«Det var jo en åpenbaring. Blir nesten som om vi har oppdaget en ny religion!»

En casestudie av et utforskende Matematikk 1T-klasserom.

Åse Østebø

Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk,

Matematisk institutt, Universitetet i Bergen.

Juni 2022

Sammendrag

Denne masteroppgaven presenterer en casestudie som ser på hvordan en erfaren og engasjert matematikklærer kan få til et utforskende klasserom, der læring skjer i samhandling mellom elevene. Målet med forskningsprosjektet har vært å finne hvilke pedagogiske grep denne erfarne og engasjerte læreren benytter for å få til elevaktiv utforskning.

Studien er gjennomført som en kvalitativ studie der jeg har observert en lærer, og hennes matematikk 1T- klasse, i sju 120 minutters økter. For å analysere observasjonene fra matematikklasserommet benyttet jeg Cobb (2000) sitt rammeverk for klasseromsanalyser.

Jeg fant at lærer la til rette for utforskende problemløsning ved å la elevene tenke sammen i små, synlig tilfeldig-valgte grupper, på vertikale ikke-permanente tavler. Oppgavene var problemoppgaver, med lav inngangsterskel og stor takhøyde, de ble gitt i oppstart av timen, som oftest muntlig og som regel en om gangen. Jeg fant videre at klassen konsoliderte ved vandring, der lærer brukte prinsipp fra fem praksiser samt samtalegrep for å få elevene til å dele, samtale om og bygge videre på hverandres idéer. Alt dette, sammen med normene som var etablert i klasserommet, førte til et klasserom der elevene samskapte forståelse i matematikk.

Forord

Med denne oppgaven avslutter jeg studiet «Erfaringsbasert master i undervisning, med fordypning i matematikk» ved Universitetet i Bergen. Jeg ønsker å rette en stor takk til min dyktige veileder Ove Gunnar Drageset: Takk for tålmodighet og alltid konstruktive tilbakemeldinger! Jeg vil også få takke professorene i masterprogrammet for interessante fag, og mine medstudenter for å ha gjort samlingene enda kjekkere. En stor takk må også rettes til mine forskningsdeltakere, spesielt til Astrid, som tok imot med åpne armer og viste interesse for forskningsprosjektet mitt. Jeg vil også få takke min egen skole for tilrettelegging slik at jeg kunne få fordype meg i matematikkdidaktikk.

Til Lasse, Tore og Stian: I love you to the moon and back.

Innhold

Figurliste

1. Innledning

1.1 Bakgrunn og valg av tema

Jeg har undervist i matematikk på videregående trinn i over 25 år og synes fremdeles at det er den beste jobben noen kan ha! Jeg er heldig som hver arbeidsdag får forholde meg til flotte unge mennesker, som oftest motiverte for faget «mitt»! Jeg har alltid prøvd å få elevene til å forstå, ikke bare «pugge metoder» eller lære seg algoritmer. Jeg mener at jeg etter å ha undervist i mange år er blitt flinkere til å «lese» elevene og lettere kan tilpasse undervisningen og endre kurs om noe ikke går som forventet. Hvert år er det nye elever, nye klasser, nye sammensetninger, og av erfaring vet jeg at ingen ferdige opplegg fungerer for alle. Det er derfor nyttig å stoppe opp og tenke gjennom hva som skal til for å få bedre undervisning og ikke minst bedre læring for elevene mine. Det er farlig å tro at en er ferdig utlært og ikke kan forbedre seg. Jeg er glad i elevene mine og jobben min, og ønsker å gjøre en så god jobb som mulig i klasserommet.

Det fysiske klasserommet er blitt bedre. Ved min skole har vi matematikklærere deltatt i et matematikkprosjekt for å få til mer utforskende undervisning. Vi er blitt inspirert av Liljedahl (2016) sine vertikale tavler, og har fått installert flere whiteboards rundt i klasserommet. Nå har vi klasserom der det ikke bare er en tavle foran som er forbeholdt læreren.

Jeg har selv testet ut dette i undervisningen: problemløsningsoppgaver i små grupper der elevene står ved vertikale tavler og samarbeider. Jeg har erfart motiverte, engasjerte elever som koser seg med matematikk. Jeg ønsker at elevene mine skal oppleve glede med faget, i tillegg til å få kunnskap de kan ta med til videre studier.

Når jeg nå har fått en mulighet til å fordype meg i et masterprosjekt ønsker jeg derfor å se videre på hvordan vi lærere kan tilrettelegge for læring i et utforskende klasserom, der vi har aktive elever og gode helklassediskusjoner i klasserommet. Jeg tenker at dette kan være nyttig både for meg og for eventuelle lesere av denne oppgaven: å se hva som fungerer for å få elevene til å tenke og lære.

1.2 Oppgavens relevans

I Norge, som i verden ellers, skjer det en endring i hvordan vi tenker på læring og undervisning. Bransford, Brown og Cocking (1999, s.v), som i et forskningsprosjekt har undersøkt hvordan nyere hjerneforskning har ført til «new development in the science of learning», sier at i begynnelsen av forrige århundre var søkelyset på å lære å lese, skrive og kalkulere. De sier at det var ingen forventninger om at elever skulle stille kritiske spørsmål til det de leste, at de skulle kunne uttrykke seg klart og overbevisende, eller at de skulle kunne løse komplekse problemer i for eksempel naturfagene og matematikk. De mener at nå kreves disse egenskapene av nesten alle. Det å vite noe, «knowing», har ifølge Bransford et al. (1999) endret betydning fra å kunne huske og repetere informasjon til at en må kunne finne og bruke informasjonen. Bransford et al. (1999) sier at den enorme mengden kunnskap som finnes gjør det umulig for skoler og universiteter å undervise alt. I informasjonssammenheng er 1999 lenge siden, det var sant da, og enda mer aktuelt i dag! Informasjons- og kunnskapsmengden øker raskere enn noensinne. Bransford et al. (1999) sier at målet for undervisning må bli å hjelpe elever og studenter å utvikle de intellektuelle redskapene og læringsstrategiene de trenger for å få den kunnskapen som gir dem mulighet til å tenke produktivt om fagene. De sier at elevene må få en grunnleggende forståelse om fag, inkludert hvordan en skal kunne stille meningsfulle spørsmål innen de ulike fagområdene. Bransford et al. (1999, s.5) mener derfor at målet for utdanning nå må være å bidra til individers forståelse om læring, slik at de kan bli selvdrevne «lifelong learners».

Her i Norge er vi i gang med mye læreplaner, Kunnskapsløftet 2020 (Kunnskapsdepartementet 2017, s.10), og også her nevnes livslang læring:

> «Grunnopplæringen er en viktig del av en livslang danningsprosess som har enkeltmenneskets frihet, selvstendighet, ansvarlighet og medmenneskelighet som mål. Opplæringen skal gi elevene et godt grunnlag for å forstå seg selv, andre og verden, og for å gjøre gode valg i livet.»

Det står videre (Kunnskapsdepartementet 2017, s.10) at

> «Danning skjer når de arbeider på egen hånd, og når de samarbeider med andre. De dannes når de bryner seg på teoretiske utfordringer ved hjelp av formler og fagstoff, og når de tar i bruk redskaper for å mestre en praktisk oppgave. Danning skjer når elevene lærer hvordan de kommer fram til riktig svar, men også når de forstår at det ikke alltid finnes enkle fasitsvar.»

Holdningene i Kunnskapsløftet 2020 (Kunnskapsdepartementet, 2017) er altså som hos Bransford, Brown & Cocking (1999): elevene skal lære å lære. Dette skal skje alene og i samarbeid med andre.

Schoenfeld (2016), som forsker på tenkning, undervisning og læring i matematikk, sier at det skjedde en stor endring innen matematikkundervisning i 1989, ved publiseringen av National

Council of Teachers of Mathematics (NCTM) sine Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Før dette fokuserte læreplaner på innholdet elevene skulle lære: aritmetikk, geometri, algebra og så videre. Han sier at NCTM sine «standards» også listet et slikt innhold, men i tillegg la standardene stor vekt på prosessene elevene skulle engasjeres i for å bli dyktige i matematikk: matematisk problemløsning, matematisk kommunikasjon, matematisk resonnering og å se matematiske sammenhenger. Dette kjenner vi igjen som kjerneelementer i matematikk i det nye læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020 (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.2 – 3): Utforsking og problemløsing, Modellering og anvendelser, Resonnering og argumentasjon, Abstraksjon og generalisering og Matematiske kunnskapsområder.

Liljedahl (2016), som i over 20 år har forsket på matematikklasserom, sier at det er et økende fokus på problemløsning i matematikk. Liljedahl (2016, s.362) fremhever problemløsning, aktivitet og diskusjon for å få til det han kaller tenkende klasserom:

> «a classroom that is not only conducive to thinking but also occasions thinking, a space that is inhabited by thinking individuals as well as individuals thinking collectively, learning together and constructing knowledge and understanding…»

Matematisk kommunikasjon ble som nevnt inkludert som en av standardene til NCTM fra 1989, og i den nye læreplanen for matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.2) står det at utforskning handler om at elevene skal finne mønster og sammenhenger, og diskutere seg fram til en felles forståelse. Carpenter, Franke og Levi (2003, s.7), som forsker på matematikkundervisning på barnetrinnet, mener at elever som lærer å artikulere og argumentere for sine matematiske idéer, som må resonnere gjennom sine egne og andres matematiske forklaringer og som må begrunne svarene sine, utvikler en dyp forståelse som er viktig for deres videre suksess i matematikk. Vi som underviser kan vel alle si at vi selv forstår faginnhold mye bedre etter at vi har måttet forklare for elevene våre. Så vi matematikklærere ønsker elever som snakker matematikk, som forklarer og resonnerer, og som løser problemer. Ikke kun fordi det står i nyere læreplaner, men fordi vi tror det fører til bedre, dypere læring, der elevene ser sammenhenger og bygger videre på det de allerede kan.

Cazden (2001), i sin forskning på diskursanalyse, sier at læreplanene nå legger mindre vekt på fakta og prosedyrer som skal læres utenat, og mer vekt på prosesser og strategier for læring. Hun sier at lærere dermed blir bedt om å endre den tradisjonelle undervisningen som best passer til overføring av fakta og prosedyrer. Cazden (2001, s. 5) sier at lærere nå forventes å lede «ikke-tradisjonelle diskusjoner» som bedre skal stimulere og støtte «høyere ordens tenkning». Hun sier at dette ikke er lett. Cazden (2001) sammenlikner klasserom med restauranter og busser med tanke på at det i alle disse plassene foregår simultane samtaler. Men det er bare i klasserommet at en person, læreren, er ansvarlig for å styre alle samtalene. Cazden (2001, s.2) sier at lærer ikke bare skal kontrollere negativt, for å unngå «kollisjoner», men også positivt for å fremme læring.

Til tross for reformer og en generell aksept for at elever lærer bedre om de får utforske, problemløse, argumentere og diskutere, foregår det mye tradisjonell ensrettet undervisning i matematikklasserom. Franke, Kazemi og Battey (2007) fant, i sin gjennomgang av forskning om matematikkundervisning og klasseromspraksis, at det vanligste mønsteret i klasserom har vært lærerstyrt IRE: lærer initierer ved å spørre et spørsmål, en elev får respondere og lærer evaluerer. De sier det har vært lite fokus på at elevene skal forklare tenkningen, trekke slutninger eller bli enige om matematiske idéer i felleskap.

Å la elever få utforske og diskutere seg fram til sammenhenger kan være tidkrevende. I tillegg stiller det andre krav til oss som lærere. Vi må være klar til å svare på uventede spørsmål dersom elevene står fast. Vi må vite hvordan vi skal hjelpe dem videre.

Franke et al. (2007, s.230) sier at selv om forskere vet at lærers rolle i å støtte samtalepraksiser er avgjørende for at slike praksiser skal lykkes, så viser funnene fra gjennomgangen av eksisterende forskning at vi vet lite om hva lærer må gjøre for å støtte klasseromssamtaler slik at det åpnes for deltakelse og fremmer elevenes utvikling av kunnskap og identitet.

Det kan tenkes at lærere velger bort elevaktiv utforskende undervisning fordi de er usikre på hvordan de skal få det til.

1.3 Forskningsspørsmål

Vi ønsker at elevene skal lære matematisk resonnering og store matematiske idéer. Jeg tenker, som Kunnskapsdepartementet (2017), Bransford et al. (1999), Schoenfeld (2016), Liljedahl (2016) og Carpenter et al. (2003), at det å la elevene få utforske og problemløse i felleskap, det å la dem finne mønster og trekke slutninger og ikke minst la dem diskutere og kommunisere, vil føre til en bedre og dypere forståelse av matematikk.

Jeg har vist til Franke et al. (2007), som sier at vi mangler kunnskap om hvordan lærer kan tilrettelegge for praksiser der elevene samtaler om og diskuterer matematikk. I mine litteratursøk har jeg funnet at forskning på utforskning og kommunikasjon i klasserommet er veldig aktuelt, men at mesteparten av den tilgjengelige forskningen er fra barnetrinnet og fra andre land enn Norge. Jeg tenker at det trenges mer kunnskap om hvordan vi kan skape utforskende klasserom der elever får samtale om matematikk for å lære sammen, også fra norske forhold, og på videregående trinn.

Jeg ønsker derfor å undersøke et klasserom der utforsking og kommunikasjon er i jevnlig bruk for å lære matematikk. Jeg vil følge en erfaren lærer som har undervist i matematikk i mange år, nettopp på videregående trinn. Denne læreren skal også være engasjert, i betydningen av interessert i å lære og utvikle sin egen undervisning, og interessert i å få til et godt læringsmiljø for elevene sine. En kan lære mye av de som er erfarne og engasjerte, da de er trygge på egen undervisning og dermed vil teste ut nye metoder om de har tro på dem. Ved å følge en slik lærer i et masterprosjekt kan jeg gå i dybden på en måte som jeg ikke har anledning til ellers. Jeg håper at jeg kan lære, og dele med leserne, hvilke pedagogiske grep en erfaren og engasjert lærer bruker for å få til et lærende klasserom.

Staples (2007, s.4 – 5) sier i sin forskning på samskapende, utforskende matematikk, at

> «læring resulteres av, og vises ved, at elevene deltar i både standarddisipliner (som å begrunne og representere algebraisk) og en rekke andre praksiser i matematikkfellesskaper (som å spørre, kommunisere og resonnere). Derfor er det å forstå den sosiale konteksten og praksisen i et klasserom, og hvordan lærer organiserer og støtter disse praksisene, av avgjørende betydning for å forstå hvilke læringsmuligheter elevene gis.»

Det er viktig å forstå klasserommet, og hvordan lærer legger til rette for lærende praksiser.

Mitt forskningsspørsmål er dermed:

> «Hvilke pedagogiske grep bruker en erfaren og engasjert lærer for å tilrettelegge for læring i et utforskende matematikkklasserom?»

Pedagogiske grep handler om hva læreren gjør for å organisere og gjennomføre undervisningen. Målet med studien er dermed å se hvordan en erfaren og engasjert lærer får til utforskende matematikk og gode matematikkdiskusjoner i sitt klasserom, så jeg, og lesere av denne oppgaven, kan lære noe vi kan bruke videre i vår egen undervisning.

1.4 Oppgavens oppbygging

Jeg har i dette kapitlet presentert litt om min bakgrunn og litt om eksisterende forskning som viser hvorfor jeg bør forske på matematisk utforsking og kommunikasjonen som følger med denne utforskningen elevene gjør i felleskap. I kapittel to vil jeg presentere teori som er relevant for temavalget mitt. Hvordan forskningen min vil foregå, det vil si valg av metode, blir presentert i kapittel tre. I kapittel fire presenteres resultatene fra den kvalitative undersøkelsen. Jeg drøfter her resultatene i lys av teori presentert. Resultatene og drøftingen vil danne grunnlag for konklusjonen i kapittel fem. Til slutt vil jeg si noe om hva som kunne vært interessant å forske videre på.

2. Teori

Jeg vil i dette kapitlet presentere teoretisk rammeverk for oppgaven. Jeg skal forske på hvordan en kan få til utforskende læring, det er derfor naturlig å begynne med å si noe om læringsteorier og hvilket læringssyn denne oppgaven preges av. Jeg vil deretter presentere teori om elevenes og lærers rolle for læring. Så vil jeg presentere teori om endring i læringsbegrepet og hva vi nå ønsker at elevene våre skal lære. Jeg kommer da inn på dybdelæring og relasjonell forståelse. Jeg vil videre presentere teori som sier noe om problemløsning og oppgaver som fremmer tenkning. Jeg skal forske på et klasserom der det foregår utforskning og utbredt bruk av kommunikasjon blant elever, jeg presenterer derfor også teori som foreslår hvordan vi kan tilrettelegge for undervisningspraksiser som fremmer tenkning og læring. Til slutt i dette kapitlet vil jeg presentere et rammeverk for å analysere matematikklasserom.

2.1 Læringsteorier og lærerens rolle

I dette delkapitlet presenterer jeg ulike læringsteorier og hvilket læringssyn vi nå har, deretter teori om elevenes innvirkning på læring og om lærerens rolle for læring i klasserommet.

2.1.1 Sosiokulturell læringsteori

Goos (2004), i sin forskning på hvordan en lærer kan skape en utforskningskultur i et matematikklasserom i en australsk videregående skole, sier at sosiokulturell teori for læring kan kobles til den russiske psykologen Vygotsky. Vygotsky mente at sosiale interaksjoner er utgangspunktet for høyere mentale funksjoner, og at hukommelse, det å forstå konsepter og trekke slutninger først skjer mellom mennesker på det sosiale plan, og så i individer på det psykologiske plan (Goos, 2004). Vygotsky sier at barns samhandling med en voksen eller med en dyktigere jevnaldrende, vekker mentale funksjoner som ennå ikke er utviklet i barnet. Disse funksjonene ligger mellom det faktiske og potensielle utviklingsnivå, og mellom det barnet kan få til alene og med assistanse (Goos, 2004). Avstanden mellom et barns problemløsningskapasitet når det jobber alene og når det får assistanse av en mer kapabel partner (lærer eller jevnaldrende), kaller Vygotsky for den proksimale utviklingssonen («zone of proximal development», ZPD) (Goos, 2004, s.262). Vygotsky sier at det er innenfor denne proksimale utviklingssonen at læring kan skje (Goos, 2004).

2.1.2 Konstruktivistisk læringsteori

Von Glasersfeld (1995), som utviklet teori om radikal konstruktivisme, sier at Piaget var pioneren innen det konstruktivistiske syn på læring. Piaget (1937, referert til i von

Glasersfeld, 1995, s.57) sier at «The mind organises the world by organising itself.» Von Glasersfeld (1995) tolker dette som at våre kognitive hjerner former og koordinerer opplevelser, og bruker disse til å skape en strukturert verden. Piaget (1976, referert til i von Glasersfeld, 1995, s.62) sier videre at ingen oppførsel, selv om den er ny for individet, er en «absolutt begynnelse». Han sier at alt vi gjør, ser og opplever, «podes på» eksisterende kognitive skjema, og nye erfaringer assimileres inn i allerede konstruerte strukturer. Piaget (1970, referert i von Glasersfeld, 1995, s.57) sier at det ikke er urimelig å tenke at virkelighetens egentlige natur er å være under kontinuerlig konstruksjon, i stedet for å være sammensatt av ferdige strukturer. Von Glasersfeld (1995) sier at læringsteorien som framkommer fra Piagets arbeid kan oppsummeres ved at kognitiv endring og læring skjer når noe en observerer eller opplever ikke passer inn i de allerede eksisterende kunnskaps-strukturene. Han sier at det skapes en forstyrrelse, og disse forstyrrelsene vil føre til en endring i kunnskapen slik at en ny likevekt kan etableres.

2.1.3 Sosialkonstruktivistisk læringsteori

Cobb, Yackel og Wood (1992) sier at teoriene som karakteriserer læring som en prosess der elever endrer sine indre mentale representasjoner for å konstruere matematiske relasjoner, ikke har lykkes med å ta hensyn til matematikkens sosiale og kulturelle natur. De sier at antagelsen om at elevene vil konstruere de korrekte indre representasjonene fra materiale som blir presentert til dem, antyder at læringen deres trigges av matematiske relasjoner de skal konstruere før de har konstruert dem. Cobb et al. (1992), og senere Yackel og Cobb (1996), foreslår at matematisk læring både er en aktiv individuell konstruksjon og en sosial øvelse der en tar del i matematikken som er del av det større fellesskapet. Med Piaget som representant for konstruktivismen og Vygotsky som representant for de sosiokulturelle læringsteoriene kan en dermed tenke seg Cobb et al. (1992) sitt syn på læring som satt sammen av disse to retningene. Yackel og Cobb (1996, s.460) sier at det ikke er mulig å skille utviklingen av et individs resonnering og forståelse fra dets deltakelse i «the interactive constitution of taken-as-shared mathematical meanings».

Brodie (2010), i sin forskning på matematisk resonnering, sier at læring skjer når den som lærer gjør observasjoner, prøver å finne bevis og forklaringer, og kobler disse til eksisterende kunnskap slik at denne restruktureres. Hun sier at for å få til denne restruktureringen er forklaring, kommunikasjon, og begrunnelser av regler og antagelser nøkkelbegrep. Hun sier videre at det er i denne kommunikasjonsprosessen at den som lærer evaluerer og bearbeider ny kunnskap. Cobb et al. (1992), Yackel og Cobb (1996) og Brodie (2010) mener at læring konstrueres, men ikke uavhengig av den sosiale konteksten den skjer i. Dette synet på læring kalles sosialkonstruktivistisk syn på læring.

Bransford et al. (1999, s.10) er enig i at vi nå har et læringssyn hvor vi mener at mennesker konstruerer ny kunnskap og forståelse basert på hva vi allerede kan og tror, det vil si vår «pre-existing knowledge». Dette betyr også at vi kan misforstå dersom vi bygger den nye kunnskapen vår på tidligere «preconceptions / misconceptions». De forteller om Lionni sin historie «Fish is fish» hvor en fisk er interessert i å lære hvordan livet er på land. Han blir venn med et rumpetroll som blir til en frosk som hopper i land. Frosken kommer tilbake til fisken og forteller om mennesker, fugler og kyr. I boka er det tegninger av hvordan fisken ser for seg disse, alle er fisker, men «menneskene» er fisker som går på halefinnen, fuglene er fisk med vinger og kyrne er fisk med jur. Bransford et al. (1999, s. 10) sier at denne historien illustrerer hvordan vår eksisterende kunnskap farger ny informasjon vi får. Bransford et al. (1999, s.10) mener at det er viktig at lærerne tar hensyn til eventuelle «incomplete understandings» og «false beliefs». Bransford et al. (1999, s.11) sier at det finnes store mengder bevis på at læring forbedres når lærere tar hensyn til kunnskapen og tankene elevene bringer med seg, og bruker disse som et utgangspunkt for ny læring.

2.1.4 Elevenes bakgrunn har betydning for læring

Hattie (2015) har gjennom sin studie av 1200 metastudier funnet at det viktigste aspektet for læring i et klasserom er hva elevene bringer med seg. Han sier at elevene kommer med forskjellig bakgrunnskunnskap og forskjellig motivasjon og formål for å lære. Han sier videre at elever har sine egne måter å studere på, noen liker å samarbeide, andre vil helst jobbe alene. Hattie (2015, s.87) sier at elever har sine «likes and dislikes» og de kan være smarte eller streve med faget. Hatties (2015) forskning sier at omtrent 50% av forskjellene i læring skyldes elevene selv. Hiebert og Grouws (2007), som forsker på hvordan en effektivt kan undervise matematikk, er enig med Hattie (2015) i at læring avhenger av elevene. Hiebert og Grouws (2007, s.375) sier at effekten av undervisning påvirkes av elevenes tenkning, av deres oppmerksomhet i timene, av deres tolkning av det lærer presenterer, av oppgavene de får og av deres tidligere kunnskaper og ferdigheter.

2.1.5 Lærer som kilde til elevenes læringsutbytte

Hattie (2015) sier at læreren er den neste store kilden til forskjell i læringsutbytte blant elevene. Ifølge Hattie (2015) sine studier, skyldes mellom 20 og 25 prosent av den totale læringsforskjellen lærerne. Han mener det er denne kilden vi kan ha en viss kontroll over.

Muijs og Reynolds (2002) sier at deres forskning på 103 grunnskolelærere og 2148 elever i Storbritannia, der de undersøkte prestasjoner på prøver, observerte i klasserom og analyserte spørreskjema, viser at lærerens oppførsel i klasserommet har en direkte effekt på elevenes resultater. De fant at det som skjer på klasseromsnivå er viktigere enn skolenivå og at selv for gode, effektive skoler så er det forskjeller på klassenivå. De mener at dette skyldes lærer. Muijs (2010, s.858) sier at det i de siste årene har vært forsket mye på hvordan klasserom ser ut og hvilke IT-ressurser som er tilgjengelige, men han sier at «det viktigste elementet på klasseromsnivå ser ut til å være det læreren gjør». Også i Norge tenker en at lærerens rolle er viktig: Wæge og Nosrati (2015) sier i deres forskning på matematikkdidaktikk at læreren og klasseromskulturen har stor betydning for elevers motivasjon i arbeid med matematikk.

Muijs og Reynolds (2002, s.3 – 4) sier at de seneste års forskning på lærers innflytelse på elevers læring kan oppsummeres slik: «Get the classroom climate right, get the teaching right». De sier også at lærere må bruke forskjellige undervisningsstrategier. Muijs og Reynolds (2002) sier om klasseromsmiljøet at effektive klasserom er varme og støttende, og at de karakteriseres ved høye forventninger og lærerentusiasme. Om undervisningen så sier de at forskningen viser at matematikkresultatene blir bedre om klassen undervises som helhet i stedet for at elevene arbeider med arbeidsark eller planer på egenhånd. De sier om denne helklasseundervisningen at lærer må involvere elevene og at rene forelesninger (lecture style lessons) må unngås. Muijs og Reynolds (2002, s.3) sier videre at elevene trenger muligheter til å jobbe med det de kaller «cooperative small group work».

2.1.6 Læreres oppfatning (beliefs) om matematikk

Muijs og Reynolds (2002, s.4) forteller at det også har vært forsket mye på læreres oppfatning (beliefs) om matematikk, og ifølge en studie utført på 90 lærere fant Askew et al. (1997, referert til i Muijs og Reynolds (2002)) at «highly effective teachers were characterized by connectionist beliefs». Muijs og Reynolds (2002, s.5) sier om «connectionist teachers» at disse mener at flesteparten av elever kan lære matematikk og de ser på misoppfatninger som viktige redskaper for å lære. Dette stemmer med holdningen tidligere presentert av Bransford et al. (1999). Muijs og Reynolds (2002) mener videre at connectionist-lærerne har en tro på at det å kunne matematikk innebærer å velge passende problemløsningsstrategier, relatere ny kunnskap til tidligere kunnskap og se sammenhenger til andre deler av læreplanen. Hattie (2015) er enig med Muijs og Reynolds (2002) om at læreres oppfatning (beliefs) om matematikk og deres egen rolle i matematikkundervisning er viktig. Han sier at god undervisning handler mindre om hva lærere gjør i sin undervisning, og mer om hva lærere tenker om sin rolle. Hattie, (2015, s.79) sier at utbytte og engasjement i undervisningen maksimeres når lærer ser undervisning og læring gjennom elevenes øyne, og når elevene blir sine egne lærere.

2.2 Endring i læringsbegrepet

Som nevnt i innledningen ser det ut som om begrepet læring skiftes mer mot forståelse enn å kunne gjengi fakta. Bransford, Brown & Cocking (1999) peker allikevel på at vi trenger fakta og bakgrunnskunnskap, det vi ofte kaller overflatelæring. De sier at forskning på eksperter viser at deres evne til å tenke og løse problemer avhenger av at de har en stor mengde faktakunnskap om temaet. Bransford et al. (1999, s.9) sier at denne «usable knowledge» ikke er en liste med løse fakta, men at ekspertenes kunnskap henger sammen og er organisert rundt viktige konsepter. De sier at ekspertenes kunnskap er betinget (conditionalized), slik at de vet hvilke spesifikke kontekster den stemmer i og hvordan den kan forstås og overføres til andre kontekster. Hattie (2015, s.80) snakker om «surface learning», overflatelæring, som det å lære seg fakta, idéer og innhold i fag mens «deeper learning», dybdelæring, er å forstå sammenhenger og forbindelser mellom idéer og å kunne bruke disse idéene i nye kontekster.

2.2.1 Dybdelæring og relasjonell forståelse

Vi har nye læreplaner, Kunnskapsløftet 2020, der det er følgende kjerneelementer i matematikk 1T (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.2 – 3): Utforsking og problemløsing, Modellering og anvendelser, Resonnering og argumentasjon, Abstraksjon og generalisering og Matematiske kunnskapsområder. Disse kjerneelementene viser at elevene våre skal lære å tenke og resonnere, de skal kunne utforske, trekke slutninger (generalisere) og løse ukjente problemer. Dette ser ut til å tilsvare Hatties (2015) «deeper learning». Utdanningsdirektoratet (2019) sier om dybdelæring at det er

> «å lære noe så godt at du forstår sammenhenger og kan bruke det du har lært i nye situasjoner. Dybdelæring er altså mer enn faglig fordypning.»

Videre definerer de dybdelæring slik:

> «Vi definerer dybdelæring som det å gradvis utvikle kunnskap og varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder. Det innebærer at vi reflekterer over egen læring og bruker det vi har lært på ulike måter i kjente og ukjente situasjoner, alene eller sammen med andre.»

Vi skal altså bort fra å kun lære fakta, regler og prosedyrer. Elevene skal se sammenhenger og lære å lære. Skemp (2006) sier i sin forskning på undervisningsteori, at alle gode lærere bygger opp et lager av empirisk kunnskap. Han mener at vi i undervisningen vår bruker og stoler på generelle prinsipper fra denne kunnskapen. Han sier videre at så lenge denne kunnskapen er på det intuitive nivået, er det vanskelig å kommunisere og dele den. Han mener at for å gi retning til hva en skal gjøre i en kompleks situasjon, er ingenting så effektivt som en god teori. Skemp (2006) introduserte derfor begrepene relasjonell forståelse og instrumentell forståelse i matematikk. Om relasjonell forståelse sier han at dette er det han alltid har ment med forståelse: å vite både hva og hvorfor. Instrumentell forståelse ville han tidligere ikke ha kalt forståelse, men «rules without reasons» (Skemp, 2006, s.89). Han sier at dette allikevel er noe mange elever, og lærere, mener med forståelse. Denne instrumentelle forståelsen vil være til stede når elever vet hvordan de skal løse oppgaver. Wæge og Nosrati (2015) sier at relasjonell forståelse er når en både vet hvordan en oppgave skal løses og hvorfor det må være sånn. De mener at relasjonell forståelse er at en har forstått de underliggende relasjonene og ser sammenhenger mellom begrep. Skemp (2006) sin relasjonelle forståelse kan dermed sammenlignes med Hatties (2015) «deeper learning» og Utdanningsdirektoratets (2019) dybdelæring.

2.2.2 Problemløsning og problemløsningsoppgaver

I forbindelse med at elevene skal lære å se sammenhenger, så er altså et av de nye kjerneelementene i læreplanen til matematikk i forbindelse med Kunnskapsløftet 2020, «utforsking og problemløsing». Om problemløsning står det her at (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.2):

> «Problemløysing i matematikk T handlar om at elevane utviklar ein metode for å løyse eit problem dei ikkje kjenner frå før.»

Videre står det at

> «Problemløysing handlar òg om å analysere og forme om kjende og ukjende problem, løyse dei og vurdere om løysingane er gyldige.»

Under kjerneelementet «resonnering og argumentasjon» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.3) står følgende:

> «Resonnering i matematikk T handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer. Det inneber at elevane skal forstå at matematiske reglar og

> resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar. Elevane skal utforme eigne resonnement både for å forstå og for å løyse problem. Argumentasjon i matematikk T handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige.»

Det spesifiseres altså at elevene skal kunne resonnere om problem, og at problemløsning er å løse problemer de ikke kjenner fra før. Liljedahl (2021) sier at problemløsning er det vi gjør når vi ikke vet hva vi skal gjøre, og at gode problemløsningsoppgaver fører til at elevene står fast, og så må tenke og kanskje eksperimentere, prøve og feile, og bruke deres eksisterende kunnskap på nye måter for å komme videre. Schoenfeld (1992, s.56) sier om problemløsning:

> «Problem solving, in the spirit of Pólya, is learning to grapple with new and unfamiliar tasks, when the relevant solution methods (even if only partly mastered) are not known.»

Også Schoenfeld (1992) sier altså at vi må ha oppgaver der vi ikke allerede kjenner en algoritme for å løse dem, for at det skal være problemoppgaver. Brodie (2010, s.45) sier at oppgaver som kan løses på forskjellige måter, som krever at elevene må bruke forskjellige representasjonsformer og der de må forklare, argumentere for, og kommunisere idéene sine, stiller høyere kognitive krav (higher cognitive demand) enn de som kun har én løsningsmetode og ikke krever ekstra innsats med hensyn på representasjoner og forklaring. Resnick, Asterhan & Clarke (2018, s.26) sier også at elever må få «cognitively demanding tasks». De sier at disse må være komplekse og åpne, det vil si uten et enkelt korrekt svar, da dette gir elevene mulighet til å bidra og samarbeide for å løse problemene. Stein, Grover & Henningsen (1996, s.456), som har forsket på 144 matematikkoppgaver som ble brukt i det de kaller reform-orientert undervisning, sier at elever må eksponeres for

> «meaningful and worthwhile mathematical tasks, tasks that are truly problematic for students rather than simply a disguised way to have them practice an already-demonstrated algorithm».

Som Brodie (2010) så sier også Stein et al. (1996) at slike oppgaver har mer enn en løsningsstrategi. Hiebert og Grouws (2007, s.388) refererer til Vygotskys proksimale utviklingssone og sier at problemer i matematikk må være nær grensene til elevenes proksimale utviklingssone slik at de er innen rekkevidde, men gir nok utfordringer slik at elevene kan finne ut noe nytt.

Smith og Stein (2011), som forsker på lærerutdanning, påpeker at det er viktig at oppgavene lærer velger stemmer overens med læringsmålene for timen. De sier videre at det er viktig å velge oppgaver som gjør det mulig for alle elever, med sine forskjellige forkunnskaper og erfaringer, å komme i gang.

I Norge er begrepet LIST-oppgaver blitt brukt de siste årene, blant annet på siden MatteLIST[1] som drives av Matematikksenteret ved NTNU i samarbeid med NRICH, University of Cambridge. LIST står for lav inngangsterskel, stor takhøyde og er den norske oversettelse av «low floor, high ceiling» eller «low threshold, high ceiling». Begrepet ble, ifølge NRICH Team (2013), først brukt av Seymour Papert da han på 1970-tallet forklarte designprinsippet for sitt «Logo»-programmeringsspråk. NRICH Team (2013) sier at det lave gulvet (eller inngangsterskelen) betydde at det skulle være lett å komme i gang for nye brukere, også de som aldri hadde programmert tidligere. Høyt tak betydde at programmeringsspråket ikke skulle begrense de mer avanserte brukerne. Begrepet er senere blitt brukt om matematiske oppgaver. MatteLIST (Matematikksenteret NTNU, u.å.) sier om LIST-oppgaver av de skal være enkle å komme i gang med (lav inngangsterskel), men samtidig skal de gi deg mulighet til å arbeide kreativt med avansert matematikk (stor takhøyde).

For å få til dybdelæring, problemløsning og resonnering i matematikk, som spesifisert i nye læreplaner (Kunnskapsdepartementet, 2019), så skal altså elevene jobbe med problem (problemløsningsoppgaver) som er kognitivt krevende, litt utenfor det de allerede kan, problemene skal helst ha flere løsningsstrategier, de skal dekke læringsmål for timen, det skal være mulig for alle å komme i gang (lav inngangsterskel) men allikevel gi mulighet for matematikk på høyt nivå (stor takhøyde).

2.2.3 Undervisningspraksiser som fremmer læring

Hattie (2015) mener at noen undervisningspraksiser gir bedre resultater enn andre. Han sier at dette er praksiser der lærerne er dyktige på kognitive oppgaveanalyser, der lærerne sørger for strukturerte og tilsiktede muligheter for klasseromsdiskusjoner, problemløsning, gjensidig undervisning, der elevene får øve og bruke ferdighetene sine over tid og der elevene involveres i å undervise hverandre. Også Smith og Stein (2011) mener at lærere må tilrettelegge for at elevene skal få diskutere matematikk. De sier at sosiale interaksjoner gir oss mulighet til å bruke andre som ressurser, til å dele våre idéer med andre og til å skape

[1] https://www.mattelist.no

felles kunnskap. De mener at diskusjoner av høy kvalitet vil støtte elevenes læring av matematikk fordi elevene hjelpes til å kommunisere idéene sine, blir guidet i rett retning ved at tenkningen blir synlig og oppmuntres til å evaluere sine egne og andre elevers idéer.

Hodgen og Wiliam (2006, s.1) sier at det første prinsipp for læring er å starte der den som skal lære er. De sier at vi som underviser må forstå at elevene må rekonstruere idéene sine og ikke bare legge nye idéer på toppen av disse, da dette vil føre til en forståelse av matematikk som er usammenhengende og inkonsistent. Videre sier de at læreren må oppmuntre og lytte nøye på elevenes svar og ta disse svarene seriøst enten de er korrekte eller feilaktige. De mener at lærere må hjelpe elevene å snakke gjennom eventuelle misforståelser og utfordringer. I slike diskusjoner bruker læreren det Hodgen og Wiliam (2006, s.1) kaller et andre prinsipp for læring: at elevene må være aktive i prosessen. De mener at læring må gjøres av elevene, den kan ikke gjøres for dem. Dette stemmer med læringssynet jeg presenterte i kapittel 2.1.3 og som Bransford et al. (1999) sier bygger på Cobb, Piaget og Vygotsky: vi konstruerer ny kunnskap og forståelse basert på hva vi allerede kan og tror. Hodgen og Wiliam (2006) sitt tredje prinsipp for læring er at elevene må snakke om idéene sine. De sier at når elevene snakker matematikk i helklassediskusjoner eller i små grupper, så bruker de og konstruerer matematisk språk. «Talking the talk» er en viktig del av det å lære, ifølge Hodgen og Wiliam (2006, s.1).

Hodgen og William (2006, s.13) sier at der elever er aktivt involverte i diskusjoner, lærer de mer. De sier at dette bare er mulig om diskusjonene blir mer enn bare en rekke «rapid-fire» lukkede spørsmål fra lærer, der kun noen få elever deltar, og det gis lite tid til refleksjon. For å få til god undervisning og god læring, mener altså Hodgen og Wiliam (2006) at det å snakke matematikk er sentralt. De mener, som Hattie (2015) og Smith og Stein (2011), at vi lærere må gi elevene mulighet til å dele, diskutere og argumentere for idéene sine. Hodgen og Wiliam (2006) sier at ved å utforske matematikk vil elevene selv skjønne hva de kan og hvor godt de kan det. Hodgen og Wiliam (2006) mener at lærere må lytte til og samhandle med elever, slik at elevene kan få tilbakemeldinger og dermed forbedre læringen. De mener at det også er nyttig med tilbakemeldinger fra medelever. Hodgen og Wiliam (2006) foreslår følgende aspekt for å få til god undervisning: Utfordrende aktiviteter som fremmer tenkning og diskusjon, oppfordre elever til å snakke matematikk ved å spørre og lytte, strategier for å få alle elevene til å delta i diskusjoner, diskusjoner mellom elever, og rike og åpne helklassediskusjoner. Disse aspektene samsvarer med resultatene fra Muijs og Reynolds (2002) forskning, og tilsvarer praksisene som Hattie (2015) og Smith og Stein (2011) foreslår:

oppgaver som fremmer tenkning og situasjoner der lærer legger til rette for diskusjoner, mellom elevene og i hele klassen.

2.3 Tradisjonelle klasserom

Liljedahl (2021) har, gjennom mer enn 20 års forskning, jobbet med over 400 lærere og deres elever. I sine første studier besøkte han 40 matematikklasserom i 40 forskjellige bygninger. Liljedahl (2021) sier at matematikklasserommene han har besøkt, uavhengig av trinn og demografi, ser like ut: pulter eller bord er vanligvis orientert framover i klasserommet mot en front som har et slags lærerkateter, en vertikal skriveplass og kanskje vertikal prosjektorplass for læreren. Liljedahl (2021) sier at elevene sitter og lærer står. Videre sier han at timene stort sett følger den samme rytmen: de begynner med en lærerstyrt aktivitet som foredrag, er kanskje innom en slags gruppediskusjon, men ender alltid med en form for individuelt arbeid for elevene. Alrø og Skovsmose (2004), i sin forskning på kommunikasjon i klasserom, sier at det tradisjonelle matematikklasserommet ofte organiseres slik at lærer presenterer fagstoff fra læreboken, introduserer algoritmer og så får elevene jobbe med oppgaver individuelt, i par eller i grupper mens lærer tar på seg rollen som en konsulent som assisterer elevenes arbeid og kontrollerer resultatene deres. Alseth, Breiteig og Brekke, (2003, referert til i Wæge & Nosrati, 2015, s.3) sier at også i Norge følger matematikklasserom ofte en slik «tradisjonell, lærebokstyrt undervisningsform» der lærer introduserer dagens tema, viser eksempler på tavlen og deretter ber elevene om å løse oppgaver fra boka. Cazden (2001) antar at IRE (eller IRF) fremdeles er den mest brukte formen for klasseromsdiskurs på alle klassetrinn. Cazden (2001, s.30) forklarer IRE og IRF som en tredelt sekvensen med lærerInitiering, elevRespons og lærerEvaluering (IRE) eller lærerFeedback (IRF). Hun sier at lærer spør en elev om å dele, den utvalgte eleven forteller, og læreren kommenterer (evaluerer eller spør videre). Cazden (2001, s.31) refererer til dette som «the default option» og sier at dette er det som skjer naturlig om en ikke bevisst går inn for å gjøre en endring. Også Alrø og Skovsmose (2004) sier at den tradisjonelle undervisningen ser ut til å føre til et slikt mønster der lærer spør et spørsmål, en elev svarer, og læreren evaluerer. De sier videre at siden lærer vet svaret på forhånd, så må eleven gjette hva læreren tenker på. Klette (2010) refererer til store mengder forskningslitteratur og sier at det ser ut som om de fleste klasserom fremdeles har helklasseundervisning der lærer står for minst 2/3 av snakkingen og der IRF(E) er den mest brukte form for kommunikasjon. Klette (2010) sier at selv om lærerstyrt undervisning, og spesielt IRF-mønsteret, fremdeles dominerer i norske klasserom, så er dette mønsteret i dag annerledes enn tidligere. Klette (2010) mener at IRF i norske klasserom i dag er mye mer elevsentrert og at elevene har større mulighet for å delta og bidra. Schoenfeld (1992) sier at i noen klasserom erfarer elevene at lærer bestemmer reglene for hvordan en gjør matematikk, de oppfatter at å forstå matematikk betyr å huske og bruke de korrekte algoritmene når lærer spør et spørsmål, og de tenker at matematisk sannhet er om svaret godkjennes av lærer eller ei. Slike erfaringer i klasserommet, mener Schoenfeld (1992, s.69), gjør at elever har følgende oppfatninger (beliefs) om matematikk: Matematiske oppgaver har et og bare et korrekt svar, det finnes bare en korrekt måte å løse et hvilket som helst matematisk problem på, «vanlige» elever kan ikke forvente å forstå matematikk: de må memorere og bruke det de har lært mekanisk, matematikk er noe en utfører alene, oppgaver kan løses på 5 minutter eller mindre, matematikken som undervises i skolen har liten eller ingen relevans i virkeligheten og formelle bevis er irrelevante i prosessene som leder til oppdagelser og oppfinnelser. Schoenfeld (1992) mener at disse oppfatningene står i sterk kontrast til hvordan matematikere jobber. Alrø og Skovsmose (2004) sier at empiriske studier av kommunikasjonen i tradisjonelle klasserom viser at elevene bidrar minimalt: de svarer med et spørsmål, de gjetter, de forholder seg stille, eller de engasjerer seg i andre ting. Alrø og Skovsmose (2004) mener at elevene i slike tradisjonelle klasserom ikke får mulighet til å være aktive og ta ansvar for læringsprosessen. Wæge og Nosrati (2015) knytter Skemps (2006) instrumentelle forståelse opp mot tradisjonelle undervisningsformer. Slike tradisjonelle klasserom legger ikke til rette for aspektene presentert av Hodgen & Wiliam (2006) eller praksisene presentert av Hattie (2015).

2.4 Undersøkende matematikk

Schoenfeld (1992) sier at det finnes eksempler på klasserom der elevene samhandler, med hverandre og med matematikk, på måter som fremmer matematisk tenkning. Disse klasseromsmiljøene er, ifølge Schoenfeld (1992, s.81), designet slik at de stemmer med lærerens oppfatning av matematikk:

> «as an ongoing, dynamic discipline of sense-making through the dialectic of conjecture and argumentation».

