

Resonnering og argumentasjon i matematikkundervisninga i vidaregåande skule

Ei kvalitativ studie av lærarar sine refleksjonar kring resonnering og argumentasjon i matematikk R2

Hanne Hjorteland



Masteroppgåve i matematikdidaktikk

Matematisk institutt

Universitetet i Bergen

3. juni 2024

Samandrag

Resonnering og argumentasjon har dei seinare åra fått meir merksemd i matematikkundervisninga, noko som vart endå tydelegare ved innføringa av LK20 der resonnering og argumentasjon er eit av seks kjerneelement. Men kva legg lærarane i at elevane skal læra seg å resonnera og argumentera? Formålet med dette masterprosjektet er å sjå på korleis lærarar forstår desse omgrepa sjølv, korleis dei forstår læreplanen og korleis læreplanen påverkar dei i implementeringa av resonnering og argumentasjon i undervisninga. Problemstillinga for oppgåva er difor: *Kva er lærarar i matematikk R2 sine haldningar til, samt forståing av resonnering og argumentasjon, og i kva grad implementerer dei konseptane i undervisninga?*

For å få innblikk i lærarar sine tankar og opplevingar kring resonnering og argumentasjon vart ei kvalitativ tilnærming valt, og intervju vart valt som datainnsamlingsmetode. Fire lærarar frå fire ulike skular på Vestlandet deltok i undersøkinga. Analysen vart gjennomført ved tematisk analyse, ved hjelp av deduktiv og induktiv utarbeiding av kodar.

Lærarane forbinder resonnering og argumentasjon i det store og heile med å grunngi og å bygga opp under idear eller løysingsmetodar og nytta det til å trekka konklusjonar, i tillegg til at det handlar om å sjå samanhengar og utvikla djupare forståing for dei matematiske konseptane. Dei knyt resonnering og argumentasjon tett opp mot utforsking og generalisering, som dei opplev som viktig i matematikk R2. Funna frå undersøkinga tyder på at lærarane let seg påverka meir av læreboka og eksamen enn av kjerneelementane i den offisielle læreplanen. Det tyder derimot ikkje at dei ikkje implementerer resonnering og argumentasjon som dei alle opplev som ein heilt essensiell del av matematikken, og spesielt i matematikk R2. På den andre sida meiner lærarane at ein ikkje bør fokusera for mykje på desse konseptane då andre ferdigheiter og er viktig. Resultata gir inntrykk av at lærarane særleg legg opp til munnleg aktivitet for å implementera resonnering og argumentasjon ved heilklassemøte eller samtale i grupper. I tillegg forventar lærarane at elevane grunngir og viser løysingsmetodar, samt at alle lærarane og er opptekne av å visa bevis på tavla for å gjera elevane kjend med matematiske formuleringar og tenkjemåte. For å få eit betre bilete av implementering av resonnering og argumentasjon, kan ein i vidare forsking også nytta observasjon for å sjå om lærarane si oppfatning av implementering stemmer overeins med det som utspelar seg i klasserommet.

Forord

Denne masteroppgåva markerer slutten på fem fine år på lektorutdanninga ved Universitetet i Bergen. Det har vore interessante og lærerike år, og eg er både spent og klar for framtidig yrkesliv som lektor. Det hadde ikkje vore mogeleg å fullføra denne masteren aleine, og eg er så takknemleg for alle som har bidratt til at masteroppgåva vart levert.

Først vil eg takka rettleiaren min Trond Stølen Gustavsen som har gitt heilt fantastisk rettleiing gjennom heile prosjektet, men gode og konstruktive tilbakemeldingar, samt støtte og motivasjon. Di interesse og kunnskap om feltet har vore heilt avgjerande for å komma i mål med oppgåva og kvar rettleiing har gitt ny motivasjon for vidare arbeid. Tusen takk til lærarane som stilte som informantar i prosjektet, og uttrykte interesse for prosjektet. Det ville ikkje vore mogeleg å gjennomføra prosjektet utan dykk. Tusen takk for at dykk kom med interessante perspektiv og delte av dykkar erfaringar og tankar.

Eg er så takknemleg for mine kjekke venner på lektorstudiet, for at me har hjelpt kvarandre fagleg, støtta kvarandre når me har stressa med obligar og eksamen, men først og fremst for at dykk har gjort studietida kjekk og sosial. Eg ønsker og å seie takk til Ingrid for alle telefonsamtalar og for avkoplingshelg i Tromsø.

Sist, men ikkje minst, vil eg takka familien min for støtte gjennom heile studietida. Takk for oppmuntring i lange og tunge eksamensperiodar og gjennom heile masterprosjektet. Eg er heldig som har dykk. Spesielt takk til mamma, Aud Bente, som alltid tar telefonen når eg ringer og som korrekturlas oppgåva.

Bergen, mai 2024

Hanne Hjorteland

Innholdsliste

Kapittel 1: Innleiing	1
1.1 Bakgrunn.....	1
1.2 Forskingsspørsmål og problemstilling	3
1.3 Oppbygging av oppgåva.....	4
Kapittel 2: Teori	5
2.1 Overordna teori	5
2.1.1 Resonnering	5
2.1.2 Argumentasjon.....	9
2.1.3 Bevis.....	11
2.1.4 Grunngeving	16
2.2 Rammeverk.....	16
2.2.1 Overordna rammeverk	16
2.2.2 Underordna rammeverk	19
2.3 Relevant forskning	22
Kapittel 3: Metode	26
3.1 Undersøkjingsdesign.....	26
3.2 Utaal.....	28
3.3 Analyse.....	30
3.4 Kvalitet i forkinga.....	34
3.4.1 Pålitelegheit.....	36
3.4.2 Overførbarheit.....	36
3.4.3 Truverd.....	37
3.4.4 Bekreftbarheit.....	37
3.5 Ethiske refleksjonar	37
3.5.1 Informert samtykke	38
3.5.2 Konfidensialitet.....	38
3.5.3 Konsekvensar	39
3.5.4 Krav til å bli framstilt riktig	39
Kapittel 4: Resultat	40
4.1 Kodar	40
4.2 Haldningar og forståing	41
4.2.1 Lærarane si forståing av omgrepa	41
4.2.2 Haldningar.....	45
4.2.3 Funksjonane til resonnering, argumentasjon og bevis	46
4.3 Utvida læreplan	48
4.3.1 Påverknad frå offisiell og utvida læreplan	48
4.3.2 Tolking av læreplanen.....	50
4.4 Implementering av resonnering og argumentasjon	51
4.4.1 Implementeringsmetodar	51
4.4.2 utfordringar	54
Kapittel 5: Diskusjon	56
5.1 Kva haldningar og forståing har lærarar i matematikk R2 til resonnering og argumentasjon?	56
5.1.1 Resonnering	57

5.1.2 Argumentasjon	59
5.1.3 Bevis.....	61
5.1.4 Haldningar.....	62
5.1.5 Roller.....	63
<i>5.2 Korleis forstår lærarane den offisielle læreplanen og korleis påverkar læreplanen lærarar si undervisninga knytt til resonnering og argumentasjon?</i>	<i>66</i>
<i>5.3 Korleis implementerer lærarar i matematikk R2 resonnering og argumentasjon i undervisninga?.....</i>	<i>71</i>
<i>5.4 Metodologisk diskusjon.....</i>	<i>75</i>
Kapittel 6: Avslutning	78
<i>6.1 Konklusjon</i>	<i>78</i>
<i>6.2 Implikasjonar for praksis.....</i>	<i>80</i>
<i>6.3 Forslag til vidare forskning</i>	<i>81</i>
Referansar	83
Vedlegg	88
<i>Vedlegg 1: Informasjonsskriv</i>	<i>88</i>
<i>Vedlegg 2: Samtykkeerklæring</i>	<i>91</i>
<i>Vedlegg 3: Intervjuguide</i>	<i>92</i>

Kapittel 1: Innleiing

1.1 Bakgrunn

Hausten 2022 vart ny læreplan, LK20, innført for faga på vg3, og deriblant matematikk R2. I fagfornyinga har det blitt innført kjerneelement som blir omtala som «[...] det viktigste faglige innholdet elevene skal arbeide med i opplæringa» (Utdanningsdirektoratet, 2019). I tillegg står det at «kjerneelementene er det elevene må lære for å kunne mestre og anvende faget» (Utdanningsdirektoratet, 2019). For matematikk er desse kjerneelementa utforskning og problemløysing, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering, modellering og anvendingar og matematiske kunnskapsområde (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b). Aktivitetar som omhandlar resonnement og bevis blir rekna som heilt sentrale aspekt ved matematikken og det blir stilt spørsmål ved om noko kan reknast som matematikk dersom resonnement og bevis ikkje spelar ei viktig rolle (Skott et al., 2018, s. 279). Eg ynskjer difor å sjå spesielt på kjerneelementet resonnering og argumentasjon.

Resonnering i matematikk R handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer å forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Videre handler det om å utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om å begrunne og bevise gyldigheten til framgangsmåter, resonnement og løsninger (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b).

På trass av at kjerneelementet resonnering og argumentasjon er hovudfokuset i dette prosjektet, tyder ikkje det at dei andre kjerneelementa er irrelevante. Fleire av dei andre kjerneelementa er tett knytt opp mot det å resonnera og argumentera, mellom anna utforskning og problemløysing, abstraksjon og generalisering og representasjon og kommunikasjon (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b).

Som Skott et al. (2018, s. 242) peiker på er det å læra å resonnera eit mål i seg sjølv, i tillegg kan resonnering fungera som middel for andre mål, som å få djupare forståing eller utvikla evner til kritisk tenking. I den overordna delen i læreplanen står det at kritisk tenking er ein av dei sentrale verdiane for grunnopplæringa, og dermed også sentralt i matematikk R

(Kunnskapsdepartementet, 2017). Dette kjem og fram ved at kritisk tenking er nemnt i dei sentrale verdiane i læreplanen for matematikk R (Utdanningsdirektoratet, u.å.-a).

Kritisk tenkning i matematikk omfatter kritisk vurdering av resonnementer.

Matematikk R kan bidra til at elevene ser verdien av å sette seg inn i og forstå andres resonnementer. Faget gir rom for kreativitet og skapertrang ved at elevene får tid til å tenke, reflektere og resonnerer matematisk, stille spørsmål og oppleve at faget er relevant (Utdanningsdirektoratet, u.å.-a).

Ei vanleg oppfatning innanfor utdanningspsykologi er å sjå på kritisk tenking som strategisk bruk av resonneringsferdigheiter for å utvikla reflekterande tenking og bruka resultata i problemløysing eller til å ta avgjerder (Jablonka, 2020). I matematikk R handlar kritisk tenking om å vurderer eigne og andre sine resonnement, heller enn å utvikla eigne resonnement (Utdanningsdirektoratet, u.å.-a). Som me ser blir også kreativitet kopla til resonnering i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, u.å.-a). At matematisk resonnering kan koplust til kreativitet stemmer med Lithner (2008) si inndeling av resonnering i kreativ resonnering og imitativ resonnering. For Lithner (2008) handlar kreativ resonnering mellom anna om å utvikla ei resoneringskjede som ikkje er kjend for den som resonnerer.

I den nye læreplanen er også djupnelæring eit sentralt omgrep. «Skolen skal gi rom for djupnelæring slik at elevane utviklar forståing av sentrale element og samanhengar innanfor eit fag, og slik at dei lærer å bruke faglege kunnskapar og ferdigheiter i kjende og ukjende samanhengar» (Kunnskapsdepartementet, 2017).

Sawyer (2014) har visse krav som må oppfyllest for å kunne kalle læring for djupnelæring og fleire av desse kan koplust til resonnering og argumentasjon. Mellom anna meiner han at djupnelæring inneber at eleven ser etter mønster og underliggande prinsipp samt vurderer nye idear og koplur dei til konklusjonar (Sawyer, 2014). Sawyer (2014) meiner og at elevane må kunne vurderer logikken i eit argument kritisk for at det skal vera snakk om djuplæring. Eg tolkar difor Sawyer (2014) slik at det er ei sterk kopling mellom djuplæring og resonnering og argumentasjon. På bakgrunn av dette er det naturleg å tenkja at resonnering og argumentasjon skal vera ein vesentleg del av matematikkfaget, sidan det er eit stort ønske om å få til djuplæring på skulen. Dette blir og tydeleg reflektert i læreplanen ved at resonnering og argumentasjon er eit av kjerneelementa i LK20 (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b).

Niss og Jensen (2002) peiker på åtte ulike kompetansar som er essensielle i matematikkfaget, der ein av kompetansane er resonneringskompetanse. Vidare kan denne kompetansen delast inn i kategoriar for kva det inneber at elevane skal ha resonneringskompetanse. Desse er i hovudsak å kunne følgje og vurdere resonnement, forstå kva eit bevis er og å kunne tenkja ut og gjennomføra resonnement (Niss & Jensen, 2002, s. 54). Her kjem det fram at bevis også er kopla til resonneringskompetanse. Over heile verda er det læreplanar frå ulike land som inneheld mål om at elevane skal læra seg å forstå og utvikla bevis (Hanna, 2020). Hanna (2020) peiker på at dette både er for å visa den viktige plassen bevis har i matematikken, samt at bevis har fleire funksjonar for matematikkundervisning.

Som me ser skal resonnering og argumentasjon, i følgje læreplanen, vera til stades i undervisninga i matematikk R2. Lærarane si tolking av læreplanen og lærarane sine haldningar til konseptane vil derimot ha stor påverknad på undervisninga i klasserommet og læringsutbyttet til elevane (Remillard & Heck, 2014). Så dersom resonnering og argumentasjon skal ha ein avgjerande plass i matematikkfaget er det essensielt at lærarane legg til rette for dette i undervisninga. For å få innsikt i lærarane sine haldningar og tankar er det valt ei kvalitativ tilnærming, med intervju som datainnsamlingsmetode (Postholm & Jacobsen, 2018). Med tanke på at LK20 nyleg vart innført i matematikk R2 vil det vera viktig å undersøka korleis lærarane forhold seg til kjerneelementa og læreplanen generelt for å få innblikk i korleis implementering av LK20 har påverka lærarane og korleis den har spelt inn på undervisninga i matematikk R2. Dette kan vera nyttig for lærarar som kan bli meir bevisste på eigen praksis samt at dei kan få forslag til grep ein kan gjera for å forbetra implementering av resonnering og argumentasjon i undervisninga. I tillegg vil prosjektet vera nyttig for skulemyndigheiter som ynskjer å sjå korleis innføring av LK20 har fungert i praksis. Dei som arbeidar med lærarutdanning får også eit innblikk i lærarar si oppfatning av resonnering og argumentasjon og gjerne kva vanskar dei opplev, som kan vera nyttig for utdanning av kommande matematikklærarar. I tillegg kan lærebokforfattarar få eit innblikk i korleis lærarar nyttar og oppfattar bøkene deira.

1.2 Forskingsspørsmål og problemstilling

Dette masterprosjektet har som mål å setja lys på lærarane sine tankar kring konseptane resonnering og argumentasjon, samt få eit innblikk i korleis lærarane implementerer resonnering og argumentasjon i undervisninga, og kva rolle læreplanen spelar i denne

implementeringa av resonnering og argumentasjon i undervisninga. Dette leia til problemstillinga «Kva er lærarar i matematikk R2 sine haldningar til, samt forståing av resonnering og argumentasjon, og i kva grad implementerer dei konseptane i undervisninga?»

Vidare vart det utvikla tre forskingsspørsmål for å setja lys på ulike sider ved problemstillinga, desse tre forskingsspørsmåla er:

- Kva er lærarar i matematikk R2 sine haldningar til og forståing av resonnering og argumentasjon?
- Korleis implementerer lærarar i matematikk R2 resonnering og argumentasjon i undervisninga?
- Korleis forstår lærarar læreplanen og korleis påverkar læreplanen lærarar si undervisninga knytt til resonnering og argumentasjon?

1.3 Oppbygging av oppgåva

Oppgåva er bygd opp av seks kapittel som vidare eg delt inn i delkapittel. Under vil eg i kapittel 2 gå inn på det teoretiske grunnlaget for oppgåva, og teoretisk rammeverk blir presentert. I kapittel 3 vil eg skildra metoden som er nytta i prosjektet og grunngi metodologiske val, samt gjera ein etisk refleksjon kring metode. Kapittel 4 er resultatkapittelet, der det først vil bli lagt fram resultat frå analyseprosessen i form av oversikt over tema, underkategoriar og kodar, før funn frå analyseprosessen blir presentert meir i detalj. I kapittel 5, diskusjonskapittelet, vil funna frå undersøkinga drøftast opp mot relevant teori og tidlegare forskning. I tillegg vil dei bli kopla opp mot forskingsspørsmål og problemstilling. Avslutningsvis i kapittel 6 vil det komma ein oppsummerande konklusjon, for å svara på problemstillinga for oppgåva. Deretter vil tankar om kva implikasjonar denne undersøkinga kan ha for praksis bli lagt fram, samt at det vil komma forslag til vidare forskning.

Kapittel 2: Teori

I dette kapitlet ønsker eg å presentera det teoretiske grunnlaget for prosjektet, ved å først definera omgrepa resonnering, argumentasjon og bevis, samt andre viktige omgrep kopla til resonnering og argumentasjon. Eg ynskjer vidare å presentera teoretisk rammeverk for oppgåva. Overordna rammeverk for prosjektet er Remillard og Heck (2014) sitt rammeverk for den utvida læreplanen, som er valt for å kunne setja lærarar si forståing og implementering av resonnering og argumentasjon i undervisninga i eit større system, og for å sjå på korleis lærarane blir påverka av læreplanen i implementering av kjerneelementet resonnering og argumentasjon. I tillegg vil Stylianides (2008) sitt rammeverk for aktivitetar knytt til resonnering og bevis bli nytta som underordna rammeverk for å kunne gå djupare inn på dei matematiske aspekta ved problemstillinga og særleg for å kunne svara på det første forskingsspørsmålet. Avslutningsvis vil eg leggja fram forskning som er relevant for oppgåva, for å kunne sjå dette opp mot egne funn i diskusjonskapitlet.

2.1 Overordna teori

2.1.1 Resonnering

Omgrepet resonnering blir mykje nytta av matematikarar og matematikdidaktikarar utan å bli tydeleg definert på førehand (Yackel & Hanna, 2003). Det blir anteke at det er ei einigheit kring tydinga til dette omgrepet, noko det tydeleg ikkje er, basert på dei mange ulike definisjonane (Yackel & Hanna, 2003). Yackel og Hanna (2003) peiker og på at det sosiale aspektet ved matematisk resonnering ofte blir trekt inn for å skildra kva matematisk resonnering er. Om ein ser på resonnering på denne måten, tenkjer ein at resonnering er noko som skjer i fellesskap, der elevane samarbeider i arbeidet (Yackel & Hanna, 2003).

«[...], reasoning is the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions in task solving» (Lithner, 2008, s. 257). Altså ser Lithner (2008) på resonnering som ei tankerekke der ein utviklar påstandar og kjem til konklusjonar, i det matematiske arbeidet elevane gjer i klasserommet. Vidare understrekar Lithner (2008) at resonnering ikkje nødvendigvis må vera basert på formelle logiske reglar og heller ikkje matematisk riktig, så lenge det gir mening for den som utfører resonneringa.

Jeannotte og Kieran (2017) peiker, som Yackel og Hanna (2003), på at omgrepet resonnering blir mykje nytta i matematikdidaktikken og at det blir definert ulikt og inkluderer ulike aspekt i ulike tekstar. Også i læreplanar rundt om i verda blir omgrepet mykje nytta, men gjerne med vage definisjonar og kanskje også motstridande definisjonar på tvers av landegrensar (Jeannotte & Kieran, 2017). Jeannotte og Kieran (2017) har gjennomført ei litteraturundersøking der dei såg på korleis resonnering blir definert i litteraturen. Dei fann fire hovudelement som er med på å setja lys på kva matematisk resonnering er. Desse fire hovudelementa er: aktivitet/produkt dikotomien, den konkluderande naturen til matematisk resonnering, målet og funksjonane med matematisk resonnering og strukturelle og prosessrelaterte aspekt (Jeannotte & Kieran, 2017). Vidare vert det understreka at dei fire aspekta spelar inn på kvarandre og er korkje isolerte eller skild frå kvarandre. Ut frå desse fire aspekta definerer Jeannotte og Kieran (2017) resonnering som ein prosess som går ut på kommunikasjon med andre eller seg sjølv som gjer det mogeleg å utleia matematiske påstandar frå andre matematiske påstandar.

Aktivitet/produkt dikotomien handlar om at sjølv resonneringsaktiviteten er utilgjengeleg, og produktet som blir synleg er berre ein liten del av resonneringsaktiviteten (Jeannotte & Kieran, 2017). Slik eg tolkar det kjem dette av at sjølv aktiviteten går føre seg inne i hovudet på dei som deltek, og berre produktet, i form av til dømes ord, skrift eller teikning blir synleg for dei som står utanfor resonneringsprosessen. Det andre hovudelementet som handlar om den konkluderande eigenskapen matematisk resonnering har, viser til at det i mykje litteratur blir vist til at fleire nye idear innanfor matematikken er basert på slike konklusjonar frå resonnement (Jeannotte & Kieran, 2017). Her kan me og sjå koplinga til Lithner (2008) si skildring av resonnering, som og inneber at resonnering mellom anna handlar om å trekka konklusjonar. Det tredje aspektet handlar om kva som er målet og funksjonen ved matematisk resonnering. Dette aspektet leier til spørsmål som om målet til matematisk resonnering er avgrensa til å bevisa og om målet ved resonneringsprosessen alltid er å endra epistemisk verdi (Jeannotte & Kieran, 2017). I følgje Lithner (2008) må ikkje resonnement alltid vera formelle, eller fullstendige bevis, dei kan og vera meir uformelle så lenge dei er til hjelp for den som resonnerer, som er eit mål ved resonnering. Jeannotte og Kieran (2017) legg mest vekt på strukturelle og prosessrelaterte aspekt. Prosessrelaterte aspekt handlar om at resonnering gjerne blir rekna som ein prosess, og det er mange ulike prosessar som blir kopla til resonnering. Til dømes kan det vera prosessar som går ut på å samanlikna og prosessar som handlar om validering (Jeannotte & Kieran, 2017).

Det strukturelle aspektet går ut på at ulike former for resonnering blir skild på bakgrunn av oppbygging, og dette blir rekna som den tradisjonelle måten å definera resonnering på (Jeannotte & Kieran, 2017). Det er fleire slike former for resonnering, som har ulik oppbygging og gjerne ulike funksjonar. Reid og Knipping (2010, s. 83) peiker på deduktiv resonnering, induktiv resonnering, resonnering ved analogi og abduktiv resonnering som viktige former for resonnering.

Deduktivt resonnement tyder at ein kjem til ein konklusjon ut frå premiss der konklusjonen logisk følger frå premissa. Dette inneber at om premissa er sanne så må også konklusjonen vera sann. Dette er den einaste forma for resonnement som gir sikkerheit og blir difor gjerne sett på som grunnlaget for bevis som eg går litt meir innpå seinare (Reid & Knipping, 2010, s. 84) Deduktiv resonnering blir gjerne nytta til verifikasjon og forklaring. Nokon meiner at deduktiv resonnering ikkje kan nyttast til utforsking sidan all informasjon allereie er kjent (Reid & Knipping, 2010, s. 87).

Induktivt resonnement er også eit omgrep som blir mykje nytta utan nødvendigvis å bli nytta konsekvent (Reid & Knipping, 2010, s. 88). På trass av at det ikkje er ein tydeleg definisjon alle er samde om kan ein gjerne seie at det tyder å slutta generelle reglar på bakgrunn av det spesielle. Eit slikt resonnement er difor berre sannsynleg ikkje sikkert, og ei viktig rolle ved induktiv resonnering er difor utforsking (Reid & Knipping, 2010, s. 92). På den andre sida peiker Reid og Knipping (2010, s. 92) på at induktiv resonnering også kan bidra til å verifisera, utan å gi absolutt sikkerheit.

Abduktiv resonnement er kopla til både deduktivt og induktivt resonnement, og blir ofte rekna som baklengs resonnering eller baklengs deduktiv resonnering (Reid & Knipping, 2010, s. 99-100). Ein startar med ein overraskande observasjon, og «jobbar seg bakover» mot ei forklaring som gjer observasjonen mindre overraskande. Utforsking er difor ein viktig funksjon ved abduktiv resonnering (Reid & Knipping, 2010, s. 103). Resonnement ved analogi går ut på å danna ei formodning basert på likskap mellom noko som er kjent og noko som er ukjent, som me ønsker å vita meir om. Dette er viktig i matematisk arbeid og har fått ei større rolle i matematikdidaktikken den seinare tida (Reid & Knipping, 2010, s. 110).

Vidare peiker Reid og Knipping (2010, s. 123-124) på andre former for resonnering, mellom anna å unngå å resonnera ved å referera til autoritet eller ved mekanisk resonnering og formel-bevis. Eg vel å gå litt meir inn på det som blir kalla mekanisk resonnering og formel-bevis. Reid og Knipping (2010, s. 124) skildrar dette som ein måte å unngå å resonnera på ved å nytta formlar, symbol og mekanismar. Dette vil til dømes vera at ein viser noko ved hjelp av algebramanipulasjon, heller enn at ein gjennomfører eit fullstendig deduktivt resonnement. Algebramanipulasjon vil seie å gjera om på eit uttrykk ved å nytta algebraiske reglar, utan å vera nøydtt til å argumentera eller resonnera vidare for å bruka desse kjende reglane (Reid & Knipping, 2010, s. 124). Reid og Knipping viser til Tall (1995) som kallar slik algebramanipulasjon manipulative bevis, og han peiker på at det er den vanlegaste forma for bevis i engelske læreplanar. På trass av at Tall (1995) kallar dette for bevis, understrekar han og at på trass av at det er eit bevis, manglar dei nokon av dei ekte deduktive eigenskapane til andre bevisformer.

I tillegg til å kategorisera resonnement ut frå struktur, kan ein og kategorisera resonnement ut frå resonneringsprosessen. Lithner (2008) delar resonnering inn i to kategoriar, kreativ resonnering og imitativ resonnering. Imitativ resonnering blir vidare delt i to underkategoriar, memorert resonnering og algoritmisk resonnering. Memorert resonnering går ut på å memorera ei konkret løysing, og skriva ned den fullstendige løysinga. Denne forma for resonnering kan berre nyttast for nokre få typar oppgåver, som å svara på faktaspørsmål eller for bevis (Lithner, 2008). For algoritmisk resonnering har ein derimot lært ein løysingsmetode som kan nyttast på oppgåver av ei bestemt form som passar løysingsmetoden (Lithner, 2008). Lithner (2008) gjer det vidare klart at det kan diskutera om dette i det heile er resonneringsmetodar, eller om det heller er måtar å unngå å resonnera som metodane som er nemnt over. Lithner (2008) grunnjev derimot valet om å kalla det resonneringsmetodar ved at det må skje ei viss form for resonnering for å velja løysingsmetode.

Kreativ resonnering er resonnering som oppfyller tre kriterium (Lithner, 2008). Det første kriteriet er at det blir utvikla ein resonneringssekvens som er ny for den som resonnerer. Andre kriterium går ut på at det er argument som støttar opp under val av løysingsmetode og grunngir kvifor konklusjonen er sannsynleg eller sann. Det siste kriteriet er matematisk grunnlag, altså at argumenta som blir nytta byggjer på fundamentale matematiske eigenskapar ved konseptane som inngår i resonnementet (Lithner, 2008). På trass av at Lithner (2008) særleg framhevar at det er ønskeleg at elevane lærer kreativ resonnering, er det eit mål at dei skal

læra både kreativ og imitativ resonnering (Bergqvist & Lithner, 2012). For å læra både kreativ og imitativ resonnering må elevane og øva på ulike typar oppgåver og problem, også rutineoppgåver, tradisjonelle oppgåver der dei følgjer ein metode (Schoenfeld, 1985, sitert i Bergqvist & Lithner, 2012, s. 252). I tillegg kan det å sjå læraren resonnera vera gunstig for å sjå døme på god resonnering (Bergqvist & Lithner, 2012).

Her er det også relevant å trekka inn relasjonell og instrumentell forståing som Skemp (2006) peiker på, på bakgrunn av at Skemp definerer instrumentell forståing som det å kunne reglar og prosedyrar og kunne bruka desse til å løysa oppgåver, utan at ein har fullstendig forståing for kvifor dei kan nyttast eller kva ein gjer. Dette kan koplast til imitativ resonnering, og spesielt algoritmisk resonnering, der ein også har lært seg å følgja ein metode, utan at ein nødvendigvis har djupare forståing for kva ein gjer (Lithner, 2008). Relasjonell forståing vil seie å både kunne løysa oppgåvene, samtidig som ein veit kvifor ein kan løysa oppgåva på den bestemte måten. I tillegg har ein ei forståing av konsept, slik at ein kan finna alternative løysingsmetodar og ser større samanhengar (Skemp, 2006).

