«hvordan vi skal liksom lage et uttrykk, vet ikke jeg»

En kvalitativ studie av elevers matematiske kompetanse uttrykt i arbeid med en problemløsningsoppgave med programmering som hjelpemiddel

Ane Sørnes Viken

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Matematisk institutt

Universitetet i Bergen

Våren 2021

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten av min tid som student på lektorprogrammet i matematikk og fysikk ved universitetet i Bergen. Oppgaven har vært krevende å skrive og til tider har frustrasjonen vært stor. Oppgaven har bidratt til mange gode refleksjoner tilknyttet tolkninger av både empiri, kompetansemodeller og den nye læreplanen. Dette arbeidet har gitt meg et godt innblikk i temaene problemløsning, matematisk kompetanse og algoritmisk tenkning.

Jeg ønsker å takke elevene som valgte å delta, uten deres hjelp, ville ikke denne masteroppgaven vært mulig å skrive. En takk til min veileder Johan Lie for hjelp og støtte gjennom denne prosessen, samt en takk til min biveileder Inge Olav Hauge for gode innspill. En spesiell takk til medstudent Emilie Lillehagen Brenden for samarbeidet rundt innsamling av datamaterialet. Jeg vil takke alle andre som har hjulpet meg med oppgaven. Har fått god hjelp til korrektur-lesning, utrolig hvor blind man blir på sin egen oppgave. Til slutt vil jeg takke alle mine fantastiske venner, uten dere hadde ikke denne reisen blitt den samme. Takk for at dere gjør hverdagen til en fest.

Bergen, 1 juni 2021

Ane SørnesViken

Sammendrag

Hensikten med dette prosjektet var å få innsikt i hvordan elevenes matematiske kompetanse og arbeidsprosess ble påvirket gjennom bruk av en problemløsningsoppgave. Grunnet innføring av programmering i den nye læreplanen, ble det i datainnsamlingen benyttet programmering som hjelpemiddel i problemløsningsoppgaven (Utdanningsdirektoratet, 2020). På bakgrunn av dette ønsket jeg å få bedre kjennskap til elevers matematiske kompetanse gjennom en problemløsningsprosess ved bruk av programmering.

Utgangspunkt for analysen var forskningsspørsmålene; *Hvilke matematiske kompetanser kom til uttrykk når elevene møtte utfordringer i sitt arbeid. Kan man observere spor av algoritmisk tenkning i elevenes tankegang?* Og *hvordan arbeider elevene med oppgaven med utgangspunkt i en problemløsningsprosess?* Matematisk kompetanse er i hovedsak analysert gjennom kompetanserammeverket til Kilpatrick et al. (2001), men har i tillegg blitt belyst av blant annet kompetanserammeverket til Niss og Jensen (2002). Det ble sett etter tegn til algoritmisk tenkning med utgangspunkt i Utdanningsdirektoratet (2019) sine nøkkelbegreper. Til slutt ble elevenes problemløsningsprosess studert med utgangspunkt i Mason et al. (2010) sin oppdeling av arbeidsprosessen. Analysen gjort i prosjektet ble gjennomført på et datamateriale som ble samlet inn fra to grupper 1T elever ved en videregående skole i Vestland fylke.

På bakgrunn av oppgavens resultater tenker jeg at man som lærer i større grad må legge til rette for at elevene får trening i å arbeide med problemløsningsoppgaver. Funnene i oppgaven gir indikasjoner på at elevene uttrykker flere aspekter og ulike kombinasjoner av matematisk kompetanse i arbeid med en problemløsningsoppgave.

Funnene viser tegn til at problemløsningsoppgaver kan bidra til utvikling av elevenes matematiske kompetanse. Gjennom denne studien så jeg at elevene trenger trening i bruk av programmering, algoritmisk tenkning og Python sin syntaks. Gjennom god veiledning og bevisstgjøring omkring arbeidsprosessen kan elevene muligens få enda bedre utbytte av effekten av problemløsningsoppgaver og programmering.

Innhold

Figurer

Tabeller

1.Innledning

Kunnskap har i årtusener vært en bærende del av menneskeheten. Alle har et forhold til å tilegne seg ny kunnskap, selv om kunnskapstilegnelsen kan være ulik fra person til person. Kunnskap er noe man besitter som er avhengig av interessefelt, skolegang og muligheter. I Norge har alle krav på skolegang, noe som viser at vi som samfunn verdsetter et jevnt over høyt kunnskapsnivå i befolkningen. I Norge er det den offentlige skole som er den desidert største utdanningsinstitusjonen. Den er hele tiden i endring på grunn av politiske vedtak gitt av stortinget og regjeringen, samt innspill fra arbeids- og næringslivet. Det stilles hele tiden spørsmål til hva samfunnet trenger for å holde tritt med den teknologiske utviklingen rundt oss. Den samlede kunnskapskapitalen er samfunnets viktigste ressurs (NOU 2015: 8, 2015, s. 97). Kunnskap og utdanning er viktig for at et samfunn skal kunne utvikle seg eller opprettholde velstanden.

NOU-utredningen Fremtidens skole (NOU 2015: 8, 2015) ble utviklet av et offentlig utvalg satt av Kunnskapsdepartementet, også kalt Ludvigsenutvalget. Utvalget jobbet med å se på hvordan skolen burde utvikle seg i møte med nye utfordringer i samfunnet. Utvalget slo fast at fagene i skolen trengte en fornyelse for å møte fremtidige kompetansebehov i arbeids- og samfunnslivet. Det er et ønske at skolegangen skal bidra til elevenes mestring av livet som privatpersoner, samfunnsborgere og yrkesutøvere. For å klare dette må skolen i samarbeid med hjemmet legge til rette for at elevene utvikler de kompetanser som er relevante, og får en god forståelse av det de lærer på skolen. Målet for elevenes læring er at den skal reflektere skolens verdimessige grunnlag som er uttrykt i formålsparagrafen, samfunnets behov og forskningsbasert kunnskap. Utvalget har i sitt mandat utredet hva elevene sannsynlig vil ha behov for å lære i skolen i et perspektiv på 20– 30 år (NOU 2015: 8, 2015, s.8).

Med fokus på matematikkfaget ble Ludvigsenutvalgets utredning med på å påvirke det som nå implementeres som *Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020 (LK20).* Den blir ofte omtalt som den *nye læreplanen*. Studerer man læreplanen ser man at det er ønskelig med enda mer tverrfaglig arbeid, samt at fagene får sine egne kjerneelementer. LK20 skal kunne bidra til å rette fokuset mot de delene av fagene som er viktige for fremtidens kompetanse.

LK20 ble utgangspunktet for mitt masterprosjekt. Skolen gjennomgår per nå endringer og implementeringer av den nye læreplanen. Som fremtidig lærer stiller man seg gjerne spørsmålet; Hva ønsker jeg at framtidige elever skal ta med seg av kunnskaper og ferdigheter?

Samtidig er det bestemt av Kunnskapsdepartementet at elevene skal sitte igjen med en gitt kunnskap etter fullført skolegang, disse kunnskapene er nedfelt i læreplanene. Kjerneelementene vil være viktige når jeg skal gå inn i skolen som fremtidig matematikk lærer. Derfor ble de nye kjerneelementene et utgangspunkt for denne oppgaven.

De matematiske kjerneelementene i den nye læreplanen består av «Utforskning og problemløsning», «Modellering og anvendelser», «Resonnering og argumentasjon», «Representasjon og kommunikasjon», «Abstraksjon og generalisering», samt «Matematiske kunnskapsområder» (Utdanningsdirektoratet 2020).

Kjerneelementene representerer store tema innen matematikk hvorav tolkning og oppfatning av innhold vil kunne påvirke hvordan fokuset vil være for ulike skoler, lærere og elever. I min masteroppgave vil fokuset være på problemløsning og matematisk kompetanse. Problemløsning er noe jeg personlig har sett på som en viktig og krevende del av matematikkfaget. Samtidig tenker jeg at matematisk kompetanse er byggesteinene elevene bruker til å utvikle matematisk kunnskap, selv om dette ikke er nevnt spesifikt i kjerneelementene. Utdanningsdirektoratet (2020) skriver at undervisningen i matematikk skal bidra til at elever utvikler evnen til å jobbe selvstendig og samarbeide med andre gjennom utforskning og problemløsning, samt bidra til at elevene blir mer bevisste på sin egen læring.

I Stortingsmelding 28 (2015–2016) kan man lese at et fokusområde er at det skal legges bedre til rette for elevenes grunnleggende kompetanse i fagene gjennom å videreutvikle skolefagene. Dette begrunnes blant annet med endringer i samfunnet; skolen må være med på endringene i teknologien slik at ungdommen er bedre forberedt til studiene og jobbene i fremtiden. Det vektlegges at norsk næringsliv og offentlige virksomheter har behov for høy kompetanse og stor innovasjonsevne i årene fremover for å bevare og videreutvikle den norske velferdsmodellen (Meld. St. 28, s.13). For å kunne følge samfunnsutviklingen er det viktig at skolene utvikler seg i takt med hva samfunnet trenger, altså ved å være med å utvikle kompetanse for fremtiden.

Lærere har gjerne ulike oppfatninger til opplæringen innen matematikk. Hva man legger i «å kunne matematikk» kan være ulikt , dette uttrykker Røsseland (2005, s. 12) ;

> *«Noen mener at bare elevene kan de fire regneartene (les algoritmene) når de går ut av barneskolen, må vi være fornøyde. Andre mener at det viktigste er at elevene er kreative og klarer å finne løsninger på problemløsningsoppgaver uten tanke på en «riktig» fremgangsmåte.»*

Gjennom den nye læreplanen stilles nye krav til skolen og opplæringen til elevene. Gjennom å gå i dybden på et av kjerneelementene i dette prosjektet vil jeg være mer forberedt på min rolle som fremtidig lærer.

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Matematikk er noe alle har et forhold til gjennom sin skolegang, enten holdningen er positiv eller negativ. Likevel oppleves gjerne matematikken som misforstått hos mange. Schoenfeld (2016, s. 27) presenterer ulike funn om elevers tanker rundt matematikk som er oppsummert under. Han skriver at elevene tenker at matematiske problemer har ett og bare ett riktig svar. Samtidig som det bare er en riktig måte å løse ethvert matematikkproblem på, som vanligvis er det læreren sist demonstrerte for klassen. Schoenfeld (2016) hevder at elevene tenker at vanlige elever ikke kan forventes å forstå matematikk, de forventes bare for å huske det og bruke det de har lært mekanisk og uten forståelse. Elevene tenker at matematikk er en ensom aktivitet, utført av enkeltpersoner i isolasjon. Elever som har forstått matematikken de har studert vil være i stand til å løse ethvert tildelt problem på fem minutter eller mindre. Matematikken som læres på skolen har lite eller ingenting å gjøre med den virkelige verden. Formelt bevis er irrelevant for oppdagelses- eller oppfinnelsesprosesser. Dette er funn Schoenfeld (2016) har basert på elevers erfaringer fra klasserommet. Er det slik matematikk egentlig er? Har elevene rett i at matematikk er noe som har lite eller ingenting med den virkelige verden å gjøre?

Dette er meninger jeg har opplevd gjennom praksis og egen skolegang. Som lærer er man med å påvirke elevenes skolehverdag og deres holdninger til matematikken. Som nevnt i innledningen ble valget av hovedtema for min masteroppgave tatt på bakgrunn av den nye læreplanen. Valget falt på problemløsning og matematisk kompetanse, samt et innslag av programmering. Temaene ble grunnlaget for datainnsamlingen som videre ga utgangspunkt for valg av endelig problemstilling. Grunnen til at valget endte på problemløsning er fascinasjonen for hvordan problemløsning er avhengig av person, samt at det kan kobles opp til virkeligheten. Det å kunne sette seg ned å tenke rundt et problem man blir stilt ovenfor er noe alle trenger gjennom livet. Så gjennom bruk av problemløsning vil man kanskje greie å hjelpe elevene å se nytten av matematikken, samtidig påvirke deres holdninger.

For å kunne utvikle seg til å bli en god problemløser innen matematikk mener jeg at man må fokusere på matematisk kompetanse. Jeg ser på matematisk kompetanse som byggesteinene til matematisk utvikling. Jeg tenker alle elevene har forutsetningene, men de må lære seg å anvende kunnskapen ut fra sitt ståsted.   Matematisk kompetanse er noe som utvikler seg med personen og oppleves som komplekst. Denne kompleksiteten var litt av hovedgrunnen til at jeg ønsket å undersøke matematisk kompetanse hos noen elever nærmere. I den nye læreplanen legges det til rette for at elevene skal utvikle algoritmisk tenkning. Jeg tenker det er viktig som lærer å ha god forståelse for elevenes matematiske kompetanse om man skal hjelpe de å utvikle algoritmisk tenking og å bli gode problemløsere. Matematisk kompetanse er noe som følger elevene fra de er små og resten av livet. Siden dette er et omfattende tema ble det etter datainnsamlingen behov for å presisere temaet ved å finne en passende problemstilling. Mer innsikt i denne prosessen vil komme frem gjennom kapittel 3, metode.

1.2 Valg av problemstilling

Når man skal utvikle en studie er målet å skulle svare på en valgt problemstilling. Derfor var det viktig å prøve å spisse oppgaven slik at behandling og analyse av datamaterialet belyser problemstillingen. Etter flere ulike forslag og utallige gjennomganger av datamaterialet falt valget til slutt på;

Hvilken matematisk kompetanse kom til uttrykk i samtaler mellom elever som har arbeidet med en problemløsningsoppgave med programmering som hjelpemiddel?

Når analysen skulle gjennomføres ble det gjort et valg om å dele problemstillingen inn i to forskningsspørsmål. Dette for å bedre strukturere analysen, samt det ble enklere å studere enkeltfenomener konkret uten flere distraksjoner. Forskningsspørsmålene lyder som følger;

Hvilke matematiske kompetanser kom til uttrykk når elevene møtte utfordringer i sitt arbeid. Kan man observere spor av algoritmisk tenkning i elevenes tankegang? Og *hvordan arbeider elevene med oppgaven med utgangspunkt i en problemløsningsprosess?*

1.3 Oppbygning av oppgaven

I kapittel 2 vil det teoretiske grunnlaget for dette prosjektet bli presentert. Her vil jeg starte med en liten introduksjon til hva matematikk er før jeg går over på matematisk kompetanse. Videre vil teorikapittelet ta for seg problemløsning og problemløsningsprosessen. Under problemløsning vil i tillegg algoritmisk tenkning bli presentert.

I kapittel 3 vil de metodiske valg som er tatt underveis i prosjektet presenteres. Fra utvikling av oppgaven brukt til selve gjennomføringen av datainnsamlingen. Jeg ønsker å gi et innblikk i valg av analysemetode og drøfte studiens kvalitet.

I kapittel 4 presenteres analysen av utvalgte eksempler og tilhørende funn for de to forskningsspørsmålene. Under alle delene i analysen kommer en tilhørende oppsummering av funnene.

I kapittel 5 blir studiens funn oppsummert og diskutert i lys av teori presentert i kapittel 2. Her vil jeg se på og diskutere hvilke matematiske kompetanser som kom til utrykk gjennom elevenes arbeid, samt hvilken matematisk kompetanse som ikke var like fremtredende. Det vil bli sett på spor av algoritmisk tenkning som ble funnet i analysen og hvordan dette henger sammen med matematisk kompetanse. Gruppenes problemløsningsprosess vil bli belyst og diskutert. Til slutt er det en oppsummering hvor prosjektet og funnene oppsummeres opp mot problemstillingen.

I kapittel 6 blir mine avsluttende tanker og refleksjoner rundt prosjektet presentert.

2. Teori

I dette kapittelet presenterer jeg teorigrunnlaget som jeg mener er relevant for problemstillingen for denne masteroppgaven. Hovedvekten av teorien omhandler matematisk kompetanse og problemløsningsprosessen. Begge hoveddelene blir avsluttet med et oppsummerende underkapittel. Det vil først bli presentert kort litt generelt om hva matematikk er. Algoritmisk tenkning blir presentert under problemløsning. Teorien legger grunnlaget for analyseverktøyet som er presentert i kapittel 3.3.

2.1 Hva er matematikk?

Lorentzen (2013) skriver at vår oppfatning av matematikk kan endre seg etter hvilke møter og erfaringer man har med matematikk, noe som gjenspeiler Schoenfeld (2016) sine funn som er presentert under motivasjon. Elevenes forhold til matematikk kobles til det de blir eksponert for igjennom sin skolegang. Lorentzen (2013) mener matematikk er en måte å tenke på, et språk som er velegnet til å formulere og løse problemer, et søk etter mønstre, en samling logiske resonnementer som bygger absolutte sannheter i en usikker verden, og sunn fornuft satt i system. En kan tydelig se et skille på funnene til Schoenfeld (2016) om elevenes tanker om hva matematikk er, og Lorentzen (2013) sine tanker.

Ønsker man å gå i dybden på hva matematikk er vil man finne veien til filosofien. Det er ikke noe entydig svar på hva matematikk er (Lorentzen, 2013). Som lærer er det viktig å være oppmerksom på holdningen en ytrer til elevene. Dette fordi man som lærer har stor påvirkning når det kommer til holdninger elevene blir sittende igjen med.

Halmos (1980, s. 519) beskriver hvordan matematikk består av flere nødvendige ingredienser, samtidig som han har en tanke om hva som er essensen i matematikk;

> *«Mathematics could surely not exist without these ingredients; they are all essential. It is nevertheless a tenable point of view that none of them is at the heart of the subject, that the mathematician's main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, what mathematics really consists of is problems and solutions. »*

Gjennom sitatet utrykker Halmos sin tanke om at matematikk består av problemer og løsninger. Elevenes holdninger ifølge Schoenfeld (2016) står i konflikt med tankene til Halmos. Samtidig er det viktig å huske på at matematikkfaget i skolen alltid er i endring. Gjennom den nye læreplanen vil blant annet problemløsning komme mer i fokus. Noe som kan bidra til at elevene opplever matematikkfaget som mer givende.

2.2 Matematisk kompetanse

Ofte forstår man kompetanse som et mål på hva som er forventet at man skal kunne, eller hva det er ønskelig at man sitter igjen med etter at faget er fullført. Kompetanse handler om hva man er i stand til. Kompetansen knyttet til de ulike fagene skal utvikles parallelt med elevenes skolegang, og skal alltid kunne utfordre elevene. Utdanningsdirektoratet (2018) kobler kompetanse til det å kunne anvende og tilegne seg ferdigheter og kunnskaper. Videre skal man kunne bruke denne kompetansen til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente situasjoner.

Allerede i Stortingsmelding 20 (2012–2013, s.13) stiltes det større krav til kompetanse enn noen gang før, og stortingsmeldingen fremhever at utdanningssystemet alltid skal utdanne barn og unge for framtidens arbeidsmarked. Arbeidsmarkedet er hele tiden i utvikling, som vil si at man skal forberede elever til jobber som ennå ikke finnes. Om man skal stille enda høyere krav til kompetanse er det viktig at vi som fremtidens lærere setter oss inn i hva som er innholdet og utviklingen i våre fag. Det er viktig at elevene behersker flere ulike kompetanser i matematikk, likevel trengs det en bevisstgjøring omkring hva det vil si å ha matematisk kompetanse (Røsseland, 2005, s. 12). Som fremtidig lærer må man være forberedt på å finne gode oppgaver for elevene, fordi det er viktig å utfordre elevene med oppgaver som stimulerer delkompetansene man ønsker at de skal utvikle (Lithner et al., 2010).

Denne masteroppgaven vil hovedsakelig ta utgangspunkt i teoriene til Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen og Kilpatrick, Swafford, og Findell. Disse teoriene er kompetanserammeverk som er anerkjent og ble vurdert som mest relevant for oppgaven. Før disse rammeverkene blir presentert vil det bli presentert teori rundt begrepet metakognisjon. Deretter vil Skemp (1976) sine tanker rundt instrumentell og relasjonell forståelse presenteres.

2.2.1 Kompetanse i å lære

NOU 2014:7 (2014, s.36) skriver at i dagens samfunn er behovet for å lære på ulike arenaer gjennom hele livet viktigere enn noen gang. For barn og unge er skolen den viktigste læringsarenaen, derfor forventes det at skolen tar ansvar for å gi elevene verktøy som gjør at de senere i livet kan ta til seg kunnskap og lære nye ferdigheter. Begreper som er viktige når man snakker om å lære er metakognisjon, selvregulert læring og læringsstrategier.

Metakognisjon blir av NOU 2014:7(2014) definert som tenkning om tenkning eller kunnskap om egne kognitive prosesser og resultater. Det som nevnes som felles for alle begrepene nevnt over er at de betegner hvordan personer aktivt prøver å kontrollere, reflektere og påvirke egen læring. NOU 2014:7 (2014) mener at elever som er effektive når de jobber, setter seg relevante mål, overvåker læringen under arbeidet og fortsetter arbeidet når noe blir vanskelig, disse elevene har tilegnet seg en kompetanse i å kontrollere sin egen læringsprosess.

En motiverende faktor for å utvikle kompetanse i metakognisjon og selvregulert læring kan være bruken av den etter endt skolegang. Kompetanse i metakognisjon og selvregulert læring kan være gode redskaper for å kunne tilegne seg ny kunnskap og kompetanse i ulike situasjoner gjennom hele livet.

NOU 2014:7(2014) poengterer viktigheten av å reflektere, overvåke og justere kursen underveis i læringen. Kunnskap kan handle om at elevene kjenner sine sterke og svake sider og vet hva de kan fra før. Elevene skal kunne være bevisst på egen tenkning og kunnskap. Ved en slik kontroll på egen læringsprosess vil elever kunne kontrollere utviklingen i sin egne matematiske kompetanse. Man kan reflektere rundt viktigheten av elevenes samtaler med «seg selv» for å utvikle en kompetanse de etter hvert mest sannsynlig vil være i stand til å utrykke muntlig.

2.2.2 Instrumentell og relasjonell forståelse

Når man snakker om matematisk kompetanse, kan det være relevant å nevne instrumentell og relasjonell forståelse. Dette er begreper som omhandler tankevirksomheten og setter opp et skille innenfor begrepet forståelse.

Skille mellom instrumentell og relasjonell forståelse kommer fra Skemp (1976) som er inspirert av Stieg Mellin-Olsen sin delte betydning rundt begrepet forståelse. Den relasjonelle forståelsen innebærer kunnskap om hva en skal gjøre og en forståelse for hvorfor. Tilsvarende handler den instrumentelle forståelsen i større grad om å vite hva en skal gjøre uten å nødvendigvis vite hvorfor, noe Skemp (1976, s. 2)beskriver som «rules without reason». Instrumentell forståelse innebærer å benytte en algoritme eller metode uten å være bevisst på hvorfor den gir riktig svar.

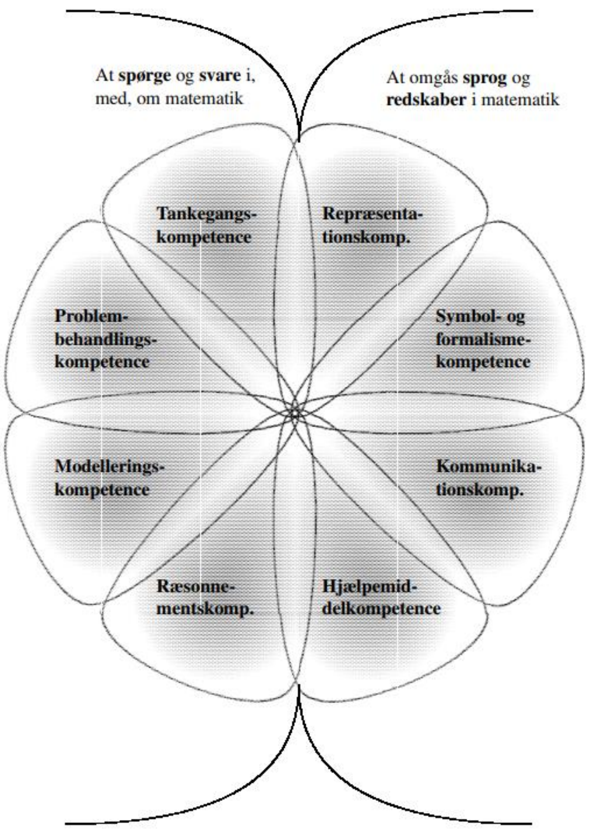
Skemp (1976) skriver at instrumentell forståelse ofte er enklere, løsningene er ofte hurtige og derav vil gevinsten av læringen åpenbare seg raskere. I dette ligger det at kunnskapen er mulig å benytte seg av uten å ha forståelse for mer grunnleggende kunnskap rundt metoden. For eksempel vil man kunne gjennomføre divisjon med brøk dersom man kan algoritmen, selv om man ikke vet hvor metoden kommer fra.

