Et filosofisk forsvar for kategoriteori som grunnlag for matematikk

John Grieg

Veileder: Professor Ole Thomassen Hjortland

Universitetet i Bergen
Institutt for filosofi og førstesemesterstudier
Masteroppgave i FILO350

Vår/2022

Sammendrag

Det finnes ikke noe overnaturlig, verden forstås gjennom vitenskap og matematikk som gir innsikt i hvordan naturen fungerer. Matematikk er heller ikke overnaturlig. Det er utgangspunktet for denne oppgaven. Første del av argumentasjonen vil ta for seg det opprinnelige Quine-Putman argumentet, uunnværlighetsargumentet (UA), som sier at vår tillit til vitenskap forplikter oss til å tro på at matematiske objekter eksisterer. Etter presentasjonen av UA vil oppgaven se på hvilken matematikk vi er forpliktet til og hva denne bygger på. Andre del av argumentasjonen vil ta for seg det vi kan kalle den forklarende versjonen av UA (UA2) som sier at vi er forpliktet til den matematikken som er uunnværlig for å forklare verden. Her vil jeg ta for meg hva det vil si å forklare verden ved hjelp av matematikk og se på hvilken matematikk som har forklarende tyngde med hensyn til å forstå verden. I tredje del vil vi se på hva som er den matematikken som er uunnværlig og hva denne matematikken kan bygge på (hva som er denne matematikkens grunnlag) og argumentere for pluralistisk matematikk basert på kategoriteori. Mot slutten vil vi se fremover se på hvilken matematikk vi vil være forpliktet til i fremtiden.

Del I

Uunnværlighetsargumentet

0.1 Motivasjon

Matematikken er i endring og er en av grunnene til å studere begrunnelse for matematikk. En annen grunn er at matematikk utføres ikke bare av mennesker, men også av datamaskiner. Den tredje grunnen er at fysikk som er brukt i uunnværlighetsargumentet også er i endring. UA regnes som det viktigste, men ikke eneste argumentet for matematisk realisme. Matematikk er uunnværlig for vår beste vitenskap. Det er premisset i Quine-Putman argumentet for vår forpliktelse overfor matematikkens objekter. *Vår beste vitenskap* vil i denne oppgaven i hovedsak gjelde fysikk og da spesielt kvantefysikk. Med utgangspunkt i et realistisk syn på verden og med et aristotelisk syn på matematikk, hvilken matematikk er vi forpliktet til? Oppgaven ser på hvilken matematikk som har vært avgjørende i fysikk de siste århundrene. Når vi vet hvilken matematikk som har vært brukt, vet vi også hvilke deler den består av og hvilket grunnlag vi er forpliktet til. Hva kan fungere som grunnlag for matematikken vi er forpliktet til? Er det matematikk vi er forpliktet til eller er det metoden? Hvilke konsekvenser vil en forpliktelse ha for fremtidig vitenskap og fremtidig matematikk? Vi vil argumentere for at kategoriteori kan fungere som grunnlag for matematikk og fortsatt vil fungere som uunnværlig for fysikk. Konsekvensene av å velge dette grunnlaget vil bli diskutert. Mot slutten vil vi se på perspektiver for fremtidens matematikk og fysikk. Vil matematikk fortsatt være uunnværlig for vår beste vitenskap? Hva vil være matematikk i fremtiden?

Oppfatter vi også matematiske objekt annerledes enn andre abstrakte objekter? At vi forstår naturen ulikt fra tidligere tider, viste **Thomas Samuel Kuhn** [1962] i den innflytelsesrike boken *The Structure of Scientific Revolutions* hvor rammen for hvordan vi oppfatter og forklarer naturen, blir kalt et paradigme. Med en rekke historiske observasjoner studerte Kuhn hvordan normalvitenskap fungerer og blir erstattet med ny normalvitenskap etter vitenskaplige revolusjoner. De vitenskaplige revolusjonene representert ved den generelle relativitetsteorien og kvantemekanikken endret vår måte å forstå verden. Men som Kuhn poengterer, det empiriske grunnlaget står fast, men det blir satt i en ny ramme. Vi oppfatter matematiske objekt som hele tall, irrasjonelle tall, mengder, punkter, linjer, sirkler, funksjoner, ligninger og mange andre ulikt slik det ble gjort for tusenvis av år siden. Matematiske objekt kommer til hele tiden. Om de kommer til ved oppdagelse eller oppfinnelse, er en pågående diskusjon som vi ser på senere. Tallet π, forholdet mellom omkrets og diameter i en sirkel, visste de greske matematikerne for flere tusen år siden at var omkring 3. Vi har mange ulike måter å se på akkurat dette tallet. Vi ser på det som et irrasjonelt og transcendentalt tall. Det er egenskaper ved tallet. Et tall hvor vi ved å bruke ulike formler for desimalekspansjon kan få frem så mange desimaler vi ønsker. Tallet opptrer i en rekke formler som for eksempel tettheten i normalfordelingen $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ eller i Eulers identitet: $e^{i\pi} = -1$. I begge disse eksemplene kommer π fra forholdet mellom omkretsen og diameteren til en sirkel.

Abstrakte begrep som lykke, kjærlighet, skjønnhet og rettferdighet har vi en oppfatning av som vi kan gi eksempler på og forklare ved å bruke et vanlig språk. Hvordan oppfatningen av disse begrepene har endret seg gjennom tidene er ikke vanskelig å påpeke. Er det vår oppfatning av virkningene av begrepene som har endret seg? Har begrepene endret seg? I tillegg til at vi oppfatter alle disse begrepene forskjellig fra slik Platons og Aristoteles samtidige gjorde, setter vi alle begrepene i andre og større sammenhenger enn det ble gjort i tidligere tider. Er de abstrakte objektene som tall, matematiske grupper, matematiske kategorier, matematiske funksjoner, geometriske objekter og andre matematiske objekter, uforanderlige objekter uten virkning i tid og rom? At matematiske objekt er abstrakte uten virkning i tid og rom, er det platonske synet. Rammen rundt de matematiske objektene oppfatter vi på en annen måte enn filosofene for to tusen år siden. En illustrasjon av dette er linjer og punkter i euklidsk geometri. Disse vil vi i dag oppfatte som spesialtilfeller av krumme rom (ikke-euklidsk eller Riemanns geometri) og vi kan oppfatte både punkter og linjer med utstrekning og vekt. Vi kan oppfatte tall som del av en matematisk gruppe, som del av en mengde, vi kan ha mening om ulike typer tall som forskjellen mellom reelle og rasjonelle tall, antallet av tall i en mengde av reelle tall oppfatter vi veldig forskjellig fra tidligere oppfatninger. Vi stiller samme spørsmål som for andre abstrakte objekt:

- Har objektene endret seg?
- Har andre objekt overtatt plassen til de opprinnelige objektene?
- Er det vår oppfatning av virkningen av objektene som har endret seg?

Det er ikke mulig å svare på om det abstrakte objektet *lykke* har endret seg, men men rammene rundt er ulik. I noen tilfeller overtar et objekt for et eksisterende objekt, slik som uendelighet, som tidligere ble definert som stort men ubestemt, men nå har en mer presis definisjon. Og det vi tidligere kalte uendelighet har en rekke ulike uendeligheter. Matematikk har stadig flere rammer for objektene vi observerer. I kategoriteori konstrueres mange ulike rammer som gir ulike egenskaper til objektene avhengig av rammen.

Kapittel 1

Quine-Putman argumentet

Sentralt for et realistisk syn på matematiske objekter er uunnværlighetsargumentet (UA).

1.1 Bakgrunn for uunnværlighetsargumentet

Uunnværlighetsargumentet utviklet seg over tid. **Willard van Orman Quine** sa i [1981] *Success and Limits of Mathematization*:

> Vitenskap er uløselig knyttet til abstrakte objekt, som nasjoner, arter, tall, funksjoner og mengder, akkurat som epler og andre ting. Tall og funksjoner bidrar like troverdig til en fysisk teori som hypotetiske partikler.

[1] Utsagnet er en oppfølging fra noe Quine sa tredve år tidligere at å være realist om teoretiske størrelser og anti-realist om matematiske, det er å ha en *dobbelstandard.*(Quine 1951). Putman fulgte opp med en ordlyd som er mer i tråd med slik argumentet gjerne presenteres i dag.

> Kvantifisering over matematiske objekt er uunnværlig for vitenskap, både formelt og fysisk; derfor skal vi akseptere slik kvantifisering; men dette forplikter oss til å akseptere eksistensen av de aktuelle matematiske objektene. Dette argumentet kommer selvsagt fra Quine som i mange år påpekte både uunnværligheten av kvantiseringen over matematiske objekter og den intellektuelle uærligheten av å benekte eksistensen av hva en daglig forutsetter.

(Putman 1971).[2] Vi merker oss at *tall* i litt ulike sammenhenger går igjen før det blir snakk om matematiske objekter, og disse objektene som er nevnt har noe med tall å gjøre. Funksjoner virker på tall og produserer tall, mengder inneholder tall (i vitenskaplig sammenheng), tall som er resultat av ulike matematisk formulerte hypoteser kalles her for kvantisering over matematiske objekt.

---

[1] Oversatt av meg

[2] Oversatt av meg

1.1.1 Benacerrafs diktomi

Bakgrunnen for UA og Colyvans diskusjon er **Paul Benacerrafs** diktomi fra [1973] presentert i *Mathematical Truth* at alternativet til nominalisme er platonisme. Matematiske objekt er enten abstrakte eller ikke-eksisterende. Er de abstrakte kalles det for platonisme og er de ikke-eksisterende kalles det for nominalisme. Problemet med platonisme er det epistemiske, hvordan vet vi noe om uvirksomme objekt, som de abstrakte objektene er? Problemet med nominalisme er kjernen i UA: Hvordan skal vi forklare at vår beste vitenskap henviser til disse objektene? Det er ingen tredje vei, mener Benacerraf og Colyvan.

1.1.2 Colyvans formulering av uunværlighetsargumentet

I **Marc Colyvans** [2003] bok om UA *The Indispensability of Mathematics* formuleres argumentet slik i §1.2.2:

1. Vi må være ontologisk forpliktet til alle og bare de objekter som er uunnværlige for våre beste teorier om verden

2. Matematiske objekter er uunnværlige for våre beste teorier om verden

$\therefore$ Derfor må vi være ontologisk forpliktet til matematiske objekter

[3] Quine, Putman og Colyvan bruker *mathematical entities* mens andre bruker *mathematical objects* og jeg har valgt å bruke matematiske objekter. Konklusjonen er at vi *må* tro at de matematiske objektene eksisterer og vi *må* forholde oss til dem. Vi *må* godta at det er disse objektene som virker når vi forstår naturen ved hjelp av matematiske teorier.

1.1.3 Våre beste vitenskaplige teorier

Det historiske utgangspunktet for matematisk naturalisme er knyttet til Putnams og Quine påstand om matematikkens uunnværlighet for vår beste vitenskaplig innsikt fra 1971 og hans argument om at abstrakte matematiske objekter er de som *empirisk støtter våre beste vitenskaplige teorier*. Det er ikke nødvendig at de matematiske objektene er abstrakte, men Quine, Putman og Colyvan operer med at de matematiske objektene enten eksisterer som abstrakte objekter eller at de ikke eksisterer. At objektene eksisterer og ikke er abstrakte er matematisk aristotelisme som altså ikke en gang vurderes av disse tre. En fjerde mulighet er å ikke ta stilling, eller å si at det lar seg ikke gjøre å avgjøre om matematiske objekter eksisterer eller ikke-eksisterer, som **Penelope Maddy** [1997] mener. Det aristoteliske synet forsvares av **Franklin** [2014] og er altså også mitt utgangspunkt.

UA er senere blitt omformulert og Colyvans omformulerte syn om at det er den matematikken som bidrar best til å forklare vitenskaplige teorier vi er forpliktet til og ikke objektene i matematikken. Denne versjonen av UA som jeg

[3] Oversatt av meg

kaller UA2, kommer vi tilbake til etter å ha sett på hvilke matematiske objekt det originale argumentet forpliktet seg til, altså den matematikken som er del av *vår beste vitenskap* slik det ble oppfattet da argumentet ble formulert og i ti-årene etter.

1.2 Bestanddeler av UA

1.2.1 Oppbyggingen av UA

UA består av to premisser, om et av dem er feil, er konklusjonen feil. Første premiss inneholder en *hvis og bare hvis* formulering: *alle og bare*, altså en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for hvilke objekt som *Vi* er forpliktet til.

1.2.2 Uunnværlighet

Hva vil det si at matematiske objekter er uunnværlige? Colyvan skriver at for at noe skal være unnværlig må det være mulige å fjerne og at den gjenstående teorien er attraktiv uten det utelukkede objektet. Et annet spørsmål er hvor mye matematikk som er uunnværlig (og dermed ontologisk forpliktet)? Slik UA er formulert av Colyvan har våre beste teorier en rekke uunnværlige objekter knyttet til seg og en delmengde av disse er de matematiske objektene.

1.2.3 Premiss 1 - forpliktelsespremisset

> Vi må være ontologisk forpliktet til alle og bare de objekter som er uunnværlige for våre beste teorier om verden.

Hvis en mener at konklusjonen er uriktig, vil det være naturlig å vise til at et (eller begge) av premissene er ugyldige. Selv om en skulle mene at det er grunn til å tro på de uunnværlige objektene fra våre beste vitenskaplige teorier, er det ikke nødvendigvis grunn til å tro på alle uunnværlig objekter.

1.2.4 Premiss 2 - matematikkens uunnværlighet for vår beste vitenskap

Vanligvis leses Premiss 2 som et spesialtilfelle, eller en undermengde av Premiss 1, og hvis konklusjonen skal ansees som feil, holder det å tilbakevise Premiss 1. Men hvis ikke Premiss 2 er et spesialtilfelle av Premiss 1, og en mener at konklusjonen er gal, da er det mulig å tilbakevise Premiss 2 i stedet for Premiss 1. De som mener at matematikk er formalisme eller fiksjon, mener at de matematiske objektene er ikke uunnværlig for vår beste vitenskap eller vår beste forståelse av naturen.

1.2.5 Det omvendte UA

Over skrev jeg at Premiss 2 vanligvis leses som et spesialtilfelle eller en undermengde av Premiss 1. Men hva om det er omvendt? Det vil si at det er matematikk som er overmengde og vår beste vitenskap som er undermengde.

1. Vi forpliktet til all sann matematikk

2. Vår beste vitenskap har teorier om realisert og sann matematikk

∴ Derfor må vi være ontologisk forpliktet til alle realiserte matematiske objekter som vi har teorier om

Min oppfatning er at matematikk er ikke bare formler, ligninger og slutninger, men også handlinger, hendelser og at naturen utfører matematikk hele tiden. Når jorden går rundt solen realiserer jorden og solen den matematikken som Newton og Einstein formulerte. Hvert eneste atom i universet utfører alle de kompliserte beregningene som skal til for å holde et atom sammen. Vi er forpliktet til vitenskapen, ikke matematikken.

1.2.6 Den maskinbasert matematikk

1. Vi må være ontologisk forpliktet til alle og bare de objekter som er uunnværlige for våre beste teorier om verden

2. Objektene i maskinlæring er uunnværlige for vår beste vitenskap

∴ Derfor må vi være ontologisk forpliktet til objekter i maskinlæring.

Ulempen med denne versjonen er at de objektene som er i datamaskinen er utilgjengelige for oss, de ligger i et dataminne. Med stigende suksess for maskinlæring, vil dette argumentet bli mer aktuelt.

1.2.7 Naturalisme

Utgangspunktet for den opprinnelige versjonen av UA er naturalisme. Naturalisme inngår i våre beste teorier om naturen (eller den fysiske verden) har referanse til objekter og alle disse er vi ontologisk forpliktet til, det vil si at vi må tro at de eksisterer. I UA er det *bare*-delen i $P1$. Naturalisme er som nevnt i innledningen at det ikke eksisterer overnaturlige størrelser eller mirakler. Naturalisme sier at vi tror på det som kan vitenskaplig vises at eksisterer. Vi kan ikke utelukke teleportering hvis vi har vitenskaplig grunn til å tro at det eksisterer, men vi kan utelukke det hvis grunnen er ønsketenking eller tro på overnaturlige forklaringer. Colyvan bruker eksempelet med sjelevandring i stedet for teleportering. Her brukte jeg teleportering siden det er et veldokumentert kvantefenomen, men ikke et dokumentert fenomen for makroskopiske objekter.

1.2.8 Gudsargument

Om utgangspunktet ikke var naturalisme og at det finnes overnaturlige hendelser, ville det støttet argumentet for at matematiske objekt eksisterer om de matematiske objektene ble sett på som å tilhøre *en annen verden*? Eller ville det argumentet vært at siden matematiske objekt eksisterer, da finnes også andre ikke-naturlige objekter? For å spissformulere: Finnes Gud fordi matematikk eksisterer, eller er det omvendt: fordi matematikk eksisterer, da finnes Gud? Om det er slik at matematiske objekt finnes fordi Gud finnes og disse blir brukt i vår beste vitenskap, da forplikter vi kun til de matematiske objektene for vi vet ikke at de matematiske objektene finnes på grunn av Gud.

1.2.9 Bekreftelsesholisme

Bekreftelsesholisme (Confirmation holism) er det synet at teorier bekreftes eller avkreftes som et hele. Vi er ikke bare forpliktet til noen matematiske objekt, men alle. Hvis empiriske data bekrefter en teori, da er hele teorien bekreftet. Dette er *alle*-delen i $P1$.[4] Matematikk er sammenvevd, det brukes algebraiske metoder i geometri, og geometri kan brukes for å illustrere og bevise påstander i algebra som et eksempel. Det er derfor ikke lett å isolere hvilken del av matematikken som er del av en bekreftet teori vi forplikter oss til.

1.2.10 Innvendinger mot UA

Den første innvendingen som Colyvan nevner er at UA forklarer ikke hvorfor matematikk er uunnværlig, bare slår fast at slik er det. At matematikk er en vesentlig del av vår beste vitenskap, vil heller ikke forklare hvorfor matematikk er uunnværlig bare at matematikk opptrer sammen med vår beste vitenskap. Denne innvendingen gjelder ikke for et aristotelisk syn som sier at matematikken fungerer bra i naturen, nettopp fordi matematikken er en del av naturen. Et svar på denne innvendingen kan gis historisk ved å se på hvilken matematikk som er en del av vår beste vitenskap og hvordan denne har bidratt til å gjøre naturvitenskap til *den beste*. Hvilken matematikk som er blitt brukt ser vi på i de følgende kapitlene.

1.2.11 Uunnværligheten

At matematikk har vært uunnværlig for vår beste vitenskap, behøver ikke bety at dette vil gjelde i fremtiden. Grunnen til at vitenskap har vært vellykket er at ved å sette opp teorier om naturen har det vært mulig å sette opp hypoteser som har blitt bekreftet. Om vår beste vitenskap setter opp hypoteser uten bruk av matematikk, og disse hypotesene i hovedsak bekreftes, da er ikke matematikk uunnværlig, og vi trenger heller ikke tro på de matematiske objektene. Dette er en reell mulighet ved bruk av maskinlæring. I et slikt hypotetisk tilfelle vil vi ikke forstå naturen! Et interessant spørsmål er om vi forstår naturen når vi

[4] Colyvan gjør oppmerksom på at han avviker fra Quine her (§3).

forstår den matematikken som blir brukt i vellykket vitenskaplige teorier. Eller forstår vi bare matematikken?

1.2.12 Vår beste vitenskap

Om vår beste vitenskap med bruk av matematikk ikke er i stand til å lage vellykkede teorier om naturen, da er vi ikke forpliktet til å tro på de gjeldende matematiske objektene. De matematiske objektene knyttet til kvantefeltteori er ufullstendig definert og selv om mange gode resultat har blitt predikert og bekreftet er det også manglende på bekreftelser på mange prediksjoner fra teorien. Matematikere og fysikere arbeider med å få en full forståelse av kvantefeltteori og innrømmer at den bare er delvis forstått. Å formulere kvantefeltteori på en skikkelig matematisk måte er et mål for matematikere som vil ha konsekvens for å forstå hvordan verden fungerer som er beskrevet i flere populærvitenskaplige artikler av **Kevin Hartnett** [2021]. Når vi ser på utviklingen av hva vår beste vitenskap består av, vil si se at kvantefeltteori ikke var umiddelbart godtatt i starten på grunn av manglende matematisk konsistens.

Enkel matematikk

Colyvan bare kort sier at en innvendig mot UA er at selvfølgeligheten av enkel matematikk ikke er gjort rede for i UA (§4). Henvisningen er gitt til **Charles D. Parsons** [2005] argument i *Mathematics in Philosophy* del III.

Konstruktiv empirisme

Colyvan nevner i §6.3.1 **Van Fraassens** argument basert på konstruktive empirisme mot UA at selv om tall er uunnværlige for en teori, betyr det ikke at tall eksisterer. Han benekter ikke eksistensen til tall, men mener at vi kan ikke gi sannhetsverdi til ikke-observerbare størrelser. Konstruktiv empirisme sier at om en påstand har større støtte i observasjonene enn andre, betyr ikke det at teorien bak er riktig, bare at den er mer sannsynlig. Her har jeg i likhet med Colyvan basert meg på **Elliott Sober** [1993] *The Philosophical Review/Vol. 102, No. 1, Jan., 1993/Mathematics and Indispensability*. Det er verdt å merke seg at dette er ikke en nominalistisk innvending.

Manglende begrunnelse for matematikkens uunnværlighet

En annen innvending som kort gjengis av Colyvan er at UA ikke forklarer *hvorfor* matematikk er uunnværlig for vitenskap. Denne innvendingen er riktig siden grunnen til at matematikk er og har vært uunnværlig er at vitenskapens vellykkede evne til å gi prediksjoner om naturen basert på matematiske teorier slik jeg nevnte i min innvendig om *uunnværlighet* over. Argumentet mot UA gjelder ikke den reviderte versjonen av UA som viser til den matematikken som er uunnværlig for våre beste *forklaringer* og som gir de beste prediksjoner. Grunnen til å tro på eksistensen av elektroner er ikke tilstedeværelsen av dem, men at de inngår i våre beste forklaringer, slik Colyvan sier. Forklaringsversjonen kommer vi tilbake til i senere kapittel.

Nominalistisk innvending

Matematisk nominalisme har utgangspunkt i filosofisk nominalisme og er det synet at matematiske objekter ikke eksisterer. Det er mange versjoner av matematisk nominalisme som at matematikk er å sammenligne med romanfortellinger, fiksjonalisme, eller at det bare er manipulering av tekstlige uttrykk, formalisme. Det nominalistiske synet vil naturlig nok ikke godta at UA sier at vi er forpliktet til å tro på eksistensen av matematiske objekter.

Fields fiksjonalisme

I **Hartrey Fields** [1980] *Science Without Numbers* er utgangspunkt at matematikk ikke er uunnværlig og at matematiske objekt ikke eksisterer og altså unnværlig for fysikk. Han anser ikke matematikk som har referanse til abstrakte objekt som riktig. Det han foreslår er å fjerne abstrakte objekter fra matematikken gjennom omskriving. (Field, 1980, s1-2). Han godtar UA som argument, men mener at premisset er ugyldig, matematikk er ikke uunnværlig for vår beste vitenskap. Hans prosjekt er derfor å vise hvordan vitenskap kan gjøres uten matematikk med abstrakte objekter og å omskrive matematikken ved å fjerne abstrakte objekter. Som et motargument som jeg er helt enig i, nevner Colyvan **Paul A. M. Diracs** forutsigelse av positronet basert på en matematisk formel for det relativistiske elektronet. Prediksjonen lå i matematikken og er noe som er vanskelig å bortforklare hvis en mener at matematikk er unnværlig for fysikk. (§ 4.4.2)

Maddys innvending

Penelope Maddy var tilhenger av UA basert på et naturalistisk standpunkt, men utviklet seg etterhvert bort fra et nominalistisk standpunkt. Maddy [1997] *Naturalism in Mathematics* (Konklusjonen s. 233) gikk bort fra Benacerrafs diktomi og si at det gir ikke mening i å spørre om matematiske objekt eksisterer eller ikke og at matematikken får gå som den går, matematikkens autonomi.

Gitt innvendingene over er det blitt argumentert for en modifisert versjon av UA, forklaringsversjonen.

Metode innvending

En alternativ innvending jeg kommer på er at premisset for UA som ser på matematiske objekt og ikke matematisk metode. UA argumenterer for en forpliktelse til matematiske objekter og ikke til matematisk metode. En skyggeversjon av UA, kan være:

1. Vi må være forpliktet til alle og bare de metodene som er uunnværlige for våre beste teorier om verden

2. Matematiske metoder er uunnværlige for våre beste teorier om verden

∴ Derfor må vi være forpliktet til å bruke de aktuelle matematiske metodene

Denne formuleringen ser vi er konservativ og støtter ikke forsøk på alternative metoder før disse faktisk har vist resultater som kan sammenlignes med *beste vitenskap*. Siden denne innvendingen ikke går inn på hva metodene består i, sier den heller ikke noe om forpliktelse til innholdet i metodene. En innvending som kommer det nominalistiske motargumentet i møte ved å se på matematikk kun som verktøy for *vår beste vitenskap*. Gitt innvendingene mot UA er det blitt formulert en modifisert versjon av UA, forklaringsversjonen.