2.1.2 Argumentasjon

I likskap med resonnering er argumentasjon eit omgrep som er vanskeleg å definera, noko som blir tydeleg når Reid og Knipping (2010, s. 153-154) presenterer ulike oppfatningar av kva argumentasjon er. Veldig mange er samde om at det handlar om å overttyda andre. Nokon meiner derimot at det handlar meir om å forklara resonneringsprosessen ein har gjennomført for å komma fram til konklusjonen ein har enda opp med (Reid & Knipping, 2010, s. 154). Mange av dei ulike definisjonane på argumentasjon inneheld element som går på å overttyda andre, trekka konklusjonar og støtta opp under desse konklusjonane (Conner & Staples, 2022). Vidare definerer Conner og Staples (2022) argumentasjon som prosessen der ein utviklar matematiske påstandar og kjem med bevis som støttar opp under dei. Dette minner om definisjonen til Umland og Sriraman (2014) som meiner at argumentasjon er prosessen der ein utviklar eit argument, som vil seie at ein trekk ein konklusjon på bakgrunn av ei resonneringskjede.

«Essentially, argumentation includes any technique that aims at persuading others that ones reasoning is right» (Hanna, 2020, s. 563). Som me ser legg Hanna (2020) særleg vekt på elementet som går på å overttyda andre, i motsetning til Conner og Staples (2022) som er meir

opptekne av at argumentasjon handlar om å støtta opp under påstandar. Vidare vektlegg Hanna (2020) at ein annan viktig del av argumentasjon er at fleire arbeider saman og kommenterer kvarandre sine argument, samt at dei samarbeider om å forma argument for å komma fram til den beste konklusjonen, på trass av at deltakarane kanskje ikkje har tilstrekkeleg med kunnskap til å nå ein «perfekt» konklusjon.

Reid og Knipping (2010, s. 154) tek utgangspunkt i ulike definisjonar og føreslår ei mogeleg skildring av konseptet argumentasjon som at det handlar om å overtyda andre personar, er til stades i all diskurs og har ein viss grammatisk struktur. Samtidig bygger argumentet på ein logisk struktur som er akseptert i det fellesskapet ein oppheld seg i (Reid & Knipping, 2010, s. 154). Omgrepet argument kan sjåast på som resultatet av argumentasjon, ein del av argumentasjon, det som gir opphav til argumentasjon eller identisk med argumentasjon (Reid & Knipping, 2010, s. 154). At eit argument har ein viss grammatisk struktur kan koplant til at fleire peiker på tre hovudelement eit argument er bygd opp av (Rumsey et al., 2022, s. 20). Rumsey et al. (2022, s. 20) nyttar omgrepa påstand (engelsk: claims), evidens (engelsk: evidence) og resonnering (engelsk: reasoning), men understrekar at det blir nytta ulike namn. Påstanden er den setninga ein ser på, evidens støttar opp under denne setninga og resonneringa er det som koplant påstanden og evidens saman (Rumsey et al., 2022, s. 20). I tillegg til desse tre hovudelementa peiker Toulmin (2003) på fleire element eit argument kan bestå av. Rangnes og Herheim (2019, s. 173) kallar desse elementa Toulmin (2003) peiker på for innvending (engelsk: rebuttal) og ryggdekning (engelsk: backing). Innvending er gjerne tilfelle som blir peika på der resonneringa ikkje gjeld, eller spørsmål som utfordrar resonneringa. Dette kan til dømes vera: «Vil det alltid bli slik?» (Rangnes & Herheim, 2019, s. 173). Ryggdekning er utdjupande støtte til påstanden når resonneringa ikkje er tilstrekkeleg (Rangnes & Herheim, 2019).

I følgje Meyer og Schnell (2020) er strukturen til eit matematisk argument eit av tre område matematiske argument kan vurderast på. Dei to andre områda er innhaldsdimensjon og mottakar-orientert dimensjon. Vurdering av strukturell dimensjon handlar mellom anna om at dei ulike elementa som eit argument kan bestå av er til stades og om det kan eksistera innvendingar som ikkje er nemnt (Meyer & Schnell, 2020). Innhaldsdimensjonen fokuserer på det matematiske innhaldet i dei ulike elementa, og om all nødvendig resonnering og grunngeving til stades (Meyer & Schnell, 2020). I tillegg er gyldigheita til argumentet ein del av dette området (Kopperschmidt, 2000, sitert i Meyer & Schnell, 2020, s. 38). At eit

argument er gyldig tyder i følge Stylianides (2008) at påstandane er kopla saman av aksepterte logiske reglar, slik at slutninga nødvendigvis følgjer frå utgangspunktet. Burheim et al. (2023) peiker på at norske elevar sjeldan blir utfordra på nettopp å forklara kvifor eit argument er gyldig, på trass av at dei ofte blir bedt om å forklara korleis dei har tenkt for å løysa eit problem. Mottakar-orientert dimensjon handlar om argumentet si evne til å overtyda, og om det er presentert på ein måte som gjer at den som mottar argumentet klarer å følgja det (Meyer & Schnell, 2020).

2.1.3 Bevis

Mange ser på deduktiv resonnering som sjølv grunnlaget for bevis, og dei fleste meiner at deduktiv resonnering er eit krav for bevis (Reid & Knipping, 2010, s. 84). I følge Hanna (2020) anerkjenner dei fleste læreplanar i matematikk at resonnering og bevis er viktig i matematikken, og mange læreplanar refererer og til resonnering og bevis som ei eining. Sidan deduktiv resonnering er så tett knytt til bevis vil utvikling av elevar sine ferdigheiter til å resonnera deduktivt vera nyttig for å utvikla deira evner til å forstå og utvikla bevis (Reid & Knipping, 2010).

Argumentasjon og bevis blir ofte rekna som tett knyta til kvarandre i matematikdidaktisk forskning og litteratur (Reid & Knipping, 2010, s. 153). På den andre sida er det ulike meiningar om forholdet mellom argumentasjon og bevis. Medan nokon meiner at dei to omgrepa argumentasjon og bevis har ei nær kopling, meiner andre at dei anten er totalt skilt frå kvarandre eller at dei inneber ulike ting men samtidig har ei kopling mellom seg (Reid & Knipping, 2010, s. 153). Hanna (2020) meiner til dømes at bevis er eit spesialtilfelle av argumentasjon. Vidare skriv ho at matematikklærarar i seinare år har blitt instruert til å sjå på argumentasjon som noko som ikkje enda er bevis, som eg tolkar som at argumentasjon blir rekna som ufullstendige bevis. Det har difor vore usemje om kor nyttig det er for elevane å utvikla sine evner til å argumentera når dei skal læra seg å utvikla matematiske bevis (Hanna, 2020). Hanna (2020) viser vidare til at ein del ny forskning på temaet tyder på at om elevane arbeider med argumentasjon kan ferdigheitene dei då utviklar vera nyttige når dei skal utvikla matematiske bevis.

På bakgrunn av at bevis, i følge mellom anna Reid og Knipping (2010), har ei sterk kopling til både resonnering og argumentasjon, ser eg det som relevant å også skriva meir utdjupande

kring bevis. I det engelske språket blir omgrepet «proof» nytta som substantivet bevis og «proving» nytta som verbet å bevisa. Desse omgrepa har ikkje ein eintydig definisjon og blir nytta på fleire måtar, også i ein og same tekst (Reid & Knipping, 2010). Det gjer det naturleg å tenkja at bevis, på same måte som resonnering og argumentasjon, er eit omgrep som er vanskeleg å definera.

Stylianides (2007, s. 291) definerer bevis som eit matematisk argument, som er ei rekke av samankopla påstandar for eller mot ei matematisk påstand, med tre særeigne kjenneteikn. Det første kjenneteiknet er at ein nyttar sanne påstandar som er aksepterte i fellesskapet ein er i, og som ikkje treng vidare grunngjeving (Stylianides, 2007, s. 291). Det andre kjenneteiknet er at det blir nytta måtar å argumentera på som er kjente innanfor fellesskapet ein er i, eller som er innanfor den konseptuelle rekkevidda til deltakarane i fellesskapet (Stylianides, 2007, s. 291). Det siste kjenneteiknet Stylianides (2007, s. 291) peiker på er at argumentet blir kommunisert med uttrykksformer som er passande og kjente, eller innanfor konseptuell rekkevidde i fellesskapet. Som nemnt eksisterer det ulike definisjonar for omgrepet bevis, men det er i dette prosjektet valt å ta utgangspunkt i definisjonen til Stylianides (2007), mellom anna fordi denne definisjonen er nytta i det underordna rammeverket som vert introdusert seinare i kapitlet.

Nokon gonger kan ulik bruk av omgrepet bevis vera kopla til dei ulike funksjonane bevis kan ha. Til dømes kan det å bevisa bli nytta einstydande med å verifisera (Reid & Knipping, 2010, s. 73). Det blir peika på ulike roller bevis kan ha i matematikk og matematikkundervisning (De Villiers, 1990; Reid & Knipping, 2010). Det som blir rekna som dei viktigaste rollene er *verifikasjon, forklaring, kommunikasjon, utforsking* og *systematisering* (De Villiers, 1990). Under går eg litt meir inn på kvar av desse, i tillegg til *intellektuell utfordring* som og blir nemnt som ei rolle bevis kan ha (Reid & Knipping, 2010). Det å få «cred» for teorem blir av Reid og Knipping (2010, s. 77) også nemnt blant dei viktigaste rollene i matematikken, i tillegg til dei fem De Villiers (1990) peikar på. Det blir og nemnt fleire andre moglege roller, mellom anna estetikk, men verken desse eller det å få «cred» for teorem vil bli meir utdjupa her sidan dei ikkje blir rekna som veldig viktige for matematikkundervisning.

Verifikasjon

«Traditionally the function of proof has been seen almost exclusively in terms of the verification of the correctness of mathematical statements» (De Villiers, 1990, s. 17). Å nytta bevis som verifikasjon er meint å fjerna tvil kring om noko stemmer eller ikkje stemmer. Det er viktig å merka seg at å verifisera ovanfor seg sjølv og verifikasjon ovanfor andre er to ulike prosessar (Reid & Knipping, 2010, s. 74).

De Villiers (1990) kritiserer faktumet at ein hovudsakleg har sett på verifikasjon som den einaste eller viktigaste funksjonen til bevis. Slik eg forstår De Villiers (1990) meiner han at lærarar tenkjer at bevis overtyder matematikarane ved at dei er bygd opp av logiske slutningar frå hypotesen til konklusjonen og dermed garanterer sanning. Det er derimot ikkje slik at bevis er ei forutsetning for overtyding, i røynda er det i motsetjing gjerne omvendt. At overtydinga til matematikarane om at ei hypotese eller formodning stemmer, er motivasjonen og ei forutsetning for å utvikla eit bevis (De Villiers, 1990).

Forklaring

Alle bevis må ha eigenskapen at dei verifiserer om ei påstand eller formodning er sann eller ikkje, men ikkje alle bevis er forklarande. De Villiers (1990) meiner at for mange matematikarar vil den forklarande rolla til bevis vera viktigare enn den verifiserande rolla til bevis, sidan eit forklarande bevis viser kvifor ei formodning er sann, ikkje berre at den er sann. I følgje Hanna (2000) blir eit bevis berre overtydande for ein matematikar dersom det leier til faktisk matematisk forståing. For å leia til matematisk forståing bør eit bevis visa kvifor eit teorem stemmer, altså vera forklarande (Hanna, 2000). Vidare hevdar Hanna (2000) at hovudrolla til bevis i undervisningssamanheng er nettopp forklaring, sidan det viktigaste spørsmålet eit bevis må svara på i matematikkundervisning er *kvifor*.

Kommunikasjon

Kommunikasjon er ei anna rolle bevis kan ha, og for matematikarar er publikasjon i tidsskrift ein viktig måte å kommunisera på og dela nye matematiske framsteg (Reid & Knipping, 2010, s. 77). Også i undervisning kan bevis ha kommuniserande rolle, ved at undervisar gjerne viser eit bevis på tavla for å til dømes verifisera eller forklara eit teorem (Reid & Knipping, 2010, s. 77). Altså er bevis ein måte å kommunisera matematiske resultat, mellom matematikarar, mellom undervisar og elev og elevar seg i mellom (De Villiers, 1990). Bevis i form av sosial

interaksjon vil avhenga av subjektiv oppfatning av kva som er gyldige argument (De Villiers, 1990).

Utforsking

Ei grunngeving for at ei av rollene til bevis er utforsking er at ein gjerne nyttar deduktiv resonnering medan ein utforskar, og deduktiv resonnering blir rekna som noko av grunnlaget for bevis (Hanna, 2000). Denne oppfatninga står i ein viss kontrast til Reid og Knipping (2010) si oppleving av at nokon meiner at utforsking ikkje kan vera ei rolle ved deduktiv resonnering, sidan all informasjon er kjend ved deduktiv resonnering. Hanna (2000) peiker på digitale hjelpemiddel som ein måte for elevar til å kunne sjekka formodningane sine og kanskje «oppdaga» nye eigenskapar som ein måte bevis kan ta ei utforskande rolle. Også De Villiers (1990) understrekar at utforsking er ei av rollene til bevis sidan bevis kan nyttast til å oppdaga nye samanhengar. Han meiner også at noko av kunnskapen me kjenner i dag lite truleg ville bli oppdaga ved hjelp av intuisjon eller kvasi-empiriske metodar (De Villiers, 1990).

Utforsking er eit omgrep eg ønsker å utdjupe ved å sjå på koplinga til omgrepet *inquiry*. «Utforsking i matematikk R handler om å lete etter mønstre, finne sammenhenger og diskutere seg frem til en feller forståelse. Utforsking handler om å legge mer vekt på strategiene og fremgangsmåtene enn på løsningene» (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b). IBE (inquiry-based education) er eit omgrep som har fått meir fokus innanfor matematikkundervisning dei seinare åra (Artigue & Blomhøj, 2013). Artigue og Blomhøj (2013) peiker på at *inquiry* mellom anna inneber å stilla spørsmål, problemløysing, utforsking, resonnering og å argumentera og bevise. Maaß og Artigue (2013) vektlegg at elevane må bruka matematiske måtar å svara på dei spørsmåla dei sjølv stiller, i det legg dei mellom anna å gjera utrekningar, danna og bevise formodningar, samt å sjå etter mønster og samanhengar. Frå skildringa av utforsking i læreplanen og skildringane av *inquiry*, kjem det fram at omgrepa *inquiry* og utforsking har ei tett kopling, utan at dei i denne teksten blir rekna som synonyme omgrep. Artigue og Blomhøj (2013) peikar på fleire aspekt som er viktige for matematisk *inquiry*, og på trass av at eg ikkje ser utforsking og *inquiry* som synonyme omgrep reknar eg dei som så nært knyt til kvarandre at desse aspekta og er relevante med tanke på utforsking i matematikkundervisning. Blant desse aspekta er autentisitet, at problema bør koplast til reelle og ikkje-matematiske spørsmål og aktivitetar. I tillegg blir den eksperimentelle dimensjonen ved matematikk trekt fram, samt elevar sin autonomi og elevane

sitt ansvar frå formulering av spørsmål til løysing og validering av løysinga (Artigue & Blomhøj, 2013).

Systematisering

Systematisering er også ein av funksjonane ved bevis som blir peika på av mellom anna De Villiers (1990). De Villiers (1990) meiner at ei eigenskap ved bevis som korkje kvasi-empirisk testing eller intuisjon har, er å kunne visa dei logiske forholda mellom ulike påstandar. «Proof is therefore an indispensable tool in the systematisation of various known results into a deductive system of axioms, definitions and theorems» (De Villiers, 1990, s. 20).

Intellektuell utfordring

Eg vel også å gi ei kort skildring av rolla intellektuell utfordring, på trass av at Reid og Knipping (2010, s. 74-77) meiner at det er dei fem rollene over som er dei viktigaste for matematikkundervisning. At bevis kan vera ein intellektuell utfordring inneber at bevis mellom anna kan utfordra matematikarane sitt uthald til å løysa oppgåver, samt utfordra kreativiteten til matematikarane (Davis & Hersh, 1981, s. 369).

Historisk har arbeid med bevis i skulen handla mykje om at elevane må memorera ulike ferdigutvikla bevis for ei påstand dei er blitt fortalt er riktig, og det har vore lite fokus på å utvikla eigne resonnement, argument og bevis, samt forstå og vurdera resonnement, argument og bevis (Skott et al., 2018, s. 280). Ein av grunnane til at det i dag er fokus på at resonnering og bevis, og dermed også argumentasjon, skal ha ei framtrædande rolle i matematikkundervisning er for å distansera seg frå denne tradisjonen (Skott et al., 2018, s. 280). Furinghetti et al. (2001) meiner at det å gi oppgåver som legg opp til dynamisk utforsking av påstandar, i staden for at elevane skal forstå eit bevis for ei påstand dei er blitt fortalt at stemmer, kan vera god hjelp for elevane i utvikling av bevis. I tillegg vil denne måten å arbeida gjerne likna meir på måten matematikarar arbeider på (Furinghetti et al., 2001). Eit kjend problem i matematikkundervisning er at elevane ikkje ser poenget med å bevise noko (De Villiers, 1990). Ein av grunnane til dette kan vera at elevane stort sett berre blir bedt om å bevise påstandar dei allereie veit er sanne og som dei veit at mange andre har bevist før dei, det blir ein prosedyre (Schoenfeld, 1994).

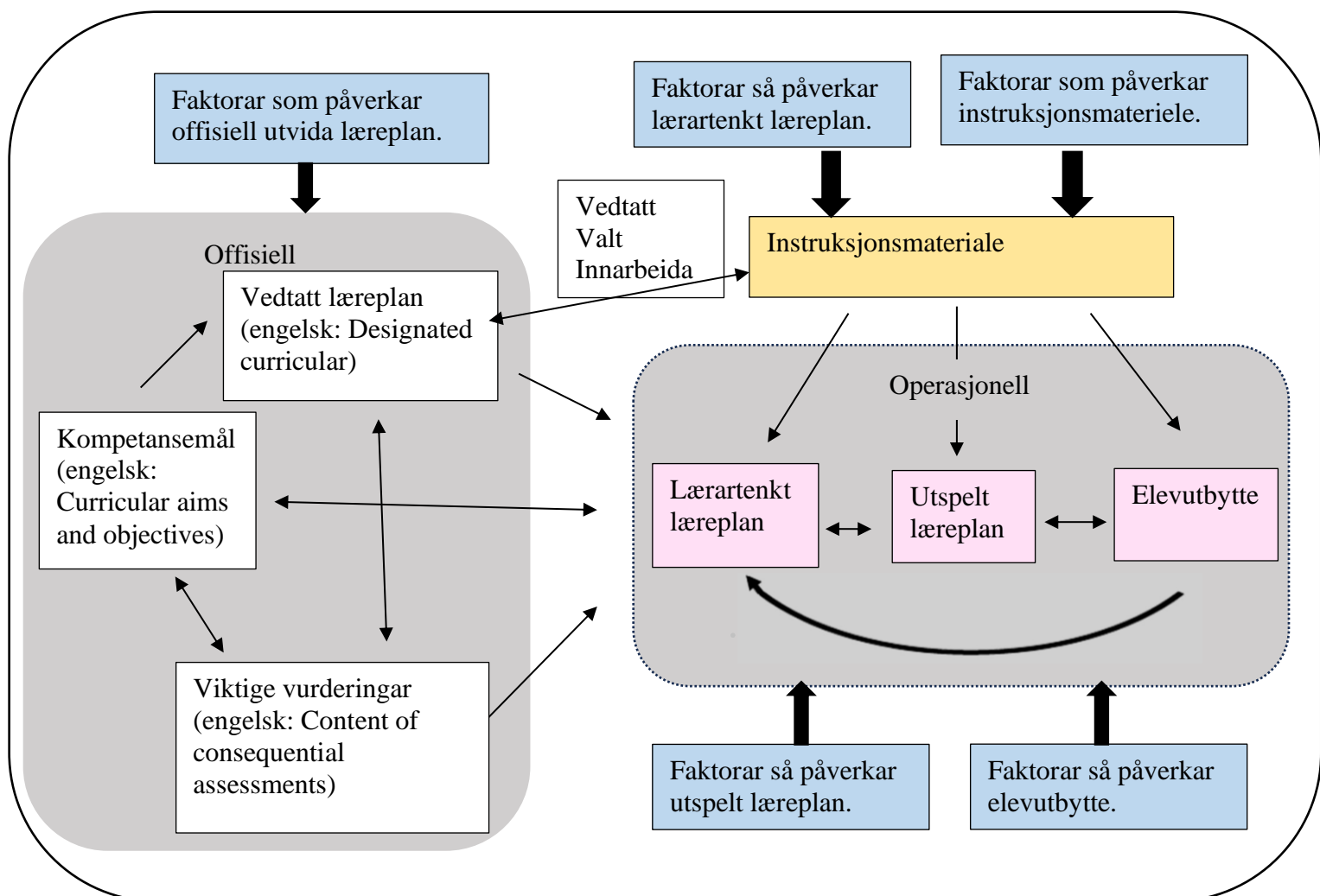
2.1.4 Grunngeving

Eit anna viktig omgrep som er kopla til resonnering og argumentasjon er omgrepet grunngeving. I omgrepet *justification* meiner Conner og Staples (2022) at det ligg ei oppfordring om å forklara eigen tenkjemåte og tvinga fram ein posisjon. Eg tolkar det difor slik at omgrepet *justification* er ekvivalent med det norske ordet grunngeving. «Mathematical justification is a process of supporting your mathematical claims and choices when solving problems or explaining why your claim or answer makes sense» (Bieda & Staples, 2020, s. 103). Kilpatrick et al. (2001, s. 130) meiner at å grunnkje (engelsk: justify) tyder å gi tilstrekkeleg grunn til. Vidare meiner dei at bevis difor er ei form for grunngeving men ikkje all grunngeving er bevis (Kilpatrick et al., 2001, s. 130). Frå dei ulike skildringane ser me og at det er likskap i definisjonane for omgrepa argumentasjon og grunngeving, og at det er ein viss overlapp mellom dei to konseptane (Stylianides & Stylianides, 2022). Mellom anna går nokon av definisjonane av både argumentasjon og grunngeving ut på å støtta opp under matematiske påstandar.

2.2 Rammeverk

2.2.1 Overordna rammeverk

For å gå djupare inn på korleis lærarane forstår kva læreplanen legg i konseptane resonnering og argumentasjon og i kva grad dei lener seg på læreplanen i si implementering av resonnering og argumentasjon i undervisninga, er det nødvendig med eit rammeverk for læreplanen. Det overordna rammeverket som er valt er ei konseptualisering av prosessen kring korleis læreplanen utspelar seg i matematikkundervisninga (Remillard & Heck, 2014). Remillard og Heck (2014, s. 707) nyttar omgrepet «curriculum» og definerer det som ein plan for kva elevane skal oppleve og erfare gjennom matematikkundervisninga, samt kva dei faktisk opplev. Eg vel å omsetja «curriculum» til *utvida læreplan*. Utvida læreplan omhandlar difor heile læreplanverket, alt av instruksjonsmateriell og det som faktisk utspelar seg i matematikkundervisninga i klasserommet. Læreplanen går gjennom fleire ledd frå den vedtekne, offisielle læreplanen til det elevane oppfatar og sit igjen med frå undervisninga. I overføringa mellom desse ledda skjer det omsetjingar og transformasjonar (Remillard & Heck, 2014).



Figur 2.1. Eiga omsetjing henta frå (Remillard & Heck, 2014, s. 709)

Remillard og Heck (2014) tek utgangspunkt i to andre rammeverk for læreplanar før dei formulerer sitt eige rammeverk, der dei skil mellom offisiell læreplan og operasjonell læreplan, som me ser i figur 2.1. Den offisielle læreplanen er bestemt av myndighetene og består av *den vedtekne læreplanen*, *læreplanmål*, samt innhaldet i det Remillard og Heck (2014) kallar «essential assesments», som er omsett til *viktige vurderingssituasjonar*, og som i Noreg typisk vil vera eksamen. «Læreplanverket består av overordnet del, fag- og timefordeling og læreplaner i fag» (Kunnskapsdepartementet, 2022). Overordna del handlar om overordna verdiar og prinsipp som ligg til grunn for grunnopplæringa i norsk skule (Kunnskapsdepartementet, 2017). Læreplanar i ulike fag inneheld ein skildrande tekst om relevansen til faget og faget sine verdiar, kjerneelement, tverrfaglege tema og grunnleggande ferdigheiter. Vidare inneheld læreplanane kompetansemål og informasjon om

vurderingsarbeidet i faget (Kunnskapsdepartementet, 2022). Læreplanmål blir skildra som spesifikke mål for kva elevane skal læra, og tilsvarar kompetansemåla i den norske læreplanen (Remillard & Heck, 2014). Vedteken læreplan er ein meir overordna plan for kva elevane skal læra, og gir gjerne ei djupare forklaring på korleis ein skal oppnå at elevane lærer kompetansemåla som er tett knytt opp mot den vedtekne læreplanen. Overordna del av læreplanen, samt læreplanane i dei ulike faga, med unntak av kompetansemåla, vil difor vera del av den vedtekne læreplanen.

Den operasjonelle læreplanen består av *lærartenkt læreplan*, *utspelt læreplan*, som er det som utspelar seg i klasserommet og *elevutbytte* (Remillard & Heck, 2014). Lærartenkt læreplan er læraren si tolking av læreplanen og det læraren tenkjer og ønsker at elevane skal læra. Denne blir utvikla medan læraren nyttar den vedtekne læreplanen og eventuelt andre ressursar for å planlegga undervisninga. Vala læraren tek undervegs i planlegginga er og ein del av den lærartenkte læreplanen, og den blir påverka av læraren sine haldningar i faget. Denne delen av utvida læreplan er vanskeleg å undersøka då den er inne i læraren sitt hovud (Remillard & Heck, 2014). Den utspelte læreplanen er det som faktisk skjer i klasserommet. Dette kan til dømes vera interaksjonen mellom lærar og elev, og den blir påverka av mellom anna lærartenkt læreplan, elevane, tilgjengelege resursar og korleis læraren handlar i augeblinken. Den utspelte læreplanen har stor påverknad på elevutbyttet (Remillard & Heck, 2014). Elevutbytte vil seie elevane sine opplevingar og erfaringar i matematikkundervisninga, det dei faktisk opplev (Remillard & Heck, 2014).

Kjerneelementa er ein del av det Remillard og Heck (2014) kallar den offisielle læreplanen og det kjem fram i figur 2.1 at den offisielle læreplanen påverkar alle delar av den operasjonelle læreplanen. Vidare ser me ei påverknad mellom elementa innanfor den offisielle læreplanen, slik at kjerneelementa, som del av den vedtekne læreplanen, påverkar viktige vurderingar, og blir påverka av kompetansemåla og viktige vurderingar. Remillard og Heck (2014) peiker på at pilene viser sannsynleg påverknad og er ei blanding av påverknad som har støtte i empiri, medan andre piler byggjer meir på forfattarane sine spekuleringar og oppfatningar.

Som me ser påverkar også instruksjonsmateriale alle delane av den operasjonelle læreplanen (Remillard & Heck, 2014). Instruksjonsmateriale er mellom anna lærebøker, som har stor påverknad på undervisninga til lærarane (Viholainen et al., 2015). Frå rammeverket til Remillard og Heck (2014) ser me at det er ei gjensidig påverknad mellom

instruksjonsmateriale og den offisielle læreplanen, som ikkje nødvendigvis er tilfellet i Noreg. Sidan rammeverket ikkje er utvikla spesifikt for det norske systemet, er dette noko ein gjerne må ta høgde for, på tross av at Remillard og Heck (2014) understrekar at dei har utvikla eit rammeverk som er meint å kunne nyttast på tvers av landegrensar. I Noreg er det dei ulike forlaga som gir ut lærebøkene og andre ressursar og desse blir ikkje godkjent av noko høgare instans etter at godkjenningsordninga vart avvikla i år 2000 (Gilje et al., 2016). Det tyder at forfattarane innanfor dei ulike forlaga kan oppfatta kompetansemål ulikt og difor utforma lærebøkene ulikt. Sidan det er forlaga som gir ut lærebøkene, er det ikkje gitt at lærebøkene eller anna instruksjonsmateriell har noko påverknad på den offisielle læreplanen.

2.2.2 Underordna rammeverk

Stylianides (2008) har utvikla eit rammeverk for aktivitetar som omhandlar resonnering, argumentasjon og bevis som er meint å vera eit analyseverktøy som kan støtta undersøkingar på dette området, samt gi mening til og kopla saman funn frå ulike undersøkingar.

Fellesomgrepet *reasoning-and-proving* (RP) blir nytta om den overordna aktiviteten som omhandlar dei fire aktivitetane *identifisera mønster, danna formodningar, utvikla ikkje-bevis argument og utvikla bevis* (Stylianides, 2008). Rammeverket er delt inn i tre komponentar, matematisk komponent, psykologisk komponent og pedagogisk komponent som ein kan sjå ut frå figuren under.

	Resonnering og bevis			
Matematisk komponent	Danna matematiske generaliseringar		Gi støtte til matematiske påstandar	
	Identifisera eit mønster	Danna ei formodning	Utvikla eit bevis	Utvikla eit ikkje-bevis argument
	<ul style="list-style-type: none"> • Plausibelt mønster • Bestemt mønster 	<ul style="list-style-type: none"> • Formodning 	<ul style="list-style-type: none"> • Generiske døme • Demonstrasjonar (Engelsk: Demonstration) 	<ul style="list-style-type: none"> • Empiriske argument • Rasjonale (Engelsk: Rationale)
Psykologisk komponent	Kva er løysaren si oppfatning av dei matematiske eigenskapane til eit mønster/ein formodning/eit bevis/eit ikkje-bevis argument?			
Pedagogisk komponent	Korleis kan dei matematiske eigenskapane til eit mønster/ein formodning/eit bevis/eit ikkje-bevis argument samanliknast med løysaren si oppfatning av desse eigenskapane? Korleis kan dei matematiske eigenskapane til eit mønster/ein formodning/eit bevis/eit ikkje-bevis argument gjerast transparent for løysaren?			

