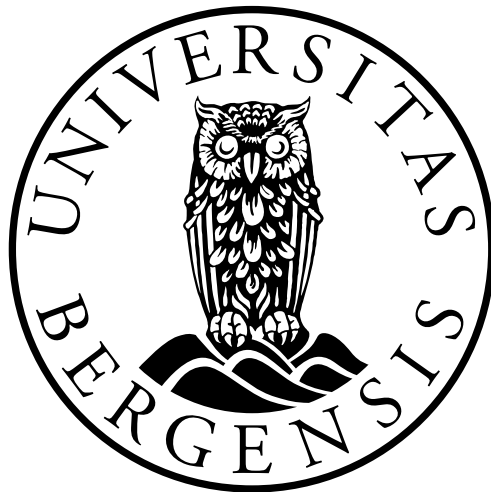


Simulering av grunne geotermiske systemer med naturlig konveksjon i borehull



Joel Dyrhovden

Avdeling for matematikk
Universitetet i Bergen

Mastergradsoppgave i
andvendt og beregningsorientert matematikk

Forord

I dette øyeblikk er det minutter igjen til min masteroppgave leveres. Beskrivende ord på den følelse jeg nå besitter må sies å være, euforisk lettelse. Jeg vil takke mine veiledere Inga Berre og Jan Kocbach for gode innspill til oppgaven. I tillegg vil jeg takke studiekolleger og venner for hyggelig fellesskap underveis i studiet. Takk til mamma og pappa som har gitt meg god støtte i tider der motivasjonen har blitt i mot. Takk til mine tre søsken Sigve, Ruben og Mirjam for støtte, korrekturlesing og teknisk hjelp i forbindelse med oppgaven.

“I ain’t about how hard you hit. It’s about how hard you can get hit and keep moving forward.”

Sammendrag

Introduksjon: Grunne geotermiske systemer benyttes til oppvarming og kjøling av husholdninger og større bygg. I etableringsfasen av slike systemer anvendes det modelleringsverktøy for å beregne optimal dimensjonering av systemet, slik at det opprettholdes en balanse mellom oppvarming og kjøling over lengre tid. En underdimensjonert brønnpark vil over tid føre til at det må suppleres med alternative energiløsninger. Motsatt vil en overdimensjonert brønnpark gi større etableringskostnader enn nødvendig. En programvare som brukes for å beregne optimal dimensjoneringen av anlegget er det semi-analytiske simuleringsverktøyet pygfunction.

Pygfunction er laget for forhold der borehullet er fylt med fyllmasse. I grunnvannsfylte borehull, som er det vanlige i brønnparker i Norge, vil det oppstå naturlig konveksjon i borehullet. Pygfunction tar dermed ikke hensyn til denne faktoren i sine beregninger. I denne oppgaven gjøres en matematisk beskrivelse av prosessen i og rundt et borehull, som ligger til grunn for simuleringsverktøyet pygfunction. Pygfunction modifiseres til å inkludere naturlig konveksjon i simuleringene for et borehull bestående av en enkel U-formet kollektorslange. Videre undersøkes det hvilken effekt det har å ikke inkludere naturlig konveksjon i pygfunction ved dimensjonering av brønnparker. Oppgaven inkluderer også en analyse av usikkerheten i inngangsparametrene for den modifiserte pygfunction, og hvordan disse influerer usikkerheten i utgangsverdien som modellen gir.

Resultat: Ved bruk av et spesifikt eksempel finner vi at simulering av grunnvannsfylte borehull uten inkludering av naturlig konveksjon resulterer i en overdimensjonering av brønnparken på 11-14 %. Usikkerhetsanalysen viser at dette resultatet har en usikkerhet på ± 10 %. Varmeledningsevnen i grunnen og den uforstyrrede grunntemperaturen er de inngangsparametrene som gir største bidrag til denne usikkerheten. I tillegg vil borehull-lengden, radien til borehullet og kollektorvæskens spesifikke varmekapasitet ha middels store bidrag. Ved bruk av konkret eksempel demonstreres det videre at varmeledningsevnen i rommet mellom kollektorslangen og borehullveggen minst må dobles for å tilsvare effekten av naturlig konveksjon.

Konklusjon: Simulering av grunnvannsfylte borehull med en modell som ikke betrakter naturlig konveksjon vil føre til en signifikant overdimensjonering av brønnparken. I etableringsfasen av brønnparken bør det særlig fokuseres på å samle informasjon om den uforstyrrede grunntemperaturen og varmeledningsevnen i grunnen, da disse parametrene har særlig betydning for resultatet av simuleringsanalysen. Funnene i denne oppgaven understreker viktigheten av å være kritisk ved bruk av modeller som ikke tar hensyn til naturlig konveksjon ved simulering av grunnvannsfylte borehull.

Innhold

Figurer	vi
Tabeller	vi
1 Introduksjon	1
1.1 Motivasjon	1
1.2 Målsetting	4
2 Innføring i varmetransport	5
2.1 Fouriers lov	5
2.2 Naturlig konveksjon og Newtons kjølelov	7
2.3 Termisk resistanse	9
3 Matematisk modell for varmeveksling mellom borehullveggen og grunnen	11
3.1 Modell	11
3.2 Analytiske løsninger	17
4 Matematisk modell for varmeveksling i borehullet	27
4.1 Temperaturen til kollektorvæsken	28
4.2 Resistansen i borehullet ved varmeledning	34
4.3 Resistansen i borehullet ved naturlig konveksjon	40
4.4 Empirisk løsning for resistansen i borehullet ved naturlig konveksjon .	44
4.5 Implementering av modell for beregning av resistanse ved naturlig konveksjon	47
5 Resultat	52
5.1 Sammenligning av analytiske løsninger mot pygfunction	52
5.2 Numerisk løsning med og uten konveksjon i borehullet	55
6 Sensitivitet og usikkerhetsanalyse	74
6.1 Innføring i usikkerhetsanalyse	75

6.2	Innføring i sensitivitetsanalyse	78
6.3	Resultat, usikkerhet- og sensitivitetsanalyse	79
7	Konklusjon, diskusjon og videre arbeid	90
7.1	Konklusjon og diskusjon	90
7.2	Videre arbeid	92
	Appendices	98
A	Grunnleggende termodynamikk	99
A.1	Termodynamisk system	99
A.2	Temperatur	100
A.3	Varmekapasitet	100
A.4	Termisk diffusivitet	101
A.5	Termodynamisk prosess	101
A.6	Termodynamikkens lover	102
B	Egenskaper til vann	106
B.1	Egenskaper til vann ved ulike temperaturer	106
B.2	Reynoldtallet	106
C	Utleddninger	109
C.1	Del - operatoren i sylinderkoordinater	109
C.2	Trykket i borehullet	111
D	Målinger av grunnparametre	113
D.1	Termisk responstest	113
E	Grunnleggende statistikk	117
E.1	Grunnleggende statistiske begrep	117
F	Tabeller	124
G	Python-kode	127

Figurer

1.1	Illustrasjon av borehull med fyllmasse og grunnvann	3
2.1	Konduksjon i et sylindrisk legeme. Merk at $T_1 > T_2$	7
2.2	Illustrasjon av grenselag langs vertikal plate	9
3.1	Kontrollvolum med dimensjon $dr \cdot r d\theta \cdot dz$ i et medium beskrevet med sylindriske koordinater.	14
3.2	Illustrasjon av et grunnen rundt borehullet med aktuelle domener og grenser.	16
3.3	Temperaturprofilen i grunnen for ulike tidsperioder, der det ekstraheres varme fra grunnen. Løsningen er gitt ved den uendelige linjeslukløsningen.	22
3.4	Geometrisk illustrasjon av endelig linjesluk	26
4.1	Tverrsnitt av borehull og illustrasjon trekantkoplet resistansenettverk. Tverrsnitt av et borehull med en enkel U-formet kollektorslange. Figuren til høyre viser en illustrasjon av et trekantkoplet resistansenettverk som anvendes for denne type borehullkonfigurasjon. Figuren er hentet fra [1].	30
4.2	Resistansens sensitivitet til borehullets lengde.	34
4.3	Resistansens sensitivitet til kollektorvæskens strømningsrate.	35
4.4	Funksjonen <i>thermal_resistances</i>	50
4.5	Funksjonen <i>effektiv_resistanse</i>	51
5.1	Temperaturprofil ved borehullveggen for et enkelt borehull, der vi har konstant varmeledning inn i grunnen. Pygfunction (svart), uendelig linje -og sylindersluk (rød og gul) er evaluert.	53
5.2	Differansen mellom pygfunction og uendelig linje -og sylindersluk, der temperaturen ved borehullveggen er evaluert for et enkelt borehull.	54
5.3	Temperaturen ved borehullveggen som et resultat av en variabel lastprofil.	55

5.4	Verifisering: Kollektorvæsketemperatur for gradvis økning av naturlig konveksjon	57
5.5	Verifisering mot TRT2 - og simuleringsdata	58
5.6	Resistansens sensitivitet til temperaturen i grunnvannet i borehullet	60
5.7	Nusselt-tallene i borehullets mellomrom	61
5.8	Resistansens sensitivitet til varmelasten	62
5.9	Temperatur- og lastprofiler for lik kollektorvæsketemperatur inn i borehullet	64
5.10	Resistanseprofil for lik kollektorvæsketemperatur inn i borehullet . . .	64
5.11	Temperatur- og lastprofiler for lik lastprofil	65
5.12	Den naturlige konveksjonens påvirkning på varmeledningsevnen, figur 1	68
5.13	Den naturlige konveksjonens påvirkning på varmeledningsevnen, figur 2	68
5.14	Den naturlige konveksjonens påvirkning på varmeledningsevnen, figur 2	69
5.15	Temperatur og lastprofil for borehull fylt med fyllmasse eller grunnvann	71
5.16	Effektprofil for borehull fylt med fyllmasse eller grunnvann	72
5.17	Sammenligning av resistansen, lasten og temperaturen til grunnvannet	72
6.1	Illustrasjon av sensitivitet- og usikkerhetsanalyse	75
6.2	Histogram av varmeledningsevnen fra 1398 prøveområder i Oslo	83
6.3	Labmålinger av varmeledningsevnen fra et større område i Oslo	84
6.4	Eksempel på foalisjonen til bergarten Genist	84
6.5	Eksempel på hvordan varmeledningsevnene påvirkes av grunnvannsstrøm	86
6.6	Sensitivitetsindekser for 2000 Monte Carlo simuleringer	87
6.7	Histogram som viser energi tilført og hentet ut av grunnen for et grunnvannsfylt borehull	88
6.8	Temperautern ut av boreullet for 2000 Monte Carlo simuleringer	89
A.1	Konservering av energi for et kontrollvolum. Den stiplede linjen er kontrollvolumets overflate, hvor utveksling av energi med omgivelsene foregår. Figuren er tegnet i programmet Inkscape.	103
A.2	Den totale økningen i termisk energi for et kontrollvolum som opplever en økning i følbare og latent energi.	104
B.1	Varmeledningsevnen til vann som funksjon av temperatur.	107
B.2	Tettheten til vann som funksjon av temperatur.	107
C.1	(a): Beskrivelsen av et punkt i sylinderkoordinater. (b): Geometrisk illustrasjon av de sylindriske basisvektorene i xy-planet. Figuren er tegnet i programmet Inkscape.	111
D.1	Det mest grunnleggende utstyret som brukes under en termisk responstest: vannpumpe, varmeelement, temperatursensorer og datalogger.	114

Tabeller

3.1	Parametere brukt i den uendelige linjesluk-løsningen.	22
5.1	Parametere brukt i evalueringen av ett borehull for en konstant varme- fluks langs borehullveggen. Parametere merket med "*" brukes bare i pygfunction, parametere uten stjerne er felles parametere.	53
6.1	Usikre parametere	85
F.1	Parameterverdier for eksempel 1 seksjon 5.2.1	125
F.2	Parameterverdier for eksempel 2 seksjon 5.2.1	126

Kapittel 1

Introduksjon

1.1 Motivasjon

Grunn geotermisk energi, kombinert med energilagring fra systemer, kan gi et viktig bidrag til bedre energibruk i bygninger. Denne energiformen utvinnes ned mot 300m under jordoverflaten. I utgangspunktet er energien i denne delen av grunnen stammer primært fra solenergi med bidrag fra varmestrøm fra dypere lag av jordskorpen, som i hovedsak stammer fra radioaktiv nedbrytning. Grunne geotermiske system kan benyttes både til varme og kjøling, slik at det i tillegg er bidrag fra lagret energi som er tilført grunnen. Norge er et av de ledende landene i verden innen grunn geotermisk energi. Energien utvinnes som regel ved et lukket system som består av ett eller flere borehull fylt med grunnvann, der borehullene har en gjennomsnittlig lengde på 220 meter[2]. Et system bestående av flere borehull betegnes som en brønnpark. I hvert enkelt borehull plasseres det en U-formet kollektorslange som inneholder en sirkulerende kollektorvæske. Denne defineres som systemets energibærer. Energi hentes ut av grunnen ved at den inngående temperaturen til kollektorvæsken er lavere enn temperaturen til den omliggende grunnen. Dette resulterer i at energi overføres fra grunnen til kollektorvæsken. Deretter føres kollektorvæsken opp av borehullet og videre til en varmepumpe.

Varmepumpen har en viktig rolle i en brønnpark ved at den gjør energien fra grunnen brukbar - det vil si - løfte temperaturen i kollektorvæsken til ønsket nivå for videre bruk til romoppvarming eller tappevann. Varmepumpens kompressor må arbeide hardere, og bruke mer elektrisk energi, dersom forskjellen mellom grunntemperaturen og ønsket temperaturnivå øker. For å unngå denne forskjellen kan grunnen anvendes som et energilager ved å tilføre overskuddsvarme sommerstid (kjøling) og hente ut varme vinterstid [3].

For varmebehov vil omtrentlig 70 % av energien som en brønnpark leverer være

energi hentet fra grunnen. De resterende 30% er tilført energi til varmepumpen. For kjøling vil prosentandelen energi som tilføres grunnen være høyere og ligge på rundt 75 – 90%. Ved en god balanse mellom lading og uttak av varme kan brønnparken levere 3 til 4 ganger mer varmeenergi enn tilført elektrisitets-energi. I perioder hvor Norge eksporterer mye elektrisitet, vil brønnparker være et viktig bidrag for å redusere elektrisitetsbehovet [4].

I Norge er potensialet stort og teoretisk sett kan hele landets behov for oppvarming og kjøling av bygninger dekkes av grunnvarme [5]. I 2019 er det estimert et forbruk av grunn geotermisk energi på 3.0 TWh, en økning på 28 % fra 2018 [2]. Bygninger står for 40 % av det totale energiforbruket i Norge. I 2016 var fordelingen mellom husholdninger og kommersielle bygg på henholdsvis 45 TWh og 35 TWh [6]. Ved å oppdatere alle bygg til nullenergibygg¹ innen 2040 vil de tekniske potensielle energibesparelsene være på 65 TWh. Grunnvarmeteknologi kan bidra med opp mot 45 % av besparelsene [7].

I Norge er det registrert mange større grunnvarmeanlegg, med flere hundre borehull knyttet til oppvarming og kjøling av bygg. Etableringskostnadene knyttet til slike system er betydelige. Undersøkelser av grunnforholdene, boring gjennom løsmasse og fjell, innkjøp av varmepumpe, kollektorslange og sirkulasjonsvæske er noe av det som kreves for et fullverdig grunnvarmeanlegg. Boreprisene varierer i forhold til grunnforhold, lengde på borehull og antall borehull i brønnparken, og vil ligge på omtrentlig 300-400 kr/m [5]. Etableringskostnader for et enkelt borehull i en brønnpark vil følgelig være på omtrentlig 70-100 000 kr. God planlegging er avgjørende for å redusere etableringskostnader og effektiv drift over tid. For en underdimensjonert brønnpark vil driftens effektivitet reduseres med tiden. Konsekvensen blir at det må suppleres med alternative energiløsninger, som igjen gir økte kostnader. Motsatt vil en overdimensjonert brønnpark føre til unødvendig store investeringskostnader. Det anbefales derfor å anvende matematiske modelleringsverktøy før etablering av brønnparker. Ved riktig bruk av slike verktøy vil det oppnås resultat som gir innsikt i om brønnparken er rett dimensjonert, samt hvordan den fungerer på kort og lang sikt. utfordringer knyttet til verkøyene er at de vil være en tilnærming av de virkelige forhold, både med tanke på usikkerheten i inngangsparametere og modellfeil. En diskusjon av disse to faktorene vil derfor være en naturlig del av prosessen.

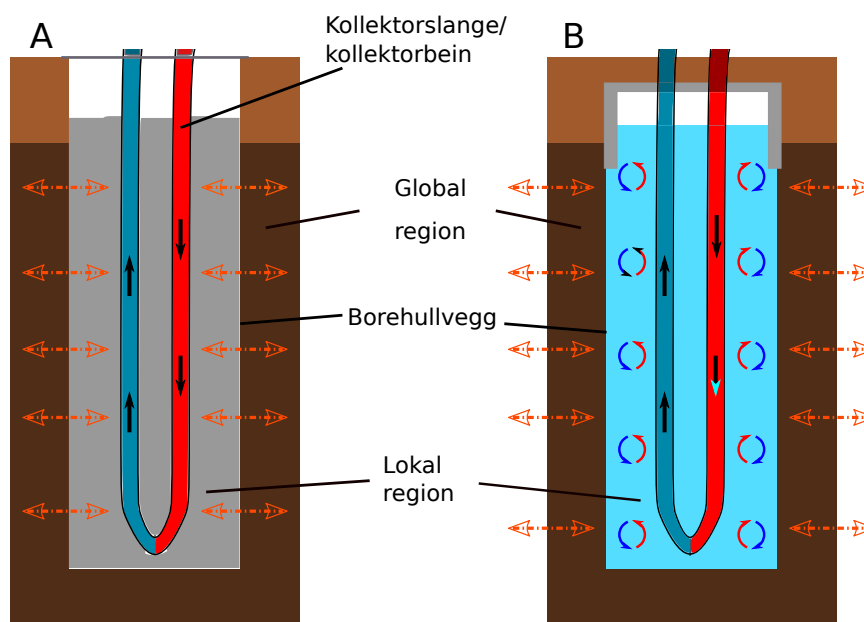
Ved en matematisk analyse er det vanlig å skille området innenfor og utenfor borehullet, og analysere de termiske prosessene i hvert område. Vi definerer følgende områder[8]:

- Det *lokale området* betrakter de termiske prosessene som skjer mellom den energibærende væsken i kollektorslangen og borehullveggen. Varmetransporten

¹Nullenergibygg er karbonnøytrale bygg som ikke benytter seg av netto tilført energi. Det vil si at det, via fornybare energikilder, produserer like mye energi som det forbruker [7].

i dette område beskrives enten ved konveksjon eller varmeledning, avhengig av om det er væske eller fast masse som betraktes.

- Det *globale området* betrakter de termiske prosessene mellom borehullveggen og området rundt.



Figur 1.1: A: Illustrasjon av borehull fylt med fyllmasse; B: Illustrasjon av borehull fylt med grunnvann. Det globale og lokale området er området henholdsvis utenfor og innenfor borehullveggen. I det grunnvannsfylte borehullet vil varmetransporten mellom kollektorvæsken og borehullveggen påvirkes av naturlig konveksjon. Området mellom kollektorslangen og borehullveggen betegnes som “borehullets mellomrom” i denne oppgaven.

For å modellere brønnparker og borehull kan ulike semi-analytiske og numeriske programvarer anvendes [9]. En programvare som kan brukes er pygfunction [10]. Dette er en åpen kildekode, implementert i programmeringsspråket Python, og anvendes for modellering av borehull og brønnparker. I denne oppgaven vil denne programvaren benyttes og videreutvikles. Programvaren antar at borehullene som simuleres er fylt med fyllmasse slik at varmeledning dominerer varmetransporten i det lokale området. Dette vil ikke gi en god beskrivelse av norske forhold der borehullene er grunnvannsfylte. I et grunnvannsfylt borehull vil naturlig konveksjon oppstå i borehullet, slik at resistansen i den lokale regionen reduseres og varmetransportens effektivitet økes [11]. For å forenkle analysene vil pygfunction anvendes for ett enkelt borehull. Dette betyr at varmeutveksling mellom borehullene i brønnparken ikke betraktes i denne

oppgaven.

1.2 Målsetting

Målsettingene med denne oppgaven er følgende:

- **Matematisk beskrivelse av prosessene i og rundt borehullet.** Vi vil beskrive prosessene i den lokale og globale regionen matematisk ved å studere ett enkelt borehull. I den lokale regionen vil det spesielt fokuseres på den termiske borehull-resistansen mellom kollektorvæsken og borehullveggen.
- **Sammenligning av pygfunction mot analytiske løsninger.** Vi vil sammenligne pygfunction mot to analytiske løsninger, der varmetransporten fra borehullveggen til grunnen evalueres for et enkelt borehull.
- **Modifisere programvaren pygfunction for grunnvannsfylte borehull.** Pygfunction anvender Multipol-metoden for å beregne den termiske resistansen i borehullet. Denne metoden antar at varmen drives av varmeledning, og vil ikke være gyldig for grunnvannsfylte borehull, der naturlig konveksjon vil oppstå. Vi vil modifisere pygfunction for å inkludere effekten av naturlig konveksjon, ved å implementere en modell som bygger på en empirisk korrelasjon mellom de dimensjonsløse Nusselt- og Rayleightallene. Modellen vil anvendes til å gjennomføre en sammenligning av energien som tilføres og hentes ut av grunnen, for et borehull med fyllmasse og et borehull fylt med grunnvann.
- **Sensitivitet - og usikkerhetsanalyse av den modifiserte pygfunction.** Hver enkelt inngangsparameter i den modifiserte modellen vil ha en usikkerhet knyttet til seg. Vi vil undersøke hvordan usikkerheten i inngangsparameterne influerer resultatet av modellen. I tillegg vil vi kartlegge hvor sensitiv modellen er for de ulike inngangsparameterne. På denne måten kan vi kartlegge hvilke parametere det er spesielt viktig å redusere usikkerheten av ved å samle god informasjon om før simulering, slik at usikkerheten i resultatet reduseres.

Kapittel 2

Innføring i varmetransport

Dette kapitlet gir en innføring i de to viktigste måtene varme kan transporteres på i en brønnpark. Beskrivelsene som følger tar utgangspunkt i fremstillingen gitt i [12] og [13].

Varmetransport¹ defineres som *termisk energi i bevegelse forårsaket av en romlig temperaturgradient*. I henhold til termodynamikkens andre lov² medfører det at så lenge det eksisterer en temperaturredifferanse i et medium eller mellom to medium, så vil varme transporteres i retning av negativ temperaturgradient. Vanligvis skiller vi mellom tre typer varmetransport: Varmedledning, konveksjon og stråling. I en brønnpark vil det meste av varmen som transporteres mellom reservoaret og borehullveggen være via varmedledning, men dersom vi har grunnvannsflyt kan konveksjon også bidra til dette. På innsiden av borehullveggen vil varmetransporten foregå som både varmedledning og konveksjon, avhengig av hvor i borehullet man befinner seg, og om det er fylt med grunnvann eller fyllmasse. I seksjon 2.1 og 2.2 beskrives to viktige lover som beskriver varmetransporten ved varmedledning og konveksjon. I seksjon 2.3 vil termisk resistanse defineres.

2.1 Fouriers lov

Den delen av varmetransporten som kalles for varmedledning ble beskrevet av den franske fysikeren Joseph Fourier i 1822. Han innførte en elementær setning som kalles Fouriers lov, som beskriver relasjonen mellom varmedledningsraten og temperaturgradienten i et material eller mellom to materialer. Loven ble utviklet eksperimentelt,

¹Dersom en temperaturgradient eksisterer i et stasjonært medium (solid, væske eller gass) vil varmetransporten foregå som varmedledning. Konveksjon refererer til varme som transporteres på grunn av et medium i bevegelse.

²Leseren henvises til tillegg A for en innføring i termodynamikk

og kan for eksempel gjøres ved å betrakte et sylinderformet legeme som er termisk isolert på de laterale sidene og har forskjellig temperatur i endepunktene (se figur 2.1). Fourier gjorde følgende observasjon for relasjonen mellom varmeledningsraten, \dot{q} ; temperaturdifferansen, ΔT ; tverrsnittarealet, A ; og lengden, Δx , til legemet:

$$\dot{q}_x \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Proporsjonaliteten i uttrykket over vil være den samme for ulike materialer, men varmeledningsraten vil variere i forhold til innholdet i materialet. For å få et endelig uttrykk introduseres en proporsjonalitetskonstant, λ , med enhet $W/m.K$. Denne blir omtalt som *varmeledningsevnen* til materialet og er et mål på materialets evne til å lede varme. Relasjonen i 2.1 kan formuleres slik:

$$\dot{q}_x = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (2.2)$$

der minustegnet er nødvendig å innføre siden varme, i følge termodynamikkens andre lov, alltid blir transportert i retning av minkende temperatur. Merk at dette er et uttrykk for *varmeledningsraten*, og har enhet Watt (W). Et uttrykk for varmeledningsfluksen, \hat{q} , får vi ved å dividere med arealet, slik at:

$$\hat{q}_x = \frac{\dot{q}}{A} = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (2.3)$$

Varmeledningsfluksen har enhet Watt per enhetsareal (W/m^2), og retningen vil alltid være normalt på den overflaten som har konstant temperatur, det vil si normalt på tverrsnittarealet for det sylindriske legemet beskrevet over. Generelt kan varmeledningsfluksen betraktes som en vektor i tre dimensjoner, og for et isotropisk¹ materiale kan Fouriers lov skrives:

$$\hat{\mathbf{q}} = -\lambda \nabla T = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (2.4)$$

Her er $\hat{\mathbf{q}}$ varmeledningsfluks-vektoren [W/m^2], ∇ er den tredimensjonale del-operatoren, $T(x, y, z)$ er skalartemperaturfeltet [K] og \mathbf{i} , \mathbf{j} og \mathbf{k} er enhetsvektorer i x, y og z retning.

Siden et borehull er sylinderformet er det hensiktsmessig å definere Fouriers lov i

¹I et isotropisk materiale vil varmeledningsevnen λ være den samme i enhver retning. Dette vil gjelde for de fleste homogene materialer.

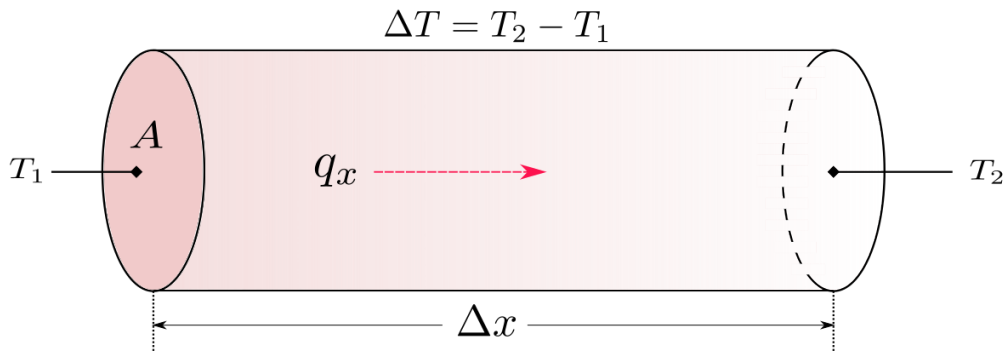
sylinderkoordinater. Dette kan vi gjøre ved å utnytte at del operatoren i sylinderkoordinater² er definert som:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2.5)$$

Setter vi dette inn i ligning 2.4 får vi Fouriers lov i sylinderkoordinater:

$$\hat{\mathbf{q}} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{e}_z \right). \quad (2.6)$$

Her er \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ og \mathbf{e}_z de sylindriske basisvektorene, definert i tillegg C.



Figur 2.1: Konduksjon i et sylindrisk legeme. Merk at $T_1 > T_2$.

2.2 Naturlig konveksjon og Newtons kjølelov

Ved Naturlig konveksjon drives væskestrømmen av oppdriftskrefter i væsken. Denne situasjonen oppstår når fjernkrefter¹ virker på en væske med tetthetsforskjeller. Ved Arkimedes prinsipp vil et gitt volum av en væske med en lavere tetthet enn væsken rundt stige, mens væsken vil synke dersom et gitt volum av væsken har høyere tetthet enn væsken omkring. For å illustrere effekten ser vi for oss et lite utsnitt fra innsiden av borehullveggen for et grunnvannsfylt borehull. Vi antar at veggen har høyere temperatur enn grunnvannet. Dette fører til at vannet varmes opp nærme borehullveggens overflate, slik at tettheten blir mindre. Videre fører dette til at vannet løftes oppover av oppdriftskrefter. På figur 2.2 illustreres prosessene som oppstår.

²Se tillegg C for en utledning av del-operatoren i sylinderkoordinater.

¹I fysikken deles krefter opp i fjernkrefter og kontaktkrefter. Fjernkrefter defineres som krefter som virker når det ikke er noen synlig forbindelse mellom legemene, som f.eks. gravitasjonskraften [14]

Når vannet beveger seg ved overflaten vil det oppstå et hydrodynamisk grenselag. I grenselaget får vi en hastighetsprofil som stiger fra null ved overflaten til den når et maksimum midt i grenselaget, før den videre synker mot null utenfor grenselaget. Innenfor grenselaget vil hastigheten, u , være en funksjon av høyden y til vannet, $u = u(y)$. I tillegg vil det oppstå et termisk grenselag, der temperaturen varierer fra T_s ved overflaten ($y = 0$) til en uniform temperatur T_∞ som assosieres med temperaturen utenfor grenselaget. Siden $T_s > T_\infty$ vil det, i følge termodynamikkens andre lov, strømme varme på tvers av grenselaget, fra overflaten til vannet. Denne varmestrømmen kan beskrives ved to prosesser.

På overflaten, der hastigheten er lik null, vil varmestrømmen bare drives av varmeledning og kan beskrives med Fouriers lov:

$$\frac{\dot{q}}{A} = -\lambda_v \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad (2.7)$$

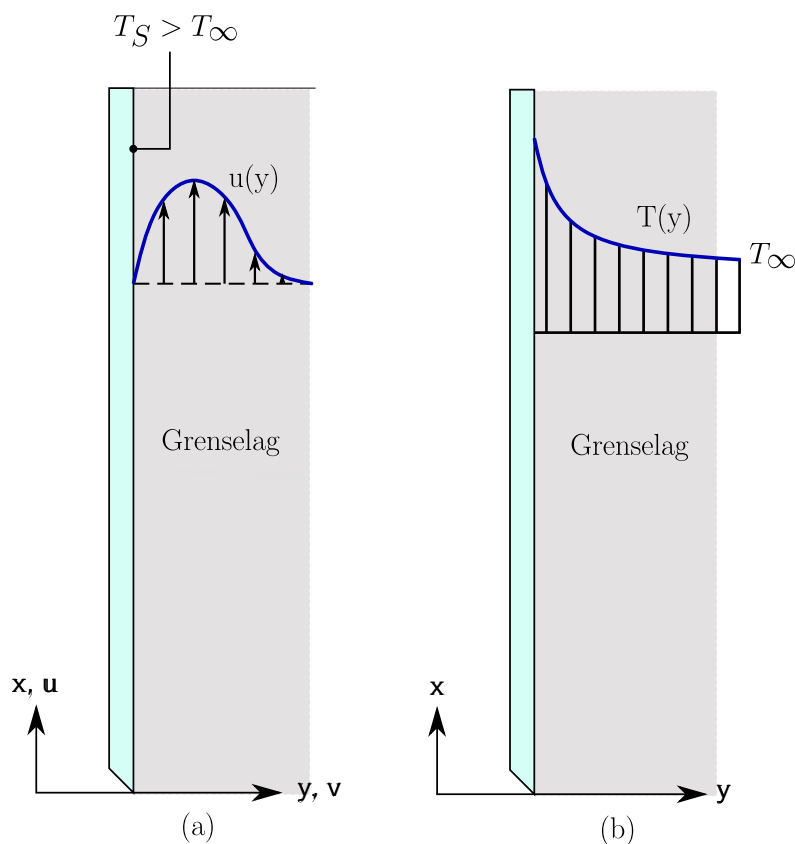
der \dot{q} er raten til varmeoverføringen [W], A er overflatearealet [m^2] og λ_v er varmeledningsevnen til væsken. Når vi beveger oss oppover i det hydrodynamiske grenselaget vil hastigheten til vannet variere. Dette fører til at det vil oppstå temperaturgradienter mellom de tilstøtende væskelagene, slik at temperaturen innenfor det hydrodynamiske grenselaget vil være en funksjon av høyden y til væsken, $T = T(y)$. Vi får dermed en temperaturprofil innenfor det hydrodynamiske grenselaget, som kalles for det termiske grenselaget. Varmen som transporteres i dette område er gitt ved Newtons kjølelov:

$$\frac{\dot{q}}{A} = h(T_s - T_\infty), \quad (2.8)$$

der T_s er overflatetemperaturen, T_∞ er temperaturen til væsken og h er filmkoeffisienten [$W/m^2.K$]. Filmkoeffisienten er i motsetning til varmeledningsevnen ikke en egenskap ved væsken, men vil derimot være avhengig av forholdene i grenselaget. Det betyr at den blant annet influeres av geometrien til overflaten, strømningsforholdene, egenskapene til væsken og hastigheten til væsken. Den er med andre ord en kompleks parameter og må i de fleste tilfeller bestemmes eksperimentelt¹.

Det kan nevnes at når væskestrømmen drives av en ekstern kraft, som for eksempel en pumpe, betegnes varmetransporten som *tvungen konveksjon*. Dette vil for eksempel være tilfelle for den sirkulerende væsken i kollektorslangen.

¹I kapittel 4.4 vises det hvordan filmkoeffisienten kan bestemmes empirisk for et borehull med en enkel U-format kollektorslange.



Figur 2.2: Illustrasjon av grenselag ved naturlig konveksjon. Figuren (a) illustrer det hydrodynamiske grenselaget. Figuren (b) illustrerer det termiske grenselaget.

2.3 Termisk resistanse

Ligning 2.1 og 2.8 kan begge uttrykkes på formen

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_t}, \quad (2.9)$$

Δt er en relevant temperaturdifferanse. R_t betegnes som en termiske resistansen, og defineres ulikt for varmeledning og konveksjon. Vi observerer at den termiske resistansen er omvendt proporsjonal med raten av varmestrøm. Det betyr at resistansen i praksis fungere som en “motstand” mot varmestrømmen, slik at det er hensiktsmessig med en liten resistanse for å få en effektiv varmestrøm.

Sammenligner vi ligning 2.8 og 2.9 kan vi definere et uttrykk for den konvekitive

termiske resistansen mellom overflaten og væskestrømmen over overflaten:

$$R_{konv} = \frac{1}{Ah}, \quad (2.10)$$

der A er overflatearealet som væsken strømmer over.

Kapittel 3

Matematisk modell for varmeveksling mellom borehullveggen og grunnen

For å analysere varmetvekslingen mellom borehullveggen og grunnen trengs det matematiske modeller som beskriver temperaturfeltet utifra rand - og initialbetingelser. Dette område defineres som det globale område, og i dette kapitlet vil modellen som anvendes beskrives.

3.1 Modell

Beskrivelsene i følgende seksjon tar utgangspunkt i fremstillingen gitt i [13]. Modellen som anvendes i den globale regionen kalles for varmeledning ligningen, og utledningen som følger gjøres i sylindervekoordinater. Vi starter med å betrakte et homogent medium, der det ikke eksisterer noe adveksjon, og der temperaturfeltet $T(r, \theta, z, t)$ er beskrevet i sylindervekoordinater. Vi defineres så et infinitesimalt lite kontrollvolum, $dr \cdot rd\theta \cdot dz$, som vist i figur 3.1. Dersom det eksisterer en temperaturforskjell mellom innsiden av kontrollvolumet og omgivelsene, har vi varmetransport i form av varmeledning *vinkelrett* på overflatene til kontrollvolumet. For de tre overflatene som spenner seg ut ved punktet (r, θ, z) definerer vi følgende varmeledningss-rater: \dot{q}_r , \dot{q}_θ og \dot{q}_z . Ratene på overflatene på de motsatte sidene, spent ut fra punktet $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$, kan skrives som en Taylor-utvikling der høyere ordens ledd

er neglisjert:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{r+dr} &= \dot{q}_r + \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial r} dr, \\ \dot{q}_{\theta+d\theta} &= \dot{q}_\theta + \frac{\partial \dot{q}_\theta}{\partial \theta} d\theta, \\ \dot{q}_{z+dz} &= \dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Kravet for konservering av energi til kontrollvolumet, når det ikke genereres energi på innsiden, kan vi sette opp med utgangspunkt i prinsippene definert i seksjon ??:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{ut} = \dot{E}_{st}.\tag{3.2}$$

Dersom vi antar en følbar energiøkning til kontrollvolumet, kan vi sette inn de ulike ratene, samt ligning A.10, inn i ligning 3.2. Vi får følgende uttrykk for energikonservering:

$$(\dot{q}_r + \dot{q}_\theta + \dot{q}_z) - (\dot{q}_{r+dr} + \dot{q}_{\theta+d\theta} + \dot{q}_{z+dz}) = r\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dr d\theta dz.\tag{3.3}$$

Ved å utnytte relasjonene i ligning 3.1 får vi videre:

$$-\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial r} dr - \frac{\partial \dot{q}_\theta}{\partial \theta} d\theta - \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz = r\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dr d\theta dz.\tag{3.4}$$

Fra Fouriers lov, ligning 2.6, følger det at varmeledningratene for et isotropisk materiale kan skrives som:

$$\begin{aligned}\dot{q}_r &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} r d\theta dz, \\ \dot{q}_\theta &= -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} dr dz, \\ \dot{q}_{dz} &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} r d\theta dr.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Ved å sette ligning 3.5 inn i ligning 3.4 og dividere på dimensjonen til kontrollvolumet får vi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t},\tag{3.6}$$

der vi antar at kontrollvolumets dimensjon er konstant. Ligning 3.6 er det generelle uttrykket for *varmeledningsligningen* i sylinderkoordinater. De tre leddene på venstre side er relatert til netto varmeledninggrater i radiell, angulær og aksiell retning inn mot kontrollvolumet, mens leddet på høyre side står for raten av følbare energiøkning til kontrollvolumet.

Siden det sirkulære tverrsnittet av borehullet er symmetrisk er det vanlig å neglisjere det angulære leddet i ligning 3.6. Dersom vi i tillegg antar at varmeledningsevnen er konstant kan ligningen formuleres

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.7)$$

der $\alpha_g = \lambda / \rho c_p$ er den *termiske diffusiviteten* definert i seksjon A.4. En lignende utledning kan også gjennomføres i kartesiske koordinater, slik at ligning 3.6 i dette tilfellet vil være gitt som:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_g \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_g \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Vi merker oss betingelsen som må settes for å anvende varmeledningsligningen i grunnen rundt borehullet:

- Grunnen må være et homogent, isotropisk medium, der det ikke eksisterer noe grunnvannstrøm. I følge [8] kan effekten av grunnvannstrøm neglisjeres dersom følgende relasjon er tilfredsstillt:

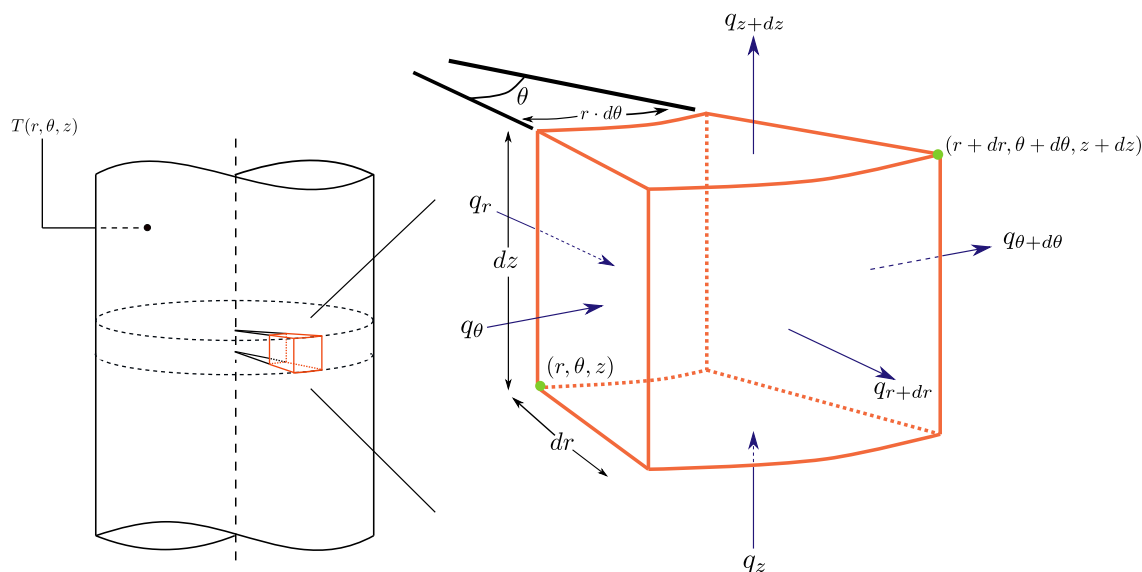
$$\frac{H \rho_v c_v q_v}{2 \lambda_R} < 1, \quad (3.9)$$

der H er lengden til borehullet, c_v er varmekapasiteten til grunnvannet, ρ_v er tettheten til grunnvannet, q_v er Darcy-hastigheten¹ til grunnvannet [m/s] og λ_g er varmeledningsevnen til grunnen.

