Kompetanser og resonneringsmåter innen faktorisering hos elever i videregående skole

En kvalitativ studie av hvilke typer kompetanser elever i andre trinn på videregående skole viser innenfor temaet faktorisering av kvadratiske uttrykk, samt de ulike måtene elevene resonnerer på når de løser oppgaver om faktorisering.

av

Nils-Henrik Hvale

Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk

Matematisk institutt

Universitetet i Bergen

Våren 2022

Forord

Arbeidet med denne masteroppgaven har gjort at jeg bedre forstår hvordan elever oppfatter matematikk og hvordan de resonnerer når de løser oppgaver. Som realist har jeg lite erfaring med å skrive en såpass lang tekst slik som i denne oppgaven, så selve skriveprosessen har også vært en viktig erfaring. Dette studiet vil uten tvil være en god ballast i mitt videre arbeid som lærer, både når jeg skal veilede og hjelpe elever og når de skal vurderes.

Min viktigste støttespiller underveis i dette arbeidet har vært min kone Hilde. Hennes støtte og positive holdning har vært av stor betydning for at jeg har holdt motet oppe og klart å bli ferdig med oppgaven på normert tid.

Jeg vil også rette en stor takk til min veileder Ove Gunnar Drageset. Din veiledning og dine kommentarer har vært både konkrete og inspirerende. Dette har gjort at jeg hele tiden har kommet videre i arbeidet. Uten dine bidrag ville jeg aldri klart å produsere noe så omfattende som dette.

En stor takk også til både medstudenter og alle kursholderne på dette masterprogrammet. Dere har gitt mye inspirasjon, vi har samarbeidet godt, støttet hverandre og vært en fin gjeng gjennom hele studietiden.

Jeg vil også takke ledelsen ved min arbeidsplass, Bergen private gymnas, for positivitet, fleksibilitet og velvilje gjennom hele studieperioden.

Bergen 25.05.2022

Nils-Henrik Hvale

Sammendrag

I de nye læreplanene i matematikk fra 2020 blir resonnering og argumentasjon løftet frem som et av kjerneelementene. Etter 15 år som matematikklærer i videregående skole ser jeg på dette som en viktig og riktig prioritering. Mange elever er flinke til å lære seg algoritmer og regler, men sliter med å forklare logikken i reglene og å argumentere for sine strategivalg.

I denne kvalitative studien rettes søkelyset mot temaet faktorisering av kvadratiske uttrykk. Hensikten er å få mer forståelse for hvilke kompetanser, slik de defineres av Kilpatrick et al. (2001), elevene viser innen dette temaet. I tillegg er hensikten også å beskrive elevenes resonneringsmåter med utgangspunkt i Lithner (2007) sitt rammeverk. Et viktig fokus var å undersøke om elevenes strategivalg var begrunnet ut fra at «regelen er sånn» eller om de ble begrunnet ut fra de matematiske sammenhengene.

Datainnsamlingen ble foretatt gjennom semistruktererte oppgavebaserte en-til-en intervjuer. Oppgavebesvarelser og intervjuer ble analysert inngående for to respondenter, for de resterende seks respondentene ble det laget en oppsummerende analyse.

Denne studien gir et innblikk i elevers strategivalg når de løser oppgaver og hvilke tankebaner som ligger bak disse valgene. Studien peker også på at skillet mellom de imitative resonneringsmåtene og kreativ matematisk resonnering kanskje er for strengt. Til slutt settes det opp et forslag til en nyansering av resonneringskategoriene hos Lithner (2007), der den nye kategorien *matematisk fundert resonnering* blir beskrevet.

Innholdsfortegnelse:

1.0 Innledning

1.1 Valg av tema og forskningsspørsmål

I innlegget «*Meningsfull matematikkundervisning for alle*» i tidsskriftet Utdanningsnytt setter Svein Anders Heggum ord på noe av det jeg selv har følt på når det gjelder algebra i skolen:

Ulike studier peker på at det emnet i matematikkfaget som i størst grad får en algoritmisk eller regelstyrt introduksjon, er nettopp algebra. Elevene blir introdusert for mange ulike regler de må huske (...) Når regler blir innført på en slik måte uten noen dypere forståelse, blir arbeidet meningsløst, og man blir sittende og manipulere uttrykk nærmest i blinde som en slags «tall-tombola». (Utdanningsnytt, 20/1 2020)

Etter drøyt 15 års erfaring som matematikklærer i videregående skole, har det slått meg flere ganger at mye av elevenes kompetanse innen algebra dreier seg nettopp om å beherske regler og algoritmer. For noen elever vil dette kanskje føles som et slags «tall-» eller «symbol-tombola». Andre elever behersker algoritmene godt, men når man spør om logikken bak algoritmene, eller gir elevene oppgaver der standardalgoritmer ikke fører frem, blir elevene ofte tause eller frustrerte.

I den nye læreplanen i matematikk, fagfornyelsen av 2020, er nettopp logikk og en dypere forståelse løftet frem i kjerneelementet «resonnering og argumentasjon»:
Resonnering i matematikk T handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer. Det inneber at elevane skal forstå at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar. (UDIR, 2020 Matematikk T MAT 09-01)

Dette er etter mitt skjønn en viktig dreining bort fra regeltenkning over til en mer resonnerende og logisk tenkemåte i matematikk. Ut fra de nye læreplanene og ut fra egne erfaringer som lærer bestemte jeg meg tidlig i dette masterprosjektet at jeg ville lære mer om hva slags type kunnskap, forståelse eller kompetanse elevene hadde innenfor et algebraisk tema.

Et tema som ofte har slått meg som problematisk for elevene er faktorisering av kvadratiske uttrykk. Særlig gjelder dette anvendelsen av faktorisering til å løse andregradslikninger. Flere ganger har jeg erfart at oppgaver som «løs likningen $(x + 2)(x - 3) = 0$» blir løst ved å multiplisere ut parentesene og deretter bruke andregradsformelene (abc-formelen). Dette slo meg som en veldig algoritmisk måte å tenke på, og jeg ønsket å finne ut hvorfor elevene tenker på denne måten og hvorfor de ikke ser «snarveien» ved å bruke det jeg kaller produktregelen (at enten må $x + 2 = 0$ eller så må $x - 3 = 0$).

Kilpatrick et al. (2001) har laget en modell der ulike matematiske kompetanser blir beskrevet, og det legges stor vekt på hvordan disse ulike kompetansene er sammenflettet og avhengig av hverandre. Jeg har erfart at mange elever har den kompetansen som kalles prosedyreflyt, de kan utføre riktige algoritmer på riktig måte. Men når de skal forklare og begrunne algoritmene trengs *begrepsforståelse* og det Kilpatrick et al. (2001) kaller *adaptiv resonnering* (å logisk reflektere, begrunne). Jeg var også interessert i elevenes evne til å se «snarveier» utenom algoritmene, noe som har med *strategisk kompetanse* å gjøre.

Lithner (2007) sitt rammeverk om imitativ og kreativ resonnering beskriver ulike resonneringstyper som man ofte finner hos elever. Når elever begrunner sine strategier ved å henvise til regler eller algoritmer betegnes dette som imitativ *algoritmisk resonnering*. Jeg har også lagt merke til at elever «bare gjør noe» basert på overflateegenskaper i oppgaven, dette kalles hos Lithner (2007) for *avgrensende resonnering*. Som matematikklærer vil man helst se at elever begrunner sine strategier ut fra matematiske egenskaper for de involverte objektene og kanskje også tenker kreativt, det som blir kalt *kreativ matematisk resonnering*.

De teoretiske rammeverkene beskrevet i de foregående avsnittene var en viktig inspirasjon når jeg skulle formulere forskningsspørsmålene. Med utgangspunkt i disse, og mine egne erfaringer og refleksjoner, kom jeg frem til følgende to forskningsspørsmål:

- Hvilke typer kompetanse viser vgs-elever innen faktorisering?
- Hvordan resonnerer elevene når de jobber med faktorisering?

1.2 Oppgavens oppbygning

Etter at jeg nå har forklart litt om bakgrunnen for valg av tema og forskningsspørsmål vil det i kapittel 2 bli gjennomgått teori som er relevant for min oppgave, med hovedfokus på de to rammeverkene til Kilpatrick et al. (2001) og Lithner (2007) som jeg anvender i denne studien. Deretter følger et metodekapittel der jeg redegjør for og begrunner metodiske valg og forskningsdesign.

I det fjerde kapittelet kommer analysen av oppgavebesvarelser og intervjuer med elevene, der jeg forsøker å finne ut hvilke kompetansetyper som er vist og hvilke typer resonnementer som gjorde seg gjeldende. Analysen er strukturert slik at to elever blir analysert inngående hver for seg, deretter kommer en oppsummerende analyse for resten av elevene.

I kapittel 5 diskuterer jeg resultatene, og ser på noe av teorien i lys av mine funn. Til slutt kommer et kort avslutningskapittel der jeg oppsummerer og har noen konkluderende betraktninger.

2.0 Teori

2.1 Forståelse

2.1.1 Todeling av forståelsesbegrepet

Når man sier at en person forstår matematikk, hva mener man egentlig da? Noen vil kanskje hevde at hvis man er i stand til å finne riktig regel, og anvende denne, har man forstått. Andre vil hevde at man må forstå begrepenes innhold, og sammenhengen mellom disse, for å forstå matematikk. Begrepet forståelse har her to ganske ulike betydninger, og flere matematikk-didaktikere har påpekt nettopp dette, i diverse todelingsmodeller for matematikkforståelse.

Stieg Mellin-Olsen (1984) bruker begrepene *oppfatninger* i matematikk og skiller mellom regeloppfatning og strukturoppfatning. Mellin-Olsen trekker frem et eksempel der en elev blir bedt om å forklare flytte-bytte regelen for likninger. Eleven argumenter med at det *ikke er lov* å flytte over et ledd uten å bytte fortegn, og dette betraktes som en regeloppfatning. En stor ulempe med denne typen oppfatning er at eleven er helt avhengig av hukommelse for å vite hvilken regel som kan brukes, og i hvilke tilfeller regelen gjelder. Hvis eleven derimot hadde forklart flytte-bytteregelen ut fra en tilknytning til begrepet ekvivalens, ville det vært en strukturoppfatning som lå til grunn. Mellin-Olsen sier at regelforklaringer ikke er et onde i seg selv, men strukturoppfatning er mest ønskelig, blant annet fordi «matematikken er i seg sjøl et strukturert fag» og «det ene avledes av det andre» (Mellin-Olsen, 1984, s 38).

2.1.2 Instrumentell og relasjonell forståelse

Ifølge Richard Skemp (1978) var det nettopp Mellin-Olsen som gjorde ham oppmerksom på hvor ulike betydninger vi legger i forståelsesbegrepet. Skemp (1976) bruker begrepene *instrumentell* og *relasjonell* forståelse. Relasjonell forståelse har stort fokus på å se sammenhengen mellom de ulike objektene og operasjonene. En elev med slik forståelse har en tenkemåte som leter etter sammenhenger og logikk, og eleven kan begrunne sin strategi ut fra sin kunnskap om de matematiske sammenhengene. Et eksempel her kan være en elev som skal summere brøker; en relasjonell tenkemåte ser logikken i at brøkene må ha like nevnere dersom tellerne skal summeres og at en utviding av brøker ikke endrer verdien på brøkene.

Skemp (1976) sier at instrumentell forståelse er mer mekanisk og krever at man «pugger» flere spesifikke regler for å løse ulike problemer. En elev med slik forståelse vet hvordan man utfører matematiske operasjoner, men vil begrunne sin strategi ut fra at regelen er brukt på riktig plass og på riktig måte. En elev som skal summere brøker, og har en instrumentell forståelse, vil prøve å finne/huske riktig regel med fellesnevner, utvide brøker og summere tellerne, og utføre oppgaven i henhold til disse reglene. Eleven kommer frem til riktig svar, og må jo sies å beherske brøkregning, det er bare en annen måte å forholde seg til brøkregning på enn den relasjonelle.

Skemp (1976) skriver at selv om det for elevene kan være enklere og mer effektivt å løse oppgaver når matematikk læres instrumentelt, er relasjonell matematikkforståelse mer robust og har større overføringsverdi på nye oppgavetyper og nye emner. Et ofte brukt bilde på dette er en person som skal fra A til B i en by. En instrumentell forståelse tilsvarer at personen har en trinnvis beskrivelse av ruten, som hvis den følges korrekt, vil føre personen fra A til B. Dette vil fungere like godt som om personen har et mentalt kart over byen og bruker dette til å orientere seg fra A til B. Det mentale kartet tilsvarer en relasjonell forståelse, og fordelen med dette er åpenbar hvis man går feil eller skal et annet sted en annen gang.

Selv om begge måtene innebærer å forstå noe, må det sies å være en motsetning mellom en instrumentell og en relasjonell tilnærming til matematikken, at det er to veldig ulike måter å tenke på og to ulike syn på matematikk. Å tenke «hvilken regel gjelder her?» er unektelig noe annet enn å se etter logiske sammenhenger i matematikken. Skemp setter dette på spissen når han skriver «but the two kinds of knowledge are so different that I think that there is a strong case for regarding them as different kinds of mathematics» (Skemp, 1976 s 15).

2.1.3 Prosedyreforståelse og begrepsforståelse

Man finner også en todeling av matematikkforståelse hos Hiebert og Lefevre (1986). Den første kalles her begrepsforståelse. Dette er en forståelse som er rik på relasjoner, der relasjonene mellom de enkelte kunnskapsbitene er like viktige som kunnskapsbitene i seg selv. Den andre typen er prosedyreforståelse som handler om kjennskap til matematiske symboler, syntaks og regler/prosedyrer for å løse matematikkoppgaver (Hiebert & Lefevre, 1986).

Skemp (1976) sin instrumentelle forståelse og Hiebert/Lefevre (1986) sin prosedyreforståelse handler begge om *hvordan* man tilnærmer seg matematiske oppgaver. Relasjonell forståelse og begrepsforståelse handler begge om å forstå *hva* matematiske objekter er, og ut fra relasjonen mellom disse, *hvorfor* prosedyrer fungerer. Men en viktig forskjell på disse inndelingene er at Hiebert/Lefevre (1986) i større grad sidestiller de to forståelsestypene, begge er like nødvendige for å mestre matematikkfaget. En elev vil for eksempel kunne veksle mellom prosedyreforståelse når en funksjon skal deriveres, og begrepsforståelse når eleven skal forklare sammenhengen mellom den deriverte og veksten til funksjonen. Skemp (1976) uttrykker at relasjonell forståelse er det man bør tilstrebe, men at det i praksis er vanskeligere og mer tidkrevende å oppnå enn instrumentell forståelse.

2.1.4 Strukturelle og operasjonelle oppfatninger

Anna Sfard (1991) skiller mellom *begreper*, som er de eksisterende teoretiske og formelle konstruksjonene, og *oppfatninger* som er våre egne mentale representasjoner og assossiasjoner knyttet til begrepene. Det er disse oppfatningene Sfard deler inn i to forskjellige typer: den *strukturelle* og den *operasjonelle*.

Den strukturelle oppfatninger er når vi betrakter begrepene som eksisterende objekter, kan gjenkjenne disse umiddelbart og manipulere dem som en helhet (Sfard, 1991). En strukturell oppfatning av begrepet sirkel kan være at det er «de geometriske stedene som har samme avstand til et gitt punkt». Den *operasjonelle* oppfatninger er når vi betrakter begrepene som prosesser eller algoritmer. En operasjonell oppfatning av begrepet sirkel kan være å se på det som «kurven som fremkommer når vi roterer en passer rundt et punkt». Med andre ord er en operasjonell oppfatning dynamisk og knyttet til å utføre noe, mens den strukturelle oppfatningen er mer statisk og tidløs.

Sfard (1991) skriver videre at når elever lærer matematikk kommer som oftest den operasjonelle oppfatningen først, de ser begrepene ut fra prosesser og algoritmer. Gradvis vil elevenes oppfatninger *kondensere*, de begynner å betrakte prosessen som en helhet uten å henge seg opp i alle delprosessene. Dette er et viktig steg, som hun skriver «this is the point at which a new concept is "officially" born» (Sfard, 1991, s. 19). Men den strukturelle oppfatningen kommer først når eleven oppfatter begrepet som et fullverdig objekt frigjort fra prosessene, noe hun kaller *reifikasjon*. Hun skriver at dette siste steget gjerne kommer som et øyeblikkelig kvantesprang, der eleven ser begrepet i et helt nytt lys. Men det vektlegges at det krever mye tålmodighet og mye strev før man kan ta dette siste steget.

Det er verdt å merke seg, at i likhet med Mellin-Olsen (1984), bruker Sfard (1991) begrepet *oppfatning* og ikke *forståelse* slik som Skemp (1976) og Hiebert/Lefevre (1986). Begrepet oppfatning peker mer i retning av at man har en subjektiv holdning eller en innstilling til noe. Forståelse kan tolkes som å ha en innsikt i noe og å kunne anvende noe, det signaliserer noe som er mer objektivt enn en oppfatning.

Operasjonell oppfatning har fellestrekk med både Skemp (1976) sin instrumentelle forståelse og Hiebert/Lefevre (1986) sin prosedyreforståelse ved at de alle handler om å se matematikk ut fra regler og prosedyrer. På samme måte er relasjonell oppfatning beslektet med relasjonell forståelse og begrepsforståelse når de alle dreier seg om innholdet i de matematiske begrepene og forholdet mellom de ulike begrepene.

Samtidig er det også ulikheter i disse todelingsmodellene. Skemp (1976) virker å ha et mer markant skille mellom sine to typer forståelse, Hiebert/Lefevre (1986) fokuserer mer på samspillet mellom de to forståelsestypene, mens Sfard (1991) snakker mye om elevenes prosess eller utvikling fra den operasjonelle til den strukturelle oppfatningen.

Sfard (1991) vektlegger samtidig at det *er* en ontologisk kløft mellom den strukturelle og den operasjonelle oppfatningen, selv om de utgjør en dualisme. De to typene oppfatninger er komplementære og begge er nødvendige.

2.1.5 Algebraforståelse

Det amerikanske National Council of Teachers of Mathematics skriver at algebra læres best som en samling begreper og teknikker som er knyttet til representasjoner av kvantitative relasjoner, og som en matematisk tenkemåte for å formalisere mønstre, funksjoner og generaliseringer (NCTM, 2000). Det vektlegges videre at elever i læringsprosessen må knytte de matematiske ideene sammen for å få en dypere, varig og helhetlig forståelse.

Carolyn Kieran (2004) skriver at når algebraisk tenkemåte skal utvikles er det viktig at fokuset flyttes fra det instrumentelle til det relasjonelle, «a focus on relations and not merely on the calculation of a numerical answer» (Kieran, 2004, s. 140). Hun nevner flere justeringer som er viktig for algebraforståelsen, blant annet økt fokus på både operasjonene og deres inverser («doing/undoing») og et større fokus på eksvivalensbegrepet.

2.1.6 De ulike aktivitetene i algebra

Kieran (1996) deler skolealgebraen inn etter tre ulike *aktiviteter* hos elevene: *genererende*, *transformerende* og *resonnerende* aktivitet.

Genererende aktivitet er når likninger eller uttrykk skal settes opp og utformes. Dette innebærer å innføre variabler som representerer en situasjon, sette opp generelle uttrykk fra geometriske mønstre og tallfølger eller uttrykk som forteller noe om forholdet mellom størrelser. De underliggende objektene, slik som variabler og likhetstegnet, er også en del av den genererende aktiviteten. Denne aktiviteten kan i enkelte tilfeller knyttes til instrumentell eller prosedyreforståelse, for eksempel når elever skal sette opp en likning ut fra en tekst av typen «Per og Kari er til sammen 70 år, Per er 20 år eldre enn Kari, hvor gammel er Per?». Hvis dette er en oppgavetype elevene har trent på, vil de kunne generere likningen ved å følge en fast prosedyre. Men oppgaver som krever genererende aktivitet vil ofte være mindre oppskriftsmessige enn dette. Da vil den genererende aktiviteten være mest knyttet til relasjonell eller begrepsforståelse. Elever som nettopp har lært om differensiallikninger, trenger å forstå begreper som veksthastighet og variabler, når de for eksempel skal sette opp en differensiallikning ut fra en tekst om vannstrømningen inn og ut av et basseng.

Transformerende aktivitet er når regneregler blir anvendt og uttrykk blir manipulert. Dette innbefatter blant annet å samle ledd, faktorisere, substituere, løse likninger og forenkle uttrykk. Kieran (1996) omtaler denne aktiviteten som «rule-based». Dette er nok aktiviteten som i størst grad er knyttet til prosedyreforståelse eller instrumentell forståelse, fordi god kjennskap til regler og prosedyrer er tilstrekkelig for å utføre operasjonene og få riktig svar. Men de fleste manipulasjoner av uttrykk innebærer å bevare ekvivalens, så en relasjonell forståelse av ekvivalens vil gjøre det enklere å vite hva som er «lov og ikke lov» i selve transformasjonsaktiviteten. I noen oppgavetyper, for eksempel innen differensiallikninger, kan også selve transformasjonene være såpass kompleks, at uten begrepsforståelse vil det være umulig å memorere alle prosedyrer og spesialtilfeller.