Figur 2.2: Eiga omsetjing av figur henta frå (Stylianides, 2008, s. 10)

Den matematiske komponenten blir delt i to overordna kategoriar som inneheld dei fire aktivitetane knytt til RP samt ei nedbryting av nokon av desse fire aktivitetane, som me ser i figur 2.2. Dei to overordna kategoriane er *danna matematiske generaliseringar* og *gi støtte til matematiske påstandar*. Kategorien *danna matematiske generaliseringar* inkluderer RP-aktivitetane *identifisera mønster* og *danna formodningar*, og kategorien *gi støtte til matematiske påstandar* inkluderer aktivitetane *utvikla bevis* og *utvikla ikkje-bevis argument* (Stylianides, 2008). Stylianides (2008) koplur omgrepet generalisering mellom anna til det å overføra kunnskap om matematisk konsept frå ein situasjon til ein annan overordna situasjon, der den opphavelige situasjonen er ein variant av den overordna situasjonen. Kategorien *gi støtte til matematiske påstandar* kan koplast til omgrepet grunngeving, på bakgrunn av at omgrepet «justification» mellom anna handlar om prosessen der ein støttar opp under matematiske påstandar (Bieda & Staples, 2020). Vidare er tre av dei fire aktivitetane delt opp i underkategoriar. Aktiviteten *danna formodningar* er ikkje delt i fleire underkategoriar og inkluderer berre utvikling av formodningar. Ei formodning er i teksten definert som ei

hypotese om ein generell matematisk relasjon som er grunngeven ved hjelp av ufullstendige matematiske bevis (Stylianides, 2008, s. 11).

Identifisering av mønster inkluderer både *plausible mønster* og *bestemte mønster*. *Plausible mønster* er når fleire mønster vil vera moglege sidan oppgåva ikkje inneheld tilstrekkeleg informasjon til at løysaren kan komma med eit avgjerande bevis for valet av eit spesifikt mønster. Eit *bestemt mønster* er eit mønster som er bestemt av strukturen i oppgåva. Det vil då vera mogleg for løysaren å komma med eit avgjerande bevis for val av nettopp dette mønsteret (Stylianides, 2008).

Utvikling av bevis kan delast opp i *generiske døme* og *demonstrasjonar* (Stylianides, 2008). Eit generisk døme er eit døme der eit spesifikt representativt tilfelle blir nytta til å generalisera og dermed representera alle moglege tilfelle i eit generelt argument (Reid & Knipping, 2010, s. 130). *Demonstrasjonar* er alle bevis som ikkje støtter seg på representativiteten til eit tilfelle, altså er det generelle framstillingar. Døme på demonstrasjonar er matematisk induksjon og bevis ved sjølvmotseiing (Stylianides, 2008).

Eit ikkje-bevis argument blir av Stylianides (2008) definert som eit argument for eller mot ei påstand, utan at det kvalifiserer som eit bevis. *Utvikling av ikkje-bevis argument* inkluderer utvikling av *empiriske argument* og *rasjonale* (engelsk: rationale). Empiriske argument er argument som baserer seg på eit eller fleire døme, utan at ein har vist at noko stemmer eller ikkje stemmer for alle moglege tilfelle. *Rasjonale* er inkludert i rammeverket for å dekkja alle argument som korkje kan reknast som bevis eller empiriske argument (Stylianides, 2008). Det kan til dømes vera argument som ikkje er empiriske, men som til dømes inkluderer påstandar som ikkje blir rekna som kjente og aksepterte i fellesskapet ein er i og difor ikkje kan reknast som bevis (Stylianides, 2008).

Den psykologiske komponenten har fokus på eleven sin subjektive mening og oppfatning. Med det meiner Stylianides (2008) at om oppgåva er å utvikla eit bevis vil ein innanfor den psykologiske komponenten vera meir oppteken av om eleven sjølv ser på si eiga løysing som eit bevis, enn om det reint matematisk kan reknast som eit gyldig bevis.

Den pedagogiske komponenten inkluderer både den matematiske komponenten og den psykologiske komponenten, men tek ein pedagogisk synsvinkel (Stylianides, 2008). Denne

komponenten fokuserer i hovudsak på to spørsmål som er viktige om ein skal sjå på resonnering og bevis frå eit pedagogiske synspunkt. Det første spørsmålet omhandlar korleis eleven oppfattar eigenskapane til eit matematisk fenomen som er relatert til RP, samanlikna med kva som faktisk er eigenskapane til det matematiske fenomenet. Dersom eleven si oppfatning av eigenskapane til fenomenet skil seg frå dei faktiske eigenskapane til fenomenet kan dette påverka den pedagogiske handlinga læraren gjer for å hjelpe eleven til å forstå kva som er eigenskapane til fenomenet (Stylianides, 2008). Det andre spørsmålet går på korleis eigenskapane til det matematiske fenomenet kan gjerast transparent ovanfor eleven. At eigenskapane til eit matematisk fenomen er transparent for eleven tyder at det ikkje er avvik mellom eleven si oppfatning av fenomenet og dei matematiske eigenskapane til fenomenet. Læraren må tenka gjennom kva undervisningsmetodar som er best for å gjera eigenskapane til dei matematiske konseptane transparente for elevane (Stylianides, 2008).

2.3 Relevant forskning

Eg vil no sjå nærare på kva relevant eksisterande forskning har kome fram til, for å kunne sjå mi studie i lys av desse funna. Det er gjort forskning på liknande tema tidlegare, då gjerne med bevis i hovudfokus. Eg ser på denne forskinga som relevant, med tanke på at bevis er så tett knytt til resonnering og argumentasjon, samtidig som det må bli tatt høgde for at det gjerne er litt andre aspekt som spelar inn når det er bevis som er hovudfokuset i undersøkinga.

Dei siste tiåra har det vore aukande fokus på bevis i matematikdidaktisk forskning og litteratur (Dickerson & Doerr, 2014). Det har då vore mykje fokus på elevar sine vanskar med bevis, men dei seinare åra har bevis sitt føremål i matematikkundervisning fått meir fokus i forskinga (Dickerson & Doerr, 2014). I følgje Dickerson og Doerr (2014) får elevar truleg veldig ulike erfaringar med bevis, avhengig av læraren sine haldningar til og meiningar om bevis. Dickerson og Doerr (2014) gjennomførte ei undersøking der dei ønska å sjå på lærarane sine tankar kring kva føremål eller funksjonar bevis har i undervisninga, samt kva som er kjenneteikna ved bevisa som i følgje lærarane tenar desse føremåla best (Dickerson & Doerr, 2014). Det var gjennomført ei intervjuundersøking med 17 lærarar (Dickerson & Doerr, 2014). Eit hovudfunn var at lærarane meinte at to av dei viktigaste føremåla med bevis i matematikkundervisning er å betra elevane si matematiske forståing og utvikla evna til generaliserande tenking, som kan overførast til andre situasjonar (Dickerson & Doerr, 2014).

Eit anna hovudfunn var at det vart observert eit skilje mellom meir erfarne lærarar og mindre erfarne lærarar kring spørsmålet om kva type bevis som best tente føremåla med bevis i undervisninga, og då spesielt målet om å utvikla forståinga til elevane. Dei mindre erfarne lærarane var opptekne av at bevisa måtte vera formelle eller stringente nok. Dei meir erfarne lærarane meinte derimot at bevis som var meir konkrete eller visuelle ville vera best for å tena beviset sine viktigaste funksjonar i undervisningssamanheng (Dickerson & Doerr, 2014). På trass av usemje kring kva grad av stringens bevisa burde ha, var alle lærarane samde om at det var nødvendig med visse krav til stringens for at bevisa skulle bidra til auka forståing (Dickerson & Doerr, 2014).

Furinghetti og Morselli (2011) gjennomførte ei intervjuundersøking der dei såg på korleis lærarar på vidaregåande skule behandlar bevis. I tillegg såg dei på korleis lærarane si oppfatning spela inn, kva oppfatningar som påverka lærarane si undervisning av bevis og på kva måte oppfatningane påverka undervisninga. Dei fann at nesten alle lærarane inkluderte bevis i undervisninga, men at det var eit skilje mellom korleis dei inkluderte bevis i undervisninga. Den eine metoden var å presentera matematiske påstandar saman med beviset. Då kan beviset bidra til verifisering og overtiding, samt systematisering (Furinghetti & Morselli, 2011). Den andre metoden gjekk ut på å involvera elevane i utviklinga av bevis og utfordra dei til å utvikla eigne bevis. Ein slik måte å undervisa på kan i følgje Furinghetti og Morselli (2011) bidra til at elevane får auka matematisk forståing. Her trekk dei inn at dette også heng saman med om ein ser på bevis som eit produkt eller ein prosess.

Vidare viser Furinghetti og Morselli (2011) til Ernest (1988) som peiker dei på tre ulike lærarroller lærarane kan ta. Ein har *tilretteleggjaren* som har som mål å fremja problemløysing, *forklararen* som ønska at elevane skulle utvikla konseptuell forståing og *instruktøren* som ønska å utvikla elevane sine ferdigheiter, slik at dei kan gjera metodane riktig (Ernest, 1988). Det viste seg at den lærarrolla lærarane i undersøkinga ønska å ta ikkje alltid var den dei hadde, sidan dei mellom anna vart påverka av elevane og kva type skule dei arbeida på (Furinghetti & Morselli, 2011).

I ei anna undersøking vart 16 utøvande lærarar på vidaregåande skule intervjuja i tillegg til at dei og gjorde oppgåver om bevis (Knuth, 2002). I undersøkinga ønska Knuth (2002) å sjå på lærarane sine oppfatningar av rolla til bevis, kva lærarane meiner at utgjer eit bevis og kva lærarane opplev som overtidingande. Resultata viser at lærarane nemnde fleire av rollene som blir peika på i litteraturen, mellom anna verifisering, forklaring, kommunikasjon og utvikling

og systematisering av matematikk. Knuth (2002) peiker derimot på at forståing ikkje var noko som blir nemnt av lærarane som ein konsekvens av bevis, noko han meiner at er ei av dei viktigaste rollene pedagogisk. Knuth (2002) koplur rollene forklaring og forståing, men fann at lærarane ser på forklaringsrolla som at bevis forklarar kvifor noko er riktig, utan at dei tenkjer at det skal gi elevane ei djupare forståing. Studia tyda på at lærarane ikkje hadde ei solid oppfatning av kva bevis er (Knuth, 2002). Mellom anna skildra alle bevis som argument som viser sanninga til ei påstand, samtidig som fleire av lærarane uttrykte at dei var usikre på kor generelle bevis var. I tillegg meinte nokon lærarar at det kunne eksistera motdøme, noko som står i kontrast til tanken om at bevis kan verifisera ei påstand (Knuth, 2002).

Borko og Putnam (1996) har ikkje gjennomført ei undersøking sjølv men viser til mange andre undersøkingar i sin artikkel som mellom anna handlar om korleis lærarane sin fagkompetanse spelar inn på implementering av læreplanreformer i undervisninga. Dei hevdar at mange som arbeider med lærarutdanning meiner at for å kunne undervisa i samsvar med reformar som ønsker å leggja til rette for mellom anna djuplæring, må lærarane ha mykje og fleksibel kunnskap innanfor faget dei underviser (Borko & Putnam, 1996). Vidare peiker dei på at fleire studiar tyder på at lærarar med meir emnespesifikk kunnskap fokuserer meir på konseptuelle, utforskningsbaserte og problem-løysings baserte aspekt ved faget (Borko & Putnam, 1996). Borko og Putnam (1996) meiner at dei ulike studiane dei viser til gir grunnlag for å hevda at lærarar må ha rik og fleksibel kunnskap om emnet, for å kunne undervisa på ein måte som er kompatibel med utdanningsreformane, til dømes på måtar som vektlegg resonnering, forståing og det å sjå samanheng mellom idear. Det krev mykje av lærarane å leggja opp til problemløysing og resonnering, sidan dei må evna å respondera på elevane sine idear og kopla dei til viktige matematiske idear der det er høveleg (Borko & Putnam, 1996).

Det har også vore forska på elevane sitt arbeid med bevis. Reid og Knipping (2010) tek opp fleire empiriske funn som omhandlar elevar sitt arbeid med bevis og som har blitt aksepterte påstandar i matematikdidaktikkfellesskapet. Mellom anna ser elevar på empiriske argument som bevis. Eit anna funn er at dei aller fleste elevar slit med å utvikla eigne bevis (Reid & Knipping, 2010, s. 59).

Også Epp (2003) gir uttrykk for at studentar ho har undervist på universitetet har problem i arbeid med bevis, og ho skriv om sine opplevingar frå undervisning heller enn ein forskingsrapport. Epp (2003) meiner at ein av grunnane til at hennar studentar har problem i

arbeid med bevis er at dei ikkje har same oppfatning av dei logiske prinsippa som ho har, og ikkje har intuitiv forståing av desse logiske prinsippa. Epp (2003) viser vidare til ulike undersøkingar på temaet. Ei av desse er Cheng et al. (1986) som har gjennomført ei undersøking der det tyder på at elevane sine resonneringsferdigheiter kan bli betre dersom elevane lærer abstrakte logiske prinsipp samtidig som dei nyttar desse prinsippa i meir konkrete samanhengar. Dette stemmer overeins med det Skott et al. (2018, s. 279) skriv om at matematiske resonnering ikkje er noko elevane kan læra sjølv, dei treng støtte medan dei utviklar evne til å resonnera matematisk.

Hiebert (2007) har gjort ei analyse av kva forskinga seier om NCTM (National Council of Teachers og Mathematics) standardane, og om forskinga tyder på at undervisning som legg vekt på desse legg til rette for læring. Standardane seier noko om kva det er ønskeleg at elevane i USA lærer i matematikkundervisninga og inneheld fleire av dei same aspekta som ein ser i dei norske kjerneelementa, til dømes problemløysing og resonnering (National Council of Teachers of Mathematics, 2008). Analysen blir gjort ved å først sjå på kva forskning seier om tradisjonell matematikkundervisning, som er det eg ønsker å trekka fram. Det kjem fram at forskning tyder på at tradisjonell matematikkundervisning leier til elevar som meistar utrekning og reglar, heller enn andre matematiske prosessar som resonnering og grunngjeving (Hiebert, 2007). Hiebert (2007) viser til Fey (1979) som i si gjennomgang av ulike undersøkingar fann at matematikkundervisning stort sett inneber ein gjennomgang av ny teori som er veldig lærarstyr, med innslag av spørsmål til elevane. Deretter arbeider elevane med oppgåver. Også i Sverige er det vanleg at matematikkundervisninga startar med at læraren presenterer ny teori og viser løysingsmetode for oppgåvetypar kopla til teorien (Bergqvist & Lithner, 2012). Deretter arbeider elevane individuelt eller i grupper for å løysa oppgåver på same form (Bergqvist & Lithner, 2012). Det er difor dette som er meint med tradisjonell matematikkundervisning. Hiebert (2007) peiker på at det er utfordrande å dra direkte kopling mellom undervisning og det elevane lærer, men at elevar lærer det dei får mogelegheit til å læra. Det kan sjå ut som at den tradisjonelle matematikkundervisninga fører til at elevane lærar manipulasjon av symbol og får ei viss forståing av konsept, men at dei ikkje ser dei større samanhengane og får heller ikkje djup konseptuell forståing. I tillegg forstår dei ikkje kvifor dei ulike algoritmane fungerer på trass av at dei meistar å følga reglane og gjennomføra prosedyrar (Hiebert, 2007).

Kapittel 3: Metode

Metodologi tyder forkingstilnæringer, altså måtane som blir nytta for å tileigna seg kunnskap (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 24, 91). Metode vil seie metodar for datainnsamling og analyse, og er ein del av metodologien (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 92). Dette kapittelet vil gå djupare inn på dei metodiske vala som er tekne i denne undersøkinga. Val av forskingsdesign og metode vil i stor grad avhenga av problemstillinga og forskingsspørsmåla (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 57). Først vil undersøkingsdesignet bli skildra, med ei skildring av metode for datainnsamling og grunngjeving for denne. Vidare vil utvalet for undersøkinga bli skildra. Avslutningsvis i kapittelet vil kriterium for vurdering av kvalitet bli presentert og knyt opp mot eiga undersøking, samt at det blir gjennomført ein etisk refleksjon kring kva grep som er gjort i denne undersøkinga for å handla etisk riktig.

3.1 Undersøkingsdesign

Som det kjem fram av problemstillinga og forskingsspørsmåla ønsker eg å få innblikk i lærarane sine haldningar og forståing, samt kva tankar dei gjer seg kring implementering av resonnering og argumentasjon. Undersøkingsdesign og val av metodar for datainnsamling og analyse vil difor veljast for å svara på problemstilling og forskingsspørsmål på beste måte.

I følgje Postholm og Jacobsen (2018) vaks kvalitativ forskning slik me kjenner den i dag fram som ein slags protest mot at kvantitativ, naturvitskapleg forskning kunne gi svar på spørsmål kring «sosiale fenomenar og menneskelig atferd» (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 89). Sidan eg i dette prosjektet ønsker å få eit djupare innblikk i lærarane sine opplevingar og synspunkt har eg valt ei kvalitativ tilnærming på bakgrunn av at ei slik tilnærming legg til rette for å få eit innblikk i lærarane si forståing av røynda (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 99). Ein mykje nytta metode innan kvalitativ forskning er intervjuet, som i følgje Cohen et al. (2011, s. 409) er eit kraftfullt reiskap for forskarar. I det kvalitative forskingsintervjuet er fokuset nettopp på å få fram intervjupersonen sine tankar og opplevingar, ikkje vitskaplege forklaringar (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 20). Difor vel ein gjerne ei intervjuundersøking om ein vil få innblikk i lærarane sine tankar og opplevingar (Nilssen, 2012, s. 21). Krumsvik (2019a) peiker på det at intervjudeltakarar kan kome med nye vinklingar på eit tema som ei styrkje ved intervjuet. I dette prosjektet er det eit mål å få fram lærarane sine tankar kring omgrepa resonnering og argumentasjon, samtidig som det er ønskeleg å få innblikk i lærartenkt læreplan. Det er altså

ønskeleg å få fram korleis lærarane sjølv tolkar læreplanen og let seg påverka av den og kva tankar dei har kring implementering av resonnering og argumentasjon i undervisninga. For å kunne svara på problemstillinga på best måte er det difor valt intervju som metode for dette masterprosjektet.

Forskinsintervju blir gjerne delt inn i tre hovudgrupper, strukturerte, semistrukturerte og ustrukturerte intervju, der semistrukturert intervju er den forma for intervju som blir mest nytta (Krumsvik, 2019a). Det semistrukturerte forskingsintervjuet er strukturert på den måten at ein har tema ein vil komma inn på, samt forslag til spørsmål, samtidig som at det er ope for å endra rekkefølge på tema og spørsmål og gå djupare inn på interessante ting som kjem fram undervegs i intervjuet (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 162). Ein startar med meir generelle nedskrivne spørsmål og kan vidare gå inn på meir konkrete spørsmål som ikkje er nedskrivne men som blir til ut frå det intervjupersonen seier (Krumsvik, 2019a) Denne forma for kvalitativt forskingsintervju blir difor gjerne nytta når ein ønsker å forstå temaet for intervjuet ut frå intervjupersonen sitt perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 46). På bakgrunn av at dette er den forma for intervju som blir mest nytta, samt på grunn av eigenskapane til det semistrukturerte intervjuet er denne intervjumetoden valt for masterprosjektet.

I forkant av intervjuet utarbeidar ein som regel ein intervjuguide, som er eit oppsett for kva som skal spørjast om i intervjuundersøkinga (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 162). Kor mykje intervjuguiden strukturerer intervjuet avhenger av om det er eit ustrukturert, semistrukturert eller strukturert intervju som skal gjennomførast (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 162). I eit semistrukturert intervju vil intervjuguiden innehalda nokre hovudtema og forslag til spørsmål (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 162). I denne undersøkinga vart intervjuguiden utforma med nokon hovudspørsmål og fleire undertema det var ønskeleg å komma inn på under kvart av desse hovudspørsmåla. Hovudspørsmåla vart utforma for å kunne svare på forskingsspørsmåla og problemstillinga. Undertema under kvart hovudspørsmål var tema knytt til hovudspørsmåla, som eg ønska å komma inn på i intervjuet, utan at det nødvendigvis var formulert konkrete spørsmål eller ei bestemt rekkefølge for dei ulike undertemaa. I tillegg var eg open for å komma inn på andre aspekt som kunne komma opp i dei ulike intervjuet. Under utarbeiding av intervjuguide vart rammeverket til Remillard og Heck (2014) nytta for å formulera spørsmål som kunne få fram kopling mellom lærartenkt læreplan og dei andre delane av utvida læreplan. I tillegg vart det lest litteratur om resonnering og argumentasjon for å få meir forståing for konsept, noko Kvale og Brinkmann (2015, s. 141) peiker på som

viktig for å stilla relevante spørsmål. Intervjuguiden vart diskutert med rettleiar, endra på og diskutert med rettleiar att. På grunn av lite erfaring med forskingsintervju valte eg å følga rekkefølga på spørsmåla eg hadde sett opp, samtidig som at dei underliggande temaa vart litt meir frie ettersom at lærarane gjerne dekkja desse undervegs medan dei svara på hovudspørsmålet.

3.2 Utval

Kor mange intervjupersonar som trengs i ei intervjuundersøking er eit vanleg spørsmål. I følgje Kvale og Brinkmann (2015, s. 148) er svaret at ein treng så mange intervjupersonar at ein får svar på det ein ønsker, utan at det er for få eller for mange. For mange intervjupersonar kan føra til at ein ikkje har kapasitet til å analysere all data ein har samla inn grundig nok (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 148). I tillegg blir det peika på at ein vil nå eit punkt, gjerne kalla mettingspunkt, der ein ikkje får ny informasjon sjølv om ein intervjuar nye personar (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 148). For få intervjupersonar kan på den andre sida gjera det vanskeleg å generalisera (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 148). Som også Baker og Edwards (2012) peiker på er det veldig mange faktorar som spelar inn på kor mange intervjupersonar ein bør ha med i undersøkinga, og veldig ulike meininger kring kor mange som er høveleg. Mellom anna vil tid og resursar spela inn. Kvale og Brinkmann (2015, s. 148) meiner at 5-25 intervjupersonar er vanleg i ei intervjuundersøking, og at det dei siste åra har blitt meir verdsett å ha færre intervju for å kunne førebu og analysere intervjuar betre, i staden for å ha veldig mange intervju og ikkje ha tid til å analysere dei grundig. Det er valt å ha fire intervjupersonar i denne undersøkinga, på grunn av avgrensa tid og for å kunne bruka meir tid på planlegging og analysing. I tillegg var talet på intervjupersonar avhengig av kor mange som ønska å delta, og det vart gjort ei vurdering kring å bruka meir tid på å finna intervjupersonar eller å bruka tida på førebuing og gjennomføring av intervjuar.

I kvalitative undersøkingar ønsker ein å få innblikk i og kunnskap om eit fenomen, og i ei intervjuundersøking blir intervjupersonane valt ut frå kva målgruppe undersøkinga ønsker å få informasjon frå (Johannessen et al., 2006). Det å velja ei bestemt målgruppe for å henta data til undersøkinga blir kalla strategisk utveljing (Johannessen et al., 2006, s. 107). Når ein vel intervjupersonar er det dermed ikkje slik at dei nødvendigvis er representative for heile

samfunnet, men ein gjer eit utval på bakgrunn av hensiktsmessigheit (Johannessen et al., 2006, s. 107).

Innanfor målgruppa, som i dette tilfelle er matematikklærarar på vidaregåande skule, set ein seg gjerne fleire utvalskriterier som er med på å avgjera korleis utvalet blir. I denne undersøkinga var eit kriterium at eventuelle intervjupersonar var matematikklærarar som underviser R2 skuleåret 23/24. Det var og ønskeleg at lærarane hadde undervist R2 tidlegare, med førige læreplan LK06, og hadde noko undervisningserfaring. Det var og føretrekt at alle intervjupersonane arbeida på ulike skular. Utval ut frå denne type kriterium blir av Johannessen et al. (2006, s. 109) kalla kriteriebasert utveljing. Johannessen et al. (2006, s. 109) peiker og på det som blir kalla slupmessig utveljing som tyder at utveljinga skjer ut frå kva mogelege intervjupersonar som er tilgjengelege. Mitt utval vart også prega av slik slupmessig utveljing, sidan det vart sendt ut mailar til ulike skular og utvalet vart påverka av kven som meldte interesse for å delta. I følgje Johannessen et al. (2006, s. 111) er det dei kallar bekvemmelegheitsutveljing ein veldig vanleg utveljingsmetode der forskaren gjer utvalet ut frå kva som er enklast. Vidare peiker dei på at dette ikkje er ein ønskeleg metode, sidan det er ønskeleg med eit meir gjennomtenkt utval. Av praktiske omsyn vart eventuelle intervjupersonar i denne undersøkinga valt ut frå geografisk område, som gjerne kan kallast bekvemmelegheitsutveljing, sidan det var eit kriterium at intervjupersonen arbeida på ein vidaregåande skule utan for stor avstand til Bergen.

Deltakarane i undersøkinga vart valt på bakgrunn av at dei underviser R2 skuleåret 23/24, og at dei hadde eit ønske om å delta. Det vart først sendt ut mail til rektorar på mange ulike skular for å få tillating til å ta kontakt med deira lærarar i matematikk R2. Vidare vart eg anten kontakta av lærarar som hadde fått informasjonen frå sin rektor eller så fekk eg tillating til å kontakta lærar i R2 ved den aktuelle skulen. Dei fire lærarane som deltok i intervjuundersøkinga har lang undervisningserfaring i vidaregåande skule, omtrent 13-25 år. Læraren som seinare vil bli referert til med det fiktive namnet Gro har bachelor i matematikk, og deretter PPU (praktisk-pedagogisk utdanning). Dei tre andre lærarane som får dei fiktive namna Nina, Thomas og Knut, har alle studert noko matematikk ved universitetet og vidare tatt PPU og master i matematikdidaktikk. Lærarane har ulik erfaring med R2-undervisning før dette skuleåret, og har hatt R2 frå ein gang og opp til rundt 10 gangar før. Det lærarane har felles er at dei har alle undervist matematikk R2 under førige læreplanen, LK06, minst ein gang, og har R2 etter innføring av LK20 for første gang skuleåret 23/24. Datainnsamlinga til

prosjektet vart gjort i november og desember 2023. Det vart totalt gjennomført fire intervju, med varigheit mellom omtrent 30 minutt og 1 time og 10 minutt. Dei fire intervju vart gjennomført andlet til andlet på skulane der lærarane jobba, i eigna rom slik at intervjuet ikkje vart forstyrra av støy eller andre menneske. Hovudårsaka til at intervju vart gjennomført på skulane var at lærarane ønska det. At det er intervjupersonane som vel kvar intervjuet blir gjennomført er med på å leggja til rette for at intervjupersonane føler seg trygge under intervjuet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 132).

3.3 Analyse

«Å analysere betyr å dele opp i biter eller elementer» (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 219). I analysen bryt ein altså ned datamaterialet i mindre bitar for å kunne framheva det som er av størst interesse. På den andre sida understrekar Kvale og Brinkmann (2015, s. 219) at eit intervju er ei forteljing som heng saman. Dette heng saman med dei etiske refleksjonane eg gjer under, ved at ein ønsker å unngå å attgje utsegn utanfor kontekst slik at dei kan misoppfattast. I følgje Johannessen et al. (2010, s. 231) handlar analyse om å først bryta ned datamaterialet i mindre bitar og ta dei ut av heilskapen for så å danna eit forenkla bilete av røynda frå forskaren sin synsvinkel.

Transkribering

Etter at alle intervju vart gjennomført vart dei transkribert, som vil seie å omformulera intervjuet frå munnleg samtale til skriven tekst (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 205). Sidan intervju vart tatt opp med diktafon var det mogeleg å setja avspelinga på pause og spola fram og tilbake medan intervju vart transkribert for å få med alt som vart sagt. Eg valte å transkribera sjølv i staden for å få hjelp av eit tekstprogram eller liknande, for å nytta dette som ein mogelegheit til å bli betre kjent med datamaterialet som Braun og Clarke (2006) peikar på som første steg i analyseprosessen. I tillegg var dette for å heile tida berre ha det krypterte lydopptaket lagra på sikker stad, og ikkje laste fila opp i eit anna program.

Under transkripsjonen vart lærarane sitert så ordrett som mogeleg, altså vart alle fyllord og gjentakingar tekne med, samt at dialektord vart forsøkt skrive i staden for å omsetja til skriftspråk. Dette var for å gi eit betre bilete av intervju i transkripsjonane slik at nyansar vart beholdt så godt som mogeleg i overgangen frå lyd til transkripsjon. I gjengiving av

lærarane sine utsegn er derimot gjentakningar og fyllord fjerna for å få betre flyt, så lenge det vart rekna å ikkje påverka utsegna nemneverdig. I tillegg er alle utsegn omsett til nynorsk, som eg skriv meir om under etiske refleksjonar.