Liljedahl (2016, 2021) forsker på det han kaller «thinking classrooms» innenfor matematikk. Han sier at denne forskningen bygger på hans tidligere forskning om Aha! opplevelser hos egne lærerstudenter. Liljedahl (2005) fant at bare en eneste Aha! opplevelse etter at elever har strevd med å løse en oppgave eller å forstå noe i matematikk, endrer elevens syn på matematikk og på sine egne evner i matematikk. Denne forskningen ga ham tro på at han kunne lage oppgaver som var akkurat så vanskelige at elevene ville stå fast, men så skulle løsningen plutselig komme til dem «in a flash of illumination» (Liljedahl, 2016, s.361). Liljedahl (2016) laget problemløsningsoppgaver og ble med en lærer (Ms. Ahn) i hennes 7.klasse (12 – 13 åringer). Det viste seg at elevene sto fast, men ikke etter at de hadde jobbet lenge med oppgavene: De sto fast med en gang, og ga opp! Basert på disse observasjonene konkluderte Liljedahl (2016) med at elevene ikke tenkte! Han mener også at Ms. Ahn underviste som om hun ikke hadde tro på at elevene kunne eller ville tenke. Dette førte til at Liljedahl (2016) besøkte andre klasserom, først på samme skole, deretter på andre skoler. Liljedahl (2016) oppdaget at den eksisterende klasseromskontrakten er vanskelig å endre selv om læreren er motivert for å gjøre det. Liljedahl (2016) sier at han ønsket å finne et sett med verktøy som kunne endre et klasserom til et «tenkende klasserom», det vil si verktøy som lar lærerne omgå den eksisterende klasseromskontrakten. Han tenkte seg at disse verktøyene måtte være enkle å bruke og gi elevene mulighet til å delta i problemløsning uhindret av deres tillærte tendenser og løsningsstrategier i matematikklasserommet. Dermed startet hans forskning på tenkende klasserom.

Hva er så et tenkende klasserom? Liljedahl (2016, s.362) definerer det som et klasserom som ikke bare oppmuntrer til tenkning, men også tilrettelegger for tenkning. Liljedahl (2016) sier at elevene skal få tenke individuelt og sammen, og dermed lære sammen gjennom aktivitet og diskusjon. Han sier at et tenkende klasserom er en plass der lærer ikke bare fremmer tenkning, men forventer det, både implisitt og eksplisitt (Liljedahl, 2016, s.362).

Liljedahl (2016) sine tanker om utfordrende aktiviteter som fremmer tenkning og diskusjon kjenner vi igjen fra Hodgen og Wiliam (2006), Hattie (2015) og Smith og Stein (2011). Wæge og Nosrati (2015) sier at Skemps (2006) relasjonelle forståelse gjerne forbindes med undersøkende fremgangsmåter. De foreslår derfor, som et alternativ til en tradisjonell, lærebokstyrt undervisningsform, det de kaller for undersøkende matematikkundervisning.

Wæge og Nosrati (2015, s.3) beskriver en undersøkende matematikktime med en tredelt struktur, der lærer starter timen ved å presentere «en ny og kognitiv krevende oppgave eller aktivitet for elevene». Deretter får elevene god tid til å jobbe med denne aktiviteten. Wæge og Nosrati (2015) sier at i denne fasen observerer lærer elevenes arbeid og kan oppmuntre dem til å finne nye løsninger eller beskrive tankene sine. De sier at en slik undersøkende matematikktime avsluttes ved at hele klassen diskuterer aktiviteten. Lærer må lede denne diskusjonen slik at elevene blir oppmerksomme på hvordan løsningene deres henger sammen og hvordan de kan relateres til det matematiske målet for timen.

Denne tredelte strukturen presenteres av Smith og Stein (2011, s.1) som tre faser: «Launch phase», «explore phase», og «discuss and summarize phase». Om oppgaven som lærer gir, sier de at det matematiske problemet «inneholder viktige matematiske idéer og kan løses på mange måter» (Smith & Stein, 2011, s.1). I oppstartsfasen (launch phase) introduserer lærer problemet, verktøyene som er tilgjengelige og hva elevene skal produsere. Smith og Stein (2011) forklarer utforskningsfasen (explore phase) som fasen der elevene jobber med problemet, ofte ved å diskutere det i par eller i små grupper. I denne fasen må elevene oppfordres til å løse problemet på den måten som er logisk for dem. De sier videre at elevene må være forberedt på å forklare strategiene sine til de andre i klassen.

Som Wæge og Nosrati (2015) sier også Smith og Stein (2011) at timen avsluttes med en helklassediskusjon og oppsummering av de forskjellige elevstrategiene. De sier at i denne fasen (discuss and summarize phase) får hele klassen se og diskutere disse forskjellige strategiene.

Wæge og Nosrati (2015) og Smith og Stein (2011) foreslår altså, som Liljedahl (2016), Hodgen og Wiliam (2006) og Hattie (2005), utforskende aktiviteter og at elevene må få jobbe sammen og diskutere matematikk. Spørsmålet videre er da: Hvordan kan vi som underviser få til dette i våre klasserom?

2.5 Hvordan kan lærere tilrettelegge for undersøkende matematikk?

Jeg har forsøkt å beskrive en lærerrolle i endring. I det tradisjonelle klasserommet har lærer vært en slags foreleser og den som sitter på kunnskapen og svarene. Gjennomgangen over viser at vi nå ønsker lærere som veileder og tilrettelegger for at elevene selv skal komme fram til dyp og meningsfull kunnskap. For å få til Hatties (2015) «deeper learning», Utdanningsdirektoratets (2019) dybdelæring og Skemps (2006) relasjonelle forståelse, mener som nevnt Wæge og Nosrati (2015), Smith og Stein (2011), Liljedahl (2016), Hodgen og Wiliam (2006) og Hattie (2015) at elevene skal få jobbe med utfordrende oppgaver, alene og sammen, de skal diskutere metoder og trekke slutninger, og alt dette skal tilrettelegges for av lærer. I innledningen viste jeg til Franke, Kazemi og Battey (2007) som sier at selv om forskere vet at lærerrollen er kritisk for å få til vellykkede diskurser i klasserommet, så vet vi lite om hva lærere må gjøre for å få til dette.

Staples (2007) sier at det å organisere undersøkende klasserom, krever at lærer er lydhør til elevene. Hun sier at bare ved å åpne for elevenes bidrag og følge tenkningen deres kan elevenes idéer danne grunnlag for utforskende aktiviteter. Staples (2007) sier at lærer må tolke, ta inn og prosessere informasjon kontinuerlig, og må så ta raske beslutninger om hvordan hun vil gå fram videre. Dette krever en dyp forståelse av matematikk, elevers tenkning, læreplaner i tillegg til kunnskap om hvordan elever resonnerer og utvikler ferdigheter innenfor matematiske fagfelt. Staples (2007) sier at det finnes grep som kan støtte lærere i deres forsøk på å få til samarbeidende utforskende klasserom. Jeg skal i det følgende presentere teori fra forskere som har prøvd å finne slike grep vi lærere kan bruke for å få til samarbeidende undersøkende matematikkundervisning.

2.5.1 Tenkende klasserom

Liljedahl (2016) har forsøkt å finne metoder og grep for å ruske opp i den tradisjonelle klasseromsundervisningen som han mener fører til ikke-tenkende elever. Liljedahl (2016) fant, i sin forskning på egen undervisning samt undervisning med mer enn 40 andre matematikklærere, ni elementer som han mener gjennomsyrer all matematikkundervisning. Han sier at disse elementene styrer om klasserommet er et «tenkende» eller «ikke-tenkende» klasserom. Liljedahl (2016, s.365) sier at disse ni elementene er: Oppgavetypene som gis og når og hvordan de brukes, hvordan oppgavene gis til elevene, hvordan grupper dannes, elevenes arbeidsplass mens de jobber med oppgaver, organiseringen av klasserommet, hvordan lærer svarer på spørsmål når elevene jobber med oppgaver, hvordan hint og utvidelser av oppgavene brukes når elevene jobber, hvordan læreren avslutter elevenes arbeid med å samle klassen (for å oppnå en felles forståelse) og evaluering, generelt og når elevene jobber med oppgaver. Liljedahl (2016, s.365 - 366) beskriver disse ni elementene i klasserommene han opprinnelig besøkte slik: øvingsoppgaver gis etter at lærer har vist eksempler, elevene kopierer disse oppgavene fra bok eller fra oppgaver skrevet på tavla, elevene kan danne egne grupper for å jobbe med hjemmelekser når «teoridelen» av timen er slutt, elevene jobber ved pulten sin og skriver i notatboka si, elevene sitter i rekker med ansiktet mot tavla, elever som trenger hjelp får hjelp individuelt, delvis eller «helt i mål», det gis ikke hint, bare svar, og en utvidelse er bare neste oppgave på lista eller i boka, når det er gått «nok tid» presenteres løsningen på tavla, noen ganger ved hjelp av elever som forteller hvordan en skal gå videre, evaluering skjer gjennom individuelle quiz-er og prøver. Liljedahl (2016) mener at dette fører til ikke-tenkende klasserom, så han ønsket som nevnt å endre dette. Liljedahl (2016) brukte en design-basert metode: Han testet og endret for å finne hva som kan fungere bedre. Han forteller at han varierte undervisningen rundt de 9 elementene for å måle effekten av endringene: hvis noe fungerte ble det beholdt, hvis det ikke fungerte ble det forlatt.

Liljedahl (2021, s.146) sier at dersom vi tenker så er vi engasjerte, og dersom vi er engasjerte, så tenker vi. Han sier at tenkning er en privat og usynlig prosess, men at engasjement viser seg fysisk, er lett å se og lett å identifisere. Han mener at vi derfor kan bruke engasjement for å se når elever tenker. Liljedahl (2016, s.368) laget seg «mål for engasjement» (proxies for engagement) for å måle effekten av metodene han testet ut. Liljedahl (2021, s.368 – 369) sier at han så på hvor lang tid det tok før elevene kom i gang med problemløsning, hvor lang tid det tok før de noterte noe matematisk, hvor mye de diskuterte, hvor ivrige de var etter å komme i gang, hvor mye de deltok, utholdenhet, kunnskapsmobilitet (utveksling av kunnskap blant elevene) og hvordan elevene jobbet «ikke-lineært». Liljedahl (2016) sier at tidlige resultater viste at små endringer i praksis hadde liten effekt, dermed ble store endringer prøvd ut. Han sier at når en metode ikke fungerte, ble det motsatte prøvd ut. Eksempler han gir på det er: når det viste seg at å sitte ved pultene var ineffektivt, så måtte elevene stå. Når det viste seg at det var lite effektivt å svare på spørsmål, så stoppet lærerne å svare på spørsmål.

Elevenes arbeidsplass – vertikale ikke-permanente tavler

Liljedahl (2016) sier at resultatene fra forskningen hans viser at elevenes arbeidsplass er viktig for å endre den tidligere eksisterende klasseromskontrakten. Han sier at det vanlige (default) er at elevene sitter ved pultene sine (Liljedahl, 2016, s.367). Han sier at det tidlig viste seg at dette ikke var gunstig for å bygge tenkende klasserom. Liljedahl (2016) og lærere som deltok i forsøkene, testet dermed ut at elevene sto og jobbet andre plasser enn ved pulten sin. De testet ut tavler, whiteboards, plakat / flipchart og små whiteboards liggende på bord. Liljedahl (2016) sier at konsensus blant lærerne var at vertikale ikke-permanente tavler var best. At tavlene er vertikale betyr at de henger på vegg, at de er ikke-permanente betyr at notatene kan viskes ut. På grunn av de positive førsteinntrykkene fra elevenes arbeid ved vertikale ikke-permanente tavler, valgte Liljedahl (2016) å utføre en pseudo-kvantitativ studie på dette i fem klasser på videregående trinn, med fem forskjellige lærere. Dataene fra denne studien bekreftet de uformelle observasjonene: Gruppene var mer ivrige etter å komme i gang, det var mer diskusjon, deltakelse, utholdenhet og «ikke-linearitet» når de jobbet på whiteboards (Liljedahl, 2016, s. 370). Liljedahl (2016) sier videre at de som skulle skrive på permanente tavler brukte lenger tid før de skrev noe, uavhengig av om de satt eller sto. Liljedahl (2016, s.371) sier at de vertikale ikke-permanente tavlene scoret bedre enn de horisontale ikke-permanente: de førte til mer «ikke-linearitet» og gruppene som sto på vertikale tavler samhandlet mer med de andre gruppene som sto ved vertikale tavler i nærheten. Liljedahl (2016) forklarer «ikke-linearitet» med at arbeidet på tavlene ikke var ryddig og i bestemt rekkefølge, men heller ustrukturert og over alt. Han mener at dette er positivt: at elevene skriver ned tanker og idéer etter hvert som de dukker opp, og ikke venter til de er helt sikre på hvordan oppgaven skal løses og at de har korrekt føring. Liljedahl (2016, s.371) sier at gruppene som jobbet på vertikale ikke-permanente tavler viste mer «tenkende klasserom»-oppførsel, «persistence, discussion, participation and knowledge mobility», enn noen av de andre typene arbeidsplass.

I etterkant av studien på disse fem klasserommene har Liljedahl (2016, s.371) forsket på 300 matematikklærere, fra alle skoletrinn, som ønsket å teste ut vertikale ikke-permanente tavler. Liljedahl (2016) sier at lærerne som ble introdusert til vertikale ikke-permanente tavler fortsatte å bruke slike tavler. Han mener at dette skyldes at det er lett å introdusere i klasserommet, det ble godt mottatt av elevene og det har en umiddelbar positiv effekt på «classroom thinking behaviour» (Liljedahl, 2016, s.375). Liljedahl (2016) mener at når elever står med vertikale ikke-permanente tavler så er de synlige. Han mener at når elever er ved pulten sin er det lett for dem å gjemme seg slik at de ikke deltar eller bidrar. Han sier at det ikke nødvendigvis er slik at elever prøver å gjemme seg, men når oppgavene blir vanskeligere og krever mer tenkning så er det lett at elever trekker seg vekk når de sitter. Dette blir vanskeligere når en står i en gruppe (Liljedahl, 2016).

Grupper – synlig tilfeldige grupper

Liljedahl (2016) undersøkte også hvordan en best setter sammen grupper. Han mener at det er vanlig at lærere velger grupper pedagogisk, enten ved å plassere såkalte «sterke» elever med de som kanskje kunne trengt litt hjelp for å komme videre med oppgavene eller lærere kan sette sammen grupper med elever på samme faglige nivå. Han sier at det også er slik vi lærere noen ganger plasserer elever vekk fra hverandre da vi av tidligere erfaring har sett hvem som ikke jobber bra sammen. Liljedahl (2021, s.47) har i sin forskning på grupper funnet at når elever jobber i selvvalgte grupper så består de sosiale strukturene som observeres i gangene på skolen. Han sier at disse sosiale strukturene kan skape barrierer som hindrer samarbeid i klasserommet. Liljedahl (2016) sier at siden strategiske gruppevalg ikke virket etter hensikten, hva så med tilfeldig valgte grupper? Han fant at dersom gruppene ble valgt tilfeldig, men elevene ikke så at det var tilfeldig uttrekk, da hadde det ingen hensikt. Han mener at dette skyldes at elevene antok at det fantes en skjult agenda. Liljedahl (2016) forteller at når han startet med tilfeldig trekk foran elevene, så kom det endringer umiddelbart. Det Liljedahl (2016, s377) kaller synlig tilfeldige grupper (visible random groups), førte til at elevene ble villige til å jobbe i alle grupper de ble plassert i. Han mener at det fjernet sosiale barrierer i klasserommet og at kunnskapsmobiliteten mellom elevene økte. Liljedahl (2016) sier at elevene begynte å stole på løsningene de sammen fant, i gruppene og mellom gruppene og de trengte mindre hjelp fra lærer. Videre sier han at aktiviteten i klasserommet økte og elevene ble mer entusiastiske for matematikktimene.

Liljedahl (2021, s.46) har i forsøk med tilfeldige grupper funnet at mange elever ikke var helt fornøyde med gruppene de ble plassert i på dag 1, men etter tre uker var denne motstanden vanligvis helt vekke og elevene var åpne for å jobbe med hvem som helst som de ble plassert sammen med. Videre fant han at når elevene er blitt vant til at grupper velges synlig tilfeldig, så setter de pris på å slippe det sosiale presset ved å velge grupper selv.

Liljedahl (2021) sier at gruppene også bør skiftes ofte. Han sier at når elevene samarbeider med nye tilfeldige partnere hver time, så krysses sosiale grenser og elevene får en bevissthet om hverandre på måter som ikke skjedde tidligere. Dette gjør at kunnskap deles enklere.

Grupper – gruppestørrelse

Liljedahl (2021) har senere forsket på gruppestørrelse og funnet at grupper med tre elever fungerer best. Davis og Simmt (2003, referert til i Liljedahl, 2021, s.44) sier at for at en gruppe skal fungere, må deltagerne ha både overflødighet og diversitet. Liljedahl (2021) forklarer at overflødighet her betyr det elevene i en gruppe har til felles, som språk, interesser, erfaringer og kunnskap. Liljedahl (2021) sier at uten disse fellestrekkene vil elevene ikke kunne samarbeide. Han sier videre at dersom de bare har overflødighet, så vil de ikke oppnå noe utover det de hadde med seg inn i gruppen. For at gruppen skal kunne skape ny kunnskap, trenger de også diversitet: det de individuelle medlemmene bringer til gruppen som ikke deles av de andre. Liljedahl (2021) sier at dette kan være nye idéer, synspunkt, perspektiver, representasjonsformer og så videre. Liljedahl (2021) sier at grupper på tre ser ut til å ha den perfekte balanse av overflødighet og diversitet.

Goos (2004) argumenterer også for grupper. Hun forteller om Vygotsky sin forskning på den proksimale utviklingssone der deltakerne er på noenlunde samme kunnskapsnivå. Goos (2004, s.263) sier

> «From an educational perspective, there is learning potential in peer groups where students have incomplete but relatively equal expertise, each partner possessing some knowledge and skill but requiring the others’ contribution in order to make progress.»

Hun sier videre at ved å samhandle i grupper så har elevene mulighet til å eie idéene de konstruerer og til å oppleve at de selv, og deres medelever, aktivt skaper personlig matematisk innsikt.

Vertikale ikke-permanente tavler og synlig tilfeldige grupper sammen

Liljedahl (2016) har, i ti klasserom, testet ut vertikale ikke-permanente tavler og synlig tilfeldige grupper sammen. Han observerte at elevene var komfortable med å jobbe sammen, det var høy synlighet på grunn av de vertikale tavlene og dermed økt mobilitet av kunnskap mellom gruppene. Lærerne som deltok i forsøket så store forbedringer i klasserommet. Liljedahl (2016, s. 381) gjengir en kommentar fra en av lærerne:

> «I used to think I had a community in my classroom. Now I see what a community can look like.»

Oppgaver i tenkende klasserom

Liljedahl (2016) sier at forskningen hans viser at for å få et tenkende klasserom må en gi gode problemløsningsoppgaver. Hvordan slike problem bør være presenterte jeg i delkapittel 2.2.2. Liljedahl (2016) mener en kan starte med oppgaver som ikke nødvendigvis har noe med læreplanen å gjøre, for å få elevene til å bli vant med denne type oppgaver. Liljedahl (2016) sier at oppgavene bør (om mulig) gis muntlig til elevene. Han mener at de da begynner å diskutere og tenke, og ikke roter seg vekk i tolkning av skriftlig tekst. Videre sier Liljedahl (2016) at grupper bør dannes ofte og synlig tilfeldig. Han mener at ved å skifte grupper ofte blir elevene vant til å jobbe med alle. Liljedahl (2016) sier at for elevenes arbeidsplass bør en benytte vertikale ikke-permanente tavler. Det bør bare være en penn per gruppe, mener han: Dette gjør at elevene diskuterer og samarbeider om hva som skal skrives.

Hvilke spørsmål skal lærer svare på?

Liljedahl (2016, s.382) mener at elever typisk stiller tre typer spørsmål: (1) «proximity questions», som stilles når læreren er i nærheten (the proximity), (2) «stop-thinking questions», oftest spørsmål som «er dette rett?» og (3) «keep-thinking questions», spørsmål elevene spør for å komme videre i arbeidet sitt. Han sier at lærer kun skal svare på «keep-thinking» spørsmål, de andre to typene må anerkjennes, men ikke besvares.

Hvordan og når skal oppgavene gis?

Liljedahl (2021) har i sine undersøkelser funnet at å gi elevene oppgaver fra en bok førte til minst tenkning og flest «proximity»- og «stop-thinking»-spørsmål. Han sier videre at det å gi oppgavene ved hjelp av et arbeidsark også ga dårlige resultater. Slike arbeidsark assosieres mer med «å bli ferdig» enn å tenke. Det som viste seg å være best var å gi oppgaven muntlig. «Nothing came close to being as effective as giving the task verbally» (Liljedahl, 2021, s.104). Han sier at dette var en sjokkerende oppdagelse, da det ikke bare motsier normene gjennom mange tiår, men også fordi det går imot lærerens instinkter. Liljedahl (2021) spesifiserer at det å gi en oppgave muntlig ikke betyr at en skal lese opp en oppgave. Han sier at essensen av oppgaven skal gis muntlig, mens størrelser, mål, geometriske størrelse, data og funksjonsuttrykk som trenges for å løse oppgaven skrives på tavla mens læreren snakker. Liljedahl (2021) sier at dette betyr at oppgaven skal gis ved muntlig dialog og diskusjon slik at den oppfattes av elevene, men det er ikke meningen at elevene skal måtte memorere detaljer. Han sier at det som står på tavla etter en slik introduksjon vil være meningsløst uten den verbale dialogen og instruksjonen. Liljedahl (2021) viser til forskning hvor samme oppgave ble gitt skriftlig til en gruppe elever mens den ble presentert muntlig til en annen gruppe elever. Han fant at de gruppene som fikk oppgaven presentert muntlig var godt i gang med avansert matematikk etter bare 60 sekunder, mens gruppene som fikk oppgaven skriftlig brukte 10 til 12 minutter før de kom dit. Liljedahl (2021) sier at gruppene som fikk oppgaven skriftlig brukte lenge på å lese oppgaven i stillhet, og når de endelig begynte å diskutere så startet de med å diskutere hva ordene i oppgaven betydde. De snakket også om begrensningene i oppgaven, og mens de prøvde å løse oppgaven så leste de igjen og igjen og reforhandlet hvilke regler som ble presentert i teksten. Liljedahl (2021) sier at mange av disse ga opp, mens de elevene som fikk oppgaven muntlig begynte å diskutere matematikk med en gang. Det ser ut som at det å få oppgaven muntlig gjorde alle ordene og oppgaven tilgjengelig for elevene slik at de umiddelbart kunne starte å tenke på matematikken. Liljedahl (2021) sier at resultatene viste at oppgaver som ble gitt muntlig førte til mer tenkning, raskere og dypere tenkning, og førte til færre spørsmål til lærer. Liljedahl (2021) mener at når det er tekst til stede, så vil elevene dras mot de skrevne ordene og ikke høre etter det læreren sier: en bør derfor ikke gi oppgaven skriftlig samtidig som en dekoder oppgaven sammen med elevene muntlig.

Liljedahl (2021, s.101) anbefaler at lærere gir oppgaver i oppstart av timen. Han sier at et av de tidligste resultatene han fant fra forskningen var at samme oppgave gitt i midten av timen eller slutten av timen ga mye dårligere resultat enn om oppgaven ble gitt i starten av timen. Liljedahl (2021) begrunner dette med at 1. Elevene synker til et lavt energinivå dersom de passivt sitter og mottar kunnskap i form av for eksempel forelesning eller teorigjennomgang fra lærer og 2. Dess lenger tid det gikk før en lærer presenterte en «tenkeoppgave», dess mer sannsynlig var det at lærer begynte å undervise om oppgaven slik at det ikke lenger ble en tenkeoppgave. Han fant at når elevene fikk oppgaver i oppstarten av timen så gikk de i gang med energi, entusiasme og en større grad av selvstendighet.

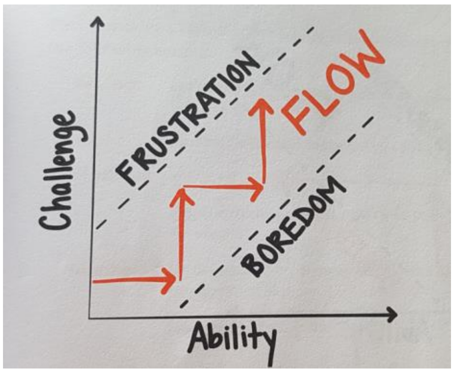
Liljedahl (2021, s.145) sier også at matematikkundervisning stort sett alltid har vært bygget på idéen om «synkron aktivitet». Med det mener han at alle elevene får samme informasjon til samme tid. Liljedahl (2021) sier at elever lærer forskjellig og noen trenger mer tid enn andre til å tenke på og løse oppgaver. Han sier at elever trenger asynkrone aktiviteter og anbefaler å gi utvidelser eller nye oppgaver til grupper når de er klar for det.

«Defronting the room»

Liljedahl (2016, s.381) mener at for å komme vekk fra tradisjonell undervisning, så må klasserommet omorganiseres: «The classroom needs to be de-fronted». Liljedahl (2016) mener med det at lærer må gi fra seg «vegg med kateter» og at alle pultene står mot kateteret. Han sier at lærer må adressere klassen fra flere lokasjoner i rommet og, så mye som mulig, bruke alle fire veggene i klasserommet. Han mener også at det er best om pultene er plassert tilfeldig rundt i rommet. Liljedahl (2021, s.76) sier at «defronting the room» hadde en umiddelbar effekt på både elever og lærer: Elever begynte ¨samarbeide mer og lærere begynte å snakke mindre. Han sier videre at lærerne begynte å sirkulere mer mens de snakket og la til rette for helklassediskusjoner.

Hvordan hint og utvidelser av oppgavene brukes

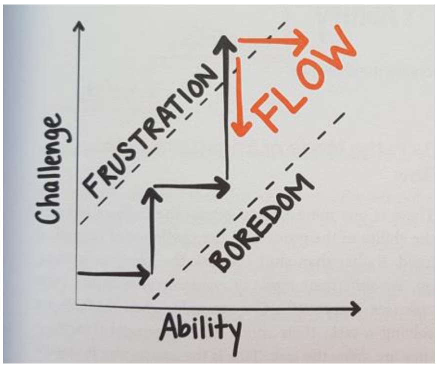
Csikszentmihályi (1990, 1996, 1998), referert til i Liljedahl, 2021, s.146) forsket i mange år på «the optimal experience». Liljedahl (2021) forklarer denne optimale opplevelsen som et intenst engasjement, der vi er så fokuserte og tilstedeværende i en aktivitet at vi glemmer tiden, ikke lar oss distrahere og er oppslukt av gleden av aktiviteten. Liljedahl (2021) sier at Csikszentmihályi fant tre kvaliteter som er til stede under slike optimale opplevelser: klare mål for aktiviteten, umiddelbar tilbakemelding på aktiviteten og en balanse mellom evnene til den som utfører aktiviteten og utfordringen på aktiviteten. Den tredje kvaliteten, balansen mellom utfordring og evne, mener Liljedahl (2021) er sentral for å få slike optimale opplevelser. Han sier at hvis utfordringen er mye større enn en persons evner, så vil det oppstå frustrasjon. Dersom evnene er større enn utfordringen, vil personen kjede seg. Liljedahl (2021) sier at dersom det er en balanse i dette systemet, vil vi oppleve det som Csikszentmihályi kaller flyt («flow»). Liljedahl (2021) forsket videre på denne tilstanden i forbindelse med sine tenkende klasserom. Han sier at flyt er en dynamisk tilstand: når elever jobber, vil evnene øke, og en må derfor øke utfordringen. Han sier at vi lærere må gi elevene oppgaver der de må tenke, de må ha mulighet til å komme i gang og når evnene øker må vi gi dem utvidelser. Liljedahl (2021) viser dette i figur 1. Han sier at dette betyr at timingen er viktig: hvis vi øker vanskeligheten for tidlig vil det føre til frustrasjon og dersom vi lar elevene jobbe for lenge med en oppgave, det vil si når den ikke lenger er utfordrende, vil de kjede seg.



Figur 1. Grafisk fremstilling av balansen mellom utfordring og evne som en dynamisk prosess (Liljedahl, 2021, s. 149).

Liljedahl (2016, s.382) sier at vi lærere må forsøke å holde elevene i flytsonen: Når en har fått til et tenkende klasserom, så må dette «gis næring». Han sier at lærer må gi nye oppgaver og utvidelser slik at elevene er i balanse mellom utfordring og mestring. Dette er i tråd med det han sier om når oppgaver bør gis: aktivitetene bør være asynkrone slik at gruppene kan gå videre med nye oppgaver når de er klar.

Liljedahl (2021) sier at dersom utvidelsen fører til at utfordringen blir for stor, så kan vi få elevene tilbake i balanse ved å gi hint. Han nevner to typer hint: hint som forenkler oppgaven og hint som øker evnen. Disse er tegnet som oransje piler i figur 2. Liljedahl (2021) mener at hint som øker evnen er bedre enn de som forenkler oppgaven, samtidig sier han at frustrasjon er veldig negativt og krever at lærer griper inn. Noen ganger er det derfor best å forenkle oppgaven for å få elevene i gang igjen.



Figur 2. To typer hint (Liljedahl, 2021, s. 157).

Når og hvordan konsolideres det

Liljedahl (2016) mener at elevene kan oppnå en felles forståelse ved at det konsolideres fra bunnen. Han sier at når alle elevene er kommet til bestemte nivå i forbindelse med problemet det jobbes med, så må lærer få til en diskusjon om det elevene har gjort og den forståelsen som klassen nå deler. Liljedahl (2021, s.173) sier at denne konsolideringen fra bunnen må starte med å presentere løsningene alle elevene har fått til. Liljedahl (2021, s.177) kaller utførelsen av konsolideringen for «gallery walk», og han sier at dette skal være en «walk», elevene skal bevege seg til det arbeidet som skal diskuteres. Liljedahl (2021) mener at elevene ikke skal presentere sin egen løsning og at en i stedet skal få andre elever i klassen til å prøve å forklare de enkelte gruppers tankegang ved å se hva de har på tavlene. Han mener at det å dekode noen andres arbeid endrer konsolideringen fra at elevene forteller til at elevene tenker.

Evaluering

Liljedahl (2016) sier at om en skal evaluere, så må en gi tilbakemeldinger på det en ønsker å oppnå. Han sier at dersom vi ønsker å få et tenkende klasserom så må engasjement i gruppearbeidene verdsettes.

Konklusjon tenkende klasserom

(Liljedahl, 2016, s.382) konkluderer med at ikke alle de ni elementene er like viktige for å bygge og opprettholde et tenkende klasserom og at noen av elementene må være på plass før andre (necessary precursors). Noen er også lettere å innføre enn andre, mener han. Liljedahl (2021) sier at Csikszentmihályis tre kvaliteter for å få flyt: klare mål for aktiviteten, umiddelbar tilbakemelding på aktiviteten og en balanse mellom evnene til den som utfører aktiviteten og utfordringen på aktiviteten, er mulig å få til ved å starte timene med problemløsningsoppgaver og la elevene jobbe i synlig tilfeldige grupper på vertikale ikke-permanente tavler. Liljedahl (2021) mener at oppgavene gir målet og at elevene, når de jobber i grupper, får umiddelbar tilbakemelding enten fra gruppemedlemmene eller fra andre grupper. Liljedahl (2021) påpeker at ofte er oppgavene også mulig å sjekke selv. For den tredje kvaliteten, balanse mellom evne og utfordring, sier Liljedahl (2021) at vi må ha asynkrone aktiviteter og at timingen betyr noe for å holde elevene i flyt. Han mener at dette er mye lettere å få til med grupper enn med 30 individuelle elever.

Liljedahl (2016) sier om sin forskning på tenkende klasserom, at ved å starte timene med problemløsningsoppgaver og la elevene jobbe i synlig tilfeldige grupper på vertikale ikke-permanente tavler, så kan en overstyre tidligere etablerte klasseromsnormer. Han sier at dette skjedde i over 600 klasserom, uavhengig av trinn og lærer, som han samlet data fra. Liljedahl (2016, 2021) anbefaler disse tre metodene som første steg for å få til tenkende klasserom.

2.5.2 Fem praksiser

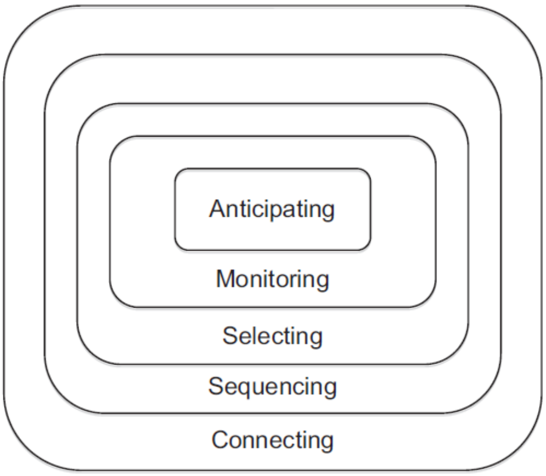
Stein, Engle, Smith og Hughes (2008), og senere Smith og Stein (2011), har i mange år forsket på undervisning og læring i klasserommet. De er kommet fram til en pedagogisk modell med fem nøkkelpraksiser for hvordan matematikklærere kan få til rike, åpne og produktive matematiske diskusjoner i klasserommet. Elevene skal få snakke matematikk, men det skal ikke være vilkårlig snakk, det skal være målrettede samtaler som leder elevene til ny kunnskap. Som nevnt tidligere i oppgaven tenker vi at læring skjer i sosiale interaksjoner, og at matematiske diskusjoner dermed er en viktig del av effektiv matematikkundervisning. Vi ønsker en endring i lærerrollen fra foreleser i det jeg har beskrevet som tradisjonell klasseromsundervisning, til tilrettelegger i et utforskende klasserom, der elevene selv skal konstruere sin egen forståelse. Stein et al. (2008) sier at vi i denne visjonen ønsker at elevene skal få kognitivt krevende problemoppgaver, bruke hverandre som ressurser for å løse disse oppgavene og så dele sine strategier og løsninger i helklassediskusjoner som ledes av lærer.

Smith og Stein (2011, s.2) sier at denne «end-of-class discussion» er vanskelig å lede og at lærerens rolle i disse diskusjonene er viktig. De sier at uten veiledning fra eksperter, kan slike diskusjoner i matematikklasserom lett utvikle seg til at lærer tar over timen og gir en forelesning, eller at elevene presenterer usammenhengende eksempler, som alle behandles likt og som sammen setter lite lys på de matematisk idéene som er målet for timen.

Stein et al. (2008, s.316) sier at i oppstarten av reformene for å få til utforskende matematikk, det de kaller første generasjonspraksis (first generation practice) på denne visjonen, var lærerens rolle dårlig definert. Det ble lagt trykk på kognitivt krevende oppgaver og oppmuntret til produktivt samarbeid i utforskningsfasen. De sier at det var viktig å høre på elevenes begrunnelser. I helklassediskusjoner var det fokus på å la elevene føle at deres bidrag ble hørt og verdsatt, og på hvilke spørsmål lærere skulle stille for å få elevene til å forklare tenkningen deres. Stein et al. (2008) sier at det var mindre fokus på hva lærere kunne gjøre for å aktivt guide helklassediskusjoner mot viktig og verdifull matematikk. De mener at noen lærere fikk inntrykket at for at diskusjonene skulle være fokusert på elevenes læring, så måtte lærerne unngå å gi rettledning i det hele tatt. Stein et al. (2008, s.316) sier at diskusjonene ble en slags «show and tell» hvor elever med korrekte svar fikk presentere sine løsningsstrategier.

Ball (1993, referert til i Stein et al., 2008) argumenterer for at det matematiske fagfeltet må ta ansvar for å hjelpe lærere til å lære hvordan de kontinuerlig kan se om viktige matematiske idéer utvikles i diskusjonene og være klar til å steppe inn og endre retningen på samtalene om nødvendig. Det er det Stein et al. (2008) ønsker å gjøre. De kaller det andregenerasjons-praksis og sier at et kjennetegn ved denne andregenerasjonspraksisen er å bruke elevarbeid som start for helklassediskusjoner. Stein et al. (2008) sier at lærere skal ta utgangspunkt i elevenes tenkning og lede diskusjonene slik at elevene kommer fram til viktige matematiske idéer. De viser til forskning (Ball, Brown & Capione, Chazen & Ball, Lampert, Schoenfeld) som sier at dette er krevende: Problemløsningsoppgaver kan som regel løses på mange måter. Videre sier de at dette reduserer lærers kontroll over hva som vil skje i timen. De mener at å kunne improvisere krever et velutviklet nettverk av fagkunnskap, pedagogisk kunnskap og kunnskap om hvordan elever lærer. Stein et al. (2008) sier at helt nye lærere kan bli overrasket over hva elever sier og gjør, og ofte vet de derfor ikke hvordan de skal respondere i diskusjonen. De argumenterer derfor for at nybegynnere trenger et «sett med praksiser» som kan hjelpe dem å tilrettelegge for diskusjoner. (Stein et al., 2008, s.321) presenterer praksisene «Anticipating», «Monitoring», «Selecting», «Sequencing» og «Connecting» og sier at disse fem praksisene kan hjelpe lærere å få planlagt helklassediskusjonene bedre. De sier at dette til en viss grad kan fjerne improvisasjonen i de matematiske diskusjonene. Stein et al. (2008, s.321) forklarer praksisene slik: Forvente (anticipating) mulige strategier elevene vil bruke når de løser de kognitivt utfordrende matematikkoppgavene, observere (monitoring) elevenes respons på oppgaven i utforskningsfasen, velge (selecting) bestemte elever som får presentere de matematiske strategiene sine i helklassediskusjonen, bestemme rekkefølgen (sequencing) som elevene presenterer strategiene sine i og hjelpe klassen til å se matematiske sammenhenger (connecting) mellom forskjellige elevstrategier og mellom elevstrategier og sentrale matematiske idéer.

Stein et al. (2008) sier at hver av de fem praksisene er diskutert av andre forfattere tidligere, deres bidrag er å innlemme dem i en felles pakke. De sier at hver praksis bygger på den forrige praksisen, og de fremstiller det skjematisk som vist i figur 3.



Figur 3. Skjematisk framstilling av de fem praksiser (Stein et al., 2008, s.322).

Den første praksisen er forvente (anticipating), og denne praksisen skjer før timen begynner. Ifølge Stein et al. (2008) må lærer aktivt tenke gjennom hvilke metoder og strategier elevene vil velge, både de som er korrekte og de som vil ta elevene i feil retning. Lærer må bestemme hvilke matematiske konsepter, begrep, representasjoner og prosedyrer hun ønsker at elevene skal lære og hvordan elevenes strategier og tolkninger kan kobles til disse. Stein et al. (2008) sier videre at læreren må har gjort oppgaven hun ønsker at elevene skal gjøre, og hun bør ha løst den på så mange måter som hun kan. De mener at lærer da vil kunne ha spørsmål eller en aktivitet klar for å hjelpe elevene videre dersom deres vinkling ikke fører fram.

Den andre praksisen er observering (monitoring). Stein et al. (2008) sier at denne skjer i klasserommet ved at lærer observerer den matematiske tenkningen som foregår blant elevene. Dette gjøres ved å sirkulere i klasserommet i utforskningsfasen. De mener at lærere som har forberedt seg (anticipating) vil kunne kjenne igjen strategier, men det kan også dukke opp idéer lærer ikke har tenkt på. Stein et al. (2008) sier at i denne fasen kan det være lurt å notere strategiene og forklaringene elevene bruker: Lærer bør se på notasjon, høre på diskusjoner og prøve å forstå den matematiske tenkningen, gjerne ved å stille spørsmål. Stein et al. (2008, s.326 – 327) siterer Lampert for å begrunne denne observasjonspraksisen:

> «If I watch and listen during small-group independent work, I am then able to use my observations to decide what and who to make focal during whole-class discussion.»

Den tredje praksisen er å velge (selecting). Ifølge Stein et al. (2008) er dette at lærer velger ut bestemte elever som får presentere deres arbeid til resten av klassen for å få fram matematikk lærer mener er viktig. Stein et al. (2008) sier at dette skjer ved å be en bestemt elev eller gruppe om å presentere, eller be om frivillige (for eksempel ved håndsopprekning) men så velge en bestemt som lærer vet har en nyttig idé å dele. Stein et al. (2008, s.328) sier at utvelgelsen skal være bevisst fra lærers side: de kaller det en «purposeful selection» slik at viktige matematiske idéer kommer fram i diskusjonen, ikke bare tilfeldige strategier som elevene har lyst til å dele. De sier at det også være nyttig å få fram vanlige feil og misforståelser slik at elevene blir gjort oppmerksomme på disse og kan få korrigert oppfatningene sine ved hjelp av sine medelever. Dersom det finnes en spesielt viktig strategi som ingen i klassen tenker på, kan denne presenteres som arbeid fra en annen klasse eller som et bidrag fra lærer som klassen kan tenke over. Videre mener Stein et al. (2008) at det er viktig at lærere ikke velger for å unngå de matematiske idéene til elevene de synes er mest vanskelig å undervise.

Den fjerde praksisen er å bestemme hvilken rekkefølge (sequencing) de utvalgte elevene skal få presentere sitt arbeid i. Stein et al. (2008) sier at ved å tenke over rekkefølgen vil læreren kunne øke sjansen for å nå de matematiske målene hun har for diskusjonen. De sier at det kan være en idé å presentere en strategi som var mye brukt av elevene slik at flesteparten av elevene skjønner diskusjonen, eller en kan starte med en strategi som bygger på en misoppfatning som mange elever delte. De sier videre at lærer kanskje ønsker å se på relaterte strategier, eller motstridende strategier, rett etter hverandre slik at det er lettere for klassen å sammenlikne dem matematisk. Igjen sier Stein et al. (2008) at lærer må velge med omhu: en vil ha fram en matematisk idé, og må velge en rekkefølge som gjør at den matematiske diskusjonen blir sammenhengende og forutsigbar, ikke vilkårlig ut fra hva elevene ønsker å dele.

Den femte praksisen er å se sammenhenger (connecting). Stein et al. (2008) sier at dette skjer etter at elever har presentert sine strategier og løsninger. De mener at lærer nå må hjelpe elevene å se sammenhenger mellom idéene og hjelpe dem til å evaluere forskjellige metoder, for eksempel se på hvilke som er mest nøyaktige og effektive og når de kan brukes. Målet er at elevenes presentasjoner skal bygge på hverandre for å generalisere og utvikle matematisk idéer. Stein et al. (2008) sier at i denne fasen får elevene reflektere over andre elevers idéer mens de evaluerer sine egne. De foreslår at lærere nå kan planlegge videre timer hvor oppgavene bygger på det de har diskutert og blir mer krevende.

Stein et al. (2008) mener at de fem praksisene styrker elevenes ansvarliggjøring uten å undergrave deres autoritet. Praksisene, som stort sett er usynlige for elevene, påvirker ikke elevenes voksende autoritet på samme måte som hint og korrigering. De mener at elevenes idéer er grunnlaget i diskusjonen og det er elevene selv som evaluerer dem.

Stein et al. (2008, s.334) sier at:

> «Thus, students can experience the magic of learning through interaction and communication with their peers, the exhilaration of coconstructing something new, and the payoff that comes from sustained listening and thinking in a concentrated and focused manner. At the same time, the discipline of mathematics has been represented through the teacher's wise selection of student ideas to discuss in a particular order and by prompts for students to make important mathematical connections between them.»

Stein et al. (2008, s.335) sier allikevel at disse 5 praksisene ikke må sees på som en «instant fix» for matematikkundervisning. De sier at praksisene er en komponent av effektiv pedagogisk praksis: en må i tillegg må ha klasseromsnormer som støtter problemløsning, har respekt for andres innsats og som verdsetter prosessene som er involvert i matematisk argumentasjon. De tilbyr praksisene mer som en prosess, som lærere kan bruke for å gradvis forbedre sine klasseromsdiskusjoner.

Smith og Stein (2011) sier at de, etter å ha jobbet med lærere som har argumentert for at det å bestemme det matematiske målet for timen burde bli kalt «den nulte praksisen», har tatt med denne nulte praksisen i videre arbeid. Smith og Stein (2011) påpeker i denne nulte praksisen viktigheten av at lærere har klare læringsmål for timen og velger oppgaver som kan hjelpe elevene å nå disse målene. Dette må gjøres før de fem praksiser iverksettes. Som Liljedahl (2016) så mener Smith og Stein (2011) at oppgavene må være slik at elevene må tenke og ikke bare følge tidligere tillærte metoder.

2.5.3 Samtalegrep

Jeg vil i dette delkapitlet presentere forskning på grep som kan hjelpe lærere til å få til samtaler som fremmer elevenes læring i matematikk.