3.1.1 Grense - og initialbetingelser

For å løse varmeledningsligningen, 3.6, for et borehull er det nødvendig å ha opplysinger om de fysiske egenskapene ved grensen til domenet som evalueres, samt hvordan den fysiske situasjonen til domenet er i starten av prosessen. Dette kalles for grense - og initialbetingelser og blir beskrevet i denne seksjonen med utgangspunkt i fremstillingene gitt i [13], [8] og [1]. Siden varmeledningsligningen er av andre

¹For en definisjon av Darcy-hastigheten og strømninger i porøse media henvises leseren til [15, kap. 2].



Figur 3.1: Kontrollvolum med dimensjon $dr \cdot r d\theta \cdot dz$ i et medium beskrevet med sylindriske koordinater.

orden i romlige koordinater og første orden i tid, må to grensebetingelser defineres for hver koordinat som beskriver domenet, mens det bare trengs en initialbetingelse som beskriver domenet ved tiden $t = 0$. Følgende generelle grenseverdier defineres:

1. **Dirichlet betingelse:** Temperaturen ved grensen til domenet er en fastsatt funksjon som er avhengig av tiden. Det enkleste tilfelle har vi når temperaturen er konstant.
2. **Neumann betingelse:** Varmeledningfluksen, \hat{q} , normalt på grensen til domenet er en funksjon som er avhengig av tiden, og kan skrives som:

$$\hat{q}(t) = -\lambda \frac{dT}{dn}, \quad (3.10)$$

der \hat{q} står normalt på grensen.

For transiente problemer¹ kreves det at temperaturfeltet ved starten i prosessen er fastsatt, slik at det må bestemmes en initialbetingelse.

Grunnen rundt borehullet

Grunnen rundt borehullet kan deles opp i domener med tilhørende grenser, som illustrert i figur 3.2. På overflaten av grunnen vil temperaturen variere mye i løpet

¹I transiente problemer vil fysiske størrelser endre seg med tiden. Dette er det motsatte av stasjonære problemer, der de fysiske størrelsene er konstante med hensyn på tiden.

av en dag, fra dag til dag, og over et år. I følge [8] vil disse variasjonen forstyrre grunntemperaturen en avstand, D , vertikalt ned i grunnen. Avstanden er gitt ved:

$$D = \sqrt{\frac{\alpha_g t_p}{\pi}}, \quad (3.11)$$

der t_p er tidsperioden som evalueres, gitt i sekunder. De årlige variasjonene har en penetreringsdybde på noen få meter. Temperaturforstyrrelsen i det øverste laget blir derfor vanligvis neglisjert, siden den totale lengden til borehullet er mye større. Det mest vanlige er å ta i bruk den årlige middeltemperaturen, T_0 , til uteluften som en grensebetingelse. Vi definerer derfor en Dirichlet betingelse ved overflaten til grunnen, og skriver det som:

$$T(r, 0, t) = T_0, \quad (r, z) \in \partial\Omega_T. \quad (3.12)$$

Temperaturen i grunnen vil øke når vi beveger oss dypere ned. Dersom vi lar $G[K/m]$ være den geotermiske gradienten og r_{grunn} være radiusen til grunnen, kan grensebetingelsen ved sideflatene settes til:

$$T(r_{grunn}, z, t) = T_0 + Gz, \quad (r_{grunn}, z) \in \partial\Omega_M. \quad (3.13)$$

Den termiske analysen kan forenkles ved å anta en konstant verdi for den uforstyrrede temperaturen i grunnen. Dette kan gjøres ved å definere en uforstyrret midlere grunntemperatur, T_g , lik den uforstyrrede temperaturen i en dybde ved midten av borehullet:

$$T_g = T_0 + G(D + H/2). \quad (3.14)$$

De forenklete grensebetingelsene settes til:

$$T(r, 0, t) = T_g, \quad (r, z) \in \partial\Omega_T. \quad (3.15)$$

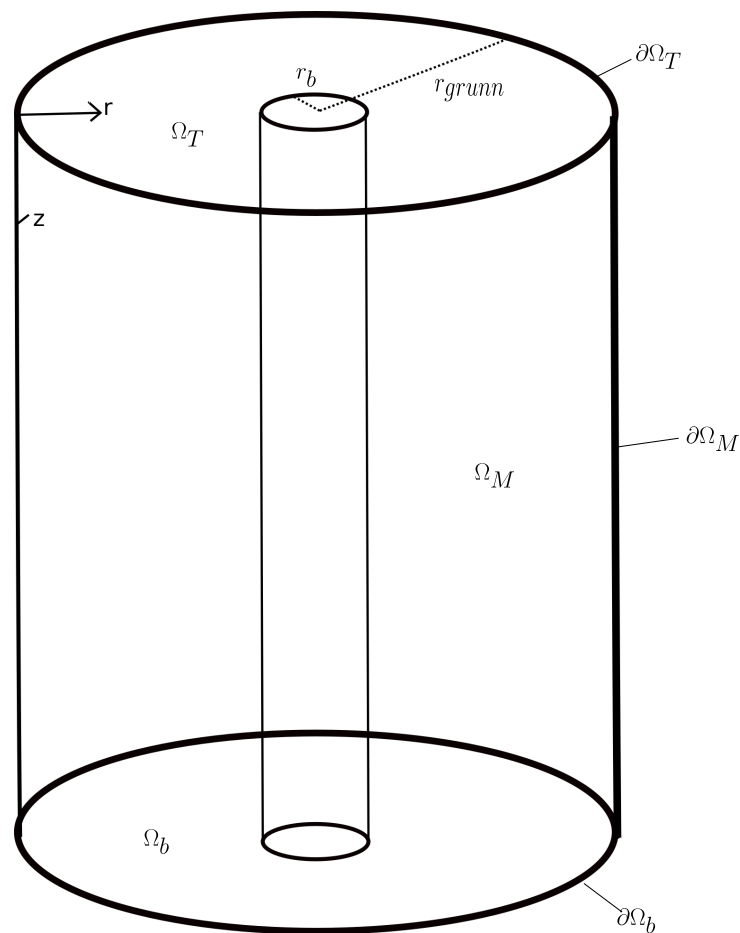
$$T(r_{grunn}, z, t) = T_g, \quad (r_{grunn}, z) \in \partial\Omega_M. \quad (3.16)$$

På samme måte kan initialbetingelsen for grunnen forenkles til:

$$T(r, z, 0) = T_g. \quad (3.17)$$

I det nedre domenet i grunnen, Ω_N , vil vi ha en varmestrøm normalt på grensen, slik at vi får følgende Neuman betingelse:

$$\hat{q} = -\lambda_g \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial n}, \quad (r, z) \in \partial\Omega_N. \quad (3.18)$$



Figur 3.2: Illustrasjon av et grunnen rundt borehullet med aktuelle domener og grenser.

Borehullveggen

Den øverste delen av borehullet er antatt å være termisk isolert, slik at vi får følgende grensebetingelse ved borehullveggen i dette området:

$$\frac{dT}{dr} = 0, \quad r = r_b, z \in (0, D), \quad (3.19)$$

der dybden D for eksempel kan være grunnvannsnivået.

Grensebetingelsene ved borehullveggen vil variere i forhold til den termiske analysen som gjennomføres. Dersom det antas en konstant temperatur, $T_b(t)$ langs borehullveggen får vi:

$$T(r_b, z, t) = T_b(t), \quad z \in (D, D + H), t > 0. \quad (3.20)$$

Den gjennomsnittlige utvinningraten per meter borehull [W/m] er gitt ved integralet:

$$\dot{q}_b = \frac{1}{H} \int_D^{D+H} 2\pi r_b \cdot \frac{\partial T}{\partial r} dz, \quad r = r_b, \quad (3.21)$$

Den totale uttaksraten er $H \cdot \dot{q}_b$ [W], og er definert slik at den er negativ dersom varme injiseres i grunnen.

Oppsummert får vi at den termiske analysen for ett borehull består av ligning 3.7, grense- og initialbetingelser gitt over, samt en forskrevet varmerate \dot{q}_b . Hovedmålet er å finne temperaturen $T_b(t)$.

3.2 Analytiske løsninger

I dette kapitlet presenteres tre analytiske løsninger for den globale regionen. I seksjon 3.2.1 - 3.2.3 ser vi på de mest tradisjonelle analytiske løsningene av varmeledningsligningen 3.6. Disse løsningene betrakter grunnvarmevekslerne som et uendelig linjesluk (ULS), uendelig sylindersluk (USS) eller et endelig linjesluk (ELS). De to første løsningene antar at varmetransporten rundt borehullene er et en-dimensjonalt (radialt) problem. De kan ikke brukes over lengre tid, siden aksielle temperaturgradienter begynner å bli signifikante etter om lag et år. ELS-løsningen er en modifisering av de to andre, og betrakter også varmeoverføring i aksial retning. Den vil derfor være mer nøyaktig for lengre tidsperioder [3]. For å illustrere hvordan varmeledningsligningen anvendes vil den uendelige linjesluk-løsningen utledes.

3.2.1 Uendelig linjesluk

Den uendelige linjesluk-løsningen betrakter borehullet som et uendelig langt linjesluk der det foregår en kontinuerlig horisontal varmetransport fra tiden $t = 0$. Denne løsningen blir også kalt Kelvins linjesluk, da den har sitt opphav fra en teori som Lord Kelvin utviklet på slutten av 1800-tallet, der han undersøkte hvordan varme forplanter seg fra en punktkilde i et homogent medium. Senere ble denne teorien utviklet av Ingersoll og Pass (1948), samt Carslaw og Jeager (1959), der følgende varmetransportproblem ble definert [16]:

1. En-dimensjonal varmetransport i horisontal retning i en homogen og isotropisk grunn, der varmeledningsevnen er konstant. Dette medfører at angulære og aksielle komponenter kan neglisjeres, slik at temperaturfeltet reduseres til en funksjon av tiden og radiusen fra linjeslukets akse:

$$T(r, \theta, z, t) \rightarrow T(r, t); \quad (3.22)$$

Fouriers lov, ligning 2.6, forenkles til

$$\hat{\mathbf{q}} = -\lambda_g \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r; \quad (3.23)$$

og videre blir varmeledningstiligningen, 3.7

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.24)$$

2. Initialbetingelsen settes til:

$$T(r, t = 0) = T_g \quad (3.25)$$

3. Ved grensen av reservoaret settes en Dirichlet betingelse, det vil si en konstant temperatur lik den uforstyrrede grunntemperaturen:

$$T(r \rightarrow \infty, t) = T_g. \quad (3.26)$$

4. Inn mot linjeslukets akse har vi en konstant varmeledningsrate, \dot{q}_b , per meter linjesluk. Dette kan skrives:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\dot{q}_b}{2\pi\lambda_g}, \quad t > 0, \quad (3.27)$$

der \dot{q}_b har enhet watt per meter (W/m).

For å komme frem til ligning 3.27 betrakter vi Fouriers lov i radiell retning (ligning 3.23) for et sylinderformet borehull. Vi definerer varmeledningsraten \dot{q}_b inn mot senteret av linjesluket som en positiv verdi. Siden koordinatsystemet er definert slik at radiusen r øker når vi går mot høyre, må minustegnet i Fouriers lov fjernes for å få en positiv verdi for \dot{q}_b . Vi får:

$$\dot{q}_b = \lambda_g A \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (3.28)$$

der arealet $A = 2\pi r L$ og L er aktiv lengde til borehullet. Kravet for en konstant rate per meter borehull får vi ved å dividere ligning 3.28 med lengden til borehullet, slik at vi får:

$$\dot{q}_b = \lambda_g 2\pi r \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (3.29)$$

Siden radiusen til borehullet er liten sammenlignet med størrelsen til grunnen, kan borehullet approksimeres som et linjesluk ved å la $r \rightarrow 0$, noe som resulterer i grensekrauet gitt i ligning 3.27.

Ligning 3.24 - 3.27 er et komplett ligningssett som kan løses ved hjelp av Boltzmann-Transformasjonen [17]. Dette er en metode som går ut på å omforme partielle differensialligninger til enkle ordinære differensialligninger. Vi starter med å introdusere variabelen

$$u(r, t) = \frac{r^2}{4t} \frac{1}{\alpha_g}, \quad (3.30)$$

slik at $T = T(u)$.

Dette medfører at de partiellderiverte i ligning 3.24 skrives:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial u} \left(\frac{r}{2t} \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial T}{\partial u} \right), \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{t} u \frac{\partial T}{\partial u}, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r}{2t} \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial}{\partial u}. \quad (3.33)$$

Videre blir venstre side i ligning 3.24:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{2t \alpha_g} \frac{\partial T}{\partial u} \right) \\
 &= \frac{1}{r} \left(\frac{r}{t \alpha_g} \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{r^2}{2t \alpha_g} \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\
 &= \frac{1}{r} \left(\frac{r}{t \alpha_g} \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{r^2}{4t \alpha_g} \frac{1}{t \alpha_g} \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha_g t} \left(\frac{\partial T}{\partial u} + u \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \right). \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

Ved å sette ligning 3.32 og 3.34 inn i ligning 3.24, vil tidsvariabelen t forsvinne. Vi sitter igjen med u som eneste variabel, slik at vi får en ordinær differensialligning:

$$\frac{d^2 T}{du^2} = - \left(1 + \frac{1}{u} \right) \frac{dT}{du}. \tag{3.35}$$

Ligning 3.35 kan løses for dT/du slik at vi får:

$$\frac{dT}{du} = C \frac{e^{-u}}{u}. \tag{3.36}$$

For å finne konstanten C bruker vi ligning 3.36 sammen med ligning 3.31 og grensebetingelsen gitt i ligning 3.27. I tillegg utnytter vi at $u \rightarrow 0$ når $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial T}{\partial r} = \lim_{u \rightarrow 0} 2u \frac{dT}{du} = \lim_{u \rightarrow 0} 2uC \frac{e^{-u}}{u} = 2C. \tag{3.37}$$

Dermed har vi:

$$C = \frac{\dot{q}_b}{4\pi\lambda_g}. \tag{3.38}$$

Temperaturfeltet, $T(r, t)$, kan vi finne ved å løse ligning 3.36 for $t \in [0, t]$:

$$\int_{T(r,0)}^{T(r,t)} \partial T = \frac{\dot{q}_b}{4\pi\lambda_g} \int_{u(r,0)}^{u(r,t)} \frac{e^{-u}}{u}. \tag{3.39}$$

Ved å utnytte initialbetingelsen i ligning 3.25 får vi:

$$T(r, t) - T_g = -\frac{\dot{q}_b}{4\pi\lambda_g} \int_{u(t,r)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} = -\frac{\dot{q}_b}{4\pi\lambda_g} E_i(u). \quad (3.40)$$

$E_i(u)$ kalles for eksponential-integralet og kan skrives som en rekkeutvikling:

$$E_i(u^*) = -\gamma - \ln(u) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n \cdot n!}, \quad (3.41)$$

der γ er Euler-Mascheroni-konstanten og tilnærmet lik 0.57721 [18]. Ligning 3.40 kan også skrives:

$$T(r, t) - T_g = -\dot{q}_b R_q, \quad (3.42)$$

der

$$R_q = \frac{1}{4\pi\lambda_g} E_i(u). \quad (3.43)$$

Faktoren R_q blir betraktet som den tidsavhengige termiske resistansen for en varmeledningsrate.

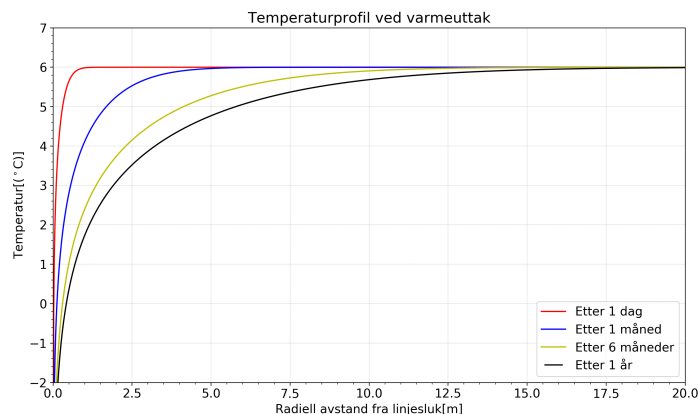
Ved å løse ligning 3.40 numerisk, kan temperaturprofilen i radiell retning for ulike tidsperioder illustreres, noe som vises i figur 3.3. Her det er antatt konstant varmeuttak langs borehullveggen. Parametere som er brukt for å komme frem til løsningene er gitt i tabell 3.1. Vi ser at etter ett år kan det observeres en temperaturendring i grunnen opp til 17 meter fra linjesluket. I integralet i ligning 3.40 får vi en singularitet når u går mot null, det vil si når avstanden fra linjesluket er liten. Dette gjenspeiles i temperaturprofilen, der vi observerer at temperaturen går mot uendelig når vi nærmer oss linjeslukets akse. Dette er fysisk umulig og begrenser derfor løsningen for små radielle avstander.

I følge [8] kan ligning 3.40 approksimeres som:

$$T(r = r_b, t) - T_g = -\dot{q}_b \frac{1}{4\pi\lambda_g} \left(\ln \left(\frac{4\alpha_g t}{r^2} \right) - \gamma \right), \quad (3.44)$$

der

$$5r_b^2/\alpha_g < t < t_s/10, \quad (3.45)$$



Figur 3.3: Temperaturprofilen i grunnen for ulike tidsperioder, der det ekstraheres varme fra grunnen. Løsningen er gitt ved den uendelige linjesluk-løsningen.

Parametere brukt i ULS-løsningen

T_g	6 °C
λ_g	1 W/mK
q	$-2\pi\lambda_g$
α_g	$10^{-6} m^2/s$
t	1 dag til 1 år
r	0 til 20 m

Tabell 3.1: Parametere brukt i den uendelige linjesluk-løsningen.

der $t_s = H^2/9\alpha_g$, og H er borehullets lengde. Den nedre grenseverdien vil være av orden timer i en reell situasjon, mens den øvre grensen vil være av orden år. Videre gir ligning 3.45 gyldighetsområdet for et borehull som approksimeres som et uendelig linjesluk, og i følge [1] vil ligning 3.44 gi en maksimal feil på 10% innenfor dette området. Dersom $\alpha_g t/r_b^2 > 20$ reduseres feilen til maksimalt 2.5%. Den nedre grensen er nødvendig, siden et borehull som approksimeres som et linjesluk antar at innsiden av borehullet har samme termiske egenskaper som området rundt, og vil følgelig ikke ta hensyn til egenskapene på innsiden av borehullet. Innenfor gyldighetsområdet vil radiell varmetransport være dominerende.

Dersom linjeslukløsningen skal evalueres innenfor borehullveggen, må det tas hensyn til effekten av den termiske resistansen R_b mellom væsken i kollektorslangen og borehullveggen. Ved å legge til et ekstra resistanseledd i ligning 3.40 får vi følgende

relasjon for den gjennomsnittlige temperaturen, \bar{T}_f , til væsken i kollektorslangen:

$$\begin{aligned}\bar{T}_f(t) &= T_b(t) - \dot{q}_b R_b^* \\ &= T_g - \dot{q}_b (R_q + R_b^*).\end{aligned}\tag{3.46}$$

der $T_b(t)$ er gitt ved ligning 3.40 eller ligning 3.44 for $r = r_b$. R_b^* er den konstante effektive resistansen definert i seksjon 4.1.1. Her \bar{T}_f gjennomsnittet av kollektorvæskens inngående temperatur T_{in} og utgående temperatur T_{ut} , gitt ved ligningen:

$$\bar{T}_f = \frac{T_{in} + T_{ut}}{2}.\tag{3.47}$$

Et eksempel på anvendelse av Kelvins linjeslukløsning er gjort i tillegg D.1.

3.2.2 Uendelig sylindersluk

Den uendelige sylindersluk-løsningen kan gi en bedre representasjon av borehullets geometri når fyllmassene og grunnens termiske egenskaper er forskjellig. Denne løsningen er en forbedring av Kelvins linjeslukmodell og betrakter borehullet som en uendelig sylinder, der varmeoverføringen foregår kontinuerlig fra tiden $t = 0$. Som med Kelvins linjeslukmodell antar også denne tilnærmingen at grunnens termiske egenskaper er konstante. Det eksisterer flere løsninger, som hver er utviklet med utgangspunkt i hvilke antagelser man gjør for innholdet i sylindere. Dette kan være antagelser som at:

- Innsiden av sylindere er tom, noe som betyr at innsiden ikke er en del av domenet som evalueres. Dette betyr at all varmestrom skjer fra sylinderveggen.
- Innsiden av sylindere er en perfekt leder med en spesifisert termisk kapasitet.
- Innsiden av sylindere er sammensatt av ulike lag med ulike termiske egenskaper.

Dersom den første antagelsen brukes kan vi sette opp følgende sett av ligninger:

1. Ligning 3.6 evalueres i radiell retning, og for $r \in [r_b, \infty)$ får vi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial T}{\partial t}.\tag{3.48}$$

2. Initialbetingelsen settes til:

$$T(r, t = 0) = T_g.\tag{3.49}$$

3. En Dirichlet betingelse ved grensen til reservoaret:

$$T(r \rightarrow \infty, t) = T_g. \quad (3.50)$$

4. Ved sylinderslukets radius defineres det en konstant varmekraft, altså en Neumann betingelse for $r = r_b$:

$$\dot{q}_b = -\lambda_g \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r_b, \quad t > 0. \quad (3.51)$$

Løsingen av ligningene 3.48 - 3.51 er gitt ved Carslaw og Jaeger [3, kap. 6]:

$$T(r, t) = T_g + \frac{\dot{q}_b}{\lambda_g} G(Fo, p), \quad (3.52)$$

der

- $Fo = \alpha_g t / r_b^2$, og kalles Fourier-tallet.
- $p = r / r_b$, altså forholdet mellom den radiale avstanden der temperaturen beregnes og radiusen til borehullet.
- $G(Fo, p)$ er den sylindriske slukfunksjonen og definert som:

$$G(Fo, p) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty f(\beta) d\beta, \quad (3.53)$$

der

$$f(\beta) = \left(e^{-\beta^2 Fo} - 1 \right) \frac{[J_0(p\beta)Y_1(\beta) - Y_0(p\beta)J_1(\beta)]}{\beta^2 [J_1^2(\beta) + Y_1^2(\beta)]}. \quad (3.54)$$

Her er J_0, J_1 og Y_0, Y_1 Bessel-funksjoner av henholdsvis første og andre orden.

Den sylindriske slukfunksjonen er kompleks og krevende å løse analytisk, og det er derfor vanlig at denne blir løst numerisk. En numerisk løsning av slukfunksjonen er vist i kapittel 5.1.

3.2.3 Endelig linjesluk

De foregående analytiske løsningene vil ikke oppnå en stasjonær tilstand, og vil derfor være en feil representasjon av temperaturutviklingen når tiden blir stor. For å få en bedre approksimasjon av temperaturutviklingen definerte Eskilson en endelig linjesluk modell som tar hensyn til varmetransport i både radiell og aksielle retning. Denne modellen tar blant annet hensyn til varmetapet ut av overflaten til reservoaret, slik at en stasjonær tilstand oppnås når tiden går mot uendelig. Følgende antagelser ble gjort [8]:

- To-dimensjonal varmetransport, i et homogent og isotropisk reservoar, med konstante termiske egenskaper. Dette fører til at temperaturfeltet skrives:

$$T \rightarrow T(r, z, t), \quad (3.55)$$

Videre blir varmeledning ligningen:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_g} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.56)$$

- Initialbetingelsen i reservoaret og grensebetingelsen ved overflaten settes til:

$$T(r, z, 0) = T_g. \quad (3.57)$$

$$T(r, 0, t) = T_g. \quad (3.58)$$

- En Dirichlet betingelse ved den radielle grensen til reservoaret:

$$T(r \rightarrow \infty, z, t) = T_g. \quad (3.59)$$

- Radiusen til borehullet er neglisjert, slik at det blir betraktet som et linjesluk med endelig lengde H , lokalisert en avstand D under overflaten til reservoaret (figur 3.4).
- En konstant varmeledningsrate per meter linjesluk, inn mot linjeslukets akse. Det vil si en Neumanbetingelse som skrives:

$$\frac{\dot{q}_b}{2\pi\lambda_g} = \lim_{r \rightarrow 0} r \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (3.60)$$

Løsningen av ligning 3.56 for en kontinuerlig punktkilde i et uendelig medium, som avgir varme \dot{q}_b fra tiden $t = 0$, er gitt av [19]:

$$T - T_g = \frac{q}{4\pi\lambda_g r} \operatorname{erfc} \left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha_g t}} \right). \quad (3.61)$$

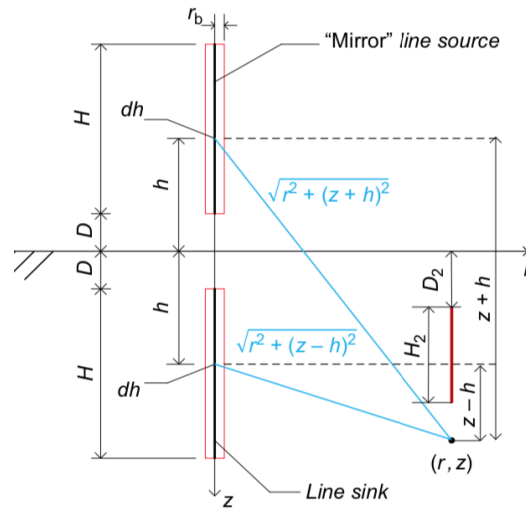
Eskilson [8] konstruerte den endelige linjeslukløsningen ved å integrere ligning 3.61 langs hele borehullet, og deretter anvende avbildningsmetoden ("method of images") for å få en konstant grensebetingelse ved overflaten ($T(r, 0, t) = 0$). Følgende løsning ble definert, og gir temperaturen i et punkt (r, z) etter en tid t , som vist i figur 3.4:

$$T(r, z, t) - T_g = -\frac{\dot{q}_b}{4\pi\lambda_g} \int_D^{H+D} \left[\frac{\operatorname{erfc}(r^+/\sqrt{4\alpha_g t})}{r^+} - \frac{\operatorname{erfc}(r^-/\sqrt{4\alpha_g t})}{r^-} \right] dh, \quad (3.62)$$

der $r^+ = \sqrt{r^2 + (z - h)^2}$, $r^- = \sqrt{r^2 + (z + h)^2}$. Som illustrert i figur 3.4 så er $T(r, z, t)$ temperaturen etter en tid t , lokalisert i en radiell avstand r fra linjeslukets akse og en dybde D fra overflaten til reservoaret. Videre er H lengden til linjesluket og $erfc$ kalles for feilfunksjonen og er definert i tillegg B. Merk at løsning 3.62 ikke er gyldig når tiden blir liten, der den nedre gyldighetsgrensen er gitt ved ligning 3.45.

Den stasjonære løsningen $T_s(r, z)$ får vi fra ligning 3.62 ved å la tiden gå mot uendelig og integrere. Eskillons approksimerte borehullstemperaturen ved borehullets midtpunkt ($z = H/2$), og ved å anta $D = 0$ kan den stasjonære løsningen skrives:

$$T_s = T_g - \frac{\dot{q}_b}{2\pi\lambda_g} \ln\left(\frac{H}{r_b\sqrt{4.6}}\right), \quad (r_b \ll H). \quad (3.63)$$



Figur 3.4: Geometrisk illustrasjon av et endelig linjesluk og dens avbildning. Figuren er hentet fra [20].

Kapittel 4

Matematisk modell for varmeveksling i borehullet

I dette kapitlet er det ønskelig å beskrive hvordan temperaturen til kollektorvæsken kan beregnes, samt å beskrive implementeringen av modell for naturlig konveksjon i pygfunction. I seksjon 4.1-4.2.3 vil modellen som pygfunction anvender for beregning av kollektorvæsketemperaturen for en U-formet kollektorslange, symmetrisk plassert i borehullet, beskrives. Formålet med denne delen er å gi leseren en innsikt i ligningene som anvendes i pygfunction når rommet mellom kollektorslangen og borehullveggen er fylt med fyllmasse. I seksjon 4.3 og 4.4 presenteres en empirisk løsning for å betrakte varmetransporten i grunnvannsfylte borehull der naturlig konveksjon oppstår. Videre i seksjon 4.5 beskrives det hvordan den empiriske løsningen kan implementeres i pygfunction, slik at den erstatter den opprinnelige metoden for å beregne kollektorvæsketemperaturen i borehullet. På denne måten vil pygfunction modifiseres for grunnvannsfylte borehull.

Den lokale regionen definerer område fra kollektorvæsken til borehullveggen. I denne regionen vil det transporteres varme med kollektorvæsken ved tvungen konveksjon. I tillegg vil varme transporteres på tvers av borehullet mellom kollektorvæsken og borehullveggen. For å knytte den lokale regionen sammen med den globale er vi spesielt interessert i å finne en relasjon mellom varmeraten \dot{q}_b og differansen mellom kollektorvæsketemperaturen T_v og temperaturen ved borehullveggen T_b . Matematisk kan relasjonen defineres ved følgende ligning [21]:

$$\dot{q}_{b,n}(z) = \frac{T_{v,n}(z) - T_{b,mi}(z)}{R_b(z)}, \quad 0 < z < H, \quad n \in \{1, 2\}, \quad (4.1)$$

Her vil H være den aktive lengden til borehullet, $T_{v,n}(z)$ er den midlere kollektorvæsketemperaturen til kollektorben n og $T_{b,mi}(z)$ er den midlere temperaturen

rundt borehullets omkrets. Videre er $\dot{q}_{b,n}(z)$ varmeraten (i W/m) fra kollektorben n til borehullveggen og R_b er den totale lokale resistansen mellom kollektorvæsken i kollektorben n og borehullveggen. En viktig antagelse i den videre analysen er at varmeraten mellom kollektorvæsken og borehullveggen har en stasjonær tilstand. Den nedre tidsgrensen t_b for en slik tilstand i borehullet er gitt ved ligningen [8]:

$$t_b \sim \frac{r_b^2}{\alpha_b}, \quad (4.2)$$

der r_b er radien til borehullet og α_b er den termiske diffusiviteten til borehullet. I praksis vil $t_b \sim 1$ time. Dette betyr at modellen som følger ikke vil være gyldig når temperaturene i borehullet har hyppige variasjoner.

Tverrsnittet av borehullet er sammensatt og består hovedsakelig av tre delområder: Kollektorvæsken, kollektorveggen og borehullets mellomrom. Ved å anta en stasjonær tilstand for varmeraten i borehullet, får vi at den totale lokale resistansen i ligning 4.1 kan skrives som summen av tre del-resistanser:

$$R_b = \frac{R_{ki}}{2} + \frac{R_k}{2} + R_m, \quad (4.3)$$

der R_{ki} er resistansen mellom kollektorvæsken og innsiden av kollektorbenet, R_k er resistansen mellom innsiden og yttersiden av kollektorveggen og R_m er resistansen mellom yttersiden av kollektorveggen og borehullveggen. De ulike del-resistansene er avhengig av de termiske og hydrodynamiske forholdene i område de refereres til og bestemmes ved å analysere varmetransporten i de respektive områdene.

Den totale lokale resistansen er en sentral parameter og vil ha stor innflytelse på varmetransporten siden denne er omvendt proporsjonal med varmeraten. I praksis er dette en viktig parameter å ha rett verdi på for en brønnpark siden en liten resistanse fører til at effektiviteten til brønnparken øker. Motsatt vil en stor resistanse redusere effektiviteten. I dette kapitlet vil vi ha spesielt fokus på hvordan de tre del-resistansene kan beregnes i sine respektive områder.

4.1 Temperaturen til kollektorvæsken

I denne seksjonen er målet å beskrive hvordan temperaturen til kollektorvæsken ut av borehullet kan beregnes for et borehull med en enkel U-formet kollektor. Beskrivelser i denne seksjonen følger fremstillingen gitt i [1]. Vi betrakter et borehull med en U-formet kollektorslange, der tverrsnittet er som vist på figur 4.1. Temperaturen til kollektorvæsken som strømmer nedover og oppover i kollektoren betegnes som henholdsvis $T_{f1}(z, t)$ og $T_{f2}(z, t)$. Siden væsken gradvis varmes opp i løpet av tiden

den er i borehullet vil $T_{f_1}(z, t) \neq T_{f_2}(z, t)$. Temperaturgradientene i aksial retning har liten størrelsesorden, slik at aksial varmeledning i væsken neglisjeres. Vi ender derfor opp med at vi i analysen må betrakte varmeraten mellom hvert enkelt kollektorben og borehullveggen, samt varmeraten mellom kollektorbenene.

Vi definerer følgende relasjoner mellom temperaturene og varmeratene i borehullet:

$$T_{f_1}(z, t) - T_{b,mi} = R_{1,1}q_1(z) + R_{1,2}q_2(z), \quad (4.4)$$

$$T_{f_2}(z, t) - T_{b,mi} = R_{1,2}q_1(z) + R_{2,2}q_2(z). \quad (4.5)$$

Her er $R_{1,1}$ resistansen mellom kollektorben 1 og borehullveggen, $R_{1,2}$ er resistansen mellom kollektorbenene og $R_{2,2}$ resistansen mellom kollektorben 2 og borehullveggen. I tillegg er \dot{q}_1 og \dot{q}_2 varmeratene mellom kollektorvæsken i kollektorben 1 og 2 og borehullveggen. Videre kan vi ved å definere et trekantkoplest resistansenettverk i borehullet, som vist i figur 4.1, definere følgende ligninger for varmeratene:

$$q_1(z) = \frac{T_{f_1}(z) - T_{b,mi}}{R_1^\Delta} + \frac{T_{f_1}(z, t) - T_{f_2}(z, t)}{R_{12}^\Delta}, \quad (4.6)$$

$$q_2(z) = \frac{T_{f_2}(z, t) - T_{b,mi}}{R_2^\Delta} + \frac{T_{f_2}(z, t) - T_{f_1}(z, t)}{R_{12}^\Delta}, \quad (4.7)$$

der de ulike resistansene i nettverket er definert ved ligningene:

$$R_1^\Delta = \frac{R_{1,1}R_{2,2} - (R_{1,2})^2}{R_{2,2} - R_{1,2}}, \quad (4.8)$$

$$R_2^\Delta = \frac{R_{1,1}R_{2,2} - (R_{1,2})^2}{R_{1,1} - R_{1,2}}, \quad (4.9)$$

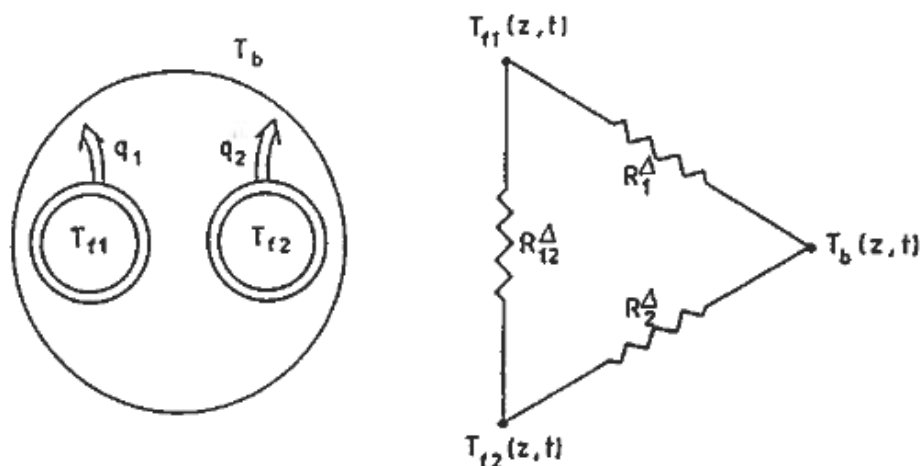
$$R_{12}^\Delta = \frac{R_{1,1}R_{2,2} - (R_{1,2})^2}{R_{1,2}}. \quad (4.10)$$

Ved å anta $T_{f_1}(z) = T_{f_2}(z) = T_v(z)$ kan problemet forenkles slik at vi kan definere et uttrykk for den lokale borehull resistansen R_b definert i ligning 4.1. Resistansen mellom temperaturen til kollektorvæsken og borehullveggen vil da eksistere av to parallellkoplete resistanser, R_1^Δ og R_2^Δ , slik at vi får:

$$R_b = \frac{R_1^\Delta R_2^\Delta}{R_1^\Delta + R_2^\Delta}. \quad (4.11)$$

Videre er det vanlig at kollektorbenene er symmetrisk posisjonert i borehullet. Ved en slik antagelse vil $R_1^\Delta = R_2^\Delta$, slik at ligningen for resistansen i borehullet forenkles til:

$$R_b = \frac{1}{2}R_1^\Delta. \quad (4.12)$$



Figur 4.1: Tverrsnitt av borehull og illustrasjon trekantkopletr resistansenettverk. Tverrsnitt av et borehull med en enkel U-format kollektorlange. Figuren til høyre viser en illustrasjon av et trekantkopletr resistansenettverk som anvendes for denne type borehullkonfigurasjon. Figuren er hentet fra [1].

