

Syntetisk CDO:
iTraxx-prising ved bruk av en Normal Invers Gaussisk Copula

Masteroppgave i statistikk
KJETIL NORDANÅ

3. april 2013



Veileder: Bård Støve, førsteamanuensis i statistikk
Matematisk Institutt, Universitetet i Bergen

Takk

Denne oppgaven har vært en utfordring, i så måte at den åpnet øynene mine opp for et helt nytt univers av verdipapirer jeg kun så vidt hadde hørt om tidligere. Derfor var det vesentlige i begynnelsen å nøste trådene, og å finne et slags konsensus. Derfor vil jeg takke min universitetsutdanning for evnen til å være kritisk ovenfor nye ideer og kunne få et overordnet bilde. Jeg vil også takke undervisningen gjennom de 5 årene med en bredde innenfor økonomi og matematikk, for muligheten til letter å forså ideene og de matematiske problemstillingene jeg har stått overfor i forbindelse med all artikkellesingen.

Jeg vil takke veileder Bård Støve for å ha holdt meg i ørene, samt mange hyggelige samtaler rundt temaet, og ironiske betraktninger rundt verdipapirene vi har stått ovenfor. I tillegg vil jeg rose han for tilgjengeligheten og den alltid åpne døren.

Til slutt vil jeg takke mine medstudenter for morsomme pusterom i ”panic-room” og den ellers så generelt hyggelige og sedvanlige minglingen.

Innhold

1	Introduksjon	1
1.1	Risikonøytralitet og konkursintensitet	1
1.2	Obligasjoner	2
1.2.1	Prising av en kuponobligasjon	3
1.2.2	Yield	3
2	Kredittderivater	5
2.1	Kredittrisiko	5
2.2	CDS	7
2.2.1	Multi-Name CDS/Basket swaps	8
2.2.2	Credit Default Swap Indeks	8
2.3	CDO	9
2.3.1	Syntetisk CDO	11
2.4	Subprime- og finanskrisen	14
3	CDO prising, det elementære rammeverket	16
3.1	Elementære prisingsuttrykk	16
3.1.1	Transjepremien	16
3.1.2	Porteføljens tapsfunksjon	17
3.2	CDS-impliserte konkursintensiteter og recovery	20
3.2.1	Diskret tilnærming.	20
3.2.2	Kontinuerlig tilnærming	22
3.2.3	Recovery	23
4	Klassiske prisingsmodeller CDO	25
4.1	Ulike modeller for prising	25
4.2	Approksimering ved LHP	26
4.2.1	LHP: Antagelser og bruk av normalfordeling	26
4.2.2	LHP med Student-t fordeling	30
4.2.3	LHP med generelle fordelingsantakelser	32
4.2.4	Forventet transjetap ved LHP	32
4.2.5	Prising ved LHP	33
4.3	Impliserte korrelasjoner og korrelasjonssmil	36
4.3.1	Basekorrelasjon	40
4.4	Copula	41
4.4.1	Definisjon	42
4.4.2	Multivariat Gaussisk Copula	43
4.4.3	Multivariat Student-t Copula	45
4.4.4	Haleavhengighet	47
4.4.5	Metafordelinger og Monte Carlo algoritmer	51

5	Normal Invers Gaussisk En-Faktor Copula Modell	55
5.1	Normale miksturer og NIG-fordelingen	55
5.1.1	Forventning-varians mikstur	55
5.1.2	Generaliserte hyperbolske fordelinger	56
5.1.3	Normal Invers Gaussisk-fordeling	57
5.2	LHP approksimering ved en-faktor NIG Copula	60
5.3	Verdsetting av CDO via NIG	62
5.4	Kalibrering og numeriske resultater	63
5.4.1	En-parameter NIG-LHP-modell	66
5.4.2	To-parameter NIG-LHP-modell	72
6	Oppsummering, konklusjon	77
A	APPENDIKS	80
A.1	Store talls lov Student t LHP	80
A.2	Betinget Student t-fordeling $X_2 X_1 = x_1$	80
A.3	NIG tetthetsfunksjon $f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$	81
A.4	Figur	83
A.4.1	DJ iTraxx Europe 5.serie	83
A.5	R-koden(utvalg)	84
A.5.1	Trapesmetode	84
A.5.2	Implisitte konkursintensiteter	84
A.5.3	MC-algoritmen for Gauss og t-copula for CDO-prising	84
A.5.4	Transjespread ved Gauss-LHP	88
A.5.5	Transjespread ved NIG	89

1 Introduksjon

De siste tiårene har finansmarkedene opplevd en stor økning i omsetningen av kredittinstrumenter. Flere produkter, mer transparente markeder og økt kapitalbehov var og er fortsatt blant ingrediensene som fører til at aktører med ulik risikoaversjon entrer kredittderivatmarkedene. Ikke minst åpnet en ny verden seg for arbitrasjemuligheter samt sikring og hedging for investorer med ulik eksponering i kredittmarkedet. Markedet for strukturerte kredittderivater vokste fra 400 milliarder dollar i 2000 til over 2 billioner dollar i 2006. Men subprime- og finanskrisen i 2007-2009 førte med seg en betydelig reduksjon i volumet handlet på disse, grunnet ratingbyråers feilvurderinger, en boligboble, feilprisinger på produktene og en betydelig uoversiktighet i markedet med etterhvert lite styring. Den transjerte iTraxx Europe indeksen er et slikt kredittderivat, og består av en diversifisert portefølje av enkeltnavns-kredittderivater med europeiske selskapobligasjoner som referanser, som investorer kan ta posisjoner i. En slik transjert indeks har lik struktur og oppbygning som en syntetisk CDO og betaler ut premier til investorer på bakgrunn av forventede framtidige kreditthendelser. Det er disse premiene vi i denne oppgaven skal prøve å reprodusere ved å betrakte markedspriser. Vi vil gå igjennom teori for disse modellene for senere å kunne bruke dem i praksis. Det er spesielt en som skiller seg ut, den normal invers gaussiske copulaen, som blir gått igjennom i detalj. Årsaken til at man tester modeller på iTraxx-transjen er stort sett fordi iTraxx er en svært likvid variant av en syntetisk CDO, noe som gjør at man kan vurdere en modell sine egenskaper etter hvordan den reproduserer indeksens markedspriser. Derfor vil oppgaven være viet ulike prisingsmodellene.

Fortsettelsen av dette kapitlet gjennomgår begreper og beregninger for obligasjoner og konkursintensiteter i en risikonøytral verdsetting. Kapittel 2 vies til teori rundt de mest sentrale kredittderivatene, mens kapittel 3 presenterer de elementære matematiske verktøyene som trengs i en prising sammenheng for disse. Kapittel 4 omhandler de klassiske prisingsmodellene for syntetisk CDO, mens kapittel 5 er viet ene og alene til hovedmodellen, den normal invers gaussiske en-faktor copulaen, og beregninger ved bruk av denne på flere tidsperioder.

1.1 Risikonøytralitet og konkursintensitet

Gitt et filtrert sannsynlighetsrom $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{Q})$, la τ være (\mathcal{F}_t) -stoppetiden der en konkurs for et selskap oppstår, med en fordelingsfunksjon $F(t) = \mathbb{Q}(\tau \leq t)$ og marginalfordeling $f(t)$. \mathbb{Q} er da det *risikonøytrale* sannsynlighetsmålet. Under et slikt mål, vil de resulterende prisene som framkommer ved beregning ikke bare være korrekt i et risikonøytralt marked, men også være gyldig når investorene er risikoaverse. Sandvik (2010) forklarer risikoaversjon på følgende måte: Er individene risikoaverse foretrekker dem et sikkert utfall framfor et usikkert utfall med samme forventningsverdi. Altså under et risikonøytralt mål vil risikoaversjonen være bakt inn i prisen, da dem krever en premie for å bære risikoen om konkurs.

Sannsynligheten (risikonøytrale) for at en konkurs oppstår i intervallet $(t, t + \Delta t)$ gitt at selskapet har overlevd opp til tid t , $\mathbb{Q}(t < \tau \leq t + \Delta t | \tau > t)$ brukes så til å finne hasardfunksjonen $h(t)$ som

følger via regel om betinget sannsynlighet (Galiani, 2003):

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{Q}(t < \tau \leq t + \Delta t | \tau > t) \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{Q}(t < \tau \leq t + \Delta t, \tau > t)}{\mathbb{Q}(\tau > t)} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(s) ds}{\int_0^\infty f(s) ds} \\
 &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\frac{d}{dt} F(t)}{1 - F(t)} = -\frac{d}{dt} \log(1 - F(t)).
 \end{aligned}$$

Vi har altså en ordinær differensiallikning (ODE) som vi løser og får:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right),$$

og ved derivasjon:

$$f(t) = h(t) \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right). \quad (1.1.1)$$

Vi får tilsvarende om vi lar den stokastiske telleprosessen $X = X(t)_{t \geq 0}$, der $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{(\tau_k \leq t)}$, være en homogen Poissonprosess med deterministisk intensitet $\lambda(t)$: $\mathbb{Q}(\tau \leq t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) ds\right)$. I denne oppgaven vil vi ta for oss sistnevnte, som utgangspunkt for å finne (implisitte) kredittkurver til selskaper fra markedspriser. Jo høyere konkursintensiteten λ er, jo lavere forventet ventetid til konkurs for selskapet. Samtidig vil vi ta i bruk risikonøytral verdsetting.

1.2 Obligasjoner

Siden obligasjoner er tradisjonelle kredittinstrumenter som ofte fungerer som underliggende i kredittderivater kan det være fornuftig å få et innblikk. I dette avsnittet presenteres det generelle rundt obligasjoner, litt om deres formål og forskjellige varianter av dem. Til slutt presenteres tradisjonell finansteori for obligasjoner samt vise hvordan man beregner en såkalt yield (avkastnings). Hovedkildene her er Schlösser (2011) og Björk (2004).

En *obligasjon* er opprinnelig et lån omdannet til et verdipapir som selges til kjøpere i markedet, og er rentebærende. Kontantstrømmen fra dette verdipapiret (obligasjonen) tilfaller kjøperen i sin helhet og kan selges videre. Formålet med å utstede en obligasjon istedenfor et tradisjonelt lån er at utstederen lettere kan realisere kapital gjennom obligasjoner hos ulike kilder i markedet enn i en enkelt bank. Kontantstrømmen generert av obligasjonen gir utbetaling, kuponger, ved faste tidspunkt, som regel hvert kvartal eller halvår. Det er flere typer:

- *Null-kupongobligasjon* eller *T-bond* betaler ingen kupong, kun (i dette eksempelet) 1 kr ved forfall T . Prisen på tid t av en T-bond er $p(t, T)$ og er gitt ved

$$p(t, T) = 1 \cdot \exp\left\{-\int_t^T f(t, s) ds\right\},$$

altså en neddiskontering av 1 kr ved bruk av framtidrenten $f(t, s)$. Framtidrenten blir bestemt av den forventede rentedynamikken til null-kupongsobligasjoner.

- *Kupongobligasjon* utbetaler en på forhånd avtalt fast kupong c gjennom løpetiden, og ved forfall $t = T$ betaler kupongen c pluss hovedstol K .
- *Floating rate notes* (FRN), har lik oppbygning som kupongobligasjon, men har en flytende kupong c_i med kupongrente r_i som er linket opp mot en referanse, NIBOR eller LIBOR, pluss en konstant på forhånd avtalt spread.

For de to sistnevnte er kupongen c_i til enhver tid avhengig av kupongrenten r_i , tidsintervallene δ og hovedstolen K , altså $c_i = \delta r_i K$. $p(t, T)$ er et stokastisk objekt. Med et fast forfallstidspunkt er $p(t, T)$ en stokastisk prosess som gir prisen på forskjellige tidspunkt og trajektoriene mellom tidspunktene for prisen vil da være irregulære, som en Wiener prosess, men med $p(T, T) = 1$. I det følgende foreligger det antagelser om at fravær av arbitasje og komplett marked er tilstede, at det finnes et T-bond for ethvert forfall, og at relasjonen $p(t, t) = 1$ holder for alle t .

1.2.1 Prising av en kupongobligasjon

Kupongobligasjon, med fast kupongrente som beskrevet over, kan replikeres ved å holde forskjellige typer T-bond med forfall på $T_i, i = 1, \dots, n$. Prisen $p(t)$ på en slik obligasjon med forfall T på tidspunkt t , der $0 < t < \delta$, er gitt ved

$$p(t) = Kp(t, T_n) + \sum_{i=1}^n c \cdot p(t, T_i),$$

og kan ved bruk av $c = \delta r K$ skrives om til

$$p(t) = K \left(p(t, T_n) + r\delta \sum_{i=1}^n p(t, T_i) \right).$$

For kupongobligasjoner med fast kupongrente har prisen på denne og diskonteringsrenten på null-kupongobligasjonene et omvendt forhold. Går renten opp på nullkupongobligasjoner gir det en lavere diskonteringsfaktor og prisen, altså den forventede nåverdien, på kupongobligasjonen går ned. Analogisk gjelder dette også for en reduksjon av renten.

1.2.2 Yield

Et viktig begrep i obligasjonsteori er *yield to maturity*. Det er obligasjonens internrente, altså den konstante¹ diskonteringsraten som gjør nåverdien av kontantstrømmen til obligasjonen lik prisen gitt i markedet. På utstedelsetidspunktet er yielden lik kupongrenten, men den forandrer seg når obligasjonen handles aktivt i annenhåndsmarkedet. Ved å undersøke yielden kan man gjøre det mulig å sammenligne obligasjoner med ulik horisont, kuponghyppighet og nedbetalingsprofil. Man sier at obligasjoner med en høy yield er mer risikable. Innbakt i yielden er et kredittmarginkrav og en risikofri rente. Blir utstederen av obligasjonen mer risikabel pga markedets forventninger øker denne marginen (analogisk til risikopremie) og således yielden, noe som får prisen på obligasjonen

¹Med flere forfalltidspunkt tilgjengelig på samme obligasjon fåes en stykkevis kontinuerlig internrentefunksjon

til å falle. Ved å bruke et T-bond som utbetaler 1 kr om $T - t$ år kan man finne yielden $y(t, T)$ til denne ved å løse

$$p(t, T) = e^{-y(t, T) \cdot (T - t)} \cdot 1$$

for $y(t, T)$. Da får man den kontinuerlige sammensatte null-kupongs yielden,

$$y(t, T) = -\frac{\log p(t, T) - \log 1}{T - t} = -\frac{\log p(t, T)}{T - t}.$$

Gitt en fast t får man *yield kurven* for nullkupongobligasjoner med varierende T .

For kupongobligasjoner med markedspris $p(t)$, kuponger c_i på tid T_i for $i=1, \dots, n$, får man internrenten, *yield to maturity* (YTM) ved å løse ut y i likningen

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{-y \cdot (T_i - t)} + (c_n + K) e^{-y \cdot T}$$

gjerne numerisk. En yieldkurve er ofte stigende. Intuisjonen er at når forfalltidspunktet øker så øker usikkerheten på renten.

Når vi nå har sett på konsepter rundt obligasjoner skal vi bevege oss mot kredittderivater hvor disse fungerer som underliggende. Disse kredittderivatene har til tider vært svært populære, og i neste avsnitt skal vi gi litt innsikt i mangfoldet, samt se litt på den foregående finanskrisen.

2 Kredittderivater

I dette kapittelet gjennomgås termene rundt kredittderivater og kredittrisiko, før vi går over til de forskjellige variantene av kredittderivater med særlig fokus på CDS og syntetiske CDOer. I tillegg nevnes kort subprime- og finanskrisen og dens påvirkning på markedet.

Et *kredittderivat* er et finansielt instrument avledet av underliggende kreditt², bygget på en avtale mellom to parter, der utbetaling (for investor) skjer om en forhåndsdefinert kreditthendelse oppstår knyttet til kreditten (Cecchetti & Nappo, 2012). En kreditthendelse er ofte mislighold, men kan i noen sammenhenger være endring i kredittverdighet på underliggende samt endring i den løpende renten. Med andre ord er det et instrument brukt for å overføre risiko mellom parter i markedet. Det er flere årsaker til at det eksisterer et slikt marked:

- Man kan redusere risikoen samt oppnå sikring av eksisterende risikable posisjoner³.
- Spekulering, ved at man har en annen oppfatning av utviklingen i markedet.
- Utnytte arbitrasjemuligheter, altså misprisinger i markedet.

Motivasjonen for dannelsen av et slikt marked var i bunn og grunn for at banker som satt på store utlånsporteføljer kunne spre risikoen til andre deltakere i markedet ved å selge risikoen i form av kredittderivater. Dette markedet hadde en rivende utvikling i starten fordi banker kunne flytte risikoen på noen av sine utlånsporteføljer, og dermed forbedre sine kapitaldekningskrav etter Basel-reglene. I tillegg gav det enorme muligheter for spekulasjon. Det gav og gir fortsatt muligheter til en effektiv måte for banker å avlaste eller for investorer å påta seg kredittrisiko. I tillegg kjøper banker ekstra kredittrisiko ved å selge kredittderivater for å øke avkastningen i sin portefølje og som et alternativ for å starte opp lån⁴.

Det er flere typer kredittderivater, og utviklingen har vært enorm siden første utstedelse i 1993. Credit Linked Notes (CLN), Residential Mortgage Backed Securities (RMBS/MBS), Basket Default Swaps, Credit Default Swaps (CDS), Collateralised Debt Obligation (CDO) og syntetisk CDO har vært de mest omsatte. Når det gjelder CDS er det også mulig å handle på indekser av disse hvor markedslederne er iTraxx Europe og CDX North America. Kredittderivater omsettes ikke på børs, men i annenhåndsmarkeder, slik at kontrakten og handelen inngås direkte mellom selgeren og kjøperen. Siden dette kan være tidkrevende og samtidig involverer veldig store summer er markedsdeltakerne som oftest de store forretnings- og investeringsbankene.

The International Swaps and Derivatives Association (ISDA) arbeider for at handel med kredittderivater skal bli tryggere og mer effektiv via kontinuerlige forbedringer av infrastrukturen og gjøre markedet mer transparent.

2.1 Kredittrisiko

Vi vil her kort definere hva man mener med kredittrisiko og introdusere ratingbyråenes skala for å vurdere kredittkvaliteten på obligasjonsutstedere. Kredittrisiko er overhengende definert som

²Eksempler på underliggende i kredittderivater er boliglån, obligasjoner, billån, kredittkortgjeld og liknende

³Dette kalles hedning, hvor man replikerer en posisjon i markedet.

⁴Forklaringen er at et salg av et kredittderivat gir faste inntekter i overskuelig framtid, mot risikoen ved å påta seg forsikringsansvar.

risikoen for at låneren ikke overholder sine betalingsforpliktelser til utlåneren i framtiden eller at renten som løper forandrer seg over tid (Schlösser, 2011). Selv for en obligasjon hvor sannsynligheten for konkurs eller mislighold i selskapet liten, kan tapet om det først oppstår utgjøre en betydelig sum for investoren. Derfor er det viktig å overvåke samt å modellere denne kredittrisikoen. Det er stort sett to kilder til kredittrisiko (Korsnes, 2008):

- Konkursrisiko, altså risikoen for at selskap går under, slik at kun brøkdelen av obligasjonen utbetales. For en investor i et kredittderivat er risikoen da forbundet med hva han/hun må betale ut ved en kreditthendelse. Risikoen for hvor stor brøkdel av den nominelle verdien til kontrakten som er igjen kalles *recovery-risiko*⁵
- Markedsrisiko, ved at markedsverdien på verdipapiret forandrer seg over tid. Faktorer som bestemmer dette er forandringer i renter, likviditet og bevegelser i kredittverdigheten. Altså kontraktens *mark-to-market*-verdi kan endre seg, slik som det er for aksjeposter.

Ved siden av elementene for kredittrisiko forbundet med individuelle utstedere er det også viktig å betrakte følgende når man behandler kredittderivater med porteføljer av forskjellige underliggende:

- Konkurskorrelasjon, risikoen for at flere selskaper går konkurs på samme tid.
- Kredittkvalitetskorrelasjon, korrelasjon mellom kredittkvaliteten selskapene imellom.
- Risikobidrag, altså bidraget hvert selskap har på den totale risikoen i porteføljen⁶.

Kredittvurderingsselskaper som Moody's og Standard & Poor's har et eget system for å vurdere selskapers og staters kredittrisiko, også kalt kredittverdighet. Disse vurderingene er gjort på bakgrunn av markeds- og industrispesifikke forhold, samt selskapets forventede utvikling. I hovedsak gir en kredittvurdering en indikator på sannsynligheten for mislighold av obligasjonen utstedt av selskapet og selskapets finansielle posisjon ved en eventuell konkurs. En kategorisering er gjengitt i tabell 1 nedenfor suksessivt fra AAA til D, ved bruk av skalaen til ratingbyrået Standard & Poor's, med forklaring:

AAA	Ekstremt sterk kapasitet til å møte sine forpliktelser
AA	Kun liten forskjell i kredittverdighet AAA
A	Stor kapasitet til å møte forpliktelser, men litt mer elastisitet i forhold til konjunkturer
BBB	Tilfredstillende forventet kapasitet, men mer sensitiv til selskapets markedverdi
BB til C	Spekulative obligasjoner. BB er minst spekulativ, mens C er høyest.
D	Selskapet er konkurs eller tilnærmet.

Tabell 1: Kredittverdighet obligasjoner. Skala: Standard & Poor's

Nå som vi har redegjort i det små for noe av risikoen forbundet med obligasjoner og porteføljer av dem skal vi nå i de neste avsnittene ta for oss en redegjørelse av forskjellige sentrale kredittderivater på markedet⁷ og som blir brukt i oppgaven.

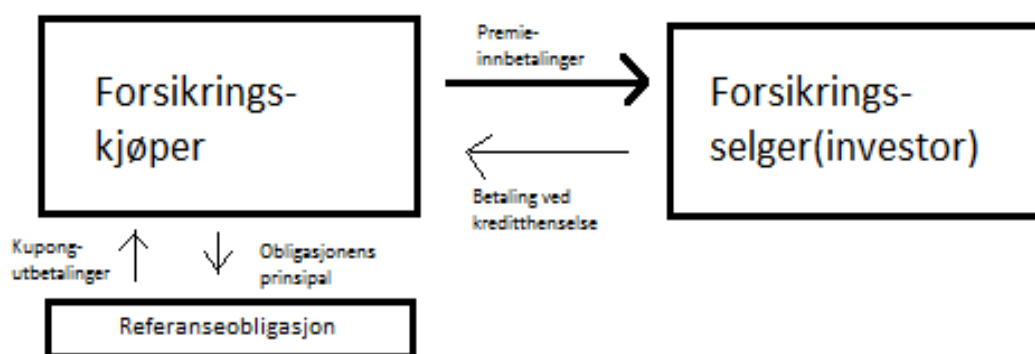
⁵På norsk heter dette gjenervervesrate. Jeg vil videre i oppgaven prøve å bruke det engelske ordet, da jeg ser på det som et godkjent lånord.

⁶Jfr. systematisk risiko i klassisk porteføljet teori ved CAPM

⁷Noen av dem er ikke lenger å anse som et marked for etter finanskrisen, se kap 2.4 for mer om dette

2.2 CDS

Det mest vanlige produktet på dagens kreditderivatmarked er *Credit Default Swaps(CDS)*. En slik kontrakt forløper seg på følgende måte: Kjøperen av forsikringen, A, betaler inn en periodevis premie til B, utstederen av forsikringen(investor), fram til en på forhånd avtalt kreditthendelse oppstår eller ved kontraktens forfall. I retur vil B utføre en betaling til A som dekker det eventuelle tapet hvis kreditthendelsen oppstår i kontraktens levetid(Eberlein & Frey, 2010), se figur 1. Overføringen av risikoen skjer derfor på samme måte som en bilforsikring, der forsikrer er pliktig til en utbetaling om en på forhånd avtalt hendelse oppstår. Choudhry (2004) betrakter posisjonen i en CDS som kort eller lang: Å kjøpe (selge) beskyttelse kan sees på som å ta en lang (kort) posisjon i en CDS. En forsikringkjøper vil derfor gå kort i den underliggende obligasjonen. Man trenger ikke nødvendigvis å eie underliggende obligasjon for å kjøpe en CDS, og følgene av dette er at arbitrasjeregere kan utnytte forskjeller i sprednen i CDS-markedet og obligasjoner.



Figur 1: Strukturen rundt en CDS-kontrakt

Det er flere typer kreditthendelser som på forhånd kan defineres i kontrakten(Deutsche Bank, 2009):

- Utstederen av obligasjonen går konkurs
- Forfallstidspunktet endrer seg på obligasjonen ved en utsettelse eller innkorting
- En forsømmelse som følge av brudd på kontrakten i obligasjonen
- Betalingsproblemer hos obligasjonens utsteder, feks kupongrenter som ikke betales eller reduksjon på hovedstolen.

Oppstår første punkt over, konkurs, betaler først kjøperen inn oppsamlet premie siden forrige betaling hvorpå selgeren foretar en utbetaling. Som oftest er utbetalingen et såkalt *fysisk oppgjør* der kjøperen leverer obligasjonen eller en liknende til selgeren og mottar da hovedstolen. Selgeren kan da selge obligasjonen videre eller kreve det gjeninnhentede beløpet fra utstederen. Vanligvis betales CDS-premiene kvartalsvis og dem er uttrykt i årlige basispunkter(bp) av hovedstolen(ECB, 2008). Et basispunkt er 0.01%.

En CDS-kontrakt kan innebære motpartrisiko, altså risikoen for at motparten ikke kan dekke tapene ved en kreditthendelse. Derfor vil kjøperen av CDS-kontrakten handle fra forskjellige aktører som

tilbyr forsikring på underliggende. Premiernes utvikling følges nøye av deltakere i markedet og fungerer som en indikator på markedets forventninger samt risikonivået generelt på obligasjoner. I denne oppgaven blir CDSer brukt som en referanseportefølje underlagt en CDO. Dette blir forklart litt senere, men først skal vi se på to andre instrumenter: Basket swaps og credit default swap indekser.

2.2.1 Multi-Name CDS/Basket swaps

For investorer med porteføljer av flere obligasjoner gjøres sikringen ofte via basket default swaps (Wang et al., 2006). Markedet har da utviklet flere typer, og de mest brukte er *first-to-default swaps*, *second-to-default swaps* og *n-th to-default swaps*. Med henvisning til den underliggende porteføljen av obligasjoner gir first-to-default swap en forsikring for kun den første kreditthendelsen. En second-to-default swaps gir kun kredittbeskyttelse for at den andre obligasjonen opplever en kreditthendelse og analogisk gir en nth-to-default swap kun for den n'te kreditthendelsen i porteføljen. En nth-to-default swap virker slik at investoren ikke utbetaler noe på de n-1 første misligholdene, men først når den n'te obligasjonen opplever en kreditthendelse. Samtidig utløper kontrakten og investoren utbetaler et beløp. Merk at selv om en basket swap kun gir beskyttelse for deler av porteføljen, kan den være gunstig da den er mye billigere, og fungere som et alternativ mot å forsikre hele porteføljen.

En basket swap er en kontrakt som er mer etterspurt av investorer med forventninger om frekvenser av mislighold heller enn mer spesifikt rundt hvert selskap. For banker som ikke vil selge unna lånene sine og dermed risikere kundeforhold er basket swaps en mulighet. Det gir bedre kapitaldekning og frigjør ressurser til andre formål via denne overføring av risikoen.

2.2.2 Credit Default Swap Indeks

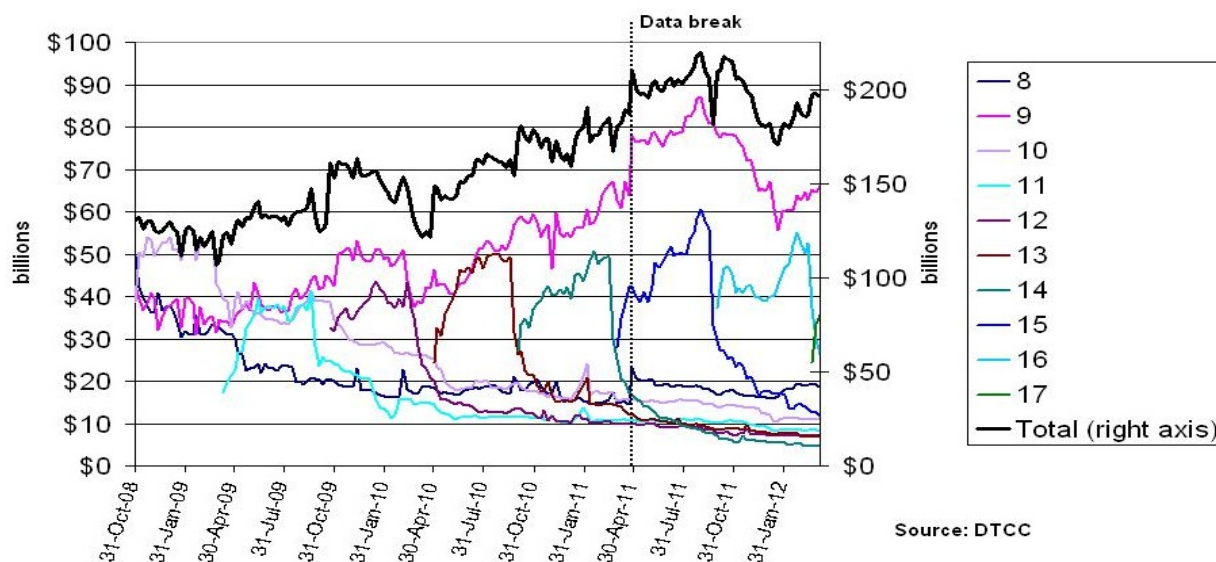
En CDS indekskontrakt gir beskyttelse mot kredittrisikoen til en standardisert pakke av referanseobligasjoner. En stor variasjon av slike indeksprodukter ble introdusert for å skape et segment i markedet med muligheter for flere deltakere. En slik indeks er ganske anderledes i mekanikken enn en single-name CDS, der premieinnbetalingene stopper opp ved en kreditthendelse. For en indeks derimot så fortsetter innbetalingene, men da basert på en redusert samlet nominell verdi, siden færre referanseobligasjoner blir beskyttet. Det er idag hovedsakelig to slike familier av indekser som begge er standardisert på samme vis med tanke på komponeringen, premiebetaling og forfall: *CDX* som dekker Nord-Amerika og fremvoksende økonomier, og *iTraxx* som dekker Europa og Asia. De to mest handlede indeksene er *CDX.NA.IG* og *iTraxx Europe IG*, utarbeidet av Markit⁸, som begge har 125 likt vektete selskaper som alle er *investment grade(IG)*⁹, med forfallstidspunkt på hhv 3, 5, 7 og 10 år. Denne porteføljen består av de mest handlede CDSene i volum og blir fornyet hver sjette måned ved votering. Dette skjer 20.mars og 20.september hvert år og porteføljen forblir slik i seks måneder om ikke det skjer en kreditthendelse hvorpå den berørte referanseobligasjonen går ut av serien. En serie er "off-the-run" når det har gått et halvt år etter oppstart. Denne kan fortsatt handles på.

En standard kontrakt på indeksen er beskyttelse av kreditt på en verdi av 10 millioner euro på

⁸Markit er et selskap som eier, styrer, utarbeider og publiserer indeksene (Reuters, 2008)

⁹Med investment grade, menes selskaper med Standard & Poor's kredittrating høyere enn BB

de underliggende selskapene for henholdsvis 3,5 7 og 10 år forfall. I figur 2 under ser man den nominelle totale verdien (svart linje) som til enhver tid er underlagt iTraxx Europe IG 5Y-indeksen under og etter finanskrisen. Man ser at det er den 9.serie¹⁰ fra finanskrisen som fortsatt er den med mest forsikret verdi, mens de andre blir mindre aktivt handlet når en ny serie begynner. Vi ser også at det er stort sett like mye verdi forsikret på seriene.



Figur 2: Itraxx Europe IG 5Y 2008-2012. 8.-17.serie Kilde: DTCC(2012)

Premieinnbetalingene, eller *coupon spreaden* som forblir fast, betales inn hvert kvartal av kjøperen og blir bestemt på starten av hver serie. Ved en kreditthendelse på en referanseobligasjon blir utbetaling gjort ved fysisk oppgjør. Kjøperen leverer da obligasjoner fra referanseutstederen lik verdien av den vektete summen, for eksempel $1/125=0.8\%$ multiplisert med den totale nominelle verdien for kontrakten. I gjengjeld gir selgeren (investoren) den opprinnelige nominelle vektete hovedstolen til kjøperen. Etter dette blir det nominelle beløpet i kontrakten redusert, mens coupon spread forblir uforandret.

Spreaden/premien man finner i markedet er *market spread*, og avhenger av forventninger om utviklingen samt tilbud og etterpørsel. Kursdataene til market spread, som forandres kontinuerlig, er ofte anderledes enn coupon spread, og det blir gjort kompensasjoner for dette. Er market spread høyere på et tidspunkt enn coupon spread må kjøperen av kontrakten i tillegg til coupon spreaden betale forskjellen i spread til selgeren. Denne forskjellen betales i nåverdi i basispunkter av det nominelle beløpet ut perioden/kvartalet. I tillegg til ordinær premiebetaling på en CDS indeks eksisterer det også opsjoner og terminkontrakter på bevegelsen til spreaden samt muligheten til å handle på standardiserte transjer. Sistnevnte blir beskrevet nærmere i følgende kapitler.

2.3 CDO

En *collateralized debt obligation* (CDO) er et verdipapir støttet opp av en diversifisert portefølje av kredittinstrumenter som lån og obligasjoner (Hovedkilde: Rakkestad, 2006). Veien fram til utstedelse og salg i markedet kan minne om det man kjenner som *verdipapirisering* (securitization). Prosessen

¹⁰iTraxx Europe IG 5Y 9.serie hadde oppstart 20.mars 2008 og forfall 20.juni 2013

når diversifiserte porteføljer av underliggende kredittinstrumenter som en bank sitter på blir omgjort til salgbare verdipapirer via et spesialforetak (SPV), kalles verdipapirisering. Spesialforetaket er et uavhengig og som formål konkursfritt foretak innunder bankens virke eksklusivt dannet for å kunne utstede CDO. Denne overdragelsen fra bank til SPV blir finansiert ved at SPV utsteder en spesiell type obligasjoner, *Asset-Backed Securities* (ABS), på den underliggende kontantstrømmen som følger fra kreditten. Kjøperne av ABS, investorene, får betaling minus servicekostnader på avtalte tidspunkter når porteføljen nedbetales på vanlig måte, og dem opphører å eksistere når de opprinnelige kredittinstrumentene er nedbetalt eller går konkurs. (Schlösser, 2011)

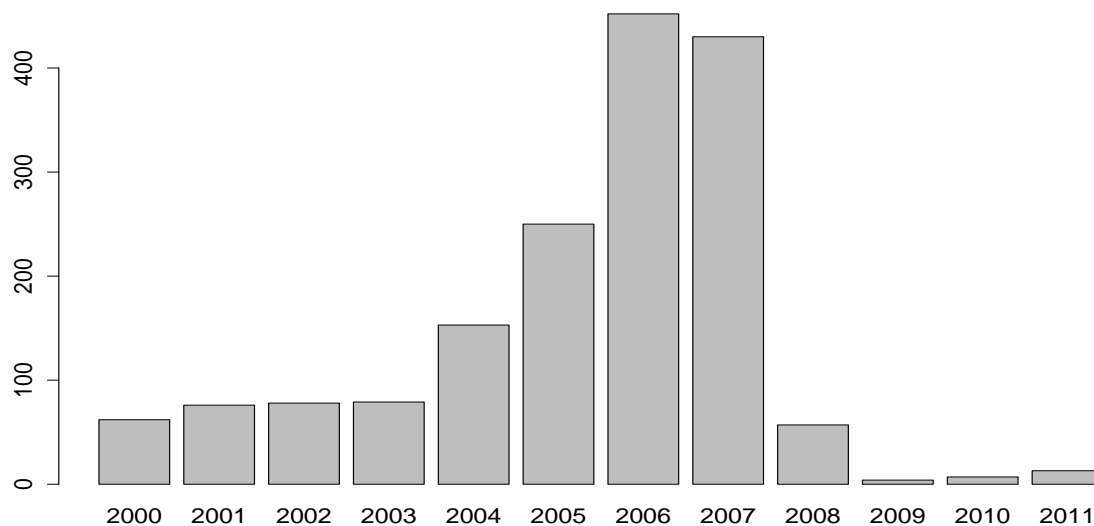
Helt generelt skiller CDO seg fra tradisjonell verdipapirisering beskrevet over ved at CDOer utsteder ABS i ulike kredittvurderte risikoklasser, også kalt *transjer*. Disse transjene har forskjellig prioritet på den underliggende kontantstrømmen. Avhengig av om det er obligasjoner eller lån som er underliggende klassifiseres den henholdsvis (av markedsoperatører) som en collateralized bond obligation (CBO) eller en collateralized loan obligation (CLO). Hvis spesialforetaket til en CDO eier underliggende portefølje refereres CDOen som en *kontantstrøm*-CDO. Men dersom spesialforetaket ikke eier underliggende og istedenfor påtar seg kredittrisiko gjennom å selge kredittderivater, CDS, på underliggende referanseobligasjoner refereres CDOen som en *syntetisk* CDO (Wang, 2006).

