittlige avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen, og finner en effektiv portefølje gitt denne forventningen fremfor å bruke verdensmarkedsporteføljen som tangentportefølje direkte.

Når vi tar hensyn til eksogen formue minimerer vi variansen til totalposisjonen fremfor variansen til utenlandsporteføljen alene. I kapittel 3 var den optimale porteføljen med minst varians for en gitt forventning gitt ved ligning (3.11). Uten et sikkert verdipapir finner vi den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue, $\mathbf{a}(\mu)$ fra følgende minimeringsproblem:

$$\sigma_x^2(\mu) = \min_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{c}_E + \sigma_E^2 \quad \text{usv.} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{a} = 1 \quad \text{og} \quad \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} = \mu \quad (4.3)$$

Her er μ fortsatt den forventede avkastningsraten til SPU (verdipapirinvesteringene). Forventningen til den optimale porteføljen med hensyn til den eksogene formuen, for samme totalvarians som den optimale porteføljen uten hensyn til denne finner vi fra:

$$\mu(\hat{\sigma}_x^2) = \max_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} \quad \text{usv.} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{a} = 1 \quad \text{og} \quad \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{c}_E + \sigma_E^2 = \hat{\sigma}_x^2. \quad (4.4)$$

Gevinsten av å ta hensyn til eksogen formue blir dermed: $\mu(\hat{\sigma}_x^2) - \mu$, som er gevinsten i økt avkastningsrate til verdipapirinvesteringene i SPU.

Ved å utelukke muligheten for investering i det sikre verdipapiret kommer vi oss unna problemet med den sikre renten i selve analysen. Vi trenger for øvrig en modell for å finne forventede avkastningsrater ut fra datagrunnlaget. Dette gjør vi i kapittel 8 ved hjelp av kapitalverdimodellen som også forutsetter en sikker rente. Når vi finner de forventede avkastningsratene i kapittel 8 bruker vi at $r_0 = 0$.

Kapittel 5

Utlandet

5.1 Historiske data

For å gjennomføre analysen, trenger vi et datagrunnlag. Vi tar utgangspunkt i historiske avkastningsrater i perioden januar 2002 til og med desember 2010. Datagrunnlaget til utlandet er bygget opp av indekser fra ulike sektorer og ulike verdensdeler, samt Barclays Global Aggregate Bond Index (BGA) og Barclays World Government Inflation-Linked Index (BGIL) for obligasjoner. Historiske data er tilgjengelige data man kan bruke for å si noe om forventet fremtidig avkastning og risiko til investeringer. Det antas med dette at fremtiden ligner på fortiden med tanke på avkastning og risiko forbundet med investeringsuniverset vi tar for oss. Vi ser bort fra at det kan komme endringer i markedsstrukturen i fremtiden, og at markedsstrukturen ligger fast i perioden vi bruker til å estimere resultatene.

Datagrunnlaget er basert på månedsdata i perioden januar 2002 - desember 2010. Ved valg av tidsperiode har vi forsøkt å bruke en periode som i gjennomsnitt har hatt en relativt normal avkastning. Dette er gjort av hensyn til å ikke over- eller underestimere faktiske avkastningsrater i analysen. Den valgte tidsperioden bærer preg av sterk vekst de første årene, men en kan argumentere for at dette motsvares med finanskrisen og fallende aksjekurser de siste årene i den valgte perioden. Eksempelvis faller aksjekursen på verdensbasis i 2002, etterfulgt av stabil vekst frem til finanskrisen i 2008. Etter 2008 er igjen aksjekursen på vei opp. Ved årsslutt 2010 er verdensmarkedet på 2005 - 2006 nivå (Dow Jones, 2011a).

Aksjedata er lastet ned fra Dow Jones (2011a), og data for obligasjonsindeksene er oversendt fra Statoil Kapitalforvaltning v/ Trond Todnem (personlig kontakt 24.03.11). Datagrunnlaget for aksjer og obligasjoner er bygget opp av kurstill, justert for utbytte. Videre er kurstillene brukt til å beregne avkastningsraten til hver av aksjeindeksene og obligasjonsindeksene. Avkastningsratene beregnes fra:

$$r_i = \frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}}$$

hvor r_i er den månedlige avkastningsraten til indeks i fra måned $t - 1$ til t . K_t er kursen til indeksen siste dag i måned t , og K_{t-1} er kursen til verdipapiret siste dag i måned $t - 1$. En nærmere beskrivelse av hvilke data som inngår i analysen kommer vi tilbake til nedenfor.

5.2 Datagrunnlagets regions - og sektorinndeling for aksjer

Datagrunnlaget for investeringsmulighetene i utenlandske aksjer er delt inn i regions- og sektorindekser. Vi ønsker å finne den optimale allokeringen av aksjer over regioner og sektorer. Fra porteføljemodellen med eksogen formue avhenger optimale SPU-investeringer av hvordan verdipapir i ulike sektorer og ulike regioner er korrelert med hverandre, og hvordan de er korrelert med den øvrige norske formuen, da dette påvirker den totale risikoen til Norge. Korrelasjonen mellom regioner og sektorer ser vi nærmere på i kapittel 7. Først forklares det mer presist hvordan datagrunnlaget er bygget opp.

Det utenlandske investeringsuniverset for aksjer er i denne fremstillingen inndelt i 5 regioner og hver region består av 10 sektorer. Datagrunnlaget for aksjer består dermed av 50 indekser. Regionsinndelingen er basert på at landene i hver av de 5 regionene er relativt like og i samme geografiske området. Vi deler inn verdensmarkedet slik, da dette tydeliggjør hvordan en bør allokere utenlandsinvesteringene i forhold til type land og avstand fra Norge. Alle land på verdensbasis er ikke inkludert, men resultatene kan allikevel gi en indikasjon på statens optimale SPU-portefølje, gitt den øvrige formuen. Regionene og landene som inngår i hver region er som følger (Dow Jones, 2011a):

USA: Aksjer fra alle stater i USA. Canada og Latin Amerika er ikke inkludert i datagrunnlaget.

Europa: Et utvalg av utviklede land i Eurosonen, dvs. Storbritannia, Frankrike, Tyskland, Østerrike, Spania, Italia, Nederland, Belgia, Sveits, Irland, Hellas og Portugal. Øst-Europa og Norden er utelukket fra datagrunnlaget.

Japan: Investerbare aksjer i Japan.

Asia: Fremvoksende deler av Asia, dvs. Kina, India, Sør Korea, Taiwan, Malaysia, Indonesia, Thailand og Filippinene.¹

Australia: Australia alene. Det betyr at New Zealand er utelukket fra datagrunnlaget.

Med datagrunnlag bestående av disse regionene ser vi altså helt bort fra Afrika, Øst-Europa, Norden, Latin-Amerika og Midt-Østen. I følge Dow Jones (2011a) dekker disse regionene 91,2 % av de internasjonalt investerbare aksjer i verden.² Under forutsetning om at disse 5 regionene utgjør hele verdens aksjemarked, vil andelen hver region utgjør i det totale aksjemarkedet fordele seg som vist i tabellen nedenfor.

Region:	USA	Europa	Japan	Asia	Australia
Andeler, a_r :	0,50	0,24	0,11	0,10	0,04

¹Indeksen for Asia som brukes som datagrunnlag er basert på flere indekser. For utfyllende informasjon, se eget avsnitt *Mer om Asia-indeksen* på side 30.

²Dow Jones (2011c) verdensmarkedsindeks dekker 95 % av det investerbaremarkedet, og mitt datagrunnlag dekker 96,6% av Dow Jones verdensmarked. Dermed dekker datagrunnlaget omlag 91,2% av det investerbare markedet i verden.

Tallene i tabellen er basert på opplysninger fra (Dow Jones 2011a). Datasettet for aksjer ville vært mer komplett dersom Afrika, Øst-Europa, Latin-Amerika og Midt-Østen var inkludert. Data på avkastningsratene i de utelukkede regionene strekker seg beklageligvis ikke langt nok tilbake i tid da de første tilgjengelige data er fra 2008. Det er ønskelig å ha en lengre tidsperiode enn 2 år, da unike hendelser er mer fremtredende på relativt kort sikt.

De 10 sektorene er definert ved *Industry Classification Benchmark* (ICB) som er en klassifisering brukt av FTSE og Dow Jones (ICB, 2011). La oss se nærmere på hva som inngår i hver av sektorene:

Olje og gass: Selskaper som produserer og leverer olje og gass, samt utstyr og tjenester som benyttes til produksjon og leveranse.

Materialer: Kjemikalier, skog, papir, metaller og gruveindustri.

Industri: Konstruksjon og konstruksjonsmaterialer, ingeniører, flyindustri og forsvar. Industrielt utstyr som elektronikk, containere, maskiner, verktøy, m.m. Infrastruktur og støttefunksjoner for industri som administrasjon, leverandører m.m.

Konsumgoder: Husholdningsvarer som mat, drikke og hygieneprodukter, samt forbruksvarer som biler, elektronikk, klær, sko og leker.

Helse: Produsenter av helseartikler og medisinsk utstyr, hjelpemidler, farmasi og bioteknologi.

Tjenester: Detaljhandel, media, reise og fritid.

Bank og finans: Bank, forsikring, eiendom og finanstjenester.

Telekommunikasjon: Operatører som leverer fast og trådløs telefoni

Teknologi: Data (hardware og software).

Kraftleveranse: Leverandører av vann, gass og elektrisitet.

Likhetene og ulikhetene mellom sektorene påvirker resultatet av analysen. Sektorer går gjennom perioder hvor de over- eller underpresterer, og noen sektorer er mer risikable enn andre. Eksempelvis er aksjer i teknologisektoren forbundet med høy vekst og telesektoren har typisk høyere gjeld sammenlignet med andre sektorer. Konjunktursyklus påvirker sektorene på ulike måter. Aksjer innen forbruksvarer (innenfor sektoren konsumgoder) er relativt mer avhengig av situasjonen i økonomien enn andre aksjer, og en resesjon påvirker verdipapir innen husholdningsvarer i mindre grad enn eksempelvis forbruksvarer som bilindustri og luksusgoder (MCSI, 2010b).

Hvorvidt sektorene er globale eller ikke er viktig for allokeringen av investeringene mellom sektorer og regioner. En *global sektor* betyr i denne sammenheng at sektorens prestasjon i markedet er tilnærmet lik i alle regioner. Olje og gass kan gjerne ansees som en global sektor ettersom verdien av verdipapir er avhengig av prisen på olje og gass som er satt i et globalt marked. Handel av olje og gass er

svært globalisert, og dermed kan det tenkes at avkastningen på verdipapir i denne sektoren er høyt korrelert mellom ulike regioner. Mer lokale sektorer som tjenester, husholdningsvarer og detaljhandel har ikke på samme måte en verdensmarkedspris og handles heller ikke i stor grad på det globale markedet. Dermed er det ikke nødvendigvis en høy korrelasjon mellom verdipapir innenfor disse sektorene i de ulike regionene (MSCI, 2009).

Det er variasjon i hvor stor andel hver sektor utgjør av investerbare aksjer i en region. I tabellen nedenfor ser vi andelen hver sektor utgjør i hver region basert på opplysninger fra Dow Jones (2011b):³

	USA	Europa	Japan	Asia	Aus
Materialer	0,03	0,05	0,08	0,10	0,17
Konsumgoder	0,09	0,13	0,21	0,19	0,03
Tjenester	0,13	0,09	0,11	0,08	0,11
Bank og finans	0,21	0,29	0,23	0,20	0,42
Helse	0,12	0,10	0,04	0,03	0,03
Industri	0,12	0,10	0,17	0,20	0,11
Olje og gass	0,09	0,09	0,01	0,02	0,06
Teknologi	0,14	0,02	0,07	0,11	0
Telekom	0,03	0,06	0,04	0,03	0,05
Kraftleveranse	0,03	0,06	0,04	0,04	0,01

Bank- og finanssektoren dominerer i alle regionene, og utgjør en spesielt høy andel i Australia. Materialer utgjør også en spesielt høy andel i Australia sammenlignet med sektorens andel i de resterende regionene. Generelt er kraftleveransesektoren og helsesektoren relativt liten i de ulike regionene.

Mer om Asia-indeksen De 10 sektorindeksen for fremvoksende Asia har utgangspunkt i 10 sektorindekser fra Asia og Oceania, ekskludert Japan, fra Dow Jones (2011a). I disse indeksene inngår landene Australia, Kina, Hong Kong, India, Indonesia, Malaysia, New Zealand, Filippinene, Singapore, Sør-Korea, Taiwan og Thailand. Det kan være fordel å ha en region bestående av kun fremvoksende økonomier i datagrunnlaget. Data på denne typen indekser strekker seg for øvrig ikke langt nok tilbake i tid.

I følge Dow Jones (2011a) er Australia, New Zealand, Hong Kong og Singapore utviklede land. Data på sektorene i de utviklede landene som inngår i Asia og Oceania indeksen finnes i Dow Jones database. Basert på indeksene for hver av sektorene i de utviklede landene, kan en trekke disse landene ut fra indeksen Asia og Oceania eks. Japan.

Generelt er avkastningsraten til en portefølje, \mathbf{b} , verdipapir på tidspunkt t gitt

³Det er for øvrig viktig å merke seg at andelen hver sektor utgjør i hver region vil variere over tid gjennom endringer i både markedsstrukturen og i verdiene av aksjene som inngår for hver region. Dow Jones (2011b) gir en oversikt over hvordan hver sektor inngår for hver region pr den dato man henter opplysningene. Alle opplysninger om sektorinndeling i ulike land og regioner er lastet ned den 30.01.11, og gir kun et riktig bilde under forutsetning om at markedsstruktur og markedsverdi for sektorene forblir uendret.

ved:

$$r_{\mathbf{b}}^t = \sum_i r_i^t a_i.$$

Avkastningsraten til verdipapir 1 i porteføljen, \mathbf{b} , på tidspunkt t er dermed:

$$r_1^t = \frac{r_{\mathbf{b}}^t - \sum_{i \neq 1} r_i^t a_i}{a_1}$$

La r_{sd}^t være avkastningsraten til sektor s i den utviklede regionen d på tidspunkt t .⁴ b_d er andelen region d utgjør i Asia og Oceania eks. Japan indeksen, a_{sd} er andelen sektor s utgjør i region d . Videre a_{sA} er andelen sektor s utgjør i fremvoksende Asia i Asia og Oceania eks. Japan indeksenene.⁵ Videre er r_{sd}^t avkastningsraten til sektor s i region d , og r_{sAO}^t avkastningsraten til sektor s i Asia og Oceania eks. Japan. Da er avkastningsraten til sektor s i de fremvoksende økonomiene, r_{sA}^t , på tidspunkt t gitt ved:

$$r_{sA}^t = \frac{r_{sAO}^t - \sum_{d=1}^4 b_d a_{sd} r_{sd}^t}{a_{sA}}.$$

5.2.1 Datagrunnlaget for obligasjoner

Datagrunnlaget for obligasjoner består av to globale obligasjonsindekser, Barclays Global Aggregate Bond Indeks (BGA) og Barclays World Government Inflation-Linked Bond Indeks (BGIL).

Barclays Global Aggregate Bond indeks: BGA består av tre hovedkomponenter; Europa, Asia-Pacific og USA. Indeksen består av flere subindekser delt inn etter likviditet, sektor, kvalitet/kredittrisiko og løpetid. Obligasjonene i porteføljen har kredittrisiko skal være rangert som minimum BBB i Standard og Poors rangering (Barclay Capital, 2011).⁶

Barclays World Government Inflation-Linked Bond indeks: BGIL er en indeks av statsobligasjoner (Todnem, personlig kontakt 23.04.11) og er en potensiell kilde til beskyttelse mot inflasjon, da kontantstrømmen er knyttet til en bakenforliggende inflasjonsindeks. Kredittrisikoen til obligasjoner som inkluderes i indeksen skal minimum være AAA for G7-land og euro-området, AA for andre land.⁷ Land inkludert i indeksen er USA, Canada, Australia, Frankrike, Tyskland, Storbritannia, Italia, Japan og Sverige (Barclay Capital, 2010).

⁴Da er $d = (\text{Australia, New Zealand, Hong Kong og Singapore})$

⁵ $a_{sA} = 1 - (\sum_{d=1}^4 b_d a_{sd})$

⁶Kredittrisiko BBB innebærer at utstederen av obligasjonen har kapasitet til å møte de finansielle forpliktelsene, men at kapasiteten er noe avhengig av den økonomiske situasjonen (Standard og Poor, 2010)

⁷Kredittrisiko AAA betyr at utstederen i aller høyeste grad er i stand til å møte de finansielle forpliktelser. AA betyr at utstederen har god kapasitet til å møte de finansielle forpliktelser (Standard og Poor, 2010).

5.3 Verdensmarkedsporteføljen

Ut fra datagrunnlaget for de utenlandske investeringsmulighetene kan man komponere en verdensmarkedsportefølje, som representerer de investeringsmulighetene investoren har i vårt tilfelle. Verdensmarkedsporteføljen brukes som markedsportefølje når vi finner de forventede avkastningsratene i kapittel 8, og sammenlignes med de optimale porteføljene vi finner fra analysen i kapittel 9.

En utfordring ved å komponere en verdensmarkedsportefølje er at vi ikke kjenner størrelsen på obligasjonsmarkedet og aksjemarkedet relativt til hverandre i verdensmarkedet. Det kan også tenkes at dette forholdet varierer over tid. Brenner (2009) anslår per november 2009 at forholdet mellom aksjer og obligasjoner i verdensmarkedet er 35/65. I hans anslag er for øvrig verdien av verdensmarkedet for aksjer basert på den samme markedsverdien, mens anslaget på obligasjoner er basert på utestående gjeld og ikke markedsverdien av obligasjonene.

I vårt datagrunnlag har vi kun to obligasjonsindekser, og indeksene har tilsammen en markedsverdi pr 31.12.10 på $V_o = 2,78$ millioner dollar (i følge datagrunnlaget). Gitt Brenners (2009) anslag utgjør dette 0,0034% av den totale verdien av obligasjoner (utestående gjeld). En kan dermed si at datagrunnlaget for obligasjoner i vår sammenheng er for snevert til å kunne utgjøre 65 % av verdensmarkedsporteføljen. Vi antar i det følgende at forholdet mellom aksjer og obligasjoner i verdensmarkedet er som i referanseporteføljen til SPU, 60/40.⁸

La a_o^W være andelen obligasjon o utgjør i verdensmarkedet. BGA indeksen har i følge datagrunnlaget for obligasjoner en markedsverdi pr 31.12.10 på $V_{BGA} = 1,18$ millioner dollar, mens BGIL indeksen har en markedsverdi på $V_{BGIL} = 1,60$ millioner dollar. Andelen hver av obligasjonsindeksene utgjør i verdensmarkedet kan vi dermed finne fra:

$$a_{BGA}^W = 0,4 \times \frac{V_{BGA}}{V_o} = 0,17 \quad \text{og} \quad a_{BGIL}^W = 0,4 \times \frac{V_{BGIL}}{V_o} = 0,23.$$

Verdensmarkedsporteføljen av obligasjoner vi benytter er dermed $\mathbf{a}_o^W = (a_{BGA}^W, a_{BGIL}^W) = (0,17, 0,23)$.

La w_r være andelen region r utgjør i det internasjonale aksjemarkedet. Disse andelene kan vi se fra tabellen på side 28. Videre er a_{sr} andelen sektor s utgjør i region r . Andelene hver sektor utgjør i hver region ble presentert i tabellen på side 30. Andelen, a_{sr}^W , sektor s i region r utgjør i verdensmarkedsporteføljen er da:

$$a_{sr}^W = 0,6 \times w_r a_{sr}.$$

Fra dette blir verdensmarkedsporteføljen av aksjer, \mathbf{a}_{rs}^W , som følger:

⁸Andelen obligasjoner og aksjer i verdensmarkedsporteføljen har kun betydning for de forventede avkastningsratene vi får i kapitalverdimodellen. Dette kommer vi tilbake til i kapittel 6.

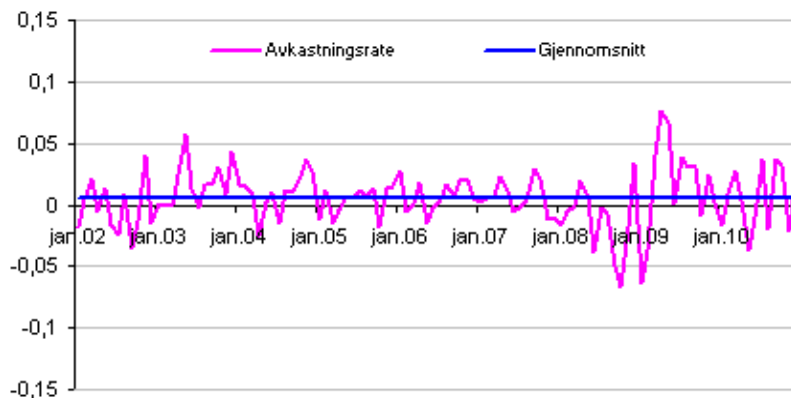
\mathbf{a}_{rs}^W	USA	Europa	Japan	Asia	Aus	$\sum_r a_{rs}$
Materialer	0,009	0,008	0,006	0,006	0,004	0,033
Konsumgoder	0,026	0,019	0,014	0,011	0,001	0,071
Tjenester	0,041	0,013	0,008	0,005	0,003	0,069
Bank og finans	0,064	0,043	0,017	0,012	0,010	0,145
Helse	0,037	0,014	0	0,002	0,001	0,055
Industri	0,038	0,015	0,013	0,012	0,003	0,080
Olje og gass	0,027	0,014	0,001	0,001	0,001	0,044
Teknologi	0,043	0,004	0,005	0,006	0	0,057
Telekom	0,009	0,009	0,002	0,002	0,001	0,023
Kraftleveranse	0,010	0,009	0,002	0,002	0	0,024
$\sum_s a_{rs}$	0,302	0,146	0,069	0,059	0,024	0,60

Kolonnen til høyre i figuren angir andelen hver sektor, og rekken nederst i tabellen angir andelen hver av regionene utgjør i verdensmarkedsporteføljen. Bank- og finanssektoren er den største sektoren i verdensmarkedet, og telesektoren er den minste. USA og Australia er henholdsvis den største og minste regionen i verdensmarkedet.

