Vg.1 elevar sine prestasjonar og vanskar i algebra og funksjonar

Siv Hilde Aasen

Masteroppgåve i læring og undervisning

UND350

Haustsemesteret 2013

HØGSKULEN I SOGN OG FJORDANE/UNIVERSITETET I BERGEN

Det psykologiske fakultet, Institutt for pedagogikk

HØGSKULEN i SOGN OG FJORDANE

Avdeling for lærarutdanning og idrett

Samandrag

Læreplanen i matematikk fellesfag er gjennomgåande, frå 1. årssteg og ut Vg.1. Faget er delt inn i hovudområder med kompetansemål etter 2., 4., 7., og 10. årssteg. Dermed byggjer matematikkpensum for Vg.1 på kompetansemåla i faget etter 10. årssteg. Som matematikklærar i den vidaregåande skulen, har eg observert at mange elevar ikkje presterer i tråd med det ein kan forvente ut i frå desse kompetansemåla. Særleg har eg sett dette innan hovudområda algebra og funksjonar. Målet med denne oppgåva var å finne ut meir om korleis Vg.1 elevane sine prestasjonar i algebra og funksjonar samsvarar med kompetansemåla etter 10. årssteg, kva som kan vere årsakene til eventuelle vanskar, og kva som kan gjerast for å førebyggje elevane sine vanskar innan desse temaa. Eg fekk då desse to problemstillingane:

1. *Korleis samsvarar Vg.1 elevane på Sogndal vidaregåande skule sine prestasjonar i algebra og funksjonar, med læreplanen (LK06) sine kompetansemål i desse tema etter 10.årssteg?*

2. *Kva kan vere årsakene til elevar sine vanskar med algebra og funksjonar, og kva kan gjerast for å førebyggje dei?*

For å undersøkje problemstilling 1, nytta eg meg av resultata frå kartleggingsprøvane til Vg.1 elevar ved Sogndal vidaregåande skule. Eg samla inn, systematiserte og analyserte data frå kartleggingsprøvane til over 330 elevar. Datamaterialet mitt dekka mange, men ikkje samtlege, kompetansemål i algebra og funksjonar etter 10. årssteg. Og resultata vert derfor presentert under tilhøyrande kompetansemål. Den kvantitative delen av undersøkingane mi viser at Vg.1 elevane sine prestasjonar innan temaa algebra og funksjonar ikkje samsvarar med kompetansemåla etter 10. trinn i LK06.

For å undersøkje problemstilling 2 har eg sett meg inn i tidlegare forsking og litteratur om emnet. Eg har særleg sett meg inn i kva misoppfatningar elevane kan ha i samband med temaa algebra og funksjonar. Misoppfatningar kan oppstå på ulike nivå og av ulike grunnar, men kan førebyggjast dersom ein er medviten om kva som kan utløyse dei, når ein underviser i matematikk. I oppgåva tek eg for meg dei mest vanlege misoppfatningane innan temaa algebra og funksjonar, og korleis ein kan førebyggje desse. I tillegg kjem eg inn på nokre andre mulege årsaker til at elevane har vanskar innan desse temaa.

Summary

In the national curriculum, The Knowledge Promotion 2006, the curriculum for Mathematics consists of the same core subjects from 1st grade to level 1 in general studies (VG1). It consists of four main subject areas and competence aims after 2nd, 4th, 7th and 10th grade. This means that the syllabus for upper secondary level 1 (VG1) is based upon the competence aims after 10th grade. As a teacher in Mathematics at the upper secondary level, I have observed that many pupils are not able to achieve what is expected from them, based on the competence aims after 10th grade. I have observed this especially in the subject areas of algebra and functions. The aim of this master thesis is to find out how VG1 pupils´ achievements in algebra and functions correspond with the competence aims after 10th grade. What are the reasons for possible difficulties and what can be done to prevent the pupils´ difficulties within these subject areas. This resulted in these two problem statements:

1. How do the VG1 pupils´ achievements in algebra and functions at the upper secondary in Sogndal correspond with LK 06´s competence aims after 10th grade?

2. What are the reasons for the pupils' difficulties in algebra and functions, and what can be done to prevent them?

To examine the first problem statement, I found valuable information in the results of the mapping test in Mathematics for pupils at the upper secondary school in Sogndal. I collected, systematised and analysed data from the mapping test for more than 330 pupils. The data covered many, but not all of the competence aims in algebra and functions after 10th grade. That is the reason why the results will be presented with the belonging competence aim. The quantitative part of my examination indicates that VG1 pupils´ achievements in algebra and functions do not correspond with the competence aims after 10th grade in LK 06.

To examine the second problem statement, I have examined prior researches and literature in the field. I have focused on what kind of misconceptions the pupils have in connection with algebra and functions. These misconceptions can arise in different levels and of various reasons, but they can be prevented if one is privy to what causes them, when teaching Mathematics. In this master thesis I examine the most common misconceptions in the subject of algebra and functions and how to prevent these. I will also discuss a few other possible reasons why the pupils are having difficulties within these subjects.

Innhald

1 Bakgrunn og mål for oppgåva

1.1 Eigne erfaringar

Hausten 2008 tok eg til å arbeide som matematikklærar ved ein vidaregåande skule med om lag 750 elevar. Eg var nett ferdig med lærarutdanninga, og visste ikkje kva eg kunne forvente meg av elevane. Då eg tok til med undervisninga i Vg1 klassane mine, vart eg svært overraska over kor store hol det var i mange av elevane sine grunnleggjande matematikkunnskapar. Som nyutdanna hadde eg berre læreplanmåla for 10. trinn å gå ut i frå då eg skulle danne meg ei forventing til Vg1 elevane sitt kunnskapsnivå i faget, men det viste seg fort at mange ikkje var i nærleiken av å ha oppnådd læreplanen sine kompetansemål. I og med at læreplanen i faget er gjennomgåande, og Vg.1 bøkene derfor byggjer vidare på det elevane har hatt i ungdomsskulen, erfarte eg raskt at mange elevar fekk vanskar med å fylgje pensum på vidaregåande nivå.

Etterkvart har eg forstått at slik er det kvart år, og at dette lenge har vore eit kjent problem for dei som underviser i matematikk på vidaregåande. Det var også eit av hovudfunna i Rambøll Management sin evaluering av *Realfag naturligvis. Strategi for styrking av realfagene 2002-2007,* som vart utført etter oppdrag frå Utdanningsdirektoratet (Udir, 2007). Følgjene vert mellom anna at mange elevar på studiespesialiserande vel praktisk matematikk (1P), som er enklare og meir orientert mot kvardagslivet enn teoretisk matematikk (1T). P- kurset vert avslutta etter Vg.2, og gir generell studiekompetanse, medan T- kurset gir grunnlaget for å velje S1 og S2 eller R1 og R2 på Vg.2 og Vg.3, noko som gir realfagleg studiekompetanse av ulik grad. På yrkesfagleg studieretning har ein del elevar så svakt grunnlag at sjølv om ein vel å undervise i praktisk matematikk for yrkesfag (1YP) i staden for teoretisk matematikk for yrkesfag (1YT), som nok hadde passa betre for mange av studieretningane, har dei store vanskar med å fylgje undervisninga i faget.

Dette er ein situasjon me som underviser i matematikk ikkje er komfortable med, me ynskjer å heve nivået blant elevane våre. Men det er ikkje alltid så enkelt å få til i praksis, for kvar skal ein setje inn ressursane og kven skal får nyte godt av dei? Kvart år vert det oppretta små grupper med tilrettelagt undervisning i matematikk, men det er ikkje plass til alle som treng ekstra tilrettelegging på ei lita gruppe, og kva då med dei som fell utanfor? Kor mykje tid kan me bruke på grunnleggjande ting når me har eit pensum å gå gjennom? I tillegg har dei som har eit godt grunnlag rett på undervisning tilpassa deira nivå.

1.2 Kartlegging av nye elvar

Kvar haust er det mange nye elevar som tek til på Vg1 i den vidaregåande skulen eg arbeider ved, skuleåret 2011/2012 var det snakk om rundt 300 stk. Dette er nye og ukjente elevar for oss som underviser der, derfor har me behov for å danne oss eit bilete av kva dei har av kompetanse i våre undervisningsfag. Når det gjeld matematikk vert dette gjort ved å bruke ein felles kartleggingsprøve på alle studieretningar. Denne prøven er utarbeida av matematikklærarane ved skulen, og består av eit utval oppgåver basert på pensum i ungdomsskulen. Elevane får denne prøven den fyrste dobbeltimen i faget, eller før, som regel seinast innan ei veke etter skulestart. Elevane får vite at dette er ei kartlegging av kva gruppa kan frå før, at den skal nyttast til å tilpasse undervisninga og at det derfor er viktig at dei viser kva metodar / utrekningar dei nyttar, og at den ikkje tel med i vurderingsgrunnlaget. Det vert sett av to skuletimar til prøven, som skal løysast utan andre hjelpemiddel enn kalkulator. Elevane får sjå prøven etter at den er retta, slik at dei får ein oversikt over kva dei har fått til, og kva dei ikkje har fått til. Det er mogeleg å få tretti poeng totalt, og på studiespesialiserande vert resultatet brukt rådgjevande når elevar skal velje mellom P-matematikk eller T-matematikk. Får dei tjue poeng eller meir, er dei klare kandidatar for T-matematikk. Får dei femten poeng eller mindre vert dei råda til å velje P-matematikk. Denne prøven har vore brukt i fleire år, elevane får den aldri med seg ut av klasseromma, og den har vist seg å vere ein god indikator på elevane sin kompetanse. Enkelte av mine kollegar har sett etter samanhengar mellom resultat på denne kartleggingsprøven og elevane sine karakterar i faget, og funne at dei fleste elevane i fyrste termin får karakterar som samsvarar med resultatet på kartleggingsprøven.

Hausten 2009 vart det innført ein nasjonal, obligatorisk, digital kartleggingsprøve i rekning for alle Vg1 elevar. Formålet med denne er å gi ein oversikt av dei svakaste elevane, som treng ekstra oppfølging. Denne vert gjennomført nokre veker etter skulestart, og resultata kjem ei stund seinare. Prøven er ei kartlegging av elevane sine rekneferdigheiter, den testar dei ikkje i kompetansemåla i læreplanen i matematikk. Den vert gjennomført digitalt og har avkryssingsoppgåver, slik at elevane ikkje treng å vise korleis dei har gått fram for å løyse oppgåvene.

Kollegaer av meg har samanlikna elevar sine resultat på dei to kartleggingsprøvane, og funne at dei ofte ikkje samsvarar. Elevar som seinare viser seg å ha låg måloppnåing i kompetansemål frå 10. årssteg kan gjere det bra på den nasjonale kartleggingsprøven i rekning, og dermed verte oversett.

Med bakgrunn i denne arbeidskvardagen har matematikklærarane på realfagseksjonen diskutert at det burde vore kartlagt i kva emne flest elevar har dei største hola i dei grunnleggjande kunnskapane, slik at me tidleg kan gjere ein ekstra innsats for å betre situasjon. Det ville då også vore aktuelt å informere ungdomsskulane om eventuelle funn, for å skape eit samarbeid med dei for å tette hola. Målet med kartlegginga og eit eventuelt samarbeid med ungdomsskulane vil vere å gi elevane eit betre grunnlag i faget, så dei får heva sin kompetanse, og dermed står friare til å velje utdanningsløp.

1.3 Problemstillingar

Eg starta ut med å undre meg over, og ynskje og finne ut av:

Korleis samsvarar Vg.1 elevane sine prestasjonar i matematikk med læreplanen (LK06) sine kompetansemål i faget etter 10.årssteg?

Eg såg raskt at dette temaet var for stort og omfattande for ei masteroppgåve, og det måtte derfor innsnevrast.

Sidan algebra er eit viktige tema som legg grunnlaget for mykje av matematikkpensum på vidaregåande, vel eg å setje hovudfokus på dette temaet. I tillegg ynskjer eg å sjå nærare på temaet funksjonar. Funksjonar er nært relatert til algebra, og eventuelle problem i algebra kan forplante seg og føre til problem i temaet funksjonar. Samtidig er det å tolke og forstå ulike framstillingar av funksjonar kunnskapar dei fleste vil få trong for i ulike situasjonar seinare i livet. Kartleggingsprøven ved Sogndal vidaregåande skule prøver elevane i mange av kompetansemåla som omhandlar algebra, og nokre av dei mest grunnleggjande kompetansemåla som omhandlar funksjonar. Datagrunnlaget frå denne prøven gir derfor grunnlag for å kartlegge korleis elevane sine prestasjonar i desse temaa samsvarar med viktige kompetansemål innan desse temaa etter 10. årssteg.

Sidan eg har eit ynskje om at arbeidet mitt skal vere eit bidrag til å betre situasjonen, vil eg også prøve å finne ut kva årsakene til elevane sine vanskar med algebra og funksjonar kan vere, og korleis ein kan førebyggje desse.

Eg får då to problemstillingar:

3. *Korleis samsvarar Vg.1 elevane på Sogndal vidaregåande skule sine prestasjonar i algebra og funksjonar med læreplanen (LK06) sine kompetansemål i desse tema etter 10.årssteg?*

4. *Kva kan vere årsakene til elevar sine vanskar med algebra og funksjonar, og kva kan gjerast for å førebyggje dei?*

1.4 Avgrensingar

Sidan eg vil nytte resultatet frå kartleggingsprøven ved Sogndal vidaregåande skule for å svare på problemstilling 1, er det naudsynt å presisere kva kompetansemål som vert dekka av denne prøven. Undersøkinga mi vil omhandle temaa algebra og funksjonar, og derfor er det berre kompetansemål under desse tema som er aktuelle. Ein grundig gjennomgang av dei oppgåvene eg ser på i denne undersøkinga viser at dei i algebra dekkar måla om at elevane skal kunne: behandle algebrauttrykk, løyse likningar, løyse ulikskap og løyse likningssett. Og innanfor funksjonar, måla om å kunne: omsetje mellom dei ulike representasjonane til ein funksjon, teikne grafane til ein lineær- og ein andregradsfunksjon og lese av skjeringspunkt.

Kompetansemål som går på å faktorisere, rekne med brøk og formlar inngår ikkje i dei oppgåvene som er aktuelle å sjå på i denne undersøkinga. Kartleggingsprøven dekkar heller ikkje elevane sine digitaleferdigheiter innanfor funksjonar, eller deira evner til å knyte funksjonsuttrykk til praktiske situasjonar.

Under arbeidet med problemstilling 2 ynskjer eg å ha hovudfokus på aktuelle misoppfatningar som elevane kan ha rundt algebra og funksjonar, men det vil også vere interessant om det er andre ting som viser seg å innverke på elevane sine vanskar i desse temaa. For å svare på problemstilling 2, vil eg studere forskingslitteratur og anne relevant faglitteratur om emnet.

2 Teori

2.1 Overordna teoretisk perspektiv

Forskinga mi bør og sjåast i forhold til kva perspektiv eg har på læring, spesielt læring i matematikk. Sidan eg fokuserer på hol og manglar i elevane sine kunnskapar, er det naturleg for meg å sjå dette i eit kognitivt / konstruktivistisk læringsperspektiv.

Eit kognitivt læringsperspektiv ser på læring som ein mental prosess der konstruksjon av kunnskap skjer i individet, konstruktivisme. Piaget sin teori om kognitive skjema har hatt stor betyding innanfor denne retninga. I følgje denne teorien er læring ein aktiv prosess der eleven stadig innhentar ny kunnskap og bearbeider den utifrå eksisterande kunnskap, assimilasjon. Deretter vil det kunne skje ein omorganisering av den samla kunnskapen, ein akkommodasjon. Undervisninga må byggje på eleven si erfaring, gi eleven innsikt i heilskapen og ei forståing av kva som ligg bak, leggje til rette for at eleven skal vere aktiv i læreprosessen og gjere eleven i stand til å reflektere over eiga læring. Innanfor den kognitive teorien meiner ein at motivasjon er naturleg tilstade i barn, som eit ynskje om å lære, og den kan derfor stimulerast med aktivitet og kognitive konfliktar.

Ut i frå eit konstruktivistisk syn på læring konstruerer me alle vår eiga verkelegheit ut i frå eigne sanseinntrykk og vår oppfatning av verda rundt oss. På same måte konstruerer elevane sin eigen kunnskap. I undervisninga vil elevane møte ei mengd med inntrykk frå omgjevnaden, som dei kan nytte til å byggje si eiga forståing av det som skjer. Vygotsky sin teori om den proksimale utviklingssona skil mellom det eleven kan gjere utan hjelp, og det eleven kan gjere med adekvat støtte og rettleiing. I den næraste utviklingssona ligg det stoffet og nivået eleven kan nå med støtte og rettleiing. Dersom ein konsentrer undervisninga om eleven si næraste utviklingssone vil eleven heile tida måtte strekke seg og vere i utvikling, på den måten vil eleven alltid arbeide vidare med det han nesten beherskar. Eleven vil då oppleve meistring og stadig auke sin kompetanse, noko som i sin tur vil gje elven auka forventing til eiga meistring. Forventing til eiga meistring er viktig for motivasjonen til elevane (Skaalvik og Skaalvik, 2005).

