Itererte modular og linne n-kategoriar

Olai Åsmundson Mostad

1. juni 2023

Innhald

Samandrag

Me ser på iterasjon av operasjonen "(dei endeleg-genererte frie) modulane til" med utgangspunkt i ein kommutativ rig, altså ein kommutativ ring som ikkje nødvendigvis har additive inversar. I første omgang dannar desse modulane ein kategori. Denne får ein rigstruktur "opp til naturleg isomorfi" på same måte som ein monoidal kategori har ein monoidestruktur opp til naturleg isomorfi. Det er kjent at modulane til denne såkalla rigkategorien dannar ein bikategori. Denne bikategorien av "2-modular" vart først studert av Kapranov og Voevodsky i ein artikkel frå 1994, som feilaktig hevda at denne bikategorien er ein strikt 2-kategori.

Situasjonen er likevel høvesvis strikt, og dette motiverar ein algebraisk definisjon av linn n-kategori med rigstruktur som er slik at modulane over ein slik n-kategori dannar ein linn n+1-kategori med rigstruktur.

Innleiing

Kategorien av dei endeleg-genererte frie modulane til ein ring (eller rig, sjå seksjon 1) inneheld djup informasjon om ringen. Lauseleg er K-teorien $K(k)$ av ein ring k gruppekompletteringa (det vil seia å legga til modular av negativ rang) av kategorien $\mathcal{F}_k$ av modulane til ringen. Elmendorf og Mandell viser i [8] at denne K-teorien har ein rigstruktur som lar oss ta modulane på nytt etter gruppekomplettering. Det vert vist i [1] at å ta modular to gongar for så å gruppekompletter a gjev "det same" som å ta modular, komplettera, ta modular og komplettera. Sjå Definisjon 1.3 for rigstrukturen på modulane til k som gjer dette mogleg. Det kan altså henda at ein kan lera noko om iterert K-teori ved å studera itererte modular.

I denne oppgåva gjev me ei rigorøs skildring av den svake n-kategorien av n-modular, rigstrukturen denne har og korleis den kan brukast til å konstruera den svake $n+1$-kategorien av $n+1$-modular.

For å gjera dette definerar me ein ny type n-kategoriar kalla linne n-kategoriar, som er forholdsvis strikte, men svake nok til at itererte modular er eit døme. Det er og eit resultat i seg sjølv at det finst ikkje-trivielle døme på slike n-kategoriar. Det er eit betydeleg arbeid å visa at linne n-kategoriar er veldefinerte, men me endar opp med følgande teorem.

Teorem 5.16. Linne n-kategoriar, n-funktorar og n-transformasjonar dannar ein strikt 2-kategori.

Høgare kategoriar kan bli sett på som det ein får ved å byrja med ei mengd og så induktivt ta kategorien berika i det ein har frå før. Ein strikt n-kategori er ein kategori berika i strikte $n-1$-kategoriar, og ein svak n-kategori skal vera ein kategori berika meir eller mindre så svakt som mogleg i svake $n-1$-kategoriar. Objekta i morfi-$n-1$-kategoriane vert kalla 1-morfiar. 1-morfiane i morfi-$n-1$-kategoriane vert kalla 2-morfiar, og så vidare. Vår linne variant har strikte identitetar og assosiativitet meir eller mindre som i ein bikategori. Det betyr at komposisjon er assosiativt opp til ein "naturleg isomorfi" og at alle diagram av slike isomorfiar kommuterar. Ein av dei store fordelane med dette er at me kan gje ein definisjon for alle n, medan svake n-kategoriar berre har denne typen definisjon opp til $n = 4$, då dei bles opp og blir fort store. Sjå [10] for $n = 3$ og seksjon 3 i [11] for Trimble sin definisjon for $n = 4$.

Det eksisterar mange definisjonar av svak n-kategori som tek hand om den store mengda koherens på andre måtar, til dømes ved hjelp av operadar eller (multi-)simplisielle mengder. Ulempa med (nokre av) desse definisjonane for oss, er at det verkar vanskeleg å skildra kva ein rigstruktur skal vera og kva "(dei endeleg-genererte frie) modulane" skal bety.

Det er kjent at bikategoriar (altså svake 2-kategoriar), bifunktorar, svake naturlege transformasjonar og modifikasjonar, dannar ein trikategori (svak 3-kategori). Dei svake naturlege transformasjonane her består av 1- og 2-morfiar, og om ein restrikterar seg til dei der 1-morfiane er identitetar, samt berre ser på bifunktorar som sender identitetar på identitetar, får ein ein strikt 2-kategori av bikategoriar og slike bifunktorar og transformasjonar. Linne n-funktorar og n-transformasjonar er slik at me får ein strikt 2-kategori av linne n-kategoriar, der dei linne n-transformasjonane kan ha ikkje-trivielle morfiar i kvar grad. Så dette gjev også ein ny (i alle fall for oss) strikt 2-kategori av bikategoriar, ved følgande teorem.

Teorem 5.17. Den strikte 2-kategorien av linne 2-kategoriar sett på som ein trikategori med trivielle 3-morfiar er ein under-trikategori av trikategorien av bikategoriar.

Generelt er det sant for svake n-kategoriar at dei høgare morfiane mellom to i-morfiar dannar ein $n-i$-kategori. Dette er sjølvsagt også sant for linne n-kategoriar, men desse er òg trunkerbare på eit sterkare vis enn andre typar svake n-kategoriar. Om ein gløymer dataa frå grad i og oppover, står ein nemleg att med ein linn $n-i$-kategori.

Linne n-kategoriar ligg ein stad mellom strikte n-kategoriar og svake n-kategoriar, men det er klart at dei er mykje striktare enn dei typane n-kategoriar som vert kalla semistrikte. Semistrikte n-kategoriar skal vera svake n-kategoriar som er så strikte som mogleg, men som framleis er generelle nok til at ein svak n-kategori kan striktifiserast til ein semistrikt n-kategori. Sjå til dømes [20], [16], [5] og [9] på korleis dette vert forsøkt gjort. I motsetning til dette verkar det sannsynleg at ein linn n-kategori vil kunna striktifiserast til ein strikt n-kategori.

Me gjev i Definisjon 5.4 ein definisjon for (symmetriske, linne) rig-n-kategoriar $\mathcal{R}$. Både definisjonen og koherensen kan gjerast liknande slik det er gjort for rigkategoriar av Laplaza i [18] takka vere at linne n-kategoriar dannar ein strikt 2-kategori. Den linne $n+1$-kategorien $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ av dei (endeleggenererte frie) modulane over $\mathcal{R}$ vert så definert i Definisjon 5.9. Følgande teorem gjev at me kan finna dei itererte modulane til ein kommutativ rig k, sidan ein rig-0-kategori er det same som ein rig.

Teorem 6.21. Dataa i Definison 5.22 gjer $(\mathcal{F}_\mathcal{R}, \boxplus, \boxtimes, 0, 1)$ til ein rig-$(n+1)$-kategori.

Det er også mogleg å starta med til dømes rig-kategorien av endelege mengder. Hugs at det i [1] vart vist at gruppekomplettering av modulmodulane over ein rig k gjev "det same" som $K(K(k))$. Om dette resultatet held meir generelt, vil ein då til dømes kunna finna dei itererte modulane til sfærespekteret ved å gruppekomplettera dei itererte modulane til rigkategorien av endelege mengder.

Tema for framtidige ettersøkingar:

- Kan $\mathcal{F}$ konstruert i Definisjon 5.9 utvidast til ein strikt 2-funktor?
- Er det interessant å sjå på ∞-kategoriar definert som følgjer $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ...$ der $\mathcal{C}_n$ er ein linn n-kategori som oppfyller at trunkeringa av $\mathcal{C}_n$ er $\mathcal{C}_{n-1}$?
- Er linne n-kategoriar striktiferserbare og ekvivalente på noko vis med strikte n-kategoriar?
- Vil operasjonen "å ta modulane til" bevara ei slik form for striktheit i andre samanhengar og?
- Finst det ei nerve som sender linne n-kategoriar på (multi-)simplisielle mengder, til dømes Tamsamani-n-kategoriar? Om linne n-kategoriar kan striktifiserast til strikte n-kategoriar, vil me kunna ta nerva av desse.
- Vil ei passande gruppekomplettering av $\mathcal{F}_k^m$ gje den m-fold itererte K-teorien av k?
- Korleis samanliknar linne n-kategoriar seg med eksisterande definisjonar av svak n-kategori?

- Kan ein gjennomføra ring-komplettering av $\mathcal{F}_k^n$ tilsvarande det som vert gjort i [2]?

I seksjon 1 går me gjennom nokre standard-definisjonar på mellom anna rigar, modular og rigkategoriar, før me ser på Laplaza sitt koherensteorem for rigkategoriar og gjev ein (tilsynelatande ny) versjon av teoremet som er meir anvendeleg i vår kontekst.

Seksjon 2 tek føre seg ein versjon av 2-modular. Det er kjent at desse dannar ein bikategori, og me gjev eit nytt bevis for dette.

I seksjon 3 gjev me nokre peikepinnar på at $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ kanskje kan ha ein rigstruktur. Me går ikkje så djupt inn i dette, då det følger frå resultat seinare i oppgåva.

Seksjon 4 omhandlar linne n-kategoriar, ein type n-kategori som vert introdusert her. Ved å visa at desse er veldefinerte får me og nokre resultat for dei.

Seksjon 5 gjev ein definisjon av rigstruktur på dei linne n-kategoriane, eit resultat om koherens og ein definisjon av den linne $n+1$-kategorien av modulane til ein linn n-kategori. Til slutt viser me at denne modul-$n+1$-kategorien har ein rigstruktur. Dette gjev både eit svar på kva n-modulane til ein rig kan vera, og viser at det eiksisterer ikkje-trivielle linne n-kategoriar.

Takk til professor Bjørn Ian Dundas for god rettleiing, og takk til foreldra mine og sambuaren min for at dei er så tolmodige med meg.

1 Modular og rigkategoriar

Me oppsummerar først nokre klassiske omgrep me har bruk for.

Ein kommutativ rig er ein kommutativ ring der me ikkje nødvendigvis har negativar. Ein kommutativ ring $k = (k, \cdot, +, 1, 0)$ består altså av ei mengd k med to funksjonar $\cdot, + : k \times k \to k$ og element $1, 0 \in k$ som oppfyller at $(k, \cdot, 1)$ og $(k, +, 0)$ er kommutative monoidar, i tillegg til at produktet distribuerar over summen:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

$$(a + b) \cdot c = ac + bc,$$

og at 0 er ein null for produktet:

$$0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$$

Hugs at ein kommutativ monoide $(M, +, 0)$ er ei mengd M utstyrt med ein funksjon $+ : M \times M \to M$ slik at $+$ er assosiativ:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

0 er ei eining for $+$:

$$0 + a = a = a + 0,$$

og $+$ er kommutativt:

$$a + b = b + a.$$

La k vera ein kommutativ rig. Ein k-modul M består av ein kommutativ monoide M og ei avbilding $\cdot : k \times M \to M$ slik at

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- $(r + s) \cdot x = r \cdot x + r \cdot x$
- $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

der $r, s \in k$ og $x, y \in M$.

Ei avbilding $f : M \to N$ mellom modular skal kommutera med multiplikasjon med element i k:

$$f((r \cdot x) + (s + \cdot y)) = (r \cdot f(x)) + (s \cdot f(y))$$

k-modular og slike avbildingar dannar ein kategori. Me seier ein k-modul M er endeleggenerert fri om $M \cong k^m$ for ein $m \in \mathbb{N}$, og kallar den fulle underkategorien på desse objekta for $\boldsymbol{k}$**fri**.

1.1 Koordinatisering

Den fulle underkategorien av $\boldsymbol{k}$**fri** med objekt $k^0, k^1, k^2, ...$ er eit skjelett av kategorien av frie k-modular. Denne kategorien kan så koordinatiserast ved å velga ein basis for kvar k^m. Dette lar oss nemleg bytta ut homomorfien $k^a \to k^b$ med $b \times a$-matrisa som på plass ij seier kor mange av den j-te basisvektoren i k^b det er i biletet av den i-te basisvektoren i k^a. Komposisjon vert då matrisemultiplikasjon. Me skriv $\mathcal{F}_k$ for denne kategorien.

Dette er ein framgangsmåte ein er kjend med frå lineær algebra, og Kapranov og Voevodsky kallar det i [14] fullstendig koordinatisering. På eit vis er den kanskje den mest handfaste kategorien av endeleggenererte frie k-modular.

Merknad 1.1. Akkurat kva kategori $\mathcal{F}_k$ er varierar litt i litteraturen. Til dømes er den ikkje fullstendig koordinatisert i [6] – det andre steget vert ikkje gjort. For K-teoretiske føremål kan ein og bruka $i\mathcal{F}_k$, den vide underkategorien av $\mathcal{F}_k$ med berre inverterbare morfiar. Dette vert gjort i [1]. Grunnen til at me vel den fullstendig koordinatiserte versjonen her, er at dette kjem til å samsvara med $\mathcal{F}$ frå Definisjon 5.9.

1.2 Den generelle lineære gruppa

La $Mat_k(k)$ vera monoiden av alle $k \times k$-matriser over den kommutative rigen k, og la den generelle lineære gruppa $GL_k(k)$ vera gruppa av inverterbare $k \times k$-matriser. Me definerar gruppa $GL(k)$ til å vera kogrensa av diagrammet

$$GL_1(k) \xrightarrow{M \mapsto M \oplus 1} GL_2(k) \xrightarrow{M \mapsto M \oplus 1} \ldots$$

der $\oplus$ er blokksum.

Hugs at me for ein kategori $\mathcal{C}$ skriv $i\mathcal{C}$ for kategorien med dei same objekta og berre dei inverterbare morfiane.

Døme 1.2. Den generelle lineære gruppa $GL(k)$ er tett knytta til kategorien av endeleggenererte frie modular, og me kan definera K-teori ved hjelp av begge. Me har:

$$Ni\mathcal{F}_k \cong \coprod_{n \in \mathbb{N}} BGL_n(k)$$
$$BGL(k) \cong \lim_{\overrightarrow{n}} BGL_n(k),$$

så forskjellen mellom $Ni\mathcal{F}_k$ og $BGL(k)$ er på eit vis at den eine er gitt ved disjunkt union der den andre er gitt ved union. Kategorien $i\mathcal{F}_k$ er ein permutativ kategori om me gjev den blokksum som monoidal operasjon, og med det ein monoide i $(\mathbf{Cat}, \times, *)$. Sidan nerva er ein strikt monoidal funktor vert $Ni\mathcal{F}_k$ ein monoide i $(\mathcal{S}, \times, *)$, med andre ord ein simplisiell monoide. Denne kan gruppekompletterast til $\Omega BNi\mathcal{F}_k$, K-teorien til k, som elles gjerne vert definert som

$$\Omega B \coprod_{n\in\mathbb{N}} BGL_n(k),$$

sjå til dømes [1] eller [6].

1.3 Rig-kategoriar

Når me definerar monoidale kategoriar, tek me definisjonen for ein monoide og byter ut mengda med ein kategori, funksjonen med ein funktor og eigenskapane for assosiativitet og så vidare med naturlege isomorfiar. Så legg me i tillegg på nye eigenskapar ved å kreva at visse diagram kommuterar. Sjå REF for den presise definisjonen. Desse diagramma er valde ut frå at dei skal vera nok til at "alle diagram kommuterar".

Jamfør dette og definisjonen av ein kommutativ rig, er det naturleg å definera ein kommutativ rig-kategori som ein tuppel

$$(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha^{\oplus}, \lambda^{\oplus}, \rho^{\oplus}, \sigma^{\oplus}, \otimes, 1, \alpha^{\otimes}, \lambda^{\otimes}, \rho^{\otimes}, \lambda^{\bullet}, \rho^{\bullet}, \delta^{l}, \delta^{r})$$

der $(\mathcal{C}, \oplus, 0, \alpha^{\oplus}, \lambda^{\oplus}, \rho^{\oplus}, \sigma^{\oplus})$ og $(\mathcal{C}, \otimes, 1, \alpha^{\otimes}, \lambda^{\otimes}, \rho^{\otimes})$ er symmetrisk monoidale kategoriar og

$$0 \otimes x \xrightarrow{\lambda^{\bullet}_x} 0 \xleftarrow{\rho^{\bullet}_x} x \otimes 0$$

$$x \otimes (y \oplus z) \xrightarrow{\delta^{l}_{x,y,z}} (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

$$(x \oplus y) \otimes z \xrightarrow{\delta^{r}_{x,y,z}} (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

er naturlege isomorfiar, slik at ei liste med diagram kommuterar. Ein kan finna definisjonen i [18] der Laplaza innførte den, eller i kapittel I.2 i [13].

Me kjem berre til å sjå på symmetriske rigkategoriar som oppfyller at alle strukturisomorfiane er identitetar bortsett frå muligens $s^{\oplus}, s^{\otimes}$ og δ^{l}. Då kan aksioma reduserast til at $s^{\otimes}_{x,0}$ er identiteten på x og at følgande diagram skal kommutera.

$$\begin{tikzcd}
x \otimes (y \oplus z) \arrow[r, "\delta^{l}"] \arrow[d, "s^{\otimes}"] & (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \arrow[d, "s^{\otimes} \oplus s^{\otimes}"] \\
(y \oplus z) \otimes x \arrow[r, "\delta^{r}"] & (y \otimes x) \oplus (z \otimes x)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(x \oplus y) \otimes z \arrow[r, "\delta^r"] \arrow[d, "s^{\oplus} 1"] & (a \otimes z) \oplus (y \otimes z) \arrow[d, "s^{\oplus}"] \\
(y \oplus x) \otimes z \arrow[r, "\delta^r"] & (y \otimes z) \oplus (a \otimes z)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(a \oplus b) \otimes (c \oplus d) \arrow[rr, "\delta^r"] \arrow[d, "\delta^l"] & & (a \otimes (c \oplus d)) \oplus (b \otimes (c \oplus d)) \arrow[d, "\delta^l \oplus \delta^l"] \\
((a \oplus b) \otimes c) \oplus ((a \oplus b) \otimes d) \arrow[dr, "\delta^r \oplus \delta^r"'] & & (a \otimes c) \oplus (a \otimes d) \oplus (b \otimes c) \oplus (b \otimes d) \arrow[dl, "1 \oplus s^{\oplus} \oplus 1"] \\
& (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \oplus (a \otimes d) \oplus (b \otimes d) &
\end{tikzcd}$$

Desse rigkategoriane vert i [13] kalla bipermutative kategoriar. Her går dei òg gjennom kvifor aksioma vert redusert til dei over og kvifor symmetriske rigkategoriar kan striktifiserast til bipermutative kategoriar.

Det er verdt å merka seg at Laplaza i [18] såg på (symmetriske) rigkategoriar der distribuatorane δ_l og δ_r var monomorfiar, og ikkje isomorfiar slik som her.

Ein eller annan plass må det stå at ei samansetning av matriser $n \to 0 \to m$ er nullmatrisa av størrelse $m \times n$.

Følgande er eit sentralt døme for oss.

Døme 1.3. Det er kjent at $\mathcal{F}_k$ er ein rig-kategori. Me har ein symmetrisk monoidal kategori $(\mathcal{F}_k, \oplus, 0)$ der

$$\oplus : \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_k$$

er funktoren som sender (n, m) på $n + m$ og par av morifiar (det vil seia matriser) på blokksum av desse morfiane. Gitt morfiar $f : n \to m$ og $g : n' \to m'$ er altså $f \oplus g$ matrisa

$$\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \dots & f_{mn} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g_{11} & \dots & g_{1n'} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & g_{m'1} & \dots & g_{m'n'} \end{bmatrix}.$$

Me ser at $\oplus$ er strikt assosiativ, og at objektet 0 er eit strikt nullobjekt. Sjølv om $n + n' = n' + n$ er det ikkje sant at me kan bruka identiteten som fletting, for $id_{n'+n}$ vert ikkje ein naturleg transformasjon frå $n' \oplus n$ til $n \oplus n'$. Dette kjem av at følgande diagram ikkje kommuterar når s er identitetstransformasjonen.

$$\begin{tikzcd}
n + n' \arrow[r, "s_{n,n'}"] \arrow[d, "f \oplus g"] & n' + n \arrow[d, "g \oplus f"] \\
m + m' \arrow[r, "s_{m,m'}"] & m' + m
\end{tikzcd}$$

(I følge [15] er dette det same som at $\mathcal{F}_k$ ikkje kan striktifiserast til ein symmetrisk monoidal kategori der tvisten er identiteten.) Derimot får $s_{n,n'}$ gitt ved matrisa

$$\begin{bmatrix} 0 & I_{n'} \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

der I_n er $n \times n$-identitetsmatrisa, diagrammet til å kommutera. Me har nemleg

$$\begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{n'} \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m'} \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix},$$

slik at $(g \oplus f) \circ s_{n \oplus n'} = s_{m \oplus m'} \circ (f \oplus g)$. Det er i tillegg sant at $s_{n \oplus m} s_{m \oplus n} = I_{n+m} = id_{n \oplus m}$, som må til for at dette skal kunna vera flettinga i ein symmetrisk monoidal kategori, og ikkje berre ein fletta monoidal kategori. Merk at $\oplus$ faktisk er koproduktet i $\mathcal{F}_k$, så $\mathcal{F}_k$ er det som vert kalla ein distributiv monoidal kategori.

Den multiplikative strukturen til $\mathcal{F}_k$ er den symmetrisk monoidale kategorien $(\mathcal{F}_k, \otimes, 1)$, der

$$\otimes : \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_k$$

er funktoren som sender (n, m) på nm og par av morfiar på det såkalla kronecker-produktet, gitt ved

$$f \otimes g = \begin{bmatrix} f_{11}g & \cdots & f_{1n}g \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1}g & \cdots & f_{mn}g \end{bmatrix}$$

som er notasjon for

$$\begin{bmatrix}
f_{11}g_{11} & \cdots & f_{11}g_{1n'} & & f_{1n}g_{11} & \cdots & f_{11}g_{1n'} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_{11}g_{m'1} & \cdots & f_{11}g_{m'n'} & & f_{1n}g_{m'1} & \cdots & f_{11}g_{m'n'} \\
& \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
f_{m1}g_{11} & \cdots & f_{m1}g_{1n'} & & f_{mn}g_{11} & \cdots & f_{m1}g_{1n'} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f_{m1}g_{m'1} & \cdots & f_{m1}g_{m'n'} & & f_{mn}g_{m'1} & \cdots & f_{m1}g_{m'n'}
\end{bmatrix}$$

der $f : n \to m$ og $g : n' \to m'$ er morfiar. Kronecker-produktet oppfyller at $AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D)$ for matriser A, B, C, D av kompatible størrelsar, sjå til dømes [22]. Denne eigenskapen vert kalla "mixed product property", og gjer $\otimes$ til ein funktor.

Funktoren vert strikt assosiativt fordi multiplikasjon i k er det, og 1 er ein strikt identitet sidan funktoren $1 \otimes -$ sender morfien f på $1_k \otimes f = [1_k f] = f$, og $- \otimes 1$ sender f på

$$f \otimes 1_k = \begin{bmatrix} f_{11}1_k & \dots & f_{1n}1_k \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1}1_k & \dots & f_{mn}1_k \end{bmatrix} = f.$$

Som for $\oplus$ er ikkje identiteten ein naturleg transformasjon mellom $n \otimes m$ og $m \otimes n$. Men det er kjent at permutasjonsmatrisa

$$s^{\otimes}_{n,m} = \begin{bmatrix} \oplus_{i=1}^{n} \mathbf{e}_1 & \dots & \oplus_{i=1}^{n} \mathbf{e}_m \end{bmatrix}$$

fungerar som tvist så lenge multiplikasjonen i k er kommutativ [22], der $\mathbf{e}_i$ er $n \times 1$-matrisa med 1_k på plass i og 0 alle andre stader.

Dei naturelege isomorfiane

$$0 \otimes k \xrightarrow{\lambda^{\bullet}_k} 0 \xleftarrow{\rho^{\bullet}_k} k \otimes 0$$

er identitetar. Naturlegheita kjem av at å tensorisera med ei tom matrise gjev deg ei tom matrise frå begge sider.

Den høgre distribuatoren

$$(A \oplus B) \otimes C \xrightarrow{\delta^r_{A,B,C}} (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

er og identiteten. Dette gjev ein naturleg transformasjon sidan

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \otimes C &= \begin{bmatrix} (A \oplus B)_{11}C & \dots & (A \oplus B)_{1(n+n')}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A \oplus B)_{(m+m')1}C & \dots & (A \oplus B)_{(m+m')(n+n')}C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}C & \dots & A_{1n}C & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}C & \dots & A_{mn}C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{11}C & \dots & B_{1n'}C \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B_{m'1}C & \dots & B_{m'n'}C \end{bmatrix} \\ &= (A \otimes C) \oplus (B \otimes C), \end{aligned} \tag{1}$$

der A og B er høvevis $m \times n$ og $m' \times n'$-matriser. A, B, C eller f, g, h?

Me lar den venstre distribuatoren vera definert som samansetninga

$$\begin{tikzcd}
(A \oplus B) \otimes C \arrow[r, "\delta^r_{A,B,C}"] & (A \otimes C) \oplus (B \otimes C) \arrow[d, "s^{\otimes}_{A,C} \oplus s^{\otimes}_{B,C}"] \\
C \otimes (A \oplus B) \arrow[u, "s^{\otimes}_{C,A\oplus B}"] \arrow[r, "\delta^l_{C,A,B}"] & (C \otimes A) \oplus (C \otimes B)
\end{tikzcd}$$

då dette er eit av diagramma som skal kommutera i rig-kategoriar.

Me har vist at $\mathcal{F}_k$ har to symmetrisk monoidale strukturar, $\oplus$ og $\otimes$, og at $\otimes$ distribuerar over $\oplus$ opp til naturleg isomorfi. Det at $\oplus$ er eit koprodukt, gjer at me ikkje treng å sjekka om diagramma i definisjonen kommuterar, for begge vegane å gå i diagramma vil vera den unike isomorfien mellom to kogrenser. Dette held alltid for distributive monoidale kategoriar, sjå til dømes [13].

1.4 Laplaza sitt koherensteorem

Koherensteoremet i [18] er eit nyttig verktøy når ein jobbar med rigkategoriar, så me gjev ei oppsummering av teoremet. Definisjonane i 1.5 er henta frå seksjon 2 av [18], noko omformulert.

Lauseleg seier teoremet me jobbar mot at det einaste problemet ein har når ein vil at eit diagram i ein rigkategori skal kommutera, er at diagramma

$$\begin{tikzcd}
X \oplus X \arrow[r, bend left, "s^{\oplus}_{X,X}"] \arrow[r, bend right, "id"'] & X \oplus X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \otimes X \arrow[r, bend left, "s^{\otimes}_{X,X}"] \arrow[r, bend right, "id"'] & X \otimes X
\end{tikzcd}$$

ikkje nødvendigvis kommuterar. Definisjonane i 1.5 gjev ein måte å snakka om diagram der dette ikkje oppstår.

Definisjon 1.4. La X og Y vera mengder. Definer A induktivt ved at

- $x \in X \implies x \in A$
- $a, b \in A$ og $y \in Y \implies ayb \in A$.

Me kallar A den frie Y-algebraen over X.

Definisjon 1.5. La $X = \{x_1, \dots, x_p, n, u\}$ vera ei mengd, og la A vera den frie $\{+, \cdot\}$-algebraen over X.

La G' vera grafen med kantar:

$$(xy)z \xrightarrow{\alpha_{x,y,z}} x(yz) \qquad (x+y)+z \xrightarrow{\alpha^+_{x,y,z}} x+(y+z)$$

$$ux \xrightarrow{\lambda_x} x \qquad n+x \xrightarrow{\lambda^+_x} x$$

$$xu \xrightarrow{\rho_x} x \qquad x+n \xrightarrow{\rho^+_x} x$$

$$xy \xrightarrow{s_{x,y}} xy \qquad x+y \xrightarrow{s^+_{x,y}} x+y$$

$$nx \xrightarrow{\lambda^\bullet_x} n$$

$$xn \xrightarrow{\rho^\bullet_x} n$$

med formelle inversar, og

$$x(y+z) \xrightarrow{\delta^l_{x,y,z}} (xy)+(xz)$$

$$(x+y)z \xrightarrow{\delta^r_{x,y,z}} (xy)+(yz)$$

$$x \xrightarrow{1_x} x$$

for x, y, z i A.

La H' vera grafen som har $\{+,\cdot\}$-algebraen over kantane i G' som kantar, og $\{+,\cdot\}$-algebraen over hjørnene i G' som hjørner. Det betyr at ein kant $a \to b$ i G' og er ein kant $a \to b$ i H', og gitt to kantar

$$f_1 : a_1 \to b_1, \qquad f_2 : a_2 \to b_2$$

i H' skal

$$f_1 + f_2 : a_1 + a_2 \to b_1 + b_2 \quad \text{og} \quad f_1 \cdot f_2 : a_1 a_2 \to b_1 b_2$$

også vera kantar i H'.

Me seier ein kant i H' er ei instansiering om det består av maksimalt éit element som ikkje er på forma 1_x for ein x. Undergrafen av H' som berre består av instansieringar vert kalla T'.

La A^* vera den frie $\{+,\cdot\}$-algebraen over X der $+$ og $\cdot$ er assosiative og kommutative, $\cdot$ distribuerar over $+$, n og u er nøytralelement for høvevis $+$ og $\cdot$, og $an = n = na$ for alle $a \in A^*$. Me har ei avbilding

$$Supp : A \to A^*$$

definert ved:

(i) For $x \in X$, er $Supp(x) = x$,

(ii) For $x, y \in A$ er $Supp(x + y) = Supp(x) + Supp(y)$,

(iii) For $x, y \in A$ er $Supp(xy) = Supp(x)Supp(y)$.

Eit element i A vert kalla eit polynom om det er ein sum av produkt av element i X. Me seier eit element $a \in A$ er regulært om $Supp(a)$ kan bli uttrykt som eit polynom som oppfyller at summandane er forskjellige som element i A^*, og at faktorane innad i kvar summand er forskjellige frå dei andre faktorane i same summand, som element i X.

Ein sti $a \to b$ i H' gjev ein konkret måte å visa at $Supp(a) = Supp(b)$, så me får følgande viktige observasjon, som er proposisjon 2 i [18].

Proposisjon 1.6. *Om det eksisterer ein sti $a \to b$, så er a regulær viss og berre viss b er regulær.*

Proposisjon 1.7 gjev ein enkel måte å visa at eit element er regulært på, og er Proposisjon 3 i [18].

Proposisjon 1.7. *Eit element $a \in A$ er regulært om ingen element i X dukkar opp meir enn éin gong i uttrykket for a.*

I Teorem 1.8, som er Proposisjon 10 i [18], skal det vera underforstått at me har ein funksjon $X \to ob\mathcal{C}$ og dermed ein grafmorfi $g : T' \to U\mathcal{C}$, der $U\mathcal{C}$ er den underliggande grafen til ein rigkategori, definert på hjørne ved:

$$g(x + y) = g(x) \oplus g(y) \quad \text{og} \quad g(xy) = g(x) \otimes g(y) \quad \text{for} \quad x, y \in A$$

og definert på kantar ved å senda kantar $a \to b$ i G' på tilsvarande strukturmorfiar $g(a) \to g(b)$, slik at $g(x + y) = g(x) \oplus g(y)$ og $g(xy) = g(x) \otimes g(y)$ for $x, y \in T'$.

Biletet av ein sti med steg i T' er samansettinga av bileta av stega i stien.

Teorem 1.8. *Gitt ein symmetrisk rigkategori $\mathcal{C}$ med mono distribuatorar og eit regulært element $a \in A$, er biletet av ein sti $a \to b$ med steg i T' berre avhengig av a og b.*

1.4.1 Nytt koherensteorem

Teorem 1.8 er formulert for symmetriske rigkategoriar der distribuatorane er mono, men ikkje nødvendigvis isomorfiar. Dette betyr at teoremet ikkje kan anvendast direkte på diagram som inneheld inversane av desse. Men biletet av to stiar $a \rightrightarrows b$ vil kunna skrivast som komposisjonen av biletet av fleire stiar i T, der annakvart bilete er invertert, slik:

$$\begin{tikzcd}
 & c_1 & c_2 \arrow[l] \arrow[r] & c_3 & \dots \arrow[l] & c_n \arrow[l] \arrow[dr] & \\
a \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & b \\
 & d_1 & d_2 \arrow[l] \arrow[r] & d_3 & \dots \arrow[l] & d_m \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Framgangsmåten dei bruker i [13] for å nytta teoremet i ein slik samanheng, er å finna stiar frå kvart hjørne i denne grafen frå eller til eit felles hjørne, gjerne eit polynom, der trekantane er slik at teoremet kan nyttast på kvar enkelt trekant, og dermed gjev at heile diagrammet kommuterar. Dette ser slik ut:

$$\begin{tikzcd}
 & c_1 \arrow[drr] & c_2 \arrow[l] \arrow[r] & c_3 & \dots \arrow[l] & c_n \arrow[l] \arrow[dr] \arrow[dll] & \\
a \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rrr] & & & p \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[rrr] & & & b \\
 & d_1 \arrow[urr] & d_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[ur] & d_3 & \dots \arrow[l] & d_m \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Desse nye pilene kan ha kva retning dei vil, men om p er eit polynom går dei gjerne innover. Beviset av Teorem 1.10 viser at dette alltid er mogleg. Me treng først eit par definisjonar.

Definisjon 1.9. La X og A vera som i Definisjon 1.5, og la G vera same graf som G' i same definisjon, men no med inversar av distribuatorane. Me definerar H og T på same måte som H og T, men med utgangspunkt i G og H i staden for G' og H'. La A^*, *Supp* og regulær vera definert som før.

Følgande teorem følger ikkje direkte frå Teorem 1.8 – det treng og proposisjonane Laplaza nyttar for å bevisa det opprinnelege teoremet. Her gjev me nummereringa av desse proposisjonane slik dei står i [13].

Teorem 1.10. *Gitt ein stram symmetrisk rigkategori $\mathcal{C}$ og eit regulært element $a \in A$, er biletet av ein sti $a \to b$ med steg i T berre avhengig av a og b.*

Bevis. La to stiar $f, g : a \rightrightarrows b$ med steg i T og ei avbilding $X \to ob\mathcal{C}$ vera gitt. Me kan finna stiar

$$\begin{tikzcd}
 & c_1 & c_2 \arrow[l] \arrow[r] & c_3 & \dots \arrow[l] & c_n \arrow[l] \arrow[dr] & \\
a \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & b \\
 & d_1 & d_2 \arrow[l] \arrow[r] & d_3 & \dots \arrow[l] & d_m \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

med steg i T' som har same bilete som f og g ved å reversera stega som er instansieringar av ein invers distribuator og eventuelt setta inn identitetskantar.

For kvar kant x i diagrammet over, kan me finna ein sti $x \to x'$ slik at stien består av instansieringar av $\lambda^\bullet$ og $\rho^\bullet$ slik at x' ikkje er kjelda til nokon slik instansiering. Vidare kan me for kvar sti $h : x \to y$ over finna stiar $h' : x' \to y'$ slik at biletet av

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "h"] \arrow[d] & y \arrow[d] \\
x' \arrow[r, "h'"] & y'
\end{tikzcd}$$

gjev eit kommutativt diagram. Dette er Proposisjon 3.5.32 i [13].

Me kan anta at x' og y' ikkje inneheld n, for elles ville dei vore lik n, og dette ville vore eit felles polynom slik som det vert skissert før teoremet.

For kvart hjørne x' vel me no ein sti $x' \to x''$ som berre består av instansieringar av distribuatorar slik at det ikkje eksisterar ei instansiering av ein distribuator med x'' som kjelde. Proposisjon 3.7.19 i [13] gjev no at me kan finna ein $h'' : x'' \to y''$ slik at biletet av

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & y' \arrow[d] \\
x'' \arrow[r, "h''"] & y''
\end{tikzcd}$$

gjev eit kommutativt diagram.

No inneheld ingen av pilene i det indre diagrammet distribuatorar, så me kan snu dei pilene me vil for å få eit diagram der Teorem 1.8, Laplaza sitt opprinnelege koherensteorem, kan nyttast for å seia at biletet av desse stiane gjev eit kommutativt diagram i rigkategorien. $\square$

Merk at ein eventuelt kunne ha redusert diagrammet vidare som i beviset av Teorem 1.8 for å nytta Mac Lane sitt koherensteorem for symmetrisk monoidale kategoriar frå [19] slik Laplaza gjer. Sjå Teorem 5.8 for korleis dette vert gjort. Beviset av Teorem 1.10 kan og nyttast for rigkateogriar som ikkje er symmetriske, men det får me ikkje bruk for her.

2 2-modular

Døme 1.3 skildrar ein rigstruktur på $\mathcal{F}_k$, den koordinatiserte kategorien av endeleggenererte frie k-modular, så det burde gje meining å snakka om ein $\mathcal{F}_k$-modul. Slike modular vert gjerne kalla k-modul-modular eller 2-modular over k.

Ein n-dimensjonal modul over k består av n-tuplar av element frå rigen k. Så det er naturleg å la ein 2-modul bestå av n-tuplar av modular over k, sjå [14]. Ei avbilding mellom 2-modular vert då ei matrise av k-modular, som kan settast saman ved matrisemultiplikasjon der ein nyttar $\oplus$ for $+$ og $\otimes$ for multiplikasjon.

Ein vil og få avbildingar mellom desse matrisene, for me kan sjå på matriser av k-modul-morfiar som avbildinar mellom matriser av k-modul-objekt. To slike avbildingar vil ein kunna setta saman elementvis. Men me vil og kunna setta saman slike matriser av morfiar ved matrisemultiplikasjon slik me gjorde for matriser av k-modular. For å gjera dette presis, treng me definisjonen av ein bikategori.

2.1 Bikategoriar

Bikategoriar vart innført av Bénabou i [4].

Definisjon 2.1. Ein bikategori $\mathcal{C}$ består av følgande data:

- Ei mengd $ob\mathcal{C}$ kalla objekta til $\mathcal{C}$,
- Ein kategori $\mathcal{C}(x, y)$ for kvart par av objekt $x, y \in ob\mathcal{C}$,
- Ein funktor
$$\circ : \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{C}(x, z)$$
kalla komposisjon for kvar trippel $x, y, z \in ob\mathcal{C}$,
- Eit objekt I_x i $\mathcal{C}(x, x)$ kalla identiteten på x for kvar $x \in ob\mathcal{C}$
- Ein naturleg isomorfi
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(z,w) \times \mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "\circ\times 1"] \arrow[d, "1\times\circ"'] & \mathcal{C}(y,w) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "\circ"] \arrow[dl, Rightarrow, "a"] \\
\mathcal{C}(z,w) \times \mathcal{C}(x,z) \arrow[r, "\circ"] & \mathcal{C}(x,w)
\end{tikzcd}$$
kalla assosiatoren for kvar tuppel $x, y, z, w \in ob\mathcal{C}$,

- To naturlege isomorfiar

$$\begin{tikzcd}
1 \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[rr, "I_y \times id"] \arrow[dr] & & \mathcal{C}(y,y) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[dl, "\circ"] \\
& \mathcal{C}(x,y) \arrow[u, phantom, "\Rightarrow l_{x,y}"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \times 1 \arrow[rr, "id \times I_x"] \arrow[dr] & & \mathcal{C}(x,y) \times \mathcal{C}(x,x) \arrow[dl, "\circ"] \\
& \mathcal{C}(x,y) \arrow[u, phantom, "\Rightarrow r_{x,y}"] &
\end{tikzcd}$$

  kalla høvevis venstre og høgre eining for kvart par $x, y \in ob\mathcal{C}$.

  Desse dataa skal oppfylla at følgande diagram kommuterar:

- Pentagondiagrammet:

$$\begin{tikzcd}
& (A \circ B) \circ (C \circ D) \arrow[dr, "a_{A,B,C \circ D}"] & \\
((A \circ B) \circ C) \circ D \arrow[ur, "a_{A \circ B, C, D}"] \arrow[d, "a_{A,B,C} \circ id"'] & & A \circ (B \circ (C \circ D)) \\
(A \circ (B \circ C)) \circ D \arrow[rr, "a_{A, B \circ C, D}"] & & A \circ ((B \circ C) \circ D) \arrow[u, "id \circ a_{B,C,D}"']
\end{tikzcd}$$

- Trekantdiagrammet:

$$\begin{tikzcd}
(A \circ I_m) \circ B \arrow[rr, "\alpha_{A, I_m, B}"] \arrow[dr, "r_A \circ id"'] & & A \circ (I_m \circ B) \arrow[dl, "id \circ l_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

Me kallar objekta i kategorien $\mathcal{C}(x,y)$ for 1-morfiar i $\mathcal{C}$, og om f er eit objekt $\mathcal{C}(x,y)$ skriv me gjerne $f : x \to y$. Morfiane i $\mathcal{C}(x,y)$ vert kalla 2-morfiar, og ein $\phi : f \to g$ i denne kategorien vert gjerne framstilt som

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \phi"] & y.
\end{tikzcd}$$

2.2 $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$

Me definerar $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$, bikategorien av (fullstendig koordinatiserte endeleggenererte frie) 2-modular over k, på følgande måte, jamfør diskusjonen på starten av seksjon 2.