Vår verdensmarkedsporteføljen av aksjer og obligasjoner er dermed $\mathbf{a}^W = \mathbf{a}_o^W + \mathbf{a}_{rs}^W$. I figur 5.1 vises avkastningsratene til verdensmarkedsporteføljen, r_W^t , på tidspunkt t . Avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen på tidspunkt t er funnet fra:

$$r_W^t = \sum_{s=1}^{50} a_{sr}^W r_{sr}^t + \sum_{o=1}^2 a_o^W r_o^t.$$

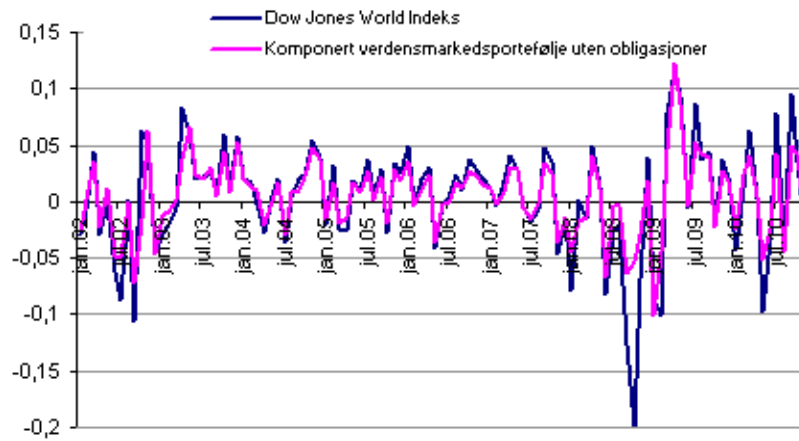
hvor r_{sr}^t er avkastningsraten til sektor s i region r og r_o^t er avkastningsraten til obligasjon o på tidspunkt t . Den gjennomsnittlige avkastningsraten til den komponerte verdensmarkedsporteføljen av aksjer og obligasjoner, \mathbf{a}^W , er 0,0057 per måned.



Figur 5.1: Avkastningsrater i den komponerte verdensmarkedsporteføljen, \mathbf{a}^W .

I figur 5.2 ser vi utviklingen i avkastningsratene den komponerte verdensmarkedsporteføljen av aksjer, \mathbf{a}_{rs}^W , og Dow Jones World indeks (Dow Jones, 2011a) over tidsperioden.⁹ Den komponerte verdensmarkedsporteføljen av aksjer og Dow

⁹Dow Jones World indeks er en portefølje av 95% av alle internasjonalt investerbare aksjer i verden. Det vil si alle aksjer registrert hos Dow Jones.



Figur 5.2: Dow Jones (2011a) World indeks av aksjer og den komponerte aksjeporteføljen, \mathbf{a}_{rs}^W .

Jones indeksen er relativt like, noe som tyder på at den komponerte aksjeporteføljen, \mathbf{a}_{rs}^W , stort sett forklarer utviklingen i det faktiske verdensmarkedet for aksjer. Datagrunnlaget vi har bygget opp utgjør 96,6 % av Dow Jones investerbare verdensportefølje, noe som tilsier at porteføljene skal være relativt like når det gjelder svingninger i avkastning (Dow Jones, 2011a). Vi ser at 2002 var preget av lave og negative avkastningsrater. Perioden etterfølges av oppgang og et relativt stabilt avkastningsmønster frem til 2008. I september 2008 ser vi et kraftig fall i avkastningen, som forklares av den globale finanskrisen. Perioden etter finanskrisen er videre noe mer ustabil enn perioden før 2008, men vi kan observere en noe høyere avkastningsrate på verdensmarkedet.

Den gjennomsnittlige avkastningsraten til datagrunnlagets komponerte aksjeportefølje er 0,0056 pr måned, mens Dow Jones World har 0,0047 månedlig avkastningsrate i gjennomsnitt. Avviket skyldes blant annet at Dow Jones World indeks har et dypere dykk rundt finanskrisen i 2008 enn datagrunnlagets verdensmarkedsportefølje av aksjer.

Kapittel 6

Norges formue utenom SPU

Det er en utfordring å operasjonalisere Norges formue utenom SPU, eller det vi har definert som den eksogene formuen. Vi er interessert i størrelsen på den eksogene formuen relativt til størrelsen på SPU, x_E . I tillegg er vi interessert i forventet avkastning og risiko til den eksogene formuen, og hvordan denne samvarierer med SPUs investeringsmuligheter. Det være relevant å se nærmere på nasjonalformuen, ekskludert SPU. Ulempen med nasjonalformuen er at vi ikke har månedlige data på avkastningsratene til denne. Som en tilnærming til månedlig avkastning på nasjonalformuen bruker vi data fra Oslo Børs for å anslå avkastning og risiko for innenlandsformuen.¹ I det følgende skal vi anslå en størrelsen på Norges eksogene formue relativt til størrelsen på SPU og vi ser nærmere på nasjonalformuen. Videre diskuteres det data om avkastning og risiko på Oslo Børs kan forklare avkastning og risiko til den eksogene formuen på månedlig basis.

I følge Statistisk Sentralbyrå ([SSB], 2011a, s. 48) fordeler den norske nasjonalformuen ved årsslutt 2010 seg vist i tabellen nedenfor.

	Prosent 2010
Fornybare naturressurser	0 %
Olje og gass	12 %
Netto fordringer på utlandet	4 %
Produsert kapital	12 %
Humankapital	72 %

SSB deler nasjonalformuen inn i 5 hovedkategorier. Først har vi de fornybare naturressursene som innebærer jordbruksareal, skog, fiske og fangst, fiskeoppdrett og vannkraft. Fornybare ressurser bidrar lite. Både for 20 og 10 år siden var bidraget negativt, og dette skyldes stort sett subsidier i jordbruket som oppveier betydningen av vannkraft (SSB, 2009a). Bidraget til nasjonalformuen fra fornybare ressurser er for øvrig forbedret frem til i dag, enda virkningen på nasjonalformuen er estimert til 0 %. Videre har vi ikke-fornybare naturressurser, som i all hovedsak er olje og gass, hvor bidraget fra olje og gass på nasjonalformuen er omtrent 12 %. Produsert kapital bidrar også med 12 % og omfatter maskiner, bygninger, verktøy osv. Humankapitalen uttrykker arbeidskraftens bidrag til verdiskapingen, og spesielt kunnskapen arbeidskraften til enhver tid besitter. Til slutt har vi netto

¹Data på avkastningsraten til Oslo Børs er lastet ned fra Finance Yahoo (2011).

fordringer på utlandet, dvs. finansielle beholdninger som SPU er en del av, i tillegg til eventuell gjeld Norge har til utlandet (SSB, 2011a).

I vår sammenheng reflekterer ikke nasjonalformuen nøyaktig det vi definerer som eksogen formue. Vi ønsker å studere hvordan en bør investere i SPU når vi tar den resterende formuen for gitt. Dermed må vi ekskludere SPU fra nasjonalformuen.

I følge SSB (2011b) beløper statens netto fordringer på utlandet seg til $V_0 = 2720$ milliarder kroner ved utgangen av 3. kvartal 2010. Verdien av SPU alene utgjorde 2 908 milliarder kroner i 3. kvartal 2010 (NBIM, 2010b). I nasjonalformuen inngår netto fordringer på utlandet med 4 %. Vi får at netto fordringer på utlandet ekskludert SPU må være gjeld på 188 mrd. kroner.

Hvis nettofordringer på utlandet bidrar med 4 % på nasjonalformuen, og 4 % tilsvarer 2 720 milliarder kroner, kan vi kalkulere SPUs bidrag til nasjonalformuen og anslå den eksogene formuen til staten. Netto fordringer på utlandet ekskludert SPU er kr -188 mrd. Da er andelen til SPU på utenlandsfordringenes bidrag til nasjonalformuen:

$$\frac{\text{Verdien av SPU}}{\text{Netto fordringer på utland}} = \frac{2908 \text{ mrd.}}{2720 \text{ mrd.}} = 106,91\%$$

mens netto fordringer på utlandet ekskludert SPU bidrar negativt og utgjør -6,91 % av denne posten i fra nasjonalformuen. Dermed blir SPUs andel av nasjonalformuen: $106,91\% \times 4\% = 4,28\%$.

La oss danne en oversikt over nasjonalformuen ekskludert SPU og anslå verdien av den eksogene formuen. I tabellen under har vi trukket ut SPU, og blåst opp den resterende nasjonalformuen til å utgjøre 100 %. Når vi vet at verdien av netto fordringer på utlandet utenom SPU er -188 mrd, og dette tilsvarer -0,28 % av nasjonalformuen, kan vi finne en kroneverdi for de resterende postene i den eksogene formuen.

	Prosent 2010	Mrd. NOK
Fornybare naturressurser	0%	0
Olje og gass	12,54%	8153
Netto fordringer på utlandet	-0,28%	-188
Produsert kapital	12,54%	8153
Humankapital	75,20%	48919
Anslått eksogen formue		65037

Den anslåtte verdien av den eksogene formuen er på 65 037 mrd. kroner. Det er vanskelig å angi en korrekt kroneverdi av eksempelvis humankapital, men gitt at humankapital utgjør 75,20 % av den eksogene formuen så har vi at verdien av humankapital er kr 48 909 mrd. SSB anslår humankapitalen ut fra inntekt som ikke kan spores tilbake til produsert kapital eller naturressurser (SSB, 2011b).

Med denne informasjonen kan vi nå anslå verdien av x_E når vi normalisert størrelsen på SPU til $x_0 = 1$. For å finne størrelsen på x_E lar vi V_E være verdien på den eksogene formuen, og V_{SPU} er verdien på utenlandsformuen (SPU). Vi har at $V_E = 65037$ og $V_{SPU} = 2908$ og kan dermed finne størrelsen på den eksogene

formuen relativt til størrelsen på SPU:

$$x_E = \frac{V_E}{V_{SPU}} = \frac{65037}{2908} = 22$$

Fra dette har vi at den eksogene formuen er 22 ganger større enn verdien av SPU.

6.1 Størrelse, avkastning og risiko til den eksogene formuen

Avkastning og risiko på Oslo Børs gjenspeiler til en viss grad gjenspeiler avkastning og risiko til den eksogene formuen. I det følgende argumenterer vi for at utviklingen på Oslo Børs delvis kan forklare utviklingen i den eksogene formuen, og prøver å finne et anslag på hvordan børsen og den eksogene formuen samvarierer.

Vi har funnet at omtrent 12,54 % av den eksogene formuen består av olje og gass. Verdien olje og gass i den eksogene formuen er korrelert med verdien av selskap i petroleumssektoren på Oslo Børs. Et argument for dette er at når informasjon om nye funn på norsk sokkel blir offentliggjort, øker typisk aksjeprisen på norske oljeselskap.

Den samme tankegangen kan brukes om de fornybare ressursene, altså at svingninger i verdien av fornybare naturressurser som fiske, vann og vind gjerne gjenspeiles i svingninger i verdien av henholdsvis fiskerinæringen og kraftselskaper. Bidraget fra fornybare naturressurser er riktignok 0 % i den eksogene formuen (SSB, 2011b). Som nevnt er årsaken til at bidraget er null at bidraget fra sektoren elimineres av subsidiert jordbruk, og ikke at naturressurser er fraværende. Derfor vil risikoen og avkastningen til børsnoterte selskaper innen denne kategorien muligen samvariere med risikoen og avkastningen til den eksogene formuen allikevel.

Videre består 12,54 % av den eksogene formuen av produsert kapital. Produsert kapital som maskiner, bygninger og annen realkapital inngår i verdien av et selskap, og dermed aksjeprisen til selskap notert på børsen. Alle norske bedrifter er riktignok ikke notert på Oslo Børs, men det kan tenkes at deler av svingningene i den produserte kapitalen i den eksogene formuen samvarierer med svingningene på Oslo Børs.

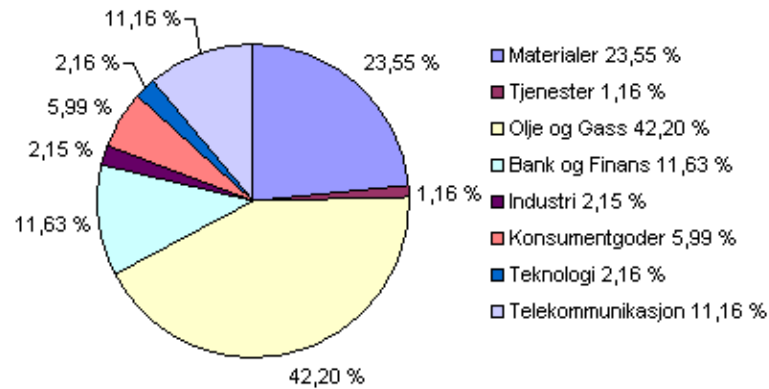
Til slutt kan vi tenke oss at avkastningen på humankapital også delvis kan måles i avkastningen på børsnoterte selskaper. Humankapitalen til det norske folk brukes i stor grad til verdiskaping gjennom deres arbeid i selskap. Om vi antar at det norske folk jobber i disse selskapene, kan vi igjen anta at deler av verdien av humankapital er korrelert med verdien av aksjeselskapene vi tar for oss.

Med denne argumentasjonen går vi ut fra at Oslo Børs i større eller mindre grad samvarierer med innenlandsformuen, og bruker månedlig avkastning på Oslo Børs hovedindeks som datagrunnlag for avkastning og risiko til den eksogene formuen.

I figur 6.1 ser vi hvordan sektorallokeringen er i det norske aksjemarkedet.²

I det norske aksjemarkedet dominerer olje og gass, materialer og bank- og finanssektoren. Helse og kraftleveranse har i følge Dow Jones (2011b) ingen marked-

²Oversikten over sektorandeler på Oslo Børs er hentet fra Dow Jones (2011b) og ikke Oslo Børs fordi de bruker ulik kategorisering av sektorer. Oslo Børs kategoriserer sektorer etter GICS classification fra Standard og Poor, og Dow Jones etter ICB.



Figur 6.1: Sektorandeler i Norges aksjemarked (Dow Jones, 2011b)

sandel i Norge. Dette kommer trolig av at Statnett og Statkraft er henholdsvis hoveddistributør og hovedprodusent av kraft i Norge. Selskapene er i sin helhet eid av det offentlige ved Olje- og energidepartementet (Statnett, 2008; Statkraft 2011), og er ikke børsnotert. Videre er helsevesenet stort sett offentlig eller ikke børsnotert. På bakgrunn av dette kan ikke internasjonale investorer kjøpe aksjer i den norske kraftleveransesektoren eller helsesektoren, og dermed inngår de heller ikke i den norske markedsporteføljen. I følge Oslo Børs (2010) utgjør for øvrig helse og kraftleveransesektoren henholdsvis 1 % hver av børsindeksen. Dette tyder på at de investerbare delene av disse sektorene er bakt inn i datagrunnlaget. Det er en svakhet med datagrunnlaget at disse sektorene inngår med en svært liten andel da de utgjør mer av den eksogene formuen.

Olje og gass utgjør 12,42 % av den eksogene formuen. Videre utgjør denne sektoren 42,20 % av norske aksjer. Vi kan dermed anta at Oslo Børs samvarierer med 5,25 % av den eksogene formuen gjennom sektoren for olje og gass ($12,42\% \times 42,20\% = 5,25\%$).

Videre har vi argumentert for at Oslo Børs samvarierer med den eksogene formuen gjennom produsert kapital. Hvor mye av produsert kapital som påvirker aksjeprisen er derimot usikkert. Om vi antar at halvparten av variasjonen i en aksjekurs kommer av produsert kapital, samvarierer Oslo Børs ytterligere 6,21% med den eksogene formuen.

Til slutt har vi humankapital som utgjør 72,20 % av den eksogene formuen. Det er vanskelig å si noe konkret om hvor mye av variasjonen i aksjekursene som henger sammen med humankapital. Verdien av humankapitalen måles fra verdiskaping som ikke kan føres tilbake til produsert kapital eller naturressurser. En kan dermed si at humankapital og Oslo Børs trolig samvarierer gjennom produksjon og innovasjon som påvirker verdien av selskapet. Ettersom offentlig sektor ikke er notert på børsen utelukker vi at humankapitalen i offentlig sektor samvarierer med børsen. Cirka en tredjedel av den yrkesaktive befolkningen jobber i offentlig sektor (SSB, 2009b). Anta at de resterende to tredjedelene av den yrkesaktive befolkningen arbeider i selskaper notert på Oslo Børs. Disse to tredjedeler av humankapitalen er 48,12 % av den eksogene formuen. Om halvparten av svingningene i humankapital henger sammen med svingningene på Oslo Børs, har vi at Oslo Børs samvarierer

ytterligere 24,06 % med den eksogene formuen.

Dersom dette stemmer så har vi at Oslo Børs samvarierer 5,25 % + 6,21 % + 24,06 % = 35,53 % med svingningene i den eksogene formuen. Dette anslaget er veldig omtrentlig, og det kreves videre forskning for å få et konkret anslag på samvariasjonen mellom Oslo Børs og den eksogene formuen, eller avkastning og risiko til den eksogene formuen. Vi vil videre anta at Oslo Børs forklarer omtrent 35 % av svingningene i den eksogene formuen. Da må vi justere størrelsen på den eksogene formuen med forklaringskraften til datagrunnlaget. Vi bruker at:

$$\begin{aligned} x_E &= (\text{Oslo Børs forklaringskraft}) \times (\text{Anslått relativ verdi på den eksogene formuen}) \\ &= 35\% \times 22 \approx 7,5. \end{aligned}$$

Ettersom anslaget er meget upresist beregner vi også resultatene for andre størrelser på x_E . Vi fokuserer for øvrig på de resultatene vi får for $x_E = 7,5$.

Til grunn for dette anslaget ligger det en forutsetning om at private aktører i Norge ikke investerer i utlandet. Private aktører kan gjennom sine utenlandsinvesteringer allerede ha redusert den usystematiske risikoen forbundet med innenlandsformuen, men det ser vi bort fra.

På samme måte som private aktører kan investere i utlandet, kan også utenlandske investorer investere i Norge. Utenlandske investeringer i Norge kan også være med på å redusere den totale risikoen til Norge. Eksempelvis kan et foretak redusere den totale risikoen gjennom å tillate at flere aktører investerer i foretaket og på denne måten spre risikoen på flere aktører (Arrow, 1971, kap 5). For den norske stat som helhet gjelder også dette, altså at statens risiko reduseres ved at utenlandske investorer har tatt posisjoner i Norge. Dette ser vi bort fra når vi antar at nordmenn kun har innenlandske verdier, og at innenlandske verdier kun eies av nordmenn eller den norske stat.

Kapittel 7

Kovarians og korrelasjon

Gitt datagrunnlaget og antakelsene fra de foregående kapitlene kan vi nå anvende modellen, og se på de resultatene som fremkommer. Før en kan finne resultater fra modellen i form av optimal porteføljetilpasning må ledd som inngår i modellen kalkuleres. For det første trenger vi kovariansmatrisen, Σ , og den inverterte kovariansmatrisen, Σ^{-1} , til utenlandsinvesteringene, samt kovariansvektoren, \mathbf{c}'_E , mellom utenlandsinvesteringene og den innenlandske formuen.

Kovarianser i modellen påvirker sluttresultatet, både gjennom kovariansen mellom de utenlandske investeringsmulighetene, og gjennom kovariansen mellom den eksogene formuen og de utenlandske investeringsmulighetene.

Ettersom vi kun har et utvalg av observasjoner om populasjonen, må vi estimere kovariansen. Den faktiske populasjonen vil her være alle avkastningsrater på alle investeringsmulighetene og den eksogene formuen over hele tidsperioden hvor disse har eksistert. Vi har månedsdata fra 9 år, og har dermed 108 observasjoner om hver variabel. Kovariansen til et utvalg må estimeres gitt de observasjonene vi har. Den estimerte kovariansen, v_{xy} , mellom to variabler beregnes generelt som følger (Thomas, 2005):

$$v_{xy} = \frac{\sum_{t=1}^{108} (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{t - 1}$$

hvor x_t størrelsen på variabelen x på tidspunkt $t = (1, \dots, 108)$. Videre er $\bar{x} = \frac{1}{t} \sum_{t=1}^{108} x_t$ variabelens gjennomsnitt. Når vi estimerer kovariansen mellom utenlandske investeringsmuligheter bruker vi altså i vårt tilfelle 108 observasjoner for avkastningsrater til 52 utenlandske investeringsmuligheter, samt 108 observasjoner om avkastningsraten til den innenlandske formuen.

Kovariansmatrisen, Σ , til de utenlandske investeringsmulighetene utgjør en 52×52 matrise. I denne matrisen har vi variansen til hver av de utenlandske investeringsmulighetene på diagonalen, dvs. 52 varianser. Siden kovariansmatrisen er symmetrisk får vi 1302 ulike rene kovarianser i matrisen, i tillegg til 52 varianser.