Statisk syn på matematiske objekter

Slik UA er presentert er *vår beste vitenskap* den delen av vitenskapen som *bruker* matematiske objekter og kommer nærmere en forståelse av naturen, mens de matematiske objektene er statiske, de er uforanderlige, men uunnværlige. Objektene kan bli oppdaget eller konstruert i forbindelse med vitenskaplig undersøkelse, men de er ikke relative til noe som helst. De matematiske objektene er alltid relative til et grunnlag, et matematisk grunnlag bestående av aksiomer og slutningsregler (logikk), men dette blir sett på som statisk i tekstene over. Innvendingen jeg har her mener jeg er vesentlig når vi skal se på hvilken matematikk det er som har vært i bruk.

1.3 Matematikkens mirakel

En forløper for UA er fysikeren **Eugene Wigners** artikkel *Den urimelige effektiviteten av matematikk i naturvitenskapene* (The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences) fra 1960. Da Wigner publiserte sin artikkel i *Communications on Pure and Applied Mathematics*, var både kvantemekanikk og den generelle relativitetsteorien store vitenskaplige suksesser. Denne er også nevnt av Colyvan i første kapittel (s. 6, §1.2.1) og fjerde kapittel (s.87, §4.5). Fra denne artikkelen er det sitatet fra avslutningen som er særlig kjent:

> Miraklet med at matematikkens språk passer for utformingen av fysikkens lover, er en fantastisk gave som vi verken forstår eller fortjener. Vi bør være takknemlige for det og håpe at det vil forbli gyldig i fremtidig forskning og vil utvide seg til, på godt og vondt, til vår glede og kanskje og forvirring, til andre deler av læring. (The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.)

[5] Suksessen ved bruk av matematikk til å forklare kvantefysikk, opplevdes utvilsomt som et *mirakel* for de som observerte utviklingen på nært hold slik Wigner gjorde. Fysikeren **Max Tegmark** [2014] *Our Mathematical Universe* snur argumentet for matematikken betydning for universet rundt og erklærer at universet[6] er matematikk og at all konsistent matematikk blir realisert i hvert sitt univers og at når vi formulerer matematikk om universet og data ikke stemmer med våre prediksjoner da har vi ikke realisert riktig matematikk, men laget en for enkel versjon.

1.3.1 Matematikk er fysikk med billige eksperimenter

Matematikeren**V.I. Arnold**[7] skriver i artikkelen fra 1998 *On teaching mathematics*:

> Matematikk er en del av fysikken. Fysikk er en eksperimentell vitenskap og en del av naturvitenskapen. Matematikk er den delen av fysikken hvor eksperimenter er billige. ... I midten av det 20. århundre var det forsøk på å skille matematikk fra fysikk. Resultatet viste seg å bli katastrofalt.

Artikkelen til Arnold er en poengtert, pedagogisk og underholdende tekst basert på et foredrag som Arnold holdt i 1997 og handler mest om den pedagogiske utfordring det er når matematikk blir unødvendig abstrakt og fraskilt fra fysikk. Arnold gir mange eksempler på at både fysikk og matematikk blir mye mer forståelig når de samspiller. Eksemplene illustrerer hvordan en god del matematiske begrep blir enklere forståelige og håndterbare når de forklares med henvisning til fysikk. Hvis matematikk er fysikk med billige eksperimenter, som Arnold sier, da tilsvarerer det mitt omvendte UA, at det er vitenskapen vi er forpliktet overfor og ikke matematiske objekt. For å foregripe teksten litt: I kategoriteori er ikke bare eksperimentene billige, hele univers er billige. Sitatet over er en epigraf i første kapittel i **Andrei Rodin** i hans bok fra 2014 *Axiomatic Method and Category Theory* som ikke sier så mye om matematiske objekt, naturalisme, platonisme, men sier desto mer om matematikkens metode og muligheten for å basere en ny matematisk metode på et nytt foreslått grunnlag for matematikk, nemlig kategoriteori. Rodin sier mellom linjene at han støtter et naturalistisk syn på vitenskap og såvidt som jeg kan tolke ham også et aristotelisk syn på matematikk.

Når fysikere forsøker å formulere matematisk hvordan naturen fungerer, tar de med seg antagelser fra sin samtid som kan bestå av fysiske vellykkede teorier, metafysiske antagelser eller nye tilnærminger basert på symmetri, analogi eller innfall.

[5] Oversatt av meg

[6] Egentlig multivers siden Tegmark mener at det eksisterer mange univers hver med sin matematikk

[7] Arnold er mest kjent for Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) teoremet

1.4 Matematiske objekter

Da UA ble formulert fra 1950 og reformulert frem til 2003, var det dominerende synet på matematikk at det er *en* matematikk og denne henger sammen slik at det er vanskelig å plukke ut de delene som ikke kan ha relevans for fysikk. Denne matematikken hadde et grunnlag basert på et sett med aksiomer og mengdelære. Det eksisterte unntak fra dette synet og ulike tanker om hvilke aksiomer som skulle være med i grunnlaget og hvilken logikk som skulle benyttes. Synet at det er bare en matematikk, er matematisk monisme. Flere grunnlag for matematikk er blitt foreslått basert på kategoriteori og vurderes seriøst av matematikere, fysikere og filosofer. Kategoriteori er ikke et grunnlag som erstatter ZFC bit for bit, men mer en ramme for å lage nye aksiomer og ny logikk. Resultatet er at kategoriteori gir matematisk pluralisme.

Kapittel 2

Matematikken i vitenskapen

I argumentet om matematikken som uunnværlig nevnes knapt hvilke matematiske objekt og hvilke deler av matematikken som er uunnværlig. I denne oppgaven oppfatter *vår beste vitenskap* som fysikk og mer spesifikt kvanteteori for å se hvilken matematikk og hvilke matematiske objekt UA sier vi er forpliktet til. Det betyr ikke at matematikk er unnværlig for annen vitenskap som biologi, økonomi eller informatikk. Valget er gjort delvis fordi fysikk har lang og sterk tradisjon for bruk av matematikk og delvis for å begrense omfanget av valgt vitenskap. Som start på moderne vitenskap med eksperimenter, hypotesetesting og matematisk formulerte teorier velger vi å begynne med Galilei.

2.0.1 Galieo Galilei

I 1623 skrev **Galileo Galilei** den berømte metaforen som fremdeles ofte siteres av fysikere.

> Naturen er en bok skrevet i matematikkens språk. Hvis vi ikke kan forstå det språket, vil vi være dømt til å vandre rundt som *i en mørk labyrint*.[1]

[2] Med utgangspunkt i å beskrive naturen i matematikkens språk startet Galilei også utviklingen av matematikk som et hjelpemiddel til å forstå naturen. Ved å fremsette matematiske teorier som var i samsvar med naturen ble det også mulig å gjøre prediksjoner om naturen i den grad naturen var i overensstemmelse med den matematiske teorien. Galilei mente altså at matematikk var vevd inn i naturen. Å avdekke dette språket gjorde han gjennom eksperimenter og matematiske utregninger som resulterte i matematiske funksjoner i overensstemmelse med empiriske data og som hadde stor grad av prediktiv evne. Men hvilken matematikk var det han fikk avdekket fra naturen? Galilei er mest kjent for sin insistering på det heliosentriske verdensbilde, konflikten med den katolske kirke og å bruke teleskop til å oppdage Saturns ringer, Jupiters måner og kratere på

[1] `https://physicsworld.com/a/the-book-of-nature/`
[2] Oversatt av meg

månen. Siden det bare er mulig å observere planetene om natten vil sekvensen av observasjoner nødvendigvis gi en rekke punkter. Galilei ønsket å finne den kontinuerlige kurven som gikk igjennom alle observasjonpunktene. Det som i dag gjøres ved hjelp av regresjonsanalyse. Utgangspunktet at det var en glatt kurve som gikk igjennom punktene var ikke verifisert og en definisjon av glatte kurver var ennå ikke laget. Ved å endre referansepunkt, altså hvor planetene blir observert fra til et rent teoretisk sted, nemlig solen, fant Galilei ut at beregningene ble mye enklere og er også grunnen til at han mente at det heliosentriske verdensbildet var mer riktig. Galilei ble kritisert for at han riktignok kunne forutsi planetenes posisjon på himmelen, men han kunne ikke forklare hvorfor planetene beveget seg som de gjorde. I lys av UA kan vi si at han mente at han var forpliktet til å mene at solen var i sentrum.

2.0.2 Isaac Newton

Isaac Newton [1687] bygget videre på Galileis utregninger av planetbaner og formulerte en formel for gravitasjon mellom to legemer i det berømte skriftet *Philosophiae naturalis principia mathematica*:

$$G_{12} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

hvor m_i er massene, γ en konstant og $r = |r_1 - r_2|$ avstanden mellom m_1 og m_2. Dette er en generell formell og ikke umiddelbart klart hvordan den skal verifiseres. Ved hjelp av denne formelen sammen med observasjoner kunne Newton gi et anslag på massen til jorden, månen og avstanden til solen. Newton fant også opp infitesemal- og differensialregningen som han skrev differensialligninger for eksempel slik:

$$m\dot{v} = -Kv + mg$$

[3] hvor prikkene representerer derivert med hensyn på tiden. Dette er en formel som har en annen formel som løsning. Sagt på en annen måte, en differensialligning har en funksjon som løsning. Newton fant en rekke ulike sammenhenger både i matematikk og astronomi. Han innførte en rekke matematiske teknikker og resultatene er imponerende. Newton valgte å unngå og samle resultatene sine i et overordnet system, dette var et bevisst valg fra hans side. Han løste et og et problem og uttalte seg i mot hypotesetesting. I motsetning til Galilei kunne Newton forklare hvorfor planetene beveget seg som de gjorde ved hjelp av formelen for tyngdekraft og bevaring av dreiemomement og energibevaring. Ved både å ha en matematisk løsning og fysiske prinsipper, var det mulig og ikke bare forutsi hva som kom til å skje, men også å forstå hva som har skjedd og hva som kommer til å skje. Vi har altså en forklaring på hvorfor planetene beveger seg som de gjør, men vi har ikke en forklaring på hva tyngdekraft er eller hvorfor energi og dreiemoment bevares. De to konserveringsprinsippene om

[3] Ligningen for et legeme som faller med fritt fall og har luftmotstand Kv. Løsningen er $v(t) = \frac{mg}{K} + Ce^{-\frac{K}{m}t}$

energi- og impulsbevaring er nødvendige restriksjoner i den matematiske formalismen og også i overensstemmelse med empiriske data. Det som i dag blir kalt de newtonske lover og newtons mekanikk var først og fremst ment for astronomi og ikke for konstruksjon av broer, bygninger eller beregninger av krefter og stabilitet i praktisk bruk, slik hans teorier blir brukt i dag. Newton mente at matematikk var en del av naturen og at vi kunne få innsikt i naturen gjennom matematikk, akkurat som Galilei mente.

2.0.3 Leonhard Euler

Euler samlet resultatene til Newton og laget en samlet formalisme. Det var Euler som lanserte den moderne notasjonen for funksjoner og infinitesimalregning med dy og dt for eksempel, i motsetning til Newtons prikk-notasjon. Euler hadde en imponerende produksjon av matematiske resultater i en lang rekke vitenskaper. Virkningsprinsippet som danner grunnlaget for store deler av naturvitenskap som mekanikk, generell relativitetsteori og også kvantemekanikk ble laget av Euler. En omformulering og forening av Newtons mekanikk kalles **prinsippet om minste virkning** også kalt Maupertuis virkningsprinsipp fra 1744 om at naturen bruker:

> Det stasjonære handlingsprinsippet - også kjent som prinsippet om minste virkning - er et variasjonsprinsipp som, når det brukes på virkningen av et mekanisk system, gir bevegelsesligningene for det systemet. Prinsippet sier at banene (dvs. løsningene av bevegelsesslikningene) er stasjonære punkter for systemets handlingsfunksjonelle. Begrepet *minst handling* er en historisk feilbetegnelse siden prinsippet ikke har noe minimalitetskrav: verdien av handlingsfunksjonen trenger ikke være minimal (selv lokalt) på banene. Minste virkning refererer til at den absolutte verdien av handlingsfunksjonen er minimert.

Prinsippet forener de ulike astronomiske resultatene til Newton i en felles formalisme. Prinsippet er utgangspunkt for Eulers og **Joseph-Louis Lagranges** mekanikk fra 1788 som ble videre reformulert av **William Hamilton** i 1833 til det som kalles Hamiltons mekanikk. Matematisk kan Hamiltons energi uttrykkes slik:

$$S = \int_0^T L(q, \dot{q})dt$$

hvor L er Lagrangefunksjonen for energi som typisk er $L = T - V$ hvor T er kinetisk energi og V er potensiell energi, $q = q(t)$, $[q = \vec{q}(t)]$ og $\dot{q} = \frac{\partial q(t)}{\partial t}$, $[\dot{q} = \dot{\vec{q}}(t)]$. Dette er en formel som har formler (egentlig funksjoner) som variabler og hvor resultatet er en ny formel. Prinsippet om minste virkning (egentlig ekstremverdi) kan uttrykkes som:

$$\delta S = 0$$

Dette prinsippet sier at det finnes en optimal sti $q(t)$ mellom 0 og T blant uendelig mange, men hvor endepunktene er låst. Blant de stiene som er mulig å velge, velges en, den med minst variasjon i virkning. Formalismen kan ligne på homotopiteori i topologi som danner utgangsunkt for homotopisk typeteori hvor det også kan eksistere en sti mellom to endepunkt er oppgaven å transformere det ene endepunktet til det andre og ikke å skille mellom de ulike stiene. De ulike stiene representerer ulike måte å bevise ulike utsagn, og det viktige er ikke hvordan bevisene gjennomføres, men at de lar seg gjennomføre.

I et rom med uendelig mange mulige stier, $q(\vec{t})$, mellom 0 og T vil noen stier ha mindre variasjon i energi enn andre. Ved å se etter minst mulig variasjon finnes det en differensialligning for stien som har denne egenskapen. Dette er en ligning som gjennom variasjonsprinsippet kan finne de differensialligningene som gir en stasjonær løsning. Det er altså to trinn: først må variasjonsprinsippet formuleres, deretter finne de tilsvarende differensialligninger som så må løses. Denne formalismen er utgangspunktet for Hamilton-formalismen som baserer seg på samme prinsipp om å finne den løsningen som er stasjonær. Når det beregnes en løsning som er stasjonær, tenkes det at systemet varierer over alle mulige fysisk realiserbare stier for et gitt intervall. Den stien som gir minst utslag har en spesiell betydning og er ofte realisert i naturen. Uttrykket minste virkningsprinsippet som er litt misvisende for det er minste endring ikke minste virkning. Dette prinsippet samler ulike løsninger på fysiske problem gitt i klassisk mekanikk slik Newton formulerte den. Med Eulers formalisme var det mulig å utvide anvendelsesområdet for fysikk betraktelig og ikke bare for astronomi.

Klassisk fysikk oppsummert

Oppsummert er matematikken i fysikken vi har sett på så langt.

1. Numerisk sammenheng gitt som en formel er en matematisk beskrivelse (Galilei)

2. En formel for å finne en formel (Newtons differensial regning)

3. En formel for å finne riktig differensialligning (Euler-Lagrange og minste virkning)

Det gjennomgående prinsippet er forenkling og tilpasning basert på at ikke alle formler er riktige (løsninger til det aktuelle problem), passer til utgangspunktene og har riktige egenskaper i form av glatt kurve, tilfredstiller en differensialligning eller gir minst virkning. Denne matematikken var på plass uten et aksiomatisk system og metoden var basert på logiske slutninger.

2.0.4 Fysikere etter Euler

Etter Euler forsøkte fysikere å formulere matematisk hvordan gasser og væsker oppførte seg under forskjellige forhold, som trykk, bevegelse (rotasjon, strømming) og temperatur. Noe også Newton og Euler også studerte. Maddy beskriver hvordan ulike hypoteser ble brukt til å formulere matematisk gasser og væskers endringer under ulike påvirkninger. Slike hypoteser brukes ved formulering av matematisk beskrivelse av ulike naturfenomen og ofte vet vi at forutsetningene er feile, men tilstrekkelig riktige. Slik som at for å beskrive havbølger, da antas det at havet er uendelig dypt. Vi vet også at sjelden er noe egentlig kontinuerlig, slik som en væskestrøm som inneholder molekyler, men gir prediksjoner tilstrekkelig nærmt de empiriske data. Det er som regel enklere å regne med kontinuerlige størrelser.

2.0.5 Maddy om utviklingen av matematikken i fysikken

Penelope Maddy [2011] beskriver i *Defending the axioms: on the philosophical foundations of set theory* beskriver hvordan Newton løste en rekke fysiske probleme ved å produsere en rekke løsrevne ligninger som var empirisk riktige og som gjorde en i stand til å foreta en rekke forutsigelser om naturen, men ligningene vanskeliggjorde mer generell anvendelse siden de ikke var ordnet i et mer generelt system. Faktisk var ikke Newton interessert i et slikt system, han var interessert i å løse hvert problem for seg. For den historiske gjennomgangen støtter hun seg til verket av **Morris Kline** [1972]: *Mathematical thought from ancient to modern times*. Mens historisk var Newtons fysikk hovedsaklig knyttet til astronomi er i dag Newtons mekanikk først og fremst knyttet til praktiske problemer knyttet til hverdagslig fysikk slik som legemer som akselerer, friksjon, statikk, konstruksjon av maskiner, broer og bygninger. Newtons fysikk har fortsatt anvendelse for astronomi, selv om det gjerne er generell relativitetsteori som knyttes til astronomi i dag. Euler samlet og videreutviklet Newtons resultater i et mer samlende system at Newtons mekanikk ble anvendelig. Eksemplene som Maddy gir videre i innledningen til sitt forsvar for standardaksiomene i aritmetikk består delvis av hvordan matematikk utviklet seg basert på datidens oppfatning av naturen og hvordan matematikken utviklet seg rent teoretisk. Selv om utgangspunktet i fysiske teorier kan være feil, slik som at gass består av en rekke mikroskopiske små knallharde kuler, eller at en væske er kontinuerlig, blir ofte de matematiske resultatene overensstemmelse med empiriske data. Et interessant problem er knyttet til distinksjonen mellom diskret og kontinuerlig. Selv om for eksempel en gass er diskrete siden den inneholder et visst antall molekyler, er det ofte mer hensiktsmessig å se på en gass som en kontinuerlig substans. Maddy gir noen eksempler på hvordan utregninger forenkles ved å ta utgangspunkt i kontinuerlige variabler selv hvor utgangspunktet er et antall.

En fordel med å bruke kontinuerlige kurver er at de er enklere å analysere, blant annet å finne topp- og bunnpunkt gjennom derivasjon. Slike teknikker brukes mye i økonomi, biologi, statistikk i tillegg til fysikk. I de fleste tilfellene er tapet av nøyaktighet så lite at overgang fra diskrete til kontinuerlig oppveies av evne til modellbygging og hypotesetesting. I noen få eksempler kan det være hensiktsmessig å anta at målingene er diskrete i stedet for kontinuerlig. Da **Max Planck** i 1900, lanserte virkningskvantet var han overbevist om at frekvensen til lyset var en kontinuerlig størrelse, men antok at den var diskrete for å forenkle utregningene og fikk også et uttrykk som var i overensstemmelse med empiriske data. Denne postuleringen av et virkningskvant som Planck anså kun å være et matematisk triks, ble starten på kvantemekanikken. **Albert Einstein** antok i 1905 at den diskrete frekvensen til lys var fysisk relevant og at det kvantiserte energispekteret representerte en slags partikkel, det vi idag kaller et foton. Da Einstein senere snakket om forholdet mellom matematikk og fysikk, nevnte han ofte Gud og hvordan Gud ville at verden skulle fungere, altså at når matematikken ble klar da så vi Guds intensjoner med naturen. Det må presiseres at snakk om Gud og Guds intensjoner var billedlig talt av Einstein.

2.1 Matematikkens fremtid

Selv om matematikk har vært uunnværlig for vitenskap er det ikke sikkert at matematikk fortsatt vil være det og Wigner antyder i sitatet over akkurat det som et håp. Da Quine-Putman formulerte og **Marc Colyvan** omformulerte UA, betviltes ikke at matematikk har hatt en essensiell rolle for vår mest effektive vitenskap. Men det settes ikke spørsmål ved om matematikk også vil fortsette å ha en rolle for den beste forklaring i vitenskap. Heller ikke diskuteres det hvilken matematikk som vil være uunnværlig, eller hvem eller hva som skal utforme den eller hvordan slik matematikk skal utføres. Hvorfor matematikk passer så godt til vitenskap, er en vesentlig del av diskusjonen rundt UA. Å forstå hvor godt matematikk passer til vitenskap er også en del av diskusjonene. Om vi slik Wigner sa *fortjener* at matematikken passer til vitenskap, er et iøynefallende og interessant utsagn som vi ikke vil gå nærmere inn på. For å forstå litt mer av bakgrunnen til UA mener jeg at det er nødvendig å forstå hvilken matematikk som er den uunnværlige og hvorfor UA er så omdiskutert.

2.1.1 Matematikkens mirakel

Penelope Maddy gir en kort beskrivelse av hvordan matematikk og fysikk har vekselvirket fra Galileo, Newton og fremover. Maddy beskriver hvordan matematikk forgrenet seg med Newton og ble forent med Euler. Før formulering av standardaksiomene (ZFC) og forsøket på å forene matematikk formulert ved hjelp av logikk, var matematikken veldig forgrenet i følge Maddy. Derfor var det et behov for en forening om et felles grunnlag som ble gitt gjennom aksiomer for aritmetikk basert på mengdelære. Jeg er uenig i at dette er en forening som kan sammenlignes med Eulers formalisme. ZFC er ikke på samme måte like anvendelig og egne kategorier i kategoriteori er laget for å bøte på denne svakheten. Det er riktig at ZFC-aksiomene med mengdelære laget et grunnlag for mange deler av matematikk, men det er samtidig også starten på enda en forgrening i matematikken, *Det store skisma*, skillet mellom anvendt og abstrakt matematikk. Matematikken ble enda mer abstrakt og synet på matematikk som et mulig prosjekt uten tilknytning til fysikk. Ulempen med aksiomene er at de er ikke praktisk anvendelige eller noe som matematikere eller fysikere forholder seg til. Bare en liten gruppe matematikere forholder seg aktivt til aksiomene, men mange filosofer har meninger om aksiomene. Aksiomene markerte synet på matematikk som noe fast og uforanderlig, og også noe abstrakt og uten umiddelbar anvendelse. I siste instans gir aksiomene opphav til UA.

2.1.2 Videreutvikling av Newtons mekanikk

Da **William Hamilton** reformulerte Newtons lover i 1833 med en ny formalisme, var dette ikke bare en omskriving av Newtons mekanikk, men utarbeidelse av en mer generell ramme hvor Newtons mekanikk passet inn. Hamilton tok utgangspunkt i Euler-Lagrange formalismen og videreutviklet den slik at de fysiske sidene av formalismen ble tydeligere. En mekanikk som skulle få stor betydning for praktiske beregninger av krefter da den industrielle revolusjon startet.

Prinsippet og Hamiltons formulering var utgangspunktet for Diracs formulering av kvantemekanikk i 1929 og **Albert Einsteins** formulering av den generelle relativitetsteorien i 1915. En rekke fysikere mente at matematikken var i naturen og at fysikk går ut på å forstå det språket naturen er skrevet i, som Galilei sa. Blant disse fysikerne finner vi **Niels Bohr**, **Werner Heisenberg**, **Paul Dirac**, **Ernst Schrödinger**, **Wolfgang Pauli** og **Albert Einstein**. Denne formalismen som gjelder for fysiske systemer er generell og ikke knyttet til tid og geometri. Samme periode rundt 1920 som Hamiltons formalisme ble tatt i bruk i de to store vitenskaplige revolusjonene som **Thomas Kuhn** [1962] beskriver i *The Structure of Scientific Revolutions*, kvantemekanikk og gravitasjonsteori, gjennomgikk matematikk en grunnlagskrise. Hva var matematikkens grunnlag, hva var matematikk i stand til å si noe om, og hva er riktig metode for matematikk? Krisen bestod i at forsøket på å formulere matematikk som logikk ikke var mulig uten å introdusere paradokser. Krisen ble ytterlige forsterket ved at **Gödel** viste at et konsistent og tilstrekkelig avansert matematisk system ikke kunne være komplett - det vil si at ikke alle utsagn i systemet kunne bevises selv om de var riktige. En ødeleggende effekt av denne krisen var at matematikk ble sett på som uavhengig av fysikk. Noe som ble fulgt opp av det franske matematikkollektivet Bourbaki som ytterlig bidro til å gjøre matematikken abstrakt. Andre deler av matematikk som ble tatt i bruk av de to revolusjonære fysiske teoriene er Riemanns geometri i den generelle relativitetsteorien og for kvantemekanikk en god del ulike typer matematikk, slik som Hilbertrom, matrise- og vektorregning, ikke-kommuterende algebra, funksjonalanalyse og regning med funksjoner med resultater i det komplekse planet. Listen over ulike grener av matematikk som tas i bruk i kvantemekanikk utvides stadig, her er det verdt å nevne kategoriteori spesielt.

2.2 UA og matematikken før 1900

Vi har sett at matematikken før de vitenskaplige revolusjonene kvante- og relativitetsteori representerte, bestod av optimaliseringsproblem, om å finne den best tilpasning til datapunkter, finne løsning på differensialligninger og å finne de riktig (optimale) differensialligningene. Disse formlene inneholdt funksjoner over flere variabler, vektorer og ulike referansesystemer. Det var ingen presis definisjon av reelle tall og kontinuitet. At de reelle tallene ikke er tellbare var ennå ikke oppdaget. Den matematikken som var i bruk er den samme som brukes i dag når mekaniske, broer, tårn og bygninger konstrueres. Denne matematikken var ikke basert på noe felles grunnlag.