Definisjon 2.2. Me definerar $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ som følgande bikategori.

- Objeka $ob\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ er $\mathbb{N}$,
- Morfikategorien $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n,m)$ er $Mat_{m,n}(\mathcal{F}_k)$, kategorien av $(m{\times}n)$-matriser over $\mathcal{F}_k$,
- Komposisjonsfunktoren

$$\circ : \mathcal{F}_k(m,r) \times \mathcal{C}(n,m) \to \mathcal{C}(n,r)$$

er gjeve ved at par av matriser (A,B) (som enten kan bestå av objekt eller morfiar frå $\mathcal{F}_k$) vert sendt på matrisa som på plass ij er

$$\bigoplus_{t=1}^{m} A_{it} \otimes B_{tj},$$

- Identiteten på n er identitetsmatrisa I_n av størrelse $n \times n$,
- Assosiatoren

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_k(r,s) \times \mathcal{F}_k(m,r) \times \mathcal{F}_k(n,m) \arrow[r, "\circ\times 1"] \arrow[d, "1\times\circ"] & \mathcal{F}_k(m,s) \times \mathcal{F}_k(n,m) \arrow[d, "\circ"] \arrow[dl, Rightarrow, "a"] \\
\mathcal{F}_k(r,s) \times \mathcal{F}_k(n,r) \arrow[r, "\circ"] & \mathcal{F}_k(n,s)
\end{tikzcd}$$

har komponentar $a_{h,g,f}$ definert som samansettinga

$$\begin{array}{l}
h(gf)_{ij} = \bigoplus_{l=1}^{r} h_{il} \otimes \left(\bigoplus_{t=1}^{m} g_{lt} \otimes f_{tj} \right) \\
\qquad \Big\uparrow \bigoplus_{l=1}^{r} \left(id \oplus \cdots \oplus id \oplus \delta^{l}_{h_{il}, g_{l(m-1)} \otimes f_{(m-1)j}, g_{lm} \otimes f_{mj}} \right) \ldots \delta^{l}_{h_{il}, g_{l1} \otimes f_{1j}, \bigoplus_{t=2}^{m} g_{lt} \otimes f_{tj}} \\
\bigoplus_{l=1}^{r} \left(\bigoplus_{t=1}^{m} h_{il} \otimes (g_{lt} \otimes f_{tj}) \right) \\
\qquad id \Big\uparrow \bigoplus_{l=1} \bigoplus_{t=1} \left(a^{\otimes}_{h_{il}, g_{lt}, f_{tj}} \right)^{-1} \\
\bigoplus_{l=1}^{r} \left(\bigoplus_{t=1}^{m} (h_{il} \otimes g_{lt}) \otimes f_{tj} \right) \\
\qquad \Big\uparrow (*) \\
\bigoplus_{t=1}^{m} \left(\bigoplus_{l=1}^{r} (h_{il} \otimes g_{lt}) \otimes f_{tj} \right) \\
\qquad id \Big\uparrow \bigoplus_{t=1}^{m} \left(\left(\delta^{r}_{h_{i1} \otimes g_{1t}, \bigoplus_{l=2}^{r} h_{il} \otimes g_{lt}, f_{tj}} \right)^{-1} \ldots \left(id \oplus \cdots \oplus id \oplus \left(\delta^{r}_{h_{i(r-1)} \otimes g_{(r-1)t}, h_{ir} \otimes g_{rt}, f_{tj}} \right)^{-1} \right) \right) \\
\bigoplus_{t=1}^{m} \left(\bigoplus_{l=1}^{r} h_{il} \otimes g_{lt} \right) \otimes f_{tj} = (hg)f_{ij}
\end{array}$$

Me kan sjå vekk frå additive parentesar sidan $\oplus$ er strikt assosiativ. Avbildinga $(*)$ er sett saman av flettingar for $\oplus$, og ved Maclane sitt koherensteorem for symmetrisk monoidale kategoriar frå [19] er denne unikt gjeve ved å spesifisera kjelda og målet.

- Einingane

$$\begin{tikzcd}
1 \times \mathcal{F}_k(n,m) \arrow[rr, "I_m \times id"] \arrow[dr] & & \mathcal{F}_k(m,m) \times \mathcal{F}_k(n,m) \arrow[dl, "\circ"] \\
& \mathcal{F}_k(n,m) \arrow[u, phantom, "\Rightarrow l_{n,m}"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_k(n,m) \times 1 \arrow[rr, "id \times I_n"] \arrow[dr] & & \mathcal{F}_k(n,m) \times \mathcal{F}_k(n,n) \arrow[dl, "\circ"] \\
& \mathcal{F}_k(n,m) \arrow[u, phantom, "\Rightarrow r_{n,m}"] &
\end{tikzcd}$$

er identitetar.

At desse dannar ein bikategori, er Proposisjon 2.3.

Følgande proposisjon er eit spesialtilfelle av Teorem 8.4.12 i [13], der $\mathcal{F}_k$ hos dei er bytta ut med ein generell bikategori (med inverterbare distribuatorar). Men det er verdt å merka seg at beviset kan gjerast mykje kortare når $\mathcal{R}$ er ein såkalla bipermutativ kategori, slik som til dømes $\mathcal{F}_k$.

Proposisjon 2.3. *$\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$, definert i Definisjon 2.2, er ein bikategori.*

Bevis. Morfikategorien $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n,m)$ er ein kategori sidan $\mathcal{F}_k$ er det, for den er berre produktkategorien $\mathcal{F}_k^{\times mn}$ indeksert av to variablar i staden for ein.

Horisontal komposisjon er ein funktor av di $\oplus$ og $\otimes$ er funktorar.

Identitetsmorfien på objektet n er 1-morfien I_n; $n \times n$ matrisa med 1 på diagonalen og 0 alle andre stader. Identitets-2-morfien på 1-morfien I_n er matrisa

$$id_{I_n} = \begin{bmatrix} I_1 & I_0 & \dots & I_0 \\ I_0 & I_1 & \dots & I_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_0 & I_0 & \dots & I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1_k] & [1_{k^0}] & \dots & [1_{k^0}] \\ [1_{k^0}] & [1_k] & \dots & [1_{k^0}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [1_{k^0}] & [1_{k^0}] & \dots & [1_k] \end{bmatrix},$$

der $[1_{k^0}]$ er den unike 0×0-matrisa. 2-morfien id_{I_n} er ein strikt identitet for vertikal komposisjon, så valet vårt av $l_{n,m}$ og $r_{n,m}$ som identitetar gjer l og r til naturlege transformasjonar.

Det står att å visa at pentagondiagrammet og Trekantdiagrammet kommuterar. Me gjer dette ved hjelp av Teorem 1.10, det nye koherensteoremet vårt for rigkategoriar, og startar med å finna ein sti som vert avbilda på assosiatoren.

For å gjera dette må me konstruera ei mengd X, ein funksjon $g : X \to ob\mathcal{F}_k$, visa at eit av hjørna i stien som vert avbilda på a er regulært, og visa at assosiatoren kan skrivast som ein komposisjon der kvart ledd består av éin strukturmorfi $\oplus/\otimes$ identitetar.

La $X = \{b_l, c_{lt}, d_t, n, u | 1 \leq l \leq r, 1 \leq t \leq m\}$, og la g vera gitt ved at $g(b_l) = h_{il}, g(c_{lt}) = g_{lt}$ og $g(d_t) = f_{tj}$. Proposisjon 1.7 gjev oss at

$$\sum_{l=1}^{r} b_l \left(\sum_{t=1}^{m} c_{lt} d_t \right)$$

er eit regulært element sidan ingen element i X dukkar opp meir enn ein gong.

Sett bort frå additiv assosiering, vil me få ein sti som blir sendt på assosiatoren om me konstruerar ein sti av instansieringar av additive flettingar som vert avbilda på $(*)$. Dette kan me til dømes gjera med følgande algoritme:

La $(Z, \leq)$ vera elementa $\{x_{lt} := (b_l \cdot c_{lt}) \cdot d_t\}_{(l,t)=(1,1)}^{(r,m)}$ ordna etter når dei dukkar opp i summen som dannar hjørnet som vert sendt på kjelda til $(*)$, slik at $(l, t) = (1, 1)$ gjev det minste elementet. Start med det minste elementet x_{lt}, og la $x_{l't'}$ vera etterfølgaren. Om $t \leq t'$, gjenta prosessen med $x_{l't'}$. Ellers, bruk ei instansiering av $s^{+}_{(b_l c_{lt}) d_t, (b_{l'} c_{l't'}) d_{t'}}$, og la $\leq^1$ vera ordninga på Z ein får av å bytta om x_{lt} med $x_{l't'}$. Gjenta prosessen fram til ingen element skal bytast om lenger.

Me kan dela assosiatoren til 2-kategorien opp i ei og ei strukturavbilding ved å bruka at $\oplus$ og $\otimes$ er funktorar. I vårt tilfelle er den einaste delen av morfien som treng omforming på forma

$$(\phi_{11} \circ \cdots \circ \phi_{m1}) \oplus (\phi_{12} \circ \cdots \circ \phi_{m2}) \oplus \cdots \oplus (\phi_{1r} \circ \cdots \circ \phi_{mr}),$$

og denne er lik

$$\begin{aligned} ((\phi_{11} \circ \cdots \circ \phi_{m1}) \oplus id \oplus \cdots \oplus id) \circ \cdots \circ (id \oplus \cdots \oplus id \oplus (\phi_{1r} \circ \cdots \circ \phi_{mr})) \\ = (\phi_{11} \oplus id \oplus \cdots \oplus id) \circ \cdots \circ (\phi_{m1} \oplus id \oplus \cdots \oplus id) \\ \circ \cdots \circ (id \oplus \cdots \oplus id \oplus \phi_{1r}) \circ \cdots \circ (id \oplus \cdots \oplus id \oplus \phi_{mr}). \end{aligned}$$

Til saman har me no ein sti

$$\mathrm{ass}_{n,m,r,s_{ij}}(\{b_l\}, \{c_{lt}\}, \{d_t\}) : \sum_{t=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{r} b_l c_{lt} \right) d_t \longrightarrow \sum_{l=1}^{r} b_l \left(\sum_{t=1}^{m} c_{lt} d_t \right) \tag{2}$$

som vert sendt på assosiatoren og har regulære hjørne.

No kan me for ei av pilene i pentagondiagrammet skriva morfiane den har på plass ij som ass der me har bytta ut b, c eller d med ein passande sum $\sum xy$ eller lagt til identitetar, og få stiar:

$$\begin{tikzcd}
& \sum\limits_{t=1}^{r}\left(\sum\limits_{l=1}^{s} b_l c_{lt}\right)\left(\sum\limits_{v=1}^{m} d_{tv} e_v\right) \arrow[dr, "\mathrm{ass}_{n,r,s,v_{ij}}(\{b_l\},\{c_{lt}\},\{\sum_{v=1}^{m} d_{tv}e_v\})"] & \\
\sum\limits_{v=1}^{m}\left(\sum\limits_{t=1}^{r}\left(\sum\limits_{l=1}^{s} b_l c_{lt}\right) d_{tv}\right) e_v \arrow[ur, "\mathrm{ass}_{n,m,r,v_{ij}}(\{\sum_{l=1}^{s} b_l c_{l,t}\},\{d_{tv}\},\{e_v\})"] \arrow[d, "\sum_{v=1}^{m} \mathrm{ass}_{m,r,s,v_{ij}}(\{b_l\},\{c_{lt}\},\{d_{tv}\}) 1_{e_v}"'] & & \sum\limits_{l=1}^{s} b_l\left(\sum\limits_{t=1}^{r} c_{lt}\left(\sum\limits_{v=1}^{m} d_{tv} e_v\right)\right) \\
\sum\limits_{v=1}^{m}\left(\sum\limits_{l=1}^{s} b_l\left(\sum\limits_{t=1}^{r} c_{lt} d_{tv}\right)\right) e_v \arrow[rr, "\mathrm{ass}_{n,m,s,v_{ij}}(\{b_l\},\{\sum_{t=1}^{r} c_{l,t}d_{tv}\},\{e_v\})"'] & & \sum\limits_{l=1}^{s} b_l\left(\sum\limits_{v=1}^{m}\left(\sum\limits_{t=1}^{r} c_{lt} d_{tv}\right) e_v\right) \arrow[u, "\sum_{l=1}^{s} 1_{b_l} \mathrm{ass}_{n,m,r,s_{ij}}(\{c_{lt}\},\{d_{tv}\},\{e_v\})"']
\end{tikzcd}$$

Desse vert sendt på pentagondiagrammet, så pentagondiagrammet kommuterar ved Teorem 1.10.

Trekantdiagrammet kommuterar fordi assosiatoren på plass ij her er biletet av stien

$$\mathrm{ass}_{n,m,m,r_{ij}}(\{b_l\},\{c_{lt}\},\{d_t\}) : \sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m} b_l c_{lt}\right) d_{lt} \longrightarrow \sum_{l=1}^{m} b_l \left(\sum_{t=1}^{m} c_{lt} d_{lt}\right)$$

der $c_{lt} = u$ når $l = t$ og $c_{lt} = n$ ellers. Me kan nemleg laga stiar

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{t=1}^{m}\left(\sum\limits_{l=1}^{m} b_l c_{lt}\right) d_t \arrow[rr, "\mathrm{ass}_{n,m,m,r_{ij}}(\{b_l\},\{c_{lt}\},\{d_t\})"] \arrow[dr] & & \sum\limits_{l=1}^{m} b_l\left(\sum\limits_{t=1}^{m} c_{lt} d_t\right) \\
& \sum\limits_{t=1}^{m} b_t d_t \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

der dei alle stega i dei nye stiane vert sendt på identitetar, så ved Teorem 1.10 må trekantdiagrammet kommutera. □

2.2.1 Samanlikning med strikte 2-kategoriar

Definisjonen me nyttar for bikategorien av 2-modular vert introdusert i [14] av Kapranov og Voevodsky, men fleire av utsagna frå seksjon 5, der definisjonen vert introdusert, i denne artikkelen er feil. Dette munnar ut i at $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ vert ein strikt 2-kategori, altså ein bikategori der både assosiatoren og einingane er identitetar. Ein kan lesa meir om dette i seksjon I9.5 i [13]. I [7] vert det gjeve ein definisjon av koordinatiserte 2-modular som faktisk er strikt.

2.2.2 Gruppeverknad på $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$

Den einaste ikkje-trivielle verknaden me har funne på $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ er strengt tatt ikkje ein gruppeverknad, men ein verknad av 2-gruppa med éit objekt og C_2 sett på som kategori som morfikategori. Den verkar heller ikkje på $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$, men på $\mathcal{F}_{i\mathcal{F}_k}$, 2-kategorien der berre inverterbare 2-morfiar er med. Observasjonen er at matrisene desse 2-morfiane består av både har inversar og transponerte, og medan desse kvar for seg ikkje bevarar komposisjon, så vil dei saman gjera det. Me har nemleg:

$$((AB)^{-1})^T = (B^{-1}A^{-1})^T = {A^{-1}}^T {B^{-1}}^T.$$

Fikspunkta til denne verknaden er matriser av matriser der alle dei innste matrisene er ortogonale.

3 Rigstruktur på $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$

Me vil gjerne ha ein slags rigstruktur på $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ som lar oss ta modulane av denne bikategorien. Dette kjem me ikkje til å få før Teorem 5.23, her ser me berre på kvifor det er sannsynleg at ein har dette. For å kunna snakka om rigstruktur på bikategori, må me først ha konsept for bikategoriar som tilsvarar funktorar og naturleg transformasjonar for kategoriar. Dette kjem i definisjonane 3.1 og 3.2.

Definisjon 3.1 (4.1 i [4])**.** La $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ vera to bikategoriar. Ein bifunktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ består av følgande:

(i) Ein funksjon $F : ob\mathcal{C} \to ob\mathcal{D}$

(ii) Ei samling funktorar $F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$

(iii) For kvart objekt $A \in \mathcal{C}$, ein morfi

$$\phi_A : id_{FA} \to F(id_A)$$

i kategorien $\mathcal{D}(FA, FA)$, altså ein 2-morfi i $\mathcal{D}$.

(iv) Ei samling av naturlege transformasjonar

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(B,C) \times \mathcal{C}(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}(A,C) \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow, "F_{A,B,C}"] \\
\mathcal{D}(FB,FC) \times \mathcal{D}(FA,FB) \arrow[r] & \mathcal{D}(FA,FC),
\end{tikzcd}$$

slik at diagramma under kommuterar, der (S, T, U) er eit objekt i $\mathcal{C}(C, D) \times \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B)$. Indeksane på assosiatorane er utelatne.

$$\begin{tikzcd}
(FS \circ FT) \circ FU \arrow[rr, "a^{\mathcal{D}}", "\sim"'] \arrow[d, "{F_{B,C,D}}_{S,T} \circ id"] & & FS \circ (FT \circ FU) \arrow[d, "id \circ \phi(T,U)"] \\
F(S \circ T) \circ FU \arrow[d, "{F_{A,B,D}}_{S \circ T, U}"] & & FS \circ F(T \circ U) \arrow[d, "{F_{A,C,D}}_{S, T \circ U}"] \\
F((S \circ T) \circ U) \arrow[rr, "F(a^{\mathcal{C}})", "\sim"'] & & F(S \circ (T \circ U))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FU \circ I^{\mathcal{C}}_{FA} \arrow[r, "id \circ \phi_A"] \arrow[d, "r^{\mathcal{D}}", "\sim"'] & FU \circ FI^{\mathcal{C}}_A \arrow[d, "{F_{A,A,B}}_{U, I^{\mathcal{C}}_B}"] \\
FU & F(U \circ I^{\mathcal{C}}_A) \arrow[l, "Fr^{\mathcal{C}}"', "\sim"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FI^{\mathcal{C}}_B \circ FU \arrow[d, "{F_{A,B,B}}_{I^{\mathcal{C}}_B, U}"] & I^{\mathcal{D}}_{FB} \circ FU \arrow[l, "\phi_B \circ id"'] \arrow[d, "l^{\mathcal{D}}", "\sim"'] \\
F(I^{\mathcal{C}}_B \circ U) \arrow[r, "Fl^{C}", "\sim"'] & FU
\end{tikzcd}$$

Me seier at Φ er ein *homomorfi* om ϕ_A og $\phi(A,B,C)$ er inverterbare, altså at F kommuterar opp til isomorfi med komposisjon og einingar. Om ϕ_A og $\phi(A,B,C)$ er identitetar, seier me at Φ er *strikt*. Merk at ein strikt homomorfi sender $a^{\mathcal{C}}$ på $a^{\mathcal{D}}$, og tilsvarande for r og l.

Definisjon 3.2. La $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ vera bifunktorar. Ein svak transformasjon $\alpha : F \to G$ består av ein 1-morfi $\alpha_x : Fx \to Gx$ i $\mathcal{D}$ for kvart objekt objekt x i $\mathcal{C}$, og ein naturleg transformasjon $\alpha_{x,y} : (\alpha_x)^* G_{x,y} \to (\alpha_y)_* F_{x,y}$ for kvart par (x,y) av objekt i $\mathcal{C}$.

Dette skal oppfylla høvevis svak eining og svak naturalitet:

$$
\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "F_{1_x}"'] & Gx \arrow[d, bend right, "G1_x"'] \arrow[d, bend left, "1_{Gx}"] \arrow[d, phantom, "\overset{G^0}{\Rightarrow}"] \\
Fx \arrow[r, "\alpha_x"] & Gx
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, bend right, "F_{1_x}"'] \arrow[d, bend left, "1_{Fx}"] \arrow[d, phantom, "\overset{G^0}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "\alpha_x"] & Gx \arrow[d, "1_{Gx}"] \\
Fx \arrow[r, "\alpha_x"] & Gx
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[dd, "F(gf)"'] & Gx \arrow[dd, "G(gf)"'] \arrow[dr, "Gf"] & \\
& \arrow[r, phantom, "\overset{G_{xyz}}{\Longrightarrow}"] & Gy \arrow[dl, "Gg"] \\
Fz \arrow[r, "\alpha_z"] \arrow[uur, Rightarrow, "(\alpha_{x,z})_{gf}"] & Gz &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fx \arrow[rr, "\alpha_x"] \arrow[dd, "F(gf)"'] \arrow[dr, "Ff"] \arrow[d, phantom, "\overset{F_{xyz}}{\Longrightarrow}"] & & Gx \arrow[dr, "Gf"] & \\
& Fy \arrow[rr, "\alpha_y"] \arrow[dl, "Fg"] \arrow[ur, Rightarrow, "(\alpha_{x,y})_f"] & & Gy \arrow[dl, "Gg"] \\
Fz \arrow[rr, "\alpha_z"] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow\,(\alpha_{y,z})_g"] & & Gz &
\end{tikzcd}
$$

Definisjon 3.3. Gitt svake transformasjonar

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

er den vertikale komposisjonen $\beta \circ \alpha$ definert ved at $(\beta \circ \alpha)_x = \beta_x \alpha_x$ og at $(\beta \circ \alpha)_{x,y}$ er den naturlege transformasjonen med komponentar

$$
\begin{tikzcd}
(Hf)(\beta_x \alpha_x) \arrow[r, "(\beta\circ\alpha)_{x,y\,f}"] \arrow[d, "a^{-1}"] & (\beta_y \alpha_y)(Ff) \\
((Hf)\beta_x)\alpha_x \arrow[d, "\beta_{x,y\,f} \bullet 1"] & \beta_y(\alpha_y(Ff)) \arrow[u, "a^{-1}"'] \\
(\beta_y(Gf))\alpha_x \arrow[r, "a"] & \beta_y((Gf)\alpha_x) \arrow[u, "1 \bullet \alpha_{x,y\,f}"']
\end{tikzcd}
$$

Merknad 3.4. Det er og ein definisjon for å "setta verhår" på naturlege transformasjonar. Dette lar oss setta saman to naturlege transformasjonar horisontalt, men dei to måtane å gjera dette på er ikkje nødvendigvis like, jamfør 4.8. Derimot er det ein såkalla modifikasjon mellom dei. Ein kan lesa meir om desse tinga i [12]. Kapittel 11 der går gjennom korleis bikategoriar, bifunkatorar, svake transformasjonar og modifikasjonar dannar ein trikategori.

3.1 Blokksum på $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$

I kapittel I.8.12 i [13] er det skildra eit tensorprodukt som gjer $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ til ein såkalla monoidal bikategori. Om me i tillegg kan definera ein blokksum, vil dette kanskje kunna bli ein rigstruktur.

Me lar $\boxplus$ vera bifunktoren som på objekt er addisjon og på morfikategoriar er

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n,m) \times \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n',m') & \xrightarrow{\boxplus} & \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n+n',m+m') \\ (A,B) & \longmapsto & A \oplus B \\ (f,g) & \longmapsto & \begin{bmatrix} f & [] \\ [] & g \end{bmatrix} \end{array}$$

Dette er ein funktor som oppfyller at

$$\boxplus(\circ \times \circ) = \circ(\boxplus \times \boxplus)$$

som funktorar

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & (\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} \times \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}((m,m'),(r,r'))) \times (\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} \times \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}((n,n'),(m,m'))) \arrow[dl, "\boxplus\times\boxplus"'] \arrow[dr, "\circ"] & \\ (\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(m+m',r+r')) \times (\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n+n',m+m')) \arrow[dr, "\circ"] & & \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} \times \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}((n,n'),(r,r')) \arrow[dl, "\boxplus"] \\ & \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n+n',r+r'), & \end{tikzcd}$$

og

$$id_n \boxplus id_m = id_{n+m}$$

som funktorar

$$1 \underset{id_{n+m}}{\overset{id_n \boxplus id_m}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n+m,n+m).$$

Identitetstransformasjonen blir altså ein naturleg transformasjon $\boxplus(\circ_h \times \circ_h) \implies \circ_h(\boxplus \times \boxplus)$ og $id_n \boxplus id_m \implies id_{n+m}$. Det som gjenstår for å visa at

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} \times \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} & \xrightarrow{\boxplus} & \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} \\ n, m & \longmapsto & n+m \\ (A, B) & \longmapsto & A \oplus B \\ (f, g) & \longmapsto & \begin{bmatrix} f & [] \\ [] & g \end{bmatrix} \end{array}$$

er ein strikt 2-funktor, er at den sender assosiatorar på assosiatorar. Meir presist treng me at

$$\alpha_{m+m',n+n',p+p',q+q'}{}_{A\oplus A',B\oplus B',C\oplus C'} = \alpha_{m,n,p,q}{}_{A,B,C} \boxplus \alpha_{m',n',p',q'}{}_{A',B',C'}.$$

La $i \leq m$ og $j \leq q$; dei andre tilfella er analoge. La så X vera mengda $\{a_{lt}, b_{tr}, c_{rs}, n, u | 1 \leq l \leq m, 1 \leq t \leq n, 1 \leq r \leq p, 1 \leq s \leq q\}$, med ei avbilding til $\mathcal{F}_k$ som sender $a_{lt}, b_{tr}, c_{rs}, n$ og u på høvevis $A_{lt}, B_{tr}, C_{rs}, 0$ og 1. Assosiatoren på venstre sida over har biletet av ein sti

$$\begin{array}{c} \sum_{t=1}^{n} a_{it}(\sum_{r=1}^{p} b_{tr}c_{rj} + \sum_{r=p+1}^{p+p'} nn) + \sum_{t=n+1}^{n+n'} n(\sum_{r=1}^{p} b_{tr}c_{rj} + \sum_{r=p+1}^{p+p'} nn) \\ \downarrow \\ \sum_{r=1}^{p}(\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tr} + \sum_{r=p+1}^{p+p'} nn)c_{rj} + \sum_{r=p+1}^{p+p'}(\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tr} + \sum_{r=p+1}^{p+p'} nn)n \end{array}$$

på plass ij. Men på grunn av strikt additiv og multiplikkativ 0 i $\mathcal{F}_k$, er dette det same som biletet av ein kant

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}(\sum_{r=1}^{p} b_{tr}c_{rj}) \longrightarrow \sum_{r=1}^{p}(\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tr})c_{rj}$$

som nettopp er $\alpha_{A,B,C}{}_{ij} = \alpha_{A,B,C} \boxplus \alpha_{A',B',C'}{}_{ij}$ slik som ønska.

Det er lett å sjå at $\boxplus$ er strikt assosiativ. Vidare er nøytralelementet i ein monoidal bikategori $\mathcal{C}$ gjerne definert som ein lat funktor

$$\mathbf{1} \to \mathcal{C},$$

der $\mathbf{1}$ er bikategorien med éit objekt, éin 1-morfi og éin 2-morfi. Altså velger funktoren ut eit objekt, ein 1-morfi og ein 2-morfi i $\mathcal{C}$, og desse må vera identitetar på kvarandre opp til ein koherent naturleg transformasjon, jamfør lat funktor.

La nøytralelementet til $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ vera $(0, id_0, id_{id_0})$. Hugs at id_0 er den unike 0×0-matrisa, og at id_{id_0} er den unike 0×0-matrisa av matriser. På objekt er $n+0 = n = 0+n$, og på same måte som før er det klart at å danna blokksum med ei tom matrise ikkje endrar matrisa di, så $A \oplus id_0 = A = id_0 \oplus A$

og $f \boxplus id_{id_0} = f = id_{id_0} \boxplus f$. Så me velger dei monoidale einingane til å vera identitetar. Sidan $\boxplus$ er strikt assosiativ, kan me og velga 2-einingane til å vera identitetar. Så langt er det klart at eventuelle koherensdiagram vil kommutera, for "alt er strikt".

3.1.1 Fletting

Flettinga skal vera ein naturleg transformasjon på forma

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} \times \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} \arrow[rr, "\boxplus"] \arrow[dr, "\tau"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow s"] & \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} \\
& \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} \times \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k} \arrow[ur, "\boxplus"'] &
\end{tikzcd}$$

Me definerar s komponentvis ved at den har 1-morfiar

$$m + n = m \boxplus n \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix}]{s_{m,n}} n \boxplus m = n + m,$$

som er den additive tvisten for $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, og 2-morfiar

$$\begin{tikzcd}
m + n \arrow[r, "s_{m,n}"] \arrow[d, "A \boxplus B"'] & n + m \arrow[d, "B \boxplus A"] \arrow[dl, Rightarrow, "id"] \\
m' + n' \arrow[r, "s_{m',n'}"'] & n' + m'\text{d}
\end{tikzcd}$$

Då er s ein strikt transformansjon $\boxplus \to \boxplus\tau$. Merk at $\beta_{m,n}$ og $\beta_{n,m}$ er strikte inversar av kvarandre.

Me merkar oss at dette ser ut som ein lovande kandidat for additiv struktur på $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$.

4 Linne n-kategoriar

Hugs at ein strikt n-kategori er ein kategori berika i strike $n-1$-kategoriar, og at ein svak n-kategori skal vera ein kategori svakt berika i svake $n-1$-kategoriar. For svake n-kategoriar er det langt frå opplagt nøyaktig kva dette skal bety, i alle fall for $n > 2$, så ein tek gjerne i bruk andre definisjonar enn dette. Linne n-kategoriar er svake n-kategoriar der "svakt berika" betyr strikte einingar og at assosiativitet held opp til ein "naturleg isomorfi" slik at alle diagram av slike isomorfiar kommuterar. For $n = 2$ er dette ein striktare variant av bikategoriar, som er namnet svake 2-kategoriar har fått.

I ein svak n-kategori definert ved hjelp av ei form for beriking, kallar ein gjerne objekta i berikingskategorien for 1-morfiar, 1-morfiane i berikingskategorien for 2-morfiar og så vidare. Me kjem innimellom til å gjera dette.

I Definisjon 4.1 er det fleire ting som er formulert slik at det i utgangspunktet ikkje gjev meining, mellom anna knytt til at komposisjon av "funktorar" og "naturlege transformasjonar" tilsynelatande ikkje er assosiativt. Dette vert ordna på i lemmaa som følger definisjonen, og munnar ut i Teorem 4.16 som seier at linne n-kategoriar, n-funktorar og n-transformasjonar dannar ein strikt 2-kategori.

Urmorfiane som vert introdusert i definisjonen er 1-morfiar som saman med objekta dannar ein kategori. Dei vert brukt til å avgrensa kva "naturlege transformasjonar" me godtek, og vert i hovuddømet vårt lauseleg ting som kjem frå dei naturlege tala $\mathbb{N}$, sjå Definisjon 5.9.

Definisjon 4.1. Me definerar linne n-kategoriar, linne n-funktorar og strikte n-transformasjonar induktivt på følgande måte.

La ein linn 0-kategori vera ei mengd, ein linn 0-funktor vera ein funksjon og ein linn 0-transformasjon vera likheit av funksjonar.

Ein linn n-kategori $\mathcal{C}$ har:

(1) Ei mengd objekt $ob\mathcal{C}$,

(2) For objekt $p, q \in ob\mathcal{C}$, ein linn $n-1$-kategori $\mathcal{C}(p, q)$,

(3) For objekt $p, q \in \mathcal{C}$, ei samling objekt i $\mathcal{C}(p, q)$ kalla urmorfiar,

(4) For objekt $p, q, r \in ob\mathcal{C}$, ein linn $n-1$-funktor

$$\odot : \mathcal{C}(q, r) \times \mathcal{C}(p, q) \to \mathcal{C}(p, r)$$

kalla komposisjon,

(5) For objekt $p \in ob\mathcal{C}$ ein strikt $n-1$-funktor $\ulcorner I_p \urcorner : 1 \to \mathcal{C}(p, p)$,

(6) For objekt $p, q, r, s \in ob\mathcal{C}$ ein linn $n-1$-isomorfi

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(r,s) \times \mathcal{C}(q,r) \times \mathcal{C}(p,q) \arrow[r, "\odot\times 1"] \arrow[d, "1\times\odot"] & \mathcal{C}(q,s) \times \mathcal{C}(p,q) \arrow[d, "\odot"] \arrow[dl, Rightarrow, "a"] \\
\mathcal{C}(r,s) \times \mathcal{C}(p,r) \arrow[r, "\odot"] & \mathcal{C}(p,s),
\end{tikzcd}$$

kalla ein assosiator til $\mathcal{C}$.

Desse dataa oppfyller at:

(i) Identitets-1-morfiar er urmorfiar og urmorfiar er lukka under komposisjon,

(ii) Følgande diagram kommuterar:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(q,q) \times \mathcal{C}(p,q) \arrow[dr, "\odot"'] & \mathcal{C}(p,q) \arrow[l, "\ulcorner I_q \urcorner \times id"'] \arrow[r, "id \times \ulcorner I_p \urcorner"] \arrow[d, "id"] & \mathcal{C}(p,q) \times \mathcal{C}(p,p) \arrow[dl, "\odot"] \\
& \mathcal{C}(p,q) &
\end{tikzcd}$$

(iii) Diagram av assosiatorar og partielle assosiatorar, begge potensielt i eit produkt med ein identitetstransformasjon og komponert horisontalt med identitetstransformasjonar på produkt av $\odot$ og 1, kommuterar.

La $f_i : a_i \to b_i$ vera ein urmorfi i $\mathcal{C}$ for kvar $1 \leq i \leq m$. Med $n-1$-funktoren f_i meiner me $n-1$-funktoren $1 \to \mathcal{C}(a_i, b_i)$ som sender objektet i 1 på f_i. Me kallar ein naturleg $n-1$-transformasjon på forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\cong"] & Y \arrow[r, "\xi_1 \times \cdots \times \xi_m"] & \mathcal{C}(a_1, b_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(a_m, b_m) \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D}(c,d)
\end{tikzcd}$$

der ξ_i er enten f_i eller $id_{\mathcal{C}(a_i,b_i)}$ og X er produktet av $n-1$-kategoriane der tilhøyrande ξ_i er ein identitet, for ein partiell α om minst ein ξ_i ikkje er ein identitet, og gjev α indeksar etter kva for nokre ξ_i som ikkje er identiteten på ein morfi-$n-1$-kategori. Sjå til dømes Lemma 4.4 for korleis partielle assosiatorar ser ut.

Ein linn n-funktor F mellom to linne n-kategoriar $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ består av

(1) Ein funksjon $F : ob\mathcal{C} \to ob\mathcal{D}$,

(2) Ein familie linne $n-1$-funktorar

$$F(p,q) : \mathcal{C}(p,q) \to \mathcal{D}(Fp, Fq),$$

(3) For objekt $p, q, r \in \mathcal{C}$ ein linn $n-1$-isomorfi

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(q,r) \times \mathcal{C}(p,q) \arrow[r, "\odot"] \arrow[d, "F_{q,r} \times F_{p,q}"'] & \mathcal{C}(p,r) \arrow[d, "F_{p,r}"] \arrow[dl, Rightarrow, "F_{p,q,r}"] \\
\mathcal{D}(Fq, Fr) \times \mathcal{D}(Fp, Fq) \arrow[r, "\odot'"'] & \mathcal{D}(Fp, Fr),
\end{tikzcd}$$

kalla komposatoren til F, som oppfyller at:

(i) (Assosiativitet av komposatorar) Alle regulære diagram av assosiatorar, komposatorar og partielle slike, potensielt i produkt med ein identitetstransformasjon og komponert horisontalt med identitetstransformasjonar på produkt av $\odot$ og 1 og på produkt av dei linne n-funktorane til F, kommuterar. Me lar ein partiell komposator vera akkurat det same for komposatorar som partielle assosiatorar er for assosiatorar.

(ii) $FI_p = I_{Fp}$.

Me definerar komposisjon av n-funktorar som komposisjon av mengdefunktorane, $n-1$-funktorane og komposatorane kvar for seg.

La f_* og f^*, gitt ein 1-morfi $f : p \to q$ i ein linn n-kategori $\mathcal{C}$, vera definert som høvevis

$$\mathcal{C}(o,p) \xrightarrow{\cong} 1 \times \mathcal{C}(o,p) \xrightarrow{f \times id} \mathcal{C}(p,q) \times \mathcal{C}(o,p) \xrightarrow{\odot} \mathcal{C}(o,q)$$

og

$$\mathcal{C}(q,r) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(q,r) \times 1 \xrightarrow{id \times f} \mathcal{C}(q,r) \times \mathcal{C}(p,q) \xrightarrow{\odot} \mathcal{C}(p,r).$$

Ein linn n-transformasjon $\alpha : F \to G$ mellom to linne n-funktorar $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ oppfyller at $Fp = Gp$ for alle objekt p i $\mathcal{C}$ og består av ein urmorfi $\alpha_p : Fp \to Gp$ i $\mathcal{D}$ for kvart objekt $p \in \mathcal{C}$ og ein linn $n-1$-transformasjon $\alpha_{p,q} : (\alpha_q)_*(F_{p,q}) \to (\alpha_p)^*(G_{p,q})$ for alle par av objekt p, q i $\mathcal{C}$.

Dette skal oppfylla at $\alpha_{id_x} = id_{\alpha_x}$ og følgande identitetar for urmorfiar $f : x \to x$ og $g : y \to y$, der dei partielle komposatorane og assosiatorane passar inn som hevda ved lemmaa 4.6 og 4.4.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y) \arrow[rr, "G_{y,z}\times G_{x,y}"] \arrow[dr, "\odot"] \arrow[dd, "F_{y,z}\times F_{x,y}"'] & & \mathcal{D}(Gy,Gz)\times\mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[dr, "\odot"] & \\
& \mathcal{D}(x,z) \arrow[ur, Rightarrow, "G_{x,y,z}"] \arrow[rr, "G_{x,z}"] \arrow[dd, "F_{x,z}"] & & \mathcal{D}(Gx,Gz) \arrow[dd, "(\alpha_x)^*"] \\
\mathcal{D}(Fy,Fz)\times\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, Rightarrow, "F^{-1}_{x,y,z}"] \arrow[dr, "\odot"] & & & \\
& \mathcal{D}(Fx,Fz) \arrow[uurr, Rightarrow, "\alpha_{x,z}"] \arrow[rr, "(\alpha_z)_*"] & & \mathcal{D}(Fx,Gz)
\end{tikzcd}
$$

$$= \qquad (3)$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y) \arrow[rrr, "G_{y,z}\times G_{x,y}"] \arrow[drr, "G_{y,z}\times F_{x,y}"] \arrow[dddd, "F_{y,z}\times F_{x,y}"'] & & & \mathcal{D}(Gy,Gz)\times\mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[dr, "\odot"] \arrow[dd, "id\times(\alpha_x)^*"] & \\
& & \mathcal{D}(Gy,Gz)\times\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, Rightarrow, "1\times\alpha_{x,y}"] \arrow[dr, "id\times(\alpha_y)_*"] \arrow[dd, "(\alpha_y)^*\times id"] & & \mathcal{D}(Gx,Gz) \arrow[dddd, "(\alpha_x)^*"] \\
& & & \mathcal{D}(Gy,Gz)\times\mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "a_3^{-1}"] \arrow[dddr, "\odot"] & \\
& & \mathcal{D}(Fy,Gz)\times\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, Rightarrow, "a_2"] \arrow[ddrr, "\odot"] & & \\
\mathcal{D}(Fy,Fz)\times\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[uuurr, Rightarrow, "\alpha_{y,z}\times 1"] \arrow[urr, "(\alpha_z)_*\times id"'] \arrow[drr, "\odot"] & & & & \\
& & \mathcal{D}(Fx,Fz) \arrow[uu, Rightarrow, "a_1^{-1}"] \arrow[rr, "(\alpha_z)_*"] & & \mathcal{D}(Fx,Gz)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(x,y) \arrow[rr, "G_{x,y}"] \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[dr, "F_{x,y}"] & & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[dr, "(\alpha_x)^*"] \arrow[dd, bend left=70, "(\alpha_x Ff)^*"] & & \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[rr, Rightarrow, "(F_{x,x,y})_2"] \arrow[dr, "F_{x,y}"'] & & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[rr, "(\alpha_y)_*"] \arrow[dl, "(Ff)^*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] & & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[dl, "(Ff)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
 & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[rr, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[urrr, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] & & \mathcal{D}(Fx,Gy) & &
\end{tikzcd}
$$

$$= \qquad (4)$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(x,y) \arrow[rr, "G_{x,y}"] \arrow[dl, "f^*"'] & & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[dl, "(Gf)^*"] \arrow[dr, "(\alpha_x)^*"] \arrow[dd, bend left=70, "(\alpha_x Ff)^*"] & & \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[urrr, Rightarrow, "(G_{x,x,y})_2"] \arrow[r, "G_{x,y}"'] \arrow[dr, "F_{x,y}"'] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[drr, "(\alpha_x)^*"] & & & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[dl, "(Ff)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
 & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[rr, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[u, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] & & \mathcal{D}(Fx,Gy) & &
\end{tikzcd}
$$

og

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}(x,y) \arrow[drr, "G_{x,y}"] & & \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[urr, "g_*"] \arrow[drr, "G_{x,y}"'] \arrow[dd, "F_{x,y}"'] & & & & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[dd, "(\alpha_x)^*"] \\
 & & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[uu, Rightarrow, "(G_{x,y,y})_1{}^{-1}"] \arrow[urr, "(Gg)_*"] \arrow[dd, "(\alpha_x)^*"] & & \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[urr, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[drr, "(\alpha_y)_*"'] & & & & \mathcal{D}(Fx,Gy) \\
 & & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[urr, "(Gg)_*"'] \arrow[uuurr, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] & &
\end{tikzcd}
$$

$$= \qquad (5)$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}(x,y) \arrow[drr, "G_{x,y}"] \arrow[d, "F_{x,y}"] & & \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[urr, "g_*"] \arrow[dd, "F_{x,y}"'] & & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[rr, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[drr, "(\alpha_y)_*"'] & & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[dd, "(\alpha_x)^*"] \\
 & & & & \\
\mathcal{C}(Fx,Fy) \arrow[uurr, Rightarrow, "(F_{x,y,y})_1{}^{-1}"] \arrow[uurr, phantom] \arrow[uurr, "(Fg)_*"'] \arrow[drr, "(\alpha_y)_*"'] & & & & \mathcal{D}(Fx,Gy) \\
 & & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[urr, "(Gg)_*"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Me kallar α for ein n-isomorfi om α_x er inverterbar for alle x og $\alpha_{x,y}$ er ein $n-1$-isomorfi for alle x, y.