En kovarians forteller oss hvorvidt det er en lineær sammenheng mellom observasjonene. Det kan være mer interessant å se nærmere på en korrelasjonsmatrise hvor samvariasjonen er lettere å tolke enn kovariansmatrisen. For ordens skyld er kovariansmatrisen, Σ , lagt til i tillegg A.2

Korrelasjonen mellom to variabler sier oss hvor sterk samvariasjonen mellom variablene er. En korrelasjonskoeffisient (ρ) er et tall mellom -1 og 1 , altså $-1 < \rho < 1$. Dersom $\rho = 1$ er det perfekt positiv samvariasjon mellom de to vari-

ablene, og dersom $\rho = -1$ er det perfekt negativ samvariasjon mellom to variabler. Korrelasjonen mellom to variabler er gitt ved:

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

I korrelasjonsuttrykket er $\text{cov}(x, y)$ kovariansen til populasjonen, og $\sigma(x)$ er standardavviket til x i populasjonen. Igjen må vi estimere korrelasjonen i et utvalg, grunnet at vi kun har et begrenset antall observasjoner fra populasjonen. La v_x være standardavviket til x i utvalget. Generelt er en estimert korrelasjonskoeffisient, R_{xy} , gitt ved (Thomas, 2005):

$$R_{xy} = \frac{v_{xy}}{v_x v_y}.$$

Korrelasjonsmatrisen er på samme måte som kovariansmatrisen en 52×52 matrise. Matrisen er som kovariansmatrisen bygget opp av 1302 ulike rene korrelasjonskoeffisienter, og er som kovariansmatrisen symmetrisk. $R_{xx} = 1$ ettersom en variabel er perfekt korrelert med seg selv.

7.1 Samvariasjon mellom de utenlandske investeringsmulighetene

Aksjer

La oss først se på hvordan aksjene i de ulike regionene er korrelert. Videre tar vi for oss hvordan obligasjonene er korrelert med aksjene. I neste avsnitt finner vi korrelasjonen mellom den eksogene formuen og de utenlandske investeringsmulighetene.

Det kan være relevant å se på hvordan hver region og hver sektor i gjennomsnitt er korrelert med hverandre. For å finne gjennomsnittlig korrelasjon mellom to regioner må vi finne den vektete summen av alle korrelasjonskoeffisientene i de ulike regionene. La b_{sr} være andelen sektor s utgjør i region r . Videre er $R(\tilde{r}_{sr}, \tilde{r}_{s'r'})$ korrelasjonskoeffisienten mellom avkastningsratene til sektor s i region r og s' i region r' . Da blir den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom region r og region r' :

$$\bar{R}_{rr'} = \sum_s b_{sr} \sum_{s'} b_{s'r'} R(\tilde{r}_{sr}, \tilde{r}_{s'r'})$$

Den vektete gjennomsnittlige korrelasjonen mellom de ulike regionene er vist i tabellen nedenfor.

Vektet gjennomsnittlig korrelasjon mellom regionene, $\bar{R}_{rr'}$:

$\bar{R}_{rr'}$	USA	Europa	Japan	Asia	Australia
USA	0,72	0,68	0,41	0,65	0,63
Europa		0,82	0,45	0,72	0,70
Japan			0,73	0,51	0,48
Asia				0,88	0,77
Australia					0,81

Vi ser at sektorene i USA isolert sett har en vektet gjennomsnittlig korrelasjon på 0,72, og er den regionen hvor sektorene er lavest korrelert innenfor samme region. Asia er den regionen hvor sektorene er høyest korrelert. Lav og høy korrelasjon innad i en region impliserer at investering i en markedsportefølje av aksjer i regionen gir henholdsvis høy og lav grad av diversifisering. Japan er den regionen som er lavest korrelert med hver av de andre regionene, og spesielt lavt korrelert med USA hvor den vektete gjennomsnittlige korrelasjonskoeffisienten er 0,41. Når en investerer i flere regioner kan lav korrelasjon med de andre regionene i porteføljen, som i Japan, implisere diversifiseringsgevinster ved å kombinere investeringer i regionen med lav korrelasjon, med investeringer i de andre regionene. Det kan se ut til at investering i USA og Japan vil gi en lavere risiko til en portefølje enn investering i eksempelvis Asia og Australia.

En forventer gjerne at to like sektorer er relativt høyere korrelert enn to ulike sektorer på tvers av regionene. Dersom to like sektorer er høyt korrelert på tvers av regioner anser en gjerne sektoren som en *global* sektor (MSCI, 2009).

I tabellen nedenfor har vi funnet hvordan hver av sektorene, i vektet gjennomsnitt, er korrelert på tvers av regionene.¹² Den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom sektorene finner vi fra:

$$\bar{R}_{ss'} = \sum_r a_r \sum_{r'} a_{r'} R(\tilde{r}_{sr}, \tilde{r}_{s'r'})$$

hvor a_r er andelen region r utgjør i det totale aksjemarkedet. Andelene hver av regionene utgjør i det totale aksjemarkedet, a_r , viste vi i tabellen på side 28.

Vektet gjennomsnittlig korrelasjon mellom sektorene, $\bar{R}_{ss'}$:

$\bar{R}_{ss'}$	Mat	Kons	Tjen	Bank	Helse	Indu	Olje	Tekn	Tele	Kraft
Mat	0,85	0,71	0,67	0,66	0,56	0,78	0,69	0,65	0,51	0,54
Kons		0,82	0,71	0,72	0,61	0,76	0,57	0,64	0,52	0,56
Tjen			0,75	0,68	0,58	0,74	0,50	0,68	0,55	0,51
Bank				0,79	0,58	0,74	0,49	0,62	0,50	0,52
Helse					0,69	0,62	0,47	0,55	0,50	0,53
Indu						0,85	0,62	0,71	0,56	0,56
Olje							0,83	0,49	0,42	0,54
Tekn								0,79	0,58	0,46
Tele									0,67	0,47
Kraft										0,66

Fra korrelasjonsmatrisen i tabellen over er materialer og olje og gass de sektorene med høyest korrelasjon (innenfor samme sektor) på tvers av regionene. Industri og materialer er de sektorene som er høyest korrelert med andre sektorer. Generelt er telesektorene lavt korrelert med andre sektorer, både på tvers av regioner og innad i regioner. Kraftleveransesektoren i Japan skiller seg også ut som

¹Forklaring av forkortelser: Mat=Materialer, Kons=Konsumgoder, Tjen=Tjenester, Bank=Bank og finans, Helse=Helse, Indu=Industri, Olje=Olje og gass, Tekn=Teknologi, Tele=Telekommunikasjon og Kraft=Kraftleveranse.

²I tillegg A.1 er korrelasjonen mellom hver av sektorene i hver av regionene presentert ved delmatriser.

en sektor med lav korrelasjon til alle de andre aksjene vi har som investeringsmuligheter.³

Obligasjoner og aksjer

Korrelasjonen mellom aksjene og obligasjonene er generelt lavere enn korrelasjonen mellom aksjene i hver region. I tabellene på side 45 ser vi korrelasjonen mellom obligasjonsindeksene og hver av sektorene i hver region, $R(\tilde{r}_o, \tilde{r}_{sr})$, samt den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom hver av regionene og obligasjonsindeksene, \overline{R}_{ro} , og den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom hver av sektorene og obligasjonsindeksene, \overline{R}_{so} .

Beregningsmåten for å finne den gjennomsnittlige korrelasjonskoeffisienten er noe enklere enn for de aksjene. La igjen b_{sr} være andelen sektor s utgjør i region r , og $R(\tilde{r}_o, \tilde{r}_{sr})$ er korrelasjonskoeffisienten til de usikre avkastningsratene til obligasjonsindeks o og sektor s i region r . Vi får da følgende uttrykk for den vektete gjennomsnittlige korrelasjonen mellom region r og obligasjon o .

$$\overline{R}_{ro} = \sum_s b_{sr} R(\tilde{r}_o, \tilde{r}_{sr}).$$

Den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom obligasjonsindeksene og hver av regionene, \overline{R}_{ro} , ser vi i nederste rekke i tabellen for korrelasjonen mellom obligasjoner og aksjer. I kolonnen lengst til høyre i tabellene finner vi den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom obligasjonsindeksene og hver av sektorene, \overline{R}_{so} . Denne finner vi fra:

$$\overline{R}_{so} = \sum_r a_r R(\tilde{r}_o, \tilde{r}_{sr}),$$

hvor a_r er andelen region r utgjør av det totale aksjemarkedet.

Vi ser at BGA indeksen er lavere korrelert med aksjene enn BGIL indeksen. Obligasjonsindeksene er videre lavt korrelert med hverandre i forhold til hvordan flertallet av aksjeindeksene er korrelert. Korrelasjonskoeffisienten mellom de to obligasjonsindeksene er $R(\tilde{r}_{BGA}, \tilde{r}_{BGIL}) = 0,60$. Lav korrelasjon mellom aksjer og obligasjoner kan tyde på at en diversifiserer porteføljen bedre om en holder en andel av porteføljen i obligasjoner, i forhold til å ikke gjøre det. Hvorvidt forholdet mellom obligasjoner og aksjer optimalt sett er 40/60 som i SPU vil vi se nærmere på i sluttresultatene.

³Se tillegg A.1.

$R(\tilde{r}_{BGA}, \tilde{r}_{sr})$	USA	Eur	Jap	Asia	Aus	\bar{R}_{so}
Materialer	0,06	0,12	0,11	0,16	0,12	0,09
Konsumgoder	0,18	0,11	0,10	0,23	0,21	0,16
Tjenester	0,04	0,17	0,12	0,24	0,21	0,11
Bank og finans	0,08	0,19	0,16	0,24	0,20	0,14
Helse	0,15	0,22	0,32	0,15	0,10	0,19
Industri	0,04	0,18	0,09	0,18	0,23	0,10
Olje og gass	0,04	0,13	0,12	0,13	0,11	0,08
Teknologi	-0,04	0,05	0,07	0,01	0,03	0
Telekom	-0,01	0,25	0,13	0,21	0,08	0,10
Kraftleveranse	0,17	0,27	0,23	0,23	0,11	0,21
\bar{R}_{ro}	0,07	0,17	0,14	0,18	0,14	
$R(\tilde{r}_{BGIL}, \tilde{r}_{sr})$	USA	Eur	Jap	Asia	Aus	\bar{R}_{so}
Materialer	0,37	0,39	0,35	0,48	0,48	0,39
Konsumgoder	0,37	0,36	0,37	0,43	0,44	0,38
Tjenester	0,19	0,39	0,30	0,46	0,46	0,28
Bank og finans	0,31	0,43	0,38	0,51	0,51	0,38
Helse	0,34	0,44	0,50	0,34	0,26	0,38
Industri	0,28	0,43	0,39	0,44	0,56	0,36
Olje og gass	0,33	0,48	0,39	0,48	0,48	0,39
Teknologi	0,11	0,27	0,28	0,19	0,35	0,19
Telekom	0,05	0,36	0,13	0,41	0,29	0,18
Kraftleveranse	0,41	0,54	0,20	0,50	0,42	0,43
\bar{R}_{ro}	0,28	0,41	0,33	0,43	0,43	

Obligasjonsindeksene er spesielt lavt korrelert med aksjene i USA. Blant annet har vi negativ korrelasjon mellom BGA indeksen og teknologi og telesektoren i USA.

Ingen av sektorene i de ulike regionene er spesielt høyt korrelert med obligasjonsindeksene, men vi kan trekke frem helsesektoren i Japan som den sektoren med høyest korrelasjon med BGA indeksen. Kraftleveransesektoren i Europa som den sektoren med høyest korrelasjon til BGIL indeksen. Kraftleveransesektoren er den sektoren som i gjennomsnitt er høyest korrelert med obligasjonsindeksene.

Når det gjelder hvilke implikasjoner samvariasjonen har for den optimale porteføljen til Norge, må det hele sees i sammenheng med samvariasjon mellom de ulike utenlandske investeringsmulighetene og innenlandsformuen. I det følgende ser vi nærmere på dette.

7.2 Samvariasjon mellom den eksogene formuen og de utenlandske investeringsmulighetene

Vi har nå gjort oss kjent med samvariasjon i det utenlandske investeringsuniverset. Videre skal vi ta for oss korrelasjonen mellom de utenlandske investeringsmulighetene og innenlandsformuen. Igjen ser vi på en korrelasjonsvektor fremfor kovariansvektoren, \mathbf{c}'_E , da korrelasjoner er lettere å tolke enn kovarianser. Kovari-

ansvektoren, \mathbf{c}'_E , er vedlagt i tillegg A.3. Som før kaller vi den eksogene formuen for E .

I tabellene nedenfor ser vi hvordan den eksogene formuen samvarierer med de ulike investeringsmulighetene. Nederst i tabellen for korrelasjon mellom den eksogene formuen og aksjene finner vi den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom den eksogene formuen, her representert ved Oslo Børs hovedindeks, og alle regionene, \bar{R}_{Er} . Den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom aksjene i de 5 regionene og den eksogene formuen er funnet på tilsvarende måte som den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom obligasjonsindeksene og regionene i forrige avsnitt.

$$\bar{R}_{Er} = \sum_s b_{sr} R(\tilde{r}_E, \tilde{r}_{sr}).$$

I kolonnen til høyre i tabellen finner vi den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom den eksogene formuen og hver av sektorene, \bar{R}_{Es} . Den gjennomsnittlige korrelasjonen mellom den eksogene formuen og sektorene er funnet fra:

$$\bar{R}_{Es} = \sum_r a_r R(\tilde{r}_E, \tilde{r}_{sr})$$

Korrelasjon mellom den eksogene formuen og aksjene:

$R(\tilde{r}_E, \tilde{r}_{sr})$	USA	Eur	Japan	Asia	Aus	\bar{R}_{Es}
Materialer	0,85	0,86	0,58	0,84	0,83	0,82
Konsumgoder	0,68	0,79	0,66	0,78	0,71	0,71
Tjenester	0,64	0,80	0,27	0,82	0,77	0,66
Bank og finans	0,59	0,78	0,35	0,81	0,73	0,63
Helse	0,58	0,66	0,37	0,73	0,68	0,60
Industri	0,73	0,85	0,64	0,80	0,76	0,76
Olje og gass	0,76	0,87	0,52	0,81	0,79	0,77
Teknologi	0,64	0,70	0,62	0,69	0,57	0,65
Telekom	0,51	0,56	0,25	0,72	0,57	0,52
Kraftleveranse	0,63	0,76	-0,05	0,74	0,63	0,59
\bar{R}_{Er}	0,65	0,77	0,48	0,79	0,75	

Korrelasjon mellom den eksogene formuen og obligasjonene:

	BGA	BGIL
$R(\tilde{r}_E, \tilde{r}_o)$	0,09	0,43

Japan er den regionen som er lavest korrelert med den eksogene innenlandsformuen. Noe overraskende er det at Asia er den regionen den eksogene formuen samvarierer mest med. Man skulle tro at Asia og Norge som er to ulike økonomier og relativt fjerne geografisk sett skulle ha en lavere samvariasjon, men i vårt datagrunnlag syntes dette ikke å stemme i denne regionen. Fra tabellene ser vi at materialer i de ulike regionene er høyt korrelert med den eksogene formuen. I USA, Asia og Australia er materialer den sektoren som er høyest korrelert med den eksogene formuen. I forrige avsnitt så vi at denne sektoren også var høyt korrelert på tvers av regioner. I følge MSCI (2009) kan en med dette kategorisere materialesektoren som en global sektor. Olje og gass i Europa er den sektoren som

er høyest korrelert med den innenlandske formuen. Vi vet at olje og gass er en utbredt andel av den innenlandske formuen, samtidig som Europa er nærliggende geografisk. Høy korrelasjon mellom europeisk olje og gass og den eksogene formuen er dermed ikke så overraskende. Materialer, olje og gass og industri er de sektorene som i gjennomsnitt er høyest korrelert med innenlandsformuen.

Fra tidligere vet vi at telesektoren er lavt korrelert med andre sektorer på tvers av regioner. Denne sektoren er generelt lavt korrelert med den eksogene formuen, selv om telesektoren er relativt utbredt i Norge med en markedsandel på omtrent 11 % (Dow Jones, 2011b). I motsetning til materialsektoren kan en dermed ikke si at telesektoren er en global sektor.

Generelt er obligasjonene lavt korrelert med innenlandsformuen. Obligasjonsindeksen BGA er lavest korrelert med den eksogene formuen, og er også den obligasjonsindeksen som er lavest korrelert med de utenlandske aksjene. Korrelasjonen mellom innenlandsformuen og BGA er 0,09. Dette er en svært lav korrelasjonskoeffisient, og kan igjen tyde på diversifiseringsgevinster forbundet med å investere i obligasjoner. Korrelasjonen med BGIL er derimot relativt høy i forhold til BGA indeksen, med en korrelasjonskoeffisient på 0,43.

Kapittel 8

Forventede avkastningsrater

For å komme videre i analysen trenger vi å finne de forventede avkastningsratene til hver av de utenlandske investeringsmulighetene. En bruker gjerne realisert gjennomsnittsverdi som et estimat på den forventede verdien til en variabel. Den historiske gjennomsnittlige avkastningsraten i en valgt tidsperiode, forteller oss bare hva den realiserte avkastningsraten i den perioden var. Gjennomsnittlig avkastningsrate til en investeringsmulighet er gitt ved (Berk og DeMarzo, 2007, s. 292):

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$$

hvor T er alle periodene, i vårt tilfelle er det 108 måneder. Dersom vi bruker gjennomsnittlige avkastningsrater som forventede avkastningsrater antar vi altså at verdipapir som har prestert bra i fortiden vil prestere bra i fremtiden. Dette medfører at en investor vil ønske å investere store andeler i verdipapir som historisk sett har prestert godt, og selge andeler kort i verdipapir som i historisk gjennomsnitt har hatt negativ avkastning (Black og Litterman, 1992).

I følge Black (1993) forteller den gjennomsnittlige avkastningsraten til usikre aktiva lite om den forventede avkastningsraten i fremtiden, hvertfall om en har data fra en begrenset periode som vi har her. Black mener at ekstremt lange tidsperioder er nødvendig for at gjennomsnittlige avkastningsrater kan brukes som forventede avkastningsrater. Han mener derfor at vi trenger teori for å estimere forventede avkastningsrater. En grunn til dette er mean-reversion prinsippet, altså at investeringer som har hatt høy avkastning i foregående periode har en tendens til å prestere dårligere i neste periode, og investeringer som har hatt lav avkastningsrate i forrige periode har høyere avkastningsrate i neste periode. En annen grunn er at standardavvikene til avkastningsraten til verdipapir er store relativt til gjennomsnittsverdien. Med data fra en begrenset periode kan en dermed påstå at den gjennomsnittlige avkastningsraten ikke er en tilstrekkelig tilnærming forventede avkastningsraten.

Vi kan redusere problemene med gjennomsnittlige avkastningsrater ved å bruke en likevektsmodell til å bestemme de forventede avkastningsratene (Black og Litterman, 1992). Som likevektsmodell bruker vi kapitalverdimodellen, som er den mest brukte (Jagannathan og Wang, 1996).

8.1 Kapitalverdimodellen

Til grunn for kapitalverdimodellen ligger noen antakelser. Antakelsene er som følger (Sharpe, 1964):

1. Alle investorers nytte er kun avhengig av forventet avkastning, μ , og standardavvik, σ . Nyttefunksjonen er da gitt ved: $U = f(\mu, \sigma)$, hvor $\frac{dU}{d\mu} > 0$ og $\frac{dU}{d\sigma} < 0$. Dette impliserer at investorenes nytte øker når forventet avkastning øker, og reduseres når standardavviket øker.
2. En investor kan kjøpe og selge alle aktiva til en markedspris uten skatter eller transaksjonskostnader og kan låne og utstede lån til en sikker rente, r_0 .
3. Investoren velger en portefølje som gir høyest mulig avkastning for en gitt risiko, σ , det betyr at enhver investor holder en effektiv portefølje.
4. Alle investorer har homogene forventninger om kovariansene og avkastningsratene til investeringsmulighetene.

Hvis alle investorer har samme forventninger, så vil alle investere i den samme porteføljen av usikre verdipapir. I likevekt eksisterer det et lineært forhold mellom forventet avkastning og risiko til de effektive porteføljene. Dersom antakelsene holder sier kapitalverdimodellen at (Berk og DeMarzo, 2007, s. 364):

$$\mu_i - r_0 = \beta_i(\mu_W - r_0), \text{ hvor } \beta_i = \frac{\text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_W)}{\sigma_W^2}$$

Vi har at μ_i er den forventede avkastningsraten til hver av de mulige aksje- og obligasjonsinvesteringene, i . For aksjeinvesteringene bruker vi videre at $i = sr$, og $i = o$ for obligasjonsinvesteringene. Da er μ_{sr} den forventede avkastningsraten til sektor s i region r , og μ_o er den forventede avkastningsraten til obligasjonssindeks o . Videre er som før r_0 den sikre renten som vi har satt lik 0.¹ Videre er \tilde{r}_W avkastningsraten og μ_W den forventede avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen. Vi bruker den gjennomsnittlige avkastningsraten til verdensmarkedet, $\mu_W = 0,0057$ per måned, til tross for at vi har argumentert for at den gjennomsnittlige avkastningsraten i en periode er en dårlig tilnærming til den forventede avkastningsraten.² Dette gjør vi fordi den gjennomsnittlige avkastningsraten er det eneste tilgjengelige estimat på forventede avkastningsraten til verdensmarkedet. På en annen side er problemet med mean-reversion og store standardavvik mindre i store porteføljer enn for enkeltverdipapir (Berk og DeMarzo, 2007, s. 299). Det impliserer at den gjennomsnittlige avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen er et bedre estimat på forventet avkastningsrate enn gjennomsnittlig avkastningsrate til et enkeltverdipapir.

β_i er risikoen til de usikre investeringsmulighetene i utlandet relativt til risikoen til verdensmarkedsporteføljen, $i = (sr, o)$. $\text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_W)$ er kovariansen mellom de usikre utenlandsinvesteringene og verdensmarkedsporteføljen. $\sigma_W^2 = 0,00115$ er variansen til avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen

¹Dette ble forklart i kapittel 4.2.

²Den gjennomsnittlige avkastningsraten til verdensmarkedet fant vi i kapittel 5.3.