Del II

Filosofi

2.3 Filosofi og matematikk

Den filosofiske litteraturen om matematikk og filosofi er dominert av diskusjon mellom to hovedsyn på matematikk, det platonske og det nominalistiske. Det platonske synet ser på matematikk som noe helt spesielt og har overnaturlige elementer, mens det nominalistiske synet fornekter sammenhengen mellom matematikk og naturen. Men det finnes et tredje syn, og det synet har eksistert siden Aristoteles. Dette synet inneholder ikke noe overnaturlig og gir en forklaring på hvorfor matematikk fungerer for å forklare naturen. Selv om koblingen mellom natur, representert ved fysikk[4] og matematikk ikke alltid er klar og de matematiske objektene er av en annen type enn objektene i naturen, er vi forpliktet til å tro på matematiske objekt i følge uunnværlighetsargumentet (UA) som vi vil bruke som utgangspunkt. UA gir en forpliktelse som bygger på tiltro til forklaringer i fysikk. For å forstå hvordan matematikk er uunnværlig for fysikk, er det nødvendig å se på hvilken matematikk det er fysikk bruker. Hva er grunnlaget til den matematikk som er nødvendig for fysikk? Er det mulig å skille denne matematikken fra annen type matematikk? Litteraturen om matematikkens filosofi inneholder mye om matematikkens grunnlag, hvilke aksiomer som er nødvendige og hvilken type logikk som må brukes. Min oppfatning er at mange av disse tekstene baserer seg på en oppfatning av matematikk som noe helt spesielt og ikke som del av undersøkelse av naturen. Mitt syn er at kategoriteori er et godt grunnlag for fysikk, og et bedre grunnlag enn alternativene. Matematikk har fått en ny aktør og er ikke lenger en rent menneskelig aktivitet, nemlig datamaskiner. Matematikk er uunnværlig for datamaskiner på et grunnleggende nivå, men det er først og fremst hvordan samme matematikk som er uunnværlig for fysikk også er uunnværlig for maskinlæring som vil bli tatt opp. De to hovedlinjene i oppgaven møtes i en avsluttende vurdering av hva vi er forpliktet til for å forstå naturen og hvordan datamaskiner kan hjelpe oss med det.

2.4 Naturalisme

Det er stor enighet om at *Metafysisk naturalisme* er det synet at naturen (eller verden) er alt som eksisterer, naturen uttømmer virkeligheten, det finnes ingenting overnaturlig og at *Epistemisk naturalisme* er at vitenskaplige metoder er de som bør brukes for å undersøke alle deler av virkeligheten. **Graham Oppy** [2020] i *Naturalism* i tidsskriftet *Think*. Hva vil et naturalistisk syn på matematikk være? For matematikk oppfattes gjerne som å handle om rent abstrakte objekter. Sentralt i diskusjonen om matematikkens plass i et naturalistisk syn på verden står *Quine-Putmans* uunnværlighetsargumenter (UA) som sier at vi er ontologisk forpliktet til å tro på matematiske objekt siden matematikk er uunnværlig for vår beste vitenskap. Vi er forpliktet til metodene i vår beste vitenskaplige forklaringer og innholdet i disse metodene. Siden matematikk og vitenskap har ulike metoder, er vi forpliktet til å skrive om matematikken til å

[4] gjelder også annen naturvitenskap

følge vitenskaplige metoder? Trenger vi en revisjon av matematikken? Slagordet til **Arnold** om at matematikk er fysikk med billige eksperimenter, er akkurat en slik forpliktelse til vitenskaplige metoder. Og å foreslå et nytt grunnlag for matematikk slik **Lawvere** og **Voevodsky** har gjort, er en revisjon av matematikken. Et argumentet for å gå imot naturalisme er et ønske eller tro på at virkeligheten ikke bare består av naturen, det vil si at det finnes ikke-natur og det kan være i form av moralske verdier eller overnaturlige enheter. **James Brown** [2012] sier eksplisitt i *Platonism, Naturalism, and Mathematical Knowledge* s.12 i sitt forsvar av platonisme at en av grunnene er å tro på eksistensen av andre objekter enn de rent fysiske. At Brown ønsker at noe er tilfelle, behøver ikke bety at det er tilfelle, men det kan absolutt være tilfelle for ham! Selvsagt er ikke alle naturalister og selv om en er naturalist i utgangspunktet, hva betyr dette for matematikk? I følge **Maddy** betyr det at vi skal la matematikken være i fred. Og som vi har sett, i følge UA, forplikter vi oss til å tro at matematiske objekt eksisterer.

2.5 Hva er matematikk?

Matematikk slik det allment oppfattes har en rekke assosiasjoner, det har noe med tall å gjøre, det er nyttig, det er abstrakt, det er komplisert, det er eksakt, det er formler, det handler om mønstre og former. Matematikk oppfattes også som uforanderlig, uavhengig av hva vi måtte mene og som udiskutabelt. Det finnes ingen enhetlig definisjon av hva matematikk er og hva som legges i hva matematikk er, og fagfeltet utvides stadig. Matematikk regner vi med at begynte for flere tusen år siden av sumerne som hjelp til regnskap. Det vi idag kaller bokføring. De greske filosofene var opptatt av geometri for å få innsikt i sammenheng mellom ulike idéer og ikke så mye av den praktiske bruken. Platon og Aristoteles hadde grunnleggende ulik oppfatning av hva matematikk representert ved geometri og aritmetikk er, og om matematiske begrep eksisterte rent abstrakt eller ikke. Dette skillet finnes fortsatt i oppfatningen av matematikk. Oppfatningen av forholdet mellom natur og matematikk spriker mellom at naturen er matematisk (**Max Tegmark**) til at det ikke er noe forhold (fiksjonalisme) mellom matematikk og naturen. Fysikeren **Eugene Wigner** oppfattet matematikk som et mirakel når det gjelder å forstå naturen. Det er min oppfatning at matematikk er en del av naturen, og at vi gjennom studier av naturen forstår matematikk bedre. Min oppfatning kommer vi mer grundig inn på i avsnittet om *metafysisk grunnlag for matematikk*. Matematikk utføres på ulike måter som konstruksjon i geometri, utregning i aritmetikk, manipulering av symboler i algebra, simulering i fysikk, bevisføring i matematisk analyse og fysiske demonstrasjoner. Min oppfatning er at matematikk handler om idealiserte konsept og sammenhengen mellom disse. Skillet mellom ren, også kalt abstrakt, og anvendt matematikk er kunstig. Den delen av matematikk som tradisjonelt har blitt ansett å være uten praktisk anvendelse, som tallteori, gruppeteori og abstrakt algebra, finner stadig anvendelse. Historisk er det mange eksempler på at abstrakt matematikk har blitt nyttig for fysikk. Eksempler her er ikke-euklidsk geometri som anvendes i gravitasjonsteori, matriseregning, ikke-kommutative algebra, komplekse vektorrom (Hilbertrom) som anvendes i kvanteteori og gruppeteori som anvendes i kvarkfysikk og krystallografi, for å nevne noen. I nyere tid dukker det opp eksempler på at fysiske teorier benytter matematikk som er blitt ansett å ikke ha noen som helst betydning for fysikk. Dette gjelder for eksempel superstreng-, måneskyggeteorier og monstergrupper som er nevnt i disse artiklene. Se artiklene på `https://www.quantamagazine.org/` referert i *Quantamagazine* i Bibliografien.

En av grunnene til at slike anvendelser er overraskende er at fysikk og matematikk har utviklet seg hver for seg i isolasjon uten felles begrepsforståelse eller felles syntaks. Et av problemene med å putte matematikk i en pose og kalle det for rent abstrakt er at matematikk er veldig diversifisert. Noen deler av matematikk er det veldig vanskelig å se at noen gang skal ha noen anvendelse, mens for andre deler gis mulig anvendelse umiddelbart.

Matematikk og fysikk har vært helt grunnleggende for utviklingen av datamaskiner, mens matematikk har vært helt grunnleggende for virkemåten til datamaskiner gjennom utvikling av programmeringsspråk og utviklingen av informatikk som sier hva datamaskiner kan gjøre med begrensede ressurser som tid, minne og maskinvare. Datamaskiner bruker i dag mye av den matematikken som tidligere ble ansett for å være abstrakt og uten praktisk anvendelse, slik som tall- og gruppeteori, endelige tallkropper og elliptiske kurver for kryptering. Matematiske utsagn sier noe om sammenheng mellom ulike matematiske objekt og bevises ved hjelp av en konsistent metode. Denne metoden kan være logisk, men også visuell i form av figurer, eller i form av demonstrasjoner som i Euklids geometri ved konstruksjon med passer og linjal. I klassisk euklidsk geometri vil for eksempel en konstruksjon av et dobbelt så stort kvadrat bevise at det er mulig å doble et kvadrat gjennom konstruksjon. Å bevise at det ikke er mulig å konstruere et kvadrat med like stor flate som en sirkel ved hjelp av passer og linjal, kan ikke gjøres med konstruksjon, men er fullt mulig med formell matematikk. **Brown** [1999] gir eksempler på at ved hjelp av figurer er det mulig å bevise en del aritmetiske påstander i *Philosophy of mathematics: an introduction to the world of proofs and pictures*. Ved for eksempel å reorganisere steiner på en flate er det også mulig å bevise ulike matematiske påstander, som at 57 ikke er et primtall. Brown sier at bruken av figurer i matematikklitteraturen blir sett på som en slags popularisering av matematikken og at jo mindre figurer det er i en matematisk tekst, jo mer seriøs er teksten. Når vi teller kan vi si at vi utfører enkel matematikk, men også naturen teller slik som blomster som blomstrer annet hvert år, eller sikadene som har primtalls år mellom hver oppblomstringsperiode. Eksempelet med sikadene er et mye brukt eksempel i matematikkens filosofi som illustrasjon for sammenhengen mellom verden og matematikk. Et annet eksempel som jeg finner på: Når regn faller ned i en brønn foretas addisjon og over tid foretas multiplikasjon (#regndråper per sekund $\cdot$ #sekunder). Formulerer vi dette symbolsk og legger inn noen tall blir det ikke nøyaktig, fordi i en slik overgang gjøres mange idealiseringer. Men skriver vi det generelt som over vil det for en eller annen verdi av #regndråper bli riktig, eller riktig nok. Dendrokronologi (årringer i trær) og resonanser mellom ulike perioder i Saturns ringer er også en manifestering av hele tall som matematiske objekter hvor vi og kan se de fysiske virkningene av tallene, mener jeg. Handlinger, illustrasjoner og fysiske begivenheter er ulike måter å utføre matematikk på. Selv om vi kan argumentere for at matematikk finnes i naturen, er det ikke all matematikk som har en direkte eller klar fysisk realisering.

Heller ikke all matematikk har forklarende tyngde som det heter i den videreutviklede versjonen av UA, argumentet om at matematikk er uunnværlighet for vår beste vitenskap. Det har historisk vist seg både vanskelig og skadelig for utviklingen av matematikken å redusere matematikken til kun den delen som ansees som anvendelig og nyttig. Å ta bort de delene av matematikken som er intuitivt er feil sett fra et eller annet syn har også historisk vist seg å være skadelig. Eksempler på dette er komplekse tall med den imaginære enhet[5]. Det har vært, og er en pågående diskusjon om hvilken logiske operasjoner som bør være tillatt i matematikk, skillet mellom konstruktiv og klassisk matematikk. Matematikk er avhengig av logiske slutninger og et sentralt prinsipp i klassisk matematikk er prinsippet om bruk av ekskluderende middel. Prinsippet om ekskluderende middel er ikke del av den matematikken som kalles intuitiv eller konstruktiv matematikk. Brown [1999] ironiserer over konstruktiv matematikk i gjennomgangen av konstruktivismen. Han har følgende eksempel (s. 118):

$$p = 3 \text{ om Goldbachs sats er riktig og } 5 \text{ om den er feil}$$

Er p et primtall? Å hoppe til at både 3 og 5 er primtall, så derfor er p et primtall sier Brown er galt i følge konstruktiv matematikk. Først må det bevises om Goldbachs sats er riktig. Tanken her er ikke å snakke ned konstruktiv matematikk, bare peke på at ved å begrense lovlige operasjoner i logikk, så reduseres hva som er mulig å vise matematisk. Andre typer logikk er også mulig, som parakonsistent og aletisk logikk. Gjennom kategoriteori er det mulig å konstruere ulike typer logikk. Matematikk kan ofte presenteres formelt ved hjelp av formler, men jeg mener at matematikk ikke begrenser seg til dette, selv om det er den type matematikk denne oppgaven i hovedsak vil handle om. Eksempler på matematikk som ikke presenteres formelt nevnte jeg over inkluderer figurer, handlinger, hendelser og kan inkludere lys- og lydfenomen. Den formelle matematikken uttrykkes ved hjelp av formler og symboler med en klar syntaks.

2.6 Metafysisk grunnlag for matematikk

Det filosofiske synet på hva matematiske objekt er kan deles i to:

- det realistiske synet (matematiske objekter eksisterer)
- det anti-realistiske synet (matematiske objekter eksisterer ikke)

[5] $i = \sqrt{-1}$

Det anti-realistiske synet har en rekke undergrupper og samlet gjerne kalles for det nominalistiske synet. Det er uenighet om nominalisme er både anti-platonisme og anti-realisme, men vi vil her oppfatte nominalisme som anti-realistisk slik konvensjonen er. Noen oppfatter nominalistisk syn som anti-platonsk, og dermed åpner opp for to muligheter: anti-realistisk og Aristotelisk, men det altså ikke slik uttrykket vil bli brukt her. Et nominalistisk syn som ikke er anti-realistisk, vil jeg mene nødvendigvis er Aristotelisk. Det er også mulighet for at deler av matematikken er platonsk og deler er aristotelisk, et litt problematisk syn fordi da vil overgangen mellom disse behøve en spesiell oppmerksomhet. men jeg vil ikke argumentere for en slik overgang. Uansett er det ikke viktig hvilken pose matematikk legges i, så lenge det ikke gir forvirring. Matematisk strukturalisme finnes både i platonsk og nominalistisk versjoner. Struktur i matematikk vil bli behandlet uten referanse til matematisk strukturalisme. Det realistiske synet, at matematiske objekter eksisterer, kan deles i to:

- det platonske - de matematiske objektene er rent abstrakte, uten virkning i tid og rom
- det aristoteliske - de matematiske objektene er i naturen, alternativt virker i naturen

Det aristoteliske synet har kommet i skyggen av det platonske på tross av at dette synet har mange fordeler som det platonske mangler. Slik jeg ser det er det aristoteliske synet mer pedagogisk forståelig og mer i tråd med hva fysikere mener og har ment i hundrevis av år. At det er mer pedagogisk henger sammen med at alle mennesker lærer grunnleggende matematikk ved hjelp av enten måling eller telling. Måling kan være vekt, lengde eller volum, mens telling er over hva vi enn mener er likt nok til å telles.

2.6.1 Logisisme

Synet på at matematikk kan reduseres til logikk kalles *logisisme* og har hatt stor betydning i formuleringen av **Frege** og **Russells** program for å samle all matematikk i et reduksjonistisk system basert på mengder og klassisk logikk i begynnelsen av 1900-tallet. Dette programmet strandet da Russell oppdaget inkonsistens i mengdelæren til Frege. I mengdelæren var det mulig å ha mengder av mengder, men da Russell konstruerte en mengde som ikke inneholdt seg selv som mengde, da oppdaget han et paradoks, det som i dag heter Russells paradoks. Russell mente at hovedidéen lot seg redde og at matematikk lot seg grunnlegge på logikk og mengdelære. Et av forsøkene på å bli kvitt paradokset i mengdelæren var å innføre typeteori og å lage et hierarki av typer. Typeteori er kort oppsummert i Appendix. Det første forsøket på å lage en typeteori gav flere problemer enn det løste, så Russell forlot det standpunktet. Senere forsøk på å bruke typeteori har løst de problemene som var med tidligere versjoner og å basere matematikkens grunnlag på typeteori er ekvivalent med mengdelære. Men syntaksen er ulik. Det finnes ulike typeteorier, mange har anvendelse i programmering, men kan også brukes til reformulering av matematikk basert på mengder. Logisisme danner grunnlaget for hvordan datamaskiner fungerer og for standard aksiomene, ZFC, men også for oppfatningen av matematikk som noe adskilt fra verden og noe abstrakt. **Alan Turing** hadde stor kunnskap om **Gödels** og **Russells** arbeid med logikk og matematikk da han formulerte sin teori for universelle datamaskiner. Det er verdt å legge merke til at den fysikk Turing refererte til er klassisk og ikke spesielt komplisert. Maskinen som regnet, utførte noe som er realiserbart med en mekanisk maskin.

2.6.2 Platonsk matematikk

Den allmenne oppfatingen er at Platon mente at det eksisterte en egen idéverden hvor blant annet matematiske idéer eksisterte. Når vi konstruerer en sirkel ved hjelp av en passer, ville vi aldri lage en perfekt sirkel, men vi får en svak fornemmelse av den perfekte sirkelen som eksisterer i det som filosofer i dag kaller *Platons himmel*.[6] Tilhengerne av platonsk matematikk plasserer alle matematiske objekt i denne himmelen, tall, funksjoner, mengder og relasjoner og mener at disse objektene er uten virkning i tid og rom, de er uvirksomme og rent abstrakte. Hvis dette er tilfelle, har tilhengerne av dette synet et forklaringsproblem med hensyn til hvordan vi har kunnskap om disse objektene. Ulike forklaringsstrategier eksisterer, som at vi ser objektene med *sjelens øye*[7] og at det finnes korrespondanse mellom fysiske objekt og abstrakte objekt. Begge strategier nevnes av Brown. Finnes det et abstrakt rom, Platons himmel, som inneholder andre abstrakte størrelser, er det ingenting i veien for å postulere både matematisk åpenbaringer eller en eller annen form for medfødt innsikt slik Platon mente. *Platons himmel* er uansett ikke et naturlig objekt og når det først er åpnet opp for en overnaturlig størrelse er det mulig å fylle på med flere. Mitt syn er at matematikk er en del av naturen, er vevd inn i alt fysisk, og at vi idealiserer over disse når vi oppfinner matematikk. Selv om matematikk er vevd inn i naturen og vi kan til en viss grad få innsikt i hva denne matematikken består av, er vår formulering av matematikken ikke uavhengig av oss. Konsekvensen av et platonsk syn sier **Øystein Linnebo** [2009(2018)] i SEP-artikkelen *Platonism in the Philosophy of Mathematics* er at vi oppdager, heller enn oppfinner matematikk. Oppfatter vi matematikk som bare aritmetikk, kan vi si at hver gang vi multipliserer to tall, da *oppdager* vi et nytt tall. Tilsvarende gjelder for andre deler av matematikken som er klart definert og som har både klare aksiomer og slutningsregler. Men hvis vi utfører matematikk innenfor en ramme hvor vi konstruerer ulike aksiomer og spilleregler slik det er mulig å gjøre i kategoriteori, da oppfinner vi matematikk.

2.6.3 Matematisk monisme

Matematisk monisme er oppfatningen av at det finnes bare en type matematikk, at matematikk representerer et enhetlig konsistent system gitt gjennom det som aksepteres som gyldig aksiomer og bundet til de slutningene som er logisk mulig.

[6] Uttrykkes brukes helt uten ironi av Brown.
[7] Browns uttrykk

Tilhengerne av dette synet vil mene at matematikk oppdages og ikke oppfinnes. Matematikk som ikke er konsistent med den matematikk som ansees som riktig, vil da bli ansett for å være *ikke-riktig* matematikk, eller noe annet enn matematikk. **Penelope Maddy** [2011] i *Defending the Axioms* avfeier kategoriteori som et grunnlag for matematikk i en fotnote! (side 34 fotnote 68):

> For eksempel er det velkjent at en kategoriteoretisk formulering er mer naturlig enn mengdelæren for mange matematiske formål, men dette skiller ikke kategoriteori fra diverse andre grener av matematikk med sine egne vokabularer og teknikker. Hva som skiller kategoriteoriens krav om den kan gi et grunnlag for av den typen beskrevet i teksten, et alternativ til mengdelærens grunnlag, men det gjenstår å se om dette lar seg gjøre effektivt for hele matematikken (inkludert høyere ordens mengdelære). I alle tilfeller, det som betyr noe er at mengdelære ble utviklet delvis for å gjøre denne jobben, og dette faktum har konsekvenser for riktig bruk.

[8] Det er ikke så rart at Maddy misforstår kategoriteori som et grunnlag for matematikk siden hun uvilkårlig sammenligner det med grunnlaget hun kjenner best. Hun misforstår når hun sier *hele matematikken* fordi hver kategori vil representere sin egen matematikk, med sine implisitte aksiomer og logikk. Det er heller ikke helt riktig å si at kategoriteori er et grunnlag for matematikk siden det en struktur som binder sammen flere mulige grunnlag. **Michele Friend** [2014] i *Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics* som forsvarer matematisk pluralisme kommenterer debatten om kategoriteori eller mengdelære er riktig grunnlag for matematikk også i en fotnote! (s. 24 fotnote 25):

> Det er en opphetet debatt mellom kategoriteoretikere og mengdeteoretikerne om *Grunnlaget for matematikk* på nettet. Argumentet er om hvorvidt mengdelære kan si alt som kategoriteori kan, da er det en mer grunnleggende teori, eller om kategoriteori kan si alt mengdelære kan, da er den mer grunnleggende. Det ser ut som, sett utenifra, at for dette punktet i debatten, disse to teoriene, eller programmene, klatrer på hverandre. For tiden er det ingen ende på debatten.

[9] Alternativt kan vi si at mengdelære og kategoriteori belyser hverandre gjennom en dialektisk prosess. Da første versjon av kategori for mengder som alternativt grunnlag for matematikk, ble lansert var ikke **Lawveres** mening at dette skulle oppfattes som et fullstendig grunnlag, men mer som et grunnlag å arbeide utifra. Denne kategorien ble laget for å være en mer pedagogisk innføring i matematisk tankegang og som et nytt aksiometisk grunnlag og metode.

[8]Oversatt av meg
[9]Oversatt av meg

2.6.4 Matematisk pluralisme

Selv om **Penelope Maddy** har forsvart et realistisk syn på matematikk og mener i dag at det har ikke noe for seg å spørre om hvor de matematiske objektene finnes, så forsvarer hun aksiomene, som hun selv uttrykker det. Det vil si at hun forsvarer det som er standardgrunnlaget, mengdelære med aksiomene ZFC med klassisk logikk. Tilhengerne av at kategoriteori som grunnlag for matematikk må nødvendigvis forsvare et pluralistisk syn siden ulike kategorier ikke behøver å være konsistente seg i mellom, selv om de er indre konsistent. Forsvarere av pluralisme er **Graham Priest** [2014] i kapittelet *Kapittel 16 - From the Foundations of Mathematics to Mathematical Pluralism* og **Michele Friend** [2014] i *Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics* i tillegg til forsvarere av kategoriteori. Det vanlig argumentet mot matematisk pluralisme er at om matematikken er inkonsistent, da er alt mulig og det blir en eksplosjon av tvilsomme resultater. Men ved å begrense flertydighet og ikke-klassisk logikk, er det mulig å begrense den inkonsistente eller alternative matematikken. Å bygge alternative matematiske univers basert på ikke-klassisk logikk, aletisk logikk, med parakonsistent logikk som den mest kjente er Priests store prosjekt som han har litt om på slutten av artikkelen.

2.6.5 Matematisk autonomi

Penelope Maddy forlot det naturalistiske synet på matematikk og mener at matematikk får klare seg selv uten hjelp, matematikken bør være *autonom*, det vil si at matematikk bør få være i fred slik **Wittgenstein** [1953] sa i *Filosofiske undersøkelser* §124:

> Filosofien må på ingen måte gripe inn i den faktiske språkbruken,
> alt i alt kan den bare beskrive den.
> For den kan heller ikke begrunne den.
> Den lar alt være som den er.
> Den lar matematikken være som den er, og ingen matematisk oppdagelse kan bringe den videre. Et *vitalt problem i den matematiske logikk* er for oss et matematisk problem som ethvert annet.

[10] Denne paragrafen til Wittgenstein nevnes av mange i sine gjennomganger av matematikkens filosofi. Å la matematikken være som den er, betyr å være konservativ med hensyn til matematikken. Alternativet er å være revolusjonær slik Voevodsky og tilhengerne av HoTT som mener at matematikken må/bør omskrives. Resultatet av *å la matematikken være som den er* beskriver Rodin som det katastrofale resultat at matematikk fjernet seg fra fysikk og ble stadig mer abstrakt og stadig mindre tilgjengelig for andre fag. I boken til **Stewart Shapiro** [2000] *Thinking about mathematics* beskrives i innledningen hvordan spesialisering i filosofi, matematikk og fysikk gjør en interfaglig diskusjon stadig vanskeligere. Det er her kategoriteori kan fungere som en ramme for en ny diskusjon mellom fagene. Ulempen med å la matematikerne være autonome er

[10] Norsk utgave fra 2010

at matematikkfaget kan fjerne seg fra fysikk og at matematikken kan bli for komplisert og abstrakt. Noen vil kanskje ikke se på dette som et problem. Alle vil være enige i at det er en ulempe hvis matematikere og fysikere arbeider med de samme problemene, men med ulik terminologi slik at de ikke så enkelt forstår at det er samme problem. Et eksempel på samme problem med ulik terminologi gir **David Corfield** [2003] (s.23) i boken *Towards a philosophy of real mathematics* med det som i fysikk kalles gaugepotensial og i matematikk kalles forbindelses-fiberbunter.