Varmen som transporteres med kollektorvæsken balanseres med varmestrømmen mellom kollektorvæsken og borehullveggen. Dette kan beskrives ved følgende ligninger:

$$-\rho_v c_{p_v} \dot{m} \frac{\partial T_{f1}}{\partial z} = \dot{q}_1(z), \quad 0 \leq z \leq H \quad (4.13)$$

og

$$\rho_v c_{p_v} \dot{m} \frac{\partial T_{f2}}{\partial z} = \dot{q}_2(z), \quad 0 \leq z \leq H, \quad (4.14)$$

der produktet $\rho_v c_{p_v}$ er den volumetriske varmekapasiteten til kollektorvæsken, \dot{m} er massestrømhastigheten til kollektorvæsken, H er lengden til borehullet. Videre er \dot{q}_1 og \dot{q}_2 definert i henholdsvis ligning 4.6 og 4.7. Ligning 4.13 og 4.14 kan løses

ved en Laplace transformasjon. Dette er gjort av [22], som utledet temperaturen til kollektorvæsken i hvert kollektorben, gitt ved ligningene:

$$T_{f_1}(z, t) = T_{f_1}(0, t)f_1(z) + T_{f_2}(0, 2)f_2(z) + \int_0^z T_b(\xi, t)f_4(z - \xi)d\xi \quad (4.15)$$

og

$$T_{f_2}(z, t) = -T_{f_1}(0, t)f_2(z) + T_{f_2}(0, 2)f_3(z) - \int_0^z T_b(\xi, t)f_5(z - \xi)d\xi, \quad (4.16)$$

der funksjonene f_1, \dots, f_5 er gitt ved ligningene:

$$f_1(z) = e^{\beta z} [\cosh(\gamma z) - \delta \sinh(\gamma z)], \quad (4.17)$$

$$f_2(z) = e^{\beta z} \frac{\beta_{12}}{\gamma} \sinh(\gamma z), \quad (4.18)$$

$$f_3(z) = e^{\beta z} [\cosh(\gamma z) + \delta \sinh(\gamma z)], \quad (4.19)$$

$$f_4(z) = e^{\beta z} \left[\beta_1 \cosh(\gamma z) - \left(\delta \beta_1 + \frac{\beta_1 \beta_{12}}{\gamma} \right) \sinh(\gamma z) \right], \quad (4.20)$$

$$f_5(z) = e^{\beta z} \left[\beta_2 \cosh(\gamma z) - \left(\delta \beta_2 + \frac{\beta_1 \beta_{12}}{\gamma} \right) \sinh(\gamma z) \right]. \quad (4.21)$$

Videre vil

$$\beta_1 = \frac{1}{R_1^\Delta \rho_v c_{p_v} \dot{m}}, \quad (4.22)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{R_2^\Delta \rho_v c_{p_v} \dot{m}}, \quad (4.23)$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{R_{12}^\Delta \rho_v c_{p_v} \dot{m}}, \quad (4.24)$$

$$\beta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}, \quad (4.25)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{(\beta_1 + \beta_2)^2}{4} + \beta_{12}(\beta_1 + \beta_2)}, \quad (4.26)$$

$$\gamma = \frac{1}{\gamma} \left(\beta_{12} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \right). \quad (4.27)$$

Ved å evaluere ligning 4.15 og 4.16 ved $z = 0$, kan temperaturen til kollektorvæsken ut av borehullet beregnes. Videre gir [1] følgende uttrykk for denne temperaturen:

$$T_{f2}(z = 0, t) = \frac{f_1(H) + f_2(H)}{f_3(H) - f_2(H)} T_{f1}(z = 0, t) + \int_0^H \frac{T_b(\xi, t) [f_4(H - \xi) + f_5(H - \xi)]}{f_3(H) - f_2(H)} d\xi. \quad (4.28)$$

For å løse ligning 4.28 krever det at vi kjenner temperaturen langs borehullveggen, T_b . Denne temperaturen settes vanligvis som en grensebetingelse. Videre observerer vi at resistansene R_1^Δ , R_2^Δ og R_{12}^Δ må bestemmes for at temperaturen til kollektorveggen skal kunne beregnes. For et borehull fylt med fyllmasse anvendes Multipolmetoden for å bestemme resistansene. Dersom borehullet er fylt med grunnvann må resistansene bestemmes ved en empirisk korrelasjon mellom dimensjonsløse tall. Før vi beskriver metodene for å beregne resistansene i resistansenettverket, skal vi i neste seksjon presentere en løsning av ligning 4.13 og 4.14, der en effektiv resistanse vil defineres.

4.1.1 Effektiv borehull-resistanse

Ved å definere ligning 4.1 for hele borehullet får vi at den formuleres på følgende form:

$$\bar{q}_b = \frac{\bar{T}_v - \bar{T}_b}{R_b^*}. \quad (4.29)$$

Her er \bar{T}_v den midlere temperaturen til kollektorvæsken, definert i ligning 3.47. Videre er \bar{T}_b den midlere temperaturen ved borehullveggen gitt ved ligningen [21]:

$$\bar{T}_b = \frac{1}{H} \int_0^H T_{b,mi}(z) dz. \quad (4.30)$$

Videre er \bar{q}_b den midlere varmeraten fra kollektorvæsken til borehullveggen summert over hele borehullet, og gitt ved ligningen [21]:

$$\bar{q}_b = \frac{1}{H} \int_0^H [q_1(z) + q_2(z)] dz, \quad (4.31)$$

der $q_1(z)$ og $q_2(z)$ er definert i ligning 4.6 og 4.7. Videre defineres R_b^* som den effektive resistansen.

Forskjellen på den totale lokale resistansene definert i ligning 4.3 og den effektive resistansen, er at den sistnevnte tar hensyn til varmetransporten som oppstår mellom kollektorbenene langs hele borehullet. Dette er en effekt som betegnes som *kortslutning*, og fører til at temperaturdifferansen mellom inn- og utgående væsketemperatur fra borehullet reduseres. Med andre ord vil kortslutningseffekten gi økt resistanse i borehullet, der størrelsen er avhengig av borehullets lengde, posisjonen til kollektorbenene i borehullet og kollektorvæskens strømningsrate. Generelt har vi at:

$$R_b^* > R_b, \quad (4.32)$$

der R_b^* kan være alt fra noen få prosent til flere hundre prosent større enn R_b . På figur 4.2 ser vi et eksempel på denne forskjellen der den effektive resistansen øker med lengden til borehullet, mens den lokale resistansen holder seg konstant.

Vi kan løse ligning 4.13 og 4.14 for Dirichlet grensebetingelsen: uniform temperatur langs borehullveggen. Videre kan en teoretisk relasjon mellom den effektive og totale lokale resistansen defineres. Løsningen er gitt av [1] og formuleres ved ligningen:

$$R_b^* = R_b \eta \coth(\eta), \quad (4.33)$$

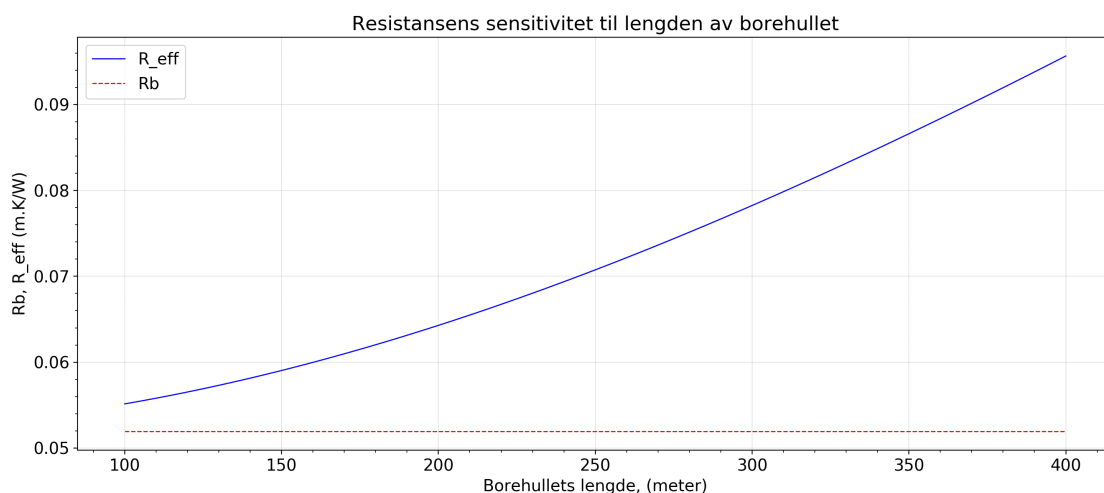
der

$$\eta = \frac{H}{C_v V_v} \frac{1}{2R_b} \sqrt{1 + 4 \frac{R_b}{R_{12}^\Delta}}. \quad (4.34)$$

Her er C_v den volumetriske varmekapasiteten til kollektorvæsken¹, V_v er den volumetriske strømningsraten til kollektorvæsken, R_b er den lokale resistansen og R_{12} er den termiske resistansen mellom de to kollektorbenene. Figur 4.3 viser den effektive (svart linje) resistansen og lokale resistansens (grønn linje) sensitivitet til kollektorvæskens strømningsrate for et grunnvannsfyllt borehull med lengde 200 meter. Vi

¹Se seksjon A.3 for en definisjon av volumetrisk varmekapasitet.

observerer at når strømningsforholdene til kollektorvæsken beveger seg fra det turbulente til det laminære regimet, vil den effektive resistansen vokse. Samtidig vil avviket til den lokale resistansen øke med flere hundre prosent.



Figur 4.2: Resistansens sensitivitet til borehullets lengde for et grunnvannsfylt borehull. Blå linje viser den effektive resistansen, mens rød linje viser den lokale resistansen. Vi observerer at den effektive resistansen øker med lengden til borehullet. En tilsvarende sensitivitet vil også gjelde for et borehull fylt med fyllmasse.

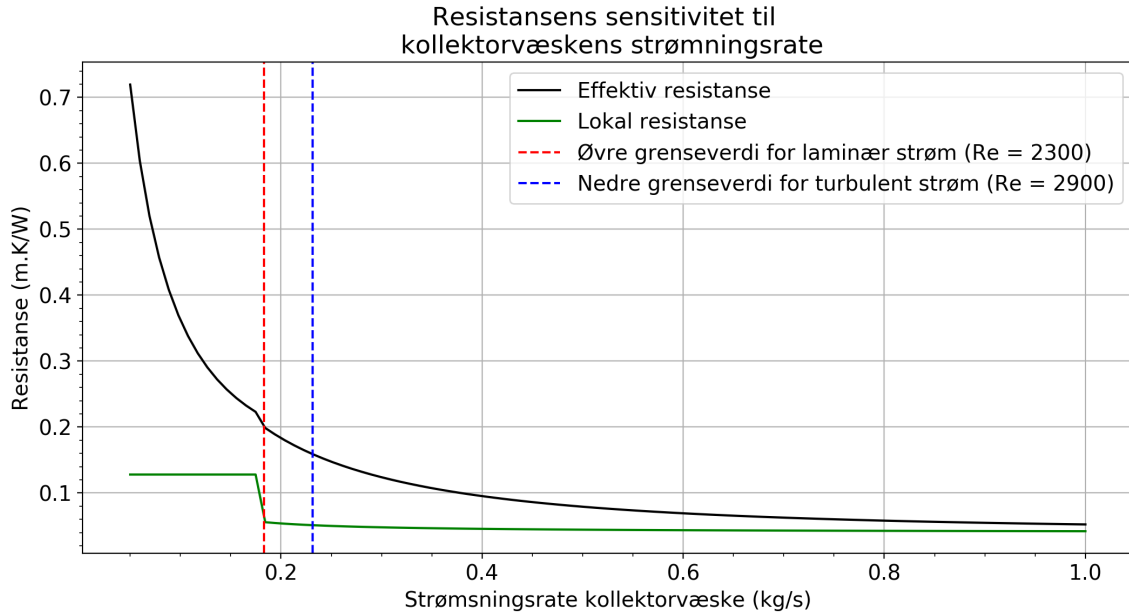
4.2 Resistansen i borehullet ved varmeledning

4.2.1 Multipol-metoden

Beskrivelser i denne seksjonen følger fremstillingen gitt i [21] og [23]. Multipol-metoden er en kompleks algoritme som anvendes for å beregne resistansen i borehullet for hvilken som helst konfigurasjon av kollektorslangen. Metoden antar et to-dimensjonalt system der all varmetransport i borehullets mellomrom er ved varmeledning og varmeraten er stasjonær. Dette betyr at den regulerende ligningen vil være varmeledningsligningen beskrevet i seksjon 3.1. For en konstant varmeledningsevne får vi følgende ligning i kartesiske koordinater:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (4.35)$$

Videre antas det følgende grensebetingelser:



Figur 4.3: Resistansens sensitivitet til kollektorvæskens strømningsrate for et grunnvannsfylt borehull med lengde 200 meter. Den røde og blå stiplede linjen viser de teoretiske grenseverdiene for overgangen fra turbulent til laminær strøm. Svart og grønn linje viser henholdsvis den effektive og lokale resistansen. I overgangsfasen ($2300 < Re < 2900$) vil strømningsforholdene irregulært veksle mellom laminær og turbulent strøm. I simuleringen antas det at strømningsforholdene beveger seg fra laminær til turbulent strøm når Reynoldtallet har verdien $Re = 2300$. Dette er grunnen til “hoppet” vi observerer på grafen.

- Ved borehullveggen antas det at temperaturen og den radielle varmestrømmen er kontinuerlige fra innsiden til yttersiden av borehullveggen. Dette kan beskrives i polarkoordinater ved ligningene:

$$T(r_b^-, \phi) = T(r_b^+, \phi), \quad -\pi < \phi < \pi \quad (4.36)$$

$$\lambda_m \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r_b^-} = \lambda_g \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r_b^+}, \quad -\pi < \phi < \pi \quad (4.37)$$

der r_b^- og r_b^+ er radien ved henholdsvis innsiden og utsiden av borehullveggen.

- Ved kollektorslangen antas det at kollektorvæsketemperaturen er konstant langs omkretsen til kollektoren. Dette kan beskrives i polarkoordinater med ligningen:

$$T_v(\phi) = \text{konstant} = T_v. \quad (4.38)$$

For å beskrive temperaturfeltet i borehullet anvender Multipol-metoden en superponering av multipoler og varmesluk lokalisert i sentrum av hvert kollektorben. Metoden gir følgende generelle ligning for temperaturfeltet i borehullet:

$$T(x, y) = T_{b_{mi}} + \Re \left[\sum_{n=1}^N \frac{\dot{q}_n}{2\pi\lambda_g} W_0(z, z_n) + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J P_{n,j} W_j(z, z_n) \right], \quad (4.39)$$

der $T_{b_{mi}}$ er den midlere temperaturen langs omkretsen til borehullet, \Re betegner den reelle delen, λ_g er varmeledningsevnen til grunnen og z_n er et imaginert tall som angir posisjonen til sentrum av kollektorben n . W_0 er linjeslukene med styrke q_n , der q_n er varmeraten fra kollektorben n . W_j multipoler av j -te orden med styrke $P_{n,j}$, der $P_{n,j}$ er et kompleks tall. W_0 , W_j og $P_{n,j}$ bestemmes iterativt, og beregningen av disse vil ikke beskrives i denne oppgaven. Leseren henvises til [21] for detaljer vedrørende ligningene som anvendes for beregningene av tallene. Styrken til multipolene er definert slik at en høyere orden gir flere korreksjonsledd, slik at nøyaktigheten til bergingene økes. Generelt vil en orden av $j=2$ eller $j=3$ være tilstrekkelig for minst tre desimalers nøyaktighet når resistansen beregnes. Videre vil vi presentere løsningen for å beregne resistansen for en enkel U-formet kollektorslange siden dette er relevant for denne oppgaven.

For en enkel U-formet kollektorslange er løsning av ligning 4.39 på følgende form:

$$T_{f1} = T_{b_{mi}} + \dot{q}_1 R_{1,1}^J + \dot{q}_2 R_{1,2}^J, \quad (4.40)$$

$$T_{f2} = T_{b_{mi}} + \dot{q}_1 R_{2,1}^J + \dot{q}_2 R_{2,2}^J, \quad (4.41)$$

der resistansene er definert som i ligning 4.4 og 4.5, og J betegner antall multipoler som tas med i beregningen. For den 0 -te orden multipole er resistansene gitt ved ligningen:

$$R_{m,n}^0 = \frac{1}{2\pi\lambda_m} \cdot \begin{cases} \ln\left(\frac{r_b}{r_{ky}}\right) + \omega + \sigma \cdot \ln\left(\frac{r_b^2}{r_b^2 - r_{ky}^2}\right), & m = n, \\ \ln\left(\frac{r_b}{r_{ky}}\right) + \sigma \cdot \ln\left(\frac{r_b^2}{|r_b^2 - \bar{z}_m \cdot z_n|}\right), & m \neq n. \end{cases} \quad (4.42)$$

der $m, n \in \{1, 2\}$, mens σ og ω er dimensjonsløse parametere definert ved ligningene:

$$\sigma = \frac{\lambda_m - \lambda_g}{\lambda_m + \lambda_g} \quad (4.43)$$

og

$$\omega = 2\pi\lambda_m R_{vk}. \quad (4.44)$$

Her er $R_{vk} = R_{ki} + R_k$ resistansen mellom kollektorvæsken og yttersiden av kollektorbenet, der de individuelle resistansene R_{ki} og R_k er definert i henholdsvis ligning 4.49 og 4.58. Videre kan det regnes ut høyere ordens multipoler, som vil adderes som korreksjonsledd til $R_{m,n}^0$. Deretter kan ligning 4.42 med eventuelle korreksjonsledd anvendes i ligning 4.8 - 4.10 for å bestemme resistansene i det trekoplete resistansenettverket. I tillegg kan den totale resistansen R_b bestemmes ved ligning 4.12 for symmetrisk plassert kollektorslange.

4.2.2 Resistansen mellom kollektorvæsken og kollektorveggen

Beskrivelser i denne seksjonen følger fremstillingen gitt i [13] og [1]. Målet med følgende beskrivelser er å gi en kort utledning av resistansen R_{ki} mellom kollektorvæsken og innsiden av kollektorveggen. Når kollektorvæsken strømmer gjennom kollektorslangen vil det dannes et hydrodynamisk og termisk grenselag mellom innsiden av kollektorveggen og kollektorvæsken. Vi antar at hastighetsprofilen til væsken er fullt utviklet¹, slik at grenselagene påvirker hele væskestrømmen i kollektorslangen. Videre antar vi at væskestrømmen er turbulent, noe som er vanlig for en brønnpark. Varmetransporten på tvers av grenselaget kan beskrives ved Newtons kjølelov, gitt ved ligningen:

$$\frac{\dot{q}_b(z)}{D} = h(T_{kv}(z) - T_f(z)), \quad (4.45)$$

der $T_f(z)$ er gjennomsnittstemperaturen til væsken, $T_{kv}(z)$ er temperaturen ved innsiden av kollektorveggen og $D = 2r_{ki}$ er diameteren til kollektorslangen. Videre krever ligning 4.45 at vi kjenner til filmkoeffisienten som er en faktor som vil variere med strømningsforholdene i kollektoren. Generelt kan denne bestemmes ved ligningen:

$$h_v = \frac{\lambda_v Nu_k}{D_k}, \quad (4.46)$$

der λ_v er kollektorvæskens varmeledningsevne og $D_k = 2r_{ki}$ er den hydrauliske diameteren. Nu_k er Nusselttallet² gitt ved den empiriske korrelasjonen for turbulent

¹Når en væske entrer et rør vil det oppstå et grenselag, som øker gradvis fra rørråpningen. Når dette grenselaget påvirker væskestrømmen i hele røret sier vi at væsken har en fullt utviklet hastighetsprofil.

²Nusselttallet defineres i seksjon 4.3.

strøm:

$$Nu_k = \frac{(f/8)(Re_k - 1000)Pr}{1 + 12.7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)}, 0.5 \lesssim Pr \lesssim 2000, 3000 \lesssim Re_k \lesssim 5 \cdot 10^6. \quad (4.47)$$

Her er Pr Prandt-tallet definert i ligning 4.74 og Re_k er Reynoldtallet definert i ligning B.1. Videre betegnes f som friksjonsfaktoren, og er en dimensjonsløs parameter som definerer trykkfallet til kollektorvæsken. Faktoren er gitt ved korrelasjonen:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left[\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_k \sqrt{f}} \right], \quad (4.48)$$

der ϵ er ruheten til overflaten på innsiden av kollektorslangen.

Ved definisjonen av termisk resistanse i seksjon 2.3 kan vi definere den termiske resistansen, R_{ki} , mellom kollektorvæsken og innsiden av borehullveggen ved dybden z . Denne vil være gitt ved ligningen:

$$R_{ki} = \frac{1}{2\pi r_{ki} h_v}. \quad (4.49)$$

Grensebetingelsene som anvendes i dette område vil være en Neuman- og en Dirichlet betingelse:

1. Konstant temperatur T_{kv} langs kollektorveggen. I dette tilfelle vil kollektorvæsketemperaturen tilfredsstillende ligningen:

$$\rho_v c_{p_v} V_v \frac{dT_v}{dz} = \frac{1}{R_{ki}} (T_v(z) - T_{kv}). \quad (4.50)$$

Her er c_{p_v} den spesifikke isobariske varmekapasiteten til væsken, ρ_v er tettheten til væsken, V_v er den volumetriske strømningshastigheten til væsken, R_{ki} er definert ved ligning 4.49 og z er lengden langs kollektorslangen.

2. Konstant varmfluks \hat{q} langs kollektorveggen. I dette tilfelle vil kollektorvæsketemperaturen tilfredsstillende ligningen:

$$\rho_v c_{p_v} V_v \frac{dT_v(z)}{dz} = \hat{q}. \quad (4.51)$$

Den empiriske korrelasjonen i ligning 4.47 kan anvendes for begge grensebetingelsene.

4.2.3 Resistansen mellom innsiden og yttersiden av kollektorveggen

I denne seksjonen vil resistansen R_k mellom innsiden av kollektorveggen og utsiden av kollektorveggen utledes. Beskrivelsene som følger tar utgangspunkt i [24]. Vi antar at varmeledningsevnen i kollektorveggen er konstant, og at varmeraten har en stasjonær tilstand i denne delen. Dersom vi i tillegg antar at vi bare har en temperaturgradient i radiell retning, kan vi betrakte en forenklet versjon av ligning 3.7 for å beskrive temperaturfeltet i kollektorveggen ved en gitt dybde fra overflaten:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.52)$$

Her kan ligning 4.52 enkelt løses ved å integrere den to ganger, slik at vi får den generelle løsningen:

$$T(r) = C_1 \ln(r) + C_2. \quad (4.53)$$

Integrasjonskonstantene, C_1 og C_2 , bestemmer vi ved å sette følgende grensebetingelser:

$$T(r_{ki}) = T_{ki}; \quad T(r_{ky}) = T_{ky}, \quad (4.54)$$

der $T(r_{ki})$ og $T(r_{ky})$ er temperaturen på henholdsvis innsiden og utsiden av kollektorlangen. Ved å anvende grensebetingelsene på ligning 4.53 får vi:

$$T_{ki} = C_1 \ln(r_{ki}) + C_2; \quad T_{ky} = C_1 \ln(r_{ky}) + C_2. \quad (4.55)$$

Videre kan ligning 4.55 løses for C_1 og C_2 , og ved å sette løsningene inn i den generelle løsningen ender vi opp med følgende ligning for temperaturfeltet i kollektorveggen:

$$T(r) = \frac{T_{ki} - T_{ky}}{\ln\left(\frac{r_{ki}}{r_{ky}}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_{ky}}\right) + T_{ky}. \quad (4.56)$$

Ved å sette ligningen for temperaturfeltet inn i Fouriers lov i radiell retning (første ledd i ligning 2.6) får vi et endelig uttrykk for varmeledningsraten i kollektorveggen:

$$\dot{q}_b = \frac{2\pi\lambda_k(T_{ki} - T_{ky})}{\ln\left(\frac{r_{ky}}{r_{ki}}\right)}, \quad (4.57)$$

der λ_k er varmeledningsevnen til kollektorveggen. Med utgangspunkt i definisjonen for den termiske resistansen i seksjon 2.3 vil den termiske resistansen i kollektorveggen være gitt ved ligningen:

$$R_k = \frac{\ln(r_{ky}/r_{ki})}{2\pi\lambda_k}. \quad (4.58)$$

Merk at ligning 4.57 og 4.58 er definert for en gitt dybde z til borehullet og for det ene kollektorbenet. Temperaturene T_{ki} og T_{ky} vil i virkeligheten variere med dybden til borehullet.

4.3 Resistansen i borehullet ved naturlig konveksjon

Følgende beskrivelse følger fremstillingen gitt i [13] og [25]. Dersom borehullets mellomform er fylt med grunnvann vil naturlig konveksjon oppstå i dette område, dersom det eksisterer en temperaturgradient mellom kollektorvæsken og borehullveggen. Videre vil det dannes et hydrodynamisk- og termisk grenselag langs yttersiden av kollektorslangen og innsiden av borehullveggen. Dette medfører at den termiske resistansen R_m (definert i ligning 4.3) ikke kan betraktes med utgangspunkt i varmeledning. Derimot vil resistansen være en sum av to konvektive resistanser, gitt ved ligningen:

$$R_m = \frac{R_{ky}}{2} + R_{BHV}, \quad (4.59)$$

der R_{ky} er den termiske resistansen mellom yttersiden av kollektorveggen og grunnvannet, og R_{BHV} er den termiske resistansen mellom borehullveggen og grunnvannet. Videre skal vi beskrive hvordan de to konvektive resistansene kan bestemmes.

I analysen av varmetransport på tvers av grenselaget er betraktningen av dimensjonsløse tall viktig, da de gjør det mulig å anvende resultater oppnådd for en gitt geometri med et gitt sett av betingelser til geometrisk *identiske* områder med andre betingelser. Videre utleder vi fire sentrale dimensjonsløse tall ved å betrakte naturlig konveksjon langs en vertikal plate.

Vi betrakter en vertikal plate med temperatur T_s og en væske med temperatur T_∞ som berører platen, der $T_s > T_\infty$. Videre definerer vi et todimensjonalt koordinat-system, der y - og z -aksen er henholdsvis normalt og parallelt med platen. Væsken som beveger seg vil ha en fartskomponent u i z -retning og en fartskomponent v i y -retning.

Vi definerer følgende regulerende ligninger for området:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (4.60)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.61)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial y} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (4.62)$$

Her betegnes ligning 4.60 som kontinuitetsligningen og beskriver konservering av masse. Videre betegnes ligning 4.61 som Navier Stokes ligning og beskriver bevegelsen til væsker. Til sist betegnes ligning 4.62 som energiligningen, og beskriver bevaring av energi. Koeffisienten β er definert som den volumetriske ekspansjonskoeffisienten, og er et mål på hvordan tettheten til væsken endrer seg med temperaturen. Koeffisienten er gitt ved ligningen:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (4.63)$$

Videre vil grensebetingelsene for ligning 4.60 - 4.62 være på følgende form:

$$y = 0 : u = v = 0; T = T_s, \quad (4.64)$$

$$y \rightarrow \infty : u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty. \quad (4.65)$$

Analysen av den naturlige konveksjonen kan forenkles ved å innføre dimensjonsløse variabler. Vi introduserer følgende:

$$y^* \equiv \frac{y}{L}, \quad (4.66)$$

$$z^* \equiv \frac{z}{L}, \quad (4.67)$$

$$u^* \equiv \frac{u}{u_0}, \quad (4.68)$$

$$v^* \equiv \frac{v}{u_0}, \quad (4.69)$$

$$T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}. \quad (4.70)$$

Her er L en karakteristisk lengde og u_0 en referansehastighet. Ved å velge $u_0 = \sqrt{g\beta(T_s - T_\infty)L}$, kan ligning 4.61 og 4.62 videre defineres på dimensjonsløs form:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = T^* + \frac{1}{Gr_L^{1/2}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}. \quad (4.71)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Gr_L^{1/2} \cdot Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}}, \quad (4.72)$$

der Gr_L er det dimensjonsløse Grashof-tallet, definert ved ligningen:

$$Gr_L \equiv \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (4.73)$$

og gir forholdet mellom oppdriftskrefter og viskøse krefter i væsken. Pr er det dimensjonsløse Prandtl-tallet, definert ved ligningen:

$$Pr \equiv \frac{\nu_v}{\alpha_v}, \quad (4.74)$$

og gir forholdet mellom kinematisk viskositet og termisk diffusivitet til væsken. Merk at Grashoftallet er avhengig av den karakteristiske lengden som velges, mens Prandtl-tallet er uavhengig av denne og betegnes som en egenskap til væsken.

Ved å kombinere ligning 2.7, ligning 2.8 og de dimensjonsløse variablene får vi følgende relasjon:

$$h = -\frac{\lambda_v(T_\infty - T_s)}{L(T_s - T_\infty)} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y=0} = +\frac{\lambda_v}{L} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y=0}. \quad (4.75)$$

Ved ligning 4.75 kan vi introdusere det dimensjonsløse Nusselttallet, definert ved ligningen:

$$Nu \equiv \frac{hL}{\lambda_v} = +\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y=0}. \quad (4.76)$$

Nusselttallet er lik den dimensjonsløse temperaturgradienten ved overflaten og beskriver forholdet mellom konvektiv varmetransport og varmeledning ved overflaten til platen. Ved å kjenne til Nusselttallet kan filmkoeffisienten beregnes, og videre kan

varmeraten på tvers av grenselaget beregnes ved ligning 2.8. Følgelig vil kjennskap til dette tallet være sentralt i analysen av varmetransport mellom faste flater og væsker.

Ved naturlig konveksjon er det vanlig å innføre det dimensjonsløse Rayleigtallet Ra , som generelt er definert som produktet mellom Grashoftallet og Prandttallet:

$$Ra = Gr_L \cdot Pr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu_v\alpha_v}. \quad (4.77)$$

Rayleigtallet beskriver strømningsforholdene i grenselaget ved naturlig konveksjon. Dersom Rayleigh-tallet er under en gitt kritisk verdi vil den naturlige konveksjonen oppholde, slik at all varmetransport vil foregå ved varmeledning. I noen sammenhenger anvendes en modifisert versjon av Rayleigh-tallet, gitt ved ligningen [11]:

$$Ra^* = \frac{g\beta\hat{q}_bL^4}{\lambda_v\nu_v\alpha_v}, \quad (4.78)$$

der \hat{q}_b er varmekraften på den respektive overflaten. Videre, for en *gitt geometri*, kan vi anta at Nusseltallet er en funksjon av Rayleigtallet:

$$Nu = f(Ra), \quad (4.79)$$

der relasjonen kan bestemmes eksperimentelt eller teoretisk. I seksjon 4.4 vises det hvordan en eksperimentell tilnærming kan gjennomføres for geometrien i et grunnvannsfyllt borehull med en enkel U-formet kollektorslange. Når denne relasjonen er kjent kan filmkoeffisientene, h_{ky} og h_{BHV} , ved henholdsvis kollektorveggenes ytterside og borehullets innside bestemmes ved ligning 4.76, slik at vi får

$$h_{ki} = \frac{\lambda_{gv}Nu_{ki}}{D_m} \quad (4.80)$$

og

$$h_{BHV} = \frac{\lambda_{gv}Nu_{BHV}}{D_m}, \quad (4.81)$$

der D_m er en karakteristisk lengde som assosieres med borehullgeometrien, λ_{gv} er varmeledningsevnen til grunnvannet, Nu_{ky} er Nusseltallet ved kollektorens ytterside

og Nu_{BHV} er Nusseltallet ved innsiden av borehullveggen. Deretter, ved ligning 2.9 får vi at de konvektive resistansene defineres ved ligningene:

$$R_{ky} = \frac{1}{4\pi r_{ky} h_{ky}} \quad (4.82)$$

og

$$R_{BHV} = \frac{1}{2\pi r_b h_{BHV}}. \quad (4.83)$$

Videre kan ligning 4.82 og 4.83, sammen med ligning 4.49 og 4.58, anvendes til å bestemme den totale termiske resistansen, R_b , gitt ved ligning 4.3. Ved å anta at kollektorbenene er symmetrisk plassert i borehullet kan resistansene, R_1^Δ og R_2^Δ , deretter bestemmes ved ligning 4.12. Videre får vi at resistansen R_{12}^Δ kan bestemmes ved ligningen [1]:

$$R_{12}^\Delta = 2(R_{ki} + R_k + R_{ky}). \quad (4.84)$$

4.4 Empirisk løsning for resistansen i borehullet ved naturlig konveksjon

For at de konvektive resistansene i ligning 4.82 og 4.83 skal bestemmes må en empirisk korrelasjon mellom Nusselt- og Rayleigh-tallet utvikles for geometrien i borehullet. En slik korrelasjon er utviklet av [11] for en enkel U-formet kollektorslange. Dette ble gjennomført ved å utføre 39 målinger fra 5 ulike termisk responstester for et grunnvannsfyllt borehull. Følgende 4 parametere ble betraktet i hver måling:

- Midlere temperatur til kollektorvæsken.
- Den effektive termiske resistansen.
- Midlere temperatur til grunnvannet i borehullets mellomrom.
- Varmelasten fra kollektorvæsken.

Videre beskriver vi hvordan Nusselt- og Rayleigh-tallet ble beregnet for hver av de 39 målingene. Det modifiserte Rayleigh-tallet på yttersiden av kollektorslangen Ra_{ky} , og på innsiden av borehullveggen Ra_{BHV} , ble bestemt med utgangspunkt i ligning 4.78, slik at de defineres som:

$$Ra_{ky}^* = \frac{g\beta\hat{q}_{po}D_m^4}{\lambda_g\nu_g\alpha_g} \quad (4.85)$$

og

$$Ra_{BHV}^* = \frac{g\beta\hat{q}_{BHV}D_m^4}{\lambda_g\nu_g\alpha_g}. \quad (4.86)$$

Her er g tyngdeakselerasjonen, λ_g er grunnvannets varmeledningsevne, ν_g er grunnvannets kinematiske viskositet, β grunnvannets isobarisk-kubiske ekspansjonskoeffisienten og α_g er grunnvannets diffusivitet. Hver av disse parameterne er temperaturavhengig og de bestemmes med utgangspunkt i filmtemperaturen på de respektive vegger. Videre ble den karakteristiske lengden D_m til borehullet definert ved ligningen:

$$D_m = \frac{4\pi(r_b^2 - 2r_{ky}^2)}{2\pi(r_b - 2r_{ky})}. \quad (4.87)$$

I tillegg er \hat{q}_{ky} og \hat{q}_{BHV} definert som henholdsvis varmekraften ved kollektorens ytterside og varmekraften ved innsiden av borehullveggen, gitt ved ligningene:

$$\hat{q}_{ky} = \frac{\dot{q}_b}{4\pi r_{ky}}, \quad (4.88)$$

$$\hat{q}_{BHV} = \frac{\dot{q}_b}{2\pi r_b}. \quad (4.89)$$

For å bestemme Rayleigh-tallene ble det derfor brukt målinger av varmelasten \dot{q}_b og den midlere temperaturen i grunnvannet \bar{T}_m .

Nusselt-tallet ved yttersiden av kollektorslangen og ved innsiden av borehullveggen kan bestemmes ved ligningene 4.80 og 4.81. Dette forutsetter at filmkoeffisientene i borehullets mellomrom er kjent. Videre forklarer vi hvordan disse ble bestemt. Målinger av kollektorvæskens midlere temperatur T_{vm} , og borehullets varmelast \dot{q}_b , ble anvendt for å estimere temperaturen ved yttersiden av kollektorslangen T_{ky} , gitt ved ligningen:

$$T_{ky} = \bar{T}_v - q_b \frac{(R_k + R_{ki})}{2}, \quad (4.90)$$

der R_k og R_{ki} bestemmes ved ligning 4.58 og 4.49. Når denne temperaturen er kjent, ble temperaturen ved innsiden av borehullveggen estimert ved ligningen:

$$T_{BHV} = T_{ky} - \dot{q}_b R_m, \quad (4.91)$$

der R_m er den konvekktive resistansen i mellomrommet gitt ved å omformulere ligning 4.3, slik at vi får:

$$R_m = R_b - \frac{R_{kk} + R_{kik}}{2}. \quad (4.92)$$

Merk at den termiske resistansen R_b i ligning 4.92 må bestemmes siden denne ikke er kjent i utgangspunktet. Ved å benytte relasjonen i ligning 4.33 ser vi at den lokale resistansen kan beregnes dersom vi kjenner den effektive resistansen, samt resistansen mellom kollektorbenene. Fra den termiske responstesten har vi verdien på den effektive resistansen¹. Resistansen mellom kollektorbenene er gitt ved ligning 4.84, der alle ledd er kjent bortsett fra den konvekktive resistansen R_{ky} mellom yttersiden av kollektorveggen og grunnvannet. Ved å anvende målinger av den midlere temperaturen til grunnvannet \bar{T}_m i borehullets mellomrom, kan denne resistansen bestemmes ved ligningen:

$$R_{ky} = \frac{T_{ky} - \bar{T}_m}{\dot{q}_b}. \quad (4.93)$$

Den konvekktive resistansen ved borehullveggen kan videre bestemmes ved ligningen:

$$R_{BHV_k} = \frac{\bar{T}_m - T_{BHV_k}}{q_b}. \quad (4.94)$$

Videre bestemmes filmkoeffisientene ved yttersiden av kollektorslangen og innsiden av borehullveggen ved å omformulere ligningene 4.82 og 4.83, slik at disse formuleres som:

$$h_{ky} = \frac{1}{R_{ky_k} \cdot 4\pi \cdot r_{ky}}, \quad (4.95)$$

$$h_{BHV} = \frac{1}{R_{BHV_k} \cdot 2\pi \cdot r_b}. \quad (4.96)$$

Nusselttallet kan videre bestemmes ved å omforme ligningene 4.80 og 4.81:

$$Nu_{ky} = \frac{\lambda_g h_{ky}}{D_m}, \quad (4.97)$$

¹Leseren henvises til tillegg D.1 for en beskrivelse av hvordan den effektive resistansen kan bergenes fra en termisk responstest.

475. Implementering av modell for beregning av resistanse ved naturlig konveksjon

$$Nu_{BHV} = \frac{\lambda_g h_{BHV}}{D_m}. \quad (4.98)$$

For hver av de 39 målingene ble det bergnet en verdi å på Nusselt- og Rayleigh-tallet. Dette resulterte i følgende korrelasjoner for yttersiden av kollektorveggen og innsiden av borehullveggen:

$$Nu_{ky} = 0.30(Ra_{ky}^*)^{0.25}, \quad 1.8E6 < Ra_{ky}^* < 4.1E7 \quad (4.99)$$

og

$$Nu_{BHV} = 0.20(Ra_{BHV}^*)^{0.25}, \quad 5.4E5 < Ra_{BHV}^* < 2.9E7. \quad (4.100)$$

Merk at korrelasjonene i ligning 4.99 og 4.100 ikke gir informasjon om de hydrodynamiske og termiske forholdene utenfor sine respektive gyldighetsområder. Ved å anvende korrelasjonene for andre identiske geometrier er det viktig at dette tas med i betraktningen.

4.5 Implementering av modell for beregning av resistanse ved naturlig konveksjon

Modelleringsverktøyet pygfunction antar at borehullene er fylt med fyllmasse, og anvender multipol-metoden¹ for å bestemme den lokale resistansen i borehullet. Multipol-metoden antar at varmen i borehullets mellomrom overføres ved varmeledning. I tilfeller der borehullene er fylt med grunnvann er det nødvendig med en matematisk modell som tar hensyn til den naturlige konveksjonen som oppstår i borehullets mellomrom. En slik modell er utviklet av [11] for en borehullgeometri der en U-formet kollektorslange er plassert i borehullet, og beskrives i seksjon 4.4. Det er ønskelig å implementere modellen i pygfunction, slik at programvaren kan anvendes for grunnvannsfylte borehull. I denne seksjonen vil implementeringen beskrives. Det kan nevnes at modellen som beregner resistansen ved naturlig konveksjon videre omtales som *konveksjonsmodellen*. I tillegg vil pygfunction omtales som den *modifiserte pygfunction* når konveksjonsmodellen er implementert i programvaren.

Modulen **pipes** i pygfunction inneholder blant annet tre klasser som kalles for “SingleUTube”, “MultipleUTube” og “IndependentMultipleUTube”. Hver av disse klassene anvendes for å opprette kollektorobjekt, som inneholder informasjon om de fysiske dimensjonene og termiske karakteristikkene til kollektoren og innholdet

¹Leseren henvises til seksjon 4.2.1 for en beskrivelse av multipole-metoden.

i borehullets mellomrom. I tillegg inneholder klassene metoder for å beregne kollektorvæsketemperaturer og varmerater, basert på arbeid gjort av [1] og [26]. Når et kollektorobjekt opprettes initialiseres det blant annet med de lokale termiske resistansene R_1^Δ , R_2^Δ og $R_{12}^{\Delta^3}$. Resistansene hentes fra en funksjon som kalles for **thermal_resistances**, der Multipol-metoden anvendes i beregningene. Som nevnt i innledningen vil Multipol-metoden ikke gi riktige verdier for grunnvannsfylte borehull, der naturlig konveksjon oppstår på grunn av temperaturforskjeller mellom kollektorslangen og borehullveggen.