Når eg har arbeida med mi andre problemstilling i denne oppgåva, har det vore med eit lærings perspektiv som tek utgangspunkt i Piaget sin adapsjonsteori og Vygotsky sine teoriar om mediering og den proksimale utviklingssona. Piaget sin teori ser eg på som kognitiv konstruktivisme, og Vygotsky sin som sosial konstruktivisme.

2.2 Teori om matematikken

Oppgåva omhandlar vg.1 elevane sine prestasjonar i algebra og funksjonar. I læreplanen (LK06) er dette delt inn i to hovudtema, tal og algebra er eitt, og funksjonar er eitt. Men i realiteten heng desse tett saman. Eg vel derfor å definere både likningar og funksjonar på grunnskule nivå som elementær algebra. Sjølv om fokus i oppgåva er på den elementære algebraen, kan det vere nyttig å ha eit historisk perspektivet på algebra og vere klar over nokre sentrale utviklingstrekk i algebra. Derfor vil eg fyrst kort seie litt om algebraen si tidlege historiske utvikling.

2.2.1 Kort om nokre sentrale utviklingstrekk i algebra

Omgrepet algebra kjem av det arabiske ordet *Al*-jabr, som kan omsetjast til *gjere fullstendig* eller *gjenopprette*. Den arabiske matematikaren Al-Khwârizmî (ca. 800 e. Kr.)brukte ordet *al-jabr* om den operasjonen han nytta til å forenkle likningar (Thorvaldsen, 2002).

Det er skrive svært mykje om algebra og algebraen si utvikling og historie. Nokre teoriar er svært utbreidde og allment kjente, medan andre er meir ukjente tankar. Eg vel her å ta med ei mykje brukt inndeling av språk – symbolutviklinga i algebraen (Thorvaldsen, 2002), og samtidig Katz (2006) sin inndeling av omgrepsutviklinga innan algebraen.

Thorvaldsen (2002) nyttar i artikkelen *Algebraens opprinnelse* ei mykje brukt inndeling av algebraen sin historie. I denne inndelinga vert algebraen si utvikling delt inn i tre stadium. Det retoriske, der alle oppgåver og problem blei skrivne med ord og setningar. Det synkoperte, der ein byrja å nytte forkortingar og symbol i oppgåvene eller problema. Og det symbolske, der oppgåvene eller problema vert framstilt berre ved bruk av symbol, og løyst etter kjente reglar. I tillegg til desse tre utviklingsstadia i å uttrykkje algebra, opererer Victor J. Katz (2006) med fire omgrepsmessige stadium i utviklinga av algebra. Han meiner at parallelt med dei tre utviklingstrinna i å utrykkje algebra på, så utvikla den omgrepsmessige måten å forstå algebra på seg på over fire trinn. Og fordi dette skjedde i ei gradvis utvikling, overlappa desse trinna kvarandre.

Eg vil her svært kort gjengi kva Katz (2006) legg i sine fire stadium av omgrepsutvikling innan algebra. Fyrste stadium er *det geometriske stadiet*, der babylonarane til dømes søkte å finne geometriske storleikar og grekarane til dømes søkte å finne geometriske punkt. Men både babylonarane og grekarane var enno i det retoriske stadiet. Babylonarane utvikla prosedyrar eller algoritmar for å løyse dei geometriske problemstillingane, og gradvis tok algoritmane over. Ein bevega seg då over i *det statiske liknings løysande stadiet*, der ein, framleis ved hjelp av retorisk algebra, ynskjer å finne tal som svarar til bestemte forhold. Denne perioden strekkjer seg like fram til 1500-talet, då ein i Italia opplever eit stort gjennombrot i matematikken. No skjer det ein rask utvikling i algebraen, frå den retoriske, via den synkoperte til den symbolske, men stadig dreiar det seg om likningsløysande algebra. Med notasjonen til den symbolske algebraen på plass kunne ein byrje å nytte algebraen til meir enn å løyse likningar. Den store interessa for astrologi på 1600-talet, og trongen til å bestemme bana eller kurva til astrologiske objekt, var truleg ein avgjerande grunn til at algebraen no tok ei ny vending, denne gongen mot det Katz (2006) kallar *det dynamiske funksjons stadium*. Algebraen held fram med å utvikle seg, og ved byrjinga av 1900-talet dreia det seg meir om å finne samanhengar mellom matematiske situasjonar som er definert ut i frå eit sett med aksiom. Algebraen har då gått over i fjerde og siste stadium, *det abstrakte stadiet*.

2.2.2. Definisjonar på algebra

Det er mange ulike definisjonar på algebra i litteraturen, ein utbreidd og litt upresis definisjon er at algebra er ein generalisering av aritmetikken (Katz, 2006). I Læreplanen (LK06) for Matematikk fellesfag, under hovudområder, står det at: «Algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar. Algebra blir òg nytta i samband med hovudområda geometri og funksjonar» (Udir., 2006, s.59).

Ut i frå Læreplanen (LK06) sine kompetansemål i algebra etter 10. trinn, så skal algebraundervisninga på ungdomssteget mellom anna omhandle behandling, faktorisering og forenkling av algebrauttrykk, løysing av likningar og ulikskapar av fyrste grad, samt enkle likningssett med to ukjente. Det skal også undervisast i rekning med formlar, parentesar og bruk av kvadratsetningane. Samtidig legg læreplanen vekt på at elevane skal kunne knytte algebraen til praktiske situasjonar og nytte den til problemløysing (Udir., 2006). I tillegg har eg valt å ta med tema funksjonar i denne oppgåva, sidan det er nært relater til algebra.

Desse temaa har eg definert inn under elementær algebra, og då meiner eg Euler sin definisjon frå slutten av 1700-talet enno er godt anvendeleg. Leonhard Euler referert i Victor J. Katz (2006) skreiv i 1770 i sin tekst om algebra: « Algebra has been defined, The science which teaches how to determine unknown quantities by means of those that are known » (Euler 1984, p. 186 ref. i Katz, 2006).

Av det ovanfor nemnte dekkar kartleggingsprøven som eg ser på: løysing av likning, løysing av likningssett, løysing av ulikskap og utrekning av eit algebrauttrykk i tema algebra. I tema funksjonar har den med: teikning av grafen til ein lineærfunksjon, utfylling av tabell og teikning av grafen til ein andregradsfunksjon og avlesing av koordinatar.

2.3 Kvifor er algebra så vanskeleg

Når ein snakkar med lærarar og elevar, så har dei ofte klåre meiningar om algebra. Når eg nemner ordet likningar, i ein Vg1 klasse som tek P- matematikk, veit eg at reaksjonen stort sett alltid blir negativ: «*Åhh… er ikkje det sånne x-greier, må me ha om det! Det har eg aldri forstått noko av!*» er vanlige kommentarar. Eg opplever elevane som meir forut inntekne når det gjeld algebra, og då særskilt likningar, enn ved andre tema i matematikkboka, som til dømes geometri og prosentrekning. Og når eg diskuterer algebra med kollegaer på lærarrommet, er ofte også deira meiningar og haldningar nokså eintydige. Dei fleste lærarane er einige om at mange elevar finn algebra vanskeleg, og mange av dei har også meiningar om kvifor, og om kva som er vanskelegast for elevane.

Det har vore forska og skrive mykje rundt algebra i skulen, korleis er undervisninga, kva slit elevane med og kvifor. Eg vil her sjå på kva nokre av desse forskarane og forfattarane har lagt vekt på, og komme fram til.

Mitchell J. Nathan og Kenneth R. Koedinger (2000) har forska på lærarane sine tankar og haldningar rundt elevane sine problem med algebra. Kva går desse haldningane ut på, kvar kjem dei i frå, og stemmer dei overeins med elevane sine evner til å løyse algebraoppgåver? I dei neste avsnitta vil eg prøve å gje att hovudpunkta av deira funn.

2.3.1 Kva lærarane meinte

Nathan og Koedinger (2000) tok i si undersøking utganspunkt i seks problem / oppgåver, som lærarane som deltok vart bedne om å rangere frå lettast til vanskelegast, ut i frå korleis dei trudde elevane deira ville oppleve desse problema. For å gje eit best muleg bilete av resultatet, meiner eg det er naudsynt å gje att problema på originalspråket, og vise korleis Nathan og Koedinger (2000) fordeler dei etter det dei kallar den underliggjande strukturen.

«Problems

1) *When Ted got home from his waiter job, he multiplied his hourly wage by the six hours that he worked that day. Then he added the $ 66 he made in tips and found that he earned $ 81.90. How much does Ted make per hour?*
2) *Starting whit some number, if I multiply it by 6 and then add 66, I get 81.9. What number did I start with?*
3) *Solve for* ***x:*** $x \cdot 6 + 66 = 81.90$
4) *When Ted got home from his waiter job, he took the $ 81.90 that he earned that day and subtracted the $ 66 that he received in tips. Then he divided the remaining money by the 6 hours that he worked and found his hourly wage. How much does Ted make per hour?*
5) *Starting whit 81.9, if I subtract 66 and then divide by 6, I get a number. What is it?*
6) *Solve for* ***x****:* $(81.90 - 66)/6 = x$ *"*

(Nathan og Koedinger, 2000, s. 219)

Forfattarane deler deretter dei seks problema inn på denne måten:

The Underlying Structure of the Problems Given in the Difficulty-Ranking Task

	Presentation Type		
	Verbal		Symbolic
Area of Mathematics	Story	Word Equation	Symbol Equation
Arithmetic	Problem 4 (80 %)	Problem 5 (74 %)	Problem 6 (56 %)
Algebra	Problem 1 (60 %)	Problem 2 (48 %)	Problem 3 (29%)

(Nathan og Koedinger, 2000, s. 219)

Eg har her tillate meg å endre litt på tabellen, og skriv ikkje inn heile teksten slik forfattarane sjølve gjorde, men tek berre med nummeret på problema. I tillegg har eg skrive inn prosentdelen rette svar, frå elevane i undersøkinga deira, i parentes bak kvart problemnummer.

Nathan og Koedinger (2000) fann ut at når lærarane i undersøkinga skulle rangere problema, så vurderte dei problem 4, 5 og 6 som lettare for elevane, enn problem 1, 2 og 3. Med andre ord vurderte lærarane algebra problema som vanskeligare å forstå for elevane, enn aritmetikk oppgåvene, uavhengig av måten dei var presentert på. Samtidig meinte lærarane at tekstoppgåvene var vanskelegare for elevane enn dei matematikksymbolske oppgåvene. Og vanskelegast meinte dei at problem 1 og 2 var, med nr. 2 som den aller vanskelegaste, altså dei verbale algebraoppgåvene.

2.3.2 Kva elevane meinte

Spørsmålet som Nathan og Koedinger (2000) så stilte seg, var om lærarane sitt syn stemmer overeins med korleis elevane opplever det. Dei gav 171 high school-studentar som var nesten ferdige med sitt first-year-algebra kurs ein test som inneheldt oppgåver som samsvara med dei som lærarane tidlegare hadde vurdert. Resultata viste at elevane syntes aritmetikkoppgåvene var enklare å løyse enn algebraoppgåvene, akkurat som lærarane trudde. Men når det kom til forholdet mellom verbale og symbolske oppgåver derimot, viste det seg at elevane gjorde det betre på dei verbale algebraoppgåvene enn dei symbolske. Av dei 171 elevane som deltok, fordelte dei rette svara på dei ulike oppgåve typane seg prosentvis slik: 80 % på P4, 74 % på P5, 60 % på P1, 56 % på P6, 48 % på P2 og berre 29 % på P3. (Nathan og Koedinger, 2000, s. 220) Som ein ser av resultatet, har lærarane mykje rett i det dei trur, men dei ser ikkje ut til å vere på linje med elevane sine når det gjeld ferdig oppstilte algebraiske likningar. Medan lærarane ser på denne typen oppgåver som middels vanskeleg, viser dette seg å vere den absolutt vanskelegaste oppgåva for elevane.

I eit forsøk på å forklare kvar lærarane har sine haldningar frå, i og med at deler av dei ikkje samsvarar med elevane sine ferdigheiter, ser Nathan og Koedinger (2000) også på lærebøker i algebra. Dei finn at rangeringa av oppgåvene i algebrakapitla i lærebøkene, så og seie heilt samsvarar med lærarane sine rangeringar av oppgåvene. Det har lenge vore tradisjon for å byggje opp algebrakapitla i lærebøker med å bevege seg frå ei symbolsk tilnærming til algebra, fyrst i kapitlet, og gradvis over til å avslutte med tekstoppgåver sist i kapitlet. Nathan og Koedinger (2000) ser dette i lys av læringsteoriar, og at ein alltid skal byggje undervisninga på det som er kjent for eleven, det elevne kan i frå før, og dei matematiske symbola er jo eleven kjent med frå andre tema i matematikken. Då verkar jo denne oppbygginga fornuftig og rett, men Nathan og Koedinger (2000) fann ei forklaring på kvifor dette ikkje nødvendigvis held stikk i temaet algebra.

Nathan og Koedinger (2000) fann i si forsking ut at elevane ikkje var så flinke som lærarane forventa, i å manipulere symbola i algebraen. Det er lett å tenkje at det er enklare for elevane å løyse ei ferdig oppstilt likning, enn ei algebra tekstoppgåve, fordi tekstoppgåva må omformast til ei likning før den kan løysast. Men når Nathan og Koedinger (2000) observerte elevar sin framgangsmåte ved løysing av algebra tekstoppgåver, såg dei at elevane ikkje nødvendigvis løyste oppgåvene med å tolke teksten for så å omsetje den til ei likning. Det var meir naturleg for mange å nytte metodar som «gjett og prøv» eller nøste opp i problemet ved å rekne seg bakover, med hjelp av kjente rekneoperasjonar, og dermed unngå trongen for å nytte algebra. Det viste seg at når elevane nytta desse uformelle metodane så kom dei fram til rett løysing i omtrent 70 % av tilfella, medan det sank til om lag 30 % rett løysing når den formelle metoden blei nytta. Bruken av uformelle metodar aukar med andre ord elevane sine mulegheiter til å løyse algebra tekstoppgåver, medan dei oppstilte likningane føreset at eleven beherskar symbolmanipuleringa som trengs. Nathan og Koedinger (2000) konkluderer med at lærarane bør ta utgangspunkt i elevane sine uformelle metodar, og hjelpe dei med å byggje bruer over til den formelle metoden. Dei kjem også med forslag til korleis dette kan løysast, og dette vil eg komme tilbake til seinare i oppgåva.

2.4 Misoppfatningar i emnet algebra

Når elevane møter nye idear og omgrep i undervisninga, vil dei knyte desse til tidlegare erfaringar og kunnskapar. Men elevane sine omgrep kan vere avgrensa, og kunnskapen dei har frå før gjeld ikkje i alle nye situasjonar. Dei kan då overgeneralisere eller dra feil slutningar, og sitje att med ufullstendige tankar rundt det nye omgrepet. I fagdidaktikken i matematikk vert slike ufullstendige tankar rundt omgrep kalla for misoppfatningar. Elevar med misoppfatningar vil nytte sine idear / tankar rundt eit omgrep konsekvent, noko som kan føre til systematiske feil (Brekke, 1995).

I sin artikkel *Improving Algebra Preparation: Implications From Research on Student Misconceptions and Difficultis* set Rachael M. Welder (2012) søkelyset på utbreidde misoppfatningar og vanskar elevane har rundt algebra, og at desse kan ha oppstått i samband med innlæring av andre emne tidlegare i matematikkundervisninga. Eg vel å nytte den same inndelinga som Welder (2012) nyttar i sin artikkel, der ho deler elevane sine vanskar inn i fire område. Eg har omsett desse til: bruk og forståing av parentesar, bruk og forståing av likskapsteiknet, bruk og forståing av operasjonelle symbol og bruk og forståing av bokstavar. Under vil eg seie litt om kva tidlegare forsking har funne å vere utbreidde misoppfatningar under kvart av desse områda.