Basert på motivasjonen til banken, kan CDOene grupperes som balansestyring- og arbitrasje-CDO, etter formålet med å opprette dem. Et eksempel på balansestyring kan være at banken bruker spesialforetaket på å flytte lån eller obligasjoner fra sin egen balanse og dermed forbedre sitt kapitaldekningskrav. Ved å overføre risikoen for en låneportefølje til andre investorer, vil en bank kunne frigjøre signifikante mengder kapital da kapitaldekningskravet reduseres. Motivasjonen for arbitrasje-CDO er å drive arbitrasje på avkastningsforskjellene mellom den underliggende porteføljen og transjene. Til tider sto arbitrasje-CDO stått for 80 % av all handel.

I prinsippet står utstederen av CDOen helt fritt til å bestemme antall transjer og deres størrelser. Hver transje har et nedre innslagspunkt og et øvre utslagspunkt. Når det kumulative prosentvise tapet til den underliggende porteføljen går over innslagspunktet, reduseres investorenes andel på pålydende. Når tapet rekker over utslagspunktet har investorene ingen andel igjen på pålydende og flere tap i transjen er ikke mulig. Det er mest vanlig å dele transjene inn i tre hovedkategorier:

- Seniortransje
- Mesanintransje
- Underordnet transje/egenkapitaltransje

Disse kategoriene kan være inndelt i flere og mindre transjer, og seniortransjen har høyest og egenkapitaltransjen har lavest prioritet på kontantstrømmen. De fleste transjene utenom egenkapitaltransjen blir kredittvurdert, noe som reflekterer risikonivået en påtar seg ved å investere i de ulike transjene. Eksempelvis kan investorer i egenkapitaltransjen ha andel på tapene fra 0-3 %, mesanintransjen 3-10 % og seniortransjen 10-30 %. Tilretteleggeren av CDOen, banken, holder ofte egenkapitaltransjen selv, da den er lite salgbar til investorer grunnet dens store risiko. Løpetiden på de spesifiserte transjene ligger nært oppunder løpetiden på den underliggende kreditten, om ikke kreditthendelser sørger for at transjens andel av tapet er oversteget før den tid. Ofte er den underliggende porteføljen av slike aktiva diversifisert og tilnærmet homogene, og korrelasjonsstrukturen er en viktig del av analysen av slike strukturer.



Figur 3: Global handel av kontantstrøms-CDO. Tall i milliarder dollar. Kilde: Federal Reserve (2012)

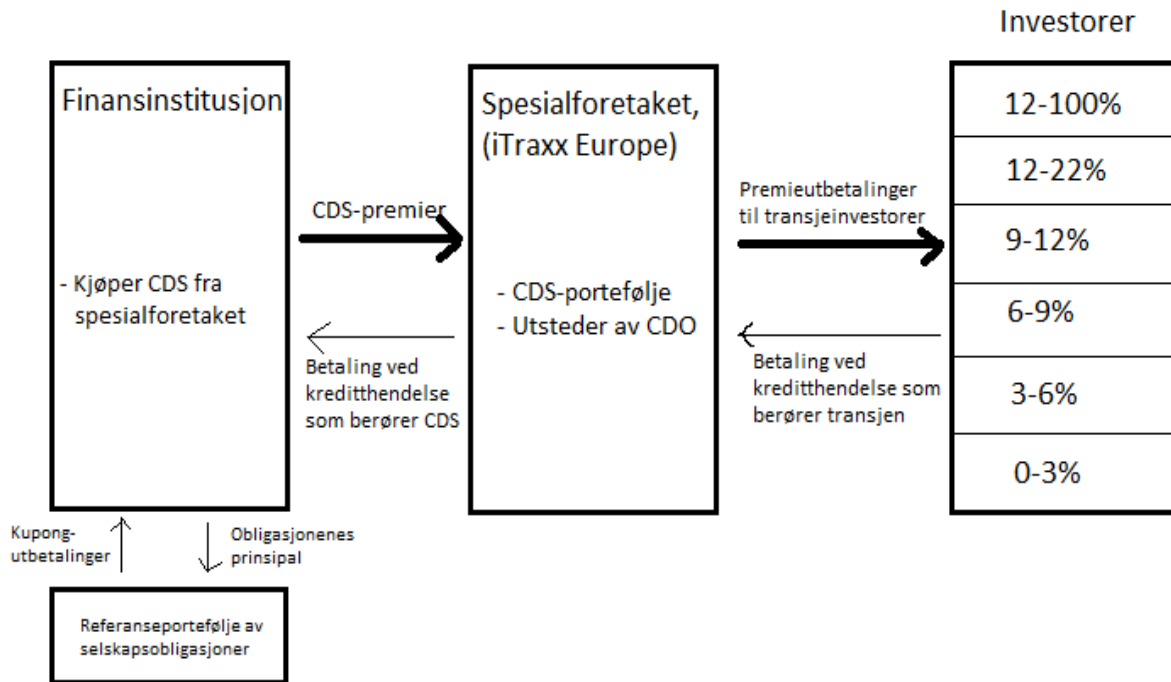
I figur 3 over ser man utviklingen i handelsvolumet til kontantstrøm-CDOer siden millennium. Man ser det åpenbare, at dette kredittinstrumentet var en døgnflue¹¹, grunnet sin store risiko og uoversiktighet. Toppen ble nådd i årsskiftet 2006/2007 med tilnærmet stopp i handelen sommeren 2008. Det var da et instrument som skapt for å blåse opp bobler(Deckan, 2010). CDOer har derfor en usikker fremtid. Utstedelser av disse opphørte i 2008 og det er en offentlig mistro mot disse som er sannsynlig å vedvare, om ikke effektive reguleringer kommer på plass.

Når vi nå har sett på CDO-strukturen, går vi videre og konsentrerer oss om varianten der kredittderivater er underliggende, istedenfor boliglån og kredittkortgjeld, såkalte syntetiske CDOer.

2.3.1 Syntetisk CDO

Strukturen til en syntetisk CDO er ikke helt ulik kontantstrøms-CDO som ble beskrevet i forrige avsnitt. Forskjellen nå er at spesialforetaket ikke overtar eierskapet på den underliggende porteføljen slik som ved en ordinær CDO. Risiko og avkastning blir nå overført gjennom transjer til investorene ved at spesialforetaket utsteder CDSer på kreditt fra den underliggende porteføljen(referanseporteføljen).

¹¹Dette er mine egne personlige betraktninger



Figur 4: Strukturen til en syntetisk CDO

CDSene på de ulike selskapsobligasjonene i referanseporteføljen blir kjøpt opp i markedet på vanlig måte og danner en kontantstrøm av periodiske premieutbetalinger inn til spesialforetaket. Disse transjeres så direkte ut til investorene på lik måte som for en ordinær CDO, der prioriteringsrekkefølgen på premiene bestemmes av transjenes prioritet og forpliktelser ved eventuelle kreditthendelser, se figur 4 over. Transjeinvestorene kompenserer kjøperne av CDS for eventuelle tap i referanseporteføljen som overskrider innslagspunktet men som er lavere enn utslagspunktet. Jo lavere innslagspunktet på transjen er, jo høyere er risikoen forbundet med den og følgelig premien også til transjeinvestorene.

I tillegg til å være en diversifisert indeks og et fikspunkt av likvide CDSer i markedet er iTraxx Europe IG også ganske lik en syntetisk CDO, da kontantstrømmen transjeres ut til investorer¹². Hver indeksserie oppgir gjennomsnittlig spread(indeksen) for alle CDSene i porteføljen. Fra 2003 ved indeksen sin oppstart til begynnelsen av 2009 fikk investorer i egenkapitaltransjen et på forhånd avtalt beløp (i prosent) av transjens andel av pålydende i tillegg til en årlig spread på 500bp, mens de resterende transjene hadde flytende årlig spread basert på markedets forventninger om indeksen og kontantstrømmene.

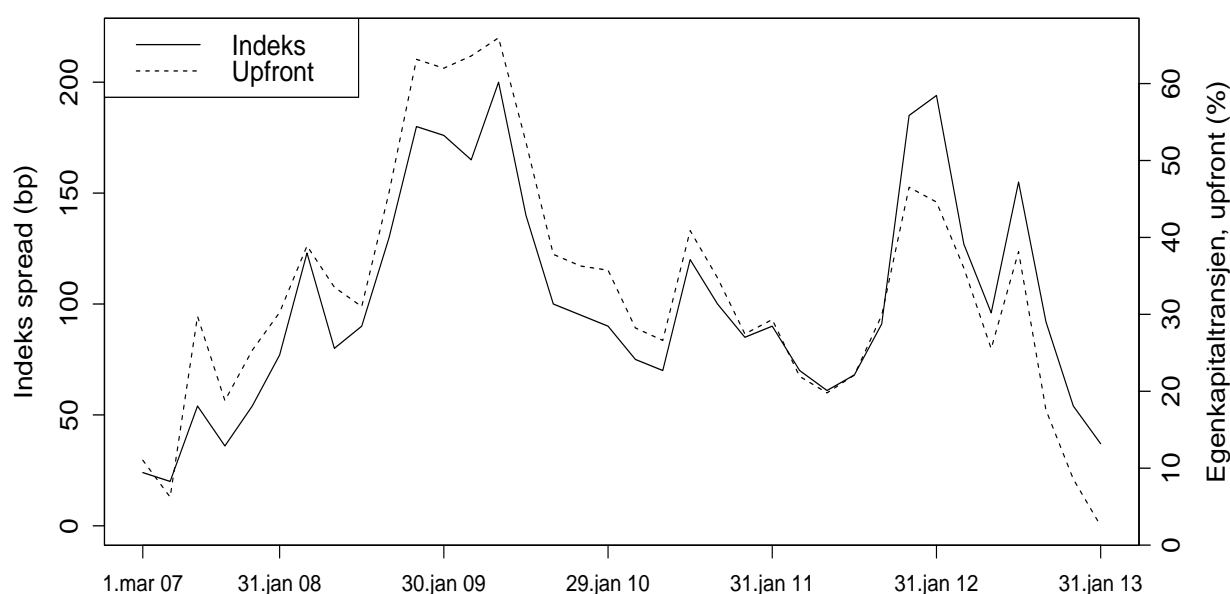
Serie \ Transje	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	CDS indeks
28.september 2007	19%	92bp	37bp	24bp	15bp	36bp
28.september 2008	42%	595bp	320bp	170bp	75bp	117bp

Tabellen over er fra et eksempel på en syntetisk CDO, ved den transjerte DJ iTraxx Europe

¹²Strukturen er lik for syntetisk CDO og de transjerte indeksene. Men det ikke en syntetisk CDO i rette forstand siden iTraxx Europe IG er ufinansiert(Wang, 2006). Men for å lette på trykket vil jeg i denne oppgaven i noen sammenhenger betrakte iTraxx som en syntetisk CDO, slik tittelen på oppgaven henter til

8. og 10.serie. Vi ser at indeksen har 5 transjer: [0, 3], [3, 6], [6, 9], [9, 12], [12, 22] i prosent av totale pålydende. En investor i 3-6%-transjen ville 28.september 2007 motta 92bp av pålydende mot å forsikre mot eventuelle tap som berører transjen. Vi ser at blandt annet Lehman Brothers kollapset i september 2008, og transjespreadene økte betraktelig mellom disse to årene. (Glasserman et.al, 2012).

I figur 5 under ser vi at toppen på indeksen var over 200bp i årsskiftet 2008/2009. Årsaken til dette var at markedet var i den oppfatningen at veldig mange selskaper i Europa i overskuelig framtid ville bli betalingsudyktige. Vi ser også at transjepremien til egenkapitaltransjen er sterkt korrelsert med indeksen, og at indeksen(i denne illustrasjonen) er på vei mot samme nivå som før finanskrisen i 2007 på rundt 20-30bp årlig¹³.



Figur 5: Itraxx Europe Serie 6-9 Versjon 1 2007-2013. Indeksspread (bid) venstre akse, og på forhånd avtalt beløp for egenkapitaltransjen, U, høyre akse. Kilde: Markit¹⁴

Under og etter finanskrisen har særlig den transjerte Itraxx Europe-indeksen gjennomgått store forandringer i strukturen. Dette har vært for å bøte på den store usikkerheten i markedet og da særlig grunnet svært volatile kurser og forventninger i perioden rett før og under markedsuroen. Med innføring av forhåndsbeløp for flere transjer ville man redusere motpartrisikoen. Følgende forandringer er blitt gjort siden oppstarten i 2003(Cecchetti& Nappo, Banca D'Italia, 2012):

- → Januar 2009: For 0-3%-transjen på forhånd avtalt beløp (upfront) $U_{0,3}$ med en fast spread på 500bp av pålydende. Ingen fast spread for de øvrige transjene.
- Mars 2009 → Januar 2010: For 0-3%-, 3-6%- og 6-9%- transjene upfront med en fast spread på 500bp av pålydende. Ingen fast spread for de resterende seniortransjene.

¹³Fra artikkel i Financial Times: Johnson& Oakley (2009)

¹⁴Indeks- og transjespreader på månedlig basis for Markits mest handlede indekser er tilgjengelig gratis på <http://www.creditfixings.com/CreditEventAuctions/itraxx.jsp>

- Mars 2010: For 0-3%-transjen upfront med fast spread 500bp på pålydende. Transje 3-6% og 6-9% upfront med fast årlig spread på 300bp. Transje 9-12% og 12-22% upfront og fast spread på 100bp.
- Mars 2010 → Okt 2010: Transje 0-3%, 3-6% og 6-9% upfront med fast årlig spread 500bp. Transje 9-12% og 12-22% upfront i tillegg til en årlig spread på 100bps
- Nov 2010 → Idag¹⁵:

	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	22-100%
Upfront	$U_{0,3}$	$U_{3,6}$	$U_{6,9}$	$U_{9,12}$	$U_{12,22}$	$U_{22,100}$
Fast spread	500bp	500bp	300bp	100bp	100bp	100bp

Vi ser i tabellen over at alle transjene nå har et forhåndsbeløp i tillegg til en årlig fast spread, som blir bestemt av markedspriser.

Vi har nå gått igjennom teorien og formålet til sentrale kredittderivater i finansmarkedet: CDS, indekser på CDS, CDO og syntetisk CDO ved eksempel på den transjerte iTraxx-indeksen. For mange, og selv i dagligtale, er endel av disse fortsatt synonymt med den foregående finanskrisen. Derfor vil jeg i det neste avsnittet presentere et lite sammendrag, med et særskilt fokus på ovennevnte kredittderivaters rolle i denne.

2.4 Subprime- og finanskrisen

Jeg vil nå kort redegjøre for subprime- og finanskrisen i perioden 2007-2009, og særlig kredittderivatens rolle i dette, der handelen i disse de foregående årene hadde vært enorm. Diskusjonen rundt de makrospesifikke- og sosiale aspektene av finanskrisen er utenfor rammen for problemstillingen i denne oppgaven, men likevel er det fornuftig med litt innsikt, da krisene fikk store konsekvenser for bankvesenet og dermed likviditeten i markedet. Kildene for dette avsnittet er Schlösser(2011), Secchetti (2012), Hellwig (2009) og Donneli (2010).

I februar 2007 begynte flere hus- og pantelån(mortgage) å forsømmes i USA og subprimekrisen var igang¹⁶. Etter at indeksen Dow Jones Industrial Average slo rekorder 19.juli 2007 med all-time-high verdi på 14000, begynte nedadgående trender å oppstå i verdens finansmarkeder. I løpet av den tiden oppnådde ratingbyråer en lavere tiltro i markedet, grunnet deres feilberegninger av flere kredittderivater, slik som MBS(Mortgage Backed Securities)¹⁷ og CDO. Flere CDOer var da bygget opp av huslån med lav sikkerhet¹⁸ og dem var av ratingbyråene blitt gitt høye kredittverdigheter¹⁹, slik at dem kunne bli solgt til investorer over hele kloden. Ratingbyråene hadde blant annet oversett betydningen av smitteeffekter og konkursskorrelasjon, og strukturene i kredittderivatene var ofte uoversiktlig slik at dem blant annet var vanskelige å stressteste. Det var først noen

¹⁵Fra Mars 2012 kunne man handle på superseniortransjen 22-100%.

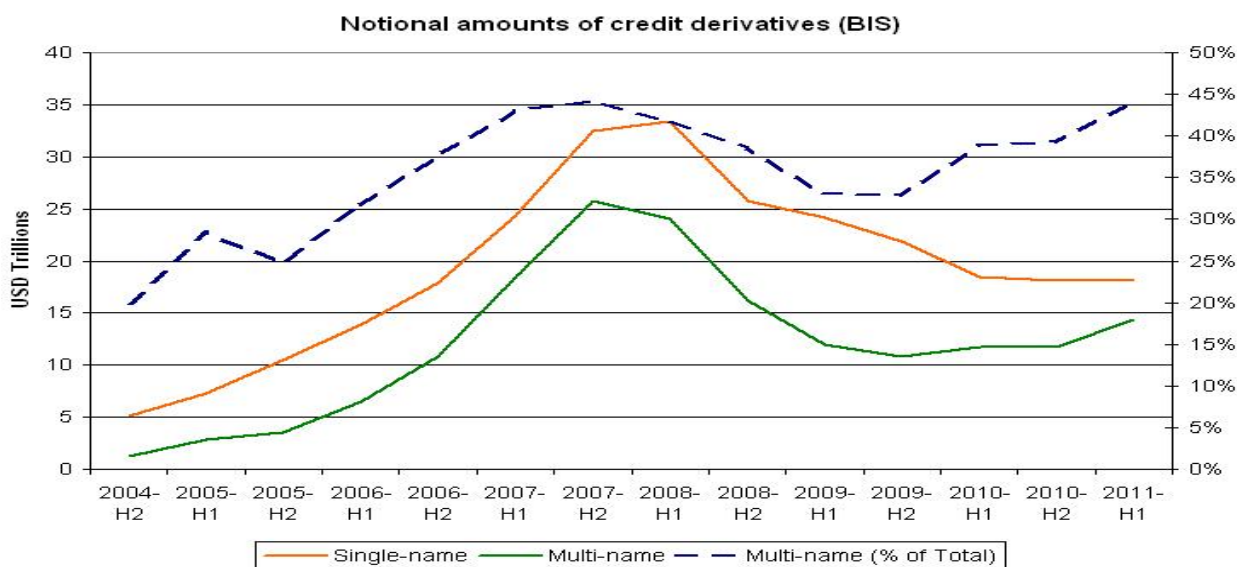
¹⁶Se artikkelen til Demyanyk & Hemert(2009) for mer informasjon om årsakene til subprimekrisen.

¹⁷MBS var CDOer med hus- og pantelån som underliggende, med den forskjellen at dem ikke var transjerte.

¹⁸Årsaken til dette var faktisk politisk motivert, da myndighetene i USA ønsket at flere skulle få tilgang på lån for å kjøpe hus. De gav også kapital til investeringsbankene Fannie Mae og Freddie Mac for å kjøpe MBS med lav sikkerhetslån som underliggende

¹⁹I huslånsmarkedet var CDOer som var pakket sammen av verdipapir på pantelån gitt topprating, dvs. AAA av Standard & Poors

måneder inn i subprime-krise at ratingbyråene begynte å redusere kredittverdigheten på flere av disse kredittderivatene. Dette gav en kollaps i den amerikanske pante- og huslånsindustrien som ble etterfulgt av en likviditetskrise som dermed påvirket hele finansbransjen. Dette ble så svært synlig i september 2008 etter flertallige konkurser, med myndighetenes redningsoperasjoner for å redde flere store banker og forsikringsselskaper slik at økonomien ikke skulle stoppe helt opp. Etter at summen på kredittbeskyttelse solgt gjennom CDOer i denne perioden klatret opp til 1000 milliarder dollar, måtte investorer ta på seg tap på opptil 90% på kontrakter der finansinstitusjoner var underliggende. DAX 30 og S&P500 hadde da tapt rundt 20% inntil kollapsen i den finansielle sektoren september 2008, hvor fallet av Lehman Brothers for mange markerte starten på finanskrisen. Syntetiske CDOer muliggjorde verdipapirifiseringen til å fortsette å utvide på tross av nedtappede huslånsmarkeder, fordi dem gav spekulanter mulighet til å inngå veddemål på fall av flere investeringsbanker, siden dem var i besittelse av flere MBS. Dette gjorde at krisen fortsatte.²⁰ Med den lave tiltroen til ratingbyråene samt restriksjoner på utlån og en pågående likviditetskrise var det ikke lenger et marked for vanlige kontantstrøms-CDOer, se figur 3. Likevel har markedet for transjerte CDS-indeks, CDS og andre kredittderivater klart seg bedre, noe som kan observeres i figur 6 nedenfor. En utflating oppstod i 2009 etter fallet fra 2008, med et stigende marked for kredittderivatporteføljer. En artikkel fra Bloomberg²¹ (2013) peker på at markedet for syntetiske CDOer er i blomstring igjen, siden investorer søker alternativer til obligasjoner med rekordlave yields (avkastninger).



Figur 6: Kredittderivatmarkedet 2004-2011. Kilde: FT Alphaville v/Lisa Pollack (2012)

²⁰Dette er årsaken til at iTraxx Europe IG 5Y 9.serie med oppstart 20.mars 2008 fortsatte å være den mest handlede selv om den var "off-the-run", som vi skal se i kapittel 5.4.2

²¹Se <http://www.bloomberg.com/news/2013-03-20/synthetic-cdos-making-comeback-as-yields-juiced.html>

3 CDO prising, det elementære rammeverket

For å prise en CDO trengs det et elementært rammeverk som her blir presentert. I det følgende legger vi til grunn at strukturen er en syntetisk CDO med referanseportefølje av obligasjoner og en portefølje av single-name CDSer. Men først litt rekapitulering: Transjainvestorene får en betalingsstrøm av premieutbetalinger ved faste tidspunkt. Ved en kreditthendelse i referanseporteføljen, og om det totale tapet overstiger transjens innslagspunkt må investoren foreta en utbetaling. Sentrale kilder brukt i kapitlet er her Schlösser(2011), Kalemanova(2007) og Wrampelmeyer(2007).

3.1 Elementære prisingsuttrykk

Det foreligger enkelte antagelser som forenkler matematikken noe og underbygger strukturen. Disse antagelsene ligger ikke så langt unna virkeligheten:

- t_0 er tiden man verdsetter CDOen og trenger ikke være utstedelsestidspunktet.
- Premiene fra CDS-porteføljen har en fast spread s unik for transjen, og som bestemmer premien på transjens gjenværende pålydende. Den innbetales gjennom løpetiden på faste tidspunkter $t_1 < \dots < t_n = T$, der T er forfall på den syntetiske CDOen.
- Transjens innslagspunkt K_1 og utslagspunkt K_2 er unike for transjen og er i andel av pålydende verdi av referanseobligasjonen, dvs $0 \leq K_1 < K_2 \leq 1$.
- Netto tapsandel $L_{(K_1, K_2)}^R(t)$ til transjen av porteføljens tap $L_{portefolje}^R(t)$ blir betraktet etter recovery(gjenervervelse) fra obligasjonene. Recoveryraten til obligasjonene er enten generelle, R , eller individuelle, R_i . For enkelhets skyld antar vi at premiene betales i overensstemmelse med pålydende verdi av referanseobligasjonen på samme tidspunkt.
- Diskonteringsraten $r(t)$ er uavhengig av transjens tap $L_{(K_1, K_2)}^R(t)$.²²

3.1.1 Transjepremien

Vi tar i bruk risikonøytral verdsetting med sannsynlighetsrommet \mathbb{Q} , og den risikonøytrale diskonteringsfaktoren $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_{t_0}^{t_i} r(u)du}]$ skrives som $B(t_0, t_i)$.

Premieinnbetalingene til en transje for en påfølgende periode er avhengig av andelen til gjenværende pålydende og den faste transjespreaden s , som gir oss $\Delta t_i \cdot s \cdot [1 - L_{(K_1, K_2)}^R(t_i)]$ når man bruker konstante tidsintervaller. Den forventede nåverdien av alle transjens premieinnbetalinger (Premium Leg) blir da

$$PL = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(1 - L_{(K_1, K_2)}^R(t_i) \right) e^{-\int_{t_0}^{t_i} r(u)du} \right],$$

og ved bruk av uavhengighet mellom rente og transjens tap får vi

$$= \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \cdot \left(1 - EL_{(K_1, K_2)}^R(t_i) \right) \cdot B(t_0, t_i). \quad (3.1.1)$$

Utbetalingene fra investorene skjer først ved en kreditthendelse i referanseporteføljen, og kun om

²²Denne antagelsen gjøres ofte i akademia, og forenkler arbeidet videre betydelig.

transjen bærer tapet. Dette skjer kontinuerlig og det avhenger av utviklingen til transjens tapsandel $L_{(K_1, K_2)}^R(t_i)$. En utbetaling fra investor gitt ved $\Delta L_{(K_1, K_2)}^R(t_i)$ skal i utgangspunktet skje momentant. Schlösser (2011) uttrykker derfor den forventede nåverdien av utbetalingen (Default Leg) som et integral

$$DL = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{t_0}^{t_n} e^{-\int_{t_0}^s r(u) du} dL_{(K_1, K_2)}^R(s) \right],$$

men dersom antagelsen om at utbetalinger kun skjer ved de faste tidspunktene gjelder og ikke umiddelbart ved en kreditthendelse unngår vi integrasjon og kan heller presentere uttrykket for utbetalingene som en sum:

$$\begin{aligned} DL &\approx \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{t_0}^{t_i} r(u) du} \left(L_{(K_1, K_2)}^R(t_i) - L_{(K_1, K_2)}^R(t_{i-1}) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n B(t_0, t_i) \left(EL_{(K_1, K_2)}^R(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}^R(t_{i-1}) \right). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Man ser tydelig at det er differansen mellom tapene i den forrige perioden som utgjør utbetalingene i begynnelsen av den påfølgende, gitt at antagelsen om utbetalingstidspunkt gjelder.

Ved bruk av ekvivalensprinsippet for kontantstrømmer fra forsikringsteori får man den unike transjespreaden s , ved å sette kontantstrømmene (3.1.1) og 3.1.2 lik hverandre på verdsettelsestidspunktet $t = t_0$, altså $PL = DL$:

$$\sum_{i=1}^n s \Delta t_i B(t_0, t_i) \left(1 - EL_{(K_1, K_2)}^R(t_i) \right) = \sum_{i=1}^n B(t_0, t_i) \left(EL_{(K_1, K_2)}^R(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}^R(t_{i-1}) \right),$$

som gir utgangspunktet for premiebetalingene, altså transjespreaden

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n \left(EL_{(K_1, K_2)}^R(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}^R(t_{i-1}) \right) \cdot B(t_0, t_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot \left(1 - EL_{(K_1, K_2)}^R(t_i) \right) B(t_0, t_i)}. \quad (3.1.3)$$

I dette intuitive uttrykket over er det opplagt at det er fordelingen til transjetapet som er det sentrale i fastsettelsen av spreaden. Diskonteringsfaktoren er også interessant, men ved å ta (3.1.3) nærmere i betraktning ser man at den omtrent annulleres. I neste avsnitt vil vi presentere et uttrykk for tapsfunksjonen, som blir viktig i det målrettede arbeidet videre som tar sikte på å finne fordelingen.

3.1.2 Porteføljens tapsfunksjon

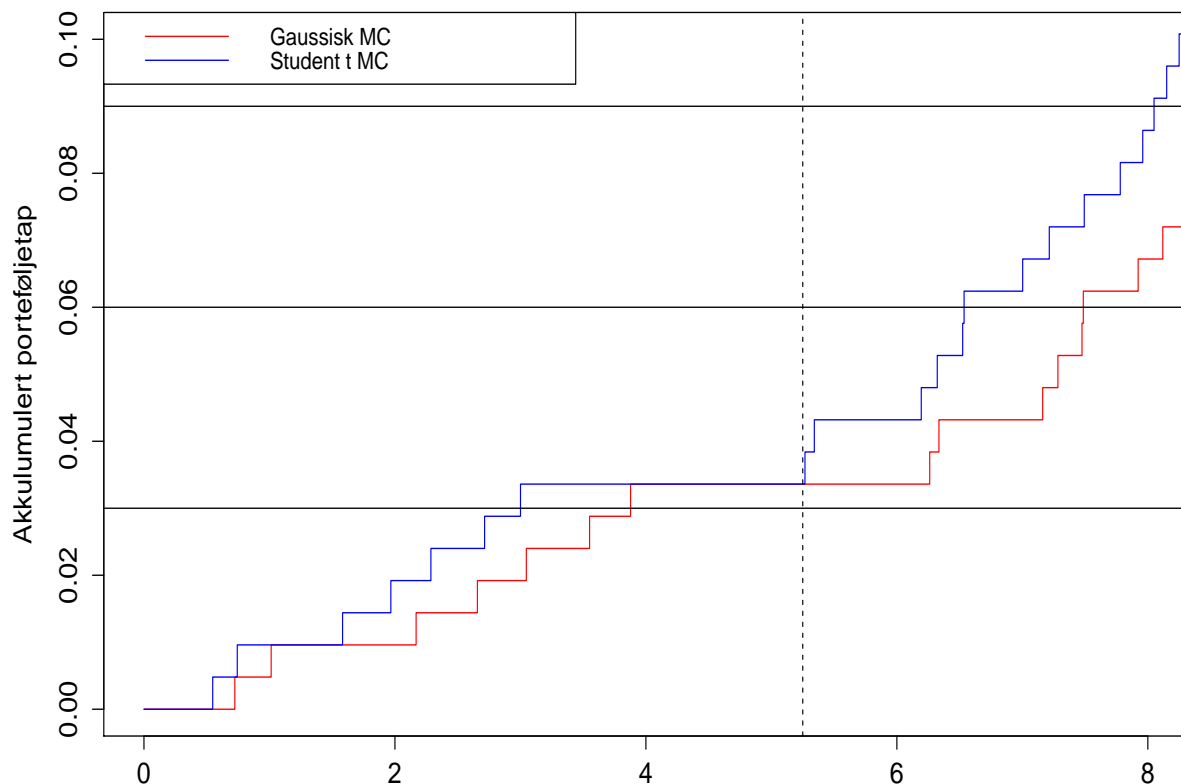
Til å begynne beskriver vi referanseporteføljens akkumulerte tap på N obligasjoner. Vi vil i det følgende bruke noe ny notasjon: For obligasjon i er W_i andelen på porteføljens pålydende, og τ_i er det teoretiske konkurstidspunktet. Er konkurstidspunktet passert for en obligasjon blir tapet $(1 - R_i)W_i$. Referanseporteføljens aggregerte tap på tid t blir da:

$$L_{portefølje}^R(t) = \sum_{i=1}^N (1 - R_i) W_i I_{\{\tau_i < t\}}, \quad I_{\{\tau_i < t\}} = \begin{cases} 1 & \tau_i \leq t \\ 0 & \tau_i > t \end{cases}$$

der indikatorfunksjonen returnerer 1 om konkurstidspunktet er passert. $L_{portefølje}^R(t)$ summerer over alle tapene $(1 - R_i)W_i$ i referanseporteføljen. En forenkling i arbeidet videre er antagelsene om like recoveryrater $R_i = R$ og like andeler av pålydende for alle obligasjonene, slik at $W_i = W = \frac{1}{N}$. Det aggregerte tapet kan nå bli uttrykt som andel av den totale porteføljen:

$$L_{portefølje}^R(t) = \sum_{i=1}^N (1 - R) \frac{1}{N} I_{\{\tau_i < t\}}. \quad (3.1.4)$$

Figur 7 under illustreres $L_{portefølje}^R$ som en hoppeprosess. Vi ser at det alltid stiger, slik at hver gang et tap oppstår blir det gjenværende potensielle tapet for transjen lavere.



Figur 7: Porteføljetapet som en hoppeprosess for en 5-årig kontrakt på en syntetisk CDO. Vi ser at tapet dekker hele den første transjen etter 3 år og deretter gir tap på den neste transjen. Prosessen er simulert ved bruk av gaussisk og Student t copulaer med $\rho = 0.30$ og $\lambda = 0.05$. Se kapittel 4.4.5 for algoritme.

Man ser i uttrykk (3.1.4) over at dersom alle tapene realiseres, får vi et totalt tap på $1 - R$ og dersom k tap realiseres gir det oss et aggregert tap på $\frac{k(1-R)}{N}$, der $k = 0, 1, \dots, N$.

Når vi nå ha sett et uttrykk for porteføljens totale tap over tid, kan vi nå gå over til å finne

transjens aggregerte tap, $L_{(K_1, K_2)}(t)$, uttrykt ved porteføljens tap $L_{portefølje}(t)$:

$$L_{(K_1, K_2)}^R(t) = \begin{cases} 0 & , L_{portefølje}^R(t) < K_1 \\ \frac{L_{portefølje}^R(t) - K_1}{K_2 - K_1} & , K_1 \leq L_{portefølje}^R(t) \leq K_2 \\ 1 & , K_2 < L_{portefølje}^R(t) \end{cases}$$

$$= \frac{\max\left(\min(L_{portefølje}^R(t), K_2) - K_1\right)}{K_2 - K_1}, \quad (3.1.5)$$

For å få fram det forventede kumulative tapet til transjen på tid t , er vi avhengig av å vite mer om fordelingsfunksjonen til $L_{portefølje}^R(t)$. Tapene i referanseporteføljen er en hoppeprosess som over tid tar forskjellige verdier. Fram til tid t er $k = \sum_{i=1}^N I_{\{\tau_i < t\}}$ nettoverdien på tapene i porteføljen og representerer antallet konkurser. Dermed kan sannsynligheten $\mathbb{P}(\text{Antall konkurs} = k|t)$ skrives som:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^N I_{\{\tau_i < t\}} = k\right) = \mathbb{P}\left(\frac{NL_{portefølje}^R(t)}{1 - R} = k\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(L_{portefølje}^R(t) = \frac{k(1 - R)}{N}\right) = F^R(t, k), \quad (3.1.6)$$

der $F^R(t, k)$ er fordelingsfunksjonen til det aggregerte tapet i referanseporteføljen opp til tid t . Formelt sier vi at $L_{portefølje}^R(t)$ tar verdien $L_{portefølje}^{R,k}(t)$ med risikonøytral sannsynlighet $F^R(t, k)$, der $k = 1, \dots, N$. Det forventede tapet opp til tid t blir da ved bruk av regel om diskret forventninger lik

$$EL_{(K_1, K_2)}^R(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\left(\min(L_{portefølje}^R(t), K_2) - K_1\right)^+}{K_2 - K_1} \right]$$

$$= \frac{1}{K_2 - K_1} \sum_{k=1}^m \left(\min(L_{portefølje}^{R,k}(t), K_2) - K_1\right)^+ \cdot F^R(t, k) \quad (3.1.7)$$

$$= \frac{1}{K_2 - K_1} \sum_{k=1}^m \left((L_{portefølje}^{R,k}(t) - K_1) I_{\{K_1 \leq L_{portefølje}^{R,k}(t) \leq K_2\}} \right.$$

$$\left. + (K_2 - K_1) I_{\{K_2 < L_{portefølje}^{R,k}(t)\}} \right) \cdot F^R(t, k)$$

For tilfeller med bruk av kontinuerlige fordelingsfunksjon kan forventningen over omskrives:

$$EL_{(K_1, K_2)}^R(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \int_0^1 (\min(x, K_2) - K_1)^+ dF^R(t, x)$$

$$= \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_0^{K_1} (\min(x, K_2) - K_1)^+ dF^R(t, x) + \int_{K_1}^1 (\min(x, K_2) - K_1)^+ dF^R(t, x) \right) \quad (3.1.8)$$

Ser at det første integralet i (3.1.8) går vekk, siden $\min(x, K_2) - K_1 \leq 0$ for $x \in [0, K_1)$. Dermed

står vi igjen med:

$$EL_{(K_1, K_2)}^R(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^1 (\min(x, K_2) - K_1) dF^R(t, x). \quad (3.1.9)$$

For å få bukt med min-funksjonen i uttrykket over omformulerer vi det ved bruk av oppspalting:

$$\begin{aligned} EL_{(K_1, K_2)}^R(t) &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) dF^R(t, x) + \int_{K_2}^1 (K_2 - K_1) dF^R(t, x) \right) \\ &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_{K_1}^1 (x - K_1) dF^R(t, x) - \int_{K_2}^1 (x - K_1) dF^R(t, x) + \int_{K_2}^1 (K_2 - K_1) dF^R(t, x) \right), \end{aligned}$$

der integral 2 og 3 kan slåes sammen grunnet like grenser. Da får vi et uttrykk for det kumulative forventede transjetapet ved bruk av kontinuerlig fordeling:

$$EL_{(K_1, K_2)}^R(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_{K_1}^1 (x - K_1) dF^R(t, x) - \int_{K_2}^1 (x - K_2) dF^R(t, x) \right). \quad (3.1.10)$$

I beregningene våre videre vil vi ta i bruk 3.1.10 for forskjellige fordelingsantagelser.