Koding

Etter transkripsjonen går ein til neste del av analyseprosessen, som i dette tilfelle er koding. Koding er i dag den vanlegaste måten å analysere datamaterialet, etter at ein har gjennomført ei kvalitativ intervjuundersøking (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 226). Koding går ut på å plassere relevante delar av datamaterialet innanfor ulike kodar, der kodane vidare er organisert i ulike overordna tema og eventuelt undertema, for å systematisere datasettet og gjere det enklare å finna dei utsegna som er mest relevante for problemstillinga (Johannessen et al., 2006, s. 164). Det er vanleg å skilja mellom induktiv og deduktiv koding (Patton, 2015, s. 541-543). Deduktiv kvalitativ analyse vil seie å laga kodar ut frå teori og rammeverk medan induktiv koding vil seie å danna kodane ut frå innsamla datamateriale (Patton, 2015, s. 542). Ved induktiv koding ser ein difor etter mønster og samanhengar innanfor eige datamateriale (Patton, 2015, s. 542). Johannessen et al. (2006, s. 164) peiker og på at kodar og tema ut frå forskingsspørsmål og nøkkelomgrep også blir rekna som deduktive.

Programmet Nvivo er nytta i analyseprosessen, som hjelpemiddel for å systematisere datamaterialet i tema, undertema og kodar. Kvale og Brinkmann (2015, s. 226) peiker på at slik bruk av dataprogram i analyseprosessen kan vera nyttig for å gjere arbeidet mindre tidkrevjande, samt at ein har mogelegheit til å skriva ned tankar ein gjer seg opp under analysearbeidet på ein enkel måte.

For å analysere datamaterialet blir det i denne undersøkinga teke utgangspunkt i analysemetoden tematisk analysen som mellom anna blir skildra av Braun og Clarke (2006). Ein av grunnane til å bruka denne metoden er at den er oversiktleg, samt at den i følge Braun og Clarke (2006) er passende dersom ein har lite erfaring med kvalitativ analyse. Braun og Clarke (2006) si skildring av tematisk analyse, skildrar ein induktiv prosess. Patton (2015, s. 543) meiner at det er vanleg å begynna med deduktiv koding dersom ein nyttar eit analytisk rammeverk som er utvikla av andre. Vidare kan ein sjå etter samanhengar og mønster ein ikkje har oppdaga gjennom den deduktive kodinga ved induktiv koding (Patton, 2015, s. 543). I denne studia er det på bakgrunn av dette valt å nytta deduktiv koding frå start og vidare

supplera med induktiv koding, sidan det blir nytta rammeverk av Stylianides (2008) og Remillard og Heck (2014). Det er difor valt å ta utgangspunkt i fem trinns-analyseprosessen til Bingham (2023) som mellom anna kan nyttast til tematisk analyse, i staden for sekstrinns-prosessen Braun og Clarke (2006) skildrar.

I forkant av sjølve kodinga er det i følgje Braun og Clarke (2006) viktig å gjera seg godt kjend med datamaterialet. Ein del av denne prosessen er å transkribera intervjua. I tillegg legg Braun og Clarke (2006) vekt på å lesa gjennom transkripsjonane fleire gonger i forkant av kodinga, samtidig som ein noterer ned tankar ein gjer seg undervegs i gjennomlesinga. Dette vil gi meir oversikt over datamaterialet, og kan difor vera til hjelp undervegs i kodinga. Også Bingham (2023) peiker på dette med å notera seg ned tankar undervegs i analyseprosessen, men peiker på at det gjerne er ein del av alle steg i analyseprosessen, ikkje berre medan ein gjer seg kjend med datamaterialet.

Vidare blir Bingham (2023) sin analyse-prosess skildra, samt at det blir tydeleggjort kva delar av prosessen som blir nytta i analysen for dette prosjektet. Det første steget Bingham (2023) peiker på er å organisera data. Det går ut på å organisera data etter mellom anna datatype, deltakar og tidsperiode. Det blir peika på at dette er særleg viktig for større undersøkingar. Med tanke på at dette er ei relativt lita undersøking, med berre fire intervjudeltakarar, var det tilstrekkeleg å namngi kvar transkripsjonsfil då dei vart lasta opp i Nvivo. Dette gjorde det mogeleg å skilje transkripsjonane frå kvarandre. Det var ikkje nødvendig å sortera data etter type sidan all data i undersøkinga er frå intervju. Sidan filene vart namngitt var dette også tilstrekkeleg til å vita lokasjon for intervjuet og tidspunkt for intervjuet.

Trinn to er å sortera data, som går ut på å laga breie kodar knytt til forskingsspørsmål og relevant teori, altså deduktiv koding (Bingham, 2023). Desse kodane som gjerne blir kalla deskriptive kodar skal tena føremålet med undersøkinga og informasjon som ikkje er relevant kan filtrerast ut i denne fasen (Bingham, 2023).

Trinn tre er open/initiell koding og handlar om å koda datamaterialet induktivt innanfor dei overordna temaa og undertemaa (Bingham, 2023). Forskaren les gjennom datamaterialet og avgjer om relevante delar av datamaterialet skal kodast innanfor eksisterande kodar eller om det skal dannast ny kode. I tillegg blir dei nye induktive kodane plassert innanfor dei breiare overordna og underordna temaa.

Med tanke på at Patton (2015, s. 543) meiner det er fordelaktig å begynna med deduktive kodar når ein nyttar eit rammeverk som er utvikla av andre, vart det i analyseprosessen for denne undersøkinga gått litt utanfor Bingham (2023) sin fem-steps prosess også for steg to og tre. Men som Bingham (2023) også påpeiker er det fullt mogeleg å berre nytta delar av analyseprosessen ho skildrar. Det vart i denne undersøkinga først utvikla overordna tema med grunnlag i forskingsspørsmål og rammeverk, dette vart etter kvart til tre hovudkategoriar. Deretter vart det utvikla underordna kategoriar og kodar, også desse deduktivt, med kopling til rammeverk, forskingsspørsmål og relevant litteratur og teori. Kodar, underkategoriar og tema vart skrivne inn i Nvivo, der det også vart skrivne ned ein grundigare forklaring på kva kvar kode og kategori inneber. Ei slik skildring av tema og kategoriar med grundigare forklaring er noko av det Bingham (2023) meiner bør skrivast ned i fase to og tre. Her vart det endra namn på både overordna kategoriar, underkategoriar og tema fleire gonger, samt at det var ein prosess med å plassera riktige kodar og underkategoriar innanfor riktig tema. Deretter vart transkripsjonane lest nøyare gjennom ein etter ein og relevante utsegn frå intervjuar vart koda i dei eksisterande deduktive kodane dersom dei passa. Om dei utsegna var relevante men ikkje passa inn i dei eksisterande kodane vart det utvikla induktive kodar som vart plassert innanfor passande overordna kategori og underordna kategori. Etter at alle dei fire transkripsjonane hadde blitt analysert vart det lest gjennom alle utsegna som vart koda under kvar kode for å vurdere om dei var koda riktig. Deretter vart det lest gjennom transkripsjonane på ny for å vurdere om noko av det som ikkje var koda burde kodast eller om noko av det som allereie var koda under ein eller fleire kodar, burde kodast under fleire kodar. Som Braun og Clarke (2006) understrekar er ikkje analysen nødvendigvis ein lineær prosess. Så kodar vart endra, og gjerne slått saman eller fjerna undervegs i prosessen med å gå over transkripsjonane og koda utsegn.

Trinn fire går ut på å identifisera mønster, tema og funn, der hovudmålet er å henta ut funna frå analysen (Bingham, 2023). Dette er ein induktiv prosess der forskaren ser over data som vart koda i fase tre og ser etter mønster anten innanfor ei kjelde eller på tvers av kjelder (Bingham, 2023). Tema blir utvikla ved å sjå på mønster som er funne, for å vidare utvikla desse til funn (Bingham, 2023). For dette trinnet er det som vart gjort tettare opp mot Bingham (2023) si skildring ved at det vart lest gjennom det koda datamaterialet for å sjå på likskapar og ulikskapar mellom lærarane, i tillegg til at det vart sett etter tendensar innanfor utsegna til kvar lærar. Dette leia til nokon tema innanfor kvar av dei overordna kategoriane. Vidare vart temaa studert meir for å finna dei faktiske funna frå analysen. Undervegs i denne

prosessen vart det notert ned tankar kring desse temaa og funna, slik Bingham (2023) anbefalar. Mellom anna vart det gjort opp tankar kring likskapar og ulikskapar mellom lærarane og om dette vidare kunne koplart til litteraturen.

Trinn fem er siste del av analyseprosessen til Bingham (2023) og handlar om å kopla teori til dei funna som er gjort og diskutera funna ut frå relevant teori og eksisterande forskning. Bingham (2023) skildrar at det i denne fasen blir nytta både deduktive og induktive strategiar. Det blir utvikla kodar som byggjer på eksisterande litteratur og teoretisk rammeverk. Prosessen er både induktiv og deduktiv ved at ein plasserer data innanfor kodane som er utvikla basert på litteraturen, men dersom funn ikkje passer innanfor litteraturen og teorien ein har, må ein gjerne ta inn fleire teoretiske bidrag for å kunne sjå på desse aspekta ved datamaterialet. Data blir vidare sortert i desse kategoriane som stemmer overeins med litteraturen. Dette kan gi ei oversikt over korleis funna frå analysen passer innanfor konseptet for det teoretiske rammeverket. Det vart i denne undersøkinga ikkje utvikla nye kategoriar basert på litteraturen, mellom anna sidan dei deduktive kodane kategoriane som vart nytta i tidlegare fasar i analysen var basert på rammeverk og relevant teori. På den andre sida vart det i likskap med slik Bingham (2023) skildrar det leita etter likskapar og skilnadar mellom funna frå analysen og den eksisterande litteraturen, for å kunne diskutera funna i lys av teori og eksisterande forskning. I tillegg vart det som Bingham (2023) peikar på nødvendig å trekka inn fleire teoretiske bidrag for å kunne diskutera alle aspekta frå analysen det var ønskeleg å trekka fram.

3.4 Kvalitet i forskinga

Det er fleire kriterium som avgjer kvaliteten på ei intervjuundersøking og kvaliteten på dei ulike delane av undersøkingsprosessen påverkar kvarandre. «Kvaliteten på det originale intervjuet er avgjørende for kvaliteten på den senere analyseringen, verifiseringen og rapporteringen av intervjuet» (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 193). Det er derimot ikkje semje kring kva aspekt som bør bli vektlagt for å evaluera kvalitative intervjuundersøkingar (Johannessen et al., 2006, s. 198). På trass av at det er ulike meiningar om kva for nokre aspekt som er viktigast å sjå på for å vurdera kvalitet i kvalitative undersøkingar, er det ikkje slik at dette er totalt skilde aspekt. Tvert imot er fleire av dei tett kopla saman (Krumsvik, 2019b).

Innanfor kvantitativ forskning blir omgrepa reliabilitet og validitet mykje nytta for å vurdere kvalitet, og Krumsvik (2019b) nyttar desse omgrepa også for å skildra kvalitet i kvalitativ forskning, men då med litt anna tyding. I kvantitativ forskning handlar reliabilitet mykje om å kunne etterprøva resultatata, som er veldig vanskeleg i kvalitativ forskning (Krumsvik, 2019b). I kvalitativ forskning handlar reliabilitet meir om å vera grundig med å forklara kva ein har gjort, slik at det blir tydeleg for lesaren, utan at nokon nødvendigvis kan etterprøva resultatata (Krumsvik, 2019b). Validitet i kvalitativ forskning handlar om at det som ein skulle undersøka er det som faktisk har blitt undersøkt, og er tett knytt til reliabiliteten (Krumsvik, 2019b). Ein skil mellom intern og ekstern validitet. Intern validitet handlar om at funna frå ei undersøking stemmer overeins med teoretisk rammeverk og tidlegare forskning (Krumsvik, 2019b). Skrive på ein annan måte går det ut på at det er samsvar mellom røynda ein undersøker og det teoretiske grunnlaget for undersøkinga (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 229). Postholm og Jacobsen (2018, s. 229) peiker og på at intern validitet handlar om spørsmålet kring om ein har tilstrekkeleg grunnlag for å uttala seg om årsak-verknad samanheng ut frå undersøkinga som er gjennomført. Ekstern validitet handlar om at funna som er gjort i ei undersøking kan overførast til andre situasjonar (Krumsvik, 2019b).

Lincoln og Guba (1985, s. 219) meiner derimot at reliabilitet og validitet ikkje er den beste måten å evaluera kvalitative undersøkingar. Dei viser til Guba (1981, s. 80) som skriv om naturalistiske undersøkingar og meiner at det er betre å nytta aspekta, pålitelegheit (engelsk: dependability) i staden for reliabilitet, truverd (engelsk: credibility) i staden for indre validitet, overførbarheit (engelsk: transferability) i staden for ekstern validitet og bekreftbarheit (engelsk: confirmability) i staden for objektivitet, for å evaluera kvalitet i slike undersøkingar. Johannessen et al. (2006, s. 198) meiner at måten ein evaluerer kvalitative undersøkingar avhenger av fleire faktorar og at det nokon gonger kan vera passande å bruka reliabilitet og validitet medan det andre gonger kan vera meir aktuelt å nytta aspekta Guba (1981) trekk fram. På trass av at Guba (1981) skriv spesifikt om naturalistiske undersøkingar viser også Tierney og Clemens (2011) til desse fire aspekta når dei skal skildra kvalitet i kvalitative undersøkingar. Eg vel difor å støtta meg på Guba (1981) og gå djupare inn på dei fire kriteria pålitelegheit, truverd, bekreftbarheit og overførbarheit nedanfor for å vurdere kvalitet i denne undersøkinga.

3.4.1 Pålitelegheit

Pålitelegheit er omtrent det same som reliabilitet, men med litt andre krav (Johannessen et al., 2006, s. 198-199). Grunnen til det er at krava til reliabilitet i kvantitative undersøkingar ikkje vil vera førehaldsmessige for kvalitative undersøkingar, mellom anna fordi dei er kontekstavhengige og det vil difor vera nær umogeleg å «attskapa» undersøkinga for ein annan forskar, som er eit mål innanfor kvantitativ forskning (Johannessen et al., 2006, s. 199). I kvalitativ forskning kan forskarar auka pålitelegheita ved å rapportera heile forskingsprosessen på ein grundig måte samt gi grundige skildringar for å setja lesaren inn i konteksten kring kvart intervju (Johannessen et al., 2006, s. 230). I tillegg kan studia få auka pålitelegheit dersom det er synleg at forskaren kjem med refleksjonar kring si påverknad på dei ulike delane av undersøkinga (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 224). Det er difor forsøkt å forklara dei ulike stega som er gjort i undersøkingsprosessen tydeleg for å gjera undersøkinga mest mogeleg påliteleg.

Sidan pålitelegheit er tett knytt til reliabilitet ser eg det som relevant å og trekka inn eit av aspekta ved intervjureliabilitet som Krumsvik (2019a) peiker på. Aspektet går ut på at spørsmåla er formulert på ein slik måte at intervjupersonane forstår dei, og kan svara på det intervjuaren ønsker at dei skal svara på (Krumsvik, 2019a). For å gjera det lettare for intervjupersonane å forstå spørsmåla bør dei heller ikkje vera for lange (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 194). Kvale og Brinkmann (2015, s. 201-202) understrekar også at leiande spørsmål ikkje nødvendigvis er ein dårleg ting i intervju, då leiande spørsmål kan nyttast for å sjekka om intervjuaren har forstått intervjupersonen riktig. Dette kan løysa opp i misoppfatningar mellom intervjuar og intervjuperson.

3.4.2 Overførbarheit

Overførbarheit innanfor kvalitativ forskning har ikkje same tyding som generaliserbarheit innanfor kvantitativ forskning, der målet er at forskinga skal vera uavhengig av kontekst. Overførbarheit handlar om i kor stor grad funna frå ei undersøking kan overførast til andre situasjonar (Johannessen et al., 2006, s. 200). «En undersøkelses overførbarhet dreier seg om hvorvidt en lykkes i å etablere beskrivelser, begreper, fortolkninger og forklaringer som er nyttige i andre sammenhenger» (Johannessen et al., 2006, s. 200). Overføringsverdien er gjerne mindre dersom utvalet er lite (Krumsvik, 2019b).

3.4.3 Truverd

Truverd er tett knytt til indre validitet som handlar om at undersøkinga har undersøkt det den var meint å forska på (Johannessen et al., 2006, s. 199). Vidare skriv Johannessen et al. (2006, s. 199) at målet er at funna som er gjort i undersøkinga er representative for røynda og at dei reflekterer det studia hadde til hensikt å undersøka. I følgje Krumsvik (2019b) går intern validitet ut på at funna som er gjort i den aktuelle undersøkinga stemmer overeins med det teoretiske rammeverket. To av grepa Lincoln og Guba (1985, s. 301) peiker på at ein kan gjera for å gjera det meir sannsynleg å få truverdige funn er triangulering og det som blir omsett til vedvarande observasjon av Johannessen et al. (2006, s. 199). Slik vedvarande observasjon var ikkje aktuelt i denne studia då det vart valt å gjennomføra intervju og tidsavgrensingar ikkje tillet fleire intervju med lærarane over ein lengre tidsperiode. Det vart difor utført ei tverrsnittsundersøking, som vil seie at datainnsamlinga er gjennomført på eit spesifikt tidspunkt, og ikkje over tid (Johannessen et al., 2006, s. 74). Dette var også noko intervjupersonane vektla, at svara deira var påverka av klassen dei hadde på tidspunktet intervjuet vart gjennomført.

3.4.4 Bekreftbarheit

At ei undersøking har god bekræftbarheit, eller overeinsstemming, tyder at funna som blir rapportert stemmer overeins med det resultatet av forskinga faktisk seier og røynda, ikkje subjektive tolkingar som er gjort av den som har gjennomført undersøkinga (Johannessen et al., 2010, s. 232). For at utanforståande skal kunne evaluera dette må alle val som er tekne undervegs i undersøkingsprosessen gjerast greie for og grunngjevast (Johannessen et al., 2010, s. 232). I tillegg bør gjerne meiningar og haldningar som kan ha påverka forskaren sine tolkingar koma fram i rapporteringa (Johannessen et al., 2010, s. 232). Bekreftbarheit handlar om at dei som les rapporten frå undersøkinga kan følga tankerekka til den som har gjennomført studia, frå å ha data, til å analysera desse dataa og vidare treffa ein fornuftig konklusjon ut frå dataa og teori (Tierney & Clemens, 2011).

3.5 Etiske refleksjonar

Når ein gjennomfører ei intervjuundersøking er det mange etiske omsyn ein må gjera under planlegginga av undersøkinga, undervegs i datainnsamling og etter datainnsamling (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 97). Ein kan dela forskningsetiske omsyn inn i dei tre områda, etikk

innanfor forskingsfellesskapet, beskyttelse av deltakarane og verdien og rolla til forskning i samfunnet (Tangen, 2014). I følge Fontana og Frey (2005) er det viktig å ta spesielt omsyn til dei som deltek i undersøkinga. Under går eg litt djupare inn på nokon av områda det er viktig å tenka gjennom for å verna om deltakarane i undersøkinga.

3.5.1 Informert samtykke

Informert samtykke går ut på at dei som deltek i undersøkinga har fått tilstrekkeleg med informasjon til å ta eit informert og gjennomtenkt val kring om dei ønsker å delta, samt at dei deltek frivillig (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 104-105). At deltakarane deltek frivillig vil seie at dei ikkje opplev noko press om å delta eller opplev at det kan få negative konsekvensar om dei ikkje deltek (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 248). Postholm og Jacobsen (2018, s. 249) meiner at ein viktig del av informert samtykke er at dei eventuelle deltakarane forstår informasjonen dei får før dei avgjer om dei skal delta, noko som er vanskeleg å undersøka. På bakgrunn av tanken om informert samtykke, vart det utforma eit infoskriv frå ein mal frå Sikt (2023) som vart sendt ut til lærarar som viste interesse for å delta. I tillegg fekk lærarane spørsmål om dei hadde lest infoskrivet før dei signerte samtykkeskjemaet og tilbod om å lesa gjennom det ein gang til i papirform. Ei samanfating av infoskrivet vart og gjennomgått i forkant av intervjuet.

3.5.2 Konfidensialitet

Konfidensialitet i intervjuundersøkinga handlar om at personopplysningane til deltakarane berre er tilgjengelege for dei som har tilknytning til prosjektet og at desse opplysningane ikkje vert spreidd (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 250-251). Dette inneber mellom anna at ein har ein sikker måte å lagra personopplysningane på (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 250). I tillegg går konfidensialitet ut på at det blir gjort tiltak for at enkeltpersonar ikkje skal kunne kjennast att i den utjevne rapporten (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 251). I denne undersøkinga er difor alle namn fiktive, for å oppretthalda konfidensialiteten. Kvale og Brinkmann (2015, s. 106) peiker på at eit problem med konfidensialiteten er at det er vanskeleg å verifisera om intervjuaren har tolka det som kjem fram i intervjuet slik det er meint, sidan intervjupersonane ikkje skal kjennast att i publikasjonen.

Med omsyn til konfidensialiteten vart lydopptak kryptert og lagra på Universitetet i Bergen sin sky-teneste OneDrive, som er i tråd med Universitetet i Bergen sine retningslinjer for

lagring av personopplysningar som ikkje er særleg sensitive (Universitetet i Bergen, 2023). For å sikra konfidensialitet vart heller ingen personlege opplysningar skrivne ned under transkripsjonen, og korkje namn på personar eller skule vart nemnt i nokon av intervjuar. Eit anna grep som vart gjort for å sikra konfidensialiteten er at på trass av at intervjuar vart forsøkt transkribert utan å gjera mykje om på talespråket, er alt som blir gjengjeve i rapporteringa omset til nynorsk for å sikra at ingen av intervjudeltakarane kan kjennast att på bakgrunn av dialekt.

3.5.3 Konsekvensar

Eit anna aspekt som er viktig å tenkja over er kva konsekvensar deltaking kan ha for eventuelle deltakarar (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 107). Eventuelle fordelar med å delta bør vera større enn eventuelle ulemper ved å delta (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 107). Fleire av lærarane uttrykte at dei håpa at deltakinga kunne bidra til at dei måtte tenka litt meir gjennom vala dei tek og kva tankar dei har kring temaet resonnering og argumentasjon. I informasjonsskrivet lærarane fekk tilsendt på førehand stod det og omtrentleg kor mykje tid det var venta at intervjuet ville ta, slik at dei kunne ta ei vurdering på om eventuelle fordelar kunne vegast opp mot tida dei ville bruka på deltakinga. På bakgrunn av at lærarane ikkje skal kunne kjennast at i publikasjonen og at det ikkje var veldig personlege spørsmål i intervjuet, ser eg ingen store negative konsekvensar deltaking kan ha for lærarane i form av det dei deler.

3.5.4 Krav til å bli framstilt riktig

Postholm og Jacobsen (2018, s. 251) legg og vekt på at deltakarane har eit krav om å bli framstilt riktig, som vil seie at rapporten framstiller resultatata på ein slik måte at deltakarane sine meininger og synspunkt kjem riktig fram og at resultatata blir gjengjeve i ein riktig kontekst. Dette må ein spesielt tenke på sidan ein vel ut nokre fokusområde i rapporteringa, at resultatata likevel blir gjengjeve på ein så fullstendig måte som mogeleg (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 251-252). Eg valte difor å prøva å tolka svara lærarane ga undervegs i intervjuet, for å sjå om eg forstod riktig og få fram kva dei meinte tydlegare. Slike spørsmål som kan vera med på å avklara kva deltakarane meiner og unngå eventuelle misforståingar kan vera med på gi eit sikrere grunnlag for analysen (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 193-194).

Kapittel 4: Resultat

Resultatkapittelet er delen der funna som er gjort i undersøkinga blir presentert. I dette kapittelet vil eg starta med å presentera kodar, undertema og tema som er resultatet av kodeprosessen. Vidare vil eg presentera hovudfunna frå kvart hovudtema, ved å oppsummera det som kom fram i intervju, samt ta med døme der det er passende.

4.1 Kodar

Tema	Underkategori	Kode
Forståing og haldningar	Haldningar	Positive haldningar
		Negative haldningar
	Oppfatning av omgrep	Resonnering
		Argumentasjon
		Bevis
		Generalisering
		Grunngjeving
		Samanheng mellom omgrep
	Roller	Verifikasjon
		Forklaring
		Utforsking
		Systematisering
		Kommunikasjon
		Intellektuell utfordring
Implementering og operasjonell læreplan	Elevane i møte med resonnering og argumentasjon	Elevar si forståing
		Innstilling
	Oppfatning av implementering	Grad av implementering
		Implementerings metodar
		Pedagogiske handlingar
		Utfordringar
		Vurderingssituasjonar
Utvida læreplan	Forståing av læreplanen	Forventningar til elevane
		Skilnad mellom LK20 og LK06
		Tolking
	Påverknad frå offisiell læreplan	Eksamen
		Kjerneelement
		Kompetansemål
	Tankar kring og påverknad frå instruksjonsmateriell	Lærebok
		Andre undervisningshjelpemiddel

Figur 4.1: tema, underkategoriar og kodar

4.2 Haldningar og forståing

4.2.1 Lærarane si forståing av omgrepa

Resonnering

«Resonnering handlar jo på ein måte om å sjå samanhengane tenker eg og kunne trekka slutningar ut frå noko som du veit på ein måte skal stemma eller ja frå eit utgangspunkt» (Nina). Som me ser legg Nina vekt på at det å resonnera handlar om å sjå at ting heng saman og trekka ei slutning ut frå eit gitt utgangspunkt. Det kan sjå ut som at lærarane i det store og heile er einige i at det å resonnera handlar om å komma fram til ein samanheng eller trekka ein slutning, men dei formulerer det på ulik måte og vektlegg litt ulike aspekt. Nokon av lærarane legg vekt på at resonnering er ein tankeprosess og at det handlar litt om å prøva seg fram, som kjem fram i utsegna under.

Knut: Men ofte så kan det vera sånn at det berre hjelp deg, meir som eit sånt mentalt tankekart. Du sit nesten å «drodla» sant for å sjå om du finne løysinga. Også plutsleg ser du at sånn må det vera sant, eller så er du heilt på ville vegar og ser at denne metoden fungerer ikkje. Så må du spola tilbake og prøva noko nytt.

Slik eg tolkar Knut ser han resonnering som ei hjelp for eleven sjølv medan oppgåvene blir vanskelegare, ved at tankane blir skrivne ned eller strukturert på annan måte. Ut frå måten Knut skildrar resonneringsprosessen kan den gjerne og oppfattast som kreativ, ved at ein prøver seg fram for å sjå kva som fungerer.

Både Thomas og Knut legg vekt på at resonnering også handlar om at elevane må kunne nytta kunnskapen dei allereie har i problemet dei skal løysa. «Men det kan vera at sånn som i at ein knyt den teorien ein skal ha jobba med eller jobbar med til problem som skal løysast då» (Thomas). Ei slik deduktiv innstilling til resonnering kjem og fram i Nina si skildring av resonnering over, ved at også ho legg vekt på at elevane skal trekka ei slutning på bakgrunn av noko dei veit er riktig.

Thomas: resonnering, det kan vera at ein diskuterer eller finn ut av ein idé som ein til dømes knyt til eit problem som ein tenkjer, dette kan vera ei moglegheit for å komma

vidare, utan at ein nødvendigvis skriv ut heile ideen og sjekkar det. Men ein tenkjer ut frå det ein veit og det ein kjenner så prøver ein å tenkje kva er det som er matematikken her og kva er det som eg kjenner som gjer at ein kan løysa problemet.

Også i denne utsegna legg Thomas vekt på dette med å bruka kunnskapen ein har. I tillegg legg han vekt på dette med å utvikla ein idé. Thomas meiner at resonnering mellom anna handlar om å utvikla og bygga opp under denne ideen, ved å grunngje den ved hjelp av kjent kunnskap utan at ein nødvendigvis fører eit stringent bevis med all nødvendig argumentasjon.

Argumentasjon

Lærarane skildrar argumentasjon på ulike måter, og under vil eg difor trekka fram ulike aspekt som er verd å merka seg ved lærarane si forståing av omgrepet argumentasjon. Thomas ser på argumentasjon som ein prosess, frå utgangspunktet og all grunngjeving fram til ein har vist ein samanheng eller eit konsept.

Thomas: [...] men ein argumentasjon det er liksom alt elevane gjer frå dei får ei oppgåve til dei har eit svar. Alt som er mellom den fasen som er å forstå problemet så liksom, så er argumentasjonen all dokumentasjon på korleis du meiner ting skal løysast fram til du har eit svar.

Knut knyt argumentasjon tett opp mot resonnering og ser på argumentasjon som ei form for resonnering, som er mindre formelt enn eit bevis. Det ser difor ut til at også Knut ser på argumentasjon som ein prosess slik Thomas gjer. Gro ser på den andre sida på argumentasjon som ein del av eit resonnement eller eit bevis, heller enn ein prosess i seg sjølv. «Ja, og i ein resonnering så må du jo ta nokon argumentasjonar undervegs» (Gro). Eg opplev på bakgrunn av dette at lærarane ikkje skil veldig tydeleg mellom argumentasjon og resonnering nødvendigvis. På den andre sida understrekar Thomas at han opplev at resonnering og argumentasjon har litt ulike tyding, og uttrykker dette ved at han opplev at argumentasjon handlar om å kommunisera måten ein gjer ting på og støtta opp under den med gode argument medan resonnering meir er tanken, og det som skjer inne i hovudet til den som arbeider.