2.6.6 Aristotelisk matematikk

Aristoteles mente at matematiske objekter eksisterer (som Platon), men at vi har kunnskap om disse gjennom observasjoner av naturen. Aristoteles mente at matematikk er studiet av kvantitet hvor kontinuerlig kvantitet studeres gjennom geometri og diskret gjennom aritmetikk. Ikke-numeriske egenskaper som symmetri, kontinuitet og orden realiseres i den fysiske verden og er eksempler på universaler. **James Franklin** [2014] forklarer Aristotelisk realisme i *An Aristotelian Realist Philosophy of Mathematics* at verden består av partikulærer og universaler og den grunnleggende strukturen i verden er verdens tilstand av partikulærer som har universaler. Eksemplet som nevnes er: denne siden er tilnærmet rektangulær. Men ikke all matematikk er realisert i naturen, som Kleins flaske i geometrien og uendeligheter av forskjellige typer. Den delen av matematikk som er idealiseringer basert på den matematikken vi allerede har funnet ved hjelp av observasjoner av naturen representerer grense for hva som er i naturen. Vi kan postulere at noe halveres hvert år, da sier vi at det vil gå mot null som er grensen. Teoretisk vil det som halveres aldri på noe tidspunkt bli null, men i praksis vil det skje på et eller annet tidspunkt om naturen følger denne lovmessigheten, slik som med radioaktive stoffer. Når vi observerer og forsøker å finne struktur i verden og lager matematiske objekter som vi håper kan hjelpe oss, da er det ikke sikkert at de objektene og slutninger vi kan trekke fra disse objektene passer til allerede anerkjente matematiske objekt. Godtar vi at ulike typer matematikk finnes, kan være motstridende, da forsvarer vi matematisk pluralisme. Det er en av fordelene med et ikke-platonsk syn på matematikk. Kategoriteori passer bra til den pluralistiske oppfatningen av matematikk.

James Franklin [2021] begrunner i *Mathematics as a Science of Non-abstract Reality: Aristotelian Realist Philosophies of Mathematics* sitt syn som er aristotelisk realisme.

> Tall (osv) kan eksistere på en annen måte enn platonske objekter - for eksempel som egenskaper ved fysiske objekter, slik som deres strukturelle, relasjonelle eller kvantitative egenskaper.

Franklin skriver at et slikt alternativ er attraktivt hvis en føler at platonisme/nominalisme synet har nådd en blindvei. I artikkelen redegjøres det for hvordan matematiske begrep, som symmetri og tallmessig forhold, spiller en rolle rent fysisk og er enkelt å formulere matematisk. Uunnværlighetsargumentet

(UA) er et argument mot nominalisme og er tradisjonelt blitt brukt til forsvar for platonisme, men Franklin sier at argumentet sier ikke noe om at matematiske objekter trenger å være abstrakte noe også Colyvan godtar. Nominalister og platonister er enig i at ingen av dem gir en tilfredstillende forklaring for anvendt matematikk og dens *urimelige effektivitet* i forklaring av fysiske fenomen.

Aristotelisk matematikk handler om egenskaper og relasjoner mellom disse. Egenskapene kommer og går ut av eksistensen, mens relasjonener kan være evige og nødvendige. Egenskaper er slikt som tall, symmetri, kontinuitet og mengde, mens relasjoner er slikt som: hvis $A > B$ og $B > C$, da er $A > C$, hvor A,B og C er en eller annen egenskap som det er mulig å ordne i sekvens. Relasjonen gjelder bestandig uavhengig av om vi har eksempler på slike egenskaper som A,B og C oppfyller eller ikke. Aristotelisk matematikk er ikke bare enkel empirisme på tross av at matematikk handler om virkeligheten.

Å insistere på at matematiske objekter, og tall spesielt, er abstrakte objekter, bryter med den allmenne oppfatningen av hvordan verden fungerer. Den aristoteliske oppfatning av at tall og andre matematiske objekt realiseres i naturen og at vi kan se virkningen av matematikk i naturen, er bedre i overensstemmelse med ikke bare den allmenne oppfatningen og hvordan fysikere oppfatter naturen. Franklin [2021] oppsummerer sitt syn i denne lett sarkastiske kommentaren i innledningen i sin bok:

> Mye av ubehaget i tradisjonell matematikkens filosofi med dens fornektelse av anvendt matematikk, dens fiksering på mengder, tall og logikk heller enn komplekse strukturer, dens bekymring for uendeligheter fremfor endelige strukturer, dens epistemologiske blindvei over hvordan vi har kunnskap om 'abstrakte' objekter - kommer fra dens oscillering mellom platonisme og nominalisme som om det er de eneste alternativene.

[11] Når kvantefysikk sier at et system er beskrevet av en matematisk funksjon med kompleks funksjonsverdi (i $\mathbb{C}$), da mener vi at denne bølgefunksjonen påvirker utfallet av hva vi kan observere, vi ser virkningene av bølgefunksjonen, men aldri bølgefunksjonen i seg selv. Og tilsvarende for mange andre matematiske objekter som brukes i fysikk. Å bruke ikke-direkte observerbare begrep er ikke unikt for fysikk og finnes i en rekke empiriske vitenskaper. For eksempel begrep som *det ubevisste* som brukes i psykologi.

Den første innvendingene mot aristotelisk matematikk som Franklin viser til er Freges innvending at tall kan ikke være en egenskap ved reelle aggregater og at noen matematiske strukturer er for store til å bli realisert slik som høyere ordens uendeligheter. Freges innvending vil ikke for de fleste være et problem, for eksempel at en bok har 12 kapitler og 300 sider og at begge tallene representerer størrelsen på boken. Innvendingen kan tilbakevises mer formelt og det

[11] Oversatt av meg

gjør Franklin i §4. Den andre innvendingen om høyere ordens uendeligheter som Franklin nevner mot et aristotelisk syn er ikke unik for aristotelisk matematikk og handler om realiserte og ikke-realiserte egenskaper. Det er ulike løsninger på dette problemet og problemet løses på forskjellige måter i *kategoriteori*.

2.6.7 Matematisk realisme eller nominalisme

Hva er grunnen til at noen velger det metafysiske synet at matematiske objekter er abstrakte eller at de ikke finnes? Svaret på dette er ikke gitt med hensyn til hva som er bra matematikk eller bra metode, og kan være gitt gjennom en forpliktelse overfor naturalisme eller idealisme.

Hvor befinner de abstrakte matematiske objektene seg? Tre mulige svar:

- Platons himmel - platonsk realisme
- Ingen steder (de finnes ikke som abstrakte objekter) - nominalisme
- Spørsmålet gir ikke mening/Er ikke relevant - Maddy og Rodin

Grunnen til å velge den første plasseringen er gitt eksplisitt av **James Brown** [2012] s.12 er at han mener at andre objekter også befinner seg i Platons himmel som vi så, slik som moralske fakta. Med Platons himmel menes ikke at det bokstavelig talt forestilles en Platons himmel, men at det eksisterer mer enn natur, det vil si mer enn fysiske objekt og vekselvirkningen mellom disse. En annen grunn til å ønske at matematiske objekt befinner seg i Platons himmel er at matematiske objekter sees på som uforanderlig og representerer evig kunnskap uavhengig av mennesker og hva som fysisk eksisterer. Et annet argument er at det er ikke plass til alle matematiske objekt med en aristotelisk forståelse av matematikken. Uendelighet, både tellbart og ikke-tellbart uendelig brukes i fysikk og anvendt matematikk, men har ingen realisering og fungerer kun som *mange nok* eller *stort nok* i anvendt matematikk. Med høyere ordens uendeligheter, de transfinite tall, er det aristoteliske synet mer vanskelig å forsvare. Det andre valget, *nominalisme*, som finnes i mange forskjellige utgaver ser naturlig nok annerledes på Platons himmel og ser på denne som enda et ikke-eksisterende objekt og dermed oppfattes de matematiske objektene som ikke-eksisterende. Grunnen til en slik mening kan være et ønske om å fri både filosofien og vitenskap for metafysiske objekter. Uansett hvilken plassering som velges finnes det problematiske sider. For matematiske objekt i Platons himmel er spørsmålet om hvordan vi kan ha kunnskap om de abstrakte objektene, eller som det ofte formuleres: hvordan kan vi vite noe om objekter som ikke har spatialtemporære kausalitet? Og for det nominalistiske synet er problemet: Hvordan kan eller skal matematikk formuleres uten henvisning til abstrakte objekter? Det siste alternativet er **Penelope Maddys** syn. Hennes syn har utviklet seg fra det nominalistiske til det autonome og hun kaller i dag sin filosofi for *den andre filosofi* i motsetning til den første filosofien fra Aristoteles. Rodin som er nevnt over, mener som Maddy at det ikke er noen grunn til å spørre om hvor de matematiske objektene finnes.

Del III

Matematikken i våre beste forklaringer

2.7 Forklaringsversjon av UA

Colyvan gir et eksempel som støtter P1 og ikke P2, det vil si det er et objekt som ikke er matematisk, men som støttes av våre beste teorier, og det er elektroner. Vi tror ikke på elektroner fordi de er uunnværlige for våre beste vitenskaplige teorier, men fordi de er *forklarende* uunnværlige. Men hva vet vi egentlig om elektroner? Det vi vet fra ulike eksperimenter er egentlig ganske beskjedent, men vi vet ganske mye om elektroner fra ulike kvanteteorier, vi vet at elektroner har spinn (en parameter med to verdier: opp og ned), vi vet at elektroner oppfører seg som en bølge og at flere elektroner kan dele på ulike egenskaper. Men mye av det vi vet om elektronet er fra kvanteteori, så teorien går forut for objektet. Teorien realiseres i objektet. Hvis matematikk kan vises å bidra på samme måte til forklaring, da vil matematisk realisme være i tråd med vitenskaplig realisme. Et eksempel jeg kommer på er fra kvantemekanikk: Bølgefunksjonen i kvantemekanikk er forklarende uunnværlig for fysikk, men er et rent matematisk objekt. Den forklarende versjonen av UA har fått stor oppmerksomhet og Colyvan viser til eksemplet med sikadene i nord-Amerika og flere eksempler. Dette vil også danne grunnlaget for diskusjon om hva slags matematikk som vi er forpliktet til. [12] Eksempelet med sikadene er gitt stor oppmerksomhet ikke bare i Colyvans og **Barons** [2014] tekst, men også i Browns bok som innleder med å henvise til at sikadenes syklus på primtallsår ikke er noe bevis for matematisk nominalisme eller matematikkens forklaringskraft. At sikadene har primtalls syklus med blomstring bare hvert 13 eller 17 år er et empirisk utsagn og ikke et matematisk, sier Brown, og dermed beviser ikke matematikken noe som helst når det gjelder sikadene. Argumentasjonen for hvorfor sikadene har syklus på primtalls år (to spesifikke på to ulike geografiske steder) inkluderer biologi for sikadene og studier av miljøet for sikadene. Dette er interessant, men jeg er enig i at det beviser ikke noe matematisk og gir heller ikke en matematisk forklaring. Men jeg er uenig med Brown i at matematikk og primtall ikke har noe med syklusen å gjøre. Det vi ser i tilfellet med sikadene og ulike marine predatorer som best kan forklares med en matematisk modell er at i modellverdenen er det en modell som passer best til observasjonene. Ulike dyr kan tilpasses *Lévy tur* med ulike parametre og vi ender opp med den beste matematiske forklaringen. Vi kan se for oss et rom med ulike modeller hvor vi prøver å finne den modellen som passer best til de data vi har, altså en type optimaliseringsproblem hvor løsningen er en matematisk formulering på et fenomen, i dette tilfelle et biologisk fenomen. En slik tilpasning av matematisk modell til data er i tråd med vanlig vitenskaplig praksis og kan godt sies å være uunnværlig slik vitenskaplig forklaring foregår nå.

2.7.1 Innvendinger mot forklaringsversjonen av UA

Å se på om matematikk kan forklare fenomen i naturen, er bra vitenskap, men hele utgangspunktet virker kvelende på utviklingen av matematikk som et sys-

[12] Baron, S. Optimisation and mathematical explanation: doing the Lévy Walk. Synthese 191, 459–479 (2014).

tem av objekter som henger sammen i en komplisert struktur. Å finne matematiske modeller som passer til dyrs adferd i naturen, oppblomstring av pandemier, hyppighet av mord eller sjanse for regimeendringer er god vitenskap og det finnes mange måter å gjøre dette på. Vi har mange slike modeller og matematikken er i sannhet ikke spesielt vanskelig, tror jeg. Her er det mulig å lage heuristiske modeller eller bruke maskinlæring til å lage skjulte modeller. Det vi er interessert i slike tilfeller er ikke modellene i seg selv, men prediksjon. Det er ikke her forsvaret for eksistensen av matematiske objekt bør stå, mener jeg. Merkelig nok har ikke Colyvan tatt med noen innvendinger mot UA2.

2.7.2 Colyvans konklusjon om UA

UA er det mest kjente, men ikke eneste argumentet for matematisk platonisme, eller egentlig matematisk realisme som Colyvan ikke nevner. To viktige argument mot matematisk platonsk realisme:

- Det epistemiske problemet - hvordan har vi kunnskap om matematiske objekt?
- Ubestemmelighetsproblemet - hvordan reduserer vi tall til mengder?

Det første argumentet er spesifikt for platonisme og gjelder ikke for aristotelisk realisme. Det siste argumentet henger sammen med standardgrunnlaget, ZFC, for matematikk som baserer seg på mengdeteori. Det kalles **Benacerrafs** identifiseringsproblem etter Paul Benacerrafs [1965] argument mot mengdeteoretisk platonisme i *What Numbers Could Not Be* og går på å redusere hele tall til mengder. Se Appendix for **Zermelo** og **von Neumann** metoder for å definere ordenstall. Siden det finnes uendelig mange måter å definere heltall, er det ingen av disse som er mer *riktig* enn andre. Argumentet går motsatt vei av UA som argumenterer for eksistensen av matematiske objekter, og argumenterer om at tall om de eksisterer da kan de ikke være flertydig bygget opp av ulike mengder. Dette er et konstruert argument, mener jeg. Det er for eksempel mulig å sette opp påstanden:

$$2 \in 3$$

som er riktig for von Neumans ordenstall og ikke riktig for Zermelos ordenstall. Problemet illustrerer at det er sjelden matematikere faktisk bruker de grunnleggende påstandene i mengdelære og så vidt jeg vet er det ingen teorem som avgjøres av om $2 \in 3$ eller ikke. Det er mulig å definere hele tall gjennom iterasjon med addisjon etter å ha definert grunntallene 0 og 1 som defineres likt i de to metodene og slike definisjoner på hele tall er gitt i mange lærebøker. At noe har ulik realisering er ikke et argument mot eksistens, tallet 12 kan realiseres av mange ulike summer og litt færre produkt: $11+1, 10+2, 9+3, \ldots$ og $3\dot{4}, 6\dot{2}, \ldots$. Selv om det er viktig for det mengdeteoretiske grunnlaget for matematikk å definere hele tall ved hjelp av mengder, er dette noe som er lite brukt, og som jeg aldri har sett i fysikk. Et eksempel på at grunnlaget er konstruert, abstrakt og ikke pedagogisk, mener jeg. Argument for matematisk realisme:

- UA og UA2
- Enhetlig semantikk for all diskurs

Colyvan skriver at det er uklart hvordan matematisk nominalisme, forstått som anti-realisme, kan løse problemet med enhetlig semantikk. Selv om UA skulle være det eneste gode argumentet for platonisme, betyr ikke avkreftelse av UA at nominalisme er bekreftet for nominalisme kan mangle støtte likefullt. Men hvis innvendingene mot UA holder, da er et av de viktigste argumentene for platonisme svekket. Det vil medføre at platonismen er dårlig grunngitt. Gitt disse innvendingene mot UA så står aristotelisk realisme stødigere, men denne retningen tar ikke Colyvan for seg.

2.8 Fra urimelig effektivitet til uunværlighets-argumentet

Selv om det ikke er uenighet i premisset i Quine-Putman uunværlighetsargumentet fra 1971 om at matematikk er uunnværlig for våre beste vitenskaplige teorier, er det stor uenighet om hva matematikk er og hvilke konsekvenser UA medfører. Hva er den matematikk som er uunnværlig? Hva er vitenskaplig metode når det gjelder matematikk, er det den aksiomatiske metoden, eller er det som Arnold skrev: matematikk er fysikk med billige eksperimenter? Vet vi hvordan matematikk fungerer, vet vi også hvordan grunnlaget for matematikk er?

2.9 Vår beste vitenskap

Vi så på hvordan fysikk og matematikk vekselvirket forut for oppbyggingen av kvante- og releativetsteori. Vi har også sett hvordan UA selv har utviklet seg til en forklaringsversjon fremfor en mer metafysisk forpliktelsesversjon. Den matematikk som var i bruk da det opprinnelige UA ble skrevet skal vi snart to for oss. Argumentet for den opprinnelige UA var generelt for all matematikk. Vi skal nå se på den matematikken bidrar til vitenskaplig forklaring på naturenfenomener representert ved kvanteteori.

2.9.1 Heisenberg og usikkerhetsrelasjonen

I forløpet til kvantemekanikken lanserte **Niels Bohr** i 1930 en planetmodell for atomet for å forklare emisjonsspekteret til hydrogengass. Denne modellen tok utgangspunkt i klassisk mekanikk og brøt med kjent fysikk på flere punkter. Selv om modellen var i stand til å forklare hydrogenspekteret, var modellen ikke i stand til å forklare spekteret til andre gasser og heller ikke spekteret hvis gassene var i sterke magnetfelt. For å utvide modellen søkte Bohr hjelp hos to av sine assistenter, **Werner Heisenberg** og **Wolfgang Pauli**. Begge kastet seg over oppgaven med stor iver. Pauli la til komplikasjoner til Bohrs modell, som usynlige små fjærer eller ulike vekselvirkninger, bare for å oppdage at modellene bare ble veldig kompliserte og ute av stand til å forklare noe - det vil si resultatene fra modellen var ikke i overensstemmelse med empiriske data. Det samme gjorde Heisenberg, han og så for seg nye tillegg til modellen og oppdaget at modellen ble for komplisert. Heisenberg var ikke like dyktig med matematikk som Pauli og gav opp tidligere. Galilei hadde hatt punkter som skulle bindes sammen til en formel, men punktene Heisenberg hadde passet ikke til noen glatt kurve slik han så det. Heisenberg hadde en hverdagslig observasjon en kveld som fikk ham til å tenke nytt. Han observerte en mann som gikk under gatelyktene et stykke unna. Hver gang han gikk ut av lyset forsvant han for så å dukke opp under neste gatelykt. Heisenberg tenkte at han kunne bare se mannen når han var under lykten og han visste ikke hvor han var mellom lyktestolpene, da kunne han være hvor som helst. Hvordan Heisenberg gikk igjennom en periode med krise og tenking kommer fint frem i **Carlo Rovellis** [2021] bok *Helgoland* hvor det detaljert beskrives hvordan Heisenberg reiste ut til øyen Helgoland for å tenke. Det Heisenberg kom frem til var at det nyttet ikke å endre på gamle modeller og å prøve og tilpasse disse til alle mulige eksperimenter, men at det måtte tenkes på en ny fysikk. Det vil si en ny matematisk formulering. Utgangspunktet til Heisenberg var at vi må ta utgangspunkt i hva det var mulig å observere, akkurat som mannen under gatelyktene, og se hvor langt det var mulig å formulere en teori fra der. Fra data fra eksperimentene Heisenberg hadde tilgang til, observerte han at det så ut til at nøyaktigheten til observasjoner av et elektrons posisjon var omvendt proporsjonal med nøyaktigheten i observasjonen av elektronets impuls. På grunnlag av dette formulerte han den berømte usikkerhetsrelasjonen basert på empiriske data:

$\Delta q \Delta p \sim h$ hvor h er Plancks konstant[13]

[14] Denne formelen sier at for en partikkel er usikkerheten i impuls (Δp) og usikkerhet i posisjon (Δq) omtrent Plancks konstant.

På en gåtur med Einstein litt senere fikk Heisenberg høre at ideen hans om å ta utgangspunkt i det som kunne observeres var *forrykt*. Einstein spurte også Heisenberg om han gått fra forstanden. Heisenberg hadde et slående svar og det var at Einsteins relativitetsteori også var laget basert på hva som kunne observeres. Noe Einstein ikke kunne si noe til. Den store forskjellen er at med Heisenbergs usikkerhetsrelasjon ble usikkerheten, altså tilfeldighet, en ontologisk størrelse i fysikk, mens relativitetsteorien beholdt determinisme som prinsipp.

2.9.2 Dirac og utviklingen av kvantemekanikk

Før **Werner Heisenberg** hadde fått publisert sin berømte usikkerhetsrelasjon, fikk Dirac manuskriptet til Heisenberg til gjennomlesing. Dette var et manu-

[13] $6.6260700410^{-34} m^2\ kg/s$
[14] Litt annerledes:

$$\delta p \cdot \delta q \gtrapprox h$$

skript som endret livet til Dirac som det heter i **Graham Formello** [2009] sin biografi om Dirac, *The Strangest Man.* I svært livlig språk beskriver Formello hvordan Dirac stusset over hva han mente var alt for komplisert og teknisk, men tenkte på det allikevel mens han gikk sin ukentlige søndagstur. Formello skriver i dramatiske vendinger hvordan Dirac plutselig kom på at han hadde sett en tilsvarende formel i en bok i klassisk mekanikk. Men det var søndag og biblioteket åpnet ikke før dagen etter. Da vaktmesteren åpnet døren til biblioteket dagen etter, løp Dirac inn (for første gang) og fant helt riktig formelen:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

hvor δ_{ij} er Kronecker delta og[15]

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\delta f}{\delta q_i} \frac{\delta g}{\delta p_i} - \frac{\delta f}{\delta p_i} \frac{\delta g}{\delta q_i} \right)$$

Uttrykket i $\{\dots\}$ med krøllparentesene kalles Poisson-parentesen. Denne notasjonen fra 1809 for sammensatte statiske systemer basert på Newtons mekanikk er en viderutvikling av Euler-Lagrange formalismen. Ved hjelp av denne formalismen var Dirac i stand til å formulere en mer nøyaktig formel for Heisenbergs usikkerhet:

$$\Delta q \Delta p = |qp - pq| \geq \frac{\hbar}{2}$$

Denne formelen sier at usikkerheten i posisjon og impuls er knyttet til at operatorene for posisjon og impuls ikke kommuterer, men gir et bidrag til målefeil som er minst $\frac{\hbar}{2}$, men aldri 0 som ville vært tilfelle for kommuterende operatorer. For at operatorene p og q skal kunne gi et bidrag må operatorene virke på *noe* og det noe er en kvantetilstand. Kvantetilstanden kan enten skrives som en funksjon eller som en vektor. Heisenberg kjente ikke til ikke-kommuterende variabler, noe Dirac kjente fra forskjellige deler av matematikken, som for eksempel **Grassman**-variabler[16] og matrisemultiplikasjoner. Ved hjelp av assosiasjoner til Hamilton-formalisme, var Dirac i stand til å formulere kvantemekanisk versjon av klassisk mekanikk. Det finnes en rekke ulike usikkerhetsrelasjoner i tillegg til den som er formulert her. Enkelt sagt finnes det en slik relasjon for alle ikke-kommuterende operatorer. For energi-tid gjelder:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

En vanlig tolkning av denne relasjonen er at siden energien i universet er endelig, er tiden diskret og ikke kontinuerlig. Størrelsen på det minste tidsintervall er $5.391 \times 10^{-44} s$. Tilsvarende er også rommet kvantisert siden tid og rom ikke er uavhengige størrelser men definert ved hjelp av lyset og den andre størrelsen.

[15] $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if i=j,} \\ 0, & \text{if i} \neq j. \end{cases}$

[16] $\phi_i \phi_j = -\phi_j \phi_i$ og $\phi_i^2 = 0$, se Wikipedia om Grassmantall

Einstein hadde funnet ut at energi og masse var forbundet og med formelen over hadde Dirac funnet ut at energien og tid var forbundet.

Noen eksempler på anvendelse av kvanteformalismen: Et vanlig uttrykk for mengden av energien i et klassisk system (ikke-relativistisk og ikke-kvantemekanisk) er:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(q)$$

Denne sier at energien til et system er bevegelsesenergi pluss potensiell energi. Potensiell energi er for eksempel energien for en strammet fjær eller posisjonen til en bil på toppen av en bakketopp. Ved å sette $p = mv$ og benytte Hamiltons formalisme, som Poisson-parentesen kommer fra, {f,g} har vi følgende uttrykk for energien gitt som summen av kinetisk og potensiell energi:

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{V};\ \text{hvor } T = \frac{p^2}{2m} \text{ og } \mathcal{V} = \mathcal{V}(q)$$

Her er $\mathcal{H}$ en operator som finner mengde energi på systemets tilstander. Siden p og q ikke kan kommutere i kvantemekanisk formalisme, må p (eller q) erstattes med $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ (alternativt erstatte p med q) som vil gi det riktige uttrykket for Heisenbergs usikkerhetsrelasjon og operatoren for $\mathcal{H}$ blir en operator:

$$\mathcal{H}\psi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2} + \mathcal{V}(q)\right\}\psi$$

Her er ψ en kompleks funksjon av q som kan løses for ulike uttrykk for $\mathcal{V}$. For eksempel vil emisjonsspekteret til hydrogenatomet, et elektron rundt en atomkjerne, kunne beskrives med $V(r) = \frac{1}{r}$ hvor r er avstanden fra atomkjernen til elektronet. Mens $V(r) = r^2$ som klassisk tilsvarer en harmonisk oscillator beskriver atomer som svinger i et gitter og som har et lineært energispekter.