Ofte når elevene jobber med oppgaver gir de utrykk for ulike matematiske kompetanser gjennom at de må kunne benytte seg av flere metoder samtidig, og i slike situasjoner stiller den instrumentelle forståelsen svakt sett opp mot den relasjonelle.

Skemp (1976) utrykker at evnen til å tilpasse seg nye oppgaver er en måte å beskrive relasjonell forståelse på. Gjennom å knytte sammen eksisterende kunnskap innen matematikk, skaper dette en sammenheng mellom ny og gammel kunnskap som kan oppstå gjennom relasjonell læring. Denne prosessen tar for seg en mer omfattende tilegning av kunnskap, ikke bare fordi en må lære hvordan noe skal løses, men hvorfor det er slik. Dette gir samtidig læringen en verdi og derav en mulig vilje fra elevene til videre læring. Da den relasjonelle læringen er knyttet opp mot flere ulike konsepter og tidligere tilegnet kunnskap, vil denne typen forståelse føre til en enklere prosess når man skal anvende forkunnskaper.

2.2.3 Kompetencer og matematiklæring av Niss og Jensen

Rapporten *Kompetencer og matematiklæring*, kjent som KOM-rapporten ble utgitt i 2002 og ledet av Mogens Niss. Matematisk kompetanse blir i rapporten beskrevet som det å ha kunnskap om matematikk samt å forstå, utøve, anvende og å kunne ta stilling til matematikk og matematisk virksomhet i flere ulike sammenhenger. Deres tolkning av matematisk kompetanse er inndelt i to hovedkategorier – *å kunne spørre og svare i og med matematikk*, og *å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper*. De to hovedkategoriene er delt inn i fire undergrupper av ulike kompetanser. De totalt åtte kompetansene som blir presentert utgjør et sett med veldefinerte dimensjoner, som til sammen spenner over matematisk kompetanse (Niss & Jensen, 2002, s. 44).



Figur 1: Illustrasjon av de åtte kompetansene hentet fra s.45 i Niss og Jensen (2002)

For å utdype innholdet i de ulike kompetansene som er presentert i figur 1 vil det nå bli presentert mer utdypende om alle de åtte kompetansene. Først vil hovedkategorien som er å kunne spørre og svare i og med matematikk sine fire kompetanser presenteres.

Tankegangskompetansen er presentert som å kunne utøve matematisk tankegang. Det innebærer å kunne sette seg inn i og være klar over hvilke spørsmål som er karakteristisk for matematikk, samt være i stand til å stille slike spørsmål. Kompetansen består i å kjenne, forstå og håndtere omfanget av gitte matematiske begreper. Samt evnen til å kunne forstå hva som ligger i generalisering av matematiske resultater, og selv kunne generalisere sine egne matematiske resultater (Niss & Jensen, 2002, s. 47).

Problemløsningskompetansen består blant annet i å kunne sette opp, oppdage, formulere, begrense og avklare ulike typer matematiske problemer. Problemene man får kan være åpne og lukket. Et annet trekk ved kompetansen er at den tar for seg å løse et problem på flere ulike måter. Problemløsningskompetansen har flere likhetstrekk med andre delkompetanser, men Niss og Jensen (2002) poengterer at det går noen klare skiller. For eksempel er delkompetansene nært forbundet ved at et spørsmål kan initiere oppstillinga av et problem. Dermed er det å formulere et matematisk problem nært forbundet med det å stille matematiske spørsmål, samt ha oversikt over ulike typer svar på spørsmålene.

Modelleringskompetansen kan deles inn i to deler ifølge Niss og Jensen (2002, s. 52). Den første delen handler om kompetansen til å kunne analysere grunnlaget for, og egenskapene ved en modell. Den andre delen handler om kompetansen til å kjenne igjen og avgjøre modellens rekkevidde og holdbarhet innenfor ulike kontekster.

Resonnementskompetanse inneholder blant annet det å kunne følge og bedømme matematiske resonnement. Det omhandler i hvilken grad man evner å ta stilling til en rekke argumenter, både skriftlige og muntlige, som har til hensikt å grunngi en påstand. Resonnementskompetansen inneholder det å vite og forstå hva matematiske bevis er, og hvordan disse skiller seg fra andre matematiske resonnement. Niss uttrykker «at kunne afdække de bærende idéer i et matematisk bevis, herunder skelne mellem hovedpunkter og detaljer, mellem idéer og teknikaliteter» er det som knytter resonnementskompetansen sammen med bevis (Niss & Jensen, 2002, s. 54).

De neste fire underkompetansene tilhører hovedkategorien som er det å kunne håndtere språk og redskaper innen matematikk, disse vil bli presentert under.

Representasjonskompetansen omhandler det å kunne gjøre nytte av, forstå, fortolke og skille mellom ulike representasjonsformer av matematiske objekt, fenomen eller problem (Niss & Jensen, 2002, s. 56). Representasjonsformene kan være symbolske, visuelle, tabell, verbale eller konkrete. Visuell representasjon kan være grafen til en funksjon. En verditabell laget for en gitt funksjon vil være et eksempel på en tabell som representasjon. Det å forstå sammenhengen mellom ulike representasjoner av det samme matematiske objektet vil inngå i representasjonskompetansen. En må kunne ha kjennskap til ulike representasjonsformer sine svakheter og styrker, samt kunne se når det er hensiktsmessig å bruke en representasjonsform over en annen (Niss & Jensen, 2002, s. 57).

Symbol- og formalismekompetansen går ut på å kunne oversette mellom matematisk symbolspråk og naturlig språk, og om å avkode matematisk språk og symbol. Kompetansen går ut på evnen en har til å behandle og bruke matematiske symbol, uttrykk og formler. Niss og Jensen (2002, s. 58) trekker frem at det å ha innsikt i kjennetegn og spilleregler til det formelle matematiske system er en sentral del av symbol- og formalismekompetansen.

Kommunikasjonskompetansen handler om det å kunne sette seg inn i, samt tolke og forstå matematisk informasjon uttrykt av andre. Informasjonen en kan møte er alt fra skriftlig, muntlig eller visuell. Å kunne uttrykke seg på ulike nivåer av teoretisk eller teknisk presisjon omkring matematikk enten skriftlig, muntlig eller visuelt for sine medmennesker er en viktig del i kommunikasjonskompetansen (Niss & Jensen, 2002, s. 60).

Hjelpemiddelkompetansen er den kompetansen en har når det kommer til kjennskap og innsikt i forskjellige redskaper en kan nytte for å løse en matematisk oppgave. Kompetansen handler om det å ha innblikk i, og en forståelse av muligheter og begrensninger til ulike hjelpemidler. En kan se på geogebra, kalkulator og programmering som hjelpemidler elevene kan anvende for å utvikle sin matematiske kompetanse (Niss & Jensen, 2002, s. 62).

Niss og Jensen (2002, s. 46) kommenterer at det er viktig at deres oppdeling av matematisk kompetanse ikke overfortolkes. Alle kompetansene er nært knyttet til hverandre, noe figur 1 illustrere fint. Man kan observere at alle delene av kompetanseblomsten overlapper og har samme senter. Altså er kompetansene på hver sin side av de to hovedkategoriene knyttet sammen.

2.2.4 Kilpatricks fem tråder av matematisk kompetanse

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) hevder at det innen terminologien ikke finnes en komplett beskrivelse av hva det å mestre matematikk innebærer. Deres begrep «proficiency» er ofte oversatt til kompetanse på norsk. Modellen beskriver fem kognitive endringer som vil føre til at elevene blir kompetent innen matematikk.

Kompetansene illustreres som fem ulike tråder. Videre skrives det at disse fem trådene er vevd sammen, se figur 2. Dette kan tolkes som at de fem ulike kompetansene alle er en del av en større helhet innen det å utvikle seg i matematikk.

Figur 2: Illustrasjon av de fem trådene med ferdigheter hentet fra s.117 i Kilpatrick et al. (2001)

De fem begrepene brukt i Kilpatrick et al. (2010, s. 117) er oversatt med utgangspunkt i NOU-utredningen, NOU 2015: 8 (2015, s. 57) sine oversettinger. Begrepene som videre vil bli brukt er *forståelse* (conceptual understanding), *beregning* (procedural fluency), *anvendelse eller strategisk tankegang* (strategic competence), *resonnering* (adaptive reasoning) og *engasjement* (productive disposition). De fem kompetansene vil nå bli presentert nærmere for å få mer innsikt i hva de ulike inneholder.

Forståelse innebærer innsikt i og av matematiske begreper, operasjoner og relasjoner (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). For mange kan dette høres ut som alt man trenger for å bli god i matematikk. Derfor må det nevnes at hovedvekten i denne tråden er forståelsen av begrepene, operasjonene og relasjonene, ikke for eksempel selve utregningene. Elever med en konseptuell forståelse vet mer enn de isolerte fakta og metoder. Disse elevene forstår hvorfor en matematisk ide er viktig, og hva slags kontekster de er nyttig i. De har klart å organisere sin matematiske kunnskap i en sammenhengende helhet, noe som gjør dem i stand til å lære nye ideer ved å koble ideene til det de allerede vet (Kilpatrick et al., 2001, s. 118). Elevene greier å se sammenhenger mellom de ulike konseptene innen matematikken.

Disse forholdene gjør det lettere for elevene å lære de nye tilleggs kombinasjonene, fordi de genererer ny kunnskap i stedet for å stole på memorering. Konseptuell forståelse er derfor en lur investering som lønner seg for elevene på mange måter (Kilpatrick et al., 2001, s. 120).

Et eksempel som Kilpatrick et al. (2001, s. 120) viser til er ved størrelsesfeil. For eksempel hvis elever multipliserer 9,83 og 7,65 og får 7519,95 som svar, kan elever med konseptuell forståelse umiddelbart se at det ikke kan være riktig. De vet at 10×8 bare er 80, altså må det å multiplisere to tall som er mindre enn 10 og 8 i et produkt være mindre enn 80. Eleven kan da mistenke at desimaltegnet er feil plassert og sjekker utregningen. Fra en slik logikk kan man se at elevene har en dypere forståelse for konseptet multiplikasjon.

Evne til i å utføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig og effektivt går under beregningskompetansen (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Beregning og forståelse blir ofte satt opp til å konkurrere om oppmerksomhet innen skolematematikken. Det å sette dyktighet i beregninger mot forståelse skaper en falsk splittelse. Dette kan kobles opp mot Skemp (1976) sine tanker rundt relasjonell og instrumentell forståelse. En elev med god instrumentell forståelse vil kunne utføre riktige beregninger, selv om eleven mangler forståelse for konseptene bak utregningen. Altså eleven mangler en relasjonell forståelse. Forståelse i sin helhet gjør at matematiske konsepter blir lettere, den gjør at men er mindre utsatt for å begå vanlige feil, og mindre utsatt for å glemme når man jobber med beregninger (Kilpatrick et al., 2001, s. 122).

Om elever lærer beregningsprosedyrer uten forståelse kan det være vanskelig å få dem til å delta i aktiviteter for å hjelpe dem med å forstå årsakene til beregningene de har utført. Uten tilstrekkelig beregningsferdigheter vil elevene ha problemer med å utrykke seg selv matematisk, og deres forståelse av matematiske konsepter vil ikke komme til syne (Kilpatrick et al., 2001, s. 122).

Strategisk tankegang kan sees på som evne til å formulere, representere og løse matematiske problemer (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Denne tråden er tett koblet opp mot det som kalles for problemløsning og problemformulering i matematikken. Elevene må kunne formulere et problem slik at de kan finne matematikken de trenger for å løse det. Strategisk kompetanse innebærer å kjenne til en variasjon av ulike løsningsmetoder, i tillegg til å ha kunnskap om hvilke strategier som vil kunne være nyttig for å løse et spesifikt problem (Kilpatrick et al., 2001, s. 124).

Resonnering går på kapasitet til logisk tankegang, refleksjon, forklaring og begrunnelse (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Forskning antyder at studentene er i stand til å vise resonneringsevne når tre vilkår er oppfylt; De har et tilstrekkelig kunnskapsgrunnlag, oppgaven er forståelig og motiverende, og konteksten er kjent og behagelig (Kilpatrick et al., 2001, s. 130). Samtidig er resonnering viktig med tanke på samfunnskjente spørsmål. Utforskning av et tverrfaglig tema vil kreve resonnering i form av å bryte ned komponentene. Gjennom dette kan elevene vurdere hvilken matematikk de trenger for å utvikle en løsning til problemet.

Engasjement kan sees på som evnen til å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifullt, kombinert med å ha tro på sin egen fremgang i faget (Kilpatrick et al., 2001, s. 116) . Elever som ser på sine matematiske ferdigheter som noe de har og at oppgavene er til for å måle deres evner, og ikke for å gi et læringsutbytte vil mest sannsynlig unngå krevende oppgaver. Dette fordi de ikke har troen på at de kan utvikle sin matematiske kompetanse og vil lett gi opp om de ikke får det til (Kilpatrick et al., 2001, s. 131-132).

Man kan si at komponenten engasjement er det som utvikles om de andre «trådene» eller komponentene styrkes. Har elevene en følelse av mestring vil dette kanskje gi det lille ekstra dyttet man trenger for å gå de ekstra stegene videre i utviklingen av sin matematiske kompetanse.

2.2.5 Oppsummering matematisk kompetanse

Det å inneha matematisk kompetanse identifiseres gjerne ved å ha viten om, å forstå, utøve, anvende og kunne ta stilling til matematikk og matematisk virksomhet i et mangfold av sammenhenger (Røsseland, 2005). Gjennom delkapitlene over er matematisk kompetanse prøvd belyst gjennom to rammeverk. Hvor av Niss og Jensen (2002, s. 45) representer sin tolkning av matematisk kompetanse ved hjelp av to hovedkategorier som har fire underkategorier hver. Illustrasjonen er som en blomst hvor alle kompetansene kommer ut fra samme utgangspunkt.

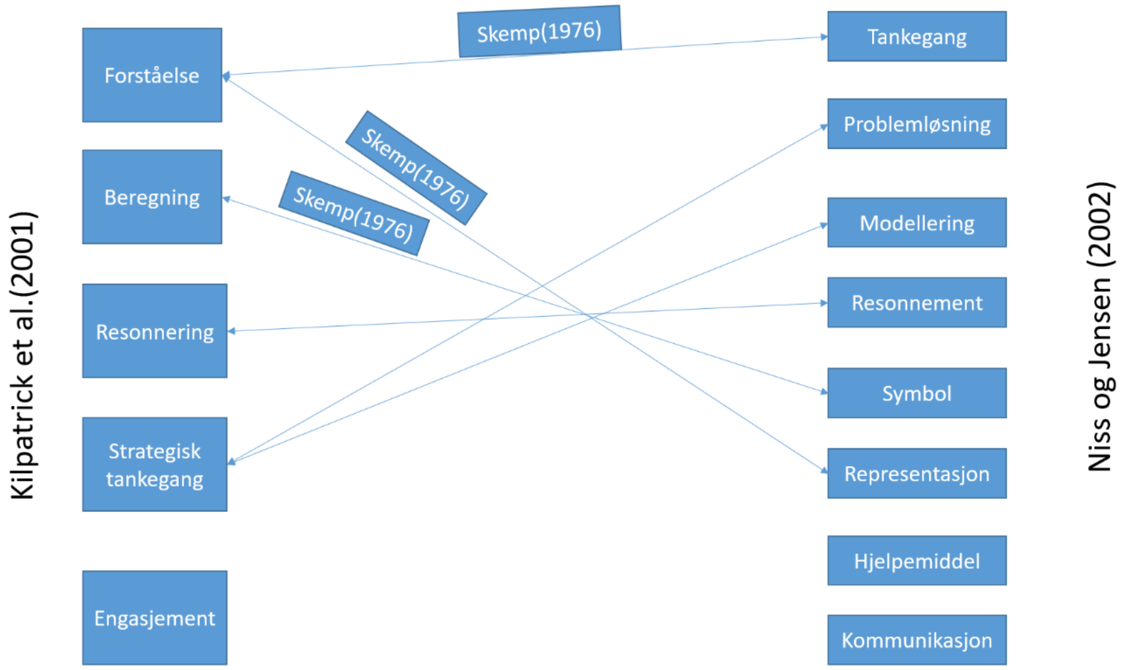
Kilpatrick et al. (2001, s. 115) beskriver her matematisk kompetanse som fem tråder «The Strands of Mathematical Proficiency» som skal illustrere, de fem komponentene av matematisk kompetanse. De fem komponentene er illustrert som et sammenflettet tau. Hver av disse komponentene blir sett på som en del av en helhet hvor de har et tett gjensidig forhold til hverandre.

Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002) beskriver matematisk kompetanse som en sammenheng av flere komponenter og at det er et gjensidig forhold mellom delene. De to illustrasjonene illustrere begge hvordan de ulike delene er tett koblet sammen og viser kompleksiteten ved å besitte, utøve og forstå matematikk.

Det finnes likheter mellom de to rammeverkene. Man kan se at komponentene i Kilpatrick et al. (2001) beskriver, vil overlappe hos flere av de delkompetansene Niss og Jensen (2002) presenterer.

En av elementene som skiller de to modellene som er presentert over er at Kilpatrick et al. (2001) har med en komponent de har kalt for engasjement. Innholdet i denne komponenten skiller seg fra det Niss og Jensen (2002) beskriver som matematisk kompetanse. Kilpatrick et al. (2001) beskriver engasjement som en komponent som utvikles parallelt med at andre matematiske kompetanser styrkes. Utvikler elevene matematisk kompetanse vil dette styrke deres evner til å mestre faget, som igjen vil kunne gi elevene motivasjon. Det kan derfor tenkes at man utvikler engasjement ved å øke sin matematiske kompetanse slik Niss og Jensen (2002) beskriver, men at det nødvendigvis ikke er en forutsetning for å fremme matematisk kompetanse.

Man kan se endel likheter som gjør at man kan trekke paralleller mellom Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002). Samtidig uttrykker de begge at alle komponentene eller delkompetansene ikke er sterkt adskilte, men har et gjensidig tett forhold til hverandre. Under er min tolkning av rammeverkene prøvd å satt i sammenheng, se figur 3. Skemp (1976) sine begreper instrumentell og relasjonell forståelse er to overordnete begreper som tar for seg elevenes kognitive prosesser. Samtidig i denne settingen er det valgt å fokusere på Skemp (1976) sine forståelses begrep opp mot forståelse og beregning når det kommer til kompetanse.



Figur 3: Sammenligning av matematisk kompetanse i de to rammeverkene

Fra figur 3 kan man se at jeg ikke relaterer hjelpemiddel- og kommunikasjonskompetanse direkte til kompetansemodellen til Kilpatrick et al. (2001). Dette er to kompetanser man kan få bruk for sammen med flere andre kompetanser. Hensiktsmessig bruk av kalkulator eller PC, som hjelpemiddel i regningsprosessen, er for eksempel en del av hjelpemiddelkompetansen. Kommunikasjon av matematiske ideer vil både påvirke bruken av strategisk kompetanse og resonnementskompetanse. Hvis man ikke kan kommunisere ideene sine, er det problematisk å forklare sin fremgangsmåte, noe som kan bli nødvendig for å løse en oppgave. Flere av kompetansene som er knyttet sammen er kompetanser som minner om hverandre i de to rammeverkene. Grunnen til at noen av de ikke er koblet sammen er fordi jeg tolker avstanden mellom rammeverkene som litt for store. Begge rammeverkene viser kompleksiteten til matematisk kompetanse, og hvordan flere av komponentene er gjensidig avhengig av hverandre.

2.3 Problemløsning

I denne delen av teorikapittelet vil jeg presentere hva problemløsning er. Deretter vil jeg sette søkelys på problemløsningsprosessen siden det er mest relevant i henhold til problemstillingen. Polya (2004) sine tanker fra *How to solve it*, samt Mason, Burton og Stacey (2010) sin representasjon av arbeidsprosessen ved problemløsingsoppgaver vil bli presentert. Først vil problemløsning presenteres generelt.

Som nevnt utrykket Halmos (1980) at problemer og løsninger er kjernen eller essensen i matematikk. Viktigheten av problemer og deres løsninger gir grobunn for det vi kaller problemløsning. Det finnes mange ulike forskere som har tatt for seg hva et problem er, det mest gjennomgående at et problem gjerne er ulikt avhengig av person til person. Om en oppgave oppleves som et problem er avhengig av personens tidligere erfaringer og utgangspunkt.

Bjørkquist (2001) definerer et matematisk problem så nært betydningen av ordet «problem» i hverdagsspråket som mulig. Det innebærer at det skal være uklart for problemløseren hvilke løsningsmetoder som kan brukes for å løse problemet. Det er viktig å påpeke at problemløsning ikke alltid blir sett på som et mål i seg selv, men kan brukes til å nå andre mål.

Når Solvang (1992) snakker om problemløsning deler han det opp i en definisjon av problem, deretter problemløsning.

Problem:

En utfordring vil for en person være et problem dersom denne personen ikke har noen algoritme som vil gi en løsning når personen konfronteres med utfordringen.

Problemløsning:

Problemløsning er å søke etter de handlinger som en må foreta for å løse et problem.

(Solvang, 1992, s. 137).

Solvang (1992) og Bjørkquist (2001) sine definisjoner på problem ligner på hverandre. Det handler om å bli utfordret med noe man ikke automatisk har en løsning på. En ser ikke løsningen av oppgaven når den blir presentert.

Schoenfeld (2016) presenterte flere tanker elever har om matematikkfaget. For å kunne påvirke elevers tanker og holdninger til matematikkfaget er det viktig å kunne bruke problemløsning aktivt i et klasserom. Stanic og Kilpatrick (1989) identifiserer fem roller for problemløsning.

Det første er en begrunnelse for å lære matematikk. Antagelig vil problem som er relatert til den virkelige verden overbevise elever og lærer at det er behov for å lære matematikk. Som lærer må man sørge for motivasjon, gjerne i oppstarten av nytt tema kan elevene introduseres for et problem som implisitt eller eksplisitt kan motivere for å lære temaet slik at de til slutt kan løse problemet. Rekreasjonelle problem kan virke motiverende, men i tillegg vise at matematikk er gøy. Et problem kan være et middel for å introdusere nye tema og dermed bruke problemet som en kontekst man kan diskutere rundt. Man kan hjelpe elevene å se nytten av å lære nye kunnskaper. Det siste er å anvende problemløsning som øvelse. Gjennom problemløsning kan elever lære nye teknikker som de får øvd seg på ved bruk av problemløsning (Stanic & Kilpatrick, 1989; sitert i Schoenfeld, 2016, s. 5).

Disse fem punktene er noe en kan introdusere for elevene, men kanskje viktigst er det for læreren som en veileder på hvorfor bruke problemløsningsoppgaver. De viser at oppgavene man velger kan fremme ulike aspekter eller kompetanser man ønsker elevene skal sitte igjen med. Er det for motivasjon og engasjement, eller er det for øvelse og beregning?