«Men desse omgrepa dei er jo veldig sånn like men sidan i mine timar, det er jo veldig mykje konkrete problem og oppgåver, så då brukar eg ordet argumentasjon eller seier då at elevane

må argumentera for svaret» (Thomas). I denne utsegna snakkar Thomas om bevis og argumentasjon og det kjem fram at han knyt argumentasjon meir til konkrete oppgåver og at det ofte handlar om å argumentera for eit svar. Han knyt dette gjerne difor mot meir konkrete tal, at argumentasjon ikkje nødvendigvis må vera veldig generelt.

«Argumentasjonen er vell på ein måte, altså det er jo grunngjevinga di for at ja for at det heng saman som det gjer» (Nina). Som me ser knyt Nina argumentasjon til grunngjeving, det å grunngje ei samanheng. Også fleire av dei andre lærarane trekk inn omgrepet grunngjeving, mellom anna er dei opptekne av at elevane skal grunngje det dei gjer medan dei løyser oppgåver. «Så det tenkjer eg sånn, resonnering det er jo då at, altså dei tankane, den grunngjevinga der må jo henga saman sånn som me har lært det» (Thomas). Som utsegna viser trekk også Thomas inn «grunngjeving», men då i samband med resonnering.

Bevis

Lærarane ser på bevis som noko som er meir formelt og at det handlar om generalisering. Fleire peiker og på at bevisføring krev eit matematisk språk og korrekt formulering. Medan dei tenkjer at resonnering og argumentasjon kan omhandla både spesifikke oppgåver og meir generelle konsept, handlar bevis om å visa at noko heilt generelt stemmer innanfor gitte forutsetningar.

«Og bevisføringa i matematikken er jo på ein måte den rekka av logiske slutningar som du på ein måte etablerer frå eit utgangspunkt til du ja, trekk den siste slutninga» (Nina). Denne definisjonen liknar Nina sin definisjon av omgrepet resonnering, men inneheld også dette med logiske slutningar. Det blir tydeleg at Nina er oppteken av at alle overgangar i eit bevis må følgja logisk frå utgangspunktet til neste steg fram til konklusjonen.

Fleire av lærarane peiker og på at bevisføring gjerne krev det Knut kallar for «eit triks» og Nina kallar for «den lure tingen». Fleire av lærarane meiner at bevis gjerne krev ein litt finurleg overgang, og dei opplev at dette ofte kan vera utfordrande for elevane.

Knut: Og så må du, i alle fall når du skal ha sånn bevisføring då. Det er jo alltid det vanskelegaste for det inkludere jo ofte at du gjer eit eller anna triks eller eit eller anna

sånn lurt. Og det krev mykje trening og ganske djup forståing for å kunne sjå det berre ut i frå problemstillinga utan noko rettleiing for å komma i mål.

Nina: men også litt sånn metodar ein brukar som ein som regel ikkje kjem på av seg sjølv. Sånn at du tilpassar uttrykk ved å legge til og trekke frå same tingen og ein del sånne ting då som dei vanlegvis ikkje kjem på. Men at de lærer litt sånn dei lure tinga som ein kan gjera.

Over ser me at både Knut og Nina legg vekt på ein slik bevisidé, som elevane gjerne slit med å komma på. Dei meiner at dette er noko dei må trena på for å læra det, samt at Knut påpeiker at det krev ei djupare forståing.

Thomas: Mange av dei tinga som kan bevisast handlar veldig mykje om sånn algebramanipulasjon, så det handlar jo om at du har ein idé om kva du startar med også har du en idé om kvar du vil hen og mellom der så må du på ein måte få dette til å stemme med algebraen. Og det er jo veldig fint å kunne alle desse triksa og vera god og stødig i algebra.

Også Thomas trekk inn desse «triksa», men trekk og inn dette med at mange av bevisa elevane møter i vidaregåande skule dreier seg om algebramanipulasjon og krev at elevane meistrar dette. Også Knut peiker på dette med at arbeid med resonnering, argumentasjon og bevis ofte krev at elevane meistrar algebra.

Ulike bevisteknikkar kjem og opp når det er snakk om bevis, mellom anna induksjonsbevis, direkte bevis, indirekte bevis og kontrapositivt bevis. Induksjonsbevis vart nemnt av alle lærarane og blir peika på som ein viktig bevisteknikk i R2 matematikken. På trass av at fleire av lærarane er opptekne av desse bevismetodane, meiner Knut at arbeid med bevis er noko av det einaste i skulematematikken som ikkje inneber ein algoritme elevane må følge.

Knut: Så det er veldig lite trening i å tenka utanom desse algoritmane og der er bevisføring viktig sant for då, det er liksom det einaste me gjer som ikkje er heilt sånn oppskrift då.

Mellom anna meiner Knut at slike «triks» ein gjer i arbeidet med bevis krev at ein tenkjer utanfor boksen, og gjerne må gjera noko meir kreativt.

Generalisering

Omgrepet generalisera vert trekt inn av fleire av lærarane og dei knyt det å generalisera tett opp mot resonnering, argumentasjon og bevis, og gjerne spesielt bevis som nemnt over. «Så må dei kunne ikkje berre sånn seie at det passer med dei og dei tala dei må jo kunne vise det heilt generelt» (Nina). Eg forstår det slik at det lærarane legg i å generalisera er å overføra frå spesifikke tilfelle til det heilt generelle som er uavhengig av bestemte tal og kontekstar. Dei ønsker også at elevane skal forstå den generelle samanhengen bak ei oppgåve og nytta det på andre problem og i nye situasjonar. Thomas legg og spesielt vekt på dette med generalisering og overgangen frå det spesielle til det generelle.

Thomas: Det føler eg det er mykje god matematikk som ligger i ein sånn, den overgangen å gjera ting, ja visa at ting gjeld generelt då. Så der, men eg gjer jo mykje det same, det kunne jo vore kalla for resonnering og, men heilt sånn konkret å jobba med den overgangen å prøve å vise at ting gjelder generelt er jo bra matematikk tenkjer eg.

4.2.2 Haldningar

Alle lærarane meiner at det å kunne resonnera og argumentera er veldig viktig i matematikken og at det er dette matematikk i røynda handlar om. «Ja eg tenkjer det er eit av dei viktigaste hovudelementa sånn rangeringsmessig. Det er vanskeleg å sjå føre seg at ein skulle gjort så mykje matematikk utan, så det er litt sånn sjølvstøtt også» (Thomas).

På den andre sida gir fleire av lærarane uttrykk for at det ikkje nødvendigvis alltid er like enkelt å gjennomføra aktivitetar som inkluderer resonnering og argumentasjon i klasserommet. Noko av det som gjer at lærarane gir uttrykk for at dei ikkje ønsker for mykje fokus på resonnering og argumentasjon, på trass av at dei meiner det er veldig viktig, er at nokon av lærarane opplev at det ikkje er det mest gunstige for alle elevane og at ikkje alle elevane er like mottakelege for denne typen undervisning. «Eg trur det kan virke for overveldande og forvirrande for dei svakaste elevane. Og støy sant, for dei er berre opptatt av

å læra å gjera utrekningar, ferdig arbeid» (Gro). Gro meiner at for mykje fokus på resonnering og argumentasjon kan vera eit uromoment for nokon av elevane, særleg dei som er innstilt på å læra seg metodar og algoritmar og tenkjer at det er det matematikk handlar om.

Nokon av lærarane gir og uttrykk for at dei meiner at resonnering og argumentasjon passar best for dei som treng meir utfordring, og at grunnleggande ferdigheiter må meistrast før ein kan gå vidare til resonnering og argumentasjon. Dette kjem mellom anna fram ved at Knut understrekar at grunnleggande kompetanse innan til dømes algebra må vera på plass før elevane kan bli utfordra på resonnering og argumentasjon.

Knut: Så du må liksom for det fyrste få grunnferdigheitane på plass og det manglar jo ofte, sant drilla dei i sånn «basic» algebrakunnskapar og få det på plass fyrst og så kan det andre komma sant.

4.2.3 Funksjonane til resonnering, argumentasjon og bevis

Lærarane er opptekne av at resonnering og argumentasjon skal bidra til å sjå samanhengar og grunngje at noko stemmer. Dei legg også særleg vekt på at arbeid med resonnering og argumentasjon kan bidra til meir forståing.

Nina: Du får jo ei djupare forståing jo meir samanhengar du ser og jo meir du ser korleis ting er knytt saman og du kan til dømes bevisa ting på forskjellige måtar og komme fram til same resultat og det er jo veldig bra viss de klarer det sant.

At utvikling av evner til resonnering og argumentasjon skal bidra til å sjå samanhengar mellom matematiske konsept og få djupare forståing er noko alle dei fire lærarane peiker på. Under får me eit innblikk i kva Nina legg i det å sjå samanhengar.

Nina: men sjå strukturen då, den strukturelle samanhengen. Det er jo det som er viktig tenkjer eg. Sjå at det er mønster og samanhengar og at ingen ting er sånn isolerte ting.

Spesielt Gro nemner at omgrepet «utforsking» er noko ho forbind med den nye læreplanen. «Og for å utforske så må ein resonnera og argumentera og sikkert gjennomføra eit par bevis» (Gro). Også fleire av dei andre lærarane opplev at det å utforska er tett knytt opp mot resonnering og argumentasjon, ved at ein må resonnera seg fram til ei løysing og argumentera

for val og løysing medan ein utforskar. Det såg me mellom anna av Knut si skildring av resonnering, at ein gjerne prøver seg litt fram for å finna ein metode som fungerer.

Lærarane er opptekne av at det er viktig å visa at det eksisterer bevis bak formlane elevane har lært tidlegare og skal læra. «Ehh så det er jo, ja så det er jo abstrakt, altså det er jo for å bevise de setningene vi har brukt gjennom 13 år med skolegang» (Gro). Det kjem fram av utsegna at Gro er oppteken av at ting som tidlegare berre har blitt antekte at stemmer no skal bevisast. Lærarane legg og vekt på at det å bevisa formlar er med på å gjera det tydeleg at det er ei grunngeving bak formlane, at det er ei større samanheng.

Thomas knyt argumentasjon tett til kommunikasjon, sidan argumentasjon i matematikken handlar om å argumentera for sin måte å løysa eit problem på, og måten dette blir kommunisert til andre er viktig, anten det er munnleg eller skriftleg. I tillegg knyt han kommunikasjon til resonnering og argumentasjon, ved at det er viktig for å klara å kommunisera eigen tenkemåte. «Og elevar som er gode til å resonnera eller som får det til, dei klarer også å få kommunisert korleis dei tenkjer på ein eller annan måte då» (Thomas). Det kan sjå ut som at Thomas tenkjer at det er ei gjensidig avhengigheit mellom kommunikasjon og resonnering og argumentasjon, ved at ein må kunne kommunisera for å leggja fram resonnementet eller argumentasjonen sin, i tillegg til at ein gjerne kommuniserer tankane sine betre om ein meistrar det å resonnera.

Som eg skreiv tidlegare er mi oppfatning at lærarane har ei haldning om at resonnering og argumentasjon kan vera nyttig for alle, på trass av at nokon av lærarane meiner at nokon elevar opplev det som veldig vanskeleg. Lærarane ser på arbeid med resonnering og argumentasjon som ei utfordring for elevane, noko som gjerne utfordrar forståinga deira og «pushar» dei utover det å følgja algoritmar og nytta formlar.

Thomas: Så det er jo alltid ein sånn, ein står jo i ei sånn blanding mellom å læra elevane og gi dei masse oppgåver som du viser korleis skal løysast og så skal dei herme etter. Som mange elevar lærer masse av og dei får gjort masse og det er sånn veldig mange elever er vant til å jobbe og liker å jobbe. Men viss ein skal utfordre det synet og gjera noko anna enn at både timen og liksom det her blir berre oppgåveløysing med lærareksempel som blir etterfølgt av like oppgåver og så til slutt

et eller annet som er litt meir ulikt, så trur eg det er veldig lurt å tenke at elevane må bli utfordra på å grunngje, resonnere og argumentere då.

Ut frå utsegna kan det sjå ut som at Thomas meiner at arbeid med resonnering og argumentasjon er ein måte å utfordra elevane meir enn det han ser på som meir tradisjonell undervisning gjer. I tillegg gir han uttrykk for at aktivitetar som inkluderer resonnering og argumentasjon kan fungera som ei variasjon frå undervisning prega av lærardøme og arbeid med tradisjonelle oppgåver, der elevane følgjer ein metode.

4.3 Utvida læreplan

4.3.1 Påverknad frå offisiell og utvida læreplan

Alle dei fire lærarane uttrykker at dei ikkje vert direkte påverka av kjerneelementa i LK20 (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b) i veldig stor grad i planlegging og gjennomføring av undervisning. På den andre sida opplev dei at matematikk R2 kanskje er det emnet der det er enklast å kopla undervisninga til kjerneelementa, men at argumentasjon og resonnering er ein viktig del av undervisninga uavhengig av om kjerneelementa er ein del av læreplanen eller ikkje.

Gro: Heilt ærleg så har eg kanskje ikkje, altså når det er første gang eg har ny læreplan så er ein jo kanskje litt meir tru til boka enn når ein ja. Men ja no er jo dette [viser til boka] ei tolking av dei kjerneelementa sant så eg bruker jo mykje av dei, den kronologien som er her, også tenker eg at neste gang eg eventuelt har R2 igjen så vil eg sikkert sjå andre ting som me kunne gjort på ein annan måte, eller gjort det på min måte på ein måte sant.

Som me ser frå utsegna til Gro, støtter ho seg meir på boka enn læreplanen, og peiker på at ein av grunnane til at ho støtter seg mykje til boka er at det er første gang ho underviser matematikk R2 etter innføring av LK20. Det går igjen at dei fire lærarane gir uttrykk for at dei gjerne nyttar læreboka aktivt i planlegging og gjennomføring av undervisninga heller enn å støtta seg berre på læreplanen. Dette ser ein mellom anna på spørsmål om korleis dei vel bevis som dei skriv opp på tavla. «følger litt kva boka legg opp til at eg, men av og til tar eg nokon sånne bevis som ikkje står i boka fordi eg syns det er viktig og» (Nina). Dei lener seg derimot

ikkje berre på eit læreverk som me ser i utsegna over, fleire av lærarane hentar til dømes oppgåver frå andre bøker.

Lærarane som vart intervjuja nyttar to ulike læreverk. Gro nyttar eit læreverk medan dei tre andre lærarane nyttar eit anna læreverk. Dette er ein av grunnane til at lærarane ikkje er samde i kor godt læreverket dei nyttar legg opp til resonnering og argumentasjon. Lærarane gir uttrykk for at dei gjer ei vurdering at læreboka, så på trass av at dei støtter seg mykje på læreboka, nyttar dei den ikkje utan å gjer ei eiga vurdering av korleis dei ynskjer å leggja opp undervisninga.

Thomas: Også syns eg me brukar ei lærebok som i veldig stor grad tenkjer at utforsking tyder at du har ein formel du skal fram til og så skal elevane liksom skrittvis liksom gjera steg for å nå ei slags erkjenning av den formelen då. Som eg tenker er ein måte å forstå utforsking på men den er veldig kjedeleg.

Som eg skreiv tidlegare knyt fleire av lærarane utforsking til resonnering og argumentasjon. Vidare meiner Thomas at denne måten å leggja opp til utforsking er ei overvurdering og undervurdering av elevane på same tid. Det kan tolkast som at han meiner det er mykje forlangt at elevane gjennom slike steg skal komma fram til ei forståing av ein formel som matematikarar gjerne har brukt fleire år av livet på å komma fram til. Det kjem derimot ikkje tydeleg fram korleis han meiner læreboka undervurderer elevane ved å leggja opp til utforsking på den måten boka gjer. Både Thomas og Nina opplev at læreboka dei nyttar legg opp til slik kvasiundersøkande verksemd ved at formlar og liknande blir utleia og elevane blir leia gjennom ulike steg fram mot eit bevis for ein formel eller ein algoritme. Nina ser ikkje på dette som den beste forma for utforsking, men set på den andre sida pris på at elevane får ei grunngeving for kvifor dei spesifikke formlane blir nytta, samt bevis for kvifor formlane kan nyttast før dei skal bruka dei.

Gro legg vekt på at læreboka ho nyttar er veldig oppteken av å gi elevane ei forståing av eit konsept, til dømes integrasjon gjennom å visa at det er arealet under ein graf, før elevane får starta å integrera med dei metodane for integrasjon som blir nytta. Ho opplev at dette kan bli litt for mykje fokus på å resonnera seg fram til ei forståing av konseptet, og at elevar kan mista tolmodet.

Gro: Altså dei bruker jo, i alle fall denne læreboka her, bruker laaang tid før dei faktisk begynner å integrera. Ser på dette med Riemannsummer og ja, så dei legg jo opp til at ein skal resonnera seg fram til at: «åja integrasjon det handlar om arealet under og ja».

Fleire av lærarane peiker og på at eksamen har stor påverknad på korleis dei legg opp undervisninga. «Nei det som styre det er jo eksamen sant. Det er jo ikkje snakk om anna. Dei kan seie kva dei vil men det er heilt sånn utruleg styrande for desse faga med sentralgitt eksamen» (Knut). Det er derimot ikkje semje kring om eksamen vektlegg resonnering og argumentasjon meir eller mindre etter innføring av LK20. Knut meiner at eksamen vektlegg resonnering og argumentasjon mindre sidan større del 2 gjer at han meiner fleire oppgåver berre kan løysast ved hjelp av enkle kommandoar i geogebra.

Nina: Nei, dei har jo generelt gått litt meir bort i frå ting som berre er meir ferdigheiter. Også legger dei meir vekt på desse her, meir som handlar om å sjå dei generelle samanhengane og det ser du jo og på eksamen at dei etterspør ein annan kompetanse no enn før.

Nina gir uttrykk for at ho opplev at resonnering og argumentasjon blir meir vektlagt generelt, også på eksamen sidan det er meir rom for problemløysing, og mindre av at eksamensoppgåvene spør etter det ho kallar ferdigheiter, som å berre mekanisk bruka formlar og reglar.

Thomas meiner at eksamen prøver å leggja meir opp til resonnering og argumentasjon no enn tidlegare, men meiner derimot også at elevane nokon gonger berre kan «etterape» resonnering. Eg tolkar det slik at han meiner at nokon typar oppgåver ønsker eit svar med ein bestemt type resonnering bak, og at elevane difor kan øva inn kva type resonnement som ligg bak eit slikt svar, heller enn at dei må utvikla resonnementet på eksamen.

4.3.2 Tolking av læreplanen

Lærarane tolkar kjerneelementet resonnering og argumentasjon slik at elevane skal kunne argumentera for si løysingsmetode og sitt svar, samt at dei må kunne gjennomføra eit resonnement og trekka ei slutning frå eit utgangspunkt. Det kan og sjå ut som at lærarane har ei oppfatning av at kjerneelementet resonnering og argumentasjon handlar om at elevane skal

kunne sjå samanhengane innanfor matematikken og bruka nokon bestemte bevismetodar til å bevisa visse samanhengar. Dei er og opptekne at dette med generalisering, at elevane skal kunne generalisera, og argumentera for at noko gjeld generelt og ikkje berre i eit tilfeldig døme.

Nina: Nei det handlar jo om at dei skal grunngje og det er jo sånn når ein elev seier eit eller anna at det er sånn og sånn så spør eg jo alltid kvifor er det sånn og sånn. Er du sikker på at det alltid er sånn? Korleis kan me vita at det alltid er sånn? Så då må jo dei, då må ein jo på ein måte ha gode argument, dei må sjå dei samanhengane og dei må også vita korleis dei matematisk skal føra bevis då, viss det er nødvendig viss dei får ei sånn oppgåva «vis at formelen for sånn og sånn er». Så må dei kunne ikkje berre sånn seie at det passar med dei og dei tala dei må jo kunne vise det helt generelt.

Eit av kompetansemåla i læreplanen går mellom anna ut på at elevane skal utvikla eigne bevis. Dette er ei formulering fleire av lærarane er usikre på, sidan dei er usikre på kva krav det er til elevane. «Om det er det læreplanen, for eg har grubla litt på det, kva er det eigentleg som ligg i at dei skal utvikla. Er det forlangt at dei skal utvikla ein heilt ny metode eller?» (Knut).

Fleire av lærarane uttrykte at dei tolkar læreplanen slik at kompetansemålet krev at elevane skal kunne nytta bestemte bevismetodar, til dømes induksjonsbevis, og bruka dei i nye situasjonar. «Så sjølve metodikken blir jo sånne ting som eg lærer dei men at dei må bruka den metodikken på ukjente heldt på å seie problemstillingar då» (Nina).

4.4 Implementering av resonnering og argumentasjon

4.4.1 Implementeringsmetodar

Lærarane har ulike måtar dei trekk inn resonnering og argumentasjon på i undervisninga, men eit fellestrekk er at alle legg opp til resonnering og argumentasjon munnleg, mellom anna ved heilklassemøte eller gruppesamtale.

Knut: for eg lika godt å ha ein sånn samtale, få dei til å sant. Eg ber dei ofte lukka igjen bøkene sant og så har eg eit eller anna problem.

Knut legg mellom anna opp til resonnering og argumentasjon ved å initiere fagleg klasesamtale som tek utgangspunkt i eit problem og så skal klassen diskutere seg fram til svaret, utan å bruka læreboka.

Gro: nei altså no for eksempel denne boka her er ganske flink eller god til å ha sånne «snakk»-rubrikkar, eg vet ikkje om du har sett dei? Å då er det jo en del sånn for eksempel: «sjå på beviset ovanfor. Kva er ideen som gjer at beviset fungerer, det vil seie som gjer at me er overtyda om at formelen er sann?» Nå husker ikkje eg, men ja der må dei jo argumentere og resonnerer seg fram til å forstå steg for steg kva som skjer.

Ein annan måte for å initiere resonnering og argumentasjon munnleg er ved å aktivere elevane under tavlegjennomgang av nytt fagstoff, ved å utfordre dei på å argumentere for svare dei gir på læraren sine spørsmål, noko Nina er oppteken av.

Thomas på si side opplev det kan vera vanskeleg å fokusere veldig mykje på resonnering og argumentasjon på denne måten i plenum, men opplev at det er enklare å gå rundt å utfordre ein og ein elev eller ei mindre gruppe på dette medan elevane arbeider.

Thomas: Men eg kjem jo ikkje, eg lykkast jo ikkje med at alle elevane mine klarer å sjå det generelle i alt me gjer. For mange så er det, utfordringa er å få til ei konkret oppgåve og for mange er det helt riktig og det er der liksom du må få det til då. Men sånn som klasseromsaktivitet er det vanskeleg å leggja for mykje vekt på det.

Lærarane er og opptekne av at elevane må argumentere og resonnerer medan dei gjer oppgåver, både for å finna ein løysingsmetode og grunngi kvifor denne metoden kan nyttast. Det kjem og fram at dette er viktig i vurderingssituasjonar. Ein annan metode for å leggja til rette for resonnering og argumentasjon i samband med vurderingssituasjonar kom fram i intervjuet med Nina.

Nina: Men me har jo litt sånn, me har hatt litt, kanskje ikkje i R2 enda men i R1 har vi jo hatt nokon sånn at dei har fått lov til å få tilbake prøven som dei har gjort

individuell og så får dei lov å snakka til dømes om del 2 oppgåvene i par og så får dei på ein måte forbeta og sjå kva dei får til saman då.

Ho opplev at dette er ein metode å utvikla elevane si evne til å resonnera og argumentera ved at dei då må diskutera metodane dei har nytta, spesielt om dei har nytta ulike metode og begge gir riktig svar eller ein metode gir riktig svar og ein metode ikkje gir riktig svar.

Alle lærarane seier at dei viser bevis på tavla, og har ulike tankar kring dette. Som eg skreiv over støttar fleire av lærarane seg litt på boka når dei vel kva bevis dei presenterer på tavla. Lærarane har ei oppfatning av at nokon bevis er viktige å visa på tavla, fordi nokon formalar eller reglar må bevisast. I tillegg meiner lærarane at det er viktig at dei viser bevis på tavla for at elevane skal bli kjende med tenkemåten i ulike bevis og notasjonen som blir nytta.

Nina: Både notasjon og tenkemåte. Korleis ein kan trekka ein slutning men også litt sånn metodar ein brukar som ein som regel ikkje kjem på av seg sjølv.

Som me ser legg Nina og vekt på at det å utforma eit bevis gjerne krev at ein gjer noko som er litt vanskelege å sjå sjølv som eg skreiv om ovanfor.

Ved implementering av resonnering og argumentasjon meiner Knut at forkunnskapar og grunnleggande ferdigheiter må vera på plass før resonnering og argumentasjon kan takast inn. Han meiner elevane må ha eit sett med grunnleggande ferdigheiter, mellom anna knytt til algebra, for å kunne arbeida med resonnering og argumentasjon på ein god måte. I tillegg meiner han at dersom eit nytt konsept skal innførast må konseptet etablerast før resonnering og argumentasjon kan trekkast inn i undervisninga. Dersom konseptet derimot kan knytast opp mot noko elevane kjenner frå før kan resonnering og argumentasjon nyttast i innføringa av konseptet. Knut foreslår at dette er ei moglegheit mellom anna ved innføring av integrasjon.

Knut: Men det må ha sant når du introdusera integrering for eksempel då begynna du jo, sant dei har jo jobba masse med derivering i R1. Kan du finna ein funksjon som har denne som derivert? Så då er du jo i gang med ein gong, med sånne enkle polynomfunksjonar. Å så det, nokon tema kan du liksom «gønna» på med ein gong, andre tema som er, viss dei er heilt nye. Sånn viss du har vektorrekning i R1 når du

introdusera vektorar så må du begynna med å introdusera vektorar og kva det er for noko.

4.4.2 Utfordringar

På trass av at lærarane uttrykker at resonnering og argumentasjon er ein heilt essensiell del av matematikken, uttrykker dei samtidig at det er utfordringar ved å fokusera på resonnering og argumentasjon. Fleire nemner tid som ein faktor, at tida som blir nytta om ein fokuserer på resonnering og argumentasjon er tid som ikkje kan nyttast på å læra seg å nytta reglar og formlar. Nina meiner derimot at tida ikkje er eit stort problem når det er snakk om resonnering og argumentasjon, sidan det kan inkluderast heile tida utan å nødvendigvis ha spesielt fokus på det.

Nina: Tidsaspektet kan jo vera, ikkje nødvendigvis resonnering og argumentasjon, det er meir sånn når du snakkar om sånn problemløysing, då kan jo tidsaspektet vera eit problem rett og slett. For nokon ser jo løysinga veldig kjapt og andre kan bruka kjempelang tid.

Fleire av lærarane opplev og at ikkje alle elevane er vande med denne måten å arbeida på. Dei er meir vande med å læra seg formlar og kunne rekna ut ting, utan at dei må forstå kvifor desse formlane fungerer. Dette kan spela inn på innstillinga til elevane i arbeid med oppgåver som krev resonnering og argumentasjon.

Nina: Altså hinder er jo ofte sånne elevar som eg ikkje har hatt før. Som kjem utanfrå som ikkje er vant med det. Som kanskje har fokusert meir på å berre reine reknetekniske ferdigheiter og sånn. Dei må eg av og til jobba litt med for å få dei inn på den tankegangen da.

Tidlegare skreiv eg at det kunne sjå ut som at nokon av lærarane har ei haldning om at resonnering og argumentasjon er mest for dei som meistrar matematikkfaget best. Lærarane peika på at mange elevar gjerne melder seg ut medan dei til dømes går gjennom eit bevis på tavla. «Er det veldig mange steg på vegen så dett dei av fortare, altså mange detter av kjapt og så er det dei sterkaste som kanskje er med til slutten» (Gro). Fleire av lærarane gir og uttrykk

for at det ikkje alltid er like enkelt å vite kva bevis som er nyttige å ta på tavla, men at deira erfaring er at mindre bevis er betre sidan fleire elevar mistar fokus ved lange bevis.

Gro: Så det er ikkje sånn at eg, altså eg gjennomfører nokon bevis som eg tenkjer kan vera, som eg tenker dei får noko igjen for å forstå, men viss det blir for store bevis så droppar eg dei fordi at det blir, altså då gir eg heller beskjed om at i boken på side sånn og sånn, to sider så kan du lese dette beviset viss du er interessert, så kan du gjera det i ditt eige tempo. Det har ikkje noko for seg at eg står der å bablar [uforståeleg] og 25 elever detter av.

Ved slik gjennomgang av bevis på tavla spelar gjerne også innstillinga til elevane inn, ved at Knut uttrykker at elevane gjerne sukkar medan det er snakk om bevis, sidan dei har ei oppfatning om at det er veldig vanskeleg.

Knut opplev og at ei utfordring, som også er nemnt tidlegare, er elevane sine basisferdigheiter, då særleg innanfor algebra. Som tidlegare skrive erfarer fleire av lærarane at mange bevis i R2 matematikken byggjer på algebra-manipulasjon, som medfører at Knut ofte opplev manglande algebraferdigheiter som eit hinder for arbeid med resonnering og argumentasjon, og då bevis spesielt. Han opplev at elevar gjerne set seg fast i algebraen.