2.4.1 Misoppfatningar kring parentesar

Elevar som ikkje har lært, eller forstått trongen for å bruke rett reknerekkjefølgje kan ha problem med bruken av parentesar. Elevar med slike misoppfatningar vil ofte ikkje forstå at uttrykka $2 \cdot 3 + 5 =$ og $5 + 2 \cdot 3 =$ har same verdi, fordi det er naturleg for dei å løyse oppgåvene i leseretninga. Og om ein presenterer dei for eit uttrykk med parentes i, som $2 \cdot (3 + 5) =$, så kan det hende at elevar med misoppfatningar rundt reknerekkefølgja og parentesar ikkje forstår hensikta, og berre ser vekk i frå den(Welder, 2012). Slike misoppfatningar vil forplante seg til algebraen, og vil då kunne verte eit større problem for eleven, både fordi læraren forventar at dette er lært og forstått tidlegare, og fordi det ofte er utstrekt bruk av parentesar i algebraoppgåver. Det er også verre for eleven å finne grunnen til at det vert feil i eit algebrauttrykk, enn i rein talrekning (Brekke, Grønmo & Rosèn,2000).

2.4.2 Misoppfatningar kring likskapsteiknet

Tradisjonelt har elevane sitt fyrste møte med likskapsteiknet vore som eit utførande summeteikn, i oppgåver av typen $2 + 2 =$, noko som kan føre til misoppfatning av likskapsteiknet. Elevane kan få ei forståing av likskapsteiknet som eit teikn på at dei skal utføre noko med oppgåva for å finne ei løysing. Dette synet på likskapsteiknet kan også verte forsterka ved bruken av kalkulator (Welder, 2012). Carolyn Kieran (1981) skriv i sin artikkel *Consepts assosiatet with the eqality symbol,* at forsking har vist at elevar har denne oppfatninga av likskapsteiknet heile vegen gjennom grunnskulen, og også til ein viss grad på college. Ein ser ofte at elevar nyttar teiknet på ein måte som viser at dei har ei slik misoppfatning. Eit døme på det kan vere når elevar dreg inn nye opplysningar i ein lang utrekningstråd av denne typen: $3 + 8 = 11 - 2 = 9 + 5 = 14$. Slik bruk av likskapsteiknet ser ein ofte, også av elevar i vidaregåande skule, og denne misoppfatninga kan føre til problem for elevane når dei skal lære algebra (Brekke et al. 2000). I algebra vil elevane oppleve å få svar av typen $4 + a - 3b$, og for dei som ser på likskapsteiknet som eit utførande og summerande teikn vil slike svar ikkje gje meining, fordi dei oppfattar det som om oppgåva ikkje er «ferdig» løyst. Dette problemet vert endå tydelegare i arbeid med likningar, der likskapsteiknet fungerer som balansepunktet mellom to uttrykk med lik verdi. Ei korrekt forståing av likskapsteiknet er avgjerande når elevane skal lære algebra, sidan algebra ofte dreiar seg om å uttrykkje og manipulere generelle matematiske utrykk, og ikkje om å finne eit konkret tal som svar på oppgåva (Welder, 2012).

2.4.3 Misoppfatningar kring operasjonelle symbol

Misoppfatningar rundt dei operasjonelle symbola har mykje til felles med misoppfatningane rundt likskapsteiknet. Elevane er frå tidlegare erfaringar i matematikkundervisninga vande med at symbola $+$, $-$, $\cdot$, og $\div$ tyder at noko skal utførast, og derfor kan algebraiske uttrykk som $2 + a$ og $2a$ vere problematiske for elevane. Ei misoppfatning er at desse to uttrykka er like, fordi elevane ser symbolet + som eit teikn på at noko skal slåast saman, og dei får då $2 + a = 2a$**.** Sameleis les dei uttrykk som $4x$ til å tyde $4 + x$ og ikkje som det korrekte $4 \cdot x$ (Welder, 2012). Dette er ein av grunnane til at elevar dreg saman algebraiske uttrykk som $2 + 3a + 2b + c$ til $7abc$, dei tyder addisjonsteikna mellom ledda som at dette skal leggjast saman til eit ledd.

Kieran (2007) dreg fram minusteiknet som eit problemområde for elevane, ho skriv at forståinga for dei ulike rollane til minusteiknet er viktig for at eleven skal utvikle si forståing av algebra. Minusteiknet si rolle må utvidast, frå eintydig *subtraherande* som i $7 - 4$, til å tyde *negativ verdi* som i -2 og *det motsette av* som i $-x$. Elevar med eintydig erfaring med minusteiknet som eit utførande teikn, kan ha vanskar med å forstå tydinga av -2 eller $-x$. I fylgje Vlassis, referert i Kieran (2007, s. 2) viser forsking at elevane sine vanskar med dei ulike rollane til minusteiknet i algebra kan vedvare over lengre tid.

2.4.4 Misoppfatningar kring bokstavar

Det har vore forska mykje på elevane si forståing av bokstavane i algebra. I fylgje Kieran (2007) omhandla store deler av den tidlegaste forskinga på overgangen frå aritmetikk til algebra, gjennomført på 90-talet, seg om elevane sine evner til å skilje mellom dei ulike måtane bokstavar vert brukt på i algebraen. Ho skriv at forskinga viser at størstedelen av elevane ser bokstavane som bestemte ukjente, medan berre ein liten del av elevane klarar å sjå bokstavane som generelle tal eller variablar.

Elevane møter bokstavar i matematikken lenge før dei byrjar med algebra. Allereie i dei fyrste matematikkbøkene deira er bokstavar brukt til å nummerere oppgåvene, 1a), 1b), 1c) osb. Denne måten å nummerere oppgåvene på følgjer elevane heile vegen gjennom skulegangen deira. Her er det bokstaven si plassering i alfabetet som er viktig, oppgåvene skal gjerast i same rekkefølgje som bokstavane har i alfabetet. Det neste møtet med bokstavar i matematikken kan vere bruk av nemningar, som *m* (meter)og *l* (liter), då står bokstaven som ei forkorting for eit ord som byrjar på den bokstaven. Sameleis når elevane byrjar å lære flater og volum, då vert gjerne til dømes $A = l \cdot b$ lese som *arealet* er lik *lengda* multiplisert med *breidda.* Det er vanleg at formlar som elvane nyttar er sett saman på denne måten, for at det skal bli lettare for dei å forstå og hugse formlane.

I algebra møter elevane fleire, for dei, nye måtar å nytte bokstavane på. Dei møter dei som symbol på eit bestemt, men ukjent tal i oppgåver av typen $3x = 6$ og $4 + x = 9$, som utrykk for ukjente og ubestemte tal i oppgåver av typen trekk saman $2a + 5b + a - 2b + 4$, som uttrykk for mange ulike ukjente tal i løysing av ulikskapar som $2x + 1 \leq 7$, og også som reint generelle uttrykk eller identitetar, som $a + b = b + a$ og $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Men elevane sine tidlegare erfaringar med bokstavar kan føre til ulike misoppfatningar rundt bokstavbruken i algebra. Enkelte elevar kan vere innforstått med at bokstavane representerer tal, men plasseringa dei har i alfabetet, er med på å bestemme storleiken på talet (Welder, 2012). Ei meir utbreidd misoppfatning er at bokstaven står for eit konkret objekt. Som døme har eg lyst å ta med ei rekneforteljing eg ein gong fekk som svar på oppgåva:

Skriv ei rekneforteljing som passar til uttrykket: $3b + 4b - 1b = 6b$

Ein elev på ungdomsteget skreiv då fylgjande: *På ein ferjekai kom det 3 bilar som skulle med ferja, like etter kom det 4 bilar til. Men då ferja kom, køyrde den eine på fjorden, så derfor var det berre 6 bilar som køyrde om bord på ferja.*

Denne kreative rekneforteljinga avslører at eleven har ei misoppfatning av *b*'ane i oppgåva som ei forkorting for konkrete objekt, som han her set til å vere bilar. Dette kan komme frå tidlegare erfaring med bruken av bokstavar som forkorting for noko konkret, som meter og liter.

Andre utbreidde misoppfatning rundt bokstavar i algebra er manglande forståing av at ein bokstav som er brukt fleire gonger i eit uttrykk, til dømes $2a + 5b + a - 2b + 4$, må ha same verdi kvar gong, og oppfatninga av at to ulike bokstavar i eit uttrykk aldri kan ha same verdi (Welder, 2012).

2.5 Funksjonar

Funksjonar kan arbeidast med på fleire ulike måtar Janvier (1978) referert i Gjone (1997, s. 4) har identifisert fire former for framstilling av funksjonar, og sett på samanhengen mellom dei. Han deler inn i grafisk framstilling, verbal framstilling, algebraisk framstilling og tabell. Den same inndelinga er nytta i læreplanen (Kl06), der det i kompetansemåla etter 10. trinn står at elevane skal kunne: «…omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som grafar, tabellar, formlar og tekst.» (Utdanningsdirektoratet, 2006, s.64).

Ei slik omsetjing mellom ulike representasjonar føreset at eleven har ei god forståing av samanhengen mellom dei ulike framstillingane av funksjonsomgrepet. Som lærar har eg mange gonger erfart at elevar som klarar å lage tabell og teikne grafen til eit gitt funksjonsuttrykk, ikkje nødvendigvis forstår det dei gjer, men nyttar seg av automatiserte teknikkar. I artikkelen «*Understanding connections between equations and graphs»* om sin studie av amerikanske elevar sin forståing av desse samanhengane, konkluderer Knuth (2000) med at mange elvar som tilsynelatande forstår samanhengen mellom eit funksjonsuttrykk og den tilhøyrande grafen i realiteten har ei overflatisk forståing. Studien viser at det store fleirtalet av desse elevane er avhengige av algebra for å løyse likningar knytt til ein graf, også når dei får grafen til likninga eller likningssettet presentert i oppgåva (Knuth, 2000).

Frå / Til	Verbal framstilling (Situasjon)	Tabell	Grafisk framstilling	Algebraisk framstilling (formel)
Verbal framstilling (situasjon)	-----------	måling	skisse	modellering
Tabell	avlesing	-------------	plotting	tilpassing
Grafisk framstilling	tolking	avlesing	-------------	kurvetilpassing
Algebraisk framstilling (formel)	attkjenning	utrekning	plotting	-------------

Tabellen til Janvier (1978) referert i Gjone (1997, s. 4).

Korleis elevane vert gjort kjente med funksjonar kan vere avgjerande for deira forståing av temaet, til dømes tok fleire av elevane i Knuth (2000) sin studie algebrakurs. Elevane som blir introdusert til temaet einsidig gjennom lineære funksjonar, kan feilaktig generalisere til at alle funksjonar har ei rett linje som graf. I artikkelen *«What do students really know about functions?»* skriv Clement (2001) at når 35 precalculus high school-elevar vart bedne om å gi sin definisjon på ein funksjon, var det berre fire elevar som svara i tråd med den matematiske definisjonen, at for kvar verdi av *x* er det berre ein verdi for *y.* Vidare fann Clement (2001) at 20 av elevane, 57 %, svara på ein måte som synte at dei trudde ein funksjon alltid må danne ei rett linje. Og i ei gitt samling uttrykk klarte desse elevane ikkje å plukke ut andre funksjonar enn dei lineære og $f(x) = x^2$, som er eit av dei mest brukte døma på ein funksjon (Clemet, 2001).

2.6 Misoppfatningar i emnet funksjonar

Nokre av vanskane elevar har med funksjonar, kan sjåast i samanheng med misoppfatningar rundt algebra. Eit funksjonsuttrykk vil kunne utløyse nokre av dei same misoppfatningane som elevane har rundt algebra. I tillegg har eg erfart at det skaper vanskar for enkelte elevar, når ein bevegar seg frå $y =$, som dei har lært på ungdomstrinnet, til $f(x) =$. Elevane må no forhalde seg til at namnet på funksjonen er f, medan $f(x)$ er funksjonsverdien for argumentet x.

Mange av misoppfatningane elevane har rundt funksjonar er kopla til omsetjing mellom dei ulike framstillingane av funksjonane. Dersom me gir elevane funksjonen $f(x) = 2x + 1$ og ber dei om å plotte eller teikne den inn i eit koordinatsystem, vil fleire ikkje sjå samanhengen mellom funksjonsuttrykket og den tilhøyrande grafen. Enkelte vil i staden sjå funksjonen som uttrykk for eit enkelt punkt, og ofte vil desse elevane plotte inn punktet $(2,1)$, fordi dei tolkar $2x$ som at x må vere 2 og at y derfor er 1 (Gjone, 1997). Eg har erfart at dersom desse elevane må trekkje ei linje, så går linja gjennom punkta $(2,1)$ og origo.

På den andre sida er det mange elevar som har misoppfatningar som er kopla til den grafiske framstillinga av funksjonar. Av dei mest vanlege misoppfatningane knytte til tolking/lesing av ein grafisk framstilt funksjon, er biletleg tolking – eleven les grafen til dømes som eit bilete av ein situasjon, eit kart eller ei geometrisk framstilling. Dei same misoppfatningane vil og kunne vise seg ved tolking av plotta punkt i eit koordinatsystem (Gjone, 97).

3 Metode

I dette kapittelet vil eg kort gjere greie for kva metode eg har nytta meg av i arbeidet med denne oppgåva. Eg vil også seie noko om korleis innsamlinga av data vart gjort, og peike på mulege svakheiter ved metoden.

For å kunne svare på problemstilling to, om kva som kan vere årsakene til, og korleis førebyggje vanskar hjå elevane, har eg studert forskingslitteratur og anna relevant litteratur om emnet. Dette er presentert i teorikapitlet og drøftingskapitlet. Parallelt med litteraturstudiet samla eg inn eigne data for å svare på problemstilling ein. Desse dataa undersøkte og analyserte eg seinare med hjelp av statistikkprogrammet SPSS. Resultatet av den kvantitative delen av arbeidet mitt er presentert i resultatkapitlet.

3.1 Studie av litteratur og tidlegare forsking

Best muleg tilpassing av undervisning krev, i tillegg til kartlegging av elevprestasjonar, god kjennskap til korleis elevar tileignar seg stoffet, kva dei vanlegvis har problem med og kvifor. Derfor har det vore naudsynt med inngåande studie av litteratur om emnet, og tidlegare forsking gjort rundt dette.

Av det eg har funne i litteraturstudiet, er noko presentert i teorikappitelet, der eg seier litt om kva tidlegare forsking har funne om kva som verkar inn på elevane si læring, og vanlege vanskar og misoppfatningar i temaa. I drøftingsdelen vil eg komme tilbake til teorien, for å sjå kva som kan verke førebyggjande på dei ulike vanskane og misoppfatningane.

3.2 Kvantitativ metode

Kvantitativ metode er basert på tal og data, og ein er derfor avhengig av å ha tilgang til ei større mengd informantar eller data for å nytte seg av denne metoden. I tillegg til storleiken på datamaterialet har også problemstillinga innverknad på om ein kan velje kvantitativ forskingsstrategi. For nokre problemstillingar er det naudsynt med ein kvalitativ forskingsstrategi, medan andre peikar klart mot ein kvantitativ strategi. Sidan eg både har tilgang til eit stor tal informantar / datamateriale og ein problemstilling som kan svarast på med hjelp av kvantitativ metode, er det naturleg å nytte det.

3.3 Validitet og reliabilitet

Validitet dreiar seg om kor vidt det innsamla datamaterialet og målemetoden ein nyttar seg av er relevant for det ein ynskjer å studere. Seier dataa noko om det me ynskjer å måle? Reliabilitet seier noko om kor påliteleg ein målemetode er, med andre ord får me same resultatet når me gjere målinga ein gong til så har me høg reliabilitet (Befring, 2007). Desse to omgrepa heng nøye saman, ein kan seie at høg reliabilitet er naudsynt for å gje høg validitet.

Det empiriske datamaterialet mitt er samla inn med tanke på å undersøkje den fyrste problemstillinga i oppgåva: *Korleis samsvarar Vg.1 elevane på Sogndal vidaregåande skule sine prestasjonar i algebra og funksjonar med læreplanen (LK06) sine kompetansemål i desse tema etter 10.årssteg?*

Begrepsvaliditeten seier noko om i kva grad ein måler det ein ynskjer å måle (Befring, 2007), i dette tilfellet om dei empiriske dataa måler dei teoretiske omgrepa eg ynskjer å måle. Med andre ord, om elevane sine prestasjonar på kartleggingsprøven seier oss noko om samsvaret med læreplanmåla i algebra og funksjonar etter 10. årssteg. Ein grundig gjennomgang av oppgåvene på prøven viser at det berre er sju oppgåver som kjem inn under dei aktuelle temaa, og som nemnt under kapitel 1.4, dekker ikkje desse oppgåvene alle kompetansemåla i temaa algebra og funksjonar etter 10. årssteg. For dei kompetansemåla som vert dekka av oppgåvene på kartleggingsprøven, vurderer eg begrepsvaliditeten til å vere god.