Dette er den tidsuavhengige Schrödingerligningen som benyttes for stasjonære systemer som elektroner i atomer og molekyler. Tidsavhengige operatorer kan tilsvarende uttrykkes. Etter å ha lansert en ny formalisme hvor klassiske uttrykk for energien til et system enkelt kunne overføres til et tilsvarende kvantemekanisk, ble en rekke ulike funksjoner for $\mathcal{V}(q)$ undersøkt og formalismen ble etterhvert utvidet til å gjelde flere partikler og nye kvantemekaniske begrep uten parallell i klassisk mekanikk, slik som elektron-spinn og anti-symmetriske bølgefunksjoner, ble innført. Den nye kvantemekaniske formalismen var i stand til å gi resultater med stor overensstemmelse med empiriske eksperimenter. Og en rekke fysiske fenomen lot seg forstå og det var også mulig å gi prediksjoner basert på denne formalismen. Denne omformuleringen av klassisk mekanikk til kvantemekanisk versjon kan ligne på omformulering av matematikk fra et grunnlag til et annet grunnlag. Her tenker jeg spesielt på er kategoriteori som vi ser på senere. En forutsetning for at denne formalismen for kvantemekanikk skal fungere er at den passer med klassisk mekanikk for fysiske objekter som er best beskrevet med klassisk fysikk. Dette er objekter som beveger seg langt under lyshastigheten, som er mye større enn enkeltpartikler, men ikke så store at gravitasjonskreftene er signifikante. At denne grensen er konvergent og kan matematisk utledes er en av kvantemekanikkens suksesser. Ser vi på Euler-Lagrange formalismen, gir den en løsning på et gitt problem som er en kurve uten noen usikkerhet og utstrekning slik kurver er formulert i euklidsk geometri. Plancks konstant[17] er en fysisk veldig liten størrelse i hva vi kan kalle hverdagsfysikk og har ikke noen signifikant betydning. Vi kan se på kvanteteori som en slags svingninger langs denne eksakte løsningen i Euler-Lagrange formalismen. De kvantefenomen som dannet grunnlaget for kvantemekanikk viser at i noen tilfeller gir kvantefenomen utslag på en makroskopisk skala. Eksempler på dette er nettopp Plancks strålingsspekter, fotoelektrisk effekt som Einstein fikk Nobelprisen for og emmisjonsspekteret til hydrogengass som var utgangspunktet for Bohrs atommodell.

En interpretasjon av kvanteteorien som er gitt over, er at et kvantesystem i hovedsak oppfører seg slik det klassiske systemet, men svinger med små svingninger rundt den klassiske løsningen. Dette er utgangspunktet for den stiintegralformuleringen av kvantemekanikk som også Dirac formulerte.

2.10 Dirac og elektronligningen

Den generelle Schrödingerligningen kan skrives som:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(x,t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi(x,t)\rangle$$

Her er $|\psi(x,t)\rangle$ en kompleks bølgefunksjon i rom og tid representert som en kompleks vektor i Hilbertrommet, mens $\hat{H}$ er hamiltonoperatoren og $\hbar$ er den reduserte Plancks konstant $\frac{h}{2\pi}$. Den generelle ligningen baserer seg på hamiltonformalismen for klassiske partikler hvor hver side av likhetstegnet er to forskjellige måter å skrive energien til en fri partikkel. Venstre side representerer energien ved den tidsderiverte endringen mens høyre side representerer hamiltonoperatoren for energien til systemet uttrykt ved variablene for tid, posisjon og impuls. Det relativistiske forholdet mellom energi og impuls for en fri partikkel, altså en partikkel som ikke er påvirket av et eksternt felt $V(q)$ gjelder:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

Ved å bruke formalismen over og sette inn operatorene for E og p, fås:

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi$$

Dette er Klein-Gordonligningen og er en relativistisk ligning for en fri partikkel, men det viste seg tidlig at ligningen kun beskriver spinnløse partikler, det vil si bosoner og ikke fermioner som elektroner. Dirac satte seg som mål å finne

[17] $6.62607015 \times 10^{-34} m^2 kg/s$

den relativistiske ligningen for elektroner. Til slutt formulerte han det som i dag kalles Diracligningen:

$$(i\hbar\partial_\mu\gamma^\mu - mc)\psi = 0$$

[18] Første leddet inneholder alle de deriverte, og alle er førstederivert, mens ledd nummer to mc er et konstantledd. Her er Einsteinsummasjon antatt over repeterende indeks, μ, fra 0 til 3 og γ er 4 ulike 4×4-matriser, gitt i Appendix, som opphøyet i annen gir enhetsmatrisen og antikommuterer med hverandre. ψ er en bølgefunksjon i fire dimensjoner. For illustrasjon $\mu = 0, 1$: $(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^1)^2 = 1$ og $\gamma^0\gamma^1 = -\gamma^1\gamma^0$, hvor 0 og 1 her er henholdsvis null- og enhetsmatriser.[19] Diracligningen er egentlig fire koblede differensialligninger. At det må være fire og ikke to som i det klassiske tilfellet, tok Dirac litt tid å komme frem til siden han var opptatt av at ligningen skulle gjelde for elektroner med spinn, brukte han Paulis spinnmatriser som utgangspunkt for γ-matrisene uten å lykkes. I de 4 γ-matrisene er Paulis spinnmatriser en del av matrisene. Fire er et tall som går igjen for relativitetsteori siden de romlige dimensjoner kobles til tidsdimensjonen på en annen måte enn i det klassiske tilfellet. Å legge inn et potensial i de relativistiske bølgeligningene over er ikke komplisert. At det er mulig å formulere relativistiske bølgeligninger, er ikke det samme som at kvantemekanikk og generell relativitetsteori er forent. I formuleringen av den relativistiske bølgeligningen er det bare det relativistiske forholdet mellom energi og impuls fra den spesielle relativitetsteorien som er benyttet, forståelsen av tid fortsatt som i kvantemekanikk. Riemanngeometri fra generell relativitetsteori kommer ikke til anvendelse her, utgangspunktet er Einsteins spesielle relativitetsteori. Diracligningen har en spesiell skjønnhet og en nærmest mystisk status i naturvitenskap. Ligningen er blitt brukt til å argumentere for Guds eksistens og Dirac selv brukte den til å argumentere for symmetri og enkelhet i fysikk.

Basert på formalismen for bølgeligningen for en klassisk partikkel, det er Schrödingerligning, forsøkte altså Dirac å finne et tilsvarende uttrykk for en relativistisk partikkel, som også tok hensyn til spinn. At det er to ulike ligninger for en relativistisk bølgefunksjon, mens for en ikke-relativistisk holder det med en, illustrerer at spinn spiller en større rolle når en partikkel nærmer seg relativistisk grense. Diracs ligning viste seg å gi både positive og negative energier. De positive energiene var som forventet mens de negative var en stor skuffelse i følge Heisenberg, et nederlag for fysikken. Den negative løsningen, klarte Dirac til slutt å tolke som en manifestasjon av at det måtte eksistere en partikkel med motsatt ladning til elektronet. Det som i dag kalles et positron. Dirac postulerte positronets eksistens i 1928, fire år før partikkelen ble påvist i kosmisk stråling. Da oppdagelsen av positronet ble kjent, uttrykte Dirac at ligningen var mer fornuftig enn ham selv. Denne suksessen bruker **Colyvan** [2003] for å argumentere for at **Fields** fiksjonalisme ikke kan være riktig. Elektroner med høy impuls eller høy energi, finnes i tunge atomkjerner og i kosmisk stråling. Med høy nok

[18]Denne ligningen er også på Diracs minnestein i Westminister Abbey

[19]I en nullmatrise er alle elementer 0, og i en enhetsmatrise er elementene langs diagonalen 1 og resten 0 slik at for en matrise A gjelder: $A \cdot 1 = A$ og $1 \cdot A = A$.

energi vil en elektromagnetisk stråle gjøre det mulig å danne elektron-positron par. Elektroner beskrives godt ved hjelp av Diracligningen under disse forholdene. Slik produksjon av positroner gjøres i medisin i positron emisjons tomografi (PET-skanning).

Da Dirac lyktes med sin formulering av en relativistisk bølgeligning for elektronet, hadde han tatt i bruk en rekke antagelser og rene gjetninger. Dirac mente uten tvil at naturen kunne beskrives ved hjelp av ligninger og at disse var bygget inn i naturen. Det er ikke sikkert at vi får øye på riktig matematikk ved første forsøk, og ulike typer matematikk kan virke samtidig når vi prøver å forstå hvilken matematikk som er virksom i naturen. Derimot var ikke Dirac sikker på at hans formulering var den riktige før dette var empirisk verifisert.

2.11 Annenkvantisering

Etter stor suksess med matematisk beskrivelse av fysikk på et mikronivå som elektroner, fotoner, atomkjerner med stor grad av evne til prediksjon, var ønsket å utvikle teorier som kunne passe for all fysikk på mikronivå. Hvordan kunne kvanteteori formuleres for mange vekselvirkende partikler, hvordan kunne den formuleres for sterke og svake kjernekrefter, hvordan formulere teorien for ulike spredningseksperimenter? Dirac startet med utviklingen av det som nå kalles annenkvantisering som går ut på at feltene, som det elektromagnetiske eller elektronenes felt, kvantiseres. Bølgefunksjonene blir nå amplitude i en sum over mulige tilstander til feltene. I denne formalismen er løsningene til Diracligningen et felt for elektroner. Førstordens mangepartikkel bølgefunksjon skrives:

$$\Psi_F[\mathbf{r}_1 \ldots \mathbf{r}_N] = \mathcal{N} \sum_{\pi \in S_N} (-1)^\pi \prod_{i=1}^{N} \psi_{\alpha_{\pi(i)}}(\mathbf{r}_i)$$

Her er π et element i permutasjonsgruppen S_N som permuterer mellom tilstandene merket α_i og $(-1)^\pi$ markerer permutasjonens fortegn for at bølgefunksjonen skal være antisymmetrisk.

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_\nu \psi_\nu(\mathbf{r}) a_\nu$$

Her $\mathbf{\Psi}$ representerer annen ordens operatorer hvor a_ν er en skapelsesoperator for en partikkel i tilstand ν og ψ_ν er ordinære førstekvantiserte bølgefunksjoner. Bølgemekanikken passer heller ikke til å beskrive av kjernekrefter. Ulike strategier ble formulert for å tilpasse kvanteteori til disse ulike scenariene. Annenkvantisering passer til mangepartikkelsystemer som molekyler og relativt lette atomer, i faststoff-fysikk og i fysikk hvor kjernekreftene ikke er for sterke. Det $\mathbf{\Psi}$ representerer er en sum av ulike måter et bestemt antall elektroner bytter plass i ulike tilstander og om elektronene forsvinner eller legges til i tilstand styres av bølgefunksjonen for tilstanen for en partikkel. Selv for ganske få elektroner blir det en ganske lang operator. Vi spør altså ikke lenger om sannsynligheten av om et elektron er i en tilstand, men om sannsynligheten for at elektronet blir fjernet eller kommer til en tilstand, hvor sannsynligheten ligger inne i bølgefunksjonen. Dirac hadde et bidrag til før det begynte å gå nedover med kvanteteorien, og det er Diracs stiintegral, som i likhet med Diracs deltafunksjon var en ny oppfinnelse. Med sterkere partikkelakselleratorer var det mulig å kollidere partikler med stadig høyere hastighet og dermed se på eksperimenter for å avdekke hvordan kjernekreftene fungerer. Disse teoriene baserer seg på kvantefeltteorier vi bruke stiintegraler og ikke-konvergent perturbasjonsteori. Når energiene blir høyere slik at det er mulig å studere hva som er inni kjernepartikler, blir samtidig partikkelbegrepet mer uklart, med felter som kontinuerlig og spontant skaper og utsletter partikler. Bare i ekstreme fysiske situasjoner ser vi noe til disse feltene, som ved hendelseshorisonten i sorte hull (**Hawking**-stråling) og i partikkelakseleratorer.

2.11.1 Oppsummering kvantemekanikk og matematikk

De tidlige trinnene i kvanteteori

1900 - Planck innfører et virkningskvant for elektromagnetisk stråling som et matematisk triks

1905 - Einstein forklarer fotoelektrisk effekt med virkningskvantet

1913 - Bohr lanserer planetmodell for atomet

1927 - Heisenberg lanserer *Usikkerhetsrelasjonen*

1927 - Dirac formulerer kvanteteori basert på operatorer

1927 - Dirac utvikler kvantefeltteori

1928 - Dirac publiserer en relativistisk ligning for elektronet

1933 - Dirac lanserer stiintegralformuleringen

Det er mange flere steg og mye er blitt utelatt. Bohrs modell er en heuristisk modell som ble forlatt da bølge- og matrisemekanikken ble lansert. I denne oversikten er ikke Schrödingers ligning tatt med og heller ikke videreutviklingen av kvantefelt- og stiintegralformuleringen etter Dirac. Det matematiske grunnlaget for Dirac var hele tiden Hamilton- og Euler-Lagrangeformalismen sammen med godtatte fysiske teorier og prinsipper, slik som den spesielle relativitetsteori og Paulis eksklusjonsprinsipp. Matematikken var i hovedsak løsing av differensialligninger og noe matriseregning med unntak av stiintegralformuleringen. Da Dirac formulerte Heisenbergs usikkerhetsrelasjon basert på en over 100 år gammel formel han hadde sett i en bok på biblioteket, da foretok han ikke en matematisk eller logisk slutning, men en analogislutning - et eksperiment med matematikk som viste seg å være riktig i den betydning at teorien hadde forklarende kraft i lys av god overenstemmelse med empiriske data. Den matematikken som er blitt brukt i kvanteteori frem til og med annenkvantiseringen er hva vi i dag kaller vanlig anvendt matematikk, differensialligninger over flere variabler, funksjoner av flere variabler, matrise- og vektorregning, komplekse og reell algebra, trigonometri, men ikke noen spesielle nye matematiske objekt og ikke spesielt avansert geometri eller algebra. Unntaket er Diracs deltafunksjon som var et nytt bidrag til matematikken, som i dag er en anerkjent og akseptert del av matematikken. Konsekvensene av kvanteteori er fortsatt hyppig diskutert og det finnes ulike interpretasjoner av hva som er riktig tolkning. Det er verdt å legge merke til at selv om tilfeldighet ble ansett som en ontologisk del av naturen, er tilfeldighet ikke en ontologisk del av matematikken. Om matematikk burde ha tilfeldighet bygget inn på en slik måte er et interessant spørsmål, men alle forsøk på å omformulere matematikk til å inkludere tilfeldighet på denne måten, har vist liten suksess så langt. Matematikken som eksisterte før kvantemekanikk, fikk ulike utvidelser med kvantemekanikk og mange ulike deler av matematikk som for de fleste fysikere var ukjent ble nødvendige for å holde på med fysikk og for å forstå naturen, slik som uendelig dimensjonale vektorrom, kalt Hilbertrom, operatorer og ikke-kommuterende størrelser blant andre. I tillegg lanserte Dirac den kontinuerlige delta-funksjonen som en stund var diskutert om var veldefinert rent matematisk, for nyttig til avfeies, for sær til å godtas i utgangspunktet. Funksjonen ble anvendt en god stund før den ble matematisk veldefinert formulert. Det er også interessant at da Dirac formulerte kvantemekanikk med operatorer som ikke kommuterte, baserte han det på en analogi med klassisk fysikk hvor han erstattet noen størrelser med noen andre slik at Heisenbergs ulikhet skulle gjelde. Det eksisterte ikke noen metode for hvordan dette spranget skulle gjøres. Med den nye formalismen var fysikk i stand til å forklare og forutsi en rekke nye fenomener i naturen. Kjemiske forbindelser ble mulige å regne ut, spektre fra ulike gasser både med og uten magnetfelt ble forklart, radioaktivitet og molekylbindinger. De første versjonene av kvantemekanikk ble utformet i to utgaver, en bølgemekanikk og en matrisemekanikk, begge versjonene har ikke-kommuterende variabler. Den ene versjonen uten referanse til noe fysisk gjenkjennelig med matriser og den andre med en slags fysisk analogi til bølger. Det var lenge en diskusjon om hvilken versjon som var riktig, inntil Dirac beviste at de var identiske. Dette er en dyp matematisk innsikt at ulike formuleringer kan være like. I matematikk ser vi også ofte at ulike deler av matematikken belyser ulike sider av et problem og at ulike metoder kan brukes for å løse samme problem. Selv om kvanteteori i utgangspunktet tok i bruk mange ulike deler av matematikk som til da bare hadde vært ansett som abstrakt og uten anvendelse, var det få matematiske nyvinninger kvanteteori bidro med. Det ene unntaket er Diracs deltafunksjon. Bruken av komplekse variabler og komplekse funksjonsverdier var ikke ukjent for matematikere. Tilsvarende for ikke-kommuterende størrelser og Hilbertrom.

2.12 Felles for relativitets- og kvanteteori

I min innvending mot UA så vi at de matematiske objektene blir sett på som statiske i UA. Felles for relativitetsteori (både den spesielle og den generelle) og kvanteteori er at begge teoriene opererer med lokal og ekstern observasjon. Kategoriteori har også et indre og ytre som gjør en kategori til et mye mer dynamisk objekt enn objektene i mengdelære.

2.13 Kategoriteori for kvantisering

Kategoriteori er en mulighet for å samle noen av disse kvantiseringsskjema uten at det vil løse det grunnleggende problemet med at vi har ikke en enhetlig, konsistent, velformulert matematisk teori for vekselvirkende kvantefelt. De ulike skjema har ulike utfordringer, som uendelige størrelser, ikke-observerbare dimensjoner sammen med hypotetiske partikler (i superstrengteori) og teori for mange-partikkelsystemer. Selv i klassisk fysikk er det ikke alltid mulig å lage gode teorier som kan gi prediksjoner, det som er kjent som kaosfysikk. Ved hjelp av geometri er det oppdaget at for slike rom kan det i parameterrommet være områder hvor det ikke er mulig å gi sikre prediksjoner, mens for andre verdier er stabilitet sikret. Det blir som været, av og til er det mulig med stor grad av sannsynlighet å forutsi været neste uke, mens andre uker er dette vanskeligere. Parameterrommet har vist seg at i noen tilfeller har en komplisert struktur hvor ustabile områder ikke utgjør klart avgrensede flater men har fraktal dimensjon. For eksempel hvis det er to parametre (a, b) vil de verdiene av a og b som gir ustabilitet ha dimensjon mellom 1 og 2. En interessant sammenheng mellom klassisk og kvantemekanikk er at kaos ser ikke ut til å være mulig å reprodusere i kvantemekanikk. Hvis vi tar utgangspunkt i et system som er klassisk kaotisk slik som et trepartikkelsystem og kvantiserer dette, vil vi se at de kaotiske oppførselen forsvinner, det blir ikke noen kaotisk bølgefunksjon. **Martin Gutzwiller** [1990] i *Chaos in classical and quantum mechanics* forsøkte å produsere kvantekaos. I undersøkelse av elektronet rundt et hydrogenmolekyl fant han interessante sammenheng mellom tallteori (primtall og Riemanns zeta-funksjon), klassisk mekanikk (det anistrope Kepler problem) og kvantemekanikk. Disse resultatene peker mot dyp sammenheng mellom natur og matematikk. Mye av videreutviklingen av kvantefeltteori var ulike strategier for å *renormalisere*, det betydde å kvitte seg med uønskede uendeligheter, eller å rekkeutvikle integraler med stadig mer komplekse vekselvirkninger i håp om empirisk suksess. Disse ulike strategiene har virket, og rent fundamentalt mente fysikerne frem til nedturen etter Higgs-bosonet ble oppdaget i 2012 at det er bare to områder som gjenstår i fullstendig forståelse av mikroverdenen - hva skjedde i starten av det store smellet - *big bang* - og hva er fysikken inne i sorte hull hvor både gravitasjon og kvanteteori må forenes. At det gjenstod to problem slik som sagt over var i overkant arrogant siden på makroskala - i kosmologi - er det på tross av stor suksess med generell relativitetsteori to store uløste problem - hva er *sort masse* som får galaksene til å henge sammen, og hva er *sort energi* som får utvidelsen av universet til å akselerere. Ulike forsøk på å forene fysikken i en felles matematisk formalisme inneholder ulike spekulative antagelser om hvordan verden henger sammen med interessant matematikk og mange tilfeller finner fysikere løsning på problemer som matematikere ennå ikke har løst.

2.14 Matematikk og fysikk

Fysikk og matematikk har vekselvirket så lenge fagene har eksistert og det har flere ganger vært tendenser til spesialisering slik at fysikk og matematikk separeres. Da Einstein ved hjelp av noen få fysiske forutsetninger konstruerte den matematiske versjonen av den spesielle relativitetsteorien, ble dette gjort med relativt enkel matematikk. Men da Einstein ønsket å generalisere relativitetsteorien til også å gjelde gravitasjonsfysikk, forstod han at han trengte en annen og mer avansert matematikk. Matematikken som i dag kalles differensialgeometri hvor selve rommet krummes var utviklet uten tanke på anvendelse av Riemann etter at Lobachevsky tidligere hadde bevist at det fantes konsistente geometrier forskjellig fra Euklidsk geometri. (Se kap.8 i Rodin [2014]) Det er mange eksempler på at med formuleringen av kvantemekanikk ble ulike deler fra ikke-anvendt matematikk tatt i bruk, slik som Hilbertrom, ikke-kommuterende variabler og komplekse funksjonsresultat. **David Corfield** [2003] nevner i sin bok *Towards a philosophy of real mathematics* at fysikk og matematikk skilte lag rundt 1930 og fant sammen igjen rundt 1970 da fysikere oppdaget at det de kaller gaugeteorier er det samme som matematikerne kaller fiberbunter. Faren med at fysikere overser matematikk, sier Corfield, er at matematikkens konsptualisering oversees når fysikerne ser etter *klar til bruk*-matematikk heller enn et nettverk av assosierte ideer. Det er flere interessante eksempler i Corfields bok. Riemanns zetafunksjon har flere ganger vist seg å ha overraskende konsekvenser. Corfield nevner at ved å bruke Hopf algebra for å beregne rekkeutvikling perturbasjonskvantefeltteori da avhenger svaret av verdiene i zetafunksjonen. (s.14.) Videre nevner Corfield at avstanden mellom nullpunktene i zetafunksjonen og energinivåene i tunge atomkjerner har samme statistiske fordeling. (s. 22 og 80). Gutzwiller fant en sammenheng mellom energifordelingen i hydrogenmolkylet og Selbergs sporformel som baserer seg på nullpunktene i zetafunksjonen. Definisjonen av Riemanns zetafunksjon er gitt i Appendix.

Del IV

Grunnlaget vi står på

Mengdelære og aksiomene som **Ernst Zermelo** og **Abraham Fraenkel** formulerte rundt 1920 sammen med utvalgsaksiomet har lenge blitt regnet som standardgrunnlaget for matematikk. Aksiomene som forkortes ZFC er gitt i Appendix. Disse aksiomene dekker nærmest all matematikk. Ulike andre grunnlag finnes og har vært diskutert. Kategoriteori har i senere år blitt populært som et alternativ til ZFC. Ulempen med ZFC er at matematikere har ikke et aktivt forhold til dem, og enda mindre fysiker. Jeg kan ikke huske noen sinne å ha sett hvordan hele tall defineres ved hjelp av mengder i en fysikkbok. Det har forekommet i noen få matematikkbøker, men uten at disse definisjonene egentlig brukes. Å tilbakeføre matematiske resultater til ZFC for eksempel i geometri er sjelden umulig, men har vist seg så komplisert og demotiverende at det sjelden gjøres. Derfor lanserte **F.W. Lawvere** [1976] en kategori av mengder som kunne fungere som et grunnlag for matematikk. Det var altså ikke et *ekte* grunnlag, men et grunnlag for å introdusere studenter til matematikk og da særlig matematiske strukturer, det som gjerne kalles abstrakt algebra. Definisjonen av kategorier er også gitt i Appendix. Kategoriteori har som det står i innledningen i SEP artikkelen av **Jean-Pierre Marquis** [1996(2019)] en sentral posisjon i samtidsmatematikken, teoretisk informatikk og har anvendelse i teoretisk fysikk. Det er en *matematisk* teori om strukturer og systemer av strukturer. Altså matematikk om matematikk. Den filosofiske relevansen nevnt i SEP-innledningen gjelder spørsmål om matematisk ontologi og epistemologi. I §3 om filosofisk relevans står det mye kategoriteori som verktøy og anvendelsesområder. I stedet for å bygge matematikk på en grunnmur av aksiomer, er kategoriteori mer å sammenligne med å bygge et fartøy (romskip eller bil som eksempler) og reise omkring i det nye landskapet. En annen analogi er å bygge en ramme og deretter finne aksiomene og spillereglene, det som ligger i å bygge ovenifra og ned. En kategori behøver ikke være konsistent med en annen kategori. Noen kategorier inneholdet tall, andre typer, andre mengder, noen inneholder geometriske objekter, noen inneholder andre kategorier og noen inneholder isomorfier mellom kategorier og så videre. En liten advarsel: Det er enkelt å lære seg definisjonene på kategoriteori, men det er vanskelig å følge litteraturen, syntaksen er ikke alltid lik fra bok til bok, det brukes mange ulike typer piler og bevisene kan være kompliserte. Og feltet er enormt så det er lett å gå seg bort. Å si at man kan kategoriteori etter å ha lært seg definisjonen på hva en kategori er, som å si at man kan matematikk om man har lært at matematikk handler om mengder.