Resonnerende aktivitet, av Kieran (1996) kalt «global meta-level», beskriver aktivitet der algebra er et virkemiddel og at ikke algebraen i seg selv er aktiviteten. Altså når algebra brukes som verktøy, slik som innen problemløsning, modellering, utforskning eller bevis. For å vite hvilke verktøy som er tilgjengelig og hvilke som fungerer best, når man for eksempel skal modellere en situasjon, må man ha forståelse for de matematiske objektene involvert og relasjonen mellom disse. Så denne aktiviteten vil i stor grad være forbundet med relasjonell forståelse eller begrepsforståelse. Men igjen kan det nok tenkes aktiviteter av denne typen som kan foregå uten så mye begrepsforståelse, for eksempel rutinepregede modelleringsoppgaver der en bruker regresjon i Geogebra.

2.1.7 Misoppfatninger i algebra

Formålet med dette forskningsprosjektet er å få innsikt i elevers kompetanse og resonnering innen faktorisering. Det vil være interessant å finne ut om noe av resonneringen kan være påvirket av misoppfatninger, for eksempel knyttet til ekvivalensbegrepet. En misoppfatning er, i motsetning til slurvefeil, noe systematisk som viser seg i elevenes tenkemåte. Brekke definerer misoppfatninger som *ufullstendige tanker knyttet til et begrep* (Brekke, 2002).

Brekke (2002) sier videre at bak misoppfatninger ligger en bestemt tenkning, som ofte er resultat av en overgeneralisering av tidligere kunnskaper og et forsøk på å skape mening og sammenheng. Ifølge Piagets konstruktivistiske læringssyn blir erfaringer lagt i mentale skjemaer. En misoppfatning kan ses på som at kunnskap havner i feil skjema og hindrer dermed videre forståelse. Brekke (2002) tar til orde for å bruke diagnostiske oppgaver for å skape kognitive konflikter, slik at misoppfatninger utfordres og overvinnes.

Misoppfatninger i algebra kan både knyttes til det Sfard (1991) kaller den strukturelle og den operasjonelle oppfatningen. Det kan være ufullstendige tanker knyttet til selve de matematiske objektene og begrepene, eller det kan være ufullstendige tanker knyttet til operasjoner og regneregler.

Likhetstegnet blir sett på som problematisk for mange elever, de viser liten forståelse for ekvivalensbegrepet. Kieran (1981) forklarer dette med at barn får et inntrykk av likhetstegnet som en operator; et «do something-signal» som skiller oppgaven fra svaret. Her virker det som at selve misoppfatningen består i at man forstår begrepet som en operasjon og ikke et eksisterende begrep. Dette kan ses i sammenheng med Sfard (1991) sin todeling av oppfatning, elever som har denne misoppfatningen har ikke en strukturell oppfatning av ekvivalens, oppfatningen er ikke frigjort fra operasjonen. Denne misoppfatning kan få store konsekvenser for forståelsen av for eksempel likninger, og for det som er temaet i dette forskningsprosjektet, faktorisering av uttrykk.

Et annet problem knyttet til likhetstegnet er forskjellen på en likning og en identitet. I en studie fra 1987 av Lee og Wheeler ble 254 elever i 15-årsalderen bedt om å forklare hovedforskjellen på uttrykkene $(x - 1)(x + 2) = 4$ og $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$. Ingen av elevene bemerket at det første uttrykket var en likning som er sann for noen konkrete verdier av x, mens det andre uttrykket er en identitet som alltid er sann (Bell, 1994). Å forklare forskjellen på disse uttrykkene hører mest hjemme i det Kieran (1996) kalte resonnerende aktivitet, algebraen er ikke selve aktiviteten, det handler mer om relasjonen mellom matematiske objekter. En slik misoppfatning har å gjøre med elevenes strukturelle oppfatning av de matematiske objektene, ufullstendige oppfatninger av objektene gjør at de ikke klarer å skille dem fra hverandre.

I sin studie har Naalsund (2012) kartlagt algebraforståelsen hos 412 åttendeklassinger og 417 tiendeklassinger. Her kommer det blant annet frem at elevene har en utbredt oppfatning av bokstavsymboler som forkortelser for konkrete objekter. Bokstavsymboler i algebraiske uttrykk kan ha ulike tolkninger avhengig av sammenhengen. Bokstaver kan symbolisere konkrete tall, spesifikke ukjente, generaliserte størrelser eller variabler. Det kan også være visse bokstaver som elevene har bestemte erfaringer med og som de overgeneraliserer betydningen av, for eksempel at «x alltid er den ukjente» eller at «v står for fart».

En annen misoppfatning, som har store konsekvenser for elevenes utregninger, er operasjonenes orden eller regnerekkefølge. Et typisk problem her vil være hvis man alltid regner fra venstre mot høyre uten å ta hensyn til parenteser eller operatorenes prioritet. Parenteser blir enten ignorert eller man ekspanderer feil, når for eksempel 4(x + 5) blir tolket som 4 + x + 5 (Naalsund, 2012). Denne type misoppfatninger er knyttet til både den instrumentelle forståelse, man har ikke god nok kjennskap eller oversikt over de matematiske spillereglene, og den relasjonelle forståelsen av operatorer og tegnsetting.

2.2 Kompetanse

2.2.1 Kompetansebegrepet

I dagligtale kan ofte begrepene forståelse og kompetanse bli brukt om hverandre, selv om forståelse gjerne oppfattes som noe mer teoretisk, mens man forbinder kompetanse med å være i stand til å gjøre noe. I den overordnede del av gjeldende læreplan (fagfornyelsen) gis denne definisjonen:
Kompetanse er å kunne tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning. (UDIR, 2020)

Den siste setningen forteller at kompetanse er noe mer enn forståelse, UDIR (2020) presiserer videre at kompetanse *omfatter* forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning.

Niss & Højgaard (2019) har følgende definisjon av hva som menes med matematisk kompetanse. «Mathematical competence is someone's insightful readiness to act appropriately in response to all kinds of mathematical challenges pertaining to given situations» (Niss & Højgaard, 2019, s. 12). Kompetanse dreier seg altså om å være i stand til å handle hensiktsmessig ovenfor matematiske utfordringer. Det blir videre presisert at man kan ha «passivt lagret» forståelse for matematiske begreper, relasjoner og metoder uten å ha matematisk kompetanse. Forståelse blir, i likhet med hos UDIR (2020), sett på som en delmengde av matematisk kompetanse.

De nylig omtale forståelsesmodellene opererte alle med en todeling av forståelse. Man kan jo undres på hvorfor det alltid var to typer, hvorfor det ikke var flere nyanser. Når det nå skal handle om kompetanse, opereres det med mye flere nyanser. I overgangen fra å snakke om forståelse, til å snakke om kompetanse, er det altså en utviding av hva det vil si å kunne matematikk, at det består av mange flere elementer.

2.2.2 Niss´ kompetanser

I den danske rapporten fra 2002, *Kompetencer og matematikklæring* (kapittel D.2), skriver Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen om 8 ulike matematiske kompetanser i det allmenne gymnas: *tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse, resonneringskompetanse, representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse, kommunikasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse*.

Tankegagnskompetanse handler om å kjenne, forstå og håndtere matematiske begrepers rekkevidde (og begrensninger) og deres forankring i diverse domener (Niss & Højgaard, 2002). Å forstå matematiske begreper og deres forankring i diverse domener, ligger nært opp til relasjonell forståelsen hos Skemp (1976) eller relasjonell forståelse hos Hiebert/Lefevre (1986). Mens det å håndtere matematiske begrepers rekkevidde kan mer forstås i retning av å vite hvilke prosedyrer som gjelder for hvilke områder, som stemmer med beskrivelsene av instrumentell forståelse eller prosedyreforståelse.

Problembehandlingskompetanse består i å kunne stille opp, formulere, avgrense og presisere diverse matematiske problemer. Dette gjelder både rene matematikkoppgaver og anvendt matematikk, samt både «åpne og lukkede» oppgavetyper. Niss & Højgaard (2002) sine beskrivelse her minner mye om det Kieran (1996) kaller genererende aktivitet, spesielt dette med å stille opp og formulere et matematisk problem.

Modelleringskompetanse går ut på å analysere grunnlag og egenskaper for eksisterende matematiske modeller. Det innebærer også å kunne utføre aktiv bygging av matematiske modeller, noe som var ett av områdene innenfor resonnerende aktivitet hos Kieran (1996).

Resonneringskompetanse dreier seg om å forstå og gjennomføre logiske resonnementer og matematiske bevis. Dette er også ett av områdene som blir trukket fram når Kieran (1996) omtaler resonnerende aktivitet.

Representasjonskompetanse består i å forstå og anvende forskjellige representasjoner av matematiske objekter, samt forstå de innbyrdes forbindelsene mellom slike representasjoner. Når det her brukes «å forstå de innbyrdes forbindelsene», er dette veldig sammenfallende med Hiebert/Lefevres (1986) beskrivelse av relasjonell forståelse.

Symbol- og formalismekompetanse handler om å avkode matematisk symbolspråk og kunne oversette mellom matematisk språk og «naturlig» språk. Slik kompetanse innebærer også å kunne behandle formler og forstå «spillereglene» i formell matematikk. Det siste ligger nært opp til instrumentell forståelse/prosedyreforståelse, mens det å oversette mellom matematisk og naturlig språk krever mer relasjonell forståelse/begrepsforståelse.

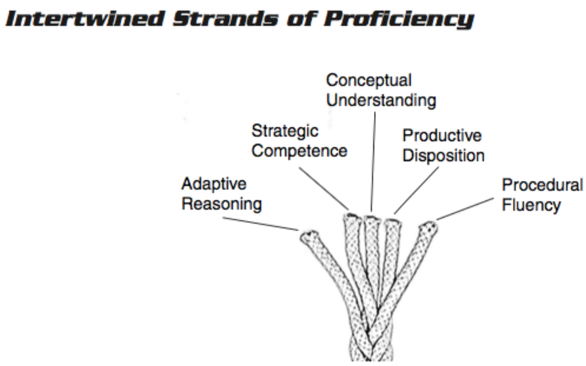
Kommunikasjonskompetanse innebærer å kunne sette seg inn i og fortolke skriftlige, muntlige og visuelle matematiske utsagn og tekster. Den genererende aktiviteten hos Kieran (1996) vil kreve slik kompetanse, man må kunne fortolke matematiske utsagn når man for eksempel skal sette opp en likning ut fra en tekst.

Den siste kompetansetypen Niss & Højgaard (2002) beskriver er *hjelpemiddelkompetanse*, som handler om å ha kjennskap og kunne bruke ulike verktøy i matematikk. Når elever for eksempel bruker digital graftegner faller nok dette mest sammen med instrumentell forståelse eller prosedyreforståelse. I oppgaver der man skal undersøke egenskapene til matematiske uttrykk ved hjelp av CAS-verktøy, er begrepsforståelse eller relasjonell forståelse gjerne nødvendig. Niss skriver videre at hjelpemiddelkompetanse ofte går hånd i hånd med problembehandlings-kompetanse og representasjonskompetanse.

2.2.3 Kilpatricks strenger av kompetanse

En annen inndeling av matematisk kompetanse finner man i *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*, en konsensusstudie fra 2001 der Jeremy Kilpatrick, Jane Swafford og Bradford Findell er redaktører. I kapittel 4 beskriver de fem *strenger* som til sammen danner et tau av kompetanse. Disse strengene beskrives som «mål som matematikk-læring bør strekke seg mot», «det som trengs for å lykkes i å lære matematikk» og «kognitive endringer vi ønsker å stimulere» (Kilpatrick et al., 2001, s. 116).

Figur 1 nedenfor illustrerer hvordan disse strengene er sammenflettet, tauets styrke er avhengig av alle strengene. Disse fem strengene er: *begrepsforståelse, prosedyreflyt, strategisk kompetanse, adaptiv resonnering og produktiv disposisjon*.



Figur 1: Strengmodell for matematisk kompetanse, Kilpatrick et al. (2001) s.117

Begrepsforståelse er ifølge Kilpatrick et al. (2001) kompetansen som innebærer å ha et integrert og funksjonelt grep om de matematiske begrepene. Elever med begrepsforståelse vet både hvordan, hvorfor og når en matematisk idé skal brukes. Deres kompetanse er organisert og helhetlig, og de er i stand til å forklare de matematiske metodene.

Kilpatrick et al. (2001) skriver at begrepsforståelse ikke nødvendigvis kommuniseres verbalt, elever kan ha forståelse uten at de kan sette ord på forståelsen. Men det sies videre at en signifikant indikator på begrepsforståelse er at elever er i stand til å bruke ulike representasjoner, at de har mange ulike tilnærminger de kan dra veksler på.

Begrepsforståelse er viktig for elevens videre læring i matematikk, de har da et mer solid fundament å bygge videre på. Elever med denne kompetansetypen har gjerne organisert sine kunnskaper i klynger, slik at de vet hvor de forskjellige begrepene og algoritmene hører hjemme og hvilke forbindelser de har. Det blir trukket frem et eksempel fra barnetrinnet når elever lærer ensifret addisjon; elever som har forstått prinsippet med at addisjon er kommutativ, trenger bare pugge halvparten av regnestykkene. Begrepsforståelse gjør på denne måten elevene mer effektive i læringsarbeidet, de slipper å memorere alle prosedyrer. Dette argumentet brukte også Skemp (1976) i forbindelse med relasjonell forståelse.

Hiebert & Lefevre (1986) brukte også begrepsforståelse som en av to typer forståelse, og de la stor vekt på samspillet og avhengigheten mellom begrepsforståelse og prosedyreforståelse. På samme måte fremhever Kilpatrick et al. (2001) at begrepsforståelse er sammenvevd med de andre kompetansetypene.

Prosedyreflyt gjør at man kan utføre matematiske operasjoner korrekt, effektivt, fleksibelt og hensiktsmessig. Eleven kjenner de forskjellige prosedyrene og vet når de kan brukes.

Kilpatrick et al. (2001) fremhever spesielt samspillet mellom prosedyreflyt og begrepsforståelse; ikke bare er prosedyreflyt en forutsetning for å forstå nye matematiske begreper, ofte vil matematiske prosedyrer i seg selv også være matematiske begreper. Prosedyrer som blir forstått når de blir lært, vil lettere kunne rekonstrueres korrekt av eleven. Det vil derfor være mindre behov for gjentatt drilling og repetisjon når prosedyrene blir forstått.

Prosedyreflyt vil gjøre elevene i stand til å løse mange rutineoppgaver. Det er også en viktig forutsetning for å løse mer komplekse eller ukjente oppgavetyper, men for å løse slike vil prosedyreflyt ikke være tilstrekkelig alene. Da må flere «strenger i tauet» tas i bruk.

Prosedyreflyt er kompetansen til å utføre regneoperasjoner slik de skal. Dette har mange fellestrekk med Skemps (1976) instrumentelle forståelse og prosedyreforståelse hos Hiebert/Lefevre (1986), men disse handler mer om at man *forstår* matematikk som prosedyrer. Prosedyreflyt er mer «aktiv», det dreier seg om å kjenne til og å kunne *utføre* prosedyrer. Dette er kompetansen som i stor grad anvendes i den transformerende aktiviteten hos Kieran (1996), når regneregler blir anvendt og uttrykk manipulert.

Strategisk kompetanse handler om å være i stand til å formulere problemer, representere og løse dem. Elever med strategisk kompetanse kan løse oppgaver der det ikke er gitt hva slags strategi som kan lede til en løsning, eller der flere strategier er mulige, og utfordringen er å finne den mest hensiktsmessige løsningsstrategien. Strategisk kompetanse er også viktig for å løse oppgaver der utfordringen er å formulere selve problemstillingen og finne ulike representasjoner for problemet, slike oppgaver vi i Norge gjerne kaller åpne oppgaver eller problemløsningsoppgaver. «Nonroutine problems require productive thinking because the learner needs to invent a way to understand and solve the problem» (Kilpatrick et al., 2001, s. 126).

En elev med strategisk kompetanse kan effektivt finne essensen i en matematisk tekst. Kilpatrick et al. (2001) refererer til en analyse av elevers øyebevegelser, som viser at gode problemløsere fokuserer på strukturelle relasjonene mellom størrelser i oppgaveteksten, mens elever som sliter med problemløsning fokuserer for mye på overflateegenskaper og selve tallene.

Her kan man trekke paralleller til det Sfard (1991) beskrev som strukturelle oppfatninger. Det handler om å kjenne egenskapene til de matematiske objektene, og ikke bare se objektene ut fra operasjoner, for å vite hvilke objekter man kan anvende. En operasjonell oppfatning vil ikke være tilstrekkelig når det ikke finnes en ferdiglaget prosedyre for å løse oppgaven.

Adaptiv resonnering blir beskrevet av Kilpatrick et al. (2001) som evnen til å tenke logisk om sammenhenger innen begreper og situasjoner, det er «limet som holder alt sammen». Med denne kompetansen kan elevene navigere seg gjennom fakta, prosedyrer, begreper og metoder.

Adaptiv resonnering handler ikke bare om evnen til å bevise noe matematisk, men også om å kunne forklare og argumentere for egne matematiske strategier. Elever med denne kompetansen kan vurdere om en løsningsstrategi er hensiktsmessig, de kan overvåke sine egne strategier og generere nye strategier.

Det handler også om å tilpasse allerede tilegnede ferdigheter til en ny og ukjent problemstilling. I problemløsningsoppgaver trengs strategisk kompetanse når problemstilling skal formuleres og representeres, men adaptiv resonnering må «ta over» når elevene skal avgjøre om en strategi vil være holdbar. Implementeringen av en løsningsstrategi vil kreve prosedyreflyt, men adaptiv resonnering må til for å avgjøre om strategien er hensiktsmessig.

Kieran (1996) skrev om resonnerende aktivitet innen algebra og brukte mange av de samme karakteristikkene. Problemløsning, det å argumentere for en løsning og det å bevise noe ble trukket frem som eksempler på resonnerende aktivitet. Denne aktiviteten ble også, i likhet med adaptiv resonnering hos Kilpatrick et al. (2001), sett på som noe essensielt og overbyggende i forhold til de andre aktivitetstypene.

Produktiv disposisjon er den siste av strengene hos Kilpatrick et al. (2001). Her dreier det seg om synet på seg selv i forhold til matematikken og om holdninger til matematikk. Det handler om synet på matematikk som noe meningsfullt, nyttig og viktig. Det dreier seg også om tro på egne ferdigheter og egne evner til å lære seg matematikk.

En elev som tålmodig jobber med utfordrende matematikkoppgaver vil opparbeide en mestringsfølelse, som igjen vil gi en positiv holdning til faget. Videre vil dette gjøre eleven bedre i stand til å lære nye begreper og tilegne seg nye ferdigheter.

Det blir videre poengtert av Kilpatrick et al. (2001) at klassetrinnene der elevene kan begynne å velge vekk de mest utfordrende matematikkursene er spesielt kritisk med tanke på elevenes produktive disposisjon. I Norge vil dette tilsvare videregående trinn1 og 2 der elevene kan velge praktisk matematikk i stedet for teoretisk, samfunnsfaglig matematikk eller realfags-matematikk. Det trekkes også frem lærernes spesielle ansvar for å spre en positiv holdning til læring av matematikk og synet på matematikk som noe som er verdt å bruke tid på.

2.2.4 Kompetansemål innen faktorisering

Dette forskningsprosjektet skal undersøke elevers kompetanse innen faktorisering. Så hva slags kompetanse forventes fra utdanningsmyndighetene på dette området?

Ett av kompetansemålene for matematikk vg1T i Kunnskapsløftet var at *elevene skal kunne faktorisere kvadratiske uttrykk, bruke kvadratsetningane og lage fullstendige kvadrat* (UDIR, 2013). I den nye læreplanen (fagfornyelsen) for 1T er selve begrepet faktorisering utelatt, men det vil falle naturlig inn under kompetansemålet *å utforske samanhengar mellom andregrads-likningar og andregradsulikskapar, andregradsfunksjonar og kvadratsetningane og bruke samanhengane i problemløysing* (UDIR, 2020).

I den nye læreplanen er det en tydelig dreining fra det helt konkrete og instrumentelle «å kunne faktorisere kvadratiske uttrykk», til det mer relasjonelle «å utforske sammenhenger mellom» ulike matematiske konsepter der kvadratiske uttrykk inngår. Dette er i tråd med det tidligere omtalte fokusskiftet hos Kieran (2004).

2.2.5 Faktorisering i ungdomsskolen og videregående skole

Elever som begynner på videregående skole har noe erfaring med faktorisering, ett av kompetansemålene for 8.klasse er *«å utforske og beskrive primtalsfaktorisering og bruke det i brøkrekning»* (UDIR, 2020). Selv om noen elever har blitt introdusert for faktorisering av polynomer på ungdomsskolen, er det først når elevene velger teoretisk matematikk på videregående at dette blir et sentralt tema.

Det betyr en stor overgang i hva det innebærer å faktorisere; på ungdomsskolen var dette gjerne synonymt med å «splitte opp» hvert ledd i primtallsfaktorer ($15 + 3x$ blir til $5 \cdot 3 + 3 \cdot x$), mens på videregående skole innebærer faktorisering av kvadratiske uttrykk at det blir omskrevet fra et flerleddet uttrykk til et uttrykk med så få ledd som mulig ($x^2 - 7x + 12$ blir til $(x - 3)(x - 4)$). Dette kan for elevene oppfattes som to vidt forskjellige ting. I Piaget sitt konstruktivistiske læringssyn omtales kognitive skjemaer som elevene plasserer sine erfaringer i, og elevenes erfaringer med faktorisering vil kanskje befinne seg i et «feil skjema», et skjema som omhandler primtall.