En β_i er nær 1 impliserer at risikoen til verdipapire i er relativt lik risikoen til verdensmarkedet, altså at det verdipapiret i høy grad varierer som verdensmarkedet (Berk og DeMarzo, 2007, s. 350). Vi ser i tabellen under at dette spesielt gjelder for konsumgoder i Europa og tjenester i Asia.

β_{sr} til aksjene:	USA	Europa	Japan	Asia	Australia	β_s
Materialer	1,14	0,25	0,89	1,18	1,29	1,15
Konsumgoder	0,63	1,00	0,67	0,97	0,89	0,77
Tjenester	0,77	1,06	0,54	1,00	1,12	0,85
Bank og finans	1,08	1,58	0,81	0,97	1,16	1,16
Helse	0,52	0,76	0,50	0,81	0,80	0,62
Industri	0,96	1,31	0,90	0,14	1,29	1,07
Olje og gass	0,79	0,96	0,76	1,11	1,11	0,87
Teknologi	0,97	1,36	0,91	1,10	1,53	1,10
Telekom	0,68	0,88	0,57	0,76	0,71	0,73
Kraftleveranse	0,58	1,13	0,10	0,57	0,87	0,67
β_r	0,85	1,20	0,73	1,02	1,15	

I tabellen finner vi også betaen til hver av regionene, β_r , og hver av sektorene, β_s . Disse finner vi henholdsvis fra:³

$$\beta_r = \sum_{s=1}^{10} b_{sr} \beta_{sr} \text{ og } \beta_s = \sum_{r=1}^5 a_r \beta_{sr}.$$

Fra tabellen over ser vi at Asia og industrisektoren henholdsvis er den regionen og sektoren med en risiko mest lik markedsrisikoen. Obligasjoner har en lav risiko relativt til markedsrisikoen, $\beta_o < 1$. Dette kommer av at kovariansen mellom aksjene og obligasjonene er lav, og andelen obligasjoner i verdensmarkedsporteføljen er mindre enn andelen aksjer.

β_{BGA}	β_{BGIL}
0,07	0,30

Investeringsmulighetene med høye betaverdier vil i likevekt ha høyere forventede avkastningsrater enn investeringsmulighetene med lave betaverdier. Dette kommer av at det i følge kapitalverdimodellen er et lineært forhold mellom beta til et verdipapir og den forventede avkastningsraten til verdipapiret. Eksempelvis har obligasjonsindeksen BGA den laveste betaen, og vil dermed ha den laveste forventede avkastningsraten. Videre har bank- og finanssektoren i Europa en relativt høy beta i forhold til de andre investeringsmulighetene, og vil i likevekt dermed ha den høyeste forventede avkastningsraten.

Vi har nå tatt for oss kapitalverdimodellen, og kan ved hjelp av beta-koeffisientene, samt avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen, beregne vektoren av forventede avkastningsrater til de utenlandske investeringsmulighetene. Vi får da en 1×52 vektor, $\boldsymbol{\mu}$, av månedlige avkastningsrater gjengitt i følgende tabell.

³Notasjonen er som i kapittel 5.

μ_{sr} i prosent	USA	Europa	Japan	Asia	Australia	μ_s
Materialer	0,65	0,71	0,51	0,67	0,73	0,65
Konsumgoder	0,36	0,57	0,38	0,55	0,51	0,44
Tjenester	0,44	0,60	0,31	0,57	0,63	0,48
Bank og finans	0,61	0,90	0,46	0,55	0,66	0,66
Helse	0,29	0,43	0,28	0,46	0,46	0,35
Industri	0,55	0,75	0,51	0,65	0,73	0,61
Olje og gass	0,45	0,55	0,43	0,63	0,63	0,50
Teknologi	0,55	0,77	0,52	0,62	0,87	0,62
Telekom	0,39	0,50	0,32	0,43	0,40	0,41
Kraftleveranse	0,33	0,64	0,06	0,32	0,50	0,38
μ_r	0,48	0,68	0,42	0,58	0,65	

I nederste rekke i tabellen for de forventede avkastningsratene til aksjene finner vi den forventede avkastningsraten til hver av regionene, μ_r . Den forventede avkastningsraten til hver av regionene er finner vi fra:

$$\mu_r = \sum_{s=1}^{10} b_{sr} \mu_{sr}.$$

I kolonnen lengst til høyre i tabellen finner vi den forventede avkastningsraten til hver av sektorene. Den forventede avkastningsraten til en sektor, μ_s , er gitt ved:

$$\mu_s = \sum_{r=1}^5 a_{sr} \mu_{sr}.$$

Bank- og finanssektoren i Europa har den høyeste forventede avkastningsraten. Videre er det kraftleveranse i Japan som har den laveste forventede avkastningsraten av de mulige aksjeinvesteringene i utlandet. I gjennomsnitt har materialesektoren den høyeste og helsesektoren den laveste forventede avkastningsraten, μ_s . Av regionene har Europa den høyeste forventede avkastningsraten, μ_r , og Japan den laveste. Dette har sammenheng med at Europa og Japan henholdsvis har den høyeste og laveste β_r .

Generelt har obligasjonene lavere forventede avkastningsrater, μ_o enn aksjeinvesteringene, og BGA indeksen har som forventet den laveste forventede avkastningsraten av alle de utenlandske investeringsmulighetene.

	μ_{BGA}	μ_{BGIL}
μ_o i prosent	0,04	0,17

Med denne typen modellering finner vi den forventede avkastningsraten til alle investeringsmuligheter når en kun bryr seg om systematisk risiko. Siden all annen risiko kan diversifiseres bort, er kun den systematiske risikoen og avkastningsraten forbundet med denne relevant (Sharpe, 1964). Risikoaversjonen til en investor vil bestemme hvor stor andel som investeres i det sikre verdipapiret og hvilken andel en holder i den usikre porteføljen.

Kapittel 9

Referanseporteføljen til SPU

For den videre analysen er det relevant å finne referanseporteføljen, og risikoen og forventet avkastningsrate til denne. Avkastningsraten og risikoen til referanseporteføljen brukes som sammenligningsgrunnlag i den videre analysen. Den forventede avkastningsraten til referanseporteføljen brukes også som den gitte avkastningsraten, μ , i de numeriske beregningene i porteføljemodellen.

9.1 Referanseporteføljens allokering

Anta at referanseporteføljen består av samme aktiva som vi har i datagrunnlaget. For å finne referanseporteføljen gitt vårt datagrunnlag bruker vi samme regionsinndeling som den faktiske referanseporteføljen til SPU. Vi vet at 35 % av aksjene i referanseporteføljen er i USA, 50 % i Europa og 15 % i Asia og Oceania. I referanseporteføljen for aksjer investeres det en andel i hvert av landene som tilsvarer markedsandelen til landet i regionen (Finansdepartementet, 2011b). Vi antar at dette også gjelder andelen investert i hver sektor, slik at en i referanseporteføljen investerer i hver sektor med den andelen sektoren utgjør i regionen, a_{sr} . Videre er 60 % av referanseporteføljen aksjer.

La a_r^{SPU} være andelen region r utgjør i referanseporteføljen. Videre er a_{sr} er andelen sektor s utgjør i region r i verdens aksjemarked, gitt fra tabellen på side 30. Med dette finner vi a_{sr}^{SPU} , som er andelen sektor s i region r utgjør i referanseporteføljen, fra:

$$a_{sr}^{SPU} = 0,6 \times a_{sr} a_r^{SPU}$$

Obligasjonsinvesteringene i den faktiske referanseporteføljen er delt inn i andeler per region, og i følge Finansdepartementet (2011b) skiller referanseporteføljen for obligasjoner seg fra allokeringen i BGA og BGIL, selv om de inkluderte obligasjonene i referanseporteføljen er obligasjoner fra indeksene. Dette ser vi bort fra her, og anta med dette at obligasjonsindeksene vi har data på er allokert på samme måte som obligasjonsindeksene i referanseporteføljen. Dette betyr at vi antar at obligasjonene i referanseporteføljen er allokert på samme måte som obligasjonene i verdensmarkedsporteføljen vi definerte i kapittel 5.3, $\mathbf{a}_o^{SPU} = \mathbf{a}_o^W$.

I datagrunnlaget har vi delt Asia og Oceania inn i 3 regioner, Japan, Asia og Australia, mens dette er en sammensatt region i referanseporteføljen. Ettersom en i følge Finansdepartementet (2011b) investerer en andel i hvert land i referanse-

porteføljen tilsvarende landets relative størrelse i en region, kan vi finne andelen referanseporteføljen investerer i hver av de 3 regionene i Asia og Oceania. Mer konkret utgjør Asia og Oceania totalt 25,3 % av verdensmarkedet for aksjer. I det totale markedet for Asia og Oceania utgjør Japan 45 %, fremvoksende Asia 39 % og Australia 16 % (Dow Jones, 2011b). La andelen i hver region r utgjør av markedet Asia og Oceania være gitt ved a_j^{AO} . Andelen Asia og Oceania utgjør i den faktiske referanseporteføljen er $a_{AO}^{SPU} = 0,15$. Videre er notasjonen som ovenfor. Andelen i hver sektor, s , utgjør i de tre regionene, r , i Asia og Oceania i referanseporteføljen:

$$a_{sr}^{SPU} = 0,6 \times a_{sr} a_r^{AO} a_{AO}^{SPU}.$$

I oversikten under sammenlignes referanseporteføljen, \mathbf{a}^{SPU} , og verdensmarkedsporteføljen, \mathbf{a}^W , ($\mathbf{a}^{SPU}/\mathbf{a}^W$).

Andelen aksjer i \mathbf{a}^{SPU} og \mathbf{a}^W i prosent:

$\mathbf{a}^{SPU}/\mathbf{a}^W$	USA	Eur	Jap	Asia	Aus	$\sum_{s=1}^5 a_s$
Materialer	0,64/0,91	1,64/0,79	0,34/0,57	0,34/0,57	0,25/0,41	3,18/3,26
Konsumgoder	1,82/2,61	3,83/1,87	0,85/1,44	0,66/1,11	0,05/0,08	7,12/7,11
Tjenester	2,82/4,05	2,61/1,27	0,46/0,78	0,28/0,48	0,16/0,27	6,33/6,85
Bank og finans	4,43/6,37	8,75/4,27	1,02/1,72	0,71/1,20	0,59/0,99	15,49/14,54
Helse	2,60/3,73	2,93/1,43	0,02/0,03	0,12/0,20	0,04/0,07	5,71/5,47
Industri	2,62/3,76	3,05/1,79	0,75/1,27	0,72/1,21	0,16/0,27	7,30/8,00
Olje og gass	1,85/2,66	2,83/1,38	0,05/0,09	0,08/0,13	0,08/0,14	4,90/4,40
Teknologi	2,96/4,25	0,73/0,36	0,28/0,47	0,38/0,65	0,00/0,01	4,36/5,73
Telekom	0,60/0,86	1,85/0,30	0,15/0,25	0,09/0,15	0,07/0,11	2,76/2,27
Kraftleveranse	0,68/0,97	1,78/0,87	0,15/0,25	0,14/0,24	0,02/0,03	2,76/2,35
$\sum_{s=1}^{10} a_r$	21/30,19	30/14,63	4,1/6,87	3,5/5,93	1,4/2,38	60/60

Andelen obligasjoner i \mathbf{a}^{SPU} og \mathbf{a}^W i prosent:

$\sum a_o^{SPU}$	a_{BGA}^{SPU}	a_{BGIL}^{SPU}
a_o^{SPU} i prosent	17/17	23/23

USA er den største regionen i verdensmarkedsporteføljen, mens Europa utgjør den største andelen i verdensmarkedsporteføljen. Videre utgjør alle landene i Asia, inkludert Japan og Australia, en større andel i verdensmarkedet enn i referanseporteføljen.

Med denne informasjonen kan vi finne avkastningen og risikoen til referanseporteføljen i vår modell, og videre avkastningen og risikoen til totalposisjonen til den norske stat når det investeres i referanseporteføljen.

9.2 Forventet avkastning og risiko

La \mathbf{a}^{SPU} være referanseporteføljen med allokeringen fra tabellene i forrige avsnitt. Videre bruker vi $\boldsymbol{\mu}$ som vektoren vi fant i kapittel 8, altså vektoren av forventede avkastningsrater til investeringsmulighetene. Den forventede avkastningsraten til referanseporteføljen vil da være:

$$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{a}^{SPU} = 0,004$$

Vi har altså 0,40 % forventet månedlig avkastningsrate, det vil si 4,8 % forventet årlig avkastning. I tabellen nedenfor gir den faktiske avkastningen til referanseporteføljen, r^{SPU} i perioden 2002 - 2010 i prosent.¹

Referanseporteføljens historiske årlige avkastning i prosent.

År	02	03	04	05	06	07	08	09	10
r^{SPU}	-5,04	12,4	8,39	10,03	7,78	4,50	-19,93	21,49	8,57

For å sammenligne de faktiske avkastningsratene til referanseporteføljen med den avkastningsraten vi oppnår, gitt vårt datagrunnlag, finner vi den historisk gjennomsnittlige avkastningsraten til referanseporteføljen, som i følge Berk og De-Marzo (2007, s. 292) er gitt ved:

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t = \frac{1}{9} \sum_{t=1}^9 r_t = 5,35 \%$$

Vi får en lavere avkastningsrate i datagrunnlaget enn den faktiske avkastningsraten til referanseporteføljen. Fra datagrunnlaget får vi en forventet avkastningsrate på 4,8 % årlig, mens referanseporteføljen har hatt en historisk gjennomsnittlig avkastningsrate på 5,35 %. Grunnen til dette kan være at vi har brukt kapitalverdimodellen til å finne μ , som gir avkastningsrater som avviker fra de realiserte avkastningsratene i datasettet.

Variansen til referanseporteføljen er:²

$$\sigma_{SPU}^2 = 0,00137.$$

Vi kan finne risikoen til totalformuen ved investering i referanseporteføljen fra ligning (??). Variansen til totalposisjonen når vi investerer i referanseporteføljen, \mathbf{a}^{SPU} , øker med den relative størrelsen på den eksogene formuen, x_E . Dette kommer for det første av variansen til referanseporteføljen, σ_{SPU}^2 , er konstant. Videre er, $2\mathbf{a}^T \mathbf{c}_E = 2\mathbf{a}^T x_E \mathbf{c}'_E$ og $\sigma_E^2 = x_E^2 \sigma_E'^2$, økende i størrelsen på x_E .

Ved investering i referanseporteføljen har vi at investorens totale varians er 0,00137 når $x_E = 0$, dvs. at vi antar referanseporteføljen er den eneste risikoen til investoren. Når $x_E = 7,5$, den relative verdien på den eksogene vi fant i kapittel 6, er variansen til totalposisjonen til 0,39.

Verdensmarkedsporteføljen med 60 % aksjer og 40 % obligasjoner har en forventet avkastningsrate på 0,0037. Den forventede avkastningsraten er lavere enn den forventede avkastningsraten til referanseporteføljen, men verdensmarkedsporteføljen har en lavere varians, $\sigma_W^2 = 0,00115$.

Vi skal videre finne den optimale porteføljen av utenlandsinvesteringer med og uten hensyn til den eksogene formuen. Ettersom referanseporteføljen har en forventet avkastningsrate på 0,40% per måned bruker vi denne som den gitte avkastningsraten i beregningene, dvs. $\mu = 0,004$.

¹2002 - 2010 er den samme tidsperioden som vi bruker i datagrunnlaget.

²Det henvises til kapittel 2 for mer om variansen til en portefølje.

Kapittel 10

Resultater uten restriksjoner

I dette kapitlet finner vi de optimale porteføljene til en investor med og uten hensyn til eksogen formue når investoren har mulighet til kort salg. Vi antar at investoren har lov til å investere akkurat så mye han måtte ønske i alle regioner og sektorer gitt den disponible formuen. Investoren kan ikke lånefinansiere sine investeringer ved å ta opp lån til den sikre renten.¹ Det vil si at vi setter følgende bibetingelse: $\mathbf{1}^T \mathbf{a} = 1$.

Analysen gjennomføres i to trinn. Vi finner først den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, og hvilken gevinst en kan oppnå i meravkastning til verdipapirporteføljen ved å investere i denne fremfor referanseporteføljen, \mathbf{a}^{SPU} . Deretter finner vi gevinsten i meravkastning til verdipapirporteføljen en kan oppnå ved å ta hensyn til eksogen formue, fremfor å investere i den optimale porteføljen uten hensyn til denne.

En kan gjerne si at resultatene som fremkommer er urealistiske for den norske stat som investor, særlig når det gjelder investeringsandelene vi får i den optimale porteføljen når vi tar hensyn til eksogen formue. For det første er SPU en stor investor i verdensmarkedssammenheng. Dersom det ikke eksisterer noen begrensninger på hva en kan foreta seg i forvaltningen av SPU, så kan dette få store konsekvenser for hele det internasjonale finansmarkedet. Videre sier regelverket per i dag at kort salg ikke skal forekomme i SPU, med mindre det er gjennom en «etablert låneordning» (Finansdepartementet, 2010b).

En investor ønsker å minimere totalrisikoen for en gitt avkastningsrate, μ . Vi finner først den porteføljen som minimerer variansen gitt $\mu = 0,004$, om en ikke har noen annen risiko enn porteføljen av utenlandske verdipapir. Videre finner vi den optimale porteføljen når vi tar hensyn til den eksogene formuen.

10.1 Optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue

Med et sikkert verdipapir er den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue gitt ved ligning (3.14).

Uten et sikkert verdipapir kan vi som nevnt i kapittel 4.2 ikke bruke denne fremgangsmåten. Vi må løse minimeringsproblemet (4.2), for $\mu = 0,004$. I tilfellet

¹Jfr. diskusjonen i kapittel 4.2.

uten eksogen formue har vi da følgende minimeringsproblem:

$$\hat{\sigma}^2(\mu) = \min_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} \quad \text{usv.} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{a} = 1 \quad \text{og} \quad \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} = \mu \quad (10.1)$$

Vi kaller løsningen på problemet uten hensyn til eksogen formue for $\hat{\mathbf{a}}(\mu)$. Allokeringen av de mulige aksje- og obligasjonsinvesteringene i porteføljen med minst varians for den gitte forventede avkastningsraten, $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$, er vist i tabellene nedenfor for aksjer og obligasjoner henholdsvis. Tabellene inneholder også allokeringen i verdensmarkedsporteføljen², \mathbf{a}^W , for sammenligning. Andelene i tabellene er oppgitt i prosent.

Aksjene i $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$ og \mathbf{a}^W i prosent:

$\hat{\mathbf{a}}/\mathbf{a}^W$ i %	USA	Europa	Japan	Asia	Australia	$\sum_r a_{sr}$
Materialer	1,40/0,91	-4,65/0,79	4,00/0,57	-9,82/0,57	7,88/0,41	-1,18/3,26
Konsumgoder	1,21/2,61	-9,37/1,87	2,21/1,44	0,95/0,11	5,62/0,08	0,62/7,11
Tjenester	-0,96/4,05	7,44/1,27	4,60/0,78	-6,15/0,48	6,69/0,27	11,61/6,85
Bank og finans	25,03/6,37	-4,90/4,27	-8,23/1,72	15,39/1,20	2,92/0,99	30,20/14,54
Helse	0,30/3,73	0,23/1,43	-2,58/0,03	7,37/0,20	-9,91/0,07	-4,59/5,47
Industri	9,02/3,76	6,02/1,49	21,19/1,27	5,01/1,21	-12,27/0,27	28,96/8,00
Olje og gass	-1,41/2,66	10,67/1,38	-0,54/0,09	3,29/0,13	-3,75/0,14	8,26/4,40
Teknologi	9,69/4,25	-8,07/0,36	-4,87/0,47	-3,44/0,65	0,10/0,01	-6,60/5,73
Telekom	-6,20/0,86	7,40/0,90	-0,38/0,25	5,13/0,15	-1,19/0,11	4,76/2,27
Kraftleveranse	-1,48/0,97	9,02/0,87	5,44/0,25	-11,16/0,24	-2,46/0,03	-0,65/2,35
$\sum_s a_{rs}$	36,6/30,2	13,8/14,6	20,8/6,9	6,6/5,9	-6,4/2,4	71,5/60

Obligasjonene i $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$ og \mathbf{a}^W i prosent:

	\hat{a}_{BGA}	\hat{a}_{BGIL}	$\sum_o \hat{a}_o$
\hat{a}_o/a_o^W	21/17	7,5/23	28,5/40

Det største avviket fra verdensmarkedsporteføljen, \mathbf{a}^W , til den optimale porteføljen, $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$, i USA er andelen investert i bank- og finanssektoren. Vi investerer en mye høyere andel i den optimale porteføljen, $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$, enn sektorens andel i verdensmarkedet, \mathbf{a}^W .

Europa utgjør andelen 0,146 i verdensmarkedsporteføljen, og i den optimale porteføljen får vi en total andel investert tilsvarende 0,138. Andelene investert i hver av sektorene avviker for øvrig fra verdensmarkedsporteføljen, og andelen investert i olje og gass i $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$ avviker mest fra andelen sektoren utgjør i \mathbf{a}^W .

Andelen Japan utgjør av verdensmarkedet er 0,069, mens i den optimale porteføljen utgjør Japan en andel på 0,208. Vi så i kapittel 7 at investeringsmulighetene i Japan er svært lavt korrelert med de øvrige investeringsmulighetene. Dette kan forklare hvorfor det er optimalt å investere en høyere andel i denne regionen enn regionens andel i verdensmarkedet.

I den optimale porteføljen, $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$, er andelen investert totalt i Asia relativt lik andelen som regionen utgjør i verdensmarkedet. Andelene investert i hver sektor avviker for øvrig fra verdensmarkedsporteføljen. Dette gjelder særlig i kraftleveransesektoren og i bank- og finanssektoren, med henholdsvis en høy negativ og positiv andel investert.