Gitt ein naturleg n-isomorfi

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{D}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

lar me $\alpha^{-1} : G \to F$ vera den naturlege transformasjonen gitt ved at $(\alpha^{-1})_x : G_x \to F_x$ er $(\alpha_x)^{-1}$ og at $(\alpha^{-1})_{x,y}$ er inversen av samansettinga

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[d, "F_{x,y}"'] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[d, "(\alpha_x)^*"'] \arrow[dr, "id"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow\alpha_{x,y}"] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow a_{2,3}"'] & \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "(\alpha_y)_*"] \arrow[dr, "id"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow a_{1,2}^{-1}"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[r, "(\alpha_x^{-1})^*"] \arrow[d, "(\alpha_y^{-1})_*"] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow a_{1,3}"] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[d, "(\alpha_y^{-1})_*"] \\
& \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "(\alpha_x^{-1})^*"'] & \mathcal{D}(Gx,Fy).
\end{tikzcd}$$

At desse partielle assosiatorane passar inn her er Lemma 4.4.

Me lar vertikal komposisjon av n-transformasjonar

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=U}] \arrow[r, "G"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=60, "H"'{name=D}] & \mathcal{D}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\alpha"]
\arrow[Rightarrow, from=M, to=D, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

vera $\beta\alpha$ der $(\beta\alpha)_p = \beta_p\alpha_p$ og $(\beta\alpha)_{p,q}$ er følgande komposisjon av $n-1$-transformasjonar:

$$\begin{tikzcd}
& & \mathcal{C}(p,q) \arrow[dll, "F_{p,q}"'] \arrow[drr, "H_{p,q}"] \arrow[dd, "G_{p,q}"] & & \\
\mathcal{D}(Fp,Fq) \arrow[d, "(\alpha_q)_*"'] \arrow[ddrr, bend right=60, "(\beta_q\alpha_q)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow \alpha_{p,q}"] & & & \arrow[dl, phantom, "\Rightarrow \beta_{p,q}"'] & \mathcal{D}(Hp,Hq) \arrow[d, "(\beta_p)^*"] \arrow[ddll, bend left=60, "(\beta_p\alpha_p)^*"] \\
\mathcal{D}(Fp,Gq) \arrow[drr, "(\beta_q)_*"'] \arrow[l, phantom, "a_{1,2}^{-1}\Rightarrow"] & & \mathcal{D}(Gp,Gq) \arrow[ll, "(\alpha_p)^*"'] \arrow[rr, "(\beta_q)_*"] \arrow[d, phantom, "a_{1,3}^{-1}"] & & \mathcal{D}(Gp,Hq) \arrow[dll, "(\alpha_p)^*"] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow a_{2,3}"] & {} \\
& & \mathcal{D}(Fp,Hq) & &
\end{tikzcd}$$

der Lemma 4.4 gjev at desse partielle assosiatorane passar inn.

Me lar horisontal komposisjon av n-transformasjonar

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "F'"] \arrow[r, bend right=50, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

vera $\beta \bullet \alpha$ der

$$(\beta \bullet \alpha)_p = \beta_{Gp} F'(\alpha_p) = G'(\alpha_p)\beta_{Fp}$$

og $(\beta \bullet \alpha)_{p,q}$ er følgande komposisjon av $n-1$-transformasjonar:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(p,q) \arrow[r, "G_{p,q}"] \arrow[d, "F_{p,q}"'] & \mathcal{D}(Gp,Gq) \arrow[r, "G'_{Gp,Gq}"] \arrow[d, "(\alpha_p)^*"'] & \mathcal{E}(G'Gp,G'Gq) \arrow[d, "G'_{Fp,Gp}(\alpha_p)^*"] \arrow[dd, bend left=60, "(G'_{Fp,Gp}(\alpha_p)\beta_{Fp})^*"] \\
\mathcal{D}(Fp,Fq) \arrow[r, "(\alpha_q)_*"] \arrow[d, "F'_{Fp,Fq}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{p,q}"] & \mathcal{D}(Fp,Gq) \arrow[r, "G'_{Fp,Gq}"] \arrow[d, "F'_{Fp,Gq}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "(G'_{Fp,Gp,Gq})_2"] & \mathcal{E}(G'Fp,G'Gq) \arrow[d, "(\beta_{Fp})^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rrightarrow}"] & {} \\
\mathcal{E}(F'Fp,F'Fq) \arrow[r, "F'_{Fq,Gq}(\alpha_q)_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "(F'_{Fp,Fq,Gq})_1^{-1}"] \arrow[rr, bend right=20, "(\beta_{Gq}F'_{Fq,Gq}(\alpha_q))_*"'] & \mathcal{E}(F'Fp,F'Gq) \arrow[r, "(\beta_{Gq})_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\beta_{Fp,Gq}"] \arrow[d, phantom, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{E}(F'Fp,G'Gq) \\
& {} &
\end{tikzcd}$$

der dei partielle komposatorane passar inn ved Lemma 4.6. Med dette er Definisjon 4.1 fullført.

Merknad 4.2. Ein n-transformasjon $\alpha : F \to G$ består av ein 1-morfi $\alpha_p : Fp \to Gp$ i $\mathcal{D}$, gjerne kalla ein komponent, for kvart objekt $p \in \mathcal{C}$ og ein linn $n-1$-transformasjon

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(p,q) \arrow[r, "G_{p,q}"] \arrow[d, "F_{p,q}"'] & \mathcal{D}(Gp,Gq) \arrow[d, "(\alpha_p)^*"] \\
\mathcal{D}(Fp,Fq) \arrow[r, "(\alpha_q)_*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{p,q}"] & \mathcal{D}(Fp,Gq)
\end{tikzcd}$$

som vil ha komponentar

$$\begin{tikzcd}
Fp \arrow[r, "\alpha_p"] \arrow[d, "Ff"'] & Gp \arrow[d, "Gf"] \\
Fq \arrow[r, "\alpha_q"'] \arrow[ur, Rightarrow, "(\alpha_{p,q})_f"] & Gq.
\end{tikzcd}$$

Eksistensen av ein naturleg $n-1$-transformasjon $\alpha_{p,q} : (\alpha_q)_*(F_{p,q}) \to (\alpha_p)^*(G_{p,q})$ betyr at desse to funktorane er like på objekt, altså at diagrammet

$$\begin{tikzcd} Fp \arrow[r, "\alpha_p"] \arrow[d, "Ff"'] & Gp \arrow[d, "Gf"] \\ Fq \arrow[r, "\alpha_q"'] & Gq \end{tikzcd}$$

av 1-morfiar i $\mathcal{D}$ kommuterar. Liknande argument er mogleg i kvar grad.

Merknad 4.3. Ein naturleg transformasjon $\alpha : F \to G$ der $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ er linne n-funktorar, består av objekt

$$\alpha_p \in ob\mathcal{D}(Fp, Gp),$$

$$\alpha_{p,q_f} \in ob\mathcal{D}(\alpha_q F(f), G(f)\alpha_p),$$

$$\alpha_{p,q_{f,g_\phi}} \in ob\mathcal{D}(\alpha_{p,q_g}\alpha_q F(\phi), G(\phi)\alpha_p\alpha_{p,q_f})$$

og så vidare. Med motsett val av retning på $\alpha_{p,q}$ hadde nye ledd bytt side dei kom på kvar gong.

Lemma 4.4. *La $f : x \to y$, $g : y \to z$ og $h : z \to w$ vera urmorfiar i ein linn n-kategori $\mathcal{C}$. Då har dei partielle assosiatorane på desse morfiane følgande kjelder og mål:*

$$\begin{array}{llll} a_1 : & \odot(h_* \times 1) \to h_*\odot & a_{1,2} : & (hg)_* \to h_*g_* \\ a_2 : & \odot(g^* \times 1) \to \odot(1 \times g_*) & a_{2,3} : & f^*g^* \to (gf)^* \\ a_3 : & f^*\odot \to \odot(1 \times f^*) & a_{1,3} : & f^*h_* \to h_*f^* \end{array}$$
$$a_{1,2,3} : (hg)f \to h(gf)$$

Bevis. Dette er klart ved inspeksjon. Til dømes er $a_{1,2}$ samansettinga

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "i", "\cong"'] & & \\ 1 \times 1 \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "h \times g \times 1"] & & \\ \mathcal{C}(z,w) \times \mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "\odot \times 1"] \arrow[d, "1 \times \odot"] & \mathcal{C}(y,w) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "\odot"] \arrow[dl, Rightarrow, "a"'] \\ \mathcal{C}(z,w) \times \mathcal{C}(x,z) \arrow[r, "\odot"] & \mathcal{C}(x,w), \end{tikzcd}$$

$a_{2,3}$ er samansettinga

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(z,w) \arrow[d, "\cong"', "i"] & \\
\mathcal{C}(z,w) \times 1 \times 1 \arrow[d, "1\times g\times f"] & \\
\mathcal{C}(z,w) \times \mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "\odot\times 1"] \arrow[d, "1\times\odot"] & \mathcal{C}(y,w) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "\odot"] \arrow[dl, Rightarrow, "a"'] \\
\mathcal{C}(z,w) \times \mathcal{C}(x,z) \arrow[r, "\odot"] & \mathcal{C}(x,w),
\end{tikzcd}$$

$a_{1,3}$ er samansettinga

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(y,z) \arrow[d, "\cong"', "i"] & \\
1 \times \mathcal{C}(y,z) \times 1 \arrow[d, "h\times 1\times f"] & \\
\mathcal{C}(z,w) \times \mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "\odot\times 1"] \arrow[d, "1\times\odot"] & \mathcal{C}(y,w) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "\odot"] \arrow[dl, Rightarrow, "a"'] \\
\mathcal{C}(z,w) \times \mathcal{C}(x,z) \arrow[r, "\odot"] & \mathcal{C}(x,w).
\end{tikzcd}$$

og $a_{1,2,3}$ er samansettinga

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\cong"] & \\
1 \times 1 \times 1 \arrow[d, "h\times g\times f"] & \\
\mathcal{C}(z,w) \times \mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "\odot\times 1"] \arrow[d, "1\times\odot"] & \mathcal{C}(y,w) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "\odot"] \arrow[dl, Rightarrow, "a"'] \\
\mathcal{C}(z,w) \times \mathcal{C}(x,z) \arrow[r, "\odot"] & \mathcal{C}(x,w).
\end{tikzcd}$$

□

Me er vande med at ein ikkje kan seia at assosiatoren $a_{h,g,f}$ i til dømes ein bikategori eller monoidal kategori er identiteten sjølv om $(hg)f$ og $h(gf)$ er like. Difor er kanskje Lemma 4.5 noko overraskande. Lauseleg kjem dette av at diagram av både assosiatorar og partielle assosiatorar kommuterar strikt, og ikkje berre opp til ein modifikasjon.

Lemma 4.5. *Den partielle assosiatoren $a_{1,2,3}$ på urmorfiar*

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \xrightarrow{h} w$$

i ein linn n-kategori er identitetstransformasjonen mellom $n-1$-funktorane $(hg)f$ og $h(gf)$.

Bevis. Ved Lemma 4.4 er $a_{1,2,3}$ ein naturleg n-transformasjon $(hg)f \to h(gf)$. Sjølv om $n-1$-funktorane $\odot(\odot \times 1)$ og $\odot(1 \times \odot)$ ikkje er like, betyr det at me har ein naturleg $n-1$-transformasjon mellom dei at funktorane er like på objekt. Med andre ord er $(hg)f = h(gf)$ like som 1-morfiar. Dermed er $n-1$-funktorane $(hg)f$ og $h(gf)$ like, og sidan diagrammet beståande av $a_{1,2,3}$ kommuterar er $a_{1,2,3}$ identitetstransformasjonen. $\square$

Lemma 4.6. *Gitt urmorfiar $f : x \to x$ og $g : y \to y$ i ein linn n-kategori $\mathcal{C}$ og ein linn n-funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, vil den partielle komposatoren $(F_{x,x,y})_2$ på f vera ein naturleg transformasjon*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "F_{x,y}"] & \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "F_{x,y}"] \arrow[dl, Rightarrow] \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "(Ff)^*"] & \mathcal{D}(Fx,Fy),
\end{tikzcd}$$

og $(F_{x,y,y})_1$ på g vil vera ein naturleg transformasjon

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "F_{x,y}"] & \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "F_{x,y}"] \arrow[dl, Rightarrow] \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "(Fg)_*"] & \mathcal{D}(Fx,Fy).
\end{tikzcd}$$

Bevis.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "i", "\cong"'] \arrow[d, "F_{x,y}"'] \arrow[rrr, bend left, "f^*"] & \mathcal{C}(x,y) \times 1 \arrow[r, "id \times f"'] \arrow[d, "F_{x,y} \times 1"'] & \mathcal{C}(x,y) \times \mathcal{C}(x,x) \arrow[r, "\odot"'] \arrow[d, "F_{x,y} \times F_{x,x}"'] & \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "F_{x,y}"] \arrow[dl, Rightarrow, "F_{x,x,y}"] \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "\cong", "i"'] \arrow[rrr, bend right, "(Ff)^*"'] & \mathcal{D}(Fx,Fy) \times 1 \arrow[r, "id \times F_{x,x}f"] & \mathcal{D}(Fx,Fy) \times \mathcal{D}(Fx,Fx) \arrow[r, "\odot"] & \mathcal{D}(Fx,Fy)
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "i", "\cong"'] \arrow[d, "F_{x,y}"'] \arrow[rrr, bend left, "g_*"] & 1 \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "g \times id"'] \arrow[d, "1\times F_{x,y}"'] & \mathcal{C}(y,y) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "\odot"'] \arrow[d, "F_{y,y}\times F_{x,y}"'] & \mathcal{C}(x,y) \arrow[d, "F_{x,y}"] \arrow[dl, Rightarrow, "F_{x,y,y}"] \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "\cong", "i"'] \arrow[rrr, bend right, "(Fg)_*"'] & 1 \times \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "F_{y,y}g \times id"] & \mathcal{D}(Fy,Fy) \times \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "\odot"] & \mathcal{D}(Fx,Fy)
\end{tikzcd}
$$

□

4.1 Assosiativ komposisjon av n-transformasjonar

Me tek fatt på induksjonsargumentet me treng for å syna at linne n-kategoriar er veldefinerte, og viser i den samanhengen nokre andre fine eigenskapar dei har.

Lemma 4.7. *Anta at komposisjonen av linne $n-1$-funktorar er ein linn $n-1$-funktor, at komposisjon av $n-1$-funktorar er assosiativt, og at både vertikal og horisontal komposisjon av $n-1$-transformasjonar er $n-1$-transformasjonar. Då er komposisjonen av to linne n-funktorar er ein linn n-funktor.*

Bevis. Komposisjonen av n-funktorane

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$$

består av funksjonen

$$ob\mathcal{C} \xrightarrow{F} ob\mathcal{D} \xrightarrow{G} ob\mathcal{E},$$

$n-1$-funktoren

$$\mathcal{C}(x,y) \xrightarrow{F_{x,y}} \mathcal{D}(Fx,Fy) \xrightarrow{G_{Fx,Fy}} \mathcal{E}(GFx,GFy)$$

og $n-1$-isomorfien

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "\odot"] \arrow[d, "F_{y,z}\times F_{x,y}"'] & \mathcal{C}(x,z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \arrow[dl, Rightarrow, "F_{x,y,z}"] \\
\mathcal{D}(Fy,Fz) \times \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "\odot'"] \arrow[d, "G_{Fy,Fz}\times G_{Fx,Fy}"'] & \mathcal{D}(Fx,Fz) \arrow[d, "G_{Fx,Fz}"] \arrow[dl, Rightarrow, "G_{Fx,Fy,Fz}"] \\
\mathcal{E}(GFy,GFz) \times \mathcal{E}(GFx,GFy) \arrow[r, "\odot''"'] & \mathcal{E}(GFx,GFz).
\end{tikzcd}
$$

Denne $n-1$-isomorfien skal lesast som

$$(GF)_{x,y,z} = (G_{Fx,Fy,Fz} \bullet id_{F_{y,z} \times F_{x,y}}) \circ (id_{G_{Fx,Fz}} \bullet F_{x,y,z}),$$

der me nyttar oss av at komposisjon av $n-1$-funktorar er assosiativt for å seia at denne vertikale komposisjonen er veldefinert. Ved føresetnaden er desse dataa dataa til ein n-funktor.

La eit diagram av (partielle) $(GF)_{x,y,z}$ og (partielle) assosiatorar i $\mathcal{C}$ og $\mathcal{E}$, muligens kryssa med identitetstransformasjonar og horisontalt komponert med identitetstransformasjonar, vera gitt. Ein kan visa at dette diagrammet kommuterar ved å nytta seg av at F og G er n-funktorar. Først byter ein ut "tilfelle" av assosiatoren i $\mathcal{C}$ med assosiatoren i $\mathcal{D}$ ved å nytta at diagram av komposatoren til F og assosiatorar frå $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ kommuterar. Dette ser typisk slik ut:

$$\begin{tikzcd}
\odot \circ (\odot \times 1) \circ (F_{z,w} \times F_{y,z} \times F_{x,y}) \arrow[r, "a^{\mathcal{D}} \bullet 1"] \arrow[d, "1 \bullet (F_{y,z,w} \times 1)"] & \odot \circ (1 \times \odot) \circ (F_{z,w} \times F_{y,z} \times F_{x,y}) \arrow[d, "1 \bullet (1 \times F_{x,y,z})"] \\
\odot \circ (F_{y,w} \times F_{x,y}) \circ (\odot \times 1) \arrow[d, "F_{x,y,w} \bullet 1"] & \odot \circ (F_{z,w} \times F_{x,z}) \circ (1 \times \odot) \arrow[d, "F_{x,z,w} \bullet 1"] \\
F_{x,w} \circ \odot \circ (\odot \times 1) \arrow[r, "F_{x,w} \bullet \alpha^{\mathcal{C}}"] & F_{x,w} \circ \odot \circ (1 \times \odot)
\end{tikzcd}$$

Så byter ein assosiatorane i $\mathcal{D}$ ut med assosiatorar i $\mathcal{E}$ på same måte. Dette vil til slutt gjera dei to samansettingane i diagrammet like. $\square$

Lemma 4.8. *Anta at komposisjon av linne $n-1$-transformasjonar er assosiativt og at me gitt to $n-1$-transformasjonar*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "A"] \arrow[r, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\phi"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "A'"] \arrow[r, bend right, "B'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

har eintydig komposisjon av desse, med andre ord at

$$(id_{B'} \bullet \phi) \circ (\psi \bullet id_A) = \psi \bullet \phi = (\psi \bullet id_B) \circ (id_{A'} \bullet \phi).$$

Då vil me ha eintydig komposisjon av n-transformasjonar

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E}.
\end{tikzcd}$$

Bevis. Føresetnadane våre lar oss konkludera at følgande samansettingar er like ved å nytta likskapane (3) og (4) for naturlege n-transformasjonar og at linne n-funktorar med ein n-transformasjon mellom seg er like på objekt.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}(x,y) \arrow[dl, "F_{x,y}"'] \arrow[dr, "G_{x,y}"] & \\
\mathcal{E}(F'Fx,F'Fy) \arrow[dd, "(\beta_{Fy})_*"] \arrow[ddr, Rightarrow, "\beta_{Fx,Fy}"] \arrow[dddd, bend right=40, "(G'(\alpha_y\beta_{Fy}))_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[l, "F'_{Fx,Fy}"'] \arrow[rr, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[dr, "(\alpha_y)_*"] \arrow[dd, "G'_{Fx,Fy}"'] & & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[dl, "(\alpha_x)^*"] \arrow[dd, "G'_{Gx,Gy}"] \\
\arrow[r, phantom, "\xRightarrow{a_{1,2}}"] & & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[dr, Rightarrow, "(G_{Fx,Gx,Gy})_2"] \arrow[dd, "G'_{Fx,Gy}"] & \\
\mathcal{E}(F'Fx,G'Fy) \arrow[d, "(G'\alpha_y)_*"'] \arrow[drr, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] & \mathcal{E}(G'Fx,G'Fy) \arrow[l, "(\beta_{Fx})^*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "(G'_{Fx,Fy,Gy})_1^{-1}"] \arrow[dr, "(G\alpha_y)_*"] & & \mathcal{E}(G'Gx,G'Gy) \arrow[dl, "(G'\alpha_x)^*"] \arrow[dlll, bend left=40, "(G'(\alpha_x)\beta_{Fx})^*"] \\
\mathcal{E}(F'Fx,G'Gy) & & \mathcal{E}(G'Fx,G'Gy) \arrow[ll, "(\beta_{Fx})^*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow a_{2,3}"] & \\
 & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[d, "F_{x,y}"'] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[r, "G'_{Gx,Gy}"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] & \mathcal{E}(G'Gx,G'Gy) \arrow[d, "G'_{Fx,Gx}(\alpha_x)^*"] \arrow[dd, bend left=50, "(G'_{Fx,Gx}(\alpha_x)\beta_{Fx})^*"] \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "(\alpha_y)_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[d, "F'_{Fx,Fy}"'] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[r, "G'_{Fx,Gy}"] \arrow[ur, Rightarrow, "(G'_{Fx,Gx,Gy})_2"] \arrow[d, "F'_{Fx,Gy}"] & \mathcal{E}(G'Fx,G'Gy) \arrow[d, "(\beta_{Fx})^*"] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{a_{2,3}}"] & {} \\
\mathcal{E}(F'Fx,F'Fy) \arrow[r, "F'_{Fy,Gy}(\alpha_y)_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "(F'_{Fx,Fy,Gy})_1^{-1}"] \arrow[rr, bend right=25, "(\beta_{Gy}F'_{Fy,Gy}(\alpha_y))_*"'] & \mathcal{E}(F'Fx,F'Gy) \arrow[r, "(\beta_{Gy})_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\beta_{Fx,Gy}"] \arrow[d, phantom, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{E}(F'Fx,G'Gy) \\
 & {} &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C}(x,y) \arrow[dl, "F_{x,y}"'] \arrow[dr, "G_{x,y}"] & & \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[rr, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[dr, "(\alpha_y)_*"] \arrow[dd, "F'_{Fx,Fy}"'] & & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[r, "G'_{Gx,Gy}"] \arrow[dl, "(\alpha_x)^*"] \arrow[dd, "F'_{Gx,Gy}"'] & \mathcal{E}(G'Gx,G'Gy) \arrow[dd, "(\beta_{Gx})^*"'] \arrow[ddd, bend left=50, "(G'(\alpha_y\beta_{Fy}))_*"] \arrow[dd, phantom, bend left=40, "\Rightarrow a_{2,3}"] \\
& \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[dd, "F'_{Fx,Gy}"'] \arrow[dr, Rightarrow, "(F'_{Fx,Gx,Gy})_2"] & & \\
\mathcal{E}(F'Fx,F'Fy) \arrow[ur, Rightarrow, "(F'_{Fx,Fy,Gy})_1^{-1}"] \arrow[dr, "(F'\alpha_y)_*"'] \arrow[drrr, bend right=60, "(G'(\alpha_x)\beta_{Fx})_*"'] & & \mathcal{E}(F'Gx,F'Gy) \arrow[uur, Rightarrow, "\beta_{Gx,Gy}"] \arrow[r, "(\beta_{Gy})_*"] \arrow[dl, "(F'\alpha_x)^*"] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow a_{1,3}^{-1}"] & \mathcal{E}(F'Gx,G'Gy) \arrow[d, "(F'\alpha_x)^*"] \\
& \mathcal{E}(F'Fx,F'Gy) \arrow[rr, "(\beta_{Gy})_*"] \arrow[d, phantom, "a_{1,2}\Uparrow"] & & \mathcal{E}(F'Fx,G'Gy) \\
& {} & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Merknad 4.9. Føresetnadane i Lemma 4.8 vil og gje at linne n-transformasjonar på forma

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dr] & & {} \arrow[dr] & \\
{} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & {} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & {} \\
& {} \arrow[ur] & & {} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

har eintydig komposisjon, for det er frameleis berre dei same tre gyldige måtane å setta dette saman på.

Lemma 4.10 er ein del av beviset for at den horisontale komposisjonen av to naturlege n-transformasjonar er ein naturleg n-transformasjon.

Lemma 4.10. *Anta at begge typar komposisjon av linne $n-1$-transformasjonar samt komposisjon av linne $n-1$-funktorar, er assosiative, og at horisontal komposisjon er eintydig (jamfør Lemma 4.8). Gitt ein naturleg n-transformasjon*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

og ein inverterbar 1-morfi $f : y \to y$ i $\mathcal{C}$, er då dei to samansettingane

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "1\times f_*"] \arrow[d, "f^*\times 1"] & \mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "G_{y,z}\times G_{x,y}"] \arrow[d, "\odot"] & \mathcal{D}(Gy,Gz)\times\mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[d, "\odot"] \\
\mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "\odot"] \arrow[d, "F_{y,z}\times F_{x,y}"] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow a_2"] & \mathcal{C}(x,z) \arrow[r, "G_{x,z}"] \arrow[d, "F_{x,z}"] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow G_{x,y,z}"] & \mathcal{D}(Gx,Gz) \arrow[d, "\alpha_x^*"] \\
\mathcal{D}(Fy,Fz)\times\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "\odot"] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow {F_{x,y,z}}^{-1}"] & \mathcal{D}(Fx,Fz) \arrow[r, "(\alpha_y)_*"] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow \alpha_{x,z}"] & \mathcal{D}(Fx,Gz)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^2 \arrow[rr, "1\times f_*"] \arrow[dr, "G\times F"] \arrow[dd, "f^*\times 1"] & & \mathcal{C}^2 \arrow[r, "G\times G"] \arrow[d, "G\times F"] & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "1\times(\alpha_x)^*"] \arrow[dr, "\odot"] & \\
 & \mathcal{D}^2 \arrow[r, "1\times(Ff)_*"] \arrow[d, "(Gf)^*\times 1"] \arrow[rr, bend right, "1\times(\alpha_y(Ff))_*"'] \arrow[dd, bend left, "((Gf)\alpha_y)^*\times 1"] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow 1_G\times(F_{x,y,y})_1^{-1}"] & \mathcal{D}^2 \arrow[r, "1\times(\alpha_y)_*"] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow 1_G\times\alpha_{x,y}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow 1\times a_{1,2}"] & \mathcal{D}^2 \arrow[r, phantom, "\Rightarrow a_3^{-1}"] \arrow[ddr, "\odot"] & \mathcal{D} \arrow[ddd, "(\alpha_x)^*"] \\
\mathcal{C}^2 \arrow[r, "G\times F"] \arrow[d, "F\times F"] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow (G_{y,y,z})_2\times 1_F"] & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "(\alpha_y)^*\times 1"] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow a_{2,3}\times 1"] & \arrow[ur, phantom, "\Nearrow a_2"] & & \\
\mathcal{D}^2 \arrow[r, "(\alpha_z)_*\times 1"] \arrow[dr, "\odot"] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow \alpha_{y,z}\times 1_F"] & \mathcal{D}^2 \arrow[drrr, "\odot"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow a_1^{-1}"] & & & \\
 & \mathcal{D} \arrow[rrr, "(\alpha_z)_*"] & & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

av $n-1$-transformasjonar, der me til dømes har skrive $\mathcal{C}^2$ for $\mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y)$, like.

Bevis. Føresetnadane våre om assosiativitet og Lemma 4.8 gjev at desse samansettingane, og dei under, er eintydige.

Følgande samansettingar er like ved aksioma for n-transformasjonar og

n-funktorar.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^2 \arrow[r, "1\times(f\times 1)i"] & \mathcal{C}^3 \arrow[r, "1\times\odot"] \arrow[d, "\odot\times 1"'] & \mathcal{C}^2 \arrow[r, "G\times G"] \arrow[d, "\odot"'] & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "\odot"] \\
 & \mathcal{C}^2 \arrow[r, "\odot"] \arrow[d, "F\times F"'] \arrow[ur, Rightarrow, "a"] & \mathcal{C} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] \arrow[ur, Rightarrow, "G_{x,y,z}"] & \mathcal{D} \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \\
 & \mathcal{D}^2 \arrow[r, "\odot"] \arrow[ur, Rightarrow, "{F_{x,y,z}}^{-1}"] & \mathcal{D} \arrow[r, "(\alpha_y)_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,z}"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^2 \arrow[r, "1\times(f\times 1)i"] & \mathcal{C}^3 \arrow[rr, "1\times\odot"] \arrow[dr, "G\times G\times G"'] \arrow[ddd, "\odot\times 1"'] & & \mathcal{C}^2 \arrow[dr, "G\times G"] & & \\
 & & \mathcal{D}^3 \arrow[rr, "1\times\odot"] \arrow[ur, Rightarrow, "1\times(G_{x,y,y})^{-1}"] \arrow[d, "\odot\times 1"] & & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "\odot"] & \\
 & & \mathcal{D}^2 \arrow[rr, "\odot"] \arrow[urr, Rightarrow, "a"] & & \mathcal{D} \arrow[dr, "(\alpha_x)^*"] & \\
 & \mathcal{C}^2 \arrow[rr, "\odot"] \arrow[uur, Rightarrow, "G_{y,y,z}\times 1"] \arrow[ur, "G\times G"] \arrow[urrr, Rightarrow, "G_{x,y,z}"] \arrow[dr, "F\times F"'] & & \mathcal{C} \arrow[ur, "G"'] \arrow[rr, Rightarrow, "\alpha_{x,z}"] \arrow[dr, "F"] & & \mathcal{D} \\
 & & \mathcal{D}^2 \arrow[rr, "\odot"] \arrow[ur, Rightarrow, "(F_{x,y,z})^{-1}"] & & \mathcal{D} \arrow[ur, "(\alpha_z)_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^2 \arrow[r, "1\times(f\times 1)i"] & \mathcal{C}^3 \arrow[rr, "1\times\odot"] \arrow[dr, "G\times G\times G"'] \arrow[ddd, "\odot\times 1"'] & & \mathcal{C}^2 \arrow[dr, "G\times G"] & \\
& & \mathcal{D}^3 \arrow[ur, Rightarrow, "1_G\times(G_{x,y,y})^{-1}"] \arrow[rr, "1\times\odot"] \arrow[d, "\odot\times 1"] & & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "\odot"] \\
& & \mathcal{D}^2 \arrow[urr, Rightarrow, "a"] \arrow[rr, "\odot"] \arrow[dr, "1\times(\alpha_x)^*"] & & \mathcal{D} \arrow[ddd, "(\alpha_x)^*"] \\
& \mathcal{C}^2 \arrow[uur, Rightarrow, "G_{y,y,z}\times 1_G"] \arrow[ur, "G\times G"] \arrow[r, "G\times F"] \arrow[d, "F\times F"'] & \mathcal{D}^2 \arrow[u, Rightarrow, "1_G\times\alpha_{x,y}"] \arrow[r, "1\times(\alpha_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_y)^*\times 1"] & \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "a_3^{-1}"] \arrow[ddr, "\odot"] & \\
& \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{y,z}\times 1_F"] \arrow[r, "(\alpha_z)_*\times 1"] \arrow[dr, "\odot"] & \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "a_2"] \arrow[drr, "\odot"] & & \\
& & \mathcal{D} \arrow[u, Rightarrow, "a_1^{-1}"] \arrow[rr, "(\alpha_z)_*"] & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^2 \arrow[rr, "1\times f_*"] \arrow[dr, "G\times G"'] \arrow[ddd, "f^*\times 1"'] & & \mathcal{C}^2 \arrow[dr, "G\times G"] & \\
& \mathcal{D}^2 \arrow[rr, "1\times (Gf)_*"] \arrow[d, "(Gf)^*\times 1"] \arrow[ur, Rightarrow, "1_G\times (G_{x,y,y})_1^{-1}"] & & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "\odot"] \\
& \mathcal{D}^2 \arrow[rr, "\odot"] \arrow[dr, "1\times(\alpha_x)^*"] \arrow[urr, Rightarrow, "a_2"] & & \mathcal{D} \arrow[ddd, "(\alpha_x)^*"] \\
\mathcal{C}^2 \arrow[ur, "G\times G"] \arrow[r, "G\times F"] \arrow[d, "F\times F"'] \arrow[uur, Rightarrow, "(G_{y,y,z})_2\times 1_G"] & \mathcal{D}^2 \arrow[r, "1\times(\alpha_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_y)^*\times 1"] \arrow[u, Rightarrow, "1_G\times\alpha_{x,y}"] & \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "a_3^{-1}"] \arrow[ddr, "\odot"] & \\
\mathcal{D}^2 \arrow[r, "(\alpha_z)_*\times 1"] \arrow[dr, "\odot"] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{y,z}\times 1_F"] & \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "a_2"] \arrow[drr, "\odot"] & & \\
& \mathcal{D} \arrow[rr, "(\alpha_z)_*"] \arrow[u, Rightarrow, "a_1^{-1}"] & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^2 \arrow[rr, "1\times f_*"] \arrow[dr, "G\times G"'] \arrow[ddd, "f^*\times 1"'] & & \mathcal{C}^2 \arrow[dr, "G\times G"] & & \\
& \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "1_G\times(G_{x,y,y})_1^{-1}"] \arrow[rr, "1\times(Gf)_*"] \arrow[d, "(Gf)^*\times 1"] \arrow[dr, "1\times(\alpha_x)^*"] & & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "1\times(\alpha_x)^*"] \arrow[ddr, "\odot"] & \\
& \mathcal{D}^2 \arrow[dr, "1\times(\alpha_x)^*"] & \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "1\times a_{1,3}^{-1}"] \arrow[r, "1\times(Gf)_*"] \arrow[d, "(Gf)^*\times 1"] \arrow[r, phantom, shift right=8ex, "\Nearrow a_2"] & \mathcal{D}^2 \arrow[dd, "\odot"] \arrow[r, phantom, shift right=8ex, "\Rightarrow a_3^{-1}"] & \\
\mathcal{C}^2 \arrow[uur, Rightarrow, "(G_{y,y,z})_2\times 1_G"] \arrow[ur, "G\times G"] \arrow[r, "G\times F"] \arrow[d, "F\times F"'] & \mathcal{D}^2 \arrow[u, Rightarrow, "1_G\times\alpha_{x,y}"] \arrow[r, "1\times(\alpha_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_y)^*\times 1"] & \mathcal{D}^2 \arrow[ddr, "\odot"] & & \mathcal{D} \arrow[ddl, "(\alpha_x)^*"] \\
\mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{y,z}\times 1_F"] \arrow[r, "(\alpha_z)_*\times 1"] \arrow[dr, "\odot"'] & \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "a_2"] \arrow[drr, "\odot"] & & & \\
& \mathcal{D} \arrow[u, Rightarrow, "a_1^{-1}"] \arrow[rr, "(\alpha_z)_*"] & & \mathcal{D} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathcal{C}^2 \arrow[rr, "1\times f_*"] \arrow[dr, "G\times G"] \arrow[ddr, "G\times F"'] \arrow[ddd, "f^*\times 1"'] & & \mathcal{C}^2 \arrow[dr, "G\times G"] & & \\
& \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "1_G\times (G_{x,y,y})_1^{-1}"] \arrow[rr, "1\times (Gf)_*"] \arrow[dr, "1\times(\alpha_x)^*"] & & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "1\times(\alpha_x)^*"] \arrow[ddr, "\odot"] & \\
& \mathcal{D}^2 \arrow[u, Rightarrow, "1_G\times \alpha_{x,y}"'] \arrow[r, "1\times(\alpha_y)_*"] \arrow[d, "(Gf)^*\times 1"] & \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "1\times a_{1,3}^{-1}"] \arrow[r, "1\times(Gf)_*"] \arrow[d, "(Gf)^*\times 1"] & \mathcal{D}^2 \arrow[ddd, "\odot"] & \\
\mathcal{C}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "(G_{y,y,z})_2\times 1_F"] \arrow[r, "G\times F"] \arrow[d, "F\times F"'] & \mathcal{D}^2 \arrow[r, "1\times(\alpha_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_y)^*\times 1"'] & \mathcal{D}^2 \arrow[ur, phantom, "\Nearrow a_2"] \arrow[ddr, "\odot"] & {} \arrow[r, Rightarrow, "a_3^{-1}"] & \mathcal{D} \arrow[ddl, "(\alpha_x)^*"] \\
\mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{y,z}\times 1_F"] \arrow[r, "(\alpha_z)_*\times 1"] \arrow[dr, "\odot"] & \mathcal{D}^2 \arrow[ur, Rightarrow, "a_2"] \arrow[drr, "\odot"] & & & \\
& \mathcal{D} \arrow[u, Rightarrow, "a_1^{-1}"] \arrow[rr, "(\alpha_z)_*"] & & \mathcal{D} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}^2 \arrow[dr, "G\times G"] & & \\
\mathcal{C}^2 \arrow[urr, "1\times f_*"] \arrow[rr, "G\times G"] \arrow[dr, "G\times F"] \arrow[dd, "f^*\times 1"'] & & \mathcal{C}^2 \arrow[r, "1\times(Gf)_*"] \arrow[d, "1\times(\alpha_x)^*"'] \arrow[u, Rightarrow, "1_G\times(G_{x,y,y})_1^{-1}"] & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "1\times(\alpha_x)^*"] \arrow[dr, "\odot"] & \\
 & \mathcal{D}^2 \arrow[r, "1\times(\alpha_y)_*"] \arrow[rr, bend right, "1\times(\alpha_y(Ff))_*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "1_G\times\alpha_{x,y}"] \arrow[d, "(Gf)^*\times 1"'] \arrow[dd, bend left=60, "((Gf)\alpha_y)^*\times 1"] & \mathcal{D}^2 \arrow[r, "1\times(Gf)_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "1\times a_{1,3}^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow 1\times a_{1,2}"] & \mathcal{D}^2 \arrow[r, Rightarrow, "a_3^{-1}"'] \arrow[dddr, "\odot"] & \mathcal{D} \arrow[ddd, "(\alpha_x)^*"] \\
\mathcal{C}^2 \arrow[r, "G\times F"] \arrow[d, "F\times F"'] \arrow[ur, Rightarrow, "(G_{y,y,z})_2\times 1_F"] & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "(\alpha_y)^*\times 1"'] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow a_{2,3}\times 1"] & {} \arrow[r, phantom, "\Rightarrow a_2"] & {} & \\
\mathcal{D}^2 \arrow[r, "(\alpha_z)_*\times 1"] \arrow[dr, "\odot"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{y,z}\times 1_F"] & \mathcal{D}^2 \arrow[drrr, "\odot"] & & & \\
 & \mathcal{D} \arrow[rrr, "(\alpha_z)_*"] \arrow[u, Rightarrow, "a_1^{-1}"'] & & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^2 \arrow[rr, "1\times f_*"] \arrow[dr, "G\times F"] \arrow[dd, "f^*\times 1"'] & & \mathcal{C}^2 \arrow[r, "G\times G"] \arrow[d, "G\times F"'] & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "1\times(\alpha_x)^*"] \arrow[dr, "\odot"] & \\
 & \mathcal{D}^2 \arrow[r, "1\times(Ff)_*"] \arrow[rr, bend right, "1\times(\alpha_y(Ff))_*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "1_G\times(F_{x,y,y})_1^{-1}"] \arrow[d, "(Gf)^*\times 1"'] \arrow[dd, bend left=60, "((Gf)\alpha_y)^*\times 1"] & \mathcal{D}^2 \arrow[r, "1\times(\alpha_y)_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "1_G\times\alpha_{x,y}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow 1\times a_{1,2}"] & \mathcal{D}^2 \arrow[r, Rightarrow, "a_3^{-1}"'] \arrow[dddr, "\odot"] & \mathcal{D} \arrow[ddd, "(\alpha_x)^*"] \\
\mathcal{C}^2 \arrow[r, "G\times F"] \arrow[d, "F\times F"'] \arrow[ur, Rightarrow, "(G_{y,y,z})_2\times 1_F"] & \mathcal{D}^2 \arrow[d, "(\alpha_y)^*\times 1"'] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow a_{2,3}\times 1"] & {} \arrow[r, phantom, "\Rightarrow a_2"] & {} & \\
\mathcal{D}^2 \arrow[r, "(\alpha_z)_*\times 1"] \arrow[dr, "\odot"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{y,z}\times 1_F"] & \mathcal{D}^2 \arrow[drrr, "\odot"] & & & \\
 & \mathcal{D} \arrow[rrr, "(\alpha_z)_*"] \arrow[u, Rightarrow, "a_1^{-1}"'] & & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Lemma 4.11. *Anta at komposisjonen av linne $n-1$-funktorar er ein linn $n-1$-funktor, at både vertikal og horisontal komposisjon av $n-1$-transformasjonar er $n-1$-transformasjonar, at desse typane komposisjon er assosiative og at me har eintydig horisontal komposisjon av $n-1$-transformasjonar (jamfør Lemma 4.8). Då er komposisjonen av to naturlege transformasjonar ein naturleg transformasjon. Om begge er isomorfiar, er komposisjonen også ein isomorfi.*

Bevis. Føresetnadane våre om assosiativitet og Lemma 4.8 gjev at samansettingane i utreikningane er eintydige.