3.2 CDS-impliserte konkursintensiteter og recovery

I prisfastsettelsen av en syntetisk CDO kan det være gunstig å vite mer om markedets syn på risikoen forbundet med de underliggende obligasjonene. En måte å evaluere risikoen på er å observere konkursintensitene λ fra markedspriser. Siden λ blir hentet ut fra data for kredittderivater, kan den betraktes som en risikonøytral parameter i en risikonøytral sannsynlighetsfordeling $Q(t_0, t)$. Det er flere måter å finne disse impliserte sannsynlighetene på. En variant er å trekke dem ut fra CDS med forskjellig forfallstid og dermed få en diskret tidsvarierende kurve. En annen tidsbesparende måte å finne konkursintensiteten fra CDS på er å anta at den har kontinuerlige betalingsstrømmer.

3.2.1 Diskret tilnærming.

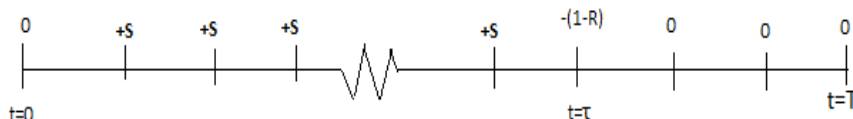
Verdsettelsen på t_0 av en CDS med forfall T og spread s_T er ikke så ulik rammeverket til en syntetisk CDO med to kontantstrømmer, bare her ser vi bort ifra transjeringen og flere utbetalinger. I det følgende gjelder tilnærmet like antagelser, selv om oppbygningen på de to derivatene er ulik:

- De månedlige tidspunktene for den eventuelle utbetalingen er $t_1 < \dots < t_n = T$, der $t_1 = \frac{1}{12}$ og $t_n = \frac{n}{12}$ som i andel av et år. Premiebetaling for perioden gjøres kvartalsvis på tidspunktene $t_3 < t_6 < \dots < t_n$ og betalingen for perioden t_{k-3} til t_k gjøres på t_k . Skjer en kredithendelse mellom to premieinnbetalinger ser vi bort ifra den påløpte premien fra forrige betaling.²³

²³(O’Kane & Turnbull (2003) viser derimot at en slik unngåelse gir signifikante forskjeller i verdsettelse

- Konkursintensiteter er inhomogene, med intensitetsfunksjoner $\lambda(t)$. Hazardratene, eller konkursintensitetene, er stykkevis flate for hver sin respektive tidsperiode og uavhengig av diskonteringsraten²⁴. Eksempelvis er hazardraten for perioden $(0, 1]$ gitt ved $\lambda_{0,1}$
- $S(t_o, t) = e^{-\int_{t_o}^t \lambda(s)ds}$ er sannsynligheten for overlevelse fra t_o til t . Sannsynligheten for konkurs blir da $Q(t_o, t) = 1 - S(t_o, t)$.
- Gjenervervelsesraten ved konkurs på obligasjonen med pålydende verdi 1 er lik R .

En typisk struktur til en CDS-kontrakt for investor(forsikringselger) med nominell verdi 1 er illustrert i figur 3.2.1 under. Vi ser at første betaling skjer for t_1 og opphører for $t > \tau$. Investor er da pliktig til å betale inn pålydende minus recovery til forsikringskjøper.



Figur 8: Tidslinje CDS-kontrakt.

Den forventede nåverdien av alle premieinnbetalinger er da lik s_T multiplisert med en risikabel annuitet(kvartalsvis betaling av 1)

$$PL_{CDS} = s_T \sum_{i=3, \dots, n} \Delta t_i \cdot S(t_o, t_i) \cdot B(t_o, t_i) \quad (3.2.1)$$

Den forventede nåverdien av den eventuelle utbetalingen fra utstederen av CDS kan omformes på summeform:

$$DL_{CDS} = (1 - R) \int_0^{t_n} B(t_o, s) d(1 - S(t_o, s)) \quad (3.2.2a)$$

$$= (1 - R) \sum_{i=1}^n (S(t_o, t_{i-1}) - S(t_o, t_i)) \cdot B(t_o, t_i). \quad (3.2.2b)$$

Ekvivalensprinsippet fra forsikringsteori gir premien for den aktuelle CDSen, ved å sette disse to betalingstrømmene lik hverandre på verdsettelsestidspunktet, $PL_{CDS} - DL_{CDS} = 0$:

$$s_T \sum_{i=3, \dots, n} \Delta t_i \cdot S(t_o, t_i) \cdot B(t_o, t_i) - (1 - R) \sum_{i=1}^n (S(t_o, t_{i-1}) - S(t_o, t_i)) \cdot B(t_o, t_i) = 0. \quad (3.2.3)$$

For å finne konkursintensitetene til en obligasjon, merker man seg at det finnes flere forfall på CDSer på samme selskap. Det finnes forfall på CDS kontrakter på 1, 3, 5, 7 og 10 år, og man kan hente ut disse 5 intensitetene suksessivt ved å begynne med den kontrakten med snarest forfallstidspunkt, $T = 1$. Ved å bruke følgende algoritme finner man dem(Korsnes, 2008)²⁵

- For $T = t_{12} = 1$ år bruker man s_1 i 3.2.3 og trekker ut $\lambda_{0,1}$ ved å løse numerisk den roten

²⁴Som proxy for den risikofrie renten brukes LIBOR eller yieldkurver til statspapirer

²⁵En noe mer kompakt framstilling av algoritmen er gjort av Baranovski et.al (2009). Her refereres metoden som en bootstrap metode, som ikke må forveksles med den statistiske metoden ved Monte Carlo simuleringer.

som oppfyller:

$$s_1 \sum_{i=3,\dots,12} \Delta t_i e^{-\lambda_{0,1} t_i} B(t_0, t_i) - (1 - R) \sum_{i=1}^{12} (e^{-\lambda_{0,1} t_{i-1}} - e^{-\lambda_{0,1} t_i}) B(t_0, t_i) = 0.$$

- For $T = t_{36} = 3$ år bruker man spreaden for 3 år, s_3 , og $\lambda_{0,1}$ fra forrige iterering og trekker ut $\lambda_{1,3}$ ved å løse følgende

$$\begin{aligned} s_3 \left(\sum_{i=3,\dots,12} \Delta t_i e^{-\lambda_{0,1}(t_i-t_0)} B(t_0, t_i) + \sum_{i=3,6,\dots,24} \Delta t_i e^{-(\lambda_{0,1} + \lambda_{1,3}(t_i-t_0))} B(t_0, t_i) \right) \\ - (1 - R) \left(\sum_{i=1}^{12} (e^{-\lambda_{0,1}(t_{i-1}-t_0)} - e^{-\lambda_{0,1}(t_i-t_0)}) B(t_0, t_i) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{24} (e^{-(\lambda_{0,1} + \lambda_{1,3}(t_{i-1}-t_0))} - e^{-(\lambda_{0,1} + \lambda_{1,3}(t_i-t_0))}) B(t_0, t_{i+12}) \right) = 0 \end{aligned}$$

- Dette gjøres så for økende forfallstid, og ved bruk av hazardratene funnet over for de tilgjengelige spreadene s_5, s_7, s_{10} .

Med denne metoden ekstrakterer man de implisitte konkursintensitetene i markedet og dermed ikke den sanne. Innbakt i disse impliserte intensitetene er også likviditeten til CDSen, risikoaversjon til investorer, tilbud og etterspørsel samt økt volatilitet som følge av smitteeffekter på verdsettelsestidspunktet. Altså, det er ikke bare forventninger om konkurs man observerer i de implisitte hazardratene. Ofte ser man at konkursintensitetene til selskaper øker tilnærmet proporsjonalt med tiden, noe som reflekterer den økte usikkerheten med lenger tidshorisont. For verdiselskaper eller høyt ratede selskaper er det også mulig å se tilnærmet flate hazardkurver. Tabellen under inneholder CDS spread for British Airways (Myklebust, 2007). Ved å bruke algoritmen over og med en fast teoretisk årlig diskonteringsrate på 3.5% får man ut intensitetene for $t_0 = 0$:

CDS forfall	$T = 1$	$T = 3$	$T = 5$	$T = 7$	$T = 10$
CDS spread (bps), s_T	25.0	62.0	125.5	152.5	194.0
Impl. intensitet, λ	0.000433	0.001324	0.004799	0.003805	0.012461
Impl. $Q(0, T)$	0.000433	0.003076	0.012598	0.020084	0.056040

3.2.2 Kontinuerlig tilnærming

Hvis man betrakter en CDS med kontinuerlige betalingsstrømmer, finner man den konstante konkursintensiteten ved ekvivalensprinsipp. Over antok man at informasjon om spread til CDS for flere forskjellige forfall var tilgjengelige. Men ved prising og kalibrering av syntetiske CDO-transjer har man ofte kun tilgjengelige priser for ett forfallstidspunkt. Dermed får man en konstant konkursintensitet og dermed lineær kredittkurve, og ikke diskret som i tilfellet over (Wu, 2008). Antagelsene er som følger (Wang et al. (2010), Mercurio (2006), Schaefer (2012)):

- Den eventuelle utbetalingen skjer momentant til kjøper ved kreditthendelse. Innbetalingen fra kjøper gjøres kontinuerlig.
- Konkursintensiteten λ_T er konstant for forfall T .

- $S(0, t) = e^{-\lambda_T t}$ er sannsynligheten for overlevelse til tid t .

Man har da at den forventede nåverdien til premieinnbetalingene (??) kan skrives på kontinuerlig form:

$$\begin{aligned}
 PL_{CDS} &= s_T \sum_{i=3, \dots, n} \Delta t_i \cdot S(0, t_i) \cdot B(0, t_i) \\
 &\approx s_T \int_0^T B(0, s) e^{-\lambda_T s} ds \\
 &= s_T \cdot \bar{a}_{0:\bar{T}}
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Likeledes har vi fra (3.2.2) at den forventede nåverdien av utbetalingene er gitt ved:

$$\begin{aligned}
 DL_{CDS} &\approx (1 - R) \int_0^T B(0, s) d(1 - S(t_0, s)) \\
 &= (1 - R) \lambda_T \int_0^T B(0, s) e^{-\lambda_T s} ds \\
 &= (1 - R) \lambda_T \cdot \bar{a}_{0:\bar{T}}
 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

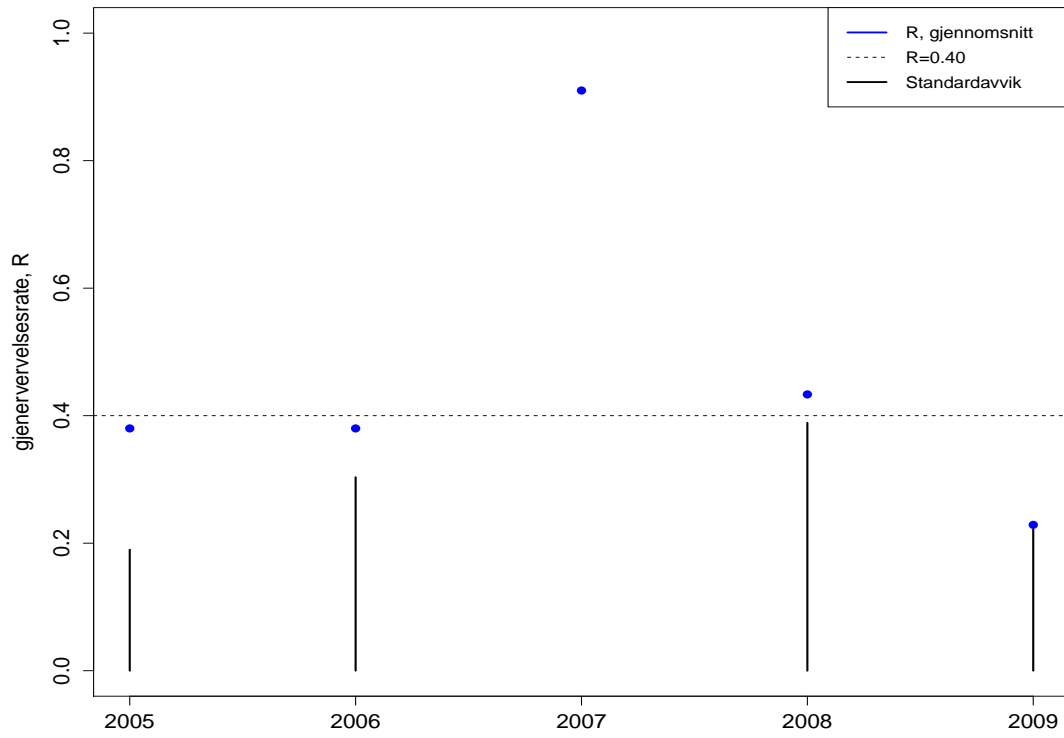
Både (3.2.4) og (3.2.5) er nå uttrykt ved risikable annuiteter. Ekvivalensprinsippet $PL_{CDS} = DL_{CDS}$ for usikre kontantstrømmer gir oss den konstante konkursintensiteten til CDS med forfall T :

$$\begin{aligned}
 s_T \cdot \bar{a}_{0:\bar{T}} &= (1 - R) \lambda_T \cdot \bar{a}_{0:\bar{T}}, \\
 \lambda_T &= \frac{s_T}{1 - R}.
 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Merk at dette er en snarvei, da premiebetalingene i en løpende CDS-kontrakt ikke gjøres kontinuerlig, men kvartalsvis eller halvårlig bestemt i kontrakten. Likevel gir denne metoden kun marginale avvik når spreaden er lav, iforhold til å løse (3.2.3) (med forfall T istedenfor $T = 1$) for den ukjente parameteren λ .

3.2.3 Recovery

Gjenervervelsesraten R er ikke observerbar for den aktuelle CDS spreaden og er derfor en parameter som endrer seg for hvem som betrakter markedet og den aktuelle obligasjonen. Markedets historiske gjenervervelsesrater er tilgjengelige, og som man ser i figur 9 nedenfor har den historisk vært sentrert rundt 40%. Ved å ta en titt på søylene i diagrammet som beskriver standardavvikene fra det aktuelle årsgjennomsnittet finner man en stor usikkerhet rundt estimatet. Selv om det ikke er tydelig nok i diagrammet kan man skimte en trend i nedadgående retning fra 2007, altså der mindre kapital favner investorer ved en kreditthendelse, som viser tiden under finanskrisen.



Figur 9: Kilde: A Credit Trader, Seeking Alpha (2009).

4 Klassiske prisingsmodeller CDO

I dette kapittelet skal vi se på et knippe av de klassiske prisingsmodellene for CDO. Dette er modellene som tidlig ble akseptert av markedet, grunnet deres enkle og intuitive form. Samtidig ligger det til grunn endel modellantagelser som har vært grobunn for stor diskusjon. For eksempel modellerer de kredittporteføljene med en fast tidsuavhengig korrelasjon for alle aktiva, og lik konkurssannsynlighet. Dette er kjent som LHP-antagelser, og er mye brukt for store diversifiserte porteføljer av kreditt. LHP står for Large Homogeneous Portfolio (Stor Homogen Portefølje) og blir brukt i dimensjonreducerende faktormodeller, der ideen er at alle selskapene er utsatt for de samme former for usikkerhet; faktorer. Vi behandler en såkalt en-faktor modell, hvor verdien til ethvert selskap i porteføljen er uavhengig de resterende om vi betinger på en felles systematisk faktor, gjerne markedsconjunkturer. Denne faktoren representerer usikkerheten som påvirker alle selskapene samtidig. Faktormodellen blir så kombinert med en strukturell modell for å beregne når ethvert selskap går konkurs, som er en utvidelse av Merton's (1974) opsjonsbaserte modeller. I denne tilnærmingen går selskap i konkurs på tid t om verdien av selskapet går under en viss grense $C_i(t)$ basert på selskapets individuelle sannsynlighet for konkurs. Slike faktormodeller er ofte teoretisk fornøyelige, og blir derfor mye anvendt i praksis. Utfordringen oppstår først når man skal spesifisere fordelingene til komponentene i faktormodellen.

I dette kapittelet skal vi først se på utviklingen på forskningssiden med ulike prisingsmodeller, før vi studerer en-faktormodellen vår ved bruk av normalfordelingen. Deretter presenteres teorien ved bruk av Student t . Videre vises den mer sentrale utfordringen ved den gaussiske faktormodellen, korrelasjonssmilet, før vi går over på copulateori og presenterer en Monte Carlo algoritme for CDO-prising.

4.1 Ulike modeller for prising

Det har vært foreslått et stort antall forskjellige CDO-prisingsmodeller opp igjennom årene. De mest populære har vært basert på copulafunksjoner. Markedsstandarden er den Gaussiske copulaen foreslått av LI(1999). Burtschell& Laurent (2008) sammenlikner utvalgte copulaer. De alternative verdsettelsesmetodene er faktormodellene med stokastiske faktorer (Andersen & Sidenius, 2004), intensitetsbaserte modellene til Due & garleanu (2001), de multivariate aktiva- verdsettelsesmodellene til Zhou(2001) og Overbeck & Schmidt (2005). Andre strømninger i forskningsmiljøet har vært faktormodellen vi har nevnt med forslag til utvidelser fra Schönbucher (2005), Bennani (2005), Sidenius, Piterbarg & Andersen (2008), Filipovic og Overbeck & Schmidt (2011) blant mange flere. Den velkjente gaussiske en-faktor copulaen til Li (2000) og Hull and White (2004), som blir presentert kan som oftest ikke forklare transjespreaden observert i markedet, på grunn av dens manglende evne til å produsere høye nok sannsynligheter for ekstreme begivenheter. Derfor har det de siste 10 årene vært mange hypoteser rundt avhengighetsstrukturen til konkurstidspunktene, for å reprodusere transjespreadene. Andersen et al.(2003) og Schloegl (2005) så på Student- t , mens Kalemanova (2007) og Eberlein et al (2008) så på normal invers gaussisk fordeling og de mer eksotiske generaliserte hyperbolske fordelingene. Mai & Scherer (2009) bruker tidsvarierende

stokastisk avhengighet i porteføljene av kreditt.

Den foregående finanskrisen har da satt lys på modellenes manglende evne til å reprodusere markedspriser, og listen over er ikke fullstendig. Om det på ny blir større etterspørsel etter disse kredittderivatene, kan vi ikke se bort ifra at forskningen rundt dem blomstrer opp igjen.

Nå som vi har sett litt på mangfoldet, skal vi nå presentere markedsmoellene for prising av syntetiske CDOer.

4.2 Approksimering ved LHP

I en strukturell korrelert enfaktormodell prøver man å uttrykke et selskaps eiendeler $A_i(t)$ på tid t ved hjelp av en sammenheng mellom strukturelle markedsforhold $M(t)$ og selskapsfesifikke risikoegenskaper $X_i(t)$, slik at

$$A_i(t) = a_i M(t) + \sqrt{1 - a_i^2} X_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2.1)$$

fra notasjonen til Schlösser (2011), der $X_i(t)$ -ene samt $X_i(t)$ og $M_i(t)$ er uavhengige. Man ser her at istedenfor å estimere $N(N-1)/2$ lineære korrelasjoner mellom A_i og A_j for hvert par i, j trenger man nå kun N lineære risikofaktorer a_i , der $-1 \leq a_i \leq 1$. Disse risikofaktorene avveier og beskriver sensitivitene til hvert selskap rundt makroøkonomiske forhold og regnskapsrettede egenskaper. Er a_i høy viser det at selskapets verdi, kurs eller rating avhenger mer av konjunkturelle bevegelser enn idiosynkratisk risiko. En annen egenskap til modellen er at A_i -ene er betinget uavhengige gitt markedsforholdene M til enhver tid.

Denne faktormodellen kan utvides ved å bruke multiple faktorer istedenfor kun a_i (Hull& White, 2004) eller ved å modifisere antagelsene om konstant korrelasjon og recoveryraten (Wang et al., 2006). Vi skal i de neste avsnittene presentere en-faktormodellen ved bruk av normalfordeling og Student-t og i tillegg legge til rette for andre fordelinger. Det matematiske rammeverket for CDO-prising ved LHP blir også presentert.

4.2.1 LHP: Antagelser og bruk av normalfordeling

Ved å la $X_i(t)$ og $M(t)$ begge være standard normalfordelt $N(0, 1)$ i faktormodellen (4.2.1) får vi en ortogonal transformasjon og dermed at $A_i(t)$ også er standard normal:

Definisjon. For uavhengige variabler $B_i \sim N$, $i = 1, \dots, k$ gir skalarproduktet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^k a_i B_i$ en *ortogonal* transformasjon om $\sum_{i=1}^k a_i^2 = 1$. For $B_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, \dots, k$ gir den ortogonale transformasjonen $U = \sum_{i=1}^k a_i B_i$ at U også er en standard normalfordelt variabel.²⁶

Konsekvensen av dette og uavhengighet, via $\mathbb{E}[M(t)X_i(t)] = 0$ og $\mathbb{E}[X_i(t)X_j(t)] = 0$, samt egenskapene til $N(0, 1)$ -fordelingen er at korrelasjonen mellom A_i og A_j for $i \neq j$ fra modellen over

²⁶Se Dobson (2008)

er lik $a_i a_j$:

$$\begin{aligned} \text{corr}(A_i(t), A_j(t)) &= \frac{\text{Cov}(A_i(t), A_j(t))}{\sqrt{\text{Var}(A_i(t))\text{Var}(A_j(t))}} = \mathbb{E}[(A_i(t) - EA_i(t))(A_j(t) - EA_j(t))] \\ &= \mathbb{E}\left((a_i M(t) + \sqrt{1 - a_i^2} X_i(t))(a_j M(t) + \sqrt{1 - a_j^2} X_j(t))\right) \\ &= a_i a_j \mathbb{E}[M(t)^2] + \sqrt{(1 - a_i^2)(1 - a_j^2)} \mathbb{E}[X_i(t)X_j(t)]. \end{aligned}$$

Ved å bruke det at kvadrering av en standard normalfordelt variabel gir chikvadratfordeling med en frihetsgrad, $M(t)^2 \sim \chi^2(1)$, der $\mathbb{E}[\chi^2(1)] = 1$ har man at $\mathbb{E}[M(t)^2] = 1$. Dermed står vi igjen med

$$\text{corr}(A_i(t), A_j(t)) = a_i a_j,$$

altså at korrelasjonen mellom to selskapers eiendeler til enhver tid er gitt ved produktet av deres risikofaktorer ved å bruke denne en faktorsmodellen.

I det følgende tenker vi oss at selskapet går konkurs eller det skjer en kreditthendelse som berører referanseporteføljen om selskapet eiendeler $A_i(t)$ er lavere enn en kritisk grense $C_i(t)$. Analogisk til de risikonøytrale konkurssansynlighetene $\mathbb{Q}(\tau_i \leq t)$ fra observerte markedspriser kan kravet over fremstilles som en sannsynlighet og selskapet går konkurs før tid t når

$$\mathbb{P}(A_i(t) \leq C_i(t)) = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t).$$

Ved bruk av at $A_i(t) \sim N(0, 1)$ medfører det ved en presentil-til-persentil transformasjon til følgende alternative fremstilling:

$$A_i(t) \leq C_i(t) =: \Phi^{-1}(\mathbb{Q}(\tau_i \leq t)), \quad (4.2.2)$$

altså at den kritiske grensen er gitt ved den inverse til konkurssansynligheten. For å få fram den individuelle konkurssansynligheten kan man omformulere kravet ved bruk av (4.2.1) og (4.2.2):

$$A_i(t) = a_i M(t) + \sqrt{1 - a_i^2} X_i(t) \leq C_i(t), \implies X_i(t) \leq \frac{C_i(t) - a_i M(t)}{\sqrt{1 - a_i^2}}.$$

Siden $X_i(t) \sim N(0, 1)$ gir det oss den betingede sannsynligheten for konkurs for selskap i :

$$p_i(t|M) = \Phi\left(\frac{C_i(t) - a_i M(t)}{\sqrt{1 - a_i^2}}\right)$$

I motsetning til simuleringsmetodikker gir analytiske fremgangsmåter en solid tidsreduksjon i prisfastsettelsen, som jo er essensielt for anvendelse i markedet. Samtidig er analytiske formuleringer til en viss grad mer intuitive, og reduserer prisfastsettelsen til enkle uttrykk med valgte eller implisitte parametere. Nedsiden her er at en gjør endel forenklinger og antagelser som ikke stemmer helt med virkeligheten. Men for risikostyringen og forskningen sin del vil en enkel parametrisering være med på å lettere se utslag på risikomomenter som en trenger i en eventuell allokering i en optimal portefølje.

Antagelsene vi gjør videre er essensielt for metoden som gjør at vi i noen tilfeller kan få en analytisk formulering på prisingsproblematikken. Vasicek (1991) har vist at det er mulig med en lukket-form løsning for tapsfordelingen ved bruk av en asymptotisk stor homogen portefølje (LHP) approksimasjon. En stor homogen portefølje inneholder et betydelig stort antall CDSer der dem alle har samme følgende karakteristikker:

- Samme gjenervervelsesrater $R_i = R$
- Like grenser for konkurs, $C_i(t) = C(t)$
- Hver CDS har samme pålydende, og dermed like vektorer i CDS-porteføljen
- Samme konkursintensiter $\lambda_i = \lambda$, og dermed like risikonøytrale konkurssansynligheter $\mathbb{Q}(\tau_i \leq t) = \mathbb{Q}(\tau \leq t)$
- Samme risikofaktorer $a_i = a$, slik at korrelasjonen mellom selskapene nå er like, $\text{corr}(A_i, A_j) = a^2$

Ved å bruke antagelsene over finner man at den betingede sannsynligheten for konkurs gitt de makroøkonomiske forholdene er lik for alle aktiva i porteføljen, slik at

$$p_i(t|M) = p(t|M) = \Phi\left(\frac{C(t) - aM(t)}{\sqrt{1 - a^2}}\right). \quad (4.2.3)$$

Grunnet den betingede uavhengigheten mellom selskapene og at rammeverket er konkurs/ikke konkurs for selskapene hvor vi har $\binom{N}{k}$ kombinasjoner for k tap i en portefølje med N selskaper, så er den betingede tapsfordelingen binomial, altså $L(t)|M \sim \text{Bin}(N, p(t|M))$. Den prosentvise risikonøytrale fordelingen til porteføljetapet $\mathbb{Q}(L(t) = \frac{k}{N}|M)$ kan da uttrykkes via de individuelle betingede konkurssansynlighetene, $p(t|M)$:

$$\mathbb{Q}(L(t) = \frac{k}{N}|M) = \binom{N}{k} p(t|M)^k (1 - p(t|M))^{N-k},$$

og ved å integrere ut $M \sim N(0, 1)$, via $\mathbb{Q}(L(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{Q}(L(t)|m) f(m) dm$, får vi den ubetingede fordelingen til porteføljetapet

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(L(t) = \frac{k}{N}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{Q}(L(t) = \frac{k}{N}|m) d\Phi(m) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{k} \Phi\left(\frac{C(t) - am}{\sqrt{1 - a^2}}\right)^k \left(1 - \Phi\left(\frac{C(t) - am}{\sqrt{1 - a^2}}\right)\right)^{N-k} d\Phi(m). \end{aligned}$$

Det vi er ute etter er et uttrykk for den ubetingede kumulative sannsynligheten til det prosentvise porteføljetapet, $F_N(t, x)$, og følgelig den asymptotiske fordelingen $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(t, x) = F_{\infty}(t, x)$. Siden vi behandler en diskret fordeling med et prosentvis tap Nx som ikke tar heltall bruker vi at $\lfloor Nx \rfloor$ er det høyeste heltallet som ikke overskrider Nx . Dermed får vi den ubetingede kumulative sannsynligheten til det prosentvise porteføljetapet

$$F_N(t, x) = \sum_{k=0}^{\lfloor Nx \rfloor} \mathbb{Q}(L(t) = \frac{k}{N}).$$

Om vi bruker substitusjonen $s = \Phi\left(\frac{C(t) - am}{\sqrt{1 - a^2}}\right)$, altså at $m = (C(t) - \sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(s))/a$ får vi at

$$d\Phi(m) = d\Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(s)}{a}\right),$$

som tilfører helt nye grenser på integralet:

$$-\infty \leq m \leq \infty \Leftrightarrow \infty \geq \frac{C(t) - am}{\sqrt{1-a^2}} \geq -\infty \Leftrightarrow 1 \geq s \geq 0,$$

$$F_N(t, x) = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{\lfloor Nx \rfloor} s^k (1-s)^{N-k} d\Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(s)}{a}\right).$$

Nå er vi i sluttfasen og ønsker å få et uttrykk for den asymptotiske porteføljen. Schlösser (2011) viser ved bruk av asymptotiske egenskaper til den binomiske fordelingen at den kumulative tapsfordelingen til en stor homogen portefølje uttrykkes som²⁷:

$$F_\infty(t, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(t, x) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(x) - C(t)}{a}\right), \quad (4.2.4)$$

der $C(t) = \Phi^{-1}(\mathbb{Q}(\tau \leq t)) = \Phi^{-1}(1 - e^{-\lambda t})$.

Derivering man så (4.2.4) for x, får man porteføljens marginale tapsfordeling:

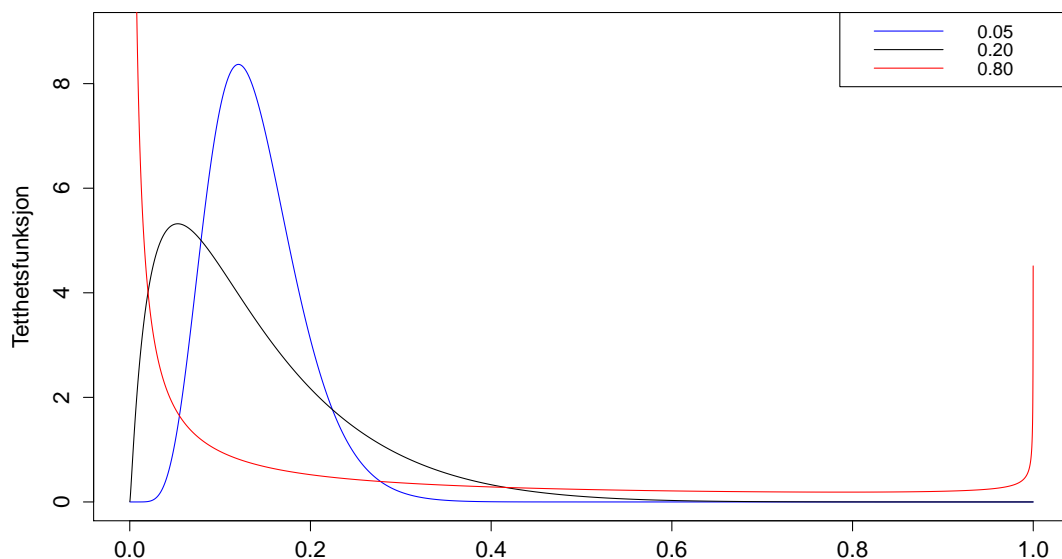
$$f_\infty(t, x) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(x)^2}{2} - \frac{(C(t) - \sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(x))^2}{2a^2}\right). \quad (4.2.5)$$

Bevis. Ved bruk av regel for derivering av inverse funksjoner fra matematisk kalkulus samt tetthetsfordelingen til standard normal får vi:

$$\begin{aligned} \frac{dF_\infty(t, x)}{dx} &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \frac{1}{f^{-1}(\phi^{-1}(x))} f\left(\frac{\sqrt{1-a^2}\phi^{-1}(x) - C(t)}{a}\right) \\ &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{\phi^{-1}(x)^2}{2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{1-a^2}\phi^{-1}(x) - C(t))^2}{2a^2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(x)^2}{2} - \frac{(C(t) - \sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(x))^2}{2a^2}\right). \end{aligned}$$

□

²⁷Dette uttrykket blir også referert som Vasicek-fordelingen



Figur 10: Tetthetsfordelingen til porteføljens tap med varierende korrelasjon

Vi ser i figur 10 korrelasjonens rolle på porteføljens tap. Når korrelasjonen er veldig lav, nærmer fordelingen seg en klokkeform, slik at det forventede tapet for egenkapitaltransjen øker. Ved å se på halene til fordelingene, ser vi at at høyere korrelasjon øker sannsynligheten for mer ekstreme tap, slik at det forventede tapet for mer seniorielle transjer øker. For porteføljens del vil dette bety at mer korrelerte selskaper bidrar til en større sannsynligheten for lave tap, men samtidig øke sannsynligheten for at store deler av porteføljen går konkurs.

4.2.2 LHP med Student-t fordeling

I motsetning til den opprinnelige LHP-approksimeringen der verdien på selskapet eller avkastningen var normalfordelt, ser vi her på muligheten for at den er Student t-fordelt. Fordelene med Student-t fordelingen er at den viser seg å ha mer haleavhengighet og derfor åpner opp for mer ekstreme begivenheter. Schlösser (2011), som notasjonen er hentet fra, skriver at siden Student-t fordelingen ikke er lukket under konvulasjon får man ikke et analytisk uttrykk ved bruk av LHP, men må ta i bruk numerisk metodikk. Schloegl & O’Kane (2005) viser at LHP approksimeringen ved bruk av t-copula faktisk kan uttrykkes via et lukket-form uttrykk for tetthetsfordelingen. Jeg vil her presentere teorien.

Vi har at selskapets eiendeler er dekomponert av to Student t-variabler gjennom risikofaktorene a_i

$$A_i(t) = a \frac{M(t)}{\sqrt{W(t)/v}} + \sqrt{1 - a^2} \frac{X_i(t)}{\sqrt{W(t)/v}},$$

der $M(t), X_1(t), \dots, X_n \sim N(0, 1)$ og er uavhengige. $W(t) \sim \chi^2(v)$ er også uavhengig, slik at hhv $\frac{M(t)}{\sqrt{W(t)/v}}, \frac{X_i(t)}{\sqrt{W(t)/v}} \sim T(v)$ ikke er uavhengige faktorer. Vi vil i denne modellen også anta at selskapet går konkurs om selskapets eiendeler $A_i(t)$ går under en kritisk grense $C_i(t)$, implisert fra

markedets risikonøytrale konkurssansynlighet $\mathbb{Q}(\tau_i \leq t)$. Siden $A_i(t)$ er Student-t fordelt får vi at

$$T(A_i(t) \leq C_i(t), v) = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t),$$

slik at den kritiske grensen er gitt ved bruk av en persentil-til-persentil transformasjon

$$A_i(t) \leq C_i(t) =: T^{-1}(\mathbb{Q}(\tau_i \leq t), v).$$

Fra over har vi da at selskap i går konkurs før tid t hvis følgende krav gjelder:

$$\begin{aligned} A_i(t) &= a \frac{M(t)}{\sqrt{W(t)/v}} + \sqrt{1-a^2} \frac{X_i(t)}{\sqrt{W(t)/v}} \leq C_i(t), \\ \implies X_i(t) &\leq \frac{C_i(t)\sqrt{W(t)/v} - aM(t)}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\eta(t)}{\sqrt{1-a^2}}, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

der vi har forenklet ved hjelp av substitusjonen $\eta(t)$ som også refereres som miksvariabelen i uttrykket. Den vil bli sentral videre i arbeidet med å finne fordelingen. Siden $\eta(t)$ er en funksjon av markedsfaktoren gjør det at $X_i(t)|\eta$ er uavhengige for $i = 1, \dots, N$.