For at pygfunction skal inkludere effekten av naturlig konveksjon i et grunnvannsfyllt borehull er det opprettet en modifisert versjon av modulen **pipes**, som kalles for **modified_pipes**. I den modifiserte modulen er multipol-metoden i funksjonen **thermal_resistances** byttet ut med konveksjonsmodellen, som beskrives i seksjon 4.5.1. Siden korrelasjonene i ligning 4.99 og 4.100 er utviklet for en enkel U-formet kollektorslange er konveksjonsmodellen bare implementert for klassen **SingleUTube**. For å betrakte naturlig konveksjon i de to andre klassene, må det utvikles korrelasjoner som tar hensyn til geometrien man får når det plasseres mer enn en kollektorslange i borehullet.

4.5.1 Konveksjonsmodellen

I følgende seksjon vil konveksjonsmodellen sin oppbygging gjennomgås. Figur 4.4 viser et utsnitt av modellen, og vi observerer at den har følgende inngangsparametere:

- \dot{q}_b : Varmelasten per meter borehull [W/m].
- T_{ky} : Temperatur til grunnvannet ved yttersiden av borehullet [$^{\circ}C$].
- T_{BHV} : Temperatur til grunnvannet ved innsiden av borehullveggen [$^{\circ}C$].
- r_b : Radien til borehullet [m].
- r_{ky} : Radien til yttersiden av kollektorbenene [m].
- R_{fp} : Resistansen fra kollektorvæsken til yttersiden av kollektorbenene [m.K/W].

Den hydrauliske diameteren beregnes ved ligning 4.87. Videre beregnes følgende egenskaper til grunnvannet ved kollektorens ytterside og innsiden av borehullveggen ved å anvende programvaren IAPWS-95 [27]: Den volumetriske ekspansjonskoeffisienten (β), varmeledningsevnen (λ_g), den kinematiske viskositeten (ν_g) og den termiske diffusiviteten (α_g). Hver av disse egenskapene er avhengig av det hydrostatiske trykket, $P(z)$, og de respektive temperaturene, T_{ky} og T_{BHV} , til grunnvannet. Siden

³Leseren henvises til seksjon 4.1 for en definisjon av de tre resistansene.

495. Implementering av modell for beregning av resistanse ved naturlig konveksjon

trykket varierer lite med dybden evalueres det ved midten av borehullet, gitt ved ligning¹:

$$P(z) = P_0 + \rho_g g z, \quad (4.101)$$

der P_0 er det atmosfæriske trykket [Pa], ρ_g er tettheten til grunnvannet [kg/m^3], g er tyngdeakselerasjonen [m/s^2] og $z = H/2$ er dybden der trykket evalueres.

Videre beregnes varmefluksene, \hat{q}_{ky} og \hat{q}_{BHV} , ved kollektorens ytterside og borehullveggen innside ved ligningene 4.88 og 4.89.

Rayleigh-tallene, og deretter Nusselt-tallene, ved yttersiden av kollektorslangen og innsiden av borehullveggen beregnes så ved å anvende ligningene 4.85 og 4.86, samt korrelasjonene i ligningene 4.99 og 4.100. Korrelasjonene er bare gyldige innenfor de gitte intervallene for Rayleigh-tallene. Dersom verdien til det beregnede Rayleigh-tallet er utenfor sitt respektive gyldighetsområde, anvendes grenseverdiene.

Videre anvendes Nusselt-tallene til å beregne filmkoeffisientene gitt ved ligning 4.80 og 4.81. Deretter blir resistansene ved yttersiden av kollektorveggen, R_{ky} , og innsiden av borehullet, R_{BHV} , beregnet ved ligningene 4.82 og 4.83. Til slutt beregnes den lokale resistansen, R_b , og resistansene mellom kollektorbenene, R_{12}^Δ , ved å ta i bruk ligningene 4.3 og 4.84.

Det er ønskelig at modellen returnerer resistansene, R_1^Δ og R_2^Δ , som anvendes i resistansenettverket som er beskrevet i seksjon 4.1. Ved å anta at kollektorbenene er symmetrisk plassert i borehullet får vi ved ligning 4.12 følgende relasjon:

$$R_1^\Delta = R_2^\Delta = 2R_b. \quad (4.102)$$

Til slutt oppsummerer vi resistansene som modellen returnerer:

- Resistansen fra kollektorbenene til borehullveggen, $R_1^\Delta = R_2^\Delta$.
- Resistansen mellom kollektorbenene, R_{12}^Δ .
- Resistansen mellom kollektorveggen og grunnvannet, R_{ky} .
- Resistansen mellom innsiden av borehullveggen og grunnvannet R_{BHV} .

De to siste resistansene som returneres anvendes i beregningene for oppdatering av resistansen.

¹Se vedlegg C.2 for en utledning av ligningen som anvendes for å evaluere det hydrostatiske trykket.

Implementering av effektiv resistanse

For beregne den effektive resistansen er det opprettet en funksjon i modulen **modified_pipes** som kalles for **effektiv_resistanse** (se figur 4.5). Funksjonen returnerer den effektive resistansen, R_b^* , gitt i ligning 4.33 og 4.34.

Oppdatering av resistanse for hvert tidssteg

Som vist på figur 4.4 vil resistansene som beregnes ved naturlig konveksjon være avhengig av tre parametere som vil endres for hvert tidssteg i en simulering: Varmelasten \dot{q}_b , temperaturen ved yttersiden av kollektorveggen T_{ky} og temperaturen ved innsiden av borehullveggen T_{BHV} . For å ta hensyn til dette må resistansene som beregnes i konveksjonsmodellen oppdateres for hvert tidssteg under simuleringsperioden. For å oppdatere temperaturene i borehullet anvendes ligningene 4.92, 4.90 og 4.91 i simuleringen. Varmelasten \dot{q}_b hentes fra en forskrevet lastprofil.

```
def thermal_resistances(q_b, T_ky, T_BHV, r_b, r_ky, R_fp):
    """
    Metode for å beregne den lokale resistansen for et grunnvannsfyllt borehull.

    Parametere
    -----
    q_b : TYPE
        Varmelast per meter borehull [W/m].
    T_ky : TYPE
        Temperatur til grunnvann ved yttersiden av kollektorslange [gradC].
    T_BHV : TYPE
        Temperatur til grunnvann ved innsiden av borehullveggen [gradC].
    r_b : TYPE
        Radius til borehullet [m].
    r_ky: TYPE
        Radiusen til yttersiden av kollektorbena [m]
    R_fp :
        Resistanse fra kollektorvæske til ytterside av kollektorben [m.K/W]

    Returnerer
    -----
    Rd: 2x2 matrise
        Rd[i,i] = Resistansen mellom kollektorbena og borehullveggen (K.m/W)
        Rd[i,j] = Resistansen mellom kollektorbena (K.m/W)

    R: 2x2 matrise
        R[i,i] = Resistansen ved yttersiden av kollektorveggen (K.m/W)
        R[i,j] = Resistansen ved innsiden av borehullveggen (K.m/W)

    Referanse
    -----
    .. Spitler et al (2016). "Natural convection in groundwater-filled
       boreholes used as ground heat exchangers".

    """
```

Figur 4.4: Utsnitt av funksjonen `thermal_resistances` (konveksjonsmodellen) som kan kalles på i modulen **modified_pipes**. Vi observerer at parametrene for varmelasten og temperaturer i borehullet vil endre seg med tiden, og må oppdateres for hvert tidssteg i simuleringsperioden. Se vedlegg G for innblikk i python-koden som beregner den lokale og effektive resistansen.

4.5. Implementering av modell for beregning av resistanse ved naturlig konveksjon

```
def effektiv_resistanse(H,tet_v, cp_v, V_f, Rb, R12):
    """
    Beregner effektiv resistanse for randbetingelsen "Uniform temperatur langs
    borehullveggen." Beregningene er basert på arbeidert til
    Hellstrom [#Hellstrom1991]_

    Parametere
    -----
    H : TYPE
        Lengde til borehullet [m]
    tet_v : TYPE
        Tetthet til kollektorvæske [kg/m3]
    cp_v : TYPE
        Spesifikk isobarisk varmekapasitet til kollektorvæske [J/Kg.K]
    V_f : TYPE
        Volumetrisk strømningsrate til kollektorvæske [m3/s]
    Rb : TYPE
        Lokal resistanse mellom kollektorvæsken og borehullveggen [m.K/W]
    R12 : TYPE
        Resistansen mellom kollektorbena [m.K/W]

    Returnerer
    -----
    Rb_eff : Effektiv resistanse til borehullet [k.m/W]
```

Figur 4.5: Utsnitt av funksjonen **effektiv_resistanse** som kan kalles på i modulen **modified_pipes**. Randbetingelsen *uniform temperatur langs borehullet* av [1] er grunnlaget for beregningene.

Kapittel 5

Resultat

5.1 Sammenligning av analytiske løsninger mot pygfunction

I denne seksjonen sammenlignes pygfunction mot den uendelige linjeslukløsningen (ULS) og sylinderslukløsningen (USS) definert i seksjon 3.2. Målet er å undersøke om de analytiske løsningene kan erstatte pygfunction, slik at disse kan anvendes i for enkle analyser av varmetransporten mellom borehullveggen og grunnen. Det er satt opp to eksempler. I seksjon 5.1.1 vil de tre løsningene sammenlignes for konstant tilførsel av varme mellom borehullveggen og grunnen. I seksjon 5.1.2 vil pygfunction sammenlignes med ULS der det først tilføres varme til grunnen i et halvt år, og videre stoppes varmetransporten et halvt år.

5.1.1 Konstant tilførsel av varme i grunnen

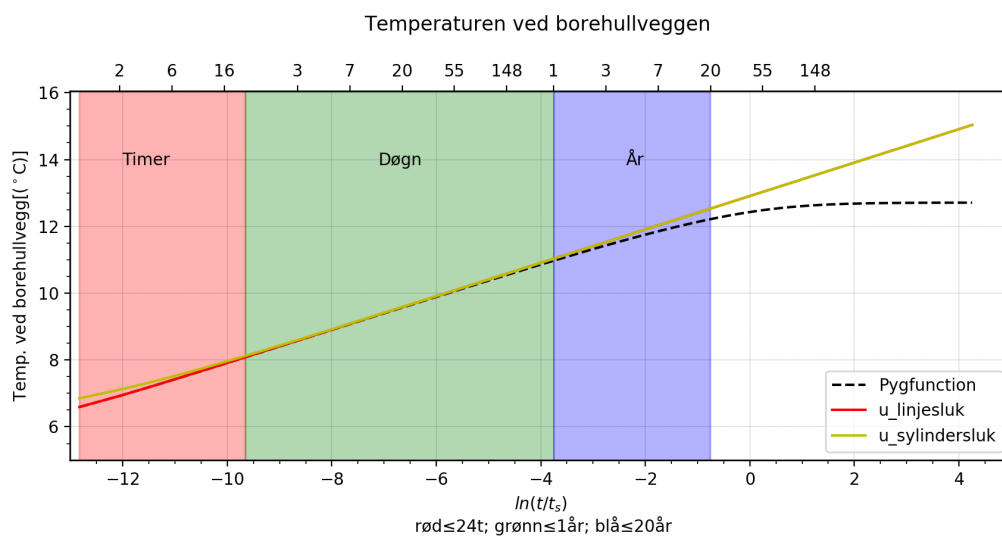
I dette eksempelet injiseres det en temperatur i borehullet slik at det oppstår en konstant varmerate langs borehullveggen, og deretter beregnes temperaturen ved borehullveggen. Parametere brukt i evalueringen er vist i tabell 5.1. Merk at injeksjon av varme er definert som en negativ verdi, det vil si $\dot{q}_b < 0$.

Temperaturen ved borehullveggen for linje og- sylinderslukløsningen er gitt i ligning 3.40 og 3.52. Det kan nevnes at den sylindriske slukfunksjonen (lign. 3.53) bare er avhengig av Fourier-tallet når temperaturen beregnes ved borehullveggen, siden $p = 1$ når $r = r_b$.

Figur 5.1 og 5.2 viser en sammenligning av temperaturen ved borehullveggen for de tre modellene. Resultatene er presentert som en funksjon av den dimensjonsløse tiden $\ln(t/t_s)$, der $t_s = H^2/9a_g$. Tre tidsperioder skiller seg ut:

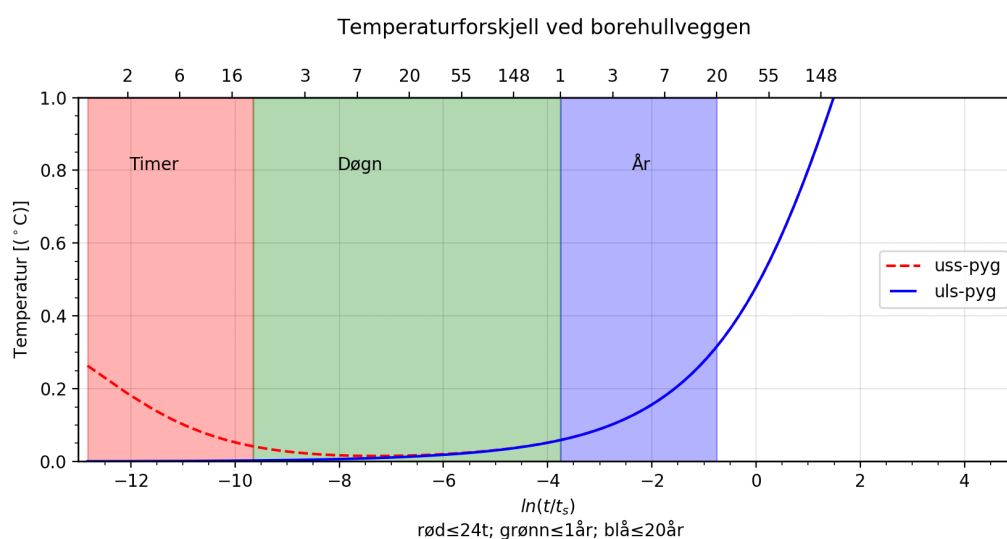
Parametere	
Termiske egenskaper	
Temperatur i grunnen før injeksjon, T_g	6 °C
Grunnens varmeledningsevne, λ_g	1.3 W/mK
Varmeuttak, q_b	$-2\pi\lambda W/m$
Grunnens diffusivitet, α_g	$10^{-6} m^2/s$
Dimensjonering av borehull	
*Lengde borehull, H	110 m
*Dybde under jordoverfalten, D	4 m
Radius borehull, r_b	0.055 m

Tabell 5.1: Parametere brukt i evalueringen av ett borehull for en konstant varmekraft langs borehullveggen. Parametere merket med "*" brukes bare i pygfunction, parametere uten stjerne er felles parametere.



Figur 5.1: Temperaturprofil ved borehullveggen for et enkelt borehull, der vi har konstant varmeledning inn i grunnen. Pygfunction (svart), uendelig linje - og sylindersluk (rød og gul) er evaluert.

- Tidlig i perioden vil pygfunction og ULS være identiske, mens temperaturen beregnet ved USS - løsningen gir noe større verdier. Etter 6 timer er forskjellen på 0.1°C , mens den etter 24 timer er på 0.04°C . Forskjellen kan forklares ved at USS-løsningen antar at varme injiseres fra borehullveggen, mens pygfunction og ULS-løsningen antar at varmen injiseres fra borehullets senter. Ligning 3.45 gir den nedre grensen for gyldigheten til et borehull som approksimeres som



Figur 5.2: Differansen mellom pygfunction og uendelig linje- og sylindersluk, der temperaturen ved borehullveggen er evaluert for et enkelt borehull. Rød, stiplet linje, viser differansen mellom sylindersluk-løsningen og pygfunction. Blå linje viser differansen mellom linjesluk-løsningen og pygfunction.

et linjesluk. Dette tilsvarer 4.2 timer ut i evalueringsperioden, og en differanse på 0.13°C mellom USS og *pygfunction*.

- Fra om lag et døgn og frem til ett år ut i evalueringsperioden ser vi at de tre modellene følger samme lineære utvikling, og er omtrent identiske. I denne perioden (grønt område) er forskjellen på modellene mindre enn 0.06°C . Ligning 3.45 gir den øvre grensen for dominerende radiell varmetransport. Dette tilsvarer 4.2 år ut i evalueringsperioden og en differanse på 0.13°C mellom de analytiske løsningene og *pygfunction*.
- Når evalueringsperioden overstiger ett år vil forskjellen mellom *pygfunction* og de to andre modellene øke eksponentielt med tiden. Etter for eksempel 3, 20 og 55 år er forskjellen på henholdsvis 0.10, 0.31 og 0.55°C . Når tiden blir stor observerer vi at *pygfunction* går mot en stasjonær tilstand på 12.71°C , mens ULS og USS fortsetter å stige ytterligere. Temperaturforskjellen forklares av at *pygfunction*, i motsetning til de to andre modellene, betrakter todimensjonal varmetransport (radielt og vertikalt) og bygger på den endelige linjeslukk-løsningen. Denne løsningen antar en konstant temperatur ved overflaten til grunnen lik null grader, slik at temperaturen ved borehullveggen etter hvert stabiliseres på grunn av varmetapet ut av overflaten. De to andre modellene antar at varmen bare sprer seg radielt utover i grunnen og vil derfor ikke være gyldige når vertikale temperaturgradienter blir signifikante.

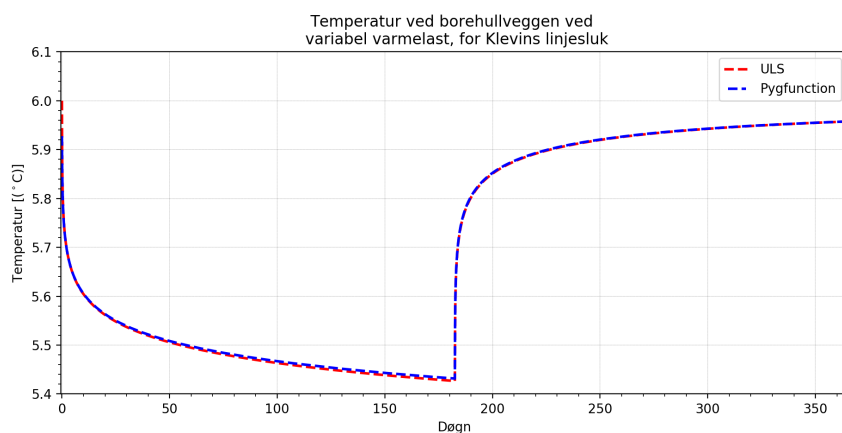
Den kan nevnes at den stasjonære løsningen på 12.71°C er 0.13°C lavere enn Eskilson's stasjonære temperatur, gitt i ligning 3.63. Eskilson's stasjonære temperatur vil derfor være en god tilnærming med en relativ feil på 0.1 % i forhold til pygfunction.

Figur 5.1 viser at temperaturen øker raskt tidlig i perioden, der 33 % av temperaturøkningen skjer i løpet av de to første døgnene. Videre vil 67 % av økningen hende i løpet av de første fire månedene. Kun 8 % av temperaturøkningen vil oppstå fra det femte året og frem til stasjonær tilstand oppnås.

2) Variabel varmelast

I dette eksempelet evalueres temperaturen ved borehullveggen for en variabel lastprofil, der vi har 6 måneder med varmeuttak på 1 W/m per time, så 6 måneder med 0 W/m per time. Parametere brukt i evalueringen finnes i 5.1, bortsett fra lastprofilen som nå vil variere. Pygfunction sammenlignes med den uendelige linjeslukløsningen, der begge modellene anvender superponering i tid.

Resultatet er illustrert i figur 5.3, der vi observerer at temperaturen følger samme utvikling for de to modellene.



Figur 5.3: Temperaturen ved borehullveggen som et resultat av en variabel lastprofil for en periode på 1 år. Blå og rød linje viser henholdsvis pygfunction og ULS.

5.2 Numerisk løsning med og uten konveksjon i borehullet

I denne seksjonen vises resultat fra simuleringer, der den *modifiserte* pygfunction analyseres og sammenlignes opp i mot den umodifiserte pygfunction. På denne måten får vi sammenlignet varmevekslingen i et borehull med og uten naturlig konveksjon.

I seksjon 5.2.1 gjennomføres det en verifisering av den modifiserte pygfunction for å undersøke at den er pålitelig og gir resultater som forventet. I seksjon 5.2.2 vises den effektive resistansens sensitivitet til to parametere som endrer seg for hvert tidssteg i simuleringen - det vil si temperaturen i grunnvannet i borehullet og varmeraten mellom kollektorvæsken og borehullveggen. I seksjon 5.2.3 vises to innledende eksempler for å illustrerer hvordan den naturlige konveksjonen påvirker varmetransporten i borehullet. I seksjon 5.2.4 er det satt opp fire problemstillinger som besvares ved å gjennomføre simuleringer med lastdata beregnet for Kirkenes sykehus [28] og to tenkte eksempler der det veksles mellom lading og uttak av grunnen.

5.2.1 Verifisering

Får å undersøke at den modifiserte pygfunction gir pålitelige resultater skal vi i denne seksjonen gjennomføre en verifisering av modellen.

Gradvis økning av konveksjon i borehullet

I henhold til teorien beskrevet i kapittel 2 vil en gradvis økning av naturlig konveksjon i borehullets mellomrom føre til at den termiske resistansen i dette område reduseres, slik at en større mengde varme transporteres mellom kollektorvæsken og grunnen. I ligning 4.85 og 4.86 i konveksjonsmodellen ser vi at en stor last vil føre til at Rayleightallene blir store, som videre vil resultere i at den naturlige konveksjonen blir stor (og resistansen liten). Det motsatte vil hende ved en liten last. For å få en gradvis økning i konveksjonen i borehullet kan vi derfor kjøre en lineær lastprofil, som har en liten last i starten. Dersom vi kjører den samme lineære lastprofilen i et borehull fylt med fyllmasse og beregner temperaturen til kollektorvæsken ut av borehullet for begge borehullene, kan vi forvente at temperaturforskjellen vil øke når lasten blir større.

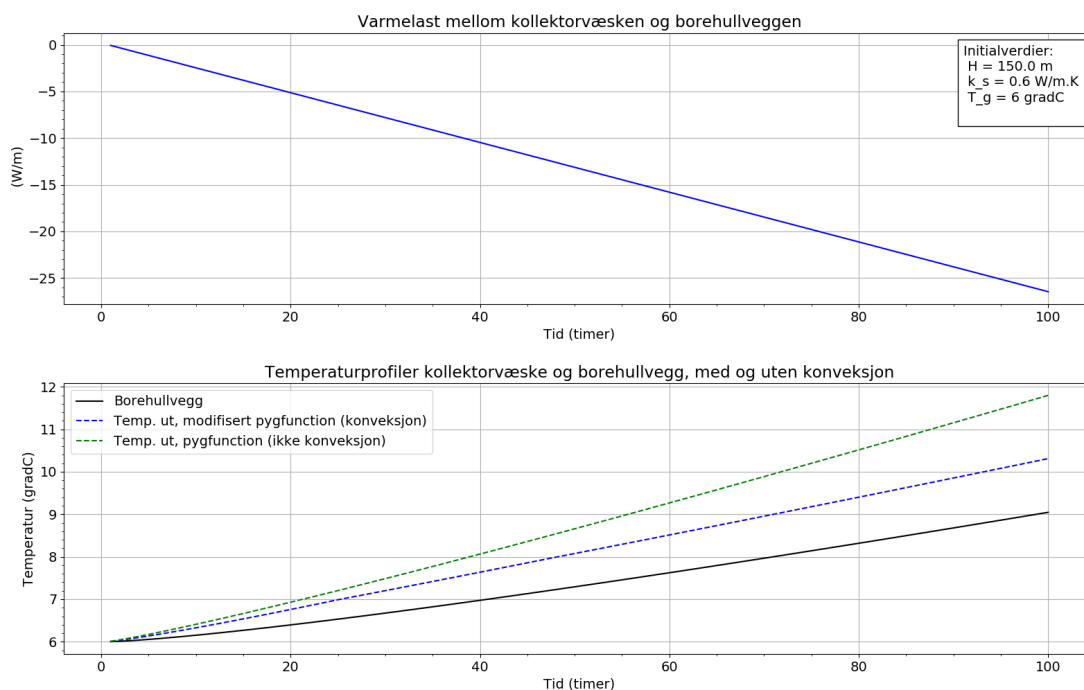
For å undersøke at den modifiserte pygfunction følger utviklingen beskrevet over er det gjennomført en simulering der varme injiseres i grunnen for ett borehull fylt med fyllmasse og ett borehull fylt med grunnvann. I begge borehullene kjøres det en identisk lastprofil gitt ved ligningen:

$$q = -40x - 10, \quad (5.1)$$

der q er lasten som injiseres [W] og x er antall timer ut i simuleringsperioden. Tallene 40 og 10 har henholdsvis enhet [W/t] og [W]. I borehullet fylt med grunnvann anvendes den modifiserte pygfunction i beregningene, mens for borehullet med fyllmasse anvendes den umodifiserte pygfunction. Simuleringsperioden er på 100 timer og resultatet illustreres i figur 5.4, der den grønne og blå stiplede linjen viser temperaturutviklingen til kollektorvæsken ut av borehullet med henholdsvis fyllmasse

og grunnvann. Den svarte, heltrukne, linjen viser temperaturen ved borehullveggen. Initialverdiene som brukes for begge borehullene er vist i tabell F.1.

Vi observerer at resultatet fra simuleringen har en utvikling som beskrevet i det innledende avsnittet, der differansen i kollektorvæsketemperatur ut av borehullene øker utover i simuleringsperioden. Etter 80 timer er differansen på i overkant av 1.1°C , noe som bekrefter effekten den naturlige konveksjonen har på varmetransporten i borehullet. Det kan derfor se ut som den modifiserte pygfunction simulerer konveksjonen. Videre er det nødvendig å undersøke hvor nøyaktig modellen simulerer, noe som gjøres i neste seksjon.

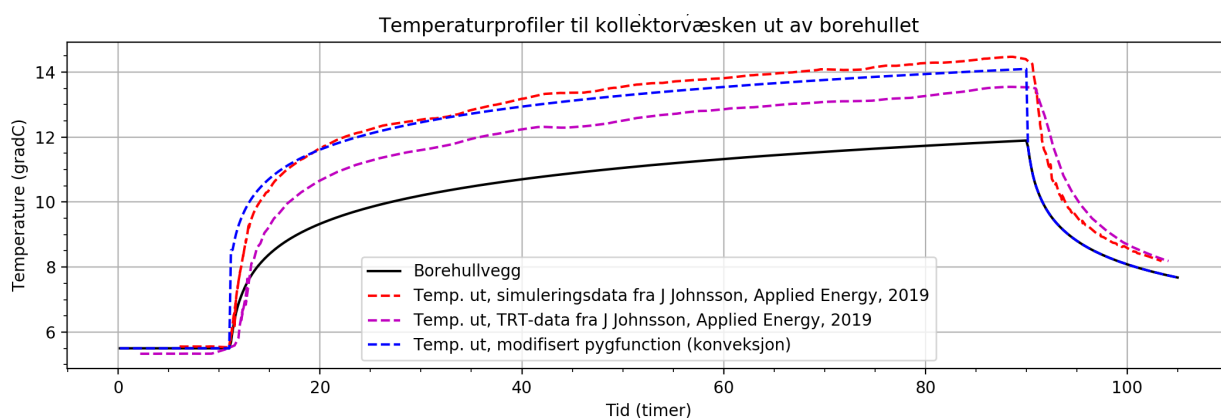


Figur 5.4: En sammenligning av temperaturen til kollektorvæsken ut av borehullet for et borehull fylt med fyllmasse (grønn linje) og et borehull fylt med grunnvann (blå linje). I begge borehullene kjøres det en lineær lastprofil, der varme injiseres i grunnen. Dette fører til at den naturlige konveksjonen i det grunnvannsfylte borehullet gradvis øker, noe som resulterer i at temperaturforskjellene ut av borehullene gradvis øker.

Verifisering mot TRT - og simuleringsdata

For å undersøke hvor nøyaktig den modifiserte pygfunction simulerer konveksjonseffekten i borehullets mellomrom skal vi i denne seksjonen verifisere den mot TRT - og simuleringsdata, hentet fra [29]. Forfatterne, J.Johnsson and B Adl-Zarrabi, av referert artikkel har oppdatert pygfunction med korrelasjonene gitt av [11], men med

en noe annen tilnærming enn i denne oppgaven. Etter nærmere undersøkelser av forfatterens implementering viser det seg at resistansen i borehullet ikke oppdateres for hvert tidssteg. Derimot beregnes det en stasjonær resistanse som anvendes gjennom hele simuleringen. Det er rimelig å anta at forfatteren anvender en temperatur for beregning av resistansen som ligger i område rundt gjennomsnittstemperaturen i borehullet for hele simuleringen. Dette medfører at resistansen beregnes for liten i starten og for høy etter hvert som temperaturen stiger forbi gjennomsnittet. Figur 5.5 viser resultatet fra sammenligningen. Den lille og røde linjen viser henholdsvis TRT - og simuleringsresultat fra artikkelen. Den blå linjen viser simuleringsresultat for den modifiserte pygfunction. Vi observerer følgende:



Figur 5.5: Verifisering mot TRT2 - og simuleringsdata fra [29]. Den røde og lille linjen viser henholdsvis simuleringdata og TRT - data fra referert artikkel. Den blå linjen er simuleringsresultat fra den modifiserte pygfunction. Den svarte linjen viser temperaturen ved borehullveggen. Parametere brukt i simulering vises i tabell F.2

- Temperaturen ut for simuleringdata hentet fra [29] har en bølgete profil. Årsaken til dette er at det anvendes reelle ustabile lastdata i simuleringen. I simuleringen med den modifiserte pygfunction er det implementert en konstant gjennomsnittlast av den reelle lasten, slik at profilen følgelig blir jevn.
- De første timene av simuleringen ser vi at den røde profilen ligger lavere enn den blå. Etter hvert som temperaturen stiger i borehullet vil den blå profilen nærme seg den røde og fra 20 til 35 timer er de identiske. Videre fra 35 timer og ut simuleringperioden ser vi at den blå profilen ligger noe lavere enn den røde. Med tanke på at resistansen for den blå profilen oppdateres for hvert tidssteg er utviklingen mellom simuleringene som forventet.
- Begge profilene har et avvik fra de reelle TRT - dataene, men vi observerer at den blå profilen vil ligge nærmere de reelle dataene etter hvert som temperaturen stiger. Det kan se ut som at vi får et resultat som er nærmere virkeligheten

når resistansen oppdateres med temperaturutviklingen i borehullet.

Med utgangspunkt i observasjonene som gjøres for denne sammenligningen kan vi konkludere med at modifiseringen av pygfunction som er gjort i denne oppgaven simulerer omtrent identisk med foregående modifisering for det gjeldende eksempelet. Det rimelig å anta at avviket mellom modifiseringene er et resultat av at resistansen bare oppdateres for implementeringen som er gjort i denne oppgaven. Videre observerer vi at det er et avvik mellom den modifiserte pygfunction og TRT - dataene den sammenlignes med, der avviket er størst tidlig i simuleringsperioden. Etter 20 og 80 timer er avviket på henholdsvis 1 og 0.7°C .

5.2.2 Resistansens sensitivitet til temperaturendringer og varmelast

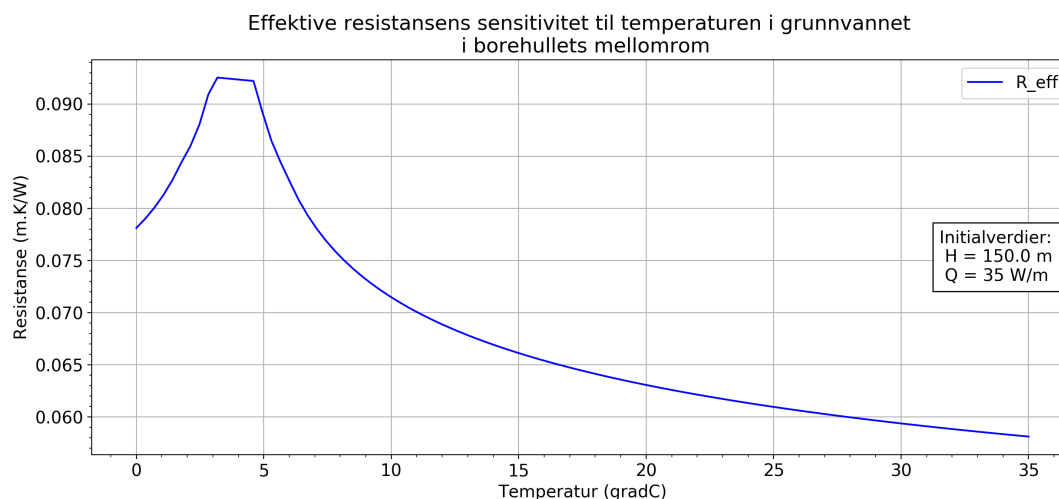
Den lokale termiske resistansen, R_b og R_{12} som beregnes i konveksjonsmodellen er blant annet avhengig av temperaturen til grunnvannet i borehullets mellomrom og varmelasten mellom kollektorvæsken og borehullveggen. Disse to parameterne vil endre seg for hvert tidssteg i løpet av en simuleringsperiode. I denne seksjonen er det gjennomført simuleringer der resistansens sensitivitet til disse to parameterne kartlegges.

Temperaturendringer i borehullet

Figur 5.6 viser hvordan den effektive resistansen endrer seg med temperaturen i grunnvannet i borehullet. I dette eksempelet er det satt en fast varmelast på 35 W/m for et borehull med aktiv lengde på 150 m . Temperaturen i grunnvannet varieres fra 0°C til 35°C . Figuren viser tydelig resistansens avhengighet til temperaturen i grunnvannet. Som vist i figur B.2 har vann størst tetthet ved 4°C , noe som medfører at oppdriftskreftene vil være minst ved denne temperaturen, og følgelig vil også den naturlige konveksjonen være minst ved denne temperaturen. Resistansens verdi vil derfor få et toppunkt ved 4°C , mens den vil reduseres når temperaturen blir lavere eller høyere. For dette eksempelet vil den effektive resistansen reduseres med 31.5% når temperaturen stiger fra 4 til 20°C , og tilsvarende vil den reduseres med 15.2% når temperaturen synker fra 4 til 0°C . Dersom den effektive resistansen regnes ut ved den opprinnelige pygfunction får vi at den blir lik 0.16 m.K/W .

Den tilnærmet flate delen av resistanseprofilen, i temperaturområde 2.91 til 4.61°C , kan forklares ved å se på de beregnede Nusselt-tallene på yttersiden og innsiden av henholdsvis kollektorslangen og borehullveggen. I dette temperaturområdet vil Rayleigh-tallene i ligning 4.85 og 4.86 samtidig ligge utenfor sine respektive gyldighetsområder. Dette fører til at grenseverdiene til gyldighetsområdene anvendes i beregningene av Nusselt-tallene. På figur 5.7 er profilene til Nusselt-tallene tegnet

og vi observerer at i det aktuelle temperaturområde vil Nusselt-tallene ha en felles flat profil.



Figur 5.6: Resistansens sensitivitet til temperaturen i grunnvannet i borehullet.

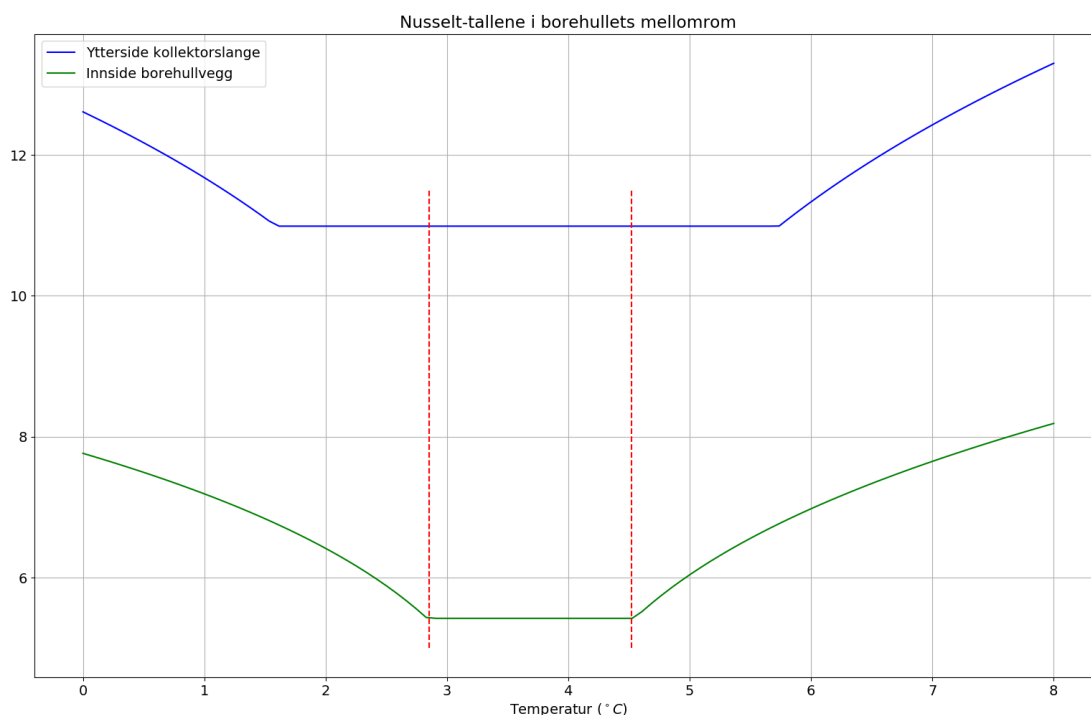
Endringer i varmelasten

Figur 5.8 viser hvordan den effektive resistansen endrer seg med varmelasten mellom kollektorvæsken og borehullveggen. I dette eksempelet er det satt en fast temperatur ved yttersiden av kollektorslangen og innsiden av borehullveggen på henholdsvis $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ og $15\text{ }^{\circ}\text{C}$, mens lasten varieres fra 2 til 80 W/m. Vi observerer at når lasten øker, så reduseres den effektive resistansen. I tillegg observerer vi at resistansen er omvendt proporsjonal med lasten, slik at reduksjonen er størst når vi går fra en liten til en middels stor last. Som et eksempel vil resistansen reduseres med 22.3 % når lasten økes fra 2 til 30 W/m, mens reduksjonen vil være på 6 % når lasten videre økes fra 30 til 60 W/m.

5.2.3 Eksempler som viser hvordan naturlig konveksjon påvirker last og temperatur i borehullet

I denne seksjonen viser vi to eksempler som viser hvordan den naturlige konveksjonen i borehullets mellomrom påvirker følgende faktorer:

- Varmelasten mellom kollektorvæsken og borehullveggen.
- Kollektorvæsketemperaturen inn i borehullet.
- Kollektorvæsketemperaturen ut av borehullet.



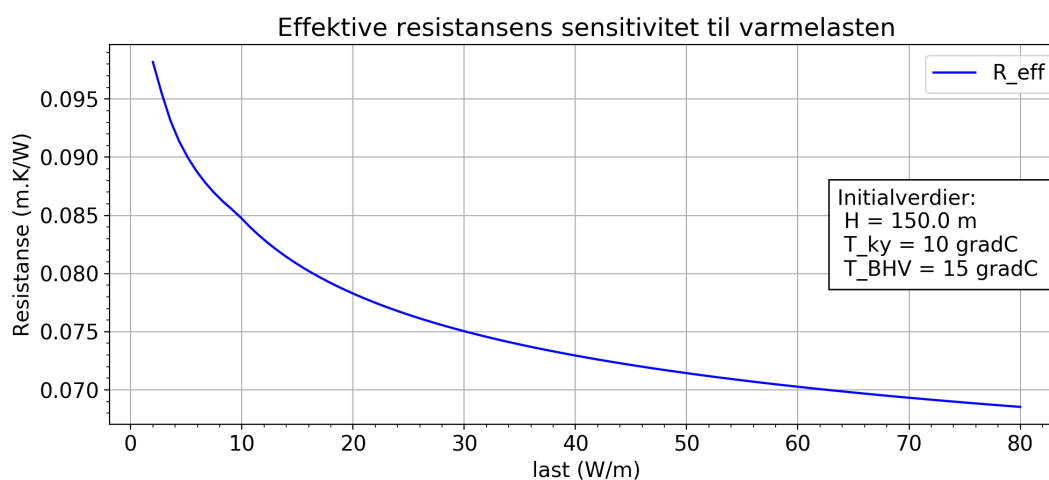
Figur 5.7: Illustrasjon av Nusselt-tallene ved yttersiden av kollektorslangen (blå linje) og innsiden av borehullveggen (grønn linje) som funksjon av temperaturen i grunnvannet i borehullet. De horisontale delene av hver kurve viser temperaturområdet der Rayleigh-tallene er utenfor sine respektive gyldighetsområder. Temperaturområde mellom de røde stiplede linjene viser hvor de beregnede Rayleigh-tallene samtidig er utenfor sine respektive gyldighetsområder. Dette området strekker seg fra 2.91 til 4.61 °C.