Me byrjar med vertikal komposisjon. Den naturlege n-transformasjonen $\beta \circ \alpha$ oppfyller det første aksiomet (3) ved følgande utreikning, der $f : x \to x$ er ein urmorfi.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[dr, "(\beta_x)^*"] \arrow[ddr, bend left=40, Rightarrow, no head, "(\beta_x\alpha_x)^*"] \arrow[dddr, bend left=60, "((\beta_x\alpha_x)Ff)^*"] & \\
 & \mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, "H_{x,y}"] \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[d, "F_{x,y}"] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[u, phantom, "\Uparrow \beta_{x,y}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}"] & {} \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, Rightarrow, "(F_{x,x,y})_2"] \arrow[dr, "F_{x,y}"'] & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, phantom, "\alpha_{x,y}\,\Nearrow"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"] \arrow[d, "(Ff)^*"] \arrow[rr, bend right, "(\alpha_y\beta_y)_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[ur, phantom, "a_{1,3}^{-1}\,\Nearrow"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, phantom, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{D}(Fx,Hy) \arrow[d, "(Ff)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
 & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[rr, "(\beta_y\alpha_y)_*"'] \arrow[urr, phantom, "\Nearrow a_{1,3}^{-1}"] & & \mathcal{D}(Fx,Hy) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[dr, "(\beta_x)^*"] \arrow[ddr, bend left=40, Rightarrow, no head, "(\beta_x\alpha_x)^*"] \arrow[dddr, bend left=60, "((\beta_x\alpha_x)Ff)^*"] & \\
 & \mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, "H_{x,y}"] \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[d, "F_{x,y}"] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[u, phantom, "\Uparrow \beta_{x,y}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}"] & {} \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, Rightarrow, "(F_{x,x,y})_2"] \arrow[dr, "F_{x,y}"'] & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, phantom, "\alpha_{x,y}\,\Nearrow"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"] \arrow[d, "(Ff)^*"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[ur, phantom, "a_{1,3}^{-1}\,\Nearrow"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(Ff)^*"] & \mathcal{D}(Fx,Hy) \arrow[d, "(Ff)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
 & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, phantom, "a_{1,3}^{-1}\,\Nearrow"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[rr, bend right, "(\alpha_y\beta_y)_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[ur, phantom, "a_{1,3}\,\Nearrow"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"'] \arrow[d, phantom, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{D}(Fx,Hy) & \\
 & & {} & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[dr, "(\beta_x)^*"] \arrow[ddr, bend left=40, "((\beta_x\alpha_x)Ff)^*"'] \arrow[ddr, bend left=60, "(\beta_x(\alpha_x Ff))^*"] \arrow[ddr, phantom, bend left=50, "a_{1,2,3}\Nearrow id"] & \\
 & \mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, "H_{x,y}"] \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[d, "F_{x,y}"] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[u, phantom, "\beta_{x,y}\Uparrow"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[dd, bend left=50, "(\alpha_x Ff)^*"] \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, Rightarrow, "(F_{x,x,y})_2"] \arrow[dr, "F_{x,y}"'] & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, phantom, "\alpha_{x,y}"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"] \arrow[d, "(Ff)^*"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[ur, phantom, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(Ff)^*"] & \mathcal{D}(Fx,Hy) \arrow[d, "(Ff)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}\quad\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
 & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, phantom, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[rr, bend right, "(\alpha_y\beta_y)_*"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[ur, phantom, "a_{1,3}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Hy)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[dr, "(\beta_x)^*"] \arrow[ddr, bend left=40, "((\beta_x\alpha_x)Ff)^*"'] \arrow[ddr, bend left=60, "(\beta_x(\alpha_x Ff))^*"] \arrow[ddr, phantom, bend left=50, "a_{1,2,3}\Nearrow id"] & \\
 & \mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, "H_{x,y}"] \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[d, "F_{x,y}"] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[u, phantom, "\beta_{x,y}\Uparrow"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[dd, bend left=50, "(\alpha_x Ff)^*"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[dd, "(\alpha_x Ff)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, Rightarrow, "(F_{x,x,y})_2"] \arrow[dr, "F_{x,y}"'] & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, phantom, "\alpha_{x,y}"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"] \arrow[d, "(Ff)^*"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}\quad a_{1,3}^{-1}"] \arrow[d, "(Ff)^*"] & {} \\
 & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, phantom, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[rr, bend right, "(\alpha_y\beta_y)_*"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[r, "(\beta_y)_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Hy)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[dr, "(\beta_x)^*"] \arrow[ddr, bend left=40, "((\beta_x\alpha_x)Ff)^*"'] \arrow[ddr, bend left=60, "(\beta_x(\alpha_x Ff))^*"] \arrow[ddr, phantom, bend left=50, "a_{1,2,3}\Nearrow id"] & \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, "H_{x,y}"] \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[u, phantom, "\beta_{x,y}\Uparrow"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(Gf)^*"] \arrow[dd, bend left=50, "(\alpha_x Ff)^*"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[dd, "(\alpha_x Ff)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, phantom, "(G_{x,x,y})_2"] \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[d, "F_{x,y}"'] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}\quad a_{1,3}^{-1}"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] & {} \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, phantom, "\alpha_{x,x}"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[rr, bend right, "(\alpha_y\beta_y)_*"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[r, "(\beta_y)_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Hy)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[dr, "(\beta_x)^*"] \arrow[dddr, bend left=50, "((\beta_x Gf)\alpha_x)^*"'] \arrow[dddr, bend left=80, "(\beta_x(Gf\alpha_x))^*"] \arrow[dddr, phantom, bend left=65, "\overset{a_{1,2,3}}{\Rightarrow} id"] & \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, "H_{x,y}"] \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[u, phantom, "\Uparrow \beta_{x,y}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(Gf)^*"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[d, "(Gf)^*"] \arrow[dd, bend left=50, "(Gf\alpha_x)^*"] \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, Rightarrow, "(G_{x,x,y})_2"] \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[d, "F_{x,y}"'] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}\quad \overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[rr, bend right, "(\alpha_y\beta_y)_*"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Hy)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[dr, "(\beta_x)^*"] \arrow[ddr, bend left=60, "(\beta_x Gf)^*"'] \arrow[dddr, bend left=80, "((\beta_x Gf)\alpha_x)^*"] & \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, "H_{x,y}"] \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[u, phantom, "\Uparrow \beta_{x,y}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(Gf)^*"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[d, "(Gf)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}"] & {} \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, Rightarrow, "(G_{x,x,y})_2"] \arrow[r, "G_{x,y}"] \arrow[d, "F_{x,y}"'] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[rr, bend right, "(\alpha_y\beta_y)_*"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Hy)
\end{tikzcd}
$$

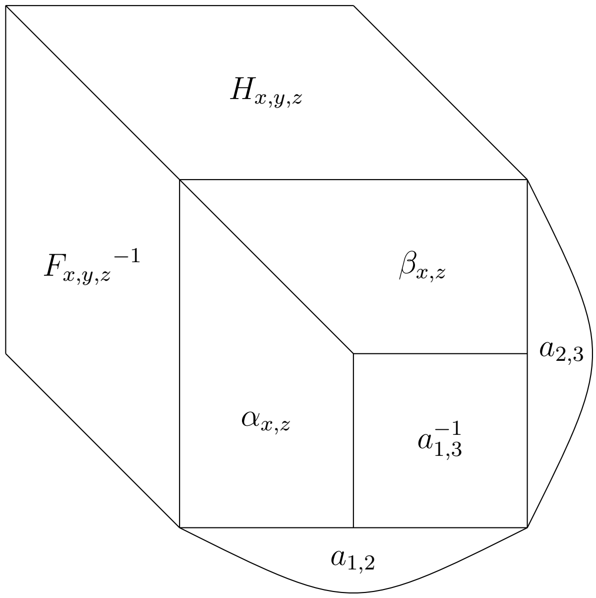
$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \arrow[rr, "H_{x,y}"] \arrow[d, "f^*"'] & & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[d, "(Hf)^*"] \arrow[dd, bend left=40, "(Hf\beta_x)^*"] \arrow[ddd, bend left=50, "((Hf\beta_x)\alpha_x)^*"] \arrow[ddd, bend left=90, "(Hf(\beta_x\alpha_x))^*"] \arrow[ddd, phantom, bend left=70, "\overset{a_{1,2,3}}{\underset{id}{\Longrightarrow}}"] \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[urr, Rightarrow, "(H_{x,x,y})_2"] \arrow[rr, "H_{x,y}"] \arrow[dr, "G_{x,y}"'] \arrow[dd, "F_{x,y}"'] & & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[d, "(\beta_x)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}"] & {} \\
 & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "\beta_{x,y}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}"] & {} \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[r, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[rr, bend right, "(\alpha_y\beta_y)_*"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[r, "(\beta_y)_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Hy)
\end{tikzcd}
$$

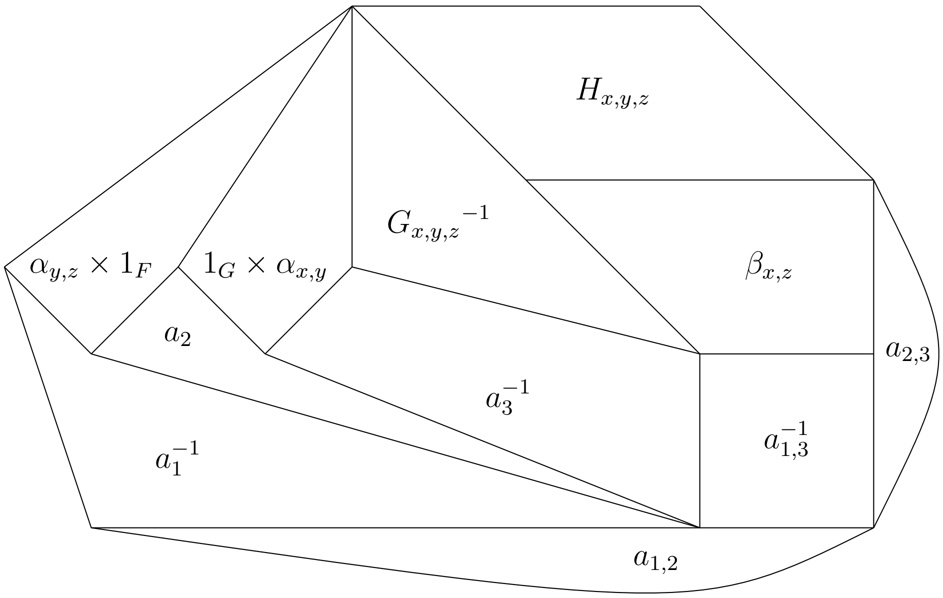
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \arrow[rr, "H_{x,y}"] \arrow[d, "f^*"'] & & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[d, "(Hf)^*"] \arrow[ddd, bend left=60, "(Hf(\beta_x\alpha_x))^*"] \\
\mathcal{C}(x,y) \arrow[rr, "H_{x,y}"] \arrow[urr, Rightarrow, "(H_{x,x,y})_2"] \arrow[dr, "G_{x,y}"'] \arrow[dd, "F_{x,y}"'] & & \mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[d, "(\beta_x)^*"] \arrow[dd, bend left=40, "(\beta_x\alpha_x)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}"] & {} \\
& \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[r, "(\beta_y)_*"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\beta_{x,y}"] & \mathcal{D}(Gx,Hy) \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}"] & {} \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[rr, bend right=30, "(\alpha_y\beta_y)_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Gyy) \arrow[r, "(\beta_y)_*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[d, phantom, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{D}(Fx,Hy) \\
& {} &
\end{tikzcd}$$

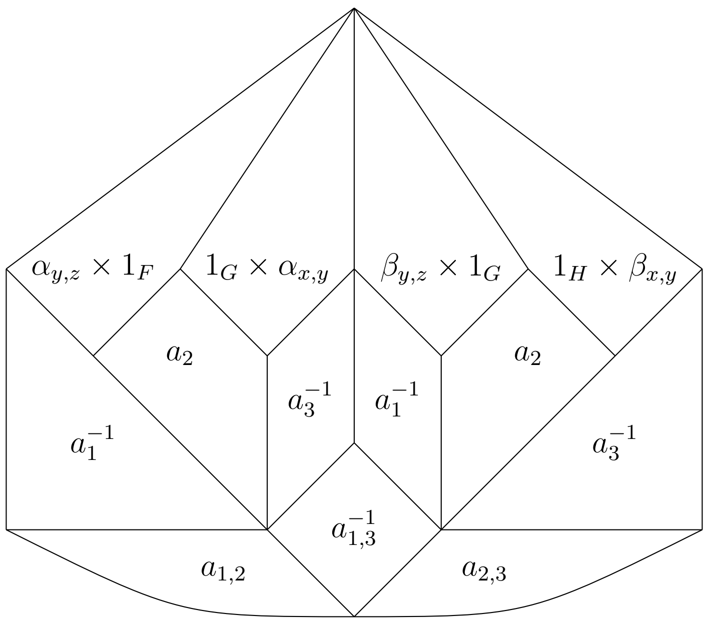
Beviset for at det andre aksiomet (4) held for vertikal komposisjon er heilt analogt.

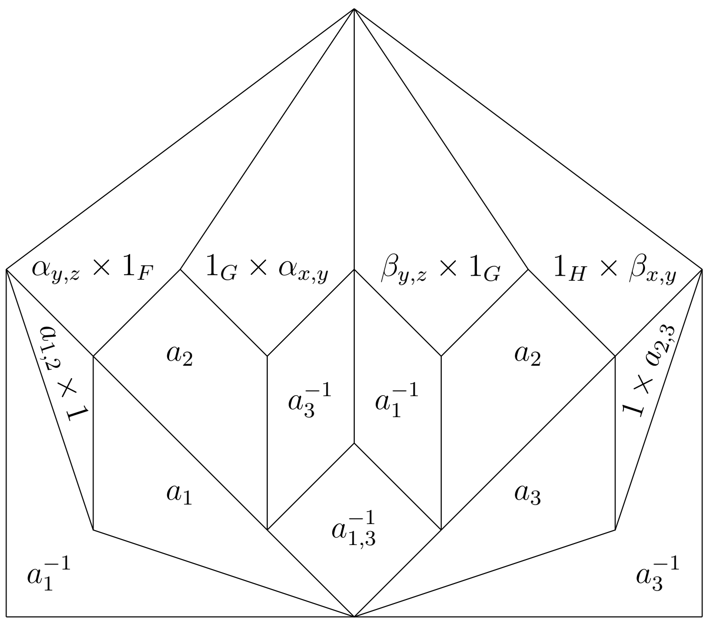
Eit bevis for at det tredje aksiomet (5) held for vertikal komposisjon av α og β kan gjerast presist ved å sjå at følgande samansettingar er like:

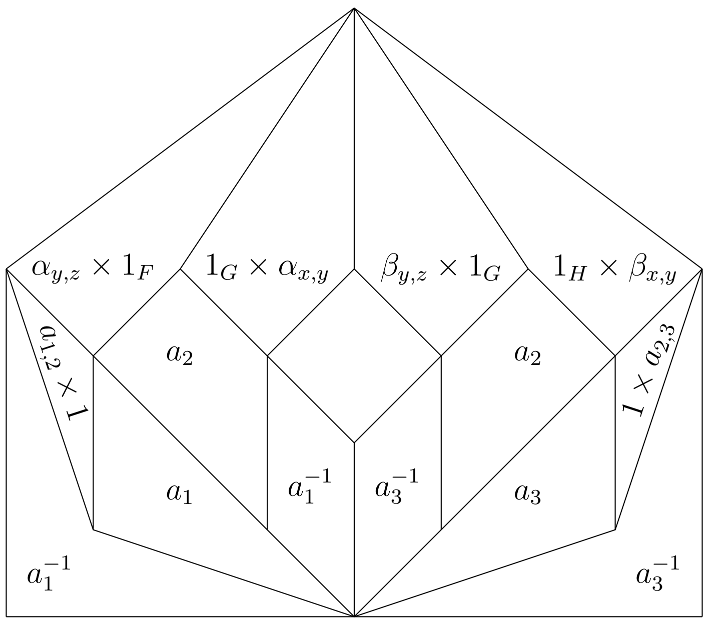
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y) \arrow[rr, "H_{y,z}\times H_{x,y}"] \arrow[dr, "\odot"] \arrow[dd, "F_{y,z}\times F_{x,y}"'] & & \mathcal{D}(Hy,Hz)\times\mathcal{D}(Hx,Hy) \arrow[dr, "\odot"] & \\
& \mathcal{D}(x,z) \arrow[rr, "H_{x,z}"] \arrow[ur, Rightarrow, "H_{x,y,z}"] \arrow[dr, "G_{x,z}"] \arrow[dd, "F_{x,z}"] & & \mathcal{D}(Hx,Hz) \arrow[d, "(\beta_x)^*"] \arrow[dd, bend left=40, "(\beta_x\alpha_x)^*"] \\
\mathcal{D}(Fy,Fz)\times\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, Rightarrow, "F_{x,y,z}^{-1}"] \arrow[dr, "\odot"] & & \mathcal{D}(Gx,Gz) \arrow[r, "(\beta_z)_*"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\beta_{x,z}"] & \mathcal{D}(Gx,Hz) \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Rightarrow}"] & {} \\
& \mathcal{D}(Fx,Fz) \arrow[r, "(\alpha_z)_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,z}"] \arrow[rr, bend right=30, "(\beta_z\alpha_z)_*"'] & \mathcal{D}(Fx,Gz) \arrow[r, "(\beta_z)_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow a_{1,2}"] & \mathcal{D}(Fx,Hz) \\
& & {} &
\end{tikzcd}$$

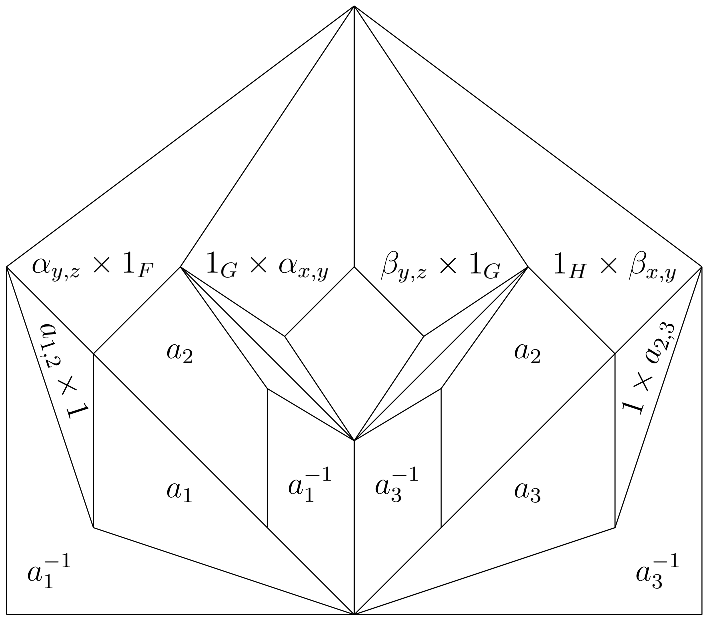

$H_{x,y,z}$
${F_{x,y,z}}^{-1}$
$\beta_{x,z}$
$a_{2,3}$
$\alpha_{x,z}$
$a_{1,3}^{-1}$
$a_{1,2}$

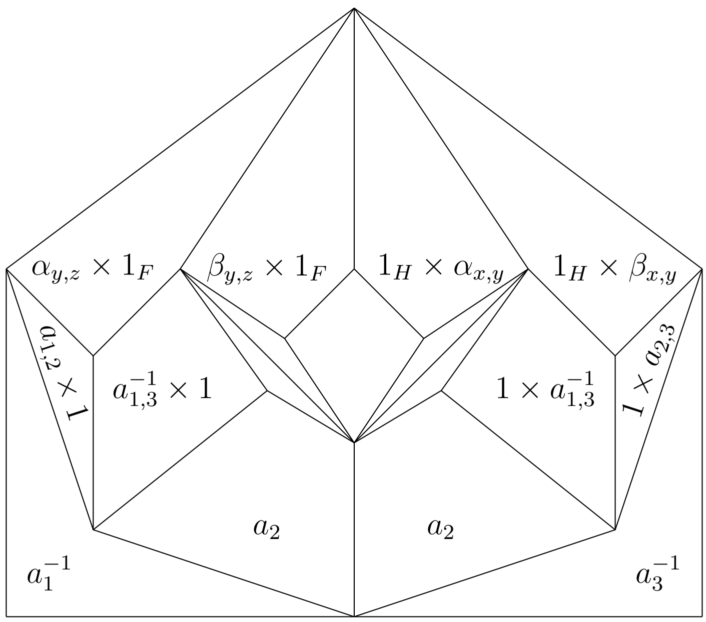

$H_{x,y,z}$
${G_{x,y,z}}^{-1}$
$\alpha_{y,z} \times 1_F$
$1_G \times \alpha_{x,y}$
$\beta_{x,z}$
a_2
$a_{2,3}$
a_3^{-1}
$a_{1,3}^{-1}$
a_1^{-1}
$a_{1,2}$

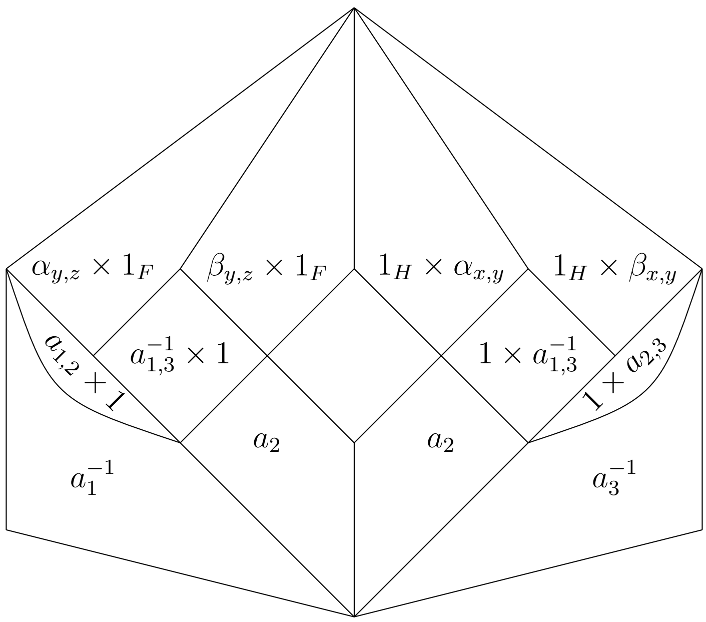

$\alpha_{y,z} \times 1_F$
$1_G \times \alpha_{x,y}$
$\beta_{y,z} \times 1_G$
$1_H \times \beta_{x,y}$
a_2
a_2
a_3^{-1}
a_1^{-1}
a_1^{-1}
a_3^{-1}
$a_{1,3}^{-1}$
$a_{1,2}$
$a_{2,3}$

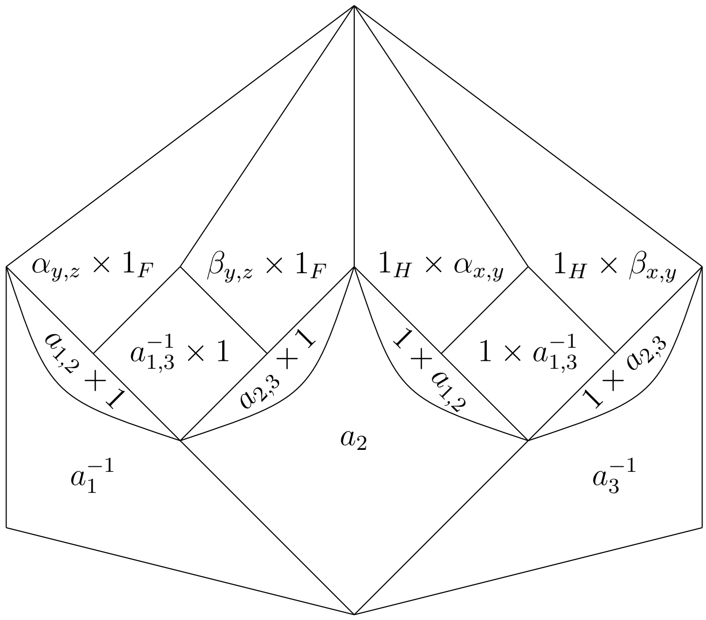

$\alpha_{y,z} \times 1_F$
$1_G \times \alpha_{x,y}$
$\beta_{y,z} \times 1_G$
$1_H \times \beta_{x,y}$
$a_{1,2} \times 1$
a_2
a_3^{-1}
a_1^{-1}
a_2
$1 \times a_{2,3}$
a_1
$a_{1,3}^{-1}$
a_3
a_1^{-1}
a_3^{-1}


$\alpha_{y,z} \times 1_F$
$1_G \times \alpha_{x,y}$
$\beta_{y,z} \times 1_G$
$1_H \times \beta_{x,y}$
$a_{1,2} \times 1$
$1 \times a_{2,3}$
a_2
a_2
a_1
a_1^{-1}
a_3^{-1}
a_3
a_1^{-1}
a_3^{-1}


$\alpha_{y,z} \times 1_F$
$1_G \times \alpha_{x,y}$
$\beta_{y,z} \times 1_G$
$1_H \times \beta_{x,y}$
$a_{1,2} \times 1$
$1 \times a_{2,3}$
a_2
a_2
a_1
a_1^{-1}
a_3^{-1}
a_3
a_1^{-1}
a_3^{-1}


$\alpha_{y,z} \times 1_F$
$\beta_{y,z} \times 1_F$
$1_H \times \alpha_{x,y}$
$1_H \times \beta_{x,y}$
$a_{1,2} \times 1$
$a_{1,3}^{-1} \times 1$
$1 \times a_{1,3}^{-1}$
$1 \times a_{2,3}$
a_2
a_2
a_1^{-1}
a_3^{-1}

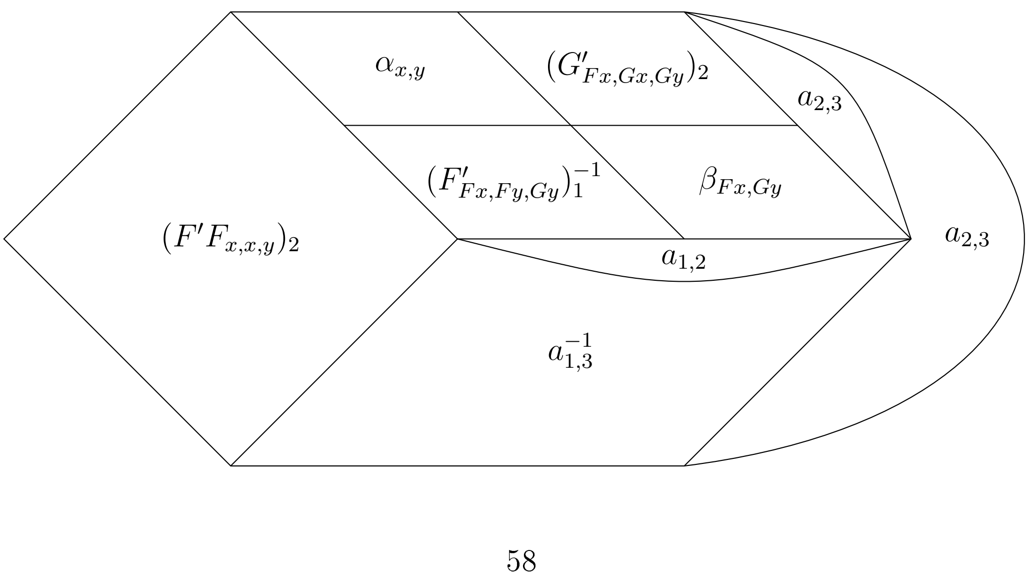

$\alpha_{y,z} \times 1_F$
$\beta_{y,z} \times 1_F$
$1_H \times \alpha_{x,y}$
$1_H \times \beta_{x,y}$
$a_{1,2} \times 1$
$a_{1,3}^{-1} \times 1$
$1 \times a_{1,3}^{-1}$
$1 \times a_{2,3}$
a_2
a_2
a_1^{-1}
a_3^{-1}

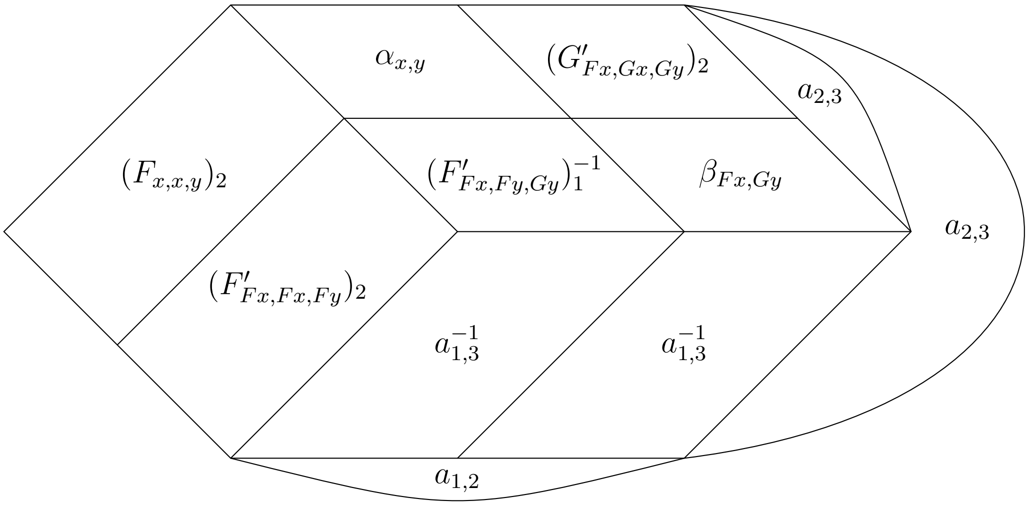


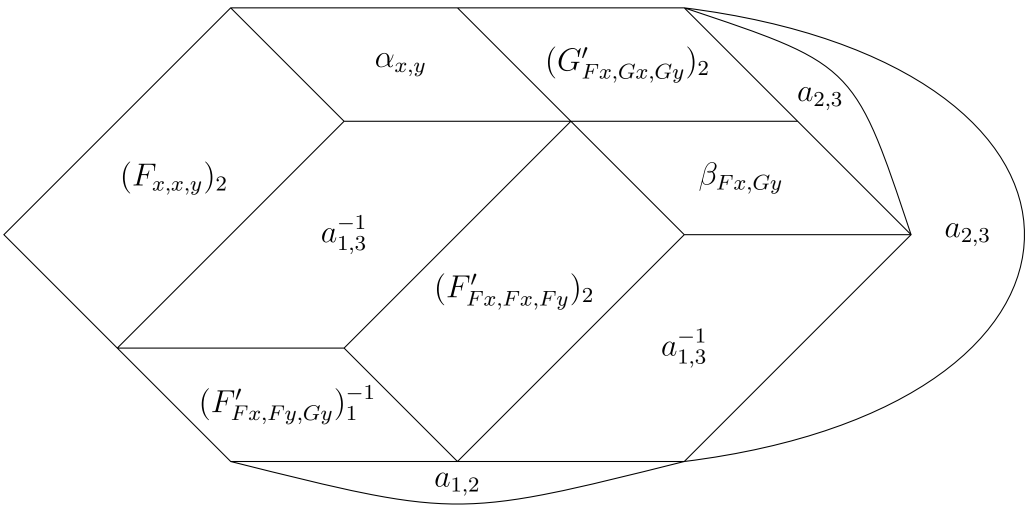
La no α og β vera naturlege n-transformasjonar slik:

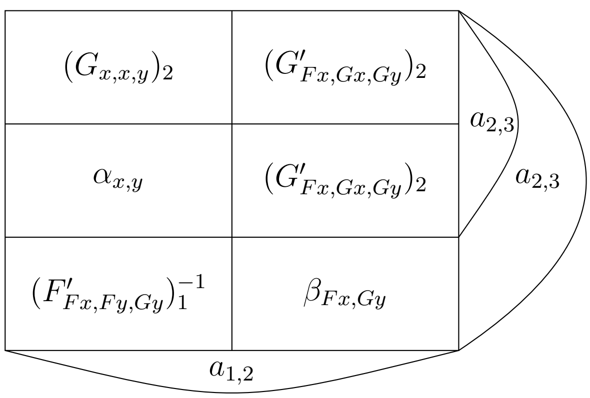
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

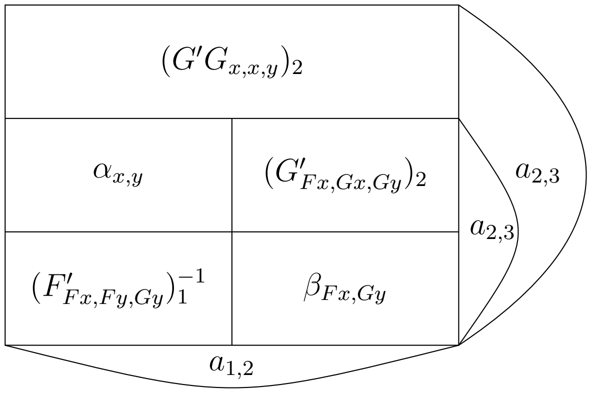
Ein kan visa at den horisontale komposisjonen $\beta \bullet \alpha$ oppfyller det første aksiomet for naturlege transformasjonar (3) ved å gjera følgande utreikning presis.




$\alpha_{x,y}$
$(G'_{Fx,Gx,Gy})_2$
$a_{2,3}$
$(F_{x,x,y})_2$
$(F'_{Fx,Fy,Gy})_1^{-1}$
$\beta_{Fx,Gy}$
$a_{2,3}$
$(F'_{Fx,Fx,Fy})_2$
$a_{1,3}^{-1}$
$a_{1,3}^{-1}$
$a_{1,2}$

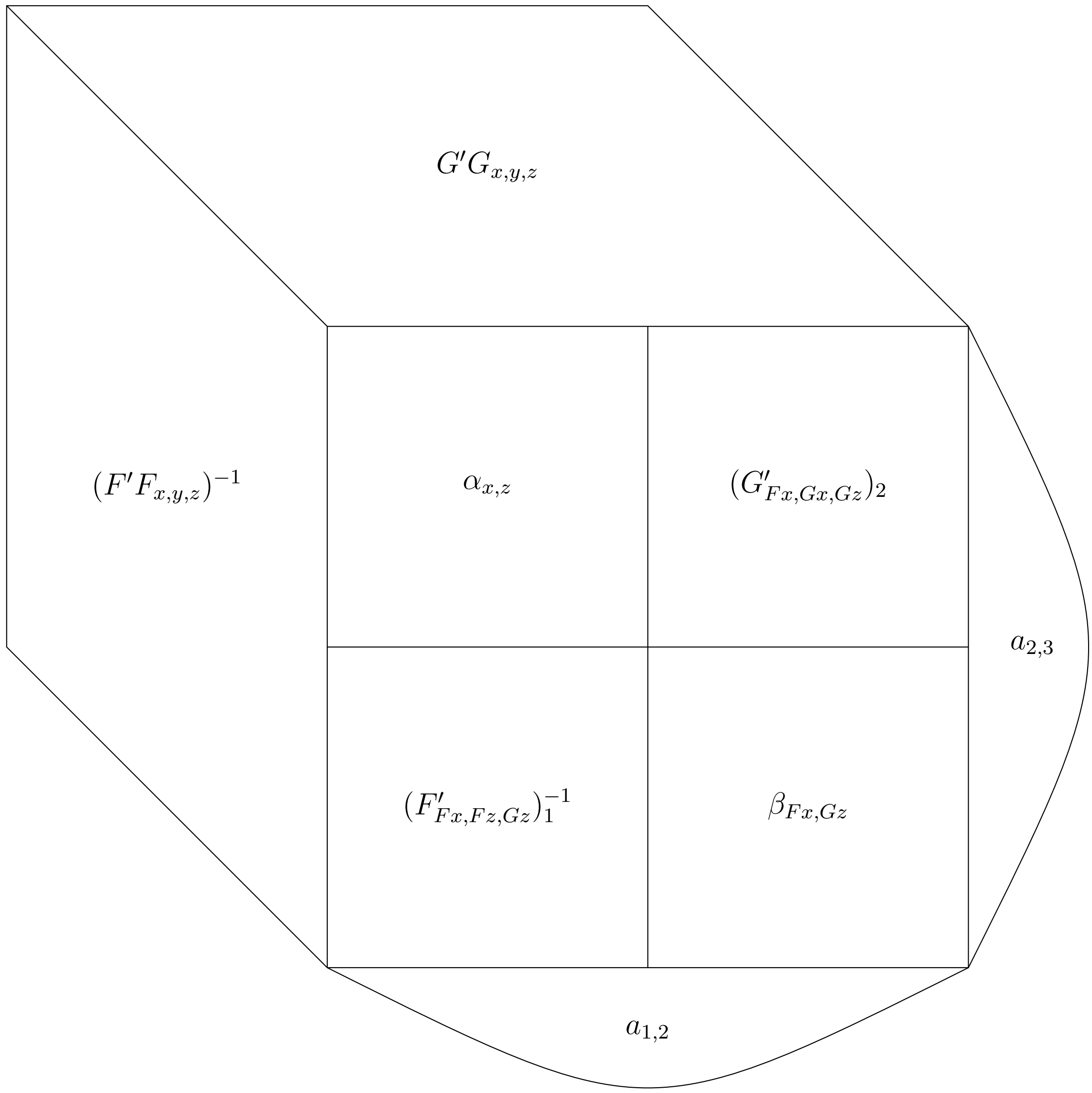

$\alpha_{x,y}$
$(G'_{Fx,Gx,Gy})_2$
$a_{2,3}$
$(F_{x,x,y})_2$
$\beta_{Fx,Gy}$
$a_{2,3}$
$a_{1,3}^{-1}$
$(F'_{Fx,Fx,Fy})_2$
$a_{1,3}^{-1}$
$(F'_{Fx,Fy,Gy})_1^{-1}$
$a_{1,2}$