For læreren kan problemløsning oppleves som utfordrende av flere grunner. Schoenfeld (2016, s. 22) peker på tre hovedgrunner: matematisk, pedagogisk og personlig. Den matematiske utfordringen ved problemløsning kan være at elevene har ulike tilnærminger. På grunn av dette må læreren være forberedt på å forholde seg til at dette kan føre til ulike svar fra elevene. Dette vil føre til mindre fokus på korrekthet og mer fokus på tankene som ligger bak selve løsningen og prosedyren for å komme seg dit. En pedagogisk utfordring for lærer er å vite når man skal gripe inn, samt hvor mye hjelp man kan gi og hva man kan svare på.

Dersom man reduserer oppgavens krav eller overtar oppgaven til eleven og gir dem svaret, er dette et tegn på Topaze-effekten (Winsløw, 2006, s. 148). Her vil lærer prøve å gjøre alt for at eleven skal unngå å ta feil, men det vil føre til en negativ effekt på læringen. En annen pedagogisk utfordring er når det gjelder planlegging av undervisning. Som lærer må man legge til rette for gode oppgaver og rammer som undervisningen skal foregå i. Det kan være viktig å ha i bakhodet at en problemløsningsoppgave for en person, ikke nødvendigvis er en problemløsningsoppgave for en annen. Det blir viktig med tilrettelegging da elevenes matematiske kunnskap ofte er på ulike nivå.

En annen personlig utfordring for lærer kan være at det er ukomfortabelt å ikke vite svaret på oppgaven, siden elevene kan foreta seg ulike vinklinger av løsningen (Schoenfeld, 2016, s. 22). Noe som kan føre til at elevene er de eneste som har full kontroll på deres egen løsning av problemet. Dette kan sette lærer i en situasjon hvor man føler seg sårbar dersom man ikke klarer å hjelpe elevene i deres tankegang. Lærer må da mest sannsynlig bruke mer tid per elev siden elevene har ulike tanker og løser ting på ulike måter.

2.3.1 Polya sine fire faser ved problemløsning

En av de som er mest kjent for sitt arbeid med problemløsning er George Polya. Hans verk *How to solve it* fra 1945 blir gjerne sett på som starten på det fokuset problemløsing har fått iblant annet matematikkdidaktikk.

Når man prøver å finne en løsning, kan man gjentatte ganger endre sitt synspunkt, altså man endrer måten man ser på problemet. Gjerne opplever man at en må utfordre tolkningen sin igjen og igjen. Oppfatningen av problemet vil sannsynligvis være ganske ufullstendig når man starter arbeidet med en oppgave, og denne oppfatningen vil endre seg gjennom hele prosessen når man arbeider med oppgaven. For å systematisere denne oppfatningen og endringen gjennom prosessen delte Polya den inn i fire faser av arbeid. Først må man forstå problemet og samtidig må en tydelig se hva som kreves av for å løse problemet. I den andre fasen må man se hvordan elementene er koblet sammen, hvordan det ukjente er knyttet til de eventuelle dataene, for å så få ideen om løsningen, deretter bruke dette til å lage seg en plan. Den tredje fasen er å gjennomføre planen man laget seg i fase to. Den fjerde, eller siste fasen består av å se tilbake på den ferdige løsningen, gjennomgå og diskuterer den. Hver av disse fasene har sin betydning i løsningen av problemet.

Forståelse av problemet – Understanding the problem

Som nevnt over er det ønskelig at problemet skal forstås. Læreren kan hjelpe og veilede elevene til en viss grad. Elevene skal kunne påpeke de viktigste delene av problemet, altså de ukjente, dataene og betingelsene. Det læreren kan gjøre for å hjelpe elevene på riktig vei er å stille disse spørsmålene; *Hva er den ukjente? Hva er dataene? Hva er betingelsene?* Eleven bør vurdere de viktigste delene av problemet nøye, gjentatte ganger og fra forskjellige perspektiver. Er det en figur tilknyttet problemet bør eleven tegne en figur og påpeke de eller den ukjente og dataene. Elevene må vurdere problemet og dens betingelser. Et siste spørsmål elevene kan stille seg; *Er det mulig å tilfredsstille betingelsene?* Mangler eleven interesse eller forståelse er det ikke nødvendigvis elevens egen feil. Problemet bør velges slik at det er tilpasset elevene, ikke for vanskelig og ikke for lett, naturlig og interessant (Polya, 2004, s. 6-7).

Plan for løsning av problemet – Devising a plan

Veien fra å forstå problemet til å utarbeide en plan kan være lang og kronglete. Å kunne anvende iden når man legger en plan er den viktigste fasen i letingen på løsningen av et problem. Denne ideen kan dukke opp gradvis, eller etter tilsynelatende mislykkede forsøk, og etter en periode med prøving kan det plutselig skje at man får en ide. Læreren sin rolle vil være å hjelpe eleven å stille de riktige spørsmålene og diskutere elevenes tanker og ideer. For å kunne se elevens utgangspunkt bør læreren tenke på sin egen erfaring, vanskeligheter og suksesser i å løse problemer. Det vil kunne tjene læreren å bruke sine egne erfaringer i arbeidet med å hjelpe elevene.

Har eleven lite kunnskap om emnet kan det å lage en plan oppleves veldig krevende, om ikke nesten umulig å få en god ide. Gode ideer er basert på tidligere erfaringer og tidligere tilegnet kunnskap. Det er ofte hensiktsmessig å starte arbeidet med spørsmålet: *Kjenner du et beslektet problem?* Lykkes man med å huske et tidligere problem man har løst som er nært knyttet til det nåværende problemet er man heldig. Spørsmålet er gjerne om man finner et problem; *Her er et problem relatert til ditt og løst før. Kan du bruke det?*

Spørsmålene over kan være til god hjelp, selv om det ikke alltid vil hjelpe. Om spørsmålene ikke hjelper må man se seg om etter andre passende aspekter eller kontaktpunkter. *Kan du gjenta problemet?* Det å lese oppgaven på nytt kan være et godt tiltak. Man kan vurdere om en kan løse et relatert problem først. For eksempel bruk av lignende eksempler eller mindre komplekse oppgaver med samme utgangspunkt. Gode spørsmål som kan bringe oss tilbake til løsningen kan være; *Brukte du alle dataene? Brukte du alle betingelsene?* (Polya, 2004, s. 8-10).

Gjennomføring av planen – Carrying out the plan

De to første fasene av arbeidsprosessen krever gjerne mer enn denne fasen som innebærer å gjennomføre planen. Slik Polya (2004, s. 12) skriver er det man hovedsakelig trenger i denne fasen tålmodighet. En må sjekke alle detaljer opp mot det gjeldende problemet.

Vi kan overbevise oss selv om riktigheten av et skritt i vårt resonnement enten «intuitivt» eller «formelt». Vi kan konsentrere oss om det aktuelle punktet til vi ser det så tydelig at vi ikke er i tvil om at trinnet er riktig. Eller vi kan utlede det aktuelle punktet i henhold til formelle regler.

Hovedpoenget er at eleven skal være overbevist om riktigheten av hvert trinn i løsningen sin. I visse tilfeller kan læreren legge vekt på forskjellen mellom å «se» og «bevise»; *Kan du se klart at trinnet er riktig? Men kan du også bevise at trinnet er riktig?*

Vurdering av løsning – Looking back

Etter løsningen er funnet vil de aller fleste elevene gå videre til neste oppgave. Polya (2004) skriver at gjør man det vil man miste en viktig og lærerik fase av arbeidet. Ved å se tilbake på den ferdige løsningen, gjennom å revurdere resultatet og planen eller strategien som førte til løsningen, vil man kunne utvikle sine evner til å løse problemer. Det er ofte flere muligheter til å videreutvikle løsningen. Da vil man muligens se en mulighet til å forbedre løsningen.

Eleven skal i denne fasen ha gjennomført planen sin. Eleven har skrevet ned løsningen og sjekket hvert trinn. Dermed burde man ha gode grunner til å tro at løsningen er riktig. Feil vil man oppleve at alltid kan ha oppstått, spesielt om argumentet i løsningen er langt og komplisert. Derfor kan det være lurt å stille seg spørsmålene; *Kan du sjekke resultatet? Kan du sjekke argumentet?* For å utvikle løsningen sin kan i tillegg spørsmålet; *Kan du utlede resultatet annerledes?* Man bør foretrekke et kort og intuitivt argument framfor en lang og tung: *Kan du se det med engang?*

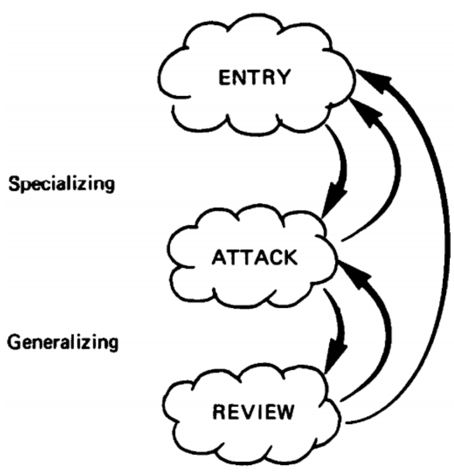
Man kan oppleve at elevene synes det er interessant å se tilbake på løsningen hvis de har gjort en ærlig innsats. Da vil man kunne oppleve at de er ivrige etter å se hva mer de kan oppnå med den oppgaven. Læreren burde oppfordre elevene til å stille seg spørsmålet; *Kan du bruke resultatet, eller metoden, til å se på et annet problem?* (Polya, 2004, s. 14-17).

2.3.2 Mason, Stacey og Burton sine ulike faser ved problemløsning

Mason et al. (2010) tar for seg ulike steg ved oppgaveløsning. Siden problemløsningsoppgaver gjerne ikke har noen klare svar, må en være i stand til å gjøre antagelser, argumentere og reflektere over egne valg og resultater. De har delt det inn i tre hovedkategorier: startfasen, angrepsfasen og anmeldelsesfasen.

Det kan virke som om at angrepsfasen er den fasen som burde være avgjørende siden den omfatter hoveddelen av den matematiske aktiviteten. Imidlertid mener Mason et al. (2010) at det motsatte er tilfelle. De skriver at de fleste klarer ikke å løse et problem tilfredsstillende på grunn av for lite oppmerksomhet til start- og anmelderfasen. Angrepsfasen kan bare gjennomføres hvis oppgaven er forstått og spørsmålet er tilfredsstillende oppgitt. Disse tre fasene utgjør ryggraden for videre diskusjon for å løse ulike spørsmål.

Mason et al. (2010) beskriver prosessen med å håndtere et spørsmål gjennom de tre fasene som en løs inndeling. Det vil være en flytende overgang samtidig som man alltid kan flytte seg mellom fasene. Noen personer starter gjerne rett på den første ideen som de kommer på og skynder seg ut i et forsøk på en løsning uten først å ta seg tid til å kartlegge og vurdere hva som er involvert i oppgaven. Å lære å identifisere disse fasene i din egen tenkning vil gi muligheter til å gjenkjenne passende aktiviteter for den oppgaven man blir stilt ovenfor.



Figur 4:Illustrasjonen viser stegene i en problemløsningsprosess presentert av Mason et al. (2010, s. 26)

Startfasen

Studerer man figur 4 kan man observere at startfasen er en del av spesialiseringen av problemet. Spesialiseringen går på å kartlegge hva som er nødvendig for akkurat den oppgaven som er gitt. Den er så delt inn i tre hovedkategorier. De tre hovedkategoriene presenteres ved ulike spørsmål som kan være til hjelp: *Hva vet jeg? Hva vil jeg? Hva kan jeg introdusere og bruke?* Rekkefølgen på spørsmålene blir ikke vektlagt da tanken er at man legger en plan og velger metode, før man angriper problemet. Under *hva vet jeg* kan man se at det er ønskelig at spørsmålet blir lest grundig, samt om man kan koble det til andre kjente spørsmål. Under *hva* *vil jeg* handler det blant annet om å sortere og klassifisere informasjonen. Til slutt under *hva kan jeg introdusere* kan diagrammer, symboler og notasjon eller lignende som er passende til problemet introduseres. Hvilke metoder man foretrekker kan være individuelt. Man forlater startfasen og går over i angrepsfasen når man har gjort oppgaven til sin egen.

Angrepsfasen

I angrepsfasen vil man enten løse problemet eller forlate det. Mason et al. (2010) bruker ordene «STUCK» og «AHA!» når de snakker om angrepsfasen. Det kan være ulike metoder for å komme videre når man opplever å stå fast.

Den såkalte «stuck-fasen» er en plass man ikke ønsker å være, men gjennom opplevelser av å stå fast kan man lære mye om det problemet man står ovenfor så lenge man aksepterer situasjonen. I flere tilfeller oppdager man kanskje ikke misforståelsen av oppgaven før man har jobbet lenge med problemet. Dette kan skape en negativ mestringsfølelse blant elevene, så det er viktig at lærer gir god veiledning. Lærer kan for eksempel be elevene oppsummere hva som er kjent og målet med oppgaven. Gjennom å presentere spørsmålet i en form som er konkret og inspirerende kan elevene dra nytte av det de allerede har gjennomført. Gjennom å lese oppgaven på nytt eller endre litt på spørsmålet kan man finne alternative tolkninger som kan hjelpe med å løse oppgaven (Mason et al., 2010, s. 46).

Anmelderfasen

Etter man har jobbet seg igjennom angrepsfasen går man over til anmeldelsesfasen som hovedsakelig består av å: (1) sjekke resultatet, (2) reflektere over ideen og gjennomføringen og (3) utvide oppgaven til en større kontekst. Samtidig handler anmelderfasen om å evaluere og utvide problemet til en større kontekst. Ønsket er at elevene generaliserer oppgaven, ser de et mønster, systemer eller algoritmer (Mason et al., 2010). I anmelderfasen kan det være hensiktsmessig å skrive opp eller forklare løsningen til medelever. Ved en slik gjennomgang kan man mest sannsynlig oppdage ideer og utvide forståelsen som kan brukes i andre matematiske problemer.

Mason et al. (2010) påpeker at fasene ikke er tydelig distinkte og at opplevelseskvalitet blir vektlagt mer enn mekanisk aktivitet. Arbeidet i en fase kan lett føre tilbake til en «tidligere» fase eller til en endelig løsning. Ved å lære om egenskaper til ulike faser kan elevene danne seg strategier som kan brukes om man blir stående fast. Dersom disse stegene blir en strategi for elevene, kan elevene unngå mye uproduktiv tenking.

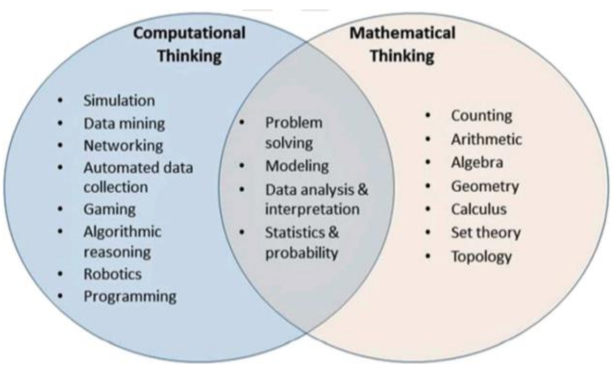
2.3.3 Algoritmisk tenkning

Algoritmisk tenkning er et begrep som de siste årene har blitt mye omdiskutert innen fagdidaktikken. Algoritmisk tenkning er viktig i den nye læreplanen, den blir tilknyttet kjerneelementet utforskning og problemløsning. I den nye læreplanen for matematikk T vg1 står det;

> *«Problemløsing i matematikk T handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før. Algoritmisk tenkning er viktig i prosessen med å utvikle strategier og framgangsmåter for å løse problemer og innebærer å bryte ned et problem i delproblemer som kan løses systematisk.»*
>
> (Utdanningsdirektoratet, 2019, s. 2)

Algoritmisk tenking blir ofte definert likt som det engelske begrepet computational thinking. Ifølge Wing (2006, s. 33) er computational thinking definert som; *«Computational thinking involves solving problems, designing systems, and understanding human behavior, by drawing on the concepts fundamental to computer science.»*

Det som ofte observeres som felles for algoritmisk tenkning i tillegg til problemløsning er generalisering og abstraksjon. Flere av disse aspektene er lett å knytte til de nye kjerneelementene. Algoritmisk tenkning kan knyttes til matematisk tenkning fordi datavitenskap tar utgangspunkt i og er formelt grunnet på matematikk (Wing, 2006). Dette kan man se fra figur 5, se under. Figur 5 er basert på en studie som tar til sikte å se på fellestrekkene mellom algoritmisk tenkning og matematisk tenkning. Problemløsning og modellering er to store tema som begge tilhører de nye kjerneelementene i matematikk. Studien til Shute, Sun og Asbell-Clarke (2017) viser en overlapp mellom matematisk tenkning og algoritmisk tekning ved disse begrepene . Wing (2008) fremhever problemløsning som hovedessensen som kobler computational thinking og matematisk tenkning sammen.



Figur 5:Illustrasjon av fellestrekk ved algoritmisk tenkning og matematisk tenkning hentet fra s.4 i Shute et al. (2017)

Allerede i 2013 begynte industrien å gi signaler på at programmering burde gjøres mer tilgjengelig for alle, og at tanken om at algoritmisk tenkning burde introduseres fikk fart på verdensbasis (Grover & Pea, 2013). Dette kan man observere i Norge gjennom implementering av den nye læreplanen. Nå skal barn fra tidlig barneskolealder få en relasjon til algoritmisk tenkning gjennom blant annet blokkprogrammering, før man går over til skriftbasert programmering senere i skoleløpet.

Grover og Pea (2013, s. 39-40) oppsummerer de elementene de mener utgjør «computational thinking» slik: Abstraksjoner og mønstergeneralisering, systematisk informasjonsbehandling, symbolsystemer og representasjoner, algoritmisk forståelse av kontrollflyt, strukturert dekomposisjon av et problem, å tenke iterativt, rekursivt og parallelt, betinget logikk, effektivitets- og ytelsesbegrensninger, systematisk feilsøking og feilretting.

Utdanningsdirektoratet (2019) fremstiller algoritmisk tenkning med en kobling til problemløsningsmetoder. De skriver at algoritmisk tenkning innebærer å tilnærme seg problemer på en systematisk måte. De skriver at litt forenklet kan man si at det er «å tenke som en informatiker» når man skal løse problemer eller oppgaver. Som viser tilknytningen mellom algoritmisk tenkning og informatikk som fagretning. Utdanningsdirektoratet kunne valgt å knytte algoritmisk tenkning enda tydeligere til matematikk ved å skrive; «å tenke som en matematiker eller en informatiker». Figur 5 viser hvordan dette er knyttet sammen gjennom blant annet problemløsning.

Figur 6:Viser nøkkelbegrep som inngår i algoritmisk tenkning og typiske arbeidsmåter den algoritmiske tenkeren bruker for å løse problemer (Utdanningsdirektoratet, 2019)

Figur 6 som er hentet fra Utdanningsdirektoratet (2019) viser nøkkelbegrepene de har brukt for å beskrive den algoritmiske tenkeren, som igjen gjenspeiler Grover og Pea (2013) sin oppsummering. En viktig observasjon er at algoritmisk tenkning ikke bare er noe man gjør når man jobber med selve programmeringen, det er en prosess som kan bruke et programmeringsspråk som hjelpemiddel, men nødvendigvis ikke trenger det. Algoritmisk tenkning kan handle like mye om tankegangen og prosessene før man starter med selve programmeringen.

Algoritmisk tenkning er viktig i prosessen med å utvikle strategier og framgangsmåter for å løse problemer og innebærer å bryte ned et problem i delproblemer som kan løses systematisk. Videre innebærer det å vurdere om delproblemene best kan løses med eller uten digitale verktøy. Problemløsing handler i tillegg om å analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om løsningene er gyldige.

2.3.4 Oppsummering problemløsning og problemløsningsprosessen

Gjennom de siste delkapitlene har problemløsning og problemløsningsprosessen blitt presentert. Et matematisk problem ble presentert som så nært betydningen av ordet «problem» i hverdagsspråket som mulig. Det innebærer at det skal være uklart for problemløseren hvilke løsningsmetoder som kan brukes for å løse problemet. Det er viktig å påpeke at problemløsning ikke alltid blir sett på som et mål i seg selv, men kan brukes til å nå andre mål. Dette kan kobles opp mot algoritmisk tenkning siden problemløsning kan være veien til å utvikle den algoritmiske tenkeren i seg selv. Figur 5 fra Shute et al. (2017) tydeliggjorde overlappen mellom algoritmisk tenking og problemløsning. Eller en kan se på det som Utdanningsdirektoratet (2019), at man velger å beskrive algoritmisk tenkning som en problemløsningsmetode. Uansett hvilken vinkling en velger vil sammenhengen mellom problemløsning og algoritmisk tenkning alltid være til stede. Derfor vil man gjennom bruk av gode problemløsningsoppgaver kunne utvikle elevens problemløsingskompetanse, samt deres evne til å tenke algoritmisk.

Jobber man med problemløsingsoppgaver går man naturlig over i det jeg har valgt å kalle problemløsningsprosessen. De to teoriene som belyser problemløsningsprosessen som er presentert over er Polya (2004) og Mason et al. (2010). En kan koble startfasen opp mot forståelse av problem og legge en plan. Samtidig som gjennomføring av problemet og angrepsfasen begge omhandler å matematisk løse ut problemet. Til slutt har man anmelderfasen og det å se tilbake som begge omhandler refleksjoner rundt problemet og ens mulighet til å videreutvikle oppgaven til en større kontekst, altså generalisere. De to teoriene omhandler ikke problemet, men selve gjennomføringen av å løse en problemløsningsoppgave. Begge teoriene poengterer at det ikke er en gitt rekkefølge og at man gjerne beveger seg mellom fasene gjennom prosessen ved å løse en problemløsningsoppgave.

Studerer man figur 6 er det listet opp ulike arbeidsmetoder for den algoritmiske tenkeren. Utdanningsdirektoratet (2019) skriver at å gjøre feil underveis er en viktig del av prosessen når man løser en oppgave, og den algoritmiske tenkeren må ha strategier for å oppdage at noe er feil og rette feilene. Gode løsninger oppstår ikke ut av intet, og samarbeid og deling er derfor viktig i arbeidet for den algoritmiske tenkeren. Dette kan kobles opp mot tankene rundt problemløsning og viser igjen den nære tilknyttingen mellom begrepene.

3.Metode

I dette kapitelet vil jeg presentere metoden jeg har valgt å bruke i tilnærmingen til datainnsamlingen. Gjennom kapittelet presenterer jeg alle vurderinger som er tatt og hva som er blitt diskutert. Det blir belyst hvordan forarbeid, gjennomføringen og etterarbeid av datainnsamlingen ble gjennomført. Datainnsamlingen ble gjennomført i samarbeid med medstudent Emilie Lillehagen Brenden. Valget om å samle inn datamaterialet sammen ble gjort for å redusere arbeidsmengden og samtidig gi muligheten for å kunne spille på hverandres arbeid med datamaterialet selv om vi skriver to ulike prosjekter. Samarbeidet ga oss en ekstra trygghet i det å ha en støttespiller gjennom en prosess som var ny for begge. Siden alle avgjørelser angående datainnsamlingen er et samarbeid, er det i det følgende naturlig å bruke «vi»-form.

3.1 En kvalitativ tilnærming

For å kunne si noe om tilnærmingen gjort i denne oppgaven er det viktig å si hva metode innebærer. En metode kan forstås som et verktøy vi kan bruke for å kunne observere virkeligheten (Bjørndal, 2011). Mennesker har alltid hatt en fascinasjon av å prøve å forstå virkeligheten rundt seg, noe som blant annet har ført til store vitenskapelige fremskritt. Studier starter ofte ved at man identifiserer et problem eller tematikk man ønsker å studere. Etter å ha identifisert problemet eller tematikken ønsker man å samle inn data som er relevante for å studere problemet (Creswell, 2002).