Ved at $X_i(t) \sim N(0, 1)$ har vi at kravet i likning over er kan uttrykkes på betinget sannsynlighetsform gitt $\eta(t)$,

$$p_i(t|\eta) = \Phi\left(\frac{\eta(t)}{\sqrt{1-a^2}}\right).$$

Ved bruk av store talls lov (LLN) og ved de sentrale antagelsene til LHP vil andelen som går konkurs i porteføljen gå mot høyre side i uttrykket over, den betingede individuelle konkurssansynligheten. (Se A.1). Dermed får vi at netto tapsandel i porteføljen er gitt ved

$$L(t) \approx (1-R)p_i(t|\eta).$$

Ved bruk av LHP blir den kumulative fordelingsfunksjonen til porteføljetapet nå gitt ved

$$\begin{aligned} F_{\infty}^R(t, x) &= \mathbb{Q}[L(t) \leq x] \\ &= \mathbb{Q}\left[(1-R)\Phi\left(\frac{\eta(t)}{\sqrt{1-a_i^2}}\right) \leq x\right] \\ &= \mathbb{Q}\left[\eta(t) \leq \sqrt{1-a_i^2}\Phi^{-1}\left(\frac{x}{1-R}\right)\right] \\ &= F_{\eta(t)}\left(\sqrt{1-a_i^2}\Phi^{-1}\left(\frac{x}{1-R}\right)\right), \end{aligned}$$

der man nå er interresert i å finne uttrykk for den kumulative fordelingen til miksturen $\eta(t)a$. Vi henviser til arbeidet gjort av Shcloegl & O'Kane (2005) når vi presenterer den kumulative fordelingen til $\eta(t)$:

$$F_{\eta(t)}(y) = \Phi\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{y}{a}} \Gamma\left(\frac{v}{2}, \frac{v(y+au)^2}{2C(t)^2}\right) e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad \Gamma(s, x) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

Sistenevnte er den ufullstendige gammafunksjonen for halesannsynligheter. Dermed har vi at LHP-

approsimineringsen til porteføljens kumulative tapsfordeling ved bruk av en t-copula modell er gitt ved

$$F_{\infty}^R(t, x) = F_{\eta(t)}(h(x)), \quad h(x) := \sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1} \left(\frac{x}{1 - R} \right).$$

4.2.3 LHP med generelle fordelingsantakelser

Fra enfaktormodellen vi presenterte i begynnelsen av kapittelet lå det til grunn at vi behandlet gaussisk eller Student t-fordelte variabler. Likevel er ikke avstanden til et generelt uttrykk for den asymptotiske tapsfordelingen ved bruk av andre fordelingsantagelser så stor. En fordel med å generalisere ved å gå bort ifra normalitetsantagelser er at tapsfordelingen kan bli mer lik observasjoner og etterlikne naturen i kredittmarkedet. Et eksempel kan være å øke sannsynligheten for sjeldne begivenheter gjennom å produsere tykkere haler i fordelingen til selskapets eiendeler. Man kan også anta at avkastningene eller utviklingen på selskapets eiendeler er forventningskjevve ved å endre på skjevheten. Fordelene er store ved å endre parametriseringen, men i noen tilfeller ender man ikke med et lukket-form uttrykk og dermed at kalkuleringstiden øker.

Vi har nå en generell enfaktormodell for

$$A_i(t) = a_i M(t) + \sqrt{1 - a_i^2} X_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \uparrow,$$

der $M(t) \sim F_M(t, x)$ og $X_i(t) \sim F_X(t, x)$, samt $A_i(t) \sim F_A(t, x)$. Man kan nå ved samme fremgangsmåte som beskrevet over komme fram til et uttrykk for tapsfordelingen. Man antar nå at gjenervervelsesraten er null, $R = 0$, for det prosentvise tapet x mellom 0 og 1.

Dermed har vi fra Schlösser (2011) at den asymptotiske kumulative tapsfordelingen til den homogene referanseporteføljen under generelle fordelingsantagelser er gitt ved

$$F_{\infty}(t, x) = 1 - F_M \left(t, \frac{C(t) - \sqrt{1 - a^2} F_X^{-1}(t, x)}{a} \right), \quad (4.2.7)$$

der $C(t)$ igjen er den kritiske grensen for selskapets eiendeler fra en presentil-til-persentil transformasjon, $C(t) = F_A^{-1}(t, \mathbb{Q}(\tau \leq t))$. Dette vil bli brukt for den Normal Invers Gaussiske modellen i kapittel 5.2.

4.2.4 Forventet transjetap ved LHP

Uavhengig av adekvate fordelingsantagelser kan LHP brukes til å prise en syntetisk CDO. Som vi husker fra kapittel 3.1.2 er det forventede tapet $EL_{(K_1, K_2)}^R(t)$ det essensielle ved utregningen av transjespreaden. Ved bruk av LHP får man ofte en analytisk tilnærming og kan derfor via den kontinuerlige fordelingen $F_{\infty}(t, x)$ finne det kumulative forventede transjetapet.

Vi har da at x representerer det prosentvise netto tapet i porteføljen, mens $(1 - R)x$ viser brutto tap, om antagelsen om konstant recoveryrate gjelder. I motsetning til det forventede transjetapet uttrykt i avsnittet 3.1.2 bruker vi nå ikke en netto tapsfordeling $F^R(t, x)$ for å finne forventningen, men derimot $F_{\infty}(t, x)$ slik at:

$$EL_{(K_1, K_2)}^R(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \int_0^1 ((1 - R) \min(x, K_2) - K_1)^+ dF_{\infty}(t, x).$$

Ved oppspalting av integralene lik metoden i avsnittet referert til får vi at grensene på integralet endres, altså det forventede tapet for messanintransjen mellom K_1 og K_2 blir²⁸

$$\begin{aligned} EL_{(K_1, K_2)}^R(t) &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left(\int_{\frac{K_1}{1-R}}^1 [(1-R)x - K_1] dF_\infty(t, x) - \int_{\frac{K_2}{1-R}}^1 [(1-R)x - K_2] dF_\infty(t, x) \right) \\ &= \frac{1-R}{K_2 - K_1} \left(\int_{\frac{K_1}{1-R}}^1 \left[x - \frac{K_1}{1-R} \right] dF_\infty(t, x) - \int_{\frac{K_2}{1-R}}^1 \left[x - \frac{K_2}{1-R} \right] dF_\infty(t, x) \right). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

For seniortransjen med punkter K og 1 har vi at transjetapet derimot er gitt ved $\max[(1-R)x - K, 0]$, med øvre grense lik $1 - R - K$ og dermed at det forventede kumulative tapet blir

$$EL_{K,1}^R(t) = (1-R) \int_{\frac{K}{1-R}}^1 \left[x - \frac{K}{1-R} \right] dF_\infty(t, x).$$

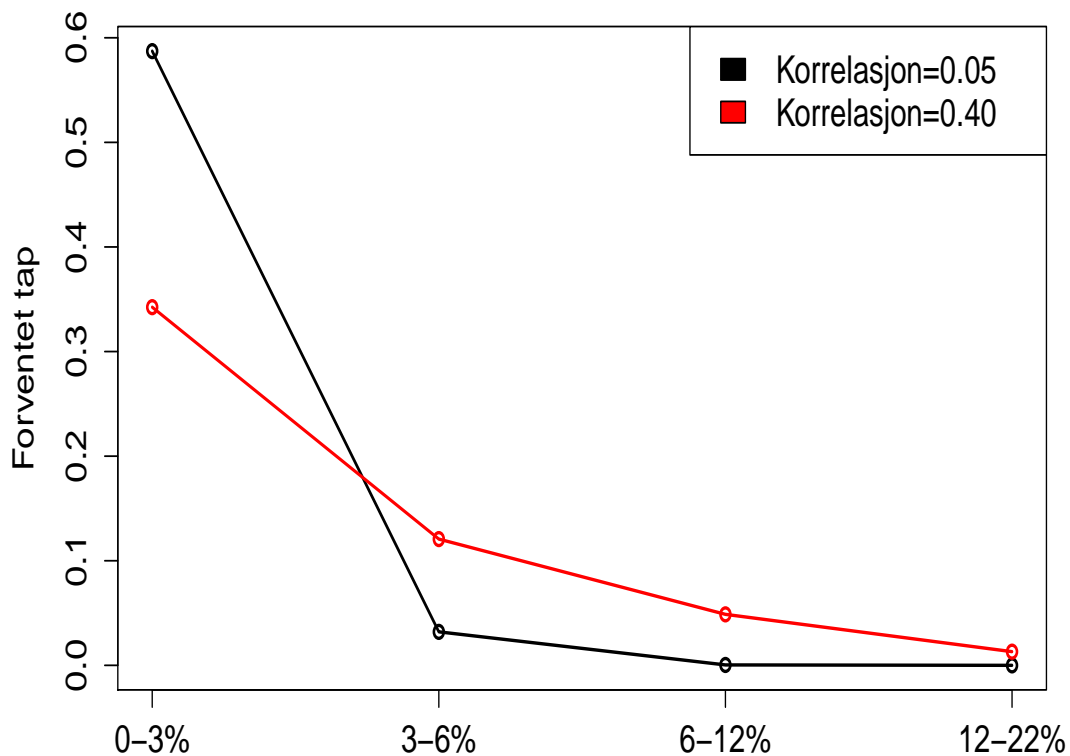
Merk at normaliseringskonstanten $\frac{1}{K_2 - K_1}$ ikke er med. Det er spesielt (4.2.8) som blir brukt videre i arbeidet.

4.2.5 Prising ved LHP

Med tanke på enkelheten til gaussiske enfaktormodellen ble den mye brukt i starten før forskningen rundt CDO-prising intensiverte. Samtidig med utviklingen av indeksene Itraxx og CDX for syntetisk CDOer, ble det gjennom et mer effektivt marked lettere å hente ut korrelasjonsparametere og konkurssansynligheter brukt i en risikonøytral verdsetting. Selv om avvikene til markedsprisene ved bruk av en gaussisk LHP-prising er store gir den fortsatt et intuitivt bilde på risikoen ved endringere av parametrene.

Vi skal nå vise et eksempel på relasjonen mellom det forventede transjetapet og konkursskorrelasjon.

²⁸For egenkapitaltransjen gjelder tilsvarende metode, men da for $K_1 = 1.0 \cdot 10^{-6}$ og $K_3 = 0.03$

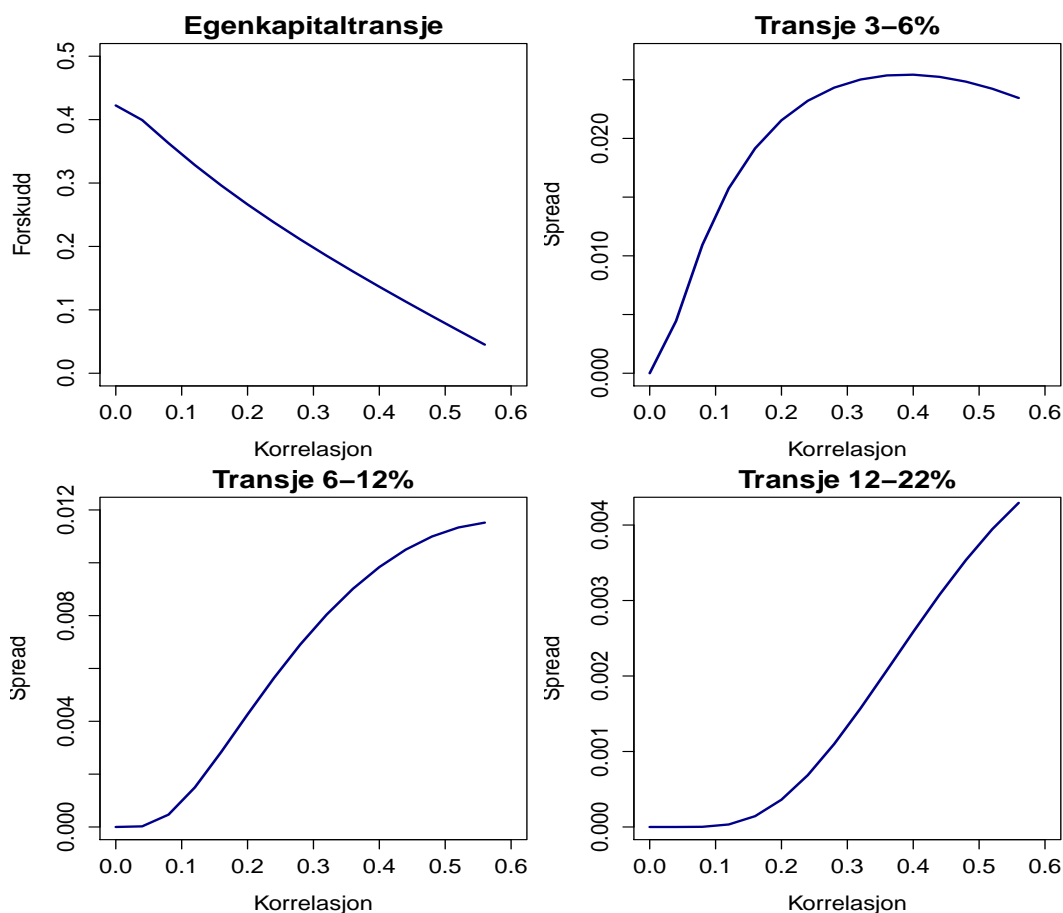


Figur 11: Forventet aggregert brutto transjetap ved varierende korrelasjon ved kontraktens forfall.

Det forventede transjetapet er som vi antok høyt for egenkapitaltransjen ved en lav korrelasjon. Grunnen til det er at konkursene da sjeldnere oppstår i klynger, og at det oftere oppstår tap som berører egenkapitaltransjen og den nedre messanintransjen. Er konkursskorrelasjonen mellom obligasjonene høyere er det også større sannsynlighet for at få konkurser oppstår²⁹ For seniortransjen sin del vil høye korrelasjoner føre til økt sannsynlighet for at store deler av porteføljen går konkurs og resultatet er derfor høyere forventet tap.

For å illustrere sammenhengen mellom premiene og korrelasjonen, ved bruk av det samme gaussiske LHP-rammeverket, har vi kalkulert transjespread for ulike korrelasjoner i figur 12 nedenfor. Har for enkelhets skyld slått sammen messanintransjene 6-9% og 9-12% til en 6-12%-transje.

²⁹Dette avhenger av realiseringen av markedsfaktoren M_t , syklusen i markedet. En høykonjunktur kan resultere i en reduksjon i antall konkurser, selv om obligasjonene er svært korrelerte. Tatt denne muligheten i betraktning reduserer dette det forventede tapet for egenkapitaltransjen.



Figur 12: Prissensitivitet for transjene mot varierende korrelasjon.³⁰

Vi ser fra plottet at forskuddsbeløpet til egenkapitaltransjen har et negativt lineært forhold til korrelasjonen. For de øvrige transjene er det interessant å se junior messanintransjens konkave og ikke-monotone relasjon til spreaden. Intuisjonen er at under både høy og lav korrelasjon er det stor sannsynlighet for at denne transjen vil være intakt.

Flere resultater fra prisingen ved gaussisk LHP blir presentert i siste kapittel. Siden korrelasjonen ikke er en observerbar fast størrelse, er transjeindeksene eksponert mot korrelasjonsrisiko. Men ved å anta at prisingen er gjort med en gaussisk LHP-approksimering eller annen kjent metodikk kan man finne de implisitte korrelasjonene som spreaden er beregnet ut ifra. Disse betraktningene har gitt grobunn for såkalt *korrelasjonstrading* (Lüscher, 2005)³¹, der man handler transjer på bakgrunn av ens forventninger om bevegelsene i den implisitte korrelasjonen. Dette er en svært kompleks form for spekulasjon og man bør ha god kjennskap til makrospeisifikke forhold, eller ha informasjon om eventuelle misprisinger i markedet.

³¹Masterutredningen til Myklebust og Wei Li (2007) beskriver en strategi for korrelasjonstrading for CDO, mens Gibson (2004) beskriver det for first-to-default swaps.

	Lavere korrelasjon (ρ)	Høyere korrelasjon (ρ)
Egenkapitaltransje	Kjøp. Investor spekulerer da i at spreaden blir høyere.	Gå kort ³² i transjen.
Seniortransje	Gå kort i transjen:	Kjøp transjen. Investor spekulerer da i en stigning i transjespread.

Tabell 2: Korrelasjonstrading for syntetisk CDO

JPMorgan Markets(2005) forklarer konkursskorrelasjon med et svært intuitivt eksempel: En blind katt beveger seg gjennom et rom fylt med musefeller. Dersom katten kun har ett liv(egenkapitaltransjen) vil den foretrekke at fellene ligger i klynger på gulvet(høy korrelasjon), da sannsynligheten for å treffe en vil være lavere. Derfor er premieutbetalingene lavere ved høy korrelasjon. Dersom katten har ni liv(seniortransjen), vil den foretrekke at fellene ligger spredt utover gulvet(lav korrelasjon). Derfor er premieutbetalingene for seniortransjen lavere for lavere korrelasjon. I det neste kapittel skal vi se på hvordan man henter ut korrelasjoner fra markedet, samt forklare det såkalte korrelasjonssmilet.

4.3 Impliserte korrelasjoner og korrelasjonssmil

Ifølge Choroś-Tomczyk et al.(2012) er den semianalytiske en-faktor gaussiske copulaen fortsatt markedets standard prisingsmodell, dog i noe mer moderne varianter. Utvidelsene til modellen har vært mange, som for eksempel ved bruk av stokastisk korrelasjon(Burtschell et al., 2007) og/eller recoveryrate(Andersen& Sidenius, 2005) samt positive sammenhenger mellom konkursskorrelasjon og konkurssannsynligheter(Finger, 2008). Vi vil nå fokusere på den standardiserte LHP-utgaven som vi har nevnt tidligere, med deterministisk recoveryrate og korrelasjon. Dette er fordi vi bruker tall før finanskrisen, en periode da denne i aller høyeste grad var gjeldene som standard markedsmodell(Ding & Sherris, 2011).

Siden den kun blir beskrevet av en direkte parameter, korrelasjonen ρ , forstår vi at det ville vært svært overraskende om den kunne prise alle transjene korrekt. Faktum er at den gaussiske copulaen som regel overpriser messanintransjene og underpriser seniortransjene. Dette forteller oss at modellen ikke klarer å fange opp den samme avhengighetsstrukturen som markedet legger til grunn. En måte å se dette på er å hente ut korrelasjonen markedet bruker i sin verdsetting av de forskjellige transjene. Når vi henter ut disse korrelasjonen merker vi oss først at det avhenger av vår oppfatning av markedets prisingsmodell(Wrampelmeyer, 2007). Likevel er det ikke store variasjoner å spore avhengig av modellbruk(Michaelmas, 2009). Det er også vanlig i markedet å ikke bare basere prisen på en transje fra den oppgitte spreaden, men også via den impliserte korrelasjonen. Ideen bak dette er veldig lik praksisen i kapital- og rentemarkeder der opsjoner vurderes etter den impliserte volatiliteten hentet fra Black Scholes opsjonsprisingsformel.

For transjesett $k = (K_1, K_2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ med forhåndsbeløp U_k og transjespread S_k har vi at en implisert korrelasjonsparameter $\rho_k = a_k^2$ er den parameteren som fører til at den for-

³²Prosessen ved kort salg kjennetegnes av følgende: Lån transjen, og selg den i markedet. Kjøp den igjen når den nye korrelasjonen er priset inn i spreaden, som da er forventet å være noe lavere. Lever tilbake til utlåneren.

ventede nåverdien (for en investor), gitt ved differansen mellom de diskonterte premie- og betalingsstrømmene, er lik 0 (ekvivalensprinsippet):

$$PV(k, S_k, a_k) = U_k + \sum_{i=1}^n \Delta t_i S_k \cdot \left(1 - EL_k^R(t_i)\right) \cdot B(t_0, t_i) \quad (4.3.1)$$

$$- \sum_{i=1}^n \left(EL_k^R(t_i) - EL_k^R(t_{i-1})\right) \cdot B(t_0, t_i) = 0. \quad (4.3.2)$$

Denne likningen kan løses numerisk via en rotsøkende algoritme³³ Vi betrakter den 8.serien til iTraxx Europe IG 5Y, med oppstart 20.september 2007 og forfall 20.desember 2012 på tre tidspunkter:

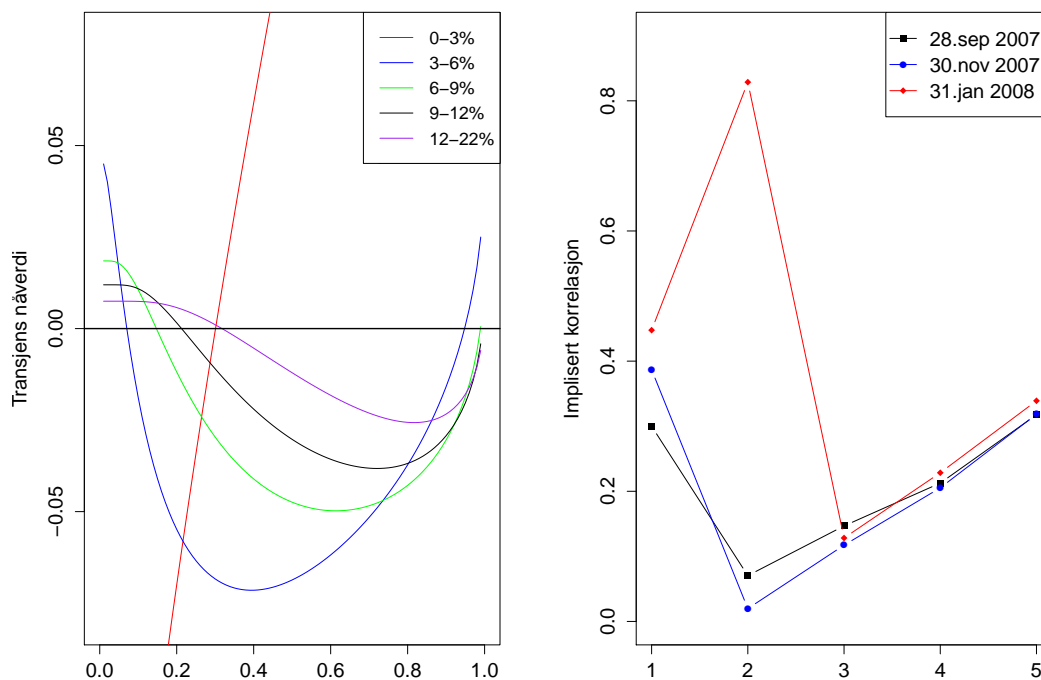
	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	Indeks(bp)	λ
28.sep 07	19.13%	91.96%	37.17	24.04	15.04	36	0.00604
30.nov 07	25.75%	161.42	85.50	62.00	36.00	54	0.00956
31.jan 08	30.98%	316.90	212.40	140.00	73.60	77	0.01318

Tabell 3: iTraxx Europe IG 5Y 8.serie med risikonøytral konkursintensiteter.

De fire øvre transjene er oppgitt ved en årlig spread. Egenkapitaltransjen 0-3% er i tabell 3 notert ved et forhåndsbeløp i prosent av transjens pålydende i tillegg til en fast årlig spread på 500bp. Recoveryraten er satt til å være 40% ved beregning av den risikonøytrale konkursintensiteten.

Nåverdien av alle transjene for iTraxx 28.september 2007 er gitt i figur 13(a) under. Vi observerer for egenkapitaltransjen at den er svært sensitiv for korrelasjonen, slik at en økning tilsvarer en høyere prospektiv reserve for egenkapitalinvestoren. Dette kan forklares ved at sannsynligheten for svært få tap øker og dermed reduserer det forventede tapet som eventuelt treffer transjen. Likevel gir en økende korrelasjon høyere sannsynlighet for simultane realiseringer av tap. Dette kan observeres for de seni orielle transjene der verdien synker som følge av en økende korrelasjon. For junior messanintransjen ser vi at verdien øker jo mer ekstrem korrelasjonen er. Derfor ser vi at den har to impliserte korrelasjoner. En korrelasjon på over 0.90 er svært høyt, slik at den lavere verdien velges, da den er mer lik de andre. Likevel viser jeg nedenfor at markedet, gitt våre modellantagelser, priser inn en svært høy korrelasjon for junior messanintransjen kun 4 måneder senere. Alle de andre impliserte korrelasjonen er her unike, da vi ikke velger korrelasjoner høyere enn 1 slik tilfellet hadde vært for de øvrige messanintransjene dersom man ser nøye nok i figuren.

³³I R kan *uniroot* brukes. Merk at det kan være flere løsninger, slik at søkeintervallet må velges med omhu.



(a) Transjens nåverdi for varierende korrelasjon. (b) Tre observerte korrelasjonssmil for iTraxx Europe IG 8.serie 28.sep 2007.

Figur 13: Nåverdier og korrelasjonssmil for iTraxx Europe IG 8.serie.

I figur 13(b) over er de impliserte korrelasjonene for markedsprisene fra tabell 3 tegnet inn. Hvis alle deltakerne i markedet for CDOer la til grunn at modellen var korrekt ville vi finne de samme impliserte korrelasjonskoeffesientene for alle transjer (Rakkestad, 2006). Vi observerer aller først at dem ikke er det, og danner et såkalt *korrelasjonssmil*. Vanligvis er implisert korrelasjon høyere for 0-3%- og 12-22%-transjene enn for messanintransjene, noe som avfeies ved å betrakte korrelasjonskurven 31.januar 2008, der den eneste korrelasjonen for å få lik prisen i markedet er over 80% ved bruk av gaussisk en-faktormodell. Men for 2007 ser vi at modellen underpriser seniortransjene, og må kompensere dette med en høyere korrelasjon. Årsaken til dette er at modellen ikke klarer å modellere tyngre haler, altså høyere sannsynlighet for ekstreme simultane begivenheter (konkursklynger) i porteføljen av kreditt. Dette er et fenomen kalt haleavhengighet, se forklaring i kapittel 4.4.4. Vi ser at nåverdien til 3-6%-transjen her er en konveks funksjon, og ikke monoton for korrelasjonen. Det vil si at den kan ta to verdier, og dermed ikke *unik*. For 2008-observasjonen er den impliserte korrelasjonen til 3-6% lik 0.82^{34} . Dette samsvarer generelt for nivået i 2008, se Ding & Sherris (2011). De fant at det ved flere tilfeller i 2008 ikke fantes korrelasjoner for junior messanintransjen i intervallet $[0,1]$. Det samme gjaldt for de øvrige messanintransjene i perioder der indekspremien var svært høy.

Årsakene til korrelasjonsmilet er blitt mye diskutert, og blant annet Feld (2007), Rakkestad (2006), Schlösser(2011), Neugebauer (2007) foreslår følgende for transjerte kredittderivater generelt:

- *Tilbud og etterspørselsmekanismer*. Etterspørselen etter 0-3%-transjen er vanligvis dominert

³⁴I dette tilfellet er nåverdifunksjonen til junior messanintransjen en konkav funksjon. Ved å utvide intervallet for korrelasjonen til negative verdier ville vi ha fått en korrelasjon lik $\rho = -0.13$. Da vi har relasjonen $a = \sqrt{\rho}$ ville dette gitt en kompleks verdi på risikofaktoren a i faktormodell (4.2.1)

av aktører med lavere risikoaversjon samt arbitrasjere med en annen oppfatning av kredittmarkedet. Det er derfor en større etterspørsel etter messanintransjene slik at premiene for disse transjene er lavere, siden forsikringkjøpere har flere selgere (investorer) å velge mellom.

- *Segmentering.* Deltakere i kredittderivatmarkedet har ulikt syn på konkursskorrelasjonen, slik at de segmenterer seg innenfor ulike strukturer i CDOen. Det er uvisst hvorfor det systematisk er slik, da dette bidrar til prisingsforskjeller som skulle ha blitt utjevnet da dette gir arbitrasjemuligheter.
- *Modellvalg.* Den gaussiske copulamodellen klarer ikke å modellere haleavhengighet, mens den implisitte markedsmodellen har tyngre haler og varierende recoveryrate.
- *Usikkerhet.* Siden korrelasjonen har størst virkning for 0-3%-transjen, jfr. figur 13(a), har vi at man implisitt kan se en utvidet risikopremie i form av en høyere korrelasjon priset inn for denne transjen.

Gitt at det finnes implisitte korrelasjoner fra observasjoner i markedet er det særlig to egenskaper som måler prestasjonen til en CDO-prisingsmodell:

- De impliserte korrelasjonene fra modellens priser ved bruk av gaussisk LHP med deterministisk recoveryrate og korrelasjon nærmer seg et korrelasjonssmil.
- De impliserte korrelasjonene fra markedets priser ved bruk av modellen nærmer seg en horisontal kurve.

Forskningen rundt dette har vært betydelig, da gevinsten har vært stor for dem som kan reprodusere markedspriser på en effektiv måte og forståelig for deltakerne i markedet. Andersen og Sidenius (2005) utvidet den gaussiske copulaen ved å ta i bruk stokastisk recoveryrate korrelert med konkurssannsynligheten. I tillegg introduserte de muligheten for høyere korrelasjon i nedgangstider (smitteeffekt). Deres resultater viste et implisert korrelasjonssmil ikke langt fra det observerte i markedet. Copulaer ved bruk av Student-t (Andersen et al, 2003), dobbel-t (Hull & White, 2004), Clayton (Schönbucher, 2001), Marshall-Olkin (McNeil, 2003), Varians-Gamma (Moosbrucker, 2006), samt Levy modeller med utvidelser av Albrecher et al. (2007), Schoutens & Cariboni (2009) og Garcia et al. (2009) har alle blitt foreslått. Noen er akseptert, mens andre har for lang beregningstid, noe som er essensielt for risikostyring. Det er særlig dobbel-t copulaen som har fått mest anerkjennelse, men haken er at den har en svært lang beregningstid grunnet student-t ikke er lukket under konvolusjon. Vi skal i siste kapittel presentere en forventning-variens mikstur som bruker kort tid og klarer å produsere markedspriser tilfredsstillende grunnet dens større haleavhengighet, den en-faktor Normal Invers Gaussiske Copula modellen (Kalemanova, 2007).

Hindringen ved bruk av disse impliserte korrelasjonene får man når man skal prise andre transjer med en annen struktur. På grunn av korrelasjonsmilet får man ikke interpolert godt nok mellom transjene, og dermed blir sammenlikningen vanskeligere mot andre indekser, og da gjerne for bruk i tidsserier og prediksjon (Cecchetti & Nappo, 2012). I tillegg er den impliserte korrelasjonskurven upålitelig i så måte at den for noen transjer ikke produserer noen verdi i det hele tatt, eller gir to verdier. For å unngå dette problemet utviklet markedet en metode kalt basekorrelasjon, som blir forklart i neste avsnitt.

4.3.1 Basekorrelasjon

Basekorrelasjon ble introdusert av McGinty & Ahluwaila (2004) fra JP Morgan som et verktøy i rammeverket for gaussisk LHP for å lettere kunne sammenlikne impliserte korrelasjoner på tvers av indekser og uavhengig av transjestructur.

Ideen bak konseptet som fort ble tatt i bruk av markedet er at enhver transje kan bli dekomponert til to nye egenkapitaltransjer, såkalte "første-taps"-transjer, begge med innslagspunkt 0%. For eksempel det å selge forsikring på 3-6%-transjen med nominell verdi N er det samme som å selge (lang posisjon) 0-6%-transjen med verdi $2N$ og å kjøpe (kort posisjon) 0-3%-transjen med verdi N på samme tidspunkt (Ding & Sherris, 2011). Schlösser (2011) viser da at en transje med punkter (K_1, K_2) har et forventet tap som kan uttrykkes ved de forventede tapene til to "første-taps"-transjer $(0, K_1)$ og $(0, K_2)$:

$$EL_{(K_1, K_2)}^R(t) = \frac{K_2 EL_{(0, K_2)}^R(t) - K_1 EL_{(0, K_1)}^R(t)}{K_2 - K_1} \quad (4.3.3)$$

Dermed har vi at nåverdiene kan uttrykkes tilsvarende slik at man kan løse ut basekorrelasjonene via følgende gjentakende metode:

1. Start med transjen $(0, K_1)$ der den forventee nåverdien skal være lik 0. Løs ut for $\rho_{K_1}^{base} = \rho_{(0, K_1)}$. Denne skal da være lik den ordinære impliserte korrelasjonen:

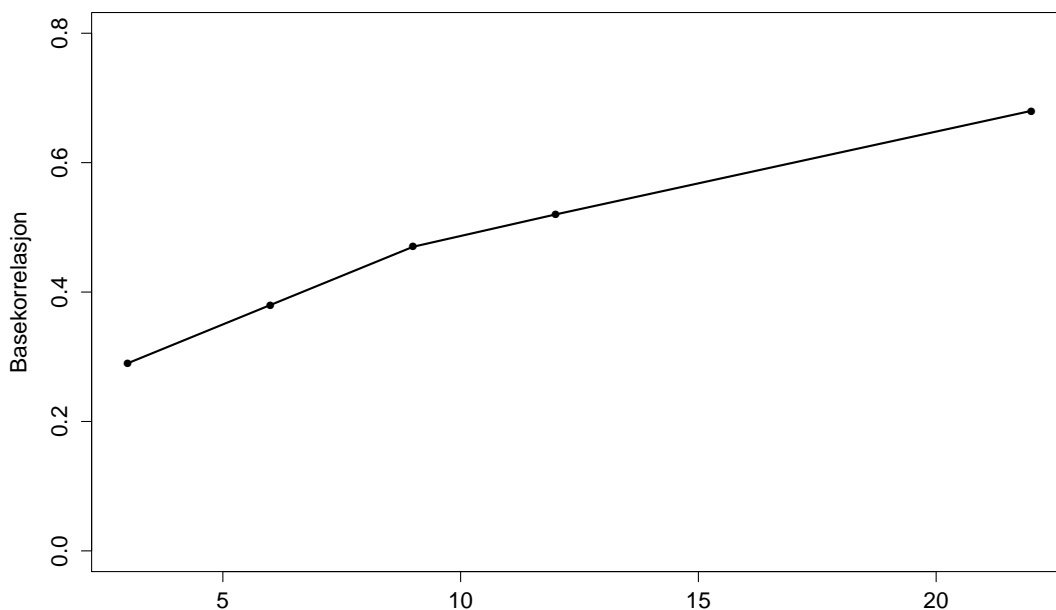
$$PV(0, K_1, S_{(0, K_1)}, \rho_{(0, K_1)}) = 0$$

2. For transje (K_1, K_2) bruker vi (4.3.3) slik at basekorrelasjonen for 0- K_2 -transjen, $\rho_{K_2}^{base}$, finnes ved å løse ut for $\rho_{(0, K_2)}$ under, ved å ta i bruk $\rho_{K_1}^{base}$ løst ut fra steg 1:

$$\frac{K_2}{K_2 - K_1} PV(0, K_2, S_{(K_1, K_2)}, \rho_{(0, K_2)}) - \frac{K_1}{K_2 - K_1} PV(0, K_1, S_{(K_1, K_2)}, \rho_{K_1}^{base}) = 0$$

3. Fortsett så videre for de neste transjen: $(0, K_3), \dots, (0, K_k)$.

Ved å ta i bruk denne metoden på iTraxx Europe IG 5Y 8.serie observert 28.september 2007, jfr. tabell 3, får man følgende basekorrelasjoner for de 5 forskjellige utslagspunktene:



Figur 14: Basekorrelasjon for iTraxx Europe IG 5Y 28.september 2007

Basekorrelasjonene i figur 14 over har en nesten lineær sammenheng, kalt *korrelasjonsskjevheten* av markedsaøktører. Denne framstillingen av indeksens transjekorrelasjoner har en klar fordel, ved at man overgår problematikken der det er vanskelig å finne korrelasjonen til messanintransjener. Dette er fordi premien til alle egenkapitaltransjener ("første-taps"-transjer) er monoton med korrelasjonen, som vist tidligere.