Den indre validiteten seier noko om i kva grad resultatet er gyldig for det utvalet som er undersøkt (Ringdal, 2007). Den indre validiteten for utvalet eg har undersøkt, vert påverka av kor seriøst elevane tek kartleggingsprøven, med andre ord korleis elevane vurderer facevaliditeten av kartleggingsprøven. Enkelte elevar legg kanskje mindre arbeid i løysing av prøven, sidan den ikkje er teljande på vurderinga. Og nokre elevar vil heller droppe enkelte oppgåver enn bruke mykje tid og krefter på å prøve å finn ei løysing. Erfaringsvis vil storparten av elevane likevel gjere sitt beste, fordi det ligg naturleg for dei fleste av oss å yte det me kan i ein prøvesituasjon. I tillegg vert elevane fortalt kor viktig det er at dei gjer så godt dei kan, slik at me som lærarar veit kvar dei stå fagleg, fordi me ynskjer å leggje til rette undervisninga. Av ovanfor nemnde grunnar vil ein kunne få eit noko skeivt inntrykk. Det store talet på prøver vil derimot minske faren for at ein av få som ikkje gjer sitt beste får dominere inntrykket. Ut i frå desse vurderingane vil den indre validiteten for utvalet i undersøkinga vere god.

Ytre validitet seier noko om korvidt funna i ei undersøking er gyldige for andre enn deltakarane i undersøkinga (Ringdal, 2007). Elevane i mi undersøking er eit stort og tilfeldig utval av elevar som tek til i Vg.1 ved Sogndal vidaregåande skule. Sjølv om størstedelen av det innsamla materialet kjem få studieførebuande studieretningar, vurderer eg det til å vere eit representativt utval av elevmassen. Resultatet frå undersøkinga vil derfor ha gyldigheit for andre elevar ved skulen. Det er liten grunn til å tru at elevane i Sogn skil seg nemneverdig frå elevar i resten av landet, og ut i frå desse vurderingane vil resultatet frå denne undersøkinga også vere valid for elevar ved andre vidaregåande skular.

Statistisk validitet seier noko om ein har eit godt nok statistisk grunnlag til å dra dei konklusjonane ein gjer, og kan aukast ved å auke talet på observasjonar (Befring, 2007). Ut i frå det høge talet på innsamla elevsvar i undersøkinga vurderer eg den statistiske validiteten til å vere god.

Reliabilitet dreiar seg om i kva grad undersøkinga er råd å etterprøve (Befring, 2007). Dersom ein annan forskar hadde gjennomført den same undersøkinga med det same datamaterialet, ville resultatet mest sannsynleg vorte likt det eg har fått. Mulege feilkjelder ved handsaming av dataa er tastefeil ved innlegging av data i statistikkprogrammet og feil avlesing av analyseresultata. Slike feil er det vanskeleg å gardere seg i mot, men eg har brukt god tid og gjort mitt beste for at dette skal verte rett.

Ut i frå vurderingane og avgrensingane eg har gjort ovanfor, ser eg på datamaterialet mitt som valid og reliabelt i forhold til den fyrste problemstillinga mi.

3.4 Eigne data

For å kartleggje elevane sine prestasjonar i samsvar med den fyrste problemstillinga mi, nytta eg resultata frå kartleggingsprøven ved Sogndal vidaregåande skule.

3.4.1 Innsamlingsmetode og utval av kjelder

Til kartlegging av elevprestasjonane analyserte eg allereie innsamla materiale, sekundærdata. Elevane sine prestasjonar, i form av poengscor på oppgåvene, vert undersøkt, og eg ser på om det er samanhengar mellom korleis elevane gjer det på dei ulike oppgåvene. Det vil også vere aktuelt å undersøkje om det er korrelasjon mellom variabelen kjønn og elevane sine prestasjonar på kartleggingsprøven(Befring, E. 2002).

I undersøkinga avgrensar eg materialet til prøveresultata for dei elevane som har gått heile ungdomsskulen etter den siste læreplanen Kl06. Med bakgrunn i den vurderinga eg gjorde i kapitel 1.2, av dei to kartleggingsprøvane elevane tek, vel eg å basere oppgåva mi på resultata frå skulen sin eigen kartleggingsprøve. Mange lærarar tek vare på retteskjemaa sine i fleire år, og det gav meg mulegheit til å få eit stort statistisk materiale. Eg samla inn prøveresultata til totalt 335 elevar frå ulike vg. 1 klassar. Innsamlinga av data vart gjort i løpet av skuleåret 2011/2012. Og som ein kan sjå av tabell 1, så er størstedelen av materialet prøveresultat frå hausten 2011, men det er også med nokre grupper frå tidlegare år.

Årskull	Frekvens	Prosent
2007	26	7.8
2008	40	11.9
2010	105	31.3
2011	164	49.0
Total	335	100.0

Tabell 1: Elevane i undersøkinga fordelt på årskull

Som tabell 2 viser, så er nesten 70 % av kartleggingsprøvane samla inn frå studiespesialiserande og idrettsfagleg studieretning. Dette heng saman både med høgare elevtal på desse to retningane, og mindre utbreidd bruk av prøven blant matematikklærarane på yrkesfaglege studieretningar. Kartleggingsprøvane på studiespesialiserande og idrettsfag vert også ofte oppbevart lengre, fordi desse elevane tek matematikk over fleire år, medan elevane på yrkesfag har matematikk berre på Vg.1. Det at prøveresultata er så ulikt fordelt på studieretningane vil kanskje påverke resultata mine, og må derfor takast med i betraktning når eg skal gjere analysar og trekkje konklusjonar.

		Linje						Sum
		Studiespes	Idrettsfag	Medium og komm.	Bygg- og anlegg	Teknikk og ind.prod.	Elektrofag	
Kjønn	Jenter	79	43	25	1	1	2	151
	Gutar	52	52	6	36	8	28	182
	Sum	131	95	31	37	9	30	333

Tabell 2: Tal jenter og gutar i undersøkinga, fordelt på dei ulike studieretningane

Matematikklærarane erstatta elevane sine namn med kjønn, før dei gav kartleggingsprøvane vidare til meg. Under dette arbeidet var det to elevar som falt ut av systemet, og blei ståande utan kjønn. Ser ein bort frå desse to, består det innsamla materialet av kartleggingsprøvane til 151 jenter og 182 gutar.

Oppgåvene som dekka kompetansemål under tal, algebra og funksjonar, til saman tolv oppgåver, vart så registrerte i statistikkprogrammet SPSS for vidare handsaming. I SPSS var elevane registrert med kjønn og studieretning. Så vart poengutteljinga på dei ulike oppgåvene og samanlagt poengsum på temaa tal, algebra og funksjonar lagt inn på kvar av elevane. I tillegg la eg inn samanlagt poengsum for kvar elev på dei sju oppgåvene i algebra og funksjonar, som eg nyttar i denne undersøkinga.

3.5 Statistikk

For å analysere resultata av kartleggingsprøven har eg nytta meg av IBM SPSS versjon 20. I resultatkapitlet vert elevane sine resultat på kvar oppgåve framstilt i søylediagram. Eg har også nytta tabellar og krysstabellar til den visuelle framstillinga av resultata. I tillegg har eg nytta t-testar og korrelasjon, for å analysere elevane sine resultat på kartleggingsprøven.

3.6 Etiske vurderingar

Etter råd frå Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS (NSD) vart alle prøveresultata samla inn utan namn, men med kjønn på elevane. Dette vart gjort for å unngå at det vart samla inn sensitive personopplysningar. Ved å nytte denne forma for innsamling av data kan ingen av resultata sporast tilbake til enkeltelevar. Prosjektet mitt er dermed heller ikkje omfatta av meldeplikta.

Eg ser ingen etiske dilemma ved å bruke elevane sine anonymiserte resultat på kartleggingsprøven til denne oppgåva. Alle elevane vert opplyste om at hensikta med prøven er å kartlegg kvar dei står fagleg når dei tek til i Vg.1, og eg har ikkje nytta prøvane til noko anna. Dessutan er det ikkje til ulempe for nokon at eg nyttar akkurat deira resultat i dette arbeidet.

Noko som kan diskuterast er forskarrolla mi, ettersom eg arbeidar som matematikklærar ved den same skulen som elevresultata kjem frå, og nokre av elevane vil derfor vere mine eigne. Ein kan derfor kritisere forskarrolla mi ut i frå kravet om nøytralitet. Dette er det vanskeleg å gjere noko med, det einaste eg kan gjere er å opptre så nøytralt som mogeleg, og så forskingsetisk korrekt som mogeleg, ut i frå den situasjonen eg er i.

4 Resultat av kartleggingsprøven

Eg vil her berre presentera dei oppgåvene som kjem inne under kompetansemål i Kl06 som nemner algebra, likningar, ulikskapar og funksjonar. Med andre ord vil eg sjå bort i alle oppgåver som kjem inn under tema tal, som oppgåver om prosent, valuta, måling osb. Då står eg att med fylgjande kompetansemål, sitat frå læreplanen LK06:

«Kompetansemål etter 10. årssteg hovudområde algebra:

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- *behandle og faktorisere enkle algebrauttrykk, og rekne med formlar, parentesar og brøkuttrykk med eitt ledd i nemnaren*
- *løyse likningar og ulikskapar av første grad og enkle likningssystem med to ukjende (Kl06)*

(Utdanningsdirektoratet, 2006)

Kompetansemål etter 10. årssteg hovudområde funksjonar:

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- *lage, på papiret og digitalt, funksjonar som beskriv numeriske samanhengar og praktiske situasjonar, tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som grafar, tabellar, formlar og tekst*
- *identifisere og utnytte eigenskapane til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og enkle kvadratiske funksjonar, og gje døme på praktiske situasjonar som kan beskrivast med desse funksjonane «*

(Utdanningsdirektoratet, 2006)

Totalt er det sju oppgåver på kartleggingsprøven som kjem inn under kompetansemåla som er nemnt ovanfor. Fire av oppgåvene høyrer inn under tema algebra, og tre av oppgåvene høyrer inn under tema funksjonar. Under vil eg presentere kvart kompetansemål med tilhøyrande oppgåver frå kartleggingsprøven. Innunder kvar av dei sju oppgåvene vil eg presentere elevresultatet på oppgåva. Fordi eg har samla inn retteskjemaa til kollegaar, har eg ikkje tilgang til elevane sine løysingar, berre poengfordelinga deira. Dei einaste fullstendige elevsvara eg har tilgang til, er dei i frå mine eigne elevar. Det er derfor ikkje muleg for meg å finne ut kva feiltypar som er mest utbreidd på dei ulike oppgåvene.

4.1 Algebra

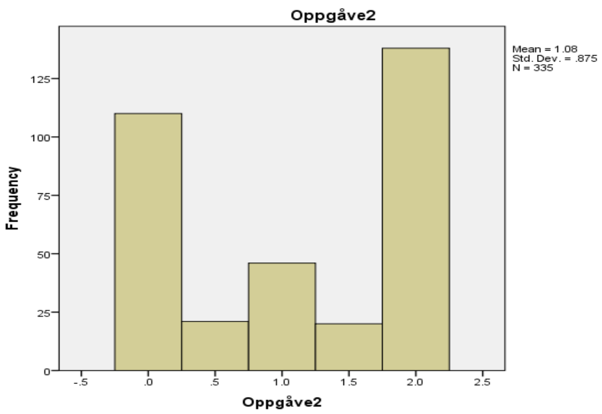
Kompetansemål

- *behandle og faktorisere enkle algebrauttrykk, og rekne med formlar, parentesar og brøkuttrykk med eitt ledd i nemnaren* (Utdanningsdirektoratet, 2006).

Oppgåve 2

Rekn ut: 3a – (2b + a) – 4b

Resultatet på prøven



Dersom me nyttar Welder (2012) si inndeling av elevane sine vanskar med algebra, ser me at denne oppgåva testar elevane på tre av fire område. Bruk av parentesar, bruk av operasjonelle symbol og bruk av bokstavar. For å kunne løyse opp parentesen rett og få $3a - 2b - a - 4b$, må elevane ha forståing både for bruken av parentesen i uttrykket og tydinga av minusteiknet framfor ein parentes. Dersom eleven ikkje har den rette forståinga av dette, vil han fort ende opp med uttrykket $3a - 2b + a - 4b$. Deretter må elevane vise at dei forstår bokstavane si rolle i uttrykket, og trekke saman riktig til $2a - 6b$. Svar som $-2ab$ eller $-4ab$ viser at elevane har misoppfatningar rundt bokstavane si rolle i uttrykket.

Denne oppgåva vart løyst feilfritt av omlag 40 % av elevane, medan nær 33 % fekk null poeng. Det vil seie at 33 % av elevane har store misoppfatningar på eit eller fleire av områda over, eller så store vanskar med oppgåva at dei ikkje forsøkte å løyse den i det heile. Dei om lag 27 % av elevane som har fått delvis utteljing, har vist at dei har misoppfatning eller vanskar med noko av det ovannemnte, eller dei har gjort ein annan type utrekningsfeil.

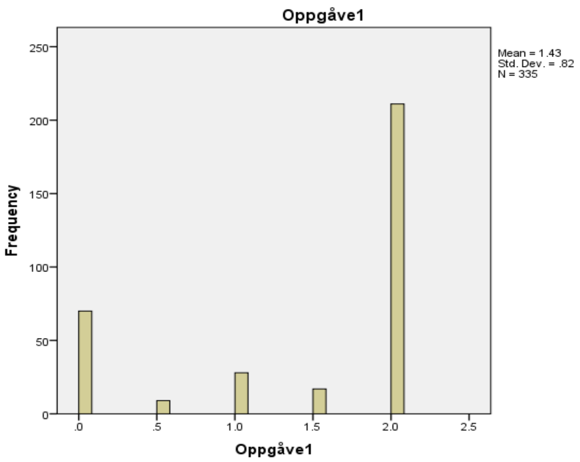
Kompetansemål

- *likningar og ulikskapar av første løyse grad og enkle likningssystem med to ukjende* (Utdanningsdirektoratet, 2006).

Oppgåve 1

Løys likninga: 4 + 2x – 3 + 4x = 5 + 2x + 4

Resultatet på prøven



Av søylediagramma ser ein at oppgåve 1 er ei enklare oppgåve enn oppgåve 2. Oppgåve 1 er ei ferdig oppstilt algebraisk likning som skal løysast med omsyn på x. Etter Welder (2012) si inndeling vert elevane her hovudsakleg testa i bruk og forståing av likskapsteiknet. Dette er ein type oppgåver som me veit det vore arbeida mykje med på ungdomsteget. Det er kanskje grunnen til at så mykje som 63 % av elevane løyser denne oppgåva feilfritt. I tillegg er det også ei forholdsvis enkel likning med ein ukjent, og utan forvanskande element som til dømes parentesar og brøkar. Men det er uroande at om lag 21 % av elevane likevel har så store problem med oppgåva at dei enten hoppar over den eller gjere så mykje feil at dei får null poeng. Kan dette ha samanheng med Nathan og Koedinger (2000) sine funn rundt elevane sine problem med oppstilte algebraiske likningar? Eg vil komme tilbake til dette etter fyrst å ha sett på resultata på oppgåve 3 og oppgåve 4, sidan desse kjem inn under same kompetansemål.

poeng		Oppgåve2					Total
		.0	.5	1.0	1.5	2.0	
Oppgåve1	.0	48	5	7	1	9	70
	.5	4	2	2	0	1	9
	1.0	11	3	4	1	9	28
	1.5	3	2	6	1	4	16
	1.5	0	0	1	0	0	1
	2.0	44	9	26	17	115	211
	Total	110	21	46	20	138	335

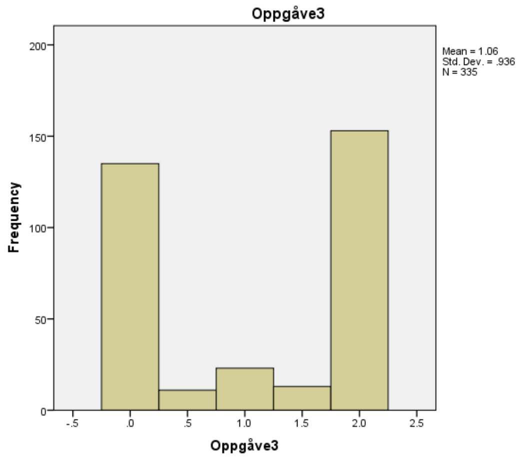
Tabell 3: elevane fordelt på poeng på oppgåve1 og oppgåve 2

I tabell 3 ser ein at dersom ein elev ikkje har fått til oppgåver 1 er det liten sjanse for at han har fått til oppgåve 2. Om ein elev har fått delvis utteljing på oppgåve 2 er det større sjanse for at eleven har fått til oppgåve 1. Men om ein elev har fått til oppgåve 1 er det likevel ikkje sikkert han får til oppgåve 2, fordi oppgåve 1 er enklare. Det er få observasjonar i øvre høgre hjørne, noko som viser at det er ein stor samanheng mellom oppgåve 2 og oppgåve 1. Dei mange observasjonane i nedre venstre hjørne må altså ikkje tolkast som at det er liten samanheng mellom prestasjonane på oppgåvene, men dei kjem av at oppgåve 1 er lettare enn oppgåve 2. det er med andre ord progresjon i oppgåvene.