Begrepet «forskning» er vidt, men forskning deles gjerne inn i to hovedgrupper, basert på hva som brukes som data: kvalitative- eller kvantitative data. Tilsvarende skiller vi mellom kvalitative og kvantitative forskningsmetoder. Ifølge Bjørndal (2011) er det som spesielt skiller kvalitative og kvantitative forskningsmetoder, hvordan man forholder seg til tall. Forskere som bruker kvantitative metoder er gjerne opptatt av presis tallfesting av data fra et stort utvalg. Den kvalitative forskeren søker på den andre siden å nærme seg en dypere forståelse av det som skal studeres, med utgangspunkt i for eksempel dybdeintervjuer av et lite utvalg deltakere. Det finnes forskere som benytter seg av såkalte mixed-methods, altså som bruker en blanding av kvalitative og kvantitative data. Etter diskusjoner med min medstudent falt vi på at våre tema og midlertidige problemstillinger best kunne diskuteres ved å samle inn kvalitative data. Vi ønsket å få et innblikk i elevenes verden og mente dette best lot seg gjøre gjennom kvalitativ metode.

Målet med kvalitativ forskning er *å få tak i*, samt *å prøve å forstå* andre menneskers handlinger, meninger, tanker, kunnskaper, følelser og opplevelser. Vi vil ha tak i og tilgang til forskningsdeltakerens livsverden (Kvale & Brinkmann, 2015). Man samler inn datamateriale og konstruerer det i stor grad i samspill med forskningsdeltakerne. Kvaliteten på dette materialet er i stor grad avhengig av forskerens kommunikative og mellommenneskelige ferdigheter. Det innebærer evnen til å etablere kontakt, skape en atmosfære av tillit og utvikle gode relasjoner (Nilssen, 2014, s. 30).

I forskning som foregår i samfunnet, og det inkluderer forskning i skolen, benyttes gjerne samfunnsvitenskapelig metode (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 16). Tilnærmingen gjennomført i denne studien er en blanding av fenomenologisk og hermeneutisk tilnærming. Både fenomenologiske og hermeneutiske studier legger vekt på fortolkning og forståelse av hvilken mening som knytter seg til ulike handlinger.

Tjora (2012) beskriver det å være opptatt av hvordan fenomener og situasjoner oppleves vil gå under fenomenologi. Utgangspunktet for fenomenologiske analyser beskriver Grønmo (2004) som en beskrivelse eller forståelse av virkeligheten slik aktøren selv oppfatter den. I denne studien er aktørene elever som deltar i prosjektet. Det er elevenes egen opplevelse av fenomenene, eller elevenes livsverden, som legges til grunn for analysen. Eller mer presis elevenes opplevelse slik den blir fortolket gjennom analyse og drøfting. I tillegg vil vi som forskere være opptatt av å få innsikt i elevenes erfaringer, opplevelser og oppfatninger i en mer generell forstand, slik at intensjonen med den enkelte handling kan settes inn i en større sammenheng. Grønmo (2004) tar videre utgangspunkt i at hermeneutiske analyse vil innebære en forståelse av elevenes og deres handlinger som deler av en mer omfattende helhet enn kun deres egen opplevelse.

Siden denne studien er begrenset av flere faktorer som blant annet kjennskap til elevene og deres livsverden, vil også analysen være begrenset og dermed innebære et fenomenologisk syn sammen med et hermeneutisk syn.

3.2 Datainnsamling

Etter at valget hadde falt på en kvalitativ tilnærming var det flere valg og aspekter som måtte vurderes. Vi ble enige om å ha et elevsentrert fokus for datainnsamlingen. Det var ønskelig å tilpasse datainnsamlingen slik at vi begge fikk mest mulig grunnlag for å kunne utforske våre individuelle problemstillinger og tema.

3.2.1 Utvalg og kontekst

Vi tok utgangspunkt i en problemløsningsoppgave innen sjangeren «figurtall», med et innslag av programmering som hjelpemiddel. Vi ønsket at elevene skulle sitte i grupper på to elever slik at de kunne diskutere oppgaven. Oppgaven skulle gjennomføres utenfor klasserommet. Dette fordi vi lettere kunne sette søkelys på elevene og at elevene ikke skulle bli distrahert. Som forskere må vi ta hensyn til hvordan fenomenet som studeres kan bli påvirket av vår tilstedeværelse, og til en viss grad om hvordan vi blir påvirket av vårt forskningsfokus (Nilssen, 2014, s. 31). Vi ble enige om at selv om vi tok elevene ut av klasserommet og samtidig valgte å være til stede ville dette gagne datainnsamlingen. Grunnet begrenset tid var vi avhengige av at lydopptakene ble tydelige og at elevene jobbet med ønsket oppgave. Dette var lettere å følge opp med en liten gruppe elever på et grupperom enn i et stort klasserom. Det var i tillegg begrensinger med tanke på å gjennomføre skjermopptak med hensyn til personvern.

I den videregående skolen er det mest naturlig å bruke skriftbasert programmering, heller enn grafisk basert programmering. Elevene som går vg1 i skoleåret 2020/2021 skal ha fått kjennskap til det skriftbasert programmeringsspråket Python gjennom blant annet matematikkundervisningen(Utdanningsdirektoratet, 2020). Vi hadde selv kjennskap til dette programmeringsspråket, noe som gjorde det lettere for oss å bruke dette i oppgaven. Vi kontaktet ulike skoler og fikk tilgang til elever fra en 1T-klasse ved en videregående skole i Vestland fylke. Elevene deltok frivillig, siden de ble tatt ut av vanlig undervisning for å delta i prosjektet.

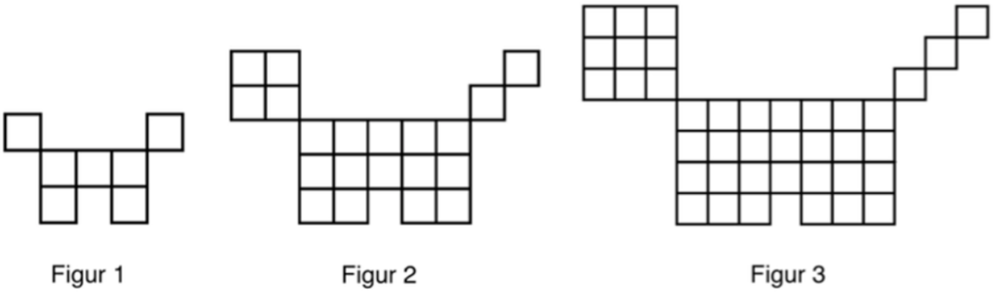
Siden en del av oppgaven inkluderte programmering, valgte vi å gjennomføre skjerm- og lydopptak av gjennomføringen. Det ble på slutten tatt et valg om å sette opp kamera bak elevene for å få et godt overblikk over situasjonen. Bjørndal (2011, s. 113) skriver at lydopptak vil være nyttig for en observatører siden man kan observere mer enn en gang gjennom å høre på datamaterialet. Selve innsamlingen vil kunne oppleves som mindre krevende siden man ikke må notere og observere alt til minste detalj. Ved bruk av et kamera bak i grupperommet fikk vi mulighet til å i ettertid ha et godt bilde av gjennomføringen.

Samtidig har lydopptak sine svake sider, lydopptakeren kan påvirke de tilstedeværende mer enn en vanlig observatør. Det å bruke lydopptak kan medføre at man som observatør blir mindre åpen for å observere og forstå sammenhenger i komplekse interaksjonsprosesser (Bjørndal, 2011).

3.2.2 Utforming av oppgaver

Gjennom arbeidet med å utforme en oppgave som elevene skulle arbeide med under datainnsamlingen møtte vi på flere utfordringer. Vi ble veldig bevisst da vi skulle prøve å utforme oppgaven til datainnsamlingen, at det ikke finnes en perfekt oppgave som dekket alt. Gjennom denne prosessen ble vi veldig klar over at oppgaver fremhever ulike elementer. Det ble mye prøving og feiling for å finne en passende oppgave. Gjennom diskusjoner med veiledere ble vi mer bevisst hva ulike oppgaver gjør og hvilket handlingsrom vi ønsker å gi elevene med oppgaven. Tjora (2012) skriver at en viktig del av forberedelsen til datainnsamlingen er å sørge for at arbeidssituasjon mest sannsynlig vil produsere data som kunne besvare problemstillingen i prosjektet.

Etter flere innholdsrike diskusjoner landet vi på en oppgave som vi antok ville bli opplevd som en problemløsningsoppgave for elevene. For å prøve å få et innblikk i elevenes matematiske kompetanse var det viktig at oppgaven forble åpen slik at den ga rom for at elevene kunne diskutere og dermed gi utrykk for ulike former for kompetanse. En problemløsningsoppgave er noe som vil variere fra person til person, noe som ble utdypet i teorikapittelet. Hva en person opplever som et problem er avhengig av det personen kan fra før. Siden vi ikke hadde kjennskap til elevene, ble oppgaven først sendt til faglærer før den endelige oppgaven ble bestemt. I figur 7 er oppgaven presentert.



a) Ser dere et mønster? Hva er endringen fra en figur til neste?
b) Bestem et uttrykk for antall kvadrater i figur n. (forklar formelen)
c) Lag et program som tar et input n og skriver ut antall kvadrater i figur n.
   Eksempel: Programmet kan se slik ut for en figur som er formet som et rektangel, med input 2:

```
Formelen for figur n er: n*(n+1)
For hvilken n vil du finne figurtallet? n-verdi:2
Figur 2 har 6 kvadrater
```

Figur 7: Oppgaven brukt i datainnsamlingen

Studerer vi mønsteret gitt i oppgaven kan en observere at det ligner på en hund eller katt. Det ble gjort et valg om å ikke be elevene regne ut antall kvadrater i neste figur, altså figur 4, i oppgave a. Istedenfor ble de bedt om å beskrive et eventuelt mønster eller en endring. Dette valget ble gjort for å prøve å holde oppgaven mest mulig åpen. Den siste delen på denne oppgaven var å anvende formelen de hadde funnet i deloppgave b i Python. Det ble gitt et eksempel på output for å hjelpe elevene å se hvordan vi hadde tenkt programmeringen. Eksemplet ble vedlagt oppgaven siden elevene ikke hadde veldig mye programmeringskunnskap ifølge faglærer, samt vi tenkte det kunne være avklarende med tanke på målet med oppgaven. I tillegg til oppgaven presentert i figur 7 ble elevene gitt to oppgaver til. Disse oppgavene ble etter datainnsamlingen sett på som ikke-relevante for prosjektet. De er imidlertid vedlagt i vedlegg 1.

3.2.3 Dokumentasjon av datainnsamling

En forsker må gjennom hele forskningsprosessen forholde seg til etiske hensyn, dilemmaer og betraktninger (Nilssen, 2014). Dette prosjektet ble meldt til Norsk senter for forskningsdata (NSD) for å få godkjenning til å bli gjennomført. NSD anså prosjektet til å være i samsvar med gjeldende personvernlovgiving. Samtykkeskjemaet er vedlagt i vedlegg 2. Nilssen (2014) skriver at gjennom informert samtykke sikrer man at deltakerne deltar frivillig og er godt informert om hensikten med forskningen. Deltakerne skal være informert om aktivitetene de vil være involvert i. Alle deltakerne i prosjektet fikk utlevert et informasjonsskriv hvor de måtte signere på at de ønsket å delta, samt at de til enhver tid kan trekke seg fra prosjektet.

Som forsker må man engasjere seg i etisk praksis gjennom hele prosessen. Det å gjennomføre etiske hensyn er en kompleks sak som innebærer mye mer enn bare å følge et sett med retningslinjer. Creswell (2002) poengterer at etikk skal være et primærhensyn snarere enn en ettertanke, og den bør være i forkant av forskerens agenda. Det ble gjennom hele prosjektet prøvd å etterstrebe, gjennom informasjon og kryptering av sensitiv informasjon.

3.2.4 Gjennomføring av datainnsamling

Datainnsamlingen ble gjennomført med fem elever. Planen var i utgangspunktet å ha seks elever fordelt på tre grupper, men siden en elev ikke møtte ble det en gruppe på tre og en gruppe på to elever. Elevene ble tatt ut av klassen for å sitte på et grupperom. Der fikk de først informasjon om prosjektet og om deres deltakelse, før gjennomføringen av oppgaven startet. Fra dette øyeblikket ble skjerm- og lydopptak satt på, samt en video fra bak i grupperommet. På videoen kan man observere skjermen og hvordan elevene bruker oppgavearket og papir under aktiviteten. Siden det ble en gruppe mindre enn ønsket kunne vi begge observere gruppene sammen, noe som ble en støtte gjennom videre arbeid med prosjektet. Vi satt bak elevene slik at de ikke «så» oss når de jobbet med oppgavene. Dette for å prøve å være minst mulig tydelig for elevene under gjennomføringen av økten.

Elevene fikk beskjed om at de kunne stille spørsmål, likevel gjorde vi det tydelig at vi ikke ville gi de løsningen på oppgaven før etter vi var ferdig. Hint kunne bli gitt om ønskelig. Det ble sagt at det var ønskelig at de tenkte og diskuterte høyt. Begge gruppene spurte om å bruke læreboken i løpet av arbeidet, noe de fikk lov til. Det virket som boken ble hovedsakelig brukt til arbeidet med programmeringen.

Gruppen på tre elever holdt på i ca 1 time og 30 min, hvorav to av elevene var veldig involvert og den siste ikke deltok. Denne gruppen vil bli henvist til som gruppe 1. Den andre gruppen jobbet med oppgaven i ca 45 min, hvor det var en elev som var mer delaktig enn den andre. Denne gruppen blir henvist til som gruppe 2.

Etter gjennomføringen var vi fornøyd med det vi hadde fått samlet inn av data, selv om vi «mistet» en gruppe. Vi diskuterte om vi mente vi hadde nok datagrunnlag til å besvare våre individuelle problemstillinger. Det kunne vært nyttig å samle inn data fra en til to grupper til, men grunnet Korona og tidsaspektet ble ikke dette prioritert.

3.2.5 Transkribering

Siden vi begge ønsket å bruke kategorisering eller koding av datamaterialet ble det valgt å transkribere alle lydopptakene. Lydopptakene ble fordelt mellom oss for transkribering. Vi ble enige om et system for hvordan vi ønsket å gjennomføre transkriberingen, uavhengig av dette vil transkripsjonen være farget av hva den som gjennomførte den synes er viktig. Dette kan ha påvirket hvordan ting er blitt tolket i analysedelen. Overgangen fra lyd til tekst vil aldri bli helt nøyaktig, da man må tolke og analysere observasjonene gjennom teksten (Nilssen, 2014). Transkripsjonene var planlagt å bli gjennomført på bokmål med oppdiktede navn slik at elevene ikke kan gjenkjennes. Elevene på gruppe 1 ble da Andreas, Ole og Jens, mens gruppe 2 besto av Lars og Martin. Det ble tidvis fraveket å skrive på bokmål siden det var lettere å transkribere mer ordrett hva som ble sagt. Siden språket ikke er hovedfokus i forskningsspørsmålet, vil ikke dette påvirke oppgaven. En utfordring ved å kun analysere samtaler som er gjort om til tekst, altså transkripsjonene, er at man ikke får med seg elevenes tonefall og kroppsspråk når de prater (Nilssen, 2014). Siden vi var til stede under gjennomføringen og det ble filmet fra bak elevene kunne vi prøve å fylle inn «tomrommet» i transkripsjonene, samtidig vil personlige observasjoner være farget av egen tolkning av situasjonen.

Tabell 1: Forklarende innhold tilhørende tegn brukt i transkriberingen

Tegn	Betydning
-	Betyr kort pause i et sekund ellet to, eller at elevene stopper å snakke midt i en setning
--	Betyr lengre pause mer enn 2-3 sekunder
…	Betyr ord en ikke kan høre godt nok til å transkribere
/	Når en avbryter en annen så denne slutter å snakke og den som avbryter overtar
( )	Beskrivelse av situasjon eller ting en ser eller forstår fra observasjon eller video
< >	Kommentar til teksten eller annet
[ ]	Markerer kodene brukt i analysen

3.2.6 Forskningens kvalitet

Når man arbeider med en studie sitter man gjerne med et ønske om at den skal være av god kvalitet. En ønsker at studien man utarbeider har troverdighet og at andre har mulighet til å kvalitetssikre arbeidet. Ofte blir reliabilitet, validitet og generaliserbarhet brukt som indikatorer på kvalitet. Det vil være et skille mellom kvalitetstegn innen kvalitativ og kvantitativ forskning. Nilssen (2014, s. 137) poengterer at innen kvalitativ forskning vil forskerens bakgrunn og tolkninger av ulike situasjoner påvirke analysen. Gjennom aktivt å prøve å holde studien objektiv og åpen, samt en bevissthet for egen forskning vil det kunne sikre studiens troverdighet. Det er ønskelig at leseren kan etterspore prosessen (Nilssen, 2014, s. 137).

Tjora (2012) knytter gyldighet (validitet) til om svarene forskeren finner i studien, faktisk er svar på de spørsmålene som er forsøkt stilt i studien. For å styrke denne studiens gyldighet er datamaterialet diskutert og gjennomgått med medstudent og veileder gjennom prosjektets varighet. Gjennom prosjektet har det hele tiden blitt jobbet mot å holde fokuset rettet mot oppgavens problemstilling.

Tjora (2012) skriver at forskeren kan styrke gyldigheten ved å være åpen om hvordan forskningen er praktisert, samt ved å redegjøre for de valg forskeren har tatt når det gjelder for eksempel datagenereringsmetoder og teoretiske innspill til analysen. Helt til slutt vil det likevel være metodisk treffsikkerhet med utgangspunkt i problemstillinger og forskningsspørsmål som veier tyngst med tanke på gyldighet. Altså vil sammenhengen mellom forskningsspørsmål og teori knyttet opp mot datamaterialet være viktige faktorer for studiens gyldighet. Gjennom dette metodekapitlet er det prøvd å gjøre rede for hvordan prosjektet er planlagt og gjennomført.

Validiteten til transkripsjoner kan avgjøres av objektiviteten til oversettelsen fra tale til tekst, men dette er komplisert ettersom det ikke finnes én riktig måte å transkribere på (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 212). Transkripsjonene er gjennomgått av min medstudent og meg selv. Dette ble gjort bevisst for å prøve å gjøre overgangen fra tale til tekst mest mulig objektiv.

Studiens reliabilitet, også referert til som pålitelighet kan bli påvirket av flere faktorer. Tjora (2012) skriver at forskeren gjerne vil ha et engasjement i temaet det skal forskes på. Dette engasjementet kan oppfattes som en ressurs så lenge den ikke blir misbrukt, da blir det gjerne sett på som støy. Om engasjementet skal kunne utnyttes som en ressurs er det viktig at man i analysen er eksplisitt. Da man i en kvalitativ studie forsker på mennesker, kan en sjeldent gjennomføre datainnsamlingen på akkurat samme måte en annen gang (Nilssen, 2014, s.141).

Dette gjør at man som forsker må være veldig beskrivende og objektiv i analysen. Det er viktig å gjøre rede for hvordan sin egen posisjon kan påvirke forskningen.

For å styrke prosjektets pålitelighet var det viktig å reflektere over om man har noe til felles med informantene, eller om man har spesiell kunnskap, engasjement, og hvordan slikt kan ha påvirket tilgangen til feltet, utvalget, datagenering, analyse og resultater. Tjora (2012) skriver et spørsmål som gjerne brukes for å teste en studies pålitelighet innen forskning er: *Ville resultatene blitt det samme dersom en annen forsker gjorde den samme jobben?* Dette betyr ikke at resultatene blir nøyaktig de samme, men at man kan finne tydelige skiller om hvor de ulike forskerne har tolket ulikt. Det ble hele tiden gjort valg som skulle tydeliggjøre skille mellom oss som forskere og elevene som gjennomførte økten. Valget om lite interaksjon med elevene var grunnet i å opprettholde påliteligheten i elevenes arbeid uten for mye påvirkning fra oss.

Generaliserbarhet er noe som gjerne skjer spontant i hverdagen. Tjora (2017) skriver at i enkelte studier ser man bort fra temaet generalisering. Målet med studien kan handle om å gå i dybden i et spesifikt problemområde hvor det situasjonsbestemte møtet mellom forsker og informant eller informasjon knyttet til det spesifikke studiet ikke er ønskelig å generalisere. I enkelte studier kan målet være å belyse et konkret problem heller enn å utvikle innsikt som går ut over det helt spesifikke tilfellet.

Det kan argumenteres for at avgrensede casestudier, som ikke eksplisitt drøfter et generaliseringspotensial, kan ha forskningsmessig nytte, fordi andre forskere i sin lesning kan teste studiens gyldighet. Det kan tenkes at naturalistisk generalisering kan være mulig om metoden er så detaljert forklart at leseren kan vurdere gyldigheten opp mot egne caser og vurdere om funnene som er gjort kan gjelde for sitt eget studie. Det at naturalistisk generalisering overlater til leseren å avgjøre om forskningen er gyldig kan være problematisk når forskningssamfunnet er enige om at generalisering er et av målene med forskning (Tjora, 2017).

Målet med studien var å belyse noen elevers gjennomføring av en problemløsningsoppgave og studere deres matematiske kompetanse og algoritmiske tenkning ved bruk av programmering som hjelpemiddel. For denne studien vil det være snakk om naturalistisk generalisering. Den enkelte leser må avgjøre gyldigheten knyttet opp til sitt bruk av funnene. Likevel er det ønskelig at man som lærer kan lære av funnen selv om det ikke er noe garanti for generaliserbarhet.

3.3 Analyseverktøy og koding

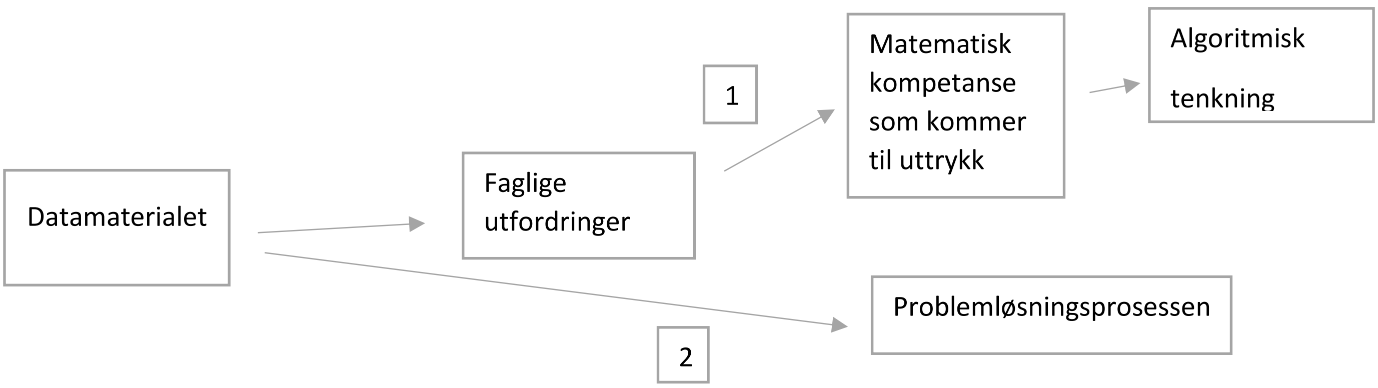
Prosjektets problemstilling lyder som; *Hvilken matematisk kompetanse kom til uttrykk i samtaler mellom elever som har arbeidet med en problemløsningsoppgave med programmering som hjelpemiddel?*

For å spisse oppgaven ble det etter datamaterialet var transkribert gjort et valg om å gå induktivt inn i datamaterialet, dette for å se etter utfordringer elevene møtte i oppgaven. Valget ble tatt fordi datamaterialet ga store mengder data, inkludert data som ikke er relevant for analysen. Etter å ha funnet elevenes utfordringer ble det gjennomført en datareduksjon for å skille de faglige utfordringene fra de ikke-faglige utfordringene. Dette ble utgangspunktet for analysen med tanke på matematisk kompetanse. Det var et ønske om å studere problemløsningsprosessen nærmere. Derfor ble problemstillingen videre delt opp i to forskningsspørsmål for videre analyse.