Academically productive talk

O'Connor, Michaels og Chapin (2015) har i over ti år forsket på samtaler og diskusjoner i matematikkundervisning på barnetrinnet i et lavtpresterende distrikt i Chelsea, Massachusetts, USA. De forteller at Chapin i 1998 startet et prosjekt, «Project Challenge», der elever som hadde et mulig talent i matematikk, skulle få et utfordrende matematisk pensum og støttende undervisning i store kohorter. O'Connor et al. (2015) sier at når prosjektet startet, var ikke klasseromsdiskusjon et av virkemidlene for undervisningen. Etter hvert samarbeidet O'Connor og Chapin om å veilede lærerne i Chelsea, slik at disse kunne lede «academically productive talk» [2] i klasserommet. O'Connor et al. (2015) fant at diskusjonene med bruk av academically productive talk førte til at elevaktiviteten i Project Challenge-klassene endret seg: elevene var mer engasjerte og fokuserte enn elever i andre klasserom, og det foregikk ofte utvidede diskusjoner i matematikk. Videre sier de at lærerne i klasserommene også la merke til at de fleste elevene, selv om de hadde vært motvillige i oppstarten, begynte å delta og snakke academically productive talk. O'Connor et al. (2015) samlet data fra standardiserte prøver og fant oppsiktsvekkende resultater: Elevene i Project Challenge-klassene fikk signifikant bedre resultater enn resten av fjerdeklassingene i Massachusetts. De som hadde fulgt opplegget videre til sjette klasse gjorde det enda bedre. O'Connor et al. (2015, s.114) sier at etter 3 år med Project Challenge så presterte 82 % av elevene i disse klassene resultater i «Advanced» og «Proficient» på den standardiserte MCAS[3] prøven. De sier at i resten av Massachusetts var det bare 40% av sjetteklassingene som scoret tilsvarende disse to høyeste kategoriene. Når O'Connor et al. (2015, s.115) sjekket resultatene fra en standardisert test[4] som elevene i Project Challenge hadde tatt i oppstarten av det første året de deltok i dette prosjektet, fant de at kun 4% av elevene fikk «superior or above», 24% presterte til over middels («above average») og 72% presterte til middels eller under middels («average» og «below average»). De tenkte derfor at de veldig gode resultatene elevene fikk etter 3 år med dette prosjektet, ikke skyldtes at disse elevene var eksepsjonelt flinke i utgangspunktet. O'Connor et al. (2015) startet dermed et forskningsprosjekt hvor de, blant elever med gjennomsnittsresultater i en test for kognitive evner som ikke er avhengig av språk[5], valgte tilfeldig ut 106 elever til å delta i Project Challenge. De ønsket å sammenligne disse med 140 elever, med samme gjennomsnitts-resultater på testen, som ikke deltok i Project Challenge. Disse 140 elevene fikk vanlig undervisning («the regular program») på skolene. O'Connor et al. (2015) sammenliknet disse to gruppene ved å se på MCAS-prestasjonene til elevene sent på våren i fjerdeklasse. De fant at gjennomsnittselevene i Project Challenge fikk signifikant bedre resultater enn gjennomsnittselevene med vanlig undervisning. O'Connor et al. (2015) ønsket å se om disse resultatene fortsatte etter det første året i prosjektet. På matematikkdelen

[2] Academically productive talk er ikke helt det samme som akademisk produktive diskusjoner da det også innebærer hvilke ord og hvordan elevene skal snakke til hverandre. Jeg vil derfor bruke academically productive talk videre i teksten.
[3] Massachusetts Comprehensive Assessment System
[4] «Test of Mathematical Abilities»
[5] Naglieri Non-Verbal Abilities Test, brukes for å identifisere elever med et potensielt talent for et fag, der språk og kultur kan føre til underrepresentasjon på tradisjonelle tester. (O'Connor et al., 2015, s.115)

av en MCAS test[6] i femte klasse, fant de at Project Challenge elevenes resultater var over et standardavvik bedre enn de andre elevenes resultater. O'Connor et al. (2015) spurte seg om hva disse resultatene kunne skyldes? De sier at mange av lærerne som deltok i prosjektet mente at den største faktoren var den hyppige bruken av klasseromsdiskusjoner for å støtte opp om matematisk læring. De sier at lærerne mente at elevene ble flinkere til å lytte til lærer og medelever, de ble bedre til å forklare sin egen tenkning og bruke et matematisk korrekt språk, og de ble mye flinkere til å engasjere seg i matematisk resonnering og lengre diskusjoner om komplekse idéer. De sier videre at denne evnen til å delta i relativt sofistikerte diskusjoner ikke begrenset seg til noen få flinke elever, men at hele kohorten deltok. O'Connor et al. (2015) sier at selv om hver enkelt elev ikke snakket hver dag, så deltok omtrent alle elevene over tid. På bakgrunn av arbeidet med Project Challenge i Chelsea, Massachusetts, utførte O'Connor et al. (2015) en in vivo studie på klasseromsdiskurs. De valgte ut to 6.klasser som på forhånd var vant med academically productive talk og som var sammenlignbare med hensyn på matematisk kunnskap, målt ved Stanford Diagnostic Mathematics Test. O'Connor et al. (2015) sier at samme lærer, som var ukjent for begge gruppene, underviste i en gruppe om gangen, i samme tema, over flere dager. Dette skulle hindre at det var selve læreren som påvirket utfallet. Den ene klassen fikk undervisning med bruk av «academically productive talk» og den andre klassen fikk «direkte instruksjon». O'Connor et al. (2015) lot læreren undervise et annet tema noen uker senere, med motsatt undervisningsmetode, det vil si at de som forrige gang fikk direkte instruksjon fikk nå undervisning med bruk av academically productive talk, og omvendt. O’Connor et al. (2015) sier at i timene der academically productive talk ble brukt, benyttet læreren det de kaller samtalegrep. De nevner samtalegrep som snu og snakk, be om forklaring, gjentakelse for å få klarhet i hva elevene sier, samt samtalegrep for å få elevene til å engasjere seg i hverandres idéer, som for eksempel å spørre om de er enige eller uenige og hvorfor de er enige eller uenige i en bestemt idé. I klasserommet med direkte instruksjon ble ikke disse samtalegrepene benyttet. O’Connor et al. (2015) sier at de prøvde å få forholdene under direkte instruks til å gi best mulig instruks, slik at de møtte alle (ikke-diskusjons) standardene i NCTM (National Council of Mathematics Teachers). O’Connor et al. (2015) ga elevene en prøve før undervisningen og en prøve etter undervisningen. De sier at resultatene fra prøvene viser at eleven i begge gruppene så ut til å dra fordel av bruk av academically productive talk. De fant,

[6] Her deltok 83 elever fra Project Challenge gruppa og 70 av elevene med «vanlig» undervisning

i begge gruppene, at elevene presterte signifikant bedre når de lærte i et klasserom der lærer brukte samtalegrep og fremmet diskusjoner i klasserommet, sammenlignet med når den samme læreren brukte direkte instruksjonsmetoder.
Chapin, O'Connor og Anderson (2013), Kazemi og Hintz (2019), Michaels, O'Connor, Hall og Resnick (2010), Resnick, Asterhan, og Clarke (2018), Staples (2007) og Wæge (2015) har alle forsket på samtalegrep lærere kan bruke for å tilrettelegge for slike matematiske samtaler der elevene får lære.

Talk moves

Chapin, O'Connor og Anderson (2013) deler fire steg som de mener hjelper med å få produktive samtaler i matematikklasserommet. De fire stegene er: Å hjelpe elevene å avklare og få satt ord på og dele tankene sine, å hjelpe elevene til å følge med og orientere seg i andres tenkning, å hjelpe elevene til å gå dypere i sine begrunnelser og å hjelpe elevene til å engasjere seg i andres resonnement og begrunnelser. Chapin et al. (2013) sier at lærer må styre samtalen dit hun ønsker den og bruke elevenes idéer for å komme dit. De gir oss grep (talk moves) som kan brukes for å få til de fire stegene de presenterer. Chapin et al. (2009, referert til i Kazemi & Hintz, 2014, s.21) hadde opprinnelig fem samtaletrekk: «Revoicing», «Repeating», «Reasoning», «Adding On», og «Wait Time». Kazemi og Hintz (2014, s.20 – 21) sier de har lagt to samtalegrep: «Turn and talk» og «Revise your thinking». I O'Connor et al. (2015) sin studie fra 6.klassene, nevnte de at lærer brukte flere av disse samtaletrekkene, inkludert snu og snakk.

Målrettet samtale (Intentional talk)

Kazemi og Hintz (2019, s.14) sier at deres arbeid med klasseromssamtaler styres av følgende fire prinsipper: 1. Samtalene skal bidra til å oppnå matematiske mål, og ulike typer mål krever ulik planlegging og ulik ledelse av diskusjonen. 2. Elevene må få vite hva de kan ta opp og hvordan de kan dele idéene sine, slik at idéene blir hørt og at det kan være nyttig for andre. 3. Læreren må orientere elevene mot hverandre og mot de matematiske begrepene, slik at alle i klassen er involvert i å nå det matematiske målet. 4. Læreren må fortelle og vise alle at elevene er med på å skape forståelse, og at deres innspill er verdifulle.

Kazemi og Hintz (2019) sier for det første prinsippet, at samtalene skal bidra til å oppnå matematiske mål, at det er viktig at lærer har klart for seg hva det matematiske målet for timen er før hun planlegger en diskusjon. Dette tilsvarer Smith og Stein (2011) sin nulte praksis. Kazemi og Hintz (2019, s.13) sier at målet for timen hjelper deg til å avgjøre hva du skal lytte etter og hvilke idéer du skal følge opp. For det andre prinsippet, at elevene må få vite hva de kan ta opp og hvordan de kan dele idéene sin, sier Kazemi og Hintz (2019, s.15) at «elevene lærer hva de skal dele ved at vi oppmuntrer dem til å formidle viktige deler av forklaringene sine.» De foreslår setningsstartere som «Forklar meg hva du mente med …», «Hva ville du gjort hvis tallene var …» og «Hvordan er din måte å tenke på annerledes enn …». Kazemi og Hintz (2019) mener at dette vil være med på å utnytte elevressursene i klasserommet. For det tredje prinsippet, å orientere elevene mot hverandre og mot de matematiske begrepene, sier Kazemi og Hintz (2019) at det kan være en utfordring å involvere hele klassen. De foreslår at lærer setter søkelys på meningsfulle bidrag fra alle elevene. De sier at lærer må oppmuntre elevene til å ta sjanser og vise at de kan. Kazemi og Hintz (2019) sitt fjerde prinsipp er å anerkjenne alle elevenes bidrag. Kazemi og Hintz (2019, s.16) sier at de ønsker at elevene skal se på seg selv som «matematiske tenkere som kan utvikle seg og lykkes i faget».

Kazemi og Hintz (2014) sier at for å få til disse fire prinsippene synes de at samtalegrepene beskrevet av Chapin, O’Connor og Anderson (2009, referert til i Kazemi & Hintz, 2014) er veldig nyttige. Kazemi og Hintz (2019, s.26) sier at de tror at måten lærere og elever prater med hverandre på i klasserommet, er avgjørende for hva elevene lærer i matematikk og for hvordan de ser på seg selv som matematiske tenkere.

Wæge (2015) har oversatt samtalegrepene fra Chapin et al. (2009, referert til i Kazemi & Hintz, 2014, s.21) «Revoicing», «Repeating», «Reasoning», «Adding On», og «Wait Time» samt Kazemi og Hintz (2014, s.20) sine samtalegrep «Turn and talk» og «Revise your thinking» til norsk. Den norske oversettelsen og hvordan lærere kan bruke grepene presenteres i figur 4 (Wæge, 2015, s.23).

Wæge (2015) sier at disse samtaletrekkene er under utprøving i et prosjekt ved Matematikksenteret, NTNU. Når artikkelen skrives er prosjektet i oppstarten, men hennes foreløpige erfaring er at samtaletrekkene fungerer også i den norske konteksten. Wæge (2015) sier at trekkene hjelper med å engasjere elevene i samtalene og få dem til å begrunne løsninger og se sammenhenger mellom fremgangsmåter. Videre sier hun at samtaletrekkene er gode redskaper for å fremme elevenes læring og forståelse i matematikk.

Samtaletrekk	Det kan høres ut som…	Hva en lærer gjør
1. Gjenta	«Så du sier at …?»	Repeterer deler eller alt en elev sier, og ber deretter eleven respondere og bekrefte om det er korrekt eller ikke.
2. Repetere	«Kan du gjenta hva han sa med dine egne ord?»	Spør en elev om å gjenta en annens elevs resonnering
3. Resonnere	«Er du enig eller uenig, og hvorfor?» «Hvorfor gir det mening?»	Spør elevene om å bruke deres egen resonnering på noen andres resonnering
4. Tilføye	«Har noen noe de vil føye til?»	Prøver å få elevene til å delta i en videre diskusjon
5. Vente	«Ta den tiden du trenger … vi venter.» (Teller sakte til 10 inni deg.)	Venter uten å si noe
6. Snu og snakk	«Snu og snakk med sidemannen din»	Sirkulerer og lytter til samtalene mellom elevene. Bruker informasjonen til å velge hvem du skal spørre.
7. Endre	«Har noen av dere forandret tenkingen deres?»	Tillater elevene å endre tenkingen etter som de får ny innsikt.

Figur 4. Samtaletrekk for å støtte klasseromsdiskusjoner. Wæge (2015, s.23).

Accountable talk

Michaels, O'Connor, Hall og Resnick (2010, s.1) sier at å snakke med andre om idéer og arbeid er fundamentalt for å lære. De sier at å samtale gir oss mulighet til å organisere tankene våre til sammenhengende ytringer, til å høre tenkningen vår uttalt, til å høre andres svar og kanskje høre andre tilføye og utvide tenkningen vår. Men å snakke leder ikke nødvendigvis til læring: Michaels et al. (2010, s.1) mener at samtalene må være «accountable» (ansvarlige) for at de skal føre til læring. De presiserer at samtalene må være ansvarlige overfor lærings-samfunnet, ansvarlig i forhold til nøyaktig og passende kunnskap og ansvarlig i forhold til korrekt tenkning. Liljedahl (2022[7]) sier at han foretrekker begrepet «responsible» framfor «accountable»: han mener at responsible flytter ansvarligheten til ansvar for seg selv og sin egen læring, mens accountable mer er ansvar overfor andre, for eksempel samfunnet rundt.

[7] Forelesning ved Universitet i Bergen, 20.mai 2022.

Resnick, Asterhan og Clarke (2018) sier at elever kan lære seg å resonnere ved å snakke og argumentere seg gjennom problemer, komme fram til løsninger og trekke konklusjoner. Resnick et al. (2018, s.14) sier at de kaller slike strukturerte diskusjoner som støtter læring «Accountable Talk». Michaels et al. (2010) sier at dette ikke kommer av seg selv: det tar tid og krefter for å få til et Accountable Talk-klasserom. De sier at lærere må veilede og støtte elevenes deltakelse i diskusjoner ved å spørre, sondere og lede samtalene. Michaels et al. (2010) foreslår at lærere ber om forklaringer og begrunnelser, kjenner igjen og tar tak i misoppfatninger, krever bevis for påstander eller tolker og reformulerer elevenes påstander. De mener at med tiden til hjelp vil elevene klare å utføre slike diskusjoner med sine medelever på egenhånd. Michaels et al. (2010, s.1) sier:

> «Once the norms for conversation within the classroom have been established, academically productive talk is jointly constructed by teachers and students, working together towards rigorous academic purposes in a thinking curriculum.»

For å få til disse sammenhengende diskusjonene, sier Michaels et al. (2010) som Smith og Stein (2011) og Hodgen og Wiliam (2006), at lærer må ha et klart akademisk mål for timen og spørre seg selv om hvordan disse idéene kan relateres til tidligere kunnskap. De sier videre, som Brodie (2010), Resnick et al. (2018) og Smith og Stein (2011), at elevene må få kognitivt krevende oppgaver med lav inngangsterskel. Michaels et al. (2010) sier videre at lærer må planlegge for en tydelig introduksjon til oppgaven, elevene må få tid til å jobbe med problemene, og det må foregå en klar oppsummering av de store idéene som er diskutert og den nye forståelsen de sammen er kommet fram til. Dette kjenner vi igjen fra Smith og Stein (2011) sine launch, explore og discuss and summarize-faser.

Michaels et al. (2010) sier at for å få til disse diskusjonene med høyt nivå på innhold og bred deltagelse av elevene, så må det etableres stabile rutiner og struktur for diskusjonene. Slike rutiner og strukturer vil hjelpe både elever og lærer til å sette fokus på det faglige innholdet, da alle vet hva som forventes av dem. Michaels et al. (2010) sier at det ikke finnes en bestemt struktur på diskusjonene som er den beste for alle, de sier at noen accountable talk-klasserom har helklassediskusjon, andre har grupper eller parvise samtaler.

Michaels et al. (2010, s.26) sier at det finnes en rekke «teacher moves» som kan brukes for å få til «accountability to community, knowledge, and rigorous thinking». De foreslår at lærer vektlegger viktige elevbidrag ved for eksempel å si «that’s an important point» og kanskje ber eleven om å gjenta det hun sa og hvorfor dette er viktig (Michaels et al., 2010, s.26). Michaels et al. (2010, s.26) foreslår også, om en elev har et tankevekkende spørsmål, at lærer snur spørsmålet til eleven og sier «good question, what do you think?» De mener at en måte å få elevene til å utdype og avklare argumentene sine på, er ved å sitere fakta og gi dem moteksempler: «but what about … ?». De foreslår også å sette fokus på tenkningen som skjer i rommet ved å gjenta og oppsummere viktige poeng som er brakt fram i diskusjonen. Også Resnick et al. (2018, s.19) foreslår «Accountable Talk moves» for å hjelpe elevene å tenke sammen. De sier at lærere kan bruke setningsstartere som «So, let me see if I have your thinking right. Are you saying … ?» for å få eleven til å reflektere på egen tenkning og verifisere eller utdype. Resnick et al. (2018, s.19) foreslår å si «Do you agree or disagree? ... Why?» for å få elever til å utdype om en medelevs resonnering og «Why do you think that?» for å få elever til å utdype egen tenkning. De foreslår også å be elevene om å vise hvordan de kom til en bestemt løsning, be om forskjellige løsninger og forklaringer fra flere elever og gi ventetid slik at elevene får mulighet til å formulere tenkningen sin slik at andre kan forstå den. Alt dette er grep vi kjenner igjen fra Chapin et al. (2013) og Kazemi og Hintz (2019). Som Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011) så foreslår også Resnick et al. (2018, s.27) at lærer må forvente (anticipate), mer spesifikt sier de at lærer må ha tenkt over hvilke misoppfatninger elever kan ha:

> «Teachers should acquaint themselves with common misconceptions students have about a topic in order to direct students toward clear conceptual understanding. Anticipating misconceptions also helps teachers guess at the meaning when a student's statement is incomplete or not fully comprehensible (and then probe accordingly), and to identify misconceptions that are worthy of mulling over together.»

Dette kjenner vi igjen fra Bransford et al. (1999, s.10) som mener at det er viktig at lærerne tar hensyn til eventuelle «incomplete understandings» og «false beliefs».

Chapin, O'Connor og Anderson (2013), Kazemi og Hintz (2019), Michaels, O'Connor, Hall og Resnick (2010), Resnick, Asterhan, og Clarke (2018), Staples (2007) og Wæge (2015) beskriver grep lærere kan bruke for å tilrettelegge for matematiske samtaler der elevene får lære. Drageset (2016) har forsket på hvilke grep fem norske lærere faktisk bruker for å styre samtaler. Denne forskningen er fra fem matematikklasserom på mellomtrinnet i grunnskolen.

Drageset (2016) deler grepene inn i tre grupper som han kaller Retningsendring, Framdrift og Fokusering. Den første gruppen er grep for å påvirke elevene til å endre strategi gjennom råd, spørsmål og avvisning, den andre gruppen er grep som hjelper elevene fram til svaret ved at lærer demonstrerer, forenkler eller spør spørsmål, den tredje gruppen er grep som hjelper elevene å fokusere på forståelse ved å be om detaljer og begrunnelser og få fram det som er viktig. Drageset (2016) fant at det mest brukte grepet for retningsendring var korrigerende spørsmål. Han sier at dette kom til uttrykk ved kommentarer som «Ja, du kan gjøre det, men hva om… ?» Drageset (2016) mener at dette er en form for dobbelt kommunikasjon da lærer først godtar svaret, men så kommer med et spørsmål som sår tvil til elevenes svar.

Det mest brukte grepet i disse fem klasserommene, var at lærer, for å få framdrift, delte oppgaven opp og stilte et spørsmål for hvert steg. Drageset (2016) sier at dette gjør at lærer tar ansvar for prosessen, hva som må gjøres for å finne svaret, og elevene svarer bare på enkle utregninger. Tilsvarende skjer under det Drageset (2016) kaller forenkling: lærer er så opptatt av å få rett svar at han gir hint og omformulerer. Det vil si at elevene ender opp med å løse en mye enklere oppgaven enn det som var utgangspunktet. Drageset (2016) fant at også dette var en mye brukt metode for å få framdrift.

Drageset (2016) sier at det er den siste gruppa med grep som er den meste interessante: grep som hjelper elevene å fokusere på forståelse. Han sier at når lærere ber om forklaringer og argumentasjon så krever de mer av elevene. Videre sier han at når lærere ber om evaluering, lar de elevene dele kunnskapen og forståelsen sin med hverandre. Drageset (2016) fant at det mest brukte grepet for fokusering, var at elevene ble bedt om å forklare hva de hadde gjort, eller hva et svar eller et begrep betyr. Grep som ber om forklaringer og begrunnelser, kjenner vi igjen hos O'Connor et al. (2015), Chapin et al. (2013) og Michaels et al. (2010).

Som Resnick et al. (2018) foreslår også Drageset (2016) å spørre «Hvorfor?». Han foreslår «Hvorfor har du gjort det slik?», «Hvorfor er det rett å gjøre det slik?» og «Hvorfor er dette matematisk korrekt?» Drageset (2016) sier at når elever må begrunne svarene sine så øver de opp evnen til å argumentere matematisk. Drageset (2016) fant at det å spørre «Hvorfor?» var et lite brukt grep i de klasserommene han observerte. Han sier også at lærerne i de observerte klasserommene sjelden ba elevene vurdere svaret de kom fram til.

Drageset (2016) sier at stadige hint og overdrevet hjelp fra lærer kan gjøre elevene avhengige av dette. Han sier videre at en lærer som konsekvent spør «Hvorfor?» kan få elevene til å tenke begrunnelser og argumentasjon, også når det ikke blir spurt etter. Han mener at om elevene stadig får spørsmål om hvordan de har tenkt, så vil de bli mer bevisste på sin egen tenkning, og på hvordan matematikken kan forklares og henger sammen.

2.5.4 Oppsummering av hvordan lærer kan tilrettelegge for undersøkende matematikk

Jeg har i dette delkapitlet presentert Liljedahl (2016, 2021) sine idéer for å få til tenkende klasserom og Stein et al. (2008) samt Smith og Stein (2011) sine fem praksiser for produktive helklassediskusjoner. Ved å bruke Liljedahl (2016, 2021) sine små, synlig tilfeldige grupper ved de vertikale ikke-permanente tavlene, blir arbeidet synlig både for lærer og elever, slik at observasjonspraksisen Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011) foreslår blir enklere for lærer. Tavlene gjør det mulig for lærer å se hva de enkelte gruppene har fått til, om det finnes misoppfatninger som må tas tak i, og lærer vil dermed enklere kunne velge ut hvem som skal presentere arbeidet sitt og i hvilken rekkefølge det bør presenteres enn om elevene satt bøyd over hver sin notatbok ved hver sin pult. Å velge og bestemme rekkefølge er også praksiser foreslått av Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011). Liljedahl (2021) sier at en alltid skal konsolidere fra bunnen, det vil si starte med den presentasjonen som har løsninger alle gruppene har. Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011) sin siste praksis, å hjelpe elevene å se sammenhenger, vil også dra fordel av at elevene jobber på tavlene. Lærer kan vise til gruppenes tavler og gruppa som presenterer har «notater» å støtte seg til, lett tilgjengelig. Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011) sin første praksis, forvente, det vil si å på forhånd ha tenkt gjennom hvilke strategier elevene kommer til å bruke og kanskje også hvilke feil og misforståelser en kan komme til å se, vil også hjelpe til med å gi elevene hint som foreslått av Liljedahl (2016, 2021). Som Liljedahl (2016, 2021), sier også Stein et al. (2008) at elevene må samarbeide om problemløsning.

Jeg har også presentert O'Connor et al. (2015) sin forskning på «Academically productive talk», Michaels et al. (2010) og Resnick et al. (2018) «Accountable talk» og Chapin et al. (2013) og Kazemi og Hintz (2014) sine «Talk moves». Felles for alle disse er at de mener at elever lærer av å samtale og av å måtte forklare. O'Connor et al. (2015) mener at hyppig bruk av klasseromsdiskusjoner, med bruk at samtalegrep som beskrevet av Chapin et al. (2013) og Kazemi og Hintz (2014), vil gjøre elevene trente til å lytte til hverandre, til å forklare tenkning og til å bruke matematisk korrekt språk. Michaels et al. (2010) foreslår, i tillegg til samtalegrep, det de kaller «teacher moves». De sier alle, som Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011), at samtalene skal være om matematikk og at ved å bruke samtaletrekk og lærergrep skal lærerne orientere elevene mot hverandre, lære dem til å lytte til hverandre og prøve å forstå det som medelever sier. De beskriver hvordan elever skal læres opp til å snakke til hverandre med respekt og ta hverandres idéer seriøst. Drageset (2016) sin forskning viser at de lærerne han observerte i stor grad forenklet matematikken for å hjelpe elevene videre, og i liten grad ba elevene forklare hvorfor svarene eller metodene må være slik.

Felles for all denne forskningen er holdningen om at samtalene og diskusjonene om matematikk i klasserommet har mye å si for læringen. Dette stemmer med holdningene vist til fra Kunnskapsdepartementet (2017), Bransford et al. (1999), Schoenfeld (2016), Hodgen og Wiliam (2006), Hattie (2015) og Brodie (2010).

Staples (2007, s.2) utførte det hun kaller en «in-depth longitudinal case study of a collaborative high school mathematics classroom». Jeg har valgt å oversette collaborative til samskapende, da Staples (2007, s.4) spesifiserer at elevene skaper, ikke bare samarbeider:

> «The term collaborative then implies a joint production of ideas, where students offer their thoughts, attend and respond to each other's ideas, and generate shared meaning or understanding through their joint efforts. Collaboration is distinct from cooperation which only implies sharing.»

Staples (2007) forklarer videre at samarbeid (cooperation) kan være å for eksempel å dele svar eller lage en plakat sammen, men dette innebærer ikke at elevene sammen produserer matematiske idéer. Felles for de pedagogiske grepene jeg har beskrevet i dette delkapitlet, metodene i Liljedahls (2016, 2021) tenkende klasserom, O'Connor et al. (2015) sin «Academically productive talk», Michaels et al. (2010) og Resnick et al. (2018) sin «Accountable talk» og Chapin et al. (2013) og Kazemi og Hintz (2014) sine «Talk moves», er at elevene samarbeider om problemløsning, ved at de diskuterer, forklarer og argumenterer for sine strategier. På denne måten tilrettelegger alle disse metodene for at elevene skal samskape forståelse i matematikk, og ikke forstå det alene og individuelt.

2.6 Normer

Normer er uskrevne regler og forventninger som vi forholder oss til. Wood (1998, referert til hos Franke et al., 2007, s.238) definerer klasseromsnormer som

> «the interlocking networks of obligations and expectations that exist for both the teacher and students». «[These] hidden regularities guide the actions of participants in the classroom… [and] become the taken-for-granted ways of interacting that constitute the culture of the classroom».

Det vil si at han tenker på normer et sammenflettet nettverk av forpliktelser og forventninger som påvirker hvordan deltakerne i et klasserom samhandler. De generelle reglene for hvordan en oppfører seg kan kalles sosiale normer. I klasserommet er dette for eksempel at elever ikke snakker mens andre snakker og rekker opp hånden når en ønsker å si noe. Yackel og Cobb (1996, s.458) sier at sosiomatematiske normer er annerledes enn generelle klasseromsnormer da de er spesifikke til matematikk. De sier at sosiomatematiske normer er spesielt viktige da de gir oss en mulighet til å analysere og snakke om de matematiske aspektene av læringsaktivitetene i matematikklasserommet. Norén og Thornberg (2015, s.4) sier at

> «Sosiomatematiske normer kommer til syne gjennom elevenes adferd i klasserommet. Matematikken er sentral i hver sosiomatematiske norm. Disse normene fører til ulike klassemiljø, som enten kan støtte eller begrense kommunikasjonen i matematikk-klasserommet. I forlengelsen påvirker sosiomatematiske normer elevenes problemløsing, matematiske og kritiske tenkning».

Liljedahl (2016) sier at i de klasserommene han besøkte før uttesting av metodene sine, hadde normene som var etablert resultert i ikke-tenkende klasserom. I de første forsøkene med å introdusere problemløsningsoppgaver, fant han at lærerne møtte problemer, og få elever klarte å gjøre noe med problemene. Liljedahl (2016, s.364) mener at dette var fordi klasserommene og handlingene i dem fremdeles ble «filtered through their already existing classroom norms».

Liljedahl (2016, 2021), Wæge og Nosrati (2015), Alrø og Skovsmose (2004) og Schoenfeld (1992) mener at i det vi tenker på som tradisjonelle klasserom så eksisterer det normer for at lærer forklarer, kanskje viser et eksempel, elevene er passive mottakere som forsøker å forstå og deretter teste ut metoden på tilsvarende oppgaver. Det vil også her være sosiale normer for hvordan diskusjoner skal foregå, for eksempel å rekke opp hånden før en snakker og vente til lærer gir signal til at det er «din tur» til å si noe. I et mer elevaktivt og utforskende klasserom må andre normer etableres. Yackel og Cobb (1996) sier at i denne pågående reformen med vekt på problemløsning og utforskende klasserom, var det i oppstarten en oppfatning av at lærer skulle innta en passiv rolle og la elevene finne ut alt selv. Dette kaller Stein et al. (2008) for førstegenerasjonspraksis innen utforskende matematikk. Yackel og Cobb (1996) sier at holdningen var at lærer ikke skulle påvirke elevenes konstruktive innsats. De sier videre at siden matematikk kan sees på som en sosial øvelse, så er dette en selvmotsigelse. De mener at det ikke kan forventes at elevene selv vil klare å konstruere matematikken som stemmer overens med det som er akseptert i resten av det matematiske samfunnet.

Liljedahl (2016) sier at klasseromsnormer er vanskelige å omgå. Derfor endret Liljedahl (2016) på hele oppsettet i klasserommet, for å prøve å rive opp i eksisterende normer. Yackel og Cobb (1996), og senere Cobb (2000), sier at de sosiomatematiske normene ikke er bestemt på forhånd og introdusert til et klasserom utenifra. De mener at disse reglene eller forventningene reforhandles og modifiseres av elever og lærer gjennom samhandlingene i timene. Yackel og Cobb (1996) sier videre at når en lærer utvider sin ekspertise med for eksempel utforskende undervisning, så har hun noen klare tanker om hvilke normer hun ønsker å utvikle i klasserommet. Hiebert og Grouws (2007, s.374) sier at om grupper fungerer produktivt eller ei, slik at elevene oppnår læringsmålene for timen, avhenger av blant annet kunnskapen og ferdighetene elevene har for å arbeide sammen. Det må være etablert normer for samarbeid. Yackel og Cobb (1996) og Cobb (2000) sier at disse normene aktivt forhandles fram i hvert enkelt klasserom. Brodie (2010, s.62) sier at matematisk resonnering læres best gjennom samarbeid i «communities of practice». Disse praksisene styres av normer. Brodie (2010, s.62) sier videre at «som lærere, så kan og skal vi, ta styringen for å utvikle klasseromsnormer som gir dypt engasjerte elever.» Også Cobb (2000) mener at lærer er viktig for etablering av normer i klasserommet. Han sier at lærer skal være en autoritet i klasserommet som skal initiere, veilede og organisere reforhandlingene om klasseromsnormene.

Alrø og Skovsmose (2004, s.39) sier at dialog kan sees på som en samtale med bestemte kvaliteter: det er en utforskningsprosess («process of inquiry») som inneholder «risk-taking». De mener at en i en dialog tar en risiko fordi en ikke på forhånd vet hvor en går videre, det er en uforutsigbarhet til stede. En risikerer å miste kontrollen eller å komme inn på en blindvei. De sier videre at det i en dialog er mulig å bli bevisst sin egen kunnskap eller oppdage nye, endrede måter å se ting på. For at elever skal kunne dele kunnskapen sin med lærer og medelever, og utforske og diskutere videre, det vil si risikere å havne på blindspor og trå feil, så må de føle seg trygge i klasserommet. Også her kommer klasseromsnormer inn. Det må være etablert et miljø som gjør at elevene er villige til å snakke og dele tankene sine.

Jeg har allerede nevnt at Resnick et al. (2018) og Bransford et al. (1999) sier at vi lærere må ta tak i og jobbe videre med elevers misoppfatninger. Hogden og Wiliam (2006) peker på at feil oppstår naturlig i læringssituasjoner og er uvurderlige for læringen, så sant de er verdsatt i klasserommet. De sier at når elever opplever kognitive konflikter og jobber seg gjennom dem, kan de gjøre store kunnskapssprang. Dette stemmer med Piagets idé om at læring skjer når en observerer eller opplever noe som ikke passer i de eksisterende kunnskapsstrukturene (Piaget, 1970, referert til i von Glasersfeld, 1995). Om en mener at elever lærer av feil er det viktig å framforhandle klasseromsnormer som gir rom for misoppfatninger og feil.

Yackel og Cobb (1996, s.460) sier at det som blir bestemmende for matematikken i et klasserom, avhenger av målene, antagelsene og de matematiske beliefs deltagerne har. De mener at de sosiomatematiske normene og elevenes beliefs henger sammen. Dersom vi ikke ønsker at elevene skal ha de beliefs om matematikk som Schoenfeld (1992) beskriver: at matematiske oppgaver har et og bare et korrekt svar, at det kun finnes en korrekt måte å løse et hvilket som helst matematisk problem på, at «vanlige» elever ikke kan forvente å forstå matematikk, at de må memorere og bruke det de har lært mekanisk, at matematikk er noe en utfører alene og at alle oppgaver kan løses på 5 minutter eller mindre, så må de tilhørende sosiomatematiske normene endres.

2.7 Rammeverk for klasseromsanalyser

Cobb (2000) sier om sin forskning at han søker å finne hvilke muligheter bestemte matematikkrom gir for elevenes læring. Han sier at i oppstarten av forskningen fokuserte han og kollegene mest på elevers individuelle aktivitet og resonnering. Cobb (2000) mener at de da ikke tok hensyn til den kollektive læringen i klasserommet eller elevers utvikling av matematisk resonnering mens de deltar i praksiser sammen med andre. Cobb (2000, s. 61) sier at klasserom kan oppleves som rotete, komplekse og forvirrende, og at han og kolleger ønsket å utvikle et analytisk rammeverk som hjalp dem å se mønster og orden i det som ved første øyekast kan se ut som «dårlig strukturerte hendelser» (ill-structured events). Cobb (2000, s.46) har identifisert fire aspekter av læringsmiljøet i et klasserom han mener er spesielt viktige for å støtte elevene i deres matematiske utvikling. De fire aspektene er *oppgavene* som brukes i klasserommet («the instructional tasks»), *strukturen på klasseromsaktivitetene* («the structure of classroom activities»), *verktøyene* som brukes («the computer-based tools the students used») og *klasseromsdiskursen* («the classroom discourse»). Cobb (2000) mener at disse fire aspektene bør danne rammeverket for å organisere klasseromsanalyser. Han sier at ved å inkludere strukturen på klasseromsaktivitetene og klasseromsdiskursen i analysen så beskrives de kollektive aktivitetene. Dette stemmer med en holdning om matematikk som en sosial og kulturell aktivitet. Cobb (2000, s.68) sier at klasserommets mikrokultur omfatter de normative («taken-as-shared») måtene å handle på, å resonnere på og argumentere på som følger av at lærer og elever bruker de tilgjengelige ressursene (oppgaver og verktøy) for å sammen utføre aktiviteter i klasserommet (klasseromsstruktur og diskurs). Cobb (2000) beskriver de sosiale normene, de sosiomatematiske normene samt matematikkpraksisene i klasserommet som tre aspekter av mikrokulturen. Cobb (2000) mener at ved å delta i dette sosiale perspektivet, der lærer veileder elever til å etablere spesifikke sosiomatematiske normer, så vil elevene reorganisere sine individuelle tanker om egen og andres rolle i klasserommet, om deres matematiske beliefs og verdier, og deres holdninger til matematikk. Cobb (2000) kaller dette det psykologiske perspektiv, og sier at rammeverket dermed beskriver både det sosiale perspektivet og det psykologiske perspektivet. Cobb (2000) mener det er nyttig å se på elevenes resonnering som en del av en praksis som de, og lærer, etablerer gjennom aktivitetene i klasserommet. Han sier at ved å bruke dette rammeverket for å analysere klasserom får vi en situasjonsbeskrivelse av elevers læring hvor læringsprosessen er direkte relatert til de grepene som tilrettelegger for læringen. Cobb (2000) mener vi dermed kan utvikle testbare teorier om hvordan vi kan støtte elevenes læring.

Oppsummering teori

I dette kapitlet har jeg presentert teorier om læring og vist at vi nå tenker at læring skjer sosialkonstruktivistisk: vi konstruerer vår individuelle kunnskap i en sosial setting, der vi tar del i matematikken som deles i et større fellesskap. Jeg har vist at vi har en endring i læringsbegrepet og at vi ønsker elever som utforsker og problemløser. Jeg har presentert forskning som viser hvordan vi lærere kan tilrettelegge for slik undersøkende matematikk i klasserommet. Jeg har presentert normer for undersøkende matematikk og til slutt Cobb (2000) sitt rammeverk for klasseromsanalyser.

Jeg vil i neste kapittel presentere og forklare mine valg for forskningsmetode.

3. Metode

Jeg vil i dette kapitlet presentere de metodiske valg jeg har gjort for oppgaven. Først vil jeg presentere teori som viser hvorfor jeg, som lærer, bør forske på undervisning. Jeg vil deretter presentere forskningsparadigmer og forskningssyn og dermed det vitenskapsteoretiske perspektivet som oppgaven bygger på. Så vil jeg fortelle om forskningsdesignet jeg har brukt, herunder valg av metode, valg av informanter og valg av data. Jeg vil presentere hvordan datainnsamlingen foregikk og hvordan dataene ble behandlet. Til slutt vil jeg si noe om kvaliteten til forskningen og etiske hensyn.

3.1 Hvorfor skal jeg som lærer forske på undervisning?

Creswell (2014) sier at forskning er en systematisk prosess hvor en søker ny informasjon og ny kunnskap. Han forklarer all forskning slik: en har et spørsmål eller noe en ønsker å finne ut av, en samler og analyserer data som er relevant for å svare på spørsmålet, og en presenterer funnene og svarer på spørsmålet. Creswell (2014) sier at forskning er viktig også innen utdanning. Dette begrunner han med at vi pedagoger kan få ny kunnskap som vi kan bruke til å forbedre praksisen vår. Creswell (2014) sier at resultater fra forskning også kan brukes til å informere politikere og andre som lager regler for skolene.

Pring (2015, s.11) sier at pedagogisk forskning kritiseres for å være utført på for liten skala, slik at den er fragmentert og det er vanskelig å se «det store bildet». Han nevner også at språket som brukes kan være vanskelig, slik at forskningen ikke treffer sitt publikum. Creswell (2014) nevner andre problemer med forskning: Noen ganger viser resultatene motstridende eller vage funn. Han sier at det også kan stilles spørsmål ved datainnsamlingen: Er dataene gode nok? Har vi funnet de rette personene til å svare på spørsmålene? Har vi samlet nok data, og har vi analysert dataene korrekt? I all forskning er det slik at «søppel inn» gir «søppel ut». Dette må jeg ha i bakhodet når jeg går inn i en forskningsprosess for å finne svar på det jeg lurer på.

Pring (2015) sier at til tross for kritikken mot pedagogisk forskning, er det viktig å forske på undervisning. Pring (2015, s.35) sier at pedagogisk forskning må se på samhandlingene mellom lærer og den som lærer, da det er i disse samhandlingene det oppstår nye evner, ferdigheter, forståelse og verdsettelse av verden, hos den som lærer. Han sier videre at lærere selv må forske: Den pedagogiske forskningen har ingen verdi om ikke de som underviser selv forstår og gjør forskningsresultatene til sine. Pring (2015, s.205) sier at dette er fordi bare læreren kan forstå kompleksiteten i det å undervise.

Pring (2015) er klar på at det er viktig at forskning er åpen for kritikk. Han sier at uten det kan en gå glipp av bevis for det motsatte, det vil si gå glipp av det som trekker konklusjonene i tvil. Derfor må funnene presenteres og publiseres. Han mener at det kan være fristende å søke bekreftelse og verifisering av det en allerede tror i stedet for å kritisere og falsifisere, og at en da kan beskytte seg selv ved å ikke dele konklusjonene. Pring (2015, s.154) sier at «en aktiv refleksjon rundt praksis, med et ønske om forbedring, må dermed være en offentlig aktivitet».

Ulvik, Riese og Roness (2016, s.33), som alle underviser ved Institutt for pedagogikk ved Universitetet i Bergen, sier at aksjonsforskning er særlig egnet for lærere, da «den forskende tilnærmingen er direkte koblet til deres egen hverdag». De beskriver aksjonsforskning som en systematisk undersøkelse av egen praksis, der lærer selv stiller seg spørsmål og identifiserer en utfordring eller et vekstpunkt. De forklarer videre at læreren leser litteratur om lignende problemstillinger, diskuterer gjerne med andre involverte, reflekterer og bestemmer seg for hvordan hun vil gå fram for å endre praksisen. De mener at læreren så må prøve ut tiltak for å sjekke om dette vil forbedre undervisningen. Ulvik, Riese & Roness (2016) sier at når disse endringene skjer, vil det kanskje dukke opp nye spørsmål og det er behov for nye refleksjoner. Undervisningen blir kanskje igjen endret basert på data og refleksjon, og en ny runde med uttesting kan gjennomføres, med påfølgende evaluering. Ulvik, Riese og Roness (2016) beskriver dermed aksjonsforskning som en stadig prosess av planlegging, handling og evaluering – gjerne illustrert som en spiral.

Elliott (2010, s.2), som har hatt en viktig rolle i utviklingen av aksjonsforskning innen utdanning, går så langt som å si at aksjonsforskning ikke lenger er valgfritt for lærere:

> «They can either strive to empower themselves to make and create change through action research, or simply hand responsibility for change over to policy makers and educational managers.»

Richardson (1994), som forsker på undervisningspraksis, sier at det finnes to former for slik forskning: formell forskning (formal research) og praktisk forskning (practical inquiry). Hun sier at hovedforskjellen er at den praktiske forskningen foregår i skolehverdagen, for å bedre undervisningen, mens den formelle forskningen er ment å bidra til et større samfunns kunnskapsbase. Richardson (1994) sier at mange lærere tenker at formell forskning ikke er relevant for deres daglige praksis, da de ikke nødvendigvis får kunnskap de trenger til deres egne fag. Praktisk forskning er oftest på liten skala og en kan ikke trekke slutninger som kan overføres til alle situasjoner. Richardson (1994) sier at praktisk forskning derfor ikke utføres for å utvikle generelle lover og regler. Hun sier at en allikevel kan bruke resultatene til å foreslå nye måter å undervise på, det vil si en kan bruke resultater fra slik forskning til å gjøre endringer i eksisterende praksis.

At jeg ønsker å forske på undervisning, for å utvikle min egen praksis og kanskje kunne komme med råd til andres undervisningspraksis, støttes av Creswell (2014), Pring (2015), Ulvik, Riese og Roness (2016), Elliot (2002) og Richardson (1994). Og, som Pring (2015) foreslår for pedagogisk forskning: Jeg skal se på samhandlingene mellom lærer og de som lærer.

3.2 Forskningsparadigmer og kunnskapssyn

I pedagogisk forskning brukes ordet paradigme for å beskrive forskerens verdenssyn. Kivunja og Kuyini (2017, s.26) kaller dette verdenssynet «The lens through which a researcher looks at the world». Et paradigme er dermed et sett med oppfatninger og sannheter som guider forskningen. Paradigmer er viktige fordi de dikterer hva som skal undersøkes, hvordan det skal undersøkes og hvordan resultatene tolkes.

Pring (2015) sier at det innen pedagogisk forskning er to paradigmer eller kunnskapssyn som har vært dominerende: positivisme og konstruktivisme. Pring (2015) sier at i positivismen tenker en at forskeren kan stå utenfor og dermed observere det som det forskes på uten at forskeren selv påvirker situasjonen. Han sier at positivistene kjennetegnes ved at de er realister som mener at det eksisterer en objektiv virkelighet som følger universelle naturlover, og kan studeres og bli forstått. Hatch (2002) sier at konstruktivismen tenker at all kunnskap er menneskeskapt: Alle konstruerer sin egen kunnskap i lys av det vi kan fra før. Ifølge konstruktivismen finnes det ingen objektive sannheter: Forsker og deltaker i forskningen lager felles forståelser, sannheten er det vi blir enige om er sant. Hatch (2002) sier videre at innen konstruktivismen finnes det uendelig mange virkeligheter, da hver og en av oss konstruerer vår egen.

Creswell (2014) og Pring (2015) sier at tradisjonelt har disse paradigmene ført til kvantitative og kvalitative forskningsmetoder. De sier at de kvantitative forskningsmetodene kan tenkes å ha positivisme som kunnskapssyn, da en søker å finne tall, teste ut hypoteser ved hjelp av variabler og måle objektive størrelser. Creswell (2014) og Pring (2015) sier at de kvalitative forskningsmetodene kan tenkes å komme fra et konstruktivistisk kunnskapssyn: En tenker at en har en sosialt konstruert verden og at personer som skal forskes på må observeres i sitt naturlige miljø. Creswell (2014) sier at i kvalitativ forskning er en ikke ute etter store mengder talldata, en samler ofte tekstdata og en har som regel små utvalg og nærhet til det som studeres. Han sier videre at en her ikke tester ut hypoteser, men søker å oppdage begrep og lage nye teorier. Creswell (2014) og Pring (2015) mener at det tradisjonelt har vært en konflikt mellom kvantitative og kvalitative forskningsmiljø, men begge sier at dette er misforståtte motsetninger og at begge metoder nå anerkjennes. De sier videre at de to metodene gir ulik type kunnskap, og at de kan utfylle hverandre.