Kapittel 5: Diskusjon

I dette kapitlet ønsker eg å diskutera hovudfunna frå analysen opp mot teori og relevant forskning, med fokus på å setja lys på forskingsspørsmåla og problemstillinga. Avslutningsvis ønsker eg å diskutera metodologiske val i studia, og sjå på svakheiter ved studia.

Det overordna rammeverket i denne undersøkinga er Remillard og Heck (2014) sitt rammeverk for utvida læreplan. I mine forskingsspørsmål er det hovudsakleg lærartenkt læreplan og utspelt læreplan som er i fokus. Som me ser frå rammeverket påverkar både den offisielle læreplanen og instruksjonsmateriell desse to elementa i den operasjonelle læreplanen. I tillegg ser me innbyrdes påverknad på tvers av dei tre elementa i den operasjonelle læreplanen.

5.1 Kva haldningar og forståing har lærarar i matematikk R2 til resonnering og argumentasjon?

Dette forskingsspørsmålet handlar om å få innblikk i korleis lærarane forstår omgrepa resonnering og argumentasjon og andre omgrep som er knytt til dette kjerneelementet, samt korleis lærarane definerer desse omgrepa for seg sjølv. I tillegg handlar det om kva haldningar lærarane har til implementering av aktivitetar knytt til resonnering og argumentasjon i matematikkundersvisninga. Med tanke på at det handlar om lærarane si haldning til implementering av resonnering og argumentasjon, samt korleis lærarane sjølv tolkar desse omgrepa, er det tydeleg koplta til lærartenkt læreplan i rammeverket til Remillard og Heck (2014). For å kunne sjå nærare på dei matematiske aspekta ved resonnering og argumentasjon, som ikkje kan gjerast med Remillard og Heck (2014) sitt rammeverk aleine, er rammeverket til Stylianides (2008) trekt inn som eit underordna rammeverk i tillegg til at anna relevant litteratur blir inkludert

Fleire av lærarane gir noko diffuse forklaringar på kva omgrepa resonnering, argumentasjon og bevis tyder. Og på trass av at lærarane er samde om hovudtrekka kring kva det vil seie å resonnera, argumentera og bevisa, trekk dei som nemnt inn ulike aspekt. Dette kan komma av at omgrepa ikkje er heilt tydelege for alle lærarane, som igjen kan henga saman med at det også eksisterer mange ulike definisjonar i litteraturen (Reid & Knipping, 2010; Yackel &

Hanna, 2003). Som mellom anna Jeannotte og Kieran (2017) og Reid og Knipping (2010) understrekar, er omgrepa vanskelege å definera konkret, som kan vera noko av forklaringa på kvifor det er noko skilnad i kva lærarane assosierer med omgrepa resonnering, argumentasjon og bevis. På den andre sida kan det og komma av spørsmålsstillinga, til dømes for lange spørsmål eller utydelege spørsmål, noko eg går meir inn på i den metodologiske drøftinga.

5.1.1 Resonnering

Jeannotte og Kieran (2017) fann fire hovudtrekk som er med på å gi ei forklaring på kva resonnering er. Eit av trekk er aktivitet/produkt dikotomien som handlar om at resonnering gjerne blir sett på som ein aktivitet og eit produkt, men det er berre produktet av denne resonneringsprosessen som vil vera synleg for andre, sidan sjølve prosessen i hovudsak skjer inne i hovudet til deltakarar av resonneringsprosessen. Dette kan det og virka som at Knut opplev, sidan han mellom anna skildrar resonnering som eit mentalt tankekart. På den andre sida ser det ut som at fleire av lærarane er opptekne av å gjera resonnement synleg, mellom anna ved å oppfordra elevane til å skriva ned det dei tenkjer, til dømes ved «vill tavlebruk» som Thomas kallar det. Den konkluderande naturen til matematisk resonnering handlar i hovudsak om at ny kunnskap og nye idear kan komma frå denne konkluderande eigenskapen til matematisk resonnering (Jeannotte & Kieran, 2017). Her kan me sjå samanheng med at lærarane er opptekne av at resonnering mellom anna handlar om å trekka slutningar. Med det kan det tenkjast at lærarane er opptekne av at resonnementet skal leia til ein konklusjon på bakgrunn av kunnskapen ein har, og at dette vidare leier til ny kunnskap ved at elevane ser nye samanhengar.

Vidare er målet og funksjonen ved matematisk resonnering eit av hovudtrekka Jeannotte og Kieran (2017) peiker på. Dette kan sjåast i samanheng med funksjonane til resonnering, argumentasjon og bevis som eg går djupare inn på under og vert difor ikkje vidare utdjupa her. Det siste hovudtrekket er som det vart skrive tidlegare struktur- og prosessrelaterte aspekt. Få av lærarane snakka eksplisitt om dei ulike resonneringsmetodane, men Nina kom indirekte innpå deduktiv resonnering ved at ho opplev at resonnering mellom anna handlar om å trekka slutningar ut frå kunnskap ein har. Også Thomas er oppteken av at elevane nyttar kjend kunnskap for å trekka ei slutning, og at alt må henga logisk saman, men verken Thomas eller Nina snakka eksplisitt om deduktive resonnement.

På tross av at det er ulike typer resonnering, legg Lithner (2008) vekt på at resonnering kanskje treng å følge ein bestemt logisk struktur eller vera matematisk riktig, så lenge den som resonnerer får noko ut av resonnementet. Knut sine tankar kring resonnering minner om denne oppfatninga, ved at han er oppteken av at eit resonnement kan vera godt utan at det følgjer bestemte reglar og utan at den som resonnerer nødvendigvis har høg matematisk kompetanse. Ut frå Knut sitt utsegn om at ein kan «drodla» litt medan ein resonnerer og prøva seg fram, har gjerne Knut ein tanke om at resonnering er noko meir kreativt der ein ikkje nødvendigvis følger ein bestemt struktur som Lithner (2008) peiker på. Her kan ein og sjå samanheng med den psykologiske komponenten i rammeverket til Stylianides (2008), ved at ein gjerne er meir oppteken av om eleven forstår resonnementet og tenkjer på det som eit resonnement, på tross av at det ikkje nødvendigvis er eit logisk gyldig resonnement.

Det kjem tydeleg fram i intervjuet at lærarane meiner at det å resonnera også handlar om å sjå samanhengar. Dette er også noko Stylianides (2008) peiker på ved at ei av RP-aktivitetane han trekk fram i rammeverket sitt er det å identifisera mønster. Dette kan vidare koplant til relasjonell forståing, og det kan sjå ut som at lærarane opplev at trening i resonnering og argumentasjon kan gi elevane meir relasjonell forståing, slik at dei forstår samanhengen mellom omgrep, teorem og konsept (Skemp, 2006). Som skriv tidlegare kan slik relasjonell forståing sjåast i samanheng med djupnelæring, som er blitt eit sentralt omgrep i den norske skulen (Kunnskapsdepartementet, 2017). Stylianides (2008) er også oppteken av at det å identifisera mønster handlar om å generalisera, som kjem fram ved at det å identifisera mønster er ein underkategori av den overordna aktiviteten å danna matematiske generaliseringar.

Ut frå Thomas sitt utsegn kring at resonnering mellom anna handlar om å ha ein ide som ein bygger opp under, kan me sjå samanhengen med den resonnerings- og bevis aktiviteten som handlar om å utvikla formodningar (Stylianides, 2008). Eg tolkar det slik sidan han skildrar det som at ein del av resonnering handlar om denne ideen, og at denne skal argumenterast for ut frå kjente samanhengar. Stylianides (2008) skildrar formodning som ei grunngeven hypotese. Ei grunngeven hypotese er ein påstand som ein ikkje er sikker på at stemmer, samtidig som ein har argument eller annan grunngeving som støttar opp under denne påstanden og gjer det meir sannsynleg at den stemmer (Stylianides, 2008). Det er difor naturleg å sjå Thomas si oppfatning av at resonnering mellom anna handlar om at ein

argumenterer for idear ein har ut frå kjente samanhengar i samanheng med aktiviteten som går ut på å danna formodningar. På den andre sida kan gjerne ein ide tolkast som noko litt meir usikkert enn ei formodning, ved at ei formodning gjerne har meir argumentasjon som støttar opp under den. Aktiviteten «danna formodningar» har Stylianides (2008) vidare også plassert under den overordna kategorien som handlar om å danna generaliseringar.

5.1.2 Argumentasjon

Som me såg frå kapittel 4, resultatkapittelet, har lærarane litt ulik oppfatning av kva argumentasjon er. Medan Thomas ser på argumentasjon som ein prosess i seg sjølv, ser Gro på argumentasjon meir som ein del av eit resonnement eller eit bevis og det kan difor tenkjast at ho ser på argumentasjonen meir som eit produkt som inngår i ein større prosess. På den andre sida uttalar ho at ein må gjennomføra argumentasjonar i resonnementet eller beviset, som kan tyda på at ho ser på det å argumentera som ein mindre prosess som er ein del av ein større prosess. Her kan ein trekka linjer til Hanna (2020) si skildring av argumentasjon som alle teknikkar som har som mål om å overtyda andre om at resonneringa ein har gjennomført er riktig, sidan Gro meiner at argumentasjon er ein del av eit resonnement eller bevis, slik at argumenta skal bygga opp under resonnementet eller beviset.

Som Reid og Knipping (2010, s. 154) skriv er det vanleg å tenkja at eit hovudtrekk ved argumentasjon er at ein skal overtyda andre, samt at det for nokon og handlar om å forklara resonneringsprosessen. Fleire av lærarane legg vekt på det at eit føremål med argumentasjon er å forklara kvifor noko heng saman som det gjer, og eg tolkar det difor slik at lærarane opplev at argumentasjonen nettopp skal forklara ein resonneringsprosess, ei tankerekka. Som nemnt er også Connor og Staples (2022) opptekne av at argumentasjon gjerne inneber å overtyda andre, samt at dei meiner argumentasjon handlar om å trekka konklusjonar og byggja opp under desse konklusjonane. Lærarane som vart intervjua er som skrive tidlegare også opptekne av å trekka konklusjonar og byggja opp under desse konklusjonane. Det kjem derimot ikkje tydeleg fram at dei er opptekne av at argumentasjon handlar om å overtyda andre. Når det kjem til å overtyda andre er ikkje dette noko lærarane uttrykker eksplisitt, men dei er opptekne av at elevane må grunngi løysingsmetode og tankegang medan dei løyser eit problem eller ei oppgåve. Det kan difor sjå ut som at lærarane er opptekne av at elevane gjerne heller skal visa at dei har forstått noko lærar eller sensor allereie veit, heller enn at elevane får autentisk trening i å måtte overtyda andre. Det kan vere fleire grunnar til dette,

men kanskje kan ein grunn vera at argumentasjon i skulematematikken ikkje handlar så mykje om å overtyda andre. Som Lampert (1990) skriv så sit læraren gjerne på fasit i klasserommet og ein vekslar lite mellom formodningar og argument for gyldigheita til desse formodningane i klasserommet. Ei tolking kan difor vera at elevane gjerne argumenterer for å grunngi sine val og si løysing, men sidan læraren allereie veit kva som er riktig svar treng ikkje elevane overtyda læraren, dei må berre visa at dei sjølv har forstått det dei har gjort.

Knut ser på argumentasjon som ei form for resonnement som er mindre stringent enn eit bevis, noko eg opplev at Thomas og gjer. Her kan me sjå likskap med det Hanna (2020) skriv om at matematikklærarar har blitt lært til å sjå på argument som ufullstendige bevis. Også Nina legg vekt på dette med at argumentasjon er mindre formelt, og at ein til dømes kan argumentera meir med teikning eller argumentera meir praktisk. Altså gir ho uttrykk for at argumentasjon ikkje krev eit like formelt språk som det ho meiner at eit bevis krev, og det kjem fram mellom linjene at ho meiner at bevis krev eit formelt skriftleg språk og at det ikkje er tilstrekkeleg formelt med teikning. Eg opplev at tanken om at det er ei nær kopling mellom argumentasjon og bevis er ei oppfatning Stylianides (2008) også deler ved at han har ein kategori som han kallar *utvikling av ikkje-bevis argument*. I denne namngivinga ligg det ein tanke om at bevis er ei undergruppe av argumentasjon. Dette kjem og fram i Stylianides (2007) sin definisjon av bevis, som blir rekna som eit argument med spesielle krav, altså stilles det færre krav til ikkje-bevis argument. At argument kan vera mindre formelle kan ein gjerne seie er i tråd med at ei av aktivitetane Stylianides (2008) peiker på i rammeverket sitt, under kategorien *utvikling av ikkje-bevis argument*, er empiriske argument, som tyder argumentasjon på bakgrunn av spesifikke døme og difor ikkje generell argumentasjon.

Som me ser knyt lærarane argumentasjon også tett opp til resonnering på litt ulike måtar, i tillegg blir både argumentasjon og resonnering knytt til omgrepet grunngjeving. Grunngjeving handlar om å forklara eigen tenkjemåte og komma fram til ein konklusjon (Conner & Staples, 2022). Mi oppleving er at omgrepa grunngjeving og argumentasjon går litt over i kvarandre både i litteraturen, men og i utsegna til lærarane som vart intervjua. At lærarane koplar grunngjeving med argumentasjon og resonnering stemmer overeins med Stylianides (2008) sitt rammeverk for resonnering og bevis, ved at grunngjeving er ei av dei to overordna aktivitetane, og bevis og ikkje-bevis argument blir rekna som aktivitetar som går inn under den overordna grunngjevingsaktiviteten. I tillegg er eit av måla til Stylianides (2008) at rammeverket skal synleggjera at desse aktivitetane er kopla saman, og ikkje er isolerte frå

kvarandre, som han meiner er viktig at elevane og er klar over. Slik eg tolkar Stylianides (2008) er derimot alle aktivitetane resonneringsaktivitetar, men berre det å utvikla bevis er ei bevisaktivitet.

5.1.3 Bevis

I Stylianides (2007) sin definisjon av bevis blir det vektlagt at det er eit argument, ei rekke av logiske slutningar med tre kjenneteikn som skil bevis frå ikkje-bevis argument. Eg opplev at lærarane er opptekne av bevismetodar, som kan koplast til eit av Stylianides (2007) sine kjenneteikn på bevis, som handlar om at det blir nytta bevismetodar som er kjente innanfor det aktuelle fellesskapet. Stylianides (2007) peiker og på at det skal nyttast passande og kjente uttrykksformer for å kommunisera argumentet. Lærarane som deltok i undersøkinga var opptekne av at bevis er noko formelt, og at det er viktig å bruka eit presist og korrekt matematisk språk. For Nina er bevis ei rekke av logiske slutningar frå eit kjend utgangspunkt og fram til ein konklusjon, noko som kan koplast til deduktive resonnement. Dette stemmer overeins med vanlege haldninga om at eit bevis må byggja på eit deduktivt resonnement (Reid & Knipping, 2010, s. 84).

Eit anna trekk ved bevis lærarane legg vekt på er at det er veldig generelt, og dei skil mellom argumentasjon og bevis mellom anna ved at argumentasjon kan fokusera på spesifikke døme medan bevis skal gjelda generelt og i alle tilfelle. Til dømes er Gro oppteken av at bevis mellom anna handlar om å generalisera. Dette ser me att i rammeverket til Stylianides (2008) der ei av aktivitetane innanfor ikkje-bevis argument er empiriske døme og ei aktivitet innanfor det å utvikla bevis er generiske døme, som handlar om å generalisera ut frå eit døme (Stylianides, 2008).

Reid og Knipping (2010, s. 124) peiker på at ein måte å unngå å resonnera er ved mekanisk resonnering, som er det Tall (1995) kallar manipulative bevis. Med dette meiner dei til dømes å bevise noko ved hjelp av algebramanipulasjon. Medan Tall (1995) ser på dette som ei form for bevis, kallar Reid og Knipping (2010, s. 124) det som nemnt for ein måte å unngå å resonnera på. Fleire av lærarane som vart intervjua peikar på at veldig mange av bevisa elevane blir introdusert for er i form av slike manipulative bevis, ved at bevisa i stor grad går ut på algebramanipulasjon. Som Knut peiker på kan dette bli utfordrande for elevar dersom dei ikkje meistrar algebra, som er noko av hans grunngjeving for å trenar opp

algebraferdigheitene før ein skal begynna å resonnera og argumentera. Lærarane peiker spesielt på induksjonsbevis som ein viktig bevismetode i matematikk R2, som i nokon tilfelle er ei form for algebraisk bevis.

5.1.4 Haldningar

Alle dei fire lærarane uttrykker at dei meiner at resonnering og argumentasjon er veldig viktig i matematikkundervisning, sidan det er ein så viktig del av matematikken. Lærarane sine tankar om at resonnering, argumentasjon og bevis er heilt essensielle område innanfor matematikken, stemmer difor overeins med Skott et al. (2018, s. 279) sine tankar om kor viktige desse konseptar er i matematikken og at dei er heilt sentrale for å kunne kalla noko matematikk. Det kan, på bakgrunn av kor viktig dei meiner resonnering og argumentasjon er, sjå ut som at lærarane ønsker å ta ei rolle som forklarande lærar, den lærarrolla Ernest (1988) meiner kan bidra til konseptuell forståing.

På den andre sida gir spesielt to av lærarane uttrykk for at dei opplev at ikkje alle elevar vil ha like mykje utbytte av slik undervisning som har stort fokus på resonnering og argumentasjon. Gro opplev mellom anna at resonnering og argumentasjon kan opplevast som støy for ein del elevar som gjerne har tilstrekkeleg utfordring med å læra seg ferdigheiter og algoritmar, og dermed oppnå det Skemp (2006) kallar instrumentell forståing. Som Skemp (2006) skriv er det fleire fordelar med slik instrumentell forståing, mellom anna at det ofte er lettare å læra instrumentell matematikk innanfor den konteksten ein er i. I tillegg kan elevar kjenna på meistringskjensle ved å få riktige svar, og det riktige svaret er gjerne mindre tidkrevjande å koma fram til sidan det krev mindre kunnskap (Skemp, 2006). På trass av at lærarane ønsker at elevane skal oppnå konseptuell forståing, ser ein her døme på at dei ulike elementa i operasjonell læreplan spelar inn på kvarandre ved at lærarane tilpassar utspelt læreplan og gjerne også lærartenkt læreplan for at elevane skal oppleva meistring. Altså kan ei slik haldning vera til hjelp for elevar som ikkje klarer å oppnå konseptuell forståing. Ein kjem heller ikkje bort frå at elevane skal ta eksamen og dei kan difor ha eit ønske om å arbeida for instrumentell forståing for å svara riktig på eksamensoppgåvene (Skemp, 2006). Når det er sagt er det eit mål i skulen at elevane skal oppnå konseptuell forståing, ved at det er eit mål om at elevane skal kunne sjå samanhengar og kunne bruka kunnskapen sin i kjende og ukjende situasjonar (Kunnskapsdepartementet, 2017). Som Skemp (2006) understrekar vil ikkje instrumentell forståing vera tilstrekkeleg for å oppnå djuplæring, ved at elevane då berre

lærer algoritmar og løysingsmetodar, utan å forstå kvifor dei blir nytta og klarer heller ikkje å legge opp ein ny alternativ veg mot løysinga om dei skulle gå seg fast.

5.1.5 Roller

I resultatkapitlet la eg fram dei funksjonane eg opplev at lærarane vektlegg at resonnering, argumentasjon og bevis har i matematikkundervisninga, og fleire av desse kan koplart til rollene Reid og Knipping (2010) og De Villiers (1990) peiker på at bevis har i matematikken og matematikkundervisning. Rollene Reid og Knipping (2010) og De Villiers (1990) peiker på er som nemnt utelukkande retta mot bevis, og handlar mellom anna om at bevis kan vera til hjelp for å laga eit deduktivt system av mellom anna teorem og definisjonar. Når det er sagt er det også interessant å få eit innblikk i kva funksjonar lærarane meiner resonnering og argumentasjon har i undervisninga. Det kom då fram at det lærarane ser på som funksjonane til resonnering og argumentasjon i det store og heile stemmer overeins med rollene som mellom anna De Villiers (1990) peiker på som rollene til bevis. Lærarane meiner at ein av funksjonane til bevis er å visa at formlar stemmer og kan nyttast til sitt føremål, altså verifisera formlane. Mitt inntrykk var at lærarane var spesielt oppteken av denne rolla medan dei skulle skriva bevis på tavla, då dei meinte at det var viktig at elevane ser at formlane dei nyttar har ei grunngeving. Denne rolla kom ikkje fram for resonnering og argumentasjon, som gjerne kjem av at lærarane koplar det å verifisera til bevis, og at resonnering og argumentasjon ikkje har eigenskapen å kunne verifisera at noko stemmer.

Når det var snakk om resonnering og argumentasjon var forståing og utforsking omgrep lærarane trakk fram. Dette med forståing kan koplart til forklarings-rolla for bevis (De Villiers, 1990). Rolla som handlar om forklaring handlar om å forklara kvifor noko er som det er, til dømes kvifor ein formel fungerer. Lærarane er opptekne at resonnement og argumentasjon skal bidra til at elevane får meir forståing ved at dei får ei forståing for samanhengar og kopling mellom ulike konsept. Det kan tolkast som at dette også handlar om forklaring og å forklara desse konsept og samanhengane, og skapa relasjonell forståing (Skemp, 2006). Også Knuth (2002) koplar den forklarande rolla til bevis til det å få djupare forståing for matematiske konsept. Medan Knuth (2002) opplevde at lærarane i hans studie berre såg på den forklarande rolla til bevis som at bevis skal visa kvifor noko stemmer, ikkje det å få djupare forståing for matematikken, opplevde eg at lærarane i denne undersøkinga var opptekne av at resonnering og argumentasjon kan leia til konseptuell forståing ved at elevane

ser samanhengar og koplar dei matematiske konseptane til kvarandre, gjennom ei forståing for desse konseptane.

Nokon av lærarane snakka eksplisitt om at utforsking er tett knytt til resonnering og argumentasjon, men eg opplev og at dei lærarane som ikkje nemnte utforsking like eksplisitt har ei oppfatning om at resonnering og argumentasjon er tett kopla til utforsking og problemløysing. Utforsking blir også trekt fram som ei av rollene til bevis (De Villiers, 1990). Slik eg forstod lærarane er dei opptekne av at resonnering og argumentasjon er ein del av utforskingprosessen, og nokon ga uttrykk for at det å kunne resonnera og argumentera er ein forutsetning for å kunne utforska.

Alle lærarane er opptekne av dette med å sjå samanhengar. Spesielt Nina er oppteken av dette med å sjå system og mønster når det var snakk om resonnering og argumentasjon. Nina og gjerne også fleire av lærarane ser dermed på resonnering og argumentasjon på ein slik måte at det er relevant å trekka inn beviset si rolle som handlar om systematisering. Systematisering som funksjon ved bevis handlar om at bevis kan vera til hjelp for å tydeleggjera logisk samanheng mellom ulike påstandar og gi eit oversiktleg deduktivt system av aksiom, definisjonar og teorem (De Villiers, 1990). For resonnering og argumentasjon kan det å sjå mønster og samanhengar koplast til systematisering på den måten at ein ser «det store bilete» og har meir oversikt over korleis dei ulike delane av eit matematisk konsept heng saman samt samanhengen mellom ulike konsept. Systematisering som funksjon ved resonnering og argumentasjon er dermed gjerne på eit lågare nivå, ved at elevane klarer å sjå samanhengar innanfor eit område, medan systematisering som ei rolle bevis har er gjerne meir overordna, ved at heile matematikken blir kopla saman gjennom teorem, definisjonar, aksiom og bevis for desse.

Kommunikasjon er eit omgrep som blir trekt fram fleire gonger i intervjuet med Thomas. Han meiner at argumentasjon og kommunikasjon er tett kopla saman ved at argumentasjon er måten ein kommuniserer sine svar og løysingsmetodar og at desse må kommuniserast på ein god måte. Dette stemmer overeins med læreplanen si skildring av kommunikasjon i kjerneelementet representasjon og kommunikasjon, der det står at «Kommunikasjon i matematikk R handler om å bruke matematisk språk i argumentasjonar og resonnementar» (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b). Når Reid og Knipping (2010, s. 77) skriv om kommunikasjon som ei rolle ved bevis framstår det som at denne rolla går ut på

kommunikasjon mellom matematikarar og det at matematikken blir utvikla ved at bevis kommuniserer nye oppdagingar. På den andre sida blir det og peika på at kommunikasjon og er ei rolle ved bevis i undervisningssamanheng, ved at undervisar kan kommunisera matematikk til elevane gjennom bevis, samt at elevane kan kommunisera med kvarandre i arbeid med bevis (De Villiers, 1990). Slik Thomas legg det fram trekk han gjerne og fram at elevane kommuniserer argumenta og løysingane til læraren, for å få fram kunnskapen sin på ein god måte.

Intellektuell utfordring blir av Reid og Knipping (2010, s. 77) nemnt som ei rolle ved bevis og handlar gjerne om å utfordra matematikarar sitt uthald og intellekt slik Davis og Hersh (1981, s. 369) skriv, men den blir ikkje rekna blant dei viktigaste rollene og blir berre nemnt i ei oppsummering av andre moglege roller. Eg opplev derimot at lærarane eg intervjuar ser på dette som ei rolle ved resonnering, argumentasjon og bevis. Dette kjem mellom anna fram ved at Knut meiner at arbeid med bevis er det einaste elevane arbeidar med i matematikken som ikkje går ut på å følga ei oppskrift eller ein algoritme. I tillegg er det som eg skreiv fleire av lærarane som er opptekne av dette med at utvikling av bevis ofte inneber at elevane må sjå noko lurt eller gjera ein overgang som for dei ikkje er heilt intuitiv. Også dette tenkjer eg er kopla til dette med intellektuell utfordring sidan dei blir utfordra til å tenkja nytt og gjerne kopla inn variert kunnskap. Eg oppfatta det og som at nokon av lærarane meinte at dette med resonnering og argumentasjon gjerne var spesielt viktig for elevar med høg måloppnåing for å utvikla deira forståing og utfordra dei utover å meistra tradisjonelle oppgåver.

Som me ser kan fleire av funksjonane lærarane meiner at resonnering og argumentasjon har, kan koplata til rollene til bevis som blir peika på i litteraturen (De Villiers, 1990; Reid & Knipping, 2010). Dette kjem gjerne av at bevis er så tett knytt til resonnering og argumentasjon, at dei har fleire av dei same funksjonane. Reid og Knipping (2010, s. 80) peiker på at mange lærarar ser på verifikasjon og utvikling av evne til logisk tenking som dei einaste funksjonane til bevis i undervisninga. Dette viser at på trass av at mange av dei same funksjonane blir peika på for resonnering og argumentasjon av lærarane, skil lærarane si oppfatning av funksjonane til resonnering og argumentasjon seg frå rollene til bevis ved at lærarane opplev forklaring og utforsking som viktigare roller ved resonnering og argumentasjon, medan verifikasjon blir knytt spesielt til bevis. Kritisk tenking vart ikkje nemnd i nokon av intervjuar. Ein funksjon ved resonnering og argumentasjon som ikkje kan koplata til rollene til bevis er Thomas sin tanke om at ei slags birolle ved resonnering og

argumentasjon er at aktivitetar som legg vekt på desse ferdigheitene gjerne fungerer som variasjon frå det han ser på som meir tradisjonell undervisning. Med meir tradisjonell undervisning meiner han gjerne tavlegjennomgang, demonstrasjon av eit døme etterfølgd av at elevane gjer oppgåver som liknar dømet. Dette peikar Bergqvist og Lithner (2012) på at er veldig vanleg i svenske klasserom og det er difor nærliggande å tenkje at dette også kan gjelda i Noreg.

5.2 Korleis forstår lærarane den offisielle læreplanen og korleis påverkar læreplanen lærarar si undervisninga knytt til resonnering og argumentasjon?

Dette forskingsspørsmålet handlar om å sjå på korleis lærarane forstår dei delane av den offisielle læreplanen som er knytt til resonnering og argumentasjon, altså kva lærarane oppfattar at læreplanen meiner at elevane skal læra, relatert til resonnering og argumentasjon. I tillegg ønsker eg å sjå på korleis lærarane blir påverka av den offisielle læreplanen, i form av korleis lærarane sjølv rapporterer at den offisielle læreplanen påverkar dei.

Forskingsspørsmålet er kopla til det som er omsett til lærartenkt læreplan, som er del av den operasjonelle læreplanen. I tillegg er det tett knytt til den offisielle læreplanen ved at det er lærarane si forståing av den offisielle læreplanen som er i fokus. Sidan lærartenkt læreplan handlar om læraren si tolking og læraren sine avgjerder undervegs i prosessen med å planlegga undervisning, vil læraren si forståing og læraren sine haldningar påverka lærartenkt læreplan.

Om me ser på rammeverket til Stylianides (2008) deler han, som eg skreiv tidlegare, aktivitetar som omhandlar resonnering og bevis inn i to hovudkategoriar og fire underkategoriar. Fleire av desse underkategoriane har me allereie sett at lærarane koplar til kjerneelementet resonnering og argumentasjon, mellom anna ved at Thomas koplar resonnering til det å utvikla ein ide, som eg vidare kopla til dette med å danna formodningar.