1. *Hvilke matematiske kompetanser kom til uttrykk når elevene møtte utfordringer i sitt arbeid. Kan man observere spor av algoritmisk tenkning i elevenes tankegang?*
2. *Hvordan arbeider elevene med oppgaven med utgangspunkt i en problemløsningsprosess?*

Det første forskningsspørsmålet tar utgangspunkt i det reduserte datamaterialet. Datamaterialet ble organisert gjennom koding basert på Kilpatrick et al. (2001) sin inndeling av matematisk kompetanse. Å kode innebærer her å utarbeide kjennetegn som identifiserer elevenes matematiske kompetanse. Når de faglige utfordringene var kodet etter matematisk kompetanse, ble det sett etter spor av algoritmisk tenkning. Fra figur 6 kan man se flere nøkkelbegreper på hva det innebærer å være en algoritmisk tenker. Fra nøkkelbegrepene er det prøvd å se om elevene utrykker algoritmisk tenkning knyttet til de faglige utfordringene.

Videre ble det sett på problemløsningsprosessene til de to gruppene. Da er hele datamaterialet brukt for å prøve å få et helhetlig bilde av situasjonen. Mason et al. (2010) deler problemløsningsprosessen inn i tre deler, hvor hver del har flere aspekter. Det ble sett etter tegn fra teorien til Mason et al. (2010), om hvor elevene befant seg eller arbeidet i forhold til start-, angreps- og anmelderfasen. Dette ble gjennomført som en grovinndeling for å skape et bedre bilde av elevenes gjennomføring av oppgaven. Det ble valgt å gå direkte inn i datamaterialet for å kode etter de ulike delene av problemløsningsprosessen. Figur 8 viser analysearbeidet. Pilene indikerer hva som har vært stegene gjennom prosessen fra hele datamaterialet til funnene basert på forskningsspørsmålene.



Figur 8: Illustrasjon av analyseprosessen

For det første forskningsspørsmålet ble kodene basert på Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder for kompetanse brukt sammen med en kode som ble kalt *ikke matematisk*. Den ikke matematiske koden ble utformet på bakgrunn av datamaterialet. Dette siden det var en del elementer tilhørende programmeringen jeg mener ikke omhandler elevenes matematiske kompetanse. Det ble gjort litt tilpasninger på definisjonene fra teorien. For tolkningen brukt i analysen se tabell 2 under.

Tabell 2: Forklaring av kodene brukt for å kode etter elevenes matematisk kompetanse inspirert av Kilpatrick et al. (2001)

Begrep	Kode	Innhold
Forståelse	F	Denne koden innebærer forståelse av matematiske begreper, operasjoner og relasjoner. Koden inneholder i tillegg elevenes egen forståelse av oppgaven.
Beregning	B	Beregning handler om å utføre prosedyrer fleksibelt, nøyaktig og effektivt innen kalkulasjoner. Denne koden inneholder også tellinger gjennomført.
Anvendelse eller strategisk tankegang	S	Strategisk kompetanse innebærer å kjenne til en variasjon av ulike løsningsmetoder, i tillegg til å ha kunnskap om hvilke strategier som vil kunne være nyttig for å løse et spesifikt problem. Denne koden er også brukt hvor det oppleves at elevene legger en plan for hvordan de skal løse oppgaven.
Resonnering	R	Resonnering går på kapasitet til logisk tankegang, refleksjon, forklaring og begrunnelse.
Engasjement	E	Engasjement kan sees på som evnen til å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifullt, kombinert med å ha tro på sin egen fremgang i faget. Engasjement blir i tillegg sett på som innlevelse og tilknytning til oppgaven.
Ikke matematisk	I	Innhold som ikke kan kategoriseres innenfor noen av kategoriene ovenfor.

For det andre forskningsspørsmålet ble det tatt utgangspunkt i kodene gitt i tabell 3. Kodene tar utgangspunkt i de ulike fasene ved problemløsning fra Mason et al. (2010), men vil bli henvist til med begrepene fra tabell 3. Denne kodingen ble så gjennomført på hele datamaterialet.

Tabell 3: Oversikt over begrep, koder og innhold fra Mason et al. (2010) hentet fra teorikapittelet

Begrep	Innhold
Startfasen	Tolker, leser og forstår oppgaven.
Angrepsfasen	Prøver å løse oppgaven fra det man lærte i startfasen.
Anmelderfasen	Sjekker resultatet, reflekterer over ideen og gjennomføringen, og kan utvide til en større kontekst.

Da datamaterialet for de to gruppene var kodet ble det prøvd å lage en figur av arbeidet inspirert av Schoenfeld (2016, s. 24). Figuren er presentert i analysen i kapitel 4, den ble laget fra antall linjer kodet for hver fase. Når kodingen var gjennomført ble antall linjer i en fase telt opp. Etter dette ble hver fase sammenlignet med totalt antall linjer i transskripsjonen for å kunne lage figuren mest mulig troverdig.

En svakhet ved analyseverktøyet er kompleksiteten til matematisk kompetanse. En tolkning mellom de ulike kompetansene kan være krevende og det kan være at en annen person ville kodet det annerledes. Studien dekker kun den matematiske kompetansen som kommer til utrykk gjennom dialog. Jeg tenker at elevene sikkert sitter inne med mer kunnskap som de ikke aktivt ytrer, noe som gjør at denne studien kun indikerer hva som kom til uttrykk av matematisk kompetanse, og ikke hvilken matematisk kompetanse elevene har.

4. Resultat og Analyse

Begge forskningsspørsmålene som er presentert under analyseverktøy har utspring i problemstillingen. Gjennom arbeidet har ikke forskningsspørsmålene vært direkte separerte, det har hele tiden vært et forsøk på å se helheten. Valget om å dele problemstillingen inn i to forskningsspørsmål grunnet i å holde en struktur og enklere ha et fokusområde gjennom analysen. Forskningsspørsmålene som skal analyseres i dette kapittelet er som nevnt over i delkapittel 3.3.

For funnene i det første forskningsspørsmålet er det presentert to faglige utfordringer elevene møtte i arbeidet med oppgaven. Elevene ble først utfordret til å finne matematiske uttrykk som representerte figurene i en figurtallsoppgave. Deretter ble elevene utfordret til å anvende matematikken i programmering. Funnene er delt inn i eksempler hvor det er en beskrivelse over eksemplet slik at det skal være lettere for leseren og følge, deretter kommer tilhørende transkripsjoner. I transkripsjonen er den matematiske kompetansen kodet i [ ] basert på data fra tabell 2. Transkripsjonene er presentert med linjenummer basert på hele datasettet per gruppe. Slik at L3 under et eksempel for gruppe 2 er; linje 3 fra datamateriale til gruppe 2. Etter eksemplet kommer en analyse som har en beskrivende forklaring på kodingen. Det er prøvd å deskriptivt forklare hva som blir observert fra eksemplene, deretter vil funnene bli diskutert videre i diskusjonsdelen. Etter begge utfordringene kommer en generell oppsummering. Eksemplene ble valgt på bakgrunn av at jeg mener de oppsummerer fint helheten av elevenes arbeid.

For det andre forskningsspørsmålet er analysen mer beskrivende. Transkripsjonene er brukt til å lage illustrasjoner av problemløsningsprosessen i henhold til Mason et al. (2010) sin inndeling som ble presentert i teorien. Det er deretter presentert et eksempel på de ulike fasene for hver gruppe for å gi et innblikk i hvordan kodingen er gjennomført.

4.1 Elevers matematiske kompetanse og algoritmisk tenkning

Under vil det første forskningsspørsmålet bli analysert i kapitel 4.2 og 4.3 med utvalgte undereksempler. Spørsmålet lyder som følger; *Hvilke matematiske kompetanser kom til uttrykk når elevene møtte utfordringer i sitt arbeid. Kan man observere spor av algoritmisk tenkning i elevenes tankegang?*

4.2 Utfordring: Lage formelen for figurtallene

Den første faglige utfordringen som møtte gruppene var hvordan de skulle finne formelen for figurtallene. Hvordan de kunne lage et uttrykk som til sammen representerte alle de ulike delene av figuren. Eksemplene som er presentert skal gi et innblikk i hva elevene diskuterte, samt prøve å gi et innblikk i elevenes tanker og ideer gjennom utfordringen. Det som blir presentert er en liten del av helheten. Det totale inntrykket fra observasjonene og arbeidet med datamaterialet vil bli kommentert nærmere i diskusjonen.

4.2.1 Gruppe 1: «formelen, jeg holder på å klikke»

Eksempel 1

Elevene har startet opplegget, to elever samarbeider om å løse oppgaven som er utdelt. Elevene arbeider ved datamaskinen, og virker velmotiverte til å gå i gang med å løse oppgaven. Siden oppgaven de er gitt er en problemløsningsoppgave, er det ikke helt rett frem for de å starte opp arbeidet. Siden elevene ikke har arbeidet med lignende oppgaver tidligere, er det utfordrende å finne ut hvor en skal sette i gang.

L13: Andreas: Men kan vi lage et uttrykk for dette? Bare denne boksen der først, for den vil gå ut og bli større større og større. Også samme gjør vi med denne delen her og denne delen der. Også tar vi og deler det i fire biter. [F R S]

L14: Ole: Ja, det er smart. … en, ni .. <Hører han skriver og teller samtidig> [F B E]

L15: Ole: … seks, ni … <fortsetter å telle> [B]

L16: Andreas: hvis l er lik en < starter å skrive i programmet på pc> [F B]

L17: Ole: da vil de følge de andre her sånn. …. N i andre, andre? [F R]

L18: Andreas: får jeg ikke til l, der, L er like en, det er lengden. Så kan jeg ta bredda er lik en også no tar jeg figur 1 da   [F B R]

L13 kan man se tegn på at Andreas viser forståelse og resonering gjennom måten han snakker om hvordan figuren vil vokse og bli større og større. Eleven observerer en vekst, selv om veksten foreløpig bare blir referert til som noe kvalitativt. Hvor stor veksten er blir ikke omtalt her. Samtidig viser Andreas en form for strategisk tankegang ved at han deler opp figuren, vi må gjøre med denne delen her og den delen der. Selv om eleven kanskje ikke tenker i baner av algoritmisk tenkning, så kan man si at eleven er inne på det ved måten han deler opp, eller dekomponerer problemet.

L14 «Ja, det er smart» forstår jeg som at Ole gir støtte til Andreas sitt forslag med et engasjement, samt Ole begynner å telle på figurene. Noe som indikerer at Ole viser både engasjement og beregning. Ole viser tegn til forståelses gjennom at han anerkjenner ideen til Andreas og begynner rett på tellingen. L15 fortsetter Ole å telle, noe som ikke indikerer utrykking av ny matematisk kompetanse. Eleven ser ut til å se et mønster som ligner på tre-gangen. I L16 begynner Andreas å snakke om en l. Fra datamaterialet samt tilstedeværende observasjon tolkes dette som at eleven snakker om en lengde. Andreas ytrer en forståelse av *sin* tolkning av oppgaven, samt gir han lengden en verdi som tyder på en evne til å gjøre beregninger. L17 tolkes det som Ole resonnerer på hvordan de ulike delene av figuren vil følge et mønster, samtidig som han viser en forståelse for oppgaven når han utrykker n i andre. L18 kan vi følge Andreas sin ide med bruk av lengde til å finne et mønster som kan hjelpe eleven med å lage en formel. Jeg tolker det slik at dette kommer fra en misoppfatning av oppgaven eller at eleven har gjort en lignende oppgave før hvor man har anvendt lengden til figuren. Det står i konflikt til hva Ole har begynt å resonnere om i L17 hvor han uttrykker mønsteret med n. Selv om Andreas sin tolkning kan ha grobunn i en misoppfatning vil jeg påstå eleven viser en forståelse, samtidig kan de tolkes som at han resonerer rundt egen forståelse og videre bruk av den. Andreas setter verdi på lengden slik at han kan bruke den i beregninger.

Eksempel 2

Elevene har kommet godt i gang med problemløsningsoppgaven. De står litt fast i arbeidet med å finne en løsning. En utfordring elevene møter er å utforske hverandres tankerekker og samtidig utvikle en ide.

L44: Andreas: er ikke … 1*1 også blir det 2*2 så blir det 3*3 med engang vi får til denne der så kan vi bare legge til de andre figurene våre og da blir det jo egentlig ganske lett. Hvis du tenke på , sånn her bare plusse man på en [F B R S]

L45: Ole: mm [F]

L46: Andreas: Så da blir jo formelen, samme lengda som bredda men her stiger den jo bare med ehh, om ikke kan vi bare ta bredden eller lengden, så stiger den med en i lengden men ingen i bredda. For da er bredda konstant. [F B R S]

L47:Ole: mm [F]

L44 kan man observere at Andreas ser «hodet» til figuren følger et kvadratisk mønster, samt «halen» er en «enkel rekke». Det kan virke som Andreas har funnet en strategi for å finne uttrykket, men mangler «kroppen». Jeg tenker at Andreas her viser tegn til forståelse og resonnering ved at han ser løsningen på deler av oppgaven, men samtidig ser at noe mangler. Beregningskompetanse fra den kvadratiske rekken, samt strategisk tankegang for å kunne sette sammen de ulike figurene. Vi kan her se spor av algoritmisk tenkning, på den måten at elevene prøver å finne et mønster ved å følge små biter av mønster som de klarer å uttrykke aritmetisk, som 1*1, 2*2, 3*3. Selv om elevene ikke uttrykker generaliteten på en algebraisk måte, er de i stand til å uttrykke spesialtilfeller ved hjelp av aritmetiske operasjoner. Steget fra aritmetikk over i algebra er imidlertid ikke på plass enda, dette til tross for at elevene ser mønsteret L44 «.. med engang vi får til denne der så kan vi bare legge til de andre figurene våre og da blir det jo egentlig ganske lett..». Det å se mønsteret er et første steg på veien mot å klare å uttrykke mønsteret algebraisk (symbolsk). I L45 «mm» anerkjenner Ole tankerekken til Andreas som kan indikere en forståelse for forklaringen.

L46 fortsetter Andreas sin tanke-rekke om å anvende lengde gange bredde. Dette observeres til å være knyttet til «kroppen» til figuren. Det kan virke som Andreas utforsker ideene kognitivt, det oppleves som at han viser tegn til å ha en instrumentell forståelse for hvordan han kan løse problemet. Det kan virke som den relasjonelle forståelsen ikke er like tydelig. Derfor greier han ikke å skille de to løsningsmetodene. L47 gjentar Ole anerkjennelse til Andreas sin ide.

Eksempel 3

Elevene har jobbet i nærmere 45 minutter og starter å bli irriterte på oppgaven. Elevene fortsetter å prøve å finne løsningen på formelen. Utfordringen ligger i at de prøver å programmere uten å ha fått endelig kontroll på utrykket.

L295 Ole:… formelen, jeg holder på å klikke. [E]

L296:Ole: … den der den er seks… [F B]

L297:Andreas: skal while over, har det noe å si? Hvis vi legger den over [I]

L298:Ole: denne her … hvis den er tre så er … fire gange tre det er tolv ikke sant? Gange to det er 24. [F R B]

L299:Andreas: ja [F]

L300:Ole: en to tre fire fem seks <teller til> 24. yes! Dette er formelen. jeg fant den. Dette er formelen for å løs … [F B R E]

L301: Ole: vi må sjekke den, denne her skal gå. [R E]

L295 viser Ole et engasjement rundt oppgaven. Ole sier han holder på å klikke, likevel vil jeg påstå at det er en følelse som knytter eleven til oppgaven. Det indikerer et ønske om å få det til.

L296 og L298 mener jeg Ole viser forståelse og beregningskompetanse gjennom at han viser til en del av figuren og hvor mange kvadrater denne inneholder. Samtidig virker det som Ole resonerer i L298 gjennom at han henvender seg til Andreas i utregningen sin.

L297 ser man eksempel på det som er kodet som ikke matematisk, siden det handler om while-løkken de prøver å bruke. Dette er knyttet til kompetanse i overgangen mellom matematikk og programmering.

L300 ser jeg en fortsettelse av Ole sin tankerekke som nå spinner ned til at eleven finner formelen. Denne har jeg kodet som beregning gitt at eleven teller, viser tegn til å resonnere og forståelse fordi eleven mener han har funnet formelen. Engasjement kan tolkes fra «yes!» I L302 viser eleven et ønske om å sjekke formelen han har funnet. Dette kodet jeg som resonnering siden det går på logisk tankegang. Engasjement fordi eleven ytrer tanken om at denne skal gå. Han viser positivitet.

4.2.2 Gruppe 2: «hvordan vi skal liksom lage et uttrykk, vet ikke jeg»

Eksempel 4

Elevene har kommet i gang med å lese oppgaven. Begge elevene forholder seg til oppgavearket og virker ganske forsiktige i fremtoningen. Siden det er en problemløsningsoppgave er det ikke en gitt fremgangsmåte, så det er utfordrende å komme i gang.

L6: Lars: Så, den her sant, den legger til en til på hver, eh, sånn der figur (peker på figur 1, så figur 2 og figur 3, og peker på halen) og den her ... (peker på kroppen) [F R]

L7:Martin: Ja [F]

L8: Lars: men hvordan vi skal liksom lage et uttrykk, vet ikke jeg. [R]

L9: Martin: Ikke jeg heller [R]

L6 viser Lars indikasjoner på forståelse og resonering gjennom forklaringen sin til medeleven. Måten han peker og bruker figurene i sin forklaring viser tegn på forståelse. Resoneringen vil jeg si kommer av at han ser mønsteret i økningen. Eleven ser mønsteret, men har problemer med å uttrykke mønsteret. I L7 bekrefter Martin at han hører på hva Lars sier som er kodet som forståelse siden Martin gir tegn til å være enig med Lars sine tanker.

L8 mener jeg Lars viser tegn til resonering gjennom det faktum at han utrykker at han ikke vet hva som må gjøres for å finne uttrykket. I L9 utrykker Martin usikkerhet likt som Lars i linjen over.

Eksempel 5

Elevene er fortsatt usikre på fremgangsmåte, Lars har begynt å lufte noen tanker for, Martin. Martin virker veldig tilbakeholden til å ytre seg, noe som gjør det vanskelig å utforske løsningsmetoder sammen, det er en utfordring når de ikke ytrer tankene sine.

L25: Lars: det blir lissom n pluss 1 i parentes (skriver samtidig og viser til Martin). Det blir jo n pluss ... eh, nei, også ganger du det med 3, som er der (peker på bunnen av figur 1) minus den (peker på den tomme kvadraten i kroppen til figur 1). (peker på figur 2) her blir det ... der er toeren ... der er det eneren, der er toeren ... (peker på det han har skrevet under figurene) men jeg vet ikke hvordan vi skal få det til inni en sånn, eh - - i en formel. [F B R S]

L26:Martin: Jeg har ikke peiling. [F R]

L27:Lars: Okei - - jeg tror at bare på disse her, den (peker på noe han har skrevet) det er den delen der (peker på hodet) - pluss den delen der (peker på halen) – ja – så da er det den delen som ... (peker på kroppen) [F B R]

L25 har Lars kommet frem til noen tanker angående uttrykket. Han forklarer til medeleven hvordan han tenker. Han gir indikasjoner på usikkerhet når han sier; at hvordan det skal inn i en formel er usikkert. Jeg vil si en ser tegn til at eleven viser forståelse, han utfører beregninger og resonerer over videre arbeid. Det er lett å følge elevens tankegang gjennom at han anvender oppgavearket i forklaringen til Martin. Sammenlignet med forrige eksempel, har eleven nå klart å uttrykke seg aritmetisk, selv om eleven fortsatt mangler evnen til å uttrykke seg algebraisk.

L26 utrykker Martin at han ikke kan bidra med å sette det inn i en formel eller bygge videre på tankerekken. Dette mener jeg viser tegn til både forståelse og resonnerings gjennom at Martin har hørt på Lars sitt forslag. En kan tenke at Martin har tenkt igjennom hva Lars sier og har resonnert og vurdert forslaget før han sier han ikke har peiling. I L27 her jobber Lars videre med tankene i det som ble sagt over. Han ser at de ulike delene utvikler seg ulikt og forstår at de må dele figuren inn i tre deler. Det kan virke som at Lars ikke ser hvordan kroppen kan deles opp eller arbeides med på andre måter. Samtidig vil jeg si denne uttalelsen inneholder både forståelse, beregninger og resonering.

Eksempel 6

Etter litt utforskning uten noe god ide på «kroppen» ble elevene ganske stille. Man kunne merke at de var veldig usikre og ikke så trygge til å utfordre sin egen tankegang og kanskje spille på hverandre. Derfor ble det gjort et valg om å bryte inn slik at de ikke ble sittende i stillhet. Så første del av eksempel 6 er hintet fra student, så kommer elevenes videre arbeid etterpå.

Samtalen mellom student og elev

L45: Emilie (student): Hva med å prøve å dele, for nå har jo dere delt den i 3 deler sant, og den ene delen er vanskelig. Har dere tenkt på at dere kanskje kan dele den i mindre biter igjen da.

L46:Lars: ehm

L47:Emilie (student): Kanskje, det er ikke sikkert at det hjelper dere noen ting. Hvis dere synes det er forvirrende. Men, dere er hvertfall veldig godt inne på det, så det er bra jobbet hittil.

Hva skjer etter samtalen

L48: Lars: Ja, det kan hende at det er lettere. For hvis vi deler den sånn at det blir 1, 2,3 deler der (peker på fremsiden, midten og bakerste del av kroppen). For den her er jo sånn, akkurat det samme som denne her (ringer rundt midten av kroppen og peker på halen). Det er akkurat samme, 1,2,3 og 1,2,3. Så det kan vi gjøre. ... og den er ikke så vanskelig, for det er 1, 2 og 3 der (peker på fremste del av kroppen, på figur 1, 2 og 3). / [F R S]

L49: Martin: mm [F]

L50: Lars: Det blir da n^2 pluss 2n, ikke sant for her har du n^2 (ringer rundt hodet) ... pluss 2n det er den og den delen (ringer rundt halen og midten av kroppen) - - også må vi finne formel for den delen (peker på fremste del av kroppen). ... 1 pluss n ganger n - - 1 pluss 1, det blir 2, ganger en - - jo, der, det er den delen (peker på fremste del av kroppen) - - der (peker på fremste del av kroppen på figur 2), 1 + 2*2, nei, det passer ikke til den - - Jo, vent, 1 + 2 ganger 2,greit, der er den ... også, 1 + 3 , 4*3, [F R B]

L51: Martin: / ja [F]

L52: Lars: Så blir det sånn (setter 2 og to parenteser «2( )»), så blir det pluss 2n pluss n^2. Ja. (Setter strek under formelen) - sånn, skjønte du? [F B]

L45 studenten bryter inn siden gruppen slutter å snakke, for å prøve å dra de i gang igjen. Tonen er vennlig og studenten antyder bare noe de kan gjøre uten å påpeke at de må. Fra L46 virker det som Lars responderer litt usikkert på studentens innspill. Videre i L47 sier studenten at de kan tolke hintet slik de ønsker. Synes det er fint hvordan elevene får en positiv tilbakemelding på at de er på riktig vei. Jeg tenker det kan virke motiverende.

L48, L50 og L52 er alle en samlet tanke-rekke av Lars. Måten Lars bruker informasjonen studenten kom med viser hvor «lite» som skal til før elevene greier å se løsningene selv. Måten Lars forklarer og resonerer seg frem viser tegn til en strategisk tankegang som jeg vil mene her viser indikasjoner til algoritmisk tenkning. Den algoritmiske tenkningen kan man se tegn til gjennom at eleven deler figuren inn i mindre deler som hver for seg er enkle å finne mønsteret til. Synes det er fint hvordan Lars presenterer det for Martin, og hvor systematisk han er i forklaringen. En kan se Lars invitere Martin inn i hans forståelse av problemet gjennom å spørre om medeleven forstår hva han har sagt.

L49 og L51 er bekreftende innspill fra Martin, som kan indikere en forståelse, dette er vanskelig å bekrefte eller avkrefte.