- Temperaturen ved borehullveggen.
- Den effektive resistansen i borehullet.

For å illustrere dette er det gjennomført en sammenligning av ett enkelt borehull fylt med fyllmasse og ett borehull fylt med grunnvann, der de samme initialverdiene (se tabell F.1) anvendes for begge borehullene. I eksempel 1 tilføres det en lik kollektorvæsketemperatur inn i begge borehullene, mens i eksempel 2 initialiseres borehullene med den samme lastprofilen. For å observere effekten av den naturlige konveksjonen i borehullets mellomrom er initialverdien til varmeledningsevnen satt identisk, lik 0.6 W/m.K, for fyllmassen og grunnvannet.

Eksempel 1: Lik kollektorvæsketemperatur inn i borehullene

I dette eksempelet settes det en identisk temperaturprofil for kollektorvæsketemperaturen inn i borehullet for begge borehullene. Initialtemperaturen grunnen og i



Figur 5.8: Resistansens sensitivitet til varmelasten

grunnvannet i borehullet settes til 10°C . De første tre døgnene tilføres borehullet en konstant kollektorvæsketemperatur på 15°C , slik at varme injiseres i grunnen. Videre vil det de tre resterende døgnene ekstraheres varme fra grunnen ved å tilføre en konstant kollektorvæsketemperatur på 8°C . Figur 5.9 og 5.10 viser resultatet fra simuleringen, der de blå og svarte profilene er illustrasjoner for borehullene fylt med henholdsvis grunnvann og fyllmasse. Den røde linjen viser temperaturprofilen til kollektorvæsketemperaturen inn i borehullet. Vi observerer følgende:

- Varmelasten mellom kollektorvæsken og borehullveggen er størst for det grunnvannsfylte borehullet under hele simuleringsperioden. Dette er som forventet siden den naturlige konveksjonen i det grunnvannsfylte borehullet bidrar til at resistansen i borehullets mellomrom reduseres, og følgelig vil raten av varme som transporteres i dette område øke. Dette betyr at det overføres mer varme mellom kollektorvæsken og grunnen i det grunnvannsfylte borehullet. Videre betyr det at kollektorvæsketemperaturen ut av borehullet vil være *lavere* ved injeksjon av varme og *høyere* ved ekstraksjon av varme, sammenlignet med borehullet fylt med fyllmasse. I tillegg får vi at temperaturen ved borehullveggen vil være *høyere* ved injeksjon av varme, og *lavere* ved ekstraksjon av varme. Dette kan observeres på de heltrukne og stippledde, svarte og blå, linjene nederst på figur 5.9.
- Differansen i varmelast for de to borehullene er større ved injeksjon av varme enn ved ekstraksjon av varme, som vist øverst på figur 5.9. Etter for eksempel to døgn ut i injeksjonsperioden, er differansen på 9 W/m , mens den etter to døgn ut i ekstraksjonsperioden (fem døgn i simuleringsperioden) er på 4.2 W/m . Videre observerer vi at forskjellen mellom kollektorvæsketemperaturen

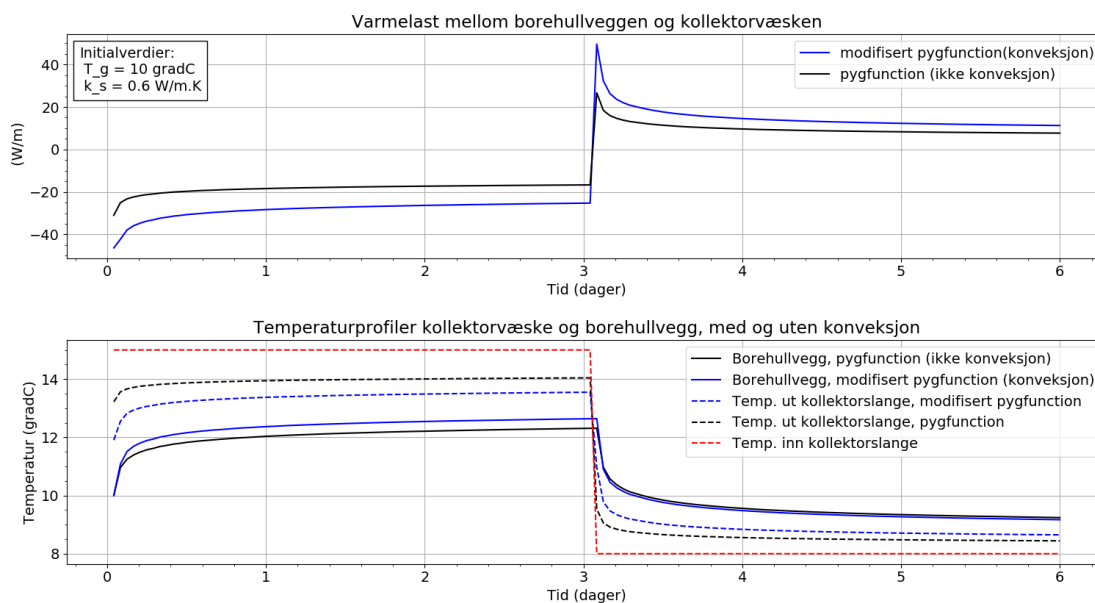
ut av borehullet er større ved injeksjon enn ved ekstraksjon. Etter to døgn ut i injeksjonsperioden er forskjellen på 0.5°C , mens den etter to døgn ut i ekstraksjonsperioden er på 0.2°C .

- Den effektive resistansen til borehullet fylt med fyllmasse er stasjonær og lik 0.13 m.K/W . For det grunnvannfylte borehullet observerer vi på figur 5.10 at den effektive resistansen er mindre ved injeksjon av varme enn ved ekstraksjon av varme. Årsaken til dette er at det ved injeksjon av varme er en større temperaturforskjell mellom kollektorvæsken og borehullveggen, mens temperaturforskjellen er mindre når varme ekstraheres fra grunnen.
- På figur 5.10 observerer vi at den effektive resistansen øker fra 0.84 m.K/W til 0.86 m.K/W i løpet av perioden varme tilføres grunnen. Dette kan forklares ved å se på hvordan lasten og temperaturdifferansen mellom kollektorvæsketemperaturen og borehullveggen endrer seg fra for eksempel dag 1 til dag 3. I løpet av disse to dagene vil lasten reduseres med 5 W/m , mens temperaturdifferansen reduseres med 0.3°C .
- Resistanseprofilen har en liten “knekk” helt i starten, der den går raskt ned før den stiger gradvis utover i injeksjonsperioden. Årsaken til knekken er temperaturen raskt stiger og lasten raskt reduseres i løpet av de første tidsstegene i simuleringen. Videre observerer vi en lignende større knekk etter i overkant av tre dager. Bunnpunktet på knekken finner sted helt i starten på ekstraksjonsperioden. Ved dette punktet har vi en temperaturdifferanse på 3°C mellom kollektorvæsketemperaturen inn i borehullet og borehullveggen. Dette fører til at lasten blir stor (om lag 50 W/m), som videre fører til at resistansen blir tilsvarende liten.

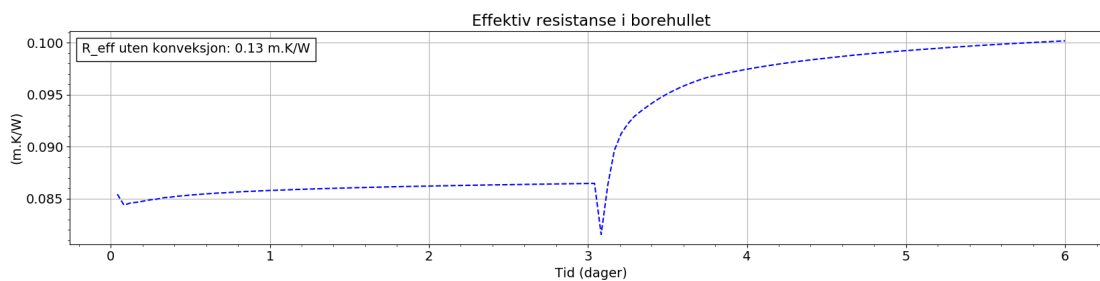
Eksempel 2: Lik varmelastprofil for begge borehullene

I dette eksempelet initialiseres borehullene med den samme lastprofilen. De tre første døgnene injiseres det varme til grunnen med en last på 40 W/m , mens de resterende tre døgnene ekstraheres det varme fra grunnen med en last på 20 W/m . Resultatet fra simuleringen vises på figur 5.11, der de blå og grønne profilene er for borehullet fylt med henholdsvis grunnvann og fyllmasse. Den svarte linjen viser temperaturen ved borehullveggen. Vi observerer følgende:

- Både ved injeksjon og ekstraksjon av varme, vil kollektorvæsketemperaturen inn og ut av borehullet for det grunnvannsfylte borehullet ligge nærmere temperaturen ved borehullveggen, enn for borehullet fylt med fyllmasse. Årsaken til dette er at den naturlige konveksjonen i det grunnvannsfylte borehullet fører til at man trenger en mindre temperaturdifferanse mellom kollektorvæsken og borehullveggen for å opprettholde en identisk lastprofil.

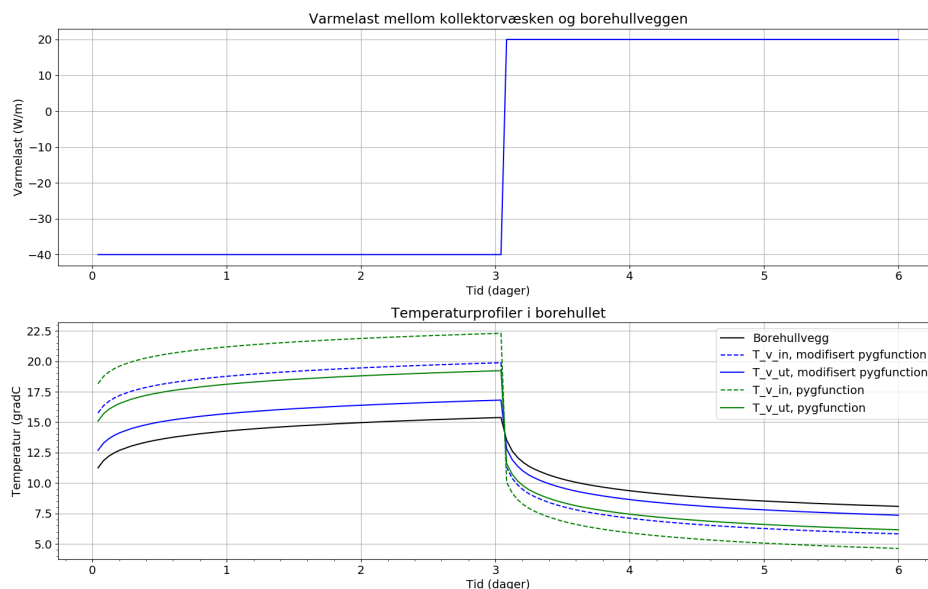


Figur 5.9: Temperatur- og lastprofiler for lik kollektorvæsketemperatur inn i borehullet



Figur 5.10: Profilen til den effektive resistansen for lik kollektorvæsketemperatur inn i borehullet

- Ved injeksjon av varme vil differansen i kollektorvæsketemperaturen inn i borehullet for de to borehullene være *større* enn ved ekstraksjon. Etter 2 døgn ut i injeksjonsperioden er forskjellen på 2.43°C , mens etter 2 døgn ut i ekstraksjonsperioden er forskjellen på 1.2°C . Den samme trenden vil gjelde for kollektorvæsketemperaturen ut av borehullet. Begrunnelsen for dette, er som tidligere nevnt, at den naturlige konveksjonen i borehullet reduseres med lavere temperatur i borehullet og lavere varmelast mellom kollektorvæsken og borehullveggen.



Figur 5.11: Temperatur- og lastprofiler for borehull fylt med henholdsvis grunnvann og fyllmasse. Borehullene initialiseres med den samme lastprofilen.

5.2.4 Hovedresultat

I denne seksjonen setter vi opp eksempler der målet er å besvare følgende fire problemstillinger:

1. Grunnvannet i borehullets mellomrom har en lav varmeledningsevne, og er derfor en lite effektiv varmeleder. I følge [29] må en fast varmeledningsevne til grunnvannet økes to til tre ganger for å tilfredsstille den naturlige konveksjonens effekt på varmetransporten. Vi ønsker å undersøke om den modifiserte pygfunction simulerer en lignende effekt.
2. Hvor mye vil konveksjonen redusere den effektive resistansen i borehullet sammenlignet med når varme transporteres ved varmeledning i borehullets mellomrom? I følge [30] og [31] kan resistansen reduseres med 20 – 50%, avhengig av hvilken last man har mellom kollektorvæsken og borehullveggen, samt hvilken temperatur grunnvannet har. Vil den modifiserte pygfunction simulere en lignende effekt i eksemplet satt opp?
3. Hvor mye vil den naturlige konveksjonen virke inn på energimengden som hentes ut eller lagres i grunnen?
4. Når resistansen for et grunnvannsfylt borehull oppdateres for hvert tidssteg

i simuleringen vil beregningsbelastningen bli stor. Ved å sette en stasjonær resistanse, basert på gjennomsnittlige verdier til temperaturen i grunnvannet og lasten, kan beregningsbelastningen reduseres. Hvordan vil dette virke inn på energimengden som borehullet henter ut eller lagrer, sammenlignet med når resistansen oppdateres?

I eksemplene gjennomføres det simuleringer for et grunnvannsfylt borehull. Dersom borehullet simuleres uten konveksjon anvendes den umodifiserte pygfunction, slik at det antas at varmen overføres ved varmeledning i borehullets mellomrom. Motsatt anvendes den modifiserte pygfunction dersom det antas at varmen overføres ved naturlig konveksjon.

Eksempel 1: Hvor mye må varmeledningsevnen økes for å tilfredsstille den naturlige konveksjonen?

I dette eksempelet besvares det første spørsmålet i innledningen, ved å gjennomføre tre simuleringer, der temperaturen ut av borehullene sammenlignes. Lastdata for de første seks døgnene for sykehusbygget anvendes, der varme både injiseres og hentes ut fra grunnen. Vi tenker oss at vi har to identiske grunnvannsfylte borehull, A og B. I alle tre simuleringene vil borehull A simuleres med naturlig konveksjon og en varmeledningsevne i grunnvannet som vil variere noe med temperaturen, men ligge nærme 0.6 W/m.K^1 . Borehull B simuleres uten naturlig konveksjon, og med en fast varmeledningsevne som varieres for de tre simuleringene:

1. I første simulering settes varmeledningsevnen lik 0.6 W/m.K .
2. I andre simulering justeres varmeledningsevnen opp til den tilfredsstiller den naturlige konveksjonens effekt.
3. I følge [23] vil avstanden fra sentrum i kollektorbenet til sentrum av borehullet påvirke resistansen til et borehull der naturlig konveksjon ikke eksisterer, derav mindre avstand gir en økt resistanse. I de to første simuleringene er denne avstanden på $0.031m$. I tredje simulering reduseres avstanden til $0.025m$. Videre undersøkes det hvor mye varmeledningsevnen må økes for å tilfredsstille den naturlige konveksjonen i dette tilfellet.

Resultatet fra simuleringene illustreres i figur 5.12 - 5.14. De blå og grønne stiplede linjene på figurene viser kollektorvæsketemperaturen ut av borehullet for henholdsvis med - og uten konveksjon. Den svarte heltrekte linjen viser temperaturen ved borehullveggen, som vil være lik for begge borehullene, siden de har den samme lastprofilen. I borehull A varierer den effektive resistansen fra $0.08 - 0.096 \text{ m.K/W}$, noe som viser hvordan resistansen påvirkes av temperatur - og lastendringer i bore-

¹Se tillegg B for en visuell fremstilling av hvordan varmeledningsevnen til vann varierer med temperaturen til vannet.

hullet. For borehull B beregnes den effektive resistansen til 0.132 m.K/W for første simulering og 0.088 m.K/W for de to siste simuleringene.

Figur 5.12 viser resultatet fra første simulering. Vi observerer tydelig konveksjonens effekt, ved å merke oss at temperaturen ut av borehull A ligger nærmest temperaturen ved borehullveggen. Dette bekrefter hvordan den naturlige konveksjonen fører til økt varmetransport mellom kollektorrøsket og borehullveggen. I tillegg observerer vi at temperaturdifferansen mellom borehull A og B er mindre når lasten blir mindre og større når lasten er større, noe som bekrefter resistansens sensitivitet til lasten. På figur 5.13 er varmeledningsevnen til borehull B økt til 1.2 W/m.K, noe som resulterer i at temperaturprofilene ut av borehullene blir omtrent identiske. Det kan se ut som en dobling av varmeledningsevnen tilfredsstillende effekten av den naturlige konveksjonen i dette tilfellet. For simulering tre (figur 5.14) må varmeledningsevnen økes til 1.6 W/m.K for å tilfredsstillende konveksjonseffekten.

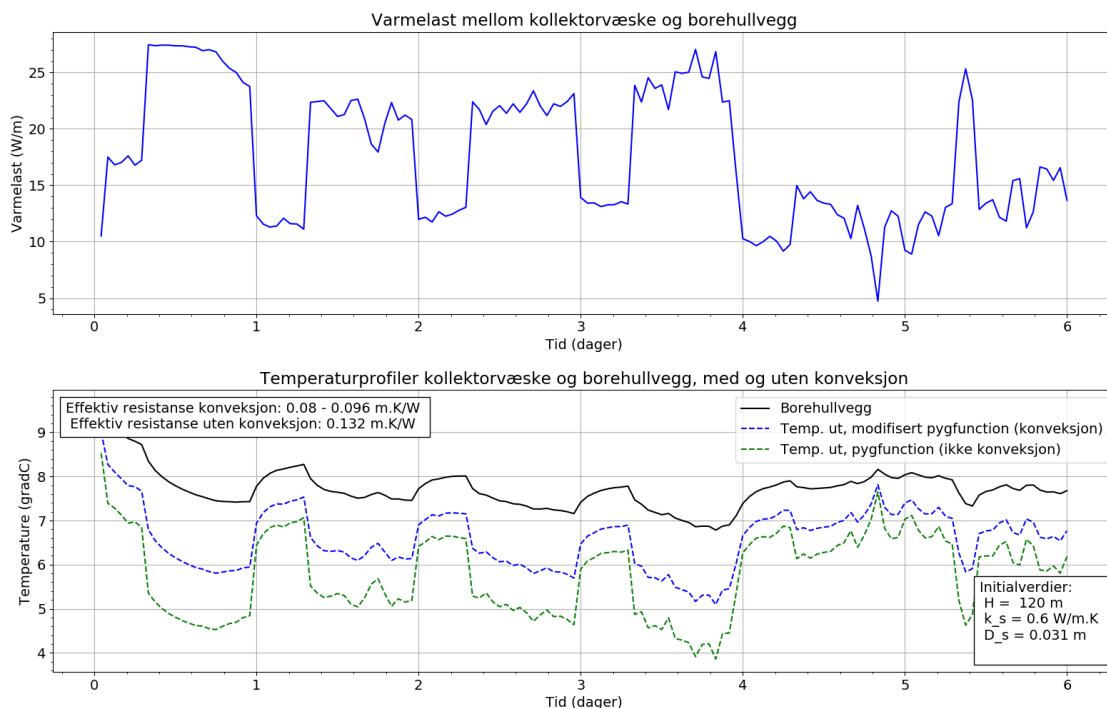
Med utgangspunkt i gjennomførte simuleringer må en fast varmeledningsevne minst dobles for å tilfredsstillende effekten av den naturlige konveksjonen, der økningen er avhengig av posisjonen til kollektorslangen i borehullet. Det er naturlig å anta at flere faktorer vil påvirke størrelsen på økningen og er noe bør undersøkes videre. Dette er ikke gjort i denne oppgaven.

Eksempel 2: Den naturlig konveksjonens effekt på resistansen, samt tilførsel og uttak av energi

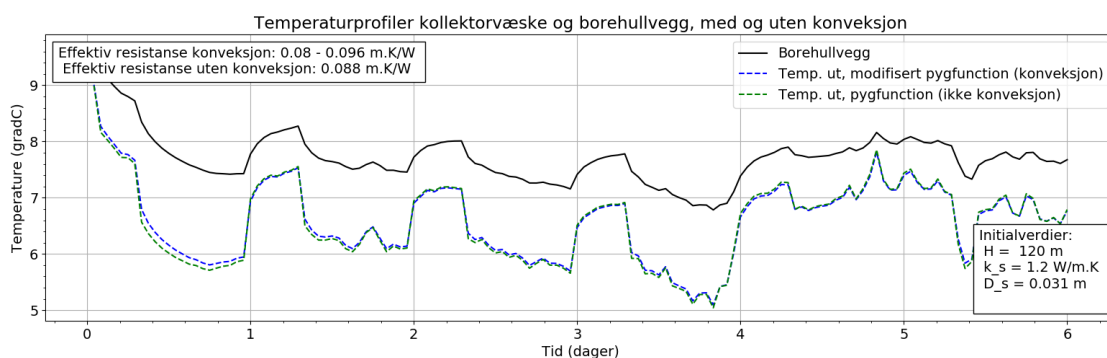
I dette eksempelet er hovedmålet å besvare spørsmål to og tre i det innledende avsnittet. For å gjøre dette setter vi opp en simulering med to grunnvannsfylte borehull A og B. I borehull A har vi ingen naturlig konveksjon og en fast varmeledningsevne på 0.58 W/m.K, som er det samme som grunnvannet har ved 10 °C. I borehull B simuleres det med konveksjon. Ved å sammenligne en identisk simulering av borehullene kan vi observere effekten konveksjonen har på varmetransporten og den effektive resistansen. Simuleringsperioden er på ett år, og parametere som anvendes er gitt i tabell F.2. Det første halvåret injiseres det varme i grunnen (lading) ved å tilføre borehullene en kollektorrøsketemperatur på 13 °C. Det resterende halvåret ekstraheres det varme (uttak) ved å tilføre en kollektorrøsketemperatur på -1 °C. Den totale energien som injiseres og ekstraheres til og fra grunnen kan bestemmes ved å først beregne effekten som tilføres og hentes ut mellom borehullene og grunnen. Ved å anta at kollektorslangen er et lukket system, som bare opplever en følbare energioverføring, kan ligning A.10 anvendes for dette formålet, slik at vi får:

$$\dot{E}_{total} = (\rho_v c_{p_v} \frac{\Delta T}{\Delta t} V_v) / 1000. \quad (5.2)$$

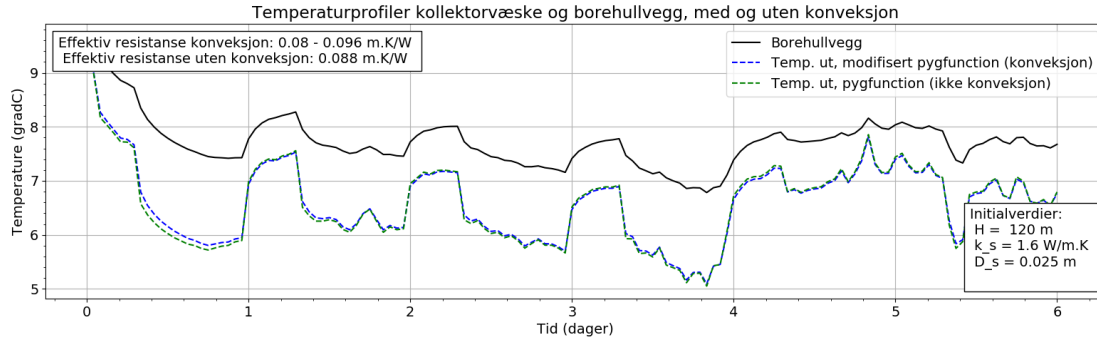
Her er \dot{E}_{total} den totale effekten som injiseres eller hentes ut av grunnen [kW], ρ_v er



Figur 5.12: Forskjellen på temperaturen ut av borehullet med og uten konveksjon. Blå og grønn linje viser borehullet som simuleres henholdsvis med og uten naturlig konveksjon. For borehullet uten konveksjon er det satt en fiksert varmeledningsevne til grunnvannet på 0.6 W/m.k.



Figur 5.13: Forskjellen på temperaturen ut av borehullet med og uten konveksjon. Blå og grønn linje viser borehullet som simuleres henholdsvis med og uten naturlig konveksjon. For borehullet uten konveksjon er det satt en fiksert varmeledningsevne til grunnvannet på 1.2 W/m.k. Vi observerer at temperaturen ut av borehullene er omtrent identiske, noe som betyr at varmeledningsevnen til grunnvannet må doubles for å tilfredstille den naturlige konveksjonens effekt.



Figur 5.14: Forskjellen på temperaturen ut av borehullet med og uten konveksjon. Blå og grønn linje viser borehullet som simuleres henholdsvis med og uten naturlig konveksjon. For borehullet uten konveksjon er det satt en fiksert varmeledningsevne til grunnvannet på 1.6 W/m.k. I tillegg er avstanden mellom kollektorbenene redusert i forhold til de to foregående simuleringene. For å tilfredsstille den naturlige konveksjonen må varmeledningsevnen økes til 1.6 W/m.k.

tettheten til kollektorvæsken [kg/m^3], c_{pv} er den spesifikke isobariske varmekapasiteten til kollektorvæsken [$J/kg.K$], $\Delta T = T_{vin} - T_{vut}$ er differansen mellom inn- og utløpstemperatur til kollektorvæsken [$^{\circ}C$], Δt er tiden kollektorvæsken bruker fra innløp til utløp i borehullet [sek], V_k er det totale volumet til kollektorvæsken fra innløp til utløp av borehullet [m^3]. Det antas at kollektorslangen har en lengde lik to ganger borehullets lengde, slik at Δt kan beregnes ved ligningen:

$$\Delta t = \frac{2H\rho_v A_k}{\dot{m}_v}, \quad (5.3)$$

der H er aktiv lengde til borehullet [m], $A_k = \pi(r_{ki})^2$ er det indre tverrsnittarealet av kollektorslangen [m^2] og \dot{m}_v er massestrømhastigheten til kollektorvæsken [kg/s]. Videre kan volumet til kollektorslangen beregnes ved ligningen:

$$V_k = 2HA_k. \quad (5.4)$$

Den eneste faktoren i ligning 5.2 som vil være ulik for borehullene er temperaturredifferansen, ΔT . I simuleringen kjøres det identiske temperaturer, T_{vin} , inn i begge borehullene. Temperaturen ut av borehullene, T_{vut} , vil derimot være ulike, siden varmetransporten mellom kollektorvæsken og borehullveggen vil være forskjellig. Vi får to temperaturredifferanser, $\Delta T_{borehull_A}$ og $\Delta T_{borehull_B}$, som settes inn i ligning 5.2, og videre kan den totale effekten for hvert borehull beregnes og sammenlignes.

Figur 5.15 viser resultatet fra simuleringen, der de svarte og blå linjene viser temperaturprofiler for henholdsvis borehull A og B. Den røde linjen viser temperaturen

til kollektorvæsken inn i borehullene. Figur 5.16 viser den totale effekten ved injeksjon og ekstraksjon for borehullene. Vi observerer at borehull B har høyere effekt under hele simuleringsperioden. Ved å integrere over hele effektkurven kan den totale energien som borehullene henter ut eller tilfører grunnen beregnes. Dette gir følgende:

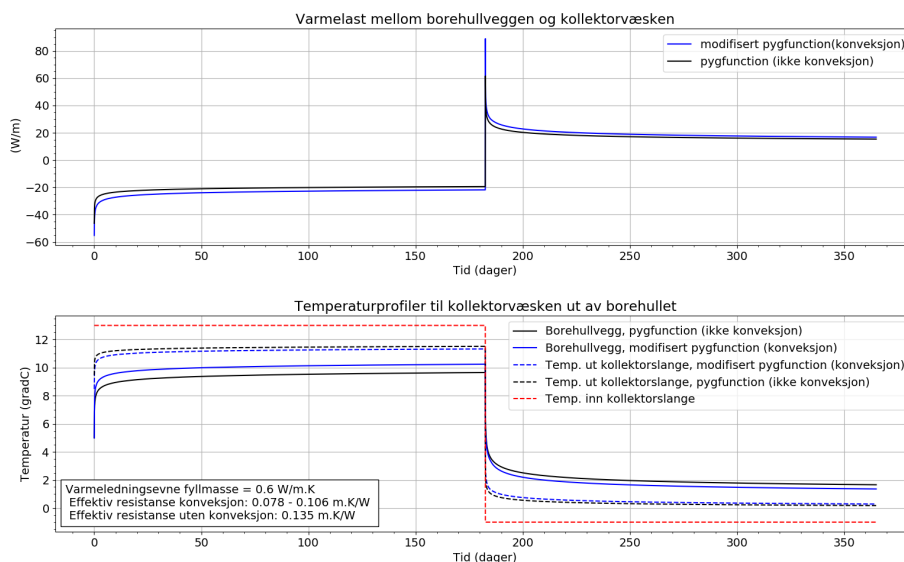
- Total energi tilført grunnen (injeksjon):
 - Borehull A (ikke konveksjon): 18.1 MWh.
 - Borehull B (konveksjon): 20.6 MWh.
- Total energi hentet ut av grunnen (ekstraksjon):
 - Borehull A: 15.2 MWh.
 - Borehull B: 16.8 MWh.

Dette betyr at borehull B tilfører grunnen 13.7% mer energi ved injeksjon, mens det henter ut 10.6% mer energi ved ekstraksjon. Forskjellen på 3.1% ved uttak og lading, bekrefter varmetransportens sensitivitet til temperaturen i grunnvannet i borehullet. Temperaturforskjellen i grunnvannet er på om lag 9 °C, og dette fører til at den effektive resistansen varierer fra 0.078 – 0.106 m.K/W, noe som kan observeres på figur 5.17. Med en fiksert varmeledningsevne på 0.58 W/m.K beregnes den effektive resistansen til 0.135 m.K/W. Dette betyr at konveksjonen fører til at resistansen reduseres med 21.5 – 42.2 % for dette eksempelet.

Eksempel 3: Stasjonær resistanse

I denne seksjonen besvares spørsmål fire i det innledende avsnittet. Simuleringen av borehull B (med konveksjon) har en beregningstid på om lag 8 minutter. Årsaken til den lange beregningstiden er den transiente resistansens avhengighet til temperaturen ved yttersiden av kollektorslangen og innsiden av borehullveggen, samt varmelasten mellom kollektorslangen og borehullveggen. Under simuleringen oppdateres disse tre parameterne for hvert tidssteg. For å redusere beregningsbelastningen gjennomfører vi en identisk simulering av borehull B, men der parameteren ikke oppdateres i beregningen av resistansen. I stedet for anvendes gjennomsnittlige stasjonære verdier av de tre parameteren basert på simuleringen av borehull B i eksempel 2. Dette gir følgende verdier:

- $T_{ky} = 5.85^{\circ}\text{C}$ (Temp. ytterside kollektorvegg).
- $T_{BHV} = 5.93^{\circ}\text{C}$ (Temp. innside borehullvegg).
- $\dot{q}_b = 21.41 \text{ W/m}$ (Last mellom kollektorvæske og borehullvegg).

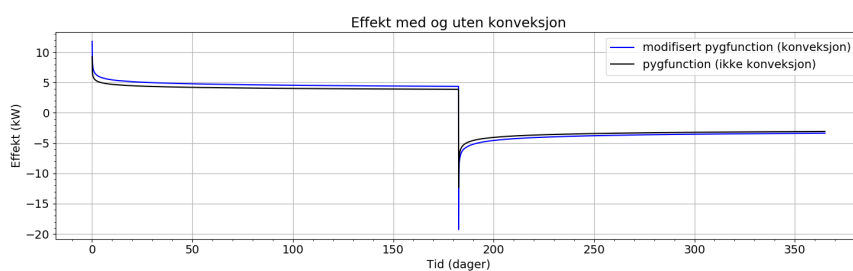


Figur 5.15: Temperatur og lastprofil for borehull fylt med fyllmasse eller grunnvann

Ved å anvende disse tre parameteren i simuleringen av borehull B reduseres beregningstiden til 5.9 *sek*. Den effektive stasjonære resistansen beregnes til, $R_b^* = 0.100 \text{ m.K/W}$, og ligger i øvre sjiktet av den beregnede transiente resistansen. Videre kan vi beregne energien som borehullet henter ut og tilfører grunnen. Under er det listet opp resultat for simuleringer med stasjonær og transient resistanse:

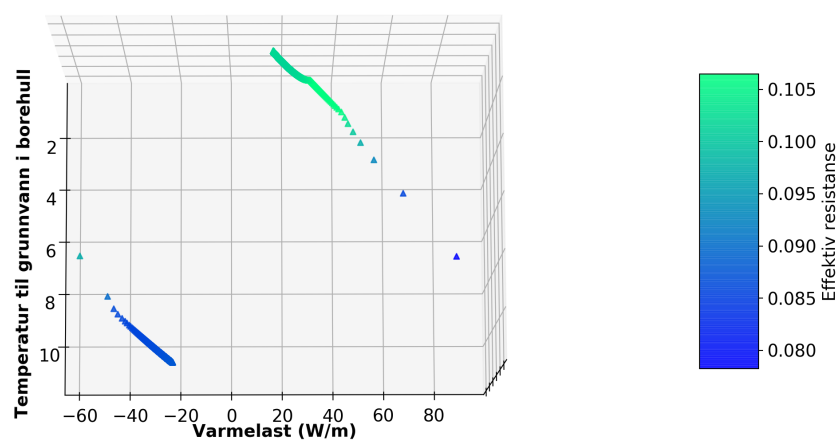
- Total energi tilført grunnen (injeksjon)
 - Borehull B (stasjonær resistanse): 19.9 MWh
 - Borehull B (transient resistanse): 20.6 MWh.
- Total energi hentet ut av grunnen (ekstraksjon)
 - Borehull B (stasjonær resistanse): 16.9 MWh
 - Borehull B (transient resistanse): 16.8 MWh.

Med de gitte parametere for beregningen av den stasjonære resistansen, så vil borehullet tilføre 3.78 % mindre energi til grunnen og hente ut 0.03 % mer energi fra grunnen. Årsaken til forskjellen på 3.75 prosentpoeng er at den beregnede stasjonære resistansen vil være omtrent identisk med den transiente ved ekstraksjon, mens ved injeksjon vil den være noe høyere. Dette betyr at ved å anvende en stasjonær resi-



Figur 5.16: Effektprofil for borehull fylt med fyllmasse eller grunnvann

Sammenhengen mellom effektiv resistanse, last og temperatur til grunnvannet



Figur 5.17: Sammenligning av resistansen, lasten og temperaturen til grunnvannet

stansen i simuleringen, så vil resultatet være avhengig av hvilke verdier som settes for T_{ky} , T_{BHV} og \dot{q}_b . Dersom vi for eksempel endrer initialtemperaturene til: $T_{ky} = 6.5^\circ C$ og $T_{BHV} = 7.0^\circ C$, får vi et resultat der borehullet med stasjonær resistanse tilfører grunnen 2.61 % mindre energi og henter ut 1.3 % mer energi.

Kapittel 6

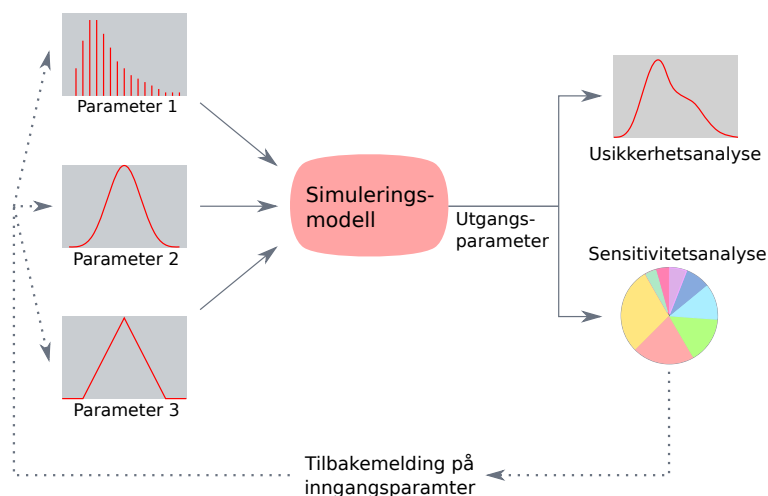
Sensitivitet og usikkerhetsanalyse

En simuleringsmodell vil alltid være en forenkling av det virkelige systemet og resultatene man får vil følgelig være en omtrentlig imitasjon av de reelle forhold. Generelt vil feilen i resultatet som modellen gir være avhengig av hvor mye selve modellen er forenklet i forhold til virkeligheten, samt feilen i inngangsparameterne som modellen tar inn. Følgelig betyr dette at om de matematiske relasjonene i en modell representerer virkeligheten med stor nøyaktighet, så vil det likevel være en usikkerhet i resultatet dersom feilen i inngangsparameterne er stor. Motsatt kan en liten feil i inngangsparameterne gi et resultat som ikke er overens med virkeligheten dersom modellen har åpenbare feil.

I dette kapitlet skal vi gjennomføre en sensitivitet- og usikkerhetsanalyse av den modifiserte pygfunction. I en sensitivitetsanalyse undersøker vi hvordan usikkerheten i utdataene til den modifiserte pygfunction kan deles og tildeles forskjellige usikkerhetskilder i inndataene – eller med andre ord - hvor sensitiv er modellen for endringer i forskjellige inngangsparametere? Resultatene av sensitivitetsanalysen kan brukes til å avdekke hvilke inngangsparametre som påvirker resultatene i størst grad, og som det dermed er særlig viktig å kartlegge før de anvendes i simuleringsmodellen. I en usikkerhetsanalyse kartlegges det i hvor stor grad usikkerheten i resultatet blir som en følge av usikkerheten i inngangsparameterne. De ulike stegene i analysen illustreres i figur 6.1.

Noen eksempler: I følge [32] kan en usikkerhet på 10 % i varmeledningsevnen i grunnen føre til 5 % endring av borehullengden. Videre kom [33] frem til at en usikkerhet på 50 % i estimatet på varmeledningsevnen til grunnen kan lede til en usikkerhet på 24 % i borehullengden. I tillegg viste [34] at et overestimat på 50 % av resistansen i borehullet kan føre til at borehullengden økes med 17 %.

I følgende analyse tar vi utgangspunkt i eksempel 3 fra seksjon 5.2.4. Resultatet fra dette eksempelet viste at det grunnvannsfylte borehullet i løpet av ett år tilførte



Figur 6.1: Illustrasjon av stegene i en sensitivitet- og usikkerhetsanalyse.

grunnen 19.9 MWh og hentet ut 16.9 MWh. Et av hovedmålene videre er å undersøke hvor robust dette resultat er. Vi definerer følgende problemstillinger som vi ønsker å besvare:

- Den modifiserte pygfunction har 15 inngangsparametere, som hver har sine respektive usikkerheter knyttet til seg. Hvordan vil usikkerheten til disse parametrene påvirke usikkerheten til den totale energien som borehullet tilfører og henter ut av grunnen for det gitte eksempelet?
- Hvilken inngangsparameter har størst innflytelse på usikkerheten i resultatet? Ved å kartlegge dette kan det i tillegg konkluderes med hvilken inngangsparameter det er spesielt viktig å samle informasjon om for å redusere usikkerheten i parameteren og følgelig resultatet.