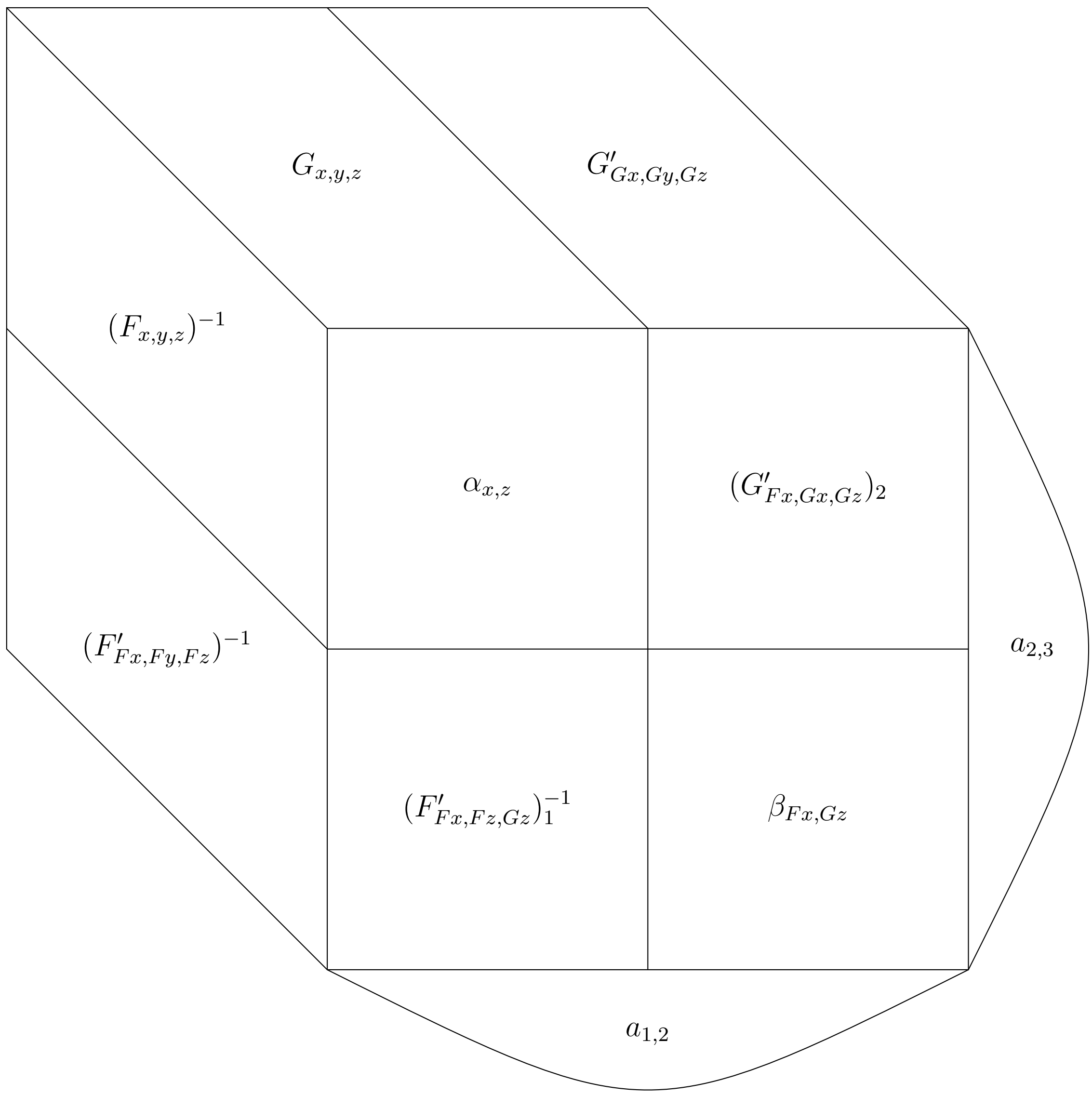

$(G_{x,x,y})_2$
$(G'_{Fx,Gx,Gy})_2$
$a_{2,3}$
$\alpha_{x,y}$
$(G'_{Fx,Gx,Gy})_2$
$a_{2,3}$
$(F'_{Fx,Fy,Gy})_1^{-1}$
$\beta_{Fx,Gy}$
$a_{1,2}$

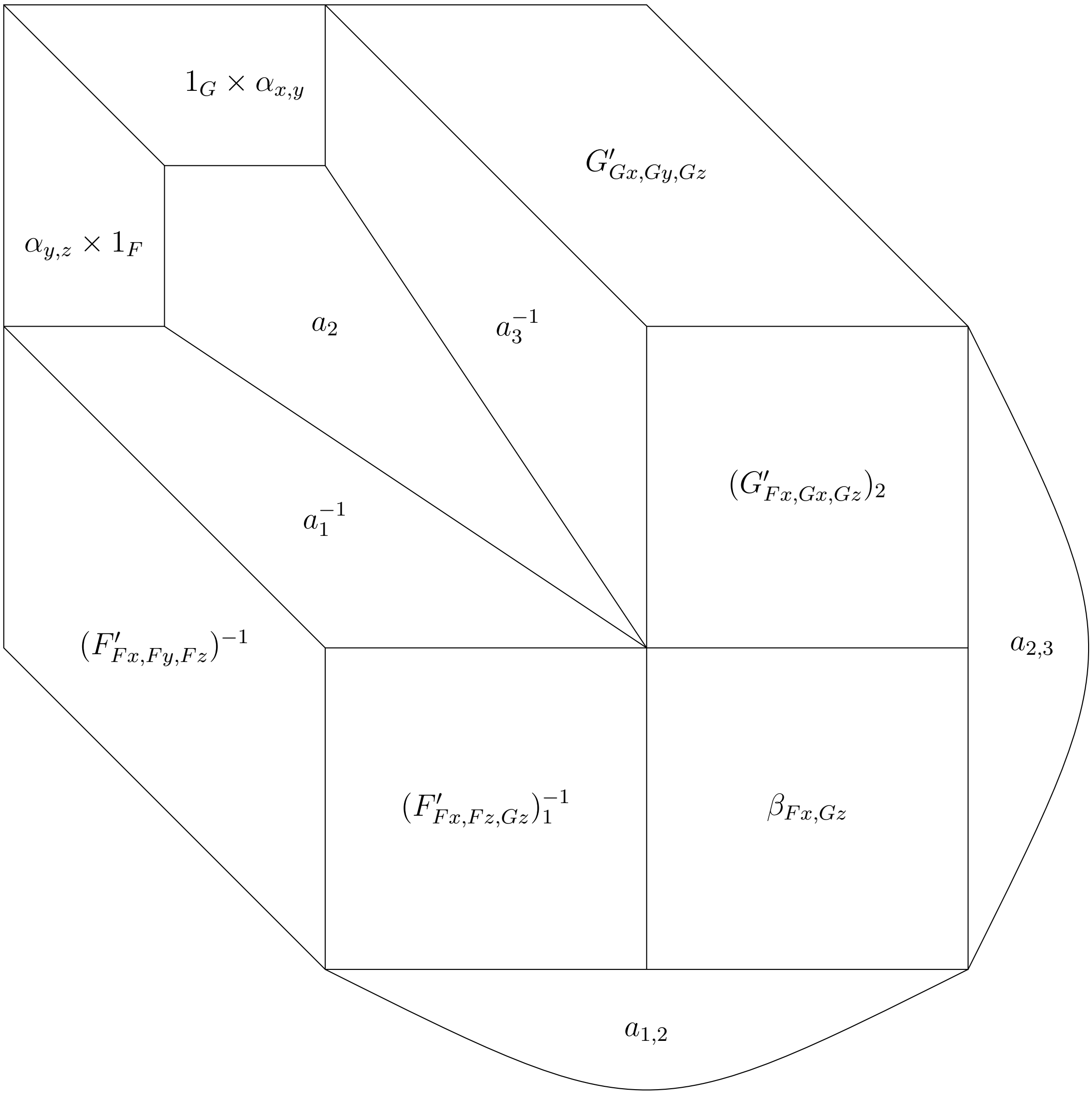


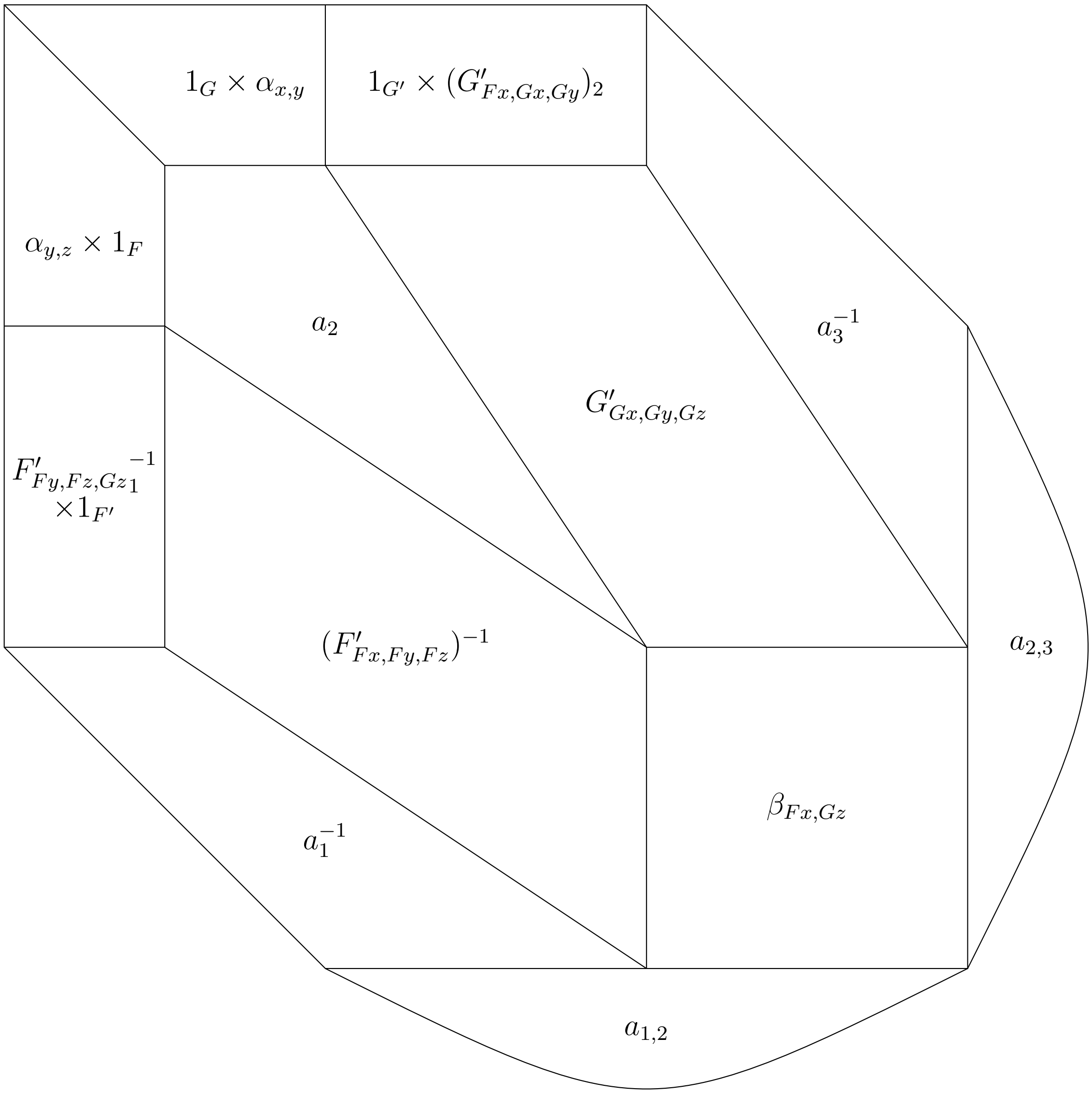
Beviset for at det andre aksiomet held er heilt analogt.

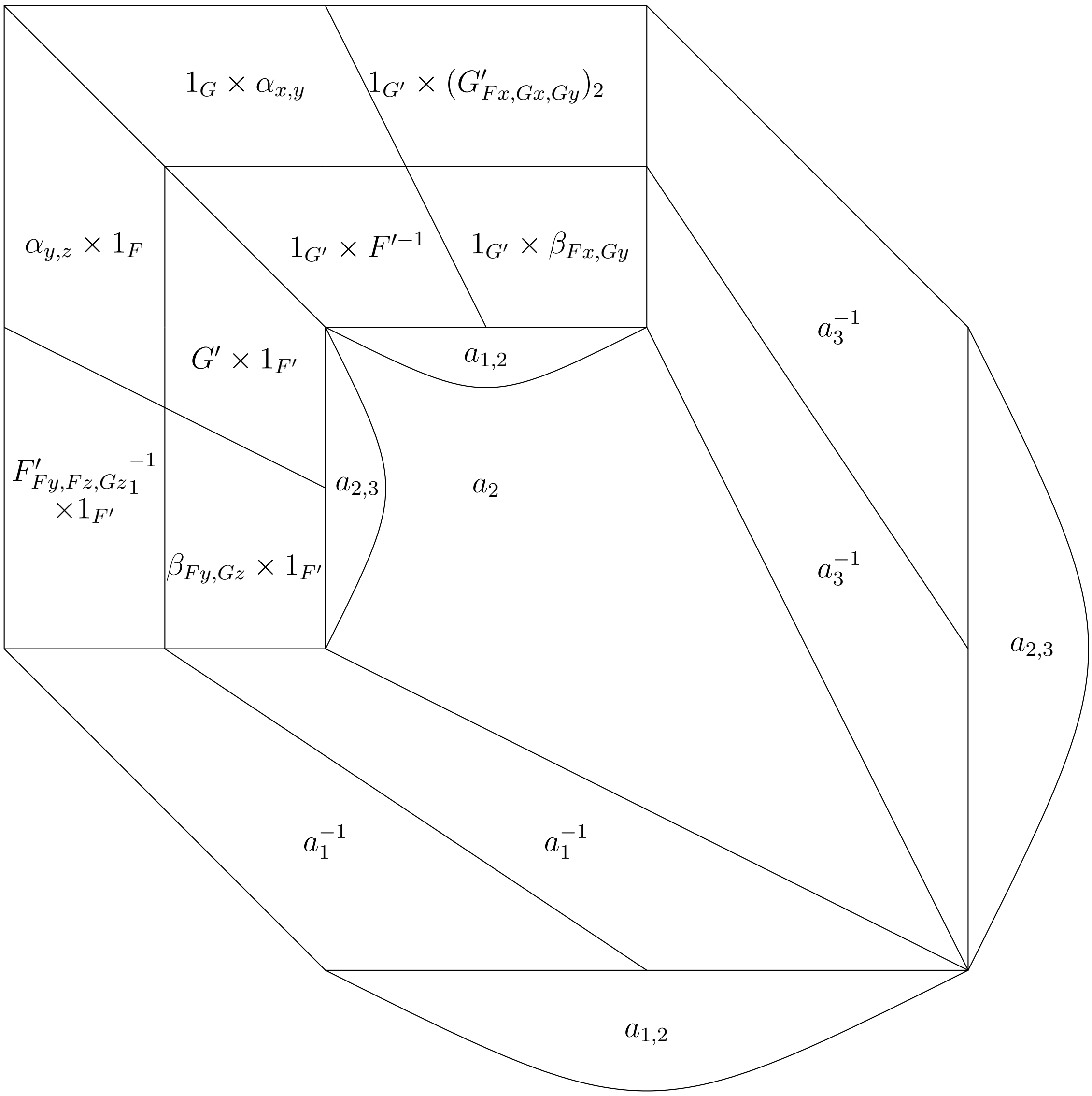
Det tredje aksiomet er oppfyllt ved følgande utreikning, der fjerde steg er Lemma 4.10.


$G'G_{x,y,z}$
$(F'F_{x,y,z})^{-1}$
$\alpha_{x,z}$
$(G'_{Fx,Gx,Gz})_2$
$a_{2,3}$
$(F'_{Fx,Fz,Gz})_1^{-1}$
$\beta_{Fx,Gz}$
$a_{1,2}$

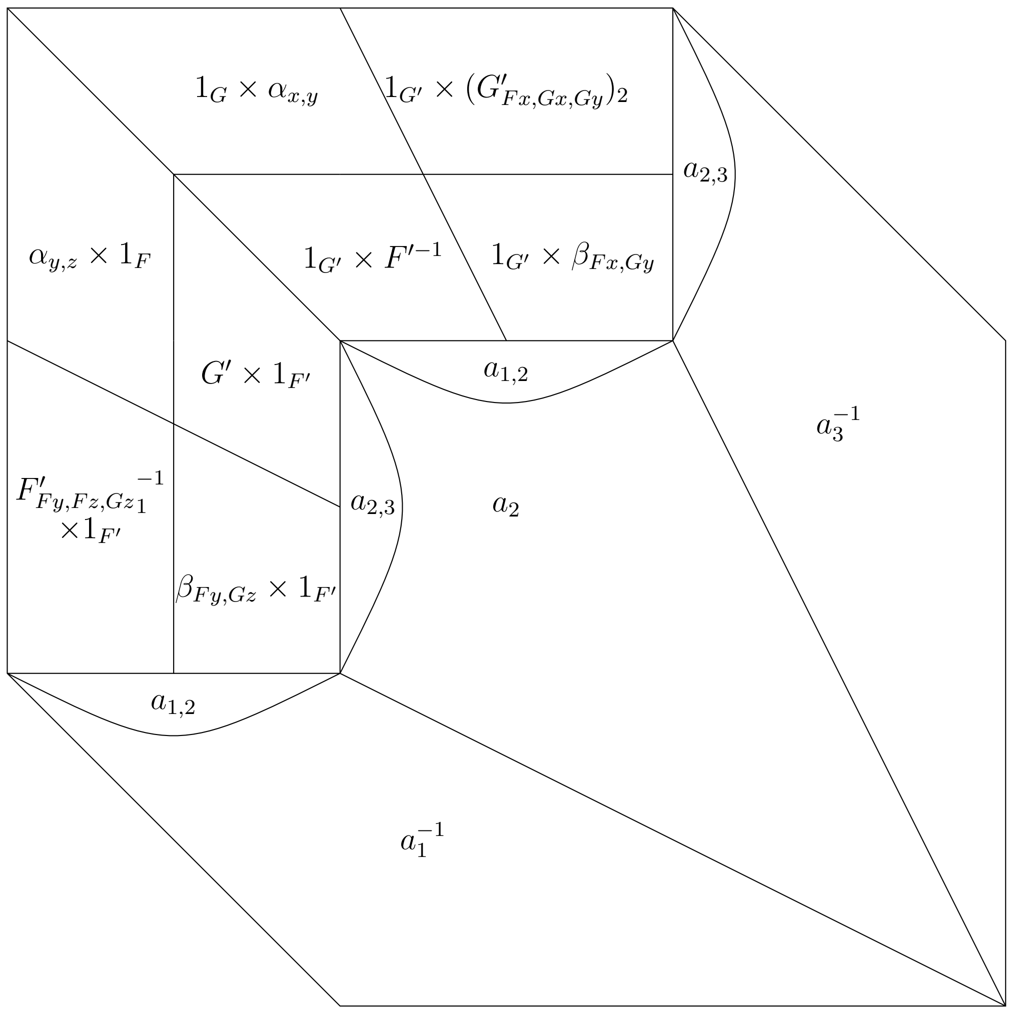

$G_{x,y,z}$
$G'_{Gx,Gy,Gz}$
$(F_{x,y,z})^{-1}$
$\alpha_{x,z}$
$(G'_{Fx,Gx,Gz})_2$
$(F'_{Fx,Fy,Fz})^{-1}$
$a_{2,3}$
$(F'_{Fx,Fz,Gz})_1^{-1}$
$\beta_{Fx,Gz}$
$a_{1,2}$


$1_G \times \alpha_{x,y}$
$G'_{Gx,Gy,Gz}$
$\alpha_{y,z} \times 1_F$
a_2
a_3^{-1}
$(G'_{Fx,Gx,Gz})_2$
a_1^{-1}
$(F'_{Fx,Fy,Fz})^{-1}$
$a_{2,3}$
$(F'_{Fx,Fz,Gz})_1^{-1}$
$\beta_{Fx,Gz}$
$a_{1,2}$


$1_G \times \alpha_{x,y}$
$1_{G'} \times (G'_{Fx,Gx,Gy})_2$
$\alpha_{y,z} \times 1_F$
a_2
a_3^{-1}
$G'_{Gx,Gy,Gz}$
${F'_{Fy,Fz,Gz}}_1^{-1}$
$\times 1_{F'}$
$(F'_{Fx,Fy,Fz})^{-1}$
$a_{2,3}$
$\beta_{Fx,Gz}$
a_1^{-1}
$a_{1,2}$



$1_G \times \alpha_{x,y}$
$1_{G'} \times (G'_{Fx,Gx,Gy})_2$
$\alpha_{y,z} \times 1_F$
$1_{G'} \times F'^{-1}$
$1_{G'} \times \beta_{Fx,Gy}$
a_3^{-1}
$G' \times 1_{F'}$
$a_{1,2}$
${F'_{Fy,Fz,Gz}}_1^{-1}$
$\times 1_{F'}$
$a_{2,3}$
a_2
$\beta_{Fy,Gz} \times 1_{F'}$
a_3^{-1}
$a_{2,3}$
a_1^{-1}
a_1^{-1}
$a_{1,2}$



Komposisjonen av to naturlege n-isomorfiar er ein n-isomorfi ved induksjon fordi 1-morfiane til komposisjonen er ein komposisjon av inverterbare 1-morfiar og $n-1$-transformasjonane til komposisjonen er sett saman av $n-1$-isomorfiar.

□

Lemma 4.12. *Anta at komposisjon av $n-1$-funktorar og begge typar komposisjon av naturlege $n-1$-transformasjonar er assosiative, og at horisontal komposisjon av $n-1$-funktorar er eintydig bestemt (jamfør Lemma 4.8). Då er komposisjon av n-funktorar og begge typar komposisjon av naturlege n-transformasjonar assosiative.*

Bevis. Komposisjon av n-funktorar består av komposisjon funksjonar, komposisjon av $n-1$-funktorar og komposisjon av $n-1$-transformasjonar. Sidan dette er assosiativt kvar for seg, vert komposisjon av n-funktorar og det.

Den horisontale komposisjonen $\gamma \bullet (\beta \bullet \alpha)$ av naturlege n-transformasjonar

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "F''"] \arrow[r, bend right, "G''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

er på 1-morfiar

$$\begin{aligned}
\gamma_{G'Gx} F''(\beta_{Gx} F'(\alpha_x)) &= \gamma_{G'Gx} \left(F''(\beta_{Gx}) F'' F'(\alpha_x) \right) \\
&= \left(\gamma_{G'Gx} F''(\beta_{Gx}) \right) F'' F'(\alpha_x)
\end{aligned}$$

sidan to linne n-funktorar med ein n-transformasjon mellom seg må vera like på objekt.

$n-1$-transformasjonen $(\gamma \bullet (\beta \bullet \alpha))_{x,y}$ er lik $((\gamma \bullet \beta) \bullet \alpha)_{x,y}$ ved utreikninga under. Nokre indeksar er utelatne der det ikkje er plass til dei. Føresetnadane våre og Lemma 4.8 gjev at samansettingane i utreikninga er eintydige.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{B}(x,y) \arrow[dd, "F_{x,y}"'] \arrow[dr, "G_{x,y}"] & & & \\
& \mathcal{C}(Gx,Gy) \arrow[dr, "G'_{Gx,Gy}"] \arrow[dd, "(\alpha_x)^*"'] & & \\
\mathcal{C}(Fx,Fy) \arrow[dd, "F'_{Fx,Fy}"'] \arrow[dr, "(\alpha_y)_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] & & \mathcal{D}(G'Gx,G'Gy) \arrow[dr, "G''_{G'Gx,G'Gy}"] \arrow[dd, "G'_{Fx,Gx}(\alpha_x)^*"'] \arrow[dddd, bend left, "(G'_{Fx,Gx}(\alpha_x)\beta_{Fx})^*"] & \\
& \mathcal{C}(Fx,Gy) \arrow[dr, "G'_{Fx,Gy}"'] \arrow[dd, "F'_{Fx,Gy}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "(G'_{Fx,Gx,Gy})_2"] & & \mathcal{E}(G''G'Gx,G''G'Gy) \arrow[dddd, "(G''_{F'Fx,G'Gx}(\beta\bullet\alpha)_x)^*"'] \arrow[dddddd, bend left, "(G''(\beta\bullet\alpha)_x\gamma_{F'Fx})^*"] \\
\mathcal{D}(F'Fx,F'Fy) \arrow[dd, "F''_{F'Fx,F'Fy}"'] \arrow[dr, "F'_{Fy,Gy}(\alpha_y)_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "(F'_{Fx,Fy,Gy})_1^{-1}"] \arrow[ddrr, bend right, "(\beta_{Gy}F'_{Fy,Gy}(\alpha_y))_*"'] & & \mathcal{D}(G'Fx,G'Gy) \arrow[dd, "(\beta_{Fx})^*"'] \arrow[dd, phantom, shift left=4ex, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & \arrow[dd, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] \\
& \mathcal{D}(F'Fx,F'Gy) \arrow[dr, "(\beta_{Gy})_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\beta_{Fx,Gy}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow a_{1,2}"] & & \\
\mathcal{E}(F''F'Fx,F''F'Fy) \arrow[rr, Rightarrow, "(F''_{F'Fx,F'Fy,G'Gy})_1^{-1}"'] \arrow[ddrr, "(F''_{F'Fy,G'Gy}(\beta\bullet\alpha)_y)_*"] \arrow[dddrrr, bend right, "(\gamma_{G'Gy}F''(\beta\bullet\alpha)_y)_*"'] & {} \arrow[dd, phantom, "\Uparrow a_{1,2}"] & \mathcal{D}(F'Fx,G'Gy) \arrow[dr, "G''_{F'Fx,G'Gy}"] \arrow[dd, "F''_{F'Fx,G'Gy}"] \arrow[uuur, Rightarrow, "(G''_{F'Fx,G'Gx,G'Gy})_2"'] & \\
& & & \mathcal{E}(G''F'Fx,G''G'Gy) \arrow[dd, "(\gamma_{F'Fx})^*"] \\
& {} & \mathcal{E}(F''F'Fx,F''G'Gy) \arrow[dr, "(\gamma_{G'Gy})_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma_{F'Fx,G'Gy}"'] & \\
& & & \mathcal{E}(F''F'Fx,G''G'Gy)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(x,y) \arrow[dr, "G_{x,y}"] \arrow[dd, "F_{x,y}"'] & & & & \\
& \mathcal{C}(Gx,Gy) \arrow[dr, "G'_{Gx,Gy}"] \arrow[dd, "(\alpha_x)^*"'] & & & \\
\mathcal{C}(Fx,Fy) \arrow[ur, phantom, "\overset{\alpha_{x,y}}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "(\alpha_y)_*"] \arrow[dd, "F'_{Fx,Fy}"'] & & \mathcal{D}(G'Gx,G'Gy) \arrow[dr, "G''_{G'Gx,G'Gy}"] \arrow[dd, "G'_{Fx,Gx}(\alpha_x)^*"'] & & \\
& \mathcal{C}(Fx,Gy) \arrow[ur, phantom, "\overset{(G'_{Fx,Gx,Gy})_2}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "G'_{Fx,Gy}"] \arrow[dd, "F'_{Fx,Gy}"'] & & \mathcal{E}(G''G'Gx,G''G'Gy) \arrow[dd, "(G''G'(\alpha_x))^*"] \arrow[dddd, bend left, "(G''(G'\alpha_x G''(\beta_{Fx}))^*"] \arrow[dddddd, bend left=40, "(G''(\beta\bullet\alpha)_x\gamma_{F'Fx})^*"] & \\
\mathcal{D}(F'Fx,F'Fy) \arrow[ur, phantom, "\overset{(F'_{Fx,Fy,Gy})_1^{-1}}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "F'_{Fy,Gy}(\alpha_y)_*"] \arrow[dd, "F''_{F'Fx,F'Fy}"'] & & \mathcal{D}(G'Fx,G'Gy) \arrow[ur, phantom, "\overset{G''_2}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "G''_{G'Fx,G'Gy}"] \arrow[dd, "(\beta_{Fx})^*"'] & & \\
& \mathcal{D}(F'Fx,F'Gy) \arrow[ur, phantom, "\overset{\beta_{Fx,Gy}}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "(\beta_{Gy})_*"] \arrow[dd, "F''_{F'Fx,F'Gy}"] & & \mathcal{E}(G''G'Fx,G''G'Gy) \arrow[ur, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] \arrow[dd, "(G''\beta_{Fx})^*"] & \\
\mathcal{E}(F''F'Fx,F''F'Fy) \arrow[ur, phantom, "\overset{{F''}_1^{-1}}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "(F''F'\alpha_y)_*"] \arrow[ddrr, bend right, "(F''(\beta_{Gy})F''(F'\alpha_y))_*"'] \arrow[dddrrr, bend right=40, "(\gamma_{G'Gy}F''(\beta\bullet\alpha)_y)_*"'] & & \mathcal{D}(F'Fx,G'Gy) \arrow[ur, phantom, "\overset{G_2''}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "G''_{F'Fx,G'Gy}"] \arrow[dd, "F''_{F'Fx,G'Gy}"'] & & \\
& \mathcal{E}(F''F'Fx,F''F'Gy) \arrow[ur, phantom, "\overset{{F''}_1^{-1}}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "(F''\beta_{Gy})_*"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow a_{1,2}"] & & \mathcal{E}(G''F'Fx,G''G'Gy) \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] \arrow[dd, "(\gamma_{F'Fx})^*"] & \\
& & \mathcal{E}(F''F'Fx,F''G'Gy) \arrow[ur, phantom, "\overset{\gamma_{F'Fx,G'Gy}}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "(\gamma_{G'Gy})_*"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow a_{1,2}"] & & \\
& & & \mathcal{E}(F''F'Fx,G''G'Gy) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{B}(x,y) \arrow[dr, "G_{x,y}"] \arrow[dd, "F_{x,y}"'] & & & \\
& \mathcal{C}(Gx,Gy) \arrow[dd, "(\alpha_x)^*"'] \arrow[dr, "G'_{Gx,Gy}"] & & \\
\mathcal{C}(Fx,Fy) \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[dr, "(\alpha_y)_*"] \arrow[dd, "F'_{Fx,Fy}"'] & & \mathcal{D}(G'Gx,G'Gy) \arrow[dr, "G''_{G'Gx,G'Gy}"] & \\
& \mathcal{C}(Fx,Gy) \arrow[rr, Rightarrow, "(G''G'_{Fx,Gx,Gy})_2"] \arrow[dr, "G'_{Fx,Gy}"] \arrow[dd, "F'_{Fx,Gy}"'] & & \mathcal{E}(G''G'Gx,G''G'Gy) \arrow[dd, "(G''G'(\alpha_x))^*"'] \arrow[dddd, bend left, "(G''(G'\alpha_x G''(\beta_{Fx}))^*"] \arrow[dddddd, bend left=50, "(G''(\beta\bullet\alpha)_x\gamma_{F'Fx})^*"] \\
\mathcal{D}(F'Fx,F'Fy) \arrow[dd, "F''_{F'Fx,F'Fy}"'] & & \mathcal{D}(G'Fx,G'Gy) \arrow[dr, "G''_{G'Fx,G'Gy}"] \arrow[dd, "(\beta_{Fx})^*"'] & \\
& \mathcal{D}(F'Fx,F'Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "\beta_{Fx,Gy}"] \arrow[dr, "(\beta_{Gy})_*"] \arrow[dd, "F''_{F'Fx,F'Gy}"] & & \mathcal{E}(G''G'Fx,G''G'Gy) \arrow[dd, "(G''\beta_{Fx})^*"] \arrow[u, phantom, "\xRightarrow{a_{2,3}}"] \\
\mathcal{E}(F''F'Fx,F''F'Fy) \arrow[uuur, Rightarrow, "(F''F'_{Fx,Fy,Gy})_1^{-1}"] \arrow[dr, "(F''F'\alpha_y)_*"] \arrow[ddrr, bend right, "(F''(\beta_{Gy})F''(F'\alpha_y))_*"'] \arrow[dddrrr, bend right=40, "(\gamma_{G'Gy}F''(\beta\bullet\alpha)_y)_*"'] & & \mathcal{D}(F'Fx,G'Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "G''_2"'] \arrow[dr, "G''_{F'Fx,G'Gy}"] \arrow[dd, "F''_{F'Fx,G'Gy}"] & \\
& \mathcal{E}(F''F'Fx,F''F'Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "F''^{-1}_1"] \arrow[dr, "(F''\beta_{Gy})_*"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow a_{1,2}"] & & \mathcal{E}(G''F'Fx,G''G'Gy) \arrow[dd, "(\gamma_{F'Fx})^*"'] \arrow[d, phantom, "\xRightarrow{a_{2,3}}"] \\
& {} & \mathcal{E}(F''F'Fx,F''G'Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma_{F'Fx,G'Gy}"'] \arrow[dr, "(\gamma_{G'Gy})_*"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow a_{1,2}"] & \\
& & {} & \mathcal{E}(F''F'Fx,G''G'Gy)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(x,y) \arrow[dr, "G_{x,y}"] \arrow[dd, "F_{x,y}"'] & & & & \\
& \mathcal{C}(Gx,Gy) \arrow[dd, "(\alpha_x)^*"'] \arrow[dr, "G'_{Gx,Gy}"] & & & \\
\mathcal{C}(Fx,Fy) \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha_{x,y}"] \arrow[dr, "(\alpha_y)_*"] \arrow[dd, "F'_{Fx,Fy}"'] & & \mathcal{D}(G'Gx,G'Gy) \arrow[dr, "G''_{G'Gx,G'Gy}"] & & \\
& \mathcal{C}(Fx,Gy) \arrow[rr, Rightarrow, "(G''G'_{Fx,Gx,Gy})_2"] \arrow[dr, "G'_{Fx,Gy}"] \arrow[dd, "F'_{Fx,Gy}"'] & & \mathcal{E}(G''G'Gx,G''G'Gy) \arrow[dd, "(G''G'(\alpha_x))^*"] \arrow[dddddd, bend left=40, "(G''G'(\alpha_x)(G''(\beta_{Fx})\gamma_{F'Fx}))^*"] & \\
\mathcal{D}(F'Fx,F'Fy) \arrow[dd, "F''_{F'Fx,F'Fy}"'] & & \mathcal{D}(G'Fx,G'Gy) \arrow[dd, "(\beta_{Fx})^*"'] \arrow[dr, "G''_{G'Fx,G'Gy}"] & \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
& \mathcal{D}(F'Fx,F'Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "\beta_{Fx,Gy}"] \arrow[dr, "(\beta_{Gy})_*"] \arrow[dd, "F''_{F'Fx,F'Gy}"] & & \mathcal{E}(G''G'Fx,G''G'Gy) \arrow[dd, "(G''\beta_{Fx})^*"] \arrow[dddd, bend left=50, "(G''(\beta_{Fx})\gamma_{F'Fx})^*"] & \\
\mathcal{E}(F''F'Fx,F''F'Fy) \arrow[uuur, Rightarrow, "(F''F'_{Fx,Fy,Gy})_1^{-1}"] \arrow[dr, "(F''F'\alpha_y)_*"] \arrow[dddrrr, bend right=30, "((\gamma_{G'Gy}F''\beta_{Gy})F''F'\alpha_y)_*"'] & & \mathcal{D}(F'Fx,G'Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "G''_2"'] \arrow[dr, "G''_{F'Fx,G'Gy}"] \arrow[dd, "F''_{F'Fx,G'Gy}"] & & \\
& \mathcal{E}(F''F'Fx,F''F'Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "F''^{-1}_1"] \arrow[dr, "(F''\beta_{Gy})_*"] \arrow[ddrr, bend right=30, "(\gamma_{G'Gy}F''\beta_{Gy})_*"'] & & \mathcal{E}(G''F'Fx,G''G'Gy) \arrow[dd, "(\gamma_{F'Fx})^*"'] & \\
& \arrow[u, phantom, "\Uparrow a_{1,2}"] & \mathcal{E}(F''F'Fx,F''G'Gy) \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma_{F'Fx,G'Gy}"'] \arrow[dr, "(\gamma_{G'Gy})_*"] & \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
& & \arrow[u, phantom, "\Uparrow a_{1,2}"] & \mathcal{E}(F''F'Fx,G''G'Gy) &
\end{tikzcd}
$$

Gitt linne n-transformasjonar

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=80, "F"{name=F}] \arrow[r, bend left=25, "G"'{name=G}] \arrow[r, bend right=25, "H"{name=H}] \arrow[r, bend right=80, "L"'{name=L}] & \mathcal{D}
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[from=G, to=H, Rightarrow, "\beta"] \arrow[from=H, to=L, Rightarrow, "\gamma"]
\end{tikzcd}
$$

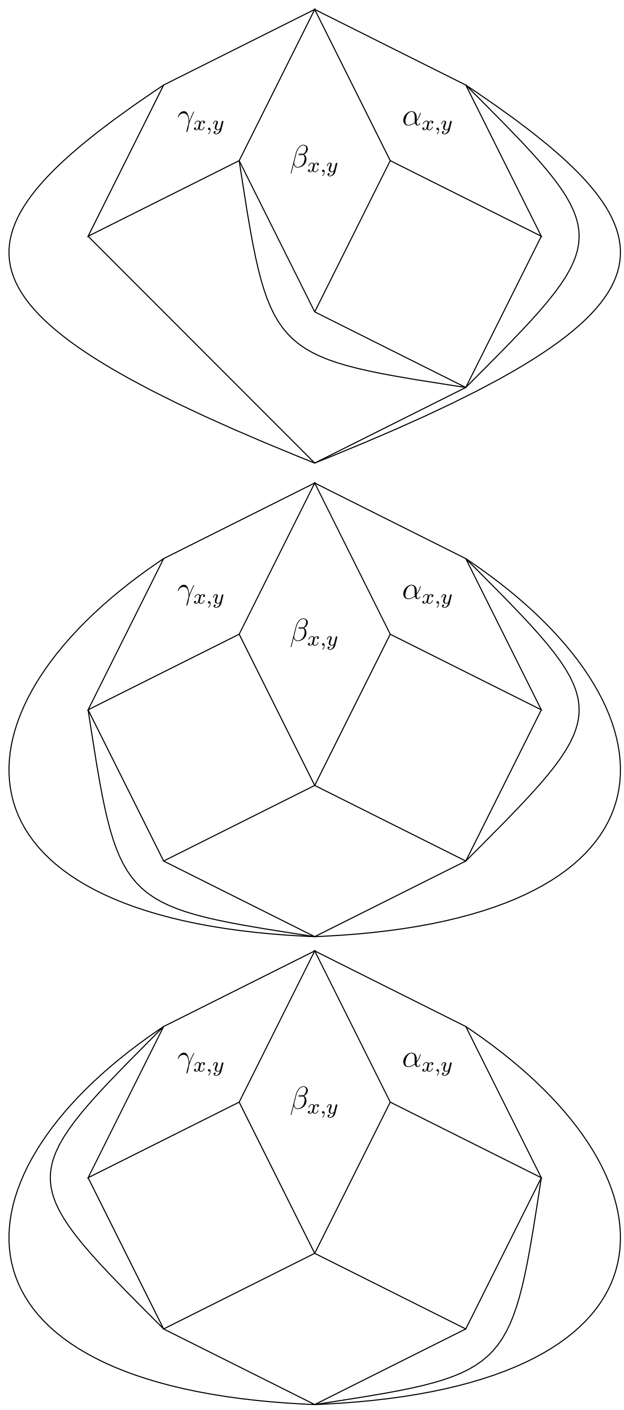
er den horisontale komposisjonen $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ gitt ved at

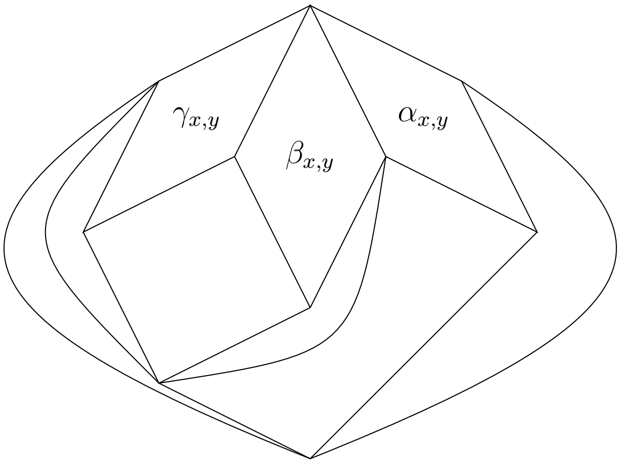
$$((\gamma \circ \beta) \circ \alpha)_x = (\gamma_x \circ \beta_x) \circ \alpha_x,$$

som er likt

$$\gamma_x \circ (\beta_x \circ \alpha_x) = (\gamma \circ (\beta \circ \alpha))_x,$$

og at $((\gamma \circ \beta) \circ \alpha)_{x,y}$ er følgande komposisjon, der me har latt instansieringar av assosiatorar stå blanke.