4.2.3 Oppsummering: Elevenes arbeid med å finne formelen for figurtallene

Gjennom eksemplene som er presentert over er det prøvd å gi et inntrykk av elevenes matematiske kompetanse ved utfordring med å finne formelen for figurtallene. Ønsket var å gi et mest mulig helhetlig inntrykk av hvordan elevenes matematiske kompetanse kom til utrykk gjennom å utvikle formelen gjennom hele arbeidsøkten. Eksemplene gir et inntrykk av hvordan elevene utvekslet ideer og tanker gjennom hele arbeidsprosessen med å finne formelen.

I gruppenes første eksempel er det indikasjoner på at elevene utrykker mest forståelse. En forskjell en kan observere er hvordan Andreas og Ole virker tryggere i sine ideer og starter å gjennomføre beregninger tilhørende oppgaven. Allerede i L13 kan man se antydninger på algoritmisk tenkning. «Bare denne boksen der først, for den vil gå ut og bli større større og større. Også samme gjør vi med denne delen her og denne delen der.» gir indikasjoner på dekomposisjon som er et tegn på algoritmisk tenkning. Hos Lars og Martin observerte jeg ikke noe form for beregningskompetanse i eksempel 4.

Videre i eksempel 2 og eksempel 5 har elevene jobbet videre med utviklingen av formelen. I eksempel 2 kan man se at Andreas har gått dypere inn i tanken om å dele figuren inn i mindre deler, samtidig som han har funnet at hodet utvider seg kvadratisk og at halen med en. Det er tegn til at Andreas prøver å finne et mønster ved å følge små biter av mønster som de klarer å uttrykke aritmetisk. Dette er starten på det man kan anta som algoritmisk tenking. En ser samtidig i samme situasjon at Andreas ønsker å bruke lengde gange bredde for kroppen som ikke vil samhandle med det han har funnet for resten av figuren. Andreas viser tegn til strategisk tankegang i denne situasjonen. Ole fremstår støttende til begge ideene. I eksempel 5 er det indikasjoner på at Lars har utviklet sine tanker om hvordan han skal gå fram for å finne formelen gjennom flere kompetanser enn forståelse. Lars bruker oppgavearket fint i forklaringen til Martin og prøver å aktivere medeleven. Samtidig er det fortsatt tegn til en tilbakeholdenhet hos elevene i gruppe 2 som man ikke observerer hos gruppe 1.

I eksempel 3 er elevene i gruppe 1 helt på slutten av økten. De har jobbet intens med utviklingen av formelen og begynner å bli frustrerte. I denne situasjonen ser vi tegn til at elevene utrykker engasjement, samt en får inntrykk av at elevene blant annet har prøvd å anvende while-løkke på programmeringsdelen av oppgaven uten hell.

I eksempel 6 får en se hvordan Lars i gruppe 2 anvender informasjon han får fra en samtale med studenten etter at gruppen stilnet helt. Etter samtalen kan en tolke det som at Lars anvender flere av komponentene i sin matematiske kompetanse. En kan observere hvordan han går fra å kun utrykke seg aritmetisk til å klare å utrykke seg algebraisk. En kan antyde at Lars løste ut formelen ved hjelp av dekomposisjon og mønstre som er trekk på algoritmisk tenkning.

4.3 Utfordring: Symbolsk matematikk i programmering og bruk av formel i programmeringen

I siste del av oppgaven ble elevene bedt om å programmere et program i Python. Programmet skulle kunne brukes til å skrive ut figurtallene til en gitt figur fra formelen de hadde funnet i første del av oppgaven. Etter samtale med faglærer antok vi at elevene har helt grunnleggende kunnskaper om programmering. På tross av dette oppsto det utfordringer ved overføringen fra å ha formelen på papir til å anvende den i programmet. Nedenfor er det presentert tre eksempler som skal belyse elevenes utfordring med programmeringen.

4.3.1 Gruppe 1: «vi må bare skrive inn noe»

Eksempel 7

Elevene har kommet i gang med å finne et utrykk for figurene, nå har de i tillegg startet å programmere oppgaven. De har ikke kommet fram til samme formel, utfordringen ligger da i at de likevel velger å starte med programmeringen.

L96: Ole: uansett, Så hva vi bruker, vi må bare skrive inn noe [F R]

L97: Andreas: hale lik 1, også kan vi si at - <skriver i programmet, kropp = > vi kan ta stor b da. Vi ganger .. [F B R]

L98: Andreas: sånn - - også sier vi – hvorfor har jeg, åja, det er l*b. [F R]

L99: Ole: men jeg tenker på om det er en annen … [F R]

L100: Andreas: dette skal jo egentlig gå ant da. Skal vi kjøre? …< tester programmet> [F S]

```
1
2   b=1
3   l=1
4   l*b=total
5   hale=1
6   kropp= B*H
7   kropp+hale+total=m
8   print(f'{L}')
```

Figur 9:Tilhørende utklipp fra programmet for gruppe 1

L96 har elevene tydeligvis funnet ulike formler for utrykket de leter etter, men det virker som de er enige om at de får samme svar uansett. Denne uttalelsen er kodet som forståelse og resonnering siden Ole viser tegn til at han har tenkt igjennom at formelen deres gir samme utfall og at det stemmer med oppgaven.

Gjennom L97 og L98 fortsetter Andreas å utvikle programmeringen gjennom indikasjoner på kompetansene forståelse og beregning. Fra utklippet kan man se tydeligere hvordan elevene tenker. En kan antyde at total er «hode», også prøver de å legge sammen de tre delene. Studerer man linje 7 i figur 9 kan man se hvordan elevene setter opp summeringen motsatt av hvordan Python syntaksen ønsker det. Det samme gjelder linje 4. En kan se at elevene ikke er konsekvente. Her har Andreas utviklet et program som bruker lengde gange bredde, altså de ønsker å jobbe med arealet av figuren. Dette er kodet under forståelse og resonering. Resonering fordi jeg ser tegn til at eleven vurderer løsningen sin, samt forståelse fra metoden l*b han ønsker å bruke.

L99 utrykker Ole «men jeg tenker på om det er en annen» som jeg tolker som en resonering over deres valg av løsningsstrategi. Ole viser her en forståelse og resonering gjennom å vurdere deres tanker rundt løsningen av oppgaven.

Fra L100 kan man se at Andreas ønsker å teste programmet han har utviklet. Han utrykker en form for enighet med Ole gjennom «dette skal jo egentlig gå ant da», spesielt ved bruk av ordet egentlig. Samtidig virker det som han er trygg i avgjørelsen sin som tyder på en forståelse for oppgaven. Gjennom ønsket om å kjøre programmet mener jeg Andreas viser strategisk tankegang, det er et strategisk valg om å teste forståelsen han har for oppgaven.

Eksempel 8

Elevene nærmer seg slutten av økten. De har vært gjennom flere prøvelser både for å finne formelen samt å prøve å programmere den. Utfordringen er å overføre kunnskapen på papiret over i programmet. Samt regnerekkefølge og sette opp utrykket riktig.

L322: Andreas: hvis du har fått det til her så er vi faktisk rimelig glad skal jeg si deg [E]

L323: Ole: hehe. Dette er hvertfall formelen. håper jeg. [E]

L324: Andreas: for da har vi tenkt alt for komplisert med dette while dritte og … for jeg vurderte… [F R]

< Deler av transkripsjonen er fjernet >

L339:Ole: vi må skrive at en, ehh, en pluss, nei nei, er lik pluss en. Altså at den øker hver gang. Sånn som dette her. vi skriver det som dette her [F I]

L340 :Andreas: men det skrev jeg i stad, det gikk ikke . – men jeg veit ikke, hva er det som er lagt inn nå da? For to ganger en pluss en, det er jo opphøyd i en som er fire. Pluss to ganger en som er seks pluss det er syv ja, det stemmer. Figur 2, da er det to ganger to ,fire fem, ti, 14 – jeg får bare 18 da [B R]

L341: Ole: hva skal det være da? [F]

L342: Andreas: det er 20 [F B]

L343: Ole: dette er to, ehh, to tre ganger to det er seks\\ [B]

L344: Andreas: du kan ikke det, du må jo først gange. Gange må du alltid ta først [F]

L345: Ole: åja.. da er det litt feil her.. nei, denne her skal inni parentesen der, denne skal stå utenfor sånn… sånn no skal det.. [F B R]

L322 og L323 kan man se indikasjoner på engasjement hos både Andreas og Ole. De har jobbet lenge med å prøve å finne et program og formel som fungerer. I L324 kan man se tegn til forståelse og resonnering hos Andreas. Når han utrykker «while dritte», er dette koblet til deres tidligere forsøk på å løse oppgaven ved bruk av while-løkke. L339 ser man Ole prøver å hjelpe Andreas med å finne ut av hva som er feil i programmet. Det oppleves som det er overgangen fra å ha formelen representert skriftlig til å anvende den i en ny representasjon som er krevende. Det å skifte mellom ulike representasjoner utfordrer elevenes forståelses kompetanse.

L340 regner Andreas seg gjennom formelen de har funnet og konkluderer med at de får 18 kvadrater i figur 2. Han sier *får bare 18,* som er en indikasjon på at eleven tolker dette som feil. En kan se tegn til at eleven viser evne til beregning og resonnering. I L341 kan man se indikasjoner på at Ole forstår at Andreas ikke var fornøyd med å ha kommet frem til 18. Og etterspør mer informasjon fra Andreas. Som viser tegn til forståelse. Gjennom L342 utrykker Andreas at figur 2 har 20 kvadrater og ikke 18 som formelen ga. Andreas indikerer en forståelse og evne til beregning. Videre i L343 begynner Ole å regne selv over formelen for å kunne være mer sikker på Andreas sine utregninger.

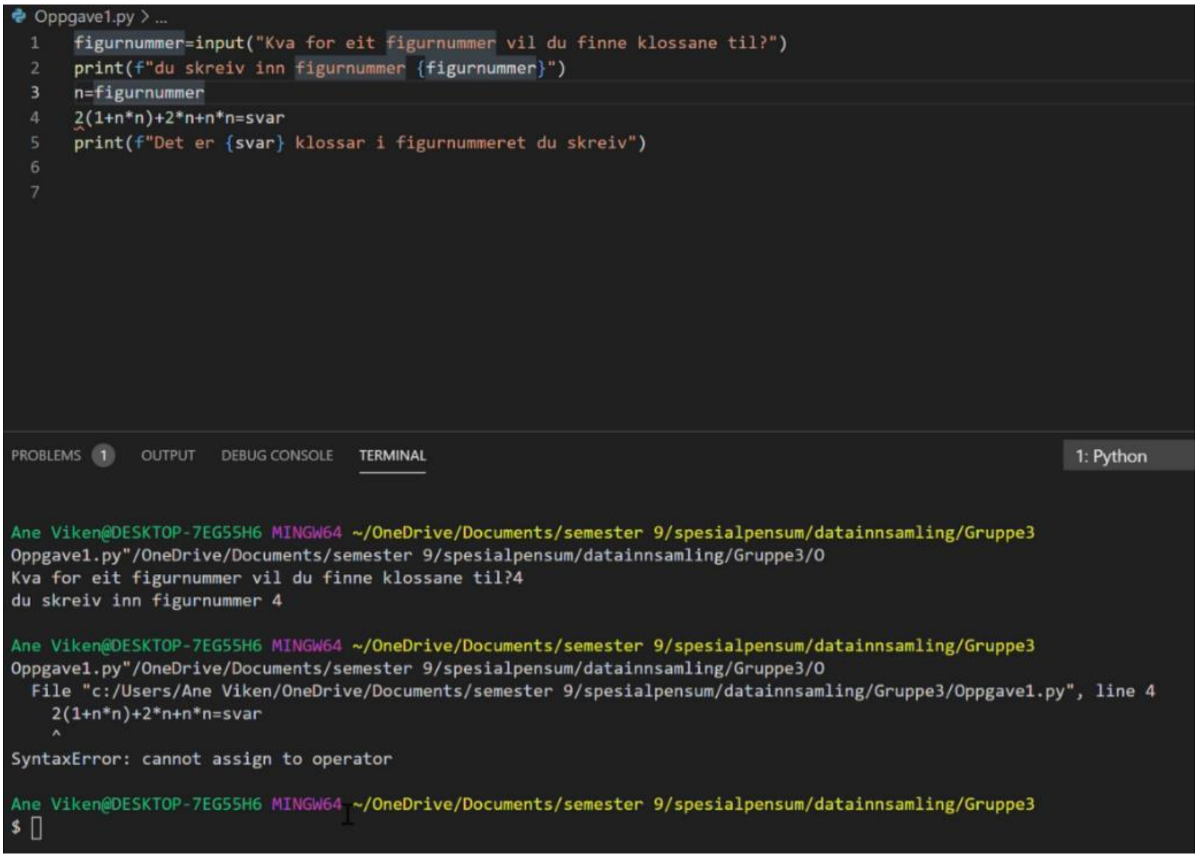
I L344 hører Andreas at Ole utfører en feil regneoperasjon, han bommer på regnerekkefølgen og poengterer dette. Andreas indikerer en forståelse for regneoperasjonene gjennom rettingen.

Fra L345 oppleves det som at Ole blir litt satt ut av feilen, han tenker seg litt om og ser at han har skrevet feil. Det rettes opp i formelen og han konkluderer nå med at det nå må bli riktig med tanke på regnerekkefølgen. Denne uttalelsen viser tegn til forståelse, beregning og resonering.

4.3.2 Gruppe 2: «Tror ikke det er så sjukt langt i fra»

Eksempel 9

Gruppen er godt i gang med programmeringen av formelen. De anvender boken som hjelpemiddel til programmeringen og setter opp et systematisk script, som de prøver å kjøre. Utfordringen ligger i programmeringsspråkets regler i forhold til matematiske regler.



Figur 10: Utklipp fra skjermopptak tilhørende eksemplet for gruppe 2

L93: Lars : nå skal det komme ... det er svar, det er svaret å greia (peker på output og det de har skrevet, altså 2(1+n*n)+2*n+n*n=svar) Men ... regner det ut før vi gir et svar da. Ehm - - (Lars blar i matteboka)Tror ikke det er så sjukt langt i fra liksom ... <pause> må vi bruke variabel - - det kan hende at vi må bruke ... [F R S]

Leser man gjennom koden presentert i figur 10 blir man oppmerksom på at linje 4 har en rød strek på starten. Dette antyder at programmet ser en feil. Samme kan man tilegne seg fra å lese feilmeldingen i terminalen. Elevene viser tegn til at de har forståelses kompetanse for hvordan de skal bruke likhets operatoren.

Bruken av likhets operatoren kan være ulik fra den matematiske hverdagen til de ulike programmeringsspråkene. Noe elevene må bli oppmerksomme på for at de skal mestre programmeringen som skal inn i skolen. I L93 kan man observere hvordan Lars utrykker seg mens han utforsker programmet. Jeg mener starten av linjen hvor han spekulerer og prøver å finne feilen viser han forståelse og en evne til å resonnere rundt oppgaven. Strategisk tankegang er kodet på bakgrunn av indikasjoner på et system i leitingen etter feilen, samt bruk av læreboken i søken etter en løsning.

4.3.3 Oppsummering: Symbolsk matematikk i programmering og bruk av formel i programmeringen

Gjennom eksemplene presentert under denne utfordringen kan man se elevene slite med syntaksen til Python samt hvordan håndtere feilkodene. Det kan være en utfordring å få til algoritmisk tenkning og problemløsning i matematikk ved programmering når elevene har begrensede forkunnskaper innen programmering og programmeringens logikk og syntaks. Dette kan man se indikasjoner på i eksemplene gitt til denne utfordringen. En kan se tegn på at elevene stopper opp ved møte med feilmeldingen og problemer i programmet. Elevene hadde ulike tilnærminger til programmeringsdelen.

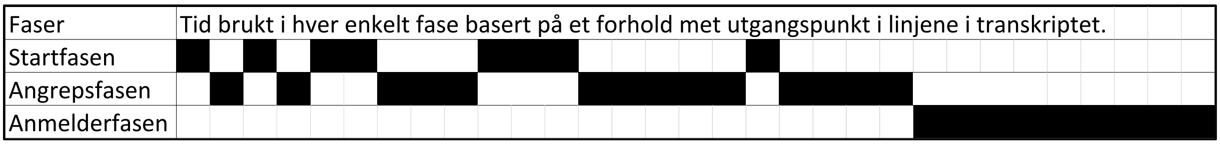
Gjennom eksemplene presentert for gruppe 1 ser man elevene ha utfordringer med syntaksen i Python. De utrykker usikkerhet rundt anvendelser som de har litt kjennskap til gjennom tidligere oppgaver, er likevel usikre på hvordan det fungerer. For gruppe 1 kan man hele veien følge de gjennom utfordringen med å finne et utrykk for formelen synkront med at de har problemer med programmeringen. I eksempel 8 som er helt mot slutten av økten kan en se at elevene fortsatt anvender sin matematiske kompetanse, som hvordan de fortsatt tester formelen gjennom sin forståelse, beregning og resonnering. For gruppe 2 ble bruken av likhetsoperatoren en kontrovers mot elevens forståelse. En kan tenke at bruk av programmering i matematikk undervisningen kan utvikle matematisk kompetanse, men en må passe på at elevene ikke står fast ved programmeringstekniske utfordringer.

4.4 Problemløsningsprosesser sett i lys av Mason et al. (2010)

I denne delen av analysen blir det neste forskningsspørsmål analysert. Forskningsspørsmålet var; *Hvordan arbeider elevene med oppgaven med utgangspunkt i en problemløsningsprosess?* Når en person blir stilt ovenfor en problemløsningsoppgave er hensikten at personen ikke skal kunne se løsningen direkte. Dette gjør gjerne at man jobber annerledes enn om det er en oppgave som man har kjennskap til og allerede kan en metode for å løse. Derfor er det interessant å gå inn i datamaterialet å se hvordan gruppene arbeidet i møte med en problemløsningsoppgave. Det er gått inn i datamaterialet og sett etter trekk fra tabell 3, altså på start-, angreps- og anmelderfasen i hele datamaterialet for de to gruppene. Gruppene hadde ulik tidsbruk på gjennomføringen, likevel fikk jeg et innblikk i elevenes problemløsningsprosess. Sammen med en illustrasjon av gruppens problemløsningsprosess er det presentert et eksempel på de ulike fasene for hver av gruppene. Dette for å gi et innblikk i hvordan jeg har analysert for hver av kodene. Anmelderfasen er ideelt sett når elevene reflekterer og generaliserer egne tanker, dette ble ikke gjennomført i datainnsamlingen siden elevene ikke ble ferdige med oppgaven. Likevel avsluttet begge øktene med en samtale mellom elever og student som jeg i dette tilfellet har valgt å kode som anmelderfasen.

4.4.1 Gruppe 1: En evig runddans av tanker

Som nevnt tidligere besto gruppe 1 av tre elever, hvorav to av elevene var veldig aktive fra første stund. Elevene jobbet intens med oppgavens deler i litt over ca.1 time. Det var flere skifter mellom ulike ideer, prøvelser av ideer og tanker som ble ytret i løpet av denne tiden. Transkripsjonen inkludert den avsluttende samtalen med en student ente på 495 linjer. Grunnet at mye av anmelderfasen ble i samarbeid med en student vil ikke dette bli skalert slik som de andre fasene er i forhold til tiden elevene jobbet.



Figur 11: En illustrasjon av gruppe 1 sin problemløsningsprosess

Fra Figur 11 kan en se at elevene i gruppe 1 skiftet gjentatte ganger mellom start- og angrepsfasen. Skiftene ble observert hovedsakelig når elevene byttet ide på hvordan de skulle gå fram for å løse problemet. Det ble sett antydning til to hovedidéer for å løse ut formelen for gruppe 1. Disse ble diskutert under utfordringen med å finne formelen for utrykket for gruppe 1.

Eksempler på transkripsjon som belyser valgt inndeling av de ulike fasene er gitt under:

Startfasen

Elevene har nettopp fått oppgaven utdelt, de prøver å tolke hva oppgaven går ut på.

L13:Andreas: Men kan vi lage et uttrykk for dette? Bare denne boksen der først, for den vil gå ut og bli større større og større. Også samme gjør vi med denne delen her og denne delen der.

Her har eleven startet å tolke hva oppgaven innebærer. Han har sett et system for at figuren kan deles i flere deler. Jeg ser en indikasjon på at eleven har lest og forstått oppgavens innhold. Det er første steg i problemløsningsfasen.

Angrepsfasen

Elevene har satt i gang ideen med å dele figuren inn i ulike deler og har startet å beregne løsningen.

L:69: Ole: jeg har hvertfall funnet ut en formel for alt. Her ikke sant i den boksen her, er det <u>n i andre</u>, mens her borte, denne her, så øker han med 2*2 , også øker den 2*3 også 2*4 og neste her også den i midten øker med en for hver figur.

<mens elev2 forklarer skriver elev1 i programmet>

Så hvis det går an å bare sette det inn der da, men det , da blir ikke dette her så vanskelig

---

Her kan man observere Ole som forklarer hvordan han har delt figuren inn i ulike deler og hva de delene innebærer. Som at boksen er n i andre, samt halen øker med en for hver figur. Dette viser hvordan eleven prøver å løse oppgaven fra det man lærte i startfasen.

Anmelderfasen

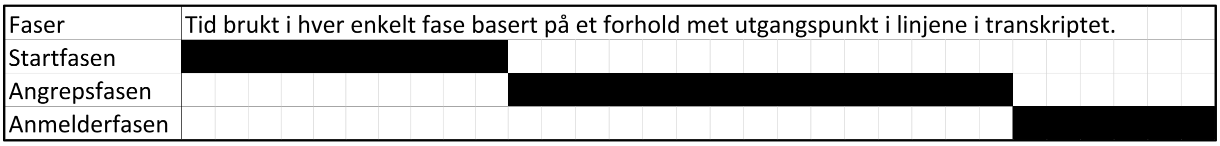
Elevene er i samtale med student etter gjennomføring av oppgaven. Gjennom samtalen er det et ønske å få innblikk i elevenes tanker rundt løsningen.

L401: Andreas: vi var jo litt borti dette med at det skal gå om igjen om igjen for vi prøvde å få til dette vi hadde en figur vi hadde en formel også viste vi at den gikk en ut i den siden, i bredden, og en ut i den siden, så da økte den i bredden pluss to også i tillegg økte den i høyden pluss en også skulle vi fjerne denne. Disse her hadde vi nesten så å si med engang.

Andreas viser her evne til å reflektere over løsningen og ideen de hadde prøvd å gjennomføre. Dette gjør at utsagnet tilhører anmelderfasen. Samtidig virker det ikke som Andreas prøver å generalisere tankene til en større kontekst.

4.4.2 Gruppe 2: Vanskelig å starte

Gruppen besto av to elever hvor begge var veldig forsiktige i fremtoningen sin. Dette gjorde oppstarten litt tung. De kom seg gjennom store deler av oppgaven på de ca.40 minuttene de arbeidet. Transkripsjonene til denne gruppen ente på 145 linjer, som viser at de ikke var like muntlige som den andre gruppen.



Figur 12: En illustrasjon av gruppe 2 sin problemløsningsprosess

Fra Figur 12 kan man observere at gruppe 2 ikke byttet tydelig mellom fasene. De fikk tidlig en ide om å dele opp figuren, men det var ikke før etter samtalen med studenten at de startet på angrepsfasen. Gjennom programmeringen stoppet de ikke opp for å vurdere situasjonen og ta et steg tilbake med tanke på ideen. Derfor er det ikke noe skifte tilbake selv om elevene fikk problemer med syntaks. Dette er muligens noe som kunne skjedd hadde elevene fått mer tid til gjennomføringen.

Eksempler på transkripsjon som illustrerer hvordan inndelingen av de ulike fasene er gjennomført:

Startfasen

Elevene har startet å jobbe med oppgaven. Det virket som det tidlig ble klart hva oppgaven etterspurte. Gruppen ble veldig stille så en student bryter inn for å høre hva elevene hadde tenkt.

L35: Lars: Vi har tenkt at her så har du, du må ha 3 deler for seg da.