2.15 Utviklingen av UA

Tidligere har vi sett på hvordan troen på vår beste vitenskap har medført en forpliktelse til å tro på matematikk. Først var denne forpliktelsen til de matematiske objektene og senere til den matematikken som var med på å forklare vitenskapen. Vi har også sett hvilken matematikk det er som er brukt i vår beste vitenskap, nemlig først hva vi kan kalle kurvetilpasning til empiriske fenomen (Galilei), via partikulær modellbygging (Newton) og strukturell modellbygging (Euler, Lagrange, Hamilton), til kreativ strukturtilpasning til empiriske observasjoner til nye modeller. Vi har ikke sett på hvordan fysikken utviklet seg etter Dirac og hvilken matematikk og hvordan denne ble anvendt for å lage prediksjoner om naturen. Det er en fare ved å dele matematikken opp i den delen som støtter vitenskap og den delen som ikke gjør det. Faren er at den delen som vi i dag tror ikke støtter vitenskapen, en dag gjør det og vi går glipp av slik innsikt. Det vi ser ved å se på de eksemplene Baron og ... viser til for matematikk som er en del av vitenskapen, er at den tilpasser seg på samme måte som vi har sett de fysiske teoriene gjør. I eksemplet med Levy flukt er empiriske data som søker modell akkurat som det i Euler-Lagrange formalismen er søk etter den formelen som endrer seg minst. (Baron)

2.16 Fysikk etter Dirac

Einstein og **Dirac** la begge vekt på at matematikken skulle ha estetisk appell, matematikken skulle være elegant og gjerne ha stor grad av symmetri. Men først og fremst skulle matematikken være riktig, være i overensstemmelse empiriske data, og konsistent. Matematikken skulle også være *sunn*, det vil si uten spekulative element. Dirac kritiserte **Schrödinger** for ikke å være modig nok da han lanserte sin bølgefunksjonsformalisme for kvantemekanikk, men ventet på empiriske resultateter før han turde å publisere sin teori. Einstein, i motsetning til Dirac, kunne ikke godta at tilfeldighet hadde ontologisk status i kvantemekanikk. Dirac videreførte kvantemekanikk for partikler til en kvanteteori for felt, kvantefeltteori, det som også kalles annenkvantisering. Førstekvantisering er kvantisering av energi, impuls og tid, mens annenkvantisering er kvantisering av felter og kraftutveksling. Kraftutvekslingen skjer ved hjelp av virtuelle partikler. Da Dirac utviklet annenkvantiseringen for vekselvirkende felt, uttrykte Einstein at det var himmelropende abstrakt. Dirac tok utgangspunkt i en reformulering av en kreativ løsning han hadde laget for Schrödingerligningen med potensial for en kvantemekanisk harmonisk oscillator, det vil si $V(r) = r^2$. En klassisk oscillator er et lodd som henger i en fjær og som kan svinge med ulike frekvenser. I den nye formalismen med annenkvantiseringen blir Diracligningen tolket som en feltligning og ikke som en bølgeligning. En ligning for tilblivelse og opphør av ulike tilstander.

I beskrivelsen av hvordan felt vekselvirker, med seg selv og andre felt, var det nødvendig med nye metoder. I fysikk er det vanlig å konstruere en modell for hvordan idéelle objekt oppfører seg under idéelle forhold. Eksempler kan være perfekte kuler som ruller uten friksjon. For å håndtere avviket fra det idéelle, tas det utgangspunkt i den *rene* teorien og ser hvordan denne kan utvides med ulike former for forstyrrelser, slik som at en kule ikke er perfekt eller at noe friksjon finnes. I kvantesystemer for partikler er det utarbeidet en egen perturbasjonsteori etter mønster fra klassisk fysikk. I mangel av en modell for vekselvirkende felt, ble det tatt utgangspunkt i de frie feltene hvor vekselvirkningen ble lagt til som en forstyrrelse, en perturbasjon. En utregning med forstyrrelser er en sum korreksjonsledd til det uforstyrrede systemet. Er forstyrrelsen liten fungerer denne metoden greit, det vil si at utregningene har stor overensstemmelse med empiriske data. Er forstyrrelsen stor, er det behov for en annen teori, en annen måte å regne ut hvordan vekselvirkingen påvirker utfallet. Da en perturbasjonteori ble utarbeidet for kvantefeltteori som en sum av korreksjoner ble formulert, viste det seg at allerede første ledd i korreksjonen var uendelig. Er det noe som ikke er fysisk realiserbart eller fysisk oberverbart, er det uendelig. Det ble argumentert med fra tilhengerne av denne prosedyren at uendeligheten er konstant, så vi bare fjerner den, det er differanse mellom ulike målinger som teller uansett. Dette argumentet kunne ikke Dirac godta og sa at matematikken var usunn:

> Jeg må si at jeg er veldig skuffet over situasjonen fordi i denne såkalte *gode teorien* med de uendeligheter som opptrer i formlene, fjernes disse på en vilkårlig måte. Dette er ikke fornuftig (sensible) matematikk. Fornuftig matematikk kan fjerne en størrelse når den er liten - ikke bare fjerne den fordi den er uendelig stor og du ønsker den ikke!

[20] Ved flere anledninger sa Dirac at han skulle gjerne ha støttet renormalisering men teorien var for stygg (ugly). Flere ganger gav Dirac også uttrykk for at matematikken måtte være vakker og det gjaldt også fysikk. En litt mer formalisert metode for å fjerne uendeligheter går i dag under navnet, renormalisering, og er en godtatt del av fysikken.

2.17 Aksiomatisk metode

Andrei Rodin som har epigrafen med henvisning til Arnold, mener at det bør utvikles en ny metode for matematikk, ikke bare at nye aksiomer bør legges til det nåværende grunnlaget for matematikk. Det nye grunnlaget bør lages basert på kategoriteori og kategorisk logikk. Kategorisk logikk springer ut av kategoriteori. Dette synet redegjør Rodin grundig for i *Axiomatic Method and Category Theory* fra 2014. Det finnes ulike aksiomatiske metoder hvor ZFC regnes som standardgrunnlaget og er den mest omfattende. Flere aksiomatiske metoder tar utgangspunkt i ganske få aksiom og med et begrenset påstandsrom. Den første aksiomatiske metoden som ble laget var den euklidske metode for geometri. **Hilbert** arbeidet med ulike aksiomatiske metoder og også en ny metode for geometri. Det vi ser når vi ser på formulering av fysikk er at det sees etter matematikk som kan være nyttig, ikke etter aksiomer som kan hjelpe med å støtte opp aktuell matematikk. Et stort arbeid pågår med å formulere aksiomer for kvantefysikk. Den motsatte prosessen av å ta utgangspunkt i aksiomer og utlede matematiske påstander, er å ta utgangspunkt i matematiske påstander og se hvilke aksiomer som er nødvendige - det kalles for syntetiske aksiomer.

[20]Paul Adrien Maurice Dirac, Directions in Physics: Lectures Delivered During a Visit to Australia and New Zealand August/September 1975

2.18 Kategoriteori

[21] Kategoriteori har sine røtter i gruppeteorien utviklet av **Évariste Galois** da han fant de nødvendige betingelsene for at et polynom av grad høyere enn 4 kunne løses ved rotutdraging. De konkrete gruppene gav opphavet til abstrakte grupper som beskrives aksiomatisk. For å studere grupper var det nødvendig å se på relasjonen mellom ulike grupper. Gruppeteori ble ansett som helt unødvendig for fysikere, men er i dag en sentral del i ulike deler av fysikk (noen eksempler: kvark, krystallografi, relativitetsteori, gaugeteori). I dag inngår gruppeteori som en kategori, kategorien av konkrete grupper, i kategoriteori. Kategoriteori ble introdusert av **Samuel Eilenberg** og **Saunders Mac Lane** i slutten av andre verdenskrig for å studere problemer i algebraisk geometri. Rent teknisk består en kategori av en klasse med objekter, en klasse med avbildninger fra et objekt til et annet (kan være det samme) og binær operasjon av avbildningene er assosiativ og og oppfyller betingelsene for identitet. Dette illustreres gjerne med en trekant med piler rent skjematisk. Ved hjelp av denne definisjonen er det mulig å studere mange ulike strukturer på et høyere nivå. Også kategorier kan studeres og avbildninger mellom kategorier.

Kategoriteori har vokst til å bli et stort område i seg selv og spiller en stor rolle i informatikk, bevisteori og fysikk. Hvis mengder er matematikkens atomer slik det er i standardformuleringen, hva da med kategoriteori hvor en kategori består av mengder og gjør det mulig å reformulere matematikkens grunnlag ved hjelp kategoriteori? Det er to hovedtema som har vært gjenstand for debatt når det gjelder kategoriteori som grunnlag for matematikk. Det første er teknisk tilstrekkelighet og det andre er autonomi. For tilstrekkelighet blir kategoriteori (KT) sammenlignet med ZFC og det er hvor deler av ZFC ikke støtter praksis i KT og omvendt. Autonomi betyr at kategoriteori kan stå alene som grunnlag, og det kan den ikke. Den støtter seg på annen matematikk som er dypest sett er definert i ZFC. Det siste punktet skriver **Michael Ernst** i kapittel 5 *Category Theory and Foundations* i **Elaine Landry (ed)** [2018] *Categories for the Working Philospher* overser at motivasjonen for å lansere kategoriutgaver av grunnlag for matematikk var anvendelighet og naturlighet for arbeid med matematikk. Da kategorien av mengder (ETCS - Elementary Theory of the Category of Sets) ble lansert var ambisjonen til **F.W. Lawvere** [1976] at denne kategorien kunne fungere som grunnlag for matematikk slik mengdelæren tradisjonelt har gjort. Ulempen med å erstatte standardgrunnlaget for matematikk med en av mange kategoriformuleringer er at det aksiomatiske grunnlaget er ikke helt likt, erstatningsaksiomet mangler og det er ikke alle mengder som er dekket. En annen kategori Lawvere konstruerte som grunnlag for matematikk er *elementær teori for kategori av kategorier*(ETCC - Elementary theory of the category of categories) som også kan fungere som et grunnlag for matematikk. Grunnlaget for matematikk samlet i en aksiomatisk teori kalte Lawvere *Kategori av kate-*

[21] `https://www.britannica.com/science/foundations-of-mathematics` og `https://plato.stanford.edu/entries/category-theory/`

gorier som grunnlag (CCAF - Category of Categories As a Foundation). Se og Rodin s. 105. De to kategoriene ETCS og CCAF er de som er mest diskutert og derfor disse vies spesiell oppmerksomhet i Landrys antologi.

Lawvere har stor interesse for filosofi og fletter ofte inn filosofiske betraktninger og referanser til filosofi i sine artikler. En positiv beskrivelse av Hegels dialektikk i forbindelse med ulike motsetninger i matematikk, slik som generell vs partikulær, objektiv vs subjektiv, å være vs å bli, kvantitet vs kvalitet, likhet vs forskjell osv. Kategoriteori tillater interne språk, tillater matematikk å bli analysert matematisk. Kategoriteori har mulighet til å konstruere rom hvor punktene i rommet er matematiske påstander, dette brukes for å konstruere bevismaskiner for automatisk etterprøve matematiske teorem. Se særlig §5.8 i Rodin. Rodins mål er å lage en ny aksiomatisk metode og for å finne en slik metode passer kategoriteori bra. Derfor handler Rodins bok mye om kategoriteori. Topos og intern logikk.

Typeteori har lenge et ekvivalent alternativ til mengdelære som grunnlag for matematikk. Typeteori vil bli tema litt senere i forbindelse med diskusjonen om HoTT som grunnlag for matematikk. Siden det er mulig å formulere kategorier for mengder er det naturlig nok også mulig å formulere kategorier for typer. Typeteori er grunnlaget for mange programmeringsspråk og naturlig del av de mest brukte programmeringsspråkene. Typeteori har den fordelen at det er et naturlig konsept for logikk, modellering og konseptutvikling.

Da standardgrunnlaget ble konstruert, var målet å forene matematikk skriver Maddy i slutten av første kapittel i *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory* [2017] noe hun mener at lyktes. De aksiomene hun refererer til i tittelen er standardaksiomene. En ulempe med kategoriformulering av grunnlag for matematikk er at det åpner opp for et pluralistisk matematikk, altså at matematikk ikke er et enhetlig rammeverk. Da Lawvere konstruerte en kategori for mengder og mente at kategorien kunne fungere som et nytt grunnlag for matematikk, var hans opprinnelige motivasjon at et slikt grunnlag var bedre rent pedagogisk som en introduksjon til matematikk. Senere formulerte Lawvere en ny kategori, CCAF, som skulle gi et bedre og mer dekkende grunnlag for matematikk.

Kategorien karakteristisk Kartesisk lukkede kategorier (CCCC - Characterized Cartesian closed categories) er en kategori knyttet til logiske system og ulike logiske paradokser.

2.18.1 Lawvere og Hegels objektive logikk

Rodin skriver i §5.8 om **Lawveres** omfavning av Hegels logikk i forbindelse med kategoriteori. I nLab er følgende sitat fra Lawvere gjengitt:

> Det er min overbevisning at i det neste tiåret og i det neste århundret

> vil de tekniske fremskrittene som er gitt av kategoriteoretikere være av verdi for dialektisk filosofi, og gi presis form med analyserbare matematiske modeller til eldgamle filosofiske distinksjoner som generelt vs. partikulært, objektivt vs. subjektiv, å være vs. å bli, plass vs. kvantitet, likhet vs. forskjell, kvantitativ vs. kvalitativ osv. Den eksplisitte oppmerksomheten fra matematikere til slike filosofiske spørsmål er nødvendig for å oppnå målet om å gjøre matematikk (og dermed andre vitenskaper) mer allment forståelige og anvendelige. Selvfølgelig vil dette kreve at filosofer lærer matematikk og at matematikere lærer filosofi.[22]

Lawvere foreslår at universelle konstruksjoner i kategorilogikk og toposteori, slik som adjunksjoner, bør ansees for å være formell implementering av Hegels objektive logikk. Kategoriteori er blitt beskrevet som en mulighet til å se matematikken fra *et fugleperspektiv* og det er nettopp dette samspillet mellom indre og ytre egenskaper i kategoriteori som Lawvere og Rodin legger merke til og som gjør at de snakker om dialektisk filosofi.[23]

2.19 Kategoriteori oppsummert

Som et alternativt grunnlag til ZFC for matematikk har kategoriteori en rekke fordeler, men også noen ulemper. Fordelene er at det er et fleksibelt system som tillater ulike anvendelige konstruksjoner i fysikk, matematikk og informatikk og gir innsikt i ulike overordnede strukturer i matematikk. Kategorier som grunnlag er et mer pedagogisk og mer tiltalende grunnlag for studenter som vil fordype seg i matematikk. Kategorier gjør det mulig å konstruere logikk, semantikk og syntax for analyse av metamatematiske problem, til og med vitenskaplig metode kan analyseres. Kategoriene har et indre språk som muliggjør lokale egenskaper. Ulempen med kategoriteori er at de ulike kategoriene er ikke konsistente seg i mellom selv om de er intrakonsistente. Kategoriteori fremmer pluralistisk matematikk. En annen ulempe er at kategoriteori er basert på et annet grunnlag, det er ikke autonomt. En anmelder av boken til Landry påpeker at for praktiserende matematikk er det ikke en grunn til å velge mellom mengdeteori eller kategoriteori, fordi disse to gjensidig belyser og forsterker hverandre. SEP artikkelen om kategoriteori skrevet av **Jean-Pierre Marquis** [1996(2019)] skriver at den filosofiske relevansen for kategoriteori er at er nå et vanlig verktøy for matematikere og at kategoriteori organiserer og forener mye av matematikken. Mye av samtidsmatematikken har mye å takke kategoriteori for slik som algebraisk topologi, homologisk algebra, homotopiteori, aritmetisk algebra og algebraisk geometri. Vi har nå en matematikk hvor mye av undersøkelsene er basert på et grafisk språk med ulike typer piler og bokser. Mens Bourbaki la vekt på å bevise matematikk som *isomorfier* er nå fokuset på ulike typer *ekvivalens*.

[22] Fra **nLab** `https://ncatlab.org/nlab/show/William+Lawvere` oversettelsen gjort av meg

[23] Hegel hadde to typer logikk: Subjektiv som er den vi vanligvis kaller logikk og den objektive logikk som ligger under slik vi organiserer våre samfunn.

I kapittel 5, **Lawvere**: *Pursuit of Objectivity*, i *Axiomatic Method and Category Theory* [2014] forklarer Rodin nærmere sitt syn på matematikkens grunnlag og den aksiomatiske metode. Han siterer Lawvere fra 2003 som sier at han var heldig som hadde to lærere som benyttet uttrykket *grunnlag* på en vanlig fornuftig måte (common sense) og ikke den spekulative måten i tradisjonen etter Bolzano-Frege-Peano-Russell. Rodin sier seg enig med Lawvere i at et grunnlag bør hjelpe praksis og grunnlaget er utledet fra anvendelse gjennom forening og konsentrasjon gjennom aksiomatisk metode bygget på *kategorisk logikk* som Lawvere oppfant. Lawvere var godt kjent med kategoriteori som gjør det mulig å analysere ulike deler av matematikk fra et mer overordnet plan, inkludert mengder. Ved å *konstruere* en kategori for mengder mente Lawvere at han kunne lage et alternativt grunnlag for matematikk. Den første konstruksjonen han laget for dette formålet er ETCS (Elementary Theory of Category of Sets - elementær teori om mengdekategori). ETCS er en kategori med alle mengder som objekt og alle funksjoner mellom disse mengdene som morfismer (eller avbildninger). En gitt univers av mengder vil gi en tilhørende kategori. $\in$, er inneholdt i, kalles en primitiv ikke-logisk konstant. Spørsmålet er om ETCS kan erstatte aksiomene i mengdelære og dermed fungere som et alternativt grunnlag? Mengdelære bruker medlemskap som en binær relasjon mellom to mengder, mens ETCS tar sammensetning av funksjoner som primitive. Metoden som ZF og ETCS er bygget på er den samme, sier Rodin (§5.1), nemlig Formell Aksiomatisk Metode, og ingen kategorisk logikk er involvert.

Lawvere bygger et nytt og mer generelt grunnlag på ETCS som han kaller CCAF (Category of Categories As a formulation - Kategori av kategorier som et grunnlag). Mens ETCS var spesifikt konsturert for mengder, er CCAF et generelt rammeverk hvor det er mulig å ta utgangspunkt i aksiomene fra ETCS og utvide disse. Mens ZF-aksiomene er et grunnlag som bygges opp fra bunnen og opp, bunn-topp tilnærming, er CCAF en struktur som bygges på topp og som fylles med aksiomer etter behov, altså en topp-bunn tilnærming. Denne tilnærming viser hvordan intern struktur og konstruksjon av lokale aksiomer gjøres ikke ulikt syntetisk matematikk. For å bygge en logikk konstruerer Lawvere en kategori, CCC (Cartesian Closed Category - kartesisk lukket kategori), som er en felles abstraksjon av typeteori og utsagnslogikk.

Kategoriteori ble laget for å samle sammen strukturer i algebraisk geometri basert på det som den var standard matematikk, som vi får anta i prinsippet var basert på mengdelære. Når kategoriteori blir lansert som et grunnlag, menes det ikke et grunnlag fritt for mengdelære. Kategoriteori har sitt eget ytre og indre språk og det er fullt mulig å lage kategorier av mengder og bruke disse som utgangspunkt, men ikke alle mengder i mengdelære lar seg tilpasse kategorier. Kategoriteori kan også lage sin egen logikk, kategorilogikk, som er konstruktiv. Andre typer logikk er også mulig, det avhenger av hva innholdet i kategorien er. Det ytre språk for kategoriene, uttrykkes best ved hjelp av typeteori i følge nLab, §2.

En måte å se på typeteori fra synsvinkelen til en kategoriteoretiker, er som en syntaks for å beskrive konstruksjonen av objekter og morfismenene i en kategori. Denne tolkningen kan kalles *kategorisk semantikk*. Mer presist, kategorisk semantikk referer til *adjunksjon* eller *ekvivalens av kategorier*

(kategori av kontekst $\vdash$ internt språk) : (Con $\vdash$ Lan) :

$$\text{Typeteorier} \underset{\text{Con}}{\overset{\text{Lan}}{\rightleftarrows}} \text{Kategorier}$$

Cont er kontekst (Context) og *Lang* er språk (language). Ulike typeteorier (logikk) tilsvarer ulike kategoriteorier og omvendt. En tabell står på nLab sine sider. I tabellen ser vi at kartesisk lukket kategori tilsvarer intuisjonistisk utsagnslogikk og enkeltypet lambda kalkulus og at hyperdoktrine kategori tilsvarer førsteordens logikk, mens stjerne-autonom kategori tilsvarer klassisk lineær logikk. Denne sammenhengen mellom logikk og kategorier gjør det mulig å studere kategorier på et mer overordnet nivå. Boken til **David Corfield** [2020]: *Modal homotopy type theory: the prospect of a new logic for philosophy* inneholder en praktisk innføring i hvordan logikk skrives ved hjelp av typeteori som kan analyseres ved hjelp av kategoriteori. I litteraturen for kategoriteori er det mange eksempler på hvordan ulike matematiske objekt kan legges inn i kategorier og hvordan disse kategoriene kan analyseres og brukes i andre objekter, som nye kategorier.

2.19.1 SEP om typeteori

Typeteori er grunnleggende for både logikk og informatikk. SEPs artikkel om typeteori slår fast dette som et faktum i første linje. Første paragraf starter med at Russell i 1903 introduserte typeteori for å håndtere det paradokset han fant i mengdeteorien, Russells paradoks. I §2 starter med at typeteori gjør et skille mellom objekter, predikater, predikater av predikater og så videre, og dette er nok til å unngå Russells paradoks. I utgangspunktet var typeteori slik Russell løste problemet med Russells paradokset et hierarkisk system av typer, et forgrenet system (ramified). Senere er flere typeteorier lansert, enkel (simple) typeteori uten paradokser med $\lambda-$uttrykk og som kan fungere som et grunnlag for matematikk. Flere forskjellige typeteorier finnes med forskjellige konsekvenser. Wikipedia-artikkelen har en grei oversikt. Jeg vil ikke gå inn på hvordan typeteori danner et grunnlag logikk og hvordan typeteori henger sammen med funksjonelle språk i programmering ved bruk av $\lambda-$uttrykk. Det er interessant at SEP bruker en annen notasjon for å introdusere typeteori enn tilsvarende engelske wikipedia-artikkelen. Typeteori kan brukes som grunnlag for matematikk, slik også Zermelos aksiomer for mengdeteori også kan. Siden en type kan tolkes som en mengde og tilsvarende konstruksjoner for funksjoner og overmengden (powerset). Den motsatte veien er interessant skriver SEP i §4 hvordan kan mengder uttrykkes ved hjelp av type? Artikkelen viser hvordan **P. Aczel** i 1978 viste dette ved hjelp av å bruke grafteori (graf i matematisk betydning som en struktur bestående av noder og (u)rettete relasjoner). Konklusjonen er at Churchs enkler typeteori er ekvikonsistent med den begrensede versjonen av Zermelos mengdeteori.

2.19.2 Topos

Basert på en teknikk i topologi utvidet **Alexander Grothendieck** [1950] denne til tallteori ved å definere en kategori som representerte rommet. Denne kategorien kalte han for en *topos*. Grovt sagt er en topos et sted (topos er plass på gresk) hvor en kan gjøre logikk, et sted hvor matematiske utsagn er riktige. En elementær topos (entall av topoi) er en kategori med noen ekstra egenskaper som gjør at en kategori blir mer lik kategorien av mengder. Det er mange ulike topoi, noen har ikke valgbarhetsaksiomet og noen har et *naturlig tall objekt*. Den presise definisjonen av en topos er en kategori med:

1. endelig grense og kogrense
2. eksponsialer eller er kartesisk lukket
3. delobjekt klassifiserer

Disse kravene til en kategori er bare for å begrense kategorier til kategorier som er ligner på mengder. Toposteori er nyttig for mange anvendelser og for videre studier i matematikk. Denne korte presentasjonen er fra **John Baez** [2021] *Topos Theory in a Nutshell* som er en kort, litt morsom og veldig enkel innføring i toposteori. En topos kan i tillegg til å bli oppfattet som en kategoriteori for mengder fungere som et generalisert topologisk rom som gir en direkte forbindelse mellom geometri og logikk. Anvendelsesområdet for toposteori er enormt: Intuisjonistisk matematikk, syntetisk differensial geometri, informatikk, teoretisk fysikk, høyere dimensjonal geometri, kvantegrupper og kvantefeltteori. Et enormt arbeid med å omformulere grunnlaget for matematikk er gjort av **Jacob Lurie** [2009] *Higher Topos Theory* som basert på kategoriteori konstruerer *uendelig kategorier*. I populærvitenskaplige artikkelen *With Category Theory, Mathematics Escapes From Equality* av **Kevin Hartnett** [2019] på nettstedet til *Quantamagazine* forklares uendelige kategorier som en teori om ekvivalens heller enn likhet. Dette er et eksempel på at kategoriteori som nytt grunnlag gir nye perspektiver og ny matematikk.