I seksjon 6.1 gis en innføring i hvordan en usikkerhetsanalyse kan gjennomføres. Deretter i seksjon 6.2 gis det en kort innføring i hvordan en global sensitivitetsanalyse kan gjennomføres. Til slutt i seksjon 6.3 presenteres resultatene fra analysen. Det kan nevnes at det i tillegg E gis en innføring i grunnleggende statistiske begreper dersom leseren ønsker en innføring i dette.

6.1 Innføring i usikkerhetsanalyse

Beskrivelser i denne seksjonen følger fremstillinger gitt i [35] og [36].

6.1.1 Definisjon av usikkerhet

Usikkerhet for en målestørrelse¹ defineres som: *En parameter assosiert med resultatet til målestørrelsen, som karakteriserer spredningen av verdier som kan tilskrives målestørrelsen.* Parameteren kalles for en usikkerhetskomponent. Det er vanlig å uttrykke usikkerhetskomponenter som standard usikkerhet. Standard usikkerhet er definert som usikkerheten til et resultat av målinger uttrykt som standardavvik og karakteriserer verdiområdet som den sanne verdien til målestørrelsen blir sagt å ligge innenfor med et spesifisert konfidensnivå. Videre har vi to metoder for å evaluere standard usikkerhet.

Type A evaluering defineres som:

Evaluering av usikkerhet ved å anvende statistiske analyser gjort av gjentatte målinger.

Type B evaluering defineres som:

Evaluering av usikkerhet ved å anvende andre metoder enn den statistiske analysen av gjentatte målinger.

I en Type B evaluering gjennomføres det en vitenskapelig vurdering basert på all tilgjengelig informasjon for mulige variasjoner av målestørrelsen. Informasjonen kan for eksempel være: Tidligere måledata; erfaring eller generell kunnskap om oppførselen eller egenskapen til inngangsvariabelen; spesifikasjoner fra produsenten; kalibreringsdata; usikkerhet hentet fra håndbøker knyttet til inngangsvariabelen. I seksjon 6.3.1 vil usikkerheten i de ulike inngangsparametrene i den modifiserte pygfunction evalueres ved en Type B evaluering.

6.1.2 Gjennomføring av analysen

En matematisk modell til en målestørrelse kan uttrykkes som en funksjonell relasjon på formen:

$$Y = f(\mathbf{X}). \quad (6.1)$$

Her er Y utgangvariabelen til modellen og definert som en stokastisk variabel med mulige verdier η og forventning y . $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ representerer N inngangsvariabler, der hver enkelt X_i er en stokastisk variabel med mulige verdier ξ_i og forventning x_i . Videre kan Y og X_i tildeles sannsynlighetstetthetsfunksjoner som videre betegnes som henholdsvis $g_Y(\eta)$ og $g_{X_i}(\xi_i)$. For en modell som relaterer Y og \mathbf{X} , vil det i henhold til [37] gjennomføres følgende grunnleggende steg i en usikkerhetsanalyse:

¹En målestørrelse er definert som mengden eller objektet som måles. Det kan også betegnes som den observerte verdien eller en stokastisk variabel, som definert i seksjon E.1. Begrepet målestørrelse diskuteres også i [36].

1. *Formulering:*

- Definer utgangstørrelsen, Y , som skal måles.
- Bestem inngangvariablene $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ som Y er avhengig av.
- Definer en modell som relaterer Y til \mathbf{X} , som gitt i ligning 6.1.
- Tildel en tetthetsfunksjon til hver uavhengig variabel X_i . Eventuelt kan det tildeles en felles tetthetsfunksjon til variabler som er avhengige.

2. *Propagering:* Propager tetthetsfunksjonen for hver X_i gjennom modellen for å hente ut en tetthetsfunksjon for Y .3. *Oppsummering:*

- Visualisering av tetthetsfunksjon for Y .
- Beregne forventningsverdien til Y .
- Beregne standardavviket til Y .
- Beregne konfidensintervall for Y med spesifisert konfidensnivå.

For å gjennomføre propagering og oppsummering-steget over kan en tilnærming ved Monte Carlo metode anvendes.

6.1.3 Monte Carlo simulering

I følgende seksjon beskrives hvordan Monte Carlo metode implementeres for steg to og tre i seksjon 6.1.2. Hovedprinsippet ved en slik tilnærming er å repeterende hente ut verdier ξ_i fra sannsynlighetstetthetsfunksjoner til X_i , som videre anvendes i modellen. Resultatet blir en tetthetsfordeling til utgangsparemeteren Y .

Implementeringen av Monte Carlo metoden er listet opp under steg for steg:

1. Antall Monte Carlo-forsøk, M , som skal gjennomføres velges. Beregningsbelastningen til modellen er en viktig faktor å ta hensyn til når antall forsøk skal velges.
2. Genererer N skalarverdier, hentet ut fra tildelte sannsynlighetstetthetsfunksjoner $g_{X_i}(\xi_i)$ til N inngangsparametere X_i . Dette repeteres M ganger.
3. For hver generering av skalarverdier beregnes det tilhørende modellverdier Y , slik at resultatet blir M modellverdier. Dette betyr at om vi betegner genereringene som $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$, der den r -te genereringen \mathbf{x}_r inneholder skalarverdier $x_{1,r}, \dots, x_{N,r}$, der $x_{i,r}$ er hentet fra sannsynlighetstetthetsfunksjonen til X_i , vil

modellverdiene være gitt ved:

$$y_r = f(\mathbf{x}_r), \quad r = 1, \dots, M. \quad (6.2)$$

4. Representerer modellverdiene med en diskret fordelingskurve. Når modellverdiene y_r samles i et histogram dannes det en frekvensfordeling som vil være en approksimasjon av sannsynlighetstetthetsfunksjonen, $g_Y(\eta)$, til Y .
5. Beregner forventningsverdien y til Y og standard usikkerhet $u(y)$ assosiert med y . En tilnærming til forventningsverdien vil i dette tilfelle være lik gjennomsnittet gitt ved ligningen:

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_r. \quad (6.3)$$

Standard usikkerhet vil være gitt som standardavviket om gjennomsnittet gitt ved ligningen:

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{r=1}^M (y_r - \bar{y})^2}. \quad (6.4)$$

6. Beregner hensiktsmessig konfidensintervall for Y , med et gitt konfidensnivå p .

6.2 Innføring i sensitivitetsanalyse

I denne seksjonen skal vi gi en kort innføring i metoden som anvendes i sensitivitetsanalysen i denne oppgaven. For detaljerte beskrivelser av analysen henvises leseren til [38].

En sensitivitetsanalyse anvendes for å undersøke hvor sensitiv modellens utgangsparameter er for usikkerheten i inngangsparameterne.

I denne oppgaven anvendes programvaren SALib [39] for å gjennomføre en global sensitivitetsanalyse. Analysen består av tre steg, der de to første er identisk med stegene som gjennomføres i usikkerhetsanalysen i seksjon 6.1.2. I det tredje steget anvendes Sobols metode¹ for å evaluere sensitiviteten i de ulike inngangsparameterne. Denne metoden gir spesielt tre viktige indekser for å beskrive sensitiviteten:

- **Første ordens indeks**, S_i , gir andelen en enkelt inngangsparameteren, X_i , har på variasjonen til utgangsparameteren, Y .

¹Leseren henvises til [38] for en detaljert beskrivelse av denne analysemetoden.

- **Total indeks**, ST_i , beskriver andelen en enkelt inngangsparameteren, X_i , inkludert alle varianser forårsaket av dens vekselvirkning med alle andre inngangsparametere, har på variasjonen til utgangsparameteren, Y .

I tillegg har vi følgende generelle kriterier for analysen:

- $\sum_i S_i \leq 1$.
- $\sum_i S_i = 1 \rightarrow$ ingen vekselvirkning.
- $\sum_i ST_i \geq \sum_i S_i$.

6.3 Resultat, usikkerhet- og sensitivitetsanalyse

Vi skal i denne seksjonen presentere resultatene fra sensitivitet - og usikkerhetsanalysen. Dette gjennomføres i henhold til beskrivelser gitt i seksjon 6.1 og 6.2. Vi starter med å presentere usikkerheten i hver inngangsparameter. Deretter presenteres resultatene fra analysen.

6.3.1 Usikkerhet i parametere

I denne seksjonen defineres det en usikkerhet og en sannsynlighetstetthetsfunksjon til hver av de 15 inngangsparameterne som den modifiserte pygfunction anvender for borehullet som analyseres. Usikkerhetene som defineres er evaluert ved en Type B evaluering, der de i hovedsak baseres på litteraturstudie og antagelser gjort av forfatteren av denne oppgaven.

I litteraturen er det ofte oppgitt en øvre og nedre grense som den sanne verdien til parameteren er antatt å ligge innenfor, uten at det er spesifisert et konfidensintervall eller standardavvik. Teoretisk sett vil det være mest hensiktsmessig å anta en uniform eller triangulær fordeling til disse parameterne. I virkeligheten vet vi derimot at parameterne sannsynligvis har en gauss fordeling. Vi vil derfor anta en gauss fordeling til hver parameter og videre definere et estimat på standardavviket og forventningsverdien. Tabell 6.1 viser en oversikt over parametere med tilhørende forventningsverdi og standardavvik.

Aktiv borehullengde

Vi antar at borehullengden har en forventningsverdi $\mu_H \approx 200m$. I [40] er det antatt en feil på $\pm 1\%$ for et borehull på 100m. Med et borehull på 200m antar vi at feilen vil være noe større, og vi setter derfor standardavviket til borehullet på $\sigma_H \approx 2.5m$. Dette betyr at 95% av målte verdier til borehullet ville ligge innenfor intervallet $[195m, 205m]$.

Borehullradien

Usikkerheten i borehullradien er avhengig av både målefeil og at unøyaktig boring vil gi større avvik fra oppgitt borehullradius langs lengden av borehullet. [40] oppgir et feilintervall på $\pm 20\%$ for et borehull på med radius 0.1m. [41] oppgir en mye lavere usikkerhet på $\pm 3\%$ for en radius på 0.055m. For analysen i denne oppgaven antar vi at radien har en forventningsverdi, $\mu_{r_b} \approx 0.056m$. Det er store avvik i usikkerhet i litteraturen, og vi foreslår derfor et konservativt anslag, slik at vi får et standardavvik, $\sigma_{r_b} \approx 0.005m$. Dette betyr at 95% av målte verdier til borehullradien ville ligge innenfor intervallet $[0.046m, 0.066m]$.

Uforstyrret grunntemperatur

Den uforstyrret grunntemperatur kartlegges i starten av en TRT ved å la kollektorvæsken sirkulere i borehullet (uten varmetilførsel) til det oppstår temperaturlikevekt mellom væsken og grunnen. Nøyaktigheten i målinger av denne temperaturen er avhengig av ulike faktorer, som usikkerheten i måleutstyret som anvendes, varmen som tilføres kollektorvæsken fra sirkulasjonspumpen og termiske interaksjoner mellom kollektorvæsken og den omgivende luften på overflaten [32]. For en TRT av et 80m dypt borehull rapporterer [41] om en usikkerhet på 2.4% for en grunntemperatur på $8.3^{\circ}C$. [40] foreslår en lavere usikkerhet på 0.23% for et borehull på 100m og grunntemperatur på $15^{\circ}C$.

Det kan se ut som det er store avvik på usikkerheten i litteraturen. For analysen i denne oppgaven antar vi en forventningsverdi på $\mu_{T_g} \approx 5.0^{\circ}C$. Videre foreslår vi et konservativt anslag på usikkerheten og setter standardavviket til $\sigma_{T_g} \approx 0.2^{\circ}C$. Dette betyr at 95% av målte verdier til den uforstyrrede grunntemperaturen ville ligge innenfor intervallet $[4.6, 5.4]$.

Massestrømhastighet til kollektorvæsken

Massestrømhastigheten til kollektorvæsken måles med en strømningsmåler, der det eksisterer ulike merker med ulik usikkerhet. [40] har oppgitt feil på $\pm 0.33\%$ for en spesifikk elektromagnetisk måler. Med utgangspunkt i denne usikkerheten, antar vi en forventningsverdi på $\mu_{\dot{m}} \approx 0.8kg/s$, med tilhørende standardavvik, $\sigma_{\dot{m}} \approx 0.002kg/s$. Dette betyr at 95% av målte verdier vil ligge innenfor intervallet $[0.796, 0.804]$.

Egenskaper til kollektorvæsken

Usikkerheten i egenskaper til kollektorvæsken vil variere med væsketype, blandingsforhold og væsketemperatur. Avhengigheten til for eksempel temperatur fører til at egenskapene vil variere i løpet av en simulering. Vi antar følgende usikkerheter:

- For tettheten til kollektorvæsken oppgir [40] en feil på $\pm 1\%$. Vi antar en forventningsverdi $\mu_{\rho_v} \approx 1070 \text{ kg/m}^3$, med tilhørende standardavvik $\sigma_{\rho_v} \approx 5.0 \text{ kg/m}^3$. Det vil si at 95 % av målte verdier vil ligge innenfor intervallet [1060, 1080].
- For varmekapasitet til kollektorvæsken oppgir [40] en feil på $\pm 2\%$. Med utgangspunkt i dette antar vi for forventningsverdi på $\mu_{c_{p_v}} \approx 3258 \text{ J/kg.K}$, et standardavvik $\sigma_{c_{p_v}} \approx 50 \text{ J/kg.K}$. Det vil si at 95 % av målte verdier vil ligge innenfor intervallet [3158, 3358].
- Usikkerheten i viskositeten har vi ikke funnet noe litteratur på. Vi antar derfor at denne har en usikkerhet som er i samme område som tettheten til kollektorvæsken. For en forventningsverdi $\mu_{\mu_v} \approx 0.00588 \text{ kg/m.sek}$ foreslår vi et standardavvik på $\sigma_{\mu_v} \approx 0.00003 \text{ kg/m.sek}$. Det vil si at 95 % av målte verdier vil ligge innenfor intervallet [0.00582, 0.00594].
- Varmeledningsevnen til kollektorvæsken har vi heller ingen usikkerhet på fra litteraturen. Som for viskositeten antar vi at denne har en usikkerhet som er i samme område tettheten til kollektorvæsken. Med en forventningsverdi $\mu_{\lambda_v} \approx 0.389 \text{ W/m.K}$, foreslår vi et standardavvik $\sigma_{\lambda_v} \approx 0.002 \text{ W/m.K}$. Det betyr at 95 % av målte verdier ville være inneholdt i intervallet [0.385, 0.393].

Kollektorslangen

Vi har ingen usikkerhet fra litteraturen på indre- og ytre radius til kollektorslange. Vi antar at denne kan måles relativt nøyaktig og anslår et standardavvik på $\sigma \approx 0.0005 \text{ m}$ for begge målene. Videre setter vi en forventningsverdi for indre- og ytre radius på henholdsvis $\mu_{r_{k_{in}}} \approx 0.0176 \text{ m}$ og $\mu_{r_{k_{yt}}} \approx 0.0200 \text{ m}$. Det betyr at 95% av målte verdier til indre og ytre radius vil være inneholdt i intervallene [0.0166, 0.0186] og [0.019, 0.021].

Det vanligste plastikkstoffet som kollektorslangen er laget av er polyetylen-plast (PE - plast). Videre har [42] gjennomført en usikkerhetsanalyse av varmeledningsevnen for denne type materiale, og konkluderer med en usikkerhet på $\pm 3.3\%$ med et konfidensnivå på 68%. For analysen i denne oppgaven setter vi en forventningsverdi på $\mu_{\lambda_k} \approx 0.42 \text{ W/m.K}$. Med utgangspunkt i usikkerheten som er funnet i litteraturen foreslår vi et konservativt anslag på standardavviket og setter det til $\sigma_{\lambda_k} \approx 0.02 \text{ W/m.K}$. Det vil si at 95% av målte verdier vil være inneholdt i intervallet [0.038, 0.046].

Ruheten på innsiden av kollektorslangen har vi ingen informasjon om fra litteraturen. Vi setter en forventningsverdi $\mu_{\epsilon} \approx 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Videre foreslår vi et konservativt anslag på usikkerheten slik at vi får et standardavvik $\sigma_{\epsilon} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. Det vil si at 95% av målte verdier vil være inneholdt i intervallet $[9.4 \cdot 10^{-7}, 1.06 \cdot 10^{-6}]$.

Varmeledningsevne til grunnen

Varmeledningsevnen i grunnen kan bestemmes *in situ* ved en TRT [43] eller ved laboratoriemålinger [44]. For en beskrivelse av hvordan en TRT gjennomføres og hvilke beregninger som anvendes henvises leseren til tillegg D.1. En laboratoriemåling gjennomføres ved å ta kjerneprøver av forskjellige bergarter innenfor et begrenset område. Den varierende varmeledningsevnen for område kan deretter illustreres i et varmeledningskart.

I følge [45], [4] og [46] vil varmeledningsevnen i grunnen være både anisotropisk og heterogen, slik at den varierer mye i forhold til hvor i grunnen vi befinner oss. [4] gjennomførte laboratorieundersøkelser av varmeledningsevnen fra 1398 prøveområder i et større Oslo-område, og kom frem til at varmeledningsevnen for disse områdene varierte fra 1.0 til 6.88 W/m.K. Fordelingen er illustrert i histogrammet på figur 6.2. Variasjonen er avhengig av både bergartstypen, samt bergartenes individuelle struktur. Normalt på bergartens foalisjon kan varmeledningsevnen reduseres med opp mot 40% sammenlignet med målinger gjort parallelt med foalisjonen [47] (se figur 6.4). [46] gjennomførte repeterende målinger av varmeledningsevnen ved dybder fra 1 til 35 m i grunnen, der varmeledningsevnen varierte fra 1.19 til 3.40 W/m.K.

[45] viste hvordan varmeledningsevnen påvirkes av grunnstrøm. På figur 6.5 illustreres resultatet, der den røde linjen viser varmeledningsevnen beregnet ved Kelvins linjesluktøsning på overflaten, mens den stiplede linjen, ved 93m dybde, viser hvordan grunnvannstrøm i dette område fører til at varmeledningsevnen øker.

I [4] er det oppgitt følgende statistisk informasjon om varmeledningsevnen for de 1398 prøvene som er analysert: Minimum, første kvartil, median, tredje kvartil og maksimum er på henholdsvis 1.0, 2.35, 2.62, 3.06 og 6.88 W/m.K. Med denne informasjonen kan vi anvende ligning 14 og 16 fra [48] for å approksimere standardavviket og gjennomsnittet til alle prøvene. Dette betyr at gjennomsnittet, \bar{x} , kan approksimeres med ligningen:

$$\bar{x} \approx \frac{q_1 + m + q_4}{3}, \quad (6.5)$$

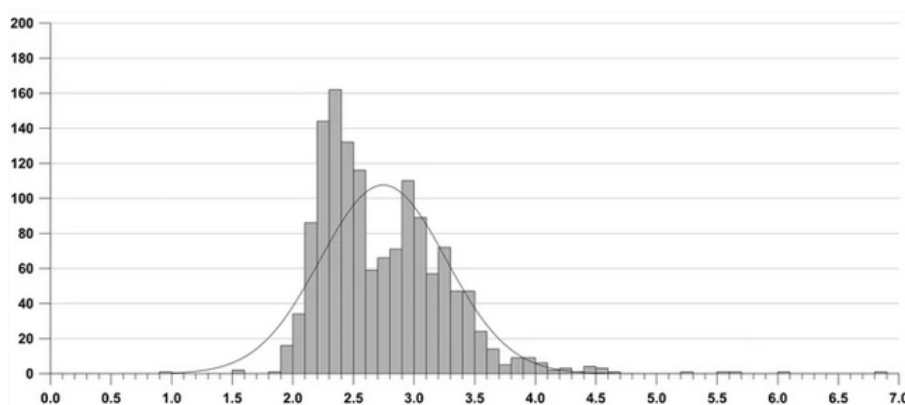
og standardavviket, S , kan approksimeres med ligningen:

$$S \approx \frac{q_3 - q_1}{2\Phi^{-1}\left(\frac{0.75n-0.25}{n+0.25}\right)}. \quad (6.6)$$

Her q_1 nedre kvartil, q_2 øvre kvartil, m er medianen, n størrelsen på datasettet og Φ^{-1} er inversfunksjonen til den kumulative fordelingsfunksjonen. Ved å anvende ligning 6.5 og 6.6 beregner vi gjennomsnitt og standardavvik til henholdsvis 2.68 W/m.K og 0.53 W/m.K.

[40] beregner usikkerheten til varmeledningsevnen som bestemmes i en TRT for et enkelt borehull til $\pm 5.1\%$. I analysen kommer det frem at det største bidraget til usikkerheten er usikkerheten i den målte differansen mellom inn- og utgående kollektorvæsketemperatur (70%), kollektorvæskens varmekapasitet (15.5%) og stigningstallet til regresjonslinjen¹(6.9%).

En TRT dekker et lite område av en fullstendig brønnpark, og det er derfor rimelig å anta en noe større usikkerhet i varmeledningsevnen enn det som [40] oppgir. Samtidig kan vi anta at variasjonen i varmeledningsevnen for en brønnpark vil være mye mindre enn det som framkommer i analysen for Oslo-området. Dette siden brønnparken dekker et mindre areal. Med utgangspunkt i dette foreslår vi et konservativt anslag på usikkerheten, slik at vi får et standardavvik på $\sigma_{\lambda_g} \approx 0.16$ W/m.K, med tilhørende forventningsverdi $\mu_{\lambda_g} \approx 3.15$ W/m.k. Det vil si at 95% av målte verdier vil være inneholdt i intervallet [2.83, 3.47].

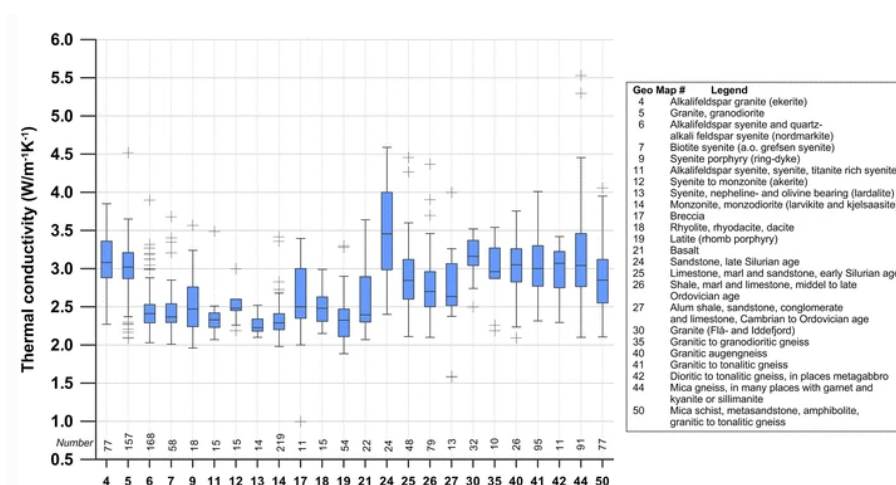


Figur 6.2: Histogram av varmeledningsevnen for 1389 prøveområder i Oslo. De store variasjonen skyldes at varmeledningsevnen varierer med bergartstypen, samt strukturen til bergarten. Dette viser at varmeledningsevnen er både anisotropisk og heterogen. Figuren er hentet fra [4].

Tetthet til grunnen

For å anslå tettheten til grunnen tar vi utgangspunkt i bergarten granitt. [50] rapporterer en tetthet i område $2610\text{-}2670$ kg/m^3 for denne bergarten. Vi antar derfor en forventningsverdi på $\mu_{\rho_g} \approx 2650$ kg/m^3 for grunnen. Vi har ingen informasjon om usikkerheten til denne parameteren, men antar en usikkerhet som er omtrent halvparten så stor som usikkerheten til varmeledningsevnen. Vi foreslår derfor et standardavvik på $\sigma_{\rho_g} \approx 66$ kg/m^3 . Videre vil det si at 95% av målte verdier vil være inneholdt i intervallet [2518, 2782].

¹Regresjonslinjen er gitt ved ligning D.2.



Figur 6.3: Boksplott av målinger av varmeledningsevnen for ulike bergarter for et større område i Oslo. Vi ser at varmeledningsevnen har store geografiske variasjoner, noe som viser at varmeledningsevnen ikke er homogen. For 1398 prøveområder varierte varmeledningsevnen fra 1.0 til 6.88 W/mK. Figuren er hentet fra [4].



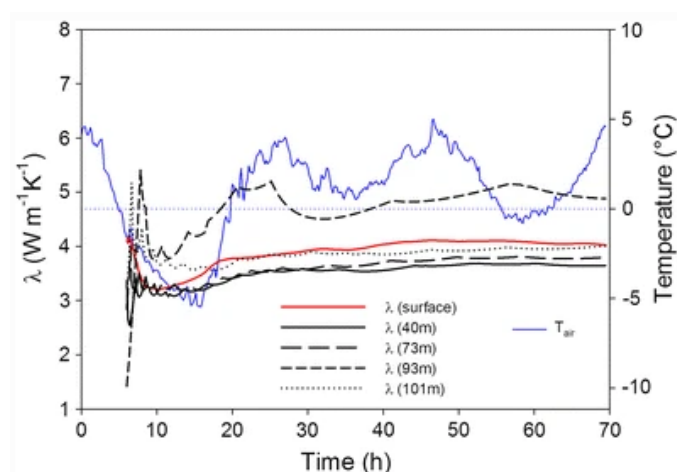
Figur 6.4: Eksempel på foalisjonen til bergarten Gneist. I følge [4] vil varmeledningsevnen være størst parallellt med foalisjonen. Dette viser at varmeledningsevnen er anisotropisk. Figuren hentet fra [49].

Spesifikk varmekapasitet til grunnen

Vi anslår at den spesifikke varmekapasiteten til grunnen har samme usikkerhet som tettheten. Med en forventningsverdi på $\mu_{C_p} \approx 1080 \text{ J/kg.K}$, foreslår vi et standardavvik på $\sigma_{C_p} \approx 30 \text{ J/kg.K}$. Det betyr at 95% av målte verdier vil være inneholdt i intervallet [1020, 1140].

Nr	Parameternavn	Forventningsverdi, $\bar{x} \approx \mu$	Standardavvik*, $2S \approx 2\sigma$
	Dimensjoner til borehull		
1	Aktiv lengde, H [m]	200	10
2	Radius, r_b [m]	0.056	0.01
	Dimensjoner kollektorslange		
3	Radius ytterside, r_{ky} [m]	0.020	0.001
4	Radius innside, r_{ki} [m]	0.0176	0.001
5	Ruhet innside, ϵ [m]	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-8}$
	Egenskaper til grunnen		
6	Varmeledningsevne, λ_g [W/m.K]	3.15	0.32
7	Spesifikk varmekapasitet, C_p [J/kg.K]	1080	60
8	Tetthet, ρ_g [kg/m ³] (granitt)	2650	133
9	Utforstyrret temperatur, T_g [°C]	5.0	0.2
	Egenskaper til kollektor		
10	Varmeledningsevne kollektorvegg, λ_k [W/m.K]	0.42	0.02
	Egenskaper til kollektorvæske		
11	Spesifikk isobarisk varmekapasitet, c_p [J/kg.K]	3258	50
12	Tetthet, ρ_k [kg/m ³]	1070	5
13	Viskositet, μ_v [kg/m.s]	0.00588	0.000030
14	Varmeledningsevne, λ_v [W/m.K]	0.389	0.0020
15	Massestrømhasitghet, \dot{m}_v [kg/s]	0.800	0.002

Tabell 6.1: Parametere som inngår i Monte Carlo simuleringen med tilhørende forventningsrett forventningsverdi og forventningsrett standardavvik. *Verdier er oppgitt som to standardavvik, slik at $\bar{x} \pm 2S$ vil inneholdet 95 % av målte verdier.



Figur 6.5: Eksempel på hvordan varmeledningsevnen påvirkes av grunnvannstrøm. Rød linje viser beregninger gjort ved Kelvins linjesluk ved overflaten. Den stiplede linjen, ved 93m dybde, viser hvordan grunnvannstrømmen fører til at varmeledningsevnen øker. Figuren er hentet fra [45].

6.3.2 Simuleringsresultat

Det er gjennomført 2000 og 9600 Monte Carlo simuleringer for henholdsvis usikkerhet- og sensitivitetsanalysen. For å redusere beregningsbelastningen er borehullet simulert uten at resistansen oppdateres. Dette vil følgelig bli en modellfeil.

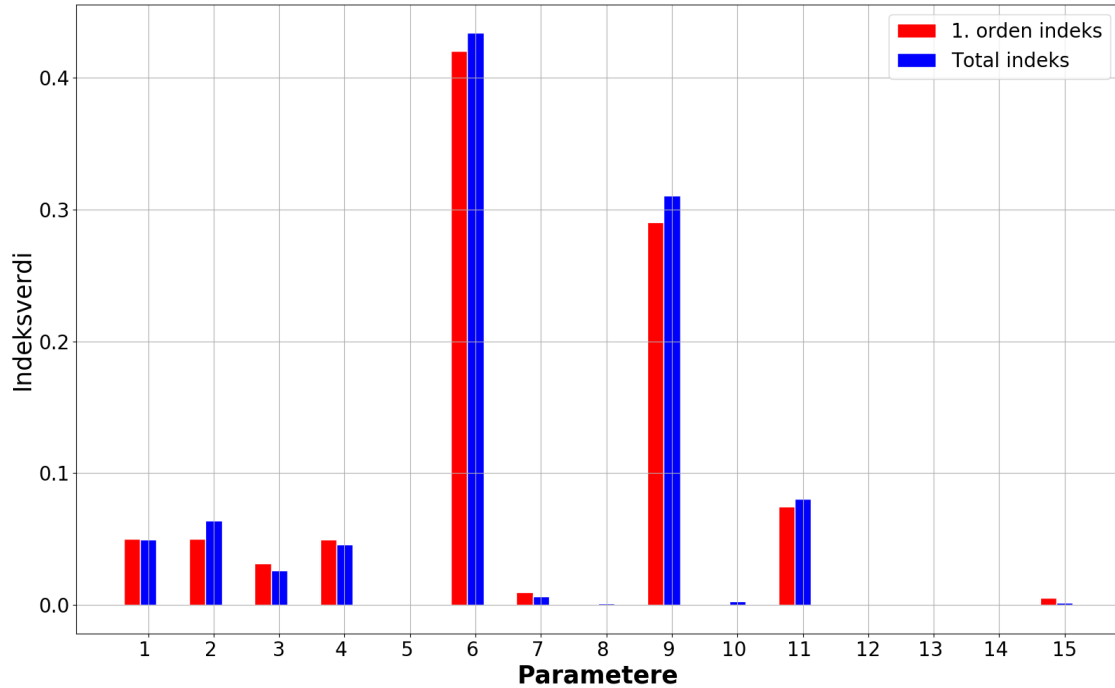
Figur 6.7 viser resultatet for den totale energien som tilføres og hentes ut fra grunnen, der vi observerer at denne har en tilnærmet gauss fordeling. Ved å anvende ligning 6.3 og 6.4 beregnes gjennomsnittet og standardavviket med 95.48 % konfidensnivå. Vi får følgende verdier for uttak og tilførsel av energi:

- Energi tilført grunnen:
 - 20.0 MWh \pm 1.7 MWh.
- Energi hentet ut av grunnen:
 - 17.0 MWh \pm 1.5 MWh.

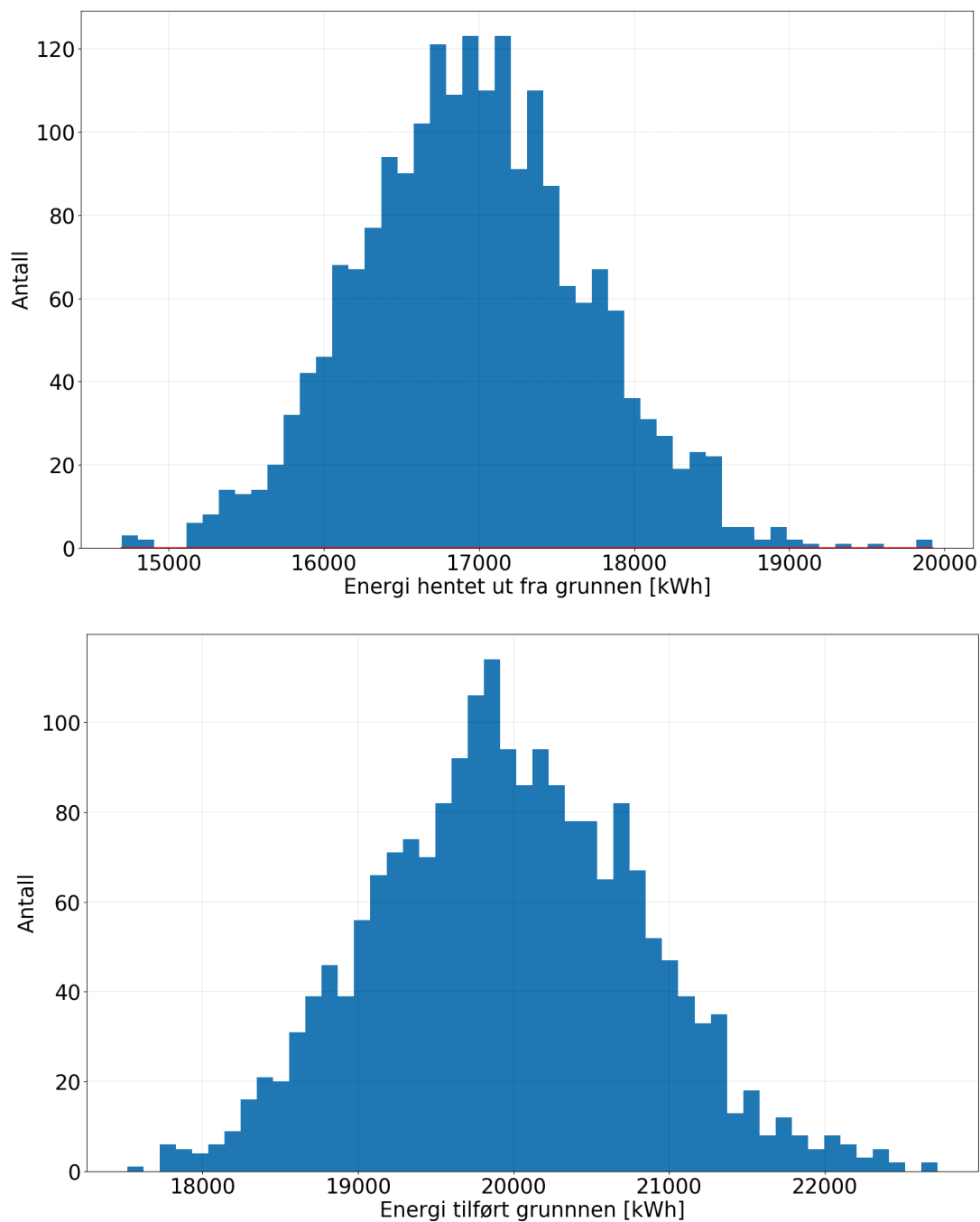
Gjennomsnittet som beregnes, både ved tilføres og uttak, er omtrent identisk med det som beregnes i eksempel 3. Videre har energien som tilføres grunnen en usikkerhet på \pm 8.5 %. I tillegg vil usikkerheten i energien som hentes ut fra grunnen være på \pm 11.3 %.

Figur 6.6 viser resultatet fra sensitivitetsanalysen, der de røde og blå søylene er for henholdsvis første ordens indeksene og total indeksene. Vi oppsummerer følgende:

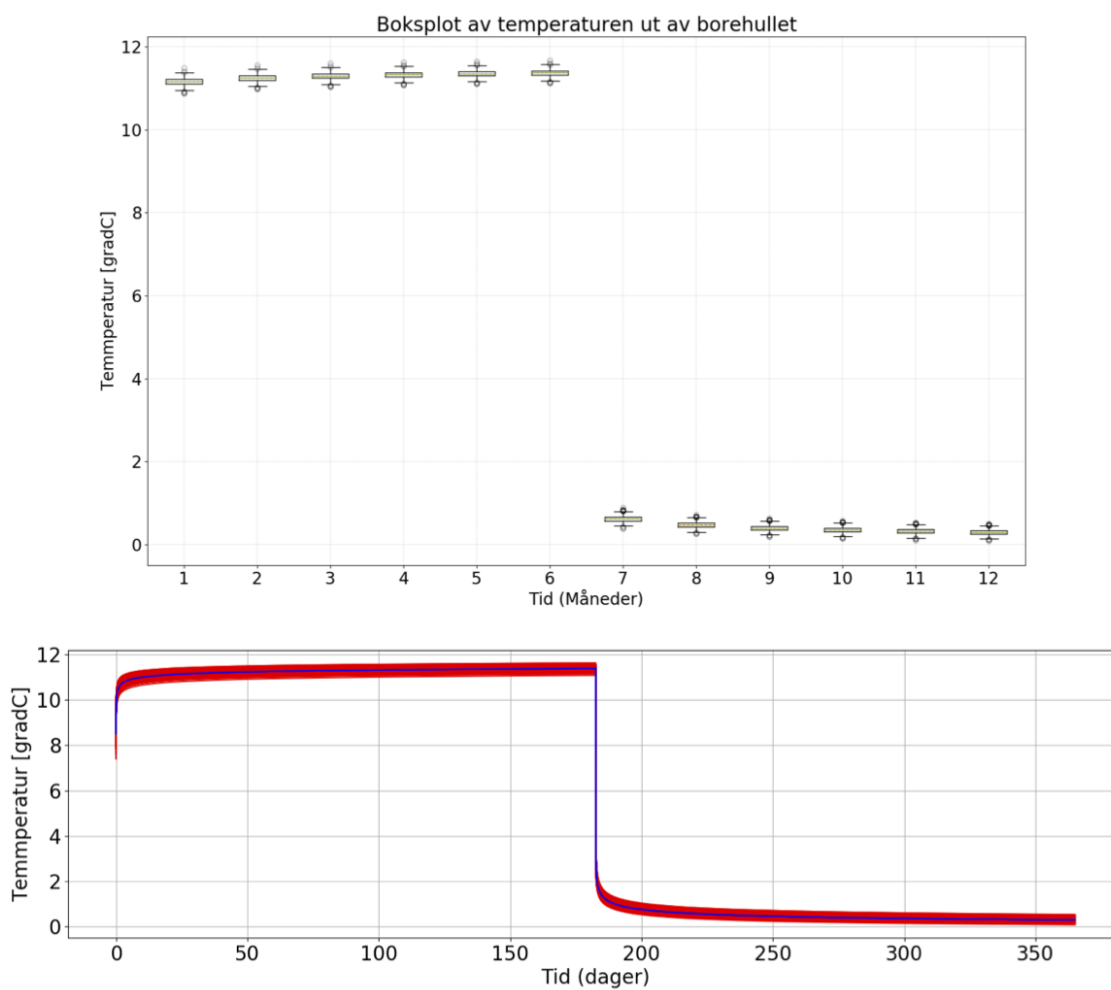
- Parametere med størst sensitivitet: λ_g og T_g .
- Parametere med middels sensitivitet: H , r_b , r_{ky} , r_{ki} og c_p .
- Parametere med liten sensitivitet: C_p , λ_k og \dot{m} .
- Parametere med ingen sensitivitet er: ϵ , ρ_g , ρ_v , μ_v og λ_v .
- $\sum_{i=1}^{15} S_i = 0.982$. Dette betyr at usikkerheten i resultatet fra den modifiserte pygfunction er lite sensitiv for vekselvirkninger mellom inngangsparameterne.
- For parameterne r_b , λ_g , T_g og c_p er den totale indeksen en liten verdi høyere enn første ordens indeksene. Disse parameterne vil ha en liten vekselvirkning med andre parametere som påvirker usikkerheten til resultatet.