L36: Emilie (student): ja, mm.

L37: Lars: Den, den, den. (peker på hodet, kroppen og halen)

I L35 ser jeg at Lars ytrer tanken om at figuren har tre deler etter spørsmål fra student. Han har skjønt at oppgaven må løses ved å dele det inn, som er en viktig del av startfasen. En kan se indikasjoner på en spesialisering av oppgaven, siden denne metoden med å dele figuren inn i tre er basert for akkurat denne oppgaven.

Angrepsfasen

Elevene har hatt en samtale med studenten og det virker som elev1 har fått et gjennombrudd i tankegangen og starter å beregne en løsning av problemet.

L49: Lars: Det blir da n^2 pluss 2n, ikke sant for her har du n^2 (ringer rundt hodet) ... pluss 2n det er den og den delen (ringer rundt halen og midten av kroppen) - - også må vi finne formel for den delen (peker på fremste del av kroppen). ... 1 pluss n ganger n - - 1 pluss 1, det blir 2, ganger en - - jo, der, det er den delen (peker på fremste del av kroppen) - - der (peker på fremste del av kroppen på figur 2), 1 + 2*2, nei, det passer ikke til den - - Jo, vent, 1 + 2 ganger 2,greit, der er den/der har vi den ... også, 1 + 3 , 4*3, //elev2: ja// Så blir det sånn (setter 2 og to parenteser «2( )»), så blir det pluss 2n pluss n^2. Ja. (Setter strek under formelen)

Angrepsfasen innebærer å løse oppgaven fra det man lærte i startfasen. Her ser man hva Lars utrykker etter en oppklarende samtale med studenten. Som antyder at eleven bygger videre på ideen om oppdeling fra startfasen samt tipset fra studenten om å dele «kroppen» inn i mindre deler.

Anmelderfasen

Elevene er i samtale med student etter de har jobbet med oppgaven. Studenten prøver å høre hva elevene har reflektert rundt løsningsmetoden sin.

L121: Emilie (student): Hvorfor tenkte dere at det var en god løsningsmetode? - - Eller hvis dere ikke hadde noen tanker om det så

L122: Martin: jeg vet ikke?

L123:Lars : eh, det var, eller hver av dem har liksom en, liksom en formel for seg. Som gjelder kun for seg.

Anmelderfasen handler om blant annet å reflektere over ideen man har brukt. I L123 kan man se tegn til at Lars generaliserer metoden de anvendte på figurene til en videre kontekst. Hver del av figuren har en formel tilhørende sin form. Altså vil eleven kunne bruke denne kunnskapen om han blir gitt en annen figurtalloppgave med et annet utgangspunkt ved en senere anledning.

4.4.3 Oppsummering av gruppenes problemløsningsprosesser

Gjennom analysen gjennomført av gruppenes problemløsningsprosess kan man se hvordan gruppene arbeidet ulikt. Gruppe 1 satte raskt i gang med oppgaven og lot samtalen flyte. Grunnet denne flyten og konstante forsøk på å løse oppgaven ble ikke denne gruppen avbrutt, de fikk jobbe uten noen innspill. Gruppe 2 slet med å komme i gang med oppgaven. Det ble her antydet en mulig tanke om å dele opp figuren. Likevel startet ikke denne gruppen å utføre utregninger eller å gå over til en mer algebraisk notasjon, altså prøve ut ideen. Når gruppen stilnet ble det gjort et valg om å gå inn i situasjonen, for å lede de inn på et spor igjen. En svakhet med Figur 11 og Figur 12 er at de ikke viser denne forskjellen på gruppene. De viser heller ikke arbeidsinnsats og hvordan samtalene mellom elevene var. Samtidig er det valgt å ha med figurene siden de gir et overordnet bilde av situasjonen slik transkripsjonene samt observasjonen gir uttrykk for. Dette vil bli diskutert videre i diskusjonskapittelet under.

5. Diskusjon

I starten av dette prosjektet ble det valgt tema for datainnsamlingen, som igjen ga grunnlaget for problemstillingen til oppgaven. Problemstillingen for prosjektet lyder som følger: *Hvilken matematisk kompetanse kom til uttrykk i samtaler mellom elever som har arbeidet med en problemløsningsoppgave med programmering som hjelpemiddel?*

For å prøve å besvare denne problemstillingen ble den delt inn i to forskningsspørsmål. Forskningsspørsmålene som ble anvendt i analysen var følgende; *Hvilke matematiske kompetanser kom til uttrykk når elevene møtte utfordringer i sitt arbeid. Kan man observere spor av algoritmisk tenkning i elevenes tankegang?* Og *hvordan arbeider elevene med oppgaven med utgangspunkt i en problemløsningsprosess?*

Lydopptakene av elevenes gjennomføring av problemløsningsoppgaven ble grunnlaget for å utforske forskningsspørsmålene. Gjennom diskusjonen vil funnene fra analysen bli belyst gjennom relevant teori. Diskusjonen sin struktur tar utgangspunkt i hvordan analysen ble gjennomført. Først vil forskningsspørsmål en og elevenes matematiske kompetanse i møte med utfordringene til problemløsningsoppgaven bli presentert. Elevenes matematiske kompetanse som kom til utrykk vil bli diskutert opp mot begrepet algoritmisk tenkning.

Videre vil elevenes gjennomføring av økten knyttes opp mot Mason et al. (2010) sine problemløsningsprosesser. Jeg vil se på hvordan elevene beveger seg mellom de ulike fasene og hvilke tegn som antyder at de er i de ulike fasene.

5.1 Matematisk kompetanse og algoritmisk tenkning

5.1.1 Utfordring med å finne et utrykk for formelen

Det første forskningsspørsmålet handlet om elevenes møte med utfordringer tilknyttet oppgaven og hvilken matematisk kompetanse og algoritmisk tenkning som kom til uttrykk. Det ble gjort ulike funn i eksemplene som er presentert i analysekapitelet. En av utfordringene presentert i analysen var å finne et uttrykk for formelen for figurtallene. Det at elevene fikk en utfordring med å finne formelen var å forvente siden dette var en av hoveddelen i oppgaven. Jeg observerte at elevene i løpet av opplegget ble i stand til å uttrykke de underliggende mønstrene på en uformell, muntlig måte. Det å gå i fra evnen til å uttrykke seg muntlig til å uttrykke seg skriftlig matematisk, og ikke minst det å uttrykke seg syntaktisk korrekt i Python er imidlertid krevende for elevene. En kan tenke at oppgaven var tilpasset elevenes nivå og utfordret deres matematiske nivå siden de ikke umiddelbart fant en løsning på problemet. Begge gruppene hadde vansker med å komme i gang med oppgaven, dette kommer nok av at elevenes forståelse ble utfordret. Elevene fikk ingen teorigjennomgang før økten startet, noe som kanskje kan oppleves som uvant. Elevene hadde heller ikke noe spesifikt sted i læreboken de kunne finne informasjon om figurtalloppgaver. Det å ikke ha en plass i læreboken å finne informasjon, samt det å ikke få gjennomgang av teori før oppstart kan skille seg fra deres matematiske erfaringer og sosiomatematiske normer i klasserommet.

De to gruppene arbeidet ulikt med å utvikle ideer for å finne et uttrykk for formelen. Gruppe 1 hadde mange ideer og snakket mye, likevel har jeg en opplevelse av at de ikke var veldig god på å utforske en felles ide eller hverandres tanker. Det å samarbeide kan være krevende om ikke elevene er vant til å jobbe utforskende og i grupper med matematikk. Elevene er kanskje mest tilfredse eller vant til at matematikk handler om individuelt arbeid. Dette stemmer overens med Schoenfeld (2016) sine funn som ble presentert i innledningen. Hans funn sier blant annet at elever gjerne ser på matematikk som en ensom aktivitet, utført av enkeltpersoner i isolasjon. Schoenfeld sine funn er likevel bare en antydning om elevenes forhold til matematikken. Ser Hos Niss og Jensen (2002) sin inndeling av matematisk kompetanse er den ene hoveddelen om det å formidle matematikk, man kan tenke seg at elevene burde få mer trening i kommunikasjonskompetansen.

Gruppe 2 hadde en annen tilnærming til sitt arbeid med å utvikle en formel. Elevene hadde tidlig en ide om å dele figuren inn i tre deler. Lars utrykker i det første eksemplet i analysen at han ser tre deler i mønsteret. Likevel utrykker han «men hvordan vi skal liksom lage et uttrykk, vet ikke jeg». Det viser at han tenker over situasjonen og reflekterer over egne matematiske evner, det indikere en evne til resonnering. Samtidig utrykker han en forståelse av oppgaven i sammenheng med ideen om inndelingen i tre deler. Likevel vil jeg ikke påstå at han i dette utrykket viser en forståelse for relasjonen mellom figurene representert på papiret og formelen de er på utkikk etter. Denne refleksjonen rundt egen tenkning kan indikere at Lars driver med en metakognitiv prosess. Som nevnt i teorien blir metakognisjon definert av NOU 2014:7 (2014) som tenkning om tenkning eller kunnskap om egne kognitive prosesser og resultater. Lars sitt utsagn kan antyde at han tenker rundt sin egen læringsprosess.

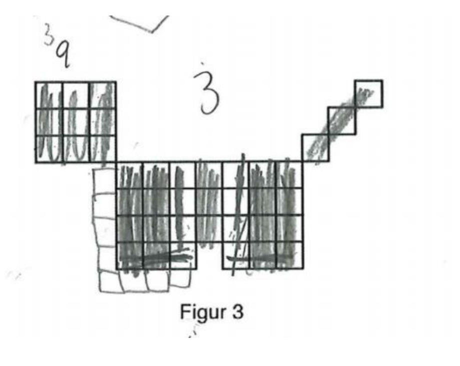
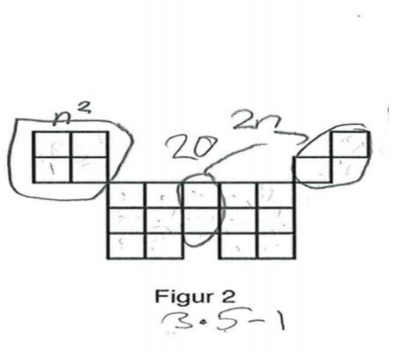
Når det etter dette ikke ble utforsket mer i felleskap stilnet gruppen. En kan se antydninger til at gruppe 2 ikke klarte å uttrykke mønsteret like godt som elevene i gruppe 1 tidlig i arbeidet.

Lars hadde ytret sine tanker forsiktig mens Martin virket veldig usikker, noe det kan være flere årsaker til. Mangel på initiativ hemmet nok gruppens utvikling, elevene greide heller ikke å utforske ideen videre i felleskap basert på deres felles matematiske kunnskap. Jeg vil anta at elevene sitter inne med mer matematisk kompetanse enn hva som kom til utrykk.

Gruppe 2 fikk etter hvert et hint siden arbeidet stoppet opp. Vi diskuterte før datainnsamlingen at vi måtte passe oss for å redusere oppgaven. Bakgrunn for vurderingen var redselen for å redusere oppgavens krav eller at vi som lærer overtar oppgaven ved å gi dem svaret (Winsløw, 2006). Gjennom tidligere praksiserfaringer har jeg opplevd hvor krevende det kan være å holde tilbake informasjon og veilede elevene uten å gi svaret. Jeg opplevde hintet elevene fikk som hjelpende, men samtidig ikke for veiledende.

Dette viser hvor lite som skal til før elevene ser en større sammenheng og kan komme seg over den tøffeste kneiken i oppgaven. Etter en samtale med studenten greide Lars og se hvordan han kunne dele opp «kroppen» til figuren gjennom sin forståelse, beregning, resonering og anvendelses tankegang. Lars kjenner igjen samme mønster som på halen i midten av kroppen, og ser da at han står igjen med to like rektangelformede figurer. Han kan bruke denne informasjonen videre ved at han finner et utrykk for den ene og deretter dobler utrykket. Under er det gitt et utklipp fra Lars sitt oppgaveark. Her kan man se hvordan Lars har anvendt figurene gitt i teksten til å løse ut formelen. Denne type bruk av oppgave vil kunne gå under Niss og Jensen (2002) sin hjelpemiddelkompetanse eller Kilpatrick et al. (2001) sin beskrivelse av anvendelses tankegang. Samtidig anvendte Lars tegningen i forklaringen han ga til Martin, så en kan antyde at denne bruken av oppgaven styrket gruppens evne til å kommunisere matematikk.

Tabell 4: Utklipp fra elevenes oppgaveark fra økten

<table>
<tr><th>Gruppe 1</th><th>Gruppe 2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fra tabell 4 kan man se at elevene på gruppe 2 har gjort markeringer på figur 2. Eleven markerer de to delene som er like og har skrevet 2n. Det samme gjelder «hodet» som han i figur 2 har ringet rundt og skrevet n i andre på. For de to rektanglene har eleven skrevet 2(1+n*n). Når elevene regner i transkripsjonene regner de 2((1+n)*n) som gir riktig svar, men de skriver feil med parentesene på arket samt i programmet. Feilene som gir utslag for resultatet når de prøver å programmere det. Fra tegningene kan man se indikasjoner på algoritmisk tenkning gjennom dekomponeringen av figurene.

Gruppe 1 jobbet veldig intens med å finne et utrykk, samtidig ble de ivrige på å starte med selve programmeringen før de hadde blitt enig om en formel for utrykket. Engasjementet for programmeringen kan ha påvirket gruppe 1 sin gjennomføring av oppgaven. De var aldri «helt på samme plass» og jobbet på en måte individuelt selv om de snakket mye sammen. Gruppen prøvde å finne et uttrykk for formelen ved bruk av n, altså en variabel for hode og halen. Likevel ønsket de å bruke areal, altså lengde gange bredde for kroppen sammen med en while-løkke. Andreas og Ole viste gjennom hele økten flere aspekter av matematisk kompetanse, de utforsket og virket veldig motiverte. Dette var nok hovedgrunnen til at denne gruppen ikke fikk noe hint siden de var veldig selvgående og hadde et stort ønske om å løse oppgaven. Tabell 4 viser at elevene på denne gruppen også markerte de like delene i figuren. Begge gruppene tok oppgavearket til hjelp når de jobbet med oppgaven, som tabell 4 viser.

Selv om gruppene hadde ulike fremgangsmåter og ulik tilnærming til å finne et utrykk for figurtallene kom begge gruppene fram til samme utrykk. Se tabell 5. Dette viser at selv om elever har ulike tilnærminger vil de muligens ende opp på samme resultat til slutt. Dette stemmer med at begge gruppene ga utrykk for flere aspekter av deres matematiske kompetanse. Så selv om problemløsningsprosessene var ulike ble resultatet det samme for de to gruppene.

Tabell 5: Begge gruppenes endelige utrykk for formelen

Gruppe 1	Gruppe 2
$\boxed{2(1+n \cdot n)\cancel{n} + 2n + n^2}$	$2(1+n \cdot n) + 2n + n^2$

Gjennom arbeidet med å finne et utrykk for formelen viste begge gruppene mye matematisk kompetanse. Gruppene hadde begge en ide om å dele figuren i tre deler, likevel fikk gruppene en ulik tilnærming til å se at den ene delen igjen kunne deles i tre. Gjennom denne prosessen utrykket elevene både forståelse, resonnerings og anvendelses tankegang. I denne delen av arbeidet kan jeg se indikasjoner på algoritmisk tenkning. Fra figur 6 ser man blant annet nøkkelbegrepene dekomposisjon, mønstre og logikk som man kan se indikasjoner på i denne delen av oppgaven (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Gjennom å teste utrykkene ved å sette inn tall og gjøre beregninger fikk elevene vist beregningskompetansen. Det er interessant å se hvordan begge gruppene gjorde samme feil med parentesene. Hvordan de regnet riktig, men uttrykte det feil. Dette kan komme av en misoppfatning om bruk av notasjon eller parentesenes hensikt. Det er vanskelig for meg å si at det kommer av for lite beregningskompetanse siden elevene regnet riktig i samtaler med hverandre. Så jeg tror dette indikerer for lite forståelses ved bruk av parenteser. Altså overføringen blir feil når man skifter representasjon. Selv om elevene mener de har regnet riktig blir utregningen feil når de kjører programmet. Fra analysen var det bare gruppe 1 som ga utrykk for engasjementskompetanse. Fra datamaterialet er det vanskelig å si noe om Martin fra gruppe 2 samt Jens fra gruppe 1. Disse elevene var veldig lite delaktig i samtalen og ga meg dermed ikke noe innblikk i deres tanker og kompetanser. Derfor kan jeg ikke si noe om disse elevenes matematiske kompetanse.

5.1.2 Utfordring: Symbolsk matematikk i programmering og bruk av formel i programmeringen

Videre møtte gruppene på en ny utfordring som oppsummert kan sees på som elevenes møte med programmeringen. Gruppene hadde ulik tilnærming til programmeringsdelen av oppgaven på samme måte som de hadde til å finne formelen. Begge gruppene spurte om å bruke læreboken til å gjennomføre programmeringen, noe de fikk tillatelse til. Det var nyttig for elevene å kunne bruke læreboken siden det virket som de ikke hadde veldig god kjennskap til programmering.

Hos gruppe 1 lå utfordringene i at de startet tidlig med programmeringsdelen uten å ha blitt enige om hvordan de skulle uttrykke den matematiske formelen. Jeg vil påstå at de videreførte utfordringene de møtte i første del av oppgaven inn i den andre delen. De ble ikke enige om en fremgangsmåte, noe som gjorde at de blandet ulike metoder. Elevene viste ulike aspekter med matematisk kompetanse. Det kan virke som det er krevende for elevene å overføre kunnskapen fra papir til programmeringen. Elevene dekomponerte problemet til flere deler. De så etter mønsteret så en kan si at elevene viste tegn til algoritmisk tenking.

Gruppe 1 tolket oppgaven som at de skulle bruke while-løkke til å løse programmeringsdelen. Dette tror jeg kommer av at de nettopp hadde arbeidet med while-løkker i timen og tenkte det var naturlig å bygge videre på denne kunnskapen. Elevenes utgangspunkt vil jeg påstå gjorde oppgaven enda mer innviklet for elevene. Uformelt kan dette kalles «eksempelets makt», elevene tenker de må anvende det siste de har lært i den nye oppgaven. Jeg tror nok det er krevende å overføre kunnskapen direkte grunnet at elevene har lite kjennskap til programmets syntaks, samt at de ikke er like drillet i notasjon når de jobber for hånd. Derfor vil definisjon av variabler og systematikken man trenger i programmeringen bli et enda vanskeligere steg. Eleven prøvde ulike versjoner av betingelser for while-løkken. De ble gjennom økten bevisst på at de måtte bruke innrykk for det som er «inne» i while-løkken. Samtidig kan en se i tabell 6 elevenes forbedring av syntaks gjennom økten. En kan se elevene anvende innrykket, effektivisering av økningen og kolon på slutten av while-løkken. Alt dette kan tyde på en utvikling av elevenes algoritmiske tenkning og logikk gjennom økten som kan støttes opp av at å gjøre feil underveis er en viktig del av prosessen (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Tabell 6: Gruppe 1 sine forsøk på å løse programmeringsoppgaven ved bruk av while-løkke

Elevenes første forsøk ved bruk av while-løkke	Elevenes siste forsøk ved bruk av while-løkke

Elevenes første forsøk:

```
'''
n=int(input("definer n:"))
b=3

h=2

total=h*b-1+n+n**2
print(f"figuren har {total}")
while 1<n
c=h+1
a=b+2
```

Elevenes siste forsøk:

```
n=int(input("definer n:"))
b=3

h=2

total=h*b-1+n+n**2
print(f"figuren har {total}")
while n>1:
        b+=2
        h+=1
```

Gruppe 2 valgte en litt annen fremgangsmåte enn gruppe 1. De fant først et uttrykk for formelen, og ble deretter enige om denne før de startet å programmere. Deretter virket det som de brukte eksemplet gitt i oppgaveteksten og fikk satt opp et script som de tenkte burde fungere til å løse oppgaven. Likevel fikk de en feilkode de ikke greide å ordne opp i. Som vist i eksemplet omhandlet dette definisjon av variabler. Elevene anvendte likhetsoperatoren slik de ville kunne brukt den i en matematisk sammenheng. Dette skaper en konflikt med Python sin syntaks. Elevene ser ut til å ha problemer med å håndtere likhetstegnet på en god måte i Python, og dette kan ha sitt utspring i at når en programmerer i Python, så blir likhetstegnet brukt på en måte som er forskjellig fra den «vanlige» matematiske måten. En trenger ikke tenke seg at programmering nødvendigvis skal skje på en datamaskin med et nytt språk eller notasjonssystem. En kan jobbe med programmering og algoritmisk tenkning på mange nivåer og klassetrinn (Gjøvik & Torkildsen, 2019).

Når det kommer til programmering i matematikk finnes det flere eksempler på at det kan være mer fokus på syntaks enn logikken og problemløsningen (Govender, 2007). Fra observasjonene kan jeg forstå hvordan dette kan bli en utfordring. Elevene blir sittende med feilmeldingen og den får mer fokus enn selve oppgaven. For å få fram algoritmisk tenkning og matematisk kompetanse hos elever som ikke er så stødige på programmeringens syntaks og oppbygning, kan det være lurt å ha innslag av andre algoritmiske oppgaver som gjør elevene kjent med den algoritmiske tankegangen før man begynner med programmeringen. Likevel kan det her nevnes at fra tabell 5 ser man at uttrykket for formlene gruppene kom frem til er matematisk feil med tanke på oppgaven. Så selv om elevene hadde programmert helt riktig ville de fått feil svar siden de hadde plassert parentesen feil med tanke på regnerekkefølgen.

5.2 Problemløsningsprosessen

Del to av analysen tok for seg hvordan elevene arbeider med oppgaven i forhold til problemløsningsprosessen. Som nevnt tidligere definerer Solvang (1992) problemløsning som det å søke etter handlinger som en må foreta for å løse et problem. Og når man driver med problemløsning går man gjerne gjennom det man kan kalle en problemløsningsprosess. Det finnes flere ulike typer definisjoner av dette, de som er presentert i denne oppgaven er Polya (2004) og Mason et al. (2010). Analysen tok utgangspunkt i Mason et al. sine tre faser som var start-, angreps- og anmelderfasen.

Gruppene angrep oppgaven på to ulike måter, det ble prøvd illustrert gjennom Figur 11 og Figur 12. Illustrasjonene er en grov inndeling og viser ikke noe av tidsaspektet konkret. De er basert på linjene i transkripsjonen hvor en linje kan være en lang forklaring eller en bekreftende lyd. Derfor er ikke denne figuren entydig, men den gir et bilde av min tolkning av prosessen samt det elevene faktisk ytret under datainnsamlingen. Siden problemløsning er noe som skjer kognitivt er det vanskelig å måle eller følge direkte. Anmelderfasen for begge gruppene var i samtale med studenten, derfor vil ikke denne følge helt teorien til Mason et al. (2010). På tross av dette valgte jeg å ta det med for jeg mener samtalen etter økten var en lærerik prosess som ga oss innblikk i elevenes tanker samtidig som elevene fikk reflektert rundt egne tanker.

Som nevnt i teorien påpeker Mason et al. (2010) at fasene ikke er tydelig distinkte. Arbeidet i en fase kan lett føre tilbake til en «tidligere» fase eller til en endelig løsning. Derfor er det ikke gitt at for å løse en problemløsningsoppgave må en følge et gitt mønster. Kanskje får man en god ide tidlig og kommer seg raskt over i angrepsfasen.

Gruppe 1 bekreftet Mason et al. (2010) sine tanker om at noen personer gjerne starter rett på den første ideen som de kommer på, og skynder seg ut i et forsøk på en løsning uten først å ta seg tid til å kartlegge og vurdere hva som er involvert i oppgaven. Gruppe 2 fikk tidlig en ide om å dele figuren inn i tre deler, samtidig kan det være indikasjoner på at elevene ikke kommuniserer hva de kognitivt tenker, for det er uvant å kommunisere matematikk muntlig. En annen tanke er at elevene ikke har kjennskap til oppgaven, og sliter dermed med å bygge opp en relasjonell forståelse av den. Tidlig ser man indikasjoner på at Lars utrykker forståelses og resonnering rundt oppgaven. En observerer en forskjell på den matematiske kompetansen elevene viser i starten av problemløsningsprosessen.