Oppgåve 3

Løys ulikskapen: $3x - 3 > 9 + x$

Resultatet på prøven



Løysingsmetoden på oppgåve 3 liknar svært på den i oppgåve 1, løysing av likning, men her er likskapsteiknet bytta ut med ulikskapsteiknet >. Elevane bør derfor vere innforstått med tydinga og bruken av dette teiknet for å løyse oppgåva korrekt. Mulege vanskar og misoppfatningar her kan vere knytt til når teiknet skal snuast og når det ikkje skal snuast. Resultatet viser at om lag 46 % av elevane har løyst oppgåva korrekt, medan heile 40 % har null poeng på den. Det vil seie at det er svært få som løyser den delvis rett. Ein elev som løyser mykje av oppgåva rett, men har misoppfatningar rundt snuing av ulikskapsteiknet, vil få litt utteljing på oppgåva. Av erfaring veit eg at mange elevar hoppar over denne oppgåva, og det er truleg ein medverkande årsak til at så mange kjem ut med null poeng. Ein ser av søylediagramma at oppgåve 3 er ei vanskelegare enn oppgåve 1.

Poeng		Oppgåve3					Total
		.0	.5	1.0	1.5	2.0	
Oppgåve1	.0	64	0	0	0	6	70
	.5	5	3	0	0	1	9
	1.0	12	2	3	1	10	28
	1.5	7	0	1	0	8	16
	1.5	0	0	0	0	1	1
	2.0	47	6	19	12	127	211
	Totalt	135	11	23	13	153	335

Tabell 4: elevane fordelt på poeng på oppgåve1 og oppgåve 3

Av tabell 4 kan ein sjå at dersom ein elev ikkje har fått til oppgåve 1 er det liten sjanse for at han har fått til oppgåve 3. Og dersom eleven har fått til oppgåve 3 er det stor sjanse for at han har fått til oppgåve 1. Men om eleven har fått til oppgåve 1 er det likevel sjanse for at han ikkje får til oppgåve 3, sidan oppgåve 1 er ei enklare oppgåve enn oppgåve 3. Det at det er få observasjonar i øvre høgre hjørne på tabell 4 viser at det er ein stor samanheng mellom oppgåve 1 og oppgåve 3. Samtidig ser ein av observasjonane i nedre venstre hjørne at det er progresjon frå oppgåve 1 til oppgåve 3.

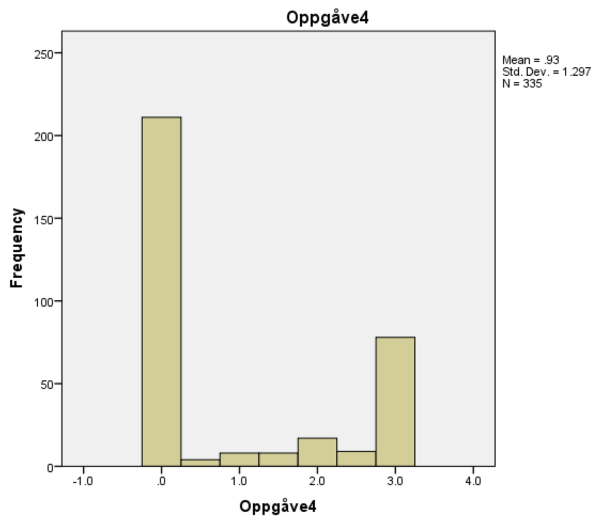
Oppgåve 4

Vel sjølv metode, og løys likningssettet:

I: $y = 2x + 1$

II: $2x + y = 3$

Resultatet på prøven



Søylediagramma viser at oppgåve 4 er ei vanskelegare oppgåve enn alle dei tre føregåande oppgåvene. Oppgåve 4 er løysing av eit ferdig oppstilt likningssett med to ukjente. Denne oppgåva skil seg ut som den med desidert svakast resultat under hovudområdet algebra. Heile 63 % av elevane har fått 0 poeng på denne oppgåva, medan 23,3 % har scora maks poeng. Dette er også ei oppgåve som elevane erfaringsvis ikkje ein gong prøver å løyse. Det er eit forholdsvis enkelt likningssett, og det er derfor ingen grunn til å tru at vanskegraden ikkje er i tråd med læreplanmålet etter 10. trinn.

Elevar som klarar å løyse ei likning kan få problem med likningssett fordi det har andre løysingsmetodar. Setninga «*vel sjølv metode og løys likningssettet*» kan forvirre meir enn det hjelper, dersom eleven i utgangspunktet er usikker på korleis oppgåva kan løysast. I tillegg kan me nok slå fast at denne oppgåva er den med høgast vanskegrad, under temaet tal og algebra, på kartleggingsprøven.

Ut i frå tabell 5 ser ein at dersom ein elev ikkje har fått til oppgåve 1 er det det liten sjanse for at han har fått til oppgåve 4. Og dersom ein elev har fått til oppgåve 4 er det stor sjanse for at han har fått til oppgåve 1. Dersom ein elev har fått til oppgåve 1 er det likevel stor sjanse for at denne eleven ikkje får til oppgåve 4, fordi oppgåve 1 er ei mykje enklare oppgåve enn oppgåve 4. Som ein kan sjå er det svært få observasjonar i øvre høgre hjørne. Det tyder at det er ein stor samanheng mellom resultata på desse to oppgåvene. Av det store talet observasjonar nede i venstre hjørne ser ein at det er progresjon mellom oppgåvene.

Poeng		Oppgåve4							Total
		.0	.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	
Oppgåve1	.0	62	2	2	1	1	0	2	70
	.5	8	0	0	0	0	0	1	9
	1.0	23	0	0	0	1	0	4	28
	1.5	12	0	0	1	1	0	2	16
	1.5	0	0	0	0	0	0	1	1
	2.0	106	2	6	6	14	9	68	211
	Total	211	4	8	8	17	9	78	335

Tabell 5: elevane fordelt på poeng på oppgåve 1 og oppgåve 4

Av tabell 6 ser ein at dersom ein elev ikkje har fått til oppgåve 3 er det liten sjanse for at han har fått til oppgåve 4. Og dersom ein elev har fått delvis utteljing på oppgåve 4 er sjansen større for at han har fått til oppgåve 3. Om ein elev har fått til oppgåve 3 er det likevel ikkje sikkert at han får til oppgåve 4, fordi oppgåve 3 er ei lettare oppgåve enn oppgåve 4. Desse observasjonane i nedre venstre hjørne tyder på progresjon mellom dei to oppgåvene. Dei få observasjonane i øvre høgre hjørne tyder på stor samanheng mellom oppgåve 3, ulikskap, og oppgåve 4 likningssett.

Poeng		Oppgåve4							Total
		.0	.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	
Oppgåve3	.0	122	1	3	2	0	0	7	135
	.5	10	1	0	0	0	0	0	11
	1.0	15	0	0	1	2	1	4	23
	1.5	7	1	0	0	1	1	3	13
	2.0	57	1	5	5	14	7	64	153
	Total	211	4	8	8	17	9	78	335

Tabell 6: elevane fordelt på poeng på oppgåve 3 og oppgåve 4

Tabell 3, 4, 5 og 6 viser ein stor samanhengen mellom resultata, og at det er progresjon mellom oppgåvene innanfor algebra. Det tyder på at oppgåvene måler kunnskapar innanfor same tema, og at dei er reliable variablar for å måle denne kunnskapen. Samla sett tyder tabellane på at desse fire oppgåvene er gode indikatorar for kunnskap innanfor det temaet dei representerer.

Det svake resultatet på oppgåve 1, oppgåve 3 og oppgåve 4 kan tolkast i samsvarar med resultata til Nathan og Koedinger (2000) om at elevane finn ferdig oppstilte algebraiske likningar som den vanskelegaste varianten av algebraiske problem.

4.2 Funksjonar

Kompetansemål

- *lage, på papiret og digitalt, funksjonar som beskriv numeriske samanhengar og praktiske situasjonar, tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som grafar, tabellar, formlar og tekst.*
- *identifisere og utnytte eigenskapane til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og enkle kvadratiske funksjonar, og gje døme på praktiske situasjonar som kan beskrivast med desse funksjonane*

(Utdanningsdirektoratet, 2006)

Under hovudområdet funksjonar er det tre oppgåver som heng saman sidan det er ein lineærfunksjon, oppgåve 6, og ein andregrads funksjon, oppgåve 7, som skal teiknast inn i det same koordinatsystemet. Oppgåve 8 går ut på å lese av skjeringspunkta mellom dei to funksjonane. Oppgåve 6 og 7 er uavhengige av kvarandre, medan oppgåve 8 avheng av løysinga av 6 og 7. Dersom 6 og 7 er løyst feil, vil eleven likevel få poeng for rett avlesing av sine resultat i oppgåve 8. På den originale prøven var oppgåve 6, 7 og 8 deloppgåve a), b) og c) av same oppgåva. Av praktiske omsyn til dataregistreringa har eg gjort om dette til ulike oppgåve nr. Den originale oppgåva har også eit ferdig teikna koordinatsystem med rutenett og verdiar på begge aksane. Det tek eg ikkje med her.

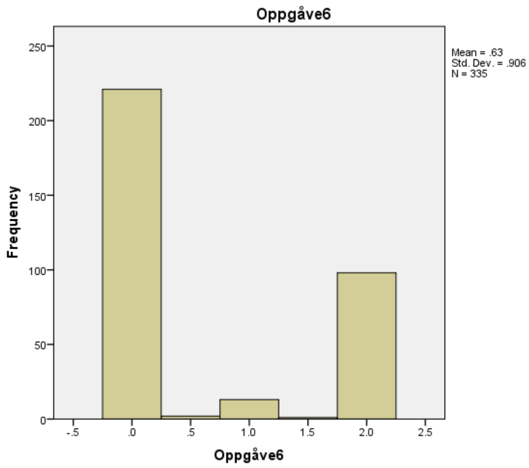
Oppgåve 6

Teikn grafen til funksjonen

$$y = 2x + 1$$

i koordinatsystemet til høgre.

Resultatet på prøven



I denne oppgåva vert elevane bedne om å omsetje ein algebraisk framstilt funksjon til grafisk framstilling. Det er ein enkel lineær funksjon, som lett kan teiknast inn utan å lage tabell, dersom elevane har forståing for lineære funksjonar. Til tross for dette har så mykje som 66 % av elevane null poeng på denne oppgåva, medan omlag 29 % har løyst den feilfritt. Svært få elevar har fått delvis rett på denne oppgåva. Feil som gir delvis utteljing er om dei har synt forståing for stigningstal og / eller konstantledd, men har plassert grafen inn feil av andre grunnar.

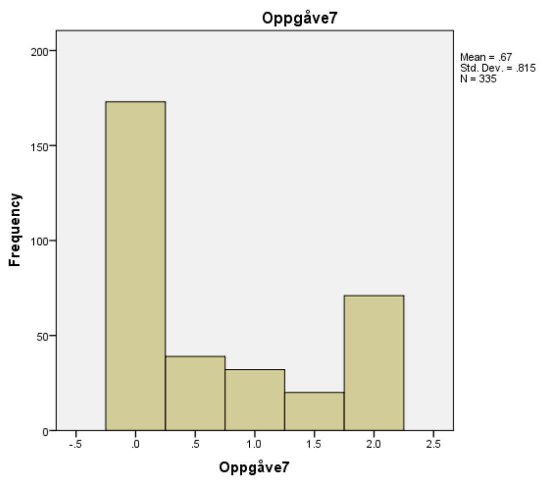
Når eg gjekk inn i tilfeldige enkeltprøvar fann eg ei misoppfatning til som viste seg å vere forholdsvis utbreidd. Fleire elevar tolkar funksjonen $y = 2x + 1$ til å definere to bestemte punkt, $(2,0)$ og $(0,1)$, og så dreg dei linja mellom desse. Dette kan komme av at elevane veit at leddet $+1$ viser at grafen skjer y-aksen i 1, altså punktet (0,1), dei tolkar derfor også leddet $2x$ til eit punkt, som dei plasserer på x-aksen i punktet (2,0). Kunnskapen om at punkt vert skrivne i rekkefølgja (x,y) kan vere med på å styrke denne misoppfatninga.

Oppgåve 7

Grafen til funksjonen $y = x^2 + 1$ skal teiknast i det same koordinatsystemet.
Fyll inn resten av y-verdiane i verditabellen under og teikn grafen.

X	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	10	5				$1\frac{1}{4}$		5	10

Resultatet på prøven



Her skal elevane fylle ut resten av tabellen til ein algebraisk framstilt andregradsfunksjon, og så teikne grafen til funksjonen inn i koordinatsystemet. Berre om lag 21 % av elevane har løyst denne oppgåva korrekt, medan om lag 52 % har fått null poeng. Det vil seie at forholdsvis mange elevar har fått denne oppgåva delvis rett. Det kan komme av at det her er muleg å få poeng ved å rekne ut nokre fleire verdiar i tabellen utan å teikne grafen, og ved å plotte inn nokre av dei allereie utrekna punkta. Med andre ord er det muleg å løyse deler av oppgåva utan å ha forståing for samanhengen mellom dei ulike framstillingsmåtane til funksjonen.

Når eg gjekk inn i tilfeldige elevsvar og såg på korleis elevane prøvde å løyse denne oppgåva, fann eg to andre feiltypar som fleire av elevane viste seg å dele. Dei hadde ei klar misoppfatning av korleis tabellen skulle lesast. Når desse elevane skulle plotte inn punkta i koordinatsystemet, tolka dei kvart tal i tabellen til å stå for eit punkt. Det førte til at, enten så vart til dømes punktet $(-3,10)$ til punkta $(-3,10)$ og $(-3,0)$. Elevane fekk då mange punkt, men det vart uråd for dei å trekkje noko linje. Eller så vart punktet $(-3,10)$ til punkta $(-3,0)$og $(0,10)$, som eleven så trekte ei linje mellom. Det vart derfor mange rette linjer i koordinatsystemet i staden for ein parabel. Ein gjennomgang av tilfeldige elevsvar viste likevel at dei fleste elevane som fekk 0 poeng på oppgåve 7, ikkje hadde prøvd å løyse oppgåva i det heile.

Tabell 7 viser at det er stor samanheng mellom resultata på oppgåve 6 og oppgåve 7. Ein ser at desse to oppgåvene er om lag like vanskelege. Tabellen er omtrent symmetrisk omkring diagonalen frå venstre øvre hjørne til høgre nedre hjørne. Det tyder på at dette er gode oppgåver for å måle denne typen prestasjonar.

Poeng		Oppgåve7					Total
		.0	.5	1.0	1.5	2.0	
Oppgåve6	.0	148	32	17	7	17	221
	.5	2	0	0	0	0	2
	1.0	4	2	2	2	3	13
	1.5	0	0	1	0	0	1
	2.0	19	5	12	11	51	98
	Total	173	39	32	20	71	335

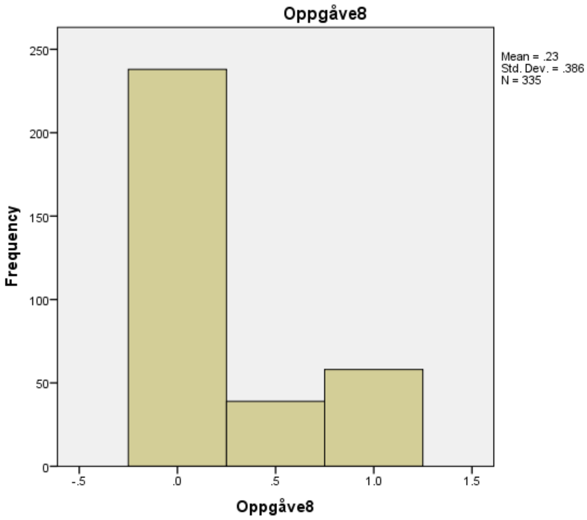
Tabell 7: elvane fordelt på poeng på oppgåve 6 og oppgåve 7

Oppgåve 8

Les av og skriv opp koordinatane til skjeringspunkta mellom dei to grafane.