Selv om basekorrelasjonene ser høye ut i figuren sammenliknet med de implisitte korrelasjonene i figur 13(b), er de verdifulle da de gjenspeiler forskjellen mellom de "sanne" korrelasjonene, og dem komponert fra den gaussiske LHP-modellen (Feld, 2007). Hadde den gaussiske modellen priset markedspriser korrekt hadde kurven til basekorrelasjonen dannet en horisontal kurve.

For å finne basekorrelasjonen til transjer med ulik struktur enn iTraxx viser Schlösser (2011) at man kan bruke en interpoleringsteknikk for å finne dem, som for eksempel den lineære varianten eller en spline metode³⁵. Dermed kan man lettere prise andre transjer, som ikke er i markedet.

Ding & Sherris (2011) finner at under subprimekrisen var det ikke mulig å finne basekorrelasjoner for seniortransjener, grunnet den høye konkurssansynligheten i markedet. Basekorrelasjoner er ofte vanskelig å tolke iforhold til å bruke impliserte korrelasjoner. Vi vil videre derfor konsentrere oss om sistnevnte i vår prising av strukturerte kredittderivater.

I neste kapittel ser vi på såkalte copulafunksjoner for å prise kredittderivater. Disse er ofte brukt i finans generelt, da de åpner opp for en annen avhengighetsstruktur mellom selskapene.

4.4 Copula

En viktig del generelt i risikostyring der man har porteføljer av kreditt, er som tidligere nevnt å undersøke konkursavhengigheten. Hvis vi betrakter uavhengighet mellom kredittene i en portefølje kan vi nærmest studere ethvert problem knyttet til kreditttrisikoen. Men en slik antagelse om

³⁵Disse må velges med omhu, da det kan dannes arbitrasjemuligheter

uavhengighet er ikke realistisk, da konkurser er knyttet sterkt opp mot konjunkturer og markedsfaktorer generelt, som er felles for kredittene i porteføljen. Copulaer er i særdeleshet en nyttig tilnærming til prisingsproblematikken, da dem tillater en mer fleksibel måte å studere avhengigheten mellom kreditter på. Copulaer er brukt til forskjellige formål i finans, og særlig da for porteføljemodellering av kredittderivater, med absolutt dominans av den *gaussiske copulaen* for å prise CDO transjer. På tross av dens begrensninger samt subprimekrisen 2007-2008 som snudde kredittmarkedet opp-ned ble den og er fortsatt brukt som prisingsformel. En kritisk analyse blir presentert senere i dette kapittelet, men først trengs en introduksjon til copulateorien. Sentrale kilder er McNeil(2005), Li(1999), Burtschell et al.(2008), og Galiani (2003).

Første tilnærming ved anvendelse av copulaer er å anta de statistiske marginalfordelingene til kredittderivatene. Dette gjøres på bakgrunn av markedspraksis og/eller observasjoner i markedet over tid. Copulafunksjoner linker dermed de marginale fordelingene til en multivariat fordelingsfunksjon og lar oss dermed få undersøke sensitiviteten til risikoen på bakgrunn av vår egen spesifisering av avhengigheten. Det er stort sett to varianter å bruke copulafunksjoner på for å gjøre risikoanalyse, hvor disse kan kombineres (Das et al., 2004):

- Gitt en copula, kan vi velge forskjellige marginalfordelinger for hvert individuelle kreditt. Ved å forandre typer av fordelinger og deres parametere, kan vi for eksempel studere hvordan individuelle konkurser har effekt på den samlede konkursatferden til porteføljen.
- Gitt marginalfordelinger, kan vi variere korrelasjonsstrukturen ved å velge forskjellige copulaer, eller bruke den samme, men da ved å variere korrelasjonsparameteren(e). Dermed kan vi gjøre risikoanalysen.

Siden copulaene vi presenterer er lette å simulere vil vi studere risikoen via Monte Carlo beregninger. Vi vil først presentere definisjoner og elementære egenskaper innenfor copulateori før vi går videre til algoritmene for CDO-prising.

4.4.1 Definisjon

Definisjon 1. En d -dimensjonal copula er en multivariat fordelingsfunksjon $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ med standard uniform $U(0, 1)$ marginalfordelinger.

Theorem 1. (Sklar 1959) La F være en multivariat fordelingsfunksjon med marginalfordelinger F_1, \dots, F_d . Da eksisterer det en copula $C(u_1, \dots, u_d)$ slik at for alle $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^d$

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (4.4.1)$$

Dersom marginalfordelingene er kontinuerlige, så er C unik.

Videre har vi at copulafunksjonen er gitt ved

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad (4.4.2)$$

Enhver simultanfordeling til variablene i vektoren $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ kan bli uttrykt via en slik copulafunksjon, som ifølge Sklars theorem er en funksjon av marginalfordelingene til komponentene

X_1, \dots, X_d . Første formel, (4.4.1), viser hvordan simultanfordelinger F blir formet ved å koble sammen marginafordelingene med copulaer C . Likning (4.4.2) viser hvordan copulaer kan trekkes ut fra multivariate fordelingsfunksjoner med kontinuerlige marginaler. Den viser også hvordan copulaer uttrykker avhengighet for kvantiler, siden verdien $C(u_1, \dots, u_d)$ er den simultane sannsynligheten for at X_1 ligger under u_1 -kvantilen, X_2 ligger under u_2 -kvantilen og videre at X_d ligger under u_d -kvantilen.

Det er stort sett tre typer copulafunksjoner: *Fundamentale* copulaer representerer et antall viktige spesielle avhengighetsstrukturer, *implisitte* trekkes ut fra kjente multivariate fordelinger ved bruk av Sklars theorem over mens *eksplisitte* har enkle lukket-form uttrykk og følger generelle matematiske konstruksjoner kjent for å gjelde copulateori. I denne oppgaven holder vi oss til de implisitte, men for å få et glimt av mangfoldet kan vi se på et eksempel på en fundamental copula:

Definisjon 2. La $u_i \in [0, 1]$ for $i = 1, \dots, d$. Uavhengighetscopulaen³⁶ er gitt ved

$$\Pi(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i = u_1 \cdot u_2 \cdots u_d$$

For alle tilfeldige variabler fra en kontinuerlig fordeling er dette copulafunksjonen hvis og bare hvis de er uavhengige.

For å se dette betrakter vi tilfeldige variabler X_1 og X_2 med gitte tetthets- og simultane fordelinger. Har da at copulaen er gitt ved $C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) = F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$. Antar man uavhengighet gjelder $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2)$, og dermed har vi at $C(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$.³⁷

En konsekvens av Sklar sitt theorem er at vi kan implisere en copula fra en multivariat fordeling, ved å evaluere (4.4.1) på argumentene $x_i = F^{-1}(u_i)$, og så bruke den med vilkårlig valgte marginafunksjoner for å oppnå en holdbar multivariat fordeling. Slike copulaer kalles implisitte copulaer, og både gaussisk og student-t copulaer er i den gruppen. De er også innenfor klassen av elliptiske copulaer. Fordelen med dem er at de er lette å arbeide med i store dimensjoner, mens på grunn av de symmetriske egenskapene klarer de ikke å fange opp skjevheter.

4.4.2 Multivariat Gaussisk Copula

En tilfeldig variabel X er normalfordelt med forventning $\mu = 0$ og standardavvik $\sigma = 1$ om den har en tetthetsfordeling som tilfredstiller

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

og kumulativ fordelingsfunksjon

$$\Phi(x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx.$$

³⁶I litteraturen refereres uavhengighetscopulaen også som *produktcopulaen*

³⁷Mer informasjon om dette kan finnes på nettsiden: <https://www.rmetrics.org/files/Meielisalp2009/Presentations/Fischer.pdf>

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ er multivariat normalfordelt $N_d(\mathbf{0}, \mathbf{P})$ med forventning $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ og korrelasjonsmatrise \mathbf{P} med determinant $\det(\mathbf{P}) = |\mathbf{P}|$ om tetthetsfunksjonen er gitt ved

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{0}, \mathbf{P}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{P}|^{1/2}} e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} / 2}$$

Definisjon 3. La \mathbf{P} være en symmetrisk, positiv definit³⁸ matrise med $\text{diag}(\mathbf{P}) = 1$ og la $\Phi_{\mathbf{P}}$ være den standardiserte multivariate normalfordelingen med korrelasjonsmatrise \mathbf{P} . Da er den Multivariate Gaussiske Copulaen definert som

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{P}}^{Ga}(\mathbf{u}) &= P(\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_d) \leq u_d) \\ &= \Phi_{\mathbf{P}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)). \end{aligned}$$

Den gaussiske copulaen har ikke en enkel lukket form, men kan bli uttrykt som et integral over tettheten til \mathbf{X} , den multivariate normalfordelingen. Dermed har vi at

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{P}}^{Ga}(\mathbf{u}) &= P(X_1 \leq \Phi^{-1}(u_1), \dots, X_d \leq \Phi^{-1}(u_d)) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} f(\mathbf{x}|\mathbf{0}, \mathbf{P}) dx_1 \dots dx_d \end{aligned}$$

Som et viktig eksempel på en slik gaussisk copula har vi den gaussiske en-faktor modellen for bruk på porteføljer av kredittderivater, som vi fant et analytisk uttrykk på tidligere. Det lå da til grunn at korrelasjonsparameteren ρ er lik for alle aktiva, altså:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \rho \\ \rho & \dots & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Den kan da bli beskrevet som copulaen for de N variablene (Y_1, \dots, Y_N) i referanseporteføljen:

$$Y_i = \sqrt{\rho} Y + \sqrt{1 - \rho} \epsilon_i,$$

hvor Y er en standard normal markedsvariabel, hvor hver ϵ_i er standard normal. Variablene på høyre side er uavhengige. Korrelasjonen mellom hvert aktiva i modellen er da $\text{Corr}(Y_i, Y_j) = \rho$, slik som beskrevet i kapittelet om LHP-approksimasjon. Gitt en lik korrelasjonsparameter for alle aktiva, er den gaussiske enfaktormodellen identisk med den gaussiske copulaen.

Teknikken for å simulere tilfeldige variabler fra den gaussiske copulaen $C_{\mathbf{P}}^{Ga}$ med korrelasjonsmatrise \mathbf{P} er som følger:

³⁸En symmetrisk $k \times k$ matrise Σ er sagt å være *positiv definit* om den kvadratiske formen $\mathbf{z}^T \Sigma \mathbf{z}$ er positiv for alle $n \times 1$ vektorer \mathbf{z} med ikke-negative elementer av reelle tall.

1. Utfør en Cholesky dekomposisjon³⁹ av matrisen \mathbf{P} slik at du får Cholesky faktoren A . Dermed har du at matriseproduktet $AA^T = \mathbf{P}$
2. Generer en vektor $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$ av uavhengige standard normalfordelte variabler
3. Sett $\mathbf{X} = A\mathbf{Z}$
4. Returner $\mathbf{U} = (\Phi(Z_1), \dots, \Phi(Z_d))$ der Φ er standard normalfordeling. Den stokastiske vektoren U har da fordeling $C_{\mathbf{P}}^{Ga}$

4.4.3 Multivariat Student-t Copula

La $Z \sim N(0, 1)$ og $V \sim \chi^2(\nu)$. Dersom Z og V er uavhengige variabler er X via transformasjonen

$$X = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$$

en Student t-fordelt variabel⁴⁰ med ν frihetsgrader og tetthetsfordeling som tilfredstiller

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{\nu})^{(\nu+1)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \nu = 1, 2, \dots$$

Forventningsverdien og variansen til $X \sim t(\nu)$ er gitt ved

$$E[X] = 0, \quad \nu > 1; \quad Var(X) = \frac{\nu}{\nu - 2}, \quad \nu > 2.$$

For lave verdier av frihetsgraden ν har t -fordelingen bredere haler enn normalfordelingen, i den betydning at den øker sannsynligheten for mer ekstreme verdier, som jo er et interessant perspektiv i forhold til risikostyring. For store ν , er $t(\nu)$ -fordelingen omtrentlig normal, og $t(\nu)$ konvergerer i fordeling mot standard normal for $\nu \rightarrow \infty$.

Gitt en vektor $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$ av multivariat standard normalfordelte variabler med korrelasjonsmatrise \mathbf{P} og en $V \sim \chi^2_\nu$ variabel. Ved uavhengighet mellom \mathbf{Z} og V definerer vi den multivariate Student t-fordelingen via $\mathbf{X} = (Z_1\sqrt{\nu/V}, \dots, Z_d\sqrt{\nu/V})$.

Simultanfordelingen til $\mathbf{X} \sim t_d(\nu, \mathbf{0}, \mathbf{P})$ er gitt ved:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \frac{1}{(\nu\pi)^{d/2} |\mathbf{P}|^{1/2}} \left(1 + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}}{\nu}\right)^{-(\nu+d)/2}.$$

Forventningsverdien og kovariansmatrisen til $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \sim t_d(\nu, \mathbf{0}, \mathbf{P})$ med korrelasjonsmatrise (*skalamatrise*) \mathbf{P} er gitt ved

$$E[\mathbf{X}] = \mathbf{0}, \quad \nu > 1; \quad Cov[\mathbf{X}] = \frac{\nu}{\nu - 2} \mathbf{P}, \quad \nu > 2.$$

Noter at i denne parametriseringen er ikke kovariansmatrisen $Cov[\mathbf{X}]$ lik \mathbf{P} slik det var for multivariat normal⁴¹.

³⁹For å få en slik dekomposisjon i R , kan du bruke $chol(Rho)$, hvor Rho er korrelasjonsmatrisen.

⁴⁰En Student t-fordelt variabel kan også genereres fra en varians mikstur, se kapittel 5.1.1

⁴¹For en mer dyptgående redegjørelse av multivariat t-fordeling samt enkelte beviser henvises det til arbeidet av Demarta(2005) samt den statistiske læresiden <http://www.statlect.com/mcdstu1.htm>

Definisjon 4. La P være en symmetrisk, positiv definit matrise med $\text{diag}(P) = \mathbf{1}$ og la $\mathbf{t}_{\nu, P}$ være den standardiserte multivariate Student t -fordelingen med korrelasjonsmatrise P og ν frihetsgrader. Da er den Multivariate Student t -Copulaen definert som

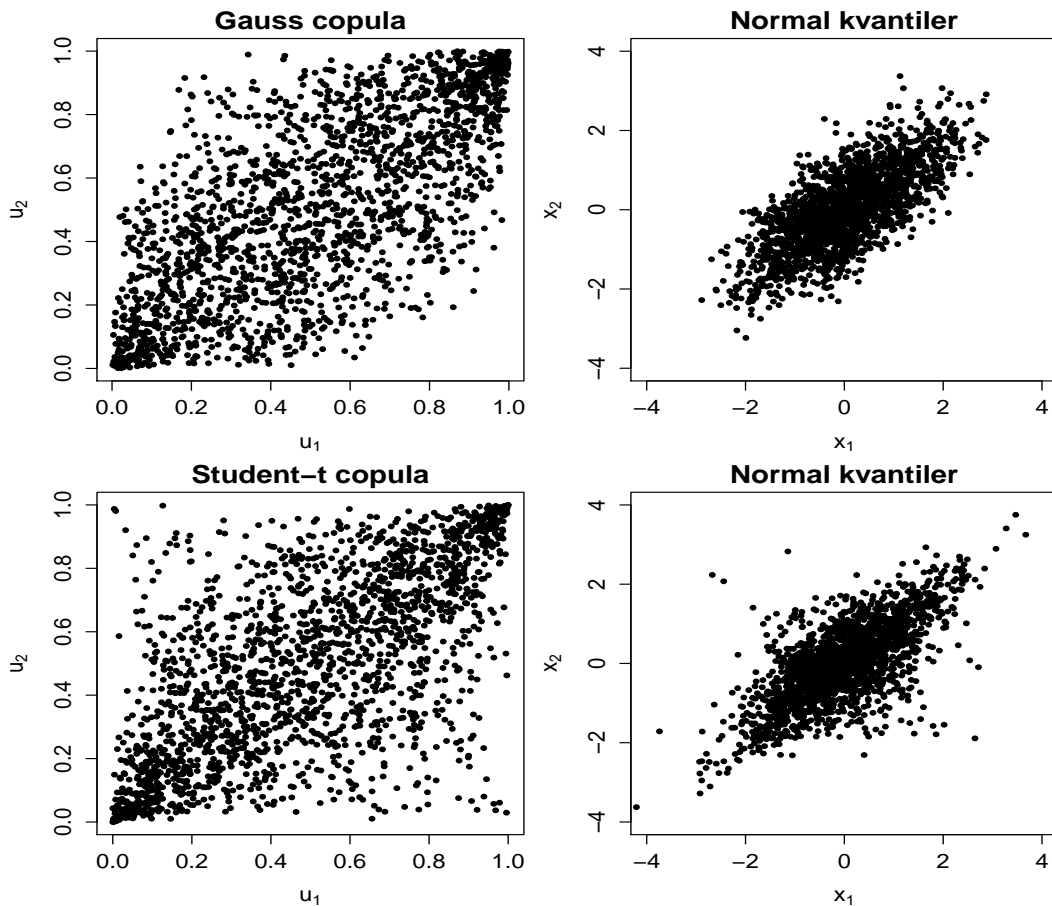
$$\begin{aligned} C_{\nu, P}^t(\mathbf{u}) &= P(t_{\nu}(X_1) \leq u_1, \dots, t_{\nu}(X_d)) \\ &= \mathbf{t}_{\nu, P}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d)) \end{aligned}$$

Algoritmen for å simulere fra en Student t copula, $C_{\nu, P}^t$ med korrelasjonsmatrise P og ν frihetsgrader er følgende:

1. Simuler d variabler fra en d -dimensjonal standard normalfordeling \mathbf{Y} .
2. Generer en stokastisk variabel $V \sim \chi^2(\nu)$ uavhengig av \mathbf{Y}
3. Sett $\mathbf{X} = \sqrt{\nu/V} \mathbf{Y}$. Vektoren \mathbf{X} består nå av d variabler fra en multivariat $\mathbf{t}_{\nu, P}$.
4. Returner $\mathbf{U} = (t_{\nu}(X_1), \dots, t_{\nu}(X_d))$ der t_{ν} er univariat Student t . Den stokastiske vektoren U har da fordeling $C_{\nu, P}^t$

Figur 15 nedenfor viser et utvalg fra en bivariat gaussisk og en bivariat t copula med korrelasjon $\rho = 0.5$ og $\nu = 3$. For å lettere se forskjellen mellom disse avhengighetsstrukturene har vi plottet de normaliserte kvantilene ved siden av. Vi observerer følgende:

- Student t copulaen har bredere haler og produserer flere ekstreme begivenheter enn den gaussiske copulaen.
- I motsetning til den gaussiske har t copulaen avhengighet mellom variablene i den øvre og nedre halen. Det er altså en større positiv sannsynlighet for flere simultane ekstreme begivenheter samtidig for t copulaen enn den gaussiske, såkalt haleavhengighet.



Figur 15: Simulerte punkter fra hhv gaussisk og t copulaer. Kvantiler er til høyre. Lineær korrelasjon $\rho = 0.70$ og $\nu = 3$ frihetsgrader. 2000 simuleringer.

4.4.4 Haleavhengighet

Mellom to stokastiske variabler X_1 og X_2 i statistisk modellering er det flere former for avhengighetsmål⁴²

- Den ordinære *Pearsons lineære korrelasjon* $\rho(X_1, X_2) \in [-1, 1]$.
- *Rank korrelasjon* ser på rangeringen av serien til to variabler $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$ og forholdet der imellom. Det er to varianter av rank korrelasjon som begge tar verdier i intervallet $[-1, 1]$:

– *Kendalls tau*⁴³,

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = E(\text{sign}((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2))),$$

som måler sannsynligheten for at parene av variablene (X_1, X_2) er *konkordante*, altså om $(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0$ eller *diskordante* der $(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0$

– *Spearman's Rho*,

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_1(X_2)),$$

⁴²For eksempler og mer litteratur rundt de forskjellige avhengighetsmålene bes leseren om å henvende seg til kapittel 14 i boken "Modelling Single-name and Multi-name Credit Derivatives" av O'Kane & Dominic (2010)

⁴³ \tilde{X}_1 og \tilde{X}_2 er en uavhengig vektor fra den samme fordelingen til (X_1, X_2)

altså den lineære korrelasjonen mellom sannsynlighetsfordelingene, og for kontinuerlige variabler; den unike copulaen.

- *Haleavhengighet*, er et mål på avhengigheten i halene til bivariate fordelinger. Den er en grenseverdi på den betingede sannsynligheten for overskridende kvantilverdier i den øvre, u , og nedre, l , halen:

$$\lambda_u := \lambda_u(X_1, X_2) \text{ og } \lambda_l := \lambda_l(X_1, X_2).$$

Vi vil nå fokusere på haleavhengighet, og da særlig for gaussisk og t copula. Dette begrepet er sterkt relatert til beregninger av markeds og kredittrisiko og er av interesse ved estimering av Value at Risk (VaR) for porteføljer av aktiva og kreditt. Den lineære korrelasjonskoeffesienten $\rho(X_1, X_2)$ er ofte ikke tilstrekkelig for å estimere avhengighetsstrukturen til store tap, og dermed bidrar til å skape unøyaktige VaR-beregninger ifølge Embrechts et al (1999).

Haleavhengighet måler graden av avhengigheten i halene til bivariate fordelinger. For øvre haleavhengighet sin del ser vi på sannsynligheten for at X_2 overskrider sin q -kvantil, gitt at X_1 også har overskredet sin q -kvantil når q -kvantilen går mot uendelig. Haleavhengighet er altså en grenseverdiberegning. Det er flere måter å beregne det på, og denne stammer fra Joe (1993, 1997) her gjengitt i McNeil (2005):

Definisjon 5. (Haleavhengighet) *La X_1 og X_2 være stokastiske variabler med marginaler F_1 og F_2 . Koeffisienten til øvre haleavhengighet for X_1 og X_2 er gitt ved*

$$\lambda_u := \lambda_u(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 1^-} P(X_2 > F_2^{-1}(q) | X_1 > F_1^{-1}(q)),$$

på betingelse at en grense $\lambda \in [0, 1]$ eksisterer.

Likedan for koeffisienten til den nedre halesannsynligheten

$$\lambda_l := \lambda_l(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 0^+} P(X_2 \leq F_2^{-1}(q) | X_1 \leq F_1^{-1}(q)),$$

på betingelse at en grense $\lambda \in [0, 1]$ eksisterer.

Dersom $\lambda_u \in (0, 1]$ og/eller $\lambda_l \in (0, 1]$ har X_1 og X_2 øvre og/eller nedre haleavhengighet. Dersom $\lambda_u = 0$ eller $\lambda_l = 0$ er X_1 og X_2 asymptotisk uavhengige i enten den øvre eller nedre halen.

Konseptet haleavhengighet brukes innenfor copulateori. Er F_1 og F_2 kontinuerlige marginaler kan vi oppnå enkle uttrykk for λ_l og λ_u . Siden vi skal konsentrere oss om gaussisk og t copula merker vi oss at begge er elliptiske fordelinger som er radial symmetriske⁴⁴. Derfor har vi at den såkalte *overlevelsescopulaen* \hat{C} ,

$$\hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_d(x_d)) = 1 - F(x_1, \dots, x_d),$$

⁴⁴En tilfeldig vektor \mathbf{X} er radial symmetrisk rundt \mathbf{a} om $\mathbf{X} - \mathbf{a} =: \mathbf{a} - \mathbf{X}$. En elliptisk tilfeldig vektor \mathbf{X} slik som gaussisk eller t har fordeling på formen $E_d(\mu, P, \psi)$ og er radial symmetrisk

er lik den ordinære copulaen C , altså $\hat{C} = C$. Via helt elementære regler for sannsynlighetsregning får vi at halesannsynligheten til X_1 og X_2 ved bruk av bivariat copula er gitt ved:

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{P(X_2 \leq F_2^{-1}(q), X_1 \leq F_1^{-1}(q))}{P(X_1 \leq F_1^{-1}(q))} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{P(F_2(X_2) \leq q, F_1(X_1) \leq q)}{P(X_1 \leq F_1^{-1}(q))} \\ &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q},\end{aligned}$$

for den nedre⁴⁵ og

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{P(F_2(X_2) > q, F_1(X_1) > q)}{P(X_1 > F_1^{-1}(q))} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{P(1 - F_2(X_2) \leq 1 - q, 1 - F_2(X_2) \leq 1 - q)}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{P(\bar{F}_2(X_2) \leq 1 - q, \bar{F}_1(X_1) \leq 1 - q)}{1 - q} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{\hat{C}(1 - q, 1 - q)}{1 - q} = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\hat{C}(q, q)}{q},\end{aligned}$$

for den øvre, der vi har brukt egenskaper for overlevelsescopulaen i overgangen fra 3. til 4. uttrykk. Merk i siste uttrykk at $\hat{C}(q, q) = C(q, q)$ for elliptiske copulaer, slik at $\lambda_l = \lambda_u = \lambda$. Ved bruk av L'Hôpitals regel for grenseverdier og copulateori av mer teknisk art⁴⁶ får vi at

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{dC(q, q)}{dq} = 2 \lim_{q \rightarrow 0^+} P(U_2 \leq q | U_1 = q) \\ &= 2 \lim_{q \rightarrow 1^-} P(U_2 > q | U_1 = q).\end{aligned}$$

For å finne haleavhengigheten til den gaussiske copulaen C_P^{Ga} , der $(X_1, X_2) := (\phi^{-1}(U_1), \phi^{-1}(U_2))$, er bivariat normal med standard marginer, bruker vi en fast korrelasjonsparameter $\rho < 1$ og at den betingede fordelingen⁴⁷ $X_2|X_1 = x \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)$:

$$\begin{aligned}\lambda &= 2 \lim_{q \rightarrow 0^+} P(\phi^{-1}(U_2) \leq \phi^{-1}(q) | \phi^{-1}(U_1) = \phi^{-1}(q)) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X_2 \leq x | X_1 = x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi\left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) = 0.\end{aligned}$$

Dermed har vi at den gaussiske copulaen er asymptotisk uavhengig i både den øvre og nedre halen. Selv om vi skulle anta en høy korrelasjon for aktivaene viser det seg at ekstreme begivenheter skjer

⁴⁵I overgangen fra 2. til 3. uttrykk brukes følgende: $P(X_1 \leq F_1^{-1}(q)) = F_1(F_1^{-1}(q)) = q$

⁴⁶Den interesserte leser bes slå opp i McNeil (2005) s. 197 og s. 210

⁴⁷Dette er et velkjent resultat i statistisk teori. Se Casella 6 Berger s. 176-177 for et formelt bevis.

uavhengig av hverandre ved bruk av en gaussisk copula i modelleringen. Dette er et uheldig resultat for en eventuell anvendelse i risikostyring, siden makroøkonomiske sjokk eller smitteeffekter som oppstår i markedet nettopp kan resultere i simultane begivenheter som kan karakteriseres som ekstreme med voldsomme følger.

Vi skal nå vise at den andre elliptiske copulaen vi anvender, t copulaen $C_{\nu, \mathbf{P}}^t$, har haleavhengighet. La $(X_1, X_2) := (t_\nu^{-1}(U_1), t_\nu^{-1}(U_2)) \sim t_2(\nu, \mathbf{0}, \mathbf{P})$, der $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Galiani (2003) finner den betingede sannsynlighetsfordelingen for $X_2|X_1 = x$ til å være (for bevis, se kap A.2):

$$f(X_2|X_1 = x) = \frac{\Gamma(\frac{(\nu+1)+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})[(\nu+1)\pi]^{1/2}} \cdot \left[1 + \frac{(\frac{x_2-\mu}{\sigma})^2}{\nu+1} \right]^{-\frac{(\nu+1)+1}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma}.$$

Denne betingede t-fordelingen med $\nu + 1$ frihetsgrader over er fra en *location-scale* familie⁴⁸ med lokaliseringsparameter $\mu = \rho x$ og skaleringsparameter $\sigma = \left[\frac{(\nu+x^2)(1-\rho^2)}{\nu+1} \right]^{1/2}$. Dermed har vi fra prinsipper⁴⁹ fra location-scale familien og $X_2 = \mu + \sigma T$ at $T = (X_2 - \mu)/\sigma \sim t_{\nu+1}$. Haleavhengigheten til t-copulaen er da gitt ved

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} P(X_2 > x | X_1 = x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - t_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+x^2}} \frac{x - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right] \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - t_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu/x^2 + 1}} \frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \right] \\ &= 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\nu+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right). \end{aligned}$$

Man ser her at gitt $\rho > -1$ har vi at copulaen til den bivariate t-fordelingen er asymptotisk avhengig i både den øvre og nedre halen. Desto større lineær korrelasjon og samtidig færre frihetsgrader jo sterkere haleavhengighet. Videre har vi asymptotisk uavhengighet for $\nu \rightarrow \infty$. I tabell 4 under er det beregnet forskjellige verdier på haleavhengigheten til t copula, $\lambda_t(\nu, \rho)$ og når $\nu \rightarrow \infty$, den gaussiske $\lambda_{Ga}(\rho)$.

$\nu \setminus \rho$	-0.5	0	0.5	0.8
2	0.06	0.18	0.39	0.60
4	0.01	0.08	0.25	0.49
10	0.00	0.01	0.08	0.29
∞	0	0	0	0

Tabell 4: Koeffisienten til haleavhengighet, $\lambda_t(\nu, \rho)$, for variierende korrelasjoner og frihetsgrader samt for $\lambda_{Ga}(\rho)$ i nederste rad.

⁴⁸Fra Casella & Berger (2002) har vi følgende om location-scale familier:

La $f(x)$ være en tetthetsfunksjon. For alle μ , $-\infty < \mu < \infty$ og $\sigma > 0$ har vi at alle tettheter på formen $(1/\sigma)f((x-\mu)/\sigma)$, indeksert av lokasjons- og skaleringsparametrene (μ, σ) er fra en location-scale famile med standard tetthet $f(x)$.

⁴⁹(Location-scale, Theorem 3.5.6 Casella & Berger (2002)) X er en stokastisk variabel med tetthet $(1/\sigma)f((x-\mu)/\sigma)$ hvis og bare hvis det eksisterer en stokastisk variabel Z med tetthet $f(z)$ og $X = \mu + \sigma Z$.

4.4.5 Metafordelinger og Monte Carlo algoritmer

For å bruke copulateori til å prise strukturerte produkter som kredittderivater tar vi i bruk av Sklars theorem som også sier følgende:

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) &= P(F^{-1}(U_1) \leq x_1, \dots, F^{-1}(U_d) \leq x_d) \\ &= P(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_d \leq F_d(x_d)) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \end{aligned}$$

der F_1, \dots, F_d er marginalfordelinger til univariate variabler. Dette sørger for at vi kan konstruere marginalfordelinger med vilkårlige tettheter og copulaer. Ved å konstruere en fordeling med en valgt copulafunksjon med vilkårlige tettheter har vi en *metafordeling*.

Anta at problemet med å generere \mathbf{U} fra en bestemt copulafunksjon er gjort. Sklars sitt theorem viser da at vi kan simulere fra interessante metafordelinger som kombinerer denne copulaen med vilkårlige valgte marginalfordelinger. Slik gjøres det:

1. Generer \mathbf{U} fra en valgt d -dimensjonal copulafunksjon C
2. Velg marginalfunksjoner F_1, \dots, F_d
3. Finn kvantilene ved transformering $\mathbf{X} = (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_d^{-1}(U_d))$
4. \mathbf{X} er da en stokastisk vektor fra en meta-copulamodell med marginer F_1, \dots, F_d og multivariat copulafunksjon $C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$

Denne teknikken er mye brukt i Monte Carlo studier av risiko og vil bli brukt videre.

I det følgende vil jeg presentere modellen til David X. Li (1999) for gaussisk en-faktor copula. Deretter vises tilsvarende ved bruk av en multivariat Student-t copula via en *meta-t_v* fordeling. Til slutt tar vi for oss algoritmene for CDO-prising.

I Li sin modell er den gaussiske copulaen koblet sammen med eksponensielle marginaler for å få tak i konkurstidspunktene (τ_1, \dots, τ_N) for N selskaper i en portefølje med korrelerte konkurstidspunkter. Konkurstidspunktene er eksponensielt fordelte $\tau_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ med konstante⁵⁰ hazarddrater λ_i for $i = 1, \dots, N$. Dermed har vi at $F(\tau_i \leq t_i) = 1 - \exp(-\lambda_i t_i)$. Li sin modell foreslår at man kan danne en multivariat fordelingsfunksjon til konkurstidspunktene via en meta-gaussisk-copula, slik at man får:

$$\begin{aligned} P(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_N \leq t_N) &= C_P^{Ga}(F_1(\tau_1 \leq t_1), \dots, F_N(\tau_N \leq t_N)) \\ &= \Phi_P(\Phi^{-1}(F_1(\tau_1 \leq t_1)), \dots, \Phi^{-1}(F_N(\tau_N \leq t_N))) \end{aligned}$$

For å simulere fra denne modellen legger man først merke til at det er en en-til-en avbildning mellom kvantilene. Man ser at de normalfordelte variablene fra den multivariate fordelingen x_1, \dots, x_N kan bli transformert til t_1, \dots, t_N ved bruk av $t_i = F_i^{-1}(\Phi(x_i))$. Ved å bruke denne copulaen får man simulert *korrelerte konkurstidspunkter* τ_1, \dots, τ_N . Tilsvarende gjøres for Student t copulaen med

⁵⁰I denne modellen kan inhomogene hazarddrater $\lambda(t_i)$ også brukes, for eksempel fra algoritmen der vi fant impliserte konkursintensiteter fra CDSer.

valgte frihetsgrader:

$$P(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_N \leq t_N) = C_{\nu, P}^t(F_1(\tau_1 \leq t_1), \dots, F_N(\tau_N \leq t_N)) \\ = \mathbf{t}_{\nu, P}(t_\nu^{-1}(F_1(\tau_1 \leq t_1)), \dots, t_\nu^{-1}(F_N(\tau_N \leq t_N))).$$

For å prise en CDO via Li sin modell eller tilnærmingen via Student t copula ved bruk av Monte Carlo simulering presenterer jeg en modifisert algoritme basert på Galiani (2003) og Wrampelmeyer (2007). Denne algoritmen er mer fleksibel enn den semi-analytiske LHP-versjonen da man kan tillate porteføljen av kreditt til å være såkalt heterogen, hvor man kan bruke konkursintensitetene til hvert selskaps istedenfor intensiteten fra den gjennomsnittlige oppgitte indeksspreaden. Varians-reducerende teknikker er anbefalt for å redusere antallet simuleringer. For å finne transjespreaden på tidspunkt t_0 følges denne algoritmen⁵¹:

1. Finn de impliserte konkursintensitetene λ_i fra CDSer
2. Basert på den felles korrelasjonsparameteren ρ , eller ved bruk av varierende korrelasjon ved heterogenitet, konstruer en $N \times N$ korrelasjonsmatrise P .⁵²
3. For $k = 1$ og til antallet simuleringer K utfør følgende
 - (a) Generer en stokastisk vektor av N korrelerte uniformfordelte variabler som skal representere konkurssannsynligheten fra enten en⁵³
 - Gaussisk copulafunksjon $\mathbf{U} = (\Phi(Z_1), \dots, \Phi(Z_N)) \sim C_P^{Ga}$, der (Z_1, \dots, Z_N) er generert fra en multivariat normalfordeling $\mathbf{Z} \sim N_N(\mathbf{0}, P)$
 - Student-t copulafunksjon $\mathbf{U} = (t_\nu(X_1), \dots, t_\nu(X_N)) \sim C_{\nu, P}^t$, der (X_1, \dots, X_N) er generert fra en multivariat Student t-fordeling $\mathbf{X} \sim t_N(\nu, \mathbf{0}, P)$
 - (b) Finn konkurstidspunktene τ_i som følger av u_i for alle $i = 1, \dots, N$
 - i. Beregn de simulerte konkurstidspunktene ved å sidestille de individuelle konkurssannsynlighetene $F_i(\tau_i \leq t_i)$ opp mot de korrelerte uniformfordelte variablene u_i :

$$F_i(t_i) = 1 - e^{-\lambda_i t_i} = u_i$$

- ii. De simulerte konkurstidspunktene er da lik

$$\tau_i = -\frac{\ln(1 - u_i)}{\lambda_i}$$

- (c) Velg de L konkurstidspunktene som er innenfor forfallstidspunktet T for CDOen og samle dem i en vektor $\boldsymbol{\tau}^k$, der $\tau_j^k \leq T$ og $\dim \boldsymbol{\tau}^k \leq N$. Beregn så det akkumulerte tapet for hvert konkurstidspunkt i en vektor $\mathbf{L}(\boldsymbol{\tau}^k) = (L(\tau_1^k), L(\tau_2^k), \dots, L(\tau_L^k))$, der

$$L(\tau_j^k) = \sum_1^j (1 - R) \frac{1}{N},$$

og følgelig at $L(T) = L(\tau_L^k)$.