Mellom positivisme og konstruktivisme finner vi kritisk realisme. Hatch (2002) sier at en her tenker at det finnes reelle fenomen uavhengig av den som observerer. Han sier at det vi kan vite samsvarer med de reelle fenomen, men det er ikke mulig å fange virkeligheten på en objektiv måte: vi har alle vår individuelle tolkning av det vi ser. Lund og Haugen (2006) sier at kritisk realisme impliserer at det en studerer har en reell eksistens uavhengig av forsker. De sier at kritisk realisme betyr at forskerens tolkninger av resultatene er beheftet med usikkerhet, og en må derfor ha en kritisk holdning til forskerens resultater og konklusjoner.

Postholm (2008b), som forsker på undervisning og læring, sier at den epistemologiske holdningen i kvalitativ forskning er at kunnskap skapes i interaksjonen mellom forsker og deltakerne i forskningen. Hun sier at kvalitativ forskning utføres i det konstruktivistiske paradigmet der det skapes kunnskap, forståelse og mening i samhandlingene mellom personer og miljøet de er i. Dette er dermed et sosialkonstruktivistisk syn på læring, som beskrevet av Cobb et al. (1992), Yackel og Cobb (1996) og Brodie (2010).

3.2.1 Mitt kunnskapssyn og læringssyn

Jeg tenker at «jeg hører hjemme» i den filosofiske tenkemåten *kritisk realisme* som beskrevet av Hatch (2002) og Lund og Haugen (2006). Som dem tror jeg at det finnes en objektiv verden med sine naturlover, som også finnes der jeg ikke er og observerer. Det finnes trær med blader som blafrer i vinden, selv om jeg ikke er i skogen. Når jeg er sammen med andre som vet at jeg observerer dem, så tenker jeg at min tilstedeværelse vil påvirke dem. Forsker og objektet som studeres er ikke nødvendigvis uavhengig.

Som beskrevet i teorikapitlet har vi nå et sosialkonstruktivistisk læringssyn: Læring konstrueres, men ikke uavhengig av den sosiale konteksten den skjer i (Cobb et al., 1992; Yackel og Cobb, 1996; Brodie, 2010). Jeg tenker også, som Postholm (2008b), at den kunnskap og forståelse jeg får gjennom dette forskningsprosjektet blir til i møtet mellom dem jeg observerer i klasserommet, mine bakgrunnskunnskaper og ny teori, og meg som forsker.

Det vil si at forskningen bygger på et *sosialkonstruktivistisk læringssyn*. Men, jeg tenker at det er sannheter som ikke er skapt av meg alene, det finnes sannheter uavhengig av forsker.

3.3 Valg av forskningsmetode: kvalitativ metode

Mitt forskningsspørsmål er «Hvilke pedagogiske grep bruker en erfaren og engasjert lærer for å tilrettelegge for læring i et utforskende matematikklasserom?» For å se på det som Creswell (2014, s.261) kaller «det sentrale fenomen», det jeg skal undersøke, må jeg identifisere hvilken type informasjon som best vil svare på forskningsspørsmålet mitt og hvor jeg kan finne denne informasjonen. Jeg har argumentert for læreren som forsker og nevnt at aksjonsforskning kunne vært en aktuell metode for slik forskning. Ulvik, Riese og Roness (2016, s.37) sier at «aksjonsforskning som har som mål å utvikle en eksisterende praksis» vil «være en casestudie av en lærer, en klasse og et skolemiljø der man søker å forstå og forklare komplekse sammenhenger». Jeg ser for meg at det blir vanskelig å tydelig se min egen praksis og samle inn data fra denne samtidig som jeg skal undervise og lede elevene videre i deres søken etter kunnskap. Jeg tenker at det kan være viktig og interessant å forske på en annen lærer i deres undervisningssituasjon. Jeg får da bedre avstand til selve undervisningen og kan dermed lettere se hva som skjer i klasserommet enn dersom jeg selv skulle veilede elevene. Jeg håper å få nye idéer som jeg selv kan bruke for å få et utforskende klasserom der elevene lærer matematikk sammen. Så i stedet for aksjonsforskning, forskning på min egen undervisning, vil jeg utføre en *casestudie* av et klasserom der en slik lærende, utforskende matematikkundervisning foregår.

Yin (1994, s.18) sier at en *casestudie* er en empirisk undersøkelse som foregår i «real-life context» og som går i dybden på et samtidsfenomen. Han sier at en casestudie er bedre enn andre forskningsmetoder når en ønsker svar på et hvordan eller hvorfor-spørsmål som omhandler et sett med hendelser som forskeren har liten eller ingen kontroll på. Hatch (2002, s.30) sier at en slik casestudie foregår innen spesifiserte grenser. Merriam (1988, s.13, referert til i Hatch 2002, s.30) sier at innen utdanning kan slike avgrensninger være et program, en hendelse, en person, en prosess, en institusjon eller en sosial gruppe. Dette tilsvarer Creswell (2014, s.1) sin beskrivelse av en casestudie som en variasjon av en etnografi der forskeren gir en «in-depth exploration of a bounded system». Som Yin (1994) peker også Klette (2010) på viktigheten av *hvordan*-spørsmål. Klette (2010, s.1011) sier at det ikke er nok å registrere *hva*-aspektene av en aktivitet, en trenger også omfattende *hvordan*-relatert data. Jeg skal beskrive hvilke pedagogiske grep en erfaren og engasjert lærer bruker, det vil si jeg har et hvordan-spørsmål: Hvordan gjør hun dette? Det at jeg vil se på en bestemt undervisningsgruppe, i nåtid, og i et klasserom der jeg ikke har noen kontroll på hva som foregår, samsvarer med Yin (1994), Hatch (2002) og Merriam (1998, referert til i Hatch, 2002) sine beskrivelser av hva en casestudie er. Postholm (2005) kaller dette en kasusstudie, og sier at det er en studie som er begrenset i tid og rom.

McKernan (1996, referert til i Ulvik, Riese & Roness, 2016, s.38) mener at kvalitative metoder er best egnet til studier av naturlige omgivelser. Han sier at «kunnskap ikke kan sees uavhengig av den sammenhengen der er oppstått i» og at «deltakere i en sosial sammenheng har en annen tilgang til informasjon enn de som ikke deltar». Lund og Haugen (2006, s.22) sier at

> «et særtrekk ved kvalitativ forskning er at forskeren er *nærmere* informantene – forholder seg mer *subjektivt* og *innfølende* til informantenes opplevelse – enn tilfellet er i kvantitativ forskning.» De sier at en dermed har «bedre mulighet for å oppnå en *dybdeforståelse* av de aktuelle fenomenene».

Også Creswell (2014) sier at kvalitativ forskning gir en dypere forståelse for det en ønsker å undersøke. Han sier at kvalitativ forskning kjennetegnes ved at en ofte har små utvalg og får en nærhet til det som studeres. Videre sier han at en ikke på forhånd har en teori en ønsker å teste ut, men en samler inn data for å lære av deltakerne i studien.

Jeg ønsker en dybdeforståelse av det som skjer i et utforskende, lærende klasserom og ønsker nærhet til informantene. For å få svar på forskningsspørsmålet mitt følger jeg derfor rådene til Creswell (2014) og Lund og Haugen (2006) om å utføre en kvalitativ studie for å få innsyn i det som skjer i et klasserom med utforskende undervisning. En kvalitativ casestudie gir meg mulighet til å studere et avgrenset miljø for å få inngående informasjon fra feltet.

3.4 Valg av informanter

Neste spørsmål er da hvor skal jeg utføre min kvalitative forskning, det vil si hvem skal være deltakere i forskningen min. I all forskning må en tenke over *hvem* en vil studere, det vil si hvem som kan gi svar på det en ønsker å undersøke. Creswell (2014, s.227) sier at i kvantitativ forskning, der en ønsker å teste ut en hypotese, må utvalget være tilfeldig. Han sier at i kvalitativ forskning finner vi deltakerne og plassene vi ønsker å undersøke ved hjelp av «purposeful sampling». Han sier videre at dette utvalget baseres på hvilke plasser og hvilke personer som best kan hjelpe oss med å forstå det vi ønsker å finne ut.

Mitt forskningsspørsmål er «Hvilke pedagogiske grep bruker en erfaren og engasjert lærer for å tilrettelegge for læring i et utforskende matematikklasserom?». Jeg må velge informanter slik at jeg kan få et svar på dette. Det er derfor ønskelig å observere et klasserom der en erfaren og engasjert lærer tilrettelegger for læring gjennom undersøkende matematikk. Valget falt derfor på en lærer som jeg på forhånd visste var både erfaren og engasjert og som jeg visste bruker utforskende matematikk med elevene.

Denne erfarne og engasjerte læreren underviser på en videregående skole. Skolen har over flere år jobbet med et utviklingsprosjekt for å få undersøkende matematikk inn i klasserommene. Læreren har vært en aktiv del av dette prosjektet. Den av klassene hennes som er best egnet til å gi svar på mitt forskningsspørsmål er en matematikk 1T-klasse. Resten av undervisningen hennes dette skoleåret er i fysikk. Det at jeg velger ut en dedikert lærer som jeg, og andre, kan lære noe av, og dermed hennes matematikk 1T-klasse, gjør at dette utvalget av informanter kan kalles et strategisk utvalg. Jeg skal se på en case som er spesiell, i betydningen av at det ikke finnes mange klasserom der undervisningen foregår slik, og da er et strategisk utvalg nødvendig. En slik måte å velge deltakere på stemmer med Creswell (2014) sitt målrettete utvalg (purposeful sampling).

Om læreren jeg observerer så tenker jeg at det sett utenfra ser ut som om hun er veldig samvittighetsfull og alltid prøver å forbedre undervisningen sin. Det ser ut som om hun ønsker at elevene skal få til faget hennes og at hun på forhånd tenker på hvordan hun skal presentere matematikken for at elevene skal forstå og lære, og hvordan elevene skal få jobbe med temaet slik at de gjør det til sitt. Hun setter elevene i fokus og prøver å se hver enkelt elev. Jeg tenker at hun på forhånd har tenkt gjennom hva som kan være vanskelig for elevene. Hun er som nevnt en erfaren og engasjert lærer: Hun har undervist i matematikk i over 15 år. Som jeg skrev i innledningen så tenker jeg engasjert i betydningen av interessert i å lære og utvikle sin egen undervisning og interessert i å få til et godt læringsmiljø for elevene sine. Lærerens engasjement har jeg selv observert i diverse samtaler om matematikkdidaktikk og i felles matematikkprosjekt. Hun var en av pådriverne i matematikkprosjektet om undersøkende matematikk og ledet flere av møtene der, og hun var matematikkoordinator for lærerne i alle ti vg1 klassene ved skolen i de årene matematikkprosjektet ble gjennomført. Før oppstart av observasjon har hun fortalt at hun er inspirert av Liljedahl (2016) og Stein et al. (2008) sine fem praksiser. Læreren jeg observerer vil videre bli referert til som Astrid.

Elevene som observeres er 25 elever på vg1. Skolen er en stor, sentrumsnær skole hvor det kreves forholdsvis høyt karaktersnitt for å komme inn, så en må anta at de har gode karakterer fra ungdomstrinnet. Elevene i gruppen har valgt teoretisk matematikk, en kan dermed forvente at de er mer interessert i å lære matematikk enn de elevene som velger matematikk 1P. Selve klassen ble av enkelte lærere oppfattet som «litt rotete, med noen rastløse» i starten av året, så lærer Astrid jobber for å få til et trygt og godt læringsmiljø for elevene i klassen. Dette er ikke automatisk til stede i en matematikkgruppe på vg1, der elevene kommer til skolen fra forskjellige ungdomsskoler og ikke kjenner hverandre i oppstart av skoleåret.

Matematikk 1T er et teoretisk matematikkfag for vg1[8] elever. Det er et såkalt 5 timers fag[9], som ved denne videregående skolen undervises med 4 klokketimer i uka. Det er spesielt interessant å se på Matematikk 1T dette skoleåret 2020/2021 da de nye læreplanene, Kunnskapsløftet 2020, ble innført høsten 2020.

Selve klasserommet er lyst og fint. Det er individuelle pulter og stoler til elevene. Pultene står ofte sammen og kan enkelt flyttes rundt i rommet. Når pultene er samlet midt i rommet er det grei plass til de 25 elevene langs veggene. Dersom pultene står en og en oppleves rommet litt lite og det blir vanskelig å navigere seg mellom pultene. Det er flere whiteboards på to av veggene og en langvegg med vinduer som gjør at dagslys slipper inn.

Jeg skal forske i liten skala: jeg observerer en lærer og tjuefem elever. Jeg må derfor være forsiktig med å generalisere: det jeg finner kan ikke nødvendigvis overføres til andre klasserom og situasjoner. Jeg skal utføre en casestudie, det vil si at jeg skal fokusere på det nære, på det spesielle tilfellet. Pring (2015) sier at ingen situasjon er unik på alle måter, så det å fokusere på et klasserom kan belyse eller føre til forslag til praksis også i andre klasserom. Han sier videre at en kan få en base av kunnskap av «hva som virker» som kan deles i et lærerfelleskap. Jeg velger å følge elevene over en lengre periode, over 7 uker, og håper dermed at jeg får samlet nok data til å kunne si noe om hvilke pedagogiske grep som brukes i dette matematikk 1T-klasserommet.

3.5 Valg av datainnsamlingsmetode

Creswell (2014) forklarer, som tidligere nevnt, forskning slik: en har et spørsmål eller noe en ønsker å finne ut av, en samler og analyserer data som er relevant for å svare på spørsmålet, og en presenterer funnene og svarer på spørsmålet. Kvalitativ forskning betyr at en samler inn kvalitative data. Ifølge Creswell (2014) kan kvalitative data være observasjoner, intervjuer og

---

[8] Første trinn i videregående skole.
[9] Det vil si fem 45 minutters økter i løpet av en uke.

spørreskjema, innsamlede dokumenter eller audiovisuelt materiale. Lund og Haugen (2006, s.167) sier at å observere i stedet for å spørre

> «har den klare fordelen at observatøren kan registrere hva informantene faktisk foretar seg (atferd), i motsetning til å registrere hva informantene sier at de gjør.»

Også Creswell (2014) peker på fordeler ved observasjon. Han sier at en får mulighet til å samle informasjon der handlingen foregår, i den naturlige settingen, og at en studerer faktisk oppførsel. Jeg ønsker å se hva som faktisk skjer i klasserommet, uavhengig av hva lærer og elever tror skjer i klasserommet. Jeg ønsker å få med meg kommunikasjonen som foregår i klasserommet, mellom lærer og klasse og mellom elever. Jeg ønsker derfor å være til stede og *observere*. Creswell (2014, s.235) sier at:

> «observation is the process of gathering open-ended firsthand information by observing people and places at a research site.»

Lund og Haugen (2006, s.166) sier at:

> «Observasjon handler om å avdekke, registrere eller kartlegge hva mennesker gjør i ulike situasjoner, hvordan de samhandler med hverandre, hva slags emosjonelt eller sosialt klima som finnes i en gruppe, hvordan en leder utøver ledelse, hvordan en elev strever med å mestre leseprosessen, og så videre.»

Lund og Haugen (2006) sier at observatøren skal se hva andre gjør og ikke spørre om hva de gjør.

Creswell (2014) sier at en ulempe med observasjon kan være at en avgrenses til de plassene og situasjonene en har tilgang til. En må også være klar over at observasjon kan føre til informasjonsoverflod. Da kvalitative metoder som oftest er åpne, vet en ikke på forhånd hvilke data en får inn. En må passe seg for ikke bare å generere masse data og så lure på hva en skal bruke det til.

Creswell (2014) og Lund og Haugen (2006) skiller mellom deltakende og ikke-deltakende observasjon. De sier at en deltakende observatør tar del i aktivitetene og gjøremålene som det skal innhentes data om, mens en ikke-deltakende observatør er mer «tilbaketrukket fra informantenes virksomhet» (Lund & Haugen, 2006, s. 167).

Jeg skal undersøke hvordan et utforskende klasserom ser ut. Det er da naturlig at min tilstedeværelse ikke skal påvirke det som skjer i klasserommet. Jeg velger derfor å være en ikke-deltakende observatør som beskrevet av Lund og Haugen (2006) og Creswell (2014). Postholm (2005, s.146) sier om en kvalitativ observatør at han eller hun «følger strømmen av naturlige handlinger i den settingen som han eller hun observerer.»

Jeg tror at video- og lydopptak ville påvirket deltakerne i klasserommet. Jeg skal, som forsker i en casestudie, få med meg mest mulig av det som skjer i klasserommet. For å få bilde- og lydopptak av det, måtte jeg hatt flere videokamera eller båndopptakere spredt i rommet. Jeg antar at dette vil påvirke den «naturlige settingen» som jeg ønsker å observere, jeg har derfor valgt å ikke bruke opptak av noen form. Dataene jeg samler inn blir dermed fra mine observasjoner i feltet.

Postholm (2005) mener at forskere, med utgangspunkt i teori, har arbeidshypoteser som hjelper forskeren til å fokusere på handlinger som utspiller seg i forskningssituasjonen. Hun sier at

> «de ulike teoriene hjelper forskeren til å forstå prosessene som observeres. Samtidig fordrer observasjonene i praksis at forskeren stadig utvikler sin teoretiske kunnskap for å utdype og videreutvikle sin forståelse av praksisfeltet.» (Postholm, 2005, s.147)

Postholm (2005) sier det blir en kontinuerlig samhandling mellom ny teori som leses og praksisen som observeres. Slik dannes ny forståelse for det som observeres. Jeg hadde ved oppstart av observasjonene noen tanker om hva jeg ville komme til å se. Men jeg så mye annet enn det jeg hadde forventet. Jeg leste dermed ny teori for å forstå hva jeg så, slik som beskrevet av Postholm (2005).

En må også ha tenkt over hvordan en skal registrere det en observerer. En kan ha det Lund og Haugen (2006) kaller en *strukturert registreringsmåte*: En har på forhånd operasjonalisert aktuelle atferdsindikatorer og kan dermed ha et registreringsskjema klart før observasjonene begynner. I dette skjemaet kan det noteres hyppighet og / eller varighet av disse atferdsindikatorene. Om forskeren ikke på forhånd har full klarhet i hva som skal observeres kan vi bruke det Lund og Haugen (2006) kaller en ustrukturert registreringsmåte. De sier at de vanligste variantene av slik ustrukturert registrering er de som finner sted i informantenes naturlige miljø. Lund og Haugen (2006, s.167) kaller disse for «feltobservasjoner» eller «naturalistiske observasjoner». Jeg hadde som nevnt noen tanker om hva jeg antagelig ville se i klasserommet, men jeg visste ikke på forhånd nøyaktig hva som foregikk der. Jeg ønsket å være åpen for nye idéer og i etterkant kunne beskrive tydelig hva jeg så i klasserommet. Valget mitt ble derfor å benytte feltobservasjoner. Jeg vil forsøke å notere mest mulig av det jeg observerer i elevenes naturlige miljø. Hatch (2002) forklarer feltnotater som «raw field notes that are written on the spot while the researcher is in the setting”. Han sier at feltnotater vanligvis er beskrivelser av innhold, handlinger og samtaler, og at disse er skrevet så detaljert som mulig, gitt begrensningene som følger av å observere og skrive i et raskt endrende sosialt miljø. Postholm (2005) sier at både den sosiale og den fysiske konteksten bør beskrives. Hun sier at ved hjelp av observasjonene vil forsker senere kunne beskrive forskningsstedet detaljert ved hjelp av tykke beskrivelser. Begrepet tykke beskrivelser kommer fra Geertz (1973) sine «thick descriptions». Geertz (1973), en kulturantropolog som utførte etnografisk feltarbeid, begynte å gi slike tykke beskrivelser i sin forskning for å kunne gi en grundig forklaring av ikke bare fenomenet og konteksten som observeres, men også av intensjonene bak. Slike tykke beskrivelser er blitt vanlig i kvalitativ forskning fordi disse utfyllende beskrivelsene gir leser en mulighet til å vurdere om resultatene og studien kan relateres til deres egen situasjon.

Som Hatch (2002), så mener også Postholm (2005, s.152) at observasjonene bør skrives ned «aller helst mens observasjonene pågår». Hatch (2002) sier at disse feltnotatene konverteres til forskningsprotokoller ved at en fyller inn manglende data og tanker så fort som mulig etter en har forlatt feltet.

Postholm (2005, s.146) sier at tidligere erfaringer og opplevelser er «med på å farge og fokusere hva vi observerer» men at en forsker har fokus for sine observasjoner og at disse observasjonene er «systematiske og hensiktsmessige». Pring (2015) sier at observasjoner ikke kommer uavhengig av de fordommer og preferanser vi bringer med oss, eller uavhengig fra konteksten de gjøres i. Også Geertz (1973, s.321) sier at ingen starter en undersøkelse «intellectually empty-handed». Jeg må, som forsker, være klar over at mine tidligere erfaringer og opplevelser, min teoretiske bakgrunn og kunnskap, vil være med på å farge det jeg ser og dermed noterer i mine feltnotater. Dette vil jeg si mer om i delkapitlet om kvalitet på forskningen.

3.6 Metodedesign

Min studie blir dermed en *kvalitativ undersøkelse*, der jeg vil være til stede i et klasserom med *en lærer og tjuefem matematikk 1T-elever*, for *ikke-deltakende observasjon*. At jeg er en ikke-deltakende observatør vil si at jeg skal være til stede i klasserommet, så elevene ser at jeg er der, men jeg skal ikke involvere meg i aktivitetene. Jeg vil ta *feltnotater* som jeg kan bruke for å prøve å besvare forskningsspørsmålet mitt. Dette blir praksisnær kvalitativ forskning: en *casestudie* av en eksisterende praksis med en lærer og en klasse. Jeg måler ikke noe og ser for eksempel ikke på endringer i karakterer eller lignende, men ved å observere kan jeg forhåpentligvis få innsikt som kan hjelpe meg å besvare mitt forskningsspørsmål og også være til nytte for min, og eventuelle leseres, videre undervisning.

3.7 Gjennomføring av forskningen

Jeg vil i dette delkapitlet presentere hvordan jeg samlet inn data, hvordan jeg analyserte de innsamlede dataene og si litt om hvordan resultatene vil bli presentert.

3.7.1 Datainnsamling

Jeg var ikke-deltakende observatør i en klasse med 25 elever i faget matematikk 1T. Timene jeg observerte var tirsdager: da hadde denne klassen en dobbel-økt sist på dagen. Dobbel-økt ved denne skolen vil si to timer a 60 minutter, med 5 minutters pause mellom. Jeg var med i en økt før jul 2020 og seks økter i januar og februar 2021[10]. Når jeg avtalte med lærer Astrid om det passet at jeg kom inn i timen, så sa hun alltid «Ja, men det er en helt vanlig time, altså». Og det var jo litt av poenget for meg, å observere en «vanlig» time for å se hva som skjer i et klasserom med utforskende matematikkundervisning.

På grunn av covid-situasjonen i verden i denne perioden var noen av timene i klasserom med alle elevene, en av øktene var klassen fordelt på to klasserom på grunn av «rødt nivå[11]» i videregående skoler og andre økter var online på Teams, også på grunn av «rødt nivå». Det var interessant å være «flue på veggen» også online, da jeg her fikk se hvordan Astrid klarte å aktivisere elevene selv om de satt foran hver sin skjerm hjemme.

Til første observasjon hadde jeg laget et observasjonsskjema hvor jeg forventet at jeg kunne krysse av og notere hvor ofte noe skjedde, for eksempel at elevene diskuterte seg imellom. Men jeg fant fort ut at skjemaet ikke dekket det jeg observerte, så jeg endte med å «kaste skjemaet» og notere det jeg så i klasserommet.

Jeg noterte for hånd og renskrev notatene mine så raskt som mulig slik at jeg hadde situasjonene friskt i minne. Jeg beveget meg rundt i klasserommet mens elevene jobbet, slik at jeg kunne få med meg diskusjonene i gruppene og ved tavlene. Jeg noterte også det lærer sa og skrev, samt det elevene noterte på tavlene sine. Da jeg prøvde å få med meg mest mulig av det som skjedde i klasserommet, ble noe notert på dialekt og noe på bokmål. Elevene snakker

[10] For eksakte datoer og matematisk tema for øktene jeg observerte, se vedlegg 2.
[11] Ifølge folkehelseinstituttet, FHI, sin trafikklysmodell for videregående skoler. Se vedlegg 3 for trafikklysmodellen.

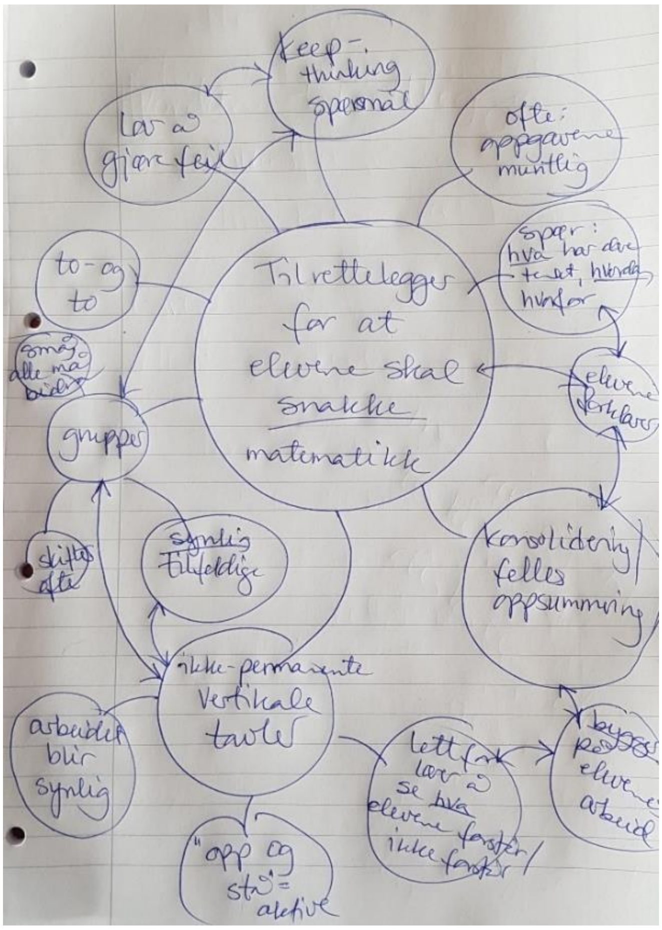
samme dialekt som meg, så når jeg noterte det de sa falt det naturlig for meg å skrive dialekt. Men skriftspråket mitt er bokmål, så noe ble automatisk oversatt i notatene mine. Når jeg senere skal presentere utsagn fra elever og lærer, er alle utsagn normert. Dette fordi det er lettere for andre å lese, samtidig som det er de matematiske uttalelsene som er viktige her, ikke dialekten elevene eller lærer snakker.

3.7.2 Analysen

Creswell (2014) sier at det å analysere kvalitative data er å prøve å finne mening i dataene en har funnet slik at en kan få svar på forskningsspørsmålet. Han sier at dette gjøres i flere steg, og at disse stegene ikke alltid gjøres i en bestemt rekkefølge. Stegene han nevner er å forberede og organisere dataene for analyse, utforske og kode databasen, videre koding for å etablere tema og beskrivelser, presentere og rapportene de kvalitative funnene, tolke og drøfte funnene og til slutt sjekke kvaliteten på funnene. Presentasjon og drøfting av mine funn kommer i egne kapitler.

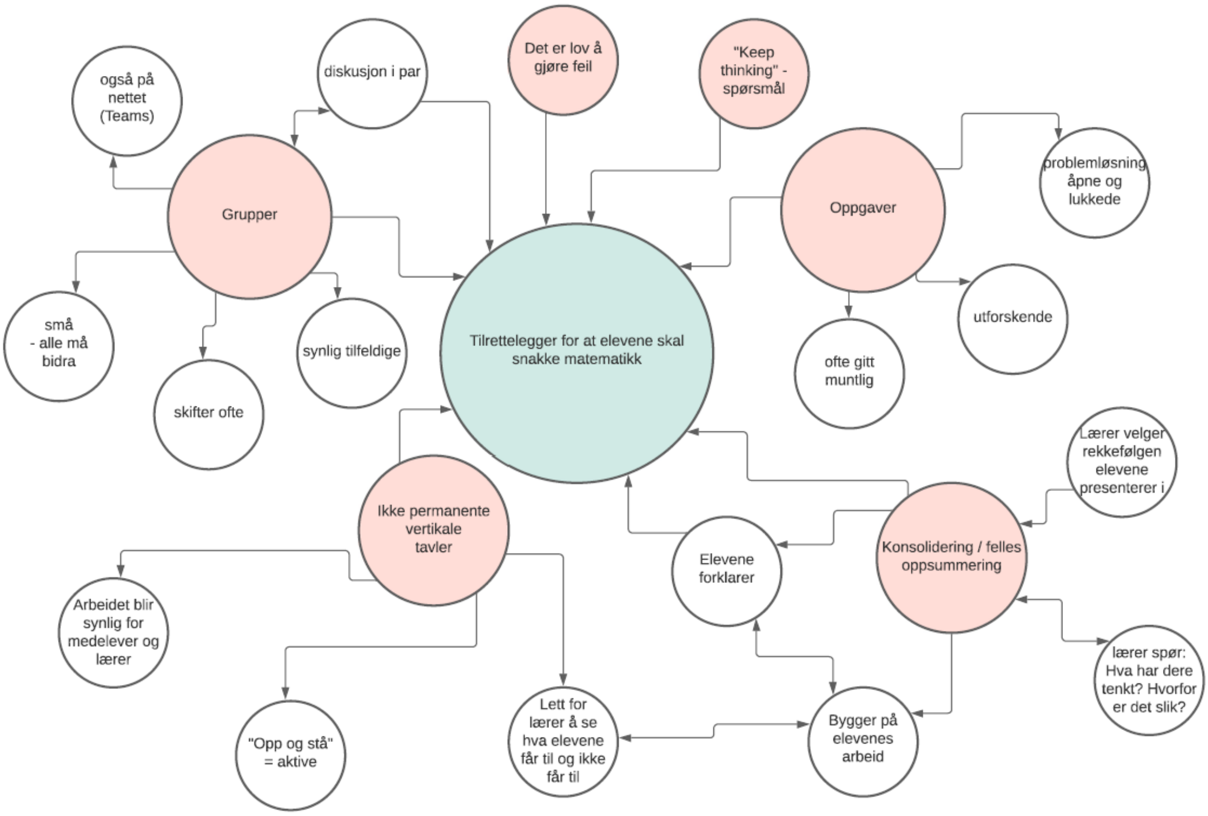
Det første steget, å organisere dataene for analyse, gjorde jeg ved å renskrive feltnotatene mine etter observasjonene. Creswell (2014, s.261) sier at deretter må forskeren lese gjennom dataene for å prøve å få en oversikt over hva en har sett: «obtains a general sense of material». Etter renskrivning av feltnotatene laget jeg oppsummeringer for hver undervisningsøkt. Så prøvde jeg å få klarhet i hva som kjennetegnet dette klasserommet. Mine første tanker etter datainnsamling og tolking av feltnotatene, det vil si Creswell (2014, s.267) sin «preliminary exploratory analysis», var at dette var et elevaktivt klasserom der Astrid la til rette for at elevene skulle snakke matematikk.

Creswell (2014, s.261) sier at en må kode dataene, noe som innebærer å kode teksten for tema og beskrivelser om det sentrale fenomen. Disse temaene og beskrivelsene skal brukes i forskningsrapporten. Creswell (2014) sier om analysen at den er induktiv, vi går fra detaljerte data (feltnotatene) til generelle koder og tema. Han sier at fasene i kvalitativ forskning også er iterative, da en går fram og tilbake mellom innsamling av data og analyse. Creswell (2014) mener at kvalitative forskere analyserer dataene sine ved å lese dem flere ganger og analysere hver gang. Han sier at hver gang du leser vil du få en bedre forståelse av informasjonen som er samlet. Jeg tenker at jeg, i min analyse, gikk mye fram og tilbake mellom Creswell (2014) sine to steg: *utforske og kode databasen* og *videre koding for å etablere tema og beskrivelser*. Jeg hadde nå dannet meg et helhetsbilde av et elevaktivt klasserom der Astrid, lærer, tilrettelegger for at elevene snakker matematikk. Videre koding var nå for å finne hvordan hun får dette til: hvilke pedagogiske grep hun benytter i klasserommet. Etter en del jobbing med feltnotatene og oppsummeringene fra hver observerte økt, tegnet jeg en første figur hvor jeg prøvde å finne overordnede tema og sammenhenger. Denne vises i figur 5.



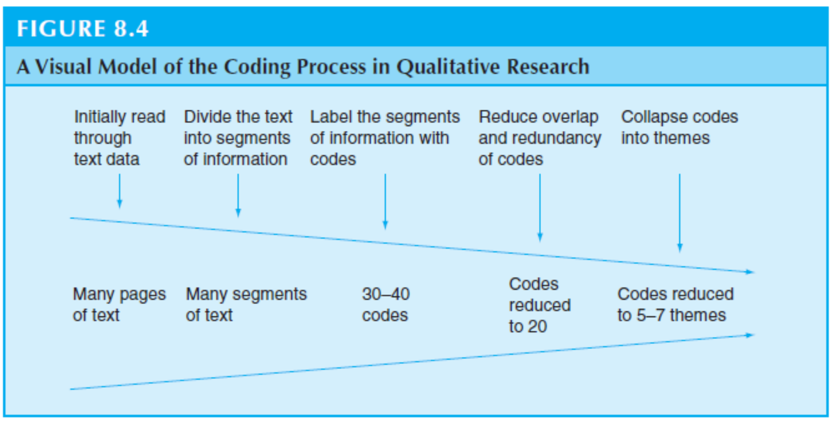
Figur 5. Min første figur. Forsøk på å få oversikt over tema jeg finner i de innsamlede dataene.

Som figur 5 viser, så var hovedtanken i min første koding at Astrid tilrettelegger for at elevene skal snakke matematikk. Jeg observerte at grupper var mye brukt, så «grupper» ble en egen boble i figuren. Jeg observerte at elevene jobbet på ikke-permanente tavler, så dette ble også en egen boble. Jeg fant at jeg flere ganger observerte at det var lov, både fra lærer og mellom elevene, å gjøre feil, så dette ble en annen boble. Jeg gjorde meg også tanker om for eksempel bruken av de ikke-permanente tavlene: at arbeidet ble synlig, at elevene måtte opp og stå og ble aktive, så jeg tegnet «bobler på boblene» der jeg så sammenhenger. Det ble etter hvert mange bobler, og i senere kodinger brukte jeg et dataprogram som hjelpemiddel til kodingen. Som student ved Universitet i Bergen har vi tilgang til NVivo (versjon NVivo 12 Pro) som kan benyttes til kvalitativ analyse. Dette kan være et hjelpemiddel for å samle dataene i få tema, og også koble temaene mine til tekstbiter i feltnotatene. Det gir også en fin oversikt over temaene (som samles i såkalte *noder* i NVivo).



Figur 6. Nytt forsøk på koding, visualisert ved hjelp av lucid.app.

Figur 6 viser et senere tidspunkt i kodingen. Jeg brukte her lucid.app for å synliggjøre kategorier og underkategorier. På dette tidspunktet er oppgaver blitt en egen boble. Denne figuren er endret mange ganger etter dette, da jeg har fulgt Creswell (2014) sitt råd om å gå fram og tilbake mellom stegene: *utforske og kode databasen* og *videre koding for å etablere tema og beskrivelser*. Creswell (2014) sier at det er mange steg i selve kodingen i kvalitativ analyse, noe han fremstiller visuelt i figur 7.



Figur 7. Kondensering av kodene til tema (Creswell, 2014, s.268).

Som nevnt tidligere så skal de første gjennomlesningene gi oss en følelse for «hva er det vi ser her?», hva er det hele bildet? Det neste steget for meg var å laste opp et og et dokument, feltnotatene mine, til NVivo. Jeg er da et steg videre på innskrenkningen som vises i figur 7. Jeg jobbet så gjennom hver av dokumentene for å finne igjen hovedtemaene jeg hadde tenkt ut i den første fasen. Segmenter med tekst ble merket i bestemte noder. Jeg oppdaget også nye tema og idéer jeg ikke hadde sett tidligere, så det ble også nye koder. Jeg la tidlig merke til at Astrid ikke ga elevene svar på det Liljedahl (2016) kaller «proximity»- eller «stop-thinking»-spørsmål. Hun svarte «Dette kommer vi tilbake til» eller gav elevene et hint slik at de fikk en annen innfallsvinkel, og elevene forsøkte å tenke videre selv. Begrepet «keep thinking»-spørsmål brukes av Liljedahl (2016, 2021) som de eneste spørsmål lærer skal svare på, og i figur 5 og 6 var dette en egen boble. Samtalegrep var ikke noe jeg opprinnelig lette etter, men etter å ha lest ny teori (O'Connor et al., 2015; Chapin et al., 2013; Kazemi & Hintz, 2019; Michaels et al., 2010; Wæge, 2015), kjente jeg igjen flere grep Astrid bruker i sin undervisning. Etter å ha lest Drageset (2016) sin forskning kjente jeg igjen at Astrid *ikke forenkler*, noe jeg tenker kan sammenlignes med å ikke stoppe elevenes tenkning. I senere kodinger ble dermed «keep thinking»-boblen, og det at Astrid ikke forenkler, satt som samtalegrepet *stopper ikke elevenes tenkning*.

I de første kodingene mine hadde jeg mange noder i NVivo, ved å kode igjen og igjen samlet jeg observasjonene mine inn i hovedtema og undertema, slik at antall tema ble redusert. Den endelige versjonen av figuren som viser funnene mine presenteres i resultatkapitlet.

Cobb (2000) har funnet et rammeverk for klasseromsanalyser. Rammeverket, som ble beskrevet i kapittel 2.7, består av fire aspekter av klasseromsmiljøet som Cobb (2000) mener er viktig for å støtte elevenes utvikling i matematikk. Disse aspektene beskriver mikrokulturen i klasserommet. Når jeg presenterer dataene mine i resultatkapitlet, vil jeg sortere dem etter Cobbs (2000) fire aspekter.

3.7.3 Hvordan dataene mine presenteres – tykke beskrivelser

Det siste stegene i Creswell (2014) sin analyse er, som tidligere nevnt, presentere og rapportene de kvalitative funnene, tolke og drøfte funnene og til slutt sjekke kvaliteten på funnene. Presentasjon av funn og tolkning av dem kommer i eget kapittel. Jeg vil her i metodedelen si noe om hvordan jeg presenterer dataene mine.

For å kunne si noe ikke bare om hva jeg så, men også settingen det skjedde i og intensjonene bak, slik jeg tolker det, så benytter jeg såkalte tykke beskrivelser. Geertz (1973) forklarer forskjellen mellom tynne og tykke beskrivelser ved et eksempel om tre gutter som har en rask sammentrekning av øyelokket på det høyre øyet. Geertz (1973, s.312) forteller at eksempelet kommer fra Ryle, som først brukte begrepet «thick descriptions». Den første gutten har en ufrivillig rykning. Den andre gutten blinker til en kamerat. Geertz (1973, s.312) beskriver det som «a conspiratorial signal to a friend». Geertz (1973, s.312) sier at som bevegelse er disse bevegelsene identiske:

> «from an I-am-a-camera, «phenomenological» observation of them alone one could not tell which was twitch and which was wink, or indeed whether both or either was twitch or wink».

Han sier at forskjellen, selv om den ikke kan fotograferes, mellom en rykning og et blink er stor, da det å blinke kommuniserer noe bevisst, til noen bestemt, gjerne gjennom en allerede etablert kode. Geertz (1973, s.312) fortsetter historien med en tredje gutt, som «to give malicious amusement to his cronies», blinker for å parodiere den første gutten. Også han trekker sammen det høyre øyelokket, men bare denne gutten parodierer noen. Geertz (1973) sier at denne gutten antagelig blinker hardt og overtydelig og kanskje også tar med en grimase. Geertz (1973) sier at dette er etablerte sosiale koder og artefakter ved klovnen. Poenget med historien er å synliggjøre forskjellen på tynne beskrivelser, det guttene gjør (trekker sammen høyre øyelokk) og tykke beskrivelser av hva gutten gjør (ufrivillig trekning, blinker eller parodierer). De tykke beskrivelsene som sier noe om hensikten bak handlingene.

Mine beskrivelser av observasjonene vil være tykke beskrivelser. Dette fordi alt skjer i en sammenheng: klasserommet, miljøet, settingen og personene har betydning for det jeg ser. Mine beskrivelser er naturlig avgrenset av at dette er en masteroppgave og vil ikke være like tykke som de Geertz (1973) viser til i eksempelet om guttene. Jeg vil bruke tykke beskrivelser som en følge av de dataene jeg har: mine feltobservasjoner. Når jeg noterer i klasserommet, så vil jeg, med mine tidligere kunnskaper og holdninger, automatisk fortolke det jeg ser. Så dataene mine er mer enn tynne, «objektive» observasjoner. Formålet med mine tykke beskrivelser er at leser skal få en ordentlig forståelse av hva jeg har sett i klasserommet. Noen ganger tar jeg med sitater for å vise til en situasjon i klasserommet, andre ganger er det kun beskrivelser. I feltnotatene var de fleste sitatene skrevet på dialekt, i presentasjonen i oppgaven er sitatene normert for å øke lesbarheten.

3.8 Kvalitet på forskningen

I dette delkapitlet vil jeg si noe om kvaliteten på forskningen jeg har utført i forbindelse med denne masteroppgaven. Jeg vil starte med å si noe om fordeler og ulemper ved metoden jeg valgte, gå videre til forskerrollen før jeg ser på validitet, reliabilitet og tillit og til slutt etiske betraktninger.

3.8.1 Fordeler og ulemper ved metoden

Jeg observerte samme klasse over en lenger periode. Dette er en fordel da de ble vant til å se meg i klasserommet. Jeg hadde dessverre ikke mulighet til å delta i alle etterfølgende timer (på grunn av min egen undervisning) noe som gjør at jeg ikke fikk følge progresjonen i faget. Neste gang jeg observerte hadde de kommet videre til et nytt tema. Diskusjoner og alt elevene har lurt på mellom de timene jeg var til stede er derfor ikke tilgjengelig som data for meg.

Da jeg observerer i et klasserom med tjuefem elever er det vanskelig å få med alle samtalene som foregår i alle gruppene på en gang. Jeg forsøkte å notere alt jeg så i klasserommet, etter beste evne. Når undervisningen foregikk på nett, var jeg sammen med hele klassen når de var i fellesrom, men når de jobbet i grupper kunne jeg bare observere en gruppe om gangen og fikk dermed ikke med meg hva som skjedde i de andre gruppene.

Jeg har tidligere nevnt at jeg tenker at min tilstedeværelse kan påvirke elevene som vet at de blir observert. Jeg så for meg at elevene kanskje ville opptre mindre naturlig og være på sin «beste oppførsel». Men allerede første økt observerte jeg at de ikke så ut til å ta ekstra hensyn fordi jeg var til stede. Etter en programmeringsøkt, mens Astrid var rundt og hjalp de som ikke var helt i mål, så satte en gjeng elever seg ned sammen for å spille dataspill. Jeg var bak dem i rommet, og de kunne se at jeg hadde innsyn til skjermen deres. Det virket ikke som om de oppførte seg «ekstra fint» fordi jeg var til stede.

En ulempe ved at jeg ikke har opptak er at jeg ikke kan gå tilbake for å sjekke dersom jeg er usikker på hva som skjedde i en bestemt situasjon. Det jeg har notert i feltnotatene mine, er det jeg har av data. Jeg samlet allikevel mye data: sju lange[12] dokumenter med feltnotater.

3.8.2 Om forskerrollen

Som nevnt tidligere i dette kapitlet så kommer jeg til klasserommet med mine tidligere erfaringer, mine kunnskaper, antagelser og interesser.. Dette vil kunne farge mitt syn og kanskje ha en innvirkning på hva jeg observerer. Dersom en annen person hadde observert i det samme klasserommet, hadde hun kanskje sett noe annet. Jeg forsøkte allikevel å ikke være forutinntatt og notere det jeg så. Postholm (2008a) sier at i kvalitative metoder så er

[12] Gjennomsnittlig var disse renskrevne dokumentene på 11 sider, med skriftstørrelse 11 og enkelt linjeskift.

forskningen påvirket av forskerens verdier. Hun sier videre at i tillegg til at forskerens tidligere erfaringer kan påvirke det forskeren ser, så er det en sterk sammenheng mellom forskerens teoretiske standpunkt, spørsmålene som stilles, metoden som velges, materialet som samles og hvordan dette materialet analyseres og tolkes. Dette er også noe en må være bevisst på: mine valg i dette forskningsprosjektet er selvfølgelig farget av min tidligere kunnskap.