Svar: (____.____) og (_____._____)

Resultatet på prøven



Denne oppgåva ber elevane lese av og skrive ned skjeringspunkta mellom grafane i dei to føregåande oppgåvene. For kunne løyse denne oppgåva må elevane ha løyst dei to føregåande oppgåvene med å teikne grafane inn i koordinatsystemet. Denne føresetnaden gjev oss eit lågt tal elevar i utgangspunktet, sjølv om elevane vil få poeng for rett avleising av feil innteikna grafar.

Det er 51 elevar som har løyst både oppgåve 6 og oppgåve 7 heilt feilfritt. Samtidig ser ein at det er 58 elevar som får full utteljing på oppgåve 8. Av desse har 50 fått full utteljing på oppgåve 6, 2 har delvis rett på oppgåve 6 medan 6 elevar har null poeng for oppgåve 6. Dei 8 elevane som har gjort heilt eller delvis feil på grafen i oppgåve 6 feil, kanskje ved å plassere grafen feil i koordinatsystemet, har likevel klart å nytte den til å løyse oppgåve 8 ved å lese av skjeringspunkta ut i frå dei grafane dei har. Av dei 51 elevane som har løyst oppgåve 8 feilfritt er det 46 som har korrekt løysing og 11 som har delvis rett løysing av oppgåve 7. Elevar som har delvis rett på oppgåve 7, kan ha rekna ut eller plassert eit eller fleire punkt feil, men teikna inn grafen rett ut i frå sine tal.

Dette tyder på at dei aller fleste elevane som har fått til oppgåve 6 og oppgåve 7 også har klart å løyse oppgåve 8 på ein god måte. Av dei elevane som har hatt eit godt utgangspunkt til å løyse oppgåve 8, kan nokon gjort feil i avlesinga, eller under nedskrivinga. Ein typisk feil her er å bytte om på rekkefylgja til (x, y) når dei skriv ned koordinatane.

4.3 Oppgåvene som måleinstrument

Analysane mine viser at oppgåvene er godt eigna som måleinstrument. Det er stor samanheng mellom dei, men ikkje for stor, sidan dei måler litt ulike, men beslekta tema. Ein ser også at elevar som til dømes har fått noko poeng på oppgåve 1, har auka sannsyn for å få poeng på til dømes oppgåve 3. Dette er også eit teikn på at oppgåvene fungerer som måleinstrument. Samtidig viser fordelinga av poeng at er det god progresjon i oppgåvene utover i prøven.

Tabell 8 viser at det er positiv korrelasjon mellom alle oppgåvene. Særslikt gjeld dette oppgåvene innanfor funksjonar. Når det er sagt, så er fordelinga på alle oppgåvene så langt i frå normalfordelt, at korrelasjon ikkje er noko godt mål på samanhengane mellom oppgåvene. Dette er grunnen til at eg ovanfor har nytta krysstabellar til å sjå på desse samanhengane. Krysstabellane viser ein stor samanheng mellom oppgåvene. Krysstabellane tyder på større samanhengar mellom oppgåvene enn det korrelasjonane viser. Som nemnt kjem det truleg av at ein ikkje har normalfordelte data, og at korrelasjon derfor ikkje er noko godt mål på samanheng.

	Oppg. 1	Oppg. 2	Oppg. 3	Oppg. 4	Oppg. 6	Oppg.7	Oppg. 8
Oppg. 1	----------	0.44	0.53	0.36	0.35	0.30	0.28
Oppg. 2	0.44	---------	0.51	0.44	0.37	0.37	0.40
Oppg. 3	0.53	0.51	-----------	0.52	0.42	0.37	0.38
Oppg.4	0.36	0.44	0.52	-----------	0.46	0.46	0.48
Oppg. 6	0.35	0.37	0.42	0.46	-----------	0.56	0.65
Oppg. 7	0.30	0.37	0.37	0.46	0.56	----------	0.76
Oppg. 8	0.28	0.40	0.38	0.48	0.65	0.76	---------

Tabell 8: viser korrelasjonen mellom dei ulike oppgåvene.

Eg har også sett på kvar av oppgåvene opp i mot elevane sin totale poengsum på desse sju oppgåvene, for å sjå om nokon av dei har større samanheng med den totale summen enn dei andre. Dette kan då vere eit teikn på at den oppgåva er spesielt godt eigna til å seie oss noko om elevane sine prestasjonar i det temaet den er innanfor. Eg fann at alle sju oppgåvene har høg positiv korrelasjon med den totale poengsummen elevane har fått på desse oppgåvene.

4.4 Hovudfunn

Sentralgitt læreplan i faget matematikk har tydeleg uttrykte kompetansemål etter 10. trinn, der det står eksplisitt at «Mål for opplæringa er at eleven skal kunne…»(Udir.2006, s.63). Ser me elevane sine resultat på kartleggingsprøva i lys av dette, så er det tydeleg at mange elevar ikkje kan det som læreplanmåla seier dei skal kunne. I alle fall ikkje innanfor temaa algebra og funksjonar. På samtlege oppgåver er prosenten av korrekte svar urovekkande låg. Oppgåve 1, der elevane skal løyse ei enkel likning, skil seg ut som den med desidert høgast prosentdel korrekte løysingar, sjølv om 63 % korrekte løysingar ikkje akkurat kan seiast å vere imponerande. I den andre enden av skalaen ser ein at oppgåve 4, løysing av likningssett, har svært låg prosentdel av korrekte løysingar med om lag 23 %. Det er berre ei oppgåve som har lågare prosentdel korrekte løysingar, og det er oppgåve 7, med andregradsfunksjon. Men oppgåve 4 har i tillegg desidert størst prosentdel av elevar som får null poeng, og er derfor den oppgåva der elevane viser absolutt svakast prestasjonar.

Oppgåvene på kartleggingsprøven testar ikkje elevane i alle kompetansemåla i temaa algebra og funksjonar etter 10. trinn. Kompetansemål som går på å faktorisere, rekne med brøk og formlar inngår ikkje i dei oppgåvene eg har teke med her. Heller ikkje vert elevane sine digitaleferdigheiter innanfor funksjonar testa, eller deira evner til å knytte uttrykka til praktiske situasjonar. Men dei vert testa i behandling av algebrauttrykk, løysing av likning, ulikskap og likningssett. Og innanfor funksjonar vert elevane testa i omsetjing mellom dei ulike representasjonane til ein funksjon, teikning av grafane til ein lineær- og ein andregradsfunksjon og avlesing av skjeringspunkt.

Med bakgrunn i dei store samanhengane mellom oppgåvene på kartleggingsprøven, kan det vere grunn til å tru at det også ville vore ein samanheng mot oppgåver som faktorisering, rekning med brøk og formlar. A-priori er det ikkje grunn til å tru at det er større forskjell mellom den kunnskapen ein treng for å løyse slike oppgåver og oppgåvene frå prøven, enn det er mellom oppgåvene som er med på prøven. Med andre ord gir dei konsistente resultata mellom oppgåvene på prøven grunn til å tru at slike oppgåver ikkje ville endre resultata dramatisk. Eg presiserer at dette sjølvsagt er spekulasjonar, sjølv om ein kan seie at dei ikkje er ugrunna.

Ut i frå resultata vert konklusjon at i dei kompetansemåla innan temaa algebra og funksjonar som elevane vert testa i på kartleggingsprøven, presterer ikkje elevane i tråd med det ein burde kunne forvente, ut i frå læreplanen sine kompetansemål etter 10. trinn. Og her under skil oppgåve 4, løysing av likningssett med to ukjente, og heile temaet om funksjonar seg ut som dei største problemområda. I neste kapittel vil eg sjå nærare på desse funna, og drøfte kva grunnar som kan liggje bak og kva som eventuelt kan gjerast for å unngå dette.

5 Drøfting

I dette kapittelet vil eg drøfte kva som kan liggje bak funna eg gjorde i resultatkapittelet, og komme med forslag til kva som kan gjerast i undervisninga for å betre situasjonen. Eg vil drøfte resultatet på kartleggingsprøva opp mot det eg skreiv om i teoridelen under «Kvifor er algebra så vanskeleg». Og vidare vil eg med utgangspunkt i tidlegare forsking og fagartiklar drøfte kva didaktiske og pedagogiske verkemiddel som kan vere aktuelle å nytte seg av for å betre på situasjonen.

5.1 Algebra

5.1.1. Om oppgåvene og resultatet

På kartleggingsprøven eg har analysert resultata frå, er alle oppgåvene som er gitt i temaet algebra, oppgåver der elevane vert bedne om å rekne ut eller løyse ferdig oppstilte uttrykk. Det er ingen kontekst som elevane kan nytta som bakgrunn til å forstå, eller løyse problemet på ein uformell måte. Og elevane må derfor ha kunnskap om kva løysingsmetodar som eignar seg for kvar av oppgåvene, velje dei best eigna metodane og meistre bruken av dei. Mi vurdering er derfor at oppgåvene ikkje testar elevane si forståing av algebra som problemløysingsverktøy, til dømes det å setje opp ei likning frå ein praktisk situasjon, men om dei meistrar dei formelle løysingsmetodane.

Det er grunn til å spørje om resultatet ville vorte eit anna dersom oppgåvene var bygt opp rundt ein praktisk kontekst, med eit problem som kunne løysast med algebra. Ut i frå funna til

Nathan og Koedinger (2000) er det ein del som tyder på det. Dei fann at elevane ikkje hadde dei evnene innan symbolmanipulering som lærarane på high school forventa av dei, men støtta seg til uformelle metodar når dei skulle forstå og løyse algebraiske problem. Nathan og Koedinger (2000) slår fast at deira funn indikerer at evna til å løyse verbale problem vert utvikla før symbolforståinga.

Funna i Nathan og Koedingers (2000) undersøking bør få konsekvensar for korleis lærarar tenkjer kring undervisning i algebra, både i vidaregåande opplæring, men og kanskje særskilt på ungdomsteget. Algebra vert ofte introdusert for elevane på ungdomsteget, og måten det vert gjort på kan ha innverknad på elevane si utvikling av forståing og ferdigheiter innan temaet. Ved å ta utgangspunkt i at elevane utviklar evner til å dra slutningar og uttrykkje seg verbalt, før dei utviklar evner innan symbolforståing, kan ein gi elevane eit solid fundament, for seinare å utvikle symbolforståing og symbolmanipulering (Nathan og Koedinger, 2000).

I artikkelen sin gir Nathan og Koedinger (2000) oss nokre grunnleggjande prinsipp for korleis dei meiner ein bør undervise for å auke elevane sin forståing for algebra. For det fyrste meiner dei det er viktig å identifisere elven sin intuitive løysingsmetode, som ofte er uformell, slik at ein kan byggje vidare på den tidlegare lærte matematiske tenkinga. Elevane har ofte eit grunnlag for algebraisk forståing, men som regel er verken elevane eller lærarane deira klar over styrken og legitimiteten i elevane sine intuitive løysingar. Ein bør derfor ta grep som gjer elevane sine intuitive tenkjemåtar synlege, både for dei sjølve og for lærarane deira.

Av aktuelle metodar for å oppnå ei slik synleggjering nemner Nathan og Koedinger to. Å byggje vidare frå *gjett og prøv*metoden, og å byggje vidare frå *arbeide baklengs*metoden (Nathan og Koedinger, 2000). Då eg tok matematikkurset med algebra på lærarutdanninga, inngjekk bruken av begge desse metodane i pensum, så dette er metodar som burde vere allment kjent blant matematikklærarar. Spørsmålet er om dei vert brukt i undervisninga, eller om det er læreboka og innarbeida vanar som avgjere kva undervisningsmetodar som vert brukt.

5.2 Korleis førebyggje misoppfatningar kring algebra

I teorikapittelet skreiv eg om ulike misoppfatningar elevane kan ha kring algebra. Her vil eg, med hjelp av tidlegare forsking og eigne erfaringar, komme med forslag til metodar som kan nyttast i undervisninga for å unngå at desse misoppfatningane oppstår.

5.2.1 Førebygging av misoppfatningar kring parentesar

I oppgåve 2 på kartleggingsprøven er to av ledda inni ein parentes med minus framfor, $3a - (2b + a) - 4b$. Dette kan vere ei av årsakene til at berre 40 % av elevane har løyst oppgåva korrekt. Ledda inni parentesen kan ikkje trekkjast saman. Og dersom elevane ikkje har den rette forståinga av tydinga av parentesen, er det heller ikkje truleg at dei endrar forteiknet framfor a, når dei løyser den opp.

Welder (2012) skriv i sin artikkel at i matematikkundervisninga vert ofte bruken av parentesar pugga inn som ein del av reknerekkefølgja, noko som kan føre til ein automatisk bruk utan forståing. I staden for bør utviklinga av elevane si forståing av parentesar gjerast tidleg i matematikkundervisinga, slik at parentesane vert eit naturleg verkty i løysing av enkle aritmetiske oppgåver. Ho føreslår ein måte å gjere dette på ved at læraren presenterer elevane for eit uttrykk som $3 \times 5 = 15$ så kan ein byte ut talet 5 med $3 + 2$, slik at ein får $3 \times 3 + 2 = 15$. Elevane vil no sjå at verdien på venstre sida av likskapsteiknet ikkje kan ha endra seg. Men når dei reknar frå venstre mot høgre, vil dei erfare at utrykket ikkje lengre stemmer. Denne naturlege konflikten kan læraren nytte seg av, ved å vise elevane at einaste måten å oppretthalde balansen i uttrykket er å setje inn parentesar og skape uttrykket $3 \times (3 + 2) = 15$. Ved å utvikle elevane si forståing for bruken av parentesar i aritmetikken kan ein basere bruken av parentesar i algebra på dette, og dermed vert det eit naturleg steg vidare i eleven si utvikling av matematisk forståing (Welder, 2012).

5.2.2 Førebygging av misoppfatningar kring likskapsteiknet

For å løyse oppgåvene med likning og likningssett bør elevane ha korrekt forståing av likskapsteiknet. Elevar som framleis ser på likskapsteiknet som eit utførande teikn, kan få problem med desse oppgåvene. For å skape ei slik forståing av likskapsteiknet kan det vere lurt å samanlikne det med ei skålvekt. Dette vert også ofte gjort i undervisingen. Men, som Welder (2012) påpeikar, denne måten å sjå likskapsteiknet på vert ofte introdusert samtidig med algebraen. Dette kan skape ei misoppfatning om at dette er ein ny situasjon, uavhengig av elevane sine tidlegare erfaringar med aritmetikk (Welder, 2012).

Kieran (1981) meiner at dersom ein arbeider mot å skape den rette forståinga for likskapsteiknet frå byrjinga, medan elevane lærer seg grunnleggjande aritmetikk, vil ein kunne skape ein intuitiv forståing for likningar. Ho føreslår at lærarar unngår å nytte feilaktig ordbruk rundt likskapsteiknet i undervisninga. Døme på feil ordbruk kan vere at ein les «blir», som i «tre pluss tre *blir* seks». I staden for bør ein nytte ord som fremjar rett forståinga hjå elevane, som «er det same som» eller «er lik» (Kieran, 1981). Welder (2012) viser til ein metode brukt i kinesiske lærebøker i matematikk. Der vert ikkje elevane introdusert for dei formelle symbola $=, > og <$, før dei har fått ei god forståing av dei uformelle uttrykka «det same som / er lik», «større enn» og «mindre enn» (Welder, 2012).

I tillegg til å vere bevisst på språket ein nyttar i undervisninga, er det fleire øvingar som kan nyttast til å fremje god forståing av likskapsteiknet. Ein enkel metode er å presentere elevane for ei rekkje uttrykk med likskapsteiknet i, og be dei avgjere om uttrykka er sanne. Dersom ein byrjar med eit enkelt standaruttrykk som $3 + 5 = 8$, kan ein utvide dette via $8 = 3 + 5$ for så gradvis auke kompleksiteten til $5 + 3 = 3 + 5$ og vidare til $3 + 5 = 6 + 2$. Når elevane arbeider med slik oppgåver vert dei meir medvitne om likskapsteiknet si tyding (Welder, 2012).

Typiske feil elevane gjer, som føring av trådar av typen $3 + 8 = 11 - 2 = 9 + 5 = 14$, bør også nyttast aktivt av læraren i undervisninga. Ved å ta tak i feilen der og då, og nytte den til å diskutere likskapsteiknet sin tyding med eleven, kan noko som i utgangspunktet var feil verte til noko positivt (Welder, 2012).

Mange lærarar er medvitne om, og bruker, både desse og andre metodar som fremjar god forståing for likskapsteiknet. Denne praksisen er kanskje ein medverkande årsak til at elevane gjorde det forholdsvis bra på oppgåve 1, løysing av likning.