⁵¹For å gjøre det enklest for den nyinnvidde anbefales det å gjennomføre algoritmen for en og en transje om gangen.

⁵²Velg N innenfor rimelighetens grenser. Jo høyere N , jo flere simuleringer trengs for å få korrekt pris.

⁵³Valgt fordeling må da selvsagt ikke endres på ved nye simuleringer i løkken

(d) Beregn nåverdien til transje (K_1, K_2) av konkursutbetalingene for investor, DL^k , etter følgende rutine:

i. Er $L(T) < K_1$: Sett $DP_k = 0$.

ii. Er $K_1 \leq L(T) < K_2$ finn trigger-tidspunktet $\tau_\delta^k = \inf\{t > 0 | L(t) \geq K_1\}$ og beregn nåverdien av tapene:

$$DL^k = \sum_{w=\delta}^L B(t_0, \tau_w^k)(1-R)\frac{1}{N}.$$

For det første tapet som berører transjen må kun $L(\tau_\delta^k) - K_1$ være med i diskonteringen.

iii. Er $K_2 \leq L(T)$, beregn både det nedre trigger-tidspunktet τ_δ^k som over og det øvre $\tau_\gamma^k = \inf\{t > 0 | L(t) \geq K_2\}$ og beregn nåverdien av tapene

$$DL^k = \sum_{w=\delta}^{\gamma} B(t_0, \tau_w^k)(1-R)\frac{1}{N}.$$

Siden vi ikke inkluderer tap som ikke treffer transjen vil kun andelen av det relative tapet, L_γ , på tidspunkt τ_γ^k som diskonteres bli $L_\gamma - (L(\tau_\gamma^k) - K_2)$.

(e) Beregn nåverdien til transje (K_1, K_1) av premieutbetalingene for investor, PL_k . En økning av tapene i referanseporteføljen følges av en redusering av premieutbetalingene, siden den totale pålydende verdien av porteføljen blir mindre. Basert på konkurstidspunktene τ^k , for hver kvartalsvise dato for premiebetaling (t_1, t_2, \dots, t_n) , der $\Delta t_i = (t_i - t_{i-1})$, hent ut det tilsvarende akkumulerte tapet fra $\mathbf{L}(\tau^k)$, slik at du får en vektor $\mathbf{L}(t) = (L(t_1), L(t_2), \dots, L(t_n))$ som representerer det akkumulerte tapet som ikke lenger skal forsikres *foran* hver premiebetaling. Nåverdien av premieutbetalingene blir da:

$$PL^k = \sum_{i=1}^n \Delta t_i B(t_0, t_i) \cdot \min\{(K_2 - L(t_i))^+, K_2 - K_1\},$$

eller alternativt fra vår egen notasjon:

$$PL^k = \sum_{i=1}^n \Delta t_i B(t_0, t_i) \cdot (K_2 - K_1 - (\min\{L^k(t_i), K_2\} - K_1)^+)$$

4. Beregn snittet av kontantstrømmene:

$$\bar{PL} = \frac{1}{K} \sum_k PL_k \quad DL = \frac{1}{K} \sum_k DL_k$$

5. Bestem så spreaden for transjen (K_1, K_2) til CDOen:

- Har transjen forhåndsbeløp:

$$\bar{u}_{(K_2-K_1)}^* = \frac{\bar{DL} - 0.05 \cdot \bar{PL}}{K_2 - K_1}.$$

- Ellers:

$$\bar{s}_{(K_1, K_2)}^* = \frac{\bar{DL}}{\bar{PL}}.$$

Resultater fra algoritmen blir presentert i tabell 13 i kapittel 5.4.2 i en sammenlikning med andre modeller presentert gjennom oppgaven. For at simuleringen sikkert skal konvergere anbefales det 100000 simuleringer. Denne algoritmen var lenge en markedstandard, da analytiske modeller ikke var bygget ut. Likevel har denne algoritmen en fordel ved at man kan lette litt på antagelsene om homogenitet, og basere modelleringen etter antallet selskaper i porteføljen. I tillegg kan man bruke forskjellige avhengighetsstrukturer innenfor copulateori, som Clayton, Gumbel og andre eksplisitte copulaer. Da må selvsagt algoritmen endres litt på, da den lineære korrelasjonskoeffesienten ikke lenger er dekkende for simuleringen av eksplisitte copulaer. Man velger ofte slike copulaer dersom man tror på assymmetri i avhengighetsstrukturen. Men vi skal se litt etterhvert at den Normal Invers Gaussiske fordelingen er et alternativ for disse. Vi finner også at den ikke trenger Monte Carlo beregninger, men kan utledes semi-analytisk.

5 Normal Invers Gaussisk En-Faktor Copula Modell

Introdusert av , O.E, 1995. Vi skal i dette kapitlet ta skrittet et hakk videre og presentere en semi-analytisk utvidelse av en-faktormodellen som tar høyde for å redusere korrelasjonssmilet for CDO-prising, slik at den lettere kan brukes i risikostyring. Den statistiske fordelingen som sørger for dette er Normal Invers Gaussiske (NIG), som er avledet fra en gaussisk forventning-variens mikstur og dermed et spesialtilfelle av den generaliserte hyperbolske fordelingen introdusert av O.E Barndorff-Nielsen i en artikkel fra 1977. Prestasjonen til denne fordelingen er ganske lik en dobbel-t copula⁵⁴, men fordelingen nå er at vi reduserer beregningstiden betraktelig. Kalemanova introduserer denne fordelingen som et alternativ til markedets standardmodell for å prise syntetiske CDOer, den gaussiske, i 2005.

I dette kapitlet presenteres først elementær teori om normale miksturer på multi- og univariat form samt hyperbolske fordelinger, før vi viser NIG som et spesialtilfelle. Videre vil vi reparametrisere fordelingen, slik at den kan brukes i CDO-prising, før vi avslutter med numeriske resultater der NIG-LHP sammenliknes med andre tidligere nevnte modeller ved bruk av transjespreads fra den syntetiske CDOen iTraxx Europe IG.

5.1 Normale miksturer og NIG-fordelingen

I forrige kapittel var vi innom gaussiske og Student t-fordelinger som bakgrunn for prisingen av kredittderivater. Disse tetthetene kan, på univariat og multivariat form, bli generert fra en såkalt *normal variens mikstur*⁵⁵. Sentrale kilder i dette delkapitlet er McNeil (2005), Kalemanova (2005) og Schlösser (2011).

5.1.1 Forventning-variens mikstur

Nå tar vi et skritt videre og presenterer en mikstur som i tillegg til variansleddet også har stokastiske forventningsledd. Ideen bak dette er å få generert fordelinger med en viss assymetri, som jo er en fordel i modellering av finansielle instrumenter⁵⁶. Man søker derfor fordelinger som kan modelleres med skjevhet, og gjerne der parametriseringen for dette er enkel å innføre. I dette avsnittet skal vi se nærmere på såkalte hyperbolske fordelinger, introdusert av Barndorff-Nielsen (1977), og da spesielt den Normal Invers Gaussiske (NIG). Disse fordelingene er generert av *forventning-variens miksturer* av normalfordelte variabler og såkalte miksvariabler:

Definisjon 6. (Normal forventning-variens mikstur). *Den d -dimensjonale stokastiske vektoren X er sagt å ha en (multivariat) normal forventning-variens miksturfordeling om*

$$\mathbf{X} = \mathbf{m}(W) + \sqrt{W}\mathbf{A}\mathbf{Z}, \quad (5.1.1)$$

⁵⁴For en grundig gjennomgang av dobbel-t copula for prising av kredittderivater bes den interessante leseren oppsøke artikkelen "Double t Copula Pricing of Structured Credit Products Practical aspects of a trustworthy implementation" av Vrins(2009), der en algoritme for å beregne den statistiske terskelgrensen til en-faktor modellen blir presentert.

⁵⁵En stokastisk vektor (variabel) \mathbf{X} er sagt å ha en multivariat (univariat) variens-mikstur fordeling om $\mathbf{X} = \mu + \sqrt{W}\mathbf{A}\mathbf{Z}$, der $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, I)$, $W \sim F$ og uavhengige, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \Sigma$ samt matrisen \mathbf{A} og vektoren μ inneholder konstanter. For en multivariat Student t-fordelt vektor \mathbf{X} er miksvariablen $W \sim Ig(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu)$. (Merk at her kan også substitusjonen $V = \frac{\nu}{W} \sim \chi^2(\nu)$ benyttes). For $\mathbf{X} \sim N_d(\mu, \Sigma)$ er $W = 1$

⁵⁶Når man observerer logaritmiske avkastninger til aktiva har man ofte at negative logavkastninger har tykkere haler enn positive.

hvor $\mathbf{Z} \sim N_k(\mathbf{0}, I_k)$ og uavhengig av miksvariabelen $W \geq 0$. A er en $d \times k$ matrise og $\mathbf{m}(W)$ er en funksjon av miksvariabelen slik at $\mathbf{m} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Man ser tydelig fra modellen over hvorfor det heter forventning-varians mikstur. Forskjellige tolkninger kan gjøres av miksvariabelen W (Lillestøl, 2007): Den er En latent uobserverbar variabel for modellhensyn, eller som en variabel for å forsterke dataene i en estimering. Innenfor finans brukes den mest for å representere volatilitet. Forventningen og variansen avhenger av realiseringen av W :

$$\mathbf{X}|W = w \sim N_d(\mathbf{m}(w), wAA^T = w\Sigma),$$

og er således en stokastisk faktor.

I bruken av slike miksturer er ofte $\mathbf{m}(W)$ en lineær funksjon av forventningsvektoren $\boldsymbol{\mu}$ og en skalarvektor $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\mathbf{m}(W) = \boldsymbol{\mu} + W\boldsymbol{\gamma}.$$

Regel om dobbel forventning og varians gir da forventning og varians til \mathbf{X} :

$$E(\mathbf{X}) = E(E(\mathbf{X}|W)) = \boldsymbol{\mu} + E(W)\boldsymbol{\gamma} \quad (5.1.2a)$$

$$Cov(\mathbf{X}) = E(Cov(\mathbf{X}|W)) + Cov(E(\mathbf{X}|W)) = E(W)\Sigma + Var(W)\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T, \quad (5.1.2b)$$

og vi ser at for spesialtilfellet $\boldsymbol{\gamma} = 0$ gir miksturen lik forventning og varians som for en normal varians mikstur.

5.1.2 Generaliserte hyperbolske fordelinger

Vil nå kort introdusere en ny klasse av fordelinger, kalt generaliserte hyperbolske (GH) fordelinger der NIG vises som et spesialtilfelle av denne klassen. GH brukt i analyse innenfor finans har etterhvert blitt anerkjent som svært føyelige og presise fordelinger. Dem brukes mye innenfor stokastiske prosesser i verdsetting, og da spesielt Levy-prosesser der de trinnvise økningene og avtakningene over tid har en GH-fordeling.

I det videre arbeidet arbeider vi med univariate fordelinger, slik at vi fra nå av setter $d = 1$. Når miksingvariabelen W er fra en generell invers gaussisk-fordeling (GIG), altså $W \sim N^-(\lambda, \chi, \psi)$ får vi via forventning-varians miksturen (5.1.1) for $d = 1$, $\Sigma = 1$ og at $X|W = w \sim N_1(\mu + w\boldsymbol{\gamma}, w)$ at⁵⁷ variabelen X er fra en generalisert hyperbolsk fordeling (GH):

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty f_{X,W}(X, W)dH(w) \\ &= \int_0^\infty f_{X|W}(x|w)h(w)dw \\ &= \frac{K_{\lambda-1/2}\left(\sqrt{(\chi + (x - \mu)^2)(\phi + \gamma^2)}\right) e^{(x-\mu)\boldsymbol{\gamma}}}{\left(\sqrt{(\chi + (x - \mu)^2)(\phi + \gamma^2)}\right)^{(1/2-\lambda)}} \cdot \frac{(\sqrt{\chi\phi})^{-\lambda}\phi^\lambda(\phi + \gamma^2)^{(1/2-\lambda)}}{(2\pi)^{1/2}K_\lambda(\sqrt{\chi\phi})}, \end{aligned}$$

⁵⁷Den interesserte leser bes slå opp i avsnitt A.2.5, McNeil (2005) for mer informasjon

der K er Besselfunksjonen av tredje type⁵⁸.

Vi har da at om X har tetthet på denne formen er $X \sim GH(\lambda, \chi, \phi, \mu, \Sigma = 1, \gamma)$. Klassen av slike generaliserte hyperbolske fordelinger er lukket under lineære operasjoner slik at $Y = b + BX \sim GH(\lambda, \chi, \phi, B\mu + b, B^2, B\gamma)$ dersom $b, B \in \mathbb{R}$. Vi har da at dersom:

- $\lambda = -\nu/2, \chi = \nu$ og $\phi = 0$ har vi en forskjøvet/asymmetrisk Student t-fordeling med ν frihetsgrader. Når $\gamma \rightarrow 0$ får vi en standard t-fordeling.
- $\lambda = 1$ har vi en hyperbolsk fordeling brukt innenfor analysen av avkastninger til aktiva.
- $\lambda = -1/2$ er fordelingen kjent som en Normal Invers Gaussisk (NIG). Denne har en noe tykkere hale enn den hyperbolske. Besselfunksjonen for NIG er gitt ved $K_{-1/2}(x) = \sqrt{(0.5\pi/x)}\exp(-x)$. Formelt har vi at $NIG(\chi, \phi, \mu, \gamma) = GH_1(-1/2, \chi, \phi, \mu, 1, \gamma)$

Med andre ord er GH-familien svært fleksibel og tar nye fordelinger basert på endringen av de sentrale parametrene.

5.1.3 Normal Invers Gaussisk-fordeling

Fra over viste vi den normal invers gaussiske-fordelingen (NIG) som et spesialtilfelle av den generaliserte hyperbolske fordelingen generert fra en normal forventning-varians mikstur. Parametervalget vårt var fra notasjonen til McNeil (2005). Kalemanova (2005) viser at NIG kan bli genert fra en normalfordeling og invers gaussisk fordeling, men med et noe annen parametervalg. Denne notasjonen blir også brukt i arbeidet til Schlösser (2009). I dette avsnittet skal vi vise NIG-fordelingen samt dens statistiske egenskaper.

Istedenfor fra et spesialtilfelle til miksturen av normal og GIG-fordelingen beskrevet over, viser Kalemanova (2005) og Wang (2006) at NIG kan genereres fra en forventning-varians mikstur av normal og invers gaussiske (IG) fordelinger direkte:

$$X = \mu + Y\beta + \sqrt{Y}Z, \quad (5.1.3)$$

der $Y \sim IG(\delta\gamma, \gamma^2)$ uavhengig av $Z = N(0, 1)$.

Vi har at en positiv stokastisk variabel Y følger en invers gaussisk fordeling med parametere $\alpha > 0$ og $\beta > 0$ om tettheten er på formen:

$$f_{IG}(y; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}} y^{-3/2} e^{\left(-\frac{(\alpha-\beta x)^2}{2\beta x}\right)} \quad \text{hvis } x > 0.$$

Forventning og varians til $Y \sim IG(\alpha, \beta)$ er gitt ved:

$$E(Y) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Definisjon 7. (Normal Invers Gaussisk Fordeling (NIG))

⁵⁸Følgende relasjon er nyttig ved beregning av denne: $K_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\exp(-x)$.

En stokastisk variabel X følger en NIG -fordeling med parametrene $\alpha, \beta, \mu, \delta$ om:

$$\begin{aligned} X|Y=y &\sim N(\mu + \beta y, y) \\ Y &\sim IG(\delta\gamma, \gamma^2) \text{ der } \gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \end{aligned}$$

der følgende betingelser gjelder: $0 \leq |\beta| < \alpha$ og $\delta > 0$. Vi skriver at $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ med tetthet $f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$ og kumulativ fordelingsfunksjon $F_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$.

Tettheten til NIG -fordelingen er gitt ved (se kapittel A.3 for bevis):

$$\begin{aligned} f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) &= \int_0^\infty f(X|Y=y) \cdot g(y) dy \\ &= \frac{\delta\alpha \cdot \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu))}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right), \end{aligned}$$

der $K_1(w) := \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-\frac{1}{2}w(t + t^{-1})) dt$ er den modifiserte Besselfunksjonen av tredje type. Fra den momentgenererende funksjonen til $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$:

$$M_X(t) = \exp(\mu t) \frac{\exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2})}$$

får vi at forventning, varians, skjevhet og kurtosis er gitt ved⁵⁹

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu + \delta \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, & Var(X) &= \delta \frac{\alpha^2}{3^{1/2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \\ S(X) &= 3 \frac{\beta}{\alpha\sqrt{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}}, & K(X) &= 3 + 3 \left(1 + 4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right) \frac{1}{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Man ser at en NIG -fordelt variabel er symmetrisk⁶⁰ for $\beta = 0$.

NIG fordelingen har to viktige egenskaper:

- *Lukket under skalering:*

$$X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta) \Rightarrow cX \sim NIG\left(\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}, c\mu, c\delta\right). \quad (5.1.5)$$

- *Lukket under konvolusjon:* Dersom to uavhengige NIG -fordelte variabler X og Y har de samme parametrene α og β er summen av disse variablene fortsatt en NIG -variabel:

$$\begin{aligned} X &\sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1, \delta_1), Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_2, \delta_2) \\ \Rightarrow X + Y &\sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2). \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

⁵⁹Alternativt kan vi finne forventning og varians til NIG -variabler generert av miksturen (5.1.3) ved å ta i bruk teorien i avsnitt 5.1.1:

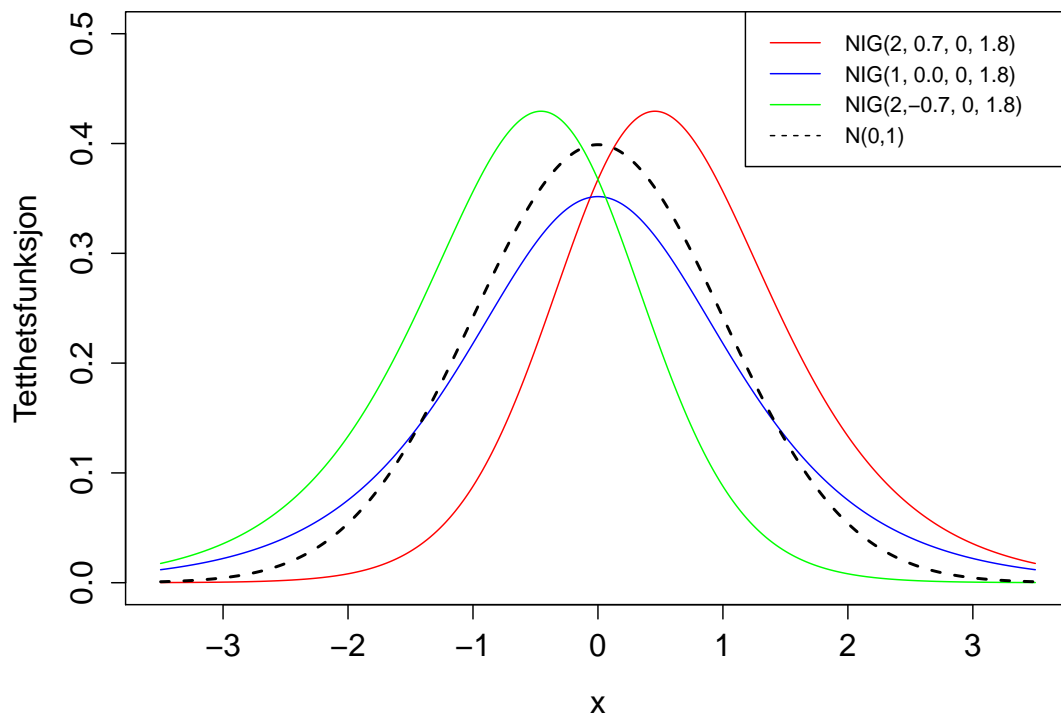
$$E(X) = E(E(X|Y)) = E(Y) = \frac{\delta}{\gamma},$$

$$Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y)) = \frac{\delta}{\gamma} + \beta^2 \frac{\delta}{\gamma^3} = \frac{\delta}{\gamma} \left(1 + (\alpha^2 - \gamma^2) \frac{1}{\gamma^2}\right) = \delta \frac{\alpha^2}{\gamma^3}.$$

⁶⁰En fordeling er symmetrisk rundt sin forventningsverdi om skjevheten $S(X) = 0$.

Tettheten til $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ bestemmes av fire parametere (Aas, 2010):

1. $\alpha > 0$ bestemmer haletyngden
2. β med $0 \leq |\beta| < \alpha$ skjevheten
3. μ lokasjonen (hvor fordelingen senterer seg rundt)
4. $\delta > 0$ er en skaleringsparameter.



Figur 16: NIG tetthetsfordeling ved forskjellig parametervalg (α, β) sammenliknet med standard normal. For å sammenlikne med kurven til standard normal er lokasjonen satt til $\mu = 0$ og skaleringsparameter $\gamma = 1.8$.

I figur 16 over ser vi at NIG er svært dynamisk. Ser at valg av $0 < |\beta| \leq \alpha$ avgjør skjevheten og dermed assymetrien. For $\beta < 0$ får vi en fordeling forskjøvet til venstre, og for $\beta > 0$ tilsvarende til høyre. En lav α gir en flatere kurve med større halesannsynlighet, stor α gir en spissere form og lavere halesannsynlighet for en gitt verdi på β .

Algoritmen for å simulere Normal Invers Gaussiske variabler er følgende⁶¹

1. Generer en variabel $Y \sim IG(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \alpha^2 - \beta^2)$
2. Generer en variabel $Z \sim N(0, 1)$
3. Returner $X = \mu + \beta Y + \sqrt{Y}Z$

Nå som teorien er på plass, skal vi nå i neste kapittel se på bruken innenfor CDO-prising når antagelsen om stor homogen portefølje(LHP) ligger til grunn.

⁶¹Ved bruk av statistikkprogrammet *R* kan pakken *fBasics* lastes ned for å generere NIG-variabler.

5.2 LHP approksimering ved en-faktor NIG Copula

NIG-fordelingen kan med fordel brukes i prisingen av kredittderivater takket være sine statistiske egenskaper. Kalemanova (2005) viser at denne hyperbolske fordelingen kan brukes i en en-faktor copula modell og gir bedre resultater enn gaussisk og Student t. Vi skal nå bruke NIG fordelingen i LHP-rammeverket beskrevet i kapittel 4.2. Vi bruker fortsatt en-faktor modellen:

$$A_i(t) = aM(t) + \sqrt{1-a^2}X_i(t), \quad (5.2.1)$$

der $M(t) \sim NIG(\alpha_1, \beta_1, \mu_1, \delta_1)$ er felles markedsfaktor og $X_i(t) \sim NIG(\alpha_2, \beta_2, \mu, \delta_2)$ er den selskaps-spesifikke. Igjen reduserer vi dimensjonene og prøver å uttrykke et selskaps eiendeler som en modell av dens avhengighet til markedsconjunkturer og selskaps-spesifikke faktorer.

Man ser at (5.2.1) består av en konvolusjon av skalerte variabler. Vi vil nå finne en riktig parametrisering i fordelingene til $X_i(t)$ og $M(t)$ slik at dem blir standardiserte med 0 i forventning og varians lik 1 samtidig som $A_i(t)$ også får en standardisert NIG-fordeling. Dette gjør vi for at den kan brukes i modellen senere.

Først har vi fra (5.1.5) at faktormodellen gir:

$$\begin{aligned} aM &\sim NIG\left(\frac{\alpha_1}{a}, \frac{\beta_1}{a}, a\mu_1, a\delta_1\right) \\ \sqrt{1-a^2}X_i &\sim NIG\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{1-a^2}}, \frac{\beta_2}{\sqrt{1-a^2}}, \sqrt{1-a^2}\mu_2, \sqrt{1-a^2}\delta_2\right). \end{aligned}$$

Da vi nå har en faktormodell med to skalerte variabler, ønsker vi å summere disse to til en ny NIG-forelt variabel $A_i(t)$. Fra (5.1.6) har vi at de to første parametrene må være like. For markedsfaktoren som skal gjelde for alle aktiva setter vi $\alpha_1 = \alpha$ og $\beta_1 = \beta$ for å unngå avhengighet via korrelasjonsparameteren a . Vi får derfor følgende parametere for $X_i(t)$:

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\alpha, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\beta.$$

I tillegg, for å standardisere $X_i(t)$ og $M(t)$ med forventning 0 og varians 1 bruker vi (5.1.4) og velger de tredje og fjerde parametrene slik at vi får følgende for $M(t)$:

$$\begin{aligned} \mu_1 + \delta_1 \frac{\beta}{\gamma} &= 0 \text{ og } \delta \frac{\alpha^2}{\gamma^3} = 1, \text{ der } \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \\ \text{altså } \mu_1 &= -\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \quad \delta_1 = \frac{\gamma^3}{\alpha^2}, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

og for $X_i(t)$:

$$\begin{aligned} \mu_2 + \delta_2 \frac{\beta_2}{\gamma_2} &= 0 \text{ og } \delta_2 \frac{\alpha_2^2}{\gamma_2^3} = 1 \text{ der } \gamma_2 = \sqrt{\alpha_2^2 - \beta_2^2}, \\ \text{altså } \mu_2 &= -\frac{1-a^2}{a} \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \frac{\gamma^3}{\alpha^2}, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

gjort ved innsetting av parametrene for likhet finnet over. Fordelingen til $M(t)$ og $X_i(t)$ blir derfor følgende ved bruk av den nye parametriseringen:

$$\begin{aligned} M(t) &\sim NIG\left(\alpha, \beta, -\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right) \\ X_i(t) &\sim NIG\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\alpha, \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\beta, -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\frac{\gamma^3}{\alpha^2}\right). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Fordelingen til den nå standardiserte $A_i(t)$ er ved innsetting av (5.2.2) og (5.2.3) gitt ved:

$$\begin{aligned} A_i(t) &\sim NIG\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}, a\mu_1 + \sqrt{1-a^2}\mu_2, a\delta_1 + \sqrt{1-a^2}\delta_2\right) \\ \text{som gir } A_i(t) &\sim NIG\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}, -\frac{\beta}{\gamma^2 a \alpha^2}, \frac{\gamma^3}{a \alpha^2}\right). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Videre vil vi innføre noe ny notasjon for å gjøre uttrykkene enklere. Både X_i , M og A_i kan nå skrives på formen

$$X \sim NIG(s\alpha, s\beta, -s\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, s\frac{\gamma^3}{\alpha^2}), \quad (5.2.6)$$

for valgt s , og vi bruker den kumulative tetthetsforelingen $F_{NIG(s)}(x)$ for $F_{NIG}(x; s\alpha, s\beta, -s\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, s\frac{\gamma^3}{\alpha^2})$. Dermed har vi at $M \sim F_{NIG(1)}(x)$, $X_i \sim F_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})}(x)$ og $A \sim F_{NIG(\frac{1}{a})}(x)$.

Den kritiske grensen $C(t)$ for hvert kreditt i referanseporteføljen er, som beskrevet i kapittel 4.2 for LHP-approksimering, bestemt av en fast korrelasjonsparameter $\rho = a^2$, konkursintensitet $\lambda(t)$ og dermed felles risikonøytral konkurssannsynlighet $Q(t) = Q(\tau \leq t)$ for alle kredittene. Utsteder i går konkurs om verdien av selskapet går under den kritiske grensen gitt ved:

$$F_{NIG(\frac{1}{a})}(A(t)) \leq Q(\tau \leq t),$$

som grunnet NIG-fordelingens egenskaper ved konvolusjon kan omformes via en kvantil-kvantil transformasjon:

$$A(t) \leq C(t) = F_{NIG(\frac{1}{a})}^{-1}(Q(t))$$

Ved bruk av dette samt uttrykket til LHP med generelle fordelingsantakelser (4.2.7) med $M \sim F_{NIG(1)}(x)$ har vi at den prosentvise tapsfordelingen for en stor homogen portefølje av CDS er gitt ved:

$$F_\infty(t, x) = 1 - F_{NIG(1)}\left(\frac{F_{NIG(\frac{1}{a})}^{-1}(Q(\tau \leq t)) - \sqrt{1-a^2}F_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})}^{-1}(x)}{a}\right), \quad (5.2.7)$$

der x er det prosentvise *brutto* porteføljetapet. Vi ser at dette uttrykket beregner den inverse til NIG-fordelingen to steder. I neste kapittel presenterer vi et uttrykk for det forventede netto tran- sjetapet ved bruk av NIG-fordelingen.

5.3 Verdsetting av CDO via NIG

Når vi nå skal bruke NIG-fordelingen i en prisingsammenheng for CDO vil vi søke en metode som introduserer lettere beregninger. Schlösser (2009) tar steget et skritt videre fra Kalemánova (2005) og presenterer den deriverte av uttrykk (5.2.7) som en funksjon av bare et invers ledd. Dette gjøres via en enkel substitusjon. Videre vil vi her inkludere muligheten for gjenerverving av kapital ved konkurs i uttrykkene.

Vi har at det forventede transjetapet til transje (K_1, K_2) med forventet gjenervervingsrate R med tapsfordeling $F_\infty(t, x)$ er gitt ved:

$$EL_{(K_1, K_2)}^R(t) = \frac{1-R}{K_2 - K_1} \int_{\frac{K_1}{1-R}}^{\frac{K_2}{1-R}} \left(x - \frac{K_1}{1-R}\right) f_\infty(t, x) dx + \left(1 - F_\infty\left(t, \frac{K_2}{1-R}\right)\right) \quad (5.3.1)$$

Bevis. Via oppspalting av (4.2.8) samt differensialet $dF_\infty(t, x) = f_\infty(t, x)dx$ og at $F_\infty(t, 1) = 1$ får vi:

$$\begin{aligned} EL_{(K_1, K_2)}^R(t) &= \frac{1-R}{K_2 - K_1} \left(\int_{\frac{K_1}{1-R}}^1 \left[x - \frac{K_1}{1-R}\right] dF_\infty(t, x) - \int_{\frac{K_2}{1-R}}^1 \left[x - \frac{K_2}{1-R}\right] dF_\infty(t, x) \right) \\ &= \frac{1-R}{K_2 - K_1} \left(\int_{\frac{K_1}{1-R}}^1 \left[x - \frac{K_1}{1-R}\right] dF_\infty(t, x) + \int_{\frac{K_2}{1-R}}^1 \left[x - \frac{K_1}{1-R}\right] dF_\infty(t, x) \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{K_2}{1-R}}^1 \left[x - \frac{K_1}{1-R}\right] dF_\infty(t, x) - \int_{\frac{K_2}{1-R}}^1 \left[x - \frac{K_2}{1-R}\right] dF_\infty(t, x) \right) \\ &= \frac{1-R}{K_2 - K_1} \int_{\frac{K_1}{1-R}}^{\frac{K_2}{1-R}} \left(x - \frac{K_1}{1-R}\right) f_\infty(t, x) dx + \left(1 - F_\infty\left(t, \frac{K_2}{1-R}\right)\right) \end{aligned}$$

□

Fra den kumulative tapsfordelingen (5.2.7) får vi den marginale tapsfordelingen via kjerneregelen for derivering samt regel for derivering av inverse funksjoner⁶². Vi får da tetthetsfunksjonen

⁶²Har fra kalkulus at den deriverte av en invers funksjon er gitt ved:

$$\frac{d}{dx} F^{-1}(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))}$$

$f_\infty(t, x) = \frac{d}{dx} F_\infty(t, x)$:

$$\begin{aligned}
f_\infty(t, x) &= - f_{NIG(1)} \left(\frac{F_{NIG(\frac{1}{a})}^{-1}(Q(\tau \leq t)) - \sqrt{1-a^2} F_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})}^{-1}(x)}{a} \right) \\
&\quad \cdot \left(-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \right) \frac{d}{dx} F_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})}^{-1}(x) \\
&= \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \frac{f_{NIG(1)} \left(\frac{F_{NIG(\frac{1}{a})}^{-1}(Q(\tau \leq t)) - \sqrt{1-a^2} F_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})}^{-1}(x)}{a} \right)}{f_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})} \left(F_{NIG(\frac{1-a^2}{a})}^{-1}(x) \right)}
\end{aligned}$$

Videre vil vi bruke substitusjon $y = g(x)$ for å få et uttrykk med færre inverse ledd. Vi innfører derfor følgende:

$$y = F_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})}^{-1}(x), \quad \text{der} \quad dy = \frac{1}{f_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})} \left(F_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})}^{-1}(x) \right)} dx \quad (5.3.2)$$

Ved å evaluere integralet fra uttrykket til det forventede transjetapet (5.3.1) med substitusjonen (5.3.2) over får vi at:

$$\int_{\frac{K_1}{1-R}}^{\frac{K_2}{1-R}} \left(x - \frac{K_1}{1-R} \right) f_\infty(t, x) dx = \int_{F_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})}^{-1} \left(\frac{K_1}{1-R} \right)}^{F_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})}^{-1} \left(\frac{K_2}{1-R} \right)} \left(F_{NIG(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a})}(y) - \frac{K_1}{1-R} \right) \quad (5.3.3)$$

$$\cdot f_{NIG(1)} \left(\frac{F_{NIG(\frac{1}{a})}^{-1}(Q(\tau \leq t)) - \sqrt{1-a^2} y}{a} \right) \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} dy, \quad (5.3.4)$$

der $F_{NIG(\frac{1}{a})}^{-1}(Q(\tau \leq t)) = C(t)$ kan bli beregnet som en vektor på forhånd gitt diskret tidsintervaller på kontantstrømmene i CDO-strukturen. Dermed har vi et uttrykk med konstante inverse ledd i integrasjonsgrensene.

I neste kapittel skal vi se på bruken av disse uttrykkene vi har utledet i en prisingsammenheng for transjerte iTraxx-indeks. Vi vil samtidig ved noen tilfeller sammenlikne prestasjonen til NIG-LHP iforhold andre LHP-modeller.

5.4 Kalibrering og numeriske resultater

I dette avsnittet presenterer jeg numeriske resultater fra prising av Itraxx Europe Indeks-transjer ved bruk av den Normal Invers Gaussiske LHP-modellen. Disse resultatene sammenlignes så med resultatene ved bruk av Gaussisk LHP og Monte Carlo beregninger for Gaussisk og Student t-copulaer. Prisingsmetodikken har jeg fra arbeidet til Schlösser(2009), hvor jeg har modifisert denne noe for de tidsperiodene der flere transjer har et på forhåndsavtalt beløp, noe som ble innført iløpet

av finanskrisen, se kapittel 2.2.2. Dataene jeg har brukt er månedlige fiksede⁶³ spreader tilgjengelig på Markits nettsider. I tillegg har jeg brukt tall fra Kalemanova (2007) som blir presentert i slutten av kapittelet. Vi kalibrerer faktormodellene våre med bruk av den standardiserte syntetisk CDOen DJ iTraxx Europe IG 5Y. Jeg tester modellen på fire sentrale tidsepoker: Den stabile perioden 2005-2006, startfasen av subprimeskrisen⁶⁴, den globale finanskrisen, og den nåværende langvarige statsgjeldskrisen:

	Serie	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	Indeks
12.apr 2006	5	23.53%	62.75bp	18.00bp	9.25bp	3.75bp	32bp
31.mai 2007	7	6.33%	39.90bp	10.33bp	4.39bp	1.93bp	20bp
29.jun 2007	7	11.75%	62.05bp	16.29bp	7.48bp	3.10bp	25bp
28.mai 2009	9	53.13%	13.75%	-0.11%	242.13bp	99.38bp	140bp
30.nov 2011	9	45.44%	10.42%	5.56%	3.40%	1.59%	194bp
31.jan 2012	9	36.50%	2.34%	-0.90%	1.04%	0.37%	127bp

Tabell 5: DJ iTraxx Europe 5Y 5., 7. og 9.serie.