²Fra kapittel 4.4

Til slutt har vi Australia, som vi i den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$, totalt sett selger aksjer kort i, mens andelen i verdensmarkedsporteføljen er 0,024. Australia og sektorene der er verken spesielt høyt eller lavt korrelert med de øvrige investeringsmulighetene i gjennomsnitt. Blant annet en høy andel solgt kort i den australske industrisektoren gjør at vi totalt sett investerer en negativ andel i denne regionen. I tillegg A.1 kan vi se at industrisektoren i Australia er høyt korrelert med de andre utenlandske investeringsmulighetene, og en høy andel investert negativt i denne sektoren kommer trolig av den høye samvariasjonen.

Vi får at variansen til den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, med forventet avkastningsrate lik SPU, $\mu = 0,004$, er $\hat{\sigma}^2(0,004) = 0,00125$.

Den forventede avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen, \mathbf{a}^W , er $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{a}^W = 0,0037$, og variansen til verdensmarkedsporteføljen er $\sigma_{\mathbf{a}^W}^2 = 0,00115$. En grunnene til den optimale porteføljen avviker fra verdensmarkedsporteføljen er at vi har satt den gitte forventede avkastningsraten, μ , noe høyere enn den forventede avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen, siden $\mu_{SPU} = 0,004$ og $\mu^W = 0,0037$. Den viktigste grunnen er for øvrig at vi optimerer etter at data er kjent.

Når vi bruker den gjennomsnittlige avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen som den gitte avkastningsraten, μ , i minimeringsproblemet (10.1) blir variansen til den optimale porteføljen, $\hat{\sigma}^2(0,0037) = 0,00107$, mens variansen verdensmarkedsporteføljen, $\sigma_{\mathbf{a}^W}^2 = 0,00115$. For samme varians som verdensmarkedsporteføljen kan vi finne den avkastningsraten en effektiv portefølje uten hensyn til eksogen formue vil gi, $\hat{\mu}(\sigma_{\mathbf{a}^W}^2)$. Her er:

$$\hat{\mu}(\sigma^2) = \max_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} \quad \text{usv.} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{a} = 1 \quad \text{og} \quad \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} = \sigma^2. \quad (10.2)$$

Vi får at $\hat{\mu}(0,00115) = 0,00384$, en avkastningsrate som er 0,014% høyere enn den forventede avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen per måned. Dette tyder på at verdensmarkedsporteføljen fra datagrunnlaget ikke er en effektiv portefølje når vi bruker historiske data. Hvilke implikasjoner dette har for våre resultater tar vi opp i neste avsnitt.

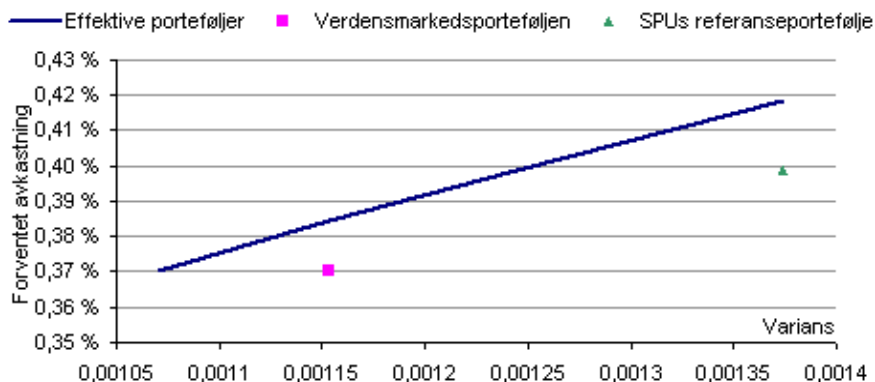
10.1.1 Den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue og referanseporteføljen

Gevinsten i forventet avkastning ved å investere i den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$, i forhold til referanseporteføljen, \mathbf{a}^{SPU} , er forventningen til den optimale porteføljen med samme varians som referanseporteføljen, $\hat{\mu}(\sigma_{SPU}^2)$, minus avkastningsraten til referanseporteføljen, μ_{SPU} . Forventningen til den optimale porteføljen finner vi fra maksimeringsproblemet (10.2) gitt $\sigma^2 = \sigma_{SPU}^2 = 0,00137$.

Løsningen på maksimeringsproblemet gir at den optimale porteføljen med samme varians som referanseporteføljen har en forventet avkastningsrate på $\hat{\mu}(0,00137) = 0,0042$. Gevinsten i økt forventet avkastning blir $\hat{\mu}(0,00137) - \mu_{SPU} = 0,02\%$ per måned. Det gir en potensiell meravkastning på 0,24% pr år. Når verdien av SPU er kr 3000 milliarder tilsvarer en meravkastning på 0,24% kr 7,2 milliarder.

Hovedproblemet med SPU er overrepresentering i Europa. Dette betyr at referanseporteføljen ikke er optimalt investert om en ser på denne som investorens totalposisjon og kort salg er mulig.

En kan for øvrig si at gevinsten er noe overdrevet, både grunnet at verdensmarkedsporteføljen, \mathbf{a}^W , og ikke den optimale porteføljen, $\hat{\mathbf{a}}(\mu)$, er den porteføljen en *ex-ante* ville valgt dersom en skulle minimere variansen til en portefølje uten hensyn til eksogen formue, ikke brydde oss om noe annet enn forventet avkastning og risiko, og om alle aktører har identiske oppfatninger.³ *Ex-post* er derimot ikke verdensmarkedsporteføljen en effektiv portefølje i vårt datagrunnlag. I figur 10.1 kan vi se forventet avkastning, μ , og varians, σ^2 , til verdensmarkedsporteføljen, referanseporteføljen og de effektive porteføljene.



Figur 10.1: Effektive porteføljer uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}(\mu)$ og $\hat{\mathbf{a}}(\mu(\sigma^2))$, referanseporteføljen og verdensmarkedsporteføljen.

I figuren ligger den forventede avkastningsraten til verdensmarkedsporteføljen, \mathbf{a}^W , og referanseporteføljen, \mathbf{a}^{SPU} , under kurven for de effektive porteføljene. For samme varians som \mathbf{a}^W og \mathbf{a}^{SPU} kan en oppnå høyere avkastning når en optimerer etter at data er kjent. Det bør merkes at figuren representerer et utsnitt av de effektive porteføljene. Linjen med de effektive porteføljene er ikke lineær for alle verdiene på forventet avkastningsrate og varians.

10.2 Optimal portefølje med hensyn til eksogen formue

I kapittel 3 ga ligning (3.11) den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue med et sikkert verdipapir. Uten mulighet for investering i et sikkert verdipapir løser vi i stedet problem (4.3):

$$\sigma_{\hat{x}}^2(\mu, x_E) = \min_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{c}_E + \sigma_E^2 \quad \text{usv.} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{a} = 1 \quad \text{og} \quad \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} = \mu \quad (10.3)$$

Den optimale porteføljen endrer seg når vi varierer den relative størrelsen på den eksogene formuen, x_E , fordi denne størrelsen inngår i $\mathbf{c}_E := x_E \mathbf{c}'_E$ og i $\sigma_E^2 := x_E^2 \sigma_E'^2$.

³Vi vet fra kapittel 1 at Finansdepartementet legger andre faktorer til grunn enn bare forventet avkastning og risiko, som eksempelvis den internasjonale kjøpekraften til SPU, men at denne grunnivningen er tvilsom.

Vi kan dermed si at den optimale porteføljen med hensyn til den eksogene formue er en funksjon av den gitte avkastningsraten, μ , og den relative størrelsen på den eksogene formuen, x_E , og skriver $\mathbf{a}(\mu, x_E)$.

I kapittel 6 anslo vi (med høy usikkerhet) den relative verdien til den eksogene formuen, $x_E = 7,5$. Med $x_E = 7,5$ er den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue, $\mathbf{a}(0,004, 7,5)$, som presentert i følgende tabeller for henholdsvis aksjer og obligasjoner.⁴ I tabellen sammelignes investeringene i $\mathbf{a}(0,004, 7,5)$ med investeringene i den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$. La videre $\mathbf{a}=\mathbf{a}(0,004, 7,5)$ og $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}(0,004)$. Det bør merkes at andelene i tabellene ikke lenger er oppgitt i prosent.

Aksjer i den optimale porteføljen med og uten hensyn til eksogen formue gitt forventningen til referanseporteføljen, μ_{SPU} :

$\mathbf{a}/\hat{\mathbf{a}}$	USA	Europa	Japan	Asia	Aus	$\sum_r a_{sr}$
Materialer	-1,81/0,01	-1,95/-0,05	0,73/0,04	-3,55/-0,10	1,09/0,08	-2,49/-0,01
Konsumgoder	0,94/0,01	-0,65/-0,09	-2,43/0,02	2,31/0,01	1,36/0,06	1,54/0,01
Tjenester	-2,48/-0,01	-1,49/0,07	-0,43/0,05	1,34/-0,06	0,33/0,07	-2,72/0,12
Bank og finans	4,26/0,25	0,35/-0,05	-1,07/-0,08	-3,03/0,15	3,04/0,03	3,55/0,30
Helse	-3,36/0	1,52/0	0,42/-0,03	1,10/0,07	-1,48/-0,10	-1,80/-0,05
Industri	3,10/0,09	-1,19/0,06	2,60/0,21	-0,97/0,05	-1,91/-0,12	1,63/0,29
Olje og gass	0,13/-0,01	-1,15/0,11	-0,29/-0,01	-0,20/0,03	-2,20/-0,04	-4,12/0,80
Teknologi	0,52/0,10	-1,99/-0,08	0,26/-0,05	0,28/-0,03	0,28/0	-0,64/-0,07
Telekom	-0,10/-0,06	0,25/0,07	1,49/0	0,80/0,05	0,02/0,01	2,48/0,05
Kraftleveranse	-3,38/-0,01	4,23/0,09	0,39/0,05	-2,11/-0,11	-0,13/-0,02	-1,01/-0,01
$\sum_s a_{rs}$	-2,18/0,37	-2,47/0,14	1,67/0,21	-4,01/0,07	3,41/-0,06	-3,58/0,715

Obligasjoner i den optimale porteføljen med og uten hensyn til eksogen formue gitt forventningen til referanseporteføljen, μ_{SPU} :

$\mathbf{a}/\hat{\mathbf{a}}$	a_{BGA}	a_{BGIL}	$\sum_{o=1}^2 a_o$
a_o	-1,25/0,21	5,82/0,075	4,58/0,285

Fra tabellene ser vi at vi tar store positive og negative posisjoner i mange verdipapir. Som nevnt innledningsvis, er resultatene urealistiske i praksis. Andelene investert i enkelte sektorer gir trolig beløp investert som er høyere enn markedsverdien til sektoren. Eksempelvis utgjør europeisk kraftleveransesektor en andel på 0,89% i verdensmarkedsporteføljen, \mathbf{a}^W . Om vi investerer 4,23 ganger utenlandsformuen i denne sektoren vil det gi svært høye eierandeler, som muligens er uoppnåelig.

Det kan være vanskelig å forklare allokeringen i \mathbf{a} da den avhenger samvariasjon mellom sektorene, obligasjonene og den eksogene formuen. I tillegg spiller de forventede avkastningsratene inn i den optimale allokeringen. Noen av tilpasningene kan en forklare intuitivt, mens andre er vanskeligere.

Sammenlignet med den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}$, har allokeringen endret seg når vi tar hensyn til eksogen formue, \mathbf{a} . La oss

⁴I tillegg B.1 finner vi de optimale porteføljene med hensyn til eksogen formue for $x_E = 5$ og $x_E = 10$ for å vise hvordan porteføljen forandrer seg med den relative størrelsen på den eksogene formuen.

først se nærmere på allokeringen av aksjer. Totalt sett selger vi aksjer kort, med en andel på $-3,58$ av utenlandsformuen, altså SPU. Vi selger en høy andel kort i USA, Europa og Asia og investerer høye positive andeler i Japan og Australia.

I USA og Europa går vi fra å holde en positiv andel i $\hat{\mathbf{a}}$, mens når vi tar hensyn til den eksogene formuen, \mathbf{a} , får vi for alle størrelser på x_E vi har testet, at det samlet sett er optimalt å selge aksjer kort i disse regionene. I referanseporteføljen til SPU investeres 50 % av aksjeporteføljen, altså 30 % av totalporteføljen i europeiske aksjer, som er den regionen vi i \mathbf{a} holder den største negative andelen. Enten en skal investere optimalt med eller uten hensyn til eksogen formue ser det ut til at en bør redusere investeringsandelen i Europa.⁵ Dette gjelder særlig om en ser på SPU som en del av statens totalposisjon. I kapittel 7 så vi at europeiske aksjer er høyt korrelert med innenlandsformuen, og det er grunn til å tro at resultatet kommer av dette.

I Australia er det uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}$, totalt sett optimalt å selge aksjer kort. Når vi tar hensyn til eksogen formue, \mathbf{a} , bør en derimot totalt sett holde positive andeler i denne regionen. I \mathbf{a} er Australia den regionen vi optimalt holder den høyeste andelen. Australia er en region fjernt fra Norge, og er i tråd med teorien skulle en forvente at det var optimalt med investeringer i denne regionen. På en annen side er ikke Australia spesielt lavt korrelert med Norge, og den høye investeringsandelen i denne regionen kan derfor skyldes tilfeldigheter.

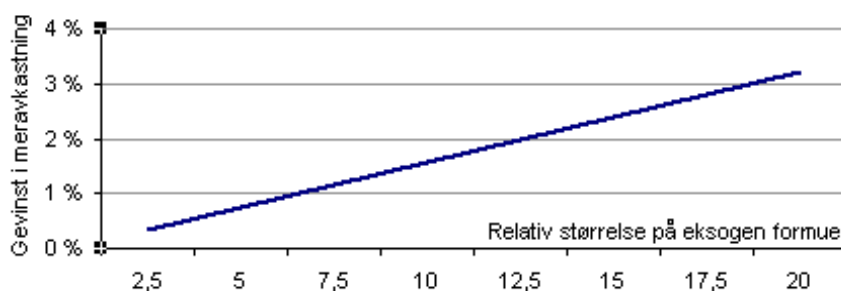
Når det gjelder andelen i hver av de mulige aksjeinvesteringene, a_{sr} , har vi den høyeste positive investeringsandelen i bank- og finanssektoren i USA, og den største korte posisjonen i asiatiske materialer. I sektorene totalt sett, holder vi den største positive andelen i bank- og finanssektoren og den største negative andelen i sektoren for olje og gass. I tilfellet uten hensyn til eksogen formue var også bank- og finanssektoren den sektoren en investerte den høyeste andelen. Vi hadde for øvrig en positiv andel i aksjer innen olje og gass tilsvarende $0,8$ i $\hat{\mathbf{a}}$. Vi vet at olje og gass utgjør en stor andel av den eksogene formuen, og kort salg i denne sektoren er det en i utgangspunktet skulle tro at resultatet ble.

Obligasjonsindeksene er i den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue, \mathbf{a} , allokert med en høy positiv andel i BGIL indeksen, og en negativ andel i BGA. Vi vet fra kapittel 7 at obligasjonsindeksene generelt er lavt korrelert med innenlandsformuen og med de utenlandske investeringsmulighetene. I kapittel 8 fikk obligasjonsindeksene lave forventede avkastningsrater. Dette kommer av at de får lave betaer som følge av at risikoen til obligasjonene er liten relativt til risikoen i markedet for øvrig. Lav samvariasjon mellom obligasjoner og de øvrige investeringsmulighetene og den eksogene formuen taler for investering i obligasjoner. På en annen side taler lave forventede avkastningsrater trolig noe i mot. En høy investeringsandel i BGIL kan muligens forklares av en høyere forventet avkastningsrate enn BGA.

I den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}$, investerte vi positive andeler i begge obligasjonsindeksene. Andelen investert positivt i BGIL indeksen er høyere når vi tar hensyn til den eksogene formuen, \mathbf{a} , enn når vi ikke tar hensyn til den eksogene formuen.⁶

⁵Vi vet fra kapittel 2 at dette er oppe til diskusjon i Finansdepartementet/Norges Bank per d.d.

⁶Det kan nevnes at dette gjelder for alle tilfeller av relative størrelser på den eksogene formuen,



Figur 10.2: Gevinst i økt forventet avkastning, $\mu(\hat{\sigma}_x^2(0,004)) - 0,004$, ved investering i $\mathbf{a}(\hat{\sigma}_x^2, x_E)$ fremfor $\hat{\mathbf{a}}(\mu)$.

10.2.1 Gevinsten av å ta hensyn til eksogen formue

Variansen til Norges totalformue er større ved investering i den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}$, enn ved investering i den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue, \mathbf{a} . Gitt variansen til totalformuen ved investering i $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\sigma}_x^2$, kan vi finne gevinsten i form av økt forventet avkastning til verdipapirinvesteringene av å ta hensyn til eksogen formue. Den forventede avkastningsraten til den optimale porteføljen med relativ størrelse på den eksogene formuen, x_E , og standardavvik til totalformuen, σ_x^2 , finner vi fra følgende maksimeringsproblem:

$$\mu(\sigma_x^2, x_E) = \max_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} \quad \text{usv.} \quad \mathbf{1}^T \mathbf{a} = 1 \quad \text{og} \quad \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{c}_E + \sigma_E^2 = \sigma_x^2. \quad (10.4)$$

Gitt den forventede avkastningsraten, μ , til verdipapirinvesteringene uten å ta hensyn til eksogen formue, så er gevinsten av å ta hensyn til denne, $\mu(\hat{\sigma}_x^2, x_E) - \mu$.

Når den relative størrelsen på den eksogene formuen, $x_E = 7,5$, er variansen til totalposisjonen ved investering i $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\sigma}_x^2 = 0,39$. Vi oppnår da en gevinst i økt forventet avkastningsrate på $\mu(0,39, 7,5) - \mu = 1,56\% - 0,40\% = 1,16\%$ per måned. Dette er gevinsten i den forventede avkastningsraten til verdipapirinvesteringene, og ikke totalformuen. I figur 10.2 ser vi økningen i forventet avkastningsrate ved å investere i $\mathbf{a}(\hat{\sigma}_x^2, x_E)$ fremfor investering i $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$.

Vi har et tilnærmet lineært forhold mellom gevinsten i økt forventet avkastning ved å ta hensyn til eksogen formue, $\mu(\hat{\sigma}_x^2(\mu), x_E) - \mu$, og den relative størrelsen på den eksogene formuen, x_E .

Gevinsten i økt risikopremie endres med ca. 0,16% når vi øker den relative størrelsen på den eksogene formuen med en enhet. Gevinsten her er trolig mye høyere enn den gevinsten en kan oppnå i praksis. For det første holder den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue, $\mathbf{a}(0,004, x_E)$ og $\mathbf{a}(\hat{\sigma}_x^2, x_E)$, ekstreme positive og negative andeler i enkeltverdipapir. Noen av andelene som fremkommer er som nevnt ikke oppnåelige i praksis. Videre finner vi de optimale tilpasningene etter at data er kjent, og dette gjør at kovarianser og forventede avkastningsrater som ligger til grunn kan skyldes tilfeldigheter i den valgte tidsperioden.

I neste kapittel gjennomfører vi en tilsvarende analyse, men da under et sett av restriksjoner som gjør resultatene mer realistiske.

x_E , vi har sett på.

Kapittel 11

Resultater med restriksjoner

Frem til nå har vi kun sett på resultatene uten restriksjoner. Vi har ikke hatt begrensninger på kort salg, eller andelen investert i enkelposisjoner. For å få mer realistiske resultater i forhold til SPUs retningslinjer kan det være relevant å ekskludere muligheten for å selge korte posisjoner.

SPU skal heller ikke investere store andeler i enkeltaksjer, da det gir stemmerett i selskaper. Vi skal kort gå inn på hvilke hjørneløsninger vi får med en fri positiv investeringsandel, men for å unngå store investeringer i enkelte sektorer setter vi en øvre grense, 0,1, på andelen en kan investere i hver av sektorene s i alle regionene r .

Begrunnelsen for den valgte restriksjonen kommer fra andelene i den komponente referanseporteføljen til SPU. I referanseporteføljen for aksjer har vi den største andelen, 0,09, investert i bank- og finanssektoren i Europa. For å kunne oppnå den samme tilpasningen som i SPU, dersom denne er optimal, må vi ha mulighet til å investere de samme andelene. Derfor settes øvre skranke på andelen kan investere i en sektor i en region til 0,1.

Videre vet vi at SPU skal investere 50% - 70% i aksjer og 30% - 50% i obligasjoner. Vi legger derfor skranke på den totale andelen investert i aksjer og obligasjoner tilsvarende SPUs retningslinjer.

Med dette har vi 3 nye sett av restriksjoner:

1. $a_o, a_{sr} \geq 0$: Kort salg er ikke mulig.
2. $0,1 \geq a_{sr}$: Øvre skranke på andelen investert i en sektor i en region er 0,1 av utenlandsformuen.
3. $0,3 < a_{BGA} + a_{BGIL} < 0,5$: Skranke på andelen investert i obligasjoner er mellom 0,3 og 0,5 av utenlandsformuen.

Vi løser nå problemene (10.1) og (10.3) under disse ekstra restriksjonene, og bruker samme notasjon for løsningene som i kapittel 10. Igjen finner vi resultatene gjennom to trinn. Vi finner altså først hvilken meravkastning en oppnår ved å endre porteføljen fra referanseporteføljen til den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, og dernest gevinsten en kan oppnå ved å ta hensyn til eksogen formue.

11.1 Optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue

Vi tar først for oss den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, og til den gitte risikopremien $\mu = 0,004$. Vi ser på hjørneløsningene vi får ved å utelukke kort salg, men uten øvre skranke på investeringsandel i enkeltaksjer eller skranke på andelen investert totalt i obligasjoner. Denne porteføljen kaller vi $\hat{\mathbf{a}}'(\mu)$. Den optimale porteføljen med alle restriksjonene kaller vi $\hat{\mathbf{a}}(\mu)$.