Resultatet viser at det er stor forskjell på elevane sine prestasjonar på oppgåve 1, løysing av likning, og oppgåve 4, løysing av likningssett. Så deler av forklaringa kan og liggje i at løysing av enkle likningar er noko som vert arbeida mykje med i grunnskulen, og elevane er derfor godt kjent med denne typen oppgåver. Løysing av likningssett vert introdusert seinare, på 9. eller 10.trinn, og elevane har derfor ikkje så mykje øving i denne typen oppgåver. Løysing av likningssett vil derfor også verte oppfatta som ei vanskelegare oppgåve, og fleire elevar vil vegre seg for å løyse den, noko som kan forklare kvifor så mykje som 63 % av elevane fekk null poeng på oppgåva.

5.2.3 Førebygging av misoppfatningar kring operasjonelle symbol

I oppgåve 2 på kartleggingsprøven skal elevane løyse det reine algebraiske uttrykket $3a - (2b + a) - 4b$. Denne oppgåva viste seg å by på problem for 60 % av elevane. Av desse hadde nær 33 % null poeng. Det tolkar eg som om det er mange misoppfatningar og vanskar blant elevane når det gjeld løysing av algebrauttrykk. Nokre av desse problema kan vere knyta til bruken av dei operasjonelle symbola.

Dersom elevane ikkje har rett forståing for bruken av dei operasjonelle symbola $+$ og $-$ i uttrykket, vil det kunne føre til problem. I *Rettleiing til algebra*, skriv Brekke, Grønmo og Rosén (2000) at elevane må vite korleis subtraksjon fungerer for å forstå kva som skjer i uttrykk som $-(b - c) = (a - b) + c$. Dersom elevane har god kunnskap og forståing for rekneoperasjonane i aritmetikken, kan dei dra nytte av det i algebraen. Gode øvingar for å lære dette er oppgåver som gjer elevane i stand til å sjå at når dei subtraherer ein mindre, så vert svaret ein større. Som til dømes i uttrykket $10 - (5 - 1) = (10 - 5) + 1$ (Brekke, Grønmo og Rosén, 2000). Dersom elevane har god forståing for dette, vil dei ha betre føresetnader for å kunne løyse opp parentesuttrykket i oppgåva på kartleggingsprøven.

Elevane må også ha forståing for at $-2b - 4b$ vert $-6b$, dette har eg erfart at fleire elevar på vidaregåande nivå framleis slit med å forstå. Problemet ser for meg ut til å vere knytt både til negative verdiar og til overgangen mellom positive og negative verdiar. Meir enn ein gong har eg opplevd elevar som meiner at $-2b - 4b = 2b$. Desse elvane har ikkje utvikla ei rett forståing kring dei ulike tydingane og bruken av $-$ teiknet. Og eg har forstått det slik, på mine elevar, at det er to ulike misoppfatningar ute og går i slike tilfelle. Den eine dreiar seg om at subtraksjon alltid vil gå mot 0. Sidan $2b - 4b = -2b$ meiner desse elevane at motsett vert $-2b - 4b = 2b$. Den andre verkar som om den kjem frå ei misforståing, eller forplanting av bruken, av regelen ved multiplikasjon av to negative tal, *minus og minus gir pluss*. Og då er me tilbake til kor viktig det er å vere bevisst på korleis ein nyttar språket i undervisninga.

5.2.4 Førebygging av misoppfatningar kring bokstavar

Oppgåve 2 har fleire utfordringar å by på enn dei operasjonelle symbola. Og når det gjeld denne oppgåva, kan teksten som skal rettleie eleven i løysinga av oppgåva, vere den fyrste utfordringa. Over uttrykket står det «rekn ut:», men sidan dette er eit reint algebrauttrykk, kan denne ordlyden virke villeiande på enkelte elevar. For mange elevar kan orda «rekn ut» verte tolka som eit signal om at dei skal ende opp med berre eitt ledd i svaret. Dersom det hadde stått *trekk saman* eller *trekk saman og skriv enklast mulig,* kunne nokre av desse elevane fått eit hint om at det ikkje nødvendigvis er berre eit ledd i svaret.

Elevar som har vanskar som nemnt ovanfor, kan ha misoppfatningar rundt bruken av bokstavar i algebraen. Dei ser ikkje at bokstavane står for generelle tal eller variablar. Tidlegare forsking viser at elevar sine misoppfatningar rundt bokstavane i algebra som regel byggjer på tidlegare erfaringar med bokstavar i aritmetikken (Kieran, 2007). Welder (2012) meiner at mykje av dette kan førebyggjast ved å vere bevisst bokstavbruken i algebra allereie ved matematikkundervisninga på barnetrinnet.

Opp i gjennom grunnskulen møter elevane ein inkonsekvent bruk av bokstavar i matematikken. Døme på bokstavbruk på barnetrinnet kan vere; nummerering, forkortingar og einingar. Dersom elevane i byrjinga må skrive *tre meter* i staden for $3\ m$ eller *Arealet er lik lengda multiplisert med breidda* i staden for $A = l \times b$, før dei får gå over til den forkorta varianten, kan det vere med på å bevisstgjere dei rundt bruken av forkortingar. Sameleis må dei ved introduksjon til algebra byrje med å skrive verbale tolkingar av uttrykka. Til dømes ved introduksjon av likningar, ein kan då tolke uttrykket $y = 25x$ verbalt som; summen y sparte kroner er lik 25 kroner per veke multiplisert med x tal veker ein sparar. I byrjinga kan ein også nytte andre bokstavar i uttrykka, som $S = 25v$, for å lette overgangen for elevane (Welder, 2012). Ein svakheit ved denne metoden kan vere vanskane det vil føre til for verbalt svake elevar og elevar med lese og skrivevanskar. Eg tenkjer at eit naturleg og aktuelt alternativ til skriving vil vere munnleg aktivitet, i klassen eller mindre grupper, fordelsvis styrt av pedagog.

Ein annan metode som kan nyttast ved introduksjon til bruken av bokstavar som variablar, er å byggje på elevane si talforståing. Dersom ein tek utgangspunkt i eit aritmetisk uttrykk som elevane er kjent med og forstår tydinga av, kan ein byggje bru over til algebraen ved å bytte ut tal, fyrst med symbol, og sidan med bokstavar. Eit døme på denne metoden kan vere oppgåva $8 + 3 - 3 = 8$. Ved å fyrst bytte ut 3-tala med eit symbol, $8 + \blacksquare - \blacksquare$, kan ein til slutt setje inn ein bokstav $8 + a - a = 8$. Tidlegare forsking viser at denne metoden kan hjelpe elevar på grunnskulenivå til byrjande forståing av variabel omgrepet (Welder, 2012).

Vanlege misoppfatningar kan også nedkjempast meir målretta i undervisninga ved å gi elevane oppgåver / problem som ein veit vil utløyse desse misoppfatningane, og så ta tak i problema når dei oppstår. Til dømes vil ei oppgåve som: *Er uttrykket:* $a + b + c = a + f + c$ *alltid sant, nokon gonger sant eller aldri sant?* adressere misoppfatninga om at to ulike bokstavar / variablar i eit uttrykk aldri kan ha den same verdien (Welder, 2012).

For å skape forståing for at bokstavane kan representere ulike variablar kjem me ikkje utanom bruken av det verbale språket i undervisninga. Både læraren sin ordbruk i undervisninga, og elevane sine evner til å setje ord på og omsetje mellom situasjon og algebraisk uttrykk og omvendt, er viktig i denne samanhengen. Brekke, Grønmo og Rosén (2000) stiller derfor spørsmål ved dagens tradisjonelle praksis, der mykje undervisningstid vert nytta til å manipulere symbol. Deira syn er at det bør vere meir fokus på representasjon og tolking av variablar og storleikar. Dei har og funne at elevane finn det vanskelegare å omsetje frå algebra uttrykk til situasjon, enn omvendt. Dette kan kome av at det bli arbeida lite med den typen oppgåver.

5.3 Funksjonar

Å lese grafar, tolke funksjonar og sjå samanhengen mellom desse, ser eg på som eit av dei viktigaste temaa innanfor skulematematikken. Hovudsakleg fordi dette er kunnskapar dei aller fleste av oss vil ha stor nytte av og trong for, både i dagleglivet og yrkeslivet. Men også fordi konseptet funksjonar er vesentleg i forståinga av matematikk (Clement, 2001). Som lærar i matematikk på ein vidaregåande skule ser eg ofte at elevane si forståing av funksjonar er overflatisk eller bygt på misoppfatningar. Når dei byrjar på Vg. 1 er det fleire som ikkje har forstått koordinatsystemet, og mange ser ikkje samanhengen mellom funksjonsuttrykket og grafen. Det svake resultatet på oppgåvene om funksjonar på kartleggingsprøven viser også dette. I oppgåve 6 skulle elevane teikne grafen til eit enkelt lineært funksjonsuttrykk i eit ferdig koordinatsystem. Og i oppgåve 7 kunne dei få poeng ved å nytte funksjonsuttrykket til å fylle ut tabellen, eller plotte inn ferdige punkt som allereie var oppgitt i tabellen. Likevel får 44 % av elevane null poeng på begge desse oppgåvene. I fylgje kompetansemåla i læreplanen skal elevane, når dei går ut av grunnskulen, kunne:

- *lage, på papiret og digitalt, funksjonar som beskriv numeriske samanhengar og praktiske situasjonar, tolke dei og omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar, som grafar, tabellar, formlar og tekst.*
- *identifisere og utnytte eigenskapane til proporsjonale, omvendt proporsjonale, lineære og enkle kvadratiske funksjonar, og gje døme på praktiske situasjonar som kan beskrivast med desse funksjonane*

(Utdanningsdirektoratet, 2006)

Når me veit at elevane skal ha arbeida mykje med funksjonar i grunnskulen, og kanskje også fått greie resultat i matematikkfaget, må ein kunne seie at det svake resultatet på oppgåvene om funksjonar på kartleggingsprøven, er i tråd med Knuth (2000) sine konklusjonar. I sin studie av amerikanske elevar si forståing av samanhengen mellom dei ulike framstillingsmåtane av funksjonar, konkluderte han med at elevar som tilsynelatande synte forståing av desse samanhengane berre hadde ei overflatisk forståing. Elevar som kan lage ein tabell og teikne ein graf ut i frå eit gitt funksjonsuttrykk, har ikkje nødvendigvis forståing for det dei gjer.

Knuth (2000) si forsking vaks fram frå uroa over eigne elevar si manglande forståing for samanhengen mellom dei ulike framstillingsmåtane til funksjonar. I si undersøking fann han at når elevane vart presentert for eit lineært funksjonsutrykk i likningsform og grafen til uttrykket, og blei spurt korleis dei kunne finne ei løysing på likninga, var det berre ein av tretti elevar som nytta grafen. Alle dei andre prøvde å finne ei løysing ved hjelp av algebra. Heller ikkje når det i neste del av oppgåva vart spurt etter ein alternativ metode til den dei nytta, klarte elevane å sjå samanhengen mellom funksjonsuttrykket og grafen, men prøvde å komme opp med andre alternative løysingar. Knuth (2000) fann dette svært urovekkande. Han skriv mellom anna at: «Given the level of the students, the number of responses that did not make sense was alarming» (Knuth, 2000, s.50).

5.3.1 Korleis førebyggje misoppfatningar kring funksjonar

I sin artikkel *«Helping students connect functions and their representations»* gjer Moor-Russo og Golzy (2005) greie for bakgrunnen til at dei endra innfallsvinkelen til funksjonar og grafar i si undervisning. Dei grunngjev sine nye innfallsvinklar og bruken av dei, og deler erfaringane dei gjorde seg. Moor-Russo og Golzy (2005) skriv at når dei underviste i funksjonar og grafar på tradisjonell måte, opplevde dei at elevane ikkje såg samanhengen mellom funksjonsuttrykket og den grafiske framstillinga, men såg på funksjonsuttrykket og grafen som to avskilde einingar. Elevane var så opptekne av å finne løysingar ved hjelp av funksjonsuttrykket at dei byrja sjå grafen som ei linje gjennom tre fire punkt og ikkje ein gong vurderte den som aktuell i arbeidet med å finne løysingar. At grafen kunne gje eit visuelt bilete av korleis funksjonen ville opptre, tok dei ikkje med vurderinga (Moor-Russo og Golzy, 2005).

Sjølv om oppgåvene Moor-Russo og Golzy (2005) gav sine elevar ikkje inn går i pensum til våre elevar, er hovudtanken med deira metode verd å ta med seg. Erfaringa deira tilsa at elevar likar best å arbeide med numeriske tal og symbol, og at elevane byrja å nytte symbol før dei fullt ut forstår tydinga til desse symbola. Derfor bestemte Moor-Russo og Golzy (2005) seg for å presentere elevane for dei grafiske løysingane fyrst, framfor dei algebraiske. Deira erfaring med den nye innfallsvinkelen er at når elevane fyrst har funne ei grafisk løysing, er dei i betre stand til å forstå den algebraiske løysinga. I tillegg såg det ut til at elevane no også forstod samanhengen mellom funksjonsuttrykket og grafen betre. Moor-Russo og Golzy (2005) meiner dette kan botne i at den algebraiske løysinga kan vere rask å utføre, og derfor verkar enkel. Elevane kan derfor utføre den utan å måtte tenkje over kva symbola representerer. Slik er det ikkje med den grafiske tilnærminga, då må elevane tenkje over kva grafen representerer og korleis dei kan lese løysinga ut av den (Moor-Russo og Golzy, 2005).

Mi erfaring seier at ei vanlig tilnærming til funksjonar er at elevane vert presentert for eit lineært funksjonsuttrykk, så vert dei bedne om å lage tabell, for så å plotte inn punkta i eit koordinatsystem. Dette kan vere med på å skape dei vanskane elevane har med å sjå samanhengar den andre vegen, frå graf til funksjonsuttrykk.

Koordinatsystemet og enkle likningar vert no introdusert for elevane på mellomtrinnet, og funksjonar på ungdomstrinnet. Slik eg ser det er det ved introduksjonen av eit tema at grunnlaget for forståing vert lagt. Ved å adressere mulege misoppfatningar allereie ved introduksjonen av temaa, vil ein kanskje kunne førebyggje mange av problema elevane slit med når dei går ut av grunnskulen. Elevane må tidleg lære seg å sjå samanhengen mellom dei ulike framstillingsmåtane til funksjonar, kanskje før dei lærer seg å løyse algebraisk eller grafisk. Gjone (1997) føreslår i *«Rettleiing til funksjonar»* nokre undervisningsaktivitetar som vil verke førebyggjande mot ulike misoppfatningar.

Forståing for koordinatsystemet ligg i botnen for evna til å lese grafar. Derfor er det viktig å leggje til rette for god forståing av dette allereie frå starten av. Ei vanleg misoppfatning kopla til koordinatsystemet er at jo høgare i systemet eit punkt er, jo høgare er det i verkelegheita. Til dømes vil desse elevane ha vanskar med å plassere personar av ulik høgd og ulik alder rett i eit koordinatsystem som har høgd på 1.akse og alder på 2. akse (Gjone, 1997). Å la elevane arbeide med slike grunnleggjande oppgåver i byrjinga, kan hjelpe på forståinga deira. Også oppgåver der elevane skal tolke eit punkt i koordinatsystemet vil kunne styrke denne forståinga. Eit døme på ei slik oppgåve kan vere å ha høgd langs x-aksen og alder langs y-aksen, merke av eit punkt i koordinatsystemet, og spørje elevane om kva dette fortel oss om ein gitt person. Denne typen oppgåver kan aukast i kompleksitet, i takt med elevane si utvikling.

Mange elevar ser grafen som eit bilete av situasjonen. Ved å presentere elevane for ulike grafar og diskutere i klassen kva situasjon grafane viser, kan ein få fram og korrigere denne misoppfatninga tidleg. Det vil vere ein fordel å nytte grafar som kan ha fleire ulike situasjonar som løysing, då det vil gi fleire innfallsvinklar og betre grunnlag for diskusjon (Gjone, 1997).

Neste steg kan vere å presentere elevane for eit utval grafar, og tilhøyrande setningar som skildrar situasjonane grafane viser, og så la elevane finne rett graf til rett situasjon. Her er det viktig at elevane må grunngje vala sine. Dersom grafane vert presentert utan einingar, stig vanskegraden. Då bør elevane setje inn einingar i grunngjevinga si (Gjone, 1997).

Ved å be elevane lage tabellar til grafar utan einingar på aksane, får dei trening i å gå frå graf til tabell, men også ei forståing av kor viktig det er med rette og nøyaktige einingar på aksane (Gjone, 1997). Dersom ein set fleire elevar til å løyse same oppgåve, vil ein her få ulike svaralternativ, noko som gir ein god bakgrunn for diskusjon rundt aksar og einingar.