Det første og siste steget er pentagondiagrammet for assosiatoren, og i det midterste steget har me i tillegg brukt Lemma 4.5 to gongar, som seier at instansieringa av assosiatoren som går mellom pre-/postkomponering med $(fg)h$ og $f(gh)$ er identiteten. Den siste samansettinga er nettopp $(\gamma \circ (\beta \circ \alpha))_{x,y}$. $\square$

Proposisjon 4.13. *Komposisjonen av to linne n-funktorar er ein linn n-funktor. Både vertikal og horisontal komposisjon av to linne n-transformasjonar er ein n-transformasjon. Om begge er n-isomorfiar er komposisjonen ein n-isomorfi. Alle desse tre typane komposisjon er assosiative. Gitt to n-transformasjonar*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E}. \end{tikzcd}$$

vil komposisjonen av desse vera eintydig, i tydinga at

$$(id_{G'} \bullet \alpha) \circ (\beta \bullet id_F) = \beta \bullet \alpha = (\beta \bullet id_G) \circ (id_{F'} \bullet \beta).$$

Bevis. Dette følger induktivt frå lemmaa 4.7, 4.8, 4.11 og 4.12 sidan det er sant for $n = 0$. $\square$

4.2 Strikte identitetar

Lemma 4.14. *Identitetsfunktoren er ein strikt identitet for komposisjon av linne n-funktorar. Identitetstransformasjonen er ein strikt identitetet for vertikal komposisjon av linne n-transformasjonar. Horisontal komposisjon av identitets-n-transformasjonar er ein identitetstransformasjon. Identitets-transformasjonen på ein identitets-n-funktor er strikt identitet for horisontal komposisjon.*

Bevis. Anta induktivt at dette er sant for $n-1$, og merk at det er sant for $n=0$. Komposisjon av to n-funktorar består av komposisjon av to funksjonar, to $n-1$-funktorar og to $n-1$-transformasjonar. Hos ein identitetsfunktor er alle desse identitetar. Identitetsfunksjonen er strikt identitet for komposisjon av funksjonar, og per føresetnad er det same sant for $n-1$-funktorar. Komposisjonen av komposatorane til $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ ser slik ut:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "\odot"] \arrow[d, "F_{y,z}\times F_{x,y}"'] & \mathcal{C}(x,z) \arrow[d, "F_{x,z}"] \arrow[dl, Rightarrow, "F_{x,y,z}"] \\
\mathcal{D}(Fy,Fz)\times\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[r, "\odot'"] \arrow[d, "G_{Fy,Fz}\times G_{Fx,Fy}"'] & \mathcal{D}(Fx,Fz) \arrow[d, "G_{Fx,Fz}"] \arrow[dl, Rightarrow, "G_{Fx,Fy,Fz}"] \\
\mathcal{E}(GFy,GFz)\times\mathcal{E}(GFx,GFy) \arrow[r, "\odot''"'] & \mathcal{E}(GFx,GFz),
\end{tikzcd}$$

som for $G = id$ er

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(x,z) \arrow[dr, "F_{x,z}"] \arrow[dd, Rightarrow, "F_{x,y,z}"] & \\
\mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, "\odot"] \arrow[dr, "F_{y,z}\times F_{x,y}"'] & & \mathcal{D}(Fx,Fz) \\
 & \mathcal{D}(Fy,Fz)\times\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, "\odot'"] \arrow[ur, bend right=60, "\odot'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] &
\end{tikzcd}$$

$$=$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(x,z) \arrow[dr, "F_{x,z}"] \arrow[dd, Rightarrow, "F_{x,y,z}"] & \\
\mathcal{C}(y,z)\times\mathcal{C}(x,y) \arrow[ur, "\odot"] \arrow[dr, "F_{y,z}\times F_{x,y}"'] \arrow[rr, bend right=80, "\odot'"'] & & \mathcal{D}(Fx,Fz), \\
 & \mathcal{D}(Fy,Fz)\times\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[ur, "\odot'"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow id"] & \\
 & &
\end{tikzcd}$$

og ved føresetnadane er dette komposatoren til F. For $F = id$ vert samansettinga ved eit tilsvarande argument komposatoren til G.

Vertikal komposisjon $id_G \circ \alpha$ består av komposisjon av 1-morfiar, der identitets-1-morfien er strikt eining, og komposisjonen

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(p,q) \arrow[dl, "F_{p,q}"'] \arrow[dr, "G_{p,q}"] \arrow[dd, "G_{p,q}"] & \\
\mathcal{D}(Fp,Fq) \arrow[dd, "(\alpha_q)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_{p,q}}{\Longrightarrow}"] \arrow[ddr, bend right=60, "(id_{Gq}\alpha_q)_*"'] & & \mathcal{D}(Gp,Gq) \arrow[dd, "(id_{Gp})^*"] \arrow[ddl, bend left=60, "(id_{Gp}\alpha_p)^*"] \\
 & \mathcal{D}(Gp,Gq) \arrow[dl, "(\alpha_p)^*"] \arrow[dr, "(id_{Gq})_*"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{id_{G_{p,q}}}{\Longrightarrow}"] & \\
\mathcal{D}(Fp,Gq) \arrow[rr, Rightarrow, "a_{1,3}^{-1}"] \arrow[dr, "(id_{Gq})_*"'] \arrow[l, phantom, "\overset{a_{1,2}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{D}(Gp,Gq) \arrow[dl, "(\alpha_p)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
 & \mathcal{D}(Fp,Gq) &
\end{tikzcd}$$

Her er dei tre partielle assosiatorane identitetar, for dei går mellom like funktorar. Ved føresetnadane er denne samansettinga $\alpha_{p,q}$, og med dette er $id_G \circ \alpha = \alpha$. Argumentet for at $\alpha \circ id_F = \alpha$ er analogt med dette.

Den horisontale komposisjonen av identitetstransformasjonane på dei linne n-funktorane $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ består av 1-morfiar

$$id_{GFx}G(id_{Fx}) = id_{GFx}id_{GFx} = id_{GFx}$$

og $n-1$-transformasjonar

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(p,q) \arrow[r, "G_{p,q}"] \arrow[d, "F_{p,q}"'] & \mathcal{D}(Fp,Fq) \arrow[r, "G'_{Gp,Gq}"] \arrow[d, "(id_{Fp})^*"'] & \mathcal{E}(GFp,GFq) \arrow[d, "(id_{GFp})^*"] \arrow[dd, bend left=60, "(id_{GFp})^*"] \\
\mathcal{D}(Fp,Fq) \arrow[r, "(id_{Fq})_*"] \arrow[d, "F'_{Fp,Fq}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "id"] & \mathcal{D}(Fp,Fq) \arrow[r, "G_{Fp,Fq}"] \arrow[d, "F'_{Fp,Fq}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "(G_{Fp,Fp,Fq})_2"] & \mathcal{E}(GFp,GFq) \arrow[d, "(id_{GFp})^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
\mathcal{E}(GFp,GFq) \arrow[r, "(id_{GFq})_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "(G_{Fp,Fq,Fq})_1^{-1}"] \arrow[rr, bend right=20, "(id_{GFq})_*"'] & \mathcal{E}(GFp,GFq) \arrow[r, "(id_{GFq})_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "id"] \arrow[d, phantom, "a_{1,2}\Uparrow"] & \mathcal{E}(GFp,GFq) \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

som ved føresetnadane våre er

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(p,q) \arrow[r, "G_{p,q}"] \arrow[d, "F_{p,q}"'] & \mathcal{D}(Fp,Fq) \arrow[d, "(id_{Fp})^*"] & \\
\mathcal{D}(Fp,Fq) \arrow[r, "(id_{Fq})_*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "id"] & \mathcal{D}(Fp,Fq) \arrow[r, "G_{Fp,Fq}"] \arrow[d, "F'_{Fp,Fq}"'] & \mathcal{E}(GFp,GFq) \arrow[d, "(id_{GFp})^*"] \\
& \mathcal{E}(GFp,GFq) \arrow[r, "(id_{GFq})_*"] \arrow[ur, Rightarrow, "id"] & \mathcal{E}(GFp,GFq)
\end{tikzcd}
$$

som igjen er identitetstransformasjonen på $n-1$-transformasjonen $GF_{p,q}$. Komposisjonen av identitetstransformasjonane på F og G er altså identitetstransformasjonen på GF.

Om enten F eller G hadde vore ein identitets-n-funktor, hadde dette vorte identitetstransformasjonen på den andre n-funktoren. □

Lemma 4.15. *Gitt ein naturleg transformasjon $\alpha : F \to G$ er*

$$\alpha^{-1} \circ \alpha = id_F \quad \textit{og} \quad \alpha \circ \alpha^{-1} = id_G$$

Bevis. Det er klart at $\alpha_x(\alpha^{-1})_x = id_G$ og tilsvarande for den andre samansetninga sidan $(\alpha^{-1})_x$ er definert som $(\alpha_x)^{-1}$.

$(\alpha^{-1} \circ \alpha)_{x,y}$ er samansettinga

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(x,y) \arrow[dl, "F_{x,y}"'] \arrow[dr, "F_{x,y}"] \arrow[dd, "G_{x,y}"] & \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[dd, "(\alpha_y)_*"] \arrow[dr, phantom, "\Longrightarrow \alpha_{x,y}"] \arrow[dddd, bend right=60, "id"'] \arrow[dd, phantom, bend right=40, "\overset{a_{1,2}}{\Longrightarrow}"'] & & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[dd, "(\alpha_y)_*"] \arrow[ddd, bend left=50, "id"] \arrow[dd, phantom, bend left=40, "\overset{a_{1,2}^{-1}}{\Longrightarrow}"] \\
 & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[dl, "(\alpha_x)^*"] \arrow[dr, "(\alpha_x)^*"] \arrow[dd, "id"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\alpha_{x,y}^{-1}}{\Longrightarrow}"] & \\
\mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[dd, "(\alpha_y^{-1})_*"] \arrow[dr, phantom, "\overset{a_{1,3}^{-1}}{\Longrightarrow}"] & \arrow[r, phantom, "\overset{a_{2,3}^{-1}}{\Longrightarrow}"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[dl, "(\alpha_x^{-1})^*"] \arrow[d, "(\alpha_y^{-1})_*"] \\
 & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[d, "(\alpha_y^{-1})_*"] \arrow[r, phantom, "\overset{a_{1,3}^{-1}}{\Longrightarrow}"] & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[dl, "(\alpha_x^{-1})^*"] \arrow[dll, bend left=50, "id"] \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) & \mathcal{D}(Gx,Fy) \arrow[l, "(\alpha_x)^*"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow a_{2,3}"] & \\
 & \; &
\end{tikzcd}
$$

som, sidan diagram av partielle assosiatorar kommuterar, er likt:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(x,y) \arrow[dl, "F_{x,y}"'] \arrow[dr, "F_{x,y}"] \arrow[d, "G_{x,y}"] & \\
\mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[dd, "(\alpha_y)_*"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\alpha_{x,y}}{\Longrightarrow}"] \arrow[ddr, bend right=60, "id"'] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[ddl, "(\alpha_x)^*"'] \arrow[dd, "(\alpha_y^{-1})_*"] \arrow[ddr, "(\alpha_x)^*"] \arrow[r, phantom, "\overset{\alpha_{x,y}^{-1}}{\Longrightarrow}"] & \mathcal{D}(Fx,Fy) \arrow[dd, "(\alpha_y)_*"] \arrow[ddl, bend left=60, "id"] \\
 & & \\
\mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[r, phantom, "\overset{a_{1,3}^{-1}}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, "(\alpha_y^{-1})_*"'] \arrow[d, phantom, "\overset{a_{1,2}}{\Uparrow}"] & \mathcal{D}(Gx,Gy) \arrow[r, phantom, "\overset{a_{1,3}}{\Longrightarrow}"] \arrow[d, "(\alpha_x)^*"] & \mathcal{D}(Fx,Gy) \arrow[dl, "(\alpha_y^{-1})_*"] \arrow[d, phantom, "\overset{a_{1,2}^{-1}}{\Downarrow}"] \\
\; & \mathcal{D}(Fx,Fy) & \;
\end{tikzcd}
$$

Ved induksjon er dette identitetstransformasjonen på F.

$\square$

Proposisjon 4.13, Lemma 4.14 og Lemma 4.15 gjev følgande Teorem.

Teorem 4.16. *Linne n-kategoriar, n-funktorar og n-transformasjonar er veldefinerte og dannar ein strikt 2-kategori.*

Teorem 4.17. *Den strikte 2-kategorien av linne 2-kategoriar sett på som ein trikategori med trivielle 3-morfiar er ein undertrikategori av trikategorien av bikategoriar.*

Denne trikategorien står beskrive i kapittel 11 i [12].

Bevis. Koherensaksiomet for assosiatoren i ein linn 2-kategori impliserar at pentagondiagrammet kommuterar, og på same måte har me assosiativitet av komposatorar. Naturalitetsaksiomet for svake naturlege transformasjonar mellom bifunktorar vert gjerne framstilt som

$$
\begin{tikzcd}
Fp \arrow[r, "\alpha_p"] \arrow[dd, "F(gf)"'] & Gp \arrow[dr, "Gf"] \arrow[dd, "G(gf)"] & \\
& \arrow[r, phantom, "\overset{G_{pqr}}{\Longrightarrow}"] & Gq \arrow[dl, "Gg"] \\
Fr \arrow[r, "\alpha_r"'] \arrow[uur, Rightarrow, "(\alpha_{p,r})_{gf}"] & Gr &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fp \arrow[rr, "\alpha_p"] \arrow[dr, "Ff"] \arrow[dd, "F(gf)"'] & & Gp \arrow[dr, "Gf"] & \\
\arrow[r, phantom, "\overset{F_{pqr}}{\Longrightarrow}"] & Fq \arrow[rr, "\alpha_q"] \arrow[dl, "Fg"] \arrow[ur, Rightarrow, "(\alpha_{p,q})_f"] & & Gq, \arrow[dl, "Gg"] \\
Fr \arrow[rr, "\alpha_r"'] \arrow[urrr, Rightarrow, "(\alpha_{q,r})_g"] & & Gr &
\end{tikzcd}
$$

der assosiatorane er implisitte. Dette er det same som at diagrammet

$$
\begin{tikzcd}
(Gg)(\alpha_q Ff) \arrow[r, "a^{-1}"] & ((Gg)\alpha_q)Ff \arrow[r, "\alpha_g \bullet 1_{Ff}"] & (\alpha_r Fg)Ff \arrow[d, "a"] \\
(Gg)(Gf\alpha_p) \arrow[u, "1_{Gg} \bullet \alpha_f"] & & \alpha_r((Fg)(Ff)) \arrow[d, "1_{\alpha_r} \bullet F_{p,q,r}"] \\
((Gg)(Gf))\alpha_p \arrow[u, "a"] \arrow[r, "G_{p,q,r} \bullet 1_{\alpha_p}"] & G(gf)\alpha_p \arrow[r, "\alpha_{gf}"] & \alpha_r F(gf)
\end{tikzcd}
$$

kommuterar, som er naturalitetsaksiomet for linne 2-transformasjonar.

Dermed er det klart at ein linn 2-kategori er ein bikategori, ein linn 2-funktor er ein bifunktor, og at ein linn 2-transformasjon er ein svak transformasjon, jamfør definisjonane 2.1, 3.1 og 3.2. Vidare samsvarar definisjonane for komposisjon, jamfør Definisjon 3.3 og Definisjon 11.1.1 i [12] (av å setta verhår på svake transformasjonar). □

5 Rigstruktur og modular av linne n-kategoriar

Me lagar ein definisjon for (symmetrisk) rigstruktur på linne n-kategoriar som for $n = 1$ er det same som ein bipermutativ kategori, altså ein symmetrisk rigkategori der alle strukturavbildingane er strikte bortsett frå flettingane og den eine distribuatoren. Dette vert gjort i Definisjon 5.4. For desse rigkategoriane viser me eit koherensteorem, Teorem 5.8, som minnar veldig om Laplaza sitt koherensteorem.

For ein rig-n-kategori $\mathcal{R}$ definerar me i Definisjon 5.9 den linne $n+1$-kategorien $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ ved å la objekta vera dei naturlege tala og morfi-n-kategoriane matriser over $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$. Som før lar faktisk rigstrukturen i $\mathcal{R}$ oss definera komposisjon som matrisemultiplikasjon. Til slutt viser me at $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ igjen har ein rigstruktur.

5.1 Rig-n-kategoriar

For å ha ein rigstruktur treng ein to monoidale strukturar, så me byrjar med å definera permutative linne n-kategoriar.

Definisjon 5.1. Me lar ein strikt monoidal linn n-kategori vera ein linn n-kategori $\mathcal{C}$ med eit objekt $1 \in \mathcal{C}_0$ og ein linn n-funktor

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

slik at følgande diagram kommuterar.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[r, "\otimes\times id"] \arrow[d, "id\times\otimes"] & \mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[d, "\otimes"] \\ \mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "id"] & \mathcal{C}\times 1 \arrow[d, "\otimes"] \\ 1\times\mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

La $\tau : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ vera tvisten som sender (x, y) på (y, x). Me seier $\mathcal{C}$ er permutativ om me har ein naturleg n-isomorfi

$$s : \otimes \to \otimes\tau$$

slik at

$$(s \bullet id_\tau) \circ s = id_\otimes$$

og følgande diagram kommuterar.

$$\begin{tikzcd}
\otimes \circ (\otimes \times 1) \arrow[rr, "s \bullet id_{\otimes \times 1}"] \arrow[d, "id_{\otimes} \bullet s \times 1"'] & & \otimes \tau \circ (\otimes \times 1) \arrow[dd, equal] \\
\otimes \circ (\otimes \times 1) \circ (\tau \times 1) \arrow[d, equal] & & \\
\otimes \circ (1 \times \otimes) \circ (\tau \times 1) \arrow[rr, "id_{\otimes} \bullet 1 \times s \bullet \tau \times 1"] & & \otimes \circ (1 \times \otimes) \circ (1 \times \tau) \circ (\tau \times 1)
\end{tikzcd}$$

Diagrammet for flettinga s er for $n = 1$ heksagondiagrammet for permutative kategoriar, for på 1-komponentar er det nettopp

$$\begin{tikzcd}
a \otimes b \otimes c \arrow[rr, "s_{a \otimes b, c}"] \arrow[dr, "1 \otimes s_{b,c}"'] & & c \otimes a \otimes b \\
& a \otimes c \otimes b. \arrow[ur, "s_{a,c} \otimes 1"'] &
\end{tikzcd}$$

Me gjev no ein definisjon som gjer det klart på kva måte dette diagrammet er det same som heksagondiagrammet, og som lar oss bevisa eit koherensteorem for linne monoidale n-kategoriar.

Hugs Definisjon 1.4 av Y-algebraen over ei mengd.

Definisjon 5.2. La $X = \{x_1, ..., x_p, u\}$ vera ei mengd, og la A'' vera den frie $\{\cdot\}$-algebraen på X, eller med andre ord den frie magmaen på X. La G'' vera grafen med kantar

$$xy \xrightarrow{s_{x,y}} yx \qquad x \xrightarrow{1_x} x$$

$$(xy)z \xrightarrow{a_{x,y,z}} x(yz) \qquad x(yx) \xrightarrow{a^{-1}} (xy)z$$

$$ux \xrightarrow{\lambda_x} x \qquad x \xrightarrow{\lambda_x^{-1}} ux$$

$$xu \xrightarrow{\rho_x} x \qquad x \xrightarrow{\rho_x^{-1}} xu$$

for alle x, y i A''.

La H'' vera grafen som har magmaen over kantane i G'' som kantar og magmaen over hjørner i G'' som hjørner. Undergrafen av H'' som berre består av instansieringar, altså kantar med maksimalt ein faktor ulik 1_x for ein

$x \in A''$, vert kalla T. Eit element $x \in A''$ er regulært om kvar $x_i \neq u$ førekjem maksimalt ein gong i x som produkt av element i X.

La x vera eit regulært element i A'' sett saman av elementa $x_{j_1}, ..., x_{j_a}$ der $j_1 < ... < j_a$, og muligens u frå X. La $\{i_1, ..., i_a\}$ vera $\{j_1, ..., j_a\}$ skrive i den rekkefølga x_j-ane oppstår i x. Då gjev x opphav til ein permutasjon

$$\sigma''_x = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_a \\ i_1 & \dots & i_a \end{pmatrix}$$

som gjev oss ein permutasjon σ'_x definert som komposisjonen

$$\{1, ..., a\} \xrightarrow{l \mapsto i_l} \{i_1, ..., i_a\} \xrightarrow{\sigma''_x} \{i_1, ..., i_a\} \xrightarrow{i_l \mapsto l} \{1, ..., a\}$$

Denne permutasjonen gjev ein n-funktor

$$\mathcal{C}^a \xrightarrow[\cong]{\sigma'_x} \mathcal{C}^a$$

som sender objektet $(c_1, ..., c_a)$ på $(c_{\sigma'_x(1)}, ..., c_{\sigma'_x(a)})$. Merk at $\sigma_x : \mathcal{C}^a \to \mathcal{C}^a$ kan skrivast som ein komposisjon av produkt av τ med identitetar på ein ikkje-unik måte. Om x inneheld u på plassane $l_1, .., l_b$, gjev desse plasseringane ein funktor

$$\mathcal{C}^a \longrightarrow \mathcal{C}^{a+b}$$

sett saman av identitetar og i og/eller j, som er slik at eit objekt $(c_1, ..., c_a)$ blir sendt på $(c_1, ..., c_{l_1-1}, 0, c_{l_1}, ..., c_{l_b-b}, 0, c_{l_b-b+1}, ..., c_a)$, der det står 0 på plassane $l_1, ..., l_b$. La

$$\mathcal{C}^a \xrightarrow{\sigma_x} \mathcal{C}^{a'}$$

vera komposisjonen av desse to n-funktorane om x inneheld u, og la $\sigma_x = \sigma'_x$ ellers. Til slutt gjev parentessettinga i x oss ein funktor

$$\mathcal{C}^{a'} \xrightarrow{\otimes_x} \mathcal{C}$$

sett saman av $\otimes$ og identitetsfunktorar som tensoriserar saman med same parentessetting som i x. Me lar biletet av x vera n-funktoren

$$\mathcal{C}^a \xrightarrow{\sigma_x} \mathcal{C}^{a'} \xrightarrow{\otimes_x} \mathcal{C},$$

og kallar denne for F_x.

Identitetskanten 1_x i G'' kan no sendast på identitetstransformasjonen på F_x, og kanten $s_{x,y}$ skal sendast på den naturlege transformasjonen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^b \arrow[r, "F_x \times F_y"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\otimes"] \arrow[r, bend right, "\otimes\tau"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s"] & \mathcal{C}. \end{tikzcd}$$

Resten av kantane vert sendt på identitetstransformasjonar. Meir bestemt blir $a_{x,y,z}$ sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^b \times \mathcal{C}^c \arrow[r, "F_x \times F_y \times F_z"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\otimes(\otimes\times 1)"] \arrow[r, bend right, "\otimes(1\times\otimes)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

ρ_x vert sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \arrow[r, "F_x"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\otimes i"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

λ_x vert sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \arrow[r, "F_x"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\otimes j"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

og inversar vert sendt på inversar.

Eit produkt fg av kantar f og g i H'' som blir sendt på høvevis $\alpha : F \to F'$ der $F, F' : \mathcal{C}^a \to \mathcal{C}$ og $\beta : G \to G'$ der $G, G' : \mathcal{C}^b \to \mathcal{C}$ vert sendt på den naturlege n-transformasjonen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^b \arrow[r, bend left, "F\times G"] \arrow[r, bend right, "F'\times G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha\times\beta"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C}. \end{tikzcd}$$

Dette lar oss definera biletet av ein sti i T'' som samansetninga av dei naturlege n-transformasjonane bileta til kantane i stien vert sendt på.

Teorem 5.3 er bevist på liknande måte som MacLane sitt koherensteorem for symmetrisk monoidale kategoriar i [19].

Teorem 5.3. *Gitt ein linn permutativ n-kategori $\mathcal{C}$ og eit regulært element $a \in A''$, så er biletet av ein sti $a \to b$ med steg i T'' berre avhengig av a og b.*

Bevis. Bileta av assosiatorar og einingar er identitetar og likeins er fletting der det eine argumentet er 1, så me kan anta at stien $a \to b$ ikkje inneheld assosiatorar eller einingar. Teoremet følger om me kan visa at biletet av kantane i komponenten av T'' der nodane er produkt av alle elementa i X dannar den symmetriske gruppa S_n under komposisjon i $\mathcal{C}$. Sidan diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\otimes \circ (\otimes \times 1) \arrow[rr, "s \bullet id_{\otimes \times 1}"] \arrow[d, "id_\otimes \bullet s \times 1"'] & & \otimes\tau \circ (\otimes \times 1) \arrow[dd, equal] \\
\otimes \circ (\otimes \times 1) \circ (\tau \times 1) \arrow[d, equal] & & \\
\otimes \circ (1 \times \otimes) \circ (\tau \times 1) \arrow[rr, "id_\otimes \bullet 1 \times s \bullet \tau \times 1"] & & \otimes \circ (1 \times \otimes) \circ (1 \times \tau) \circ (\tau \times 1)
\end{tikzcd}$$

kommuterar og er biletet av stiane

$$\begin{tikzcd}
abc \arrow[rr, "s_{ab,c}"] \arrow[dr, "1 \cdot s_{b,c}"'] & & cab \\
& acb, \arrow[ur, "s_{a,c} \cdot 1"'] &
\end{tikzcd}$$

treng me berre sjå på undergrafen av T'' der kantane som er instansieringar av flettingar $s_{x,y}$ oppfyller at x og y er element i X. Biletet av desse korresponderar til transposisjonane som genererar S_n. Me må berre visa at dei oppfyller dei riktige relasjonane. Desse er:

- $\sigma_i^2 = 1$,
- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ for $|i - j| > 1$,
- $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1$.

Den første identiteten følger frå at $(s \bullet id_\tau) \circ s = 1$.
Den andre får me sidan

$$\begin{tikzcd}
\otimes \circ (1 \times \otimes) \circ (\otimes \times 1 \times 1) \arrow[r, "id_{\otimes \circ (1 \times \otimes)} \bullet (s \times 1 \times 1)"] \arrow[d, "s \bullet id_{(1 \times \otimes) \circ (\otimes \times 1 \times 1)}"] & \otimes \circ (1 \times \otimes) \circ (\otimes\tau \times 1 \times 1) \arrow[d, "s \bullet id_{(1 \times \otimes) \circ (\otimes\tau \times 1 \times 1)}"] \\
\otimes\tau \circ (1 \times \otimes) \circ (\otimes \times 1 \times 1) \arrow[r, "id_{\otimes\tau \circ (1 \times \otimes)} \bullet (s \times 1 \times 1)"] & \otimes\tau \circ (1 \times \otimes) \circ (\otimes\tau \times 1 \times 1)
\end{tikzcd}$$

er kommutativt, med andre ord fordi dei to måtane å vertikalt komponera

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^4 \arrow[r, bend left, "\otimes \times 1 \times 1"] \arrow[r, bend right, "\otimes\tau \times 1 \times 1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s \times 1 \times 1"] & \mathcal{C}^3 \arrow[r, bend left, "1 \times \otimes"] \arrow[r, bend right, "1 \times \otimes\tau"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1 \times s"] & \mathcal{C}^2 \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

på som "natulege transformasjonar med verhår" er like. Dette er Lemma 4.8.

Den tredje identiteten kjem av at biletet av det ytre diagrammet under kommuterar.

$$\begin{tikzcd}
& abc \arrow[dl, "1\cdot s_{b,c}"'] \arrow[dr, "s_{a,b}\cdot 1"] & \\
acb \arrow[rr, "s_{ac,b}"] \arrow[d, "s_{a,c}\cdot 1"] & & bac \arrow[d, "1\cdot s_{a,c}"] \\
cab \arrow[rr, "s_{ca,b}"] \arrow[dr, "1\cdot s_{a,b}"'] & & bca \arrow[dl, "s_{b,c}\cdot 1"] \\
& cba &
\end{tikzcd}$$

Trekantane er som før, og begge samansettingane i den midterste firkanten er

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^3 \arrow[r, bend left=50, "\otimes\times 1"] \arrow[r, bend right=50, "\otimes\tau\times 1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s\times 1"] & \mathcal{C}^2 \arrow[r, bend left=50, "\otimes"] \arrow[r, bend right=50, "\otimes\tau"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s"] & \mathcal{C}.
\end{tikzcd}$$

□

Definisjon 5.4. Ein (symmetrisk linn) rig-n-kategori er ein linn n-kategori $\mathcal{C}$ med to permutative strukturar $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ og $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ og naturlege n-isomorfiar

$$\delta^l : \otimes \circ (1 \times \oplus) \to \oplus \circ (\otimes \times \otimes) \circ (1 \times \tau \times 1) \circ (\mathrm{diag} \times 1 \times 1)$$

$$\delta^r : \otimes \circ (\oplus \times 1) \to \oplus \circ (\otimes \times \otimes) \circ (1 \times \tau \times 1) \circ (1 \times 1 \times \mathrm{diag})$$

$$n^r : \otimes \circ i \to pr_0$$

$$n^l \otimes \circ j \to pr_0,$$

der $i^\oplus, j^\oplus : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ er inklusjonen på høvevis første og andre koordinat som på motsett koordinat er 0. Dei tre siste transformasjonane skal vera identitetar, og det same skal $s^\otimes \bullet id_i$. Vidare skal bileta av følgande diagram skal kommutera. Bileta av slike diagram vert definert i Definisjon 5.6.

$$\begin{tikzcd}
x \otimes (y \oplus z) \arrow[r, "\delta^l"] \arrow[d, "s^\otimes"] & (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \arrow[d, "s^\otimes \oplus s^\otimes"] \\
(y \oplus z) \otimes x \arrow[r, "\delta^r"] & (y \otimes x) \oplus (z \otimes x)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(x \oplus y) \otimes z \arrow[r, "\delta^r"] \arrow[d, "s^{\oplus} 1"] & (a \otimes z) \oplus (y \otimes z) \arrow[d, "s^{\oplus}"] \\
(y \oplus x) \otimes z \arrow[r, "\delta^r"] & (y \otimes z) \oplus (a \otimes z)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(a \oplus b) \otimes (c \oplus d) \arrow[rr, "\delta^r"] \arrow[d, "\delta^l"] & & (a \otimes (c \oplus d)) \oplus (b \otimes (c \oplus d)) \arrow[d, "\delta^l \oplus \delta^l"] \\
((a \oplus b) \otimes c) \oplus ((a \oplus b) \otimes d) \arrow[dr, "\delta^r \oplus \delta^r"'] & & (a \otimes c) \oplus (a \otimes d) \oplus (b \otimes c) \oplus (b \otimes d) \arrow[dl, "1 \oplus s^{\oplus} \oplus 1"] \\
& (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \oplus (a \otimes d) \oplus (b \otimes d) &
\end{tikzcd}$$

Me kjem ikkje til å sjå på rig-n-kategoriar som ikkje er symmetriske, og kjem difor til å tillata oss å ikkje kalla desse symmetriske.

Merknad 5.5. Komponentane til dei naturlege n-transformasjonane over er 1-morfiar

$$\delta^l_{x,y,z} : x \otimes (y \oplus z) \to (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

$$\delta^r_{x,y,z} : (x \oplus y) \otimes z \to (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

$$n^l : 0 \otimes x \to 0$$

$$n^r : x \otimes 0 \to 0$$

for objekt x, y, z i $\mathcal{C}$. Det at $s^{\otimes} \bullet id_i$ er identitetstransformasjonen, er ekvivalent med at

$$\begin{tikzcd}
\otimes \circ i \arrow[r, "n^r"] \arrow[d, "s \bullet id_i"] & pr_0 \\
\otimes \tau \circ i \arrow[r, equal] & \otimes \circ j \arrow[u, "n^l"']
\end{tikzcd}$$

kommuterar. Diagramma som skal kommutera i definisjonen over er akkurat dei same som vert brukt i definisjonen av ein såkalla bipermutativ kategori, men med ei noko anna tyding.

Definisjon 5.6. La A, G, H, T, A^* og $Supp$ vera som i Definisjon 1.9. Me definerar først biletet av eit regulært element $x \in A$. La $(x_{j_1}, ..., x_{j_a})$ vera a-tuppelen av dei ulike elementa frå $X - \{u, n\}$ som x består av, skrive i stigande rekkefølgje og utan oppattaking. Finn den største j_{r_1} slik at $x_{j_{r_1}}$ oppstår fleire gongar i x enn i $(x_{j_1}, ..., x_{j_a})$. Gjer dette opp at fram til $(x_{j_1}, ..., x_{j_a})$ er ein

$a+b$-tuppel der kvar x_j oppstår like mange gongar i x og i $(x_{j_1}, ..., x_{j_a})$. Dette gjev ein funktor

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \arrow[r, "1^{r_1}\times\mathrm{diag}\times 1\times ...\times 1"'] \arrow[rrrr, bend left, "\mathrm{diag}_x"] & \mathcal{C}^{a+1} \arrow[r, "1^{r_2}\times\mathrm{diag}\times 1\times ...\times 1"'] & \mathcal{C}^{a+2} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \mathcal{C}^{a+b} \end{tikzcd}$$

der 1^r er identitetsfunktoren på $\mathcal{C}$ kryssa med seg sjølv r gongar.

La σ'_x vera permutasjonen på $\{1, ..., a+b\}$ som sender tuppelen $(x_{j_1}, ..., x_{j_a})$ på $a+b$-tuppelen av element i $X - \{n, u\}$ som blir brukt til å danna x i den rekkefølga dei oppstår. Denne gjev ein n-funktor

$$\mathcal{C}^{a+b} \xrightarrow[\cong]{\sigma_x} \mathcal{C}^{a+b}.$$

Plasseringane av n i x gjev ein n-funktor

$$\mathcal{C}^{a+b} \hookrightarrow \mathcal{C}^{a+b+c}.$$

der biletet er 0 på dei same stadene som n står i x, og på same måte gjev plasseringane av u ein n-funktor

$$\mathcal{C}^{a+b+c} \hookrightarrow \mathcal{C}^{a+b+c+d}.$$

der biletet er 1 på plassane det står u i x.

Til slutt gjev parentessettinga og val av $+$ og $\cdot$ i x ein n-funktor

$$\mathcal{C}^{a+b+c+d} \xrightarrow{\circledast_x} \mathcal{C}.$$

Til saman lar dette oss senda elementet $x \in A$ på funktoren

$$\mathcal{C}^a \xrightarrow{\mathrm{diag}_x} \mathcal{C}^{a+b} \xrightarrow{\sigma_x} \mathcal{C}^{a+b} \hookrightarrow \mathcal{C}^{a+b+c} \hookrightarrow \mathcal{C}^{a+b+c+d} \xrightarrow{\circledast_x} \mathcal{C},$$

og kallar den F_x. Me sender 1_x på identitetstransformasjonen på F_x, og vidare blir $s^{\otimes}_{x,y}$ sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^b \arrow[r, "F_x\times F_y"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\otimes"] \arrow[r, bend right, "\otimes\tau"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s^{\otimes}"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

$s^{\oplus}_{x,y}$ vert sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^b \arrow[r, "F_x\times F_y"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\oplus"] \arrow[r, bend right, "\oplus\tau"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s^{\oplus}"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

$a^{\otimes}_{x,y,z}$ vert sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^b \times \mathcal{C}^c \arrow[r, "F_x \times F_y \times F_z"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\otimes(\otimes\times 1)"] \arrow[r, bend right, "\otimes(1\times\otimes)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

$a^{\oplus}_{x,y,z}$ vert sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^b \times \mathcal{C}^c \arrow[r, "F_x \times F_y \times F_z"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\oplus(\oplus\times 1)"] \arrow[r, bend right, "\oplus(1\times\oplus)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

$\rho^{\otimes}_{x}$ vert sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \arrow[r, "F_x"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\otimes i^{\otimes}"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

$\rho^{\oplus}_{x}$ vert sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \arrow[r, "F_x"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\oplus i^{\oplus}"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

$\lambda^{\otimes}_{x}$ vert sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \arrow[r, "F_x"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\otimes j^{\otimes}"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

$\lambda^{\oplus}_{x}$ vert sendt på

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^a \arrow[r, "F_x"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\oplus j^{\otimes}"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C}, \end{tikzcd}$$

δ^l vert sendt på

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[dr, "\otimes"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow \delta^l"] & \\ \mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^b \times \mathcal{C}^c \arrow[r, "F_x \times F_y \times F_z"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[ur, "1\times\oplus"] \arrow[d, "\mathrm{diag}\times 1\times 1"'] & & \mathcal{C} \\ & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "1\times\tau\times 1"'] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes\times\otimes"'] & \mathcal{C} \times \mathcal{C}, \arrow[u, "\oplus"'] \end{tikzcd}$$

δ^r vert sendt på

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[dd, Rightarrow, "\delta^l"] \arrow[dr, "\otimes"] & \\
\mathcal{C}^a\times\mathcal{C}^b\times\mathcal{C}^c \arrow[r, "F_x\times F_y\times F_z"] & \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[urr, "\oplus\times 1"] \arrow[d, "1\times 1\times\mathrm{diag}"'] & & & \mathcal{C} \\
 & \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[rr, "1\times\tau\times 1"'] & & \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[r, "\otimes\times\otimes"'] & \mathcal{C}\times\mathcal{C}, \arrow[u, "\oplus"']
\end{tikzcd}$$

n^l vert sendt på

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^a \arrow[r, "F_x"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\otimes i^{\oplus}"] \arrow[r, bend right, "pr_0"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C},
\end{tikzcd}$$

n^r vert sendt på

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^a \arrow[r, "F_x"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\otimes j^{\oplus}"] \arrow[r, bend right, "pr_0"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \mathcal{C},
\end{tikzcd}$$

og inversar vert sendt på inversar.

Eit produkt $f\cdot g$ av kantar f og g i H som blir sendt på høvevis $\alpha : F \to F'$ der $F, F' : \mathcal{C}^a \to \mathcal{C}$ og $\beta : G \to G'$ der $G, G' : \mathcal{C}^b \to \mathcal{C}$, vert sendt på den naturlege n-transformasjonen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^a\times\mathcal{C}^b \arrow[r, bend left, "F\times G"] \arrow[r, bend right, "F'\times G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha\times\beta"] & \mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C},
\end{tikzcd}$$

og summen $f+g$ sender me på

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^a\times\mathcal{C}^b \arrow[r, bend left, "F\times G"] \arrow[r, bend right, "F'\times G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha\times\beta"] & \mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[r, "\oplus"] & \mathcal{C}.
\end{tikzcd}$$

Dette lar oss definera biletet av ein sti i T som samansetninga av dei naturlege n-transformasjonane bileta til kantane i stien vert sendt på.

Døme 5.7. Biletet av diagrammet

$$\begin{tikzcd}
x(y\oplus z) \arrow[r, "\delta^l"] \arrow[d, "s^{\otimes}"] & xy\oplus xz \arrow[d, "s^{\otimes}\oplus s^{\otimes}"] \\
(y\oplus z)x \arrow[r, "\delta^r"] & yx\oplus zx
\end{tikzcd}$$

er det mykje mindre oversiktlege diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\otimes \circ (1 \times \otimes) \arrow[r, "s \bullet id_{1 \times \oplus}"] \arrow[d, "\delta^l"] & \otimes\tau \circ (1 \times \oplus) \arrow[d, equal] \\
\oplus \circ (\otimes \times \otimes) \circ (1 \times \tau \times 1) \circ (\mathrm{diag} \times 1 \times 1) \arrow[d, "id_{\oplus} \bullet s \times s \bullet id_{(1 \times \tau \times 1) \circ (\mathrm{diag} \times 1 \times 1)}"] & \otimes \circ (\oplus \times 1) \circ (1 \times \tau) \circ (\tau \times 1) \arrow[d, "\delta^r \bullet id_{(1 \times \tau) \circ (\tau \times 1)}"] \\
\oplus \circ (\otimes\tau \times \otimes\tau) \circ (1 \times \tau \times 1) \circ (\mathrm{diag} \times 1 \times 1) \arrow[r, equal] & \oplus \circ (\otimes \times \otimes) \circ (1 \times \tau \times 1) \circ (1 \times 1 \times \mathrm{diag}) \circ (1 \times \tau) \circ (\tau \times 1)
\end{tikzcd}$$

Me vel derfor å ikkje skriva bileta av dei tre diagramma som skal kommutera i Definisjon 5.4 opp direkte av di desse vert veldig store.

Beviset av Teorem 5.8 følger framgangsmåten i kapittel 3.7. i [13], som er ein grundig gjennomgang av Laplaza sitt bevis i [18] av koherensteoremet for symmetriske rig-kategoriar, der dei og rettar opp i nokre detaljar.

Teorem 5.8. *Gitt ein linn rig-n-kategori $\mathcal{R}$ og eit regulært element $a \in A$, er biletet av ein sti $a \to b$ med steg i T berre avhengig av a og b.*

Bevis. Sidan 0 er strikt, vil biletet av ein sti $a \to b$ enten vera identitetstransformasjonen på pr_0, eller vera likt biletet av ein sti der ingen av hjørnene inneheld 0. Så me kan nøya oss med å sjå på stiar der ingen av hjørna i stien inneheld 0. Merk at me nyttar oss av at biletet av mellom anna $s_{x,n}$ og $\delta^l_{0,x,y}$ er identitetar når me seier dette.

Me er i mål om me gitt to stiar $f, g : a \rightrightarrows b$ med steg i T' viser at f og g er har same bilete. La f og g vera gitt. Då kan me finna stiar

$$\begin{tikzcd}
 & c_1 & c_2 \arrow[l] \arrow[r] & c_3 & \ldots \arrow[l] & c_n \arrow[l] \arrow[dr] & \\
a \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & b \\
 & d_1 & d_2 \arrow[l] \arrow[r] & d_3 & \ldots \arrow[l] & d_m \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

med steg i T' slik at dei to samansettingane $a \to b$ er f og g om me inverterar dei stiane som går feil veg, men slik at ingen av stiane inneheld instansieringar av ein invers distribuator før dei vert invertert.

Neste steg er lauseleg å distribuera alt som kan distribuerast. Me vel ein sti $\delta_x : x \to x'$ for kvart hjørne i diagrammet over, som er slik at kvar kant i stien er ei instansiering av ein distribuator og det ikkje finst nokon instansiering av ein distribuator som har x' som kjelde.

For kvar sti $h : x \to y$ i diagrammet hevdar me at me kan finna ein sti $h' : x' \to y'$ som ikkje inneheld instansieringar av distribuatorar, slik at bileta av dei to samansette stiane $x \to y'$ i kvadratet

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\delta_x"] & y \arrow[d, "\delta_y"] \\
x' \arrow[r, dashed, "h'"] & y'
\end{tikzcd}$$

er like.