Figur 6.6: Første ordens indeks og total indeks for de 15 inngangsparameterne som anvendes i den modifiserte pygfunction. Navnet på de nummererte parameterne vises i tabell 6.1. Vi observerer at det er to inngangsparameterne som har spesielt høy sensitivitet: Varmeledningsevnen i grunnen og den uforstyrrede grunntemperaturen. Videre observerer vi at kollektørvæskens spesifikke varmekapasitet, den aktive borehull-lengden og radien til borehullet også vil være sensitive parametere.



Figur 6.7: Resultatet fra 2000 Monte Carlo-simuleringer. Det øverste og nedreste histogrammet viser henholdsvis energien som hentes ut og tilføres grunnen i løpet av ett år.



Figur 6.8: Temperaturen ut av borehullet for 2000 Monte Carlo simuleringer. Den øverste figuren viser boksplo for hver måned gjennom året. På den nederste figuren er den blå linjen gjennomsnittstemperaturen fra simuleringene. Det røde område viser temperaturen ut for alle simuleringene.

Kapittel 7

Konklusjon, diskusjon og videre arbeid

7.1 Konklusjon og diskusjon

Grunnvarmeanlegg anvendes til kjøling og oppvarming av husholdinger og større bygg. Slike system henter og lagrer varme fra den øverste delen av jordskorpen via brønnparker eller enkle borehull. I planleggingsfasen av et slikt system anvendes som regel simuleringer for å forutsi hvordan systemet fungerer både på kort og på lengre sikt. Programvaren pygfunction er et semi-analytisk verktøy for modellering av borehull og brønnparker. Denne programvaren antar at varmemestrømmen mellom kollektorslangen og borehullveggen drives av varmeledning. For grunnvannsfylte borehull vil ikke pygfunction gi en korrekt beskrivelse av varmemestrømmen i borehullet siden temperaturdifferanser i borehullet fører til til varmeoverføring i form av naturlig konveksjon. For at pygfunction skal betrakte denne effekten bedre er det nødvendig å modifisere programvaren slik at den betrakter naturlig konveksjon.

Pygfunction er en åpen kildekode som gjør det mulig å gå inn i selve kjernen av programvaren og endre denne slik det er ønskelig. Hovedformålet med denne oppgaven har vært å belyse effekten av å ikke inkludere naturlig konveksjon i modellen som anvendes ved dimensjonering av brønnpark. I tillegg er det gjort en analyse av usikkerheten i inngangsparametrene for den modifiserte pygfunction, og videre hvordan disse influerer usikkerheten i resultatet til modellen. For å få løse problemstillingen er det gjort en modifisering av pygfunction slik at den betrakter varmeveksling i borehullet ved naturlig konveksjon. Den modifiserte pygfunction kan videre sammenlignes med den umodifiserte, og på den måte får vi sammenlignet varmetransport i borehullet med og uten konveksjon.

For å modifisere pygfunction er det implementert empiriske korrelasjoner mellom di-

mensjonsløse tall, hentet fra [11], som brukes til å regne ut den termiske resistansen ved naturlig konveksjon for grunnvannsfylte borehull med en enkel U-formet kollektorslange. Det kan nevnes at modifiseringen av pygfunction videre omtales med initialene MP, mens den opprinnelige pygfunction betegnes med initialene OP. Vi oppsummerer videre de mest sentrale resultatene:

- Det er gjennomført en verifisering av MP mot simuleringsresultat og måledata fra en termisk responstest hentet fra J.Johnsson og B. Adl-Zarrabi [29], der temperaturen ut av borehullet er betraktet. Nevnte forfattere har gjort en tilsvarende implementering som i denne oppgaven, men med en noe annen tilnærming ved at den termiske resistansen som regnes ut ikke oppdateres for hvert tidssteg. Ved å sammenligne de to simuleringene mot måledata fra den termiske responstesten får vi at MP og [29] har et overestimat på temperaturen ut av borehullet på henholdsvis 5% og 8%.
- For et spesifikt eksempel har vi vist at den termiske resistansen som MP regner ut er 22 – 42 % lavere enn om resistansen beregnes uten konveksjon ved å anvende OP. Videre for et annet konkret eksempel er det beregnet at en fiksert varmeledningsevne må minst dobles for å tilsvare effekten av naturlig konveksjon.
- Det er satt opp et tenkt eksempel med ett borehull som anvendes til kjøling et halvt år ved å tilføre varme til grunnen, før det videre anvendes til oppvarming det resterende halvet året ved å hente ut varme fra grunnen. Borehullet er simulert med og uten konveksjon, ved å anvende MP og OP. Vi får at borehullet der naturlig konveksjonen medregnes tilfører- og henter ut henholdsvis 14 % og 11 % mer energi.
- Videre er det gjort en sensitivitet og usikkerhetsanalyse med utgangspunkt i det siste eksempelet over, der MP anvendes. I analysen er det gjennomført et litteraturstudie for å kartlegge usikkerheten i hver parameter som inngår i modellen. Vi får at usikkerheten i energien som tilføres og hentes ut av grunnen er på henholdsvis $\pm 9\%$ og $\pm 11\%$. Det største bidraget til usikkerheten er varmeledningsevnen i grunnen og den uforstyrrede grunntemperaturen. Videre vil borehull-lengden, radien til borehullet, indre- og ytre radius til kollektorslangen og kollektorvæskens spesifikke varmekapasitet ha middels store bidrag.

I planleggingsfasen av en brønnpark er det viktig å vurdere simuleringsresultatene i forhold til forholdene i borehullet og grunnen, samt usikkerheten i resultatet som modellen gir. Dersom en brønnpark med grunnvannsfylte borehull skal simuleres med en modell der naturlig konveksjon ikke medregnes er det viktig å initialisere modellen med stor nok varmeledningsevne. Ved å ukritisk sette varmeledningsevnen i borehullets mellomrom lik varmeledningsevnen til vann på 0.6 W/m.k fører dette til at brønnparken overdimensjoneres. I et økonomisk perspektiv vil en slik feilvur-

dering være av betydelig orden. Med utgangspunkt i resultatene over kan et grovt estimat på ekstra-kostnadene i etableringsfasen i denne sammenheng gjøres ved å anslå en overdimensjonering på 11-14 %. Som et eksempel vil en kostnadsramme på 3 MNOK for en større brønnpark gi ekstra etableringskostnader av orden 300-400 000 NOK. Selv om dette er et grovt estimat gir det likevel en pekepinn på hvor viktig det er å være kritisk til hvordan simuleringsmodellen initialiseres. Samtidig er det viktig å ikke sette en for høy varmeledningsevne, siden brønnparken i det tilfellet vil underdimensjoneres slik at levetiden forkortes.

Usikkerheten i resultatet som MP gir er estimert til $\pm 9-11\%$ og baseres på usikkerheten i inngangsparameterne til modellen. Ved å videreføre eksemplet over fører dette til at de ekstra etableringskostnadene vil ha en usikkerhet av orden $\pm 40\ 000$ NOK. Selv med dette usikkerhetsestimater vil de ekstra etableringskostnadene likevel være av signifikant størrelsesorden.

Sentrale parametrene som den uforstyrrede grunntemperaturen og varmeledningsevnen i grunnen, gir de største bidragene til usikkerheten. I etableringsfasen av brønnparken anbefales det derfor at det spesielt fokuseres på å samle informasjon om disse to parameterne for å reduseres de respektive usikkerhetene. Når brønnparken skal bores vil det i tillegg være viktig at dette arbeidet gjennomføres nøyaktig siden borehull-lengden og radien til borehullet også har signifikante bidrag.

I tillegg til usikkerheten i inngangsparameterne vil MP være en tilnærming av de virkelige forhold, slik at modellfeil også vil bidra til usikkerheten i resultatet. En modellfeil ved MP er at den ikke betrakter avstanden mellom kollektorbenene, samt avstanden fra kollektorbenene til borehullveggen. Disse avstandene vil påvirke størrelsen til den lokale resistansen i borehullet, og dermed også varmeutvekslingen med grunnen.

Funnene i denne oppgaven understreker hvor viktig det er å være kritisk ved bruk av simuleringsmodeller som ikke tar hensyn til naturlig konveksjon når grunnvannsfylte borehull simuleres.

7.2 Videre arbeid

Det er foretatt analyser med den modifiserte pygfunction for enkle borehull. For videre arbeid anbefales det i tillegg å sette opp simuleringer for større brønnparker. På denne måten vil simuleringene representere virkelige brønnparker bedre. utfordringen ved dette til være den store beregningstiden implementert modell har når borehull-resistansen oppdateres for hvert tidssteg. Det anbefales derfor å undersøke hvordan denne beregningstiden kan reduseres.

En feil ved modellen er at den ikke tar hensyn til posisjonen til kollektorslangen i borehullet. Posisjonen til kollektorslangen influerer størrelsen til borehull-resistansen, noe som vil være en feilkilde som bør undersøkes nærmere.

Bibliografi

- [1] GAJ Hellstrom. Ground heat storage: Thermal analyses of duct storage systems. i. theory. 1992.
- [2] Karoline H Kvalsvik, K Midttomme, and Randi K Ramstad. Geothermal energy use, country update for norway. In *European Geothermal Congress*, 2019.
- [3] James Bose, Marvin Smith, and Jeffrey Spitler. Advances in ground source heat pump systems - an international overview. *Proceedings of the 7th international conference on energy agency heat pump*, 01 2002.
- [4] Randi K Ramstad, Kirsti Midttømme, Heiko T Liebel, Bjørn S Frengstad, and Bjørn Willemoes-Wissing. Thermal conductivity map of the oslo region based on thermal diffusivity measurements of rock core samples. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 74(4):1275–1286, 2015.
- [5] Randi Kalskin Ramstad. Grunnvarme i norge : kartlegging av økonomisk potensial, 2011.
- [6] Kirsti Midttømme, Ingvar Henne, Jan Kocbach, and Randi Kalskin Ramstad. Geothermal energy use, country update for norway. In *European Geothermal Congress 2013*, 2013.
- [7] TI Bøhn, LT Palm, L Bakken, Å Nossun, and H Jordell. Potensial-og barrierestudie: Energieffektivisering i norske yrkesbygg. bakgrunnsrapport. *Enova report*, 2012.
- [8] Per Eskilson. Thermal analysis of heat extraction boreholes. 1987.
- [9] Tomas Persson, Ole Stavset, Randi Kalskin Ramstad, Maria Justo Alonso, and Klaus Lorenz. Software for modelling and simulation of ground source heating and cooling systems, 2016.
- [10] Massimo Cimmino. pygfunction: an open-source toolbox for the evaluation of thermal response factors for geothermal borehole fields.
- [11] Jeffrey D Spitler, Saqib Javed, and Randi Kalskin Ramstad. Natural convection

- in groundwater-filled boreholes used as ground heat exchangers. *Applied Energy*, 164:352–365, 2016.
- [12] PK Kundu and IM Cohen. Fluid mechanics. 2nd. *isbn*, 121782514:297–300, 2002.
- [13] Theodore L Bergman, Frank P Incropera, David P DeWitt, and Adrienne S Lavine. *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
- [14] snl.no. *Kraft - fysikk*, 30. juni 2020. URL https://snl.no/kraft_-_fysikk.
- [15] Jan Martin Nordbotten and Michael A Celia. *Geological storage of CO₂: modeling approaches for large-scale simulation*. John Wiley & Sons, 2011.
- [16] Mikael Philippe, Michel Bernier, and Dominique Marchio. Validity ranges of three analytical solutions to heat transfer in the vicinity of single boreholes. *Geothermics*, 38(4):407–413, 2009.
- [17] Inga Berre. Well hydraulics, forelesning. 2016.
- [18] Dave Banks. Horatio scott carslaw and the origins of the well function and line source heat function. *Scottish Journal of Geology*, 51(1):100–104, 2015.
- [19] John Conrad Jaeger and Horatio Scott Carslaw. *Conduction of heat in solids*. Clarendon P, 1959.
- [20] Simon Rees. *Advances in ground-source heat pump systems*. Woodhead Publishing, 2016.
- [21] Johan Claesson and Göran Hellström. Multipole method to calculate borehole thermal resistances in a borehole heat exchanger. *Hvac&R Research*, 17(6): 895–911, 2011.
- [22] Per Eskilson and Johan Claesson. Simulation model for thermally interacting heat extraction boreholes. *Numerical heat transfer*, 13(2):149–165, 1988.
- [23] Saqib Javed and Jeffrey D Spitler. Calculation of borehole thermal resistance. In *Advances in ground-source heat pump systems*, pages 63–95. Elsevier, 2016.
- [24] W. McCabe, J. Smith, and P. Harriott. *Unit Operations of Chemical Engineering*. McGraw-Hill chemical engineering series. McGraw-Hill Education, 2005. ISBN 9780072848236. URL <https://books.google.no/books?id=u3SvHtI0wj8C>.
- [25] Helge Skarphagen, David Banks, Bjørn S Frengstad, and Harald Gether. Design considerations for borehole thermal energy storage (btes): A review with emphasis on convective heat transfer. *Geofluids*, 2019, 2019.

-
- [26] Massimo Cimmino. Fluid and borehole wall temperature profiles in vertical geothermal boreholes with multiple u-tubes. *Renewable Energy*, 96:137–147, 2016.
- [27] The International Association for the Properties of Water and Steam. *IAPWS-95*, 2020. URL <http://www.iapws.org/index.html>.
- [28] Trond Th. Harsem Merethe Lind Karoline Kvalsvik Annette Stephansen og Jan Kocbach. *Optimization of Design Solutions for Surplus Heating and Cooling System in Combination with Ground Source Heat Pump/Chillers*, 2019. URL <https://app.cristin.no/results/show.jsf?id=1812587>.
- [29] Josef Johnsson and Bijan Adl-Zarrabi. Modelling and evaluation of groundwater filled boreholes subjected to natural convection. *Applied Energy*, 253:113555, 2019.
- [30] J Claesson and G Hellström. Theoretical and experimental study of the local heat transfer in a borehole with heat exchanger pipes. In *Conférence internationale sur le stockage de l'énergie pour le chauffage et le refroidissement. 4*, pages 139–143, 1988.
- [31] Göran Hellström and E Kjellsson. Laboratory study of the heat transfer in a water-filled borehole with a single u-pipe. In *International Conference on Thermal Energy Storage: 18/06/1997-21/06/1997*, 1997.
- [32] Stephen P Kavanaugh. Field tests for ground thermal properties—methods and impact on ground-source heat pump design. Technical report, Univ. of Alabama, Tuscaloosa, AL (US), 2000.
- [33] Olga Mikhaylova, Ian W Johnston, and Guillermo A Narsilio. Uncertainties in the design of ground heat exchangers. *Environmental Geotechnics*, 3(4):253–264, 2016.
- [34] D Marcotte and P Pasquier. On the estimation of thermal resistance in borehole thermal conductivity test. *Renewable energy*, 33(11):2407–2415, 2008.
- [35] Eurachem/CITAC Working Group, Alexander Williams, SLR Ellison, M Rosslein, et al. *Quantifying uncertainty in analytical measurement*. Eurachem, 2000.
- [36] SUBJECT TO CHANGE THEREFORE and MAYNOTBE AS. Guide to the expression of uncertainty in measurement. 1993.
- [37] YYY JCGM. Evaluation of measurement data—supplement 1 to the guide to the expression of uncertainty in measurement—propagation of distributions using a monte carlo method. *Organisation for Standardization (Geneva, Switzerland)*, 2008.

-
- [38] Ilya M Sobol. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates. *Mathematics and computers in simulation*, 55(1-3): 271–280, 2001.
- [39] JonHerman and Will Usher. SALib: An open-source python library for sensitivity analysis. *The Journal of Open Source Software*, 2(9), jan 2017. doi: 10.21105/joss.00097. URL <https://doi.org/10.21105/joss.00097>.
- [40] Henk JL Witte. Error analysis of thermal response tests. *Applied Energy*, 109: 302–311, 2013.
- [41] Saqib Javed and Per Fahlén. Thermal response testing of a multiple borehole ground heat exchanger. *International Journal of Low-Carbon Technologies*, 6(2):141–148, 2011.
- [42] G Labudova and V Voza rova. Uncertainty of the thermal conductivity measurement using the transient hot wire method. *Journal of thermal analysis and calorimetry*, 67(1):257–265, 2002.
- [43] Palne Mogensen. Fluid to duct wall heat transfer in duct system heat storages. *Document-Swedish Council for Building Research*, (16):652–657, 1983.
- [44] K Midttømme, BO Hilmo, H Skarphagen, and A Nissen. Kartlegging av energipotensialet i berggrunnen på kartblad bekkestua, bærum kommune: Varmeledningsevnen til bergarter. *NGU Rapport 2000.036*, 2000.
- [45] Heiko T Liebel, Marie S Stølen, Bjørn S Frengstad, Randi K Ramstad, and Bjørge Brattli. Insights into the reliability of different thermal conductivity measurement techniques: a thermo-geological study in mære (norway). *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 71(2):235–243, 2012.
- [46] Henk JL Witte, Guus J Van Gelder, and JD Spitler. In situ measurement of ground thermal conductivity: a dutch perspective. *Ashrae Transactions*, 108(1):263–272, 2002.
- [47] Christoph Clauser and Ernst Huenges. Thermal conductivity of rocks and minerals. *Rock physics and phase relations: a handbook of physical constants*, 3: 105–126, 1995.
- [48] Xiang Wan, Wenqian Wang, Jiming Liu, and Tiejun Tong. Estimating the sample mean and standard deviation from the sample size, median, range and/or interquartile range. *BMC medical research methodology*, 14(1):135, 2014.
- [49] snl.no. *Foalisjonen til Genis*, 09. mars 2020. URL <https://snl.no/foaliasjon>.
- [50] Eyolf Erichsen and Arnhild Ulvik. Kalibrering for densitet-innvirkning for mekaniske testmetoder. 2009.

-
- [51] Ellad B Tadmor, Ronald E Miller, and Ryan S Elliott. *Continuum mechanics and thermodynamics: from fundamental concepts to governing equations*. Cambridge University Press, 2012.
- [52] Baligh El Hefni and Daniel Bouskela. *Modeling and Simulation of Thermal Power Plants with ThermoSysPro*. Springer, 2019.
- [53] Bjørn Pedersen (Universitetet i Oslo). *temperatur*, 21. juni 2018. URL <https://snl.no/temperatur>.
- [54] Eivind Hiis Hauge. Oyvind g. gron: Termodynamikk for hogskole og universitet. *Fra fysikkens verden*, 77(2):55–56, 2015. ISSN 0015-9247.
- [55] Signhild Gehlin. *Thermal response test: in situ measurements of thermal properties in hard rock*. PhD thesis, Luleå tekniska universitet, 1998.
- [56] Sarah Signorelli, Simone Bassetti, Daniel Pahud, and Thomas Kohl. Numerical evaluation of thermal response tests. *Geothermics*, 36(2):141–166, 2007.
- [57] Burkhard Sanner, Manfred Reuss, Erich Mands, and Jens Müller. Thermal response test-experiences in germany. In *Proc. Terrastock*, pages 177–182, 2000.
- [58] Frede Frisvold and Jan Gunnar Moe. *Statistikk for ingeniører*. Fagbokforl., 2004.
- [59] Murray R Spiegel, John J Schiller, and R Srinivasan. *Probability and statistics*. New York: McGraw-Hill,, 2013.

Appendices

Tillegg A

Grunnleggende termodynamikk

I dette tillegget vil det gis en innføring i grunnleggende termodynamiske begreper.

A.1 Termodynamisk system

Følgende beskrivelse er basert på [51] og [52]. Et termodynamisk univers deles opp i to deler: *Systemet* er definert som et område avgrenset av definerte render, og *omgivelsene* er definert som området utenfor systemet. Videre kan omgivelsene interagere med systemet på tre måter, derav mekanisk interaksjon som vil si at omgivelsene gjør arbeid på systemet, termisk interaksjon der varme transporteres mellom omgivelsene og systemet, og interaksjon av partikler, der partikler overføres mellom omgivelsene og systemet.

Videre defineres det tre ulike klasser av systemer: Åpent system, som kan utveksle både partikler og varme med dets omgivelser, lukket system, som kun kan utveksle varme med dets omgivelser, og isolert system, som ikke har noe interaksjon med omgivelsene rundt. En endring av omgivelsene som resulterer i at arbeid, varme eller partikler utveksles med systemet betegnes som en *ekstern forstyrrelse*.

Tilstanden til et system kan beskrives matematisk med et sett av makroskopiske variabler som betegnes som tilstandsvariabler. Videre deles tilstandsvariablene inn i intensive og ekstensive variabler. Intensive variabler er uavhengige av størrelsen til systemet, og kan for eksempel være temperatur, trykk og tetthet. Ekstensive variabler er avhengige av størrelsen til systemet og kan for eksempel være volum og masse.

Når et system opplever en ekstern forstyrrelse får vi en transient endring av systemets tilstandsvariabler. Dersom denne forstyrrelsen opphører vil systemet tendere mot en homogen tilstand, der tilstandsvariablene oppnår en konstant verdi. Når

tilstandsvariablene har oppnådd en slik stasjonær tilstand sier vi at systemet er i *termodynamisk likevekt*.

Den matematiske relasjonen mellom variablene i et system som er i likevekt kalles for en tilstandsligning. For enkle system vil det holde å spesifisere to avhengige variabler for å beskrive systemet. Som et eksempel kan vi for en væske definere følgende tilstandsligning:

$$f(p, V, T) = 0 \Leftrightarrow V = V(p, T), \quad (\text{A.1})$$

der p er trykket, V er volumet og T er temperaturen til væsken. Funksjonen f vil i dette tilfelle være en implisitt form av tilstandsligningen V .

A.2 Temperatur

Følgende beskrivelser følger fremstillingen gitt i [53]. Temperatur er en intensiv egenskap og er et mål på hvor kaldt eller varmt en gjenstand er. Det finnes ulike temperaturskalaer, men de mest vanlige måleenhetene som anvendes er Kelvin (K), grader Celsius ($^{\circ}\text{C}$) eller Fahrenheit (F). I Celsius er frysepunktet 0°C og kokepunktet 100°C . I vitenskapelig sammenheng er det vanlig å bruke enheten Kelvin. Det absolutte nullpunkt, som er det laveste teoretiske temperaturen som er mulig å oppnå, er på 0 K. Dette tilsvarer en temperatur på -273.15°C . Sammenhengen mellom Kelvin og Celsius kan derfor defineres ved følgende ligning:

$$T_K = T_C + 273.15, \quad (\text{A.2})$$

der T_K og T_C er temperaturen i henholdsvis Kelvin og Celsius.

A.3 Varmekapasitet

Beskrivelsene i denne seksjonen følger fremstillingen gitt i [13]. *Varmekapasiteten* til et materiale er definert som varmen som må tilføres for å øke dets temperatur med en grad. Varmekapasiteten C [J/K] til et materiale som får tilført varme Q og opplever en temperaturendring ΔT er gitt ved [54]:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}. \quad (\text{A.3})$$

Den *spesifikke varmekapasiteten* c [J/kg.K] til et materiale er definert som varmen

Q som må tilføres per masse m for å endre temperaturen av materialet med en grad:

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}. \quad (\text{A.4})$$

Produktet, ρc_p , mellom tettheten og den spesifikke varmekapasiteten til et materiale er definert som den *volumetriske varmekapasiteten*, med enhet $[J/m^3 \cdot K]$. Produktet er et mål på evnen et materiale har til å lagre termisk energi¹.

A.4 Termisk diffusivitet

Beskrivelsene i denne seksjonen følger fremstillingen gitt i [13]. En viktig egenskap i den termiske analysen er den *termiske diffusiviteten*, α , definert som forholdet mellom varmeledningen, λ og den volumetriske varmekapasiteten, ρc_p :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}. \quad (\text{A.5})$$

Termisk diffusivitet har enhet m/s^2 og er et mål på forplantingshastigheten av varme i et materiale ved varmeledning. Et materiale med stor diffusivitet vil reagere raskt på endringer i de termiske omgivelsene, og motsatt vil et material med lav diffusivitet reagere tregere.

A.5 Termodynamisk prosess

Følgende definisjon følger fremstillingen gitt i [52]. En termodynamisk prosess defineres som en endring av systemets tilstand fra en initial tilstand i termodynamisk likevekt til en endelig tilstand i termodynamisk likevekt. Videre defineres det to spesifikke prosesser:

- En prosess som fører et termodynamisk system fra en tilstand 1 til en tilstand 2 er *reversibel* dersom systemet er i termodynamisk likevekt til en hver tid under prosessen. For være i likevekt under prosessen må systemet ha infinitesimale interaksjoner med omgivelsene til enhver tid. Dette vil derfor være en idealisert prosess, da den i virkeligheten vil ta uendelig lang tid å gjennomføre.
- En prosess er *irreversibel* dersom den ikke er reversibel. Dette svarer til virkelige prosesser, der systemets endring fra tilstand 1 til 2 gjennomføres uten at systemet er i termodynamisk likevekt under prosessen.

¹Se seksjon A.6.2 for definisjonen av termisk energi.

A.6 Termodynamikkens lover

Beskrivelsen av termodynamikkens lover følger fremstillingen gitt i [52], [51] og [12]. Termodynamikkens lover blir sett på som prinsipper som er så grunnleggende at de ikke kan bevises av noe mer grunnleggende. Generelt har vi tre lover, der den første omhandler termisk likevekt, den andre konservering av energi, mens den tredje kan relateres til oppfatningen av entropi, som videre danner utgangspunkt for de tre lovene som omhandler varmetransport: Varmeledning, konveksjon og stråling.

A.6.1 Termodynamikkens nulte lov

Dersom to system, A og B, er i termodynamisk likevekt, defineres de som i termisk likevekt med hverandre dersom de har samme temperatur. Dette betegnes som $A \sim B$. Med utgangspunkt i denne definisjonen formulerer vi termodynamikkens nulte lov slik:

Gitt tre termodynamiske system, A, B og C i termodynamisk likevekt. Dersom $A \sim B$ og $B \sim C$ medfører det at $A \sim C$.

A.6.2 Termodynamikkens første lov og indre energi

Hovedprinsippet i termodynamikkens første lov er at *den totale lagrede energien til et system er konserverert*. Dette betyr at energi verken kan oppstå eller forsvinne, men den kan konverteres fra en form til ene annen form, som for eksempel fra varme til mekanisk arbeid. Dette medfører at den eneste måten systemets totale lagrede energi kan endres på er at energi krysser dens render. For et lukket system kan dette hende på to måter:

1. Energifyt gjennom rendene til systemet.
2. Arbeid gjort *på* eller *av* systemet.

Dette leder til følgende definisjon for et lukket system, og kalles for *termodynamikkens første lov*:

$$\Delta E_{st}^{tot} = Q - W. \quad (\text{A.6})$$

Her er ΔE_{st}^{tot} endringen av den totale energien lagret i systemet, W er netto arbeid gjort *av* systemet og Q er netto varme *tilført* systemet.

Den første loven kan også anvendes på et kontrollvolum, og dersom vi antar at det ikke genereres energi på innsiden av kontrollvolumet kan termodynamikkens første lov formuleres slik: “*Endringen av den totale energien lagret i kontrollvolumet er lik den totale mengde energi som tilføres kontrollvolumet, minus den totale mengde*”

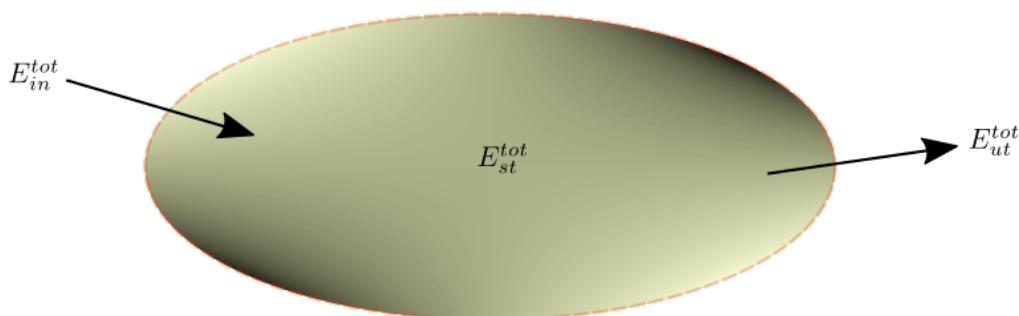
energi som forlater kontrollvolumet”. Denne formuleringen er illustrert i figur A.1, og kan matematisk uttrykkes slik:

$$\Delta E_{st}^{tot} = E_{in}^{tot} - E_{ut}^{tot}. \quad (\text{A.7})$$

Her er E_{in}^{tot} og E_{ut}^{tot} den totale energien som går inn og ut av kontrollvolumet. Ligning A.7 gir endringen av den totale lagrede energien i et *tidsintervall*, Δt . Et uttrykk for øyeblikksendringen, også kalt raten, til den totale lagrede energien får vi ved å dividere med Δt og la $t \rightarrow 0$:

$$\dot{E}_{st}^{tot} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta E_{st}^{tot}}{\Delta t} = \frac{dE_{st}^{tot}}{dt} = \dot{E}_{in}^{tot} - \dot{E}_{ut}^{tot}, \quad (\text{A.8})$$

der dotten over et ledd indikerer at leddet er en rate.



Figur A.1: Konservering av energi for et kontrollvolum. Den stiplede linjen er kontrollvolumets overflate, hvor utveksling av energi med omgivelsene foregår. Figuren er tegnet i programmet Inkscape.

Termisk energi

Den totale lagrede energien, \dot{E}_{st}^{tot} , består av mekanisk og indre energi. I varmetransportproblemer er endringen av mekanisk energi liten og blir som regel neglisjert. Den indre energien består av følbare, latente, kjemiske og kjernefysiske komponenter, men i analysen av varmetransport fokuseres det hovedsaklig på de følbare og latente komponentene, som samlet blir betegnet som *termisk energi*. Termodynamikkens første lov kan videre defineres for den termiske energien til systemet:

$$\Delta e = Q - W, \quad (\text{A.9})$$

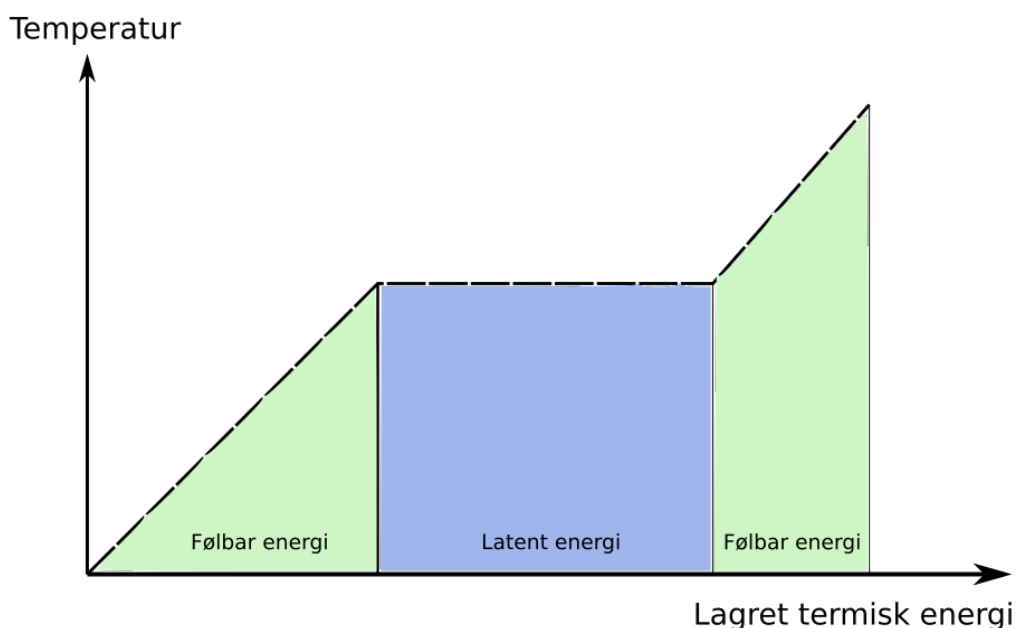
der Δe er den termiske energien til systemet. Merk at dersom to likevektstilstander 1 og 2 er kjent, vil Q og W være avhengig av stien som systemet går fra tilstand

1 til tilstand 2. Endring av termisk energi, $\Delta e = e_2 - e_1$, vil derimot bare avhenge av start - og slutttilstand til systemet. Det betyr at e er en tilstand-funksjon, mens varme og arbeid er sti-funksjoner.

Den følbare energien i varmetransporten er definert som mengden energi som forårsaker en temperaturendring i kontrollvolumet, når trykk og volum holdes konstant. Den latente energien er mengden energi som forårsaker en faseendring, uten at temperaturen til kontrollvolumet øker (se figur A.2). Dersom et kontrollvolum bare opplever en følbar energiøkning har vi følgende relasjon:

$$\dot{E}_{st} = \frac{de}{dt} = \rho c_p V \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (\text{A.10})$$

Her er ρ , c_p og V henholdsvis tettheten, den spesifikke varmekapasiteten og volumet til kontrollvolumet. \dot{E}_{st} og $\partial T/\partial t$ er den insante endringen av heholdsvis lagret termisk energi og temperatur til kontrollvolumet.



Figur A.2: Den totale økningen i termisk energi for et kontrollvolum som opplever en økning i følbar og latent energi.

A.6.3 Termodynamikkens andre lov og entropi

Termodynamikkens andre lov innfører begrensninger på retningen varme kan strømme. Det finnes ulike formuleringer, som samlet kan formuleres slik:

Varmestrøm oppstår alltid spontant fra et varmt legeme til et kaldere legeme.

Videre vil loven ha følgende konsekvenser:

- Det må eksistere en termodynamisk egenskap S , betegnet som entropi, der endringen mellom to tilstander 1 og 2 vil være gitt som:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T}, \quad (\text{A.11})$$

der integralet er tatt langs en hvilken som helst *reversibel* prosess mellom to tilstander.

- For en tilfeldig prosess mellom to tilstander 1 og 2 vil:

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \quad (\text{A.12})$$

noe som betyr at entropien til et system alltid vil øke eller forbli den samme. Entropi er en tilstandsfunksjon og blir betegnet som en ekstensiv størrelse. Dersom to system med ulik temperatur kommer i kontakt med hverandre, vil varme strømme fra det ene systemet til det andre, slik at begge systemene vil endre sin entropi.

Tillegg B

Egenskaper til vann

B.1 Egenskaper til vann ved ulike temperaturer

I dette vedlegget vises det hvordan ulike egenskaper til vann varierer med temperaturer til vannet. Egenskapene som vises under brukes til å bestemme Rayleigh-tallet når den naturlige konveksjonen skal beregnes (se ligning 4.86 og 4.85).

B.1.1 Varmeledningsevnen til vann

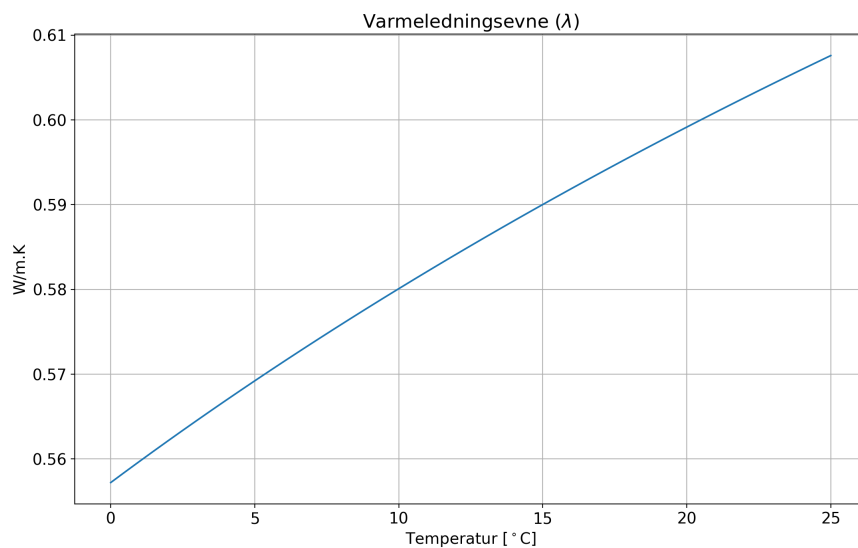
På figur B.1 ser vi at varmeledningsevnen til vann fra 0.557 til 0.608 W/m.K når temperaturen varierer mellom 0 og 25 °C. Varmeledningsevnen varierer lite i dette temperaturintervallet, med en maksimal variasjon på 0.051 W/m.K (eller 8.4 %).

B.1.2 Tettheten til vann

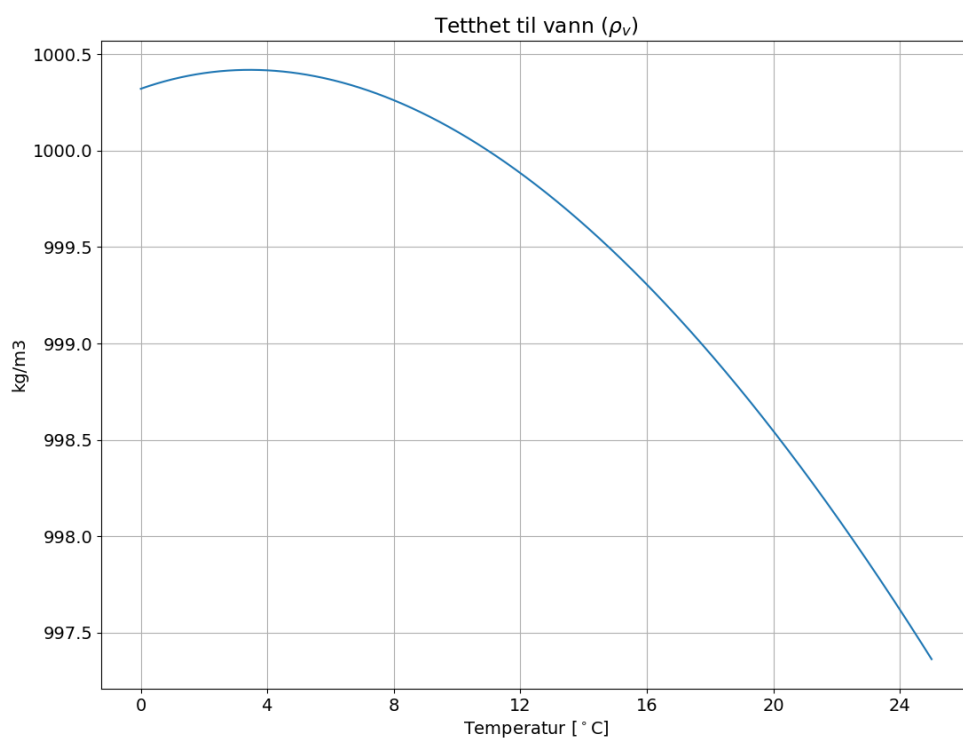
Tettheten til vannet er avgjørende for størrelsen på den naturlige konveksjonen i borchullets mellomrom. Når temperaturen øker fra 0 °C ser vi at tettheten gradvis øker før den når en topp ved 4 °C. Når temperaturen videre stiger synker tettheten gradvis. Dette medfører at den naturlige konveksjonen vil være minst ved 4 °C, mens den vil stige når vi beveger oss høyere eller lavere vekk fra denne temperaturen.

B.2 Reynoldtallet

Reynoldtallet [24] beskriver forholdene i væskestrømmen og er definert som forholdet mellom treghetskrefter og viskøse krefter (friksjonskrefter) i væsken. Matematisk



Figur B.1: Varmeledningsevnen til vann som funksjon av temperatur.



Figur B.2: Tettheten til vann som funksjon av temperatur.

defineres tallet med ligningen:

$$Re = \frac{\rho_v \cdot u \cdot D}{\mu_v}, \quad (\text{B.1})$$

der ρ_v er tettheten til væsken, u er hastigheten til væsken, D er en karakteristisk lengde og μ_v er væskens viskositet.