Vi finner $\hat{\mathbf{a}}'(0,004)$ ved å løse minimeringsproblemet (10.1) med kortsalgsrestriksjonen. Løsningen finner vi i tabellene under.

Aksjer i $\hat{\mathbf{a}}'(0,004)$ i prosent:

$\hat{\mathbf{a}}'$	USA	Euro	Japan	Asia	Aus	$\sum_r a_{rs}$
Materialer	2,1	0	0	0	0	2,1
Konsumgoder	3,0	0	0	1,0	0	4,1
Tjenester	0	0	3,6	0	0,9	4,5
Bank og finans	15,5	0	0	5,4	0	20,9
Helse	0	0	0	0	0	0
Industri	2,0	0,5	11,8	0	0	14,2
Olje og gass	0	4,3	0	0	0	4,3
Teknologi	4,3	0	0	0	0	4,3
Telekom	0	3,2	0,3	4,3	0	7,8
Kraftleveranse	0	6,8	2,1	0	0	8,9
$\sum_s a_{rs}$	26,9	14,8	17,7	10,7	0,9	71

Obligasjoner i $\hat{\mathbf{a}}'(0,004)$ i prosent:

$\hat{\mathbf{a}}'$ i prosent	BGA	BGIL	$\sum a_o$
a_o	19,1	9,9	29

Selv uten restriksjonene får vi en tilpasning i $\hat{\mathbf{a}}'(0,004)$ som nesten tilfredsstillende alle vilkårene. Andelene investert i bank- og finanssektoren i USA og industrisektoren i Japan er de eneste som ikke tilfredsstillende sidevilkåret på øvre skranke investert i aksjer, da andelen er høyere enn 0,1. Summen av andelen investert i obligasjoner avviker også minimalt fra skranken. Risikoen til verdipapirporteføljen, $\hat{\mathbf{a}}'(0,004)$, $\hat{\sigma}^2(0,004) = 0,00117$.

Tabellene under gir den optimale porteføljen, $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$, med alle restriksjonene.

Aksjene i $\hat{\mathbf{a}}(0,004)$ i prosent:

$\hat{\mathbf{a}}(0, 004)$	USA	Euro	Japan	Asia	Aust	$\sum_r a_{rs}$
Materialer	2,0	0	0,3	0	0	2,3
Konsumgoder	4,0	0	0	0	0,5	4,5
Tjenester	0	0	4,2	0	0	4,2
Bank og finans	10,0	0	0	7,3	1,3	18,6
Helse	0	0	0	0	0	0
Industri	5,4	1,7	10,0	0	0	17,1
Olje og gass	0	2,6	0	0	0	2,6
Teknologi	4,5	0	0	0	0	4,5
Telekom	0	2,7	0,9	4,0	0	7,6
Kraftleveranse	0	7,7	0,8	0	0	8,5
$\sum_s a_{rs}$	25,9	14,7	16,2	11,3	1,8	70

Obligasjonene i $\hat{\mathbf{a}}(0, 004)$ i prosent:

$\hat{\mathbf{a}}(0, 004)$	BGA	BGIL	$\sum_{o=1}^2 a_o$
a_o	17,9	12,1	30

Det er ikke store forskjeller mellom allokeringen i $\hat{\mathbf{a}}'(0, 004)$ og $\hat{\mathbf{a}}(0, 004)$.¹ Med alle restriksjonene investeres det ikke lenger i asiatiske konsumgoder eller australske tjenester, men det investeres i japanske materialer og bank- og finans og konsumgoder i Australia. Variansen til den optimale porteføljen med øvre skranke på andelen investert i aksjene, og skranke på den totale andelen investert i obligasjoner, $\hat{\sigma}^2(\mu) = 0,00121$.

I det følgende finner vi gevinsten en kan oppnå ved å investere i den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue fremfor referanseporteføljen.

11.1.1 Den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue og referanseporteføljen

Variansen til referanseporteføljen er som kjent $\sigma_{SPU}^2 = 0,00137$, og høyere enn variansen til den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}(0, 004)$. Med dette vet vi at en kan oppnå en gevinst i økt risikopremie for samme varians som referanseporteføljen, σ_{SPU}^2 . Gevinsten finner vi gjennom et tilsvarende maksimeringsproblem som i (10.2), denne gang med de ekstra sidevilkårene.

Resultatet av maksimeringsproblemet blir $\hat{\mu}(0, 00137) = 0,00413$. Gevinsten, $\hat{\mu}(\sigma_{SPU}^2) - \mu_{SPU}$, av å investere i en optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}(\mu(0, 00137))$, fremfor \mathbf{a}^{SPU} er dermed en meravkastning på 0,013% pr måned. Det gir en årlig meravkastning på 0,15% i forhold til referanseporteføljen.

Sammenlignet med referanseporteføljen får vi for øvrig en «gratis» gevinst. Vi har satt skranke på andelen investert i obligasjoner til $0,30 < a_{BGA} + a_{BGIL} < 0,50$, og får at en optimalt sett holder andelen 0,30. Referanseporteføljen består derimot av andelen 0,40 i obligasjoner, og en del av gevinsten kommer av at vi avviker fra dette. Dette impliserer at den aktive forvaltningen i SPU, i forhold til vårt datagrunnlag, også får en gratis gevinst ved å investere en lavere andel i

¹Begge porteføljene presenteres allikevel grunnet at de brukes som sammenligningsgrunnlag i tilfellet med hensyn til eksogen formue.

obligasjoner enn referanseporteføljen. Ellers overvurderes også gevinsten av samme grunn som i avsnitt 10.1.1, dvs. vi optimerer etter at data er kjent.

11.2 Optimal portefølje med hensyn til eksogen formue

For å finne den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue, $\mathbf{a}(\mu, x_E)$, under samme betingelser som når vi fant $\hat{\mathbf{a}}(\mu)$ ovenfor, bruker vi et tilsvarende minimeringsproblem som i 10.3, med de ekstra sidevilkårene.

Vi ser kort på løsningen før vi setter øvre skranke på investeringsandelen i enkeltaksjer, og skranke på andelen totalt investert i obligasjoner. Vi kaller denne løsningen $\mathbf{a}'(\mu, x_E)$. Videre tar vi for oss den optimale porteføljen med alle begrensningene, $\mathbf{a}(\mu, x_E)$.

I den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue, når vi kun utelukker kort salg, $\mathbf{a}'(0, 004, 7, 5)$, får vi at det er optimalt å investere hele formuen i 3 ulike verdipapir. $\mathbf{a}'(0, 004, 7, 5)$ består i dette tilfellet av andelen 0,37 investert i bank- og finanssektoren i USA, 0,34 i den japanske bank- og finanssektoren og andelen 0,29 i den japanske kraftleveransesektoren. Den japanske kraftleveransesektoren er den investeringsmuligheten som er lavest korrelert med den eksogene formuen. Dette kan vi se fra tabellen på side 46. Videre er bank- og finanssektoren både i USA og Japan generelt lavt korrelert med både den eksogene formuen og med de øvrige investeringsmulighetene. Korrelasjonen mellom de tre investeringsmulighetene er også generelt lav.² Disse faktorene, sammen med den gitte forventede avkastningsraten, forklarer hvorfor vi får denne hjørneløsningen.

Porteføljen med restriksjoner på andelen investert i enkeltverdipapir og uten kort salg, $\mathbf{a}(\mu, x_E)$, gir det mest realistiske bildet på hva som er gjennomførbart i praksis med en så stor formue som en har i SPU og med de retningslinjene som ligger til grunn.

Tabellen nedenfor angir den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue med alle restriksjonene, $\mathbf{a}(0, 004, 7, 5)$, sammen med den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\mathbf{a}}(0, 004)$. La igjen $\mathbf{a}(0, 004, 7, 5) = \mathbf{a}$ og $\hat{\mathbf{a}}(0, 004) = \hat{\mathbf{a}}$.

Optimal portefølje av aksjer i prosent:

²Det henvises til Tillegg A.1.

$\mathbf{a}/\hat{\mathbf{a}}$	USA	Europa	Japan	Asia	Aus	$\sum_r a_{rs}$
Materialer	0/2,0	0/0	0/0,3	0/0	0/0	0/2,3
Konsumgoder	0/4,0	0/0	0/0	0/0	0/0,5	0/4,5
Tjenester	0/0	0/0	10/4,2	0/0	0/0	10/4,2
Bank og finans	10/10	10/0	10/0	0/7,3	10/1,3	40/18,6
Helse	0/0	0/0	10/0	0/0	0/0	10/0
Industri	0/5,4	0/1,7	0/10	0/0	3/0	3/17,1
Olje og gass	0/0	0/2,6	0/0	0/0	0/0	0/02,6
Teknologi	0/4,5	0/0	0/0	0/0	0/0	0/4,5
Telekom	0/0	0/2,7	0/0,9	0/4	0/0	0/7,6
Kraftleveranse	0/0	0/7,7	7/0,8	0/0	0/0	7/8,5
$\sum_s a_{rs}$	10/25,9	10/14,7	37/16,2	0/11,3	13/1,8	70/70

Optimal portefølje av obligasjoner i prosent:

$\mathbf{a}/\hat{\mathbf{a}}$	BGA	BGIL	$\sum a_o$
a_o/\hat{a}_o	0/17,9	30/12,1	0,30/0,30

I USA og Europa investerer vi kun i bank- og finanssektoren når vi tar hensyn til eksogen formue. Når vi hadde muligheten til kort salg investerte vi negative andeler i disse regionene, men bank- og finanssektoren i USA var allikevel den sektoren hvor vi investerte den høyeste positive andelen. Dette er også en av de tre sektorene vi fikk at det var optimalt å investere i uten øvre skranke på andelen investert i enkeltaksjer eller skranke på total andel i obligasjoner, $\mathbf{a}'(0,004, 7, 5)$.

Japan er den regionen hvor vi investerer den høyeste andelen, og vi vet at denne regionen er lavt korrelert med den eksogene formuen og med de øvrige investeringsmulighetene.

Totalt er bank- og finans den sektoren vi investerer den høyeste andelen av aksjeporteføljen. I praksis er en investeringsandel på 0,4 av utenlandsformuen antakeligvis høyere enn det en ønsker å investere i bank- og finanssektoren isolert. Ikke overraskende investerer vi ingen andeler i olje- og gass når vi tar hensyn til eksogen formue.

Når det gjelder obligasjoner vet vi at da vi hadde mulighet til kort salg, solgte vi en høy andel kort i BGA indeksen og investerte en høy andel i BGIL-indeksen. Uten mulighet for kort salg investerer vi kun i BGIL indeksen. Uten skranke på investeringsandelen i obligasjoner hadde vi ingen investering i obligasjoner. Andelen 0,30 i BGIL er nedre skranke på investering i obligasjoner.

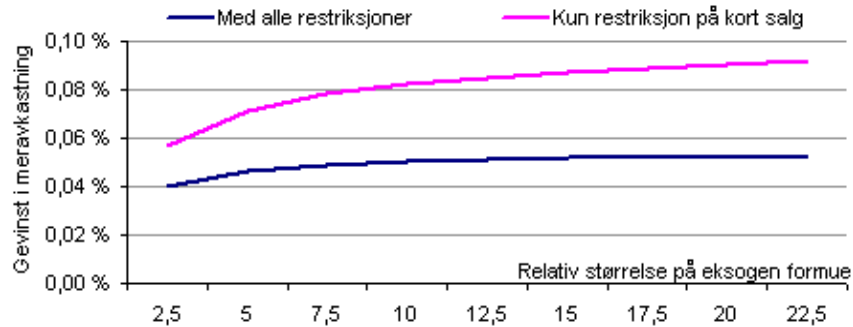
11.2.1 Gevinst av å ta hensyn til eksogen formue

Vi finner forventet avkastningsrate ved å ta hensyn til eksogen formue for samme totalvarians som investering i den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, $\hat{\sigma}_x^2$, gjennom et tilsvarende maksimeringsproblem som (??), men legger til de resterende bibetingelsene. Resultatet av maksimeringsproblemet blir $\mu(\hat{\sigma}_x^2(\mu), x_E)$. Gevinsten en oppnår av å ta hensyn til eksogen formue er: $\mu(\hat{\sigma}_x^2(\mu), x_E) - \mu = \mu(\hat{\sigma}_x^2(0,004), x_E) - 0,004$.

I figur 11.1 kan vi se den gevinsten en kan oppnå i økt forventet avkastning av å ta hensyn til eksogen formue for ulike størrelser på x_E , samt med og uten øvre

skranke på investeringsandeler i enkeltaksjer og skranke på total andel investert i obligasjoner, $\mathbf{a}(\mu(\hat{\sigma}_x^2, x_E))$ og $\mathbf{a}'(\mu(\hat{\sigma}_x^2, x_E))$.

Uten restriksjonene får vi en gevinst i økt forventet avkastning til verdipapirinvesteringene ved å investere i $\mathbf{a}'(\mu(\hat{\sigma}_x^2, 7, 5))$ tilsvarende 0,078% per måned, mens gevinsten ved å investere i $\mathbf{a}(\mu(\hat{\sigma}_x^2, 7, 5))$ er 0,049% pr måned, hvor den siste er den mest relevante. På årlig basis gir dette en gevinst på 0,59 % ved å ta hensyn til eksogen formue, uten å øke risikoen til Norges totalformue.



Figur 11.1: Gevinst i meravkastning ved å investere i $\mathbf{a}(\mu(\hat{\sigma}_x^2, x_E))$ fremfor $\hat{\mathbf{a}}(0, 004)$.

For å sette resultatet i perspektiv kan det nevnes at 0,60 % i årlig meravkastning tilsvarer 15 milliarder kroner, når fondets markedsverdi er 3000 milliarder.

Uten restriksjoner hadde vi et tilnærmet lineært forhold mellom gevinsten i økt forventet avkastning av å ta hensyn til eksogen formue og den relative størrelsen på den eksogene formuen, x_E . Dette er ikke lenger tilfellet, og kommer av at valgmulighetene er redusert. Med de ekstra sidevilkårene kan ikke investeringsandelene endre seg fritt, og dermed er gevinsten stigende, men økningen er avtagende.

Kapittel 12

Oppsummering og avsluttende kommentarer

Under ulike forutsetninger har vi i denne oppgaven funnet gevinsten man kan oppnå i økt forventet avkastning ved å endre investeringer fra dagens referanseportefølje, til en optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue. Videre har vi funnet gevinsten av å ta hensyn til eksogen formue i valg av utenlandsportefølje, fremfor å investere i en optimal portefølje uten hensyn til den eksogene formuen.

I kapittel 11 fant vi den optimale porteføljen med og uten hensyn til eksogen formue under en rekke restriksjoner. Gevinsten av å investere i en optimal portefølje uten hensyn til eksogen formue fremfor dagens referanseportefølje var i dette tilfellet 0,15 % årlig. Det ble presisert at gevinsten trolig var overdrevet grunnet at vi optimerer etter at data er kjent, og i tillegg at den optimale porteføljen hadde en lavere andel i obligasjoner enn referanseporteføljen. Gevinsten i økt forventet avkastning til verdipapirinvesteringene av å ta hensyn til eksogen formue, fremfor investering i den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, var i tilfellet med alle restriksjoner på 0,60% årlig.

I kapittel 2 gjorde vi oss kjent med at Finansdepartementet vurderer en omlegging av investeringsstrategien til fondet som gjør allokeringen mer lik verdensmarkedsporteføljen. I følge resultatene i denne oppgaven vil dette trolig gi en årlig forventet meravkastning som er en god del lavere enn 0,15%.

Dersom en omlegging av investeringsstrategien til verdensmarkedsporteføljen gir en årlig meravkastning tilsvarende halvparten gevinsten i den ex-post optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, så gir denne investeringsstrategien en forventet meravkastning på 0,075% årlig.

Gevinsten av å gå fra den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue, og til en optimal portefølje som tar hensyn til eksogen formue er 0,6% årlig. Det er også mulig finne gevinsten av å investere i den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue fremfor referanseporteføljen direkte, gjennom samme numeriske analyse som i tilfellet med og uten hensyn til eksogen formue. Grunnet at gevinstene er overdrevet som følge av ex-ante/ex-post resonnementet, har jeg valgt å fokusere på gevinsten en får fra å investere i den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue fremfor den uten. Med størrelsen på den eksogene formuen relativt til SPU, $x_E = 7,5$, får en en gevinst av å investere i den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue fremfor referanseporteføljen på 0,73%, men denne

er altså trolig overdrevet.

Dersom gevinsten var additiv, det vil si at gevinsten av å investere i den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue fremfor referanseporteføljen var gitt ved gevinsten av å investere i den optimale porteføljen uten hensyn til eksogen formue fremfor referanseporteføljen pluss gevinsten av å investere i den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue fremfor den uten, vil det gi en årlig meravkastning på 0,675 % ved gå fra referanseporteføljen til den optimale porteføljen med hensyn til eksogen formue. Gevinsten er for øvrig ikke additiv. I følge vår analyse kan en fastslå at gevinsten i meravkastning til verdipapirinvesteringene av å ta hensyn til eksogen formue er mellom 0,60 % - 0,70 %, for samme totalrisiko som investering i referanseporteføljen til SPU. Når markedsverdien til fondet er 3000 milliarder kroner, tilsvarer dette 18 - 21 milliarder kroner i meravkastning årlig.

Ved å tillate at referanseporteføljen har enkelte korte posisjoner i sektorer og regioner hvor teorien antyder det oppnår vi en enda høyere meravkastning av å ta hensyn til eksogen formue. Dette vet vi fra kapittel 10, som gav en mye høyere gevinst i økt forventet avkastningsrate av å ta hensyn til eksogen formue, enn gevinsten i tilfellet med alle restriksjonene.

Dersom den aktive forvaltningen i SPU bidrar til en årlig meravkastning på 0,25% årlig (Enge, 2010, s. 8), vil SPU oppnå en mye høyere forventet meravkastning til fondet ved å investere optimalt med hensyn til den resterende innenlandsformuen enn å drive med aktiv forvaltning.

12.1 Videre utvikling og forslag til endringer

Dersom en porteføljestrategi hvor man tar hensyn til eksogen formue skal anvendes i SPU kreves det videre forskning, men noen konklusjoner kan vi trekke fra denne analysen.

Trolig bør man operasjonalisere den eksogene formuen mer presist for å finne nøyaktig hvilke andeler en skal investere i hver av regionene og sektorene. I kapittel 6 anslo vi verdien av den eksogene formuen til å være 22 ganger større enn verdien av SPU. Videre antok vi at omtrent 35 % av svingningene i den eksogene formuen hang sammen med svingningene på Oslo Børs og brukte dermed månedsdata fra Oslo Børs hovedindeks som datagrunnlag på den eksogene formuen. Tilnærmingen til den eksogene formuen vil være mer presis om en eksempelvis bruker avkastningsraten og variansen til nasjonalformuen utenom SPU som den eksogene formuen, og finner den optimale porteføljen av utenlandsinvesteringer i forhold til dette. Dersom allikevel Oslo Børs skal brukes som den eksogene formuen, bør en ta høyde for at andelen de ulike sektorene utgjør i hovedindeksen ikke nødvendigvis tilsvarer sektorens andeler i den faktiske eksogene formuen. Som eksempel kan en trekke frem helse- og kraftleveransesektoren. Disse sektorene utgjør omlag 1 % av Oslo Børs hovedindeks, men sektorene er større i praksis. En måte man kan ta høyde for dette på er eksempelvis gjennom å bruke sektorindekser fra Oslo Børs, og aggregere opp de ulike sektorene på en måte som gjør at porteføljen en bruker som datagrunnlag i større grad gjenspeiler sektorene i den eksogene formuen.

Videre bør en muligens bruke en lengre tidsperiode, med lavere frekvens, for

å estimere kovarianser og forventede avkastningsrater til de utenlandske investeringsmulighetene. Vi har brukt månedsdata over 9 år, mens investeringshorisonten til SPU er mye lengre enn dette. Det er derfor ikke klart hvor relevant usikkerheten vi måler er for SPU. Begrensninger på tilgangen til data har gjort at dette ikke var gjennomførbart i denne oppgaven. Tilfeldigheter i den valgte tidsperioden kan ha ført til at kovarianser og forventede avkastningsrater ikke er korrekt på lengre sikt. Som eksempel kan en trekke frem den høye korrelasjonen mellom Asia og innenlandsformuen. Over en lengre tidsperiode vil man trolig ikke se en så sterk samvariasjon mellom disse. Videre vil antakeligvis ikke den høye avkastningsraten i bank- og finanssektoren holde i fremtiden, og en investeringsandel på 0,4 av SPU vil i så fall ikke være optimal.

I analysen brukte vi kun to obligasjonsindekser. Dersom en bruker et større utvalg av obligasjoner, fordelt over ulike regioner og typer obligasjoner, vil vi få et bedre sammenligningsgrunnlag med referanseporteføljen.

Sektorinndelingen vi har benyttet i denne oppgaven er delt inn i 10 sektorer. En mer spesifikk sektorinndeling vil gi en bedre indikasjon på hvilke type selskaper en bør investere i for å minimere risikoen til Norge. Konsumsektoren består av både husholdningsvarer, elektronikk, klær og bilindustri, og er dermed en svært grov sektor. Det kan tenkes at Norge bør investere en relativt høy andel i bilindustri, som forventes å være lavt eller negativt korrelert med oljeprisene, men gjerne ikke like store andeler i den resterende konsumsektoren. En mer spesifikk sektorinndeling vil trolig øke gevinsten en kan oppnå av å ta hensyn til eksogen formue.