Laplaza viser i seksjon 5 i [18] at det eksisterer ein slik sti i T som oppfyller at biletet i ein rig-kategori av desse stiane gjev eit kommutativt diagram. Dette er skrive heilt ut i kapittel 3.6 og 3.7 i [13] over 23 sider. Laplaza gjer dette ved å dela opp kvadratet i polygon av den typen me har kravd at bileta av skal kommutera, så $h' : x' \to y'$ oppfyller at bileta av $\delta_y h$ og $h'\delta_x$ er like i ein rig-n-kategori og.

For kvart hjørne x' vel me så ein sti $\iota_{x'} : x' \to x''$ som oppfyller at alle stega i stien er instansieringar av venstre eller høgre multiplikative eining og at det ikkje finst nokon instansiering av ei multiplikativ eining som har x'' som kjelde. Som før hevdar me at me for kvar sti $h' : x' \to y'$ kan velga ein sti $h'' : x'' \to y''$ som ikkje inneheld instansieringar av distribuatorar, slik at bileta av dei to samansette stiane $x' \to y''$ i kvadratet

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\iota_{x'}"] & y' \arrow[d, "\iota_{y'}"] \\
x'' \arrow[r, dashed, "h''"] & y''
\end{tikzcd}$$

er like.

Eksistensen av h'' for rigkategoriar er Proposisjon 9 i [18], og ein kan også finna beviset i kapittel 3.9 i [13]. Det same beviset fungerar i vår samanheng, for dette òg er bevist ved å dela opp kvadratet i polygon av den typen me har kravd at bileta av skal kommutera.

No har me stiar

$$\begin{tikzcd}
 & c_1'' & c_2'' \arrow[l] \arrow[r] & c_3'' & \dots \arrow[l] & c_n'' \arrow[l] \arrow[dr] & \\
a'' \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & b'' \\
 & d_1'' & d_2'' \arrow[l] \arrow[r] & d_3'' & \dots \arrow[l] & d_m'' \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

og kan snu stiane som går feil veg for så å setta saman til to stiar $a'' \rightrightarrows b''$. Desse to stiane består berre av distribuatorar, flettingar og inversar av desse, og det står att å visa at bileta av dei er like.

Hjørna a'' og b'' er såkalla polynom: Dei er ein summar av monom, der eit monom er eit produkt av element i X. Merk at $(a^+)^{\pm 1}$ flyttar additive parentesar utan å endra monoma, $(s^+)^{\pm 1}$ permuterar monoma utan å endra dei, $a^{\pm 1}$ flyttar multiplikative parentesar innad i monoma utan å endra rekkefølga dei vert lagt saman, og $s^{\pm 1}$ permuterar faktorane innad i monoma utan å endra rekkefølga monoma vert lagt saman i. Saman med faktumet at

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{C} & & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{B} \arrow[r, "F'"] & \mathcal{C} \\
& \circ & & = & & \circ & \\
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{B} \arrow[r, "G'"] & \mathcal{C} & & \mathcal{A} \arrow[r, "G"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

for linne n-transformasjonar, gjer dette at me kan faktorisera kvar av stiane våre i først ein sti som berre brukar additiv struktur, og så ein som berre brukar multiplikativ struktur. Dette ser slik ut:

$$
\begin{tikzcd}
& c \arrow[dr] & \\
a'' \arrow[ur] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr] & & b'' \\
& d \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

der bileta av dei to trekantane gjev kommutative diagram av naturlege n-transformasjonar.

Hugs at hjørna er regulære og at monoma dermed har forskjellig support slik at det ikkje finst stiar mellom dei. Hjørna c og d må dermed vera like, for om ein skal laga ein sti frå polynomet a'' til polynomet b'' ved å først byta om på korleis dei forskjellige monoma i a'' vert lagt saman utan å endra monoma, og etter det berre får endra på korleis elementa i kvart enkelt monom vert multiplisert med dei andre elementa i same monom, må nødvendigvis dei to polynoma ein har halvvegs vera like sidan monoma ikkje kan gjerast om til kvarandre.

No kan me bruka koherensteoremet for permutative n-kategoriar, Teorem 5.3, for $(\mathcal{R}, \oplus, 0)$ på biletet av stiane $a'' \to c$ og for $(\mathcal{R}, \otimes, 1)$ på biletet av stiane $c \to b''$. Dette gjev at biletet av dei to stiane $a' \to c$ er like og likeins for stiane $c \to b''$. Med det er biletet av stiane $a'' \to b''$ like. $\square$

5.2 Modular av ein rig-n-kategori

Definisjon 5.9. La $\mathcal{R}$ vera ein rig-n-kategori. Me definerar $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ som følgande linne $n+1$-kategori.

- Objekta $ob\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ er mengda av naturlege tal $\mathbb{N}$.
- $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}(n,m)$ er den linne n-kategorien $Mat_{m,n}(\mathcal{R})$ av $m \times n$-matriser over $\mathcal{R}$.
- Urmorfiane er matrisene som på kvar plass er $\bigoplus_t^m 1^{\mathcal{R}}$ for ein $m \geq 0$, med konvensjonen av den tomme summen er $0^{\mathcal{R}}$.
- Komposisjonen er

$$\begin{aligned} \odot : \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(q,r) \times \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(p,q) &\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(p,r) \\ (A,B) &\longmapsto (\textstyle\bigoplus_{t=1}^q A_{it} \otimes B_{tj}), \end{aligned}$$

  som er ein linn n-funktor fordi $\otimes$ og $\oplus$ er det.

- Eininga $\ulcorner I_p \urcorner : 1 \to \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(p,p)$ sender objektet i 1 på identitets-$p \times p$-matrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

  og er over det $p \times p$-matrisa

$$\begin{bmatrix} \ulcorner I_1^{\mathcal{R}} \urcorner & \ulcorner I_0^{\mathcal{R}} \urcorner & \dots & \ulcorner I_0^{\mathcal{R}} \urcorner \\ \ulcorner I_0^{\mathcal{R}} \urcorner & \ulcorner I_1^{\mathcal{R}} \urcorner & \dots & \ulcorner I_0^{\mathcal{R}} \urcorner \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ulcorner I_0^{\mathcal{R}} \urcorner & \ulcorner I_0^{\mathcal{R}} \urcorner & \dots & \ulcorner I_1^{\mathcal{R}} \urcorner \end{bmatrix}$$

  der 0 og 1 er høvevis null og eining i rigstrukturen på $\mathcal{R}$ og $\ulcorner I^{\mathcal{R}} \urcorner$ er eininga i $\mathcal{R}$.

- For objekt p, q, r, s i $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ skal me ha ein assosiator

$$\begin{tikzcd} Mat_{s,r}\mathcal{R} \times Mat_{r,q}\mathcal{R} \times Mat_{q,p}\mathcal{R} \arrow[r, "\odot\times 1"] \arrow[d, "1\times\odot"] & Mat_{s,q}\mathcal{R} \times Mat_{q,p}\mathcal{R} \arrow[d, "\odot"] \arrow[dl, Rightarrow, "a"] \\ Mat_{s,r}\mathcal{R} \times Mat_{r,p}\mathcal{R} \arrow[r, "\odot"] & Mat_{s,p}\mathcal{R}. \end{tikzcd}$$

Ved Korollar 5.13 kan me oppgi a som ei matrise av naturlege n-transformasjonar. På plass i, j skal a vera biletet av

$$\mathrm{ass}_{n,m,r,s_{i,j}}(\{b_l\}, \{c_{l,t}\}, \{d_t\}),$$

stien (2) definert i beviset av Proposisjon 2.3, i tydinga frå Definisjon 5.6.

Lemma 5.10. *Ein linn n-funktor $F : (\mathcal{F}_{\mathcal{R}})^{\times m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(c, d)$ er ei $d \times c$-matrise av n-funktorar $\mathcal{R}^{\times(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})} \to \mathcal{R}$.*

Bevis. Hugs at

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{R}})^{\times m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = Mat_{b_1,a_1}\mathcal{R} \times \cdots \times Mat_{b_m,a_m}\mathcal{R}.$$

Me antar at eit val er gjort for $Mat_{p,q}X \xrightarrow{\cong} X^{\times pq}$ som bytar frå doble indeksar til ein indeks. Ved å anvenda dette på produktet av matriser får me $\mathcal{R}^{\times(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}$. Ein n-funktor herifrå til $\mathcal{R}^{\times cd}$ er lik eit produkt av cd funktorar $\mathcal{R}^{\times(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})} \to \mathcal{R}$, så ein funktor til $Mat_{F\mathbf{b},F\mathbf{a}}\mathcal{R}$ er nettopp ei $F\mathbf{b} \times F\mathbf{a}$-matrise av n-funktorar $\mathcal{R}^{\times(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})} \to \mathcal{R}$. □

Merknad 5.11. Gitt ein linn $n+1$-funktor $F : (\mathcal{F}_{\mathcal{R}})^{\times m} \to \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$, seier Lemma 5.10 at den linne n-funktoren

$$F_{\mathbf{a},\mathbf{b}} : Mat_{b_1,a_1}\mathcal{R} \times \cdots \times Mat_{b_m,a_m}\mathcal{R} \to Mat_{F\mathbf{b},F\mathbf{a}}\mathcal{R}$$

er ei $F\mathbf{b} \times F\mathbf{a}$-matrise av n-funktorar $\mathcal{R}^{\times(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})} \to \mathcal{R}$.

Døme 5.12. I lys av Lemma 5.10 er komposisjonen i $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$, gjeve i Definisjon 5.9, $r \times p$-matrisa som på plass ij er funktoren

$$\mathcal{R}^{\times(pq+qr)} \xrightarrow{\text{proj}} \mathcal{R}^{\times 2q} \xrightarrow{\otimes\times\cdots\times\otimes} \mathcal{R}^{q} \xrightarrow{\oplus(\oplus\times 1)\ldots(\oplus\times 1\times\cdots\times 1)} \mathcal{R}$$

der proj er projeksjonen som lar faktorane som kjem frå rad i i $r \times q$-matrisa og kolonne j i $q \times p$-matrisa stå i fred.

Frå Lemma 5.10 følger følgande korollar.

Korollar 5.13. *Gitt linne n-funktorar $F, G : (\mathcal{F}_{\mathcal{R}})^{\times m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(c, d)$, består ein naturleg n-transformasjon $\alpha : F \to G$ av ei $d \times c$-matrise av n-transformasjonar mellom n-funktorar $\mathcal{R}^{\times(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})} \to \mathcal{R}$.*

Proposisjon 5.14. *Partielle assosiatorar i $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ er matriser av samansettingar av strukturisomorfiar frå $\mathcal{R}$.*

Bevis. På plass ij er assosiatoren ein naturleg n-transformasjon

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}^{\times(sr+rq+qp)} \arrow[r, "\mathrm{proj}"] & \mathcal{R}^{2q+2r} \arrow[r, bend left, "F(F\times 1)"] \arrow[r, bend right, "F(1\times F)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a_{ij}"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

sett saman av strukturisomorfiar frå $\mathcal{R}$, der F er komposisjonen av n-funktorar $\mathcal{R}^{\times 2q} \to \mathcal{R}$ frå døme 5.12. Ein partiell assosiator på ein eller fleire inverterbare 1-morfiar

$$p \xrightarrow{f_3} q \xrightarrow{f_2} r \xrightarrow{f_1} s$$

vil på plass ij vera

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\cong"] & Y_1^{\times(sr)} \times Y_2^{\times(rq)} \times Y_3^{\times(qp)} \arrow[r, "\xi_1\times\xi_2\times\xi_3"] & \mathcal{R}^{\times(sr+rq+qp)} \arrow[r, "\mathrm{proj}"] & \mathcal{R}^{2r+2q} \arrow[r, bend left, "F(F\times 1)"] \arrow[r, bend right, "F(1\times F)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a_{ij}"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

der Y_l og ξ_l enten er $\mathcal{R}$ og id eller 1 og f_l. Den linne n-kategorien X er $Y_1^{\times(sr)} \times Y_2^{\times(rq)} \times Y_3^{\times(qp)}$ med alle trivielle n-kategoriar 1 fjerna frå produktet. Denne n-transformasjonen er lik

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\cong"] & Y_1^{\times(sr)} \times Y_2^{\times(rq)} \times Y_3^{\times(qp)} \arrow[d, "\mathrm{proj}"] & & \\ & Y_1^{\times r} \times Y_2^{\times(rq)} \times Y_3^{\times q} \arrow[r, "(\xi_{1i1}\times\cdots\times\xi_{1ir})\times\xi_2\times(\xi_{31j}\times\cdots\times\xi_{3qj})"] & \mathcal{R}^{2r+2q} \arrow[r, bend left, "F(F\times 1)"] \arrow[r, bend right, "F(1\times F)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a_{ij}"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

som igjen er lik

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{proj}"] & X' \arrow[d, "\cong"] & & \\ & Y_1^{\times r} \times Y_2^{\times(rq)} \times Y_3^{\times q} \arrow[r, "(\xi_{1i1}\times\cdots\times\xi_{1ir})\times\xi_2\times(\xi_{31j}\times\cdots\times\xi_{3qj})"] & \mathcal{R}^{2r+2q} \arrow[r, bend left, "F(F\times 1)"] \arrow[r, bend right, "F(1\times F)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a_{ij}"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

der X' er $Y_1^{\times r} \times Y_2^{\times(rq)} \times Y_3^{\times q}$ med alle trivielle n-kategoriar 1 fjerna frå produktet.

Urmorfiane i $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ er matriser av objekt i $\mathcal{R}$ som er $0^{\mathcal{R}}$ eller $\bigoplus_t^m 1^{\mathcal{R}}$ for ein m, så n-funktoren $X' \to \mathcal{R}^{2r+2q}$ er på kvar plass biletet av eit hjørne i G, i tydinga frå Definisjon 5.6. Dermed er den linne n-transformasjonen mellom funktorane $X' \to \mathcal{R}$ biletet av ein sti med steg i T, for a_{ij} er definert som biletet av ein slik sti.

□

Proposisjon 5.15. *Partielle assosiatorar i $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ på inverterbare 1-morfiar er identitetstransformasjonar.*

Bevis. Ved Proposisjon 5.14 er partielle assosiatorar matriser av samansettingar av strukturavbildingar i $\mathcal{R}$, så dette vil følga frå koherensteoremet for linne rig-n-kategoriar, Teorem 5.8, om dei to funktorane $X' \to \mathcal{R}$ over er like når 1-morfiane er inverterbare. Ein kan visa dette ved å finna ein sti med steg i T som går mellom hjørner som vert sendt på desse linne n-funktorane, og som berre består av kantar som vert sendt på identitetstransformasjonar. Me gjer dette eksplisitt for a_1 og a_2, og dette er nok til å sjå korleis ein gjer alle tilfella. Inverterbare 1-morfiar i $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ er permutasjonsmatriser over objekt i $\mathcal{R}$, i tydinga at det står éin $1^{\mathcal{R}}$ i kvar rad og kvar kolonne, medan resten av matrisa er fyllt av $0^{\mathcal{R}}$.

La $\{A_{lt}\}_{l,t=1}^{s,r}$, $\{B_{lt}\}_{l,t=1}^{r,q}$ og $\{C_{lt}\}_{l,t=1}^{q,p}$ vera undermengder av X frå Definisjon 5.6, og la g_m vera gitt ved at $g_{mlt} = u$ om $f_{mlt} = 1$ og at $g_{mlt} = n$ om $f_{mlt} = 0$. Me kan sjå vekk frå assosiativitet, for dei monoidale strukturane i linne rig-n-kategoriar er strikt assosiative. Følgande stiar i G inneheld berre steg som vert avbilda på identitetstransformasjonar, og stiane går mellom hjørner som vert avbilda på dei ønska n-funktorane. Merk at $r = q$ i den andre stien sidan f_2 er inverterbar.

$$\begin{array}{c}
\sum_{t=1}^{q} \left(\sum_{l=1}^{r} g_{1il} B_{l,t}\right) C_{t,j} \\
\downarrow \\
\sum_{t=1}^{q} \left(n + \cdots + n + uB_{l',t} + n + \cdots + n\right) C_{t,j} \\
\downarrow \\
\sum_{t=1}^{q} uB_{l',t} C_{t,j} \\
\downarrow \\
\sum_{t=1}^{q} B_{l',t} C_{t,j} \\
\downarrow \\
u \left(\sum_{t=1}^{q} B_{l',t} C_{t,j}\right) \\
\downarrow \\
n + \cdots + n + u \left(\sum_{t=1}^{q} B_{l',t} C_{t,j}\right) + n + \cdots + n \\
\downarrow \\
\sum_{l=1}^{r} g_{1il} \left(\sum_{t=1}^{q} B_{l,t} C_{t,j}\right)
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
\sum_{t=1}^{q}\left(\sum_{l=1}^{r} A_{il}g_{2l,t}\right) C_{t,j} \arrow[d] \\
\sum_{t=1}^{q}\left(n+\cdots+n+A_{il'(t)}u+n+\cdots+n\right) C_{t,j} \arrow[d] \\
\sum_{t=1}^{q} A_{il'(t)}uC_{t,j} \arrow[d, equal] \\
\sum_{l=1}^{r} A_{il}uC_{t'(l),j} \arrow[d] \\
\sum_{l=1}^{r} A_{il}\left(n+\cdots+n+uC_{t'(l),j}+n+\cdots+n\right) \arrow[d] \\
\sum_{l=1}^{r} A_{il}\left(\sum_{t=1}^{q} g_{2l,t}C_{t,j}\right)
\end{tikzcd}$$

□

Teorem 5.16. *Dataa i Definisjon 5.9 gjer $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ til ein linn $n+1$-kategori.*

Bevis. Eininga i $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ oppfyller at diagrammet

$$\begin{tikzcd}
Mat_{q,q}\mathcal{R}\times Mat_{q,p}\mathcal{R} \arrow[dr, "\odot"'] & Mat_{q,p}\mathcal{R} \arrow[l, "\ulcorner I_q\urcorner\times id"'] \arrow[r, "id\times\ulcorner I_p\urcorner"] \arrow[d, "id"] & Mat_{q,p}\mathcal{R}\times Mat_{p,p}\mathcal{R} \arrow[dl, "\odot"] \\
& Mat_{q,p}\mathcal{R} &
\end{tikzcd}$$

kommuterar sidan 1 er ei strikt eining for $\otimes$, 0 er ei strikt eining for $\oplus$ og 0 er ein strikt null for $\otimes$.

Det manglar berre å visa at diagram av identitetar, assosiatorar og partielle assosiatorar kommuterar. Assosiatorane er matriser av samansettingar av strukturisomorfiar i $\mathcal{R}$, og ved Proposisjon 5.14 er dei partielle assosiatorane og dette. Dermed vil alle diagram kommutera ved koherensteoremet for linne rig-n-kategoriar, Teorem 5.8. □

Døme 5.17. Ein naturleg isomorfi $\alpha : F \to G$ der $F, G : (\mathcal{F}_\mathcal{R})^{\times m} \to \mathcal{F}_\mathcal{R}$, har permutasjonsmatriser av størrelse $F\mathbf{a} = G\mathbf{a}$ sett saman av $1^\mathcal{R}$ og $0^\mathcal{R}$ som 1-komponentar $\alpha_\mathbf{a}$. Den naturlege n-transformasjonen $\alpha_{\mathbf{a},\mathbf{b}} : \alpha_{\mathbf{a}*}F_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \to \alpha_{\mathbf{b}^*}G_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ er ei $G\mathbf{b}\times F\mathbf{a}$-matrise som på plass ij er ein naturleg n-transformasjon

$$\alpha_{\mathbf{a},\mathbf{b}_{ij}} : F_{\mathbf{a},\mathbf{b}_{i\sigma_a(j)}} \to G_{\mathbf{a},\mathbf{b}_{\sigma_b(i)j}}$$

der σ_a og σ_b er permutasjonane gjeve ved høvevis $\alpha_\mathbf{a}$ og $\alpha_\mathbf{b}$.

5.3 Rigstruktur på $\mathcal{F}_\mathcal{R}$

Me ynskjer å gje $n+1$-kategorien $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ ein rigstruktur, og deler dette opp i fleire definisjonar og lemma.

Definisjon 5.18. Me definerar den permutative $n+1$-kategorien $(\mathcal{F}_\mathcal{R}, \boxplus, 0)$ på følgande måte. $n+1$-funktoren $\boxplus : \mathcal{F}_\mathcal{R} \times \mathcal{F}_\mathcal{R} \to \mathcal{F}_\mathcal{R}$ er gitt på objekt ved addisjon av naturlege tal:

$$p \boxplus q = p + q.$$

n-funktoren

$$\boxplus : \mathcal{F}_\mathcal{R}(p, p') \times \mathcal{F}_\mathcal{R}(q, q') \to \mathcal{F}_\mathcal{R}(p+q, p'+q')$$

sender matriser A og B av morfiar av ein gitt grad i $\mathcal{R}$ på blokksummen

$$\begin{bmatrix} A & 0^\mathcal{R} \\ 0^\mathcal{R} & B \end{bmatrix}$$

der $0^\mathcal{R}$ er ei matrise av passeleg størrelse kun beståande av nullelementet $0^\mathcal{R}$ i rigstrukturen til $\mathcal{R}$. Sidan dette nullelementet er strikt, blir dei to komposisjonane i diagrammet

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_\mathcal{R}(q,r) \times \mathcal{F}_\mathcal{R}(q',r')) \times (\mathcal{F}_\mathcal{R}(p,q) \times \mathcal{F}_\mathcal{R}(p',q')) \arrow[r, "\odot'"] \arrow[d, "\boxplus\times\boxplus"] & \mathcal{F}_\mathcal{R}(p,r) \times \mathcal{F}_\mathcal{R}(p',r) \arrow[d, "\boxplus"] \\
\mathcal{F}_\mathcal{R}(q+q', r+r') \times \mathcal{F}_\mathcal{R}(p+p', q+q') \arrow[r, "\odot"] & \mathcal{F}_\mathcal{R}(q+q', r+r')
\end{tikzcd}$$

like, så me velger $\boxplus$ sine komposatorar til å vera identitetar. Merk at $I_p \boxplus I_q = I_{p+q}$ slik at $\boxplus$ vert ein linn $n+1$-funktor.

Det er klart at $\boxplus$ er assosiativ sidan addisjon av naturlege tal er assosiativt og dei to måtane å ta blokksummen $A \boxplus B \boxplus C$ begge gjev matrisa

$$\begin{bmatrix} A & 0^\mathcal{R} & 0^\mathcal{R} \\ 0^\mathcal{R} & B & 0^\mathcal{R} \\ 0^\mathcal{R} & 0^\mathcal{R} & C \end{bmatrix}.$$

Nullelementet i $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ er det naturlege talet 0, som fungerar av di 0 er identitet for addisjon og identitets-0×0-matrisa er den tomme matrisa som er identitet for blokksum.

Flettinga $s^\boxplus : \boxplus \to \boxplus\tau$ er den strikte $n+1$-transformasjonen med 1-komponentar

$$s_{p,q} = \begin{bmatrix} 0^\mathcal{R} & I_q \\ I_p & 0^\mathcal{R} \end{bmatrix}.$$

Dei to funktorane $(s_{p',q'})_*\boxplus$ og $(s_{p,q})^*\boxplus$ er like, så me lar n-transformasjonen $s_{(p,q),(p',q')}$ vera identiteten.

Me vil syna at $s^{\boxplus} \circ (s \bullet id_\tau) = id_{\boxplus}$. På 1-komponentar er dette same situasjon som i Døme 1.3 der me gav additiv struktur til $\mathcal{F}_k$. Over dette set me saman to identitetstransformasjonar med ein tredje transformasjon som ved Proposisjon 5.15 og er ein identitetstransformasjon. Argumentet for "heksagondiagrammet" er heilt analogt: Det er berre på 1-morfi-nivå morfiane me set saman ikkje er identitetar, og her er situasjonen nøyaktig den same som for $\mathcal{F}_k$ i Døme 1.3.

Definisjon 5.19. Me lar $(\mathcal{F}_\mathcal{R}, \boxtimes, 1)$ vera den permutative linne n+1-kategorien definert på følgande måte. $n+1$-funktoren $\boxtimes : \mathcal{F}_\mathcal{R} \times \mathcal{F}_\mathcal{R} \to \mathcal{F}_\mathcal{R}$ er gitt på objekt ved multiplikasjon av naturlege tal:

$$p \boxtimes q = pq.$$

På morfi-n-kategoriar er $\boxtimes$ den linne n-funktoren

$$\boxtimes : \mathcal{F}_\mathcal{R}(p,p') \times \mathcal{F}_\mathcal{R}(q,q') \to \mathcal{F}_\mathcal{R}(pq, p'q')$$

som sender matriser A og B av i-morfiar i $\mathcal{R}$ på

$$\begin{bmatrix}
A_{11}\otimes B_{11} & \dots & A_{11}\otimes B_{1q'} & & A_{1p'}\otimes B_{11} & \dots & A_{11}\otimes B_{1q'} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{11}\otimes B_{q1} & \dots & A_{11}\otimes B_{qq'} & & A_{1p'}\otimes B_{q1} & \dots & A_{11}\otimes B_{qq'} \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
A_{p1}\otimes B_{11} & \dots & A_{p1}\otimes B_{1q'} & & A_{pp'}\otimes B_{11} & \dots & A_{p1}\otimes B_{1q'} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{p1}\otimes B_{q1} & \dots & A_{p1}\otimes B_{qq'} & & A_{pp'}\otimes B_{q1} & \dots & A_{p1}\otimes B_{qq'}
\end{bmatrix}.$$

Dei to komposisjonane i diagrammet

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}_\mathcal{R}(q,r) \times \mathcal{F}_\mathcal{R}(q',r')) \times (\mathcal{F}_\mathcal{R}(p,q) \times \mathcal{F}_\mathcal{R}(p',q')) \arrow[r, "\odot'"] \arrow[d, "\boxtimes\times\boxtimes"] & \mathcal{F}_\mathcal{R}(p,r) \times \mathcal{F}_\mathcal{R}(p',r) \arrow[d, "\boxtimes"] \\
\mathcal{F}_\mathcal{R}(qq',rr') \times \mathcal{F}_\mathcal{R}(pp',qq') \arrow[r, "\odot"] & \mathcal{F}_\mathcal{R}(qq',rr')
\end{tikzcd}$$

er ikkje nødvendigvis like, så her treng me ein ikkje-triviell komposator. For å lettare kunna snakka om kva matrise av funktorar desse to komposisjonane er, skriv me kva dei gjer på i-morfiar. (Men dette kunne fint vore gjort i grafen

G.) Framstilt slik vert den nederste n-funktoren i diagrammet produktet av blokkmatriser

$$(A \boxtimes B) \odot (C \boxtimes D) = \begin{bmatrix} A_{11} \otimes B & \dots & A_{1q} \otimes B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} \otimes B & \dots & A_{rq} \otimes B \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} C_{11} \otimes D & \dots & C_{1p} \otimes D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} \otimes D & \dots & C_{qp} \otimes D \end{bmatrix}$$

Hugs konvensjonen om at eit element a tensorisert med ei matrise B av element av same type, er matrisa som på plass ij er $a \otimes B_{ij}$. Dette produktet av blokkmatriser er blokkmatrisa

$$\begin{bmatrix} \bigoplus_{t=1}^{q} A_{1t} \otimes B \odot C_{t1} \otimes D & \dots & \bigoplus_{t=1}^{q} A_{1t} \otimes B \odot C_{tp} \otimes D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigoplus_{t=1}^{q} A_{rt} \otimes B \odot C_{t1} \otimes D & \dots & \bigoplus_{t=1}^{q} A_{rt} \otimes B \odot C_{tp} \otimes D \end{bmatrix}$$

der $\oplus$ av matriser skal lesast som elementvis $\oplus$. Blokk ij er

$$\begin{bmatrix} \bigoplus_{t=1}^{q}(\bigoplus_{s=1}^{q'} A_{it} \otimes B_{1s} \otimes C_{tj} \otimes D_{s1}) & \dots & \bigoplus_{t=1}^{q}(\bigoplus_{s=1}^{q'} A_{it} \otimes B_{1s} \otimes C_{tj} \otimes D_{sp'}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigoplus_{t=1}^{q}(\bigoplus_{s=1}^{q'} A_{it} \otimes B_{r's} \otimes C_{tj} \otimes D_{s1}) & \dots & \bigoplus_{t=1}^{q}(\bigoplus_{s=1}^{q'} A_{it} \otimes B_{r's} \otimes C_{tj} \otimes D_{sp'}) \end{bmatrix}$$

Frå denne blokka går det ein naturleg n-transformasjon gjeve ved ei matrise som på kvar plass er $\bigoplus \bigoplus 1 \otimes s^{\otimes} \otimes 1$ med passande indeksar. Denne går til blokka

$$\begin{bmatrix} \bigoplus_{t=1}^{q}(\bigoplus_{s=1}^{q'} A_{it} \otimes C_{tj} \otimes B_{1s} \otimes D_{s1}) & \dots & \bigoplus_{t=1}^{q}(\bigoplus_{s=1}^{q'} A_{it} \otimes C_{tj} \otimes B_{1s} \otimes D_{sp'}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigoplus_{t=1}^{q}(\bigoplus_{s=1}^{q'} A_{it} \otimes C_{tj} \otimes B_{r's} \otimes D_{s1}) & \dots & \bigoplus_{t=1}^{q}(\bigoplus_{s=1}^{q'} A_{it} \otimes C_{tj} \otimes B_{r's} \otimes D_{sp'}) \end{bmatrix}$$

Herifrå går det ein naturleg n-transformasjon sett saman av δ^l til blokka

$$\begin{bmatrix} \bigoplus_{t=1}^{q}(A_{it} \otimes C_{tj} \otimes \bigoplus_{s=1}^{q'} B_{1s} \otimes D_{s1}) & \dots & \bigoplus_{t=1}^{q}(A_{it} \otimes C_{tj} \otimes \bigoplus_{s=1}^{q'} B_{1s} \otimes D_{sp'}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigoplus_{t=1}^{q}(A_{it} \otimes C_{tj} \otimes \bigoplus_{s=1}^{q'} B_{r's} \otimes D_{s1}) & \dots & \bigoplus_{t=1}^{n}(A_{it} \otimes C_{tj} \otimes \bigoplus_{s=1}^{q'} B_{r's} \otimes D_{sp'}) \end{bmatrix}$$

Blokkmatrisa med desse blokkene er

$$\begin{bmatrix} \bigoplus_{t=1}^{q} A_{1t} \otimes C_{t1} \otimes B \odot D & \dots & \bigoplus_{t=1}^{q} A_{1t} \otimes C_{tp} \otimes B \odot D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigoplus_{t=1}^{q} A_{rt} \otimes C_{t1} \otimes B \odot D & \dots & \bigoplus_{t=1}^{q} A_{rt} \otimes C_{tp} \otimes B \odot D \end{bmatrix}.$$

Frå denne kan me bruka ein naturleg isomorfi sett saman av δ^r, altså identitetstransformasjonen, til

$$\begin{bmatrix} (\bigoplus_{t=1}^q A_{1t} \otimes C_{t1}) \otimes B \odot D & \dots & (\bigoplus_{t=1}^q A_{1t} \otimes C_{tp}) \otimes B \odot D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\bigoplus_{t=1}^q A_{rt} \otimes C_{t1}) \otimes B \odot D & \dots & (\bigoplus_{t=1}^q A_{rt} \otimes C_{tp}) \otimes B \odot D \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} (A \odot C)_{11} \otimes (B \odot D) & \dots & (A \odot C)_{1p} \otimes (B \odot D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A \odot C)_{r1} \otimes (B \odot D) & \dots & (A \odot C_{rp}) \otimes (B \odot D) \end{bmatrix} \\ &= (A \odot C) \boxtimes (B \odot D) \end{aligned}$$

som er den andre samansetningen av funktorar i diagrammet. Me lar komposatoren til $\boxtimes$ vera denne matrisa av samansettingar av struktur-isomorfiar frå $\mathcal{R}$. At dette gjer $\boxtimes$ til ein funktor er ein del av Lemma 5.21.

Me lar objektet 1 som gjev eininga vera det naturlege talet 1. At dette fungerar som eining er også ein del av Lemma 5.21.

Me definerar flettinga $s^{\boxtimes} : \boxtimes \to \boxtimes\tau$ på følgande måte. 1-komponenten $s^{\boxtimes}_{a,b} : ab \to ba$ er matrisa

$$\begin{bmatrix} \oplus_{i=1}^a \mathbf{e}_1 & \dots & \oplus_{i=1}^a \mathbf{e}_b \end{bmatrix},$$

der $\mathbf{e}_i$ er $b \times 1$-matrisa som er $1^{\mathcal{R}}$ på plass i og elles $0^{\mathcal{R}}$. Akkurat som i Døme 1.3 får denne diagrammet

$$\begin{tikzcd} ab \arrow[r, "s^{\boxtimes}_{a,b}"] \arrow[d, "f \boxtimes g"'] & ba \arrow[d, "g \boxtimes f"] \\ a'b' \arrow[r, "s^{\boxtimes}_{a',b'}"] & b'a' \end{tikzcd}$$

til å kommutera når f og g er 1-morfiar. Vidare lar me den naturlege isomorfien

$$\begin{tikzcd} Mat_{a',a}\mathcal{R} \times Mat_{b',b}\mathcal{R} \arrow[r, "\boxtimes\tau"] \arrow[d, "\boxtimes"'] & Mat_{b'a',ba}\mathcal{R} \arrow[d, "{s^{\boxtimes}_{a,b}}^*"] \\ Mat_{a'b',ab}\mathcal{R} \arrow[r, "{s^{\boxtimes}_{a',b'}}_*"'] \arrow[ur, Rightarrow, "s^{\boxtimes}_{(a,b),(a',b')}"'] & Mat_{b'a',ab}\mathcal{R} \end{tikzcd}$$

vera $b'a' \times ab$-matrisa av naturlege isomorfiar som er $s^{\otimes}$ på kvar plass. At dette blir ein naturleg isomorfi og at den gjer $(\mathcal{F}_{\mathcal{R}}, \boxtimes, 1)$ til ein permutativ n-kategori, er del av Lemma 5.21.

Følgande lemma om $\boxtimes$-komposatorar nyttar seg av at $\boxtimes$, akkurat som assosiatoren i $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$, går mellom matriser av funktorar frå produkt av $\mathcal{R}$ til $\mathcal{R}$, og er vist på same måte som Proposisjon 5.14.

Lemma 5.20. *Partielle $\boxtimes$-komposatorar er matriser av samansettingar av strukturisomorfiar frå $\mathcal{R}$.*

Bevis. På plass ij er komposatoren til $\boxtimes$ ein naturleg n-transformasjon

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}^{\times(rq+r'q')+(qp+q'p')} \arrow[r, "\mathrm{proj}"] & \mathcal{R}^{\times 2(q+q')} \arrow[r, bend left, "(\boxtimes\odot')_{ij}"] \arrow[r, bend right, "(\odot(\boxtimes\times\boxtimes))_{ij}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

sett saman av strukturisomorfiar frå $\mathcal{R}$. Ein partiell komposator på ein eller to inverterbare 1-morfiar

$$(p,p') \xrightarrow{(f_2,f_2')} (q,q') \xrightarrow{(f_1,f_1')} (r,r')$$

i $\mathcal{F}_{\mathcal{R}} \times \mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ vil på plass ij vera

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\cong"] & Y_1^{\times(rq+r'q')} \times Y_2^{\times(qp+q'p')} \arrow[r, "\xi_1\times\xi_1'\times\xi_2\times\xi_2'"] & \mathcal{R}^{\times(rq+r'q')+(qp+q'p')} \arrow[r, "\mathrm{proj}"] & \mathcal{R}^{2(q+q')} \arrow[r, bend left, "(\boxtimes\odot')_{ij}"] \arrow[r, bend right, "(\odot(\boxtimes\times\boxtimes))_{ij}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

der Y_l, ξ_l og ξ_l' enten er $\mathcal{R}$, id og id eller 1, f_l og f_l'. Den linne n-kategorien X er $Y_1^{\times(rq+r'q')} \times Y_2^{\times(qp+q'p')}$ med trivielle n-kategoriar 1 fjerna frå produktet. Denne n-transformasjonen er lik

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\cong"] & Y_1^{\times(rq+r'q')} \times Y_2^{\times(qp+q'p')} \arrow[d, "\mathrm{proj}"] & & \\ & Y_1^{\times(q+q')} \times Y_2^{\times(q+q')} \arrow[r, "\prod_{t=1}^{q}\xi_{1at}\times\prod_{t=1}^{q'}\xi'_{1a't}\times\prod_{t=1}^{q}\xi_{2tb}\times\prod_{t=1}^{q'}\xi'_{2tb'}"] & \mathcal{R}^{2(q+q')} \arrow[r, bend left, "(\boxtimes\odot')_{ij}"] \arrow[r, bend right, "(\odot(\boxtimes\times\boxtimes))_{ij}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

der $a = a(i,t), a' = a'(i,t), b = b(t,j)$ og $b' = b'(t,j)$ er gitt ved at

$$(f_2 \boxtimes f_2')_{it} = (f_2)_{at'} \otimes (f_2')_{a't''} \quad \text{og} \quad (f_1 \boxtimes f_1')_{sj} = (f_1)_{s'b} \otimes (f_1')_{s''b'}$$

for nokre t', t'', s', s''. Til slutt er n-transformasjonen lik

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{proj}"] & X' \arrow[d, "\cong"] & & \\ & Y_1^{\times(q+q')} \times Y_2^{\times(q+q')} \arrow[r, "\prod_{t=1}^{q}\xi_{1at}\times\prod_{t=1}^{q'}\xi'_{1a't}\times\prod_{t=1}^{q}\xi_{2tb}\times\prod_{t=1}^{q'}\xi'_{2tb'}"] & \mathcal{R}^{2(q+q')} \arrow[r, bend left, "(\boxtimes\odot')_{ij}"] \arrow[r, bend right, "(\odot(\boxtimes\times\boxtimes))_{ij}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

der X' er $Y_1^{\times(q+q')} \times Y_2^{\times(q+q')}$ med alle trivielle n-kategoriar 1 fjerna frå produktet.

Urmorfiar i $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ er matriser av objekt i $\mathcal{R}$ som kan skrivast som $\bigoplus_{t=1}^m 1^\mathcal{R}$, så n-funktoren $X' \to \mathcal{R}^{\times 2(q+q')}$ er biletet av eit hjørne i G, i tydinga frå Definisjon 5.6. Dermed er den linne n-transformasjonen mellom funktorane $X' \to \mathcal{R}$ biletet av ein sti med steg i T sidan komposatoren på plass ij er biletet av ein slik sti. □

Lemma 5.21. *Dataa som er gjeve i Definisjon 5.19 gjer* $(\mathcal{F}_\mathcal{R}, \boxtimes, 1)$ *til ein permutativ* $n+1$*-kategori.*

Bevis. Me viser først at $\boxtimes$ er ein funktor. Det er klart at $\boxtimes$ sender identitet på identitet sidan einingane er strikte for $\otimes$. Komposatorane og assosiatorane er definert som matriser av samansettingar av strukturisomorfiar, og ved Proposisjon 5.14 og Lemma 5.20 er partielle komposatorar og assosiatorar og på denne forma. Dermed vil alle diagram sett saman av slike og identitetar kommutera ved Teorem 5.8, koherensteroemet for rig-n-kategoriar. Dette gjer $\boxtimes$ til ein linn n-funktor.

Me vil visa at $\boxtimes$ oppfyller at

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_\mathcal{R} \times \mathcal{F}_\mathcal{R} \times \mathcal{F}_\mathcal{R} \arrow[r, "\boxtimes \times id"] \arrow[d, "id \times \boxtimes"'] & \mathcal{F}_\mathcal{R} \times \mathcal{F}_\mathcal{R} \arrow[d, "\boxtimes"] \\
\mathcal{F}_\mathcal{R} \times \mathcal{F}_\mathcal{R} \arrow[r, "\boxtimes"] & \mathcal{F}_\mathcal{R}
\end{tikzcd}$$

kommuterar, og dette er sant for i-morfiar sidan det same er sant for $\otimes$. Komposatorane til desse to $n+1$-funktorane må nødvendigvis også vera like på grunn av koherensteoremet for rig-n-kategoriar.

Diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_\mathcal{R} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "id"] & \mathcal{F}_\mathcal{R} \times 1 \arrow[d, "\boxtimes"] \\
1 \times \mathcal{F}_\mathcal{R} \arrow[r, "\boxtimes"] & \mathcal{F}_\mathcal{R}
\end{tikzcd}$$

kommuterar sidan $1^\mathcal{R}$ er ei strikt eining for $\otimes$. Dermed er $(\mathcal{F}_\mathcal{R}, \boxtimes, 1)$ ein strikt monoidal $n+1$-kategori.