Som nevnt før er denne satt sammen av de 125 mest likvide CDSene for europeiske selskaper ranket høyere enn Standard & Poor's rating BB. Indeksen oppgir også gjennomsnittlig spread for selskapene. I vår modell bestående av en homogent stor portefølje brukes denne så for å finne en felles kredittkurve til hvert selskap, se kapittel 3.2.

For å føye modellen best til markedet velger vi parametrene som minimerer summen av absoluttavvikene mellom modell- og markedspriser, $Dev(\rho, \alpha, \beta)$. Vi har markedspriser for den årlige spreaden $S_{(K_1, K_2)}^M$, og engangssummen ved kontraktinngåelse $U_{(K_1, K_2)}^M$ for transjesett $k = (K_1, K_2)$, der $k = 1, \dots, 5$. For alle transjer med forhåndsavtalt beløp har det typiske vært å søke modellparametere som føyer $U_k^{R, NIG}$ best til markedets forhåndsbeløp U_k^M . Vi transformerer forhåndsbeløpet nå til en årlig transjespread for modellen, slik at man får:

$$S_k^{R, NIG}(\rho, \alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^n \left(EL_k^R(t_i) - EL_k^R(t_{i-1}) \right) \cdot e^{-r \cdot (t_i - t_0)} - U_k^M}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot \left(1 - EL_k^R(t_i) \right) \cdot e^{-r \cdot (t_i - t_0)}}. \quad (5.4.1)$$

Dette uttrykket vil bli brukt videre i kalibreringen, og for transjene uten et på forhåndsavtalt beløp bruker jeg at $U_k^M = 0$. Fordelen med denne transformasjonen er at man unngår en for høy vektning av de transjene med forhåndsbeløp i kalibreringen. Dette er også ønskelig fra et økonomisk perspektiv da vi søker en metode som er nøytral for transjene. Ser vi til 2012 er iTraxx serien priset med forhåndsbeløp for alle transjene, og man kan da velge hvilken metode man bruker.

⁶³Med fiksede spreader menes et "snapshot" av kursene på det aktuelle tidspunktet, som gjerne er i slutten av annenhver måned.

⁶⁴Med subprimeskrisen mener jeg perioden mai/juni 2007 til begynnelsen av 2008 der flere store utlåns- og investeringsbanker (av europeiske: Deutsche Bank, Sachsen Landesbank, UBS, Northern Rock) nedskrivde tap, ble nasjonalisert eller gikk konkurs som følge av deres investeringer i feilratede kredittderivater på boliglån, såkalte subprimes. Kilde: dollardaze.org

Man har stort sett to klassiske utgangspunkt å velge mellom ved en modellkalibrering^{65 6667}:

- Man kan kalibrere de modellerte spreadene mot markedsdata for alle transjene ved å optimere

$$\min_{\rho, \alpha, \beta} Dev_1(\rho, \alpha, \beta) = \min_{\rho, \alpha, \beta} \sum_{k=1}^5 |S_k^{R, NIG}(\rho, \alpha, \beta) - S_k^M| \quad (5.4.2)$$

for parametersettet (ρ, α, β) .

- Man kan utelate egenkapitaltransjen i kalibreringen og dermed basere estimeringen på de øvrige fire transjene og deretter bruke disse parametrene til å prise den utelatte transjen:

$$\min_{\rho, \alpha, \beta} Dev_2(\rho, \alpha, \beta) = \min_{\rho, \alpha, \beta} \sum_{k=2}^5 |S_k^{R, NIG}(\rho, \alpha, \beta) - S_k^M|. \quad (5.4.3)$$

På grunn av sin høye risiko er noen ganger egenkapitaltransjen utelatt fra markedet. Dette er typisk for kontantstrøms-CDOer. Er først egenkapitaltransjen tilgjengelig i markedet, slik som det er for Itraxx- og CDX-indeksene, er den ofte kun handlet av spesielle markedsdeltakere som hedgefond og/eller investorer med lav risikoaversjon, i motsetning til pensjonsfond og livselskaper som gjerne sitter på de mer seniorielle transjene. Derfor bestemmes prisen(spreaden) som regel mest av eksogene forhold(algoritmeroboter, oppgiring av fonds porteføljerisiko,etc.), som gjerne er unike for egenkapitaltransjen. De øvrige transjene er alltid tilgjengelig for markedet om ikke annet er spesifisert. Dermed har vi at prisingsdynamikken gjerne kan være anderledes for egenkapitaltransjen enn messanin- og seniortransjene.

Uansett er vi egentlig bare interessert i alternative investeringsmuligheter for den klassiske investoren, som finner egenkapitaltransjen for risikabel. Derfor vil hovedfokuset mitt være å presentere en modell som føyer seg greit til markedsprisene til de øvre transjene.

Foran de numeriske resultatene er det særlig verdt å diskutere den risikofrie diskonteringsraten og gjenervervelsesraten.

- Den kontinuerlig *diskonteringsratesatsen*, r , for europeiske kredittderivater er *Euro Swap rate*⁶⁸(Markit og Goldman Sachs, 2009). Jeg har valgt en fast diskonteringsrate på 2%. Dette samsvarer nogenlunde med Wang (2010) og Kalemanova (2007). Eberlein et.al (2007) mener en deterministisk diskonteringsrate er for restriktiv, og foreslår å bruke nullkuponobligasjonspriser med forskjellig forfall som proxy for den risikofrie renten. Store avvik fra markedets impliserte swap-kurve slår først ut for transjene med forhåndsbeløp. Uten forhåndsbeløp ser man fra (5.4.1) at diskonteringsfaktoren nærmest annulleres.

⁶⁵Ifølge Kalemanova (2005), kan man alternativt bruke minste kvadraters metode (LSE) på parametrene α , ρ og β for å føye de modellerte spreadene best til de observerte markedsspreadene. Med denne metoden gir mine resultater et noe lavere absoluttavvik for iTraxx 5.Serie i 12.april 2006.

⁶⁶Wrampelmeyer foreslår minste kvadrats gjennomsnittlig prosentvis avvik (RMSPE). Problemet med den er den flytter fokuset mot transjene med mindre spread, da ett prosentavvik for seniortransjene er mindre i absoluttverdi enn for de lavere messanintransjene

⁶⁷Brigo et al.(2010) foreslår å minimere det kvadrerte avviket mellom modell- og markedspriser, og vekter de mer likvide(lavere bid/ask avvik) transjene høyere.

⁶⁸Historiske rentesatser finnes på ICAP

- *Gjenervervelsraten*(recovery), R , er satt til å være 40%. Wrampelmeyer (2007) og Ding et al. (2011) nevner at denne raten ikke nødvendigvis ligger på 40%, men er vanligvis korrelert med markedskonjunkturer og konkurssannsynlighet. Standard & Poor's (2011) nevner at for mer senioriell kreditt har den historisk ligget på rundt 85-88%, mens for mer underordnet (bil-, studie-, lavsikkerhetslån) har den vært på rundt 20%. Derfor viser det at estimat for R er forbeholdt stor variasjon. Markit publiserer for hver ny serie deres anslag på raten ved verdsetting. Stort sett har forventingene ligget på $R = 0.40$ for investmentgrade på det europeiske markedet. Likefullt kan markedets forventinger om raten endre prisen noe, slik jeg presenterer i et eksempel i avsnitt 5.4.2.

	r	R
Fast verdi	0.02	0.40

Tabell 6: Sentrale parametervalg i kalibreringen

I det videre ser vi på resultater for to ulike parametriseringer for modellen vår. Først en symmetrisk, og sist en full utnyttelse av modellen hvor vi åpner opp for skjevhet for variablene i (5.2.1)

5.4.1 En-parameter NIG-LHP-modell

Fra vår reparametrisering av NIG-fordelingen i begynnelsen av kapittelet hadde vi at parameteren β avgjorde assymetrien mens α direkte eller indirekte bestemte halesannsynlighetene. Vi vil nå sette $\beta = 0$ og dermed oppnå en symmetrisk fordeling for A_i , X_i og M . Selv med en slik redusering har vi fortsatt en parameter mer i LHP-rammeverket enn den gaussiske som består av kun en korrelasjonsparameter, og det vil med dette være lettere å føye modellen til markedspriser.

NIG(1) En singelparametrisert NIG-fordeling i denne modellen har skjevhetsparameter $\beta = 0$. Fra (5.2.6) har vi at den stokastiske variabelen $X \sim NIG(s\alpha, 0, 0, s\alpha)$, har følgende momenter:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0, & Var(X) &= 1, \\ S(X) &= 0, & K(X) &= 3 \left(1 + \frac{1}{s^2\alpha^2} \right), \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

og har dermed varierende kurtosis større enn 3. Det vil si at for alle verdier av α vil $f_{NIG(s)}(0) \geq \phi(0)$, der $\phi(x)$ er en standard normal tetthetsfunksjon.

I arbeidet videre vil vi se på parametervalg av ρ og α i NIG(1) LHP-modellen som gjør at modellprisene passer best med markedsdataene. For å kunne sammenlikne egenskapene til gaussisk og NIG(1) i et LHP-rammeverk behandler jeg den transjerte iTraxx-indeksen både før og etter finanskrisen. iTraxx-seriene 7 og 9 har valgt fordi dem var de mest likvide(handlede) i de aktuelle periodene, og dermed et godt utgangspunkt for å teste modellene.

Betrakt den 5-årige DJ iTraxx Europe 7.Serie Versjon 1 og 9.Serie Versjon 1 med fiksede mar-

kedspriser i tabellene 8 og 9 under⁶⁹. 7.serie startet 20.mars 2007 med forfall 20.juni 2012, og den 9.serie startet 20.mars 2008 med forfall 20.juni 2013. Ved å ta i bruk (3.2.3) for de oppgitte indeks-spreadene får vi de impliserte konkursintensitetene. Vi ser tydelig i tabell 7 at markedets impliserte forventninger om konkurs har økt betraktelig på de fire årene. Den ettårige risikonøytrale konkurs-sansynligheten felles for alle selskapene på indeksen er over 10 ganger større i verdi for 30.november 2011 enn 31.mai 2007. Følgene av dette er høyere transjespreader, noe man får verifisert ved å se i tabell 9.

	31.mai 07	29.jun 07	30.nov 11	31.jan 12
Indeks	20bp	25bp	194bp	127bp
Intensitet	0.00347	0.00419	0.03707	0.02317
$Q(\tau \leq 1)$	0.00346	0.00418	0.03639	0.02290

Tabell 7: Indeks og konkursintensitet for iTraxx Europe 7. og 9.serie

Når vi nå skal kalibrere modellen merker vi oss at den 7.serien har kun forhåndsbeløp for egenkapitaltransjen, med en løpende årlig spread på 500bp. Den 9.serie betrakter vi på et tidspunkt etter at forhåndsbeløp ble innført for alle transjene, der den faste spreaden til 0-3,3-6% er 500bp, 6-9% 300bp og 9-12,12-22% 100bp årlig. Den faste spreaden betales fortsatt kvartalsvis, med siste betaling på forfalltidspunktet T eller når porteføljetapet overstiger transjens øvre utslagpunkt. Vi estimerer den gaussiske korrelasjonsparameteren ρ slik at nåverdien av differansen mellom kontantstrømmene til 0-3%-transjen er lik 0. Vi får da den impliserte 0-3%-korrelasjonen som brukes i prisingen av de andre transjene for gaussisk LHP. For NIG(1)-LHP bruker vi (5.4.3) for å estimere ρ - og α -parametere. Tabell 8 og 9 viser markedpriser for den transjerte iTraxx Europe indeksen i tillegg til modellpriser ved bruk av Gaussisk-LHP og NIG(1)-LHP. Seriene er ikke helt sammenlignbare med det blotte øye da oppbygningen av kontantstrømmene til transjene er forskjellig bygd opp. Absoluttavvikene mellom modell- og markedpriser er oppgitt i kolonnen til høyre i tabellene under, og utelater 0-3%-transjen ved summering.

	ρ	α	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	abs(bp)
31.mai 07			6.33%	39.90	10.33	4.39	1.93	
Gaussisk	0.2297		6.33%	80.99	21.59	6.96	1.13	55.7
NIG(1)	0.1334	1.4001	7.20%	39.87	10.29	3.96	1.05	1.4
29.jun 07			11.75%	62.05	16.29	7.48	3.1	
Gaussisk	0.2364		11.75%	117.70	34.63	12.11	2.18	79.5
NIG(1)	0.1499	1.0999	8.93%	61.98	19.61	9.07	3.10	2.8

Tabell 8: DJ iTraxx Europe 7.serie Versjon 1 5Y.

⁶⁹Med Versjon 1 mener Markit at ingen selskaper foreløpig er tatt ut av indeksen. Med en gang det skjer en kreditthendelse av type konkurs på et av navnene i indeksen taes denne ut, og blir ikke byttet ut med et nytt selskap. Fullstendig oversikt finnes ved å henvende seg til Markits nettsider.

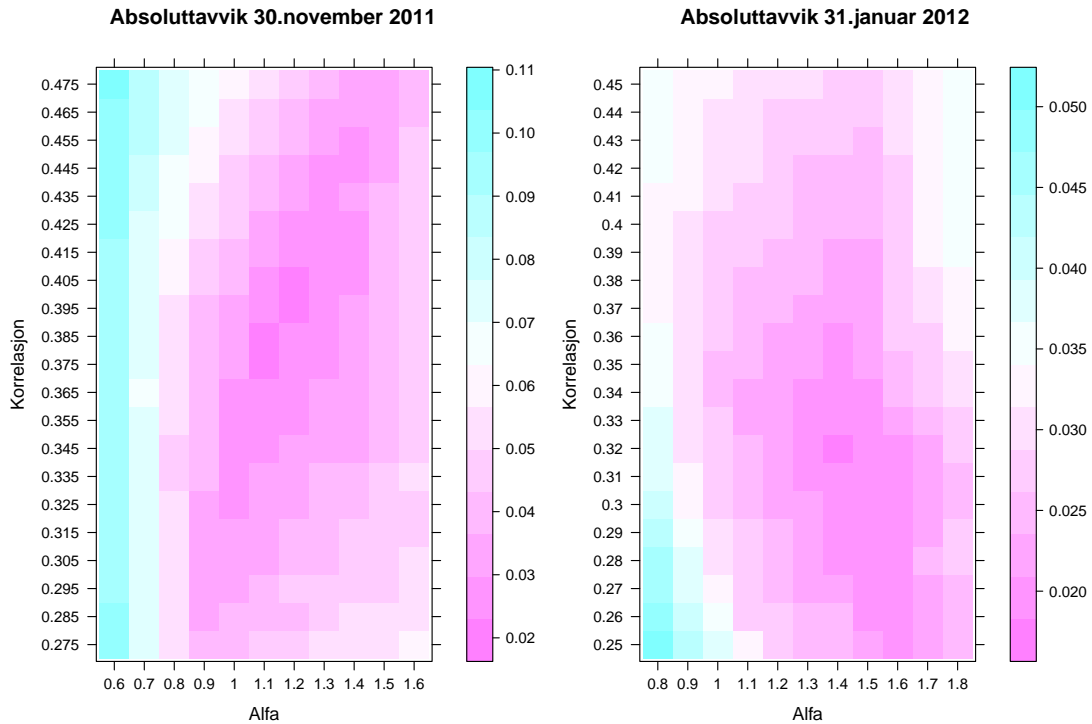
	ρ	α	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	abs(%)
30.nov 11			45.44%	10.42%	5.56%	3.40%	1.59%	
Gaussisk	0.3703		45.44%	15.50%	8.38%	6.44%	1.48%	10.9
NIG(1)	0.3869	1.1480	49.60%	10.42%	4.73%	4.58%	1.59%	2.0
31.jan 12			36.50%	2.34%	-0.90%	1.04%	0.37%	
Gaussisk	0.2666		36.50%	4.65%	0.25%	0.57%	-0.97%	5.3
NIG(1)	0.3201	1.4588	34.19%	2.34%	0.02%	1.04%	0.10%	1.2

Tabell 9: DJ iTraxx Europe 9.serie Versjon 1 5Y.

Vi ser at den gaussiske modellen i alle tilfeller underpriser seniortransjene, overpriser messanintransjene og har et relativt høyt absoluttavvik. Dette er blandt annet fordi den gaussiske modellen ikke klarer å reprodusere korrelasjonssmilet, se kap 4.3.

For NIG(1) med en ekstra modellparameter enn den gaussiske ser vi at den priser 3-6%-transjen nøyaktig for alle datoer, og reduserer de modellgenererte absoluttavvikene i forhold til den gaussiske modellen. Selv om fokuset er å kalibrere de mindre risikofylte transjene merker man seg at avviket for 0-3%-transjen er mye høyere enn de andre transjene tilsammen. Dette blir redusert ved en kalibrering for alle transjer, men da på bekostning av misprising av de mer seniorielle transjene, se tabell 13 i neste avsnitt. Korrelasjonene brukt i serie 7 er mye høyere for den gaussiske enn NIG(1), noe som tyder på at NIG(1) har en mye mer kompleks avhengighetsstruktur og derfor kan endre verdien på sin ekstra parameter α for å prise mer korrekt. Selv om NIG(1)-modellen ikke helt klarer å reprodusere markedspriser nøyaktig er det en betydelig forbedring fra den en-parametriserte gaussiske, og er sagt å være tilfredsstillende i forhold til andre modeller, se Cecchetti&Nappo (2012).

Vi vil nå konsentrere oss rundt observasjonene og resultatene for den 9.serie 30.november 2011 og 31.januar 2012. Det man gjerne observerer først i tabell 9 er størrelsen på forhåndsbetøpet til markedsprisen på transjene, og særlig da egenkapitaltransjen, sett i forhold til tilsvarende transjer for den 7.serie. Størrelsen er en indikator på den vedvarende usikkerheten i det europeiske obligasjonsmarkedet og investorer som krevde høye premier for å delta i risikoen. Hvis man betrakter serien 31.januar 2012 ser vi at investorer i 9-12%-transjen må betale inn et forhåndsbetøp. Dette er for å unngå at den forventede nåverdien til kontrakten er positiv for investoren ved kontraktinngåelsen grunnet den høye årlige faste spreaden på 300bp.

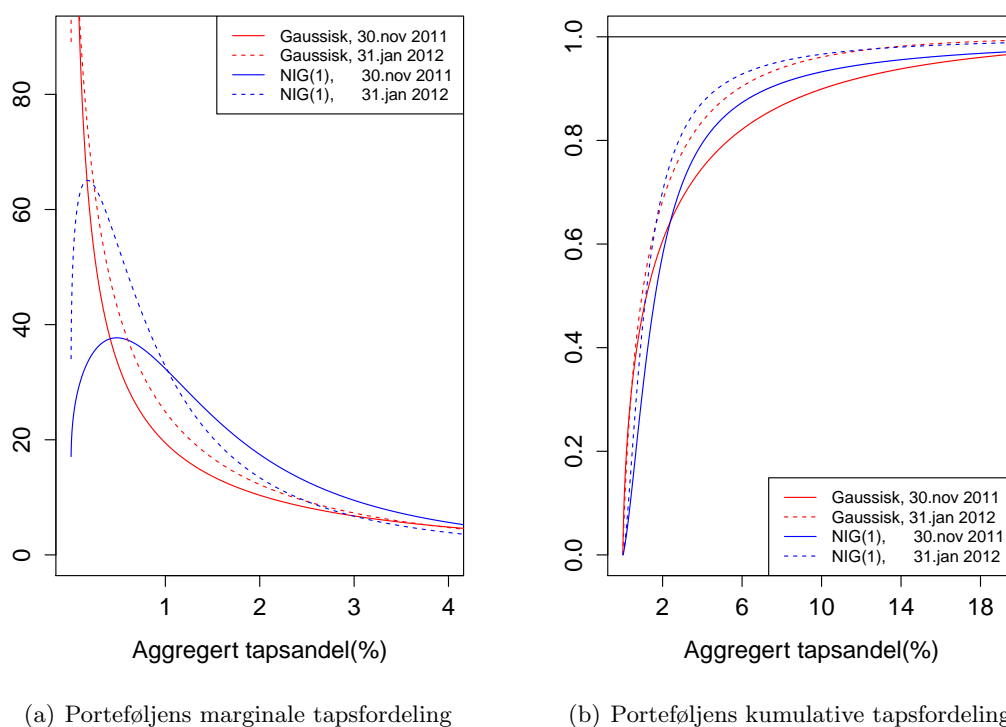


(a) Globalt minimum for $(\rho \approx 0.39, \alpha \approx 1.15)$. (b) Globalt minimum for $\rho \approx 0.32, \alpha \approx 1.40$.

Figur 17: Nivåkurver, $Dev_2(\rho, \alpha)$ for LHP NIG(1). Itraxx Europe Serie 9 Versjon 1.

I figuren over ser vi endringene i de estimerte optimalverdiene for absoluttavvikene med hensyn på ρ og λ . Vi ser at $Dev_2(\rho, \alpha)$ til NIG(1) er sensitiv for marginale endringer i ρ og α . Den optimale haletyngdeparameteren α er noe høyere for serien 31.januar 2012 enn 30.november 2011, som igjen gir en lavere kurtosis for fordelingene i faktormodellen (5.2.1).

Vi ser i figur 18 under at de modellerte halesannsynlighetene er redusert mellom de to tidspunktene, noe som følges av en reduksjon i spreaden på messanin- og seniortransjene for de to datoene, se tabell 9. Reduksjonen i de impliserte korrelasjonene kan også sees i tapsfordelingen ved større sannsynlighet for mindre tap. Den gaussiske tapsfordelingen klarer ikke å fange opp det faktum at det er svært lite sannsynlig med null tap. Den gaussiske modellen gir også større sannsynlighet for ekstreme begivenheter, og konvergerer senere enn NIG(1). For eksempel har den gaussiske modellen for 30.november over 10 ganger så stor sannsynlighet for at det vil forekomme tap større enn 40% i porteføljen, noe som gir utslag i høye priser for de øvre transjene.



Figur 18: Tapsfordelinger modellert fra markedspriser Itraxx Europe Serie 9 Versjon 1.

Ser man på modellenes evne til å reprodusere markedsspreadene er det en betydelig økning i absoluttavvikene fra 2007 til 2011/12, men innenfor en akseptabel grense sett iforhold til indeksens likviditet. Den 9.serie med sin oppstart i 2008 har vært den mest likvide siden finanskrisen. Vi observerer også den 9.serie på tidspunkter der den er "off-the-run"⁷⁰, slik at den nødvendigvis ikke er handlet nok til at den kan brukes i en modelltesting sammenheng. Likevel kan man observere på Markit at bid/ask-spreaden til transjene er relativt liten sett i forhold til andre serier, noe som gjerne er kjennetegn på en større etterspørsel i verdipapiret.

Grunnet endringene i premievilkårene tidlig i 2010 med innføringen av engangssummer for alle transjene, ser vi kanskje en effekt av dette på misforholdet i absoluttavvik mellom de to periodene, i tillegg til markedets antagelser om recovery-raten. En annen forklaring kan være at handelsvolumet for transjerte kredittderivater, slik som DJ iTraxx Europe, har blitt redusert etter finanskrisen (Choroś-Tomczyk et.al, 2012). Elementære tilbud- og etterspørselmekanismer samt arbitrasjeregere som ingredienser i et fullstendig og effektivt marked har ikke nødvendigvis vært tilstede for å prise dette komplekse kredittderivatet. Dermed kan vi våge å anta at de oppgitte markedsprisene for den 9.serie avviker noe fra de ukjente sanne verdiene på CDOen.

Hvis man så sammenligner modellens ferdigheter til å reprodusere markedspriser for on-the-run 7.serien mot den 9.serien off-the-run må man ta i betraktning de forskjellige markedsforholdene,

⁷⁰Når en ny indeks er startet, kalt "on-the-runindeksen, fortsetter de eksisterende ("off-the-run") indeksene å handles på fram til forfall. Investorer har da valget mellom å lukke posisjonen i off-the-run serien og gå inn i nye posisjoner i den nystartede serien, men er ikke forpliktet til å gjøre det. On-the-run indeksen er da sagt å være mer likvid enn off-the-run.

samt etterspørselen etter transjene. Likevel viser det seg at missprisingen ved vårt valg av NIG(1)-LHP-modell ikke har endret seg så mye siden 2007, hvis man innfører en ny størrelse, det *relative missprisingsforholdet*, $M_{rel,k}$, introdusert av Brigo et al.(2010). Her ser man på avviket mellom modellkursen og bid-ask kursene i forhold til markedsprisen. Fordelen med et slikt forhold er at det er mer nøytral for størrelsen på transjens spread/forhåndsbeløp, og at det vekter missprisingen i forhold til det aktuelle avviket mellom kjøper og selgers prisforslag. Jo mer likvid og dermed friksjonsløs transjepremien er, desto mindre er avviket mellom bid- og ask-kursene (Burtshell et al., 2008). En modellert transjespread der gapet mellom bid og ask er stort, får et lavere relativt missprisingsforhold enn om gapet hadde vært tettere og transjen var mer likvid. En modellpris som havner i bid/ask-intervallet får verdien 0. Det relative missprisingsforholdet for transjesett k er gitt ved:⁷¹

$$M_{rel,k} = \begin{cases} \frac{S_k^{R,NIG(1)} - S_k^{M,bid}}{S_k^{M,mid}}, & S_k^{R,NIG(1)} < S_k^{M,bid} \\ \frac{S_k^{R,NIG(1)} - S_k^{M,ask}}{S_k^{M,mid}}, & S_k^{R,NIG(1)} > S_k^{M,ask} \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (5.4.5)$$

Ser man så på det gjennomsnittlige absolutt relative misprisingsforholdet

$$\bar{M}_{rel} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 |M_{rel,k}|, \quad (5.4.6)$$

får vi en indikator som lettere kan sammenliknes mellom seriene⁷²

	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	\bar{M}_{rel}
31.mai 07	12.32	0.00	0.00	-0.45	-25.38	7.63
29.jun 07	-22.97	0.00	16.82	14.70	0.00	10.89
30.nov 11	7.30	0.00	-4.49	32.61	0.00	8.87
31.jan 12	-5.04	0.00	-53.30	0.00	56.75	22.86

Tabell 10: Relativ misprising NIG(1) for iTraxx Europe 7. og 9.serie. Tall i prosent.

På tross av den store variasjonen innad i seriene ser vi at den gjennomsnittlige relative misprisingen er noe lavere for 2007-seriene enn dem i 2011/12. Med flere markedsobservasjoner og modellgenererte serier kunne vi ha fått et tydeligere bilde av utviklingen og gjort mer statistisk inferens ut av $M_{rel,k}$. Likevel gir det oss en pekepinn på at NIG(1)-LHP modellen gir mer enn nok akseptable markedspriser. Den gaussiske modellen er ikke inkludert her, da det var vanskelig å få plass til verdiene i tabellen.

Når vi nå har fått akseptable markedspriser ved bruk av NIG(1) i stabile perioder vil vi i neste avsnitt se på iTraxx Europe IG 9.serie 5Y under finanskrisen for å undersøke recoveryratens sensitivitet på transjespreaden. Vi vil også innføre en ekstra parameter i NIG-modellen for å se om den forbedrer kalibreringen ytterligere.

⁷¹For transjer med oppgitte og modellerte forhåndsbeløp brukes dette istedenfor S_k .

⁷²Bid- og askpriser er oppgitt på Markits nettsider. Måten de beregnes på er mulig å finne informasjon om der.

5.4.2 To-parameter NIG-LHP-modell

Jeg vil nå presentere numeriske resultater hvor jeg fullt ut utnytter den reparametriserte NIG-fordelingen med dens to parametere, α og β . Sistnevnte sørger for skjevhet i fordelingen, og spørsmålet nå er om den kan bidra til en reduksjon i absoluttavviket mellom modell- og markedspriser i kalibreringen.

NIG(2) En dobbelparametrisert NIG-fordeling i denne modellen har skjevhetsparameter $0 \leq |\beta| < \alpha$. Fra (5.2.6) har vi at den stokastiske variabel $X \sim NIG(s\alpha, s\beta, -s\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, s\frac{\gamma^3}{\alpha^2})$, har følgende momenter:

$$E(X) = 0, \quad Var(X) = 1, \quad (5.4.7)$$

$$S(X) = 3\frac{\beta}{s\gamma^2}, \quad K(X) = 3 + 3\left(1 + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{\alpha^2}{s^2\gamma^4}, \quad (5.4.8)$$

Denne fordelingen har for ønsket parameterverdi til α og β både skjevhet og en kurtosis alltid større enn 3.

I tillegg til å vurdere effekten av den ekstra parameteren vil jeg også drøfte antagelsen om fast recoveryrate på 40%, siden vi har antatt at den har ligget fast. Datasettet er fra mai 2009, og er dermed midt under den globale finanskrisen, en periode preget av stor usikkerhet. Heidorn & Kahlert(2010) nevner at i begynnelsen av 2009 og ut våren kollapset markedet fullstendig for standardiserte kredittderivater slik som iTraxx og CDX, mye grunnet usikkerhet i verdsetting og lite transparens rundt de forskjellige kredittderivatenes underliggende. Priser for transjer på iTraxx Europe on-the-run seriene 10 og 11 var ikke lenger tilgjengelig, og for off-the-run transjene som blandt annet den 7. og 9.serie var prisene tilgjengelige kun fordi noen tidligere markedsdeltakere ble tvunget til fortsatt å holde på dem. Derfor strekker vi tidshorisonten noe og unngår den mest volatile perioden og behandler iTraxx Europe i slutten av mai 2009. Vi benytter oss av den mest likvide serien på det øyeblikket, den 9.serie, og finner ut at vårt modellvalg helt klart har sine begrensninger.

iTraxx Europe IG Serie 9 observert 28.mai 2009 sees i tabell 11 under. Indeksspreaden er oppgitt til å være 140bp og ved å ta i bruk (3.2.3) får vi den risikonøytrale konkursintensiteten, $\lambda = 0.02445$, og den ettårige konkurssannsynligheten $Q(\tau \leq 1) = 0.02415$. I 2009 var reglene for iTraxx-transjene at kun 0-3,3-6,6-9%-transjene skulle ha forhåndsbeløp i tillegg til en fast årlig premiespread på 500bp. Dette var fordi man ville redusere motpartrisikoen, altså risikoen for at investoren(hedgefondet eller liknende) ikke maktet å dekke kostnadene ved en kreditthendelse. Jeg transformerer forhåndsbeløpet til en hypotetisk årlig spread ved bruk av (5.4.1) for å unngå for stor vektning av 3-6%- og 6-9%-transjene i optimeringen. Kalibreringen utelater 0-3%-transjen, og den høyre kolonnen viser ulike verdier av (5.4.3) i prosent.

	R	ρ	α	β	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	abs
					53.13%	13.75%	-0.11%	242.13	99.38	
NIG(1)	0.4	0.3750	0.5657		70.27%	13.76%	-5.96%	254.87	173.00	6.7
NIG(1)	0.3	0.3541	1.3945		56.45%	13.75%	-2.72%	274.73	135.35	3.3
NIG(1)	0.2	0.4871	0.6927		64.10%	13.75%	-3.95%	279.19	174.17	4.9
NIG(2)	0.4	0.3904	0.7024	-0.15	71.17%	13.74%	-4.39%	245.75	146.78	4.8
NIG(2)	0.3	0.3898	0.8506	-0.19	68.69%	13.75%	-3.65%	257.32	148.74	4.1
NIG(2)	0.2	0.3820	0.8394	-0.20	69.53%	13.74%	-4.08%	247.36	143.45	4.4

Tabell 11: DJ iTraxx Europe 9.serie Versjon 1 5Y. Observert 28.mai 2009. Indeks 140bp.

Igjen ser vi at NIG-LHP priser 3-6%-transjen nøyaktig for alle verdier av R . Videre ser vi at absoluttavviket synker for $R = 0.4$ til $R = 0.3$, noe som kan tyde på at markedet legger til grunn en lavere rate enn den deterministiske på 40% i sine beregninger. For $R = 0.3$ til $R = 0.2$ stiger absoluttavviket, hvor særlig missprisingen av 6-9%-transjen er stor. Vi ser fra resultatene at avvikene fra markedsprisene er relativt små for de øvrige transjene og innenfor rimelighetens grenser. Modellparameterne er ikke alltid mulig å forklare fra et økonomisk perspektiv, men en høy korrelasjon er nødvendig for å redusere absoluttavviket. Spranget opp til $\rho=0.4871$ for NIG(1) med $R = 0.2$ er nødvendig for å optimere objektfunksjonen. Likefullt gav objektfunksjonen i mine beregninger kun lokale minimum med en stadig lavere verdi for en høyere korrelasjon. Det er vanskelig å gi en god økonomiske fortolkning av en optimal korrelasjon på $\rho=0.60$ i denne modellen, slik at den ble satt til 0.4871, da veksten i objektfunksjonen flatet ut.

Med en ekstra parameter ser vi at NIG(2) ikke klarer å redusere absoluttavviket for $R = 0.3$, noe man kunne forvente med en ekstra føyningsparameter. Vi ser at den ekstra parameteren β klarer å prise 3-6%-transjen nøyaktig, samt reduserer avviket for beregningene for både $R = 0.4$ og $R = 0.2$. I tabell 12 under er den relative missprisingen oppgitt for optimeringen med lavest absoluttavvik, NIG(1) med $R = 0.3$:

	0-3%	3-6%	6-9%	9-12%	12-22%	M_{rel}
28.mai 09	4.83	0.00	1772.32	9.92	32.17	361.79

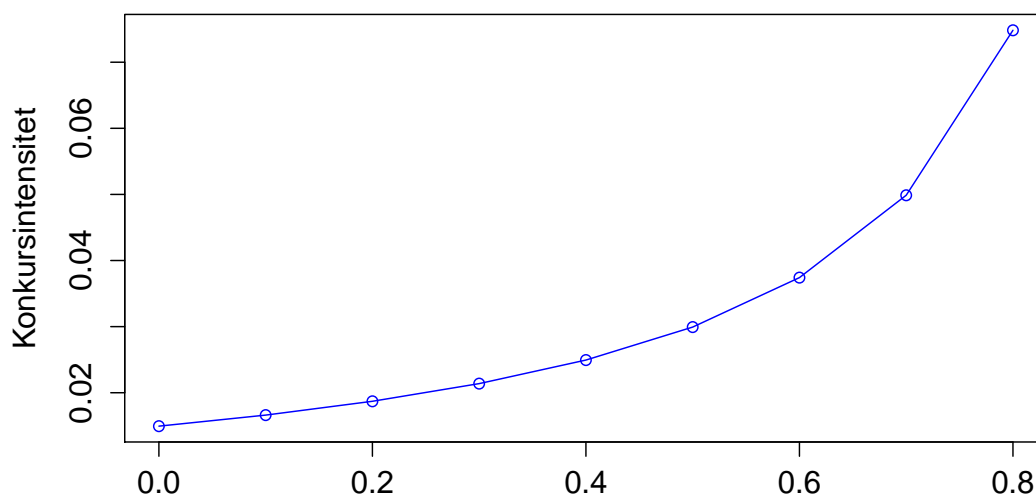
Tabell 12: Relativ misprising NIG(1) for iTraxx Europe 9.serie. $R=0.3$. Tall i prosent.