Postholm (2005) sier at en kvalitativ forsker vil være induktiv i forskningsprosessen og være innstilt på at en kan gjøre funn en ikke forventet. Hun sier at det betyr at forskeren henter inn data (empiri) som ikke umiddelbart kan forstås av det teorigrunnlaget forskeren har. Hun sier videre at forskeren dermed må sette seg inn i ny teori for å forstå disse observasjonene hun har gjort. Jeg kjenner meg igjen i denne beskrivelsen: Jeg har tidligere lest teori om utforskende metoder og kommunikasjon, deriblant om fem praksiser og Liljedahl (2016) sin forskning på tenkende klasserom. Men jeg hadde ikke lest om samtalegrep (Talk moves), Accountable talk eller Academically productive talk før jeg startet denne undersøkelsen. Når jeg senere leste denne teorien kjente jeg igjen en del av det som ble beskrevet og gikk derfor tilbake til feltnotatene for å analysere igjen. Jeg mener derfor at selv om jeg er farget av tidligere erfaringer og kunnskap, så jobbet jeg induktivt som forsker og var åpen for ny informasjon og kunnskap.

Jeg tenker dessuten at det er en fordel at jeg selv er matematikklærer og at jeg underviser på alle trinn på videregående. Jeg er kjent med læreplanen i faget og med temaene elevene skal jobbe med i løpet av skoleåret. Det er mye som skjer i et klasserom med 25 elever, og jeg mener det vil være lettere for meg å få med meg de matematiske diskusjonene og innholdet i dem, enn for en forsker som ikke underviser i matematikk. At jeg til daglig underviser i matematikk kan selvfølgelig også påvirke mine observasjoner da jeg kanskje er forutinntatt med hensyn på hva jeg forventer at de skal kunne og klare. Jeg er derfor bevisst på at jeg ikke skal påvirke elevene, og at jeg er til stede for å observere.

Som nevnt flere ganger nå vil jeg, som forsker, kunne påvirke både hva jeg observerer og hvordan jeg tolker det jeg ser. Ved at jeg redegjør for mine valg, og hvordan min rolle som forsker kan påvirke resultatet, sikrer jeg transparens, slik at leser selv kan gjøre seg opp en mening om mine slutninger fra observasjonene. Eller som Postholm (2005, s.157) sier det:

> «Jeg vil tilføye at det også er avgjørende for forskeren å bli bevisst sin egen subjektivitet, og uttrykke denne subjektiviteten i forskningsteksten. På den måten kan

> leseren av den resulterende forskningsteksten også ta forskerens subjektivitet i betraktning når teksten med analyser og tolkninger leses.»

3.8.3 Validitet, reliabilitet og tillit

Lincoln og Guba (i Schwandt, Lincoln & Guba, 2007, s.16), i sin forskning i det naturalistiske paradigmet, sier at for å teste holdbarheten av forskning har det, i det de kaller «det konvensjonelle vitenskapelige paradigmet», blitt brukt kriterier som sannhetsverdien av forskningen («internal validity»), brukbarheten av forskningen («external validity»), hvor konsistent forskningen er («reliability or replicability»), og hvor nøytral og objektiv forskningen er. De mener at disse begrepene ikke nødvendigvis er direkte overførbare til kvalitativ forskning. Creswell (2014, s.283) bruker begrepet validitet også om kvalitativ forskning, og sier at for å validere funnene må forsker bestemme nøyaktigheten og troverdigheten i funnene. Dette kan blant annet gjøres gjennom «member checking». Med det mener han at forsker ber en eller flere av deltakerne i studien om å sjekke nøyaktigheten av det som oppgis som funn. Dette innebærer ifølge Creswell (2014) å spørre deltakere om beskrivelsene er komplette og realistiske og om tolkningene er rettferdige og representative. Jeg vil be Astrid utføre en slik «member checking» ved å lese resultatkapitlet mitt og se om beskrivelsene og tolkningene mine er rettferdige og representative.
Lincoln og Guba (i Schwandt et al., 2007, s.18) bruker «trustworthiness», tillit, for evaluering av kvalitativ forskning, og beskriver fire kriterier for tillit:

> «credibility as an analog to internal validity, transferability as an analog to external validity, dependability as an analog to reliability, and confirmability as an analog to objectivity.»

Dermed inneholder deres «trustworthiness» både validitet (indre og ytre) og reliabilitet. Kredibilitet (eller troverdighet) kan ifølge Lincoln og Guba (i Schwandt et al, 2007, s.19) sjekkes blant annet ved «member checks», medlemsvalidering. Jeg følger Creswell (2014) og Lincoln og Guba (i Schwandt et al, 2007) sitt råd for å sjekke den indre validiteten og ba lærer Astrid om å lese resultatkapitlet. Denne gjennomlesningen er ikke for å sjekke om jeg framstiller Astrid feil, men for å se om beskrivelsene jeg har gitt er komplette og realistiske, og om tolkningene er rettferdige og representative for det som foregikk i klasserommet. Astrid sier at hun kjenner igjen de situasjonene jeg gjengir og de er komplette, realistiske, rettferdige og representative for undervisningsøktene jeg observerte.

Lincoln og Guba (i Schwandt et al, 2007, s.19) foreslår å bruke tykke beskrivelser for å sjekke «transferability» (ytre validitet eller overførbarhet av forskningsresultat). Ved å gi nok informasjon til lesere av forskningen, så kan leser selv avgjøre om funnene kan brukes til deres egen situasjon. Jeg bruker, som tidligere nevnt, tykke beskrivelser og redegjør for mine valg for å sikre transparens. Jeg forsker på en gruppe, på et klasserom, så jeg kan ikke trekke slutninger utover dette, men leser selv kan, ifølge Lincoln og Guba (i Schwandt et al, 2007), avgjøre om mine funn kan brukes av dem.

Reliabilitet i kvantitativ forskning refererer ifølge Creswell (2014) til om data reproduseres når forsøket gjentas. I kvalitativ forskning vil det være vanskelig for en annen forsker å gjenta forsøket. Situasjonene jeg har observert i et klasserom vil ikke nødvendigvis gjenta seg. Lincoln og Guba (i Schwandt et al, 2007, s.19) sier at «dependability», som de mener er kvalitativ forskning sin reliabilitet, og «confirmability», som er objektiviteten eller nøytraliteten i funnene, kan sjekkes ved en «external audit». En slik ekstern revisjon ville bety at en uavhengig part leser mine rådata, sjekker min dataanalyse og mine resultater. Igjen vil jeg da nevne transparens: ved at jeg beskriver alle valg jeg tar og presenterer mine data med tykke beskrivelser, vil leser selv kunne avgjøre om de ville trukket samme slutninger som jeg har gjort.

3.8.4 Etiske betraktninger

I retningslinjene gitt av Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH, 2021) står følgende:

> «Forskere har ansvar overfor alle personer som inngår i eller deltar i forskning. Forskere skal respektere deres menneskeverd og ta hensyn til deres personlige integritet, sikkerhet og velferd. Forskningsdeltakere skal som hovedregel være informert og samtykke til å delta i forskning.»

For å få forske i skole må en, i tillegg til tillatelse fra de som deltar i forskningen, også få tillatelse fra selve skolen, ved rektor. Som masterstudent ved UiB kan jeg via UiB Rette sjekke om jeg trenger andre tillatelser. Da jeg ikke skal behandle personopplysninger og ikke har video- eller lydopptak, trengte jeg ikke tillatelser fra UiB Rette. Jeg skal ikke samle inn sensitive data, og da elevene jeg skal forske på har fylt 15 år har de lov til å samtykke uten foreldrenes tillatelse (NSD, 2022).

Lærer og elevene i matematikk 1T-gruppen ble informert om forskningsprosjektet, om hensikten med studien og om at jeg ønsket å observere timer med dem for å se på utforskende matematikk. Det ble også informert om at de innsamlede dataene ville bli brukt til en masteroppgave i matematikkdidaktikk. Lærer og elever samtykket til deltakelse i prosjektet.

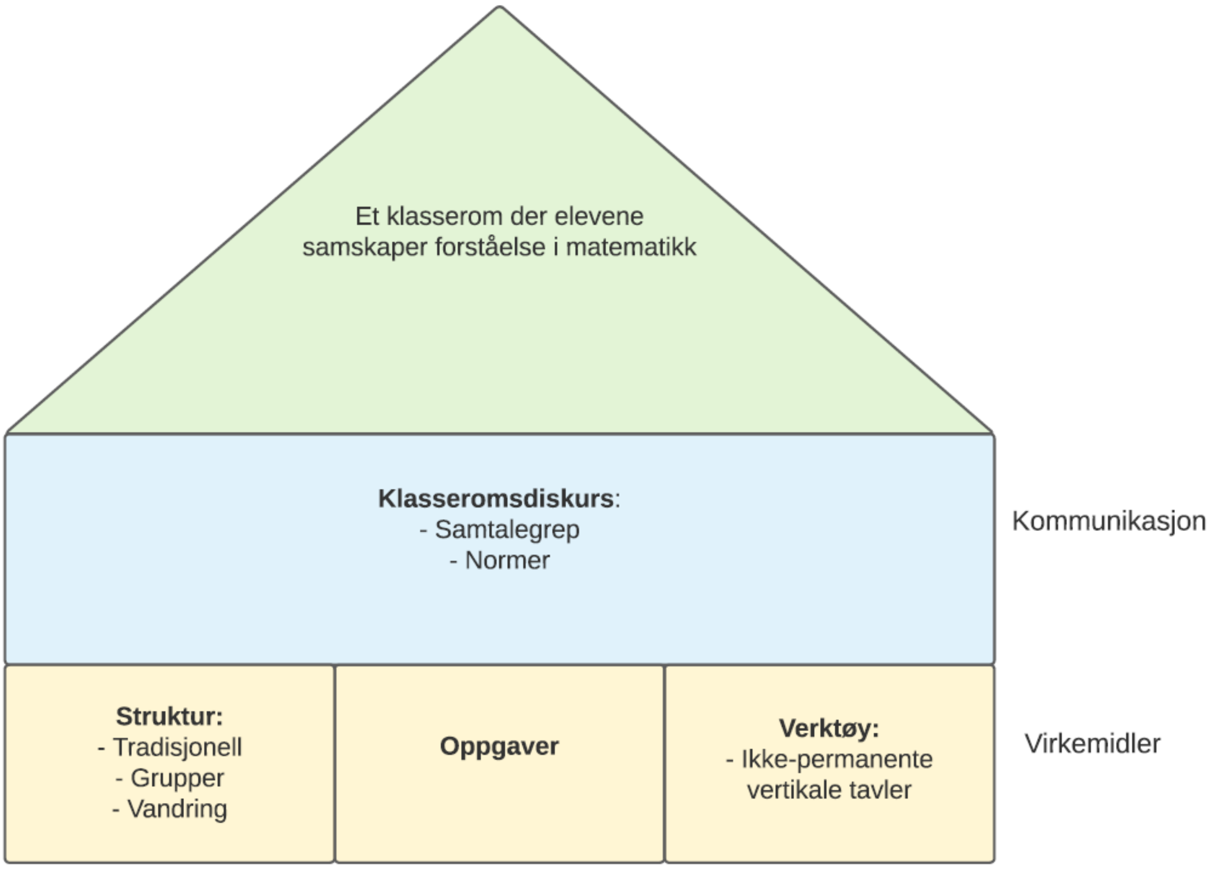
Jeg søkte, og fikk, tillatelse fra rektor ved skolen. Observasjonene ble gjort i elevenes naturlige omgivelser, i deres eget klasserom (eller på Teams som ble en naturlig setting i perioder under covid.) Undervisningstimene ble ikke endret fordi jeg var til stede, så det er ikke grunn til å tro at min tilstedeværelse var belastende for elevene. Elevene ble minnet på at jeg observerte i alle øktene jeg var til stede. Dette for å gi dem en mulighet til å velge å ikke delta og trekke seg fra prosjektet underveis. I den etterfølgende analysen av feltnotatene er det også tatt etiske hensyn. Skolens navn er ikke oppgitt i oppgaven. Navn på lærer og på elevene er byttet ut i beskrivelsene fra klasserommet, slik at de er anonymisert. Det vil si at deltakerne er beskyttet.

I tillegg til etiske betraktninger i forhold til deltakerne i en studie må en som forsker også tenke etikk i forhold til samfunnet ellers: Creswell (2014, s. 305) sier at «ethical reporting and writing research» innebærer at forskningen rapporteres ærlig, deles med deltakerne, ikke er tidligere publisert, det skal ikke være plagiering og forfattere som bidrar skal krediteres. Jeg har fulgt disse retningslinjene. Det jeg har rapportert er det jeg har sett, jeg har ikke tilføyd noe eller endret noe. Jeg har prøvd å beskrive mitt kunnskapssyn og mitt læringssyn samt alt jeg har gjort i forbindelse med denne studien for å sikre transparens. Oppgaven vil deles med lærer som ble forsket på og vil også bli gjort tilgjengelig for elevene som var i klasserommet. Det er mine observasjoner og dermed mine data som rapporteres, dette er dermed ikke publisert tidligere og det er ikke plagiert. Når jeg har brukt teori for å forklare mine valg og hvordan jeg har tolket data, så har jeg referert til kilden. Pring (2015) sier at funn av forskning må presenteres og publiseres, slik at forskningen er åpen for kritikk. Denne oppgaven vil bli tilgjengelig via Universitetsbiblioteket i Bergen, og dermed åpen for kritikk.

4. Resultater og drøfting

I dette kapitlet skal jeg presentere funnene fra observasjonene i matematikk 1T-klasserommet. Jeg skal bruke disse til å finne svar på mitt forskningsspørsmål: «Hvilke pedagogiske grep bruker en erfaren og engasjert lærer for å tilrettelegge for læring i et utforskende matematikklasserom?». Da det er mange funn og flere aspekter med hvert funn, er det nødvending å drøfte etter hvert.

For å analysere mine data vil jeg ta utgangspunkt i Cobb (2000) sine fire aspekter av læringsmiljøet: struktur, oppgaver, verktøy og klasseromsdiskurs. Jeg tenker at struktur, oppgaver og verktøy er basisen for undervisningstimene, «fundamentet som huset står på», for at det skal foregå utforskning, kommunikasjon og læring i timene. Jeg har illustrert Astrid sitt klasserom i figur 8.



Figur 8. Illustrasjon av Astrids klasserom.

Dersom strukturen på klasseromsaktivitetene i rommet ikke fungerer for samarbeid og diskusjon, vil en ikke få samarbeid og diskusjon. Om oppgavene ikke egner seg for utforskning, vil en heller ikke få utforskning. Cobb (2000) sier at det viktigste trekket i et klasseromsmiljø er klasseromsdiskursen: måten lærer og elever snakker om matematikken på.

Dette er i tråd med forskning presentert i teorikapitlet og er utgangspunktet for hele oppgaven: hvordan få til gode matematiske diskusjoner slik at elevene lærer sammen i et utforskende klasserom. Derfor ser jeg på strukturene i klasserommet, oppgavene som gis samt verktøyene som brukes i undervisningen som virkemidler til å få til utforskning, samarbeid og kommunikasjon.

De forskjellige delene i figur 8, Astrid sitt klasserom, vil utdypes i teksten under. Jeg vil starte med å presentere strukturene jeg observerte, deretter oppgaver, så verktøy før jeg presenterer klasseromsdiskursen i Astrid sitt matematikk 1T-klasserom.

4.1 Struktur

Et av Cobbs (2000) fire aspekter av læringsmiljøet i et klasserom er *strukturen på klasseromsaktivitetene.* Jeg vil i det følgende beskrive strukturene jeg observerte i Astrid sitt matematikk 1T-klasserom.

4.1.1 Tradisjonell klasseromsundervisning

Det som regnes som *tradisjonell klasseromsundervisning* som beskrevet av blant andre Liljedahl (2021), Alrø og Skovsmose (2004) og Wæge og Nosrati (2015), der lærer står foran i klasserommet og foreleser mens elevene sitter ved sine individuelle pulter og følger med på det læreren sier, var lite brukt i de øktene jeg observerte. Jeg observerte det kun i en økt (økt 2) der elevene var fordelt på to klasserom og tildelt faste plasser de ikke skulle forlate. Dette var for å kunne holde den avstanden som var pålagt i forbindelse med rødt nivå[13] med hensyn på covid. Astrid startet denne timen i det ene klasserommet med tradisjonell IRE / IRF - undervisning (Cazden (2001)), der hun ved å spørre ut i klasserommet fikk elever til å svare på spørsmål, Astrid godkjente enten responsen fra elevene (E – evaluere, det vil si vi har det Cazden (2001) kaller IRE) eller fulgte opp elevenes svar ved å stille nye spørsmål (Feedback, og dermed IRF ifølge Cazden (2001)). Verdt å merke seg er at Astrid ba om forklaringer, «hvorfor er det slik?», ikke bare et svar. På denne måten fikk klassen sammen repetert noen begreper de hadde kommet fram til tidligere. Dette viser også at Astrid starter der elevene er og bygger på det de kan fra før, noe som er viktig i følge Bransford et al. (1999) og det Hodgen og Wiliam (2006, s.1) kaller det første prinsipp for læring. Videre i denne økten fikk elevene jobbe sammen i par mens Astrid gjentok undervisningen for gruppen i det andre

[13] Trafikklysmodellen for videregående skole, FHI og Utdanningsdirektoratet. I vedlegg 3.

klasserommet. I begge klasserommene, etter en kort IRE/IRF-situasjon, fikk elevene jobbe med oppgaver og diskutere med sidemann og andre i klasserommet.

Selv om Astrid startet denne undervisningsøkten framme ved tavla så var det ikke lenge hun var der, og i resten av økten var hun rundt blant elevene. Hun sto også i klasserommet, når det senere ble sjekket om elevene hadde fått med seg de nye konseptene de skulle jobbe med. Dette samsvarer med Liljedahl (2021, s.76) sitt «defronting the room». Liljedahl (2021) mener at ved en slik omorganisering av rommet vil elevene samarbeide mer, lærere snakke mindre og sirkulere mer mens de snakker, noe som legger bedre til rette for helklassediskusjoner. I alle timene jeg observerte i klasserommet beveget Astrid seg rundt i rommet. I de aller fleste timene ble også møblene flyttet på slik at klasserommet ble omstrukturert. Astrid følger dermed Liljedahl sine anbefalinger om «defronting the room».

Oppstart av timene i tradisjonell helklasse

I alle de sju øktene jeg observerte hadde Astrid en kort introduksjon der hun fortalte elevene hva de skulle jobbe med, hva det matematiske målet for timen var og hvordan hun hadde tenkt at elevene skulle jobbe. Smith og Stein (2011) kaller denne oppstartsfasen for «launch phase» og forklarer den som fasen der lærer introduserer oppgaven, hvilke hjelpemidler de kan bruke og hva de forventes å produsere.

Mål for timen var også presentert til elevene på forhånd i planer og i møteinnkallinger på Teams. Elevene hadde dermed mulighet til å forberede seg eller i det minste tenke over hva de har gjort tidligere innen dette temaet. De tilgjengelige planene og den korte introduksjonen i hver av øktene, viser at Astrid på forhånd har bestemt hva som er det matematiske målet for økten og planlagt hvordan hun ønsker at elevene skal arbeide for å nå målet. Ifølge Smith og Stein (2011) er det å spesifisere det matematiske målet for en time veldig viktig. De sier at dette er et kritisk utgangspunkt for å planlegge og undervise en time, og som nevnt tidligere er dette etter hvert blitt kalt den nulte praksisen i forbindelse med Stein et al. (2008) sine fem praksiser. Kazemi og Hintz (2019) sitt første prinsipp er at samtalene skal bidra til å oppnå matematiske mål. Også de sier at det er viktig at lærer har klart for seg hva det matematiske målet for timen er før hun planlegger en diskusjon.

Astrid sin oppstart med introduksjon av mål for timen tok som regel ikke mer enn 3 minutter. Strukturen er helklasse og tilsvarer det Liljedahl (2021) mener er det vanlige oppsettet i alle klasserom. Men da dette var en kort introduksjon og elevene etterpå ble inndelt i grupper, reiste seg opp og klasserommet ble endret, så ser vi ikke det Alrø og Skovsmose (2004), Wæge og Nosrati (2015) og Cazden (2001) mener er en tradisjonell klasseromsstruktur.

Avslutning av timene i tradisjonell helklasse

Alle timene jeg observerte ble avsluttet med en kjapp felles oppsummering. Det kan være noen få ord om hva som ble oppdaget i løpet av timen eller bare litt skryt fra Astrid om hvor godt elevene jobbet. De fleste av disse avslutningene var bare noen få minutter. I noen av disse avslutningssekvensene får elevene muligheten til å evaluere: Astrid ber dem tenke over og komme med innspill på hva som fungerte, eventuelt ikke fungerte, hva fikk de til og hva de trenger mer tid til. Et eksempel er fra økt 1 der Astrid sier til elevene etter at de har avsluttet arbeidet i gruppene:

> «Programmering i matematikk er nytt, nytt for dere og nytt for oss å undervise. Nå har vi prøvd forskjellige ting. Hva fungerer? Hva er bra med i dag?»

Astrid får flere innspill fra elevene, de svarer blant annet at de syntes det var bra å få jobbe med dette sammen, slik at de kunne spørre hverandre og hjelpe hverandre. Astrid spør videre:

> «Hva kunne vært bedre med timen i dag?»

Hun får tilbakemelding om at det var vanskelig å holde fokus i 120 minutter. Astrid nikker og erkjenner dette. Hun kommer så med sin egen evaluering av timen:

> «Støynivået må ned. Mange flere har vært aktive og dere har vært tryggere på hverandre.»

Oppsummering tradisjonell klasseromsundervisning i helklasse

Tradisjonell klasseromsundervisning i helklasse, som beskrevet av Liljedahl (2021), Alrø og Skovmose (2004), Wæge og Nosrati (2015) og Cazden (2001) foregikk som nevnt bare unntaksvis og i korte perioder i Astrid sitt matematikk 1T-klasserom. Helklasse ble brukt som oppstart, med kort introduksjon til timene, og som avslutning, med en kort oppsummering og eventuelt evaluering fra elevene. Liljedahl (2021), Alrø og Skovsmose (2004), Wæge og Nosrati (2015) og Cazden (2001) anbefaler lærere å gå vekk fra *tradisjonell klasseroms-undervisning i helklasse*. Astrid følger anbefalingene deres.

4.1.2 Grupper

En veldig tydelig struktur i klasserommet var arbeid i grupper. Grupper ble brukt i hver av øktene jeg var med i, og vanligvis tok gruppearbeidet mellom 25 og 40 minutter av en undervisningsøkt på 120 minutter. Dette gjaldt også øktene på Teams, der elevene jobbet i grupperom eller kanaler. Arbeidet i gruppestrukturen tilsvarer Smith og Stein (2011) sin «explore phase»: fasen der elevene forsøker å løse problemet. Smith og Stein (2011) sier at elevene i denne fasen må oppmuntres til å løse problemet på den måten som gir mening for dem og at de må være forberedt på å forklare løsningsmetoden til de andre elevene i klassen.

Under observasjonene fant jeg fem interessante aspekter i forbindelse med bruk av grupper: *gruppestørrelse*, at *gruppene velges synlig tilfeldig*, at gruppesammensetningen *endres ofte*, at det blir *kunnskapsspredning på tvers av gruppene* og at det er tydelig at *elevene trives med å jobbe i grupper*.

Det første aspektet er *gruppestørrelse*. Standard var å dele inn i *små* grupper, normalt på tre og når det ble noen til overs ble det grupper på to. Liljedahl (2021) sier, som nevnt i teorien, at for at en gruppe skal fungere må deltagerne ha både overflødighet og diversitet, og grupper på tre ser ut til å ha den perfekte balansen av disse. Astrid følger Liljedahl (2021) sin anbefaling på dette punktet.

Det andre aspektet er at gruppene *velges synlig tilfeldig*, det vil si slik at det er synlig for elevene at det er tilfeldig hvem de havner sammen med. Noen ganger teller Astrid «gruppe 1, gruppe 2, gruppe 3 …» og peker på elevene slik de sitter. Andre ganger sier Astrid: «Før vi går videre skal vi ha et lite gruppebytte: den eldste i hver gruppe går videre til neste gruppe.» Astrid deler elevene i grupper også når undervisningen er på nett og også her viser hun elevene at gruppene blir satt sammen tilfeldig, ved hjelp av utskuddsgrupper på Teams. Liljedahl (2016, 2021) anbefaler synlig tilfeldige grupper (visible random groups). Liljedahl (2021) sier at når gruppene velges synlig tilfeldig, fjernes forbindelsen til kontroll fra både elever og lærere, og elevene går inn i gruppene uten å vite hva deres rolle vil være den dagen. Han mener at dette fører til at forskjellige elever stiger frem og begynner å tenke. Selvvalgte grupper er ikke produktive da det blir for mye overflødighet og for lite diversitet. Ved å la elevene i matematikk 1T klassen se at gruppene velges tilfeldig, så følger Astrid Liljedahls (2016, 2021) anbefalinger også her.

Det tredje aspektet i forbindelse med gruppebruk er at *gruppene endres ofte*. Det dannes nye grupper i hver time, og av og til endres gruppene underveis i undervisningsøkten. I økt 4, 6 og 7 observerte jeg at det ble dannet nye grupper etter at klassen hadde hatt en felles konsolidering. Dette gjør at i løpet av noen økter har elevene jobbet med mange forskjellige klassekamerater og alle er vant til å jobbe med alle. Liljedahl (2021) sier, som nevnt i teorikapitlet, at når elevene samarbeider med nye tilfeldige partnere hver time, så fjernes de sosiale barrierene og kunnskap deles enklere. At gruppene endres ofte kan dermed ha den effekten at det ikke blir skummelt å dele idéer. Dette stemmer med mine observasjoner i klasserommet: elevene så ut til å kunne jobbe i gruppe med hvem som helst, det var aldri noen protester på gruppesammensetningen. At gruppene byttes ofte vil også bety at i løpet av noen undervisningsøkter vil elevene være sammen med noen som kan litt mer, eller noe annet, enn dem. Dette gir Vygotskys proksimale utviklingssone, og det er her læring kan skje (Goos, 2004). Astrid følger Liljedahls (2021) anbefalinger om å bytte grupper ofte, noe som kan øke problemløsningskapasiteten for elevene da de kan få assistanse av en mer kapabel partner (Vygotsky, referert til i Goos, 2004, s.262).

Det fjerde aspektet som ble observert i undervisningen er *kunnskapsspredning på tvers av gruppene*. Noen ganger skjedde det kunnskapsspredning fordi elevene oppdaget at deres gruppe ikke hadde samme resultater som andre grupper og de diskuterte først seg imellom (innad i gruppen) og så gjerne med andre grupper. Et eksempel på dette er fra økt 7 der elevene jobbet i tilfeldige grupper med følgende oppgave:

> «En andregradsfunksjon $f(x)$ har nullpunkter i x = 2 og x = 4. I tillegg har den et bunnpunkt i (3, -1). Bruk ulike representasjonsformer for å si noe om denne funksjonen. Hva kan du finne ut? Hva kan du si om den deriverte til $f(x)$?»

Gruppe 2 har en skisse av en graf som går gjennom nullpunktene og som også skjærer y-aksen. De har skrevet $f(x) = (x-2)(x-4)$ og $f(x) = x^2 - 6x + 8$ på tavlen sin. De har dessuten laget tabell med stigningstall til tangenten til $f(x)$ for forskjellige verdier for x og er i felleskap kommet fram til at den deriverte må være $f'(x) = 2x - 6$. Gruppen ser over på gruppe 3 sin tavle og oppdager at gruppe 3 har skrevet noe annet for den deriverte. Da skjer følgende:

> Elevene i gruppe 2 diskuterer først i gruppen og så går de over til gruppe 3.
> Isak i gruppe 2: «Hvem har rett?»
> Etter litt diskusjon utbryter Emil fra gruppe 3: «Jeg har feil!»
> Gruppe 3 samler seg og jobber videre ved sin tavle.

Her ser vi at elevene i gruppene fikk diskutert på tvers av gruppene og kom til enighet om hva som måtte være det rette uttrykket for den deriverte. Det skjer en kunnskapsspredning på tvers av gruppene. Andre ganger blir elevene oppfordret av Astrid til å se på de andre gruppenes arbeid. I samme økt som omtalt ovenfor skjer dette:

Astrid sier ut i rommet: «Det er mye forskjellig rundt på tavlene nå. Jeg anbefaler dere å gå rundt å se på det de andre har gjort.»
Elevene kikker på de andre tavlene, går tilbake til sine egne og tilføyer elementer de finner hos andre som de ikke selv hadde tatt med.

Vi ser en kunnskapsspredning mellom grupper fordi noen av gruppene har tatt med elementer de andre ikke hadde tenkt på, og disse velger å finne og notere noe de så ser er relevant for oppgaven.

Jeg observerte dessuten kunnskapsspredning på tvers av gruppene på grunn av endringen i grupper underveis i en økt. Elevene tok med seg noe de hadde diskutert i en gruppe og delte med elevene i en annen gruppe. Et eksempel på dette er utveksling av derivasjonsregler i økt 7. Elevene jobbet i grupper for å finne kurver for den deriverte av forskjellige funksjoner. Dette skulle de gjøre ved å finne stigningstallet til tangenter ved hjelp av GeoGebra. De hadde altså ikke lært derivasjonsregler. Under gruppearbeidet observerte jeg følgende:

To av elevene i gruppe 4 forklarer derivasjonsregler til elevene i gruppe 3.
Oskar fra gruppe 3 utbryter: «Det var jo en åpenbaring!» og videre:
«Blir nesten som om vi har oppdaget en ny religion!»

Senere samme økt observerte jeg at elevene som hadde diskutert disse derivasjonsreglene fortalte det videre til sine nye grupper. I gruppe 5 (etter gruppebytte) foregikk følgende ordveksling:

Oliver: «Da er vi ferdige med oppgaven?» (De sjekker oppgaven på tavla for å se at de har svart på alt.) «Da kan jeg lære deg power rule!»
Videre sier Oliver: «Husker du den forrige, $x^2 - 6x$ +8?»
Matheo: «Ja».
Oliver: «Hvis du skal derivere, mye greiere å bruke the power rule i stedet for å finne mange tangenter og punkter. Hvis jeg bare gjør sånn: tar det tallet den er opphøyd i.»
Matheo: «What?»
Oliver: «Greiere hvis jeg viser på tavla», (skriver opp $x^2 - 6x + 8$).
Oliver sier videre: «Her står det egentlig 1 ganger x^2», (skriver $1 \cdot x^2 - 6x + 8$).
«Tar den ganger med den», (viser eksponenten 2 «ganger med» 1-tallet foran $1 \cdot x^2$)
«Og så tar du minus 1 her» (peker på eksponenten i x^2) «Da får vi $2{\cdot}1 \cdot x^{2-1}$».
Viser det samme for det neste leddet: «Det står egentlig x i første her»,
(skriver $2{\cdot}1 \cdot x^{2-1} - 1 \cdot 6 \cdot x^{1-1} = 2x - 6$).

Matheo: «Men hva da med åttetallet?»

Oliver: «Her står det x i nulte», (viser i uttrykket $x^2 - 6x + 8x^o$),

«så tar 0·8 og det forsvinner, det.»

Matheo: «Ok».

Oliver: «Jeg viser med et mye vanskeligere uttrykk, et femtegrads.»

(Oliver skriver opp $x^5 + 2x^4 + 4x^3$+$8x^2 + 16x + 32$. De jobber sammen, den tredje eleven i gruppa, Tobias, blir også med. De tre går steg for steg, ganger eksponenten med koeffisienten foran og trekker vekk 1 fra eksponenten.

Får $5x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 16x + 16$).

Matheo: «Er det den deriverte?»

Oliver: «Vi kan sjekke i GeoGebra», (de legger inn i GeoGebra).

«Stemmer!»

Matheo: «Takk, Oliver!»

Tobias utbryter: «Hvordan fant du ut det?», tydelig imponert!

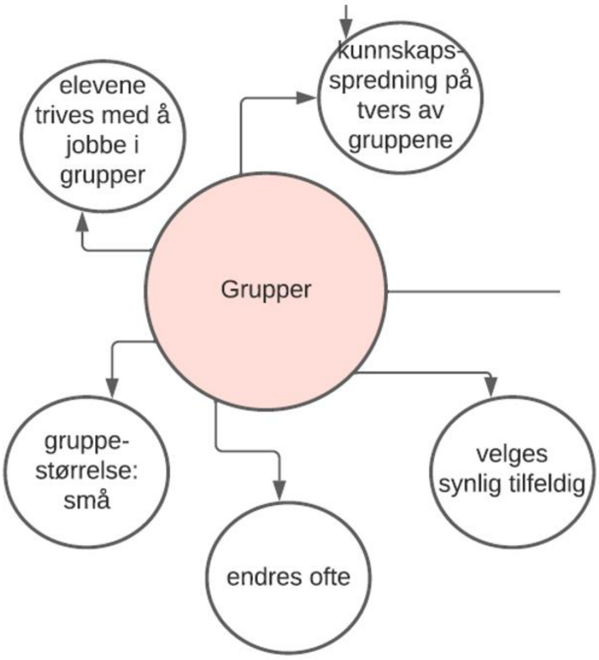
Her ser vi at Oliver, som var i en av de to gruppene som diskuterte derivasjonsregler før gruppebyttet, hadde lyst til å dele denne kunnskapen med den nye gruppa han var satt i. Dette viser kunnskapsspredning fordi gruppene ble endret i løpet av en økt.

Liljedahl (2021, s.48) sier at det er tre former for kunnskapsspredning i forbindelse med gruppearbeid: Den første er at medlemmer av en gruppe låner en idé fra en annen gruppe og tar med til deres egen gruppe, den andre er at medlemmer av en gruppe sammenlikner deres svar med andres svar, og den tredje er at to eller flere grupper kommer sammen og diskuterer forskjellige løsninger. Ordvekslingen mellom Oliver, Matheo og Tobias er et eksempel på at en idé tas fra en gruppe til en annen gruppe (den neste gruppen Oliver var med i). Tidligere så vi at gruppene til Isak og Emil sammenliknet svarene sine som de oppdaget var forskjellige, diskuterte og ble enige om hvem som hadde feil. Det mest typiske i timene jeg observerte var at gruppene oppsøkte andre grupper og fikk med seg idéer som de så jobbet videre med. Dette skjedde, som vi så et eksempel på tidligere, på oppfordring fra Astrid, men også ved at grupper på eget initiativ diskuterte med «nabogrupper». Hattie (2015) sier at undervisningspraksiser der elevene blant annet får mulighet til å undervise hverandre, gir bedre resultater enn andre undervisningspraksiser. I Astrid sitt rom ser vi at elevene, i forbindelse med strukturen grupper, underviser hverandre.

Det femte aspektet i forbindelse med gruppearbeid er at det var tydelig at *elevene trives med å jobbe i grupper*. Ved flere tilfeller fikk elevene mulighet til å jobbe alene, blant annet for å forberede seg til prøve, men etter spørsmål fra Astrid ga elevene uttrykk for at de ønsket å jobbe i grupper. Astrid satte dermed sammen tilfeldige grupper. I økt 5 var elevene blitt bedt om å jobbe sammen to og to og diskutere. Etter en felles oppsummering fikk elevene nye utforskningsoppgaver. Selv om Astrid da ikke satte alle i par eller grupper for utforskningen, valgte mange allikevel å samarbeide. De får da sette ord på matematiske begrep, og prøve å forklare hva de ser. Astrid var også rundt og ba dem forklare hva de oppdaget. Som tidligere nevnt protesterte aldri elevene på gruppetilhørighet. De forsøkte heller aldri å bytte gruppe. De flyttet seg dit de skulle og samarbeidet med dem de hadde fått beskjed om å jobbe sammen med. Gruppene kom også uten unntak raskt i gang. Dette stemmer overens med Liljedahl (2021) sine tanker om at når grupper er tilfeldige, og endres ofte, så godtar elevene denne strukturen og jobber bra med alle.

Oppsummering grupper

Disse fem aspektene viser til sammen hvordan strukturen grupper ble brukt i klasserommet (figur 9).



Figur 9. Oppsummering av aspekter ved strukturen Grupper.

Gruppene ble bevisst valgt slik at de var små: hovedregelen var grupper på tre, og om det ikke var mulig ble det heller dannet to grupper på to enn en på fire. Gruppene ble valgt synlig tilfeldig slik at ingen trenger å lete etter lærers motiv for hvem som settes sammen og ingen trenger å måtte velge selv. Gruppene ble endret ofte, minst hver undervisningsøkt. Dermed er elevene vant med å jobbe med hvem som helst i klassen. I tillegg foregår det kunnskaps-spredning på tvers av gruppene. Alle de fire første aspektene er dermed slik Liljedahl (2021) sier det skal være for å få til et tenkende klasserom. Jeg observerte dessuten at elevene trives med gruppearbeid og valgte det også når lærer tilbød dem å jobbe alene.

En slik bruk av grupper åpner for kommunikasjon mellom elevene, de får snakke matematikk med andre som er på omtrent samme kunnskapsnivå og de får sammen utforske og finne ut av matematikken de arbeider med. Jeg vil påstå at de får tenke sammen, og det er dette vi lærere prøver å få til i et matematikklasserom.

4.1.3 Vandring

En annen tydelig struktur i klasserommet, som ble brukt i seks av de sju[14] øktene jeg observerte, er vandring. Dette er en vandring fra tavle til tavle der gruppene får dele det de har gjort og forklare hva de har tenkt. Vandringen blir en felles konsolidering og er en form for helklassediskusjon, det vil si at denne vandringen tjener som Smith og Stein (2011) sin «discuss and summarize phase». Vandringen foregår i helklasse, men er en helt annen struktur enn den mer tradisjonelle strukturen der alle sitter vendt mot læreren, beskrevet i 4.1.1.

Under observasjonene fant jeg fire interessante aspekter i forbindelse med vandringen: *Elevene forklarer, Astrid (lærer) velger hvilke grupper som skal presentere, Astrid (lærer) velger rekkefølge gruppene presenterer i* og oppsummeringene og helklassediskusjonene *bygger på elevenes arbeid*.

Et eksempel på vandring er fra den første økten jeg observerte. Elevene har jobbet i grupper på vertikale ikke-permanente tavler etter følgende instruks fra Astrid:

> De skal lage et program (i Python) som skal generere et vilkårlig tall (random). Programmet skal be brukeren gjette et tall, og når tallet er skrevet inn skal programmet svare at tallet er for høyt, for lavt eller riktig. De skal ikke programmere på pc ennå, kun skrive programmet på tavlene. De kan velge om de vil skrive korrekte kommandoer eller pseudokode.

[14] Den eneste økten uten vandring var økt to. Dette skyldtes at skolen var i rødt med hensyn på covid og elevene var fordelt på to klasserom med beskjed om å holde seg på sin faste plass.

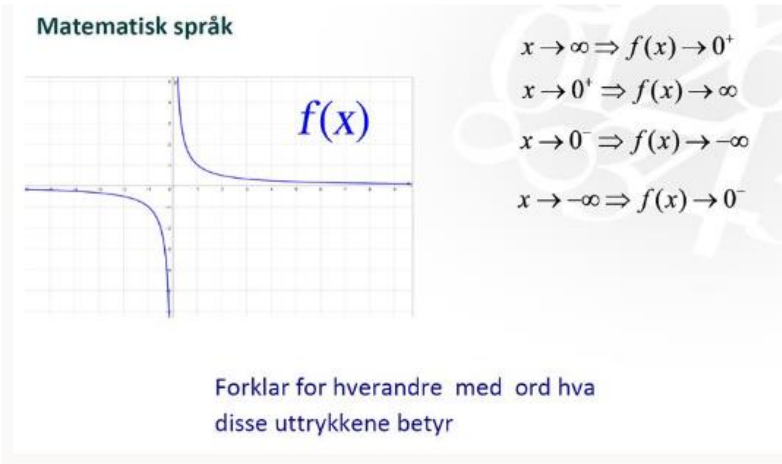
Astrid går rundt i rommet og observerer. Etter at elevene har fått jobbe en stund tar hun ordet:

> Astrid: «Nå tar vi en oppsummering» (*får alle opp i hjørnet av klasserommet*)
> Astrid: «Noen har skrevet kommando, andre pseudokode – begge deler er fint».
> Gruppa som har kommet kortest får begynne.
> Astrid: «*Vi flytter oss til tavle 1*» (alle elevene ser på tavle 1, de har gitt navn til randomtallet og gjettingen. Gruppa får forklare selv hva de har gjort.)
> Astrid *får med seg klassen til en ny tavle* og spør gruppa som har jobbet her «Finner dere det forrige gruppe gjorde – og hva mer har dere gjort?»
> Gruppa forklarer, Astrid kommer med spørsmål «Hva kalles det?» og utsagn som «Bra tanke når dere skrev» og peker på kommandoene variabler og print.
> Astrid *får elevene med til ei ny gruppe*: her er det pseudokode «Kan dere forklare?»
> Gruppa forklarer hva de mener med $x \neq y$ for å få programmet til å svare at det gjettede tallet ikke er riktig.
> Astrid: «Dere i gruppe 4 – har dere tenkt på samme måte?» (*Har fått med seg elevene til ny tavle*.) Gruppe 4 forklarer at de også har tatt med ulikhetstegnene < og >.
> *Alle flytter seg videre* til gruppe 7. Astrid: «Fint det dere har her, fine tilbakemeldinger til brukeren» (Gruppa har skrevet inn «Wow, du klarte det!» som tilbakemelding til bruker når det gjettes rett).
> Astrid: «Gruppe 2 har poeng som ikke så mange andre har» (*alle er nå foran gruppe 2 sin tavle*).
> Gruppen får forklare selv: «Pc-en må få vite at det er heltall, ikke bare string».
> Astrid: «Til slutt gruppe 5» (*alle flytter seg*)
> Astrid: «Det er varianter av dette hos de andre gruppene, men hva har dere som mangler hos de andre?»
> Frida fra gruppe 5 svarer: «elif».
> Det diskuteres hva dette har å si for programmet. *Klassen har nå vært innom alle gruppenes tavler*.
> Astrid: «Noe dere må endre nå etter å ha hørt på de andre?»

Eksempelet viser at klassen, sammen med Astrid, vandrer (markert med kursiv). Elevene blir med Astrid rundt, fra tavle til tavle, det vil si fra gruppe til gruppe. Vi ser at *elevene forklarer* (det første aspektet i strukturen vandring). De forklarer hva de har gjort og hvordan de har tenkt, til lærer og til de andre elevene i klassen. Videre ser vi her at Astrid *velger hvilke grupper som skal presentere* (det andre aspektet i strukturen vandring), hun *velger ut* *rekkefølgen gruppene presenterer i* (det tredje aspektet i strukturen vandring) slik at det blir en logisk oppbygging der diskusjon og forklaringer *bygger på elevenes arbeid* (det fjerde aspektet i strukturen vandring). Grepene at Astrid velger ut hvilke grupper som skal presentere og rekkefølgen de presenterer i, kjenner vi fra Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011) sine fem praksiser. I dette eksempelet ser vi at Astrid startet med en gruppe som hadde noe som alle elevene hadde fått til. Dette er det Liljedahl (2021, s.172) kaller «consolidating from the bottom».

I denne økten var klassen innom alle gruppene, så alle fikk vist at de kunne noe som det gikk an å bygge videre på. Mer typisk i de øktene jeg observerte, var vandringen ikke innom alle gruppene. Astrid valgte da ut noen grupper som fikk vise sine strategier. For meg som observatør så det da ut som om hun valgte å begynne med grupper som hadde noe grunnleggende og så gå videre til grupper som hadde noe som bygget videre på det, slik at det ble en logisk oppbygging og fremdrift i det de jobbet med. Dette er i tråd med forslag på hvordan en kan se sammenhenger (connecting) hos Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011).

Et annet eksempel på vandring er fra økt 4, på Teams. Astrid introduserte oppgaven felles og sa at «Jeg kopierer bildet inn i møtechaten slik at dere kan hente det opp og diskutere i grupper.» Elevene jobbet så i tilfeldige grupper på 3 og 3 med grafen og noen påstander i et matematisk språk som elevene ikke har brukt tidligere (figur 10).



Figur 10. Den matematiske notasjonen som Astrid ber elevene diskutere. Kilde: Matematikksenteret, NTNU, fra undervisningsøkt matematikkprosjektet.

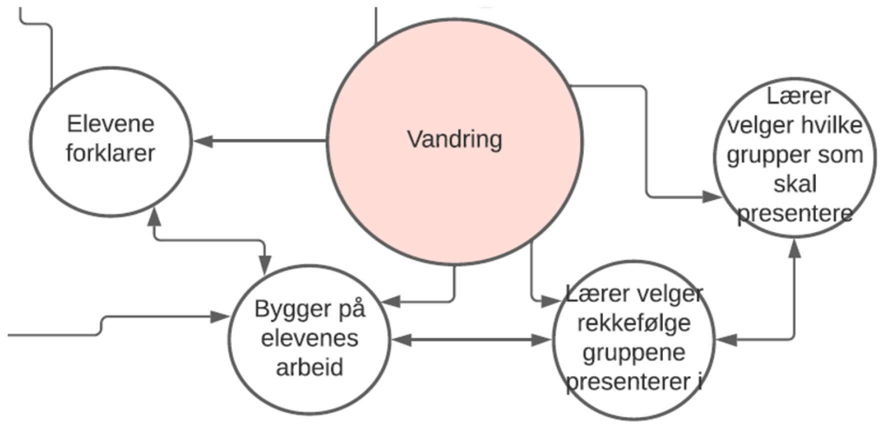
Mens elevene jobber i grupper (i kanaler på Teams) er Astrid innom alle gruppene og observerer. Etter at de har fått jobbet og diskutert en stund, samles alle i fellesrom på Teams. Astrid får elevene med på en vandring fra gruppe til gruppe. På Teams blir ikke vandringen fysisk, men allikevel fra gruppe til gruppe som blir bedt om å komme med bidrag. Elevene har ikke vertikal tavle å vise til. De forskjellige gruppene får allikevel vise sine tanker og idéer.