2.20 Kategoriteori og fysikk

Hvis den matematikk vi har støttet oss til for vår beste vitenskap endrer grunnlag, da vil dette ha konsekvenser for hvordan fysikk formuleres med det nye grunnlaget. Våre to beste teorier om verden, kvanteteori og generell relativitetsteori, har to ting til felles: Skillet mellom å observere noe innenfra og utenfra. Til å formulere teorier med et tilsvarende mulighet, passer kategoriteori fint hvor det er mulig å beskrive kategorier både innenfra og utenfra. Med kategoriteori pågår det en omfattende reformulering av ulike deler av matematikk til kategoriteori. Kategoriteori er for lengst tatt i bruk for ulike deler av fysikk. For eksempel er det utarbeidet en illustrativ formulering av kvantemekanikk. Se kapittel 12: *Categorical Quantum Mechanics I: Causal Quantum Processes* i **Elaine Landry (ed)** [2018] av **Bob Coecke** og **Aleks Kissinger**. En grundig innføring i hvordan lage et teoretisk grunnlag for fysikk basert på kategoriteori finnes på **nLab**: med referanse til Hilberts 6. problem som går ut på å formalisere eller lage aksiomer for fysikk i matematikk. nLabs gjennomgang består av hvordan kvanteteorien kan formuleres ved hjelp av geometri og ulike kategorier for kvanteteori kan lages. Fordelen med å formulere kvanteteori i kategoriteori er å en enhetlig ramme for teoribygging i fysikk og matematikk. Siden kategoriteori allerede har vært i bruk i matematikk i et halvt århundre kan mye vinnes ved å ha felles grunnlag.

Kvantefeltteori var den videreutviklingen Dirac gjorde av kvanteteorien for å lage en teori for mange partikler, for vekselvirkning mellom elektromagnetiske felt og partikler som elektroner. Teorien ble videreutviklet for også å gjelde kvarker, sterke og svake kjernekrefter, det som i dag kalles standardmodellen. Det er et pågående arbeid med å formulere denne kvantefeltteorien ved hjelp av kategoriteori, *Algebraisk kvantefeltteori* alternativt *Aksiomatisk kvantefeltteori*. **nLab** er en introduksjon: Og en populærvitenskaplig artikkel om vanskelighetene og om hvordan matematikk og fysikk gjensidig beriker hverandre er beskrevet i *The Mystery at the Heart of Physics That Only Math Can Solve* av **Kevin Hartnett** [2021] for *Quanta Magazine*.

Litteraturen om kategoriteori er enorm, det er laget egne bøker om kategoriteori for filosofer, matematikere, fysikere og informatikere. Alle bøkene har forskjellig vanskelighetsgrad og forskjellig fokus på anvendelse. Veldig kort er kategoriteori en teoretisk ramme som består av objekter og piler (også kalt morfismer) mellom objektene. Det er krav til både objektene og pilene. Et matematisk objekt er en kategori hvis kravene til objekter og piler er oppfylt og kan da undersøkes ved hjelp av kategoriteori. Alle hele tall kan uttrykkes som kategorier, alle mengder, alle grupper og selv matematisk bevisføring kan uttrykkes som kategorier. Selv kategorier i kategoriteori kan uttrykkes som kategorier. Fordi kategoriteori kan gjøre alt mengdelære kan, og er et rammeverk som matematikere bruker, har mange fattet interesse for kategoriteori som grunnlag for matematikk. Rodin skriver interessant om historien til kategoriteori og sitt møte med en av grunnleggerne av kategoriteori, Lawvere, men hans introduksjon til hva kategoriteori går ut på er ikke enkel å forstå uten en viss matematisk trening. Siden kategoriteori nå er et så enormt fagfelt, er det ikke bare å ta opp en bok å lære seg teorien for fokus og anvendelser er veldig forskjellige. Det samme er eksemplene, som går fra helt trivielle til svært avanserte og som delvis også er selvrefererende. Selv om det finnes kategorier for kategorier medfører ikke denne konstruksjonen paradokser slik som Russells paradoks. Notasjonen i kategoriteori er dessverre ikke unik noe som kan forvirre i begynnelsen når en begynner å lære seg kate-

goriteori. Litt teknisk definisjon av kategoriteori:
Kategoriteori har en rik struktur og gjør det mulig å studere ikke bare kategorier ved hjelp av kategorier, men også logikk og store deler av matematikk. Det er mulig å utlede matematisk logikk og det er mulig å bevise matematiske påstander. Å bruke matematikk på matematikk er ikke noe nytt, Gödel brukte slike metoder da han beviste sine satser om ufullstendighet, og Cantor da han beviste at det finnes større uendeligheter (de reelle tallene, $\mathbb{R}$, er mer enn tellbart uendelig). Kategoriteori gir også mulighet for at objekter har indre språk og at objekter kan studeres både fra inn- og utsiden. Logikk som er konstruert ved hjelp av kategoriteori er *kategorisk logikk* konstruert av Lawvere.

2.21 Homotopiteori

Homotopi er en del av matematisk topologi og brukes for å føre over ulike matematiske objekter som kurver og flater på en kontinuerlig måte til et annet element. Homotopi er mye brukt i algebraisk geometri hvor algebraiske problemer sees på ved hjelp av geometri og omvendt. Hvis en slik homotopi er mulig å konstuere er kurvene eller flatene homotope, det vil i en forstand si ekvivalente. De matematiske objektene kan være matematiske utsagn og typer i typeteori. Hvis de to typer kan føres over ved hjelp av en kontinuerlig homotopi da er typene homotope, men ikke identiske. For eksempel vil i en beviskjede for en matematisk påstand være mange ulike påstander som utledes av hverandre som er ulike men som allikevel representerer det samme utsagnet.

2.21.1 Matematikkens grunnlag

Hvis vi er forpliktet til matematikk for vår beste vitenskap, hvilken matematikk er vi forpliktet til? Og hva er grunnlaget for denne matematikken? Det som regnes som standard grunnlaget for matematikken baserer seg på mengdelære og inneholder 9 aksiomer (ZFC) som ble utarbeidet av **Ernst Zermelo** og **Abraham Fraenkel** rundt 1920. Aksiomene og hvordan tall faktisk er definert er ganske ukjent for mange som holder på med matematikk og spesielt blant fysikere. Ved hjelp av aksiomene er det i prinsippet mulig å definere all matematikk og å gi en metode for matematisk bevisføring ved hjelp av logikk. Det at aksiomene ikke er mer i bruk og er ukjent for fysikere burde bekymre

Hvilken logikk er vi forpliktet til? I avsnittet over nevnte jeg ZFC-aksiomene hvor Z og F står for henholdsvis Zermelo og Fraenkel, mens C står for valgbarhetsaksiomet (choice). Velges C, da velges også klassisk logikk med ekskluderende middel og dobbelnektelse. Det vil si at med C-aksiomet vil en påstand p, være identisk med ikke-ikke p. Og p eller ikke p alltid være sann. Droppes C som aksiom, får vi det som kalles intuisjonistisk eller konstruktiv matematikk. Ulempen med å ta bort C er at store deler av matematikken er avhengig av logiske slutninger av typen over. **David Hilbert** sa at å ta bort disse logiske slutningene, var som å ta teleskopet fra en astronom. Store deler av abstrakt algebra og matematisk analyse baserer seg på logikk basert på C-aksiomet. Det er også vanlig å definere reelle tall ved hjelp av C-aksiomet, men det finnes konstruktive metoder for å definere reelle tall. Ofte er det mulig å bevise ulike utsagn på ulike måter og mange bevis som baserer seg på C-aksiomet, lar seg bevise uten dette aksiomet. Noe som ofte er mer komplisert. En stor del av utarbeidelsen av et nytt grunnlag for matematikk, HoTT, består nettopp i å omskrive matematikk ved hjelp av konstruktiv logikk siden konstruktiv logikk er mulig å utlede fra kategoriteori som HoTT bygger på.

2.22 Krisen i matematikken

I tillegg til at matematikken er blitt så komplisert at den er vanskelig å verifisere, slik Voevodsky beskriver, er matematikk også blitt veldig spesialisert og til dels uten kontakt med fysikk, slik Arnold sa at ville gi katastrofale resultater.

2.23 Hvilken matematikk er den uunnværlige

Hvis vi følger Arnolds prinsipp om at matematikk og fysikk ikke må adskilles, hvilken matematikk er den riktige? Og hvilke metoder er de riktige? Dette henger sammen med spørsmålet om hva som er grunnlaget for matematikk og formulert i en mer fysisk sjargong: Hva er matematikkens atomer/fundamentale byggesteiner? I det som kan kalles standardgrunnlaget for matematikk, den aksiomatiske metode sammen med klassisk logikk og ZFC-aksiomene, er atomene mengder. Mengder definerer tall, mengder kan brukes til å definere funksjoner, ulike strukturer, samling av ulike geometriske objekt, løsninger på ligningssystemer og også matematiske teorem. Maddy har skrevet en bok hvor hun forsvarer aksiomene, og med det mener hun akkurat denne oppfatningen av matematikk - det er ZFC, klassisk logikk + aksiomatisk metode. Dette grunnlaget har holdt seg som standardgrunnlag, selv om de færreste matematikere og fysikere noen gang viser til dette. Fysikk- og matematikklitteratur er full av formler med tall og mengder, men sjelden tall definert som mengder. Mengder som matematisk objekt har en rekke fordeler og er i utgangspunktet greit å forstå med utgangspunkt i dagligdagse eksempler, slik som antall egg i kartongen i kjøleskapet som Maddy brukte. Problemet med å bruke mengder som grunnlag for matematikk var at det kunne gi paradokser som Russell oppdaget tidlig (Russells paradoks). Russells løsning var å formulere matematikk ved hjelp av typer, men det løste heller ikke alle problemene. De første versjonene av typeteori hadde større problemer enn mengdeteori, men det er nå formulert typeteori som er ekvivalent med mengdelære som grunnlag.

2.24 Ramme for matematiske objekt

Da tall ble brukt til regnskap i sumernes tid, var det klart hva tallene stod representerte. Også da tall ble brukt i geometri var det klart hva klart hva tallene representerte, antall kanter på et objekt, som tre- og firkanter, antall krysninger mellom ulike konstruksjoner. Eller tallene representerte posisjoner enten på jorden eller objekter på himmelsfæren. Med moderne matematikk kan ulike matematiske objekt inngå i ulike sammenhenger. En funksjon kan være en sammenheng mellom to tallmengder, kan være et element i en mengde, kan være et element i en mengde, kan representere et tall som i gruppeteori og kan være løsning av en differensialligning, kan være funksjonsargument. Slike utvidelser av ulike rammer og se ulike matematiske objekt i, utvides stadig. Algebraiske problem kan løses geometrisk og omvendt som noen eksempler. Da Riemann postulerte Riemann-hypotesen for primtall, var det en sammenheng mellom en kompleks funksjon og nullpunkt i det komplekse plan, en sammenheng som er umulig å se ved hjelp av aritmetikk. Noen av disse matematiske strukturene er det mulig å analysere ved hjelp av formelle strukturer. I kategoriteori er det også mulig å studere kategorier og avbildninger mellom kategorier, selv om kategoriteori egentlig ble laget for studiet av geometriske strukturer.

2.24.1 "Det store skisma"

Skillet mellom matematikk og fysikk har vært en oscillerende bølge mellom forening og splittelse. Før Galilei ble matematikk sett på som adskilt fra fysikk, med Newton ble matematikk en del av fysikk men ikke en forent matematikk. Med Euler ble matematikken forent for så å bli spesialisert i mange ulike grener, før matematikk igjen ble forent med felles grunnlag med standard-aksiomene, i følge Maddy. Det grunnlaget som ble laget med ZFC ser på fysikk som en av mange anvendelser av matematikk og ikke så interessant for formulering av et grunnlag for matematikk. Fysikere anså heller ikke matematikkens grunnlag som spesielt relavant for den delen av matematikk som de holdt på med. Med den aksiomatiske metode og forsøk på å gjøre matematikken ren, ble matematikken stadig mer abstrakt og mindre anvendelig. (Burbarki, se Rodin [2014] avsnitt 4.2) Med den spesialisering i matematikk og fysikk ble det utviklet ulikt begrepsapparat. Men med utviklingen av kategoriteori og de senere års reformulering av fysikk, kan det se ut til at matematikk og fysikk lar seg gjenfore.

2.25 Normalvitenskap

I følge **Thomas Kuhns** [1962] paradigmeteori vil det før en vitenskaplig revolusjon hope seg opp med fenomener som ikke lar seg forklare i det han kaller normalvitenskap. Tidligere har vi sett at matematikk har fungert som en integrert del av fysikk og det er riktig at forut for de to kjente vitenskaplige revolusjonene, eller paradigmeskiftene, ble det lansert nye revolusjonerende teorier, som kvantemekanikk og relativitetsteori som løsning på problemene som hadde

hopet seg opp i det gamle paradigmet. Rammen for å forstå observasjonene, empirien, endret seg, men ikke observasjonene. Med kategoriteori endrer rammen for å forstå matematikk seg, slik at matematikken er den samme, men blir sett på i annen ramme. Det betyr at kategoriteori kan sees på som en måte å lage nye paradigmer. I tillegg til at matematikken har utviklet seg i ulike grener og tilsvarende for fysikk, er det en ny aktør tilstede på den vitenskaplige undersøkelsesfeltet. Datamaskiner gjør stadig mer av undersøkelsene og analysene i all vitenskap. Et tegn på et paradigmeskifte i matematikk er motivasjonen som **Voevodsky** oppgav for å utvikle Homotopisk typeteori, nemlig at matematikken var blitt for komplisert og trengte å bli støttet av datamaskiner som kunne utføre eller gjennomgå bevisene i matematiske utsagn.
I *A New Foundational Crisis in Mathematics, Is It Really Happening?* i samme bok som over, argumenterer **Mirna Džamonja** for at siden bevissjekkingen er basert på konstruktiv logikk, så er det såpass liten del av matematikk som kan verifiseres at *det* i seg selv er ikke en grunn til å omfavne HoTT som et nytt grunnlag for matematikk.

2.26 Universets tilstand

De spekulative teoriene om universet er mange og noe som diskuteres ivrig blant fysikere er om naturen er naturlig. Uttrykket *naturlig* kommer fra Einstein som mente at naturen var sublimt vakker, uunngåelig og selvstendig. slik Einstein så det er alternativet at naturen ellers ville være tilfeldig og rotete med tilfeldige svingninger. Fysikeren **Nathan Seiberg** at han pleide å tro på *naturlighet*, men var ikke sikker lenger og at han håpet at det fantes en mekanisme som vi ikke har tenkt på som kan forklare universet. Nå kunne han ikke se hva det skulle være. (**Kevin Hartnett** [2021] i serien *Math Meets QFT*) Large Hadron Collider (LHC - den store hadron kollisjonsmaskinen) i Cern produserer resultater som tolkes som at 'naturlighet' ikke er tilstede. Denne slutningen kommer etter oppdagelsen av Higgsbosonet, som også kalles 'gudepartikkelen' for å virkelig sette fyr i spekulasjonene. Teorien, standardmodellen, som forutså Higgsbosonet, den siste byggesteinen i kvark-modellen, gav også en rekke forutsigelser som ikke er observert. En rekke andre partikler i tillegg til Higgsbosonet ble forutsett, men ingen er observert. Massen til Higgsbosonet er grovt ($\approx 10^{19}$) forskjellig fra hva som er forutsagt. Multiverset kommer i to utgaver, en utgave er for å ha rom for alle variasjoner av naturkonstanter som finnes, en annen utgave er for å gi en deterministisk tolkning av kvanteteori som betyr multivers vekselvirker på kvantenivå før de går hver sin vei med. I disse multiversene er naturkonstantene de samme. Denne tolkningen av kvantemekanikk er matematisk riktig, men er ikke mulig å verifisere siden det ikke er noen kobling mellom universene etter at de har splittet seg. Dette er Everett-tolkningen av kvantemekanikk. (**Philip Ball** [2018] *Why the Many-Worlds Interpretation Has Many Problems*) Selv om mange fysikere gjerne lot seg rive med i diskusjoner om hvordan kvanteteori skulle tolkes, mente Dirac at formlene fikk tale for seg og at slik spekulasjon var meningsløs fordi det effektene av et multivers ikke er observerbare.

2.27 Prinsipper for maskinlæring

Maskinlæring kan sammenlignes med enkel regresjonsanalyse hvor en rett linje skal tilpasses til datapunkter gitt i xy-planet. Den rette linjen velges slik at linjen passer best mulig med datapunktene som er gitt. Når først en regresjonslinje er gitt, vil et nytt datapunkt x gi en prediksjon y. Ulempen med en slik enkel modell er at det er ikke alle sammenhenger som er tilnærmet en rett linje. Det finnes mange typer maskinlæring og noen av disse består av ulike typer regresjonsanalyser. Regresjonsanalyse benyttes rutinemessig i analyse av data i vitenskaplig sammenheng for eksempel for å finne korrelasjoner og sammenheng mellom teori og praksis. Den typen vi maskinlæring vi er mest interessert i kalles *dyplæring* som er inspirert av hvordan biologiske hjerner fungerer. Det alle former for maskinlæring går ut på er å finne mønstre i treningsdata til å lage en modell og bruke modellen for data som ikke har vært del av treningsdata. Dyplæring brukes til gjenkjenning av håndskrift, objekter på bilder og film, ansiktsgjenkjenning, men også til å finne ut sannsynlig forfatter eller kunstner for et henholdsvis ukjent stykke tekst eller kunstverk. Modellen for dyplæring består av sammenkoblede noder som avhengig av data sender signaler videre til nabonoder. Dette nettverket av noder læres opp ved hjelp av et treningssett som er representativt for den del av virkeligheten som modellen skal representere. Nodene blir organisert i ulike lag som samarbeider. Når nodener er lært opp vil det første laget av nodene motta et signal, data fra verden, og det siste laget representerer en predikert verdi. Et enkelt eksempel er opplæring i å lese håndskrift av tall. Da blir maskinen lært opp til at ulike streker (eller egentlig punkter i en matrise) representerer ulike tall. Når maskinen er lært opp vil maskinen kunne klassifisere håndskrevne tall. Hvor godt denne klassifiseringen fungerer vil selvsagt avhenge av mengde treningsdata, kvaliteten på treningssettet, kvaliteten på de ukjente dataene og selvsagt hvordan treningsalgoritmen passer til et slikt problem. Treningsalgoritmene forsøker akkurat som i eksempelet med regresjonsanalysen og finne minst mulig avstand mellom modellverdiene og treningsdata. Interessant nok bruker ulike nevrale nettverk optimaliseringsalgoritmer Euler-Lagrange formalismen (se Hopfield nettverk på wikipedia). Dyp læring er eksempler på anvendelse av universal tilnærmingsteoremet (Universal approximation theorem) eller tilfeldig interferens (probabilistic inference)(se dyp læring på wikipedia). Denne metoden for å finne den beste løsningen ved å finne de løsninger med minst endring i 'energi'/'informasjon' mener jeg er universell for matematikk og slik jeg har formulert formelen for matematikk. Selv om det populært blir sagt at for maskinlæring er alt bare tall, kan datamaskiner læres opp til gjenkjenne musikk, kunstverk, dikt, men også til å produsere musikk, kunstverk og dikt. Datamaskiner kan selvsagt læres opp til å regne, det er jo det de gjør hele tiden, men de kan også læres opp til å finne bevis for matematiske påstander, finne nye matematiske påstander og kontrollere bevis. Akkurat som selvkjørende biler læres opp til ikke å kjøre på noen eller kjøre av veien, læres bevismaskiner opp til å ikke foreta ugyldige slutninger. Når en bevismaskin beviser for eksempel at det alle kvadrattall, kan skrives som en sum av oddetall da har den funnet den optimale avstanden mellom 'summen av påfølgende oddetall' og klasse med tall (slik som prim-, par-, triangel og kvadrattall). Datasett fra en rekke eksperiment kan for eksempel brukes til å lære opp en datamaskin til å finne mønstre i dataene og til å klassifisere hvilke data som representerer støy og hvilke som representerer ulike funn. Selv om datamaskiner kan læres opp til både å utføre matematikk, finne matematiske modeller og teste holdbarhetene i matematiske modeller, kan vi påstå at en algoritme eller en maskin: forstår matematikk? Eller overført til mennesker: Er det når vi 'faller ned' på en forenkling av et problem at vi forstår matematikk? I *Filosofiske undersøkelser* skriver **Ludwig Wittgenstein** om det å forstå matematikk og det å følge regler §§143-152. Alle lærere vet at det å tro at man har forstått løsningen på et matematisk problem, er ikke det samme som at forståelsen er riktig eller forståelsen medfører riktig løsning på problemet. .

Hva skjer om matematikken svikter vår beste vitenskap? Med det mener jeg at matematikken ikke lengre er mulig å bruke til å prediksjon for naturen? Akkurat det skjer hele tiden, men da endres hvilken matematikk som anvendes eller den matematikk som anvendes modifiseres for eksempel ved å legge inn noen ekstra parametre eller innføre flere frihetsgrader. Det jeg tenker på er når prediksjoner om naturen basert på matematiske formuleringer av fysiske fenomen, som tidligere har gitt gode resultater, feiler. Dette er tilfelle med *standardmodellen* med gode prediksjoner om elementærpartikler som kvarker og vekselvirkning med sterke kjernekrefter. I proton-proton kollisjonene ved CERN ble Higgs bosonet oppdaget, men med feil masse i forhold til teoriene. En rekke andre partikler som skulle ha blitt oppdaget i følge samme modell, er heller ikke oppdaget. Disse manglende resultatene har fått fysikere til å miste troen på at naturen er naturlig, eller underforstått at den følger de teoriene som for tiden representerer vår beste vitenskap. En mulighet er helt riktig at naturen ikke er naturlig, men hvordan skal vi tolke empirien fra CERN? Et naturen ikke lar seg beskrive matematisk? Mine spekulasjoner er at standardmodellen baserer seg på usunn matematikk og at de manglende resultatene er tegn på det. Det er flere muligheter for å redde en matematisk forklaring og det er å introdusere enda flere parametre og justere disse til ønsket resultat eller å legge inn enda flere kanselleringer slik at resultatet blir som forventet. En annen fremgangsmåte er å overlate til maskinlæring å lage en ny teori eller å trene en dyplæringsalgoritme til å lage prediksjoner. I siste tilfellet er det mulig at maskinen lager en skjult modell og at vi ikke vil forstå resultatet! Vi vil kort og godt ikke forstå naturen.

2.28 Datamaskiner og matematikk

For utviklingen av moderne datamaskiner har fysikk spilt en avgjørende rolle. For programvaren som kjører på datamaskinene har matematikk hatt en avgjørende rolle. Med utviklingen av datamaskiner som kan læres opp til å "tenke selv", hva blir konsekvensene for matematikk og fysikk? Et av argumentene for å bruke HoTT som nytt grunnlag for matematikk er nettopp at det vil være mulig å foreta verifisering av matematiske utsagn ved hjelp av datamaskiner.

Samtidig læres datamaskiner opp til både å lage nye teorem og til ”regne selv’, det vil si ikke bare foreta aritmetiske operasjoner og gjøre typiske utregninger, men også løse algebraiske problemer, finne løsninger på differensialligninger og å foreta simuleringer av både rent matematiske problem, men også biologiske og fysiske systemer. For data fra empirisk vitenskap, kan datamaskiner lære å finne mønstre eller konstruere modeller som kan benyttes på ikke kjente data. Ironisk nok kan vi si at disse modellene er i Platons himmel, de ligger i minnet på en datamaskin, utilgjengelig og uforståelig for oss, men vi kan se og måle presisjonen av modellen ved å teste ukjente data. Tilhengerne av at verden er en simulering kan gi sin tilslutning til dette synet. Det er for maskinlæring ikke noe spesielt med matematikk, det kan også læres. Det er fullt mulig å tenke seg at datamaskiner utvikler matematikk som er så komplisert at vi ikke kan forstå den. Mange av de maskinassisterte bevisene er i dag så lange at det vil ta mennesker lang tid på å verifisere dem. Videre er det mulig, men jeg tror ikke det vil skje, at datamaskiner finner at noen slike kompliserte modeller er det som beskriver verden best. Grunnen til at jeg ikke tror det vil skje, er at jeg tror ikke at enhetlige modeller som dekker hele fysisk virkelighet noen gang vil bli laget, men at det vil bli laget pragmatiske og spesialiserte modeller skjer allerede. Et interessant eksempel på å lage matematikk er symbolsk regresjon hvor en algoritme finner den riktige formelen til et gitt problem ved å finne formelen som passer best til datasettet. En populærvitenskaplig artikkel i **Charlie Wood** [2022] i *Powerful ‘Machine Scientists’ Distill the Laws of Physics From Raw Data* i *Quantamagazine.*

2.29 Fremtidens matematikk

Hvis fysikk bruker maskinlæring til å stå for modeller og prediksjoner, hva skal vi da med fysiske modeller? Eller alternativt at datamaskiner lager modeller som bare datamaskiner kan ha et forhold til, men som viser hva som er riktige prediksjoner, hva skal vi da med fysikere? Hvis maskinlæring brukes til å lage og bevise matematikk som ikke er forståelig eller overkommelig for mennesker å sette seg inn i, hva skal vi da med matematikere?

2.30 Konklusjon

Vi har sett på hvordan uunnværlighetsargumentet er brukt for å argumentere for matematisk realisme og vi har sett på hvilken matematikk som er den vi er forpliktet til å tro på. Vi har sett at den omformulerte uunnværlighetsargumentet gir oss forpliktet til å tro på den matematikk som bidrar til forklaringer av naturen. Vi har også sett at for å argumentere for matematisk realisme er det to veier, vi kan bruke UA i en eller begge formene, eller vi kan argumentere for et aristotelisk syn på matematikk. Ved å argumentere for et aristotelisk og pluralistisk syn på matematikk er det mulig å se på matematikk fra forskjellige rammer. Et grunnlag for å lage nye grunnlag og for å se på matematikk *innenfra* (objekter og funksjonalitet) og *utenfra* (strukturer og metode) har vi forsvart kategoriteori som et grunnlag. Fordelen med kategoriteori i tillegg til å være svært anvendelig og muligheten for å studere ulike nivå av matematikk (metamatikk), er at kategoriteori gir en et felles språk for matematikk og fysikk. Kategoriteori er også et bra utgangspunkt for å lage grunnlag for nye kategorier og nye aksiomer innen nye kategorier. Kategoriteori passer også godt til å se på matematikk tilsvarende vi ser på fysikk innen forskjellige rammer.