Spesielt gir Reynoldtallet informasjon om væskestrømmen er turbulent eller laminær, der følgende grenseverdier er definert for de ulike strømningsforholdene i en slange:

- For $Re < 2100$ har vi alltid laminære strømningsforhold. Dersom slangen har en glatt innside, kan vi også ha laminær strøm ved høyre Reynoldtall.
- For $Re > 4000$ har vi turbulente strømningsforhold.
- For $2100 < Re < 4000$ vil strømningsforholdene irregulært veksle mellom laminær og turbulent strøm. Dette område betegnes som en overgangregion.

Tillegg C

Utleddninger

C.1 Del - operatoren i sylinderkoordinater

I følgende seksjon viser vi hvordan del - operatoren kan transformeres fra kartesiske koordinater til sylinderkoordinater. Et sylindrisk koordinatsystem beskriver punktene i rommet ved å spesifisere avstanden r fra sylinderaksen, den angulære orienteringen θ om aksene, samt avstanden z langs sylinderaksen fra et valgt origo på aksene (se figur C.1 a). Det betyr at et punkt indikeres som (r, θ, z) . Relasjonen mellom sylinderkoordinater og kartesiske koordinater er definert som [51]:

$$\begin{aligned}x(r, \theta) &= r \cos \theta, \\y(r, \theta) &= r \sin \theta, \\z &= z.\end{aligned}\tag{C.1}$$

I et tredimensjonalt kartesisk koordinatsystem har vi tre ortonormale¹ basisvektorer, \mathbf{i} , \mathbf{j} , og \mathbf{k} . Relasjonen mellom disse basisvektorene og de sylindriske basisvektorene kan vi finne geometrisk ved å se på figur C.1 b, slik at:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}.\end{aligned}\tag{C.2}$$

¹Dersom vi har et sett av n lineært uavhengige vektorer kan disse velges som *basis* for et n -dimensjonalt vektorrom V^n . Alle vektorer i V kan da skrives som en unik lineær kombinasjon av basisvektorene. Dersom basisvektorene står vinkelrett på hverandre og har lengde 1, sier vi at de er *ortonormale*.. Et kartesisk koordinatsystem er spent ut av ortonormale basisvektorer (eller ortogonale dersom lengden er ulik 1) [51].

Her er \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ og \mathbf{e}_z henholdsvis den radielle, angulære og aksiale basisvektoren i det sylindriske koordinatsystemet.

Del operatoren i kartesiske koordinater er definert som:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (\text{C.3})$$

Ved å bruke kjernerregelen og relasjonen i ligning C.1 kan det føreste leddet i del-operatoren skrives:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (\text{C.4})$$

Videre har vi at:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta \quad (\text{C.5})$$

og

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin \theta}{r^2} = -\frac{1}{r} \sin \theta. \quad (\text{C.6})$$

Ved å sette ligning C.5 og C.6 inn i ligning C.4 får vi:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{1}{r} \sin \theta \right). \quad (\text{C.7})$$

Det andre leddet i del-operatoren kan vi finne ved å gjenta samme prosedyren. Da får vi at:

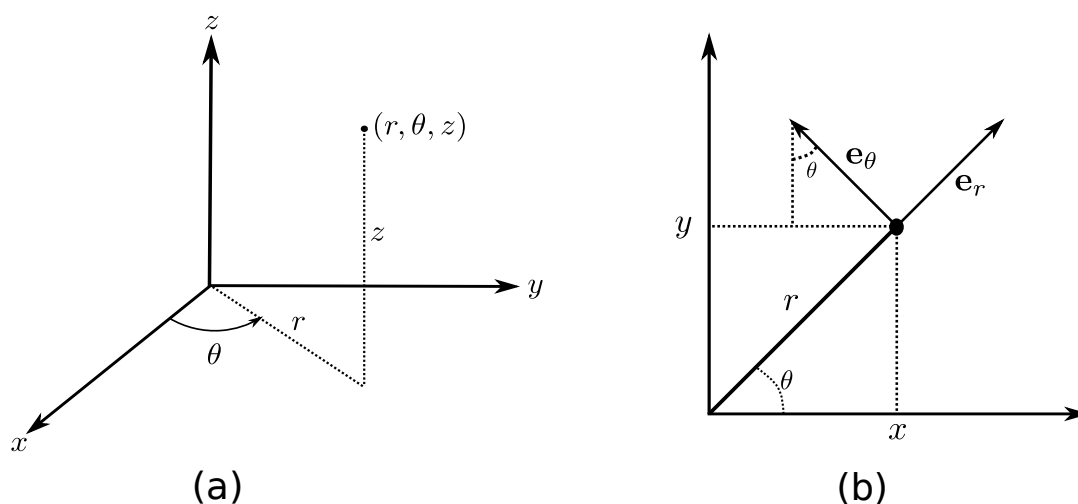
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{1}{r} \cos \theta \right). \quad (\text{C.8})$$

Ved å sette ligning C.7 og C.8 inn i C.4 får vi at del-operatoren kan skrives som:

$$\begin{aligned} \nabla &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{1}{r} \sin \theta \right) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \cdot \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{1}{r} \cos \theta \right) \right] \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

der vi har brukt relasjonene i ligning C.2 i den nest siste linjen. Oppsummert får vi at del - operatoren i sylindriske koordinater skrives:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (\text{C.9})$$



Figur C.1: (a): Beskrivelsen av et punkt i cylinderkoordinater. (b): Geometrisk illustrasjon av de sylindriske basisvektorene i xy-planet. Figuren er tegnet i programmet Inkscape.

C.2 Trykket i borehullet

I denne seksjonen utledes ligning 4.101 som anvendes for å evaluere det hydrostatiske trykket i borehullet. Utledningen gjøres med utgangspunkt i [24].

Generelt har vi at trykket, P , er gitt ved ligningen:

$$P = \frac{\mathbf{F}}{A}, \quad (\text{C.10})$$

Der \mathbf{F} er kraften [N] vinkelrett på arealet A [m^2]. Vi tenker oss et vertikalt sylinderformet borehull fylt med grunnvann, som har tetthet ρ og høyde, H . Videre betrakter vi et infinitesimalt lite volum av borehullet, med tverrsnittareal, A , og høyde dz . Lar trykket på oversiden av volumet være lik p , mens det på undersiden er lik $p + dp$, der $dp > 0$. Tre vertikale krefter vil nå virke på volumet:

- Kraften fra trykket som virker på undersiden av volumet, i retning oppover.

- Kraften fra trykket som virker på oversiden av volumet, i retning nedover.
- Gravitasjonskraften, i retning nedover (lik $\rho g A dz$).

Vi antar at væsken er i hydrostatisk likevekt, slik at summen av alle kreftene som virker på volumet er lik null. Ved å anvende ligning C.10 og Newtons andre lov på volumet får vi følgende relasjon når vi velger positiv retning vertikalt nedover:

$$pA + \rho g A dz - (p + dp)A = 0. \quad (\text{C.11})$$

Ved å dividere på A og kansellere pA mot hverandre får vi:

$$dp = \rho g dz. \quad (\text{C.12})$$

Videre integrerer vi uttrykket i ligning C.12 fra overflaten av borehullet og ned til dybden z :

$$\int_{P_0}^P dp = \int_0^z \rho g dz. \quad (\text{C.13})$$

Vi ender opp med følgende uttrykk for det hydrostatiske trykket ved dybden z :

$$P(z) = P_0 + \rho g z, \quad z \geq 0, \quad (\text{C.14})$$

der P_0 er det atmosfæriske trykket ved $z = 0$.

Tillegg D

Målinger av grunnparametre

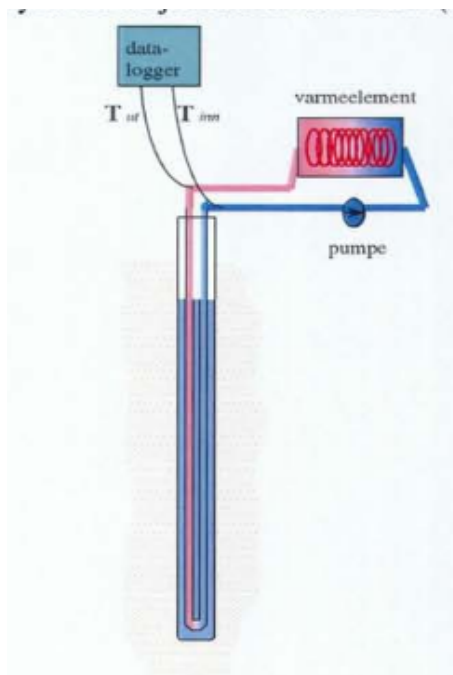
D.1 Termisk responstest

En termisk responstest (TRT) ble først lagt frem av [43], og er en relativt enkel testmetode for å måle *in situ* verdier av varmeledningsevnen i grunnen og den termiske resistansen i borehullet. Vi starter med å gi en kort forklaring på hvordan en TER måling gjennomføres og hvordan varmeledningsevnen og resistansen kan beregnes.

Det eksperimentelle oppsettet som brukes under en TRT måling forklares av [55]. På figur D.1 ser vi at det mest grunnleggende testutstyret består av en vannpumpe, et varmeelement, temperatursensorer for å måle inn - og utgående væsketemperatur, og dataloggere for å innsamling temperaturdata. Kort forklart gjennomføres testen slik: En kollektorslange (enkel eller dobbel U-formet) plasseres i borehullet og kobles til TRT-utstyret slik at det dannes et lukket kretsløp. Kollektorslangene fylles med en varmebærende væske som blir drevet av vannpumpen. Når væsken passerer varmeelementet varmes det opp med en *konstant* rate, slik at væsken avgir varme til grunnen når den sirkulerer i borehullet. Temperatursensorene måler kollektorvæskens inn - og utløpstemperatur ved faste tidsintervall. Videre brukes de målte temperaturene til å beregne varmeledningsevnen i grunnen og resistansen i borehullet.

Matematiske modeller, basert på enten analytiske eller numeriske løsninger av varmeledning ligningen (beskrevet i kapittel 3), kan brukes til å beregne de termiske parameterene. Numeriske modeller vil som regel gi mer nøyaktige verdier, siden de kan ta hensyn til den spesifikke borehullgeometrien og tidsvarierende effekter. Analytiske løsninger er likevel akseptert som en god tilnærming, og har fordelen av at de har lavere beregningsbelastning [56].

Den mest vanlige analytiske løsningen som brukes for å evaluere TRT - målinger



Figur D.1: Det mest grunnleggende utstyret som brukes under en termisk respons-test: vannpumpe, varmeelement, temperatursensorer og datalogger.

[55],[45], [56], [40], er kelvins linjesluk - beskrevet i kapittel 3.2.1. Den gjennomsnittlige temperaturen \bar{T}_f i kollektorvæsken er fra dette kapittelet gitt ved ligning 3.46 og ligning 3.47. Dersom temperaturen ved borehullveggen approksimert ved ligning ??, kan væskens temperatur beskrives med ligningen:

$$\bar{T}_f = -\frac{\dot{q}_b}{4\pi\lambda_g} \ln(t) - \dot{q}_b \left[R_b + \frac{1}{4\pi\lambda_g} \left(\ln \left(\frac{4\alpha_g}{r_b^2} \right) - \gamma \right) \right] + T_g. \quad (\text{D.1})$$

Merk at \dot{q}_b er definert som negativ dersom varme injiseres i grunnen, noe som er tilfelle i en TRT. Det antas at varmeledningsevnen λ_g og resistansen R_b ikke varierer med tiden. Dersom \dot{q}_b i tillegg holdes *konstant* vil de to siste leddene være konstante og væsketemperaturen vil bare være avhengig av tiden, slik at ligning D.1 forenkles til en enkel lineær relasjon:

$$\bar{T}_f = -k \ln(t) - m, \quad (\text{D.2})$$

der k er stigningstallet og gitt ved ligningen:

$$k = \frac{\dot{q}_b}{4\pi\lambda_g}, \quad (\text{D.3})$$

og m er konstantleddet gitt ved ligningen:

$$m = \dot{q}_b \left[R_b + \frac{1}{4\pi\lambda_g} \left(\ln \left(\frac{4\alpha_g}{r_b^2} \right) - \gamma \right) \right] + T_g. \quad (\text{D.4})$$

Ved å plotte den gjennomsnittlige temperaturen \bar{T}_f mot den logaritmiske tiden $\ln(t)$, og deretter anvende lineær regresjon, kan den effektive varmeledningsevnen $\lambda_{g_{eff}}$ beregnes ved å utnytte stigningstallet k til regresjonslinjen:

$$\lambda_{g_{eff}} = \frac{\dot{q}_b}{4\pi k}. \quad (\text{D.5})$$

Den effektive varmeledningsevnen kan deretter brukes til å beregne resistansen ved å bruke relasjonen D.4. Konstanten m er verdien regresjonslinjen har ved tiden $t = 0$, og kan brukes i beregningen så lenge det antas at resistansen er konstant med tiden. Merk at den uforstyrrede grunntemperaturen T_g er en sensitiv variabel i beregningen av borehullets resistanse. Denne temperaturen bestemmes i starten av TRT ved å la kollektorvæsken sirkulere i borehullet uten varmetilførsel helt det oppstår en temperaturlikevekt mellom væsken og grunnen.

Dersom varmelasten ikke er stasjonær under testen må superposisjonprinsippet anvendes, slik at ligning D.1 omformuleres til:

$$\bar{T}_f = \sum_{i=1}^N -\frac{\dot{q}_{b,i} - \dot{q}_{b,i-1}}{4\pi\lambda_g} \ln(t_i) - \sum_{i=1}^N (\dot{q}_{b,i} - \dot{q}_{b,i-1}) \left[R_b + \frac{1}{4\pi\lambda_g} \left(\ln \left(\frac{4\alpha_g}{r_b^2} \right) - \gamma \right) \right] + T_g, \quad (\text{D.6})$$

der $\dot{q}_{b,i}$ er varmelasten for det i -te tidssteget og t_i er tiden fra begynnelsen av det i -te tidssteget til slutten av det N -te tidssteget. For videre detaljer omkring superposisjonprinsippet henvises leseren til seksjon ?? og [57].

D.1.1 Usikkerheter knyttet til TRT - testen

[40] har gjennomført en omfattende usikkerhetsanalyse av typiske verdier til parametrene som inngår i en TRT, og hvilket bidrag disse har på usikkerheten i resultatet. Han konkluderer med følgende, for et borehull fylt med fast masse (ikke grunnvannsfyllt):

- Den effektive varmeledningsevnen i grunnen har en usikkerhet på $\pm 5\%$. Det største bidraget til usikkerheten er usikkerheten i den målte differansen mellom inn - og utgående væske væsketemperatur (70%), væskens varmekapasitet (15.5%) og stigningstallet til regresjonslinjen (6.9%).
- Borehullets effektive resistanse har en usikkerhet på $\pm 11.5\%$, der den effektive varmeledningsevnen har det største bidraget til usikkerheten (93%). Det nest største bidraget er borehullets radius (5.8%), mens konstantleddet i regresjonslinjen vil bidra med (0.66%) av usikkerheten.
- Den uforstyrrede grunntemperaturen har en usikkerhet på $\pm 0.23\%$.

I tillegg til usikkerheten i resultatet fra en TRT, vil det ligge en usikkerhet i den teoretiske modellen som brukes for å beregne resultatene, siden modellen alltid er en tilnærming av de reelle forholdene. For Kelvins linjesluk har vi, som beskrevet i kapittel 3.2.1, flere antagelser som ikke vil være gyldig i virkeligheten - dette gjelder blant annet at:

1. *Varmetransporten i grunnen skjer bare ved varmeledning.*
2. *Varmeledningsevnen i grunnen er isotropisk og homogen.*
3. *En-dimensjonal varmetransport.*
4. *Borehullet approksimeres som et linjesluk, noe som blant annet medfører at varmekapasiteten i borehullet neglisjeres.*
5. *Borehullets resistanse har en stasjonær tilstand.*
6. *Varmeledningsraten er konstant.*

Tillegg E

Grunnleggende statistikk

E.1 Grunnleggende statistiske begrep

I denne seksjonen gir vi en kort beskrivelse av de viktigste begrepene innenfor statistikk som anvendes i denne oppgaven. Definisjonene følger fremstillingen gitt i [58] og [59].

E.1.1 Sannsynlighet

Sannsynlighet er en numerisk beskrivelse av hvor sannsynlig det er at en hendelse skal inntreffe, eller hvor sannsynlig det er at en påstand er sann. Sannsynlighet er et tall mellom 0 og 1, der 0 indikerer at det er umulig at hendelsen kan inntreffe og 1 indikerer at hendelsen inntreffer med absolutt sikkerhet.

E.1.2 Stokastisk variabel

En stokastisk variabel¹ er formelt sett en funksjon fra et utfallsrom \mathbf{S} til tallinja. Som et eksempel betrakter vi et stokastisk forsøk med utfall $u \in \mathbf{S}$, der \mathbf{S} er utfallsrommet. X vil da være en stokastisk variabel, dersom den avbilder u i \mathbf{S} med det reelle tallet $X(u)$, slik at:

$$X = X(u), \tag{E.1}$$

der $X(u)$ omtales som den *observerte verdien*. Vi definerer to typer stokastiske variabler:

¹En stokastisk variabel kan også betegnes som en *tilfeldig variabel*.

- En stokastisk variabel kalles **diskret** dersom mengden av de verdier den antar er tellbar.
- En stokastisk variabel kalles **kontinuerlig** dersom mengden av verdier den antar innenfor et intervall er ikke tellbar.

Til enhver stokastisk variabel X kan vi definere en fordelingsfunksjonen F :

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathfrak{R}, \quad (\text{E.2})$$

der $P(X \leq x)$ er sannsynligheten for at X er mindre enn eller lik det reelle tallet x . Videre har vi at F er voksende ikke-negativ, som nærmer seg 0 når x går mot $-\infty$ og som nærmer seg 1 når x går mot ∞ .

E.1.3 Forventningsverdi

Forventningsverdien til en stokastisk variabel X ved n gjentakelser av et forsøk kan generelt defineres som gjennomsnittet eller middelveien for X når antall forsøk går mot uendelig:

$$\mu = E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{n \text{ forsøk}} X. \quad (\text{E.3})$$

Videre definerer vi forventningsverdien til en diskret stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet p som:

$$\mu = E(X) = \sum_x x p(x). \quad (\text{E.4})$$

Videre kan forventningsverdien til en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet f defineres som:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (\text{E.5})$$

E.1.4 Varians og standardavvik

Når det gjennomføres n stokastiske forsøk (der n er “stor nok”) vil forventningsverdien til den stokastiske variabelen X være tilnærmet lik gjennomsnittet av variabelens verdier. Dersom variabelens verdier svinger med store avvik rundt gjennomsnittsverdien har vi *stor spredning* i verdiene. Motsatt, har vi *liten spredning* dersom verdiene

har små avvik fra gjennomsnittsverdien. Vi definerer avviket fra gjennomsnittsverdien som $x - \mu$, der x er observert verdi. Videre definerer vi to vanlig numeriske mål på spredning:

- **Variansen** til en stokastisk variabel defineres som forventningsverdien til variabelens kvadratavvik fra gjennomsnittsverdien. Den matematiske definisjonen vil være ulik for en diskret og for en kontinuerlig stokastisk variabel:

$$\sigma_d^2 = E[(X - \mu)] = \sum_x (x - \mu)^2 p(x), \quad (\text{E.6})$$

$$\sigma_k^2 = E[(X - \mu)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \quad (\text{E.7})$$

der σ_d^2 og σ_k^2 er variansen for henholdsvis den diskret og kontinuerlige stokastiske variabelen X .

- **Standardavviket** til en stokastisk variabel er definert som kvadratroten av variansen:

$$\sigma = \sqrt{\text{varians}}. \quad (\text{E.8})$$

E.1.5 Sannsynlighetstetthetsfunksjon

En sannsynlighetstetthetsfunksjon beskriver data som er samlet inn fra en eller flere målinger, og gir informasjon om sannsynligheten for at målestørrelsen ligger innenfor et bundet intervall. For en diskret stokastisk variabel X definerer vi sannsynlighetstetthetsfunksjonen (STF)¹ som:

$$p(x) = P(X = x) = P(\{u \in S : X(u) = x\}). \quad (\text{E.9})$$

der $p(x)$ er sannsynligheten for å få et utfall som gir den diskret variabelen X verdien x .

En stokastisk variabel X med en kontinuerlig fordelingsfunksjon F vil ha en sannsynlighetstetthetsfunksjon definert som:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x). \quad (\text{E.10})$$

Dersom f er stykkevis kontinuerlig følger det videre at:

- $f(x) \geq 0$, siden F er voksende,

¹Sannsynlighetstetthetsfunksjonen til en diskret stokastisk variabel betegnes også som *punktsannsynligheten*

- $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$
- $P(X < b) = F(b) = \int_{-\infty}^b f(x)dx,$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1.$

E.1.6 Gaussfordeling (Normalfordeling)

Gjentatte statistiske data vil ofte fordele seg symmetrisk om gjennomsnittsverdien til dataene. Dersom dette er tilfelle er det vanlig å tildele dataene en gauss sannsynlighetstetthetsfordeling. Vi definerer følgende: En stokastisk variabel X med kjent forventningsverdi μ og kjent varians σ^2 er gaussfordelt dersom den har sannsynlighetstetthetsfunksjon:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty \leq x \leq \infty. \quad (\text{E.11})$$

Forventningsverdien og variansen til denne fordelingen vil være gitt ved ligningene E.5 og E.7.

E.1.7 Statistisk inferens

Statistisk inferens handler om å generalisere informasjonen fra et utvalg til informasjonen for hele populasjonen. Når parametere som inngår i simuleringen av et borehull/boreullspark skal kartlegges vil statistisk inferens være nødvendig. Et eksempel på dette er kartleggingen av varmeledningsevnen i grunnen, som beskrevet i seksjon 6.3.1. Undersøkelsene av denne parameteren vil være tid- og økonomisk begrenset og i tillegg kan den variere mye med grunnforholdene.

Sentralmål

Vi definerer tre ulike sentralmål for n observasjoner fra en populasjon. Lar x_1, x_2, \dots, x_n være n observasjoner fra en populasjon. *Gjennomsnittsverdien*, \bar{x} , til observasjonene vil være et estimat på forventningsverdien til populasjonen og er definert som:

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \quad (\text{E.12})$$

Vi lar observasjonene i populasjonen ordnes i stigende rekkefølge, $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$, der $x_{(1)}$ er den minste observerte verdien og $x_{(n)}$ er den største observerte verdien. *Medianen* vil være definert som det midterste observasjonen i rekken dersom n er odde,

og som gjennomsnittet av de to midterste observasjonene dersom n er partall. Vi får følgende definisjon for medianen, \tilde{x} :

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{((n+1)/2)} & n \text{ odde,} \\ \frac{x_{(n/2)} + x_{n/2+1}}{2} & n \text{ partall.} \end{cases} \quad (\text{E.13})$$

Fordelen med å bruke medianen i forhold til gjennomsnittet som sentralmål i er at denne ikke påvirkes av uteliggere¹. Videre definerer vi *typetallet*, som den observasjonen som opptrer med maksimal frekvens i en populasjon.

Spredningsmål

Vi definerer tre ulike spredningsmål for n observasjoner, x_1, x_2, \dots, x_n , fra en populasjon. *Variasjonsbredden* r defineres som differansen mellom den største og minste observerte verdien:

$$r = x_{maks} - x_{min}, \quad (\text{E.14})$$

der x_{maks} og x_{min} er henholdsvis den største og minste observasjonen.

Utvalgsvariansen S til observasjonene vil være et estimat på variansen σ til populasjonen og er definert ved ligningen:

$$\sigma \approx S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2. \quad (\text{E.15})$$

Videre har vi at *utvalgsstandardavviket* er definert som kvadratroten av utvalgsvariansen:

$$S = \sqrt{S^2}. \quad (\text{E.16})$$

Standardfeil og konfidensintervall

Standardfeilen $S_{\bar{x}}$ om gjennomsnittet til observasjonene er definert som standardavviket dividert med kvadratroten av antall observasjoner:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}. \quad (\text{E.17})$$

¹En ekstrem observasjon kalles for en *uteligger*. Dette begrepet betegner ytterliggående observasjoner som skiller seg vesentlig fra andre observerte verdier.

Det er viktig å forstå forskjellen på standardavvik og standardfeil. Standardavviket er et mål for spredningen av observasjonene i utvalget, og gir observasjonenes gjennomsnittlige avstand fra gjennomsnittet til utvalget. Dersom n går mot uendelig vil S gå mot σ . Generelt har vi følgende egenskaper til standardavviket for en normalfordelt utvalg:

- 68.27 % av observasjonene vil ligge innenfor $\bar{x} \pm 1 S$,
- 95.45 % av observasjonene vil ligge innenfor $\bar{x} \pm 2 S$,
- 99.73 % av observasjonene vil ligge innenfor $\bar{x} \pm 3 S$.

Standardfeilen om gjennomsnittet er et estimat på hvor langt observasjonenes gjennomsnitt er fra den egentlige populasjonens gjennomsnitt. I ligning E.17 observerer vi at når antall observasjoner i utvalget går mot uendelig, så vil standardfeilen gå mot null. Motsatt observerer vi at når standardavviket blir større vil standardfeilen følgelig bli større.

Estimatet på en populasjonsparameter¹ angis vanligvis med et intervallestimat, som betegnes som *konfidensintervall*. Generelt kan et slikt intervall defineres på formen:

$$\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U, \quad (\text{E.18})$$

der $\hat{\theta}_L$ er nedre- og $\hat{\theta}_U$ er øvre grense i konfidensintervallet og θ er populasjonsparameteren. Videre definerer vi sannsynligheten:

$$P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (\text{E.19})$$

Ligning E.19 betyr at sannsynligheten er $1 - \alpha$ for at populasjonsparameter til et tilfeldig utvalg er inneholdt i konfidensintervallet. Et intervall med en gitt sannsynlighet betegnes som et $(1 - \alpha)100\%$ konfidensintervall for θ . Videre blir størrelsen $(1 - \alpha)100\%$ betegnet som konfidensnivået.

For $n \geq 100$ definerer vi følgende $(1 - \alpha)100\%$ konfidensintervall for forventningsverdien μ :

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} S_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} S_{\bar{x}}, \quad (\text{E.20})$$

der verdien til $z_{\alpha/2}$ er avhengig av hvilket konfidensnivå som settes for intervallet. I et 95% konfidensintervall vil for eksempel $z_{\alpha/2} = 1.96$. Vi observerer at konfidensintervallet blir mindre når antall observasjoner blir større.

¹En populasjonsparameter for en populasjon defineres som en størrelse som beregnes ved hjelp av fullstendig kjennskap til populasjonen. Dette kan for eksempel være forventningsverdien og variansen [58].

E.1.8 Boksdiagram

Et boksdiagram er en effektiv måte oppsummere observasjonene på ved hjelp av fem beskrivende tall: Minimum, første kvartil, median, tredje kvartil og maksimum. I tillegg kan diagrammet gi informasjon om uteliggere. Anatomien til et boksdiagram er illustrert i figur xx, og under er det listet opp en kort forklaring på hvert av de beskrivende tallene:

- **Medianen** er definert i ligning E.13, og er det midterste observasjonen i utvalget. Det betyr at 50 % av observasjonene ligger henholdsvis over og under medianen.
- **Første kvartil $K1$** definerer den midterste observasjonene mellom medianen og den minste uteliggeren. Det betyr at 25 % av observasjonene vil ligge nedenfor første kvartil.
- **Tredje kvartil ($K3$)** definerer den midterste observasjonen mellom medianen og den største uteliggeren. Det betyr at 25 % av observasjonen ligger ovenfor tredje kvartil, mens 75 % av observasjonene ligger nedenfor tredje kvartil.
- **Kvartilbredden(KB)** inneholder 50 % av observasjonene og ligger mellom første og tredje kvartil.
- **“Minimum”** er definert som $K1 - 1.5(KB)$.
- **“Maksimum”** er definert som $K3 + 1.5(KB)$.
- **Uteliggere** definerer observasjoner som har store avvik fra andre observasjoner.

Tillegg F

Tabeller

Parameternavn	Verdi
Dimensjoner til borehull	
Aktiv lengde, H [m]	150
Radius, r_b [m]	0.056
Dimensjoner kollektorslange	
Radius ytterside, r_{ky} [m]	0.020
Radius innside, r_{ki} [m]	0.0176
Ruhet innside, ϵ [m]	10^{-6}
Avstand mellom kollektorben [m]	0.031**
Egenskaper til grunnen	
Diffusivitet, α_g [m^2/s]	$1.0 \cdot 10^{-6}$
Varmeledningsevne, λ_g [W/m.K]	3.15
Uforstyrret temperatur, T_g [$^{\circ}C$]	5.5
Egenskaper til grunnvann i borehullet	
Temperatur ytterside kollektorslange, T_{ky} [$^{\circ}C$]	5.5*
Temperatur innside borehullvegg, T_{BHV} [$^{\circ}C$]	5.5*
Egenskaper til kollektor	
Varmeledningsevne kollektorvegg, λ_k [W/m.K]	0.4
Egenskaper til kollektorvæske	
Spesifikk isobarisk varmekapasitet, c_p [J/kg.K]	3258
Tetthet, ρ_k [kg/m^3]	1070
Viskositet, μ_v [kg/m.s]	0.00588
Varmeledningsevne, λ_v [W/m.K]	0389
Massestrømhastighet, \dot{m}_v [kg/s]	0.8

Tabell F.1: Verdier merket med * anvendes bare i den modifiserte pygfunction. Verdier merket med ** anvendes bare i den opprinnelige pygfunction.

Parameternavn	Verdi
Dimensjoner til borehull	
Aktiv lengde, H [m]	200
Radius, r_b [m]	0.056
Dimensjoner kollektorslange	
Radius ytterside, r_{ky} [m]	0.020
Radius innside, r_{ki} [m]	0.0176
Ruhet innside, ϵ [m]	10^{-6}
Egenskaper til grunnen	
Diffusivitet, α_g [m^2/s]	$1.1 \cdot 10^{-6}$
Varmeledningsevne, λ_g [W/m.K]	3.15
Uforstyrret temperatur, T_g [$^{\circ}C$]	5.5
Egenskaper til grunnvann i borehullet	
Temperatur ytterside kollektorslange, T_{ky} [$^{\circ}C$]	5.5
Temperatur innside borehullvegg, T_{BHV} [$^{\circ}C$]	5.5
Egenskaper til kollektor	
Varmeledningsevne kollektorvegg, λ_k [W/m.K]	0.42
Egenskaper til kollektorvæske	
Spesifikk isobarisk varmekapasitet, c_p [J/kg.K]	3258
Tetthet, ρ_k [kg/m^3]	1070
Viskositet, μ_v [kg/m.s]	0.00588
Varmeledningsevne, λ_v [W/m.K]	0.389
Massestrømhastighet, \dot{m}_v [kg/s]	0.453
Varmelast	
Varmelast (tilført grunnen), \dot{q}_b [W/m]	47

Tabell F.2: Parameterverdier for eksempel 2 seksjon 5.2.1

Tillegg G

Python-kode

Python-koden under viser funksjoner for å beregne den lokale og effektive resistansen for grunnvannsfylte borehull.

```
def trykk_borehull(z):
    """
    Beregner trykket ved dybden z (i meter) for et
    grunnvannsfylt borehull.

    Parametere
    -----
    z : Flyttall
    Dybden (i meter) der trykket skal evalueres.

    Returnerer
    -----
    P: flyttal
    Trykket ved dybden z [MPa]

    """
    # Initalverdier
    P0 = 101325 # Overflatetrykk [M.Pa]
    g = 9.81    # Tyngdeakselerasjon [m/s2]
    rho = 997   # Tetthet til grunnvannet [kg/m3]

    # Beregner trykket (MPa)
    P = (P0 + rho*g*z)/10**6
```



```
return P
```

```
def thermal_resistances(q_b, T_ky, TBHV, H, r_b, r_ky, R_fp
    ):
```

```
    """
    Metode for å beregne den lokale resistansen for et
    grunnvannsfylt borehull.
```

```
    Parametere
```

```
    q_b : TYPE
```

```
    Varmelast per meter borehull [W/m].
```

```
    T_ky : TYPE
```

```
    Temperatur til grunnvann ved yttersiden av kollektorslange [
    gradC].
```

```
    TBHV : TYPE
```

```
    Temperatur til grunnvann ved innsiden av borehullveggen [
    gradC].
```

```
    H : Flyttall
```

```
    Lengden til borehullet [m].
```

```
    r_b : TYPE
```

```
    Radius til borehullet [m].
```

```
    r_ky: TYPE
```

```
    Radiusen til yttersiden av kollektorbenene [m]
```

```
    R_fp :
```

```
    Resistanse fra kollektorvæske til ytterside av kollektorben
    [m.K/W]
```

```
    Returnerer
```

```
    Rd: 2x2 matrise
```

```
    Rd[i,i] = Resistansen mellom kollektorbena og borehulveggen
    (K.m/W)
```

```
    Rd[i,j] = Resistansen mellom kollektorbena (K.m/W)
```

```
    R: 2x2 matrise
```

```
    R[i,i] = Resistansen ved yttersiden av kollektorveggen (K.m/
    W)
```

```
    R[i,j] = Resistansen ved innsiden av borehullveggen (K.m/W)
```

```
    Referanse
```

```
.. Spitler et al (2016). "Natural convection in groundwater-
  filled
  boreholes used as ground heat exchangers".

""
# Konverterer temperaturenheter til enhet kelvin
T_ky = T_ky + 273.15
T_BHV = T_BHV + 273.15

##Modified Rayleigh number

N_p = 2 # Antall kollektorben
# Definerer hydraulisk diameter [m], lign. 19
D_hy = ((4* np.pi * (r_b**2 - N_p*r_ky**2)) /
  (2*np.pi*(r_b+ N_p* r_ky)))

# tyngdeakselerasjon
g = 9.81 # [m/s^2]

# Trykket ved midten av borehullet
P_g = trykk_borehull(H/2)

# Henter egenskaper til grunnvann ved yttersiden av
  kollektorslange
# - basert på temperatur og trykk til grunnvannet.
grunnvann_ky=IAPWS95(T = T_ky, P=P_g)

beta_ky = grunnvann_ky.alfav # Volumetrisk eller kubisk
  ekspansjonskoeffisient [1/K]
k_ky = grunnvann_ky.k # Varmeledningsevne [W/m.K]
nu_ky = grunnvann_ky.nu # kinematisk viskositet [m2/s]
alpha_ky = grunnvann_ky.alfa # Termisk diffusivitet [m2/s]

#Last ved kollektor og borehullvegg
q_ky = np.abs(q_b / (np.pi*4*r_ky)) # Varmelast ved
  yttersiden av kollektorvegg [W/m2]
q_BHV = np.abs(q_b / (np.pi*2*r_b)) # Varmelast ved
  innsiden av borehullvegg [W/m2]

# Raylegttallet ved yttersiden av kollektorslange. lign. 27
```

```
Ra_ky = np.abs(((g*beta_ky*q_ky*(D_hy)**4) / (k_ky*vi_ky*
alpha_ky)))

#Beregner egenskaper til grunnvann på ved borehullveggen
grunnvann_BHV=IAPWS95(T = T_BHV, P=P_g) # saturated liquid
with known T

beta_BHV = grunnvann_BHV.alfav # Volumetrisk eller kubisk
ekspansjonskoeffisient [1/K]
k_BHV = grunnvann_BHV.k # Varmeledningsevne [W/m.K]
vi_BHV = grunnvann_BHV.nu # kinematisk viskositet [m2/s]
alpha_BHV = grunnvann_BHV.alfa # Termisk diffusivitet [m2/s]

# Raylegttallet ved innsiden av borehullveggen, lign. 28
Ra_BHV = np.abs(((g*beta_BHV*q_BHV*(D_hy)**4) /
(k_BHV*vi_BHV*alpha_BHV)))

# Beregner Nusselttallet ved yttersiden av kollektorslangen,
lign. 27
if (1.8E6 < Ra_ky < 4.1E7):
Nu_ky = 0.3*(Ra_ky)**0.25
# Dersom beregnet Rayleigh-tall er utenfor gyldighetsområde
(i lign. 27)
# brukes grenseverdiene.
elif (Ra_ky >= 4.1E7):
Nu_ky = 0.3*(4.1E7)**0.25
elif Ra_ky <= 1.8E6:
Nu_ky = 0.3*(1.8E6)**0.25

# Beregner Nusselttallet ved innsiden av borehullveggen,
lign. 28
if 5.4E5 < Ra_BHV < 2.9E7:
Nu_BHV = 0.2*(Ra_BHV)**0.25
# Dersom beregnet Rayleigh-tall er utenfor gyldighetsområde
(i lign. 28)
# brukes grenseverdiene.
elif Ra_BHV >= 2.9E7:
Nu_BHV = 0.2*(2.9E7)**0.25
elif Ra_BHV <= 5.4E5:
Nu_BHV = 0.2*(5.4E5)**0.25
```

```
#Beregner filmkoeffisienter
h_ky = Nu_ky * k_ky / D_hy # Lign. 24
h_BHV = Nu_BHV * k_BHV / D_hy # Lign. 25

# Beregner resistanser
R_ky = 1/ (4*np.pi*r_ky*h_ky) # Resistansen ved yttersiden
    av kollektorslange , lign. 17
R_BHV = 1/ (2*np.pi*r_b*h_BHV) # Resistansen ved innsiden
    av borehullvegg , lign. 18

# Beregner lokale resistanser i borehullet
Rb = R_BHV + R_ky/2 + (R_fp)/2 # Lokal resistanse i
    borehullet [K.m/W], lign. 9
R12 = 2*(R_ky + R_fp) # Resistansen mellom kollektorbeina.
    [K.m/W], lign. 8

w, h = 2, 2;
Rd = [[0 for x in range(w)] for y in range(h)]
R = [[0 for x in range(w)] for y in range(h)]

Rd[0][0] = 2*Rb; Rd[0][1] = R12; Rd[1][0] = R12; Rd[1][1] =
    2*Rb
R[0][0] = R_ky; R[0][1] = R_BHV; R[1][0] = R_BHV; R[1][1] =
    R_ky

return R, Rd

def coth(x):
    """
    Hyperbolisk cotangens. Brukt for å beregne effektiv
    resistanse for
    antagelsen "Uniform temperatur langs borehullveggen."

    Parameter
    -----
    x : TYPE
    Inngangsvariabel.

    Returnerer
    -----
```

Beregnet verdi for gitt inngangsvariabel.

```
"""
```

```
coth = (np.exp(2*x) + 1)/(np.exp(2*x) - 1)
```

```
return coth
```

```
def effektiv_resistanse(H, tet_v, cp_v, V_f, Rb, R12):
```

```
"""
```

```
Beregner effektiv resistanse for randbetingelsen "Uniform  
temperatur langs  
borehullveggen." Beregningene er basert på arbeidert til  
Hellstrom [#Hellstrom1991]_
```

Parametere

H : TYPE

Lengde til borehullet [m]

tet_v : TYPE

Tetthet til kollektorvæske [kg/m³]

cp_v : TYPE

Spesifikk isobarisk varmekapasitet til kollektorvæske [J/Kg.
K]

V_f : TYPE

Volumetrisk strømningsrate til kollektorvæske [m³/s]

Rb : TYPE

Lokal resistanse mellom kollektorvæsken og borehullveggen [m
.K/W]

R12 : TYPE

Resistansen mellom kollektorbena [m.K/W]

Returnerer

Rb_eff : Effektiv resistanse til borehullet [k.m/W]

Referanser

.. [#Hellstrom1991] Hellstrom, G. (1991). Ground heat
storage. Thermal

Analyses of Duct Storage Systems I: Theory. PhD Thesis.
University of

Lund, Department of Mathematical Physics. Lund, Sweden.

```
"""
```

```
# Rb = thermal_resistances [0]  
# R12 = thermal_resistances [1]
```

```
eta = H / (tet_v * cp_v * V_f) * 1 / (2 * Rb) * np.sqrt(1 + 4 * (Rb / R12))
```

```
Rb_eff = Rb * eta * coth(eta)
```

```
return Rb_eff
```