Astrid: «Har vært og hørt i alle gruppene. Vi skal se litt på grafen. Nå spør jeg dere ut fra gruppenummer. Tror jeg har lyst til å starte med gruppe 4. Er det noen i gruppe 4 som kan koble på mikrofonen?»
Ella fra gruppe 4: «Ja»
Astrid: «Var det noe dere syntes var vanskelig eller uklart?»
Ella: «Fortegn foran uendelig. Og at det var 0^+ og 0^-.»
Astrid: «Var det minus foran uendelig som var uvant?»
Ella: «Ja»
Astrid: «Nå spør jeg gruppe 5. Kan dere *forklare* dette?»
William: «Ja, x pil mot uendelighet, vi er da på høyre side av koordinatsystemet»
Astrid: «Det var en god observasjon. Og så sa du at «vi er over»»
William: «Ja, 0^+ betyr at vi er på den positive siden av 0, men på oppsiden».
Astrid: «Hørte at du sa …» (repeterer det eleven sa).
Astrid: «Gruppe 3, kan dere koble dere på litt»
Vilde fra gruppe 3: «Ja»
Astrid: «Dere spurte om pilene, hva de betyr. Den ene er enkel → og den andre er dobbel ⇒»
Vilde får forklare selv: «x pil mot uendelig betyr at x går mot uendelig. Den doble er en implikasjonspil. Så det viser noe som skjer.»
Astrid: «Kan du gjenta det?» (Vilde gjentar.) Astrid: «Takk for bidrag!»
Astrid: «Over til gruppe 2. Hvis vi nå går til linje 3, $x \to 0^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$. Vet at dere diskuterte noe om dette. Kan dere si noe om det?»
Mia fra gruppa forklarer: «$f(x) \to -\infty$ betyr at vi flytter oss nedover, langs y-aksen.»
Astrid: «Vi diskuterte hva 0^+ betyr. Hvis du skal tenke litt høyt om 0^- nå, hva tenker du da?»
Mia: «Må bety at vi går mot 0 fra den negative siden» (Astrid viser på grafen at x går fra -5, -4, -3 osv. mot null og da går y mot $-\infty$).
Astrid: «Gruppe 6 lurte på om plussen i 0^+ betydde opphøyd i. Har dere fått gode nok svar nå?»
Mathias: «Ja»

Vi ser her et eksempel på vandring, denne gang på Teams. Astrid har observert at noen av gruppene er usikre på notasjonen i oppgaven og hun har observert at andre grupper har fått det til. Hun lar grupper med spørsmål starte: de deler det de lurte på til resten av klassen. Deretter velger Astrid en gruppe som hun vet har svaret på dette, og lar denne gruppen svare på det forrige gruppe lurte på. De forklarer hva den matematiske notasjonen må bety. I gruppe 3 hadde elevene hatt spørsmål når Astrid var innom dem, og når hun lar dem svare så har de funnet ut selv hva de lurte på og kan dele dette med medelevene. Helt til slutt i denne vandringen ser vi at gruppe 6 blir spurt om de har fått gode nok svar på det de lurte på når Astrid var innom gruppen. Astrid viser i denne vandringen / oppsummeringen at hun har hørt hva de forskjellige gruppene har fått til og hva de lurte på. Hun passer også på å spørre om de har fått svar etter at andre elever har fått presentere. Igjen ser vi aspektene: *elevene forklarer*, Astrid ve*lger hvilke grupper som skal presentere* og *hvilken rekkefølge gruppene presenterer i*, slik at videre konsolidering *bygger på elevenes arbeid*. I flere av de observerte timene ble det nye grupper og videre samarbeid etter en slik vandring, og deretter ny vandring med helklassediskusjon og felles konsolidering.

Oppsummering vandring

Vandring var en mye brukt struktur i undervisningsøktene jeg observerte. Som eksemplene fra vandringen i klasserommet og vandringen i Teams viser, så foregår denne vandringen ved at elevene forflytter seg mellom gruppene der *elevene forklarer.* Astrid *velger hvilke grupper som skal presentere* sine strategier og *hvilken rekkefølge gruppene presenterer* og forklarer i. Dette gjør at disse oppsummeringene / felles konsolideringene *bygger på elevenes eget arbeid*. Astrid følger anbefalinger fra Smith og Stein (2011), Stein et al. (2008) og Liljedahl (2021) i de fire aspektene som til sammen utgjør strukturen vandring (figur 11).



Figur 11. Oppsummering av strukturen Vandring.

4.1.4 Sammenhenger mellom strukturene

Mens elevene jobbet i strukturen grupper, sirkulerte Astrid i rommet og observerte tavlene gruppene jobbet ved. Hun lyttet til diskusjonene i gruppene og innimellom spurte hun hva de mente og tenkte. Noen ganger trengte elevene et lite hint for å komme videre. Astrid «gikk» også fra kanal til kanal når elevene jobbet i grupper på Teams, og fikk også her innsyn i hvordan elevene jobbet, hva de fikk til og hva de strevde med. Dette tilsvarer Stein et al. (2008) sin andre praksis, observering. Stein et al. (2008) mener at lærer, i tillegg til å notere seg hvilke strategier elevene bruker, bør se på notasjon, høre på diskusjoner og prøve å forstå den matematiske tenkningen, gjerne ved å stille spørsmål. Dersom en gruppe har misforstått problemet, så har Astrid en mulighet til å styre dem i rett retning i denne observasjonsfasen. I vandringene som foregikk i klasserommet kom det fram at Astrid visste hvilke strategier de forskjellige gruppene hadde brukt. Dette fant hun ut ved hjelp av observering. Astrid ser ut til å følge Stein et al. (2008) sine anbefalinger om observasjonsfasen.

Astrid har observert gruppene mens de jobbet og siden hun dermed vet hvem som har fått til hva kan hun bruke dette til å *velge ut grupper* som fikk presentere sine strategier i den etterfølgende vandringen. Denne utvelgelsen er viktig for å få til læringsmålet for timen: Astrid kan velge bestemte strategier for å få den diskusjonen hun ønsker i vandringen. Dette tilsvarer Stein et al. (2008) sin tredje praksis: å velge. I enkelte vandringer lot Astrid grupper som var usikre på noe få presentere hva de lurte på, slik at andre grupper som hadde funnet ut dette, fikk hjelpe sine medelever videre. Andre ganger så det ut som om hun valgte grupper med strategier som kunne føre fram til mønster og system i det klassen jobbet med. Stein et al. (2008) sier at denne utvelgelsen er viktig: matematiske idéer som omfatter målet for timen skal velges ut, ikke bare tilfeldige strategier som elevene har lyst til å dele. Dette for å få de matematiske idéene fram i den senere diskusjonen. I mine observasjoner av diskusjonene som foregikk i vandringene er det klart at Astrid har valgt ut bidrag fra elevene med hensikt, for å få fram matematikken hun ønsker elevene skal forstå. Hun følger Stein et al. (2008) sine anbefalinger i utvelgelsesfasen.

I forbindelse med utvelgelse av grupper bestemte også Astrid hvilken *rekkefølge* gruppene fikk presentere i, slik at det ble progresjon og utvikling av det matematiske temaet klassen jobbet med. Som nevnt under strukturen vandring så var elevene i Astrid sitt klasserom noen ganger innom alle gruppene, da i en «stigende rekkefølge» fra de som var kommet kortest i løsningen av problemet. Andre ganger var de innom bare noen av gruppene. Da så det ut som om Astrid lette etter de mest vanlige strategiene og strategier som var annerledes. Dersom det var en misoppfatning som gikk igjen hos flere av gruppene, ble dette også innlemmet i vandringen og diskutert i helklasse. Valg av rekkefølge tilsvarer Stein et al. (2008) sin fjerde praksis, å velge rekkefølge. Smith og Stein (2011) sier at det er viktig at lærere forsøker å velge en rekkefølge som kan bidra til at flest mulig elever kan følge og dermed forstå de sentrale matematiske idéene som er målet for timen. Stein et al. (2008) sier at det ikke finnes en bestemt rekkefølge som er den beste for alle klasserom. De sier at hvordan lærer velger avhenger både av lærers kunnskap om elevene sine og av læringsmålet for timen. Også om rekkefølgen sier Stein et al. (2008) at lærer må velge med omhu. De sier at en vil ha fram en matematisk idé, og må velge en rekkefølge som gjør at den matematiske diskusjonen blir sammenhengende og forutsigbar, ikke vilkårlig ut fra hva elevene ønsker å dele. Astrid ser ut til å velge rekkefølge slik at elevene får mulighet til å se sammenhenger mellom idéene som presenteres og slik at det blir en logisk oppbygging og matematisk progresjon i det som presenteres. Astrid følger dermed Stein et al. (2008) sine anbefalinger også i denne fasen.

Ved at Astrid tar gruppene med på en vandring der elevene får dele sine strategier, kommentere hverandres bidrag og bygge videre på disse, forsøker hun å få fram de viktige matematiske idéene for temaet klassen jobber med. Hun får fram mønstre og generaliseringer som elevene har funnet. Dette tilsvarer Stein et al. (2008) sin femte praksis: å se sammenhenger. Stein et al. (2008) sier at i denne fasen skal lærer hjelpe elevene å se sammenhenger mellom de forskjellige løsnings-strategiene elevene presenterer, og også se sammenhenger mellom disse løsningene og viktige matematiske idéer. Dette skjer altså i vandringen i matematikk 1T-klasserommet til Astrid. Stein et al. (2008, s.330) sier at i stedet for å ha en matematisk diskusjon som består av separate presentasjoner fra elevene, om ulike måter å løse et bestemt problem på, så er målet med denne femte praksisen å få elevenes presentasjoner til å bygge på hverandre for å utvikle det de kaller «powerful mathematical ideas.» De sier videre at lærer kan vise sammenhenger direkte i strategiene som diskuteres, eller indirekte ved å stille spørsmål og rette elevenes fokus på det hun ønsker å få fram. I observasjonene mine så jeg at Astrid ofte brukte en slik indirekte tilnærming, der hun ved hjelp av elevers eksempler og spørsmål fikk elevene selv til å se sammenhengene og de matematiske idéene. Stein et al. (2008) sier at etter slike diskusjoner kan lærer bruke det som kom fram for å planlegge videre timer hvor nye oppgaver bygger på det de har diskutert, og blir mer krevende.

I strukturene grupper og vandring ser vi at Astrid observerer (monitoring), hun velger ut grupper som presenterer (selecting), hun velger rekkefølge for presentasjonene (sequencing) og hun hjelper elevene å se sammenhenger (connecting). Jeg observerte dermed fire av Stein et al. (2008) sine fem praksiser. Stein et al. (2008) sine praksiser danner sammenhenger mellom strukturene grupper og vandring i Astrid sitt matematikk 1T-klasserom. At Astrid bruker disse praksisene i sine strukturer, for å få til gode helklassediskusjoner, er i tråd med anbefalingene til Stein et al. (2008).

Som nevnt i teorikapitlet foreslår Wæge og Nosrati (2015) som et alternativ til en tradisjonell, lærebokstyrt undervisningsform, det de kaller for undersøkende matematikkundervisning der timene har en tredelt struktur tilsvarende Smith og Stein (2011) sine «launch», «explore», og «discuss and summarize»-faser. I strukturene observert i Astrid sitt klasserom, ser vi at Astrid sine timer følger en slik tredelt struktur: hun har en kjapp oppstart i helklasse (kap. 4.1.1.2) der en kognitiv oppgave presenteres (launch), hun lar elevene jobbe med denne (explore) i strukturen grupper (kap.4.1.2) mens hun observerer og oppmuntrer, og etter at elevene har fått jobbe og diskutere i grupper så bruker Astrid strukturen vandring (kap.4.1.3) for helklassediskusjon (discuss and summarize). Astrid følger dermed anbefalingene til Smith og Stein (2011) og Wæge og Nosrati (2015), og undervisningen hennes følger strukturen til undersøkende matematikkundervisning.

4.2 Oppgaver

Det neste av Cobbs (2000) fire aspekter av læringsmiljøet i et klasserom jeg vil se på er *oppgavene* som brukes i klasserommet. Også Brodie (2010, s.18) uttaler seg om viktigheten av oppgavene som brukes i et matematikklasserom:

> "The key in teaching mathematical reasoning, as in teaching any other aspect of mathematical proficiency, are the *kinds of tasks* that learners engage in, the *ways in which they engage with these tasks*, and the kinds of *interactions around the tasks* among the learners and the teacher".

I mine observasjoner fant jeg følgende fire aspekter ved oppgavene som ble brukt i matematikk 1T -klasserommet til Astrid: Oppgavene som Astrid gir til elevene er *utforskende problemoppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde (LIST–oppgaver), oppgavene ble ofte gitt muntlig, oppgavene ble gitt en om gangen* og *oppgavene ble gitt i oppstart av timen.*

Det første aspektet jeg observerte var at Astrid ga elevene *utforskende problemoppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde.* Elevene fikk oppgaver før de hadde gjennomgått regler, definisjoner og eksempler. Dette medfører, ifølge Schoenfeld (1992) og Liljedahl (2021), at oppgavene er problemoppgaver for elevene, og ikke rutineoppgaver. Elevene fikk diskutere

og prøve seg fram, de ble bedt om å lete etter mønster og å generalisere. Oppgavene er derfor utforskende. Her er noen eksempler fra observasjonene for å belyse dette.
I den første økten jeg observerte skulle elevene jobbe med programmering i Python. Før timen informerte Astrid meg om at programmering er nytt for dem og at de har ikke gjort så mye ennå. Astrid starter timen med å informere elevene muntlig:

> Hun forteller at de skal jobbe i grupper uten pc på tavler (whiteboards). De skal lage et program (i Python) som skal generere et vilkårlig tall (random). Programmet skal be brukeren gjette et tall, og når tallet er skrevet inn skal programmet svare at tallet er for høyt, for lavt eller riktig. Elevene får oppgitt at de kan skrive korrekte kommandoer (i Python) eller skrive pseudokode.

Ved at Astrid gir elevene denne oppgaven som introduksjon til programmering i stedet for å først gi dem kommandoer for å kode, og i tillegg forteller dem at det er greit at de skriver i pseudokode, så er det en problemoppgave, ikke en rutineoppgave. De har ikke drillet inn en prosedyre for hvordan de skal løse oppgaven. En kan kanskje si at dette ikke er en typisk matematikkoppgave, men programmering er nå i læreplanen[15] i matematikk 1T så dette er noe elevene skal lære. Her gir Astrid elevene en sjanse til å diskutere og dele det de kan i små grupper, før de senere i timen sammen hjelper hverandre til å bygge opp et program som virker. Elevene har definert variabler tidligere, så alle kunne komme i gang med de enkleste stegene i oppgaven. Det er også mulig å utvide oppgaven, noe flere grupper forsøkte på. En gruppe ønsket å utvide programmet slik at det spør videre til en har rett svar. En annen gruppe ønsket å få programmet til å spørre bruker om han ville gjette igjen og si «Bye» hvis bruker svarte nei. Oppgaven kan derfor også klassifiseres som en LIST–oppgave.

Senere i samme økt, etter at klassen sammen hadde kommet fram til hva som burde være med i programmet deres, fikk elevene teste det ut på pc. Astrid har bedt elevene om at programmet skal velge et vilkårlig tall mellom 0 og 200. Elevene jobbet ivrig, noen fremdeles i grupper og andre alene. Det kom utrop i rommet: «Jeg fikk det til!». Det var mulig å ta pause midt i økten, men flere elever valgte å ikke ta pause, men heller skrive ferdig programmet sitt. Engasjement, som vi her ser i utrop fra elever, er ifølge Liljedahl (2021) et tegn på at elevene

[15] «Digitale ferdigheiter i matematikk T inneber å kunne bruke grafteiknar, rekneark, CAS, dynamisk geometriprogram og programmering til å utforske og løyse matematiske problem», (Kunnskapsdepartementet, 2019, s.4)

tenker. At de er så ivrige at de ikke ønsker å ta pause kan tyde på at de er i det Liljedahl (2021) kaller optimal opplevelse eller flyt (Csikszentmihályi, referert til i Liljedahl, 2021).

Astrid starter time 2 ved å spørre:

> Astrid: «Noen som har klart å få programmet til å funke?» - flere sier ja.
> Astrid: «Da kan dere se på følgende utfordringer: - hvor mange gjettinger trenger vi?»

Astrid gir dermed elevene en ny utforskningsoppgave. Elevene har ikke på forhånd fått en algoritme for å løse oppgaven og de kan bruke forskjellige strategier for å teste ut eller beregne hvor mange gjettinger de trenger. Brodie (2010) og Stein, Grover & Henningsen (1996) sier at for at oppgaver skal stille høyere kognitive krav til elever, må det finnes flere mulige måter å løse oppgavene på. Både programmeringsoppgaven og den videre oppgaven Astrid her gir elevene kan løses på flere måter.

I økt 4 deler Astrid et bilde av en graf av en rasjonell funksjon[16] og ber elevene prøve å beskrive det de ser. De har ennå ikke fått matematiske begrep for denne type grafer, slik som asymptote og grenseverdi, men de blir altså bedt: «Beskriv det dere ser til en som ikke ser grafen». En elev ser at det ikke er nullpunkt på grafen, en annen nevner symmetri og en tredje speiling. De relaterer dermed det nye de ser til kunnskap og begreper de har fra tidligere. En elev prøver å forklare fasongen på grafen med ordet «timeglass» og noen observerer at grafen er nesten parallell med x-aksen for store verdier av x. Igjen gir Astrid en oppgave som ikke er rutineoppgave for elevene, de må tenke og prøve å relatere det til tidligere kunnskap.

Også i økt 5 får elevene prøve seg på noe de ennå ikke kan. Astrid informerer dem:

> «Nå trenger dere GeoGebra. Vi skal se på potensfunksjoner. Dere trenger inntastingsfelt og grafikkfelt. Dere skal få *utforske* litt, finne ut hva som kjennetegner disse funksjonene. For funksjoner har vi x-verdier som vi forandrer, og så forandrer y-verdiene seg. Vi har sett mye på andregradsfunksjoner.»
> Hun skriver på tavla: «Potensfunksjoner, $f(x) = a \cdot x^b$», peker på a og b og sier: «dere kan se på hva disse gjør». På tavla skriver hun også

[16] Elevene får ikke oppgitt funksjonsuttrykket, de ser bare grafen til funksjonen. $\left(f(x) = \frac{1}{x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} a \\ \\ b \end{array}\right\} \text{positiv, negativ, desimaltall}$$

> Astrid viser i inntastingsfeltet i GeoGebra hvordan elevene kan skrive dette inn:
> f(x) = a * (x ^ b), får spørsmål «Lag glidere?»
> Astrid sier «Svar Ja», og viser hvordan gliderne virker.
> Astrid: «Prøv dere fram. Hva skjer med grafen hvis vi endrer a? Hva skjer med grafen hvis vi endrer b?»

Vi ser her at elevene får lov til å jobbe med potensfunksjoner før de har gjennomgått noe teori om denne type funksjoner. De får utforske og skal ved hjelp av GeoGebra prøve å finne ut hva som skjer med grafen når de endrer grunntallet og potensen i funksjonsuttrykket. Alle kan komme i gang med å tegne grafer for noen av potensfunksjonene ved hjelp av GeoGebra. Flere elever fant at grafen ikke eksisterte for alle verdier av b og begynte dermed å tenke på begrensninger for potensfunksjoner. Også dette kan derfor kalles en LIST-oppgave.

I økt 6 observerte jeg følgende i oppstarten av timen:

> Astrid venter på at alle setter seg ned, sier: «Så fint at alle var ute i god tid». Videre sier Astrid: «I går jobbet vi med momentan vekstfart. Da så vi at vi kunne finne denne ved å finne stigningstallet til tangenten til grafen i akkurat det punktet. I dag skal vi jobbe med tavler[17] og se litt videre på dette. Det dere tenker og forstår skal dere prøve å formidle på tavlene. Hovedfokuset i dag er på å forstå grafen.»
> Astrid deler inn i 7 tilfeldige grupper og fordeler dem på tavler rundt i rommet. Hun spør om alle gruppene har penn.
> Astrid: «Første oppgave er en graf dere har jobbet mye med, andregradsfunksjonen $f(x) = x^2$. Tegn to koordinatsystem».
> Hun viser på tavla bak seg to koordinatsystem under hverandre.
> Astrid: «Merk x- og y- aksene». Alle tegner to aksesystem på tavlene sine.
> Astrid: «Vi kan bruke x = -2, -1, 0, 1 og 2» Astrid skisserer x^2.
> Astrid: «Husker dere hva denne formen heter?»
> Noah: «Parabel»

[17] min forklaring: vertikale ikke-permanente tavler.

Astrid bekrefter og sier: «Nå kommer det som er nytt. Vi skal tegne stigningstallet i det nederste koordinatsystemet. Det kan være lurt å begynne med bunnpunktet.» Viser med hånden: «Her er tangenten flat. Hva er stigningstallet der?»
Vilde svarer «Null». Astrid tegner inn kryss i (0, 0) på det nederste koordinatsystemet.
Astrid: «Nå tegner dere inn for de andre punktene. Det er lov å bruke GeoGebra for å finne tangentene i punktene.»

Her ser vi at elevene tegner grafen til den deriverte uten at de har lært å derivere og uten å ha snakket om den deriverte. Senere i økta, etter at klassen har diskutert og blitt enige om hvordan denne grafen skal se ut, får elevene en ny oppgave.

Astrid: «Ny oppgave. Nå har vi en tredjegradsfunksjon». Hun viser fram $g(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$ med den tilhørende grafen på tavla.
Astrid: «Finn stigningstallet til tangenten for alle heltallsverdier av x fra $x = -2$ til $x = 4$. Finn i tillegg stigningstallene i ekstremalpunktene».

Elevene får her mulighet til å utforske grafen til en funksjon av høyere orden, og i det området Astrid ber dem finne stigningstall for, får de nok punkter til at gruppene ser at disse gir en andregradsfunksjon. Senere i timen kommer det også klart fram at flere av elevene har skjønt at den deriverte funksjonen vil ha én lavere grad enn originalfunksjonen. At Astrid gir elevene utforskningsoppgaver, gjør at alle kan komme i gang, samtidig som det er mulig å bygge videre på oppgaven. Wæge og Nosrati (2015) sier at oppgaver i matematikk hverken må være for vanskelige eller for lette. Elevene må oppleve å lykkes, men de må få utfordringer slik at det de jobber med ikke blir kjedelig. Dette stemmer overens med Liljedahl (2021) som påpeker viktigheten av å ha oppgaver på rett nivå slik at elevene opplever flyt.

I et par av øktene jeg observerte, ba Astrid elevene om å gjøre bestemte oppgaver fra læreboka de bruker. Dette skjedde når skolen var «i rødt» med hensyn på covid. Oppgavene hun hadde valgt for elevene ble også i disse tilfellene gitt før de hadde gjennomgått teori eller som en utvidelse av teori de hadde gått gjennom. Når øktene var på Teams, fikk elevene jobbe i grupper og diskutere hvordan de kunne løse dem. Liljedahl (2021, s.28) sier at omtrent alle oppgaver fra en lærebok kan omgjøres fra det han kaller en «mimicking task»[18] til en «thinking task», en oppgave der elevene må tenke. Han sier at dette kan gjøres ved å be

[18] Mimick kan oversettes med å herme eller etterlikne, og i denne sammenheng menes at elevene på forhånd er blitt vist (av lærer) hvordan oppgaven skal løses.

elevene gjøre noe som er en utvidelse av deres tidligere kunnskap. Hiebert og Grouws (2007, s.388) sier som nevnt at elever må få oppgaver som er i grensen av deres proksimale utviklingssone: innenfor rekkevidde, men med nok utfordringer til at elevene må streve og det er noe nytt for dem å finne ut. Astrid følger Liljedahl (2021) og Hiebert og Grouws (2007) sine anbefalinger også når hun velger oppgaver fra læreboka.

Typisk for de øktene jeg observerte i Astrid sitt klasserom er altså: elevene får jobbe med oppgaver av en type de ikke har løst tidligere, det vil si oppgaver som er problemoppgaver som definert av Schoenfeld (1992) og Liljedahl (2016, 2021), problemene har ofte flere måter å løse dem på, noe som tilfredsstiller Brodie (2010) og Stein et al. (1996) sine krav til høyere kognitive oppgaver. Oppgavene har ofte lav inngangsterskel, elevene kan starte der de er, men oppgavene har også stor takhøyde, og er i grensen av deres proksimale utviklingssone så det er noe nytt å finne for dem (Vygotsky, referert til i Goos, 2004; Hiebert & Grouws, 2007). Dette samsvarer med det Wæge og Nosrati (2015) sier om at oppgavene ikke må være for vanskelige eller for lette, og med Liljedahl (2021) som sier at oppgavene må være på rett nivå slik at elevene opplever flyt. Astrid følger anbefalingene til Schoenfeld (1992), Liljedahl (2016, 2021), Brodie (2010), Stein et al. (1996), Hiebert og Grouws (2007) og Wæge og Nosrati (2015) når hun velger utforskende problemoppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde.

Det andre aspektet jeg observerte i forbindelse med oppgavene var hvordan Astrid ga oppgavene til elevene: *oppgavene ble ofte gitt muntlig.* I utdragene jeg allerede har vist fra observasjonene som omhandler oppgaver, ble alle oppgavene gitt muntlig fra Astrid. Det vil si: hun sier hva de skal gjøre, men dersom de trenger et funksjonsuttrykk, en graf eller matematisk notasjon, så viser hun denne til dem. Detter stemmer med teori jeg har presentert fra Liljedahl (2021): Han sier at essensen av oppgaven skal gis muntlig, mens størrelser, mål, geometriske størrelse, data, funksjonsuttrykk som trenges for å løse oppgaven skrives på tavla mens læreren snakker. Også i timene på Teams ble oppgavene som regel gitt muntlig. Det så for meg ut som om dette var noe elevene var vante til: de hørte etter hva de skulle gjøre, kom med spørsmål om det var uklarhet og kom raskt i gang etter at Astrid hadde gitt dem oppgaven. Elevene begynner å diskutere i gruppene sine med en gang i stedet for å lese og forsøke å dekode en skriftlig oppgave. Det at Astrid gir oppgavene muntlig er i tråd med Liljedahls (2021) anbefalinger.

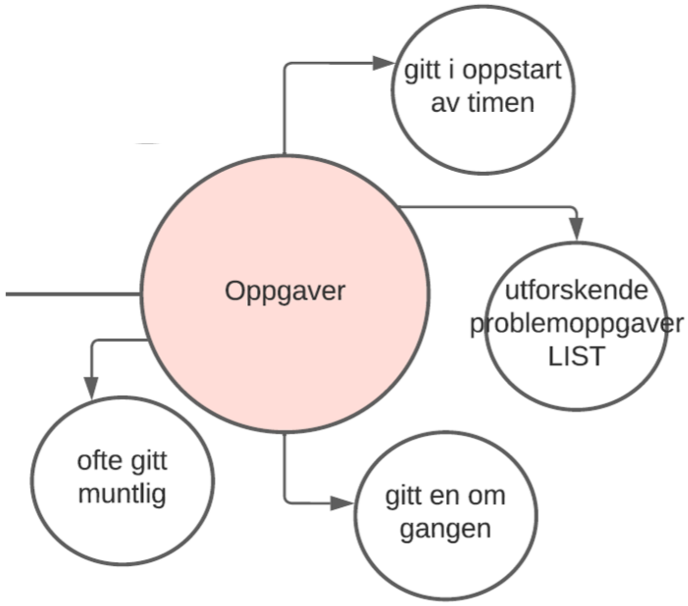
Det tredje aspektet jeg observerte i forbindelse med oppgaver i Astrid sitt matematikk 1T-klasserom var at *oppgavene ble gitt i oppstart av timen.* I alle timene i klasserommet var elevene i gang med oppgaver innen 3 til 5 minutter. Dette var også tilfellet i de fleste øktene på Teams. Dette er i kontrast til såkalte tradisjonelle klasserom der lærer gjennomgår ny teori, kanskje viser et par eksempler og så lar elevene prøve tilsvarende oppgaver selv. Liljedahl (2021) sier at når elevene får oppgaver i oppstarten av timen så går de i gang med energi, entusiasme og en større grad av selvstendighet. Dette observerte jeg også i Astrid sine timer: elevene startet raskt og diskuterte ivrig med hverandre. Liljedahl (2021) sier også at det er mindre fare for at lærer underviser oppgaven og endrer den fra en tenkeoppgave til en rutineoppgave dersom den gis i oppstart av timen. Her er altså Astrid bevisst på at hun skal la elevene tenke selv. At Astrid starter timene med oppgaver, er dermed i tråd med Liljedahls (2021) anbefalinger.

Et fjerde aspekt med oppgavene er at *oppgavene ble gitt en om gangen*. Astrid delte ikke ut et arbeidsark med mange oppgaver som hun ba dem fullføre. Hun ga dem en oppgave som alle elevene jobbet med i gruppene. Når elevene så ut som om de hadde løst denne fikk de enten en utvidelse av oppgaven eller en ny, litt vanskeligere oppgave. Et eksempel på dette så vi i økt 1 der de elevene som hadde fått programmet til å virke fikk en utvidelse av oppgaven der de skulle finne hvor mange gjettinger vi maksimalt må gjøre for å finne det tilfeldige tallet. Også i økt 6 så vi at elevene, etter at de hadde funnet kurven for den deriverte for en andregradsfunksjon, fikk en utvidelse i form av en tredjegradsfunksjon. I flere andre økter observerte jeg også at Astrid hadde utvidelser og nye oppgaver klar når elevene var klar for nye utfordringer. Muijs og Reynolds (2002) anbefaler å ikke bruke arbeidsark da de mener at disse vil føre til at elevene jobber individuelt. Liljedahl (2021) sier at arbeidsark med mange oppgaver enten kan virke overveldende på elever, eller de kan signalisere at her finnes «en slutt», og de starter å konkurrere for å bli først ferdig. Liljedahl (2021) anbefaler utvidelser av oppgaver, eller nye oppgaver som er litt mer utfordrende, for å holde elevene i flyt-sonen. At Astrid gir oppgavene en om gangen stemmer med anbefalingene fra Liljedahl (2021) og Muijs og Reynolds (2002).

Oppsummering oppgaver

I Astrid sitt matematikk 1T-klasserom er oppgavene utforskende problemoppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde (LIST-oppgaver), som ofte blir gitt i oppstart av timene, før teori om temaet er gjennomgått, og som bygger på det elevene har lært tidligere. Astrid følger dermed anbefalingene til Schoenfeld (1992), Liljedahl (2016, 2021), Brodie (2010), Stein et al. (1996), Hiebert og Grouws (2007) og Wæge og Nosrati (2015) med hensyn på valg av oppgaver. Oppgavene blir gitt muntlig og i oppstart av timene. Dette er i samsvar med

Liljedahl (2021) sine anbefalinger. Astrid gir oppgavene en om gangen og følger dermed anbefalingene til Liljedahl (2021) og Muijs og Reynolds (2002). Aspektene ved oppgaver vises i figur 12.



Figur 12. Oppsummering Oppgaver.

4.3 Verktøy

Et tredje aspekt Cobb (2000) mener er viktig for en klasseromsanalyse er *verktøyene* som brukes i klasserommet. Cobb (2000) bruker «computer-based tools the students used» for aspektet *verktøy*. Jeg velger å bruke begrepet verktøy litt videre, og vil ikke begrense meg til kun digitale verktøy. Elevene i matematikk 1T-klasserommet jeg observerte brukte pc i flere av timene, både når de skulle programmere og når de skulle utforske funksjoner og grafer. De brukte JupyterNotebook (Anaconda3) for å programmere og GeoGebra 5.0 for å utforske grafer og funksjoner, samt til å finne stigningstall for tangenter til kurver. Men verktøyet som ble brukt for å få til kommunikasjon og samarbeid i klasserommet, var *de vertikale ikke-permanente tavlene.* De digitale hjelpemidlene (JupyterNotebook og GeoGebra) ble brukt også når elevene jobbet ved tavlene, men det er de vertikale ikke-permanente tavlene som gir elevene mulighet til å dele tankegangen sin og dermed blir det viktigste verktøyet for å få til samarbeid og kommunikasjon.

4.3.1 Vertikale ikke-permanente tavler

Som beskrevet i kapittel 4.1.1 så ble elevene delt inn i grupper i alle øktene jeg observerte. Den mest vanlige arbeidsformen var da at de samarbeidet om oppgaver de fikk av Astrid ved en vertikal ikke-permanent tavle. Typisk fikk elevene da jobbe i 15 – 20 minutter før det ble vandring med diskusjon og felles oppsummering. I klasserommet er det allerede veggmonterte whiteboards på to av veggene, i tillegg ble det brukt hvite plastark / tavler («whiteboard fix film») i størrelse A1 som ble festet til vegg bak i rommet og i vinduene på den siste veggen. Gruppene (á 3 personer) fikk hver sin tavle og hver sin tusj til å notere på tavlene med. En tusj per gruppe fører ifølge Liljedahl (2016) til at elevene raskt kommer i gang med å diskutere da de ønsker å få noe på tavla si. Jeg spurte Astrid etter en økt med bruk av slike vertikale ikke-permanente tavler om hun bevisst ga en tusj per gruppe. Hun svarte ja, men at hun ikke tviholdt på tusjene om en gruppe kom og ville ha en ekstra. Tavlene ble også brukt når elevene utforsket ved hjelp av GeoGebra. Et eksempel på dette var i økt 6 der elevene brukte GeoGebra til å finne tangenter og deretter tegnet funksjonen for den deriverte på tavlene.

Jeg observerte tre interessante aspekter i forbindelse med bruk av de ikke-permanente tavlene i Astrid sitt matematikk 1T klasserom: Elevene *står oppreist* og er dermed mer *aktive* enn det vi forbinder med tradisjonelle klasserom, *arbeidet er synlig for medelever* og det er *lett for lærer å se hva elevene får til og ikke får til*.

Det første aspektet, at elevene *står oppreist* når de jobber med oppgavene sine, kommer som en følge av at tavlene henger på veggen. At elevene får stå oppreist gir et avbrekk fra en skolehverdag hvor elevene oftest sitter ved pultene sine. Pultene ble skjøvet vekk fra veggene og inn i rommet slik at det ble plass til elevene rundt tavlene. Elevene blir mer mobile og *aktive.* Det ville vært lettere å se om noen «melder seg ut» enn om de sitter ved sin egen pult, så en kan tenke seg at elevene dermed blir «tvunget» til å delta. I timene jeg observerte var alle elevene aktive med gruppa si, og det så absolutt ikke ut til at de hadde lyst til å trekke seg unna. Liljedahl (2021, s.104) sier at det å sitte ved pulten gir en sterk assosiasjon til «direkte instruksjon», passiv læring og ikke-tenkende oppførsel. Dersom vi vil ha elevene til å tenke må vi få dem opp fra pulten. Rent fysisk vil det å stå kreve mer bruk av kjernemuskler enn å sitte, og det fører også til en økt blodgjennomstrømning. I Liljedahl (2021) sine undersøkelser fant han at elevene ble mer aktive, tenkte mer og ble mer positive til arbeidsoppgavene når de fikk stå. At pultene i Astrid sitt klasserom ble skjøvet inn i rommet passer også med Liljedahl (2016) sin tanke om «defronting the room». Tavlene som vanligvis brukes av lærere ble brukt av elever og lærer Astrid sirkulerte rundt i rommet. Klasserommet er dermed annerledes enn i en tradisjonell forelesningssituasjon. Elevene sitter ikke og venter på svarene fra en autoritet, de leter etter svarene selv.

I tillegg til at elevene er mer fysisk aktive når de jobber ved tavlene, så er de også mer verbalt aktive enn om de hadde jobbet med oppgaver ved pultene sine. De er satt sammen i grupper, så det er meningen at de skal diskutere og snakke om oppgavene de jobber med på tavlene. Og det gjør de! Elevene i dette matematikk 1T-klasserommet diskuterte, og samarbeidet i alle timene jeg observerte. Elevene var dessuten veldig engasjerte og utholdende når de jobbet ved de vertikale tavlene, de jobbet aktivt sammen, både innad i gruppene og på tvers av gruppene. Det foregikk mye tenkning og deling av idéer i Astrid sitt klasserom. Jeg observerte flere ganger at elevene fortsatte å jobbe selv om de fikk mulighet til å gå ut av klasserommet for å ta pause.

Det andre aspektet jeg observerte ved bruk av de vertikale ikke-permanente tavlene var at elevenes *arbeid er synlig for medelever*. At tavlene er på veggene rundt i hele rommet gjør at arbeidet er lett tilgjengelig for alle i rommet. At elevene står oppreist gjør det også enklere for dem å se hva som er skrevet på de andre tavlene i rommet. Det er tydelig at elevene får idéer og blir inspirert av de andre gruppenes arbeid på tavlene, dette beskrev jeg i kapitlet om grupper. For eksempel så hørte jeg ofte utbrudd som «Å, ja!» når elever kikket rundt i rommet når deres egen gruppe ikke helt visste hvordan de skulle gå videre. Også skrivemåter ble delt. Et eksempel på dette er at en gruppe i økt 6 lurte på hvordan de kunne skrive «den deriverte» av en funksjon. I løpet av timen var denne notasjonen spredd til alle tavlene i klasserommet. Bruk av de vertikale tavlene hjelper dermed elevene å lære av hverandre. Denne synligheten er noe vi vanligvis ikke ser i et klasserom der elevene sitter ved individuelle pulter og arbeider i sine notatbøker.

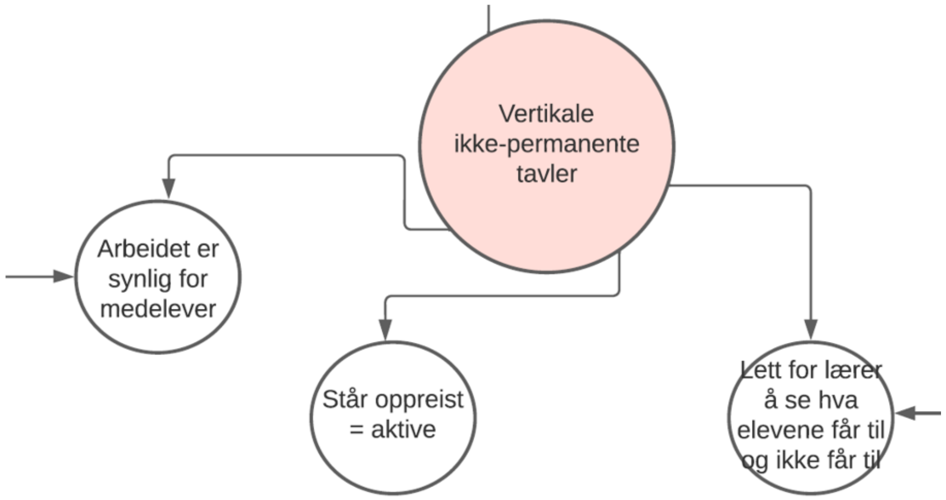
Det tredje aspektet ved tavlebruken er at det er *lett for lærer å se hva elevene får til og ikke får til.* Det at Astrid går rundt i rommet og observerer mens elevene jobber fører til at det er lett for henne å se hva elevene kan og hva de strever med. Når elever sitter ved egne pulter og jobber i notatbok er det ikke lett å få med seg alle elevenes arbeid. . Klasserommene er små når pultene er spredd utover i rommet, og det er vanskelig å navigere seg mellom alle pultene. I tillegg sitter elevene ofte med hodet bøyd over boken og det vil kunne føles som om en trenger seg på om en prøver å se hva de skriver. At arbeidet er på tavlene og pultene er skjøvet inn midt i rommet gjør at det er enkelt å se alle gruppene sitt arbeid. Astrid vet dermed hvor langt gruppene er kommet, når de står fast og kanskje trenger et hint for å komme videre, eller om en gruppe trenger å få oppgaven utvidet. Hun vet også når det er på tide å ta en felles oppsummering. Astrid vet også hvor listen skal legges når hun skal få elevene med for å diskutere og konsolidere etter gruppearbeidet, da hun hele tiden har hatt tilgang til elevenes arbeid på tavlene.

Det at elevenes arbeid er tilgjengelig på de ikke-permanente tavlene muliggjør også konsolideringen som beskrevet under strukturen *vandring*. Elevene, som blir med Astrid rundt til de utvalgte gruppenes tavler, får god oversikt over det som er gjort. Og for elevene i gruppa som «eier» tavla er det enklere å forklare hva de har tenkt og hvilke strategier de har brukt da arbeidet deres er synlig.

Liljedahl (2016) sin forskning viser at vertikale ikke-permanente tavler er bedre enn liggende (horisontale) tavler selv om de horisontale tavlene også er ikke-permanente, bedre enn papir, både stående og liggende, og bedre enn elevenes notatbøker både med hensyn på hvor ivrig elevene jobber med oppgavene, hvor mye de diskuterer og hvor lenge elevene fortsetter å jobbe med oppgavene. Han sier at elevene er raskere i gang og samhandler mer med de andre gruppene når de jobber på vertikale ikke-permanente tavler.

Oppsummering vertikale ikke-permanente tavler

Aspektene ved vertikale ikke-permanente tavler er fremstilt i figur 13.



Figur 13. Oppsummering av verktøyet Vertikale ikke-permanente tavler.

Elevene i Astrid sitt klasserom brukte de vertikale ikke-permanente tavlene i alle timene jeg observerte dem i klasserommet ved gult nivå[19]. Jeg fikk inntrykk av at dette hadde de gjort

[19] I perioden observasjonene ble utført var skolen enten på gult eller på rødt nivå.

ofte, da de var raskt i gang og det ble gode diskusjoner ved tavlene. Elevene står oppreist i stedet for å sitte ved hver sin pult, og det var mulig for dem å se hva alle gruppene jobbet med på sine tavler. Dette gjør at elevene lærer av hverandre og vi får en kunnskapsspredning på tvers av gruppene. At elevene jobber på tavlene, gjør også arbeidet synlig for lærer. Astrid får dermed med seg hva elevene får til, og hva de trenger mer hjelp til. Astrid følger Liljedahl (2021) sine anbefalinger om å bruke vertikale ikke-permanente tavler for å få til et tenkende klasserom.

4.4 Klasseromsdiskursen

Cobbs (2000) siste aspekt for analyse av et klasserom er klasseromsdiskursen, det vil si kommunikasjonen og samtalene som skjer i klasserommet. Cobb (2000) sier at dette er det viktigste aspektet i et klasseromsmiljø. Utgangspunktet for denne oppgaven er å se på hvordan en kan få til et lærende klasserom med utforskning og gode diskusjoner, det vil si et klasserom der elevene kommuniserer om matematikk. De aspektene jeg har beskrevet til nå, klasseromsstrukturen, oppgavene, og verktøyene, er alle virkemidler for å få til utforskning og gode samtaler og diskusjoner i klasserommet. Franke et al. (2007) sier at for at vi skal forstå hvordan en skal undervise og lære matematikk, er det tre kjennetegn i en klasseromspraksis som er sentrale. Disse er å skape matematisk klasseromsdiskurs, å utvikle klasseromsnormer som skaper mulighet for å lære matematikk, og å bygge relasjoner som fremmer matematisk læring. Franke et al. (2007) nevner altså klasseromsdiskurs og normer som forskjellige grep. Cobb (2000) mener derimot at hvilke sosiale og sosiomatematiske normer som finnes i et klasserom er en viktig del av klasseromsdiskursen. Jeg tenker at relasjoner og samhandling, som hos Franke et al. (2007) er et eget punkt, også er en del av normene i klasserommet. Astrids holdninger og forventninger til elevene, og elevenes samhandling innenfor de etablerte klasseromsnormene, er en del av dette. I dette delkapitlet velger jeg derfor å se på samtalegrep brukt av Astrid og på normer som jeg observerte i Astrids matematikk 1T-klasserom. Dette gir til sammen klasseromsdiskursen som foregår i klasserommet.

4.4.1 Samtalegrep

Astrid bruker forskjellige *samtalegrep* i klasserommet. Dette var ikke noe jeg opprinnelig så etter, men etter å ha lest teori om samtalegrep kjente jeg igjen mye av dette fra klasserommet og gikk tilbake til rådataene og analyserte igjen. Jeg fant åtte samtalegrep som ble brukt av Astrid. Jeg har valgt å kalle grepene *setter pris på elevenes spørsmål og bidrag*, *ber om forklaringer*, *bygger videre på elevers arbeid*, *spør «vil dere endre noe nå?»*, *gjentar: «så du* *sier at…», ventetid, snu og snakk* og *avslutter ikke elevenes tenkning*. Disse vil bli presentert i dette delkapitlet.

Det første samtalegrepet Astrid bruker, det hun bruker oftest, er at hun viser at hun *setter pris på elevenes spørsmål og bidrag*. Jeg velger å kalle dette et samtalegrep fordi hun verbalt viser at hun setter pris på elevenes spørsmål og bidrag. Generelt observerte jeg at Astrid var raus med positive tilbakemeldinger til elevene. Hun viser en positiv holdning til, respekt for og tro på at elevene kan få det til. Jeg observerte flere ganger at Astrid sa «Bra spørsmål» når elevene lurte på noe hun viser på tavla. I økt 5 jobber klassen sammen med en oppgave i oppstart av timen. De skal finne a, b og c for funksjonsuttrykket $f(x) = \frac{ax+b}{cx+2}$ ved å bruke asymptoter og punkt oppgitt. De har sammen funnet a og c, og går videre for å finne b.