2.3 Resonnering

2.3.1 Resonnering i matematikkfaget

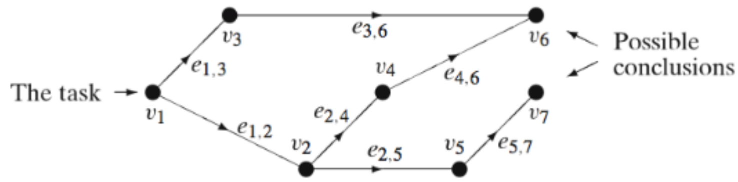
Logisk resonnering er helt fundamentalt i matematikken, siden alle operasjoner, slutninger og argumenter følger logiske spilleregler. En viktig del av skolematematikken må derfor være å trene opp elevenes evne til resonnering.

I National Council of Teachers of Mathematics er resonnering og bevis en av fem prosesstandarder for skolematematikk. Her står at å resonnere og tenke analytisk innebærer å se mønstre, strukturer og regelmessigheter. Folk som resonnerer utvikler og evaluerer matematisk argumentasjon. Matematiske bevis ses på som en formell måte å uttrykke resonnementer (NCTM, 2000).

I Fagfornyelsens læreplan for matematikk 1T er resonnering og argumentasjon et av kjerneelementene og blir definert som «å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer» (UDIR, 2020). Det står videre at elevene skal utforme egne resonnement både for å forstå og for å løse problemer.

2.3.2 Lithners resonneringstyper

Johan Lithner har skrevet *A Research Framework For Creative And Imitative Reasoning* (hentet fra tidsskriftet Educational Studies in Mathematics, 2007). Dette beskrives som et konseptuelt rammeverk for forskning på elevers læring og resonnering innen matematikk. Lithners fokus er å karakterisere selve resonneringen (eller tankegangen) som ligger bak elevers strategivalg når de jobber med matematikkoppgaver.



Figur 2: resonneringsprosessen som graf, Lithner (2007) s.258

Figur 2 viser hvordan Lithner ser for seg prosessen fra eleven møter oppgaven, frem til oppgaven er løst, som en graf. Nodene tilsvarer kunnskapen eleven har i øyeblikket, mens kantene tilsvarer resonneringsprosessen som tar eleven fra én tilstand av kunnskap til neste. Resonneringen deles inn i to hovedtyper, imitativ og kreativ, der den imitative deles inn i flere underkategorier.

Imitativ memorert resonnering (MR) er når en elev løser en matematikkoppgave, og strategivalgene kun baserer seg på å huske hele løsningen. Dette vil gjerne være tilfelle dersom en elev gjengir et matematisk bevis, en utledning, en formel eller faktakunnskaper. Å implementere en slik strategi innebærer kun å skrive ned det man husker. Hvis man har besvart en matematikk-oppgave ved å utelukkende memorere noe, vil det neppe være tegn på verken instrumentell eller relasjonell forståelse. Det blir omtrent som å sitere et dikt uten å forstå diktets mening.

Imitativ algoritmisk resonnering (AR) er når strategivalgene består i å huske en løsningsalgoritme eller en prosedyre. Algoritmen «tar hånd om» alle begrepsmessige vanskelige deler, mens selve implementeringen av algoritmen er triviell (Lithner, 2007).

Lithner deler algoritmisk tenkning i disse tre underkategoriene: *familiær AR, avgrensende AR og veiledet AR*.

Familiær AR betyr at løsningsstrategien blir valgt fordi oppgaven er av en velkjent type, der den aktuelle algoritmen løser slike oppgaver. Deretter blir algoritmen implementert. Eleven kan gjenkjenne oppgavetypen basert på gjenkjennbare symboler, figurer eller nøkkelord. Et typisk eksempel kan være å finne maksimalverdien til en funksjon og algoritmen er å derivere funksjonen og sette denne lik null. Argumentene som støtter strategivalget trenger ikke være noe mer enn at «denne algoritmen brukes i slike oppgaver». Det trengs ikke argumenter som er forankret i matematiske objekter, transformasjoner eller begreper. Familiær AR gjerne vil være tilstrekkelig for å løse rutineoppgaver, men duger ikke like godt i mer komplekse eller (for eleven) ukjente oppgavetyper.

Denne type resonnering har mange fellestrekk med instrumentell forståelse hos Skemp (1976) og prosedyreforståelse hos Hiebert/Lefevre (1986), å vite hva man skal gjøre uten annen begrunnelse enn at det er riktig prosedyre. Men selv om en elev resonnerer på denne måten, trenger ikke det være et tegn på manglende relasjonell forståelse eller begrepsforståelse. Det betyr bare at oppgavetypen er velkjent og algoritmen er godt innarbeidet, så noe ytterligere resonnement trengs ikke.

Avgrensende AR er en type resonnering som gjerne tas i bruk når eleven ikke vet hva slags algoritme som skal benyttes. Eleven må foreta en avgrensing av hvilke algoritmer det kan velges blant. Denne avgrensingen foretas ut fra overflatiske egenskaper i oppgaven eller i svaret eleven får. Det kan være at eleven ser en funksjon i en oppgave der man skal finne nullpunkter og i stedet deriverer funksjonen, fordi det er noe man ofte gjør med funksjoner.

Eller at eleven får en brøk som svar når man forventer et helt tall, og forkaster algoritmen på grunn av dette, selv om svaret kanskje var riktig.

I slike situasjoner ville eleven klart å tenke ut en strategi hvis eleven hadde en mer relasjonell forståelse eller begrepsforståelse. En av fordelene ved slik forståelse var ifølge Skemp (1976) at man slipper å pugge mange fremgangsmåter, hvis man har en relasjonell forståelse er man i stand til å tenke seg frem til riktig fremgangsmåte. Så avgrensende resonnering vil nok være mer knyttet til manglende begrepsforståelse enn familiær AR.

Veiledet AR innebærer at resonneringen er veiledet av en tekst eller en person. En tekstveiledet AR er typisk når eleven bruker et eksempel i læreboka som kun trenger å modifiseres til den aktuelle oppgaven. Det er gjerne ikke noen argumenter for å implementere strategien annet enn overflatiske likheter.

En annen variant er når en person veileder eleven gjennom løsningen av en oppgave. Dette foregår typisk når en lærer hjelper en elev, og læreren foretar alle strategiske valg som er problematiske. Eleven vil kun svare på enkle delspørsmål og foreta de gjenstående trivielle rutinetransformasjonene.

Her kan det trekkes tråder tilbake til Kieran (1996) og de ulike aktivitetene i algebra. Hvis en problemløsningsoppgave krever genererende eller resonnerende aktivitet, kan en veileder dele opp oppgaven i mindre biter som hver for seg kan løses med transformerende aktivitet. På denne måten vil veilederen flytte oppgaven fra å befinne seg på begreps/relasjonelt nivå til operasjonelt/instrumentelt nivå.

Kreativ matematisk resonnering (CMR), Lithners siste kategori handler om når tankegangen er kreativ, i motsetning til imitativ. Kreativitet kan være et ullent begrep, i noen sammenhenger kan det være et «hurra»-ord uten så mye innhold. I sin artikkel setter Lithner opp tre kriterier for at et resonnement kan kalles CMR:

- <u>Nyskapende (novelty)</u>: en ny (for eleven) resonneringssekvens blir skapt (eller er glemt og blir skapt om igjen).

- <u>Plausibelt</u>: det er argumenter som støtter strategivalget og utførelsen og som kan grunngi konklusjonen.
- <u>Matematisk fundert</u>: argumentasjonen er forankret i vesentlige og iboende egenskaper for de matematiske begrepene som er involvert.

Lithner fremhever kreative tankeprosesser som fleksible, som kan innta forskjellige tilnærminger og tolkninger av situasjoner. Kreative resonnering inneholder begrepsbaserte tankeprosesser og de er ikke forhindret av overfiksering på algoritmer (Lithner, 2007).

Det blir også trukket frem at den første av disse kriteriene (novelty) kan være problematisk å avgjøre. Hva som er en ny resonneringssekvens blir veldig avhengig av hvem eleven er, hvilke erfaringer eleven har og hvilket matematikknivå eleven ligger på.

De to siste av Lithners kriterier er sterkt forbundet med begrepsforståelse og relasjonell forståelse, her må man ha innsikt i hva begrepene inneholder og hvordan begrepene relateres til hverandre. De iboende egenskapene til begrepene er direkte knyttet til en strukturell oppfatning av begrepene, slik Sfard (1991) beskrev. Hvis man for eksempel har en oppfatning av derivasjon som noe operasjonelt, vil det være vanskelig å bruke den deriverte i et matematisk argument. Hvis man derimot har en strukturell oppfatning av derivasjon vil man kunne bruke dette i en argumentasjon om blant annet vekst, endring og maksimalverdi fordi man kjenner de iboende egenskapene til den deriverte.

3.0 Metode

Her vil jeg gjøre rede for vitenskapsteoretisk ståsted, og ut fra forskningsspørsmålene argumentere for metodiske valg og forskningsdesign for dette prosjektet. Videre beskrives hva slags data som trengs for å besvare forskningsspørsmålet, og hvordan datainnsamling ble planlagt og gjennomført. Deretter diskuteres og beskrives hva slags analysemetode som ble benyttet. Til slutt er noen betraktninger om reliabilitet, validitet og etikk.

3.1 Forskningsspørsmål og vitenskapsteoretisk ståsted

Denne oppgaven har to forskningsspørsmål:

- Hvilke typer kompetanse viser vgs-elever innen faktorisering?
- Hvordan resonnerer elevene når de jobber med faktorisering?

Det første spørsmålet forteller at formålet med oppgaven å få innblikk i hva som karakteriserer elevenes kompetanse og *hvordan* de forstår faktorisering, ikke *om* de forstår det eller hvor mye de forstår. Det andre spørsmålet handler om å beskrive tankeprosessene hos hver enkelt elev i arbeidet med faktorisering. Jeg søker her etter individuelle tolkninger og tenkemåter som elevene har konstruert omkring temaet. Forskningsspørsmålene gjør dermed at denne oppgaven hører inn under subjektivistisk forskning, kunnskapen vil oppstå i møtet mellom forskeren og forskningsdeltakerne, altså ligger det til grunn en subjektivistisk oppfatning av den sosiale realiteten (Cohen et al., 2007).

Min mulighet for å besvare forskningsspørsmålene ligger i å kommunisere med elevene, min kunnskap om dette må altså konstrueres gjennom språket og i et sosialt samspill med elevene. Mitt eget læringssyn er at også elevenes egne kunnskaper konstrueres på denne måten i klasserommet og ellers i livet. Når det gjelder forskning på mennesker, læring og forståelse inntar jeg dermed et sosialkonstruktivistisk ståsted.

3.2 Oppgavens forskningsdesign

For å besvare forskningsspørsmålene trengs data som kan analyseres og gi meg innblikk i elevenes tanker når de jobber med faktorisering. En mulighet kunne være å lage en test som kunne gjennomføres for et stort antall elever, og på den måten innhente et stort datagrunnlag egnet for kvantitativ analyse. Men en slik undersøkelse ville vært mer egnet for å måle «hvor flinke» elevene er i faktorisering eller hva de kan best om temaet, noe som ikke er denne oppgavens formål.

Når jeg i forskningsspørsmålene ønsker å undersøke elevenes ulike kompetanser betyr det blant annet, ifølge UDIR (2020) sin definisjon, at jeg må undersøke elevenes *forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning*. Kvalitative studier gir gode muligheter for å gå i dybden hos noen få individer og innhente kunnskap om elevenes oppfatninger, refleksjoner og resonnementer. Mitt forskningsspørsmål har som intensjon å utforske og beskrive elevers kompetanse innenfor det matematiske temaet, så det er elevens oppfatning og fortolkning av de matematiske objektene og operasjonene som er i fokus. En kvalitativ forsker har nettopp dette som mål, å «prøve å forstå og løfte frem meningen folk har konstruert i forhold til sin livsverden og sine erfaringer» (Postholm, 2010, s.34).

Creswell (2005) skriver at kvalitativ forskning egner seg best når man ikke kjenner noen målbare variabler for det man skal undersøke, men at man vil utforske et begrep eller en idé. Det er også typisk for kvalitativ forskning at litteraturen og teorien spiller en mindre rolle, hovedvekten ligger på deltakernes fortolkninger og respons. Selv om denne studien benytter teoretiske rammeverk for å kategorisere elevenes kompetanse og resonnementer, er det ingen variabler som skal kvantitativt måles.

Det som skal forskes på her er altså elevenes oppfatning eller forståelse av faktorisering, etter at de har lært om og jobbet med dette gjennom sin skolegang. Dette gjør at min studie kan kalles en fenomenologisk studie, som ifølge Giorgi /Moustakas (1985/1994) sin definisjon er studier som «beskriver den meningen mennesker legger i en opplevelse knyttet til en bestemt erfaring av et fenomen» (Postholm, 2010, s.41). For å få tak i hva elevene har lært og erfart om temaet er det nødvendig å snakke med elevene om dette. Dermed vil intervju være den mest hensiktsmessige datainnsamlingsstrategien som kan tas i bruk (Postholm, 2010).

Cohen et al. (2007) skriver at intervjuer er et sterkt og fleksibelt redskap for datainnsamling, der flere sanser kan brukes samtidig. I tillegg til de uttalte ordene i seg selv, vil så vel måten de blir sagt på, fakter og mimikk kunne generere data for forskningen. Forløpet for et intervju kan kontrolleres, samtidig som det gir rom for spontanitet. Intervju gir en unik mulighet til å få et innblikk i enkeltindividers tankebaner og oppfatninger. Ut fra dette bestemte jeg meg for at intervju var en egnet måte å samle data for å kunne besvare forskningsspørsmålene. Kvalitative forskningsintervjuer bør ifølge Cohen et al. (2007) være i stand til å avdekke og utforske nyanserte beskrivelser av respondentene. En annen viktig egenskap ved intervjuer er at de må ha «fokus på spesifikke ideer og tema, altså ha en retning, uten å være for strukturbundet» (Cohen et al., 2007, s.355). Intervjuene bør altså klare å fange opp nyanser, ha et klart fokus og samtidig ha en viss fleksibilitet.

For å oppfylle disse intensjonene mest mulig, landet jeg på at oppgavebasert semistrukterert intervju ville være et egnet design for å besvare forskningsspørsmålene. Et slikt design vil være gunstig fordi:

- Oppgavene ville sette fokus på nøyaktig det jeg ønsket kunnskap om.
- Oppgavene ville sørge for at alle respondentene snakker om «det samme», det gir mulighet for å analysere og drøfte elevenes ulike tilnærminger til de samme detaljene.
- Et semistrukterert intervju ivaretar fokus på det jeg ønsker, men gir samtidig rom for å improvisere når en elev sier/gjør noe interessant som ikke kunne forutses.

Da jeg leste om strengmodellen, slik Kilpatrick et al. (2001) beskriver, kjente jeg igjen mange av beskrivelsene av de forskjellige kompetansetypene, dette var egenskaper jeg hadde observert gjennom flere år som matematikklærer. Og det var nettopp dette jeg ønsket å undersøke. Kilpatrick et al. (2001) beskriver klare kjennetegn på de forskjellige kompetansetypene, noe som ville gjøre det mulig å avdekke og kategorisere disse kompetansene hos elevene. Det første av forskningsspørsmålene ble utarbeidet på bakgrunn av dette rammeverket, helt i starten av arbeidet med dette masterprosjektet. Det ble dermed førende for hvordan prosjektet skulle gjennomføres og hva slags forskningsdesign som skulle anvendes.

Goldin (1997) fremhever viktigheten av at oppgavebaserte intervju har en teoretisk forankring eller rammeverk. Både oppgavene man skal gi elevene og intervjuspørsmålene må ta utgangspunkt i begreper og kategorier fra det teoretiske rammeverket. I mitt tilfelle kan de ulike kompetansene i strengmodellen ses på som variabler som skal undersøkes. Selv i kvalitative studier som denne, vil det være elementer av naturvitenskapelig metode. I utarbeidelsen av elevoppgavene og intervjuspørsmålene var det viktig tilstrebe en viss grad av variabelkontroll; hver oppgave eller spørsmål bør være designet for å registrere én bestemt kompetansetype om gangen, eller i alle fall så få som mulig.

Det andre forskningsspørsmålet tok form i etterkant av intervjuene. Jeg ble nysgjerrig på hvilke resonnementer man kunne finne hos elevene når de arbeidet og snakket om faktorisering. Etter å ha lest Johan Lithners artikkel der han beskriver et forskningsrammeverk for imitativ og kreativ resonnering, kom ideen om å benytte disse kategorier for å undersøke elevenes resonnering. Forskningsspørsmål nummer 2 er direkte knyttet til hver elev sine tankeprosesser og refleksjoner, så intervjuene ville være en god kilde for å besvare dette spørsmålet også.

Når man leser Lithners artikkel ser man utdrag av transkripsjoner fra hans egne intervjuer med elever, og der kommer det tydelig frem at disse intervjuene er oppgavebaserte (Lithner, 2007, s.265). Lithners egen metode var å gi elevene oppgaver, deretter snakke med elevene og på grunnlag av dette analysere resonnering han hadde observert. Jeg tenker det er et godt argument, at når opphavsmannen til det teoretiske rammeverket bruker denne metoden, er det også en godt egnet metode når jeg skal benytte dette rammeverket på samme måte.

Både forskningsspørsmål og formålet med mitt prosjekt ble altså modifisert i etterkant av datainnsamlingen. Dette er et eksempel på at i kvalitativ forskning kan samhandlingen med respondentene endre hvilken retning prosjektet tar underveis, «the purpose of a study and the questions asked by the researcher may change during the process of inquiry based on feedback or responses from participants» (Creswell, 2008, s.130).

Postholm (2010) skriver om kvalitativ forskning at denne ofte vil være både deduktiv i den forstand at forskeren har et rammeverk og noen variabler som skal undersøkes, men også induktiv ved at nye variabler kan oppdages underveis og endre formålet med forskningen. I mitt tilfelle var forskningen i utgangspunktet deduktiv ved at det var veldefinerte variabler (kompetansetyper) som skulle undersøkes, men endte opp som delvis induktivt og deduktivt ved at en ny variabel (resonneringstyper) ble like viktig.

3.3 Planlegging av datainnsamling

3.3.1 Første fase og pilotgjennomkjøring

Det første forskningsspørsmålet handler om hvilke av kompetanser elevene viser innen faktorisering. Jeg startet med å lage oppgaver som elevene først skulle løse, og som deretter skulle være grunnlaget for intervjuene. Oppgavene måtte være egnet for å avdekke ulike kompetansetyper, være relativt raske å løse og samtidig inneholde nok utfordringer. Det ble først utarbeidet 5 oppgaver.

Disse oppgavene ble prøvd ut på to pilotelever med påfølgende intervju. Jeg fant da ut at to av oppgavene var såpass like og overlappet hverandre med hensyn til hva slags kompetansetype de målte, så den ene ble fjernet. Det endelige oppgavesettet besto dermed av 4 korte oppgaver som hver respondent skulle løse. Pilotgjennomkjøringen ga også et innblikk i hvordan intervjuene kunne foregå og ga gode innspill og ideer til utformingen av intervjuspørsmålene.

Planen var at selve datainnsamlingen skulle foregå slik:

- Hver elev får 15 minutter alene på et rom, der de besvarer oppgavene skriftlig uten hjelpemidler.
- Forsker kommer inn i rommet, starter lydopptak og intervjuer eleven med utgangspunkt i oppgavene og i henhold til intervjuguide.
- Lydopptaket blir transkribert.

3.3.2 Konkretisering av teoretisk rammeverk

Jeg tok for meg de fire kompetansetypene fra strengmodellen hos Kilpatrick et al. (2001) som jeg ønsket å undersøke, og utarbeidet noen spesifikasjoner for hvordan disse kompetansetypene kunne knyttes til temaet faktorisering.

1) Begrepsforståelse.

- Hva det innebærer at et uttrykk er faktorisert.
- Hvilke hensikter faktorisering kan ha, hvilke anvendelser det kan ha.
- Om elevene ser sammenhenger mellom faktorisering, nullpunkter, forkorting og koeffisientene i et uttrykk.

2) **Prosedyreflyt**.
   - Regnetekniske ferdigheter i de matematiske operasjonene knyttet til faktorisering.
   - Om utregningene og resonnementene er korrekte, hensiktsmessige og effektive.

3) **Strategisk kompetanse**.
   - Hvordan elevene griper an oppgavene, spesielt oppgaver «utenfor boksen».
   - I hvilken grad de ser snarveier og ser de flere måter å gjøre oppgaven på.
   - Evne til å legge en plan og kombinere ulike prosedyrer når de løser oppgaver.

4) **Adaptiv resonering**.
   - Om eleven kan reflektere rundt oppgaven og de matematiske objektene involvert.
   - Deres evne til å tilpasse resonnementer og strategier til hver oppgavetype.
   - Om de kan forklare, begrunne og forsvare hvorfor prosedyren fungerer.

Disse punktene la jeg til grunn når oppgavesettet ble utarbeidet. Det ble også veiledende for utformingen av intervjuguiden.

3.3.3 Oppgavesett og intervjuguide

Oppgavesettet til elevene er gjengitt på side 33 (Figur 3) og intervjuguiden på side 34 (Figur 4). Nedenfor vil jeg kommentere hva slags kompetanse de er ment å avdekke. Det er også viktig å presisere her at når oppgavene/intervjuguiden ble laget var ikke forskningsspørsmålet om resonneringstyper kommet på banen ennå, så ingen spørsmål ble designet for å måle dette.