Man ser at den relative missprisingen er akseptabel for 0-3%, 3-6% og 9-12%. Grunnet den lave markedsverdien til transje 6-9% på -0.11% gir kun et lite avvik fra markedsprisen en betydelig relativ misprising. Hadde man valgt en objektfunksjon som hadde veid opp for den lave verdien til 6-9% ser man at transjen ikke nødvendigvis hadde vært priset så feil. Dette kunne eventuelt ha blitt gjort ved å endre objektfunksjonen (5.4.3) til en minste kvadraters metode ved bruk av forhåndsbetrag for transje 3-6% og 6-9% samt skalere opp transjene med lavest ask/bid-avvik. Denne ville ha vektet avvik for transjene med forhåndsbetrag og størst likviditet større enn for de mer seniorielle transjene. Baksiden av medaljen ved en slik objektfunksjon er at avviket for de resterende transjene ville ha blitt betydelig høyere.

I 4.kvartal 2008 og første kvartal i 2009 var Itraxx-transjene svært illikvide, grunnet den lave

etterspørselen for strukturerte kredittderivater. Dermed er det vanskelig å skulle teste modellens ferdigheter under en slik periode, ifølge Choros-Thomczyk et.al (2012). Brigo et al.(2010) bruker en Generalisert-Poisson tapsmodell med en objektfunksjon som reduserer den relativ missprisingen for iTraxx 2007-2009, og får at feilprisingen for transjene var mangedoblet under finanskrisen. De viser også at dette flatet ut i perioden etterpå.

Forklaringen til de relativt små endringene i prisingen ved forskjellig recoveryrate kan observeres i figur 19 nedenfor.



Figur 19: Risikonøytral konkursintensitet for varierende recoveryrate. Indeks 140bp.

Her ser vi at endringer i recoveryraten kompenseres for en ny verdi på konkursintensiteten, slik at den oppgitte indeksspreaden fortsatt er den samme, altså 140bp. Konkursintensiteten synker med $LGD = 1 - R$, slik at konkurssannsynligheten må være lavere for at indeksspreaden ikke endrer seg. Schlösser (2011) viser at endring i recoveryratene påvirker prisene svært lite i stabile perioder grunnet forholdet til konkursintensiteten.

Vi vil fokusere på tiden før subprimekrisen under en svært stabil periode for å kunne sammenlikne NIG med andre modeller presentert i oppgaven. Tallene er hentet fra Kalemanova (2005), gjengitt i Schlösser (2011) og er også tilgjengelig på Markit. Betrakt iTraxx Europe IG 5Y Versjon 1 12.april 2006. Denne hadde oppstart 20.mars 2006, og hadde termin 20.juni 2011.

	Marked	Gaussisk LHP	Gaussisk MC	Student t MC	NIG(1)	NIG(2)
0-3%	23.53%	23.59%	23.59%	23.58%	23.53%	23.53%
3-6%	62.75bp	133.48bp	139.83bp	131.18bp	62.72pb	62.73bp
6-9%	18.00bp	27.09bp	30.38bp	43.88bp	23.74pb	23.82bp
9-12%	9.25bp	6.45bp	10.22bp	23.11bp	15.94bp	15.17bp
12-22%	3.75bp	0.67bp	1.2bp	10.9bp	9.71pb	9.55bp
Dev_1		92.67bp	98.15bp	122.29bp	18.38bp	17.83bp
λ		0.0053	0.0053	0.0053	0.0053	0.0053
ρ		0.1553	0.1612	0.2543	0.1562	0.1534
α					0.3812	0.5084
β						-0.07
ν				3		

Tabell 13: DJ iTraxx Europe IG 5.serie Versjon 1, 12.april 2006. Indeks 32bp.

Vi ser over i tabell 13 en sammenlikning av prisingsresultatene for de fleste modellene presentert i oppgaven. Da datasettet er fra en periode der kredittderivatmarkedet var regnet for å være svært likvid, kan vi anta at markedetsdataene er nærmere de samme verdiene enn for eksempel tilfellet var for iTraxx Europe i tabell 11 under finanskrisen. Parametrene i modellene har blitt kalibrert som følger:

- Gaussisk LHP og MC: Korrelasjonsparameteren ρ som føyer seg til egenkapitaltransjone ved nåverdimetoden.
- Student t MC: Korrelasjonsparameter ρ og frihetsgrader ν som føyer modellen til egenkapital- og juniormessanintransjen ved minste totale absoluttfeil.
- NIG(1) og NIG(2): Parametrene er valgt på bakgrunn av minste totale absoluttfeil for alle transjone, hvor egenkapitaltransjespreaden ikke er transformert som tidligere.
- Ved Monte Carlo modelleringen har det blitt gjennomført 200 000 simuleringer for 125 navn.

Vi ser at de gaussiske modellene priser ganske likt, med et noe høyere absoluttavvik for Monte Carlo simuleringen. Student t overpriser seniortransjone. Årsaken til dette er Student t-copulaens høyere haleavhengighet, altså sannsynligheten for ekstreme simultane begivenheter. Derfor priser den seniortransjone høyere. Den samme årsaken gjelder for NIG(1) og NIG(2), som gir en høyere pris for seniortransjone. Likevel ser vi at NIG jevnt over modellerer priser mer likt markedets. Igjen ser vi at den ekstra parameteren β ikke forbedrer resultatene nevneverdig, og kan derfor betraktes som overflødig i dette eksempelet.

I figur A20 i appendiks A.4.1 er de modellerte transjespreadene som funksjon av haletyngdeparameteren α og varierende korrelasjon tegnet inn for NIG(1)-modellen. Dette er for å bedre illustrere variasjonene mellom transjone samt vanskeligheten med å avgjøre de riktige parametrene. I hvert plot er den svarte tynne linjen tegnet inn for å representere markedetspremie. Vi ser først i figuren at det ikke finnes en unik løsning for parametersettet (ρ, α) som minimerer avvikene mellom markedspriser og modellen. For eksempel ser vi at de fire øvre transjone passer perfekt for parameteret $(\rho = 0.10, \alpha \approx 0.70)$, mens det beste parameteret for egenkapitaltransjen inkluderer en høyere korrelasjon. Dermed har vi at vår valgte objektfunksjon (5.4.2) priser inn

en høyere korrelasjon, grunnet den høyere vektingen av forhåndsbeløpet til egenkapitaltransjen. Hadde vi unnlatt denne transjen i kalibreringen, ville vi fått et nærmest perfekt fit for de andre transjene, noe figuren viser. Siden vi vet at en høyere korrelasjon øker premiene for seniortransjene, observerer vi nettopp dette i tabell 13 ved at den høye vektingen for egenkapitaltransjen gir høyere modellpriser for de andre transjene. Man observerer også at egenkapitaltransjen er svært sensitiv for korrelasjon og tilnærmet indifferent for haletyngden.

Vi har nå sett at faktormodellen 4.2.1 kan utvides til å gjelde andre fordelinger enn den gaussiske for å prise syntetiske CDOer. Den Normal Invers Gaussiske fordelingen er mye brukt i finans grunnet den intuitive parametriseringen, og fordi den er svært fleksibel når det gjelder å danne nye former på sannsynlighetsfordelingen, alt etter det empirisk grunnlaget. Når det gjelder kredittderivater har vi sett at den alltid føyer seg etter 3-6%-transjens markedspriser og tilfredsstillende for de andre, og at den gjør det mye bedre i forhold til andre modeller. Den er godt egnet for risikostyrere med store porteføljer, da den er enkel å reparametrisere samt har svært kort beregningstid iforhold til ellers tidkrevende Monte Carlo simuleringer. Vi har også sett gjennom eksemplene at skjevhetsparameteren β ikke har endret på resultatene nevneverdig. Kalemanova (2007) viser også at både NIG(1) og NIG(2) har høyere haleavhengighet enn gaussisk og Student t, slik at den i enda større grad kan modellere ekstreme begivenheter, en egenskap helt essensielt i finansteori.

6 Oppsummering, konklusjon

I denne oppgaven har vi sett at det er et stort marked for kredittderivater etter finanskrisen, men da i en vridning mot syntetiske varianter. Men framtidsutsiktene er usikre, da disse produktene er i en særstilling når det gjelder nye reguleringer. Likevel fører kredittderivater med seg store muligheter for å flytte på risiko, slik at deltakere i markedet kan bli avlastet endel i sine porteføljer. For at markedsdeltakere som enten allerede er i en eksisterende posisjon, eller vurderer investeringer på slike derivater, lettere kan gjøre opp risikovurderinger er det viktig med modeller som kan reprodusere markedspriser med små avvik på en tidseffektiv måte.

Gjennom oppgaven er derfor tre modeller blitt presentert og prøvd ut: Gaussisk-LHP, Student t-copula og NIG-LHP på den transjerte iTraxx Europe-indeksen. Vi har da sett at det er kun sistnevnte som på en effektiv måte reproduserer markedspriser tilfredsstillende hvorpå den alltid priser junior messanintransjen korrekt. Årsakene til dette er de andre modellenens manglende evne til å produsere korrelasjonssmilet observert i markedet. I tillegg har dem kun en parameter, korrelasjonen, som ikke er nok for å produsere en slik kompleks struktur som syntetisk CDO er. NIG har flere (intuitive) parametere i tillegg til korrelasjonen og dermed føyer seg lettere til markedspriser. I tillegg er NIG-modellen vi har presentert semi-analytisk slik at den bruker kort tid på å beregne. Gjennom oppgaven har vi utforsket dens evne til å reprodusere markedspriser for flere forskjellige tidsperioder, hvor vi betraktet perioden under finanskrisen som svært vanskelig, grunnet den lave likviditeten i markedet.

Med den pågående gjeldskrisen i de europeiske landene, kan vi vente oss en stadig etterspørsel etter kredittderivater på europeiske selskaper, slik at det er spennende å følge utviklingen framover.

Referanser

- [1] Ammann, Manuel (2008). *Hedging Collateralized Debt Obligations*
- [2] Barndorff-Nielsen (1977). *Hyperbolic Distributions and Distributions on Hyperbolae*, Wiley
- [3] Björk (2004). *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford
- [4] Brigo et al (2010) . *Credit Models and The Crisis* , Wiley
- [5] Burtschell, X. (2008). *A comparative analysis of CDO pricing models*, BNP-Paribas
- [6] Cecchetti& Nappo (2012). *A dynamic default dependence model*, Banco D'Italia
- [7] Choroś-Tomczyk, Barbara (2012) *Copula Dynamics in CDOs*, Humboldt Univerity
- [8] Das et al (2004). *Correlated default processes: A criterion-based copula approach*, JOIM
- [9] Deckant (2010/2011). *Critisism of Collateralized Debt Obligations In the wake of the Goldman Sachs Scandal*, Boston University School of Law
- [10] Deutsche Bank, (2009). *Credit Default Swaps*
- [11] Ding, Jack (2011). *Comparison of market models for measuring and hedging synthetic CDO tranche spread risks*, University of New South Wales
- [12] Donnely, Catherine. *The devil is in the tails: actuarial mathematics ant the subprime crisis*, ETH Zurich
- [13] Eberlein & frey (2008/2010). *Advanced credit portfolio modeling and CDO pricing*, University Freiburg
- [14] Feld , Maria (2007). *Implied Correlation*, Humboldt University
- [15] Frey & McNeil, (2001) *Copulas and credit models*, University of Zurich
- [16] Galiani, Stefano (2003). *Copula Functions and their Application in pricing and Risk Managing Multiname Credit Derivative Products*, Kings College
- [17] Graveline, Jeremy (2006). *Credit Risk*, University of Minnesota
- [18] Gueant, Oliver (2008). *Copula methods and CDO pricing models*,
- [19] Guegan, Dominique (2005). *Collateralized Debt Obligations pricing and factor models: a new methodology using Normal Invers Gaussian Distribution*, Ecole Normale Superieure
- [20] Hull % White (2004). *Valuation of a CDO and an nth to Default CDS Without Monte Carlo Simulation*, University of Toronto
- [21] Hurley, Julie D. (2011). *Pricing Models for Collateralized Debt Obligations*, Limerick Univer-sity

- [22] Jarrow, Robert A. *Problems with Using CDS to Infer Default Probabilities*, Cornell University
- [23] Kalemanova, Anna (2007). *the Normal invers Gaussian distribution for synthetic CDO pricing*
- [24] Korsnes, Stig (2008). *Synthethic CDOs- An introduction, evaluation and risk estimation*, Universitetet i Oslo
- [25] Li, David X. (1999). *On default correlation: A copula approach*, RiskMetrics Group
- [26] Lüscher, Annelis (2005). *Synthetic CDO pricing using the double normal inverse Gaussian copula with stochastic factor loadings*, ETH Zurich
- [27] McNeil, Alexander (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton
- [28] Michaelmas(2009). *Valuation of CDO sensitivities and the dynamics of the iTraxx index before and after the financial crisis* University of Oxford
- [29] Myklebust, Tor Åge (2007), *Teoretisk og numerisk prising av korrelasjonsavhengige kredittderivater*
- [30] Neugebeuer, Matthias (2007). *A comprehensive Analysis of Advanced Pricing Models for Collateralised Debt Obligations*, University of Oxford
- [31] Rakkestad , Ketil Johan (2006). *CDO-er: Nye muligheter for å investere i kredittmarkedet*, Norges Bank
- [32] Sandvik, Bjørn (2010). *Finansteori*, Universitetet i Bergen
- [33] Schaefer, Stephen M (2012). *The Default Intensity Model and the Copula Approach* , Credit Risk Elective
- [34] Schloegl & Kane (2005). *A note on the large homogeneous portfolio approximation with the student-t copula*, Lehman Brothers
- [35] Schlösser, Anna (2011). *Pricing and Risk Management of Synthetic CDOs*, Springer
- [36] Wang et.al(2006). *Pricing tranches of a CDO and CDS Index: Recent Advances and Future Research*, University of California
- [37] Wang, Hui (2010). *Valuation of Normal Invers Gaussian Distribution for Synthetic CDO pricing*, Nanjing University
- [38] Wrampelmeyer, Jan(2007). *valuation nof collateralized Debt Obligations with probabilities of Default and Recovery rates being correlated*, Maastricht university
- [39] Wu, Liuren (2008). *A Primer on Credit Default Swaps*, Bloomberg

A APPENDIKS

A.1 Store talls lov Student t LHP

Betrakt $I_{A_i(t) \leq C_i(t)}$, som returnere 1 ved konkurs, 0 ellers. Har da at betinget η er alle selskapers tap uavhengige og identisk fordelt, slik at for $i = 1$ har vi at det forventede tapet til selskapet er gitt ved

$$\mathbb{E}[I_{A_1(t) \leq C_1(t)}] = p_1(t|\eta) = \Phi\left(\frac{\eta(t)}{\sqrt{1-a^2}}\right) = L(t)$$

$L_N(t)$ er antall konkurs som prosentandelen i porteføljen bestående av N obligasjoner. Dermed har vi at

$$L_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m I_{A_i(t) \leq C_i(t)},$$

og ved bruk av store talls lov for enhver $h > 0$ og at $\text{Var}I_{A_1(t) \leq C_1(t)} \ll \infty$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|L_N(t) - L(t)| < h) = 1$$

altså konvergerer $L_N(t)$ i sannsynlighet mot $L(t)$. Dermed har vi at tapet til porteføljen følger samme fordelingen som den betingede sannsynligheten til den individuelle obligasjonen $p_i(t|\eta)$ \square

A.2 Betinget Student t-fordeling $X_2|X_1 = x_1$

Fra regelen om betinget fordeling har vi følgende:

Definisjon 8. Dersom A og B er tilstander i utvalgsrommet S og $P(B) > 0$, så er den betingede sannsynligheten for A gitt B gitt ved $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Dette bruker vi når vi skal finne den betingede fordelingen til $X_2|X_1 = x_1$, samt tetthetsfunk-

sjonene til Student-t univariat og bivariat:

$$\begin{aligned}
f(X_2|X_1 = x_1) &= \frac{f(X_2 = x_2, X_1 = x_1)}{f(X_1 = x_1)} \\
&= \frac{\frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu\pi)(1-\rho^2)^{1/2}} \cdot \left(\frac{\nu(1-\rho^2)+x_1^2-2\rho x_1 x_2+x_2^2}{\nu(1-\rho^2)} \right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\nu\pi)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1+x_1^2/\nu)^{\frac{\nu+1}{2}}}} \\
&= \frac{\frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})(\nu\pi)^{1/2}(1-\rho^2)^{1/2}} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu+x_1^2} \right)^{1/2}}{\left[\frac{\nu(1-\rho^2)+x_1^2-2\rho x_1 x_2+x_2^2+\rho^2 x_1^2-\rho^2 x_2^2}{(\nu+x_1^2)(1-\rho^2)} \right]^{\frac{\nu+2}{2}}} \\
&= \frac{\frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})(\nu\pi)^{1/2}(1-\rho^2)^{1/2}} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu+x_1^2} \right)^{1/2}}{\left[\frac{\nu(1-\rho^2)+x_1^2+(x_2-\rho x_1)^2-\rho^2 x_1^2}{(\rho+x_1^2)(1-\rho^2)} \right]^{\frac{\nu+2}{2}}} \\
&= \frac{\frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})[(\nu+1)\pi]^{1/2}(1-\rho^2)^{1/2}}}{\left[1 + \frac{(x_2-\rho x_1)^2}{(\rho+x_1^2)(1-\rho^2)} \right]^{\frac{\nu+2}{2}} \left(\frac{\nu+1}{\nu+x_1^2} \right)^{-1/2}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{(\nu+1)+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})[(\nu+1)\pi]^{1/2}} \cdot \frac{\left[\frac{\nu+1}{(\nu+x_1^2)(1-\rho^2)} \right]^{1/2}}{\left[1 + \frac{(x_2-\rho x_1)^2}{(\nu+x_1^2)(1-\rho^2)} \cdot \frac{\nu+1}{\nu+1} \right]^{\frac{(\nu+1)+1}{2}}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{(\nu+1)+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})[(\nu+1)\pi]^{1/2}} \cdot \left[1 + \frac{(x_2-\mu)^2}{\nu+1} \right]^{-\frac{(\nu+1)+1}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma},
\end{aligned}$$

der $\mu = \rho x_1$ og $\sigma = \left[\frac{(\nu+x_1^2)(1-\rho^2)}{\nu+1} \right]^{1/2}$. Derfor har vi et den betingede fordelingen til $X_2|X_1 = x_1$ er Student t- med parametere μ, σ og $\nu + 1$ innenfor location-scale familien.

A.3 NIG tetthetsfunksjon $f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$

Ønsker å finne fordelingen til $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$. Har at tetthetsfordelingene til $X|Y = y \sim N(\mu + \beta y, y)$ og $Y \sim IG(\delta\gamma, \gamma^2)$ er gitt ved henholdsvis:

$$\begin{aligned}
f_N(x|y; \mu + \beta y, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \mu - \beta y)^2}{2y}\right) \quad \text{og} \\
f_{IG}(y; \delta\gamma, \gamma^2) &= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} y^{-3/2} \exp\left(\delta\gamma - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{y} + \gamma^2 y\right)\right).
\end{aligned}$$

Ved å bruke egenskaper ved simultane og betingede tetthetsfunksjoner på kontinuerlig form⁷³ og funksjonene nevnt over får vi at

$$\begin{aligned}
f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) &= \\
&= \int_0^\infty f_N(x|y; \mu + \beta y, y) \cdot f_{IG}(y; \delta\gamma, \gamma^2) dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{(x - \mu - \beta y)^2}{2y}\right) \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} y^{-3/2} \exp\left(\delta\gamma - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{y} + \gamma^2 y\right)\right) dy \\
&= \frac{\delta}{2\pi} \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu)) \int_0^\infty y^{-2} \exp\left(-\frac{1}{2y}((x - \mu)^2) + \delta^2 + \alpha^2 y^2\right) dy,
\end{aligned}$$

og ved substitusjonen $wy = \frac{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}{\alpha}$ får vi:

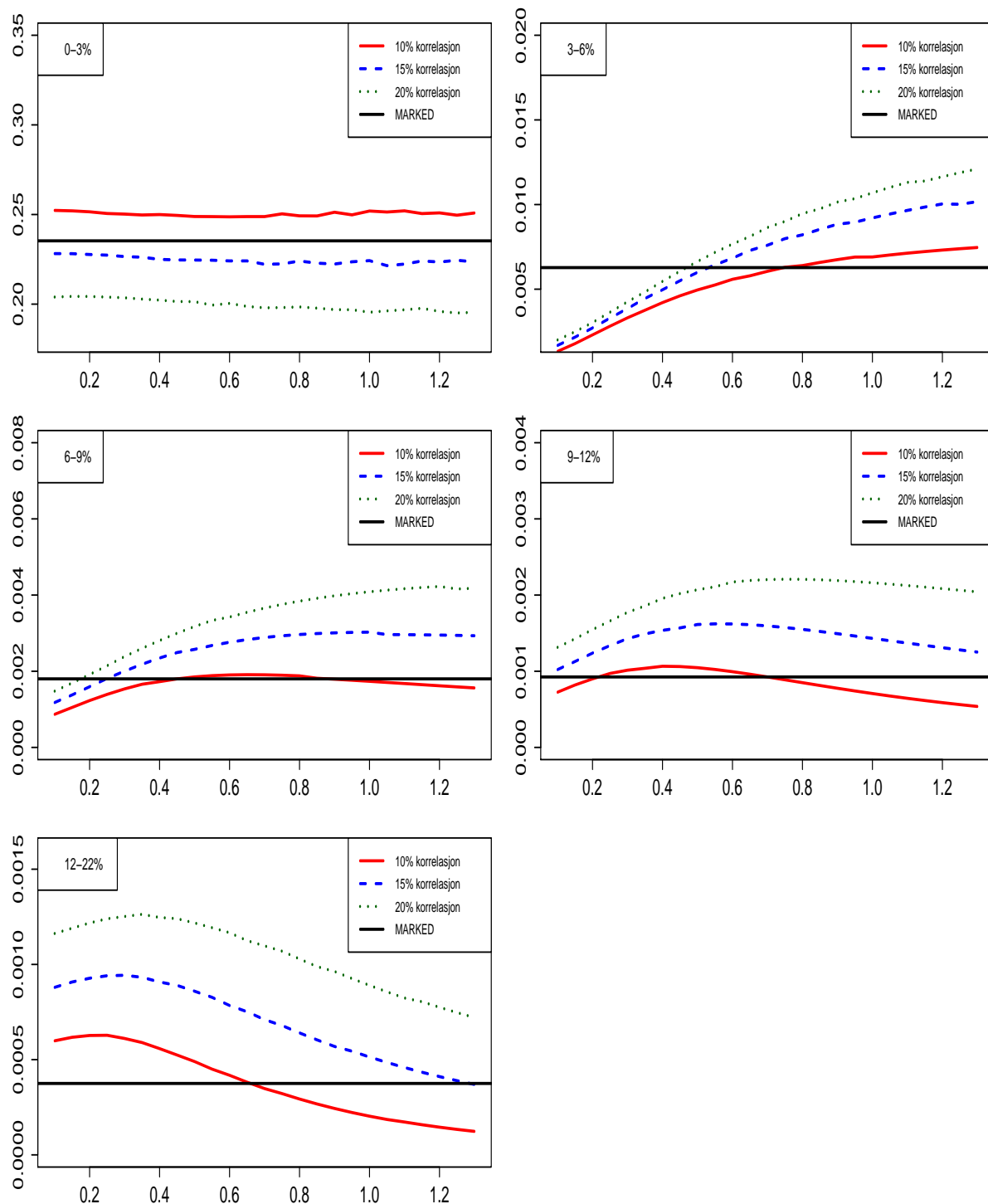
$$\begin{aligned}
f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) &= \\
&= \frac{\delta}{2\pi} \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu)) \int_0^\infty \frac{\alpha^2 w^2}{\delta^2 + (x - \mu)^2} \\
&\quad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha w((x - \mu)^2) + \delta^2}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} + \alpha^2 \frac{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}{\alpha w}\right)\right) \frac{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}{\alpha w} dw \\
&= \frac{\delta}{2\pi} \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu)) \int_0^\infty \frac{\alpha}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} \\
&\quad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}(w + w^{-1}))\right) dw \\
&= \frac{\delta\alpha \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu))}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right).
\end{aligned}$$

⁷³La (X, Y) være en kontinuerlig bivariat stokastisk vektor med simultantetthet $f_{X,Y}(x, y)$ og marginaler $f_X(x)$ og $f_Y(y)$. For enhver y slik at $f_Y(y) > 0$ har vi da at

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y) dy = \int f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy.$$

A.4 Figur

A.4.1 DJ iTraxx Europe 5.serie



Figur A20: DJ iTraxx Europe 5.serie (12.april 2006) observert transjespread sammenliknet med modellert spread(2.akse) for varierende korrelasjon og α -parameter(1.akse) i NIG(1)-modell. Egenkapitaltransjen øverst til venstre, seniortransjen nede til venstre.

A.5 R-koden(utvalg)

A.5.1 Trapesmetode

```
trap <- function(x,y)
{#trapezoidal rule for numerical integration
  tfvektor <- c()
  n <- length(y)
  for (i in 1:(n-1))
  {
    tf <- ((y[i] + y[i+1])/2) * (x[i+1] - x[i])

    tfvektor[i] <- tf
  }

  summ <- sum(tfvektor)

  return(summ)
}
```

A.5.2 Implisitte konkursinteteter

```
#Tidspunkt for premiebetaling:
t_n=seq(68/365,5+68/365,0.25);t_n[1]=0.00001

PV_CDS=function(lambda,indeks,r,R,t_n) {
  #For å finne
  premium=0;protection=0
  for (i in 2:length(t_n)) {
    premium=premium+0.25*indeks*exp(-lambda*t_n[i])*exp(-r*t_n[i])
    protection=protection+(1-R)*(exp(-lambda*t_n[i-1])-exp(-lambda*t_n[i]))*exp(-r*t_n[i])
  }
  #Nåverdi:
  premium-protection
}
uniroot(PV_CDS,c(0.002,0.006),indeks=0.0032,r=0.2,R=0.4,t_n)$root
```

A.5.3 MC-algoritmen for Gauss og t-copula for CDO-prising

```
library(spam)

#Parametervalg ved innsetting:
lambda=0.004987238;T=5.1863
```



```

r=0.02;B=exp(-r);rho=0.1581
t_n=seq(68/365,5+68/365,0.25);t_n[1]=0.00001
REC=0.40;n=125;

#Korrelasjonsmatrisen:
RHO=matrix(seq(rho,rho,n*n),n,n);diag(RHO)=1;R=chol(RHO)

n_sim=150000

DP=numeric(n_sim)
PL=numeric(n_sim)

for (k in 1:n_sim) {
  K_1=0;K_2=0.03
  u=pnorm(t(rnorm(n))%*%R)
  tau=-log(1-u)/lambda
  konktid=sort(tau[which(tau<=T)])

  if(length(konktid)==0) {konktid=FALSE}

  L=numeric(length(konktid))
  for (i in 1:length(konktid)) {
    L[i]=1/n*(1-REC)*i
  }

  if (any(konktid==FALSE)) {
    DP[k]=0;PL[k]=0
  } else {
    if (K_1<=L[length(konktid)] & L[length(konktid)]<K_2) {
      trigger=konktid[min(which(L>=K_1))]
      DPW=0;TL=L[which(konktid>=trigger)]-K_1
      TL_inc=append(TL[1],diff(TL))
      for (i in 1:length(TL_inc)) {
        DPW=DPW+B^(konktid[which(konktid==trigger)+i-1])*TL_inc[i]
      }
      DP[k]=DPW
    }

    if (K_2<=L[length(konktid)]) {
      l_trigger=konktid[min(which(L>=K_1))]
      u_trigger=konktid[min(which(L>=K_2))] #Vil da inkludere deler av tap som må dekkes av t

```

```

TL=L[which(konktid>=l_trigger& konktid<=u_trigger)]-K_1
TL_inc=append(TL[1],diff(TL))
TL_inc[length(TL_inc)]=TL_inc[length(TL_inc)]-(L[which(konktid==u_trigger)]-K_2)#ENDRIM

DPW=0
for (i in 1:length(TL_inc)) {
  DPW=DPW+B^(konktid[which(konktid==l_trigger)+i-1])*TL_inc[i]
}
DP[k]=DPW
}

teller=1
L_t=numeric(length(t_n))
for (i in 2:length(t_n)) {
  if (t_n[i]>konktid[teller]) {
    L_t[i]=L[teller]
    teller=teller+1
  } else {
    L_t[i]=L_t[i-1]
  }
  if (teller>length(L)) {teller=teller-1}
}

payment=0
for (i in 2:length(t_n)) {
  payment=payment+0.25*B^(t_n[i])*min(max(K_2-L_t[i],0),K_2-K_1)
}
PL[k]=payment
}
}

mean(DP)-0.05*mean(PL)
(mean(DP)-0.05*mean(PL))/(K_2-K_1) gav 0.2570932

a=c(2,3,4,5)
any(a>3)

#-----For t-fordeling:

lambda=0.004987238;T=5.1863

```

```

r=0.03;B=exp(-r);rho=0.241#for øvre kalib: rho=0.2297
t_n=seq(68/365,5+68/365,0.25);t_n[1]=0.00001
REC=0.40;n=125;v=8

```

```

n_sim=200000

```

```

DP=numeric(n_sim)

```

```

PL=numeric(n_sim)

```

```

spread=function(K_1,K_2,v,rho) {

```

```

  RHO=matrix(seq(rho,rho,n*n),n,n);diag(RHO)=1;R=chol(RHO)

```

```

  for (k in 1:n_sim) {

```

```

    u=pt(t(rt(n,v))%*%R,v)

```

```

    tau=-log(1-u)/lambda

```

```

    konktid=sort(tau[which(tau<=T)])

```

```

    if(length(konktid)==0) {konktid=FALSE}

```

```

    L=numeric(length(konktid))

```

```

    for (i in 1:length(konktid)) {

```

```

      L[i]=1/n*(1-REC)*i

```

```

    }

```

```

    if (any(konktid==FALSE)) {

```

```

      DP[k]=0;PL[k]=0

```

```

    } else {

```

```

      if (K_1<=L[length(konktid)] & L[length(konktid)]<K_2) {

```

```

        trigger=konktid[min(which(L>=K_1))]

```

```

        DPW=0;TL=L[which(konktid>=trigger)]-K_1

```

```

        TL_inc=append(TL[1],diff(TL))

```

```

        for (i in 1:length(TL_inc)) {

```

```

          DPW=DPW+B^(konktid[which(konktid==trigger)+i-1])*TL_inc[i]

```

```

        }

```

```

        DP[k]=DPW

```

```

      }

```

```

      if (K_2<=L[length(konktid)]) {

```

```

        l_trigger=konktid[min(which(L>=K_1))]

```

```

        u_trigger=konktid[min(which(L>=K_2))] #Vil da inkludere deler av tap som må dekkes av

```

```

        TL=L[which(konktid>=l_trigger& konktid<=u_trigger)]-K_1

```

```

        TL_inc=append(TL[1],diff(TL))

```

```

TL_inc[length(TL_inc)]=TL_inc[length(TL_inc)]-(L[which(konktid==u_trigger)]-K_2)#ENDF

DPW=0
for (i in 1:length(TL_inc)) {
  DPW=DPW+B^(konktid[which(konktid==l_trigger)+i-1])*TL_inc[i]
}
DP[k]=DPW
}

teller=1
L_t=numeric(length(t_n))
for (i in 2:length(t_n)) {
  if (t_n[i]>konktid[teller]) {
    L_t[i]=L[teller]
    teller=teller+1
  } else {
    L_t[i]=L_t[i-1]
  }
  if (teller>length(L)) {teller=teller-1}
}

payment=0
for (i in 2:length(t_n)) {
  payment=payment+0.25*B^(t_n[i])*min(max(K_2-L_t[i],0),K_2-K_1)
}
PL[k]=payment
}
}

if (K_2==0.03) {
  pris=(mean(DP)-0.05*mean(PL))/(K_2-K_1)
} else {pris=mean(DP)/mean(PL)}
pris
}

```

A.5.4 Transjespread ved Gauss-LHP

```

SPREAD=function(K_1,K_2,R,rho,spread,U) {
  a=sqrt(rho)
  zeta=1/(K_2-K_1)
  f_inf=function(t,x,a) {
    p=a^2
    C<-function(t) {
      lambda=0.02317199

```

```

    qnorm(1-exp(-lambda*t))
  }
  sqrt(((1-p)/p)*exp(qnorm(x)^2/2-(C(t)-sqrt(1-p)*qnorm(x))^2/(2*p))
}
EL_t=function(t) {
  x=seq(K_1/(1-R),0.95,0.0005)
  expr1=((1-R)*x-K_1)*f_inf(t,x,a)
  int1=trap(x,expr1)

  x=seq(K_2/(1-R),0.95,0.0005)
  expr2=((1-R)*x-K_2)*f_inf(t,x,a)
  int2=trap(x,expr2)
  zeta*(int1-int2)#Returnerer forventet tap for tid t, til transje K_1,K_2
}
#Svakt minkende diskonteringsfaktor(økende LIBOR):
B=function(t) {
  r=0.02
  exp(-r*t)#Returnerer diskonteringsfaktoren
}

#Kvartalsvise innbetalinger og utbetalinger:
t_n=seq(48/360-0.25,1.25+48/360,0.25);t_n[1]=0.0000001
#For å finne
teller=0;nevner=0
for (i in 2:length(t_n)) {
  teller=teller+(EL_t(t_n[i])-EL_t(t_n[i-1]))*B(t_n[i])
  nevner=nevner+0.25*(1-EL_t(t_n[i]))*B(t_n[i])
}
teller/nevner

#For forhåndsbeløpet:
#teller-spread*nevner
}

```

A.5.5 Transjespread ved NIG

```

#Kalkulerer spreaden:
SPREAD=function(K_1,K_2,R,rho,alpha,beta,spread,U,kalib) {
  a=sqrt(rho);r=0.02
  gamma=sqrt(alpha^2-beta^2);mu=-beta*gamma^2/(alpha^2);delta=gamma^3/(alpha^2)
  zeta=(1-R)/(K_2-K_1)

  #Beregner den kritiske grensen:

```

```

C<-function(t) {
  lambda=0.01871402
  qnig(1-exp(-lambda*t),1/a*alpha,1/a*beta,1/a*delta,1/a*mu)
}
lower=qnig(K_1/(1-R),sqrt(1-a^2)/a*alpha,sqrt(1-a^2)/a*beta,sqrt(1-a^2)/a*delta,sqrt(1-a^2)/a*mu)
upper=qnig(K_2/(1-R),sqrt(1-a^2)/a*alpha,sqrt(1-a^2)/a*beta,sqrt(1-a^2)/a*delta,sqrt(1-a^2)/a*mu)

EL=function(t) {
  y=seq(lower,upper,by=0.005)
  INT=sqrt(1-a^2)/a*(pnig(y,sqrt(1-a^2)/a*alpha,sqrt(1-a^2)/a*beta,sqrt(1-a^2)/a*delta,sqrt(1-a^2)/a*mu)
  K_1/(1-R))*dnig((C(t)-sqrt(1-a^2)*y)/a,alpha,beta,delta,mu)
  zeta*trap(y,INT)+pnig((C(t)-sqrt(1-a^2)*
  qnig(K_2/(1-R),sqrt(1-a^2)/a*alpha,sqrt(1-a^2)/a*beta,sqrt(1-a^2)/a*delta,sqrt(1-a^2)/a*mu)
}
t_n=seq(22/365-0.25,4+22/365,0.25);t_n[1]=0.0000001
#t_n
#For å finne
teller=0;nevner=0
for (i in 2:length(t_n)) {
  teller=teller+(EL(t_n[i])-EL(t_n[i-1]))*exp(-r*t_n[i])
  nevner=nevner+0.25*(1-EL(t_n[i]))*exp(-r*t_n[i])
}
#Gjelder for før 2010:
kalib=kalib;U=U;ut=0
if(kalib==1) {
  ut=(teller-U)/nevner
} else {
  if(K_2>0.09) {
    ut=teller/nevner
  } else {ut=teller-nevner*spread}
}
ut

#Gjelder fra etter 2010:
#kalib=kalib;U=U;ut=0
#if(kalib==1) {
  # ut=(teller-U)/nevner
#} else {ut=teller-nevner*spread}
#ut
}

```