> Astrid: «Siste oppgave: «Les av et punkt på grafen som du bruker til å bestemme b.» Her står vi fritt til å bruke et hvilket som helst punkt. Et tips her: siden b står i telleren er det lurt å finne nullpunktet, for da er telleren null.» Astrid leser av nullpunktet (-2, 0) og skriver på tavla $f(x) = \frac{ax+b}{cx+2}$ og $0 = \frac{0}{cx+2}$
>
> Astrid: «Har dere noe info vi kan bruke nå?»
>
> Nora sier: «$ax + b = 0$»
>
> Astrid: «Ja, og vi har funnet at a = 3, og vet at x = -2 i nullpunktet.». Skriver på tavla:
>
> $ax + b = 0$, $3 \cdot (-2) + b = 0$, $-6 + b = 0$ og til slutt $\underline{\underline{b = 6}}$
>
> Astrid: «Det vil si at vi har funnet $f(x) = \frac{3x+6}{-x+2}$»
>
> Emma: «Kan vi bruke et annet punkt?»
>
> Astrid viser et eksempel med et annet punkt og sier «*Dere spør gode spørsmål*!»

I eksempelet over ser vi at Astrid viser at elevenes spørsmål er viktige. Dette vil nødvendigvis føre til at det er lettere for dem å spørre igjen senere. Samtidig ser det ut til at Astrid signaliserer til de andre elevene at det er greit å spørre dersom en lurer på noe. I tillegg viser Astrid at elevenes forslag betyr noe. Hun bruker et annet punkt slik en elev, Emma, foreslår og viser at hun får samme funksjonsuttrykk. Å poengtere at elevene spør gode spørsmål ligner på Michaels et al. (2010, s.27) sitt lærergrep «marking» der de foreslår å si noe som «det er et viktig poeng» slik at de andre elevene også skal blir oppmerksomme på poenget det snakkes om.

Senere samme økt utforsker elevene grafene til potensfunksjoner på formen $f(x) = a \cdot x^b$. En elev, William, forteller Astrid om hva som skjer med grafen når b er partall og oddetall.

> Astrid: «*Det var spennende*. Har du noen forklaring på det?»
> William: «Usikker, kan det være ...» William forklarer hva han tenker.
> Astrid: «*Gode observasjoner*! Har du noen skjermklipp som viser dette?»
> William: «Nei, men skal ta det nå.»

Dialogen over viser igjen at Astrid vektlegger elevenes svar og gir dem positive tilbakemeldinger. I økt 7, etter at elevene hadde jobbet i grupper på tavlene, begynner Astrid den felles oppsummeringen med å si:

> «Først må jeg skryte litt. Forrige gang, når dere fikk nullpunkter til en andregradsfunksjon, så var det lang vei for dere å finne grafen og uttrykket. *Nå hadde dere stålkontroll på faktorisert form og utvidet form*.»

Også her ser vi at Astrid gir elevene positive tilbakemeldinger. Jeg observerte dessuten at Astrid alltid sa «Takk for bidraget!» når elever delte og forklarte under vandringen. At Astrid viser at hun setter pris på elevenes spørsmål og bidrag er i tråd med Kazemi og Hintz (2019) sitt 4. prinsipp: å anerkjenne alle elevenes bidrag. Kazemi og Hintz (2019, s.26) sier: «Vi tror at måten lærere og elever prater med hverandre på i klasserommet, er avgjørende for hva elevene lærer i matematikk, og hvordan de ser på seg selv som matematiske tenkere.» Resnick et al. (2018, s.23) mener også at lærere må verdsette alle bidrag i en diskusjon. De sier at det er viktig å passe på at atmosfæren i klasserommet er konstruktiv og ikke konkurransepreget: «Det handler ikke om hvem som har rett.» O'Connor et al. (2017) sier at det er viktig å få til et klassemiljø for aktiv deltakelse av alle elever. Liljedahl (2016) sier at en må evaluere det en ønsker å oppnå, og at dersom vi ønsker et tenkende klasserom, så må engasjement verdsettes. At Astrid viser at hun setter pris på elevenes spørsmål og bidrag, kan være til hjelp for å skape et positivt arbeidsmiljø der elevene ønsker å delta aktivt.

Det andre samtalegrepet, som også er mye brukt hos Astrid, er at hun *ber om forklaringer*. Dette grepet bruker hun i alle strukturene klassen jobbet i, enten det var jobbing i grupper, under vandring i klasserommet eller under helklassediskusjoner der elevene sitter ved pultene sine eller hjemme foran pc-skjermen. I dialogen med William presentert over ser vi i den første linja at Astrid ber om forklaring. I økt 3 (på Teams) jobber elevene med rette linjer. De har fått diskutert i grupper og er samlet hele klassen for oppsummering.

> Astrid: «Jeg legger inn en tabell i møtechaten. Bestem skjæringspunkt med y-aksen. Tenk ut en setning eller to: *hva er begrunnelsen for* svaret dere gir.»

Selv om det kun er en y-verdi hun er ute etter så signaliserer hun at elevene må kunne forklare hvorfor dette blir svaret. Fra økt 5 kommer følgende utsagn: Astrid: «Det var spennende. Har du noen forklaring på det?» Senere samme økt ber hun en annen elev forklare: «Vil du forklare med egne ord hva du ser?» Eleven forklarer grafen og Astrid presser for mer informasjon: «Har du noe annet navn på denne?» og «Kunne du ha beskrevet den på en annen måte?» Under viser jeg en litt lenger ordveksling fra økt 6:

> Astrid: «Gruppe 2, *kan dere forklare* deres graf?»
> Sofie: «Vi fant alle stigningstallene i GeoGebra.» De har fått tegnet en parabel.
> Astrid: «Gruppe 4 sin graf ser også slik ut. Alle ned og se på gruppe 4. *Kan dere forklare hva dere har tenkt*?»
> Olivia: «Ser at det ble en parabel og andregradsfunksjon.»
> Astrid: «Fikk dere diskutert *hvorfor* det blir en andregradsfunksjon?».
> Ella, fra samme gruppe: «Fordi parabel er andregrads».
> Astrid nikker og åpner for kommentarer fra andre: «Andre grunner?»
> Lea, fra gruppe 1: «Fordi det er to nullpunkter».
> Astrid: «Ja, det kan være en indikasjon på andregradsfunksjon.»
> Maya, fra en annen gruppe: «Symmetri».
> Astrid viser på grafen at ja, det er symmetri, denne gang er den ikke om y-aksen, spesifiserer at symmetrien er om bunnpunktet. Astrid henvender seg til gruppe 3: «Dere hadde en teori?»
> Elias, fra gruppe 3: «Begge gangen har den deriverte vært en grad lavere».
> Astrid: «*Kan du spesifisere*?»
> Elias: «I den første oppgaven x^2 ble det lineær, nå var det tredjegradsfunksjon og stigningstallene ble andregrads.»
> Astrid: «Så det ser ut som om vi har et system her!»

I utdraget over ser vi at Astrid ber om forklaring på hva elevene har tenkt når de har jobbet med grafene sine og i sitt siste spørsmål til Elias ber hun ham spesifisere, eller si med andre ord, det han prøvde å forklare om den deriverte.

I øktene jeg har observert spør Astrid «Hva har dere tenkt?», «Hvordan kom dere fram til at dere skulle …?» «Hvorfor er det slik?», «Hvordan visste du det?», «Kan du være sikker på at dette er rett uttrykk?» og «Jeg ser at du har løst det. Kan du forklare hvordan du har gjort det?». Alle disse eksemplene handler om at Astrid ber elevene om å forklare eller utdype hvorfor de sier det de sier.

Michaels et al. (2010) sier at dersom noen sier noe som er ment som en påstand eller en konklusjon, så må personen levere bevis for påstanden. De sier at påstandene må begrunnes med fakta på en logisk, sammenhengende og strukturert måte. Michaels et al. (2010) sier at vi lærere kan få til dette ved blant annet å spørre «Hvorfor tror du det er slik at …?» etter at en elev har kommet med en påstand. Drageset (2016) sier at det enkle spørsmålet «Hvorfor?», i for eksempel «Hvorfor har du gjort det slik?» eller «Hvorfor er dette matematisk korrekt?», er viktig for å øve opp elevenes evne til å argumentere matematisk. Resnick et al. (2018, s.19) foreslår «Why do you think that?» for å få elever til å utdype egen tenkning. Resnick et al. (2018), Michaels et al. (2010) og Drageset (2016) sine forslag, og eksemplene fra Astrid sitt klasserom, ligner på det Chapin et al. (2013) kaller for «Press for reasoning». De foreslår spørsmål som «Hvorfor tror du det?», «Hvordan fikk du det svaret?», «Hvorfor trodde du den strategien ville virke?» og «Kan du forklare det for meg steg for steg?». Det vil si spørsmålene er tilsvarende de Astrid spør. Chapin et al. (2013) sier at dette grepet tilfredsstiller deres tredje steg: Å hjelpe elevene til å gå dypere i sine begrunnelser. Også O'Connor et al. (2015) og Kazemi og Hintz (2019) foreslår å be om forklaringer for å oppmuntre elevene til å formidle viktige deler av forklaringene sine. Dette samsvarer med de eksemplene jeg viser til fra Astrids undervisning.

Astrid ber elevene dele forklaringene sine også når hun ser at elever har brukt ulike strategier. Et eksempel er fra økt 2.

> Astrid: «Vi har i alle fall to forskjellige metoder. *Kan du, Matheo, forklare din metode*?»
>
> Matheo forklarer.
>
> Astrid: «Kristine, stemmer det at du løste det på en annen måte?»
>
> Kristine: «Ja»
>
> Astrid: «*Kan du forklare hva du gjorde*?»
>
> Kristine forklarer.

Det foregår en strategideling der Astrid ber elevene forklare. Elevene blir dermed gjort oppmerksom på og får engasjere seg i andres resonnement og begrunnelser. Dette tilsvarer Chapin et al. (2013) sitt andre og fjerde steg. Kazemi og Hintz (2019) sier at ved å spørre elevene «Hvordan er din måte å tenke på annerledes enn …» oppmuntrer vi lærere elevene til å formidle viktige deler av forklaringen sin (deres 2. prinsipp). Yackel og Cobb (1996) sier at ved å be om en annen løsning så initierer lærer en endring i elevene, der de skifter fra å løse problemet til å sammenlikne løsninger. Dermed blir elevenes aktivitet utvidet til mer enn å bare høre etter: elevene vil prøve å forstå andres forklaringer og også forsøke å identifisere likheter og ulikheter blant de forskjellige strategiene. Yackel og Cobb (1996, s.464) sier at slike refleksjonsaktiviteter har et stort potensial for å øke elevenes matematiske læring.

Det tredje samtalegrepet Astrid bruker er det som Wæge (2015) kaller *Snu og snakk*. Astrid lot elevene samarbeide 2 og 2 («jobb med sidemannen») i økt 2 og økt 5. Men også gruppearbeid med 3 i gruppen er en form for «snu og snakk». Det betyr at dette samtalegrepet brukte Astrid i alle de 7 øktene jeg observerte, også de øktene som måtte gjennomføres på Teams. Som nevnt under strukturen grupper så valgte elevene å jobbe sammen også når de fikk tilbud om å jobbe alene. O'Connor et al. (2015) foreslår snu og snakk for å få til academically productive talk. Chapin et al. (2013) bruker begrepene *Partner snu og snakk* eller *Tenk og del i par* for dette samtalegrepet. De sier at samtalegrepet hjelper elevene med å avklare, få satt ord på og dele tankene sine, det vil si det første steget for god kommunikasjon i klasserommet. Kazemi og Hintz (2019) sier at gruppesamtaler kan gi elevene energi hvis vi lærer dem å lytte, respondere og engasjere seg i hverandres idéer. Chapin et al. (2013) har funnet at elever er mer villige til å dele idéene sine åpent etter å ha fått «konferert» med sidemannen. Ved at elevene får diskutere med få medelever først, kan Astrid bidra til at hver enkelt elev forhåpentligvis føler seg trygg nok til å kunne bidra i felles diskusjoner i klasserommet. Også dette samtalegrepet kan dermed tilrettelegge for å få et klassemiljø for aktiv deltakelse av alle elever, noe O'Connor et al. (2017) mener er viktig for læring.

Det fjerde samtalegrepet Astrid bruker ofte er at hun hjelper elevene slik at de *bygger videre på elevers arbeid*. Det er, som tidligere nevnt, elevene som forklarer når klassen konsoliderer i vandringen. I denne forbindelse ser vi at Astrid ber elevene om å bygge videre på sine medelevers arbeid. I utdraget fra økt 6 (side 100) ser vi at Astrid ber andre grupper om å utdype eller komme med nye forklaringer. Et eksempel jeg viste til under vandring, er fra den første økta jeg var til stede i klasserommet. Elevene jobbet i grupper på de vertikale tavlene for å lage et program i Python. For konsolideringen samlet Astrid alle elevene først ved den gruppa som var kommet kortest. De fikk forklare hva de hadde gjort og tenkt. Deretter fikk Astrid alle til å følge med til en annen tavle. Her spør hun «tavleeierne»:

> «Finner dere det forrige gruppe gjorde – og *hva mer har dere gjort*?» Elevene får forklare. Senere i vandringen står elevene ved gruppe 5 sin tavle og Astrid sier: «Det er varianter av dette hos de andre gruppene, men *hva har dere som mangler hos de andre?*»
>
> Etter at klassen har vært innom alle gruppene spør Astrid: «*Er det noe dere må endre*

nå etter å ha hørt på de andre?» Elevene går tilbake til gruppene sine og diskuterer. Endringer skjer på tavlene.

Vi ser her at Astrid påpeker at enkelte grupper har fått med seg noe de andre gruppene ikke har, og ber elevene fortelle om dette. De får tilføye deres tenkning til det som er vist tidligere. Typisk for dette samtalegrepet er altså at elevene får bygge videre på det de andre gruppene har gjort. Den felles konsolideringen som skjer ved at elevene blir tatt med fra tavle til tavle viser elevene at det de har gjort, det vil si deres arbeid, er viktig. Astrid viser at deres bidrag betyr noe for utviklingen av det matematiske problemet det jobbes med. Elevene må forklare hva de selv har gjort, men siden de også blir spurt om de har med noe som de andre gruppene ikke har, så må de også følge med og forholde seg til medelevenes forklaringer og arbeid. Astrid sitt grep *bygger videre på elevers arbeid*, som hun får til ved å blant annet spørre elevene om de har noe som ikke andre har, tilsvarer Chapin et al. (2013) sitt talk move *add-on* og Wæge (2015) sitt samtaletrekk *tilføye*. Chapin et al. (2013) foreslår «Hvem kan si noe mer?» og «Hvem har noe å tilføye?» som setningsstartere for å få elever til å bygge videre på det som allerede er presentert. Wæge (2015) foreslår «Har noen noe de vil føye til?» eller «Hvem vil føye til noe til denne diskusjonen?». Alle disse eksemplene tilsvarer Astrid sitt: «Hva mer har dere gjort?». Chapin et al. (2013) mener at å det å spørre «Who can add on?» vil hjelpe elevene til å engasjere seg i andres resonnement og begrunnelser, deres fjerde steg for å få til produktive samtaler i matematikklasserommet. De sier videre at dette grepet også er fint når en elev har delt bare et steg i en lengre og mer komplisert forklaring. De mener at hele klassen blir oppmuntret til å jobbe sammen for å lage en sammenhengende og komplett forklaring. På denne måten så oppmuntres det til fokus på resonnement, at elevene skal bidra med sine idéer og at de skal jobbe med andres idéer, alt på samme tid. Michaels et al. (2010) sier at når en lærer spør «Hvem vil bygge videre på det hun akkurat sa?» så hjelper hun elevene å koble deres bidrag til den eksisterende diskusjonen. De sier at en effekt av dette er at elevene som hører at deres bidrag blir bygd videre på, får et økt engasjement i diskusjonen. Staples (2007) sier at lærer, ved å spørre om noen kan bygge videre på en annen elevs arbeid, posisjonerer den gjeldende idéen for fortsatt arbeid, og bidrar dermed også til å opprettholde kontinuitet over tid. Hun sier videre at å bygge på elevenes arbeid gir direkte støtte for videre samskapende undersøkelser. At Astrid hjelper elevene til å bygge på hverandres arbeid er også i overenstemmelse med Kazemi og Hintz (2019) sitt tredje prinsipp: å orientere elevene mot hverandre og mot de matematiske begrepene.

Et femte samtalegrep jeg observerte hos Astrid er at hun *spør «vil dere endre noe nå?»*. I siste setning fra ordvekslingen fra økt 1 (forrige side) ser vi at Astrid spør elevene om det er noe de vil endre i deres eget arbeid etter at de har hørt medelevenes forklaringer. Hun har altså ved å bruke grepet *bygge videre på medelevers arbeid* hjulpet elevene til å se sammenhenger og forskjeller mellom gruppenes løsninger og vist dem at til sammen kan de få til å lage programmet som var utgangspunktet for oppgaven. Nå spør hun elevene om disse nye forslagene kan føre til forbedringer i elevenes egne løsninger. I økt 7 viser Astrid igjen at elevenes arbeid er viktig, og får dem til å være oppmerksomme på og bygge på andres arbeid.

> Astrid sier ut i rommet: «Det er *mye forskjellig* rundt på tavlene nå. Jeg anbefaler dere å gå rundt å se på det de andre har gjort.» Elevene kikker på de andre tavlene, går tilbake til sine egne og tilfører elementer de finner hos andre som de ikke selv hadde tatt med.

Her kan vi si at elevene både oppfordres til å *bygge på sine medelevers arbeid* og til eventuelt *endre* dersom de ser noe hos medelever som de burde tenkt på. Hos Wæge (2015) er «Endre» samtaletrekk 7, og hun sier det kan høres ut for eksempel slik «Har noen av dere forandret tenkingen deres?» Wæge (2015) sier at ved å spørre elevene om de vil *endre* noe så tillater lærer at elevene endrer tenkingen etter at de har fått ny innsikt. Dette vil også hjelpe elevene til å rette fokus på prosessen og ikke bare på produktet. Kazemi og Hintz (2014, 2019) sitt «Revise your thinking»-grep tenkes å tas i bruk i «utforske feil og endre»-samtaler (Kazemi & Hintz, 2019, s.134). Astrid bruker samtalegrepet annerledes, da elevene hennes ikke nødvendigvis har gjort feil. Når Astrid, som vist i de to eksemplene, spør om elevene vil endre noe, så er det mer for at elevene skal komme videre eller tilføye noe til arbeidet sitt.

Det sjette samtalegrepet som er mye brukt hos Astrid er *gjentar: «så du sier at …».* I dette grepet *gjentar* eller *omformulerer* Astrid det en elev har sagt. Et eksempel fra økt 4, på Teams:

> Astrid: «Kristine sier det er en form for symmetri. Husker du symmetrien vi hadde i 2.gradsfunksjoner?»
> Kristine forklarer og sier at denne symmetrien er annerledes.
> Astrid: «*Forstår jeg deg rett*» viser med musepeker linja $y = -x$.
> Kristine: «Ja».
> Astrid: «*Mathias nevner speiling* – var det litt av det samme du og tenkte på?»
> Mathias: «Ja».

I linje 3 ser vi at Astrid spør «Forstår jeg deg rett» og gjentar det hun tror Kristine forsøkte å forklare. Hun får både bekreftet at det var det eleven mente og hun får repetert et viktig poeng med denne kurven for de andre elevene. Ved å dra inn Mathias «speiling» får hun vise at det er flere begreper som kan brukes.

I økt 2 jobber klassen med funksjonsuttrykket $f(x) = 30x + 10$. Astrid spør hva 10-tallet forteller, og jeg observerte følgende ordveksling:

> Astrid: «Yes, 3 hender opp – kan du starte?» henvist til Nora.
> Nora: «Vet at det er 10 over 0»
> Astrid: «*Hva mener du med over 0*?»
> Nora: «x-verdien er null når grafen går gjennom 10 på y-aksen».
> Astrid bekrefter og sier at y-verdien er funksjonsverdien.

Vi ser at Astrid gjentar en liten del av det en elev svarer og ber om utdyping. Eleven må dermed tenke og bruke et mer korrekt matematisk språk. I samme økt skjer også følgende:

> Astrid: «Spørsmålet vi hoppet over var likningen M(x) = 400».
> Tobias får forklare hvordan han løser likningen og sier at «Du får x = 20 som er antall minutter det tar å fylle badekaret».
> Astrid: «Det du forteller nå er at du har forstått koblingen mellom funksjonsuttrykket og den praktiske oppgaven.» Astrid gjentar Tobias sin løsningsmetode «*Du sa at …*» og viser likningen løst på tavla.

Her ser vi at Astrid gir positiv tilbakemelding til eleven som har forklart framgangsmåten sin, og ved å gjenta og si «Du sa at …» gir hun æren til eleven samtidig som hun gir de andre elevene en ekstra mulighet til å få med seg elevens idé og resonnement. O'Connor et al. (2015) bruker gjentakelse som et av samtalegrepene for å få til academically productive talk. Å gjenta noe elevene har sagt, og få bekreftet om det var dette de mente eller ei, tilsvarer «revoicing» hos Chapin et al. (2013). De foreslår å si noe som: «Sier du at du tror at … Er det korrekt?» eller «Det høres ut som om du er enig med Beth om at … Er det det du sier?» og de mener det hjelper elevene til å avklare, sette ord på og dele tankene sine. Michaels et al. (2010) foreslår at lærer gjentar det elever sier for å oppsummere viktige matematiske poeng. De sier videre at ved å reformulere elevers påstander, hjelper læreren elevene til å fokusere på tenkningen som skjer i rommet. Wæge (2015) sier at samtaletrekket «Gjenta» gjør elevenes idéer tilgjengelige for lærer og elever. Hun sier videre at det gir elevene tid til å tenke, slik at de lettere kan følge med på det matematiske innholdet. Ved å gjenta det elevene har sagt viser

Astrid at hun lytter til elevene. Å lytte til elevene signaliserer ifølge Kazemi og Hintz (2019) at lærer har respekt for dem og deres tenkning.

Det syvende samtalegrepet jeg observerte i matematikktimene var at elevene fikk *ventetid*. Et eksempel på dette er fra økt 4 (på Teams). Astrid viser grafen til en rasjonal funksjon. Dette er elevenes første møte med grafer av denne typen.

> Astrid: «Der dere er, se på figuren og *tenk over* hvilke begrep dere kan bruke for å forklare grafen til noen som ikke ser den. Skriv gjerne ned stikkord». Elevene får tenke noen minutter.

Et annet eksempel er fra økt 7: her ber Astrid elevene tenke selv noen minutter før de deler idéene sine i grupper.

> Astrid: «*Prøv individuelt først*». Det er litt snakking i rommet.
> Astrid gjentar: «Prøv individuelt først, dere får diskutere etterpå.» Det blir ro, elevene prøver selv. Etter noen minutter fikk de gå i tilfeldige grupper og jobbe på vertikale tavler.

Michaels et al. (2010) sier at et av de viktigste grep en lærer kan gjøre for å støtte logisk og strukturert tenkning er å la elevene få *ventetid*. De sier at det tar tid å tenke gjennom noe og dersom det forventes at du skal «tenke høyt» så vil det kunne gjøre tenkningen langsommere. Michaels et al. (2010) mener at selv om stillhet i ti sekunder kan føles som uendelig lenge, så er dette minimum den tiden en elev trenger for å formulere et svar som trenger en god begrunnelse og argumentasjon. Chapin et al. (2013) foreslår *ventetid* for å hjelpe elevene med å avklare, sette ord på og dele tankene sine. De sier at dette er viktig for at elevene skal få tid til å tenke før de presenterer tankene sine for hele klassen. Staples (2007, s.21) sier at «å gi tid viser både en forpliktelse og en forventning» til elevene. Samtidig viser lærer at hun skjønner at å tenke gjennom og artikulere idéer, tar tid. Astrid sine elever får mulighet til å tenke før det forventes at de skal dele.

Det åttende samtalegrepet som Astrid bruker er at hun *avslutter ikke elevenes tenkning*. Dette kan observeres ved at hun for eksempel ikke svarer på det Liljedahl (2016, 2021) kaller «proximity questions» eller «stop-thinking questions». Elevene spør iblant «Er dette rett?» Det første eksempelet på dette så jeg allerede i den første økten jeg observerte, der en elev spør Astrid som er i nærheten av gruppa: «Om det skal være sånn «if»-setning?» Astrid svarer: «Det kan være», som hverken helt bekrefter eller helt avviser, og implisitt ber eleven tenke litt til. Jeg observerte flere ganger at Astrid på slike spørsmål kunne svare «Jeg svarer ikke på det nå, men vi kommer tilbake til det.» Da kommer hun alltid tilbake til det i oppsummering / felles konsolidering, helst ved å la andre elever komme med svar. Ved å huske elevenes spørsmål viser hun igjen at hun respekterer deres tanker og idéer.

Under vises et eksempel fra økt 7 der Astrid heller ikke svarer ja eller nei på et «proximity»-spørsmål / «stop-thinking»-spørsmål:

> Oliver: «Sant symmetrilinjen er alltid gjennom x-punktet?»
> Astrid: «*Hva mener du med x-punktet*?»
> Oliver: «Nei, jeg mener bunnpunkt!»

Her kunne Astrid lett ha avsluttet tenkningen for Oliver ved å si hvor symmetrilinjen for en andregradsfunksjon er, men ved å be Oliver om å spesifisere hva han mener må han tenke videre og han kommer til slutt fram til et mer presist utsagn for det han mener.

I økt 5 fant følgende dialog sted:

> Mia: «Jeg har funnet at $4^{2.5}$ treffer akkurat i 32 og så lurer jeg på hvorfor?»
> Astrid viser på tavla: «$4^{2.5}$ kan jeg skrive som $4^{\frac{5}{2}} = 4^{\frac{1}{2}\cdot 5} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^5$. Husker du hva det betyr?» peker på $4^{\frac{1}{2}}$.
> Mia svarer $\sqrt{4}$ og at det da står $(\sqrt{4})^5 = 2^5$
> Astrid: «Og hva er det?»
> Mia trekker på det.
> Astrid: «Skyt fra hofta»
> Mia flirer: «Det må jo være 32, da.»

Også her kunne Astrid enkelt ha avsluttet elevens tenkning ved å si at $4^{2.5}$ er det samme som 32, men hun hjelper eleven, Mia, til å tenke litt lenger.

I økt 6 kom det også et spørsmål fra en elev:

> Isak, som jobbet i gruppe 7: «Hvordan vet jeg at det foran x-en er stigningstallet, og ikke dette tallet bak her?» Han snakker om en tangent hvor likningen står oppgitt i GeoGebra som $y = -4x - 4$
> Astrid: «Jeg skjønner hvorfor du spør, det står minus 4 begge plasser her. Du ser det når du ser på den neste.» Gruppa har flere tangenter i GeoGebra.

Astrid anerkjenner at det kan skape forvirring når det står to like tall i uttrykket for den rette linja. Hun viser videre at hun har tro på at Isak vil skjønne hva som er stigningstallet for ei rett linje når han ser på de andre tangentene gruppa har funnet. For å være sikker på at dette er forstått, tar hun opp igjen hva stigningstallet til rette linjer er og hvordan en kan finne dem når klassen konsoliderer senere i timen.

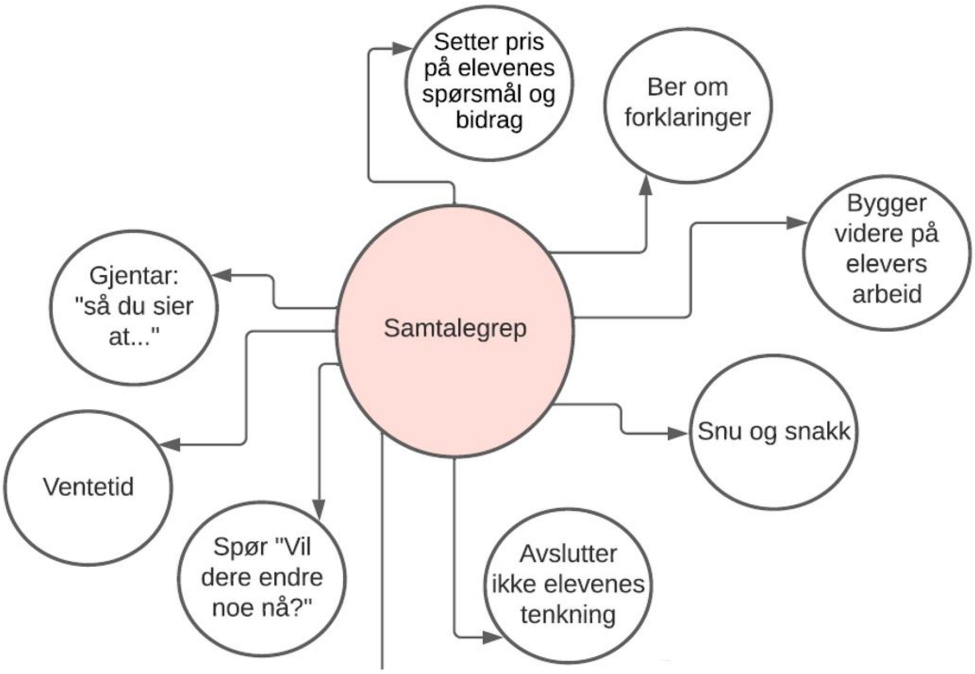
Astrid avslutter altså ikke elevenes tenkning ved å gi dem svaret ja eller nei. Men hun gir gjerne elevene et nytt spørsmål eller et hint som kan hjelpe dem videre. At Astrid ikke avslutter elevenes tenkning viser at hun har tro på at elevene kan få dette til. Silver and Smith (1996, referert til hos Franke et al. 2007, s. 233) fant i sin forskning at for at lærere skal skape mulighet for rike samtaler så er det (blant annet) viktig at lærer avstår fra å gå inn og gi en løsningsstrategi for elevene. Astrid *forenkler* heller ikke oppgavene for elevene slik at de ender opp med å løse en enklere oppgave enn de i utgangspunktet var satt til. Drageset (2016) forklarer forenkling som at lærer gir ny informasjon som endrer og reduserer vanskeligheten av oppgaven. Dette kan, ifølge Drageset (2016), føre til at elevene løser alle de enkle oppgavene, ofte utregningene, mens lærer kontrollerer prosessen og velger strategi. Liljedahl (2021) sier at det er to typer hint som kan gis til elever når de jobber med oppgaver: hint som minsker utfordringen og hint som øker evnen. Han sier at den første typen er enklest å gi: lærer gir kanskje et delsvar på oppgaven elevene jobber med eller leder med mot en enklere oppgave (tilsvarende Dragesets (2016) forenkling). Liljedahl (2021) sier at den andre type hint, som øker evnen, tar lenger tid og krever at lærer enten minner elevene om strategier eller gir elevene strategier. Han sier videre at den store forskjellen på de to type hint er at det å minke utfordringen bare er nyttig i nuet mens et hint som øker evnen fortsetter å være nyttig også når elever jobber med videre oppgaver. At Astrid ikke forenkler oppgavene, er nyttig for elevene på lang sikt.

Oppsummering samtalegrep

Astrid sin matematikk 1T-klasse snakket matematikk i alle øktene jeg observerte. De åtte samtalegrepene Astrid bruker bidrar til at elevenes tanker og idéer blir synliggjort, slik at matematikklassen deler og diskuterer matematikk. De sju første samtalegrepene likner på grep beskrevet av O'Connor et al. (2015), Chapin et al. (2013), Kazemi og Hintz (2019) eller Wæge (2015). Det åttende samtalegrepet Astrid bruker, *avslutter ikke elevenes tenkning*, nevnes ikke av disse. Dette grepet kan sammenlignes med Liljedahl (2016, 2021) sine tanker om å ikke svare på «proximity»- eller «stop-thinking»-spørsmål og Drageset (2016) sitt grep *forenkle* – men i forståelsen at Astrid ikke *forenkler*. De åtte samtalegrepene er vist i figur 14.

Samtalegrepet *setter pris på elevenes spørsmål og bidrag*, og holdningen det viser, vises i alle aspekter av Astrids undervisning, også i de andre samtalegrepene hun bruker. Det vises for eksempel når hun gjentar det elevene sier og når hun ber gruppene forklare og bygge på hverandres tanker og idéer.

Ved at Astrid bruker disse samtalegrepene følger hun anbefalingene til O'Connor et al. (2015), Chapin et al. (2013), Kazemi og Hintz (2019), Wæge (2015), Liljedahl (2016, 2021) og Drageset (2016).



Figur 14. Oppsummering Samtalegrep.

4.4.2 Normer

I Astrid sitt klasserom, som i alle andre klasserom, eksisterer det normer som lærer og elever forholder oss til. Jeg fant, i observasjonene av klasserommet, seks aspekter i forbindelse med normer. Disse har jeg kalt: *Elevene er aktive*, *det er greit å snakke og dele*, *elevene forklarer*, *det er lov gjøre feil*, *tillit og respekt*, og *alles bidrag er viktig*.

Det første aspektet, *elevene er aktive*, er et viktig aspekt i et utforskende klasserom. Som nevnt tidligere så forbindes tradisjonelle klasserom med at elevene sitter i ro ved faste plasser og er passive tilhørere. Dette er ikke tilfelle i det matematikk 1T-klasserommet jeg observerte: i Astrid sitt klasserom er elevene aktive. De står oppreist ved tavlene, de diskuterer innad i gruppene, de beveger seg til andre grupper og diskuterer med dem, og de er med Astrid på vandring når de skal konsolidere. Også i økten der elevene ble bedt om å sitte ved pultene sine på grunn av rød situasjon med hensyn på covid, så var det diskusjon mellom elevene, på kryss og tvers av klasserommet. Ved rødt nivå, og undervisning på Teams, var det selvfølgelig ikke mulig å spasere rundt i klasserommet, men elevene var aktive i forhold til å diskutere med hverandre i grupper. Som nevnt i delkapittel 4.3.1, om vertikale ikke-permanente tavler, mener Liljedahl (2021) at å sitte ved en pult gir passiv læring og ikke-tenkende oppførsel. Han mener også at rent fysisk vil det å være aktiv gi bedre tenkning da hjernen får bedre blodtilstrømning. Brodie (2010) sier at lærere må ta styringen for å utvikle klasseromsnormer som gir dypt engasjerte elever. At elevene i Astrid sitt klasserom er aktive, både fysisk og i sin kommunikasjon om matematikk, kan tolkes som at de er dypt engasjerte. Astrid har, sammen med sine elever, klart å etablere en norm der *elevene er aktive* i klasserommet, som anbefalt av Liljedahl (2021) og Brodie (2010). Det er viktig å ta med seg at det er matematikk de jobber med når de er aktive, så en kan si at dette er en sosiomatematisk norm fordi den sier noe om hvordan de arbeider med matematikk i dette klasserommet.

Med det andre aspektet, *det er greit å snakke og dele*, så mener jeg at det ser ut som om elevene synes det er greit å snakke og dele tenkningen sin om matematikk. Dette aspektet er tydelig i alle undervisningsøktene jeg observerte. Elevene jobber sammen i grupper, der de diskuterer og deler tenkningen sin, ofte ved de vertikale tavlene. Denne diskusjonen og delingen skjer også på tvers av gruppene. I vandringene, for å konsolidere og oppsummere etter at de hadde jobbet med problemoppgaver, blir elevene bedt av Astrid om å fortelle og forklare, altså om å dele arbeidet sitt. Alle som ble bedt om å dele, gjorde det, så i dette klasserommet er det å dele idéene sine blitt en norm. Elevene snakker sammen, og de snakker høyt til lærer og resten av klassen mens de deler strategiene og tankene sine i vandringene. At elevene synes det er greit å snakke og dele tenkningen sin om matematikk er ikke en norm som automatisk er til stede i en matematikkklasse. At det er greit å snakke og dele i undervisningssammenheng kan tenkes på som en sosial norm. I Astrid sitt klasserom ble det forventet at elevene skulle forklare matematiske begrep og strategier, det vil si at det de snakker om og deler er matematikk. Dette er dermed en sosiomatematisk norm. Elevene, sammen med lærer Astrid, er kommet fram til regler og forventninger om hva som skal deles. Elevene gir ikke bare svar, de sier noe om hvordan de kom fram til dette svaret og hvorfor det må være slik. Hiebert og Grouws (2007) sier at det må være etablert normer for samarbeid for at grupper skal kunne arbeide produktivt. Alrø og Skovsmose (2004) sier at dialog alltid innebærer en risiko for elevene, og for at de skal være villige til å dele kunnskapen sin med lærer og medelever så må det være etablert normer slik at elevene føler seg trygge i klasserommet. At elevene viser at *det er greit å snakke og dele*, viser at Astrid, sammen med elevene, har etablert normene som anbefales av Hiebert og Grouws (2007) og Alrø og Skovsmose (2004).

Det tredje aspektet, som jeg nå allerede er inne på i og med at elevene deler, er at *elevene forklarer*. Dette aspektet er annerledes enn at det er greit å snakke og dele, da det i dette aspektet av klasseromsnormene ser ut til å ligge en forventning om at alle skal forklare sin tenkning. Elevene forklarer ikke bare når Astrid ber dem om å forklare, men innad i gruppene og i klasserommet ellers. De forklarer strategier til hverandre i grupper og i helklasse under vandringen. Det jeg også fant i observasjonene var at elevene også ber hverandre om forklaringer i stedet for svar. Et eksempel er fra økt 2 der klassen jobber med sammenheng mellom forskjellige representasjonsformer, som tabell, graf og funksjon. Astrid har skrevet en tabell på tavla, og elevene er bedt om å tegne grafen og finne funksjonsuttrykket. Grafen blir en parabel, og tidligere har elevene funnet lineære uttrykk og de har så vidt vært innom nullpunktfaktorisering for andregradsuttrykk.

> Elias spør Oskar: «Hvordan løste du?»
> Oskar svarer: «Først gjettet jeg bare. Så at det må være x^2 på grunn av 2.grads. Så tenkte jeg «Hva må jeg fjerne?» Etterpå brukte jeg sånn «nullpunkt» og så satte jeg prøve på og så stemte det.»
> Elias forklarer hva han tenkte: «Aller først skrev jeg inn punkt i regneark …» og de deler videre.

I stedet for å gå rett til funksjonsuttrykket: «Hva fikk du?», så spør elevene hverandre om metoder og hvordan de tenkte på oppgaven. Dette eksempelet er ikke enestående, flere andre i rommet diskuterte hva de hadde tenkt og hva de hadde gjort.

At det i et klasserom er forventinger om at elevene skal forklare tenkningen sin er en sosial norm, men her er det i tillegg etablert en sosiomatematisk norm: elevene vet hva som forventes når de skal si noe om et matematikkproblem og at et tallsvar ikke nødvendigvis er det en er ute etter. Det ser ut til å være etablert en enighet om hva som er gode forklaringer. En forklaring i dette klasserommet er ikke bare hva elevene har gjort, men også hvorfor de tenker at det er slik det skal gjøres. Det er også etablert en norm om hva som er en annen forklaring, det vil si en annen strategi. Dette ser vi blant annet i økt 1 når Astrid spør om noen har gjort noe annet, eller «Hva mer har dere gjort» og «Hva har dere som mangler hos de andre?» Disse normene er kanskje ikke eksplisitt uttalt, men opparbeidet over tid ved at elevene får mulighet til å høre hverandres forklaringer. Dette, at elevene forklarer, er en norm som i mange klasserom har vært ikke-eksisterende. Spesielt i det som Wæge og Nosrati (2015) omtaler som lærebokstyrt undervisningsform, der elever gjør oppgaver i en bok, sjekker svaret bakerst i boka og ber lærer om hjelp dersom svaret de er kommet fram til ikke stemmer med boka sitt fasitsvar. At elevene forklarer og deler strategier med hverandre tyder på at elevene i dette klasserommet ikke har holdningen Schoenfeld (1992) advarte mot: at det finnes bare en korrekt måte å løse et hvilket som helst matematisk problem på. Elevene ser heller ikke ut til å ha de andre oppfatningene Schoenfeld (1992) mener følger av tradisjonell klasseromsundervisning: at «vanlige» elever ikke kan forvente å forstå matematikk og at matematikk er noe en utfører alene. At elevene forklarer for hverandre viser tvert imot at de har en tro på at de forstår matematikken og at den kan løses sammen. At det er etablert en norm for at *elevene forklarer*, viser at Astrid følger anbefalingene til Liljedahl (2021), Alrø og Skovsmose (2004), Wæge og Nosrati (2015), og Schoenfeld (1992) om å omgå normer for tradisjonelle klasserom.

Det fjerde aspektet jeg la merke til er at det er *lov å gjøre feil*. Elevene ser ikke ut til å være flaue når de oppdager at de har kommet fram til noe annet enn elever i en annen gruppe, tvert imot så diskuterer de da med hverandre for å finne ut hvor feilen ligger. Et eksempel på dette viste jeg til under kunnskapsspredning på tvers av gruppene, der en gruppe oppdager at de har skrevet noe annet for den deriverte enn gruppa ved siden av. Gruppen diskuterte og konstaterte rolig at de hadde feil, gikk tilbake til tavla si, rettet opp og jobbet videre.

Astrid viser også elevene at det er helt greit å gjøre feil. I flere av vandringene har enkelte grupper feil utregninger eller for eksempel feil fortegn på stigningstallet i tabell på tavla si, og i vandringen blir klassen sammen enige om hvordan det burde være og det blir bare påpekt fra Astrid at «Da må deres bare være en regnefeil». Også når elever sier noe som ikke er helt korrekt, så korrigerer ikke Astrid, men spør kanskje «Hva mente du når du sa…» slik at eleven omformulerer og selv kommer fram til et mer korrekt utsagn. Hvis det er misoppfatninger som går igjen i mange grupper, så blir også disse tatt tak i i vandringene. Feilene og misoppfatningene omhandler matematikk, så også her har vi en sosiomatematisk norm. Ved at klassen har utviklet en norm om at det er lov å gjøre feil så betyr dette at de sammen har fått til en konstruktiv atmosfære. Resnick et al. (2018) sier at elever ofte lærer mye ved grundig utforsking av misforståelser, feil og ufullstendige forklaringer. De sier at i Accountable Talk classrooms så teller alles idéer. Resnick et al. (2018) sier at i diskusjoner kan og vil det forekomme feil, uenigheter og tanker som er uttrykt i elevenes uformelle språk. Alt dette er bidrag til læringsprosessen. Også Bransford et al. (1999), Hogden og Wiliam (2006) og Muijs og Reynolds (2002) mener at misoppfatninger og feil er viktige for å lære. Dette er også i tråd med Piaget (referert til i von Glasersfeld, 1995) sin idé om at kognitiv endring og læring skjer når noe en observerer eller opplever ikke passer inn i de allerede eksisterende kunnskapsstrukturene. Astrid følger anbefalingene til Resnick et al. (2018), Bransford et al. (1999), Hogden og Wiliam (2006), Muijs og Reynolds (2002) og Piaget (referert til i von Glasersfeld, 1995) når hun, sammen med elevene, etablerer normer for at det *er lov å gjøre feil*.

Resnick et al. (2018) sier videre at vi lærere må sette pris på feil. De sier at å tenke sammen betyr at noen elever vil dele misforståelser og uferdige idéer, og disse må utforskes for å komme fram til læringsmålene for timene. Resnick et al. (2018, s.21) sier at feil og misforståelser kan være viktige grunnsteiner å bygge den kollektive forståelsen på. Staples (2007) sier at det at en lærer ikke prøver å skjule at elever gjør eller sier noe feil, ved for eksempel å overse det, viser at lærer prioriterer å få frem elevenes tenkning. Hun sier at denne måten å undervise på må støttes av normer for tillit og gjensidig respekt.

Dette bringer meg til det femte aspektet som gjelder normer i Astrid sitt matematikk 1T-klasserom: *tillit og respekt*. Tillit og respekt er gjennomgående i Astrid sitt klasserom: hun viser elevene tillit ved å gi dem utforskende oppgaver som hele tiden er litt utenfor komfortsonen, hun viser at hun har tro på at de kan få til matematikken. Hun respekterer elevene og arbeidet deres. Et eksempel på at Astrid respekterer arbeidet elevene gjør ser vi i økt 1 der en av gruppene har skrevet på tavla som prosjektoren vises på. De har gått videre til å skrive inn programmet de har laget på tavla inn i JupyterNotebook for å teste ut om det virker, de er altså nå ved pc-ene. Astrid ønsker å bruke prosjektoren for å dele en mulig løsning, men spør først elevene om det er greit at hun fjerner det de har på tavla. Elevene sier at det går fint, så Astrid fjerner det og skrur på prosjektor. Også det at hun i all vandring ber elever forklare og dele viser respekt og tro på elevene. At Astrid lar elevene evaluere undervisningsøktene, som jeg viste et eksempel på under «Avslutning av timene i tradisjonell helklasse», viser også at hun tar elevenes læring på alvor og at hun respekterer deres meninger.