Spørsmålene i intervjuguiden er for å strukturere intervjuene og få tak mest mulig av de dataene jeg trenger. For hver oppgave laget jeg først noen spørsmål som skulle stilles dersom eleven klarte oppgaven. Da gikk spørsmålene ut på å forklare begreper, logikk og strategivalg. Dette kunne gi mer utfyllende informasjon om strategisk kompetanse, begrepsforståelse og adaptiv resonnering. Disse kompetansene er ikke alltid like lett å avdekke når man kun ser på elevens oppgavebesvarelse.

Det ble også laget spørsmål i tilfelle de ikke klarte oppgaven. Da gikk spørsmålene mer på å gi planlagte og gradvise hint, i håp om at eleven skulle komme i gang med oppgaven. Det kunne jo tenkes at eleven da kunne vise noe kompetanse og gi meg interessante data.

Figur 3: oppgavesett elever

A) Faktoriser uttrykket
$3x^2 - 6x$

B) Løs likningen
$3x^2 - 6x = 0$

C) Løs likningen
$(x + 4)^2 = 9$

D) Ta for deg brøken
$$\frac{x^2 + bx + 1}{x - 3}$$
For hvilken verdi av *b* kan brøken forkortes?

Figur 4: intervjuguide

Oppgave A)

Hvis fullført riktig:

- hvorfor er dette uttrykket (i svaret) faktorisert og dette (i oppgaven) ikke?

Hvis ikke fullført riktig:

- er det noe felles faktorer her, og kan du utnytte dette?

Oppgave B)

Hvis utført riktig ved hjelp av faktorisering (produktregelen):

- hvorfor løste du oppgaven slik?
- så du oppgaven i sammenheng med forrige oppgave?
- hva vil du si er logikken i «produktregelen»?

Hvis utført med annen metode eller ikke fullført riktig:

- ser du en enkel måte å gjøre oppgaven på?
- ser du noen sammenheng med den forrige oppgaven?

Oppgave C)

Hvis utført riktig ved å utnytte faktoriseringen («snarveien»):

- hva tenkte du da du så oppgaven, hvorfor valgte du denne strategien?

Hvis utført på annen måte eller ikke fullført:

- denne likningen «påstår» noe, hva er det?
- hva må til for at denne påstanden skal være sann?
- hvilken x gjør at denne er sann?
- er det flere x-verdier som kan gjøre likningen sann?

Oppgave D)

Hvis vellykket utføring av oppgaven:

- hva var det første du tenkte da du så oppgaven?
- hva slags plan la du for oppgaven?

Hvis ikke fullført oppgave:

- hva må til for at vi kan forkorte en brøk?
- hvis vi kunne faktorisert telleren, hva måtte en av faktorene vært hvis brøken skulle forkortes?
- er det noen sammenheng mellom nullpunktene i et uttrykk og hvordan det faktoriserte uttrykket ser ut?

Oppgave A gjør at det blir en lav inngangsterskel, får elevene i gang (det forventes at de fleste klarer å løse denne) og den måler grunnleggende prosedyreflyt. Intervjuspørsmålene til denne oppgaven dreier seg mest om begrepsforståelse.

Oppgave B er ment for å måle strategisk kompetanse. Dette fordi de kan utnytte svaret fra A og dermed komme frem til løsningen veldig raskt. Intervjuspørsmålene her dreier seg mest om adaptiv resonnering (refleksjon og begrunnelse), men også begrepsforståelse.

Oppgave C kan måle flere typer kompetanse, avhengig i hvordan eleven løser den. Hvis de utnytter den faktoriserte formen direkte («snarveien»), og dermed løser oppgaven raskt, vil den måle strategisk kompetanse. Hvis parentesen blir multiplisert ut og de benytter andregradsformelen og på den måten får riktig svar vil det måle prosedyreflyt. Intervjuspørsmålene til oppgave C dreier seg mye om adaptiv resonnering fordi det handler om refleksjon og begrunnelse for prosedyrer. Det var forventet at noen elever ville slite litt med denne oppgaven, så hvis de ikke klarer oppgaven er spørsmålene også ment som gradvise hint for å komme videre.

Oppgave D vil kunne måle begrepsforståelse, en elev må ha et grep om de involverte matematiske objektene og relasjonen mellom disse. Den vil også måle strategisk kompetanse fordi eleven må legge en plan og tenke «flere trekk» fremover. Intervjuspørsmålene dreier seg også om strategisk kompetanse og begrepsforståelse.

Dette er hvordan jeg på forhånd så for meg at oppgavene og spørsmålene kunne fange opp forskjellige kompetansetyper. Om hver oppgave faktisk ville avdekke nøyaktig den kompetansen som var tenkt var slett ikke sikkert. Det kunne jo tenkes at en oppgave som skulle målt begrepsforståelse viste seg å heller måle adaptiv resonnering. De ulike kompetansene er jo tross alt sammenvevd og avhengig av hverandre. Men alle oppgavene vil uansett kunne si noe om elevenes prosedyreflyt, enhver regneoperasjon som blir utført vil fortelle noe om regnetekniske ferdigheter.

3.3.4 Utvalg av respondenter

I utgangspunktet var det tenkt at respondentene skulle hentes fra slutten av et skoleår i teoretisk matematikk (1T). Elever på dette nivået egner seg for mine undersøkelser fordi faktorisering av andregradsuttrykk er et sentralt tema i 1T-kurset. Faktorisering er riktignok et gjennomgående tema i de videre kursene S1 og R1, så respondentene kunne like gjerne hentes fra disse kursene.

Når tiden for datainnsamling nærmet seg og de aktuelle elevene var valgt ut, ble samfunnet nedstengt på grunn av Coronapandemien, noe som gjorde datainnsamlingen vanskelig. Av den grunn ble datainnsamlingen forskjøvet til neste skoleår, men også dette året ble preget av mye nedstengning og hjemmeskole. Men etter hver åpnet skolene mer opp og det ble mulig å gjennomføre intervjuene. Jeg endte da opp med omtrent de samme elevene som var tenkt, men de gikk nå i vg2 og tok samfunnsfaglig matematikk (S1) eller realfagsmatematikk (R1)

Creswell (2005) skriver at det innen kvalitativ forskning gjerne brukes et «hensiktsmessig utvalg» av respondenter. Et slikt utvalg består av deltakere som kan gi kunnskap om fenomenet som skal utforskes og som kan gi rikest informasjon. Forskningsspørsmålet om kompetanse innen faktorisering tilsier at respondentene må ha en viss kjennskap til og kunnskap om faktorisering. Altså er utvalget foretatt på bakgrunn av begrepene i forskningsspørsmålet, det Creswell (2005) kaller «concept sampling».

Jeg ønsket at respondentene skulle være relativt faglig sterke elever, altså elever som lå på middels til høy måloppnåelse i faget. Tanken bak dette var at elever på lav måloppnåelse ikke ville kjenne begrepene og operasjonene godt nok til å gi den datamengden som var nødvendig for dette prosjektet. Det kunne dessuten vært ubehagelig for en elev å bli intervjuet på denne måten, dersom eleven hadde svært lite kunnskap om temaet. Når jeg bevisst har valgt vekk denne delen av mulige respondenter vil det gjøre utvalget noe mer homogent. Dette vil også innebære en avgrensing av omfanget for dette forskningsprosjektet.

Det var heller ikke ønskelig at respondentene var mine egne matematikkelever, elevene skulle føle seg helt trygge på at deltakelsen ikke påvirke karakteren i matematikk. Elevene ble valgt ut av meg i samarbeid med deres matematikklærer, slik at jeg fikk det utvalget jeg ønsket.

Baker og Edwards (2012) har gjennomgått og skrevet om hva 14 eksperter på kvalitative forskningsintervjuer svarer på spørsmålet «hvor mange intervjuer trengs?». Det fleste svarer først at «det kommen an på», og at det først og fremst kommer an på forskningsspørsmålet og hensikten med forskningen. I mange tilfeller kan man ikke bestemme på forhånd hvor mange intervjuer som trengs, man må holde på til det er nok data som kan analyseres og besvare forskningsspørsmålet.

Mitt forskningsspørsmål dreier som om hvilke kompetansetyper man kan se hos elever på et bestemt nivå og på et spesifikt tema. Spørsmålet er av deskriptiv art, så jeg trenger nok data til å kunne analysere og beskrive elevenes kompetanse. Jeg er i utgangspunktet ikke interessert i hva som er hyppig eller typisk når det gjelder elevenes kompetanse, i så fall burde nok antall respondenter vært høyere.

Etter å ha rådført meg med min veileder og lest andre masteroppgaver som kan sammenlignes med denne, kom jeg til et antall på 8 respondenter. Hvis disse intervjuene genererte nok datamengde, og data som var interessante nok for dette prosjektet, ville det være tilstrekkelig med 8 respondenter.

Jennifer Mason fra Universitetet i Manchester er blant de som svarer på Baker og Edvards (2012) sin undersøkelse. Et punktene som hun trekker frem som avgjørende er om flere intervjuer ville gjort forskningsprosjektet «bedre» eller sterkere. Min erfaring var at etter 8 intervjuer fant jeg allerede mange likheter i responsene, så det var liten grunn til å tro at litt flere intervjuer ville styrket min oppgave. Flere intervjuer ville dessuten tatt mer tid og ressurser enn omfanget av dette prosjektet tilsier.

3.3.5 Det formelle og det praktiske

Jeg utarbeidet et informasjonsskriv/samtykkeskjema (vedlegg 1) som ble gitt til de aktuelle elevene. Alle de forespurte elevene (og foresatte for de under 18 år) ga samtykke til å delta i prosjektet.

Prosjektet ble meldt inn og godkjent av NSD – Norsk senter for forskningsdata.

Jeg informerte ledelsen ved skolen og den involverte læreren om intervjuene. Et grupperom på skolen ble avholdt til undersøkelsene. Jeg hadde en digital diktafon til lydopptak av intervjuene. Denne har ingen nettilgang og lydopptakene ble slettet etter at intervjuene var transkribert.

3.4 Gjennomføring av datainnsamling

Selve intervjuene fant sted i løpet av en uke slik at det ble én til to undersøkelser hver dag, det var viktig at jeg som intervjuer ikke ble utslitt og trøtt av for mange intervjuer på samme dag. Gjennomføringen gikk som planlagt uten noen uforutsette hendelser. En naturlig «icebreaker» i starten av intervjuene var å spørre om eleven hadde det bra og hvordan de følte det hadde gått med oppgavene.

Selv om utvalget var relativt homogent var det stor variasjon i hvor mange oppgaver hver elev hadde fullført når jeg startet intervjuet. I de tilfellene hvor eleven hadde klart lite av oppgavene på forhånd, gikk en større del av intervjuet med til å gi eleven små hint for å komme videre. Andre intervjuer gikk i større grad ut på at eleven forklarte og argumenterte for sine løsninger.

Elevene fikk oppgavene på et ark der de skulle skrive utregninger og svar direkte på arket. Disse arkene ble anonymisert, tatt vare på og brukt videre i analysen.

3.5 Transkribering

Cohen et al. (2007) skriver at transkripsjon av intervjuer er et kritisk steg i datainnsamlingen, her kan deler av dataene gå tapt eller bli forvrengt. Viktige deler av kommunikasjon er nonverbal, slik som hoderisting og ansiktsuttrykk. Slik kommunikasjon vil naturlig nok ikke komme med i et transkribert intervju. Transkripsjoner tar på mange måter intervjuet vekk fra sin kontekst og dynamikk. Jobben med å transkribere er dermed svært viktig og må gjøres med den største flid, slik at tapet av data blir minst mulig.

Alle intervjuene ble transkribert i sin helhet. Det var nyttig under transkriberingen å ha den aktuelle eleven sin besvarelse foran seg, det gjorde det lettere å forstå hva elevene refererte til når de sa ting som «den oppgaven der» og «i linja under har jeg tenkt at».

Hver deltaker ble anonymisert og ble heretter kalt Elev 1 – 8. Transkripsjonene inneholder alle ord som ble sagt. For at minst mulig data skulle gå tapt ble pauser, sukking, latter og andre lyder notert i parentes. Arbeidet med dette bekreftet det Creswell (2005) skriver, at det tar omtrent 4 timer å transkribere 1 time med lydopptak.

3.6 Planlegging av analysen

Cohen et al. (2007) påpeker at analyse av kvalitative data vil innebære fortolkninger, og at slike analyser aldri blir eksakte representasjoner av (i dette tilfellet) det opprinnelige intervjuet. Mine data besto av transkripsjonene fra intervjuene, samt oppgavearket elevene hadde skrevet besvarelsene på. Dataene ble først gjennomlest flere ganger og forsøkt tolket på ulike måter for å få et inntrykk av hva disse dataene kunne fortelle.

En mulig strategi for analysen var å sortere dataene etter hver oppgave elevene fikk, og danne seg et bilde av hvilke kompetansetyper eller resonnementer elevene viste gjennom hver oppgave. En annen strategi kunne være å ta for meg én og én elev, gjennomgå hele oppgavesettet for hver enkelt elev og ende opp med en slags «profil». En slik profil kunne være «prosedyreflyteleven som behersker alle regler, men ikke liker å tenke utenfor boksen» eller «eleven med begrepsforståelse som ikke behersker prosedyrene like godt».

Jeg bestemte meg for å prøve ut den sistnevnte strategien, og se etterhvert som analysen gikk fremover om dette var hensiktsmessig å gjøre for alle respondentene. Dette er ofte tilfelle i kvalitativ forskning; den er iterativ slik at stegene i prosessen går litt frem og tilbake mellom analyse og planlegging (Creswell, 2005). I mitt tilfelle måtte jeg prøve meg frem i analysen, slik at veien ble litt til mens man gikk.

3.7 Gjennomføring av analysen

Jeg startet med en respondent som hadde gjort alle oppgavene og gitt mye data i intervjuet. Jeg gikk gjennom oppgave for oppgave, både hva eleven hadde skrevet i besvarelsen og hva som ble sagt i intervjuet. Alt ble gjennomgått og analysert ut fra de to teoretiske rammeverkene Kilpatrick et al. (2001) og Lithner (2007).

Det ble skilt mellom hvilken kompetansetype og resonneringstype som kom frem gjennom løsningen av oppgaven og hva som kom frem gjennom intervjuet. Formen på analysen ble å først beskrive hvordan eleven hadde gjort oppgaven, deretter begrunne hvilken type kompetanse og resonnering dette kunne tyde på.

Deretter tok jeg for meg den delen av transkripsjonen som hørte til oppgaven, og finne den delen av intervjuet som kunne være kjennetegn på kompetanse og resonneringstype. I analysen gjengir jeg slike sekvenser fra transkripsjonen og ut fra disse beskrive og begrunne hvilken kompetanse og resonneringstype dette kunne tyde på. I noen tilfeller kunne det være ganske tvetydig hva slags kompetanse/resonnement som var vist, da ble dette diskutert i analysen fremfor å komme med en klar konklusjon.

Når alle oppgavene var analysert laget jeg en matrise med kompetansetyper vannrett og resonneringstyper loddrett. På den måten kunne jeg sette opp en slags profil på eleven og kanskje si noe om hvilke kombinasjoner av kompetanse/resonnering som var typisk for denne eleven.

Etter å ha gjennomført denne prosessen for den første respondenten satt jeg igjen med omtrent 8 sider analyse. Med 8 respondenter med like inngående analyser tilsier det 64 siders analyse, noe som er litt mye for et prosjekt av dette omfanget. Jeg satt likevel igjen med et inntrykk av at dette var en god måte å analysere på, og fant én elev til som hadde gitt mye data. Det ble dermed gjennomført den samme type analyse for også denne eleven.

De resterende 6 respondentene hadde generert litt mindre data hver. Disse ble analysert med den første strategien nevnt på forrige side. Jeg gikk altså gjennom hver oppgave og laget en slags oppsummerende analyse av de 6 elevene for hver oppgave.

Måten det ble gjort på var omtrent den samme som for de to første elevene, men nå plukket jeg bare ut noen oppgavesvar og intervjusekvenser. Nå var det mer fokus på hvilke svar og utsagn som var felles for elevene, men også å finne eksempler på at de brukte forskjellige strategier og resonnerte på ulike måter i den samme oppgaven.

Som et eksempel på analysemetoden kan jeg trekke frem oppgave C der elevene skulle løse likningen $(x + 4)^2 = 9$. Elevenes løsningsstrategi på denne delte seg i to grupper. Jeg tok et bilde av besvarelsen til en elev som hadde gjort oppgaven på den første måten, kommenterte dette og argumenterte ut fra Kilpatrick et al. (2001) sin strengmodell hva type kompetanse dette kunne tyde på. Deretter gjenga jeg et utdrag fra intervjutranskripsjonen som handlet om denne oppgaven, pekte på noen sentrale utsagn og argumenterte ut fra Lithners rammeverk hvilken resonneringstype dette kunne tyde på. Etter dette tok jeg for meg en av elevene som hadde utført oppgaven med den andre strategien og gjennomførte en tilsvarende analyse.

3.8 Validitet og relabilitet

Cohen et al. (2007) skriver at validitet eller gyldighet i kvantitativ forskning dreier seg mye om at måleinstrumentet så korrekt som mulig måler det som skal måles. I kvalitativ forskning vil instrumentet i stor grad være forskeren selv og de fortolkninger som gjøres. Forskeren har sitt ståsted og behandler dataene ut fra dette. Cohen et al. (2007) skriver videre at i kvalitativ forskning vil validiteten styrkes gjennom blant annet ærlighet, grundighet, rikdom og omfang av data og grad av triangulering.

Ved at jeg er ærlig om eget ståsted og måten dette forskningsprosjektet er gjennomført på styrkes validiteten. Jeg har også vært ærlig om rammene for prosjektet og hvilke begrensninger mine funn har. Det er viktig for validiteten er at jeg har forsket på det som forskningsspørsmålene faktisk legger opp til, at «forskningsspørsmålet skal drive frem datainnsamlingen og analysene av disse dataene» (Postholm, 2010, s.134).

Kvalitativ forskning vil sjeldent være objektiv i samme grad som kvantitativ forskning. Men man kan være ærlig og synliggjøre sin egen subjektivitet (Postholm, 2010). Dette skjer ved at jeg er åpen om egne erfaringer og forforståelse av temaet det forskes på. Det styrker også validiteten at tolkninger av data er gjort i samråd med en veileder og at resultatene underveis er delt med og kommentert av medstudenter.

Det styrker også validiteten at jeg ikke har brukt mine egne matematikkelever som respondenter. På den måten unngår jeg at mine egne erfaringer med respondentene skal påvirke mine tolkninger av intervjuene. En annen faktor som kan styrke validiteten er at noen av intervjuspørsmålene og oppgavebesvarelsene fanget opp den samme informasjonen om eleven, altså en ble det en viss grad av triangulering.

Cohen et al. (2007) drøfter flere måter å styrke reliabiliteten for intervjubasert forskning. På den ene siden bør spørsmålene ideelt sett være identisk formulert for hver respondent, men dette kan gå på bekostning av at hver respondent faktisk forstår spørsmålet. I utgangspunktet fikk alle mine respondenter identiske spørsmål, men av og til måtte jeg reformulere for å sikre at eleven forsto spørsmålet. Slike variasjoner i spørsmålsstillingene er gjengitt i flere av transkripsjonsutdragene i analysen, så det er transparent hvordan dette ble håndtert.

I sin artikkel sammeligner Goldin (1997) oppgavebaserte intervjuer med et måleinstrument i et vitenskapelig eksperiment. Reliabiliteten til eksperimentet er avhengig av hvor mye instrumentet interfererer med det som skal måles. Selve intervjusituasjonen og forskerens interaksjon med respondentene vil helt klart påvirke hva elevene sier og gjør, så dataene vil ikke være noen eksakt «måling» som kan reproduseres.

En kvalitativ studie som denne kan aldri oppnå den reproduserbarheten som i naturvitenskap. En annen forsker ville neppe fått helt de samme resultatene som jeg har gjort og ville dessuten tolket dataene ut fra sitt ståsted. Men min forskning har forhåpentligvis bidratt til å belyse og berike et tema.

3.9 Etiske betraktninger

Postholm (2010) påpeker den nære relasjonen mellom forsker og forskningsdeltakere i kvalitativ forskning, noe som gjør at hensynet til etiske prinsipper må veie tungt og hele tiden må gå hånd i hånd med selve forskningen. Et viktig prinsipp er informert samtykke, noe som ble ivaretatt ved at elevene fikk et informasjonsskriv samt ble informert muntlig om hva slags forskning dette var og at deres anonymitet ble ivaretatt. Elevene skal vite hva de sier ja til.

Mine intervjuer hadde ingen spørsmål av veldig sensitiv eller privat karakter, men det kunne likevel tenkes at det kom frem ting som ville være ubehagelig for eleven i ettertid dersom de ikke var anonymisert. Under intervjuene er det viktig at jeg som forsker skaper en god tone og atmosfære. Ingen elever skal føle at svarene deres er feil, uinteressante eller dumme. Cohen et al. (2007) poengterer at etiske konsekvenser må ses fra deltakernes perspektiv.