Gruppe 1 viser tidlig mer beregningskompetanse, og dermed oppleves å gå raskere inn i angrepsfasen, samtidig som at gruppe 2 ikke viser beregningskompetanse før lenger ut i problemløsningsprosessen.

Studerer man Figur 11 ser man hvordan gruppe 1 skifter ofte mellom start- og angrepsfasen. Det å utforske flere ideer trenger ikke å være negativt, man ønsker gjerne flere løsninger på samme oppgave. Polya (2004) utrykker at når man prøver å finne en løsning, kan en gjentatte ganger endre sitt synspunkt. Elevene kan altså endre måten de ser problemet på. Gjerne opplever elever gjennom problemløsning at de må utfordre tolkningen sin igjen og igjen. Oppfatningen av problemet vil sannsynligvis være ganske ufullstendig når man starter arbeidet med en oppgave, og denne oppfatningen vil endre seg gjennom hele prosessen. Dette støtter opp under funnene fra Figur 11 for gruppe 1. En kan observere at elevene bruker mer tid i angrepsfasen mellom hver startfase lenger ut i økten. Dette støtter opp under Mason et al. (2010) sin tolkning av at elever gjerne går raskt over i angrepsfasen.

Gruppe 2 hadde ikke like mange ideer gjennom sin løsning av oppgaven. Lars startet ved å antyde en ide, allikevel stoppet det fort opp, før de etter hvert fikk et hint av studenten. Polya (2004) skriver at å bare huske er ikke nok for en god idé, men det vil være vanskelig å få en god idé uten å huske noen relevante fakta. Har eleven lite kunnskap om emnet kan det å lage en plan oppleves veldig krevende. Gode ideer er basert på tidligere erfaringer og tidligere tilegnet kunnskap. Det kan tenkes at Lars på gruppe 2 kan ha sett en lignende oppgave før men greide ikke å bygge videre på ideen fordi forkunnskapene gikk mer på den instrumentelle forståelsen og ikke den relasjonelle (Skemp, 1976). Datamaterialet gir indikasjoner på at Lars hadde kunnskapen, siden han etter samtale med studenten jobbet systematisk med løsningen. Denne gruppen pratet ikke like mye, noe som gjør det vanskelig å si om elevene muligens jobbet metakognitivt mellom fasene uten å gi oss innblikk i det.

I figur 4 ser man at overgangen fra angreps- til anmelderfasen inneholder elementet generalisering. Selv om elevene ikke gjennomførte anmelderfasen alene, ble de spurt om løsningsmetoden de brukte etter at de hadde jobbet med oppgaven. Fra dette kunne man se antydninger til i *L123: Lars: eh, det var, eller hver av dem har liksom en, liksom en formel for seg. Som gjelder kun for seg.* I dette utrykke viser Lars at han har sett en sammenheng mellom utrykkene for hver enkelt del. Dette impliserer at Lars har evaluert og utvidet problemet til en større kontekst (Mason et al., 2010).

5.3 Oppsummering av diskusjonen

I denne oppgaven er problemstillingen: *Hvilken matematisk kompetanse kom til uttrykk i samtaler mellom elever som har arbeidet med en problemløsningsoppgave med programmering som hjelpemiddel?* Dette er prøvd belyst gjennom de to forskningsspørsmålene sammen med funnene i analysen.

Gjennom å dele problemstillingen inn i to forskningsspørsmål ble det lettere å bryte ned datamaterialet og holde fokus på hver enkelt del under analysen. Gjennom møte med de faglige utfordringene fikk elevene uttrykt sin matematiske kompetanse gjennom dialogen med medelever. Gjennom analyse fikk jeg et innblikk i misoppfatninger elevene hadde og vansker de møter på i overgangen fra å regne på papir til å skrive det inn i et programmeringsprogram, slik som for eksempel Python. Dette er funn som jeg som fremtidig lærer kan være oppmerksom på, og prøve å veilede elevene for å unngå misoppfatninger. Disse funnene mener jeg er viktig for at elevene skal kunne videreutvikle sin kompetanse slik den nye læreplan legger opp til.

Funnene i analysen bekrefter kompleksiteten til matematisk kompetanse. Det var krevende å skille noen av de ulike kodene for de ulike kompetansene fra hverandre. Niss og Jensen (2002, s. 46) kommenterer at det er viktig at oppdelingen ikke overfortolkes. Alle kompetansene er nært knyttet til hverandre. Kilpatrick et al. (2001, s. 116) tolker de fem ulike ferdighetene som en del av en større helhet innen det å utvikle seg i matematikk. Disse teoriene støtter opp under at noen av utsagnene til elevene inneholdt flere komponenter av matematisk kompetanse. En kan ikke tolke elevenes matematiske kompetanse direkte kun fra denne datainnsamlingen, siden den hovedsakelig tar for seg hva elevene utrykker muntlig. En kan få et innblikk i elevenes tenkemåte fra tolkning av transkripsjonene og observasjonene. Samtidig så man spor på algoritmisk tekning i ulike deler av problemløsningsprosessen. Spor av algoritmisk tenkning oppsto gjerne i arbeidet med å løse ut formelen siden elevene her var avhengig av å dele opp figuren i mindre deler.

Kompetansene som var minst fremtredende hos begge gruppene var engasjement og strategisk tankegang. Det kan være uvant for elevene å jobbe med problemløsningsoppgaver, derfor vil ikke den strategiske kompetansen komme tydelig til utrykk. Her tror jeg elevene kunne ha hatt nytte av kjennskap til problemløsningsprosessen til enten Mason et al. (2010) eller Polya (2004). Da hadde kanskje elevene reflektert over hvor i arbeidsprosessen de befinner seg og hvilke spørsmål som kan være nyttige å stille seg selv i de ulike fasene.

Engasjement kom til utrykk for elevene i gruppe 1 etter å ha jobbet med å utvikle formelen for figuren over en lengre periode. Den andre gruppen strevde ikke like lenge og det er kanskje grunnen til at denne kompetansen ikke kom til utrykk hos den gruppen. Kilpatrick et al. (2001) beskriver engasjement som noe som utvikles parallelt når andre matematiske komponenter styrkes. For gruppe 1 som det ble kodet engasjement for kan dette bygges opp under. Før elevene ga utrykk for engasjement hadde de utforsket oppgaven gjennom de andre fire kompetansene som transkripsjonene ble kodet etter. Samtidig kom gruppene nesten like langt med oppgaven selv om den ene gruppen manglet indikasjoner på engasjement. Dette kan kobles opp til Niss og Jensen (2002) som ikke ser på engasjement som en forutsetning for å fremme matematisk kompetanse.

En svakhet med analysen som ble nevnt i metodekapittelet var vanskeligheten med å skille de matematiske kompetansene. Boesen et al. (2014) kritiserer både Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick et al. (2001) sine rammeverk til bruk i analyse. Da de to rammeverkene ikke er ideelle for analyse av empiriske data, fordi beskrivelsene av kompetansen ofte er overlappende og noen ganger ikke presist definert.

Gjennom analysen fikk jeg utfordret meg på kompleksiteten til rammeverket til Kilpatrick et al. (2001). Samtidig kan man ta i betraktning at det sikkert kunne blitt brukt andre rammeverk som kunne gitt en tydeligere analyse. Et annet verktøy som kunne gjort studien bedre mener jeg kunne vært intervju med elevene. Gjennom en dypere samtale med elevene tenker jeg man kunne fått et bedre grunnlag for å si noe om hvordan oppgaven har påvirket eller utviklet elevenes matematiske kompetanse, samt deres tanker rundt egen problemløsningsprosess.

Gjennom økten jobbet elevene mellom startfasen og angrepsfasen. Det jeg ble oppmerksom på var hvordan gruppe 1 byttet mellom start- og angrepsfase i arbeidet med å finne formelen, samtidig skiftet de mellom fasene når programmeringen stoppet opp. Dette kom hovedsakelig når programmeringen stoppet eller de ble usikre på metoden. Når dette skjedde opplevde jeg at de byttet ide istedenfor å diskutere hvorfor det de gjorde ikke fungerte. Det kan tenkes at dette viser tegn på å feilsøke etter en løsning. Samtidig vil jeg si at gruppe 1 viste tegn til samarbeid og å holde ut gjennom økten, som kommer under arbeidsmetoder for algoritmisk tenkning (Utdanningsdirektoratet, 2019).

For gruppe 2 opplevdes arbeidet veldig systematisk. Jeg tror dette kommer av at man hovedsakelig får innblikk i hva Lars tenker. Siden det ikke ble en diskusjon, får vi heller ikke innblikk i om Lars skiftet kognitivt mellom fasene. Det kunne vært interessant å se hvordan denne gruppen hadde jobbet videre med programmeringen siden de møtte en utfordring med notasjonen. Dette ble det ikke tid til siden vi ønsket å ha en samtale med elevene på slutten av økten.

Studerer man arbeidsprosessene til gruppene og ser bort fra anmelderfasen kan man observere at elevene bruker mest tid i angrepsfasen. Som nevnt i teorien kan det virke som om at angrepsfasen er den avgjørende siden den omfatter hoveddelen av beregninger som flere vil tenke er hoved aktiviteten. Man må huske at angrepsfasen kan bare gjennomføres hvis oppgaven er forstått og spørsmålet er tilfredsstillende oppgitt (Mason et al. , 2010). De fleste klarer ikke å løse problemet tilfredsstillende på grunn av for lite oppmerksomhet til start- og anmelderfasen. En må bruke tid på å forstå oppgaven og dens essens om angrepsfasen skal gi uttelling.

På bakgrunn av oppgavens resultater tenker jeg at man som lærer i større grad må legge til rette for at elevene får trening i å arbeide med problemløsningsoppgaver. Funnene i oppgaven viser indikasjoner på at elevene utrykker flere aspekter av matematisk kompetanse. Så det gir tegn på at problemløsningsoppgaver kan bidra til å utvikle elevens kompetanse. Elevene trenger mer trening i bruk av algoritmisk tenkning og programmets syntaks.

Som lærer kan man da anvende Stanic og Kilpatrick (1989) fem roller for problemløsning som et hjelpemiddel til å utvikle gode oppgaver for elevene. En lærer må passe seg for å redusere oppgavenes krav, siden dette kan begrense elevenes læringsutbytte (Winsløw, 2006). Det kan være krevende å unngå siden en personlig utfordring for læreren kan være at det er ukomfortabelt å ikke vite løsningen til problemet (Schoenfeld, 2016). Gjennom god veiledning og bevisstgjøring kan man som lærer bidra til at elevene utvikler sin matematiske kompetanse, og dermed kan få et bedre utbytte av problemløsningsoppgaver og programmering.

6. Avsluttende refleksjoner

I innledningen til denne oppgaven ble den nye læreplanen innen matematikk kort belyst, samt det at skolen er i utvikling for å møte fremtidige kompetansebehov i arbeids- og samfunnslivet. Det er et ønske at skolegangen elevene får skal bidra til mestring av livet som privatpersoner, samfunnsborgere og yrkesutøvere (NOU 2015: 8, 2015). Dette har vært bakgrunnen for motivasjonen bak oppgaven. Jeg ville skrive en oppgave som kunne bidra i min utvikling som lærer og samtidig forberede meg i møte med en skolehverdag. Som nevnt tidligere skriver Lorentzen (2013) at elevenes oppfatning av matematikk kan endre seg etter hvilke møter og erfaringer man har med matematikk. Altså min rolle som fremtidig matematikk lærer kan være avgjørende i bidraget til å fremme matematikken som fag for elevene. Elevenes forhold til matematikk kobles til det de blir eksponert for igjennom sin skolegang Denne oppgaven har i all hovedsak prøvd å belyse temaene matematisk kompetanse og problemløsningsprosesser, samt et innslag av programmering og algoritmisk tenkning. Problemløsning er en av de nye kjerneelementene, mens programmering og algoritmisk tenkning er verktøy elevene skal kunne ta i bruk som hjelpemidler til løsningen (Utdanningsdirektoratet, 2020). For å utforske de ønskede tema ble det gjennomført en datainnsamling hvor noen elever sitt samarbeid rundt å løse en programmeringsoppgave innen figurtall ble utgangspunktet for datamaterialet.

Oppgaven som ble valgt til datainnsamlingen var en problemløsningsoppgave som gjorde at elevene ikke automatisk kjente til en løsningsstrategi. Fra dette datamaterialet ble det undersøkt; *Hvilken matematisk kompetanse kom til uttrykk i samtaler mellom elever som har arbeidet med en problemløsningsoppgave med programmering som hjelpemiddel?* Gjennom analysen ble blant annet den matematiske kompetansen elevene utrykket gjennom deler av problemløsningsprosessen studert. I starten av masterprosjektet ble matematisk kompetanse valgt som tema grunnet min tolkning av matematisk kompetanse som grunnmuren innen matematikk. Jeg ønsket å se hvordan en problemløsningsoppgave med programmering kunne gi informasjon om elevenes matematiske kompetanse, samt deres problemløsningsprosess. Dette for å få et tydeligere overblikk over hva som foregår hos elevene når man som lærer gjerne ikke alltid er til stede. Prosjektet bekreftet kompleksiteten ved matematisk kompetanse. Flere av kompetansene er overlappende og krevende å skille. Samtidig kan elevene velge å ikke utrykke seg slik at vi får et innblikk i deres tanker og kompetanse. Dette kan være krevende om man ikke planlegger undervisningen opp mot utvikling av elevenes kompetanse. Fra prosjektet kan man se indikasjoner på at en problemløsningsoppgave utfordrer elevene og kan være med å utvikle deres matematiske kompetanse, gjennom at elevene blir utfordret på en annen måte gjennom problemløsningsoppgaver enn typiske metode oppgaver. Det prosjektet i tillegg ga utrykk for var at elevene har en kompetanse de kan utvikle eller tydeliggjøre gjennom oppgaver. Selv om utgangspunktene er ulike for elevene kan de med riktig hjelp utvikle seg og styrke sine kompetanser innen matematikk. Dette mener jeg dessuten vil påvirke elevenes evne til algoritmisk tenkning og overgangen til å kunne anvende programmeringen.

Hvor elevene programmerte så jeg flere interessante sammenhenger. Hva elevene får ut av å anvende programmering og matematikk sammen, vil imidlertid avhenge av hvordan jeg som lærer tar i bruk verktøyet. Her vil det være avgjørende å ta hensyn til elevenes forutsetninger og undervisningens formål. At programmeringen brukes som et verktøy i undervisningen kan være til stor hjelp. Denne oppgaven har tydeliggjort hvordan matematikk og programmering henger sammen, blant annet gjennom den algoritmiske tenkeren. Sammenhengen mellom disse tror jeg er viktig om elevene skal kunne se hvordan de kan anvende matematikken og programmeringen sammen. Samtidig tror jeg dette er noe som tar litt tid for lærere å vende seg til, siden det kommer store endringer i faget generelt sammen med implementeringen av programmering.

Med prosjektet har jeg fått kjennskap til noen elevers utrykk av matematisk kompetanse gjennom en problemløsningsoppgave. Jeg har fått innblikk i hvordan eleven anvender og bruker programmeringen. Jeg håper å kunne bruke funnene når jeg som fremtidig lærer skal bruke problemløsning og programmering i undervisning for å utvikle matematisk kompetanse. Jeg har i tillegg fått mer kjennskap til forskning innen feltet for programmering, matematisk kompetanse og problemløsning, og utvidet min forståelse for matematikklæring. Dette har vært en spennende læringsprosess som jeg håper kan komme andre lærere og studenter til nytte.

7. Referanseliste

Bjørkquist, O. (2001). Matematisk problemløsing. I Grevholm, B.(red.): Matematikk for skolen (s. 51–70). *Bergen: Fagbokforlaget. Norsk Pedagogisk Tidsskrift Årgang, 89,* 111-124.

Bjørndal, C. R. (2011). Det vurderende øyet. *Observasjon, vurdering og utvikling i undervisning og veiledning, 2*.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*, 72-87.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene* Abstrakt.

Creswell, J. W. (2002). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative* Prentice Hall Upper Saddle River, NJ.

Gjøvik, Ø. & Torkildsen, H. A. (2019). Algoritmisk tenkning. *Tangenten–tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(3), 31-37.

Govender, I. (2007). Experiences of learning and teaching: Problem solving in computer programming. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 11*(2), 39-50.

Grover, S. & Pea, R. (2013). Computational thinking in K–12: A review of the state of the field. *Educational researcher, 42*(1), 38-43.

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (bd. 1)Fagbokforlaget Bergen.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87*(7), 519-524.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics. National Research Council, Center for Education. Division of Behavorial and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). Det kvalitative forskningsintervju (3. utgave. utg.). *Oslo: Gyldendal Norske Forlag AS (Gyldendal Norsk Forlag AS 2015)*.

Lithner, J., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Palm, T. & Palmberg, B. (2010). Mathematical competencies: A research framework. *The seventh mathematics education research seminar, Stockholm, January 26-27, 2010* (s. 157-167): Svensk förening för matematikdidaktisk forskning, SMDF.

Lorentzen, L. (2013). Hva er matematikk? *Universitetsforlaget*.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (1st edition). Harlow: Pearson Education Limited.

Meld. St.20.(2012-2013). *På rett vei- Kvalitet og mangfold i fellesskolen*. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld-st-20-20122013/id717308/

Meld. St. 28. (2015-2016). *Fag–Fordypning–Forståelse—En fornyelse av Kunnskapsløftet.* Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/

Nilssen, V. L. (2014). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren* Universitetsforlaget.

Niss, M. A. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* Undervisningsministeriets forlag.

NOU 2014:7. (2014) *Elevenes læring i fremtidens skole. Et kunnskapsgrunnlag*. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/contentassets/e22a715fa374474581a8c58288edc161/no/pdfs/nou201420140007000dddpdfs.pdf

NOU 2015:8. (2015) *Fremtidens skole. Fornyelse av fag og kompetanser.* Oslo: Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2015-8/id2417001/

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (bd. 85)Princeton university press.

Røsseland, M. (2005, Januar). Hva er matematisk kompetanse? Tangenten, ss. 12-18

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1-38.

Shute, V. J., Sun, C. & Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review, 22*, 142-158.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*(1), 20-26.

Solvang, R. (1992). *Matematikk-didaktikk*. Bekkestua: NKI.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assessing of mathematical problem solving, 3,* 1-22.

Tjora, A. (2012). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (bd. 2)Gyldendal akademisk Oslo.

Tjora, A. (2017). Emergens: Konseptutvikling og generalisering i kvalitativ forskning: Refleksjoner og eksempler. *Sosiologisk poliklinikk, 1/2017*, 1-16.

Utdanningsdirektoratet. (2018). *Overordnet del av læreplanverket*. Utdanningsdirektoratet.

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Algoritmisk tenkning.* Hentet fra: https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/profesjonsfaglig-digital-kompetanse/algoritmisk-tenkning/

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk fellesfag Vg1 teoretisk.* Hentet fra https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT09-01.pdf?lang=nob

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35.

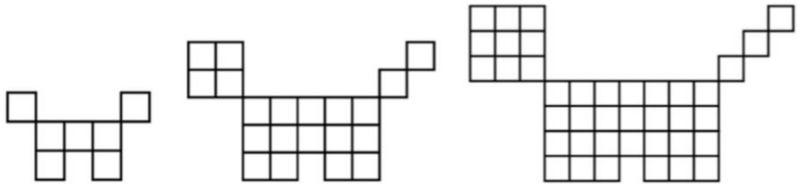
Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 366*(1881), 3717-3725.

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer: en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik* biofolia.

8. Vedlegg

Vedlegg 1: Oppgaven brukt i datainnsamlingen

Oppgave 1:



Figur 1 Figur 2 Figur 3

a) Ser dere et mønster? Hva er endringen fra en figur til neste?
b) Bestem et uttrykk for antall kvadrater i figur n. (forklar formelen)
c) Lag et program som tar et input n og skriver ut antall kvadrater i figur n.
Eksempel: Programmet kan se slik ut for en figur som er formet som et rektangel, med input 2:

```
Formelen for figur n er: n*(n+1)
For hvilken n vil du finne figurtallet? n-verdi:2
Figur 2 har 6 kvadrater
```

Oppgave 2:
Hva skriver dette programmet ut?
Forklar hva hver linje i programmet gjør.

```
number = int(input('What number do you want to check?' ))

if number % 2 == 0:
    print(f'The number {number} is an even number')
else:
    print(f'The number {number} is an odd number')
```

Oppgave 3:
Hva skriver dette programmet ut?

```
N = int(input('Skriv et tall:'))

n=1
while n <= N:
    print(' '*(N-n) + 'X'*(n) + ('X'*(n-1)))
    n = n+1
```

Vedlegg 2: Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet Masteroppgave i matematikkdidaktikk med fokus på programmering

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å analysere argumentasjon og prosess i arbeidet med programmering i matematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med masterstudien er å observere elevers arbeidsmetode med oppgaver som omhandler programmering i matematikk. Observasjonen vil foregå over et gitt antall timer. Personopplysninger blir behandlet konfidensielt og slettes etter bearbeiding av lydopptak.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Ane Viken, Emilie Lillehagen Brenden og Johan Lie ved Universitetet i Bergen er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta i studien fordi du tar matematikk 1T og læreren din har anbefalt deg.

Hva innebærer det for deg å delta?

Datainnsamlingen foregår med spørreskjema, notater, lyd- og skjermopptak som vil fokusere på arbeidsprosessen og ikke ferdig resultat. Lyd- og skjermopptak vil kun foregå under arbeid med oppgavene og deltakerne kan sette pc-en i flymodus eller liknende for å unngå varsler av personlige interesse under opptakene. Det vil ikke være den enkelte elev i fokus, men arbeidsprosessen og diskusjonene til en gruppe elever som ikke vil kunne identifiseres. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen av masteroppgaven. Alle opplysninger transkriberes og krypteres slik at det ikke er mulig å kobles til enkeltpersoner i etterkant av studien. Innsamlerne vil være tilstede under arbeidet for å kunne svare på spørsmål knyttet til prosjektet. Prosjektet vil bli gjennomført i skoletiden og gjennomføringen av prosjektet har blitt godkjent av ledelsen på skolen.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Vi bruker bare en liten gruppe av klassen, så dersom du ikke ønsker å delta vil du følge vanlig klasseromsundervisning med faglæreren din. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Skolen og læreren vil ikke bli informert om du trekker deg og det vil ikke påvirke ditt forhold til læreren eller skolen.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Alle kontaktopplysninger vil være lagret innelåst og kryptert. Lyd- og skjermopptak vil brukes til å samle inn data for å besvare studentenes masteroppgave. Opptakene oppbevares trygt på en ekstern harddisk og blir slettet etter transkribering. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen av prosjektet. Studenter Ane Viken og Emilie Lillehagen Brenden samt deres veileder Johan Lie vil ha tilgang til dataen.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene, lyd- og skjermopptak anonymiseres og slettes når prosjektet avsluttes, noe som etter planen er 30. juni 2021.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Matematisk institutt ved Universitetet i Bergen har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- Universitetet i Bergen ved Johan Lie som kan kontaktes på tlf: [redacted] og e-post: [redacted]
- Emilie Brenden kan kontaktes på tlf: [redacted] og e-post: [redacted]
- Ane Viken kan kontaktes på tlf: [redacted] og e-post: [redacted]
- Universitetet i Bergen sitt personvernombud kan kontaktes på e-post: personvernombud@uib.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Johan Lie (Forsker/veileder)	Ane Viken (Student)	Emilie Brenden (Student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet Masteroppgave i matematikkdidaktikk med fokus på programmering, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i lyd- og skjermopptak
- ☐ å delta i spørreundersøkelse

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)