Det ser også ut til å være tillit og gjensidig respekt mellom elevene. Ikke en eneste gang hørte jeg noen si noe nedsettende eller korrigerende til en medelev. Tvert imot: de hjelper hverandre og forklarer for hverandre. Til og med i de situasjonene når en elev «ikke har hørt etter» og derfor ikke vet hva de skal gjøre, så forteller bare medelever stille og rolig hva de skal gjøre og hva oppgaven de jobber med går ut på. De viser hverandre tillit med hensyn på matematikk. De spør hverandre før de spør lærer. Et eksempel er fra en økt når elevene har funnet stigningstall flere plasser på en kurve og en elev sier «Den gruppa har pluss der, hvorfor har vi minus?» innad i gruppen. De jobber sammen videre, sjekker hva de har gjort og tenkt, og kommer sammen fram til noe de er enige om. De har altså tro på hverandre. Dette kan også sees i vandringene hvor elevene bygger på hverandres arbeid. Staples (2007) sier at tillit og respekt er noe som utvikles over tid ved at lærer behandler elevenes idéer med respekt og ved at elevene lykkes ved å dele i klasserommet.

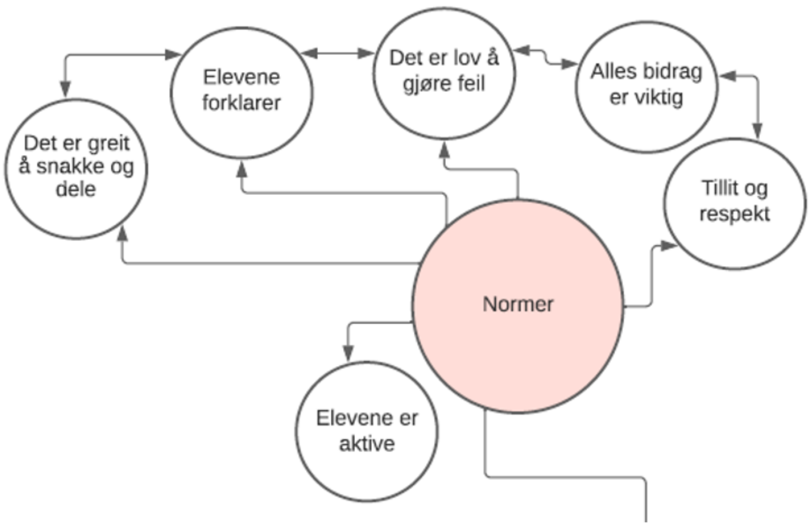
Under respekt og tillit vil jeg også nevne at det at Astrid *forventer* noe av elevene, det at hun tror de kan få det til, også smitter over på elevene! De setter ivrig i gang med oppgaver. De skryter av hverandre når noen kommer med gode idéer! De spør «Hvordan fant du ut det?» når noen deler noe de har funnet ut. Elevene er entusiastiske og fornøyde når de finner mønster. Dette kommer til syne i timene ved utrop («Jeg fikk det til!», «Det var jo en åpenbaring!»), ved smil og latter og ved at elevene ønsker å dele med hverandre («Jeg gjorde det slik…») Alle grep som brukes i matematikk 1T-klasserommet viser at Astrid har tro på elevene, tro på at de kan: det være seg å la elevene jobbe sammen i grupper, eller ved «snu og snakk». Det ville ikke være noe poeng i å sette elevene i gang på egenhånd hvis du ikke har tro på at de kan få det til. At Astrid har tro på at alle elevene kan lære matematikk stemmer med Muijs og Reynolds (2002) beskrivelse av det de kaller «connectionist teachers».

Det sjette aspektet i forbindelse med normer i Astrid sitt klasserom er at *alles bidrag er viktig*. Jeg har tidligere i oppgaven vist at Astrid viser at hun verdsetter elevenes bidrag ved å gi dem positive tilbakemeldinger, og derfor betegnet dette som et samtalegrep. Astrid viser også at alle bidrag er viktige, selv om bidragene ikke er helt korrekte. Også dette er et poeng for Resnick et al. (2018): de sier at ved å behandle feil og misoppfatninger som bidrag i diskusjonene, så viser lærer at alle bidrag er verdifulle. Også blant elevene ser det ut til å være en holdning at alles bidrag er viktig. De avbryter ikke hverandre, tvert imot, de spør hverandre og lytter til hverandre. Dette er en sosial norm. Men det at elevene spør hverandre om strategier i matematikken og diskuterer ulike framgangsmåter, er en sosiomatematisk norm. Det viktigste i Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011) sine fem praksiser er at lærer velger ut elever som får presentere og at det videre arbeidet bygger på elevenes bidrag. Dette viser en holdning om at elevenes bidrag er viktig, at en har tillitt til at elevene kan, og at elevenes tanker og idéer skal behandles med respekt. Ved at det er etablert normer for *tillit og* *respekt* og at *alles bidrag er viktig* følger Astrid anbefalingene til Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011).

Oppsummering normer

De seks aspektene ved normer i Astrid sitt klasserom viser at Astrid, sammen med elevene, har klart å etablere et klasserom der aktive og engasjerte elever snakker, deler, forklarer, gjør feil og viser hverandre tillitt og respekt ved å lytte til hverandre. Hun følger anbefalingene til Liljedahl (2021), Brodie (2010), Alrø og Skovsmose (2004), Wæge og Nosrati (2015), Schoenfeld (1992), Hiebert og Grouws (2007), Bransford et al. (1999), Hogden og Wiliam (2006), Staples (2007), Muijs og Reynolds (2002), Resnick et al. (2018), Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011) om å omgå normer for tradisjonelle klasserom, og etablere normer for utforskning.

Klasseromsmiljøet er slik Muijs og Reynolds (2002) mener et effektivt klasserom skal være: varmt og støttende med høye forventninger til elevene og entusiasme fra lærer. De sosiale og sosiomatematiske normene som er etablert, er en del av det Cobb (2000) kaller klassens mikrokultur. Aspektene ved normer er presentert i figur 15.



Figur 15. Oppsummering av Normer.

4.4.3 Oppsummering klasseromsdiskurs

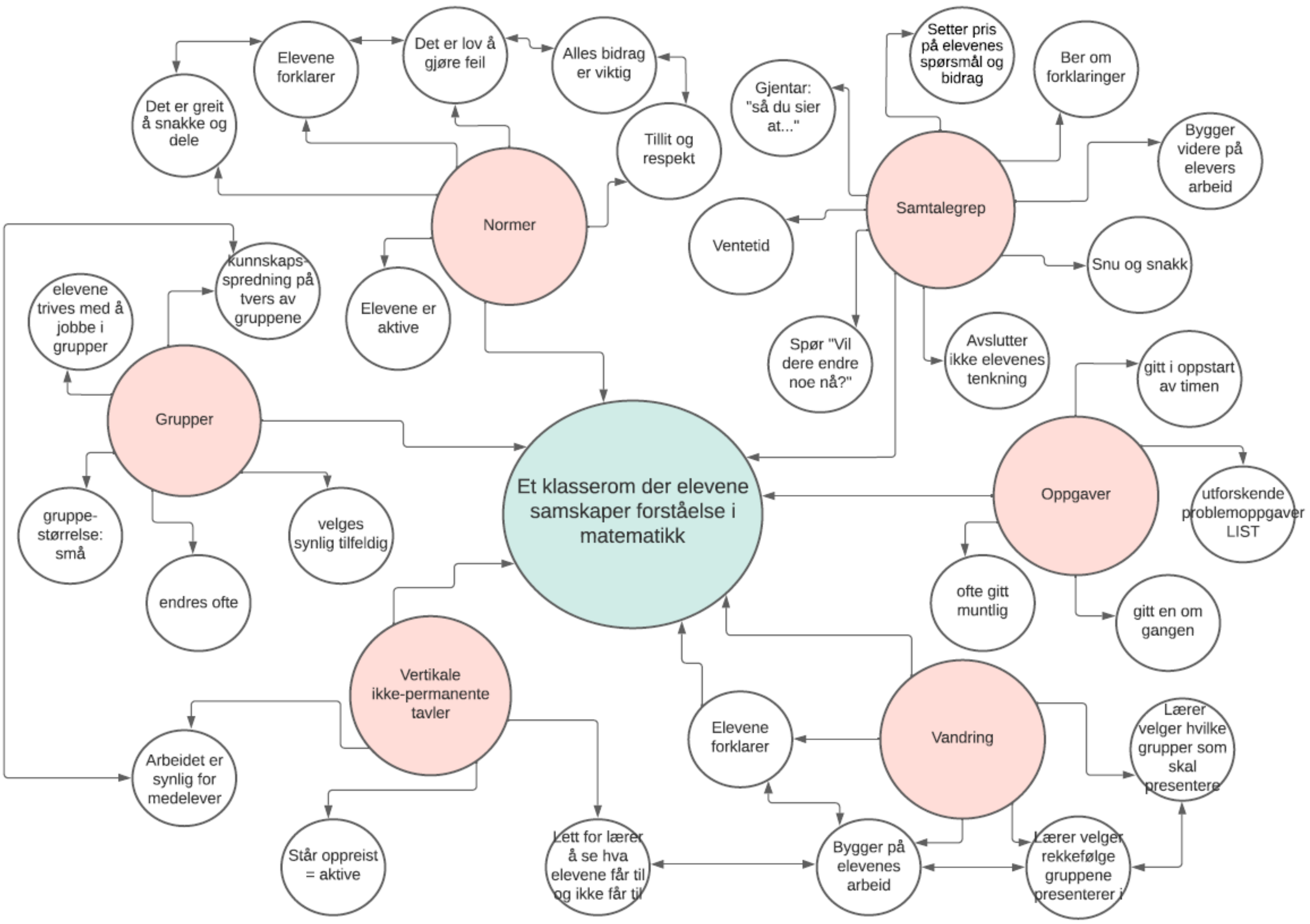
Jeg har vist samtalegrep (figur 14) og normer (figur 15) til stede i Astrid sitt matematikk 1T-klasserom. Samtalegrepene Astrid bruker, måten det kommuniserer på og normene de sammen har fått til i klasserommet, både de sosiale og de sosiomatematiske, fører til at klasserommet er et rom der elevene tenker sammen, samarbeider og snakker matematikk. Dette tenker jeg er synonymt med at de lærer og forstår. Elevene blir bevisst sine egne og sine medelevers strategier. De må forklare, og dermed øker forståelsen av de matematiske emnene de arbeider med. I figur 8 er dette tegnet inn som et overordnet loft, hvor det er høyt under taket. Det er høyt under taket da elevene får dele sine idéer og tanker, og det er lov å gjøre feil.

4.5 Oppsummering resultater

Astrid bruker mange pedagogiske grep for å få til et klasserom der elevene utforsker og samtaler om matematikk. Hovedfunnene fra observasjonene er at Astrid bruker strukturen *grupper* til å la elevene samarbeide om og diskutere *problemoppgaver* ved verktøyet *vertikale ikke-permanente tavler*. Alle disse grepene foreslås av Liljedahl (2016, 2021). Også Goos (2004) foreslår grupper, basert på Vygotsky sin forskning om den proksimale utviklingssone. Problemoppgaver anbefales også av Schoenfeld (1992), Liljedahl (2016, 2021), Brodie (2010), Stein et al. (1996), Hiebert og Grouws (2007) og Wæge og Nosrati (2015).

De vertikale ikke-permanente tavlene gjør at arbeidet er synlig for lærer og elever. Mens elevene jobber i grupper, ved tavlene, bruker Astrid praksiser fra Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011) for å observere, velge ut og bestemme rekkefølgen på elevenes presentasjoner i den senere konsolideringen. Disse presentasjonene bruker Astrid for å få til gode matematiske diskusjoner der utviklingen av matematikkforståelsen skjer av elevene og bygger på deres bidrag. Dette skjer i strukturen *vandring*. I denne konsolideringen bruker Astrid den siste praksisen fra Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011), å se sammenhenger, sammen med metoder og *samtalegrep* for å få elevene til å forklare, resonnere og bygge videre på hverandres arbeid. Disse metodene og samtalegrepene kjennes igjen fra O'Connor et al. (2015) sin beskrivelse av academically productive talk, Chapin et al. (2013) og Kazemi og Hintz (2014, 2019) sine talk moves, og Michaels et al. (2010) og Resnick et al. (2018) sin beskrivelse av Accountable talk. Liljedahl (2021), Brodie (2010), Alrø og Skovsmose (2004), Wæge og Nosrati (2015), og Schoenfeld (1992), Hiebert og Grouws (2007), Bransford et al. (1999), Hogden og Wiliam (2006), Staples (2007), Muijs og Reynolds (2002), Resnick et al. (2018), Stein et al. (2008) og Smith og Stein (2011) sier alle at for å få en utforskende matematikkpraksis, er det viktig med normer for utforskning i klasserommet. Astrid har, sammen med elevene, etablert sosiale og sosiomatematiske *normer* som tilrettelegger for utforskning i matematikk.

For å analysere Astrid sitt klasserom ble funnene sortert etter Cobb (2000) sine fire aspekter for klasseromsanalyse: struktur, oppgaver, verktøy og klasseromsdiskurs. Observasjonene fra klasserommet avdekket hvilke strukturer, oppgaver og verktøy som ble brukt og hvordan klasseromsdiskursen foregikk. Dette er først presentert overordnet i figur 8. Figurene 9 og 11 – 15 viser aspekt jeg fant knyttet til strukturene grupper og vandring, til oppgavene, til verktøyet vertikale ikke-permanente tavler og til delene av klasseromsdiskursen: samtalegrep og normer. Figur 16, som er satt sammen av disse, viser dermed kompleksiteten i og koblingene mellom de pedagogiske grepene Astrid bruker for å tilrettelegge for læring i et utforskende klasserom.



Figur 16. Pedagogiske grep Astrid bruker i matematikk 1T-klasserommet.

5. Konklusjon

Jeg ønsket med dette masterprosjektet å finne ut hvordan det er mulig å få til et utforskende klasserom der elevene kommuniserer for å lære sammen. Oppgaven bygger på et sosialkonstruktivistisk syn på læring: jeg tenker at vi lærer i sosiale sammenhenger og konstruerer ny kunnskap basert på våre eksisterende kognitive skjema.

Forskningsspørsmålet for oppgaven var:

> «Hvilke pedagogiske grep bruker en erfaren og engasjert lærer for å tilrettelegge for læring i et utforskende matematikklasserom?»

Jeg undersøkte dette ved å utføre en kvalitativ casestudie i et matematikk 1T-klasserom med en erfaren og engasjert lærer. Jeg observerte undervisningen i denne klassen i sju økter på to klokketimer hver. I min analyse av feltnotatene fulgte jeg Creswell (2014) sine råd om å gjenta stegene *utforske og kode database*, og *videre koding for å etablere tema og beskrivelser*. Jeg brukte i senere koding programmet NVivo for å få en oversikt over eksempler fra feltnotatene som hører til bestemte koder.

Cobb (2000) har laget et rammeverk for klasseromsanalyser med følgende fire aspekter: *strukturen* på klasseromsaktivitetene, *oppgavene* som brukes i klasserommet, *verktøyene* som brukes og *klasseromsdiskursen* som foregår i klasserommet. Cobb (2000) sier at disse aspektene vil kunne gi oss mikrokulturen i klasserommet, det vil si det sosiale perspektivet, samt det psykologiske perspektivet, da vi ved å beskrive klasseromsdiskursen også får med oss elevenes resonnering. Jeg har brukt Cobb (2000) sitt rammeverk og disse fire aspektene for å beskrive læringsmiljøet i klasserommet jeg observerte.

For det første aspektet, strukturer, fant jeg at Astrid hovedsakelig bruker grupper og vandring. Gruppene var små, valgt synlig tilfeldig og ble byttet ofte. I vandringen fikk elevene forklare matematikken de hadde jobbet med og de bygget videre på hverandres arbeid. For det andre aspektet, oppgaver, fant jeg at Astrid ga dem utforskende problemoppgaver, som oftest muntlig og i oppstarten av timene. For Cobbs (2000) tredje aspekt, verktøy, fant jeg at Astrid lot elevene samarbeide om utforskningsoppgavene ved verktøyet vertikale ikke-permanente tavler. Dette verktøyet gir elevene mulighet til å synliggjøre arbeidet, diskutere og trekke slutninger om matematikk sammen. For det fjerde aspektet, klasseromsdiskursen, fant jeg at Astrid bruker samtalegrep og har etablert sosiale og sosiomatematiske normer i klasserommet som sammen bidrar til at elevene forklarer, utdyper og bygger på hverandres idéer og tanker slik at elevenes eget arbeid blir fokuset for timene. Alle disse fire aspektene i klasserommet gjør at elevene får mulighet til å utforske og finne ut av matematikken selv. De fire aspektene henger sammen i en logisk struktur, som vist i figur 8 og i figur 16.

Strukturene, oppgavene og verktøy kan sees på som virkemidler som Astrid bruker for å skape samhandlingen og kommunikasjonen, klasseromsdiskursen. Sammen med samtalegrepene Astrid bruker, og normene hun har etablert sammen med klassen, gir dette et klasserom der det er høyt under taket, greit å snakke og dele, lov å gjøre feil, og der det er et inkluderende miljø med tillit og respekt, mellom lærer og elever, og mellom elever. Jeg fant et klasserom der elevene utforsker, problemløser, finner mønster og trekker slutninger, argumenterer og resonnerer i matematikk. Elevene samarbeider, bygger på hverandres arbeid og snakker matematikk. Utrop og engasjement fra elever tyder på at elevene har lært i denne prosessen. Jeg har sett elever som blir oppriktig glade når de lykkes. Ikke minst, jeg har funnet pedagogiske grep denne erfarne og engasjerte læreren, Astrid, bruker for å organisere og støtte denne undersøkende matematikkpraksisen i et matematikk 1T-klasserom. Disse pedagogiske grepene er presentert i figur 16.

Svaret på forskningsspørsmålet mitt illustreres derved av figur 8 og figur 16: kompleksiteten i og sammenhengen mellom de pedagogiske grepene, gjør dem virkningsfulle sammen. Alle disse detaljene danner en helhet og et matematikklasserom der lærer tilrettelegger for utforskende læring.

Ifølge Liljedahl (2021, s.133) ser et tenkende klasserom helt annerledes ut enn et «typisk klasserom». Han sier at i et tenkende klasserom så jobber elevene med problem i grupper i stedet for individuelt, elevene står ved vertikale ikke-permanente tavler i stedet for å sitte ved en pult, og møblene er flyttet slik at en ikke lenger har et «tradisjonelt klasserom» med kateter i front. Videre sier Liljedahl (2021) at i et tenkende klasserom så gir læreren instruksjonene muntlig og svarer på færre spørsmål. Alt dette observerte jeg i Astrid sitt klasserom. Astrid starter der elevene er, elevene får være aktive og hun lar elevene diskutere og resonnere, det vil si hun følger Hodgen og Wiliam (2006) sine første, andre og tredje prinsipp for læring. Matematikktimene jeg observerte fulgte en tredelt struktur tilsvarende Smith og Stein (2011) sine «launch», «explore», og «discuss and summarize»-faser. Dette tilsvarer det Wæge og Nosrati (2015) kaller undersøkende matematikkundervisning.

Astrid bruker utforskende oppgaver som er innen rekkevidde, men med nok utfordringer til at elevene finner noe nytt. Hun lar elevene samhandle i grupper og hjelper dem å se sammenhenger i helklassediskusjoner som bygger på elevenes eget arbeid. Dette legger til rette for at elevene kan hjelper hverandre forbi det de ikke kan klare alene. Dette tilsvarer Vygotskys proksimale utviklingssone, der utviklingsmulighetene ligger og læring kan skje. (Goos, 2004; Hiebert & Grouws, 2007). Piaget (referert til i von Glasersfeld, 1995) sier at læring skjer når nye oppdagelser ikke stemmer med de gamle kunnskapsstrukturene. Det må lages nye strukturer og nye sammenhenger. Astrid tilrettelegger for dette ved at feil og misoppfatninger ikke blir oversett, og ved at hun gir elevene mulighet til å utforske noe som er utenfor deres eksisterende kognitive skjema.

Som det kommer fram i eksemplene jeg har vist fra undervisningsøktene, så var dette et matematikklasserom med mye samarbeid og diskusjon. Elevene var aktive, og det kunne til tider bli ganske god lyd i klasserommet. En slik situasjon krever mye av lærer, hun må håndtere uventede spørsmål på sparket og hun må tåle å gi fra seg mye av kontrollen en ville hatt om undervisningen var IRE / IRF. Lærer må være trygg på seg selv, ikke bare for å «gi slipp på kontrollen», men hun skal i tillegg prøve å samle trådene. Hun må ha en plan, et mål for timen, og hun må vite hvordan hun skal komme dit. Det vil si hun må ta raske avgjørelser om hvilke bidrag fra elevene hun skal ta fatt i for å komme dit hun vil. Dette krever faglig trygghet, men også en tro på at dette er mulig, at elevene kan trekke de konklusjoner hun ønsker. Det vil si at for å bruke disse strukturene og metodene i en undervisningssituasjon, så må lærer ha et positivt elevsyn. Det kom det tydelig fram at Astrid har. At Astrid har tro på at elevene kan lære matematikk kjenner vi igjen fra Muijs og Reynolds (2002, s.5) «connectionist teachers». Muijs og Reynolds (2002) sier også om disse lærerne, som de omtaler som svært effektive lærere, at de bruker elevenes feil og misoppfatninger som redskaper for læring og at de relaterer ny kunnskap til tidligere kunnskap. Dette kom også frem i observasjonene fra Astrid sitt klasserom.

Astrid er aktiv og tydelig til stede i rommet. Hun lar elevene jobbe og utforske, men hun velger bidragene og rekkefølgen, og hjelper elevene å se sammenhengene. Hun inntar ikke den passive rollen Yackel og Cobb (1996) og Stein et al. (2008) refererer til som førstegenerasjonspraksis innen utforskende matematikk. Dette kan tyde på at hun er forbi førstegenerasjonspraksis for utforskning.

I Astrid sitt klasserom så jeg aktive og ivrige elever som forklarte hva de var kommet fram til, til lærer, men også til hverandre. Det kom tydelig fram at de er vant til å forklare, ikke bare gi et svar. Det er dette vi matematikklærere ønsker. Vi ønsker at elevene våre skal forstå, og vi må anta at når de klarer å forklare begreper og løsningsstrategier så har de forstått det! De har ikke bare «gjort det» eller lært seg en algoritme.

Hiebert og Grouws (2007, s.374) sier at basert på empiriske funn og teoretiske argument, så er det ingen grunn til å tro at det finnes én bestemt undervisningsmetode som gir best effekt for alle typer læringsmål. Forskning fra Hattie (2015), Smith og Stein (2011), Hodgen og Wiliam (2006), Muijs og Reynolds (2002), Schoenfeld (1992), Liljedahl (2016, 2021), Wæge og Nosrati (2015) og Staples (2007) viser allikevel at om en ønsker at elevene skal forstå sammenhenger i matematikk, om de skal kunne generalisere og trekke slutninger, så trenger de å få dele idéene sine med medelever. I samfunnet og i nye læreplaner spesifiseres det at vi vil ha elever som ikke bare har faktakunnskap og instrumentell forståelse, men som også vet hvordan de skal løse ukjente problemer og ikke minst hvorfor det må være slik. Astrid sine pedagogiske grep legger til rette for at elevene får dele idéene sine, begrunne tankene sine, resonnere gjennom sine egne og andres matematiske forklaringer slik at de sammen løser ukjente problemer, trekker slutninger og generaliserer. Carpenter et al. (2003) sier som nevnt i introduksjonen at elever som lærer å artikulere og argumentere for sine matematiske idéer, som må resonnere gjennom sine egne og andres matematiske forklaringer og som må begrunne svarene sine, utvikler en dyp forståelse som er viktig for deres videre suksess i matematikk.

Fra mine observasjoner ser det dermed ut til at de pedagogiske grepene Astrid bruker i sitt matematikk 1T-klasserom gjør det mulig for elevene å utvikle en dyp forståelse i matematikk. Men det er selvfølgelig ikke bare grepene som gjør at elevene i dette klasserommet utforsker, diskuterer og deler. Det er også Astrid som lærer, hennes holdninger, normene hun har etablert i klasserommet, mikrokulturen i klasserommet, det at elevene stoler på henne og kan si det de ønsker, og ikke minst hennes positive elevsyn og tro på elevene. Grepene kan allikevel være idéer for andre lærere å teste ut med sine klasser, for å få til en mer aktiv læring med undersøkende matematikk og problemløsning, og ikke minst for å få elevene til å snakke matematikk.

Staples (2007, s.4) beskriver en «collaborative inquiry mathematics practice» der elevene bruker hverandres tanker, hører etter og responderer til hverandres idéer for så å produsere idéer sammen. Dette ser vi i Astrid sitt klasserom: Elevene deler, forklarer og bygger på hverandres bidrag for å sammen komme fram til matematiske idéer.

De pedagogiske grepene Astrid bruker, som vises i figur 16, gjør til sammen at dette matematikk 1T-klasserommet er et klasserom der elevene samskaper forståelse i matematikk.

Var så alt perfekt i dette klasserommet? Jeg har beskrevet hvert aspekt i Cobb (2000) sitt rammeverk grundig, slik at leser skal få en klar forståelse for hva jeg observerte i dette klasserommet. Jeg observerte grep fra lærer som viser en solid og gjennomtenkt undervisning, der Cobb (2000) sine aspekter henger sammen. Dette er imponerende. Samtidig må en ha i bakhodet at jeg har sett sju økter av et helt skoleår, så jeg kan ikke si at det alltid er slik. Jeg vet heller ikke om disse elevene sine resultater er bedre eller svakere enn andre elevers resultater. Dette er en casestudie, og det jeg har funnet er sant i denne konteksten. Mine resultater kan ikke nødvendigvis overføres til andre klasserom. Kvalitative studier, som denne, kan allikevel gi lesere en innsikt inn i andre situasjoner, inn i andre sine klasserom. Dette er verdifullt, fordi slike detaljerte beskrivelser kan andre lære av. Det er i utdannings-sammenheng et økende fokus på utforskende matematikkundervisning, og denne oppgaven er et bidrag fra undervisning på videregående trinn.

Det kan være interessant å ta med at Astrid, etter å ha lest resultatkapitlet for å se om hun var enig i mine tolkninger av det jeg så i klasserommet, fortalte at «Ja, det stemmer», og at hun i mine observasjoner ble bevisst på og så ting hun ikke hadde vært klar over selv. Hun fortalte at hun antagelig ikke hadde turt å utføre undervisningen sin slik om det ikke hadde vært for deltagelse i matematikkprosjektet ved denne skolen, der lærerne fikk observere andres undervisning og teste ut og lage opplegg for utforskning sammen. Hun mener at alle kan få til et slikt utforskende, samskapende klasserom, men de trenger støtte fra ledelse og andre matematikklærere for å teste ut og hjelpe hverandre.

Jeg sa i innledningen til oppgaven at et mål for studien var å lære noe jeg selv kan bruke i min undervisning. Det har jeg gjort: jeg har tidligere brukt vertikale ikke-permanente tavler med små, synlig tilfeldig valgte grupper til å jobbe med utforskningsoppgaver i klasserommet, men jeg har lært av Astrid at jeg kan bruke det oftere, og også til oppgaver fra boka før teori er presentert. Jeg har også blitt mer bevisst på hvordan en kan velge ut elevbidrag og samtaletrekk for å hjelpe elevene i deres utvikling av matematikken. Et annet mål for oppgaven var at andre lesere også muligens kunne lære noe. Jeg har forsøkt å beskrive hva jeg har gjort og sett så detaljert og transparent at lesere kanskje kan overføre noe av det jeg har presentert til sine egne kontekster, for eksempel sitt eget matematikklasserom.

5.1 Veien videre

En kan få til et utforskende, samskapende matematikklasserom ved å benytte strukturene, oppgavene, verktøyene og klasseromsdiskursen som beskrevet i denne oppgaven. Som Astrid sier, så er det en fordel å kunne diskutere og teste ut med kolleger. Brodie (2010) fant i sin forskning at det var vanskelig å endre etablerte klasserom. Hun foreslår, som Astrid, samarbeid mellom lærere som ønsker å endre sin undervisning til mer «reformorientert» undervisning, det vil si mer utforskning og mer elevsentrert kommunikasjon. Brodie (2010, s.205) sier at i hennes forskning jobbet fem lærere sammen, og de fant at deres felleskap «dannet en trygg plass der de kunne teste ut nye idéer, ta sjanser og reflektere rundt disse idéene fortløpende og systematisk». En slik måte å drive profesjonsutvikling på er aktuell for alle oss som allerede er lærere: vi trenger tid og mulighet til å diskutere og lære av våre kolleger. Det er også aktuelt i utdanning av nye lærere, la dem teste ut, ta sjanser og reflektere, slik Brodie (2010) og Astrid foreslår.

Jeg fulgte lærer og elever i 7 økter á to klokketimer, så jeg fikk forholdsvis mye data. En fordel med å følge klassen over en lengre periode var at jeg fikk se at strukturene og grepene Astrid brukte fungerer til flere forskjellige tema i matematikken. Dersom jeg skulle forsket i et annet utforskende klasserom ville jeg ha ønsket å være med fra oppstarten av skoleåret. Da kunne jeg observert hvordan lærer, sammen med elevene, får etablert de klasseromsnormene som allerede var etablert i Astrid sitt klasserom da jeg kom inn og observerte. Det hadde også vært fint å studere flere slike klasserom for å bygge opp kunnskap om hvordan engasjerte lærere jobber for å få til utforskende matematikk.

Jeg kan ved en senere anledning teste ut Astrid sine grep og forske i egen klasse og på egen undervisning. Det kunne da vært interessant å intervjue elever, for eksempel i forhold til motivasjon i matematikk. Elevene jeg observerte i Astrid sitt klasserom kom raskt i gang, diskuterte godt sammen og virket engasjerte i det de holdt på med, noe jeg tolker som at de er motiverte for å arbeide med matematikken på denne måten. Er dette fordi denne måten å jobbe på er ny og spennende for dem? Hadde det blitt kjedelig å jobbe slik om dette skjedde i alle timer, i alle fag?

Det hadde også vært interessant å prøve å måle læringen som foregår i et slikt aktivt klasserom, kanskje ved pre-test og test etter utforskning og diskusjon. Denne type forskning er gjort i 4. – 6.klassetrinn i Massachusetts (O'Connor et al. (2015), men jeg har ikke funnet forskning som viser måling av resultat i videregående trinn. I min forskning så observerte og hørte jeg at elevene oppdaget mønster og lærte noe i timene. Klarer de å vise denne læringen i tester?

Da kommer vi inn på et annet spørsmål som det hadde vært spennende å forske på: Hvordan evaluerer vi denne «nye typen» læring? I en tid med uendelige mengder informasjon tilgjengelig, der kunnskap raskt blir utdatert, så ønsker vi fleksible elever som vet hvordan de skal tilegne seg ny kunnskap. Vi ønsker at elevene skal bli gode problemløsere og utforskere, og at de skal lære å lære. Hvordan skal vi vurdere dette? Er de tradisjonelle prøvene og den tradisjonelle eksamenen egnet til å teste problemløsning og relasjonell forståelse? Måler standardiserte prøver det vi vil ha fra elevene? Ny forskning bør se på evaluering: hvis vi må ha karakterer, hvordan skal vi måle den læringen og kunnskapen vi ønsker elevene skal tilegne seg?

Litteraturliste

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2004). *Dialogic Learning in Collaborative Investigation*. Nordisk matematikkdidaktikk, 9(2), s. 39 – 62.

Bransford, J. D., Brown, A. L. & Cocking, R. R. (Eds.). (1999). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. ProQuest Ebook Central. https://ebookcentral-proquest-com.pva.uib.no

Brodie, K. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning: A Challenging Task*. I: Brodie K. (eds) Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8_1

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*. Portsmouth, NH: Heinemann. Nedlastet 10.4.2022 fra http://meartsintegration.pbworks.com/w/file/fetch/106854135/Thinking%20Mathematically%281%29.pdf

Chapin, S.H., O'Connor, C. & Anderson, N.C. (2013). *Talk moves. A Teacher's Guide for Using Classroom Discussions in Math (3.utg)*. Math Solutions, Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, U.S.A.

Cazden, C.B. (2001). *Classroom Discourse: The Language of Teaching and Learning*. Harvard Graduate School of Education. Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). *A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education*. Journal for Research in Mathematics Education, 23(1), s. 2 – 33. https://doi.org/10.2307/749161

Cobb, P. (2000). *The importance of a situated view of learning to the design of research and instruction*. I J. Boaler (Red.), Multiple perspectives on mathematics teaching and learning, s. 45 – 85. Westport, CT: Ablex Publishing.

Creswell, J. (2014). *Educational Research. Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. Boston, MA: Pearson.

Drageset, O. G. (2016). *Korleis lærarar leier ein matematisk samtale*. Vitenskapelig kapittel i Johnsen-Høines, & Herheim, R. Matematikksamtaler : undervisning og læring - analytiske perspektiv. Caspar forlag, UiT.

Elliott, J. (2010). *The Educational Action Research and the Teacher*. Action Researcher in Education: http://www.actionresearch.gr/AR/ActionResearch_Vol1/Issue01_01_p01-03.pdf

Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). *Mathematics teaching and classroom practice*. In F. K. Lester (Red.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning, s. 225 – 256. NCTM.

Geertz, C. (1973). *Thick Description: Towards an Interpretive Theory of Culture*. In The Interpretation of Cultures. New York: Basic Books, Inc. https://philpapers.org/rec/GEETTD

Goos, M. (2004). *Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquiry*. Journal for Research in Mathematics Education, 35(4), s. 258 – 291. https://doi.org/10.2307/30034810

Hatch, J. A. (2002). *Doing qualitative research in education settings*. Albany, NY: State University of New York Press.

Hattie, J. (2015). *The applicability of Visible Learning to higher education.* Scholarship of Teaching and Learning in Psychology, 1(1), s. 79 – 91. http://dx.doi.org.pva.uib.no/10.1037/stl0000021

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). *The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning.* I F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, s. 371 – 404. Charlotte, NC, U.S.A.: Information Age.

Hodgen, J. & Wiliam, D. (2006) *Mathematics Inside the Black Box: Assessment for Learning in the Mathematics Classroom*. London, UK: GL Assessment, Granada Learning Group. https://develop.clf.uk/wp-content/uploads/2020/05/Mathematics-Inside-the-Black-Box_Finlay-McLaughlin.pdf

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional talk: How to structure and lead productive mathematical discussions.* Stenhouse Publishers.

Kazemi, E. & Hintz, A. (2019). *Målrettet samtale. Hvordan strukturere og lede gode, matematiske diskusjoner.* Oslo: Cappelen Damm AS.

Klette, K. (2010). *Blindness to Change Within Processes of Spectacular Change? What Do Educational Researchers Learn from Classroom Studies?* In: Hargreaves, A., Lieberman, A., Fullan, M., Hopkins, D. (eds) Second International Handbook of Educational Change. Springer International Handbooks of Education, vol 23, s. 1001 – 1015. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-90-481-2660-6_56

Kivunja, C. & Kuyini, A. B. (2017). *Understanding and applying research paradigms in educational contexts*. International Journal of Higher Education, Vol. 6, No.5, DOI:10.5430/ijhe.v6n5p26.

Kunnskapsdepartementet (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen.* Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/contentassets/53d21ea2bc3a4202b86b83cfe82da93e/overordnet-del---verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen.pdf

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 teoretisk (matematikk T) (MAT09-01).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT09-01.pdf?lang=nno

Liljedahl, P. (2005). *Mathematical discovery and affect: the effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36:2-3, 219-234, DOI: 10.1080/00207390412331316997

Liljedahl, P. (2016). *Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem Solving*. In P. Felmer et al. (eds.), Posing and Solving Mathematical Problems, Research in Mathematics Education, s. 361 – 386. Springer International Publishing Switzerland. 10.1007/978-3-319-28023-3_21.

Liljedahl, P. (2021). *Building Thinking Classrooms in Mathematics. Grades K-12. 14 Teaching Practices for Enhancing Learning*. Thousand Oaks, California, U.S.A.: Corwin Press, Inc.

Lund, T. & Haugen, R. (2006). *Forskningsprosessen*. Oslo: Unipub forlag.

Matematikksenteret, NTNU (u.å.). Om MatteLIST. Hentet 17.april 2022 fra https://www.mattelist.no/artikkel/om-mattelist

Michaels, S., O'Connor, M.C., Hall, M.W. & Resnick, L.B. (2010). *Accountable talk sourcebook: for classroom conversation that works*. Pittsburgh, PA: University of Pittsburgh, Institute for learning.

Muijs, D., & Reynolds, D. (2002). *Teachers' Beliefs and Behaviors: What Really Matters?* The Journal of Classroom Interaction, 37(2), s. 3 – 15. http://www.jstor.org/stable/23870407

Muijs, D. (2010). *Changing Classroom Learning*. In: Hargreaves, A., Lieberman, A., Fullan, M., Hopkins, D. (eds) Second International Handbook of Educational Change. Springer International Handbooks of Education, vol 23. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-90-481-2660-6_47

NESH, Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora.* https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Norén, E. & Thornberg, P. (2015). *Normer og kommunikasjon i matematikklasserommet*. (Oversatt og bearbeidet av Ingunn Valbekmo). Realfagsløyper. Matematikksenteret NTNU. https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2020-01/Normer%20og%20kommunikasjon%20i%20matematikklasserommet%20utrinn.pdf

NRICH Team (2013), *Low Threshold High Ceiling - an Introduction*. University of Cambridge, Faculty of Mathematics. https://nrich.maths.org/10345

O'Connor, C., Michaels, S. & Chapin, S. (2015). *"Scaling down" to explore the role of talk in learning: from district intervention to controlled classroom study.* In L. Resnick, C. Asterhan, & S. Clarke (Eds.), Socializing Intelligence Through Academic Talk and Dialogue, s. 111 – 126. Washington D.C.: American Educational Research Association.

Pring, R. (2015). *Philosophy of Educational Research (3.utg.*). London: Bloomsbury Academic.

Postholm, M.B. (2005). *Observasjon som redskap i kvalitativ forskning på praksis*. Norsk pedagogisk tidsskrift, 89 (2), s. 146 – 159. https://www.idunn.no/doi/abs/10.18261/ISSN1504-2987-2005-02-07

Postholm, M.B. (2008a). *Group work as a learning situation: a qualitative study in a university classroom.* Teachers and Teaching: theory and practice, 14:2, s. 143 – 155. https://doi.org/10.1080/13540600801965978

Postholm, M.B. (2008b). *The start-up phase in a research and development work project: A foundation for development*. Teaching and Teacher Education, 24 (3), s. 575 – 584. https://doi.org/10.1016/j.tate.2007.08.001

Resnick, L. B., Asterhan, C. S. & Clarke, S. N. (2018). *Accountable talk: Instructional dialogue that builds the mind*. Geneva, Switzerland: The International Academy of Education (IAE) and the International Bureau of Education (IBE) of the United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO).

Richardson, V. (1994). *Conducting Research on Practice*. Educational Researcher, 23(5), s. 5 – 10. https://doi.org/10.3102/0013189X023005005

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics.* In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning, s. 334 – 370. New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (2016). *Research in Mathematics Education*. Review of Research in Education, 40(1), s. 497 – 528. https://doi.org/10.3102/0091732X16658650

Schwandt, T.A., Lincoln, Y.S. & Guba, E.G. (2007). *Judging interpretations: But is it rigorous? Trustworthiness and authenticity in naturalistic evaluation*. New Directions for Evaluation, 2007, s. 11 – 25. https://doi.org/10.1002/ev.223

Skemp, R. R. (2006). *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. Mathematics Teaching in the Middle School, 12(2), s. 88 – 95. http://www.jstor.org/stable/41182357

Smith, M. & Stein, M. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. Reston, VA, USA.

Staples, M. (2007). *Supporting Whole-Class Collaborative Inquiry in a Secondary Mathematics Classroom*. CRME Publications.1. http://digitalcommons.uconn.edu/merg_docs/1

Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S. & Hughes, E.K. (2008). *Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell*, Mathematical Thinking and Learning, 10:4, s. 313 – 340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stein, M. K., Grover, B. W. & Henningsen, M. (1996). *Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms.* American Educational Research Journal, 33(2), s. 455 – 488. https://doi.org/10.2307/1163292

Ulvik, M., Riese, H., & Roness, D. (2016). *Å forske på egen praksis: aksjonsforskning og andre tilnærminger til profesjonell utvikling i utdanningsfeltet*. Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet (2019). *Dybdelæring. Læring og trivsel*. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism*, Taylor & Francis Group. ProQuest Ebook Central, https://ebookcentral.proquest.com/lib/bergen-ebooks/detail.action?docID=178754

Wæge, K. (2015). *Samtaletrekk – redskap i matematiske diskusjoner*. Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning, 26(2), s. 22 – 27.

Wæge, K. & Nosrati, M. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk*. Matematikksenteret, NTNU. https://utdanningsforskning.no/artikler/sentrale-kjennetegn-pa-god-laring-og-undervisning-i-matematikk/
(sidehenvisningene viser til denne pdf-filen av artikkelen: https://www.matematikksenteret.no/nettbutikk/sentrale-kjennetegn-p%C3%A5-god-l%C3%A6ring-og-undervisning-i-matematikk)

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). *Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), s. 458 – 477. https://doi.org/10.2307/749877

Yin, R. K. (1994). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Vedlegg

Vedlegg 1. Tillatelse til å observere Astrid sin matematikk 1T-gruppe

Sted, skolenavn og rektors underskrift er sladdet for å ivareta anonymitet for lærer og elever.

Åse Østebø
Bruvikveien 21
4017 Stavanger

Stavanger, 13.oktober 2020

Tillatelse til observasjon av lærer og matematikk 1T gruppe i forbindelse med masteroppgave

Jeg skal skrive masteroppgave i forbindelse med studiet *Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk* ved Universitetet i Bergen. Temaet for masteroppgaven er utforskende matematikk. Jeg ønsker å følge en lærer og hennes matematikk 1T gruppe.

Lærer og elever er informert om forskningsprosjektet, om hensikten med studien og om at jeg ønsket å observere timer med dem for å se på utforskende matematikk. De er informert om at deltakelse er frivillig og at de når som helst kan trekke seg. De er også informert om at de innsamlede dataene vil bli brukt til en masteroppgave i matematikkdidaktikk. Lærer og elever har samtykket til å delta i prosjektet.

Det vil ikke bli tatt bilder, video eller lydopptak av elevene, jeg skal kun observere og notere det jeg ser. Observasjonene vil bli gjort i elevenes naturlige omgivelser, i deres eget klasserom, og undervisningstimene skal ikke endres selv om jeg er tilstede.

Elevene vil bli minnet på at jeg er til stede i de øktene jeg observerer. De har dermed mulighet til å velge å ikke delta og trekke seg fra prosjektet underveis. Lærer og elever vil bli anonymisert i oppgaven.

Ved spørsmål om studien kan jeg kontaktes på telefon 41289937 eller på mail aseostebo@hotmail.com. Min veileder, Ove Gunnar Drageset, kan kontaktes på mail ove.gunnar.drageset@uit.no.

Jeg søker om tillatelse fra skolen til å gjennomføre observasjon i matematikk 1T undervisningen i gruppa.

Med vennlig hilsen

Åse Østebø

Åse Østebø

Samtykke til observasjon

Jeg samtykker til at Åse Østebø kan observere matematikk 1T undervisning ved skolen i forbindelse med masterprosjektet.

[redacted] 13/10-20 [redacted]

Sted, dato   Underskrift rektor ved [redacted]

Vedlegg 2. Oversikt over øktene som ble observert og tema for økten

Økt	Dato	Tema
1	27.10.2020	Programmering. Pseudokode / Python. Definere heltallsvariabler, input, valg, hvordan skrive svar.
2	05.01.2021	Representasjonsformer for funksjoner. Sammenheng mellom funksjonsuttrykk, tabell og graf. Språk i forbindelse med kurver. Definisjonsmengde og verdimengde.
3	12.01.2021	Lineære funksjoner, stigningstall, ettpunktsformelen.
4	19.01.2021	Asymptoter. Rasjonale funksjoner.
5	26.01.2021	Potensfunksjoner.
6	16.02.2021	Momentan vekstfart. Grafer av deriverte funksjoner ved hjelp av tangenter.
7	23.02.2021	Funksjoner og deriverte. Nullpunkter, topp- og bunnpunkt, symmetrilinjer.

Vedlegg 3. Trafikklysmodellen videregående skole

Nivåinndeling av smitteverntiltak for videregående skole

Grønt nivå

- Ingen syke skal møte på skolen
- God hånd- og hostehygiene er viktig
- Det er tilstrekkelig med normalt renhold
- Unngå håndhilsning og klemming mellom personer
- Planlegg for vanlig organisering av skoleklasser
- Planlegg for vanlig skolehverdag

Gult nivå

- Ingen syke skal møte på skolen
- God hånd- og hostehygiene er viktig
- Ha rutiner for forsterket renhold
- Unngå håndhilsning og klemming mellom personer
- Hele skoleklasser kan ha undervisning sammen
- Elever bør ha faste plasser i hvert klasserom eller faste samarbeidspartnere/-grupper
- Ansatte kan veksle mellom klasser, men bør holde avstand til elever så langt det er mulig
- Ansatte og elever bør holde 1 meter avstand i alle situasjoner utenfor klasserommet
- Unngå trengsel og store samlinger

Rødt nivå

- Ingen syke skal møte på skolen
- God hånd- og hostehygiene er viktig
- Ha rutiner for forsterket renhold
- Unngå håndhilsning og klemming mellom personer
- Del elever i mindre grupper
- Hold minst 1 meter avstand mellom elever/ansatte i alle situasjoner
- Unngå trengsel og store samlinger
- Vurder ulike oppmøtetider for elever

FHI Folkehelseinstituttet Utdanningsdirektoratet

https://www.udir.no/contentassets/5b1a6afee55c45ef8c49c0505cd096e6/udir20003_plakater_nivainndeling_a3_videregaende.pdf