Når man bruker intervjuer som datakilde stiller det store krav til forskerens integritet og etikk. Jeg som forsker må samvittighetsfullt gjengi dataene korrekt og tolke disse så riktig som mulig. Hverken data eller tolkninger må endres for å tilfredsstille egne ønsker eller interessegrupper (Creswell, 2005).

4.0 Analyse

I denne delen vil jeg presentere og analysere elevenes besvarelser og intervjuer. For to av respondentene står en tabell som viser registrerte kompetansetyper etter kategoriene hos Kilpatricks et al. (2001) horisontalt og Lithner (2007) sine resonneringstyper vertikalt. I hver tabell er det markert A, B, C eller D, som refererer til oppgaven der kompetansen og resonneringen ble observert.

Deretter vil elevens besvarelse og intervju gjennomgås i tilknytning til hver oppgave. Her vil elevens kompetanse og resonnering bli presentert og analysert, og markeringene i tabellen blir drøftet og begrunnet. Kompetansetypene er gjerne sammenvevd og gjensidig avhengig av hverandre (Kilpatrick et al., 2001), så tabellen gir bare et uttrykk for hvilken type som var mest fremtredende eller avgjørende hos eleven i den aktuelle oppgaven.

Besvarelsene og intervjuene av elev 2 og elev 8 viste seg å gi mest informasjon, analysen av dataene herfra vil derfor gis mest plass her.

4.1 Elev 2

Tabell 1: observert kompetanse/resonnering elev 2

Kompetanse / **Resonnering**	Prosedyre-flyt	Strategisk kompetanse	Begreps-forståelse	Adaptiv resonnering
CMR			A D	D
Guided AR				C
Delimiting AR	C			
Familiar AR	A	B		
MR			B	

4.1.1 Oppgave A besvarelse – prosedyreflyt og familiar AR

Eleven har faktorisert uttrykket $3x^2 - 6x$ ved å trekke den felles faktoren 3x utenfor en parentes, og skrevet svaret $3x(x-2)$. Den matematiske prosedyren blir utført nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig, som er kjennetegn på det Kilpatrick et al. (2001) kaller prosedyreflyt. Dette er en oppgave av velkjent type for eleven og implementering av algoritmen er triviell, dermed faller resonnementet klart inn under Lithners kategori imitativ familiar AR.

Denne kombinasjonen av prosedyreflyt og familiar AR er velegnet til slike oppgaver. Eleven har utført liknende prosedyrer tidligere, gjenkjenner oppgavetypen lett og kan huske algoritmen. Og så lenge eleven har god prosedyreflyt vil svaret bli riktig.

4.1.2 Oppgave A intervju – begrepsforståelse og CMR

Når forsker spør om hva begrepet faktorisert betyr eller innebærer, forstår eleven ikke helt hva det blir spurt om. Men etter litt omformulering av spørsmålet kommer følgende dialog:

ELEV 2:	Jeg vet ikke hvordan jeg skal putte det, men det er liksom ja.. delt inn i faktorer, de minste, kan ikke dele de flere ganger liksom.
FORSKER:	Ja, det er en grei forklaring det. Men for å vri litt, hvorfor er det ikke faktorisert der? [peker på oppgaven]
ELEV 2:	(...) Nei fordi. [ler] Begge to kan jo ganges med tre og begge kan ganges med x [peker på leddene]. Så derfor kan du trekke det utenfor, det betyr det samme liksom.

Eleven sier mye riktig om faktorisering, formuleringen «delt inn i faktorer, de minste» fra det første av utsagnene over, sier noe vesentlig om selve begrepet. Man kan si eleven vet hvordan et faktorisert uttrykk ser ut, og kan også beskrive det på andre måter («kan ikke dele de flere ganger liksom»). Kilpatrick et al. (2001) skriver at begrepsforståelse blant annet innebærer å ha et «funksjonelt grep om de matematiske ideene», og denne eleven vet hvordan man faktoriserer og hva som kjennetegner et slikt uttrykk.

Eleven poengterer også i det siste utsagnet over at det faktoriserte uttrykket «betyr det samme liksom» som det ikke-faktoriserte uttrykket. Eleven er noe upresis i formuleringen her, det kan tyde på noe usikkerhet om svaret er riktig eller det kan skyldes at folk i denne aldersgruppa gjerne uttrykker seg på en litt «hverdagslig» måte. Men at en slik formulering i det hele tatt dukker opp, forteller at her finnes noen koblinger mellom begrepet faktorisering og ideen om ekvivalens. Dette tyder på begrepsforståelse, «the degree of students' conceptual understanding is related to the richness and extent of the connections they have made» (Kilpatrick et al., 2001, s.119).

Det samme utsagnet kan også tyde på adaptiv resonnering, siden eleven ut fra ekvivalens kan forsvare hvorfor faktoriseringen er riktig. Dette trekkes frem som et av tegnene på slik adaptiv resonnering: «*one manifestation of adaptive reasoning is the ability to justify one's work*» (Kipatrick et al., 2001, s.130)

Men siden det i intervjuet etterspørres en forklaring på et matematisk begrep, og eleven kan forklare dette, kategoriseres det som begrepsforståelse.

Hvis eleven hadde kjent eller husket selve definisjonen av faktorisering, ville vedkommende sagt noe slikt som at «et andregradsuttrykk som er faktorisert er skrevet som ett ledd». En slik definisjon kunne vært pugget, da ville i så fall resonneringen vært imitativ MR. Siden eleven aldri nevner denne definisjonen, men i stedet «tenker høyt» og uttrykker seg mer uformelt (hyppig bruk av «liksom» og tenkepauser), er dette neppe imitativt eller memorert.

Man kan heller ikke kalle elevens resonnering algoritmisk da det ikke er noen matematisk operasjon som skal utføres i intervjuet, det dreier seg her om å greie ut om et matematisk begrep eller fenomen.

Det er elementer av Lithners CMR tilstede her; resonnementet er plausibelt fordi eleven argumenterer med at «begge to kan jo ganges med tre og begge kan ganges med x, så derfor kan du trekke det utenfor». Det er nesten som eleven prøver å overbevise forskeren om logikken i den matematiske operasjonen. Resonnementet er også forankret, når eleven argumenterer med at uttrykket er «delt inn i faktorer, de minste» er dette forankret i vesentlige og iboende matematiske egenskaper til et faktorisert uttrykk. Og videre når ekvivalens blir trukket frem (i det siste utsagnet), viser det at eleven kan forsvare resultatet med god forankring i matematiske egenskaper.

Om resonnementet viser det første av Lithners kriterier for CMR, «novelty», er vanskelig å avgjøre. Hvis eleven ikke tidligere har satt ord på eller forklart hva faktorisering betyr, kan man si at en ny (for eleven) resonneringssekvens som blir skapt. Men det kan for eksempel tenkes at eleven tidligere har diskutert hva faktorisering betyr, og kan huske deler av dette. I så fall er det et mer imitativt element her. Det er uansett ingen andre av Lithners resonneringstyper som passer bedre på elevens resonnement enn CMR, selv om kravet om «novelty» kanskje ikke var oppfylt.

4.1.3 Oppgave B besvarelse – strategisk kompetanse og familiar AR

Hensikten med denne oppgaven var først og fremst å finne ut hvor strategisk elevene var; en elev med strategisk kompetanse vil trolig utnytte likheten og resultatet fra forrige oppgave, sette hver faktor lik null og skrive løsningene $x = 0$ og $x = 2$. Denne eleven løser oppgaven på nettopp denne måten, og vikler seg aldri inn i unødvendige lange utregninger. Dette bekreftes også av eleven selv med et «ja» når forskeren spør «så du øyeblikkelig at dette var det samme uttrykket som du hadde i A?» (transkripsjonsutdraget nedenfor).

Selve besvarelsen inneholder få regnesteg, men de er likevel utført korrekt og effektivt. Dette er kjennetegn på prosedyreflyt, men i denne oppgaven er kanskje valget av strategi mer interessant. Eleven oppdager noe (likheten med den forrige oppgaven) og foretar et fornuftig strategisk valg ut fra dette. Dette valget er *strategisk* i den dagligdagse betydningen av ordet, men passer også med det didaktiske begrepet *strategisk kompetanse*, «students develop procedural fluency as they use their strategic competence to choose among effective procedures» (Kilpatrick et al., 2001, s.129). Eleven har altså brukt sin strategiske kompetanse for å velge blant metoder som vil fungere, og valgt den mest hensiktsmessige metoden.
Ut fra dette blir elevens besvarelse her kategorisert som strategisk kompetanse.

I likhet med oppgave A er denne oppgavetypen velkjent for elever i S-matematikk, så resonnementet og strategivalget er raskt og enkelt. Eleven imiterer en løsningsalgoritme basert på en gjenkjenning av oppgavens form, altså gjennomføres et resonnement av typen familiar AR.

4.1.4 Oppgave B intervju – begrepsforståelse og MR

I intervjuet blir eleven bedt om å forklare logikken i produktregelen som brukes her.

FORSKER:	Så du øyeblikkelig at dette var samme uttrykket som du hadde i A?
ELEV 2:	Ja.
FORSKER:	Og da har du brukt det vi kaller produktregelen. Hva er det som er logikken i den regelen?
ELEV 2:	Nei det er vel at hm [...) Ja enten må den være lik null eller så må den være lik null [peker på faktorene]. Så setter vi det som to likninger.

Eleven viser, gjennom å peke på hver faktor og si at «enten må den være lik null eller så må den være lik null», en begrepsforståelse av produktregelen. Eleven forstår til en viss grad det matematiske begrepet, operasjonen og relasjonen som gjelder. Riktignok kommer ingen forklaring på hvorfor den ene faktoren eller den andre faktoren må være lik null. Det kan enten tyde på at begrepsforståelsen ikke er presis nok eller at den ikke bli eksplisitt uttalt, «students often understand before they can verbalize that understanding» (Kilpatrick et al., 2001, s.118). Forsker kunne her spurt videre om hvorfor produktregelen fungerer, og kanskje funnet ut om det faktisk var en svakhet i den begrepsforståelsen her, men intervjuet gikk her videre til neste oppgave.

Hvilken type resonnering vises her? Eleven beskriver kort hva man gjør i en slik oppgave, men det blir ikke argumentert eller forankret i noen større matematisk sammenheng. Spørsmålet «hva er logikken i denne regelen?» blir ikke direkte besvart. Det siste utsagnet i utdraget ovenfor er mer en gjengivelse av hvordan eleven har lært at man skal bruke produktregelen. Derfor vil utsagnet falle under MR, selv om det kanskje ikke er et ordrett pugget resonnement.

4.1.5 Oppgave C besvarelse – prosedyreflyt og delimiting AR

Eleven har løst oppgaven $(x + 4)^2 = 9$ riktig, selv om fremgangsmåten ikke er den mest effektive. Eleven multipliserer ut parentesen og flytter over 9 slik at høyresiden blir null. Deretter løses likningen med den velkjente andregradsformelen og gir korrekte svar.

Det er prosedyreflyt i den forstand at prosedyrer blir utført nøyaktig og korrekt, men kanskje ikke med tanke på fleksibilitet. Det at eleven ikke ser snarveien her, kan tyde på en noe manglende fleksibilitet. Når man ikke ser løsningsstrategien ut fra at parentesen enten må ha verdien 3 eller -3, trengs det flere steg i utregningen og dermed større krav til nøyaktighet og korrekthet. Denne eleven gjør ingen regnefeil i noen av stegene, så her har eleven vist prosedyreflyt.

Eleven ser ikke snarveien, men prøver i stedet å bearbeide uttrykket, slik at det blir noe kjent eller familiært. Det å multiplisere ut parentesene avgrenser hva slags algoritmer eleven så kan velge blant, altså det Lithner kaller delimiting AR. Det er nok også familiar AR i resonnement, når likningen først er omformet til $x^2 + 8x + 16 = 9$ ser den velkjent ut og en familiær algoritme kan implementeres. Men siden eleven først foretok en avgrensing av hvilke prosedyrer som kan anvendes, og dette styrer måten oppgaven løses på, havner denne i kategorien delimiting AR.

4.1.6 Oppgave C intervju – veiledet AR og adaptiv resonnering

I den påfølgende samtalen stiller forskeren ledende spørsmål for å komme på sporet av en enklere løsningsstrategi, en «snarvei». Da må dette kalles guided AR, eleven må ledes til et nytt steg. Eleven må gjøres bevisst på at parentesen representerer en verdi, først da skjer det en tilpasning av resonneringen, og derfra kommer løsningen ganske raskt. Som vi ser i følgende dialog, er det ikke så mye hint som trengs før eleven kommer på rett spor.

FORSKER:	Ja, men hvis du ikke tenker på abc-formelen et lite øyeblikk. Kan du på en måte, bare ved å se på likningen; hva må det tallet inni parentesen være, hva må verdien være for at dette skal være sant?
ELEV 2:	Å ja (...) Sånn ja! Minus 1. Minus 1 pluss 4 blir 3, og 3 i annen er ni.
FORSKER:	Nettopp, så da har du egentlig løst den allerede (...)
ELEV 2:	Å ja det tenkte jeg ikke på.
FORSKER:	Men du har jo funnet to løsninger her [peker på elevens abc-formel utregning). Hvordan kunne du funnet den andre løsningen på denne samme måten? [peker på selve oppgaven]

ELEV 2:	Hm (...) Å ja. Ja. Minus 7 pluss 4 det blir minus 3, Minus 3 ganger minus 3 er jo og 9.
FORSKER:	Nettopp. Ja.

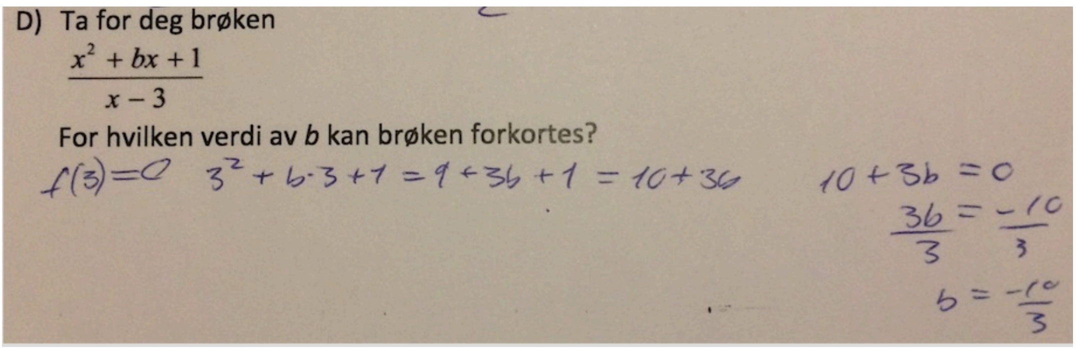
Når forskeren spør «hva må tallet inni parentesen være, hva må verdien være for at dette skal være sant?» leder det elevens fokus over på at parentesen må ha en bestemt verdi. Denne ideen setter umiddelbart i gang en ny resonneringssekvens som fører til svaret x = -1, der eleven sier «Sånn ja! Minus 1. Minus 1 pluss 4 blir 3, og 3 i annen er ni». Eleven tilpasser seg raskt en ny måte å tenke på og resonnerer, konkluderer og argumenterer riktig derfra.

Forskeren må deretter minne eleven på at det var to løsninger på oppgaven, deretter kommer et lignende resonnement (nest siste linje i samtalen ovenfor) og eleven kommer frem til den andre løsningen x = – 7. Dette ses på som adaptiv resonnering, fordi eleven har tilpasset eller justert sin matematiske tankegang og kan anvende denne umiddelbart.

Et annet tegn på adaptiv resonnering er evnen til å forsvare sine konklusjoner, når eleven sier «minus 7 pluss 4 blir minus 3, minus 3 ganger minus 3 er jo 9» argumenteres det for korrektheten av tankerekken og hvorfor svaret må være riktig.

4.1.7 Oppgave D besvarelse/intervju – begrepsforståelse, adaptiv resonnering og CMR

I denne oppgaven var det vanskelig å skille kompetansen/resonneringen i selve oppgaveløsningen, og det som kom frem i intervjuet. Dette skyldes at eleven har klart oppgaven selv, det var ingen behov for å gi hint og intervjuet ble mest en redegjørelse for elevens strategi. Elevens løsning av denne oppgaven ses på følgende bilde.



Oppgaven har eleven klart helt på egen hånd. For å få til dette har eleven lagt en plan og gjennomført denne. En slik plan krever kompetanse om:

- At uttrykket i nevneren (x – 3) må være en faktor i telleren, slik at brøken kan forkortes.
- Derfor må x = 3 være et nullpunkt i telleren.
- Da må denne verdien innsatt i uttrykket være null.

Elevens konklusjon, etter litt manipulering av uttrykket, blir at b må ha verdien -10/3. Oppgaven krever at man kjenner og kan kombinere flere matematiske begreper samtidig; hva som kan forkortes i en brøk og sammenhengen mellom nullpunkter, verdien av et uttrykk og faktoriseringen av et uttrykk. Alt dette viser eleven med denne løsningen, altså er begrepsforståelsen på plass. En elev uten begrepsforståelse for faktorisering ville ikke klart denne oppgaven, elevene på dette nivået har ikke lært noen algoritme som tar de fra start til mål i en slik oppgave.

Men elev 2 har samtidig vist god prosedyreflyt, utregningen på bildet er utført nøyaktig, effektiv og hensiktsmessig. Dette var en mer «uvanlig» oppgave for eleven, at den likevel ble løst vitner om stor grad av fleksibilitet. Når en løsningsstrategi som denne blir planlagt vil det også kreve et element av strategisk kompetanse, for selv om oppgaven ikke er en typisk «problemløsningsoppgave», er den heller ikke en rutineoppgave.

Det er altså flere kompetansetyper som vises her. Siden begrepsforståelse er mest avgjørende for i det hele tatt å forstå oppgaven og finne en løsningsstrategi, registreres elevens kompetanse gjennom løsningen av denne som begrepsforståelse.

Hvert av stegene i elevens utregning følger hver sin algoritme, og disse algoritmene blir ikke funnet på av eleven, disse er memorert. Altså er hvert steg i prosessen imitativt. Men det å legge en helhetlig plan og sette sammen disse algoritmene, krever et innslag av kreativitet.

Argumenter for at elevens resonnement oppfyller kriteriene for CMR kommer enda tydeligere frem gjennom transkripsjonsutdraget under. «Jeg følte ikke at jeg fikk den helt til. Men jeg tenkte at hvis det skulle være delelig på 3 så...», tyder på at eleven ikke har løst en slik oppgave før og ikke har noen algoritme klar. Det må skapes en (for eleven) ny resonneringssekvens, altså er kravet om «novelty» oppfylt.

Så følger et resonnement hvor eleven argumenterer for strategivalgene: «Så tenkte jeg på at x minus 3 måtte liksom være en faktor i dette øverste uttrykket. Og da må jo, hvis det skal være et nullpunkt (...)». Dette er argumenter som understøtter strategivalgene, det er plausibelt og logisk oppbygd. Det siste kravet til CMR ser man også i samme setning, argumentene er forankret i de iboende egenskapene til de matematiske komponentene som eleven nevner («delelig med», «faktor», «nullpunkt», «f av x»).

ELEV 2:	Jeg følte ikke at jeg fikk den helt til. Men jeg tenkte at hvis det skulle være delelig på 3 så måtte liksom, hvis vi sier at den der nullpunktsfaktorisering (...) Så tenkte jeg på at x minus 3 måtte liksom være en faktor i dette øverste uttrykket. Og da må jo, hvis det skal være et nullpunkt, så må liksom – si at den er f, f av x. Tenkte jeg at den måtte være null, så puttet jeg inn 3 og da satt jeg det lik null.
FORSKER:	Veldig bra. Du har liksom sett twisten her (...) Den har du nailet.
ELEV 2:	Jeg fikk så rart svar, så jeg visste ikke (...)
FORSKER:	OK, men du har gjort det helt supert.

I elevens siste utsagn fra dette intervjuutdraget sier eleven «jeg fikk så rart svar, så jeg visste ikke (...)». Her virker det som om eleven ser overflateegenskaper i svaret (at det ble en negativ brøk), og tviler derfor på sin egen løsning. Slik tvil kunne ført eleven ut i en situasjon med delimiting AR og endt opp med et nytt (og galt) svar, men det skjedde altså ikke.

Gjennom intervjuet vises også en evne til logisk tenkning, refleksjon, forklaring og forsvar av egen strategi. Eleven binder sammen de matematiske begrepene og forklaringene med setningslogiske ord slik som her: «tenkte at hvis (...)», «så måtte liksom (...)», «og da må jo (...)». Dette kan ses som kjennetegn på det Kilpatrick et al. (2001) kaller adaptiv resonnering.

Denne elevens besvarelse og utsagn viser også at de forskjellige kompetansene er sammenvevd. Den adaptive resonneringen (i det øverste resonnementet) er avhengig av at eleven har innsikt i de matematiske begrepene (faktor, nullpunkt, funksjonsverdi), og implementeringen av strategien er avhengig av at eleven har god prosedyreflyt. I denne oppgaven var eleven avhengig av å inneha alle disse kompetansene.

4.1.8 Oppsummering elev 2

Tabell 2 viser at eleven fikk vist alle kompetanse- og resonneringstyper. Dette forteller at elev 2 har både bredde og dybde i sin forståelse av faktorisering og kanskje matematikk generelt. Spesielt bør det fremheves at kombinasjonen begrepsforståelse og CMR ble observert to ganger, dette er egenskaper som ofte trengs for å løse de mest utfordrende matematikkoppgavene, når prosedyrer og imitativ tenkning ikke er tilstrekkelig.