Vi har sett hvordan matematikk ble forent gjennom Euler-Lagrange formalismen, videreutviklet av Dirac til kvanteteori. Vi har også sett hvordan fysikk etter Dirac ser ut til å gå inn i krise hvor gamle teorier justeres til å passe til data. Vi har også sett hvordan fysikk og matematikk har etter Frege og Russell har divergert, men vi har også sett hvordan kategoriteori kan forene matematikk og fysikk igjen. Den beste matematikk vi har for å gi prediksjoner om verden er basert på Euler-Lagrange formalisme som er en tilnærming til mest mulig uendret tilstand for et fysisk system. Vi har sett hvordan denne formalismen videreføres til kvantemekanikk og for kvantemekanikk er tilnærmingen å finne den bølgefunksjonen som ligger nærmest den klassiske løsningen for et system. Basert på denne formalismen har det vært mulig å utvide kvanteteori til relativistiske partikler, mange identiske partikler og til kvantefelt. Mange statistiske egenskaper ved ulike materialer er mulig å forstå ved hjelp av disse matematiske formuleringene. Kategoriteori ble tatt i bruk i algebraisk topologi for å finne felles strukturer i ulike matematiske områder, kategoriteori, har vist seg å være nyttig i anvendelse i informatikk og fysikk. På den måte bidrar kategoriteori til å gi en felles matematisk grunnlag for mange typer vitenskap. Vi har også sett at for maskinlæring blir maskiner lært opp ved hjelp av treningsdata til å finne den modellen som passer best til treningsdata som er et optimaliseringsproblem likt det som gis i Euler-Lagrange formalismen. Den beste matematikk er den som kommer nærmest sannheten. Sannheten kan være gitt enten som empiriske datapunkt fra målinger utført i verden eller utsagn om verden eller utsagn også matematiske utsagn.

Ved å ta utgangspunkt i vår beste naturvitenskap og se på innholdet i hva de beste forklaringer tar utgangspunkt i, har vi sett at kategoriteori som grunnlag for matematikk har en rekke fordeler. Ulempen er først og fremst at kategoriteori er ikke fullstendig autonom, men støtter seg til annen matematikk. Det er mulig at det lar seg løse. Den største ulempen er at kategoriteori medfører mange ulike sett med aksiomer og at matematikken blir pluralistisk. En felles overbygning for matematikk er bra, men universell konsistens er kanskje det beste. Men selv for ZFC er ikke dette et oppnåelig mål. Andre fordeler med kategoriteori er at det forener store deler av matematikk i et felles rammeverk og stadig mer av naturvitenskap skrives om til kategoriteori som gjør at muligheten for at matematikk og fysikk ikke splittes og blir utilgjengelige for den andre grenen. Mulighetene for å studere andre kategorier, for å bygge konseptuelle modeller, konstruere en enhetlig syntaks og semantikk. I tillegg er det også mulig å avlede kategorisk logikk fra kategoriteori til bruk på metaproblemer som vitenskaplig og matematisk metode. Kategoriteori muliggjør også mulighet for bevisverifisering, men bare de matematiske teorem som lar seg bevise ved hjelp av konstruktiv logikk. Jeg har også tro på at det blir mulig å utvikle bevisverifiserere og at det også vil bli mulig at datamaskiner både lager matematikk og bevis som er så kompliserte at ingen kan forstå dem! Jeg tror ikke vi trenger HoTT til slike oppgaver, men det er godt mulig at prosjektet delvis lykkes med dette. Andre bevisverifiserere uten teorien til HoTT lar seg konstruere allerede i dag. Når det gjelder hva fremtiden er for matematikken og kategoriteori, er jeg i tvil om kategoriteori vil være uunnværlig for vår beste vitenskap eller at vår beste vitenskap vil bruke matematikk på samme måte som tidligere til å finne matematikken som er bygget inn i naturen. Både matematikk og kategoriteori vil derimot være uunnværlige for dataassistert undersøkelse av naturen, både gjennom modellbygging og maskinlæring. Syntetiske og temporære modeller vil kanskje vise seg å være den beste metoden for å gi prediksjoner om naturen. Ulempen er selvsagt at enten blir forståelsen også syntetisk eller den blir fraværende.

Tillegg A

Appendix

A.0.1 Tall definert gjennom mengder

De to måtene å definere heltall ved hjelp av mengder kalles von Neumann og Zermelos definisjoner. von Neumanns ordenstall:

$$0 = \{\} \text{ og } S(a) = a \cup \{a\}$$

$$0 = \{\} = \emptyset,$$

$$1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\{\}\},$$

$$2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\},$$

$$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\},$$

$$n = n - 1 \cup \{n - 1\} = \{0, 1, ..., n - 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}, ..., \{\{\}, \{\{\}\}, ...\}\}$$

Zermelos ordenstall:

$$0 = \{\} \text{ og } (a) = a$$

$$0 = \{\},$$

$$1 = \{0\} = \{\{\}\},$$

$$2 = \{1\} = \{\{\{\}\}\},$$

$$3 = \{2\} = \{\{\{\{\}\}\}\},$$

$$n = \{n - 1\} = \{\{\{...\}\}\}$$

Zermelos definisjon er tall et resultat av plassering i av tall i sekvens, mens von Neumanns definisjon er tall resultat av telling av antall elementer i mengden etter at alle mengdene er pakket ut til sin grunnleggende form. Forskjellen på disse to måtene å definere ordenstall på er at for eksempel tallet 5 forstås å inneholde både tallet 2 og 3 i von Neumanns terminologi, mens i Zermelos tallet 5 bare etterfølgende tall etter 4. Zermelos ordenstall representerer å telle

for eksempel suksessive hendelser mens von Neumann tall er mer type svar på spørsmål av typen: Hvor mange fliser er det på dette badegulvet (altså en ikke-ordnet mengde), altså et mål. En av konsekvensene av at tallet 5 inneholder flere mengder er at det mulig med mengdeoperasjoner slik som snitt og differanse noe som ikke er mulig med Zermelos definisjon. De to måtene å definere tall på har forskjellig konsekvens med hensyn til hvordan en uendelig mengde skal inkluderes. Zermelos aksiom for uendelighet er at det er en mengde som inneholder 0 og lukket gjennom suksessive operasjoner (S(a)). Snittet av alle suksessive operasjoner i von Neumanns ordenstall er alle ikke-negative heltall. Hvordan uendelighet skal oppfattes har også betydning for hvilken type matematikk som er mulig.
Positive hele tall er definert gjennom en operasjon på den tomme mengden og hvert tall er definert ved hjelp av det foregående. Å si at 3 er inneholdt i 5 kan jo virke opplagt, men det gjelder altså bare i von Neumanns definisjon. Vi har dermed at en påstand kan være riktig gitt en definisjon og usann i med en annen definisjon. Det vil si at å bruke mengdelære som grunnlag for matematikk medfører mulighet for ikke-unik matematikk. Skal matematikken være unik må det enten legges til et aksiom eller det må finnes et annet grunnlag.
Det er to typer tall: Grunn- og ordenstall. Disse tallene er for positive heltall i et en-til-en forhold. Grunntallene er de vi vanligvis tenker på når vi tenker på tall, de angir mengde eller antall, mens ordenstall representerer plassering i en sekvens. Begge deler har naturlige anvendelser og er naturlige abstraksjoner fra observasjoner i naturen, slik som førstefødt for ordenstall og et kull på fem.

A.1 Tallmengder

$\mathbb{N}$ betegner alle positive hele tall, 1, 2, 3, ...

$\mathbb{Z}$ betegner alle heltall, ..., -3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, ...

$\mathbb{Q}$ betegner alle rasjonelle tall, som $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 1, 2\frac{5}{6}$, i tillegg til tall fra $\mathbb{Z}$

$\mathbb{R}$ betegner alle reelle tall, som $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e, π, i tillegg til tall fra $\mathbb{Q}$

$\mathbb{C}$ betegner alle komplekse tall, alle z = x + iy hvor x,y $\in \mathbb{R}$ og $i = \sqrt{-1}$

A.2 Notasjon for mengder

Elementene i en mengde kan gis enten som eksplisitt, $A = \{0, 1, 2, 3\}$ eller som resultat av en operasjon: $B = \{x > 0 \| x \in \mathbb{R}\}$. Her er R også en mengde og B leses som mengden av x større enn null hvor x er fra mengden $\mathbb{R}$ (vanligvis de reelle tallene). En mengde kan også inneholde uendelig antall elementer.

A.2.1 Operasjoner på mengder

Det er vanlig å definere følgende operasjoner på mengder: $\cup$ er union som er en binær operasjon som slår sammen to mengder til en. $\cap$ er snittet som også er en binær operasjon som er de elementene som er felles for de to mengdene.

A.3 Zermelo-Fraenkel aksiomer for mengdelære

1. Utvidelse - to mengder er like om de har de samme elementene
2. Nullmengde: Det finnes en tom mengde, betegnet med $\emptyset$ som ikke inneholder noen elementer
3. Par: Gitt alle mengder A og B, da eksisterer det en mengde, betegnet med $\{A, B\}$, som inneholder A og B som sine eneste elementer. Spesielt finnes det mengden $\{A\}$ som har A som eneste element
4. Overmengde: For hvert mengde A eksisterer en sett, betegnet med $\mathcal{P}(A)$ og kalt potensmengden til A, hvor elementene er alle delmengdene av A
5. Union: For hvert mengde A, eksisterer det en mengde, betegnet med $\cup A$ og kalt unionen av A, hvor elementene er alle elementene til A
6. Uendelig: Det finnes et uendelig mengde. Spesielt finnes det en mengde Z som inneholder $\emptyset$ og slik at hvis $A \in Z$, slik at $\cup\{A, \{A\}\} \in Z$
7. Separasjon: For hver mengde A og hver gitt egenskap, er det en mengde som inneholder nøyaktig de elementene i A som har denne egenskapen. En egenskap er gitt av en formel φ av førsteordens språk i mengdeteori. Separasjon er altså ikke et enkelt aksiom, men et aksiomskjema, men en uendelig liste med aksiomer, en for hver formel φ
8. Erstatning: For hver gitt definerbar funksjon med domene på en mengde A, er det en mengde hvor elementene er alle verdiene til funksjonen. Erstatning er også et aksiomskjema, ettersom definerbare funksjoner er gitt av formler.
9. Gunnlag: Hver ikke-tom mengde A inneholder et ϵ-minimalelement, det vil si et element slik at ingen element av A tilhører den. Dette er aksiomene til Zermelo-Fraenkel mengdeteori, eller ZF. Aksiomene til nullmengden og Par følger fra de andre ZF-aksiomene, så de kan utelates. Utskifting innebærer også separasjon.

   Til slutt er det Utvalgsaksiomet:

10. Valg: For hvert mengde A av parvis adskilte ikke-tomme mengder, finnes det en mengde som inneholder nøyaktig ett element fra hver mengdene i A.

A.4 Kategoriteori

Definition A.4.1 (Kategori)**.** En kategori $\mathcal{C}$ består av to deler:

1. $\mathcal{C}$-objekter (typisk navngitt A,B,C,...)
2. $\mathcal{C}$-piler (typisk navngitt f,g,h,...)[1]

- Domene og kodomene

  For hver pil f, korresponderer det assosierte objekter dom(f) og cod(f) (kilde og mål i noen kilder (source og target), dom(f) og cod(f) fra *domain* og *codomain*).

  Vi skriver $f \in hom_C(A, B)$ for $f : A \to B$ *eller* f_{AB}, hvor f er en pil med dom(f) = A og cod(f) = B.

- Sammensetning

  For to piler $f : A \to B$, $g : B \to C$ hvor dom(g) = cod(f) eksisterer det en pil $g \circ h : A \to C$, g etterfulgt av f, g ∘ f, som er sammensetning av f med g.

- Identitetspil

  For alle objekt A, det finnes en pil $1_A : A \to$ A som kalles identitetspilen på A.

- Assosiativitet for piler

  For alle $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$, har vi: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

- Identitetspiler opptrer som identitet

  For alle $f : A \to B$ har vi $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$

Mengdekategorien har alle mengder som objekter. Det finnes ikke en mengde av alle mengder, det er 'for stort' til å være en mengde. Det betyr at kategorien av mengder er for stor til å være en mengde eller å modelleres som en mengde. I definisjonen av en kategori er det ikke definert at $\mathcal{C}$ består av en mengde objekter, bare at objektene er en del av kategorien.

Awodey (2006, s25) skriver at ideen er at objekt og piler er bestemt gjennom den rollen de har i kategorien via relasjonene til andre objekt og andre piler. Slik jeg tidligere har argumentert for at vi må oppfatte alle matematiske objekter og også tall.

A.4.1 Naturlig deduksjon

nLab `https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage` har en god introduksjon til naturlig deduksjon. I §1 starter med at formalisere matematisk begrunnelse kan gis forskjellige former. Naturlig deduksjon beskriver en spesiell type deduktive

[1]Kalt *morfismer* i Roman(2017)

systemer som er antatt å være nært "naturlig" deduktiv begrunnelse siden det er basert på at ideen om begrunnelse fra antagelse i motsetning til begrunnelse fra aksiomer.

I et system med naturlig deduksjon er et system som inneholder en gruppe av dommer laget av gitte operasjoner, kalt konstruksjoner. Hver konstruksjoner er to type regler:

- Introduksjonsregler å konkludere en dom basert på konstruksjoner fra enklere dommer; og
- **Elimineringsregler** å konkludere en annen dom ved å bruke dommen fra andre dommer.

Eksemplene er fra påstandslogikk og bruker konjuksjonsoperasjonen (OG) $\wedge$. Regelen for $\wedge$ vil bli:

Introduksjon

$$\frac{A\,true \qquad B\,true}{A \wedge B\,true}$$

Eliminering

$$\frac{A \wedge B\,true}{A\,true} \qquad \frac{A \wedge B\,true}{B\,true}$$

I typeteori er relevante dommer gitt som $a : A$ som betyr at termen a tilhører type A. De tilsvarende konstruktørene kan dannes ved kartesisk produkt type med tilsvarende regler hvor de spesifikke termene er spesifisert gjennom utsagn som typer:

$$\frac{a : A \qquad b : B}{(a, b) : A \times B}$$

og

$$\frac{p : A \times B}{\pi_1(p) : A}$$

$$\frac{p : A \times B}{\pi_2(p) : B}$$

I typeteori gjelder i tillegg to andre regler:

- **Formasjonsregler** som sier hvordan en ny type kan introduseres; og
- **Beregningsregler** eller *konverteringsregler* som kombinerer termer med termeliminering.

Som et eksempel vil kartesisk produkttype bli med en formasjonsregel:

$$\frac{A\ type \qquad B\ type}{A \times B\ type}$$

og beregningsregler slik som beta-reduksjon (eller eta-konvertering)

$$\frac{a : A \qquad b : B}{\pi_1(a, b) \to_\beta a}$$

$$\frac{a : A \qquad b : B}{\pi_2(a, b) \to_\beta b}$$

A.5 Logiske operasjoner

P	¬P
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
T	T	T	T
F	T	F	T
T	F	F	T
F	F	F	F

A.6 Logiske operasjoner med 3-verdilogikk

P	¬P
T	F
F	T
Ø	Ø

P	Q	$P = Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
T	T	T	T	T
F	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	F	T	F	F
T	Ø	Ø	Ø	T
F	Ø	Ø	F	Ø
Ø	T	Ø	Ø	T
Ø	F	Ø	F	Ø
Ø	Ø	Ø	Ø	Ø

T står for sann (true), F for usann (false) og mens Ø står for ukjent eller ube-

stemt. I spørrespråket SQL for databaser og relasjonsalgebra, henholdsvis NULL og ω, i programmeringsspråket C# (og flere) *null*. Disse sannhetsverditabellene tilsvarer Kleene and Łukasiewicz for 3-verdilogikk, kalt K3 etter Kleene.

A.7 Riemanns zetafunksjon

Riemanns zetafunksjon også kalt Euler-Riemann zetafunksjon:

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s \in \mathbf{C}, s = \sigma + it$

For $Re(s) = \sigma > 1:$

$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, dx$

$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}, dx$

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\,prime} \frac{1}{1 - p^{-s}}$

A.7.1 Wikipedia om typeteori

Et typesystem er et formelt system hvor alle termer har en type som definerer dens mening og operasjoner som kan gjøres på den. Typeteori er det akademiske studiet av typesystemer. Noen typesystemer kan fungerer som et grunnlag for matematikk og det gjelder de to velkjente typeteoriene, Alonzo Church's typet λ-kalkulus og Per Martin Löfs intuisjonistiske typeteori. λ-kalkulus er grunnleggende for programmeringsspråk og er basis for funksjonelle språk. Typet λ-kalkulus er nært knyttet til matematisk logikk og bevisteori via Curry-Howard isomorfisme og kan også sees på som internt språk for klasser av kategorier - λ-kalkulus er språket til Kartesisk lukkete kategorier (Cartesian closed categories (CCC)). Den andre typeteorien nevnt over, intuisjonistisk typeteori, eller Martin-Löf typeteori, fra 1972 og videre. Teorien er basert på logisk konstruktivisme og danner basis for Univalent foundation.

Intuisjonistisk typeteori

Typeteorien har tre typer: **0 type**, **1 type** og **2 type**.

- **0** inneholder 0 termer - den tomme typen. Representeres ved symbolet $\perp$
- **1** inneholder 1 kanonisk term og representerer eksistens. Kalles for enhetstypen. Representeres ved symbolet $\top$
- **2** inneholder 2 kanoniske termer og representerer et valg mellom disse

Typeteorien har tre type konstruktører, $\sum, \prod$ og $=$. Eksempler:

- $\sum_{n:\mathbb{N}} \mathbb{R}$ – indeksert union av disjunkte delmengder av $\mathbb{R}$
- $\prod_{n:\mathbb{N}} \text{Vec}(\mathbb{R}, n)$ – en vektor av lengde n
- $=$ er en binær konstruksjon som reduserer den ene termen til den andre, det er ikke en tilordning til verdier

Corfield (2020) forklarer disse konstruktørene med eksempler fra logikk grundig.

A.7.2 nLab om typeteori

nLab `https://ncatlab.org/nlab/show/type+theory` skriver typeteori er gren av matematisk logikk. Alle termer er av en spesifikk type, og en term kan være en variabel x, eller en funksjon f og operasjoner på disse. Typeteori er et formelt språk, et regelsett for omskriving av strenger med symboler som beskriver introduseringen gjennom naturlig deduksjon av typer og tilhørende termer og beregningene med disse på en meningsfull måte. Typeteori har betydning for

- Matematikkens grunnlag
- Programmeringsspråk
- Beregninger i kategoriteori

A.7.3 Terminologi

Type, term og verdi

En term i motsetning til en type en representasjon eller en instans av en type. Eksempelet wikipedia bruker i artikkelen om typeteori er at 4,2+2 og 2*2 er ulike termer, alle av type *nat* for naturlige nummer. Syntaktisk betegnes dette gjerne forholdet med kolon: $2 : nat$. Hvordan termer og typer formes er avhengig hvilket partikulær typesystem. Dette gjøres presist gjennom spesifikk syntaks og velformulerhetsrestriksjoner.

Typeomgivelser, typetilordning og type dommer

Omgivelsene, miljø eller konteksten for type, betegnes vanligvis med Γ. Et miljø er ofte en liste av par $e : \tau$ - et slikt par kalles av og til for en tilordning (assignement). Sammen formes en *dom* betegnet $\Gamma \vdash e : \tau$

A.8 Sammenheng mellom logikk, matematikk og programmeringsspråk

Type logikk	Type matematikk	Eksempler på progran
Konstruktiv logikk	Konstruktiv matematikk: aritmetikk, algebra, geoemetri	Coq, Ada og andre språk
Klassisk logikk	Klassisk analyse (ikke metamatematikk)	C, C++, C#, Lisp, Pyth
Parakonsistent logikk	Relasjonsalgebra, ikke-klassisk analyse	SQL, Haskell og anonyme

A.9 Dirac matrisene

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & I_{2\times 2} \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix}$$

hvor σ_i er Pauli-spinn matriser

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

article [utf8]inputenc url
Bibliografi jgrieg9 May 2022

Bibliografi

A.10 Bøker

[1] **Brown** [1999] *Philosophy of mathematics: an introduction to the world of proofs and pictures*

[2] **James Brown** [2012] *Platonism, Naturalism, and Mathematical Knowledge*

[3] **Stefania Centrone, Deborah Kant, and Deniz Sarikaya (eds.)** [2019] *Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*

[4] **David Corfield** [2003] *Towards a philosophy of real mathematics*

[5] **David Corfield** [2020] *Modal homotopy type theory: the prospect of a new logic for philosophy*

[6] **Hartrey Fields** [1980] *Science Without Numbers*

[7] **Graham Formello** [2009] *The Strangest Man*

[8] **James Franklin** [2021] *Mathematics as a Science of Non-abstract Reality: Aristotelian Realist Philosophies of Mathematics*

[9] **Michele Friend** [2014] *Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics*

[10] **Martin Gutzwiller** [1990] *Chaos in classical and quantum mechanics*

[11] **Morris Kline** [1972] *Mathematical thought from ancient to modern times*

[12] **Thomas Samuel Kuhn** [1962] *The Structure of Scientific Revolutions*

[13] **Elaine Landry (ed)** [2018] *Categories for the Working Philospher*

[14] **Penelope Maddy** [1997] *Naturalism in Mathematics*

[15] **Penelope Maddy** [2011] *Defending the axioms: on the philosophical foundations of set theory*

[16] **Andrei Rodin** [2014] *Axiomatic Method and Category Theory*

[17] **Carlo Rovellis** [2021] *Helgoland*

[18] **Stewart Shapiro** [2000] *Thinking about mathematics*

[19] **Max Tegmark** [2014] *Our Mathematical Universe*

A.11 Artikler

[20] **V.I. Arnold** [1998] *On teaching mathematics*

[21] **Paul Benacerrafs** [1965] *What Numbers Could Not Be*

[22] **Paul Benacerrafs** [1973] *Mathematical Truth*

[23] **Barons** [2014] *Optimisation and mathematical explanation: doing the Lévy Walk. Synthese 191, 459–479* [2014] https://doi.org/10.1007/s11229-013-0284-2

[24] **James Franklin** [2014] *An Aristotelian Realist Philosophy of Mathematics*

[25] **Michele Friend** [2014] *Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics* **Stefania Centrone, Deborah Kant, and Deniz Sarikaya (eds.)** [2019]

[26] **Graham Oppy** [2020] i *Naturalism* i tidsskriftet *Think*

[27] **Charles D. Parsons** [2005] *Mathematics in Philosophy* del III.

[28] **Elliott Sober** [1993] *The Philosophical Review/Vol. 102, No. 1, Jan., 1993/Mathematics and Indispensability*

[29] **Graham Priest** [2014] *From the Foundations of Mathematics to Mathematical Pluralism* in **Stefania Centrone, Deborah Kant, and Deniz Sarikaya (eds.)** [2019]

[30] **Quine** [1981] *Success and Limits of Mathematization*

[31] **Eugene Wigners** [1960] *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*

A.12 Stanford Encyclopedia of Philosophy

[32] **Mark Colyvan** [1998(2019)] https://plato.stanford.edu/entries/mathphil-indis/

[33] **Thierry Coquand** [2006(2018)] https://plato.stanford.edu/entries/type-theory/

[34] **Øystein Linnebo** [2009(2018)] https://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/

[35] **Jean-Pierre Marquis** [1996(2019)] https://plato.stanford.edu/entries/category-theory/

[36] **David Papineau** [2007(2020)] https://plato.stanford.edu/entries/naturalism

[37] **Alexander Paseau**[2013] https://plato.stanford.edu/entries/naturalism-mathematics/

A.13 nLab

[38] https://ncatlab.org/nlab/show/William+Lawvere

[39] https://ncatlab.org/nlab/show/type+theory#CategoricalSemantics

[40] https://ncatlab.org/nlab/show/relation+between+type+theory+and+category+theory

[41] https://ncatlab.org/nlab/show/geometry+of+physics

A.14 Nettressurser

[42] **Evan Patterson** [2021] *A Short Introduction to Categorical Logic* https://topos.site/FRA-summit/slides/evan-patterson.pdf

[43] **John Baez** [2021] *Topos Theory in a Nutshell*https://math.ucr.edu/home/baez/topos.html

A.15 Wikipedia-artikler

[44] https://en.wikipedia.org/wiki/Vladimir_Arnold

[45] https://en.wikipedia.org/wiki/Many-worlds_interpretation

[46] https://en.wikipedia.org/wiki/Hopfield_network

[47] https://en.wikipedia.org/wiki/Deep_learning#Interpretations

[48] https://en.wikipedia.org/wiki/Grassmann_number

[49] https://en.wikipedia.org/wiki/Quantization_(physics)

[50] https://no.wikipedia.org/wiki/Maupertuis_virkningsprinsipp

[51] https://en.wikipedia.org/wiki/Stationary-action_principle

A.16 Quantamagazine

https://www.quantamagazine.org/
Kevin Hartnett [2019] *With Category Theory, Mathematics Escapes From Equality*
Kevin Hartnett [2021] *The Mystery at the Heart of Physics That Only Math Can Solve* i serien *Math Meets QFT*
Sabine Hossenfelder [2016] *String Theory Meets Loop Quantum Gravity*
Erica Klarreich [2015] *Mathematicians Chase Moonshine's Shadow*
Erica Klarreich [2017] *Moonshine Link Discovered for Pariah Symmetries*
Charlie Wood [2022] *Powerful 'Machine Scientists' Distill the Laws of Physics From Raw Data*