Ein av dei to hovudkategoriane av RP-aktivitetar Stylianides (2008) peikar på er å *gi støtte til matematiske påstandar*, som seinare vart kopla til grunngeving. Utvikling av bevis og utvikling av ikkje-bevis argument er dei to underkategoriane under denne hovudkategorien. Dette stemmer overeins med lærarane si oppfatning om at grunngeving er kopla til både resonnering og argumentasjon. At lærarane koplar grunngeving til argumentasjon er også i tråd med det som er skriva om argumentasjon i skildringa av kjerneelementet i læreplanen,

der argumentasjon utelukkande ser ut til å handla om grunngeving av løysingsmetodar og resonnement (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b).

Eit anna funn som allereie er nemnt er at lærarane kopla kjerneelementet resonnering og argumentasjon til evna til å generalisera, og var opptekne av at dette var veldig viktig at elevane meistra. Også her ser me tydeleg kopling til rammeverket til Stylianides (2008) som har aktiviteten å *danna matematiske generaliseringar* som den andre av dei to hovudkategoriane av RP-aktivitetar. Her ser me også likskap til Dickerson og Doerr (2014) som også fann at lærarar ser på utvikling av evne til å generalisera som eit av dei viktigaste føremåla med bevis i matematikkundervisninga. Som me såg kopla Nina det å identifisera mønster og strukturar til å sjå samanhengar, som vidare gjerne kan koplast til å kunne generalisera, og som då vil vera i tråd med Stylianides (2008) si kopling mellom det å identifisera mønster og matematisk generalisering. Eg opplev derimot at læreplanen ikkje eksplisitt legg vekt på dette med generalisering i skildring av resonnering og argumentasjon, som lærarane ser på som veldig viktig og som me og har sett Stylianides (2008) gjera ved å trekka inn generalisering i sitt rammeverk. På den andre sida er abstraksjon og generalisering eit av dei andre kjerneelementa i læreplanen, og generalisering blir då kopla til å sjå samanhengar og strukturar (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b). Dette kan vidare sjåast i samanheng med rammeverket til Stylianides (2008). Ein kan gjerne seie at det er i tråd med Remillard og Heck (2014) sitt rammeverk at lærarane si oppfatning er tett knytt til læreplanen, samtidig som at lærarane sine eigne tolkingar og haldningar påverkar korleis dei oppfattar kjerneelementet, og dermed påverkar lærartenkt læreplan.

Resonnering i læreplanen handlar mellom anna om «[...] å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker» (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b). I tillegg er det eit mål at elevane skal kunne forstå at alle reglar har ei grunngeving, og er ein del av ein større matematisk samanheng (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b). Elevane skal og kunne gjennomføra eigne resonnement til å løysa problem, samt til å utvikla eiga forståing (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b). Argumentasjon handlar som nemnt om å grunnge desse resonnementa, samt grunnge løysingmetodar og å kunne bevisa at desse er gyldige (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b). Denne skildringa av resonnering og argumentasjon har fleire likskapstrekk med det lærarane legg i kjerneelementet resonnering og argumentasjon. Mellom anna vektlegg også lærarane at resonnering handlar om tankerekker og kan bidra til eiga forståing, i tillegg til oppgåveløysing. Spesielt legg Knut vekt på at resonnering kan vera til hjelp for elevane i

løysing av ei oppgåve. Fleire av lærarane nemner også dette med at elevane skal sjå at alle algoritmar og reglar har ei grunngeving. Og som skrive tidlegare har også lærarane si skildring av argumentasjon fleire likskapstrekk med læreplanen si skildring.

Det kom fram i intervjuet at fleire av lærarane er usikre på korleis dei skal tolka kompetansemålet som mellom anna handlar om at elevane skal utvikla eigne bevis, og dei er ikkje sikre kva læreplanen ventar at elevane skal kunne ut frå denne formuleringa. Mitt inntrykk er at lærarane konkluderer ganske likt med at elevane må kunne bruka visse bevismetodar, særleg induksjonsbevis, men og andre metodar som direkte og indirekte bevis, samtidig som at dei må kunne bruka desse metodane i nye situasjonar. Eg forstod difor lærarane som at elevane ikkje kunne pugga nokon utvalde bevis, men heller ikkje ville vera nøyde til å gå så mykje utanfor dei kjende bevismetodane. At elevar berre skal pugga kjende bevis var lenge den einaste måten elevane arbeida med bevis, men det har dei siste tiåra vore eit ønske om å fjerna seg frå denne tradisjonen (Skott et al., 2018, s. 280). At lærarane difor tolkar læreplanen som at elevane også skal kunne bruka dei bevismetodane dei lærer til å utvikla bevis i nye situasjonar stemmer difor med tanken om at elevane skal kunne resonnera og utvikla bevis ved å generalisera og grunnkje samanhengar, som er noko det er ønskeleg at undervisninga legg opp til (Skott et al., 2018, s. 279-281).

Det kjem fram at eksamen er eit av fleire element som er styrande for undervisninga. Korleis eksamen påverkar bruken av resonnering og argumentasjon i undervisninga vil derimot avhenge av korleis lærarane oppfattar eksamen. Som eg skreiv opplev dei fleste lærarane at eksamen krev meir resonnering og argumentasjon etter at LK20 vart innført, enn tidlegare. Knut opplev derimot at mykje kan gjerast utan resonnering og argumentasjon ved at store delar av eksamen er med hjelpemiddel, og at elevane typisk kan nytta enkle kommandoar i geogebra, utan at dei eigentleg treng å forstå kva dei gjer. Denne oppfatninga vil truleg påverka kor mykje fokus lærarane har på resonnering og argumentasjon i undervisninga. Eit anna aspekt som kan påverka er Thomas si oppleving av at ein i fleire tilfelle kan etterape resonnering på eksamen, som eg kjem meir innpå seinare. Alle lærarane let seg påverka av eksamen, noko som og stemmer overeins med rammeverket til Remillar og Heck (2014) ved at eksamen er innanfor kategorien viktige vurderingssituasjonar i den offisielle læreplanen, som me vidare ser påverkar lærartenkt læreplan i den operasjonelle læreplanen. Som nemnt er lærartenkt læreplan lærarane sine tolkingar, som mellom anna vil vera påverka av haldningar, så på trass av at alle lærarane blir påverka av eksamen vil tolking og haldningar påverka

korleis lærarane oppfattar eksamen. Vidare vil lærartenkt læreplan påverka utspelt læreplan, det som faktisk skjer i klassen (Remillard & Heck, 2014). Ein faktor som spelar inn er at det ved tidspunktet lærarane vart intervjuja berre hadde blitt heldt to eksamenar i matematikk R2 som følger LK20. Dette kan spela inn på lærarane si oppfatning av eksamen ved at dei ikkje har sett så mange eksamenssett som følgjer ny læreplan og dermed ikkje har like mykje grunnlag for å uttala seg om eksamen etter innføring av LK20 krev meir resonnering og argumentasjon eksamen i utforma etter tidlegare læreplan. Dette medfører at lærarane si haldning til kva eksamen vektlegg kan endra seg dei neste åra, noko som vidare kan spela inn på undervisninga deira.

På trass av at Thomas er ein av lærarane som meiner at eksamen etter ny læreplan har meir fokus på resonnering og argumentasjon enn eksamen etter førige læreplan, opplev Thomas at elevane gjerne kan «etterapa» resonnering i staden for å resonnera. Her kan ein dra linjer til imitativ resonnering som Lithner (2008) delar inn i to hovudkategoriar, memorert resonnering og algoritmisk resonnering. Imitativ resonnering i form av memorert resonnering vil seie å memorera ei løysing, til dømes memorera utleiinga av eit bevis. Algoritmisk resonnering inneber å hugsa ein løysingsalgoritme som kan nyttast på problem av ein bestemt type, også dersom tal vert endra (Lithner, 2008). Thomas skildrar si oppfatning ved at han meiner at elevane kan læra seg kva som liknar på resonnering, i staden for at han meiner dei kan pugga ei løysing. Gjerne er det då algoritmisk resonnering Thomas meiner er gjeldande, ved at elevane då kan læra seg algoritmen for korleis ei oppgåve skal løysast og kva som må inkludrast i løysinga for å ha eit fullgodt resonnement. På den andre sida meiner han at for del 2 på eksamen, der hjelpemiddel er tillat, så vil det vera meir fokus på problemløysing og problemforståing, og dermed gjerne meir autentisk resonnering og argumentasjon.

I tillegg til at eksamen har stor påverknad på undervisninga, kjem det og fram at lærarane nyttar læreboka i stor grad, utan at dei nyttar den ukritisk. Det at lærarane i stor grad nyttar læreboka i planlegging av undervisning stemmer overeins med den generelle oppfatninga om at lærarar baserer mykje av undervisninga på korleis lærebøkene er lagt opp (Viholainen et al., 2015). Også i rammeverket til Remillard og Heck (2014) kjem det tydeleg fram at lærebøkene påverkar dei ulike delane av den operasjonelle læreplanen, som mellom anna inneber påverknad på både lærartenkt læreplan og utspelt læreplan. Lærarane oppgjev at dei mellom anna nyttar læreboka til å velja ut kva bevis dei presenterer for elevane, samt at bøkene delvis legg opp til aktivitetar knytt til resonnering og argumentasjon, ved små

diskusjonsoppgåver eller at dei legg opp til noko utforskande arbeid fram mot ein formel eller algoritme. Når det er sagt er dei og tydelege på at dei ikkje nyttar bøkene ukritisk og plukkar mellom anna oppgåver frå andre bøker eller tidlegare eksamenar. I tillegg er spesielt Thomas og Nina opptekne av at bøkene legg opp til mykje kvasiundersøkande aktivitet, heller enn autentisk utforsking, som dei begge er noko kritiske til.

Som skriv i kapittel 4 meiner Thomas at boka både undervurderer og overvurderer elevane ved å leggja opp til slik kvasiundersøkande aktivitet, utan at det kjem tydeleg fram på kva måte han meiner dette undervurderer elevane. Thomas peiker derimot og på at dette er ein kjedeleg måte å forstå utforsking. På bakgrunn av dette kan det tenkjast at Thomas opplev at boka undervurderer elevane i form av at dei på denne måten ikkje blir utfordra til å utforska ordentleg sjølv, på trass av at dei er i stand til dette. I tillegg veit både elevar og lærarar at læreboka leier dei i ei bestemt retning mot ein formel eller algoritme, så kanskje opplev Thomas at boka undervurderer elevane si forståing av at dei blir leia mot ei akseptering av at ein formel er gyldig. Først og fremst vil slike problem der elevane skal koma fram til akseptering av ein formel truleg ikkje innehalda spørsmål frå den verkelege verda, som gjer at problemet ikkje blir opplevd veldig autentisk og relevant for elevane, spesielt ikkje dersom deira mål er instrumentell forståing. Når elevane blir leia gjennom stega vil det eksperimentelle aspektet Artigue og Blomhøj (2013) peikar på bli svekka ved at dei gjerne ikkje er nøyde til å prøva seg fram og testa eigne hypotesar i veldig stor grad. Dette fører også til at dei har mindre autonomi ved at læreboka fører dei frå steg til steg, og dei har difor ikkje eit eige ansvar for å komma seg heile vegen frå utgangspunktet til ønska konklusjon. Innanfor dette aspektet peiker Artigue og Blomhøj (2013) også på ansvaret for å vurdere eigen løysing, noko som gjerne kan opplevast lite relevant dersom elevane føler løysinga blir lagt fram av læreboka. Altså er det fleire av aspekta Artigue og Blomhøj (2013) peiker på at er viktige for god *inquiry* som ikkje er til stades i måten Thomas og Nina opplev at boka legg opp til utforsking. Det kan difor tenkjast at denne forma for utforsking ikkje gir ønska utbytte eller ikkje blir opplevd som engasjerande for elevane.

At lærarane kopljar resonnering og argumentasjon til utforsking er i tråd med læreplanen si skildring av kjerneelementa, ved at utforsking mellom anna handlar om å finna mønster og samanhengar, samt at klassen eller gruppa skal diskutera for å oppnå ei forståing (Utdanningsdirektoratet, u.å.-b). Identifisering av mønster kopljar Stylianides (2008) som kjent til resonnering og generalisering i sitt rammeverk. Lærarane legg vekt på at ein må

argumentera og resonnera for å utforska, som gjerne kjem fram i læreplanen si skildring ved at ein nyttar argument medan ein diskuterer, samt at fellesskapet resonnerer saman for å få denne felles forståinga.

5.3 Korleis implementerer lærarar i matematikk R2 resonnering og argumentasjon i undervisninga?

Forskingsspørsmålet rettar fokus mot korleis lærarane inkluderer resonnering og argumentasjon i si matematikkundervisning, mellom anna i form av kva metodar lærarane nyttar for å implementera resonnering og argumentasjon i undervisninga. I tillegg ønsker eg å sjå på lærarane si oppfatning av i kva grad dei implementerer aktivitetar kopla til resonnering og argumentasjon i matematikkundervisninga. Dette forskingsspørsmålet er kopla til den delen av det operasjonelle læreverket eg har omsett til «utspelt læreplan» (Remillard & Heck, 2014). Sidan denne studia baserer seg på intervju med lærarar er det berre mogeleg å få innblikk i lærarane si oppfatning av kva dei gjer i klasserommet, altså lærarane si oppfatning av den utspelte læreplanen, ikkje kva som faktisk utspelar seg i klasserommet. Det vil heller ikkje vera mogeleg å seie noko om korleis elevane opplev undervisninga eller det faktiske elevutbyttet.

Frå presentasjonen av resultata i kapittel 4 ser me at lærarane nyttar ulike metodar for å implementera resonnering og argumentasjon i undervisninga si, men at det er nokon fellestrekk. Dei er mellom anna alle opptekne av at elevane skal grunngi eigen tankegang medan dei løyser oppgåver, som eg skreiv i kapittel 5.1. Eit anna viktig fellestrekk er at lærarane legg opp til munnleg aktivitet for å implementera resonnering og argumentasjon, anten i mindre grupper eller i heilclassesamtale. Dette er positivt på den måten at dei legg opp til å utvikla resonnement og argument i fellesskap, som spesielt Hanna (2020) ser på som eit viktig trekk ved argumentasjon. Dette med å samarbeida under resonneringsprosessen peiker også Yackel og Hanna (2003) på som eit trekk mange opplev som sentralt for resonnering. Som Borko og Putnam (1996) peiker på stiller det krav til lærarane å gjennomføra undervisning som legg vekt på mellom anna resonnering og utforsking, ved at det krev at lærarane har mykje emnespesifikk kunnskap. Kanskje kan ein av grunnane til at det er krevjande for lærarar å gjennomføra denne typen undervisning vera at dei må respondera på elevane sine argument og resonnement, som krev tilstrekkeleg med matematisk kunnskap til å vurdera argumenta og resonnementa. Som Meyer og Schnell (2020) skriv kan ein vurdera

argument på tre ulike område. Lærarane kan vurderer argumenta ut frå matematisk innhald, til dømes om dei er gyldige (Kopperschmidt, 2000, sitert i Meyer & Schnell, 2020, s. 38). I tillegg kan dei vurderer argumenta ut frå overtydingsevne og strukturell dimensjon. Den strukturelle dimensjonen går gjerne på om dei ulike elementa Toulmin (2003) peiker på er til stades eller om det er innvendingar ein kan koma med. Fleire av lærarane stiller elevane spørsmål av typen «Er du sikker på at det alltid er slik?», når elevane kjem med argument i slike klassesamtalar. Dette er døme på slike innvendingar som kan vera ein del av argument, slik at elevane si resonnering blir utfordra og dei må gi utdjupande grunngeving for eigen tankegang, dei må koma med ryggdekning (Rangnes & Herheim, 2019; Toulmin, 2003).

Ein metode Nina nyttar for å leggja opp til resonnering og argumentasjon er at elevane diskuterer ein prøve dei allereie har gjennomført, for å diskutera løysingsmetodar og svar. I ein slik situasjon vil elevane gjerne vera nøydt til å overtyda kvarandre, utan at nokon av dei nødvendigvis veit kva som er riktig, noko som legg til rette for meir autentisk argumentasjon. I tillegg må elevane gjerne gjera ei vurdering på kvifor eit argument er gyldig eller ikkje for å avgjera om ei løysing er mogeleg, noko mange norske elevar ikkje er vande med (Burheim et al., 2023).

Alle lærarane som deltok i undersøkinga går gjennom bevis på tavla, og det kom fram at dette mellom anna er for at elevane skal bli kjend med tenkjemåten bak bevisa og matematisk notasjon. Dette er difor eit døme på ei handling lærarane gjer for at elevane si oppfatning av bevis skal stemma overeins med dei faktiske eigenskapane til matematiske bevis, som er ein del av den pedagogiske komponenten i rammeverket til Stylianides (2008).

Mykje matematikdidaktisk teori peiker på at arbeid med bevis er veldig vanskeleg for elevar (Dickerson & Doerr, 2014). Dette var også noko lærarane var tydelege på, at elevane slit i arbeid med bevis og at det krev mykje av dei. Fleire av lærarane som vart intervjua uttrykker at utvikling av bevis ofte krev dette trikset eller denne overgangen som elevar gjerne ikkje kjem fram til av seg sjølv, og at dette kan vera ein del av grunnen til at mange elevar har vanskar i arbeid med bevis. Som Epp (2003) hevdar, kjem også nokre av desse vanskanane med bevis på bakgrunn av at elevane ikkje har ei tydeleg oppfatning av dei logiske prinsippa som bevis gjerne bygger på. Fleire av lærarane nemner desse logiske reglane som bevis byggjer på, og det blir tydeleg frå intervjua at det å ikkje forstå dei logiske prinsippa vil vera til hinder i elevane sitt arbeid med bevis. Thomas meiner at det truleg vil vera mogeleg å arbeida

spesifikt mot å trenar opp resonneringsferdigheiter, men understrekar at dette ikkje er noko han legg opp til sjølv i undervisninga. Det kjem heller ikkje fram i dei andre intervjua at nokon av lærarane arbeider spesifikt for å forbetra elevane sine resonneringsferdigheiter. Dette kan derimot gjerne vera ein fordel ut frå forskingsrapporten til Cheng et al. (1986) om at elevar sine resonneringsferdigheiter gjerne blir betre ved at dei trenar spesifikt på dei logiske reglane samtidig som dei nyttar desse reglane i konkrete oppgåver.

På trass av at alle lærarane presenterer bevis på tavla er det ikkje semje om det er best å visa beviset samtidig som ein kjem med ein påstand, til dømes i form av ein formel, eller om det er betre å venta med beviset til etter at påstanden er akseptert av elevane. Det vil seie at elevane er kjend med til dømes ein formel og har lært seg å nytta den, før dei får presentert bevis og grunningeving for at formelen kan nyttast. I følgje Furinghetti og Morselli (2011) kan det å presentera ein matematisk påstand saman med eit bevis bidra til overtyding og systematisering. Kanskje kjem dette av at påstanden blir satt inn i ein matematisk kontekst ved at den blir bevist umiddelbart, i tillegg til at beviset kan verifisera påstanden og difor fungera overtydande. I arbeid med oppgåver vil det vera lurt å unngå at elevane berre skal bevisa påstandar dei allereie veit stemmer, då det å utvikla bevis blir meir ei prosedyre enn noko utforskande (Schoenfeld, 1994). Kanskje vil det same gjelda for lærarar si gjennomgang av bevis på tavla, at det opplevast meir nyttig for elevane om dei ikkje veit om ei påstand er sann eller ikkje før det blir innført eit bevis. Skott et al. (2018, s. 281) peiker på at ein måte å arbeida med bevis er om elevane sjølv deltek i arbeidet med å utvikla formodningar, som dei vidare kan prøva å bevisa eller mot-bevisa. Dette gjer arbeidet meir utforskande og undersøkande ved at elevane først må utvikla ei formodning, for så å prøva å bevisa denne, utan at dei veit om den er riktig. Ein slik måte å arbeida på liknar gjerne meir på måten matematikarar arbeidar på, og vil difor krevja meir autentisk argumentasjon og utvikling av bevis.

Kanskje kan meir utforskande arbeid med bevis også vera positivt for elevane si innstilling til arbeid med bevis. Som Knut peika på er nokon elevar negativt innstilt til arbeid med bevis fordi dei opplev det som vanskeleg, som er eit kjend problem i matematikkundervisning (Epp, 2003). Kanskje kan denne litt negative innstillinga også henge saman med at elevane ikkje ser behovet for bevis, slik De Villiers (1990) peiker på at mange lærarar opplev som ei utfordring. Dette hengd då gjerne saman med at elevane ofte blir bedt om å argumentera for eller bevisa påstandar dei allereie veit stemmer, og oppgåva blir då heller å visa at dei

meistrar beviset eller argumentet heller enn å overtyda seg sjølv eller andre. Om elevane blir bedt om å ta stilling til om ei påstand er riktig eller gal er det kanskje meir sannsynleg at dei ser behovet for bevis.

Vidare meiner Furinghetti og Morselli (2011) at det å inkludera elevane i utviklinga av bevis, og utfordra elevane til å utvikla egne bevis, legg til rette for matematisk forståing. Eg fekk ikkje inntrykk av at det å samarbeida i heilklasse om å utvikla bevis er noko lærarane brukar å gjera, men dei gav alle uttrykk for at elevane blir utfordra på å utvikla egne bevis, ved hjelp av ulike bevismetodar, sidan det å utvikla egne bevis er eit av kompetansemåla i matematikk R2. Mellom anna vart induksjonsbevis nemnt som ein viktig bevismetode i matematikk R2. Slikt arbeid med bevis kan difor i følge Furinghetti og Morselli (2011) bidra til auka matematisk forståing.

Som Dickerson og Doerr (2014) skriv vil lærarar si haldning til bevis påverka elevane si oppfatning av bevis og erfaringa elevane får med bevis, og dette kan gjerne også gjelda for resonnering og argumentasjon. Ernest (1988) peikar på dei tre lærarrollene, tilretteleggjaren, forklararen og instruktøren. Som Furinghetti og Morselli (2011) også peiker på opplevde eg at det ikkje alltid er samsvar mellom kva rolle lærarane ynskjer å ha og kva rolle dei gav uttrykk for at dei tek. Eg opplev dette ved at alle lærarane meiner at det å utvikla elevane sine ferdigheiter innanfor resonnering og argumentasjon er veldig viktig sidan det er ein sentral del av matematikken, samtidig som fleire av lærarane uttrykker at dei ikkje klarer å implementera resonnering og argumentasjon i så stor grad som dei ynskjer. Dette er mellom anna på grunn av tidspress og at lærarane føler at ikkje alle elevane får like mykje ut av denne typen undervisning. Dei opplev at fleire elevar arbeidar med matematikk og følgjer med i undervisninga dersom det ikkje er så mykje fokus på resonnering og argumentasjon og meir fokus på tradisjonelle oppgåver. Dette er då eit døme på korleis dei ulike delane av den operasjonelle læreplanen påverkar kvarandre ved at lærarane justerer planen for undervisninga ut frå at dei ønsker at flest mogeleg av elevane skal i det minste meistra oppgåver som berre krev instrumentell forståing, ut frå at dei opplev at elevane mistar fokus og dermed ikkje får noko utbytte av den typen undervisning dei gjerne ideelt sett vil ha.

Lærarane peikar også på at fleire av elevane er vande med å læra seg metodar og algoritmar utan å eigentleg skjønna kva dei gjer, altså berre tileigna seg instrumentell forståing (Skemp, 2006). Når elevane kjem på vidaregåande skule har dei hatt matematikk i mange år og har

gjerne innarbeida ein måte å læra på. Lærarane peiker difor på at dei gjerne berre har elevane i eit til to år i matematikk, som gjer det vanskelegare å endra elevane sin tankegang til å vera oppteken av forståing og å argumentera for påstandar og løysingar. Mellom anna uttrykker Nina at ho gjerne ønsker å følgja elevane over fleire år, slik at elevane kan bli meir vande med at ho vektlegg resonnering og argumentasjon, ikkje berre ei korrekt løysing på tradisjonelle oppgåver. Også Skemp (2006) peiker på at det kan oppstå utfordringar dersom lærar og elevar ikkje har ei felles oppfatning av om dei arbeider mot relasjonell eller instrumentell forståing. Han meiner at om elevane ønsker instrumentell forståing medan læraren arbeider for at elevane skal få relasjonell forståing, vil det vera frustrerande for læraren, men på kort sikt ikkje gi dei store problema for elevane (Skemp, 2006). Det kan derimot gi problem dersom oppgåvene går utanfor den standardiserte oppgåveformuleringa, i tillegg til at elevane kan læra det som kjem seinare lettare om dei har ei djupare forståing og ser den større samanhengen (Skemp, 2006). Med tanke på at fleire av lærarane peiker på at eksamen gjerne krev meir resonnering og argumentasjon etter innføring av LK20, vil instrumentell forståing gjerne også gi problem for elevane på kort sikt dersom dei trenar meir på utforsking og problemløysing i undervisninga og dette kjem på vurderingar og på eksamen.

I tillegg opplev eg at lærarane ikkje er heilt konsekvente i haldninga si til resonnering og argumentasjon i matematikkundervisning som eg skreiv over. Mellom anna uttrykte Gro at ho meiner at trening i resonnering og argumentasjon kan bidra til auka forståing og difor vil ta ei rolle som forklarar, samtidig som at ho opplev at ein del av elevane har tilstrekkeleg med utfordring med å læra seg metodar og få det Skemp (2006) kallar instrumentell forståing. Om ho vel å undervisa for å leggja til rette for at elevane får slik instrumentell forståing, tek ho gjerne rolla som instruktør (Ernest, 1988).

5.4 Metodologisk diskusjon

I dette delkapittelet ønsker eg å komma med ein metodologisk diskusjon, for å kunne vurdere kvaliteten på undersøkinga, samt kunne diskutera kva som kunne vore gjort annleis for å auka kvaliteten. Dette ønsker eg i hovudsak å gjera ved å ta føre meg dei fire kriteria for kvalitet i kvalitative undersøkingar som vart skrive om i kapittel 3, metodekapittelet.

Pålitelegheit i kvalitative undersøkingar handlar om at heile prosessen blir gjort synleg for lesarar, slik at det er mogeleg for lesarar å følgja og vurdere prosessen, på trass av at

kvalitative studiar stort sett ikkje kan etterprøvast (Johannessen et al., 2006, s. 199). Eg har så godt det let seg gjera skildra det eg har gjort i undersøkinga, som er viktig for å gjera undersøkinga mest mogeleg påliteleg (Johannessen et al., 2006, s. 199). Som nemnt var det å ha enkle spørsmål som intervjupersonane forstår også viktig (Krumsvik, 2019b). Sett i ettertid kunne nokre spørsmål vore endra for å få litt meir konkrete svar. Eit døme er i spørsmålet om rolla til argumentasjon og resonnering. Her kunne eg gjerne spurt kva funksjon lærarane meiner at desse konseptane har i undervisninga, sidan det då ville vore meir tydeleg for lærarane kva det vart spurt om. Dette vart synleg ved at dei svarta meir i retning av kor viktig resonnering og argumentasjon er i staden for spesifikt kva som er funksjonen til konseptane, sjølv om kva funksjonar lærarane opplev at resonnering og argumentasjon har i undervisninga også kom fram under intervjuet.

Som skriv i metodekapittelet vart det prøvd å tolka svarta til lærarane undervegs, for å kunne få ein respons på om eg hadde forstått lærarane riktig. Det vart peika på at dette kunne vera ein fordel for å kunne gje att intervjupersonen på ein riktig måte, og dermed betra pålitelegheita (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 193-194). Eit usikkerheitsmoment var derimot i tilfelle der eg opplevde at eg hadde forstått hovudelementa i det lærarane sa men gjerne la noko meir i det som vart sagt enn det som vart meint. Det gav ei oppleving av at eg la ord i munnen på lærarane, noko som ikkje var intensjonen. Når det er sagt var det å tolka svarta undervegs positivt i det store og heile, og eg opplevde det som ein tryggleik å kunne sjekke om eg hadde forstått lærarane. I dei fleste tilfella gav dette ei avklaring på at eg hadde forstått kva lærarane sa, eller at lærarane utdjupa det dei hadde sagt dersom dei følte eg ikkje hadde fått med meg heile essensen av utsegna deira.

Overføringsverdi handlar om i kva grad undersøkinga meistarar å etablere omgrep, forklaringar, skildringar og tolkingar som kan overførast til andre situasjonar. Som Krumsvik (2019b) skriv er gjerne overføringsverdien mindre om utvalet er lite. Med tanke på at utvalet i denne studia er fire lærarar, vil overføringsverdien vera avgrensa, av den grunn at det er vanskelegare å generalisere med færre deltakarar. Som nemnt tidlegare er tid og resursar orsaka til at det vart avgjort å ha fire intervjupersonar med i undersøkinga, medan ein ideelt sett ville hatt så mange intervjupersonar at ein kom til eit mettingspunkt (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 148).

Ein vesentleg del av kvaliteten til ei undersøking er om den har undersøkt det den var meint å undersøka og om funna er representative for røynda, ein vurderer truverda til undersøkinga (Johannessen et al., 2006, s. 199). Som nemnt tidlegare er to grep ein kan gjera for å auka truverda triangulering og vedvarande observasjon (Lincoln & Guba, 1985, s. 301). Også her var avgrensa tid og ressursar grunnen til at det ikkje var mogeleg å gjennomføra triangulering eller vedvarande observasjon. Som Postholm og Jacobsen (2018, s. 237) understrekar er det anbefala å heller vera merksam på og reflektera kring svakheiter i undersøkinga heller enn å bruka tid på å intervju fleire ulike kjelder eller nytta ulike metodar for datainnsamling, på bakgrunn av at ei masteroppgåve har avgrensa med tid og resursar.