Det bør også nevnes at eleven i hver oppgave fikk vist kompetanse og resonneringsmåter, både i selve oppgavebesvarelsen og gjennom intervjuet. Ingen av oppgavene eller intervjuspørsmålene ble stående ubesvart, det ble aldri registrert noen direkte mangel på kompetanse eller resonneringsevne. Alt dette korrelerer dessuten godt med faglærers vurdering, som forteller at eleven har meget høy måloppnåelse i matematikk.

4.2 Elev 8

Tabell 2: observert kompetanse/resonnering elev 8

Kompetanse / **Resonnering**	Prosedyre-flyt	Strategisk kompetanse	Begreps-forståelse	Adaptiv resonnering
CMR			D	B
Guided AR	D			
Delimiting AR	C			C
Familiar AR	A	B		
MR			A	

4.2.1 Oppgave A besvarelse – prosedyreflyt og familiar AR

Elev 8 har faktorisert uttrykket helt korrekt ved å sette felles faktor utenfor en parentes. I likhet med foregående elev som har løst oppgaven på denne måten, blir dette kategorisert som prosedyreflyt og «familiar AR».

4.2.2 Oppgave A intervju - begrepsforståelse og MR

Følgende ble sagt i intervjuet tilknyttet oppgave A:

FORSKER:	Den første oppgaven har du klart bra. Men hva menes med at et uttrykk er faktorisert?
ELEV 8:	Vel sånn som jeg har lært det, så bryter du det ned til så få faktorer som mulig. Eller ikke få faktorer kanskje, men du bryter det ned til bunnen på en måte. Jeg vet ikke helt hvordan jeg skal forklare det (...) Jeg skulle egentlig si i sted: så få ledd som mulig, ikke faktorer.

Eleven sier først «sånn som jeg har lært det, så...», noe som indikerer at her kommer en gjengivelse av noe tillært eller pugget, at det kommende resonnementet er memorert. Deretter forklarer eleven at «...bryter du det ned til så få faktorer som mulig» som til slutt blir korrigert til «så få ledd som mulig». Dette må sies å være en korrekt og presis definisjon av faktorisering, omtrent slik en lærebok eller en matematikklærer ville definert det.

Når Elev 8 forklarer dette mer med egne ord, som «du bryter det ned til bunnen på en måte», sier det noe om at det faktoriserte uttrykket $3x(x – 2)$ er noe som ligger «under eller bak» uttrykket $3x^2 – 6x$. Det virker her som eleven forstår en viktig egenskap ved faktorisering, og kan resonnere rundt dette. Kanskje er det her tendenser til CMR fordi det er en «ny» måte å beskrive faktorisering og det sier også noe vesentlig om de iboende egenskapene hos et faktorisert uttrykk. Men siden eleven hovedsakelig hadde en presis og mer «lærebokaktig» forklaring her, velges det her å kategorisere resonnementet som MR. Uttalelsene tyder også på god forståelse for begrepet, at eleven har et «integrated and functional grasp of mathematical ideas» (Kilpatrick et al., 2001, s.118). Elevens utsagn om faktorisering tyder altså på MR kombinert med begrepsforståelse.

4.2.3 Oppgave B besvarelse – strategisk kompetanse og familiar AR

Elev 8 har løst andregradslikningen på enklest mulig måte ved å utnytte svaret fra oppgave A og bruke produktregelen for å finne løsningene. Som det kommer frem av transkripsjonen nedenfor oppdaget eleven raskt likheten med oppgave A.

Drøfting av elevens resonnement og kompetanse, samt kategorisering av disse, utelates her da det allerede er beskrevet inngående for en identisk besvarelse (elev 2). Gjennom sin løsning av denne oppgaven har Elev 8 altså vist strategisk kompetanse og familiar AR.

4.2.4 Oppgave B intervju – adaptiv resonnering og CMR

FORSKER:	Nettopp. Så var det den ligningen [oppgave B] som du skulle løse. Så du med en gang at det var samme uttrykket som i A?
ELEV 8:	Ja det så jeg ganske kjapt.
FORSKER:	Og det du har brukt her kalles produktregelen. Hva er det som liksom er logikken i det du gjorde der?
ELEV 8:	Vel, da ser jeg at det er to faktorer jeg har som blir null. Og hvis to faktorer skal bli lik null så må en av faktorene være null. Sånn at da tok jeg begge faktorene lik null og så løste jeg hva x måtte være for at akkurat den faktoren skal bli lik null.

Elevens utsagn «hvis to faktorer skal bli lik null så må en av faktorene være null» er meget presist formulert og viser at her er forståelse for produktregelen som idé eller begrep. Erfaringsmessig er denne produktregelen enkel å anvende for de fleste elever, men mange sliter med å forstå hvorfor algoritmen fungerer. Elev 8 beskriver hvordan algoritmen er implementert, men kan også forklare og forsvare hvorfor prosedyren er logisk. Evnen til å tenke logisk, reflektere, forklare og forsvare matematiske konsepter og prosedyrer er et kjennetegn på adaptiv resonnering (Kilpatrick et al., 2001).

Sitatet i starten av forrige avsnitt er forankret i en vesentlig matematisk idé, nemlig at et produkt er null hvis og bare hvis en av faktorene er null. Resonnementet kan i utgangspunktet være memorert, men utsagnet har en overbevisende logisk struktur («det er to faktorer jeg har som blir null» og til slutt «hva x måtte være for at akkurat den faktoren skal bli lik null») som tyder på at eleven virkelig reflekterer og ikke bare gjengir noe. Det er kanskje ikke et helt nytt resonnement for eleven, så Lithners CMR-kriterium om «novelty» er vanskelig å avgjøre. Men resonnementet har logisk validitet og god forankring i fundamentale matematiske idéer, derfor kategoriseres dette som CMR.

4.2.5 Oppgave C besvarelse – prosedyreflyt og delimiting AR

Når elev 8 skulle løse likningen $(x + 4)^2 = 9$ ble parentesen først multiplisert ut, deretter flyttet 9-tallet side slik at det ble $x^2 + 8x + 7 = 0$. Eleven oppdaget altså ikke den mest effektive metoden, å se at parentesen i oppgaven måtte være 3 eller -3 for å oppfylle likningen. Det kan tyde på noe manglende strategisk kompetanse. Eleven viser derimot strategisk kompetanse i neste steg, da velges «sum produkt»-metoden og ikke den omstendelige metoden med andregradsformelen, som de fleste andre respondentene gjorde. Dette gjør at eleven kommer ganske effektivt frem til riktig svar.

Strategivalgene eleven foretok var slett ikke feil, men gjorde utregningen flere steg lengre enn snarveien ville gjort. Men selv om snarveien ikke ble oppdaget, ble utregningen gjennomført fleksibelt ved at «sum produkt»-metoden ble brukt fremfor andregradsformelen, men også nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig. Dette er kjennetegnene på prosedyreflyt hos Kilpatrick et al. (2001). At eleven i det hele tatt kom frem til riktig svar i denne oppgaven skyldes nok mest at eleven har god prosedyreflyt, snarere enn strategisk kompetanse.

Etter at eleven har multiplisert ut parentesen og fått uttrykket lik null, blir likningen av en type eleven kjenner godt og kan løse effektivt. Så derfra og frem til svaret er resonneringen av typen familiar AR. Men eleven har i utgangspunktet ikke en algoritme klar, det er først etter litt manipulering. Eleven kjenner noen algoritmer for å løse andregradslikninger, og disse bestemmer og avgrenser hvordan oppgaven skal angripes. Så det første og avgjørende resonnementet er av typen delimiting AR.

4.2.6 Oppgave C intervju – adaptiv resonnering og delimiting AR

Når forsker ber eleven se en gang til på selve oppgaven går det ikke lang tid før snarveien oppdages. Her er utdrag fra intervjuet tilknyttet oppgave C:

FORSKER:	Men hvis vi går tilbake til selve likningen og ser litt på den. Kan du nærmest se hva svaret skal bli?
ELEV 8:	Altså (...) du kan jo se på en måte at det som står inni parentesen skal bli 3 da, eller minus 3. For at det i annen skal bli 9. Sånn at da skjønner du at hva du må ta pluss 4 for å få 3 eller minus 3.
FORSKER:	Ja supert. Så det finnes på en måte en snarvei her. Men nå brukte ikke du så lang tid på din løsning heller, siden du brukte sum og produkt i stedet for abc-formelen (...)
ELEV 8:	Hater abc-formelen [ler].
FORSKER:	Ja det er jeg litt enig i. Men hvorfor ganget du ut den parentesen, hvorfor gikk du ikke rett på snarveien?
ELEV 8:	Det er mer fordi jeg har lært at (...) Altså jeg har tenkt litt sånn noen ganger og prøvd å tenke meg til svaret. Men så tenker jeg at – tenk om det er et kommatall – eller en brøk, så da har jeg alltid ganget ut parentesen.

Man ser av intervjuet at eleven kommer veldig raskt frem til snarveien, det ser ut til at eleven var inne på denne tankegangen allerede da oppgaven ble løst. Når forsker spør om vi kan «nærmest se hva svaret skal bli», da eleven svarer «du kan jo se på en måte at det som står inni parentesen skal bli 3 da, eller minus 3. For at det i annen skal bli 9». Elev 8 viser gjennom dette en evne til raskt å omstille tankesettet og viser god evne til logisk tenkning, refleksjon, forklaring av hva man tenker og forsvarer hvorfor det kan gjøres slik. Dette er typiske kjennetegn på adaptiv resonnering.

Når eleven skal fortelle hvorfor «sum produkt»-metoden ble valgt fremfor andregradsformelen kommer det frem at eleven «hater abc-formelen». Eleven liker bedre en metode som baserer seg på en begrepsforståelse enn en ferdigprodusert algoritme.

Når forsker spør om hvorfor ikke snarveien ble brukt i oppgaveløsningen svarer eleven «det er mer fordi jeg har lært at (...) Altså jeg har tenkt litt sånn noen ganger og prøvd å tenke meg til svaret. Men så tenker jeg at – tenk om det er et kommatall – eller en brøk, så da har jeg alltid ganget ut parentesen». Eleven har altså erfaring med å prøve ut «snarveier», men har ikke helt troen på at dette vil fungere her.

Eleven viser en viss logisk brist når det argumenteres med at snarveien ikke ville fungert dersom løsningen var et desimaltall eller en brøk. Her er jo kvadratet av parentesen lik 9, så parentesen må i alle fall være et heltall. Og hvis svaret ikke var et heltall, ville heller ikke «sum produkt»-metoden fungert.

Resonnementet bærer altså preg av at det avgrenses hva som kan utføres av prosedyrer. I denne oppgaven har denne avgrensingen gjort at eleven har forkastet den mest effektive strategien. Det vil derfor kategoriseres som delimiting AR.

4.2.7 Oppgave D besvarelse – begrepsforståelse og CMR

Elev 8 har løst denne oppgaven helt selvstendig og riktig, men har kun skrevet selve svaret. Så her må forsker be om en forklaring på hva eleven har gjort, og får følgende svar:
«(...) Så da tenkte jeg at hvis du skal forkorte dette så må du stryke under og over, ett av leddene (...eh) faktorene over brøkstreken må være likt det som står under. Så da så jeg at den ene faktoren skal være x – 3. Så måtte jeg finne ut hva som må stå i den andre parentesen (...) OK jeg tenkte at det siste tallet i den andre parentesen som er minus 3, når du ganger det med det siste tallet i den første parentesen så skal det bli 1. Ifølge sum-produkt regelen. Og det er da... -10/3. [refererer her direkte til hva b må være som er helt korrekt].»

Eleven har tenkt at en faktor i telleren må være likt uttrykket i nevneren (x – 3). Deretter har eleven resonnert seg frem til at den andre faktoren må være (x – 1/3), noe som resulterer i korrekt svar for koeffisienten b = – 3 – 1/3 = – 10/3. Med dette viser eleven godt grep om de matematiske begrepene om forkorting av brøk og faktorisering. Når eleven sier «... tenkte at det siste tallet i den andre parentesen som er minus 3, når du ganger det med det siste tallet i den første parentesen så skal det bli 1» vises en forståelse av relasjonen mellom koeffisienter og faktorer. Dette er typiske kjennetegn på begrepsforståelse.

Eleven har ikke resonnert algoritmisk (slik som nullpunktsfaktorisering), men heller sett analytisk på de algebraiske relasjonene. Dette er sannsynligvis en ny resonneringssekvens for eleven, som i tillegg har argumenter for hvert steg og som begrunner hvorfor konklusjonen er plausibelt. Argumentasjonen støtter seg på vesentlige egenskaper ved forkorting og faktorer («faktorene må være likt det som står under», «det siste tallet i den andre parentesen som er minus 3, når du ganger det med det siste tallet i den første parentesen så skal det bli 1»), altså er argumentasjonen forankret. Resonnementet til eleven oppfyller dermed kriteriene til CMR.

4.2.8 Oppgave D intervju – prosedyreflyt og guided AR

Elevens løsningsstrategi i denne oppgaven var like effektiv som strategien forsker selv hadde forespeilet her. Det vil likevel være interessant å se hvordan eleven responderer på å se på sammenhengen mellom faktorisering og nullpunkter.

FORSKER:	Er det noen sammenheng mellom nullpunktene og faktoriseringen, som du kunne brukt til å løse oppgaven på en annen måte? Hvis du sier at x – 3 skal være en faktor, hva vet du da om nullpunktene i uttrykket?
ELEV 8:	Det vil si at det ene nullpunktet er 3.
FORSKER:	Ja. Kan du sørge for at det ene nullpunktet blir 3 og så se hva blir da?
ELEV 8:	Da får du 9 + b*3 + 1 = 0. Da blir det 3b = -10, og så deler på 3. Det er jo en lettere måte å gjøre det på ja (...)

Som man kan se av transkripsjonen ovenfor er eleven rask med på tankegangen om nullpunkter og faktorisering. Eleven kommer frem til riktig svar og kjenner prosedyrene godt og kan utføre disse effektivt og korrekt. Kompetansen eleven viser her vil derfor være prosedyreflyt.

I dette tilfellet spør forskeren steg for steg slik at eleven trenger kun svare på relativt trivielle spørsmål. Strategivalgene og resonneringsmåten er i dette tilfellet ikke elevens egne, men snarere forskerens. Implementeringen blir kun rutinetransformasjoner og svar for eleven.

Dette er typisk for personguidet algoritmisk resonnering ifølge Lithner (2007). Her fikk eleven kanskje ikke mulighet til selvstendig å ta i bruk sin kompetanse om nullpunkter og faktorisering, her kunne forsker med fordel vært mer tålmodig og «gjerrig» i sine hint.

4.2.9 Oppsummering elev 8

Denne eleven fikk, i likhet med elev 2, vist hele spekteret av ulike kompetanser og resonneringsmåter. To ganger ble det observert kreativ matematisk resonnering (CMR), i kombinasjon med både begrepsforståelse og adaptiv resonnering. Eleven viser også mange steder god prosedyreflyt. Det tyder på at eleven har en ganske komplett matematisk kompetanse, en elev som er fleksibel og kan anvende flere strategier. Men eleven viste også i to tilfeller tegn på avgrensende AR, eleven forkaster egne (gode) ideer fordi resultatet ikke har de overflatiske egenskaper eleven forventer. Kanskje tyder dette på litt manglende tillit til egne ferdigheter.

4.3 Oppsummerende analyse for de resterende elevene

Elev 2 og elev 8 utmerket seg ved at de stort sett besvarte alle oppgavene og at de ga mye respons på intervjuspørsmålene. Det var derfor naturlig å foreta en grundig analyse av disse elevene. For de resterende 6 respondentene var besvarelsene til dels mangelfulle, dessuten ga heller ikke intervjuene like mye informasjon som hos de to førstnevnte. For de resterende elevene kommer her en oppsummerende analyse, men bare av de delene av deres besvarelser og intervjuer som ga nok informasjon til å kunne analysere. Så denne delen av analysen gir mer et innblikk enn den gir det fulle bildet.

4.3.1 Oppgave A

Alle elevene klarte å faktorisere uttrykket $3x^2 – 6x$ til førstegradsfaktorene $3x(x – 2)$, og samtlige elever utførte dette på den enkleste måten ved å trekke felles faktorer utenfor en parentes. På samme måte som elev 2 og elev 8, viser resten av elevene prosedyreflyt og familiar AR i denne oppgaven.

Når elevene ble spurt om hva som menes med at et uttrykk er faktorisert var det typisk at de ikke helt forsto spørsmålet med den gang. Spørsmålet ble deretter omformulert til «hva er det som skiller et faktorisert uttrykk fra et ikke-faktorisert uttrykk?». Her er transkripsjon av elevenes svar på dette spørsmålet.

ELEV 1:	Nei, jeg har jo (...) jeg vet ikke jeg (...) forenklet det, trukket det ut.
ELEV 3:	Jeg tror det er sånn at alt skal være gangestykke, eller ett produkt eller noe sånt.
ELEV 4:	Det menes sånn, gjør alt om til ett ledd.
ELEV 5:	At liksom (...) [ler] deler det opp, sant. At hva du må gange med noe for at det skal bli noe på en måte.
ELEV 6:	At du da trekker ut det som er likt for begge, utenfor parentesen. Og så kan du gange med det som er inni for å liksom det som står der da.
Elev 7:	Hm. Trekke utenfor det som er likt, tenker jeg. Ja (...) skrevet på enklere måte kanskje.

Både elev 3 og elev 4 har en beskrivelse av faktorisering som omhandler det essensielle; at et faktorisert uttrykk skal være ett ledd eller ett produkt. Store Norske Leksikon definerer det for eksempel slik: *å faktorisere et polynom vil si å skrive polynomet som et produkt av flest mulig faktorer*. Disse to elevene er de som ligger nærmest definisjonen på akkurat dette spørsmålet, selv ikke elev 2 og 8 (som klarte resten av oppgavene best) hadde like presise svar her.

Hvis man skal plassere elev 3 og 4 sine utsagn i Kilpatrick et al. (2001) sine kompetansebegreper, viser de begrepsforståelse fordi de har et korrekt grep om det matematiske begrepet og relasjonene til relevante begreper som faktor og ledd. Deres teoretiske kompetanse om faktorisering vil kunne anvendes generelt, de vil kunne reflektere, avgjøre og argumentere om hvorvidt et uttrykk er faktorisert eller ikke ut fra sine definisjoner. (Men det skulle vise seg i oppgave B at disse elevene klarte seg dårlig når de skulle omsette den teoretiske kunnskapen i praksis.)

Når man ser disse to elevenes svar ut fra Lithners resonneringstyper er det naturlig å kalle dette imitativ memorert resonnering, siden elevene gjengir definisjonen av faktorisering omtrent slik det står i læreboka. En slik kunnskap om definisjoner er en viktig forutsetning for å løse mer utfordrende oppgaver, der kreativ resonnering (CMR) trenger matematisk forankring. Men akkurat i dette tilfellet var det sannsynligvis et memorert resonnement.

De andre elevenes svar er verken like generelle eller like presise. Utsagnene er mer overflatiske beskrivelser av et faktorisert uttrykk enn presise definisjoner. Når elev 1 sier «forenklet det, trukket det ut» og elev 7 sier «trekke utenfor det som er likt» tyder det på en forståelse og kompetanse som begrenser seg til det de nettopp gjorde i oppgave A. Disse utsagnene er sanne når det gjelder oppgave A, men de viser ikke en generell forståelse for faktorisering av uttrykk. Man vil for eksempel ikke kunne faktorisere $x^2 – 9$ ved å «trekke utenfor det som er likt».

Elevene henger seg kanskje opp i overflatiske egenskaper og avgrenser svaret slik Lithner (2007) beskriver *delimiting AR*. Nå er det riktignok ingen algoritme som skal utføres når de svarer på intervjuspørsmålet, men det er likevel den av Lithners resonneringstyper som best beskriver disse elevenes utsagn.

Elevene viser en viss grad av begrepsforståelse da svarene tross alt forteller noe riktig om et faktorisert uttrykk, som elev 5 noe upresist sier «at hva du må gange med noe for at det skal bli noe på en måte». Det er vanskelig å se at de viser noe annen kompetanse i svarene sine enn den prosedyreflyten de allerede har vist i selve oppgavebesvarelsen.

4.3.2 Oppgave B

Elevene som benyttet faktorisering i løsningen

Her skulle elevene løse likningen $3x^2 – 6x = 0$ der uttrykket på vestre side er identisk med uttrykket de skulle faktorisere i oppgave A. Totalt 6 av elevene oppdaget raskt denne likheten, utnyttet dette, brukte produktregelen og fant riktige løsninger. Dette er en oppgavetype som elevene har mye erfaring med og selve utførelsen blir triviell. De utførte oppgaven korrekt og hensiktsmessig, noe som viser prosedyreflyt. Det viser også strategisk kompetanse, de har utnyttet noe som de allerede visste fra forrige oppgave, og som førte de inn på den mest effektive løsningsstrategien for denne oppgaven. Oppgaven var av en velkjent form, og hvis man kjenner algoritmen, er implementeringen rutinemessig. Dette er typiske kjennetegn på Lithners resonneringstype familiar AR.