Til tross for svakheter med modellen, kan vi trekke noen konklusjoner fra denne analysen. For det første bør en ikke holde positive andeler i Europa, eller hvertfall redusere andelen SPU holder i denne regionen. Som nevnt vurderes dette per i dag, og det ser ut til at vi vil se endringer i denne retningen om kort tid. Videre har vi funnet at fondet ikke bør investere i olje- og gassektoren. Olje- og gassektoren i datagrunnlaget er en grov sektor, som inkluderer både leveranse, produksjon og raffinering av olje og gass. I Norge består petroleumssektoren hovedsaklig av utvinning av olje og gass, og SPU bør hvertfall holde seg unna investering i selskaper som driver med tilsvarende virksomhet.

Tillegg A

Korrelasjon og kovarians

A.1 Korrelasjonsmatrisen til aksjene

Dette tillegget består av delmatriser med korrelasjonskoeffisienten mellom hver sektor i hver region.

USA →										
USA ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Ind	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	1	0,73	0,78	0,71	0,59	0,86	0,73	0,72	0,56	0,57
Kon		1	0,80	0,80	0,73	0,82	0,54	0,65	0,54	0,63
Tjen			1	0,82	0,68	0,89	0,47	0,81	0,66	0,51
Bank				1	0,66	0,84	0,42	0,66	0,54	0,49
Hel					1	0,69	0,42	0,64	0,55	0,56
Indu						1	0,61	0,79	0,66	0,57
Olje							1	0,50	0,46	0,65
Tek								1	0,72	0,51
Tel									1	0,53
Kra										1

Eur →										
USA ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,88	0,77	0,74	0,78	0,59	0,84	0,75	0,71	0,51	0,72
Kon	0,73	0,80	0,76	0,79	0,60	0,78	0,61	0,64	0,58	0,71
Tjen	0,71	0,76	0,77	0,75	0,55	0,78	0,52	0,77	0,55	0,64
B&F	0,67	0,74	0,70	0,82	0,56	0,75	0,51	0,72	0,52	0,67
Hel	0,61	0,65	0,65	0,65	0,64	0,65	0,49	0,65	0,59	0,63
Indu	0,81	0,81	0,80	0,82	0,61	0,86	0,63	0,79	0,57	0,71
Olje	0,70	0,60	0,59	0,57	0,51	0,66	0,84	0,51	0,38	0,62
Tek	0,66	0,71	0,72	0,71	0,52	0,70	0,51	0,83	0,63	0,57
Tel	0,60	0,56	0,70	0,60	0,53	0,59	0,50	0,69	0,65	0,53
Kra	0,60	0,57	0,65	0,62	0,56	0,63	0,66	0,50	0,49	0,70

Jap →										
USA ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,59	0,66	0,27	0,34	0,33	0,63	0,42	0,64	0,30	-0,04
Kon	0,49	0,61	0,37	0,41	0,43	0,54	0,31	0,62	0,35	0,03
Tjen	0,44	0,55	0,24	0,31	0,27	0,51	0,24	0,61	0,29	-0,08
Bank	0,47	0,57	0,32	0,44	0,38	0,51	0,23	0,56	0,30	0,00
Hel	0,35	0,44	0,23	0,31	0,38	0,40	0,24	0,50	0,30	0,07
Indu	0,55	0,65	0,32	0,38	0,38	0,61	0,31	0,67	0,35	-0,02
Olje	0,52	0,56	0,21	0,30	0,37	0,59	0,54	0,53	0,27	-0,08
Tel	0,36	0,48	0,12	0,16	0,16	0,43	0,18	0,54	0,31	-0,15
Tel	0,27	0,32	0,06	0,09	0,23	0,29	0,17	0,37	0,30	0,02
Kra	0,43	0,50	0,30	0,32	0,48	0,48	0,37	0,50	0,38	0,18

Asia →										
USA ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,86	0,80	0,80	0,79	0,70	0,78	0,75	0,71	0,65	0,69
Kon	0,60	0,70	0,75	0,75	0,58	0,70	0,53	0,62	0,66	0,67
Tjen	0,58	0,68	0,74	0,69	0,67	0,67	0,51	0,69	0,57	0,59
Bank	0,56	0,68	0,70	0,75	0,60	0,68	0,49	0,62	0,59	0,61
Hel	0,51	0,56	0,64	0,61	0,55	0,60	0,47	0,56	0,57	0,53
Indu	0,68	0,74	0,78	0,75	0,72	0,75	0,60	0,68	0,66	0,68
Olje	0,73	0,58	0,63	0,62	0,59	0,62	0,76	0,51	0,57	0,58
Tek	0,61	0,66	0,72	0,66	0,63	0,68	0,52	0,73	0,59	0,53
Tel	0,46	0,46	0,58	0,51	0,56	0,47	0,39	0,47	0,54	0,46
Kra	0,51	0,54	0,61	0,61	0,59	0,54	0,54	0,42	0,63	0,58

Aus →										
USA ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,83	0,69	0,75	0,72	0,64	0,77	0,72	0,61	0,48	0,61
Kon	0,56	0,68	0,71	0,73	0,52	0,74	0,49	0,49	0,46	0,55
Tjen	0,55	0,66	0,73	0,71	0,61	0,73	0,50	0,56	0,40	0,54
Bank	0,50	0,68	0,67	0,78	0,55	0,79	0,47	0,55	0,40	0,61
Hel	0,47	0,50	0,62	0,61	0,50	0,63	0,45	0,54	0,38	0,47
Indu	0,64	0,68	0,75	0,71	0,66	0,78	0,56	0,59	0,46	0,57
Olje	0,74	0,53	0,58	0,55	0,54	0,59	0,74	0,46	0,47	0,52
Tek	0,56	0,55	0,71	0,61	0,56	0,60	0,49	0,56	0,41	0,46
Tel	0,44	0,42	0,59	0,50	0,52	0,47	0,42	0,45	0,29	0,47
Kra	0,53	0,55	0,59	0,61	0,56	0,61	0,56	0,39	0,44	0,48

Eur →										
Eur ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	1	0,86	0,86	0,86	0,71	0,92	0,82	0,72	0,61	0,82
Kon		1	0,86	0,87	0,72	0,88	0,73	0,75	0,61	0,79
Tjen			1	0,87	0,76	0,91	0,75	0,83	0,75	0,84
Bank				1	0,72	0,91	0,74	0,81	0,69	0,85
Hel					1	0,71	0,67	0,65	0,63	0,75
Indu						1	0,79	0,78	0,65	0,87
Olje							1	0,60	0,53	0,81
Tek								1	0,70	0,69
Tel									1	0,68
Kra										1

Jap →										
Eur ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,58	0,64	0,30	0,33	0,42	0,62	0,44	0,64	0,37	0,04
Kon	0,53	0,64	0,31	0,35	0,37	0,57	0,34	0,61	0,36	-0,01
Tjen	0,49	0,56	0,34	0,32	0,42	0,55	0,36	0,61	0,44	0,10
Bank	0,53	0,62	0,32	0,37	0,43	0,56	0,32	0,61	0,36	0,07
Hel	0,37	0,47	0,27	0,30	0,45	0,41	0,29	0,46	0,23	0,16
Indu	0,63	0,71	0,39	0,41	0,46	0,68	0,45	0,71	0,40	0,06
Olje	0,61	0,64	0,25	0,37	0,44	0,63	0,58	0,58	0,29	0,01
Tek	0,45	0,48	0,22	0,22	0,35	0,48	0,24	0,55	0,37	0,06
Tel	0,22	0,30	0,14	0,15	0,35	0,27	0,12	0,37	0,37	0,14
Kra	0,53	0,58	0,31	0,38	0,51	0,55	0,38	0,57	0,34	0,13

Asia →										
Eur ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,80	0,79	0,82	0,80	0,73	0,77	0,77	0,67	0,72	0,72
Kon	0,72	0,79	0,85	0,82	0,68	0,80	0,70	0,71	0,74	0,68
Tjen	0,67	0,72	0,83	0,76	0,72	0,75	0,64	0,67	0,76	0,66
Bank	0,68	0,77	0,82	0,82	0,68	0,77	0,65	0,65	0,69	0,70
Hel	0,53	0,57	0,62	0,64	0,53	0,57	0,56	0,50	0,58	0,52
Indu	0,77	0,83	0,87	0,84	0,76	0,83	0,75	0,71	0,75	0,79
Olje	0,80	0,69	0,73	0,73	0,68	0,70	0,82	0,57	0,64	0,67
Tek	0,65	0,66	0,74	0,69	0,63	0,71	0,57	0,68	0,65	0,58
Tel	0,52	0,51	0,66	0,59	0,51	0,56	0,46	0,45	0,64	0,52
Kra	0,66	0,68	0,75	0,75	0,66	0,70	0,69	0,54	0,69	0,67

Aus →										
Eur ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,78	0,73	0,77	0,72	0,66	0,76	0,74	0,58	0,53	0,64
Kon	0,67	0,75	0,82	0,77	0,61	0,80	0,62	0,60	0,55	0,60
Tjen	0,64	0,68	0,81	0,72	0,66	0,75	0,61	0,60	0,53	0,58
Bank	0,65	0,75	0,79	0,80	0,62	0,82	0,62	0,57	0,47	0,67
Hel	0,53	0,50	0,59	0,61	0,46	0,60	0,53	0,49	0,33	0,49
Indu	0,74	0,78	0,83	0,78	0,68	0,84	0,71	0,59	0,57	0,69
Olje	0,81	0,68	0,69	0,70	0,63	0,72	0,82	0,52	0,50	0,66
Tek	0,61	0,57	0,72	0,65	0,56	0,68	0,53	0,53	0,43	0,51
Tel	0,51	0,51	0,69	0,59	0,47	0,59	0,48	0,44	0,45	0,46
Kra	0,64	0,72	0,73	0,76	0,61	0,79	0,68	0,51	0,48	0,66

Jap →										
Jap ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Ind	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	1	0,83	0,64	0,73	0,57	0,93	0,70	0,80	0,46	0,09
Kon		1	0,59	0,69	0,60	0,87	0,58	0,82	0,41	0,04
Tjen			1	0,78	0,59	0,70	0,50	0,67	0,54	0,39
Bank				1	0,55	0,77	0,56	0,65	0,46	0,18
Hel					1	0,59	0,49	0,53	0,56	0,49
Indu						1	0,73	0,87	0,48	0,05
Olje							1	0,55	0,36	0,10
Tek								1	0,49	0,05
Tel									1	0,43
Kra										1

Asia →										
Jap ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,65	0,64	0,59	0,65	0,55	0,64	0,60	0,54	0,50	0,61
Kon	0,66	0,70	0,67	0,70	0,64	0,69	0,64	0,60	0,59	0,71
Tjen	0,24	0,31	0,31	0,34	0,31	0,30	0,25	0,27	0,35	0,29
Bank	0,38	0,39	0,37	0,45	0,38	0,40	0,40	0,30	0,38	0,39
Hel	0,33	0,32	0,37	0,41	0,38	0,32	0,36	0,16	0,41	0,43
Indu	0,68	0,67	0,64	0,69	0,61	0,69	0,68	0,60	0,59	0,65
Olje	0,57	0,43	0,42	0,47	0,48	0,47	0,65	0,31	0,38	0,47
Tek	0,60	0,66	0,63	0,64	0,56	0,66	0,56	0,67	0,59	0,57
Tel	0,24	0,27	0,36	0,28	0,26	0,31	0,23	0,23	0,34	0,22
Kra	-0,09	-0,15	-0,05	-0,07	0,01	-0,15	-0,11	-0,21	0,04	-0,06

Asia →										
Asia ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	1	0,85	0,85	0,85	0,75	0,88	0,89	0,73	0,70	0,75
Kon		1	0,92	0,94	0,77	0,94	0,78	0,83	0,77	0,83
Tjen			1	0,93	0,83	0,92	0,80	0,76	0,83	0,83
Bank				1	0,80	0,94	0,81	0,79	0,81	0,85
Hel					1	0,77	0,74	0,62	0,73	0,77
Indu						1	0,82	0,85	0,80	0,82
Olje							1	0,64	0,72	0,74
Tek								1	0,65	0,63
Tel									1	0,74
Kra										1

	Aus	→								
Asia ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,96	0,72	0,79	0,74	0,68	0,81	0,82	0,63	0,59	0,68
Kon	0,76	0,81	0,81	0,79	0,66	0,82	0,68	0,58	0,57	0,69
Tjen	0,79	0,84	0,95	0,82	0,74	0,86	0,72	0,65	0,62	0,69
Bank	0,79	0,82	0,84	0,88	0,70	0,89	0,72	0,64	0,59	0,75
Hel	0,74	0,77	0,82	0,74	0,96	0,80	0,71	0,64	0,51	0,68
Indu	0,78	0,76	0,83	0,78	0,66	0,85	0,71	0,62	0,59	0,67
Olje	0,89	0,72	0,75	0,71	0,67	0,76	0,92	0,61	0,58	0,65
Tek	0,63	0,59	0,68	0,65	0,52	0,66	0,58	0,56	0,45	0,51
Tel	0,67	0,66	0,77	0,68	0,66	0,71	0,60	0,57	0,63	0,56
Kra	0,72	0,76	0,76	0,76	0,67	0,78	0,68	0,49	0,59	0,78

Aus →										
Aus ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	1	0,68	0,76	0,72	0,69	0,78	0,86	0,62	0,55	0,67
Kon		1	0,84	0,82	0,74	0,85	0,70	0,58	0,60	0,76
Tjen			1	0,82	0,76	0,85	0,71	0,66	0,59	0,67
Bank				1	0,69	0,91	0,72	0,62	0,50	0,80
Hel					1	0,74	0,68	0,57	0,48	0,63
Indu						1	0,76	0,66	0,51	0,77
Olje							1	0,58	0,49	0,66
Tek								1	0,41	0,49
Tel									1	0,49
Kra										1

A.2 Kovarianmatrisen, Σ

I det følgende har vi kovariansmatrisen, Σ , mellom de utenlandske investeringsmulighetene. Av praktiske årsaker er kovariansmatrisen delt inn i delmatriser. I praksis er dette en 52×52 matrise.

USA →										
USA↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,0050	0,0019	0,0027	0,0032	0,0016	0,0035	0,0032	0,0036	0,0035	0,0018
Kon		0,0014	0,0015	0,0020	0,0011	0,0018	0,0013	0,0017	0,0013	0,0011
Tjen			0,0025	0,0027	0,0013	0,0025	0,0015	0,0029	0,0021	0,0011
B&F				0,0043	0,0017	0,0031	0,0017	0,0030	0,0023	0,0014
Hel					0,0015	0,0015	0,0010	0,0017	0,0014	0,0010
Indu						0,0033	0,0021	0,0032	0,0024	0,0014
Olje							0,0038	0,0022	0,0018	0,0018
Tek								0,0050	0,0032	0,0016
Tel									0,0041	0,0015
Kra										0,0020

Eur →										
USA↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,0047	0,0033	0,0033	0,0050	0,0023	0,0043	0,0033	0,0047	0,0025	0,0034
Kon	0,0021	0,0019	0,0018	0,0027	0,0013	0,0022	0,0015	0,0023	0,0015	0,0018
Tjen	0,0027	0,0023	0,0025	0,0035	0,0015	0,0029	0,0016	0,0036	0,0019	0,0022
B&F	0,0034	0,0030	0,0029	0,0049	0,0020	0,0036	0,0021	0,0044	0,0023	0,0030
Hel	0,0018	0,0015	0,0016	0,0023	0,0014	0,0019	0,0012	0,0024	0,0016	0,0017
Indu	0,0036	0,0028	0,0029	0,0043	0,0020	0,0036	0,0023	0,0042	0,0022	0,0027
Olje	0,0033	0,0023	0,0023	0,0032	0,0017	0,0030	0,0033	0,0030	0,0016	0,0026
Tek	0,0036	0,0031	0,0032	0,0046	0,0020	0,0036	0,0023	0,0055	0,0030	0,0027
Tel	0,0030	0,0022	0,0029	0,0036	0,0019	0,0028	0,0020	0,0042	0,0028	0,0023
Kra	0,0020	0,0016	0,0028	0,0025	0,0014	0,0020	0,0018	0,0021	0,0016	0,0021

Jap →										
USA↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,0027	0,0021	0,0010	0,0018	0,0010	0,0027	0,0023	0,0028	0,0013	-0,0001
Kon	0,0012	0,0010	0,0008	0,0012	0,0007	0,0012	0,0009	0,0015	0,0008	0
Tjen	0,0014	0,0012	0,0007	0,0012	0,0006	0,0015	0,0009	0,0019	0,0009	-0,0002
Bank	0,0020	0,0017	0,0012	0,0021	0,0011	0,0020	0,0012	0,0023	0,0013	0
Hel	0,0009	0,0008	0,0005	0,0009	0,0006	0,0009	0,0007	0,0012	0,0007	0,0001
Indu	0,0020	0,0016	0,0010	0,0016	0,0010	0,0021	0,0014	0,0024	0,0013	0
Olje	0,0021	0,0016	0,0007	0,0014	0,0010	0,0022	0,0026	0,0020	0,0010	-0,0002
Tel	0,0016	0,0015	0,0005	0,0008	0,0005	0,0018	0,0010	0,0024	0,0014	-0,0005
Tel	0,0011	0,0009	0,0002	0,0004	0,0007	0,0011	0,0008	0,0015	0,0012	0,0001
Kra	0,0012	0,0010	0,0007	0,0010	0,0009	0,0013	0,0013	0,0014	0,0011	0,0004

Jap →										
Eur ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,0029	0,0022	0,0013	0,0019	0,0014	0,0029	0,0026	0,0030	0,0018	0,0001
Kon	0,0021	0,0018	0,0011	0,0016	0,0010	0,0021	0,0016	0,0023	0,0014	0
Tjen	0,0020	0,0016	0,0012	0,0016	0,0012	0,0021	0,0018	0,0024	0,0018	0,0003
Bank	0,0032	0,0025	0,0016	0,0025	0,0018	0,0031	0,0023	0,0035	0,0021	0,0003
Hel	0,0014	0,0012	0,0008	0,0013	0,0011	0,0014	0,0012	0,0016	0,0008	0,0001
Indu	0,0030	0,0023	0,0016	0,0023	0,0015	0,0030	0,0026	0,0033	0,019	0,0002
Olje	0,0025	0,0018	0,0009	0,0017	0,0012	0,0024	0,0028	0,0023	0,0012	0
Tek	0,0027	0,0020	0,0011	0,0016	0,0015	0,0027	0,0017	0,0032	0,0022	0,0003
Tel	0,0010	0,0009	0,0005	0,0008	0,0010	0,0011	0,0006	0,0015	0,0016	0,0004
Kra	0,0023	0,0018	0,0011	0,0019	0,0015	0,0022	0,0020	0,0024	0,0015	0,0004

Asia →										
Eur ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,0047	0,0035	0,0037	0,0034	0,0031	0,0041	0,0045	0,0041	0,0027	0,0021
Kon	0,0034	0,0029	0,0030	0,0028	0,0023	0,0034	0,0033	0,0034	0,0022	0,0015
Tjen	0,0033	0,0027	0,0031	0,0027	0,0025	0,0033	0,0031	0,0034	0,0024	0,0016
Bank	0,0049	0,0042	0,0044	0,0041	0,0034	0,0049	0,0046	0,0048	0,0031	0,0024
Hel	0,0023	0,0019	0,0020	0,0020	0,0016	0,0022	0,0024	0,0022	0,0016	0,0011
Indu	0,0044	0,0036	0,0037	0,0034	0,0031	0,0042	0,0042	0,0042	0,0027	0,0022
Olje	0,0039	0,0025	0,0027	0,0025	0,0023	0,0030	0,0040	0,0028	0,0020	0,0016
Tek	0,0047	0,0037	0,0040	0,0036	0,0032	0,0046	0,0041	0,0050	0,0030	0,0020
Tel	0,0028	0,0020	0,0026	0,0022	0,0019	0,0026	0,0024	0,0024	0,0021	0,0013
Kra	0,0035	0,0027	0,0030	0,0028	0,0025	0,0033	0,0035	0,0029	0,0023	0,0017

Aus →										
Eur ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,0053	0,0032	0,0040	0,0038	0,0031	0,0044	0,0047	0,0055	0,0028	0,0032
Kon	0,0037	0,0027	0,0034	0,0033	0,0023	0,0037	0,0031	0,0046	0,0023	0,0024
Tjen	0,0036	0,0025	0,0035	0,0032	0,0026	0,0036	0,0032	0,0048	0,0023	0,0024
Bank	0,0053	0,0040	0,0050	0,0051	0,0035	0,0057	0,0047	0,0065	0,0030	0,0039
Hel	0,0026	0,0016	0,0022	0,0024	0,0016	0,0025	0,0025	0,0034	0,0013	0,0017
Indu	0,0049	0,0033	0,0041	0,0040	0,0031	0,0046	0,0043	0,0055	0,0028	0,0033
Olje	0,0046	0,0025	0,0030	0,0031	0,0024	0,0034	0,0043	0,0041	0,0022	0,0027
Tek	0,0051	0,0031	0,0046	0,0043	0,0032	0,0048	0,0041	0,0063	0,0028	0,0031
Tel	0,0031	0,0020	0,0032	0,0028	0,0020	0,0030	0,0027	0,0037	0,0021	0,0020
Kra	0,0038	0,0028	0,0034	0,0036	0,0025	0,0040	0,0038	0,0043	0,0022	0,0028

Jap →										
Jap ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Ind	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,0042	0,0024	0,0023	0,0035	0,0016	0,0036	0,0035	0,0032	0,0019	0,0003
Kon		0,0020	0,0014	0,0023	0,0012	0,0024	0,0020	0,0023	0,0012	0,0001
Tjen			0,0030	0,0032	0,0014	0,0023	0,0022	0,0023	0,0019	0,0010
Bank				0,0056	0,0018	0,0035	0,0033	0,0030	0,0022	0,0006
Hel					0,0020	0,0016	0,0017	0,0015	0,0016	0,0010
Indu						0,0036	0,0034	0,0033	0,0018	0,0001
Olje							0,0061	0,0026	0,0018	0,0004
Tek								0,0038	0,0019	0,0002
Tel									0,0041	0,0013
Kra										0,0023