Bekreftbarheit handlar om at funna som blir rapportert samsvarar med resultata frå forskinga og røynda (Johannessen et al., 2010, s. 232). I ei undersøking som dette vil alltid subjektiv tolking vera eit usikkerheitsmoment. Det er forsøkt å skildra prosessen og vala som er gjort undervegs for å gjera prosessen så transparent som mogeleg, slik at lesarar kan følgja undersøkingsprosessen. I tillegg kan det tenkjast at valet om å stilla leiande spørsmål undervegs i intervju, for å vurdere eiga tolking kan fungera positivt på bekreftbarheita ved at det blir tydlegare om intervjuar og intervjuperson har forstått kvarande, som vidare gjerne fører til mindre subjektiv tolking.

Kapittel 6: Avslutning

I dette avsluttande kapitlet vil det komma ein oppsummerande konklusjon, samt forslag til moglege vidare forskning og tankar om kva implikasjonar denne undersøkinga har i praksis. Målet for undersøkinga var å sjå på kva lærarar i matematikk R2 tenkjer om resonnering og argumentasjon og korleis dei forhold seg til desse konseptane i undervisninga. Problemstillinga som undersøkinga ønska å setja lys på vart difor: «Kva er lærarar i matematikk R2 sine haldningar til, samt forståing av resonnering og argumentasjon og i kva grad implementerer dei konseptane i undervisninga?» Forskingsspørsmåla som vart utleia for å undersøka denne problemstillinga er:

- Kva er lærarar i matematikk R2 sine haldningar til og forståing av konseptane resonnering og argumentasjon?
- Korleis forstår lærarane læreplanen og korleis påverkar læreplanen lærarar si undervisning knytt til resonnering og argumentasjon?
- Korleis implementerer lærarar i matematikk R2 resonnering og argumentasjon i undervisninga?

Konklusjonen vil gi eit kortfatta svar på dei tre forskningsspørsmåla og problemstillinga, på bakgrunn av drøftinga som eg gjort i det føregåande kapitlet. Vidare følgjer tankar om korleis dette påverkar min framtidige lærarpraksis og gjerne korleis det kan påverka den generelle lærarpraksisen. Avslutningsvis blir forslag til vidare forskning lagt fram. Med tanke på at dette er ei lita undersøking vil det vera avgrensa moglegheit til å generalisera ut frå denne undersøkinga.

6.1 Konklusjon

Det kjem fram av studia at lærarane har ei felles oppfatning om at resonnering og argumentasjon handlar om å sjå samanhengar og trekka slutningar. I tillegg handlar det om prosessen frå ein får eit problem og heile tankeprosessen og all grunngeving fram til ein har ei løysing. Ikkje alle lærarane kjem med ein veldig utdjupande og tydeleg definisjon på omgrepa argumentasjon, resonnering og bevis, men det kan ein gjerne ikkje venta når forskingslitteraturen heller ikkje er konsekvent i definisjonane. Lærarane opplev bevis som

noko meir formelt enn resonnering og argumentasjon, men knyt likevel bevis tett opp mot dei to andre omgrepa. Generalisering blir også trekt inn som ein essensiell del av konseptet resonnering og argumentasjon, og lærarane er opptekne av at det å kunna nytta kunnskap i nye situasjonar og at bevis skal vera generelle.

Lærarane har ei haldning om at resonnering og argumentasjon er veldig viktig og ein heilt sentral del av matematikken. Dette heng gjerne saman med at dei opplev at resonnering og argumentasjon har mange viktige funksjonar i matematikkundervisninga, der verifikasjon, forklaring, utforsking, kommunikasjon og systematisering er blant rollene som kan kjennast att i det lærarane uttrykker, og som også blir peika på av mellom anna Reid og Knipping (2010, s. 76-77) som viktige roller ved bevis. Nokon av lærarane er derimot tilbakehaldne med å ha for mykje fokus på resonnering og argumentasjon. Det kjem mellom anna av at dei meiner at elevane og har behov for å meistra spesifikke ferdigheiter og utrekningar, og for mange kan det difor vera enklare å utvikla instrumentell forståing (Skemp, 2006).

Lærarane oppgir at dei i lita grad let seg direkte påverka av kjerneelementa i den offisielle læreplanen, men blir meir påverka av lærebok og eksamen. Lærarane gir derimot uttrykk for at dei implementerer resonnering og argumentasjon uavhengig av at det er eit kjerneelement, sidan dei ser det som ein essensiell del av matematikken. I tillegg til kjerneelementa er eksamen og kompetansemål, samt andre delar av den vedtekne læreplanen del av den offisielle læreplanen (Remillard & Heck, 2014). Så sjølv om lærarane oppgir at dei i lita grad let seg påverka direkte av kjerneelementa tyder ikkje det at dei ikkje let seg påverka av den offisielle læreplanen. Mellom anna vil lærarane si tolking av kompetansemålet som handlar om å analysa, forstå og utvikla bevis spela inn på korleis dei implementerer resonnering og argumentasjon. På trass av at lærarane var noko usikre på kva det tyda at elevane skal utvikla eigne bevis, kom dei alle til ein konklusjon i nærleiken av at elevane utviklar eigne bevis ved at dei nyttar kjende bevismetodar i nye situasjonar.

Lærarane legg spesielt opp til munnleg aktivitet for å utvikla evner til resonnering og argumentasjon, som er i tråd med å sjå på resonnering og argumentasjon som sosiale prosessar (Hanna, 2020; Yackel & Hanna, 2003). I tillegg er det at elevane grunnir og argumenterer for svara sine viktig for lærarane. Alle dei fire lærarane har tavlegjennomgang av bevis for at elevane skal bli vande med og forstå tenkjemåten bak bevisa, og gjerne få fram nokon slike triks dei peiker på at utvikling av bevis ofte krev. Fleire av dei opplev derimot at

gjennomgang av bevis er utfordrande, ved at det ikkje er lett å vita kva bevis som er nyttige å presentera på tavla, samt at dei opplev at elevane fell ut om bevisa blir for lange.

I følgje tre av lærarane er tidsbruk ei utfordring med implementering av resonnering og argumentasjon. Ei anna utfordring er, i følgje nokon av lærarane, at elevane opplev arbeid med resonnering, argumentasjon og bevis som veldig utfordrande noko som og kjem fram i litteraturen (Epp, 2003; Reid & Knipping, 2010). Kanskje kan elevane sine utfordringar i arbeid med bevis, samt at dei ikkje ser behovet for å kunne utvikla bevis vera nokon av årsakene til at fleire av lærarane opplev at elevane er litt negativt innstilt til arbeid med bevis. Dette resulterer gjerne i at lærarane fokuserer mindre på resonnering og argumentasjon enn det dei gjerne ville gjort om dei berre skulle følge eiga overtyding om at resonnering og argumentasjon er veldig viktig og dei ikkje vart påverka av korleis undervisninga blir motteke av elevane.

6.2 Implikasjonar for praksis

Som skrive innleiingsvis er resonnering og argumentasjon eit av kjerneelementa i den nye læreplanen og det er eit mål i skulen at elevane skal læra å resonnera og argumentera (Utdanningsdirektoratet, 2019). I tillegg til at det å læra å resonnera og argumentera er mål i seg sjølv, er det og ein tanke om at det å meistra resonnering og argumentasjon er middel for andre mål, som kritisk tenking (Utdanningsdirektoratet, u.å.-a). For mi framtidige lærarkarriere tenkjer eg at dette masterprosjektet har ført til eit større ønske om å ha fokus på resonnering og argumentasjon i undervisninga, på bakgrunn av at det er ein så essensiell del av matematikken. I tillegg inspirerte lærarane meg til at det er veldig mange måtar å implementera resonnering og argumentasjon og at dette gjerne er ein fin måte å legge til rette for meir munnleg aktivitet. I tillegg har det ført til at eg kjem til å tenkja meir over korleis eg tek bevis inn i mi framtidige undervisning, og det har gjort meg meir bevisst på at måten bevis blir presentert for elevane kan påverka deira forståing, men og deira oppleving med bevis. For å leggja meir til rette for matematisk forståing kan klassen saman utvikla beviset, gjerne for ei påstand elevane ikkje veit om stemmer (Furinghetti & Morselli, 2011). Prosjektet har ført til eit ønske om å leggja til rette for at elevane kan få meir konseptuell forståing, samtidig som det er viktig å ha i bakhovudet at instrumentell forståing og er viktig for elevane, sidan det mellom anna vil gjera det enklare å løysa mange av dei oppgåvene elevane blir presentert for i dagens skule. Prosjektet har også gjort meg meir bevisst på at mine haldningar og erfaringar

påverkar korleis eg tolkar læreplanen, som vidare påverkar korleis læreplanen utspelar seg i klasserommet. Eg tenkjer difor at det å diskutera læreplanen med andre kan vera nyttig.

For å setja prosjektet i eit større perspektiv gir dette prosjektet eit lite innblikk i fire lærarar sine haldningar til og erfaringar med resonnering og argumentasjon i undervisninga. Det kan tenkjast at prosjektet kan gi ein peikepinn på korleis nokon lærarar i vidaregåande skule nyttar seg av læreplanen i planlegging av undervisning, samt at det kjem fram at alle dei fire lærarane var usikre på kva som ligg i kompetansemålet som omhandlar utvikling av bevis. Kanskje er dette noko som gjeld fleire lærarar sidan det gjaldt alle som deltok i denne undersøkinga, og dermed noko som burde tydeleggjerast. Ein siste implikasjon eg tenkjer oppgåva kan ha for praksis er at fleire av lærarane peika på at boka dei nyttar gjerne legg opp til ei kjedeleg form for utforsking. Dei opplev at boka ønsker å stegvis leia elevane mot å akseptera ein formel, og at elevane då ikkje får vera kreative, sidan dei berre blir ført fram mot ein formel. Altså er det gjerne eit ønske om å få til meir autentisk utforsking, resonnering og argumentasjon i undervisninga, men kanskje treng lærarar inspirasjon eller tips til korleis dei kan gjera dette. Det kan vera ei oppfordring til dei som skriv lærebøkene eller utviklar andre læringsressursar, men og til dei som driv med lærarutdanning.

6.3 Forslag til vidare forskning

Som nemnt i kapittel 5.4 – metodologisk diskusjon, har tid og resursar vore ein avgrensande faktor i undersøkinga. For å bygge vidare på undersøkinga kunne det vore interessant å sjå på eit større utval og gjerne kombinera intervju med observasjon av kva som utspelar seg i klasserommet for å få innblikk i utspelt læreplan i tillegg til lærartenkt læreplan. I tillegg kunne dette gitt meir pålitelege og truverdige resultat. Med meir resursar kunne ein gjerne også gått djupare inn på den delen av den operasjonell læreplan som vert kalla elevutbytte, for å sjå på korleis elevane sine ferdigheiter innanfor resonnering og argumentasjon blir påverka av undervisninga og lærarane sine tankar og haldningar kring konsept.

Det har tidlegare blitt gjort undersøkingar der lærarar si oppfatning av konkrete bevis har vore fokuset for studia, gjerne ved at lærarane skal skilja mellom bevis og ikkje-bevis argument (Knuth, 2002). Eg tenkjer at det kunne blitt gjort med fokus på resonnement og argument også, for å få eit djupare innblikk i korleis lærarar oppfattar konkrete resonnement og argument, og kva dei vurderer som gode argument og resonnement. Til dømes kunne ein sett

på kva argument lærarane opplev som overtydande, eller kva argument og resonnement dei opplev som gyldige.

Som skrive hadde alle lærarane eg intervjuar matematikk R2 for første gang etter at LK20 trådde i kraft for dette faget. Eit anna interessefelt kunne difor vore om lærarar sine haldningar til resonnering og argumentasjon er like etter fleire år med den nye læreplanen. Mellom anna meinte Gro at ho truleg var meir tru til læreboka no første året med ny læreplan enn ho gjerne vil vera seinare. I tillegg sa fleire at dei ikkje har sett så mykje på dei nye eksamensoppgåvene, samt at det ikkje har vore så mange eksamenssett i R2 etter ny læreplan. Med tanke på at lærarane oppga at dei let seg styra av eksamen vil gjerne innblikk i fleire eksamenssett vera med på å setja kursen for lærarane si vidare undervisning i matematikk R2, og deira haldning til resonnering og argumentasjon i undervisninga. Til dømes kunne ein følgd lærarane over ein periode på tre år for å få eit betre bilete av korleis LK20 påverkar lærarane si haldning til og implementering av resonnering og argumentasjon i undervisninga.

Referansar

- Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 797-810. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>
- Baker, S. E. & Edwards, R. (2012). How many qualitative interviews is enough. *National Centre for Research Methods Review Paper*.
- Bergqvist, T. & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *The Journal of mathematical behavior*, 31(2), 252-269. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.12.002>
- Bieda, K. N. & Staples, M. (2020). Justification as an equity practice. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 113(2), 102-108. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5951/MTLT.2019.0148>
- Bingham, A. J. (2023). From Data Management to Actionable Findings: A Five-Phase Process of Qualitative Data Analysis. *International journal of qualitative methods*, 22. <https://doi.org/10.1177/16094069231183620>
- Borko, H. & Putnam, R. T. (1996). Learning to teach. I D. C. Berliner & R. C. Calfee (Red.), *Handbook of educational psychology* (s. 673-708). Simon & Schuster Macmillian.
- Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, 3(2), 77-101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>
- Burheim, O. T., Dahl, H., Hansen, E. S., Langfeldt, M. B., Lægran, M. & Skarderud, A. (2023). Kom i gang med argumentasjon! *Tangenten*, 4, 24-28.
- Cheng, P. W., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. & Oliver, L. M. (1986). Pragmatic versus syntactic approaches to training deductive reasoning. *Cognitive Psychology*, 18(3), 293-328. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0010-0285\(86\)90002-2](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0010-0285(86)90002-2)
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). Routledge.
- Conner, A. & Staples, M. (2022). Introduction: Conceptualizing Argumentation, Justification, and Proof in Mathematics Education. I K. N. Bieda, A. Conner, K. W. Kosko & M. Staples (Red.), *Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof* (s. 1-10) (Research in Mathematics Education). Springer International Publishing. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6>
- Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Birkhäuser.
- De Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, 24(24), 17-24.
- Dickerson, D. S. & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics education research journal*, 26(4), 711-733. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0091-6>
- Epp, S. S. (2003). The Role of Logic in Teaching Proof. *The American mathematical monthly*, 110(10), 886-899. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1080/00029890.2003.11920029>
- Ernest, P. (1988, August). *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. 6th International Congress of Mathematical Education, Budapest. <http://webdoc.sub.gwdg.de/edoc/e/pome/impact.htm>
- Fey, J. T. (1979). Mathematics teaching today: perspectives from three national surveys. *The Mathematics teacher*, 72(7), 490-504. <https://doi.org/10.5951/MT.72.7.0490>
- Fontana, A. & Frey, J. H. (2005). The Interview: From Neutral Stance to Political Involvement. I N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *The Sage handbook of qualitative research* (3. utg., s. 695-727). Sage.

- Furinghetti, F. & Morselli, F. (2011). Beliefs and beyond: hows and whys in the teaching of proof. *ZDM Mathematics Education*, 43(4), 587-599. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0316-7>
- Furinghetti, F., Olivero, F. & Paola, D. (2001). Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom. *International journal of mathematical education in science and technology*, 32(3), 319-335. <https://doi.org/10.1080/00207390120360>
- Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., Knain, E., Mørch, A., Naalsund, M. & Skarpaas, K. G. (2016). *Med ARK&APP – Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer*. Universitetet i Oslo. https://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/arkapp_syntese_endelig_til_trykk.pdf
- Guba, E. G. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational communication and technology*, 29(2), 75-91. <https://doi.org/10.1007/BF02766777>
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational studies in mathematics*, 44(1/2), 5-23. <https://doi.org/10.1023/A:1012737223465>
- Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 561-566). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_102
- Hiebert, J. (2007). What research says about the NCTM Standards. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 5-23). National Council of Teachers of Mathematics.
- Jablonka, E. (2020). Critical Thinking in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 159-163). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_35
- Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational studies in mathematics*, 96(1), 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Johannessen, A., Christoffersen, L. & Tufte, P. A. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (4. utg. utg.). Abstrakt.
- Johannessen, A., Tufte, P. A. & Christoffersen, L. (2006). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (3. utg. utg.). Abstrakt forl.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. & National Research Council. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. National Academy Press. <https://doi.org/10.17226/9822>
- Knuth, E. J. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for research in mathematics education*, 33(5), 379-405. <https://doi.org/10.2307/4149959>
- Krumsvik, R. J. (2019a). Kvalitative metodar i lærarutdanninga. I R. J. Krumsvik (Red.), *Kvalitativ metode i lærarutdanninga* (s. 151-190). Fagbokforlaget.
- Krumsvik, R. J. (2019b). Validitet i kvalitativ forskning. I R. J. Krumsvik (Red.), *Kvalitativ metode i lærarutdanninga* (s. 191-204). Fagbokforlaget.
- Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.regjeringen.no/contentassets/53d21ea2bc3a4202b86b83cfe82da93e/overordnet-del---verdier-og-prinsipper-for-grunnoppleringen.pdf>
- Kunnskapsdepartementet. (2022, 19. oktober). *Fag og læreplaner*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

<https://www.regjeringen.no/no/tema/utdanning/grunnopplaring/artikler/innhold-vurdering-og-struktur/id2356931/?expand=factbox2615771>

- Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (T. M. Anderssen & J. Rygge, Oms.; 3. utg.). Gyldendal akademisk.
- Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63. <https://doi.org/10.3102/00028312027001029>
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Sage.
- Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational studies in mathematics*, 67(3), 255-276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- Meyer, M. & Schnell, S. (2020). What counts as a "good" argument in school?—how teachers grade students' mathematical arguments. *Educational studies in mathematics*, 105(1), 35-51. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09974-z>
- Maaß, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 779-795. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0528-0>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2008). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren*. Universitetsforlaget.
- Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring*. Undervisningsministeriet. R. Universitetscenter.
- Patton, M. Q. (2015). *Qualitative research & evaluation methods: integrating theory and practice* (4. utg.). Sage.
- Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.
- Rangnes, T. E. & Herheim, R. (2019). Lærers tilrettelegging for argument og agens. I K. R. Breivega & T. E. Rangnes (Red.), *Demokratisk dannelse i skolen: Tverrfaglige empiriske studier* (s. 168-186). Universitetsforlaget. <https://doi.org/https://doi.org/10.18261/9788215031637-2019-09>
- Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: research, learning and teaching*. Sense.
- Remillard, J. T. & Heck, D. J. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 46(5), 705-718. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4>
- Rumsey, C., Whitacre, I., Atabaş, Ş. & Smith, J. L. (2022). Argumentation in the Context of Elementary Grades: The Role of Participants, Tasks, and Tools. I K. N. Bieda, A. Conner, K. W. Kosko & M. Staples (Red.), *Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof* (s. 19-34) (Research in Mathematics Education). Springer, Cham. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6_3
- Sawyer, R. K. (2014). Introduction: The New Science of Learning. I R. K. Sawyer (Red.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (2. utg., s. 1-18) (Cambridge Handbooks in Psychology). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139519526.002>
- Schoenfeld, A. H. (1994). What Do We Know About Mathematics Curricula? *Journal of mathematical behavior*, 13(1), 55-80. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0732-3123\(94\)90035-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0732-3123(94)90035-3)

- Sikt. (2023, 25. april 2023). *Nye og enklare maler for informasjonsskriv*. Sikt - kunnskapssektorens tjenesteleverandør. <https://sikt.no/aktuelt/nye-og-enklere-maler-informasjonsskriv>
- Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics teaching in the middle school*, 12(2), 88-95. <https://doi.org/10.5951/MTMS.12.2.0088>
- Skott, J., Skott, C. K., Jess, K. & Hansen, H. C. (2018). *Matematik for lærerstudierende: Delta 2.0 Fagdidaktik, 1.-10. klasse* (2. utg.). Samfundslitteratur.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for research in mathematics education*, 38(3), 289-321. <https://doi.org/10.2307/30034869>
- Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2022). On the Meanings of Argumentation, Justification, and Proof: General Insights from Analyses of Elementary Classroom Episodes. I K. N. Bieda, A. Conner, K. W. Kosko & M. Staples (Red.), *Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof* (s. 65-72) (Research in Mathematics Education). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6_6
- Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the learning of mathematics*, 28(1), 9-16.
- Tall, D. (1995). *Cognitive development, representations & proof, justifying and proving in school mathematics*. Justifying and Proving in School Mathematics, London.
- Tangen, R. (2014). Balancing Ethics and Quality in Educational Research-the Ethical Matrix Method. *Scandinavian journal of educational research*, 58(6), 678-694. <https://doi.org/10.1080/00313831.2013.821089>
- Tierney, W. G. & Clemens, R. F. (2011). Qualitative Research and Public Policy: The Challenges of Relevance and Trustworthiness. I J. C. Smart & M. B. Paulsen (Red.), *Higher Education: Handbook of Theory and Research* (Bd. 26, s. 57-83) (Higher Education: Handbook of Theory and Research). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0702-3_2
- Toulmin, S. (2003). The layout of arguments. I S. Toulmin (Red.), *The uses of argument* (2. utg., s. 87-134). Cambridge University Press. <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005.007>
- Umland, K. & Sriraman, B. (2014). Argumentation in Mathematics. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (1. utg., s. 44-46). Springer, Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>
- Universitetet i Bergen. (2023, 30. november). *Lagringssguide*. Universitetet i Bergen. <https://www.uib.no/lagring#lagringstjenester-nbsp->
- Utdanningsdirektoratet. (2019, 18. november). *Hva er kjerneelementer?* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Henta 12. januar frå <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/>
- Utdanningsdirektoratet. (u.å.-a). *Matematikk R (MAT03-02), Fagenes relevans og sentrale verdier*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat03-02/om-faget/fagets-relevans-og-verdier>
- Utdanningsdirektoratet. (u.å.-b). *Matematikk R (MAT03-02), Kjerneelementer*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat03-02/om-faget/kjerneelementer>
- Viholainen, A., Partanen, M., Piironen, J., Asikainen, M. & Hirvonen, P. (2015). The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20, 157-178.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick, W. G. W. G. Martin & D. Schifter (Red.), *A Research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 227-236). National Council of Teachers of Mathematics.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv

Vil du delta i forskingsprosjektet

Lærarar i matematikk R2 sine haldningar til, samt forståing og implementering av resonnering og argumentasjon i undervisninga.

Dette er eit spørsmål til deg om å delta i eit forskingsprosjekt der føremålet er å sjå på lærarar i matematikk R2 si forståing av, og implementering av resonnering og argumentasjon i undervisninga. I dette skrivet gjev vi deg informasjon om måla for prosjektet og om kva deltaking vil innebere for deg.

Føremål

Våren 2024 skal eg levera mi masteroppgåve i matematikdidaktikk og ønsker i denne oppgåva å sjå på korleis lærarar i matematikk R2 forhold seg til resonnering og argumentasjon i undervisninga og korleis dei eventuelt implementerer dette i ulike tema i matematikkfaget.

Forskingsspørsmål

- Kva haldningar og forståing har lærarar i matematikk R2 til resonnering og argumentasjon?
- Korleis implementerer lærarar i matematikk R2 resonnering og argumentasjon i undervisninga?
- Korleis påverkar læreplanen lærarar si undervisninga knytt til resonnering og argumentasjon?

Kven er ansvarleg for forskingsprosjektet?

Universitetet i Bergen er ansvarleg for prosjektet.

Kvifor får du spørsmål om å delta?

Grunnen til at du får spørsmål om å delta er fordi eg ønsker å intervjuja lærarar som underviser i matematikk R2. Av praktiske omsyn er det ønskeleg med deltakarar frå Bergensområdet eller Haugalandet, då prosjektet inkluderer intervju. Vidare ønsker eg å inkludera rundt 3-5 personar i prosjektet. Det er ønskeleg med variasjon i alder, kjønn, erfaring og skulestorleik.

Kva inneber det for deg å delta?

Datainnsamlinga vil bestå av intervju der opplysningane blir notert samt at det blir teke lydopptak. Spørsmåla i intervjuet vil omhandla læraren si haldning til, og implementering av resonnering og argumentasjon i undervisninga. Intervjuet vil truleg vara i omtrent 45-60 min.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Dersom du vel å delta, kan du når som helst trekkje samtykket tilbake utan å gje nokon grunn. Alle personopplysingane dine vil då bli sletta. Det vil ikkje føre til nokon negative konsekvensar for deg dersom du ikkje vil delta eller seinare vel å trekkje deg.

Ditt personvern – korleis vi oppbevarer og bruker opplysningane dine

Vi vil berre bruke opplysningane om deg til føremåla vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandlar opplysningane konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Opplysningane som vert samla inn, notat og lydopptak vil bli oppbevart på passordbeskytta eining, der berre rettleiar og masterstudent vil ha tilgang. Deltakaren vil ikkje kunne kjennast att i publikasjonen.

Kva skjer med opplysningane dine når vi avsluttar forskingsprosjektet?

Det er forventa at prosjektet blir avslutta 1. juni 2024 og opplysningar i form av lydopptak og kontaktopplysningar, blir sletta innan 1. september 2024, medan notat og transkripsjonar blir anonymisert.

Kva gjev oss rett til å behandle personopplysningar om deg?

Vi behandlar opplysningar om deg basert på samtykket ditt.

På oppdrag frå *Universitetet i Bergen* har personverntenestane ved Sikt – Kunnskapssektorens tenesteleverandør vurdert at behandlinga av personopplysingar i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettar

Så lenge du kan identifiserast i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i kva opplysingar vi behandlar om deg, og å få utlevert ein kopi av opplysingane,
- å få retta opplysingar om deg som er feil eller misvisande,
- å få sletta personopplysingar om deg,
- å sende klage til Datatilsynet om behandlinga av personopplysingane dine.

Dersom du har spørsmål til studien, eller om du ønskjer å vite meir eller utøve rettane dine, ta kontakt med:

Universitetet i Bergen ved Trond Stølen Gustavsen, trond.gustavsen@uib.no

Masterstudent: Hanne Hjorteland, hhj014@uib.no

Vårt personvernombod: Janecke Helene Veim, personvernombud@UiB.no

Dersom du har spørsmål knytt til vurderinga av prosjektet frå Sikts personverntenester kan du ta kontakt via:

- e-post (personverntjenester@sikt.no) eller telefon: 73 98 40 40.

Venleg helsing

Trond Stølen Gustavsen
(Rettleiar)

Hanne Hjorteland

Vedlegg 2: Samtykkeerklæring

Eg har motteke og forstått informasjon om prosjektet «Lærarar i matematikk R2 sine haldningar til, samt forståing og implementering av resonnering og argumentasjon i undervisninga» og har fått høve til å stille spørsmål.

Eg har forstått at eg kan trekka tilbake samtykket ved ei seinare anledning utan å oppgje grunn. Innsamla data vil då bli sletta. Eg samtykker til:

- å delta i intervju.

Eg samtykker til at opplysingane mine kan behandlast fram til prosjektet er avslutta.

(Signert av prosjektdeltakar, dato)

Vedlegg 3: Intervjuguide

Intervjuguide – masteroppgåve

Spørsmåla er rettleiande og det vil komma spørsmål som følger opp det kom kjem fram i intervjuet.

1. Kva legg du i omgrepa resonnering, argumentasjon og bevis?(samanheng mellom dei, likskapar/skilnadar argumentasjon og bevis, formelle bevis, einigheit i klassen, bevis vs «vis at») (husk å vera merksam på at alle blir nemnt!)

I LK20, som for vg3 og dermed R2 vart innført skuleåret 22/23 har ein fleire kjerneelement. I matematikk R2 er desse *utforsking og problemløysing, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering, modellering og anvendelsar og matematiske kunnskapsområde*. I kva grad forhold du deg til kjerneelementa i planlegginga av undervisninga di?

2. Kva tankar gjer du deg kring kjerneelementet *resonnering og argumentasjon* i læreplanen?(I kva grad påverkar det undervisninga, knyta til kompetansemål andre kompetansemål enn det om bevis)(Korleis tolkar du læreplanspunktet som går spesifikt på bevis i læreplanen? - analysere og forstå matematiske bevis, forklare de bærende ideene i et matematisk bevis og utvikle egne bevis)
3. Kva rolle tenkjer du argumentasjon og resonnering spelar i matematikkundervisninga?(rollene til bevis, LK20, implementering i eiga undervisning(oppgåver, gjennomgang), leggja til rette munnleg/skriftleg, utfordringar, ulike tema i matematikken, induksjonsbevis?)
4. Er det noko meir du vil seie om i kva grad og på kva måte du tenkjer at fokus på «resonnering og argumentasjon» kan påverka elevane si læring?(rollene til bevis, fordelar/ulempar)
5. Korleis vektlegg du resonnering og argumentasjon i vurderingssituasjonar?(LK20, ny type eksamen?, forhold mellom undervisning og vurderingssituasjonar/eksamen, tankar om korleis eksamen vektlegg resonnering og argumentasjon, «vis at..» vs bevis).
6. Er det noko meir du ønsker å seie om temaet resonnering og argumentasjon, noko eg ikkje har spurt om eller ønsker du å utdjupa noko du allereie har snakka om?