De fleste elevene utnyttet altså faktorisering til å løse andregradslikningen med produktregelen. Men hvilken forståelse har disse elevene for denne regelen? Forstår de den matematiske logikken? Dette var samtalen med elev 1 og elev 5 om dette:

FORSKER:	Den der produktregelen, ser du på en måte hva som er logikken i den?
ELEV 1:	Ja det er jo (...) du kunne jo brukt abc-formelen. Men det er mye enklere å bare bruke produktregelen for du bare (...) nå hadde jeg jo allerede faktorisert det der [peker på oppgave A]. Så da bare brukte jeg det. Og så blir det dette utenfor parentesen, sette det lik null, og det inni parentesen sette det lik null. Og så får du to nullpunkt (...) til slutt.
FORSKER:	Er logikken i denne grei, at du skjønner hvorfor det fungerer?
ELEV 5:	Ja. At det som (...) at ett av leddene må være null, for at likningen skal bli null. Så da setter du at begge leddene blir null og så finner du ut hva x er ut fra det.

Elev 1 har både en forståelse av produktregelen som en enkel måte å løse andregradslikninger og kan beskrive hvordan den implementeres («dette utenfor parentesen, sette det lik null, og det inni parentesen sette det lik null»). Så en viss begrepsforståelse vises her. Men eleven sier aldri noe om at et produkt kan bare være null dersom en av faktorene er null, det kommer ingen logisk argumentasjon på hvorfor regelen fungerer. Den uttalte begrunnelsen er ikke matematisk fundert, så kravet om forankring i Lithner (2007) sin CMR er ikke oppfylt. Resonneringstypen er mer av typen familiar AR da dette er en velkjent oppgavetype.

Elev 5 har et mer kort og konsist svar på spørsmålet og snakker om det essensielle i regelen, at «ett av leddene må være null, for at likningen skal bli null». Eleven blander riktignok begrepene faktor og ledd her, men det er tydelig at eleven har et godt grep om den matematiske logikken. Eleven viser dermed en god begrepsforståelse. I tillegg viser eleven kapasitet til logisk refleksjon og forklaring, noe som er kjennetegn på adaptiv resonnering hos

Kilpatrick et al. (2001). Resonnementet har en forankring i en vesentlig egenskap hos et produkt som skal være null, så det oppfyller i alle fall ett av kriteriene for CMR hos Lithner (2007), men det er et velkjent resonnement og er neppe en «nyskapende» resonneringssekvens for eleven.

De som ikke brukte faktorisering i løsningen

To av elevene oppdaget ikke likheten med oppgave A og har heller ikke brukt produktregelen. Elev 3 har derivert uttrykket og ikke kommet frem til noen løsning av likningen. Når forsker spør om hvorfor eleven deriverte, svarer eleven følgende.

ELEV 3:	Ja, jeg tror jeg gjorde det fordi (...) det så lettest ut liksom.
FORSKER:	Ja, men løser vi liksom den likningen hvis vi deriverer den.
ELEV 3:	Jeg tror ikke det. (...)
FORSKER:	Husker du noe som het produktregelen?
ELEV 3:	Nei.

Eleven kjenner ikke metoden for å løse likningen og velger å gjøre noe som «så lettest ut liksom». Vi ser også av intervjuet at eleven heller ikke har særlig tro på at derivering vil gi noe svar på oppgaven. Dette må sies å være et typisk eksempel på resonneringstypen delimiting AR, der eleven gjør noe som kun er knyttet til overflatiske egenskaper i oppgaven, men som overhode ikke løser oppgaven. Å derivere var trolig det eneste eleven kom på å gjøre når dette andregradsuttrykket dukket opp. Når det gjelder kompetansetyper er det vanskelig å se at eleven har vist noen av disse her.

Elev 3 hadde kanskje den beste og mest presise definisjon på hva faktorisering er. At eleven likevel ikke klarer å anvende faktorisering på denne enkle måten virker nærmest som et paradoks. En mulig forklaring kan være at eleven har fulgt godt med i matematikktimene og husker det læreren har sagt, men jobber for lite med oppgaver til at denne likningstypen er familiær. Det kan også være et uttrykk for at eleven har en mer teoretisk forståelse for matematikk, men mangler selve ferdighetene og rutinen.

Elev 4 løste likningen og fikk riktig svar, men brukte andregradsformelen, noe som i denne oppgaven ikke er den mest effektive strategien. I samtalen med eleven kommer følgende frem:

FORSKER:	(...) men hvis du hadde oppdaget at det var det samme som oppgave A, kunne du utnyttet det du har funnet ut der med faktoriseringen til å løse likningen?
ELEV 4:	Jeg kommer ikke på noe nå nei (...) som kunne. Kommer ikke på noe.
FORSKER:	Men hvis jeg sier produktregelen. Det er jo samme likningen som her [peker på det faktoriserte uttrykket fra A]. Så hvis du setter den faktoriserte lik null (...) Eller bruker du alltid abc-formelen når du har en andregradslikning?
ELEV 4:	(...) ja egentlig. Likning av andre grad, bruker jeg alltid abc.
FORSKER:	Så du husker ikke hva produktregelen gikk ut på?
ELEV 4:	Nei. Jeg kan ikke den, husker ikke noe om den.

Forsker prøver (kanskje litt for iherdig) å finne ut om eleven kjenner til produktregelen, noe eleven ikke gjør. Det er tydelig at denne eleven ikke bruker noen andre algoritmer for å løse andregradslikninger, eleven sier tydelig «likning av andre grad, bruker jeg alltid abc».

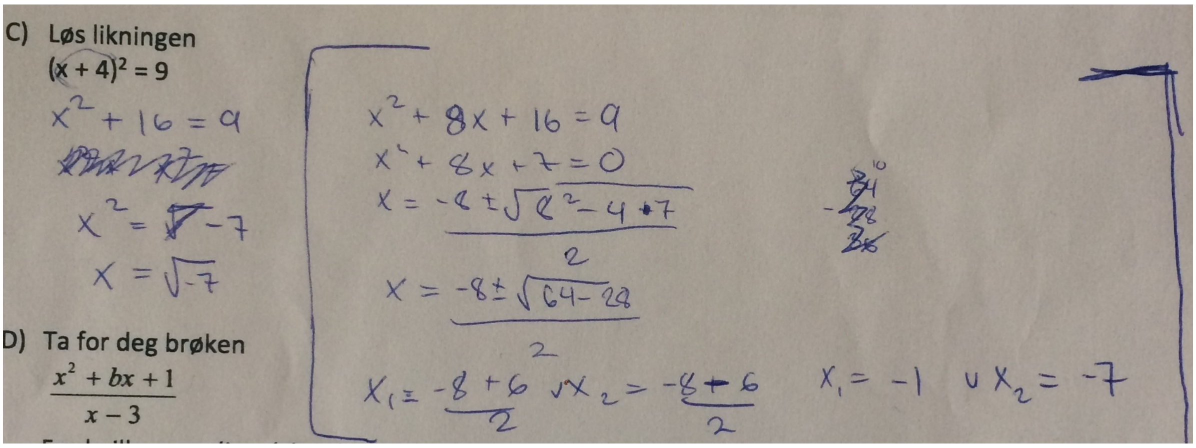
På den ene siden er god kompetanse i å bruke denne formelen tilstrekkelig for å løse alle andregradslikninger. Eleven unngår dermed å «gå seg vill» i de mange algoritmene for å løse slike likninger. På den annen side blir eleven da lite fleksibel og lite effektiv. Dessuten vil eleven få store vansker med å løse oppgaver som krever mer begrepsforståelse og forankring i de matematiske egenskapene.

Elev 4 kan sies å ha god prosedyreflyt når man tenker på kjennetegnet nøyaktighet (eleven fikk jo riktig svar), men ikke når det gjelder fleksibilitet og effektivitet. Å være så lite fleksibel kan være et problem for mange elever, ved at de bruker denne formelen uansett hva oppgaven spør om. Da vil det lett føre til en avgrensende algoritmisk resonnering. Men i denne oppgaven bruker elev 4 en algoritme som jo fungerer for denne typen oppgaver, så resonneringstypen er imitativ og familiar AR.

4.3.3 Oppgave C

Når elevene skulle løse likningen $(x + 4)^2 = 9$ kunne de vise fleksibilitet ved å direkte ta kvadratroten av begge sider og få $x + 4 = \pm 3$. Valgte de en mer omstendelig metode, ved å multiplisere ut parentesen og deretter bruke andregradsformelen, kunne de likevel vise prosedyreflyt ved å utføre operasjonene korrekt og effektivt.

5 av de 6 gjenværende elevene besvarte oppgaven på den mer omstendelige måter, de utnyttet ikke faktoriseringen i sin strategi. Når de bruker strategien med andregradsformelen blir det flere steg i utregningen og det stilles dermed større krav til prosedyreflyt for å få korrekte svar. I flere av tilfellene ble $(x + 4)^2$ multiplisert feil, de fikk dermed ikke med seg leddet 8x i $x^2 + 8x + 16$. Her er et eksempel der elev 7 først gjør denne feilen, men retter det opp igjen:



Til venstre er elevens første løsningsstrategi, som blir forkastet fordi kvadratroten har en negativ verdi. Eleven har den begrepsforståelsen som trengs for å forstå at det må være en feil i utregningen, «conceptual understanding helps students avoid many critical errors in solving problems, particularly errors of magnitude» (Kilpatrick et al., 2001, s.120). Til høyre starter eleven så på ny giv og utfører regneoperasjonene korrekt, nøyaktig, effektivt og viser dermed prosedyreflyt.

Elev 5 besvarte oppgaven omtrent på samme måte. Her er utdrag fra intervjuet med eleven om denne oppgaven.

FORSKER:	(...) Hvis du ser på den likningen, hva er det den sier for noe egentlig?

ELEV 5:	At x + 4 i annen er 9.
FORSKER:	Ja og kan du da si noe om hva x + 4 må være?
ELEV 5:	Eh (...) At det må jo være et minustall, for 4 i annen er jo 16 og det er over 9. For det skal bli 3 [peker på parentesen]. Det var det jeg hadde tenkt å gjøre, og skrive 3 i annen og skrive x + 4 er lik 3.
FORSKER:	Så du tenkte på det, men gjorde det ikke. Hvorfor gjorde du det ikke slik?
ELEV 5:	Jeg vet ikke (...) tenkte det ble litt feil.
FORSKER:	At det var for enkelt kanskje?
ELEV 5:	Ja. Ja.

Eleven viser evne til logisk tanke, refleksjon og forklaring når det forklares at «det må jo være et minustall, for 4 i annen er jo 16 og det er over 9». Dette er kjennetegn på adaptiv resonnering (Kilpatrick et al., 2001). Dette viser at eleven ikke umiddelbart gikk til algoritmen med andregradsformelen, men reflekterte over innholdet i selve likningen.

Eleven sier at «det var det jeg hadde tenkt å gjøre, og skrive 3 i annen og skrive x + 4 er lik 3». Her var eleven veldig nær å løse oppgaven på den mest effektive måten, men valgte å gå bort fra den fordi det virket «for enkelt». Kanskje var det en forventning om at matematikk skal være vanskelig. En slik type resonnering kan være av typen delimiting AR, siden den overflatiske egenskapen «enkelhet» avgrenser hva slags strategi eleven velger videre. Det kan også være knyttet til det Kilpatrick et al. (2001) kaller *produktiv disposisjon*, altså noe som har med forventninger og oppfatninger til seg selv og matematikk som fag.

Av de 6 gjenværende respondentene var det kun elev 4 som oppdaget «snarveien» ved at venstresiden allerede er faktorisert. Her er elevens begrunnelse av sin besvarelse:

FORSKER:	Hva er det du har tenkt der?
ELEV 4:	Jeg tenkte at det her er i andre sant, så man kan bare ta kvadratrot på begge sider og får ta vekk den opphøyede der og ta vekk kvadratroten der. Så da blir (...) da oppløser du også parentesene, og så ta det som en helt vanlig likning.

Eleven tar kvadratroten av begge sider av likningen og finner raskt en løsning, men tar ikke med i utregningen at høyresiden kan være både 3 og – 3, og finner dermed bare én av to løsninger. Eleven sier «tenkte at det her er i andre sant, så man kan bare ta kvadratrot på begge sider og får ta vekk den opphøyede der og ta vekk kvadratroten der» og viser der en begrepsforståelse når det gjelder relasjonen mellom høyre og venstre side av likningen og av operasjonene kvadratrot og kvadrering.

Kjennetegn på prosedyreflyt er blant annet fleksibilitet, nøyaktighet og effektivitet (Kilpatrick et al., 2001). Elev 4 viser fleksibilitet, som er en viktig forutsetning for å se slike «snarveier», men viser ikke like mye nøyaktighet eller effektivitet i utførelsen.

Når elev 4 i intervjuet blir spurt om å finne den andre løsningen sies følgende.

FORSKER:	Ja (...) Men når du bruker abc-formelen, får du jo ofte 2 løsninger. Men her har du bare fått én løsning. Finnes det noen annen løsning du kan tenke deg at denne har?
ELEV 4:	Ja, men jeg vet ikke. Man får jo ikke noe b-ledd av abc-formelen av å løse det på den måten. Det blir jo bare x i andre pluss 4 i andre er lik 9. Man får jo ikke noe b-ledd da.
FORSKER:	Mm. [skriver opp] (x + 4) ganger (x + 4). Så det blir et b-ledd (...) Så du vil få 2 løsninger.
ELEV 4:	Mm.

Her introduserer forskeren tanken om abc-formelen, noe som dessverre leder eleven vekk fra sin egen fleksible løsningsstrategi. Eleven mener denne formelen ikke kan brukes fordi «det blir jo bare x i andre pluss 4 i andre er lik 9. Man får jo ikke noe b-ledd da». Her viser eleven noe manglende kompetanse om kvadratsetningene slik at «b-leddet» 8x ikke kommer med i beregningene. Her mener eleven at strategien med abc-formelen må forkastes på grunn av overflatiske egenskaper, dette er et kjennetegn på resonneringstypen delimiting AR, «if the implementation does not lead to a (to the reasoner) reasonable conclusion it is simply terminated without evaluation and another algorithm may be chosen from the delimited set» (Lithner, 2007, s.263).

Det avdekkes ytterligere hindringer for at elev 4 skal ende opp med de to riktige løsningene når forsker prøver å lede eleven tilbake til sin opprinnelige løsningsstrategi:

FORSKER:	Men den måten du tenkte på her, den vil jo kunne gi den andre løsningen og. Hvis den parentesen opphøyet i annen er ni, så sier du at da må det inne i parentesen være kvadratroten av 9, altså 3. Er det noe annet den kan være? Må den være 3.
ELEV 4:	Kan også være -3. Så svaret er -1 og 1. Ja jeg tenkte på det, så jeg skrev ± 1 her.
FORSKER:	Jeg skjønner. Men det er jo her [peker på parentesen x + 4], det blir forskjell ikke sant.

Her er spørsmålet såpass ledende at strategivalgene faktisk blir foretatt av forskeren, det blir et typisk eksempel på person-guided AR. Men eleven har tydeligvis tenkt i de samme baner allerede i besvarelsen og sier «kan også være -3. Så svaret er -1 og 1. Ja jeg tenkte på det, så jeg skrev ± 1 her».

Eleven tror dessuten at når x + 4 er ± 3 vil x automatisk bli ± 1. En slik forhastet konklusjon kan kanskje skyldes manglende rutine eller unøyaktighet, altså manglende prosedyreflyt. Resonneringen her ligger nok nærmest det Lithner definerer som delimiting AR, en overfiksering på en overflatisk egenskap (pluss minus tegnet) avgjør strategivalget og gir feil svar. Eleven kunne lett ha sjekket at x = 1 ikke var en løsning og oppdaget feilen selv, noe eleven ikke gjorde.

4.3.4 Oppgave D

Oppgaven er å finne ut hvilken verdi b må ha for at denne brøken kan forkortes.

$$\frac{x^2+bx+1}{x-3}$$

For å løse denne oppgaven må man kjenne en sammenheng mellom nullpunkter og faktorisering. Kanskje må det også litt kreativitet til for å anvende ulike kunnskaper samtidig og på en litt «uvant» måte. Kun 2 av de gjenstående 6 elevene har koblet kunnskapene riktig, forsto at (x – 3) måtte være en faktor i telleren og satt inn tallet 3 i uttrykket. Men de kom ikke videre derfra uten hint eller veiledning fra forsker.

Elev 5 begynte først på en strategi som skilte seg litt ut. Eleven sier følgende i intervjuet.

FORSKER:	Ja, du testet ut noen forskjellige verdier for b ser det ut som.
ELEV 5:	Ja.
FORSKER:	Og hva var du ute etter da, på en måte?
ELEV 5:	Skulle sjekke om svaret ble 3, sånn at du fikk x – 3 i en parentes.

Dette blir en slags prøve-feile metode, men som har en klar hensikt. I stedet for å finne verdien av *b*, velger eleven noen forskjellige verdier for *b* og ser hva som skjer med nullpunktene i telleren. Hadde eleven hatt lang nok tid, kunne denne strategien ført frem til et korrekt svar. Det blir her sannsynligvis skapt en ny (for eleven) resonneringssekvens. Det gis også argumenter som støtter hvorfor dette ble gjort når eleven sier «skulle sjekke om svaret ble 3, sånn at du fikk x – 3 i en parentes». Eleven vet altså hva som er målet med prøve-feilingen selv om det kanskje ikke er så presist formulert. Det ligger her en forankring i de matematiske egenskapene til en brøk som kan forkortes, sammenhengen mellom nullpunkter og faktorisering og sammenhengen mellom koeffisienter og nullpunkter. Selv om eleven ikke kom frem til et endelig svar her, oppfyller resonnementet kriteriene for CMR (Lithner, 2007).

For elev 7 ligger hindringen kanskje i at koeffisienten *b* ikke er et tall men et symbol. Her er utdrag fra intervjuet med denne eleven.

FORSKER:	Så var det denne (oppgave D). Har du sett på oppgaven?
ELEV 7:	Ja altså det jeg tenkte først. Eller jeg har ikke fått sett så mye på den. Men sånn at jeg kunne bruke abc-formelen og sette den som nullpunkt. Og inn i nullpunktmetoden, men jeg vet jo ikke b-en. Så da i alle fall får jeg da to parenteser som jeg kan stryke med det som står i nevneren.
FORSKER:	Ja men du er veldig inne på noe nå altså. Så hadde b vært et tall så (...)
ELEV 7:	Da hadde jeg fått det til tror jeg.

Denne eleven har en strategi, men implementeringen stopper opp fordi oppgaven ikke er konkret nok («men jeg vet jo ikke b-en»). Eleven viser til en viss grad evne til logisk tanke, refleksjon og forklaring her, som er kjennetegn på adaptiv resonnering hos Kilpatrick et al. (2001).

Selve resonneringssekvensen er muligens ny for eleven, men forklaringen er neppe plausibel i forhold til denne oppgaven. Hadde *b* vært et konkret tall ville elevens argumentasjon vært tilstrekkelig, men da hadde jo oppgaven vært på et enklere matematisk nivå. Så selv om eleven viser kreative tendenser her, svikter det litt på den matematiske argumentasjonen og kan neppe kalles CMR.

Når eleven sier «men sånn at jeg kunne bruke abc-formelen og sette den som nullpunkt», tyder det på at strategivalget er bestemt av en overflatisk egenskap (at dette er et andregradsuttrykk) og at eleven velger en algoritme som har med dette å gjøre, så dette fremstår mer som delimiting AR.

Mange av elevene trengte en del hint eller stikkord før de kom på sporet av en løsningsstrategi. Man kan kanskje si at elevene har de nødvendige matematiske verktøyene, men klarer ikke å finne disse frem selv. Når de strategiske valgene blir foretatt av forsker, slik som var tilfelle hos de fleste elevene her, er det naturlig å kalle resonneringen guided AR. Selve implementeringen er ganske triviell her, utfordringen i oppgaven består i å finne en god plan eller strategi.

5.0 Diskusjon

I denne delen vil jeg ta et tilbakeblikk på de ulike inndelingene for matematisk forståelse, kompetanse og resonnering. Jeg vil rette fokus mot hvilken kategori, innenfor hver av disse modellene, som er mest «ønsket». Siden denne studien både ser på elevenes kompetanse og elevenes resonnering, er det også naturlig å drøfte hvordan disse to dimensjonene kan knyttes til hverandre. Til slutt vil jeg ta for meg Lithners rammeverk for matematisk resonnering, drøfte om kravene til kreativ resonnering er for streng, og skissere en «mellomkategori» som kan bidra til å nyansere spekteret av matematisk resonnering.

5.1 De «beste» formene for forståelse, kompetanse og resonnering

I starten av teorikapittelet ble det beskrevet ulike modeller som kategoriserer eller deler inn elevenes matematiske «kvaliteter». Hos Mellin-Olsen (1984) og Sfard (1991) var det ulike typer matematiske oppfatninger, hos Skemp (1976) og Hiebert/Lefevre (1986) var det ulike typer matematisk forståelse. Kilpatrick et al. (2001) og Niss & Højgaard (2002) inndelte i kompetanser, Kieran (1996) snakket om ulike aktiviteter og hos Lithner (2007) dreiet det seg om ulike typer resonnering.

I disse modellene får man som gjerne et inntrykk av at én av kategoriene er «bedre» eller mer «høyverdig» enn de andre. Dette til tross for at flere av forfatterne, slik som Hiebert/Lefevre og Kilpatrick, poengterer at alle kategorier er like viktige og at de utfyller hverandre. Man sitter likevel med inntrykket at relasjonell forståelse er «bedre» enn instrumentell forståelse, at strukturelle oppfatninger er mer høyverdig enn operasjonelle oppfatninger og at resonnerende aktivitet er den mest ønskede formen for matematisk aktivitet.