Sidan alle elevar no har tilgang til digitale hjelpemidlar, som PC, i skulekvardagen, bør også desse nyttast i førebygginga av missoppfatningar. Det finst fleire program som eignar seg til dette. Eg kan her nemne Graph og Geogebra, som er to døme på gratisprogram til å laste ned. I desse programma kan ein ved å endre på funksjonsuttrykket sjå korleis grafen endrar seg, eller ved å dra i grafen sjå korleis funksjonsuttrykket endrar seg. Læraren kan vise dette på projektor eller smart Board, og elevane kan utforske sjølve på sine eigne PC-ar. Bruken av slike program kan hjelpe på forståinga av samanhengen mellom funksjonsuttrykk og graf.

I media er det ein utstrakt bruk av grafar og diagram, basert på koordinatsystemet, til å formidle informasjon. Kvaliteten på desse er varierande. Av og til er den god, men ofte er dei misvisande. For eldre elevar kan de vere god læring i å verte konfrontert med ulike døme frå media, i undervisninga. Både korrekte og misvisande døme kan danne grunnlaget for diskusjon og læring, og bevisstgjere elevane på kor viktig det er med god forståing av funksjonar.

5.3.2 Andre faktorar som kan verke inn

Funna mine viser tydeleg at for mange elevar ikkje har den ynskte måloppnåinga i temaa algebra og funksjonar når dei tek til på vidaregåande skule. Eg har i hovudsak sett på kva typar misoppfatningar hjå elevane som kan liggje bak dette. Men det er sjølvsagt andre faktorar som kan verke inn på elevane sine prestasjonar også. Under vil eg diskutere nokre av desse, basert på eigne og kollegaar sine erfaringar.

Ein faktor som kan vere medverkande årsak til dei låge prestasjonane er storleiken på matematikkpensumet i ungdomsskulen. På desse tre åra er det eit stort pensum, og elevane vert presentert for mykje nytt. Eg har fleire gonger høyrt matematikklærarar på ungdomstrinnet uttrykkje uro over at det blir for mykje å gå gjennom på for lita tid. Då kan det fort skje at elevar som treng litt tid for å forstå, ramlar av lasset, og det oppstår hol i forståing og ferdigheiter.

På den andre sida har du verdiane i den norske fellesskulen, der det er eit mål at alle skal gjennom det same pensumet på den same tida. Samtidig har elevane krav på tilpassa opplæring. Dette gjelder alle elevar, både fagleg sterke og fagleg svake. Men i praksis, i ein travel kvardag med store klassar, kan det vere vanskeleg å legge til rette for alle. Resultatet kan i nokre tilfelle verte at det ikkje vert teke nok omsyn til dei fagleg sterke, og undervisninga fylgjer eit tempo tilpassa majoriteten i gruppa, eller i verste fall dei fagleg svakaste. Dette kan igjen føre til at tida ikkje strekk til, og noko av pensum ikkje vert gjennomgått med gruppa.

Samtidig vil eg tru det ikkje alltid er så lett å undervise i matematikk på ungdomsskulen. Dei fleste ungdomsskulane får elevar frå fleire ulike barneskular, akkurat som ein på vidaregåande får elevane frå ulike ungdomsskular. Og nivået på desse elevane vil nok variere minst like mykje som når vidaregåande overtar dei tre år seinare. For om det vert stilt krav til matematikkutdanning for lærarane som underviser faget på vidaregåande og ungdomsteget, så er ikkje det alltid tilfelle for lærarane som underviser i matematikk på barne- og mellomsteget. Og då er me tilbake ved det som eg har nemnt fleire gonger før, at det ved introduksjonen av ulike tema er svært viktig å vere bevisst både på bruken av språket og kva typar misoppfatningar som kan oppstå rundt tema.

Til sist vil eg ta med ei vurdering rundt eigne erfaringar med a-ha opplevingar hjå elevar i undervisninga. For det er eit tankekors at lærarar på ungdomsteget slit med å undervise i enkelte tema, fordi elevane finn det vanskeleg / ikkje forstår, men når eg går gjennom det same temaet på vidaregåande, så går det plutseleg eit lys opp for dei same elevane. Eg trur så absolutt ikkje dette har noko med mi undervisning å gjere, men snarare at det har skjedd ei modning hjå eleven. Det er ei kjent sak at alle modnast ulikt. Kan det då vere slik at enkelte elevar ikkje har forutsetningar til å forstå heile pensum på ungdomsteget, fordi dei ikkje er modne nok?

5.4 Drøfting av metodeval

Denne oppgåva vaks fram frå mi interesse for og undring kring hol og manglar i elevane sine matematikkunnskapar, når dei tek til med vidaregåande. Den vaks ut i frå mi erfaring, og det var derfor naturleg for meg å nytte data frå kartleggingsprøven som er utvikla ved skulen der eg arbeider, både fordi eg då hadde tilgang til store mengder ferdig innsamla data, og fordi eg vurderte prøven som dekkande for det eg ville undersøkje.

No i ettertid kan ein diskutere om dette var eit klokt val, eller ikkje. Under arbeidet har eg oppdaga fleire ting å setje fingeren på, både ved prøven og ved datamaterialet mitt. Målet var å få eit datamateriale som dekka alle studieretningar, og dermed var representativt for heile elevmassen ved Sogndal vidaregåande skule. Samtidig ynskte eg at oppgåvene på prøven skulle gje eit godt bilete av elevane sine ferdigheiter i dei aktuelle temaa.

Det har vore klart tidssparande å nytte ferdig innsamla data, ferdig retta og sett i system av mine kollegaer. Og eg har fått eit langt større datamateriale enn om eg skulle ha samla inn alt sjølv. Men i og med at eg baserte meg på allereie haldne prøvar, vart eg prisgitt andre lærarar sine val om prøven skulle nyttast eller ikkje. Dette gjeld yrkesfaglege studieretningar, då studiespesialiserande og idrettsfag alltid må ta prøven.

Under arbeidet med oppgåva har eg også avdekka svakheiter ved oppgåvene i prøven. Oppgåvene dekka ikkje alle kompetansemåla under algebra og funksjonar i læreplanen. Nokre kompetanse mål vert godt dekka, som punktet om likningar. Medan berre små deler av punktet om algebra vert dekka. Sameleis er det berre deler av punkta om funksjonar som vert dekka av oppgåvene på prøven. Samtidig gir måten oppgåvene er utforma på eit avgrensa bilete av elevane sine ferdigheiter. Det hadde vore interessant om oppgåvene kunne sagt oss noko meir om korleis elevane tenkjer rundt problemstillingane, ikkje berre om dei beherskar enkelte utrekningsmetodar.

Om eg hadde utarbeida eigne oppgåver som eksplisitt var meint å avdekke misoppfatningar og andre vanlege feiltypar innan algebra og funksjonar, så kunne eg fått meir kunnskap om korleis elevane tenkjer og kva misoppfatningar dei lir av. Då hadde det også vore lettare å adressere dei ulike problema og vanskane i etterkant. Ulempa ved ein slik arbeidsmetode er at den er svært tidkrevjande. Eg hadde då måtta vente eit år på å få samla inn eigne data, kanskje to, dersom eg ynskte meir enn eitt årskull i datamaterialet. Og i tillegg til å lage dei tilpassa oppgåvene, måtte eg då ha sett til at prøven vart gjennomført i alle klassar, samt retta alle prøvane sjølv.

Valet av litteraturen eg las og forskinga eg nytta meg av for å svare på den andre problemstillinga mi, kan diskuterast. Eg las og studerte langt fleire artiklar og forskingsresultat enn det eg har nytta her. Utvalet gjorde eg ut i frå kva tema eg fann mest relevant for våre forhold og pensum til elevane våre, samtidig som eg valde ut tema og konklusjonar som det verka til å vere brei semje om. Eg la også vekt på å støtte meg mest muleg til arbeidet av anerkjente fagpersonar. Dette utvale kunne sikkert vore annleis, og det vil vere mange ulike meiningar om kva som burde vore med, eller ikkje burde vore med. Men ut i frå mine vurderingar så vart det slik.

6 Oppsummering og konklusjon

Då eg byrja å arbeide med denne oppgåva var det fordi eg ynskte å finne ut meir om korleis Vg.1 elevane sin prestasjonar i algebra og funksjonar samsvara med måla i læreplanen etter 10. trinn. Eg undra meg på kva som skaper eventuelle vanskar for elevane, og korleis me som lærarar kan hjelpe dei til betre prestasjonar og forståing innan desse temaa. Under dette arbeidet har eg sett meg inn i ulike missoppfatningar og vanlege feiltypar som elevane kan ha innan algebra og funksjonar. Og eg har analysert prøvesvara frå 335 elevar på Vg.1 for å sjå kvar dei har størst vanskar. I dette kapittelet vil eg fyrst forsøke å opp summere kva eg har funne, før eg vil dra ein konklusjon av arbeidet mitt.

6.1 Oppsummering

Temaa algebra og funksjonar ser ut til å by på utfordringar for elevar over heile verda. Eg har funne forsking og artiklar om elevar sine vanskar med desse temaa frå dei fleste kontinenta. Ut i frå desse artiklane og forskingsrapportane har eg trekt fram nokre felles punkt, som dei fleste ser ut til å einast om.

Det eine er elevane sine vanskar rundt algebra og tekstoppgåver. Der kan det sjå ut til at lærarane og lærebokforfattarane ikkje verkar å vere heilt på linje med elevane. Elevane har ei anna oppfatning om kva som byr på mest problem innan algebraoppgåver enn lærarane, som ser ut til å ha fått si oppfatning i frå oppbygginga av lærebøkene. Men dersom me ser bort i frå tekstoppgåver, så er det også fleire utbreidde misoppfatningar knytt til elevane si forståing av algebra. Desse misoppfatningane kan vere knytt til ulike element innan algebraen, og ha rot i ulike periodar av eleven si tidlegare læring.

Innan temaet funksjonar er det stor semje om at omsetjing mellom dei ulike representasjonane til ein funksjon, slik dei er framstilt i tabellen til Janvier (1978), er ein vesentleg del av eleven sin kompetanse. Og dette er også eit av kompetansemåla etter 10. trinn, i læreplan for matematikk. Samtidig ser dette ut til å vere eit utbreidd problem. Elevane har ei overflatisk forståing av funksjonsomgrepet, og klarar ikkje å omsetje mellom dei ulike representasjonane, slik ein ynskjer. Samtidig så er det, også innan funksjonar, fleire utbreidde misoppfatninga hjå elevane. Fleire av desse kan kome frå mangelfull forståing av koordinatsystemet, eller funksjonsomgrepet, og dei kan botne i tidlegare erfaringar hjå elevane.

Analyse av elevsvara på kartleggingsprøven viser at elevane sine prestasjonar ikkje er i tråd med læreplanmåla etter 10. trinn, i temaa algebra og funksjonar. Elevane presterer svakt på alle oppgåvene innan temaa, best resultat er det på løysing av ei enkel likning, der 63 % av elevane løyser likninga feilfritt. Sidan eg ikkje har så mange elevsvar tilgjengeleg, men berre retteskjemaa, kan eg ikkje seie så mykje om typen feil som vert gjort.

Eg ynskte også å finne ut kva me kan gjere for å betre situasjonen og gje elevane auka forståing for temaa algebra og funksjonar. Her er det fleire ting som vert trekt fram i tidlegare forsking og litteratur. Innan algebra kan ein arbeide meir ut i frå elevane sine intuitive løysingsmetodar, og byggje vidare på desse (Nathan og Koedinger, 2000). Ein bør også vere svært nøyen på språkbruken i matematikkundervisninga allereie frå byrjinga, for å unngå misoppfatningar knytt til tydinga av dei ulike komponentane i algebrauttrykka. Ved rett innlæring av det grunnleggjande i matematikken, kanskje allereie på småskulen, legg ein grunnlaget for ei god forståing av algebra seinare i løpet. Derfor bør lærarar både i barneskulen og ungdomsskulen vere merksame på dette.

For å betre elevane si forståing av funksjonar, verkar det som om ei brei tilnærming kan vere lurt. Elevane må få erfaringar med dei ulike representasjonane til ein funksjon, og dei må få trene seg i å tolke dei ulike formene og omsetje mellom dei. Ut i frå det eg har lest av tidlegare forsking, ser det ut til at ei praktisk tilnærming vil kunne skape større forståing enn reine teoretiske oppgåver.

6.2 Konklusjon

Gjennom undersøkinga mi har eg funne at prestasjonane innan algebra og funksjonar hjå elevar som tek til på Vg.1 ved Sogndal vidaregåande skule, ikkje er i samsvar med kompetansemåla i læreplanen for 10. trinn. I samtlege kompetansemål som eg har undersøkt, presterer elevane svakare enn ein bør kunne forvente.

Gjennom studie av litteratur og tidlegare forsking har eg funne at tidlegare undervisning kan ha noko å seie for elevane si forståing for algebra og funksjonar. Ved å undervise med tanke på desse temaa allereie frå småskulen, vil ein kunne førebyggje mange av misoppfatningane hjå elevane på eit tidleg tidspunkt. Dersom misoppfatningar har oppstått, er det viktig å vere medviten om at desse finst, og adressere dei i undervisninga.

Generelt for temaa algebra og funksjonar ser det ut til å vere brei semje blant forskarar på emnet, om at ei praktisk og variert tilnærming vil vere ein fordel for å skape betre forståing hjå elevane.

Til slutt vil eg slå fast at undersøkinga mi ikkje seier noko om kva type misoppfatningar elevane i datamaterialet mitt har, eller ikkje har. Og at dette så absolutt hadde vore interessant å finne ut av, ved eit seinare høve.

Litteraturliste

Befring, E. (2007). *Forskingsmetode med etikk og statistikk*, 2.utgåve. Oslo: Samlaget.

Bjørkeng, B. (2011). *Jenter og realfag i videregående opplæring* (Rapport nr. 3/2011). SBB Henta frå: http://www.ssb.no/a/publikasjoner/pdf/rapp_201103/rapp_201103.pdf

Brekke, G. (1995) *kartlegging av matematikkforståing. Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Brekke, G., Grønmo, L.S., & Rosèn, B.(2000) *Kartlegging av matematikkforståing. Rettleiing til algebra. F, H og J.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Clemet, L. (2001). What do students really know about functions? *The mathematics teacher.* Vol. 94, No. 9 (2001)

Gjone, G. (1997). *Kartlegging av matematikkforståing. Rettleiing til funksjonar. E,G og I.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Grimen, H. (2004). *Samfunnsvitenskaplige tenkemåter.* Oslo: Universitetsforlaget.

Katz, V. J. (2007). Stages in the history of algebra whit implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics* (2007) 66, s.185-201, DOI:10.1007/10649-006-9023-7

Kieran, C. (1981). Consepts associatetwith the equality symbol. *Educational Studies I Mathematics,* 12, 317 – 326

Kieran, C. (2007). *What do students struggle with when first introduced to algebra symbols?* Reston: National council of teachers of mathematics, algebra research brief. (2007)

Knuth, E.J. (2000). Understanding connections between equations and graphs. *The mathematics teacher.* Vol. 93, No. 1 (2000) s.48-53

Kunnskapsdepartementet. (2010). *Ny GIV- gjennomføring i videregående opplæring.* Henta frå:

http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/kampanjer/ny-giv.html?id=632025

Moor-Russo, D. & Golzy, J.B. (2005). Helping students connect functions and their representations. *Mathematics teacher,* 99/3, 156-160

Nathan,M. & Koedinger, K. R. (2000). Moving beyond Teachers' Intuitive Beliefs about Algebra Learning. *The mathematics teacher, Vol. 93*, No. 3 March 2000 (2000), s. 218-223

Rambøl Managment (2007). *Realfag, naturligvis - evaluering av strategiplanen, sluttrapport 2007*. Henta frå: http://www.udir.no/Upload/Rapporter/5/Realfag_naturligvis_evaluering_sluttrapport.pdf

Ringdal, K. (2007). *Enhet og mangfold. Samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode,* 2. utgave. Bergen: Fagbokforlaget.

Skaalvik, E.M. & Skaalvik, S. (2005). *Skolen som læringsarena. Selvoppfatning, motivasjon og læring.* Oslo: Universitetsforlaget.

Thorvaldsen, S. (2002). Matematisk kulturhistorie. *Artikkelsamling.* Tromsø. Eureka forlag, Høgskolen i Tromsø.

Utdanningsdirektoratet.(2006). *Læreplanverket for kunnskapsløftet*. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Utdanningsdirektoratet. (2006), Læreplan i matematikk fellesfag. Henta frå http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/

Welder, R. M. (2012). Improving Algebra Preparation: Implications From Research on Student Misconceptions and Difficulties. *School science and mathematics.* Vol 112, numb 4 (2012), 255-264.