For å visa at $s^\boxtimes$ gjer $(\mathcal{F}_\mathcal{R}, \boxtimes, 1)$ til ein permutativ $n+1$-kategori, byrjar me med å visa at $s^\boxtimes$ er ein naturleg isomorfi. Merk først at dei to n-funktorane $\boxtimes$ og $\boxtimes\tau$ er like på objekt, og at matrisa $s^\boxtimes_{a,b}$ er ei permutasjonsmatrise, og dermed inverterbar. Hugs at $s^\boxtimes_{(a,b),(a',b')}$ er ei matrise som på kvar plass er $s^\otimes$, noko som gjer den til ein naturleg n-isomorfi. Diagramma som skal kommutera for at $s^\boxtimes$ er ein naturleg isomorfi består av $s^\boxtimes_{(a,b),(a',b')}$, $\boxtimes$-komposatorar og assosiatorar og partielle $\boxtimes$-komposatorar og assosiatorar, og sidan alle desse er matriser av komposisjonar av strukturisomorfiar i $\mathcal{R}$ ved Proposisjon 5.14 og Lemma 5.20, vil koherensteoremet for rig-n-kategoriar, Teorem 5.8, gje oss at diagramma kommuterar.

På same måte som i rigstrukturen på $\mathcal{F}_k$, jamfør Døme 1.3, vil 1-morfien $(s^{\boxtimes}\bullet id_\tau)_{a,b}s^{\boxtimes}_{a,b} = s^{\boxtimes}_{b,a}s^{\boxtimes}_{a,b}$ vera lik identitetsmorfien på objektet ab. n-transformasjonen $(s^{\boxtimes} \circ (s^{\boxtimes} \bullet id_\tau))_{(a,b),(a',b')}$ er identitetstransformasjonen ved koherensteoremet for rig-n-kategoriar sidan den er ei matrise av samansettingar av strukturisomorfiar frå $\otimes$ til $\otimes$.

Det manglar berre å visa at heksagondiagrammet kommuterar, men dette følger direkte frå koherensteoremet for rig-n-kategoriar.

$\square$

Definisjon 5.22. Me definerar følgande rigstruktur på den linne $n+1$-kategorien $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ for ein rig-n-kategori $\mathcal{R}$.

Dei to permutative strukturane er $(\mathcal{F}_\mathcal{R}, \boxplus, 0)$ frå Definisjon 5.18 og $(\mathcal{F}_\mathcal{R}, \boxtimes, 1)$ frå Definisjon 5.19.

Identitetstransformasjonane

$$n^r : \boxtimes \circ i \to pr_0$$

$$n^l \boxtimes \circ j \to pr_0$$

har me sidan 0 er ein multiplikativ null for multiplikasjon av naturlege tal og $\boxtimes$ med tomme matriser gjev tomme matriser slik at $n+1$-funktorane er like.

Identitetstransformasjonen

$$\delta^r : \otimes \circ (\oplus \times 1) \to \oplus \circ (\otimes \times \otimes) \circ (1 \times \tau \times 1) \circ (1 \times 1 \times \mathrm{diag})$$

har me sidan dei to $n+1$-funktorane ved nærare inspeksjon er like. Dette er heilt likt som for den høgre distribuatoren i $\mathcal{F}_k$, sjå (1) i Døme 1.3.

Den venstre distribuatoren

$$\delta^l : \otimes \circ (1 \times \oplus) \to \oplus \circ (\otimes \times \otimes) \circ (1 \times \tau \times 1) \circ (\mathrm{diag} \times 1 \times 1),$$

definerar me som samansettinga

$$\begin{tikzcd}
x \otimes (y \oplus z) \arrow[r, "\delta^l"] \arrow[d, "s^{\otimes}"] & (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \\
(y \oplus z) \otimes x \arrow[r, "\delta^r"] & (y \otimes x) \oplus (z \otimes x). \arrow[u, "s^{\otimes -1} \oplus s^{\otimes -1}"']
\end{tikzcd}$$

Teorem 5.23. *Dataa i Definison 5.22 gjer $(\mathcal{F}_\mathcal{R}, \boxplus, \boxtimes, 0, 1)$ til ein symmetrisk rig-$n+1$-kategori.*

Bevis. Den naturlege isomorfien $s^{\boxtimes} \bullet id_i$ går mellom n-funktorane $(- \boxtimes 0)$ og $(0 \boxtimes -)$, som begge sender objekt på 0 og matriser på tomme matriser og dermed er like. Koherensteoremet for rig-n-kategoriar, Teorem 5.8, gjev oss difor at $s^{\boxtimes} \bullet id_i$ er identitetstransformasjonen på denne n-funktoren.

Det står berre att å visa at dei tre diagramma som skal kommutera er kommutative. 1-morfiane som er komponentane til dei to samansettingane i eit diagram er like sidan dette vert dei same diagramma me viste kommuterte for $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ i Døme 1.3. Og n-transformasjonane som står oppå her er matriser av samansettingar av strukturisomorfiar frå $\mathcal{R}$, så dei er like ved koherensteoremet for rig-n-kategoriar. □

Korollar 5.24. *Det eksisterer linne n-kategoriar for alle n.*

A Alternativ konstruksjon av 2-modular

Her ser me på ein annan konstruksjon som også gjev 2-modulane av ein rig. Den er basert på idempotent fullføring, noko som gjer det enklare å skildra kva morfiane skal vera. Men dette endte likevel ikkje opp med å vera lettare å generalisera for høgare n enn den konstruksjonen me skildra tidlegare i seksjonen, så dei seinare kapitla er uavhengige av dette delkapittelet. Ein mogleg fordel med denne framgangsmåten, er at den vil gje dei projektive modulane i staden for dei frie. Assosiatoren bør kunna tilpassast frå $\mathcal{F}_{\mathcal{P}_k}$, men me kjem ikkje til å sjå på korleis dette kan gjerast, så noko arbeid står att før 2-modulane her dannar ein bikategori.

A.1 Idempotent fullføring

Den idempotente fullføringa av ein kategori $\mathcal{C}$ er ein ny kategori $\bar{\mathcal{C}}$. Den har par (X, f) som objekt, der X er eit objekt i $\mathcal{C}$ og $f : X \to X$ er ein idempotent morfi, altså $f^2 = f$. Morfiane $(X, f) \to (Y, g)$ i $\bar{\mathcal{C}}$ er dei morfiane α frå X til Y i $\mathcal{C}$ som oppfyller at $\alpha = \alpha \circ f = g \circ \alpha$.

Lemma A.1. *Den idempotente fullføringa av kategorien av frie k-modular $\overline{\boldsymbol{k}\mathbf{fri}}$ er ekvivalent med kategorien av projektive k-modular $\boldsymbol{k}\mathbf{proj}$.*

Bevis. Denne ekvivalensen er gitt ved

$$\begin{aligned} F : \overline{\boldsymbol{k}\mathbf{fri}} &\to \boldsymbol{k}\mathbf{proj} \\ (X, f) &\mapsto im(f). \end{aligned}$$

Me må visa at F er ein funktor til kategorien av projektive k-modular, og at F er essensielt surjektiv, full og trufast.

Biletet til F ligg i kategorien av projektive k-modular om det gitt ein idempotent $f : X \to X$, eksisterar ein k-modul Q slik at direktesummen $im(f) \oplus Q$ er fri. På grunn av at $f + (id - f) = id$ kan alle element i X skrivast som summen av eit element i biletet til f og eit element i biletet til $(id - f)$. Og sidan

$$\begin{aligned} f \circ (id - f) &= f \circ id - f^2 = f - f = 0 \\ (id - f) \circ f &= id \circ f - f^2 = f - f = 0 \end{aligned}$$

er $im(f) \cap im(id - f) = 0$, og dermed kan element i X skrivast unikt på denne forma. Med det er $im(f) \oplus im(id - f)$ lik X, ein fri k-modul.

Me lar F senda morfiar $\alpha : (X, f) \to (Y, g)$ på $g'\alpha i$ i diagrammet under.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, shift left, "f'"] & Y \arrow[d, "g'"] \\ P \arrow[u, hook, shift left, "i"] \arrow[r, "g\alpha i"] & Q \end{tikzcd}$$

Her er $f' : X \to im(f) =: P$ indusert av f, så f er lik f' etterfulgt av inklusjonen i. Sidan $\alpha = \alpha f = g\alpha$, får me det kommutative diagrammet

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, shift left, "f'"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, shift left, "g'"] & Z \arrow[d, "h'"] \\ P \arrow[u, hook, shift left, "i"] \arrow[r, "g'\alpha i"] & Q \arrow[u, hook, shift left, "j"] \arrow[r, "h'\beta j"] & R \end{tikzcd}$$

der $(h'\beta j)(g'\alpha i) = h'\beta\alpha i$. Dermed sender F komposisjon på komposisjon.

Identitetsmorfien $id_{(X,f)}$ er f, så F sender identiteten på (X, f) til $f'fi$ som i følgande diagram.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "f'"] & X \arrow[d, "f'"] \\ P \arrow[u, hook, shift left, "i"] \arrow[r, "f'fi"] & P \end{tikzcd}$$

Her er $f'fi = f'(if')i = (f'i)^2$, og $f'i$ er inklusjonen av P inn i ein fri modul fulgt av projiseringa ned att på P, altså identiteten på P. Med det kan me konkludera at F er ein funktor.

Funktoren F er full og trufast om F for alle par av objekt (X, f) og (Y, g), gjev ein bijeksjon mellom mengdene av morfiar $(X, f) \to (Y, g)$ og $F(X, f) \to F(Y, g)$. Injektivitet kjem av utreikninga:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= F(\beta) \\ g'\alpha i &= g'\beta i \\ jg'\alpha if' &= jg'\beta if' \\ g\alpha f &= g\beta f \\ \alpha &= \beta. \end{aligned}$$

Surjektivitet kjem av at me for projektive modular P og Q kan finna modular P' og Q' slik at $P \oplus P'$ og $Q \oplus Q'$ er frie modular, og at me for ein morfi $a : P \to Q$ då har det kommutative diagrammet

$$\begin{tikzcd} P \oplus P' \arrow[r, "a \oplus 0"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_P"'] & Q \oplus Q' \arrow[d, "\mathrm{proj}_Q"] \\ P \arrow[r, "a"] & P, \end{tikzcd}$$

slik at F sender $a \oplus 0 : (P \oplus P', \mathrm{proj}_P) \to (Q \oplus Q', \mathrm{proj}_Q)$ til $a : P \to Q$.

For å visa at F er essensielt surjektiv, vil me gitt ein projektiv modul P, finna eit objekt (X, f) slik at $F(X, f)$ er isomorft med P. Sidan P er projektiv eksisterar det ein k-modul Q slik at $P \oplus Q = X$, der X er ein fri k-modul. Då har me at følgande diagram kommuterar.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "id"'] & X \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Her er $(i \circ \mathrm{proj}) \circ (i \circ \mathrm{proj}) = i \circ id \circ \mathrm{proj} = i \circ \mathrm{proj}$, så $(i \circ \mathrm{proj}) : X \to X$ er idempotent. Dermed er $(X, i \circ \mathrm{proj})$ eit objekt i den idempotente fullføringa av kategorien av frie k-modular slik at $F(X, i \circ \mathrm{proj}) = P$. $\square$

Kategorien av projektive k-modular har ikkje ei like openbar koordinatisering som det kategorien av frie k-modular har, jamfør 1.1, men Proposisjon A.1 gjev oss ein hendig måte å kooridinatisera $\boldsymbol{k}$**proj**. Me kan nemleg bruka den idempotente fullføringa av den koordinatiserte kategorien av frie k-modular. Dette rettferdiggjer følgande definisjon frå [6]. Merk at den slik som den står ikkje er fullstendig koordinatisert.

Definisjon A.2. La k vera ein ring. Kategorien av endeleg-genererte projektive k-modular $\mathcal{P}_k$ har objekt (m, p) der m er eit ikkje-negativt heiltal og p er ei idempotent $m \times m$-matrise. Morfimengdene er $\mathcal{P}_k((m, p), (n, q)) = Hom_k(im(p), im(q))$.

A.2 Konstruksjon

Me vil no gje ein enklare kategori, som når den vert idempotent fullført vert kategorien av frie k-modular. La objekta $2K_{00}(k)$ i kategorien vera ob**Fin**, og la morfiane $2K'_{01}(k)$ vera ob$\mathbf{Fin}^{\times 3}$ der (B, X, A) er ein morfi frå A til B. Komposisjon er gitt ved

$$\mu((C, Y, B), (B, X, A)) = (C, Y \times B \times X, A).$$

Me gjer morfiane frå A til B om til ein kategori $2_k AB$ på følgande måte. La ein morfi frå (B, X, A) til (B, X', A) vera ein funksjon $f : B \times X' \times X \times A \to k$. Dette er det same som ei $B \times A$-matrise F med element $X' \times X$-matriser med element k. Me lar komposisjon av morfiar vera komponentvis matrisemultiplikasjon. Altså, for ein $f \in 2_k AB(X, X')$ og ein $g \in 2_k AB(X', X'')$ er $gf \in 2_k AB(X, X'')$ gitt ved

$$(gf)_{b,x'',x,a} = \sum_{x' \in X'} g_{b,x'',x',a} f_{b,x',x,a}.$$

Matrisa G som korresponderar til $g : B \times X'' \times X' \times A \to k$ er

$$\begin{bmatrix} G_{11} & ... & G_{1A} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{B1} & ... & G_{BA} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1111} & \cdots & g_{11X'1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{1X''11} & \cdots & g_{1X''X'1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} g_{111A} & \cdots & g_{11X'A} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{1X''1A} & \cdots & g_{1X''X'A} \end{bmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{bmatrix} g_{B111} & \cdots & g_{B1X'1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{BX''11} & \cdots & g_{BX''X'1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} g_{B11A} & \cdots & g_{B1X'A} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{BX''1A} & \cdots & g_{BX''X'A} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Merk notasjonsmisbruk; A skal vera $|A|$, antal element i A.

Matrisa GF blir gitt ved blokksum og matrisemultiplikasjon,

$$\begin{bmatrix} G_{11} & ... & G_{1A} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{B1} & ... & G_{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & ... & F_{1A} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{B1} & ... & F_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}F_{11} & ... & G_{1A}F_{1A} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{B1}F_{B1} & ... & G_{BA}F_{BA} \end{bmatrix}$$

der $G_{IJ}F_{IJ}$ skal multipliserast som vanleg matrisemultiplikasjon.

Me treng og ein horisontal komposisjon av 2-morfiar langs objekt

$$\mu : 2_kBC(Y, Y') \times 2_kAB(X, X') \to 2_kAC(Y \times B \times X, Y' \times B \times X'),$$

og lar $\mu(g, f) : C \times Y' \times B \times X' \times Y \times B \times X \times A \to k$ vera gitt ved at

$$\mu(g, f)_{c,y',b,x',y'b',x,a} = \delta_{b,b'} g_{c,y',y,b} f_{b',x'x,a}.$$

Dette tilsvarar matrisemultiplikasjon der ein nyttar tensorprodukt og blokksum.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & ... & G_{1B} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{C1} & ... & G_{CB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & ... & F_{1A} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{B1} & ... & F_{BA} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} G_{11}F_{11} + ... + G_{1B}F_{B1} & ... & G_{11}F_{1A} + ... + G_{1B}F_{BA} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{C1}F_{11} + ... + G_{CB}F_{B1} & ... & G_{C1}F_{1A} + ... + G_{CB}F_{BA} \end{bmatrix}$$

Her er multiplikasjon tensorprodukt, og $+$ er blokksum:

$$G_{IJ}F_{KL} := G_{IJ} \otimes F_{KL} = \begin{bmatrix} g_{I11J}F_{KL} & ... & g_{I1YJ}F_{KL} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{IY'1J}F_{KL} & ... & g_{IY'YJ}F_{KL} \end{bmatrix}$$

$$G_{IJ} + F_{KL} := G_{IJ} \oplus F_{KL} = \begin{bmatrix} g_{I11J} & \dots & g_{I1YJ} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{IY'1J} & \dots & g_{IY'YJ} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F_{K11L} & \dots & F_{K1XL} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & F_{KX'1L} & \dots & F_{KX'XL} \end{bmatrix}.$$

Me manglar identitetsmorfiar sidan (B, X, A) "er" ei $B \times A$-matrise med k^X over alt, så me kan ikkje laga matrisa som er k^1 på diagonalen og 0 ellers. Dette kan løysast ved idempotent fullføring.

Gitt $A, B \in \mathrm{ob}\mathbf{Fin}$, la $\bar{\mathbf{2}}_k AB$ vera den idempotente fullføringa av $2_k AB$. Det vil seia at objekt i $\bar{\mathbf{2}}_k AB$ er par (X, f) der $X \in \mathrm{ob}\mathbf{Fin}$ og $f \in 2_k AB(X, X)$ er idempotent: $f^2 = f$. Dette er det same som at alle matrisene F_{IJ} er idempotente eller at

$$f_{b,x'',x,a} = \sum_{x' \in X'} f_{b,x'',x',a} f_{b,x',x,a}.$$

Ein morfi $\alpha \in \bar{\mathbf{2}}_k AB((X, f), (Y, g))$ er ein $\alpha \in 2_k AB(X, Y)$ som oppfyller at $\alpha = \alpha f = g\alpha$. Merk at f er identiteten på (X, f).

Me lar μ vera uendra på morfiar og utvidar den til objekt i $\bar{\mathbf{2}}_k AB$ ved å setta $\mu((Y, g), (X, f)) = (\mu(Y, X), \mu(g, f))$. Følgande Lemma er ein føresetnad for at dette skal fungera.

Lemma A.3. *Gitt $X : A \to B$, $Y : B \to C$ og idempotente avbildingar $f : X \to X$ og $g : Y \to Y$ er $\mu(g, f) : \mu(Y, X) \to \mu(Y, X)$ idempotent.*

Bevis. $\mu(g, f)$ er idempotent om $\mu(g, f)_{ij}$ er det som morfiar frå A^{BXY} til A^{BXY}. Dette følgjer av kalkulasjonen

$$\mu(g, f)^2_{ij} = (\bigoplus_{l=1}^{B} g_{il} \otimes f_{lj})^2 = \bigoplus_{l=1}^{B} (g_{il} \otimes f_{lj})^2 = \bigoplus_{l=1}^{B} g^2_{il} \otimes f^2_{lj} = \bigoplus_{l=1}^{B} g_{il} \otimes f_{lj}.$$

□

Dette gjer $2K(k)$ til ein bikategori om me kan ordna med assosiatorar og einingar. Me kjem ikkje til å sjå på korleis ein gjer assosiatoren, men denne bør likna veldig på assosiatoren til $\mathcal{F}_{\mathcal{P}_k}$.

A.2.1 Einingar

Objektet $(*, \delta)$ vert eit nøytralobjekt for μ opp til naturleg isomorfi. Meir konkret er identiteten på objektet n paret $(*, \delta)$ der $* = n \times * \times n$ er $n \times$

n-matrisa med 1 over alt og δ er $n \times n$-matrisa av 1×1-matriser som er identiteten i k på diagonalen og 0 alle andre stader. La oss sjå på eit lite døme før me gjer det generelle tilfellet, så det vert lettare å sjå kva som skjer.

Døme A.4. La $2 \times 2 \times 3 : 3 \to 2$ vera ein morfi, og la f vera idempotent frå denne morfien til seg sjølv. Då er

$$\mu((2 \times * \times 2, \delta), (2 \times 2 \times 3, f)) = (\mu(2 \times * \times 2, 2 \times 2 \times 3), \mu(\delta, f))$$

Det er klart at $(\mu(2 \times * \times 2, 2 \times 2 \times 3) = 2 \times 4 \times 3$. Komposisjonen av morfiane blir:

$$\mu\left(\begin{bmatrix}[1] & [0] \\ [0] & [1]\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}([1] \otimes f_{11}) \oplus ([0] \otimes f_{21}) & ([1] \otimes f_{12}) \oplus ([0] \otimes f_{22}) & ([1] \otimes f_{13}) \oplus ([0] \otimes f_{23}) \\ ([0] \otimes f_{11}) \oplus ([1] \otimes f_{21}) & ([0] \otimes f_{12}) \oplus ([1] \otimes f_{22}) & ([0] \otimes f_{13}) \oplus ([1] \otimes f_{23})\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} & f_{12} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} & f_{13} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus f_{21} & \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus f_{22} & \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus f_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1111} & f_{1121} & 0 & 0 \\ f_{1211} & f_{1221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} f_{1112} & f_{1122} & 0 & 0 \\ f_{1212} & f_{1222} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} f_{1113} & f_{1123} & 0 & 0 \\ f_{1213} & f_{1223} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{2111} & f_{2121} \\ 0 & 0 & f_{2211} & f_{2221} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{2112} & f_{2122} \\ 0 & 0 & f_{2212} & f_{2222} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{2113} & f_{2123} \\ 0 & 0 & f_{2213} & f_{2223} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Komposisjon med identiteten frå den andre sida blir

$$\mu((2 \times 2 \times 3, f), (3 \times * \times 3, \delta)) = (\mu(2 \times 2 \times 3, 3 \times * \times 3), \mu(f, \delta)).$$

Då er $\mu(2 \times 2 \times 3, 3 \times * \times 3) = 2 \times 6 \times 3$, og komposisjonen av morfiane blir:

$$\mu\left(\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}[1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1]\end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus f_{12} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus f_{13} \\ f_{21} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus f_{22} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \oplus f_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} f_{1111} & f_{1121} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{1211} & f_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{1112} & f_{1122} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{1212} & f_{1222} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{1113} & f_{1123} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{1213} & f_{1223} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} f_{2111} & f_{2121} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{2211} & f_{2221} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{2112} & f_{2122} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{2212} & f_{2222} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2113} & f_{2123} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2213} & f_{2223} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

For ein generell $f : X \to X$ der $X : n \to m$, vil $\mu(f, \delta)$ bli 2-morfien $nX \to nX$ gitt ved at

$$\mu(f,\delta)_{ij} = \bigoplus_{l=1}^{n} \delta_{lj} f_{ij},$$

altså matrisa

$$\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} f_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \dots &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{1n} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} f_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \dots &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{2n} \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\begin{bmatrix} f_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{m2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \dots &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{mn} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

der 0 er nullmatrisa av størrelse $X \times X$. Merk at me ser på matrisa over som ei matrise av $nX \times nX$-matriser over k. Tilsvarande blir $\mu(\delta, f)$ 2-morfien $mX \to mX$ med

$$\mu(\delta, f)_{ij} = \bigoplus_{l=1}^{m} \delta_{il} f_{ij}.$$

Den naturlege isomorfien

$$\rho : \mu(-, (*, \delta)) \to -$$

har komponentar på forma

$$\rho_{(X,f)} = \begin{bmatrix} [f_{11} \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] & [0 \ \ f_{12} \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] & \dots & [0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ f_{1n}] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [f_{m1} \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] & [0 \ \ f_{m2} \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] & \dots & [0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ f_{mn}] \end{bmatrix}.$$

Dette er ein morfi

$$\rho_{(X,f)} : \mu((X, f), (*, \delta)) = (nX, \mu(f, \delta)) \to (X, f)$$

fordi $f\rho_{(X,f)} = \rho_{(X,f)} = \rho_{(X,f)}\mu(f, \delta)$ er sant sidan f er idempotent.

$\rho_{(X,f)}$ har ein invers

$$\rho^{-1}_{(X,f)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ f_{12} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{1n} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \begin{bmatrix} f_{m1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ f_{m2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

for dette er ein gyldig morfi $(X, f) \to (nX, \mu(\delta, f))$, og

$$(\rho_{(X,f)}\rho^{-1}_{(X,f)})_{ij} = f_{ij}^2 = f_{ij}$$

samt $\rho^{-1}_{(X,f)}\rho_{(X,f)} = \mu(f^2, \delta) = \mu(f, \delta)$.

Den naturlege isomorfien

$$\lambda : \mu((*, \delta), -) \to -$$

har komponentar

$$\lambda_{(X,f)} = \begin{bmatrix} [f_{11} \ \ 0 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] & \dots & [f_{1n} \ \ 0 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] \\ [0 \ \ f_{21} \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] & \dots & [0 \ \ f_{2n} \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0] \\ \vdots & & \vdots \\ [0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ f_{m1}] & \dots & [0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ f_{mn}] \end{bmatrix}.$$

Som før vert dette ein morfi

$$\lambda_{(X,f)} : \mu((*, \delta), (X, f)) = (mX, \mu(\delta, f)) \to (X, f)$$

fordi $f\lambda_{(X,f)} = \lambda_{(X,f)} = \lambda_{(X,f)}\mu(\delta, f)$ er sant sidan f er idempotent. Inversen er gitt ved

$$\lambda_{(X,f)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} f_{1n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ f_{21} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 \\ f_{2n} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{m1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

B K-teori av 2-vektorrom

I [3] vert det mellom anna vist at symmetriske rig-kategoriar liknar nok på ringar til at definisjonen av K-teorien til ein ring kan tilpassast for å gje oss K-teori av symmetriske rig-kategoriar. Her oppsummerar me dette og nokre resultat, og viser korleis $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ kan nyttast i staden for den generelle lineære gruppa av modular.

Det finst mange samsvarande definisjonar for K-teorien av ein ring k. Me repeterar raskt definisjonen

$$K(k) = \mathbb{Z} \times NGL(k)^+.$$

Her er den generelle lineære gruppa $GL(k)$ gruppa av "inverterbare uendeleg-dimensjonale matriser over k med kun endeleg mange element forskjellig frå identitetsmatrisa". Med dette meinast det at $GL_k(k)$ er gruppa av inverterbare $k \times k$-matriser med element i k, og at $GL(k)$ er kogrensa av digrammet

$$GL_1(k) \xrightarrow{g \mapsto g \oplus 1} GL_2(k) \xrightarrow{g \mapsto g \oplus 1} \dots$$

der $\oplus$ er blokksum.

Me ser på gruppa $GL(k)$ som ein kategori med éit objekt, og tek nerva av denne (ofte notert som $BGL(k)$ sidan $GL(k)$ er ei gruppe). Til slutt tek me plusskonstruksjonen av dette rommet. Plusskonstruksjonen kan konstruerast eksplisitt, men for samanhengande X er den beskrive opp til homotopi av:

1. Tilordninga $X \mapsto X^+$ er ein funktor $\mathcal{S}_* \to \mathcal{S}_*$, og det er ein naturleg kofibrasjon $q_X : X \to X^+$
2. Om X er samanhengande, er q_X asyklisk.
3. Om X er samanhengade, er $\pi_1(q_X)$ projeksjonen $\pi_1(X) \to \pi_1(X)/P\pi_1(X)$, der PG er den maksimale perfekte undergruppa av G.

Dette er Teorem 1.1.6.3 i [6].

Når $\mathcal{B}$ er ein symmetrisk rig-kategori, nyttar me analogar av GL og N som brukar den additive og multiplikative strukturen i $\mathcal{B}$. Me minnar om korleis dette vart gjort i [3].

Definisjon B.1. La $(\mathcal{B}, \oplus, \otimes, \underline{0}, \underline{1})$ vera ein symmetrisk rig-kategori. Kategorien $M_n(\mathcal{B})$ av $n \times n$-matriser over $\mathcal{B}$ har objekt $n \times n$-matriser $V = (V_{ij})_{i,j=1}^n$ med element objekt i $\mathcal{B}$, og morfiar $n \times n$-matriser $\phi = (\phi_{ij})_{i,j=1}^n$ med element morfiar i $\mathcal{B}$. Morfien ϕ går frå $(s\phi_{ij})_{i,j=1}^n$ til $(t\phi_{ij})_{i,j=1}^n$.

Me har ein matrisemultiplikasjonsfunktor

$$\begin{array}{rcl} M_n(\mathcal{B}) \times M_n(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\quad\quad \cdot \quad\quad} & M_n(\mathcal{B}) \\ ((U_{ij})_{i,j=1}^n, (V_{jk})_{j,k=1}^n) & \longmapsto & (\bigoplus_{j=1}^{n} U_{ij} \otimes V_{jk})_{i,k=1}^n \end{array}$$

som er heilt lik som matrisemultiplikasjon av reelle matriser, berre at addisjon og multiplikasjon er bytta ut med $\oplus$ og $\otimes$.

La eininga I_n i $M_n(\mathcal{B})$ vera matrisa med $\underline{1}$ på diagonalen og $\underline{0}$ alle andre plassar.

Proposisjon B.2. *$(M_n(\mathcal{B}), \cdot, I_n)$ er ein monoidal kategori.*

Definisjon B.3. For ein ring k lar me den generelle lineære gruppa $GL_n(k)$ vera gruppa av alle inverterbare $n \times n$-matrisar over k, og for ein rig B lar me $\mathrm{Gr}(B)$ vera Grothendieck si gruppekomplettering av B.

Me definerar $GL_n(\pi_0(\mathcal{B}))$ og $GL_n(\mathcal{B})$ som tilbaketrekkingane

$$\begin{tikzcd} GL_n(\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & GL_n(\pi_0(\mathcal{B})) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & GL_n(\mathrm{Gr}(\pi_0(\mathcal{B}))) \arrow[d] \\ M_n(\mathcal{B}) \arrow[r] & M_n(\pi_0(\mathcal{B})) \arrow[r] & M_n(\mathrm{Gr}(\pi_0(\mathcal{B}))). \end{tikzcd}$$

Merk at dei vertikale pilene er mono, så $GL_n(\pi_0(\mathcal{B}))$ er dei matrisene i $M_n(\pi_0(\mathcal{B}))$ som vert inverterbare etter gruppekomplettering, og $GL_n(\mathcal{B})$ er dei matrisene i $M_n(\mathcal{B})$ som $M_n(\pi_0)$ sender inn i $GL_n(\pi_0(\mathcal{B}))$.

Som eit korollar av B.2 har me

Korollar B.4. *$(GL_n(\mathcal{B}, \cdot, I_n))$ er ein monoidal kategori.*

Matrisa A har same determinant som $A \oplus 1$, der $\oplus$ blokksum av matriser. Det betyr at avbildingane

$$M_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{V \mapsto V \oplus \underline{1}} M_{n+1}(\mathcal{B}) \quad \text{og} \quad GL_n(\mathrm{Gr}(\pi_0(\mathcal{B}))) \xrightarrow{A \mapsto A \oplus 1} GL_{n+1}(\mathrm{Gr}(\pi_0(\mathcal{B})))$$

gjev oss ei avbilding $GL_n(\mathcal{B}) \to GL_{n+1}(\mathcal{B})$, og me lar $GL(\mathcal{B})$ vera kogrensa av diagrammet

$$GL_1(\mathcal{B}) \to GL_2(\mathcal{B}) \to \dots$$

$(GL(\mathcal{B}, \cdot, I))$, der I er biletet til I_n, vert òg ein monoidal kategori.

Definisjon B.5. La $(\mathcal{M}, \cdot, e)$ vera ein monoidal kategori. Bar-konstruksjonen $B\mathcal{M}$ er den simplisielle kategorien som i grad p er kategorien $B_p\mathcal{M}$ med objekt par på forma $(M, \mu) = (\{M^{\alpha\beta}\}_{\alpha \leq \beta \in [p]}, \{\mu^{\alpha\gamma\beta}\}_{\alpha < \beta < \gamma \in [p]})$ der

1. $M^{\alpha\beta}$ er objekt i $\mathcal{M}$ for alle $0 \leq \alpha \leq \beta \leq p$ og

2. $\mu^{\alpha\gamma\beta} : M^{\alpha\beta} \cdot M^{\beta\gamma} \xrightarrow{\cong} M^{\alpha\gamma}$ er isomorfiar i $\mathcal{M}$ for alle $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq p$, slik at

   a. $M^{\alpha\alpha} = e$ for alle α,

   b. isomorfiane $\mu^{\alpha\alpha beta} : e \cdot M^{\alpha\beta} \to M^{\alpha\beta}$ og $\mu^{\alpha\beta\beta} : M^{\alpha\beta} \cdot e \to M^{\alpha\beta}$ er høvevis venstre og høgre eining i $\mathcal{M}$, og

   c. diagrammet

$$\begin{tikzcd}
M^{\alpha\beta} \cdot (M^{\beta\gamma} \cdot M^{\gamma\delta}) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "id \cdot \mu^{\beta\gamma\delta}"] & & M^{\alpha\beta} \cdot (M^{\beta\gamma} \cdot M^{\gamma\delta}) \arrow[d, "\mu^{\alpha\beta\gamma} \cdot id"] \\
M^{\alpha\beta} \cdot M^{\beta\delta} \arrow[r, "\mu^{\alpha\beta\delta}"] & M^{\alpha\delta} & M^{\alpha\gamma} \cdot M^{\gamma\delta} \arrow[l, "\mu^{\alpha\gamma\delta}"']
\end{tikzcd}$$

   kommuterar for alle $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta \leq p$.

Morfiane $\phi : (M_0, \mu_0) \to (M_1, \mu_1)$ i $B_p\mathcal{M}$ består av ein morfi $\phi^{\alpha\beta} : M_0^{\alpha\beta} \to M_1^{\alpha\beta}$ for kvar $0 \leq \alpha \leq \beta \leq p$ som er ein isomorfi når $\alpha = \beta$ og oppfyller at diagrammet

$$\begin{tikzcd}
M_0^{\alpha\beta} \cdot M_0^{\beta\gamma} \arrow[r, "\mu_0^{\alpha\beta\gamma}"] \arrow[d, "\phi^{\alpha\beta} \cdot \phi^{\beta\gamma}"] & M_0^{\alpha\gamma} \arrow[d, "\phi^{\alpha\gamma}"] \\
M_1^{\alpha\beta} \cdot M_1^{\beta\gamma} \arrow[r, "\mu_1^{\alpha\beta\gamma}"] & M_1^{\alpha\gamma}
\end{tikzcd}$$

kommuterar for alle $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ i $[p]$.

For simplisielle avbildingar $f \in \Delta([q], [p])$, lar me $f^* : B_p\mathcal{M} \to B_q\mathcal{M}$ vera funktoren som sender objektet

$$(M, \mu) = (\{M^{\alpha\beta}\}_{\alpha \leq \beta \in [p]}, \{\mu^{\alpha\gamma\beta}\}_{\alpha \leq \beta \leq \gamma \in [p]})$$

på

$$f^*(M, \mu) = (\{M^{f(\alpha)f(\beta)}\}_{\alpha \leq \beta \in [q]}, \{\mu^{f(\alpha)f(\gamma)f(\beta)}\}_{\alpha \leq \beta \leq \gamma \in [q]}),$$

og morfien $\phi : (M_0, \mu_0) \to (M_1, \mu_1)$ i $B_p\mathcal{M}$ på $\{\phi^{f(\alpha)f(\beta)}\}$.

Som vist i Døme 1.3, kan me sjå på $\mathcal{F}(k)$, kategorien av frie endeleggenererte k-modular, som ein rig-kategori. Denne kan ein ta K-teori av ved hjelp av metoden over. I [8] vert det vist at K-teorien til ein symmetrisk monoidal kategori som eigentleg er ein rig-kategori, vil ha ein ringstruktur. Dette lar oss ta K-teorien på nytt (inkludert modul-taking). Innhaldet i [3], [2] og [1] gjev oss at desse framgangsmåtane er ekvivalente.

Me definerar 2-kategorien $i\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ til å vera den vide underkategorien av $\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}$ med kun dei svakt inverterbare morfiane, slik:

$$\begin{tikzcd}
i\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n,n) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & GL_n(\mathbb{N}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & GL_n(\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n,n) \arrow[r] & Mat_n(\mathbb{N}) \arrow[r] & Mat_n(\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Med andre ord, $i\mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n,n) = GL_n(\mathcal{F}_k)$ (jamfør Definisjon B.3) sidan $Mat_n(\mathcal{F}_k) = \mathcal{F}_{\mathcal{F}_k}(n,n)$ som kategoriar.

Hevdar at me ikkje er interesserte i $K(\mathcal{F}_k)$, men heller $K(i\mathcal{F}_k)$. Det vil seia at 2-kategorien me ser på er $i\mathcal{F}_{i\mathcal{F}_k}$. Mengdene denne består av er:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{F}_{i\mathcal{F}_k}(n,n)(\phi,\phi) &= M_n(GL_{\phi_{ij}}(k)) && = GL_n(i\mathcal{F}_k)(\phi,\phi)\\
obi\mathcal{F}_{i\mathcal{F}_k}(n,n) &= M_n(\mathbb{N}) \cap GL_n\mathbb{Z} && = obGL_n(i\mathcal{F}_k)\\
obi\mathcal{F}_{i\mathcal{F}_k} &= \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Her er ϕ ein 1-morfi frå n til n, og $M_n(GL_{\phi_{ij}}(k))$ skal bety $n\times n$-matriser der elementet på plass i,j er inverterbare $\phi_{ij}\times\phi_{ij}$-matriser. Vidare er $i\mathcal{F}_{i\mathcal{F}_k}(m,n) = \emptyset$ den tomme kategorien for $m \neq n$, og $i\mathcal{F}_{i\mathcal{F}_k}(n,n)(\phi,\psi) = \emptyset$ den tomme mengda for $\phi \neq \psi$.

Definisjon B.6. La $\mathcal{C}$ vera ein 2-kategori som oppfyller at $\mathcal{C}(n,m) = \emptyset$ for $n \neq m$ og at $\mathcal{C}(n,n)$ er ein monoidal kategori for alle n. Me definerar barkonstruksjonen til $\mathcal{C}$ som

$$B\mathcal{C} = \coprod_{n\in ob\mathcal{C}} B\mathcal{C}(n,n),$$

der B på høgre sida er barkonstruksjonen frå Definisjon B.5.

Med denne definisjonen er det klart at

$$Bi\mathcal{F}_{i\mathcal{F}_k} = \coprod_{n\in\mathbb{N}} BGL_n(i\mathcal{F}_k).$$

Referansar

[1] Nils A. Baas, Bjørn Ian Dundas, Birgit Richter, and John Rognes. Stable bundles over rig categories. *J. Topol.*, 4(3):623–640, 2011.

[2] Nils A. Baas, Bjørn Ian Dundas, Birgit Richter, and John Rognes. Ring completion of rig categories. *J. Reine Angew. Math.*, 674:43–80, 2013.

[3] Nils A. Baas, Bjørn Ian Dundas, and John Rognes. Two-vector bundles and forms of elliptic cohomology. In *Topology, geometry and quantum field theory*, volume 308 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 18–45. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[4] Jean Bénabou. Introduction to bicategories. In *Reports of the Midwest Category Seminar*, pages 1–77. Springer, Berlin, 1967.

[5] Christoph Dorn. Associative n-categories, 2023. arXiv:1812.10586.

[6] Bjørn Ian Dundas, Thomas G. Goodwillie, and Randy McCarthy. *The local structure of algebraic K-theory*, volume 18 of *Algebra and Applications*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2013.

[7] Josep Elgueta. A strict totally coordinatized version of kapranov and voevodsky's 2-category **2vect**, 2004. arXiv:math/0406475.

[8] A. D. Elmendorf and M. A. Mandell. Rings, modules, and algebras in infinite loop space theory. *Adv. Math.*, 205(1):163–228, 2006.

[9] Eric Finster, David Reutter, Jamie Vicary, and Alex Rice. A type theory for strictly unital ∞-categories. In *Proceedings of the 37th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. ACM, Aug 2022.

[10] R. Gordon, A. J. Power, and Ross Street. Coherence for tricategories. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 117(558):vi+81, 1995.

[11] Alexander E. Hoffnung. Spans in 2-categories: A monoidal tricategory, 2013. arXiv:1112.0560.

[12] Niles Johnson and Donald Yau. *2-dimensional categories*. Oxford University Press, Oxford, 2021.

[13] Niles Johnson and Donald Yau. Bimonoidal categories, e_n-monoidal categories, and algebraic k-theory, 2021. arXiv:2107.10526 (forkorta versjon), Tilgjengeleg på: https://nilesjohnson.net/En-monoidal.html, henta 01.04.2023.

[14] M. M. Kapranov and V. A. Voevodsky. 2-categories and Zamolodchikov tetrahedra equations. In *Algebraic groups and their generalizations: quantum and infinite-dimensional methods (University Park, PA, 1991)*, volume 56 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 177–259. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[15] Youngsoo Kim. A note on strict commutativity of a monoidal product. *Pure and Applied Mathematics Journal*, 5:155, 01 2016.

[16] Joachim Kock. Weak identity arrows in higher categories. *IMRP Int. Math. Res. Pap.*, pages 69163, 1–54, 2006.

[17] Stephen Lack and Simona Paoli. 2-nerves for bicategories. *K-Theory*, 38(2):153–175, 2008.

[18] Miguel L. Laplaza. Coherence for distributivity. In *Coherence in categories*, Lecture Notes in Math., Vol. 281, pages 29–65. Springer, Berlin, 1972.

[19] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[20] Carlos Simpson. Homotopy types of strict 3-groupoids, 1998. arXiv:math/9810059.

[21] Zouhair Tamsamani. Sur des notions de n-catégorie et n-groupoïde non strictes via des ensembles multi-simpliciaux. *K-Theory*, 16(1):51–99, 1999.

[22] Charles F. Van Loan. The ubiquitous Kronecker product. volume 123, pages 85–100. 2000. Numerical analysis 2000, Vol. III. Linear algebra.