Kanskje blir disse kvalitetene sett på som høyverdige fordi det er her menneskets unike evner virkelig kommer til sin rett, her er ikke menneskehjernen bare en «maskin» som utfører korrekte prosedyrer. De vil også være høyverdige i den forstand at disse kvalitetene ofte trengs for å løse mer komplekse eller uvante matematikkoppgaver. Mine undersøkelser bekreftet også dette; elevene som klarte å løse den siste oppgaven (oppgave D) viste både begrepsforståelse og adaptiv resonnering. Kun prosedyreflyt ville ikke vært nok for å løse denne oppgaven, mens det var tilstrekkelig for å løse den enkleste (oppgave A). Slik blir det gjerne på en matematikkeksamen også; for å klare de vanskeligste oppgavene og få toppkarakter trengs disse «høyverdige» formene for forståelse/kompetanse. Med andre ord blir disse kategoriene favorisert og høyest verdsatt av utdanningsmyndighetene og samfunnet.

Dette skillet i verdi eller kvalitet ser man spesielt i Lithner (2007) sin inndeling i imitativ og kreativ matematisk resonnering. Imitativt gir en litt negativ assossiasjon, som å «herme» eller kopiere, mens å tenke kreativt ses gjerne som svært positivt.

Så kan man jo spørre om kreativitet alltid er det mest ønskede i matematikk. For mange som anvender matematikk videre i utdanning og yrke er matematikk kun et verktøy for å løse rutinepregede problemer, slik som innen regnskap eller forsikring. Da vil imitativ algoritmisk resonnering være langt viktigere enn kreativitet.

Ikke alle har like strenge krav til hva som kalles matematisk kreativitet som Lithner (2007). En annen definisjon på matematisk kreativitet kan man finne hos Liljedahl & Sririman (2006), som sier at på skolenivå kan dette ses på som «prosessen som resulterer i uvanlige og/eller innsiktsfulle løsninger på oppgaver eller som det å formulere nye spørsmål eller vinklinger (...)» (Liljedahl & Sririman, 2006, s.19). I motsetning til hos Lithner (2007) der det er et «og» mellom alle kriteriene som må oppfylles for å kalles CMR, er det her et «og/eller» mellom kriteriene.

5.2 Komplett forståelse og kompetanse uten «novelty»

Flere steder i analysen, blant annet i oppgave B for elev 8, viste elevene tegn på kreativ matematisk resonnering (CMR). Men ofte var kravet om «novelty» problematisk. Det kunne være vanskelig å avgjøre fordi det er vanskelig å vite om eleven har tenkt noe lignende før. Og selv om man visste at dette kriteriet ikke var oppfylt, hadde eleven likevel oppfylte de to siste kriteriene om plausibilitet og matematisk forankring. I slike tilfeller ble det vanskelig å plassere elevens resonnement; det var ikke kreativt (CMR), men ingen av de imitative kategoriene passet heller.

Spørsmålet blir da om Lithners skille mellom det imitative og det kreative blir for sterkt. De imitative resonneringstypene peker i retning av det Skemp (1976) kalte instrumentell forståelse. Memorert resonnering (MR) krever kanskje ingen matematisk forståelse i det hele tatt, da det ifølge Lithner (2007) bare består i å huske hele løsningen og skrive den ned. Algoritmisk resonnering (AR) kjennetegnes av at man husker en passende løsningsalgoritme og implementerer denne. Hvis man bruker Skemp (1976) sitt bilde om å komme seg fra A til B i en by, vil algoritmisk resonnering kreve at man husker en veibeskrivelse fra A til B og følger denne, altså krever ikke AR noe mer enn instrumentell forståelse.

Den relasjonelle forståelsen derimot dreier seg ifølge Skemp (1976) om å se sammenhenger og logikk, og ingen av de ulike typene imitativ resonnering legger opp til eller krever slik type forståelse. Samtidig trenger ikke en elev med relasjonell forståelse å alltid resonnere på en helt ny måte, man kan utmerket godt se sammenhenger og bruke disse uten at det er direkte kreativt. Hvis resonnementet har plausible argumenter og er forankret i de matematiske begrepene tyder jo dette på at eleven har en relasjonell forståelse. Man kan med andre bygge opp til en komplett matematisk forståelse uten å tenke kreativt.

Hvis man kobler resonneringstypene til de ulike kompetansene fra Kilpatrick et al. (2001) sin strengmodell ser man noe av det samme bildet. Imitativ resonnering bygger klart opp til prosedyreflyt. Når man i tillegg tar med de to siste kravene for CMR, plausibilitet og forankring, kan dette bygge opp til alle de andre kompetansene. Man kan altså ha komplett matematisk kompetanse uten å ha resonnert på en nyskapende måte.

Den siste av kompetansene i strengmodellen, produktiv disposisjon, falt litt utenfor rammene av dette prosjektet og ble ikke anvendt i analysen. Denne kompetansen handler ifølge Kilpatrick et al. (2001) mest om holdninger og synet på seg selv i faget matematikk. Å resonnere på en nyskapende måte i matematikk kan nok bidra til å få en positiv holdning til nytteverdien av matematikk og ha tro på egne ferdigheter. Men å resonnere kreativt forutsetter ikke at man har denne typen kompetanse, det vil for eksempel være viktigere å ha begrepsforståelse rundt de begrepene man skal være kreativ med.

5.3 Matematisk fundert resonnering

Hvis man fjerner det første kriteriet for CMR, kravet om «novelty», men beholder de to andre kriteriene, sitter man likevel igjen med noe veldig verdifullt for matematisk forståelse. Hvis en elev sitt resonnement er plausibel, og forankret i de matematiske komponentenes iboende egenskaper, vil dette bygge opp til relasjonell forståelse.

Slik type resonnering, CMR uten det nyskapende elementet, kan kalles *matematisk fundert resonnering*. Altså er det logisk bygget opp og argumentert ut fra matematiske egenskaper. Det vil ikke være imitativt fordi det er ikke pugget og er heller ingen etterligning av noen algoritme eller et eksempel.

Sett ut fra kompetansemodellen hos Kilpatrick et al. (2001), matematisk fundert resonnering forutsetter at man tar i bruk alle typene av matematisk kompetanse. Man må ha begrepsforståelse for å kjenne til egenskapene man skal forankre resonnementene i. Strategisk kompetanse handler mye om å gjenkjenne og å anvende strukturelle relasjoner mellom objektene, dette trenger man også når et argument skal forankres matematisk. Adaptiv resonnering dreier seg blant annet om å kunne argumentere og å forklare det man gjør, altså er dette en kompetanse som er nødvendig for å resonnere plausibelt. Produktiv disposisjon, holdningen til matematikk og tro på egne ferdigheter, er en kompetanse som vil være viktig å ha når man skal overbevise både seg selv og andre om at resonnementet er holdbart.

5.4 Kreativitet

Så hvor står kreativiteten i dette bildet? Kanskje kan «novelty»-elementet mer ses på som det lille ekstra, en slags X-faktor innen matematisk resonnering. Noe som er ønsket og noe som bør stimuleres, men ikke som nødvendig for å bygge opp til matematisk forståelse eller kompetanse.

Kreativitet kan også være vanskelig å måle eller oppdage, siden det kan defineres på så mange måter. Noen vil mene det er knyttet til begavelse eller genialitet, noen vil til og med hevde at kreativitet har noe mystisk eller guddommelig over seg og noen vil mene kreativitet har et element av tilfeldighet i seg (Liljedahl & Sririman, 2006). Det kreative elementet kan være noe vi ønsker å bygge opp til, men kanskje ikke noe vi kan forvente selv av de faglig sterkeste elevene.

5.5 Nyansert modell for elevers resonnering i matematikk

Ut fra mine erfaringer i dette forskningsprosjektet, og drøfting av hvordan de ulike typene resonnering kan bygge opp til ulike kompetanser, ønsker jeg å skissere en revidert modell for resonneringstyper i matematikk. I denne blir det skilt mellom matematisk fundert resonnering uten eller med det nyskapende elementet. De imitative resonneringstypene er beholdt slik de var hos Lithner (2007).

Med utgangspunkt i Lithners rammeverk foreslår jeg følgende inndeling av matematisk resonnering:

Resonneringstyper:	**Kjennetegn:**
Imitativ resonnering - Memorert - Familiær algoritmisk - Avgrensende algoritmisk - Veiledet algoritmisk	Strategier uten matematisk argumentasjon, består i å - huske en hel løsning - huske en algoritme som løser lignende problemer - avgrense algoritmer basert på overflateegenskaper - følge instruksjoner fra eksempel eller person
Matematisk fundert resonnering	- Strategivalg og konklusjoner er plausible - Argumentasjon forankret i matematiske egenskaper
Kreativ matematisk resonnering	- Matematisk fundert resonnering som i tillegg er nyskapende (en ny resonneringssekvens for eleven)

Den nye kategorien, matematisk fundert resonnering, vil være slik eleven resonnerer i oppgaver som ikke er rutinepregede og ikke kan løses ved å bare følge en bestemt algoritme.

Eleven må ta i bruk sin kompetanse om begreper, og relasjonene mellom begrepene og operasjonene, for å resonnere på denne måten. Eleven argumenterer på en matematisk plausibel måte som tar i bruk en relasjonell forståelse for begreper og operasjoner.

Hvis elevens resonnement i tillegg inneholder noe nytt, annerledes eller uventet vil det havne i den siste kreative kategorien.

6.0 Avslutning

6.1 Konkluderende betraktninger

Denne masteroppgaven hadde to forskningsspørsmål:

1) Hvilke typer kompetanse viser vgs-elever innen faktorisering?
2) Hvordan resonnerer elevene når de jobber med faktorisering?

Disse forskningsspørsmålene fikk ulike roller eller betydninger gjennom dette prosjektet. Det første spørsmålet var utgangspunktet når jeg startet arbeidet med denne oppgaven, det var dette spørsmålet som styrte mine valg for datainnsamling og forskningsdesign. Det andre forskningsspørsmålet kom på banen som et resultat av datainnsamlingen, og ble etterhvert veldig sentralt i analysen og i diskusjonen.

For å besvare forskningsspørsmålene trengte jeg data som kunne gi et godt innblikk i elevenes kompetanse og hvordan de resonnerte når de jobbet med faktorisering. Datainnsamlingen besto av oppgavebaserte semistrukturerte en-til-en intervjuer. Det ble utarbeidet et oppgavesett bestående av 4 oppgaver som kunne avdekke forskjellige typer kompetanse. Hver elev ble deretter intervjuet for å finne ut mer om denne kompetansen. Disse intervjuene kunne også brukes til å analysere elevenes resonneringsmåter.

Når det gjelder det første forskningsspørsmålet, fant jeg at mine respondenter totalt sett fikk vist de fire kompetansetypene fra Kilpatrick et al. (2001) sin trådmodell som jeg undersøkte. De mest observerte kompetansetypene var prosedyreflyt og begrepsforståelse, mens adaptiv resonnering og særlig strategisk kompetanse var mindre utbredt.

De mest interessante funnene var når jeg så de to forskningsspørsmålene i sammenheng, på hvordan de forskjellige resonneringstypene kunne knyttes til ulike de ulike kompetansene. Noen av elevene viste tegn på kreativ matematisk resonnering (CMR), da helst i kombinasjon med adaptiv resonnering. Men i flere av disse tilfellene var det tvil om eleven resonnerte på en nyskapende måte, om eleven oppfylte Lithners (2007) kriterium om «novelty». Dataene og analysen gjorde meg bevisst på at det var et for strengt skille mellom de imitative resonneringstypene og CMR. Flere av elevenes resonnementer befant seg på et slags mellomnivå, mellom det imitative og det kreative. Jeg foreslo derfor en nyansering med et nytt resonneringsnivå.

Dette nye mellomnivået fikk navnet «matematisk fundert resonnering» og kjennetegnes ved at resonnementet har plausible argumenter, og at argumentene er forankret i de fundamentale matematiske egenskapene til de involverte elementene. Hvis en elev kan resonnere på denne måten, i tillegg til imitativ resonnering, kan det bygge opp til alle typer matematisk kompetanse. Og omvendt: en elev som har alle «strengene» i Kilpatrick at al. (2001) sin kompetansemodell vil ikke nødvendigvis resonnere på en nyskapende måte.

Kreativ matematisk resonnering (CMR), som oppfyller det tre kriteriene hos Lithner (2007), plasserer jeg fortsatt høyest i «hierarkiet» av resonneringstyper. Kreativitet er absolutt ønsket og noe vi i matematikkundervisningen bør bygge opp til, men kanskje ikke noe vi kan kreve eller forvente av elever selv om de har komplett matematisk kompetanse.

6.2 Begrensninger i denne studien

Denne studien begrenset seg til å studere kompetansen og resonneringen til elever som lå på et middels til høyt nivå i matematikk. Jeg fikk med andre ord ikke dannet meg noe bilde av hva elever på lavt til middels nivå strever mest med når det gjelder faktorisering. Det ble heller ikke undersøkt noe om elever på aller høyeste nivå, for eksempel R2-elever med toppkarakter, hva slags kompetanse og resonneringstyper de viser når det gjelder faktorisering.

En annen begrensning er knyttet til at dette var et kvalitativt forskningsprosjekt. Antall respondenter var få og ikke nødvendigvis representative for elever i videregående skole. Mine resultater kan dermed ikke generaliseres, men det var heller ikke formålet med denne studien. Mitt mål var å utforske og beskrive kompetansen og resonneringen til noen få elever.

En tredje begrensning var at den siste «strengen» i Kilpatrick et al. (2001) sin kompetansemodell, produktiv disposisjon ikke ble undersøkt. Jeg vurderte det ikke som aktuelt å undersøke elevenes holdninger og syn på seg selv i matematikkens verden, jeg så det ikke som relevant innenfor temaet faktorisering. I ettertid ser jeg at det kunne vært interessant å også ta med denne dimensjonen av kompetanse, den kan kanskje ha relevans knyttet til matematisk kreativ resonnering (CMR).

6.3 Implikasjoner til undervisningspraksis

Det var nyttig og interessant å bruke Kilpatrick et al. (2001) sin strengmodell når man analyserte kompetansen elevene viste. Denne modellen angir tydelige kjennetegn på de forskjellige kompetansene, så den vil være anvendelig også for lærere. Den kan anvendes når man lager oppgaver til vurderingssituasjoner og på den måten sørge for at alle kompetansetyper blir målt. Den er også godt egnet til å analysere elevenes muntlige forklaringer på oppgaver de har gjort, slik jeg gjorde i intervjuene. Dette er noe lærere kan benytte seg av når de går rundt og snakker med elevene i matematikktimene, som en del av den underveisvurderingen de nye læreplanene vektlegger sterkt.

Den «nye» resonneringstypen som ble foreslått i denne oppgaven, matematisk fundert resonnering, gir også noen implikasjoner for undervisningspraksis. Når vi lærere gjennomgår oppgaveeksempler for elevene bør vi ha et stort fokus på å argumentere for de strategivalgene som foretas. Vi bør også være bevisst på at argumentene skal være forankret i egenskapene til de matematiske objektene som er involvert. På denne måten kan vi gjøre det til en vane for elevene å resonnere på denne måten. Denne resonneringsmåten kan både bygge opp til alle «strengene» i elevenes kompetanse og den gjør at elevene trenger å ta i bruk alle delene av sin kompetansene.

6.4 Implikasjoner for videre forskning

Det trengs mer forskning på kompetanse og resonneringsmåter når det gjelder faktorisering for elever på lavere nivå og for elever med matematikkvansker, da slike elever ikke ble studert i denne oppgaven. Hva slags holdninger og syn elevene har til faktorisering ville også vært nyttig å trekke inn, altså inkludere kompetansen produktiv disposisjon i undersøkelsene.

Det kan også være interessant å bruke de samme to rammeverkene, Kilpatrick et al. (2001) og Lithner (2007), for å analysere andre deler av elevenes matematikkpensum. Kanskje ville flere studier peke på noe av det samme som i denne oppgaven, at skillet mellom det imitative og det kreative må nyanseres noe.

Litteraturliste

Baker, Sarah Elsie and Edwards, Rosalind (2012). *How many qualitative interviews is enough. Discussion Paper*. NCRM.

Bell, A. (1994). *Algebra learning research and the curriculum*. Rend Sem. Mat. Univ. Poi. Torino, 54(2), 125-160.

Brekke, Gard (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Læringssenteret

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education (6th ed.)*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203029053

Creswell, J. W. (2005). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Upper Saddle River, N.J: Merrill.

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: *Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews*. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9, 40–177. https://doi.org/10.2307/749946

Heggem, Svein Anders (2020). *Meningsfull matematikkundervisning for alle*, Utdanningsnytt 20/1 2020. https://www.utdanningsnytt.no/matematikk-svein-anders-heggem-undervisning/meningsfull-matematikk-undervisning-for-alle/226997

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 1–27). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kieran, Carolyn. (1981) *Concepts associated with the equality symbol*. Educational Studies in Mathematics, 12

Kieran, Carolyn. (1996). *The changing face of school algebra*. In C. Alsina, J. Alvarez, B.

Kieran, Carolyn. (2004). *Algebraic thinking in the early grades: What is it.* The Mathematics Educator. 8

Kieran, Carolyn. (2007). *Learning and teaching algebra at the middle school through college levels*. Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. 707-762.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2002). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. The National Academies Press. Accessed, 2(4), 04.

Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). *Musings on Mathematical Creativity. For the Learning of Mathematics*, 26(1), 17–19. http://www.jstor.org/stable/40248517

Lithner, Johan. (2007). *A research framework for creative and imitative reasoning*. Educational Studies in Mathematics. 67. 255-276

Mellin-Olsen, & Hoel, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet : en undervisninglære* . NKI-forl.

Mellin-Olsen, S. (1981). *Instrumentalism as an educational concept*. Educ Stud Math 12, 351–367

Naalsund, Margrethe (2012) *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*. Doktorgrad avlagt ved Universitetet i Oslo

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, Mogens & Højgaard, Tomas. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet.

Niss, M. A., & Højgaard, T. (2019). *Mathematical competencies revisited*. Educational Studies in Mathematics, 102(1), 9-28.

Postholm. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg., p. 242). Universitetsforlaget

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics

Skemp, R. R. (1976). *Relational understanding and instrumental understanding*. Mathematics teaching, 77(1).

Skemp, R. R. (1978). *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. The Arithmetic Teacher, 26(3), 9–15.

Utdanningsdirektoratet UDIR (2013): *Læreplan i matematikk 1T (MAT1-04)*. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-1t-—-vg1-studieforebuande-utdanningsprogram

Utdanningsdirektoratet UDIR (2020): *Læreplan i matematikk 1T (MAT09-01)*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat09-01/kompetansemaal-og-vurdering/kv42

Utdanningsdirektoratet UDIR (2020): *Læreplan i matematikkk 1 – 10.trinn (MAT01-05)*. Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Vedlegg 1: informasjonsskriv/samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Undersøkelse om elevers forståelse av faktorisering"?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å få mer innsikt i hva type forståelse matematikkelever har innen temaet faktorisering. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Vi ønsker å intervjue og observere elever i deres arbeid med oppgaver. Elevene skal gjøre fire små oppgaver om faktorisering og deretter bli intervjuet om hvordan de tenkte. Det blir satt av 30 minutter til hver elev.

Forskningsspørsmålet som skal analyseres er "hva type kompetanse og i hvilken grad har elevene forståelse for faktorisering?"

Undersøkelsen skal brukes i et masterprosjekt innen matematikkdidaktikk.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Universitetet i Bergen, Matematisk institutt er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Vi ønsker å undersøke kompetansen hos ca 10 elever i matematikk S1 som har middels eller høy måloppnåelse i faget. I samråd med faglærer i matematikk har vi kommet frem til at du er en av elevene som kan være aktuell til denne undersøkelsen.

Hva innebærer det for deg å delta?

Vi avtaler et tidspunkt som passer for deg, i skoletiden der du tas ut av klasserommet og skal løse fem korte oppgaver om faktorisering. Etter dette blir det et kort intervju der du får oppfølgingsspørsmål angående oppgavene. Totalt vil dette ta omkring 30 minutter. Det blir tatt lydopptak av intervjuet som senere blir transkribert, anonymisert og opptaket slettet.

Hvis foresatte ønsker kan de få tilsendt intervjuspørsmålene på forhånd. Ta i så fall kontakt via e-post.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Deltakelsen inngår ikke som en del av matematikkundervisningen, det vil ikke påvirke den faglige vurderingen av deg eller din karakter i orden/adferd.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Nils-Henrik Hvale foretar intervjuene, tar lydopptak og skal skrive om dette i sitt masterprosjekt.

Førsteamanuensis Ove Gunnar Drageset ved Matematisk institutt er veileder på prosjektet.

Ingen uvedkommende vil få tilgang på personopplysninger eller lydopptak.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er våren 2022.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Bergen, Matematisk institutt, har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

Nils-Henrik Hvale (student): nhh@bpg.no

Ove Gunnar Drageset (veileder): ove.gunnar.drageset@uit.no

Vårt personvernombud: Janecke Helene Veim
Janecke.Veim@uib.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Nils-Henrik Hvale

Nils-Henrik Hvale

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Undersøkelse om elevers forståelse av faktorisering,* og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i intervju

☐ Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker/prosjektdeltakers foresatte hvis elev under 18 år, dato)