Asia →										
Jap ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,0033	0,0024	0,0022	0,0023	0,0019	0,0028	0,0030	0,0028	0,0016	0,0015
Kon	0,0023	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0021	0,0022	0,0021	0,0013	0,0012
Tjen	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0011	0,0010	0,0012	0,0009	0,0006
Bank	0,0022	0,0017	0,0016	0,0019	0,0016	0,0021	0,0023	0,0017	0,0014	0,0011
Hel	0,0011	0,0008	0,0010	0,0010	0,0009	0,0010	0,0012	0,0006	0,0009	0,0007
Indu	0,0032	0,0024	0,0023	0,0023	0,0020	0,0029	0,0031	0,0029	0,0017	0,0015
Olje	0,0034	0,0019	0,0019	0,0020	0,0020	0,0025	0,0039	0,0019	0,015	0,0013
Tek	0,0029	0,0024	0,0023	0,0022	0,0019	0,0028	0,0027	0,0033	0,0018	0,0013
Tel	0,0012	0,0010	0,0013	0,0010	0,0009	0,0013	0,0011	0,0012	0,0011	0,0005
Kra	-0,0003	-0,0004	-0,0001	-0,0002	0	-0,0005	-0,0004	-0,0008	0,0001	-0,0001

Aus →										
Jap ↓	Mat	Kon	Tjen	Bank	Hel	Indu	Olje	Tek	Tel	Kra
Mat	0,0036	0,0019	0,0022	0,0024	0,0020	0,0030	0,0029	0,0031	0,0013	0,0022
Kon	0,0025	0,0016	0,0019	0,0019	0,0016	0,0023	0,0022	0,0025	0,0012	0,0017
Tjen	0,0013	0,0009	0,0011	0,0012	0,0010	0,0015	0,0011	0,0017	0,0003	0,0007
Bank	0,0026	0,0017	0,0017	0,0022	0,0016	0,0028	0,0022	0,0035	0,0011	0,0017
Hel	0,0015	0,0010	0,0011	0,0012	0,0010	0,0016	0,0014	0,0015	0,0006	0,0010
Indu	0,0037	0,0020	0,0024	0,0025	0,0020	0,0031	0,0031	0,0035	0,0016	0,0022
Olje	0,0042	0,0019	0,0021	0,0024	0,0022	0,0030	0,0041	0,0035	0,0012	0,0023
Tek	0,0031	0,0019	0,0024	0,0024	0,0019	0,0030	0,0028	0,0035	0,0015	0,0018
Tel	0,0012	0,0010	0,0016	0,0009	0,0010	0,0015	0,0011	0,0018	0,0008	0,0005
Kra	-0,0002	0,0001	0	-0,0001	0,0002	0,0001	-0,0003	0	-0,0003	0

$v(\tilde{r}_{BGA}, \tilde{r}_{sr})$	USA	Europa	Japan	Asia	Aus
Mat	0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
Kon	0,0001	0,0001	0	0,0002	0,0001
Tjen	0	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
Bank	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001	0,0002
Hel	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001
Indu	0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
Olje	0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
Tek	0	0,0001	0	0	0
Tel	0	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
Kra	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001

$v(\tilde{r}_{BGIL}, \tilde{r}_{sr})$	USA	Europa	Japan	Asia	Aus
Mat	0,0007	0,0008	0,0006	0,0010	0,0011
Kon	0,0004	0,0006	0,0004	0,0007	0,0007
Tjen	0,0002	0,0006	0,0004	0,0007	0,0008
Bank	0,0005	0,0011	0,0007	0,0007	0,0009
Hel	0,0003	0,0006	0,0006	0,0005	0,0004
Indu	0,0004	0,0008	0,0006	0,0008	0,0011
Olje	0,0005	0,0008	0,0008	0,0010	0,0010
Tek	0,0002	0,0007	0,0005	0,0004	0,0011
Tel	0,0001	0,0006	0,0002	0,0005	0,0005
Kra	0,0005	0,0010	0,0003	0,0005	0,0007

$v(\tilde{r}_{BGA}, \tilde{r}_{BGIL})$	BGA	BGIL
BGA	0,0001	0,0002
BGIL		0,0007

A.3 Kovariansvektoren, c'_E

Kovariansvektoren, c'_E , mellom innenlandsformuen og de utenlandske investeringsmulighetene er presentert i tabellene nedenfor for aksjer og obligasjoner henholdsvis. Kovariansvektoren er en kollonnevektor når den brukes i beregning, men stilles for ordensskyld opp som tabeller her.

$v(\tilde{r}_E, \tilde{r}_{sr})$	USA	Eur	Japan	Asia	Aus
Materialer	0,0054	0,0060	0,0034	0,0059	0,0066
Konsumgoder	0,0023	0,0043	0,0026	0,0041	0,0037
Tjenester	0,0029	0,0046	0,0013	0,0043	0,0047
Bank og finans	0,0034	0,0064	0,0024	0,0040	0,0046
Helse	0,0020	0,0033	0,0015	0,0036	0,0037
Industri	0,0037	0,0056	0,0035	0,0050	0,0051
Olje og gass	0,0043	0,0049	0,0036	0,0056	0,0058
Teknologi	0,0041	0,0059	0,0034	0,0049	0,0065
Telekom	0,0030	0,0034	0,0014	0,0032	0,0035
Kraftleveranse	0,0025	0,0046	-0,0002	0,0025	0,0037

	BGA	BGIL
$v(\tilde{r}_E, \tilde{r}_o)$	0,0001	0,0010

Tillegg B

Optimale porteføljer med hensyn til eksogen formue

I dette tillegget finner vi de optimale porteføljene uten hensyn til eksogen formue, og uten restriksjoner på kort salg for $x_E = 5$ og $x_E = 10$. Ettersom porteføljen med eksogen formue endrer seg lite når vi legger restriksjoner på kort salg og investeringsandeler er har vi ikke inkludert allokeringer for andre størrelser på x_E enn 7,5 i denne oppgaven.

Optimal portefølje av aksjer for $x_E = 5$, det vil si: $\mathbf{a}(0, 0040, 5)$:

$\mathbf{a}(\mu, x_E)$	USA	Europa	Japan	Asia	Australia	$\sum_{r=1}^5 a_{rs}$
Materialer	-1,16	-1,35	0,51	-2,32	2,68	-1,64
Konsumgoder	0,66	-0,37	-1,66	1,67	0,92	1,21
Tjenester	-1,72	-0,94	-0,32	0,34	0,54	-2,10
Bank og finans	2,96	0,19	-0,72	-1,78	1,96	2,60
Helse	-2,20	1,00	0,28	0,85	-1,11	-1,17
Industri	2,01	-0,67	1,85	-0,68	-1,31	1,21
Olje og gass	0,10	-1,00	-0,20	-0,19	-1,41	-2,71
Teknologi	0,41	-1,34	0,14	0,13	0,18	-0,48
Telekom	-0,11	0,19	0,97	0,61	0	1,67
Kraftleveranse	-2,23	2,77	0,29	-1,44	-0,10	-0,71
$\sum_{s=1}^{10} a_{rs}$	-1,28	-1,52	1,15	-2,88	2,33	-2,13

Optimal portefølje av obligasjoner for $x_E = 5$, det vil si: $\mathbf{a}(0, 0040, 5)$:

$\mathbf{a}(\mu, x_E)$	BGA	BGIL	$\sum a_o$
a_o0	-0,72	3,84	3,13

Optimal portefølje av aksjer for $x_E = 10$, det vil si: $\mathbf{a}(0, 0040, 10)$:

88 TILLEGG B. OPTIMALE PORTEFØLJER MED HENSYN TIL EKSOGEN FORMUE

$a(\mu, x_E)$	USA	Europa	Japan	Asia	Australia	$\sum_{r=1}^5 a_{rs}$
Materialer	-2,38	-2,62	0,98	-4,67	5,37	-3,32
Konsumgoder	1,26	-0,79	-3,27	3,22	1,73	2,14
Tjenester	-3,35	-1,97	-0,62	1,26	0,73	-3,96
Bank og finans	5,57	0,46	-1,39	3,98	4,02	4,67
Helse	-4,46	2,02	0,62	1,55	-2,04	-2,31
Industri	4,07	-1,49	3,44	-1,32	-2,44	2,27
Olje og gass	0,21	-2,14	-0,42	-0,30	-2,89	-5,52
Teknologi	0,68	-2,63	0,32	0,39	0,37	-0,88
Telekom	-0,11	0,30	1,98	1,02	0,06	3,24
Kraftleveranse	-4,49	5,56	0,52	-2,80	-0,16	-1,36
$\sum_{s=1}^{10} a_{rs}$	-3,01	-3,29	2,16	-5,63	4,74	-5,02

Optimal portefølje av obligasjoner for $x_E = 10$, det vil si: $\mathbf{a}(0, 0040, 10)$:

$a(\mu, x_E)$	BGA	BGIL	$\sum a_o$
a_o	-1,61	7,63	6,02

Bibliografi

Arrow, K. J. (1971) *Essays in the Theory of risk Bearing*, Kap. 5. Chicago, Markham Publishing Co.

Barclays Capital (2010), *World Government Inflation-Linked Bond Index* [internett]. Tilgjengelig fra: <<https://ecommerce.barcap.com/indices/index.dxml>> [Nedlastet 20.04.11].

Barclays Capital (2011), *Global Aggregate Bond Index* [internett]. Tilgjengelig fra: <<https://ecommerce.barcap.com/indices/index.dxml>> [Nedlastet 20.04.11].

Beck, R. og Fidora, M. (2008), The Impact of Sovereign Wealth Funds on Global Financial Markets, *Intereconomics*, 43(6), s. 349 -358.

Berk, J., og DeMarzo, P. (2007) *Corporate Finance*. Boston, Pearson Education, Inc.

Black, F. (1993) Estimating Expected Return, *The Financial Analyst Journal*, 49(5) September-oktober, s. 36-38.

Black, F. og Litterman, R. (1992), Global Portfolio Optimization, *Financial Analyst Journal*, 48(5), s 28-43.

Blume, L. og Simon, C. P. (1994) *Mathematics for Economists*. New York, W. W. Norton & Company, Inc.

Brenner, A. J., (2009) World Stock and Bond Markets and Portfolio Diversity, *Asset Allocation Advisor* [internett]. November 2009. Tilgjengelig fra: <http://www.aametrics.com/pdfs/world_stock_and_bond_markets_nov2009.pdf> [Nedlastet 19.05.11].

Caruana, J., og Suwaidi, H. A. H. A. (2008), *Sovereign Wealth Funds: Generally accepted Practices and Principles: Santiago Principles* [internett]. International Working Group of Sovereign Wealth Funds. Tilgjengelig fra: <<http://www.iwg-swf.org/pubs/eng/santiagoprinciples.pdf>> [Nedlastet 28.10.10].

Dow Jones (2011a), *Index data: Historical values* [internett]. Tilgjengelig fra: <<http://www.djindexes.com/mdsidx/index.cfm?event=showtotalMarketIndexData&perf=Historical%20Values>> [Nedlastet 30.01.11].

Dow Jones (2011b), *Invest IQ, Dow Jones Global Index Analysis* [internett]. Tilgjengelig fra: <<http://dowjones.investiq.com/dowjones/index.html>> [Nedlastet 30.01.11].

Dow Jones (2011c) *Dow Jones indices: Overview* [internett]. Tilgjengelig fra: <<http://www.djindexes.com/globalindexes/>> [Nedlastet 01.04.11].

Døskeland (2010), Investeringsstrategien til Sovereign Wealth Funds, *Praktisk økonomi & finans*, 26(2), s. 33 – 41.

Enge, B. O. (2010), Aktiv forvaltning i Statens pensjonsfond utland, *Praktisk Økonomi & Finans*, 26(2), s. 3-10.

Finance Yahoo (2011), *OSEBX Monthly prices* [internett]. Tilgjengelig fra: <<http://finance.yahoo.com/q/hp?s=OSEBX.OL+Historical+Prices>> [Nedlastet 30.01.11].

Finansdepartementet (2008a) *Om forvaltningen av Statens pensjonsfond i 2008*. Meld. St. 20 (2008-2009). Oslo, Det Kongelige Finansdepartement. Kap. 1.1 - 1.3.

Finansdepartementet (2008b) *Nasjonalbudsjettet 2008*, St. Meld. Nr. 1 (2007 – 2008). Oslo, Det Kongelige Finansdepartement. Kap. 5.

Finansdepartementet (2010a) *Forvaltningen av Statens pensjonsfond i 2009*, Meld. St. 10 (2009-2010), Oslo, Det Kongelige Finansdepartement. Kap. 1-3.

Finansdepartementet (2010b) *Statens pensjonsfond, Formelt grunnlag* [internett]. Tilgjengelig fra: <http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/tema/statens_pensjonsfond/formelt-grunnlag-statens-pensjonsfond—.html?id=434605> [Nedlastet 06.09.2010].

Finansdepartementet (2010c) *Hvordan forvaltningen av Statens pensjonsfond utland gjennomføres* [internett]. Tilgjengelig fra: <http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/tema/statens_pensjonsfond/forvaltning-av-statens-pensjonsfond—ut.html?id=429107> [Nedlastet 06.09.2010].

Finansdepartementet (2011a) *Bruk av oljepenger* [internett]. Tilgjengelig fra: <http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/tema/norsk_ekonomi/bruk-av-oljepenger-.html?id=449281> [Nedlastet 04.04.11].

Finansdepartementet (2011b) *Forvaltningen av Statens pensjonsfond i 2010*. Meld. St. nr. 15 (2010-2011), Oslo, Det Kongelige Finansdepartement. Kap 2.4, s. 34-44.

FTSE (2010) FTSE All-World Index Series [internett]. Tilgjengelig fra: <http://www.ftse.com/Indices/FTSE_All_World_Index_Series/index.jsp> [Nedlastet 29.10.10].

Gintschel, A. og Scherer, B. (2008), Optimal asset allocation for Sovereign Wealth Funds, *Journal of Asset Management*, 9(3), s. 215 – 238. DOI: 10.1057/jam.2008.19.

Gjedrem, S. (2010) (oppdatert 2. november 2010) *Perspektiver for forvaltningen av Statens pensjonsfond utland* [internett], Oslo, Norges Bank. Tilgjengelig fra: <<http://www.norges-bank.no/no/om/publisert/foredrag-og-taler/2010/02-11-2010-perspektiver-for-forvaltningen-av-statens-pensjonsfond-utland/>> [Nedlastet 02.08.10].

ICB (2011) *Industry Classification Benchmark: Industry Structure and Definitions* [internett]. Tilgjengelig fra: <http://www.icbenchmark.com/docs/Structure_Defs_English.pdf> [Nedlastet 31.01.11].

Kern, S. (2008) Control Mechanisms for Sovereign Wealth Funds in Selected Countries, *CESifo DICE Report*, 6(4), s.41 - 48.

Krugman, P. R. og Obstfeld, M. (2009) Chapter 13 Exchange Rates and the Foreign Exchange Market: An Asset Approach, I: *International Economics Theory and Policy*, Boston, Pearson Education, Inc., s. 317-350.

MSCI (2009) Differences in Global Exposure Among Industries [internett]. *MSCI Barra Research Bulletin*, MSCI Applied Research. Tilgjengelig fra: <http://www.msribarra.com/products/analytics/models/RB_Differences_in_Global>

_Exposure_Among_Industries_Feb09.pdf> [Nedlastet 16.10.10].

MSCI (2010), Uncovering Biases within Sectors [internett], *MSCI Barra Research Bulletin*, MSCI Applied Research. Tilgjengelig fra: <http://www.msclub.com/research/articles/2010/Uncovering_Biases_Within_Sectors_Jul2010.pdf> [Nedlastet 16.10.10].

NBIM (2009), *Statens Pensjonsfond Utland Årsrapport 2009* [internett], s. 62 – 65. Tilgjengelig fra: <http://www.nbim.no/Global/Reports/2009/NBIM_arsrapport09.pdf> [Nedlastet 13.10.2010].

NBIM (2010a) (oppdatert 11.04.10) *Statens pensjonsfond utland* [online]. Tilgjengelig fra: <<http://www.nbim.no/no/om-oss/Statens-pensjonsfond-utland-SPU/>> [Lastet ned 13.10.2010].

NBIM (2010b) *Nøkkeltall* [internett]. Tilgjengelig fra: <http://www.nbim.no/no/Investeringer/markedsverdi/nokkeltall/> [Nedlastet 01.03.11].

NBIM (2011) *Avkastning* [internett]. Tilgjengelig fra: <www.nbim.no/no/Investeringer/avkastning> [Nedlastet 05.04.11].

Norges Bank (2002) (Oppdatert 07.02.2010) *En vurdering av Petroleumsfondets regionsvekter* [internett]. Oslo, Brev fra Norges Bank til Finansdepartementet. Tilgjengelig fra: <<http://www.nbim.no/no/media-og-publikasjoner/Brev-til-Finansdepartementet/2002/en-vurdering-av-petroleumsfondets-regionsvekter/>> [Nedlastet 02.03.11].

Norges Bank (2003), *Forvaltning av Statens petroleumsfond Årsrapport 2003* [internett]. Norges Bank, s. 44 – 45. Tilgjengelig fra: <<http://www.nbim.no/Global/Documents/Features/2003-2006/03%20H%C3%B8yest%20mulig%20avkastning.pdf>> [Nedlastet 02.08.10].

Norges Bank (2010b) (29. november 2010) *Risikostyring* [internett]. Tilgjengelig fra: <<http://www.nbim.no/no/Investeringer/risikostyring/>> [Nedlastet 23.02.11].

Nærings- og Handelsdepartementet (2010), *Statlige eierandeler – forvaltning* [internett]. Tilgjengelig fra: <<http://www.regjeringen.no/nb/dep/nhd/tema/eierskap/statlig-eierskap/forvaltning-av-statlige-eierandeler.html?id=383095>> [Nedlastet 05.09.10].

Oslo Børs (2010) *A Practical Guide to Listing* [internett]. Tilgjengelig fra: <<http://www.oslobors.no/Oslo-Boers/Produkter-og-tjenester/Publikasjoner/A-practical-guide-to-listing>> [Nedlastet 05.01.11].

Sandvik, B. (2010a) *Innføring i Finans*. Upublisert manuskript. Kap. 13, Tillegg 13.C.

Sandvik, B. (2010b) *Innføring i Finans*. Upublisert manuskript. Kap. 11.3, s. 101, konsekvens 11.1.

Sandvik, B. (2010c) *Innføring i Finans*. Upublisert manuskript. Kap. 13.1.2, s. 132.

Sharpe, W. (1964), Capital Asset Prices: A theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *The Journal of Finance*, 19(3), s. 425-442.

Scherer, B. (2011) Portfolio Choice for Oil-Based Sovereign Wealth Funds, *The Journal of Alternative Investments*, 13(3) Vinter 2011, s. 24-34 DOI: 10.3905/jai.2011.13.3.024.

Scherer, B. (2009) A Note on Portfolio Choice for Sovereign Wealth Funds, *Financial Markets and Portfolio Management*, 23(3), 315-327, DOI: 10.1007/s11408-

009-0105-2.

Social Investment Forum (2010) *Socially Responsible Investing Facts* [internett]. Tilgjengelig fra: <<http://www.socialinvest.org/resources/sriguide/srifacts.cfm>> [Nedlastet 29.11.10].

SSB (2009a) (Publisert 26.02.09) *Den norske nasjonalformuen: Hva består den av?* [internett]. Tilgjengelig fra: <<http://www.ssb.no/forskning/artikler/2009/2/1235484890.0.html>> [Nedlastet 01.03.11].

SSB (2009b) *Dette er Norge* [internett]. Revidert utgave 2009, s. 12-13. Tilgjengelig fra: <http://www.ssb.no/norge/norge_2009.pdf> [Nedlastet 16.05.11]

SSB (2011a) Økonomisk utsyn, *Økonomiske analyser* [internett], 1(2011), kap. 4, s. 48-62. Tilgjengelig fra: <<http://www.ssb.no/emner/08/05/10/oa/201101/04prod.pdf>> [Nedlastet 01.03.11].

SSB (2011b) *Økonomiske nøkkeltall* [internett] (se Finansmarkeder, Norges Banks regnskap, Fordringer på utlandet i alt). Tilgjengelig fra: <<http://www.ssb.no/emner/00/00/10/nokkeltall/tabell.html>> [Nedlastet 01.03.11].

Standard og Poor (2010) *Guide to Credit Rating Essentials* [internett]. Standard & Poor's Financial Services LLC, The McGraw-Hill Companies, Inc. Tilgjengelig fra: <http://www2.standardandpoors.com/spf/pdf/fixedincome/SP_CreditRatingsGuide.pdf> [Nedlastet 20.05.11].

Statkraft (2011) *God eierstyring og selskapsledelse bidrar til verdiskaping* [internett]. Tilgjengelig fra: <<http://arsrapport2010.statkraft.no/foretaksstyring/eierstyring-og-selskapsledelse/>> [Nedlastet 07.04.11].

Statnett (2008) *Eierskap* [internett]. Tilgjengelig fra <<http://www.statnett.no/no/Om-Statnett/Eierskap-og-rammer/Eierskap/>> [Nedlastet 28.02.11].

SWF Institute (2008) (copyright 2008 - 2010), *What is a SWF?* [internett] Tilgjengelig fra: <<http://www.swfinstitute.org/what-is-a-swf/>> [Nedlastet 29.10.10].

SWF Institute (2011) (oppdatert mars 2011) , *Sovereign Wealth Funds Rankings* [internett] Tilgjengelig fra: <<http://www.swfinstitute.org/fund-rankings/>> [Nedlastet 15.03.11].

Thomas, R. L. (2005), Chapter 6 Covariaces and Correlations. I: *Using Statistics in Economics*. New York, McGraw-Hill Education, s. 181-216.