UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Algebra i norske lærebøker

En analyse av tre lærebøker for 8.trinn

Celine Engh

Masteroppgave i matematikkdidaktikk – MAT399K

Matematisk institutt

Universitetet i Bergen, juni 2024

Forord

Det er med en blanding av vemod, lettelse, glede og stolthet jeg avslutter min masteroppgave og dermed også markerer slutten på mine fem år ved lektorutdanningen på Universitetet i Bergen. Denne reisen har vært innholdsrik på mange måter, den har gitt meg mange erfaringer og mye verdifull kunnskap, men ikke minst har den beriket livet mitt med mange flotte mennesker, som hver og en har spilt en rolle for at jeg kom meg gjennom disse årene, og derfor fortjener en stor takk.

Først og fremst vil jeg takke min veileder, Johan Lie, for mange motiverende ord, og for å ha hatt troa på meg gjennom hele prosjektet. En spesiell takk går til mine fantastiske studievenninner Ingrid, Ingrid, Emma og Andrea. Dere fortjener æren for at jeg har fullført, dere har virkelig dratt meg gjennom i de mest utfordrende tidene.

Videre vil jeg også få takke verdens beste Theo, for at du er min stabile klippe, og for at du alltid er der når jeg trenger deg.

En stor takk til Marlene, Mamma og Pappa, for at dere tar telefonen uansett når jeg ringer, og alltid har noen motiverende og støttende ord på lager. Og ikke minst, takk for at dere tok dere tid til å lese gjennom og rette denne oppgaven.

Til slutt, en takk til min kjære bestefar, for alle fine år. Det er en ære å følge i dine fotspor. Jeg vet at du ville vært stolt av meg nå.

31.mai 2024

Celine Engh

Sammendrag

Denne masteroppgaven undersøker presentasjonen og struktureringen av algebra i tre utvalgte norske lærebøker i matematikk for 8.trinn. Motivasjonen for studien stammer fra de vedvarende utfordringene norske elever møter i algebra, som kommer til uttrykk gjennom internasjonale undersøkelser som PISA og TIMSS. Resultatene fra disse undersøkelsene tyder på at norske elever stadig gjør det dårligere i algebra enn andre elever på samme alder fra andre land. Dette viser at det er nødvendig å undersøke hvordan algebra blir undervist i norske skoler. Følgende problemstilling er blitt belyst i oppgaven: *Hvordan presenterer og strukturer tre lærebøker algebrakapittelet for matematikk på 8.trinn, og hvilken innvirkning har dette på forståelsen av algebraiske konsepter blant elever?*

I oppgaven anvendes det metodiske rammeverk til Charalambous et al. (2010), som kombinerer kvalitative og kvantitative analyseteknikker til å se på hvordan algebraiske konsepter blir presentert og brukt i lærebøkene. Analysen fokuserer på både innholdet og de pedagogiske strategiene som brukes for å formidle algebraisk tenkning. Dette inkluderer en vurdering av oppgavetyper og hvilken form for matematisk resonnering som fremmes i arbeidet med algebra.

Resultatene viser store forskjeller i måten algebra blir presentert og gjennomgått i de ulike lærebøkene. Maximum 8 og Matemagisk 8 støtter i større grad dybdelæring gjennom problemløsning og praktiske anvendelser av algebra, mens Matematikk 8 fokuserer mer på mekanisk trening og memorering av algoritmer. Disse observasjonene er sentrale og peker på viktigheten av en balansert undervisningsmetode i algebra, som utfordrer elevene og støtter deres evne til å bruke algebraiske konsepter i nye og ukjente situasjoner.

Innhold

Tabelliste

Figurliste

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Matematikk har alltid vært favorittfaget mitt. Min fascinasjon for faget startet allerede i barneskolen, og har siden vært drevet av både gledene og utfordringene matematikken førte med seg. Jeg husker spesielt godt mitt første møte med algebra i ungdomsskolen, i hovedsak på grunn av at jeg for første gang fikk toppkarakter på en matteprøve. Denne opplevelsen var ikke bare med på å styrke min kjærlighet for faget, men åpnet også øynene mine for den spennende verden av bokstaver og symboler.

Siden Norges første deltagelse i PISA-undersøkelsen i 2000, har norske elevers prestasjoner i matematikk vært et mye diskutert tema i utdanningsdebatten. PISA-rapportene fra 2003 til 2015 viser at prestasjonene har vært relativt stabile, men med noen svingninger. Den første alvorlige vekkeren kom med resultatene fra undersøkelsen i 2003, som utløste det såkalte *PISA-sjokket*. Dette sjokket skyldtes at Norge, med bakgrunn i sine økonomiske forutsetninger, oppnådde middelmådige resultater sammenlignet med andre OECD-land[1] (Grønmo et al., 2017, s. 41). I 2015 og 2018 presterte de norske elevene bedre enn OECD gjennomsnittet. Resultatene fra PISA 2022 viser derimot at norske elever i gjennomsnitt presterte dårligere i matematikk enn de har gjort noen gang tidligere, noe som igjen ledet til bekymringer (Jensen et al., 2023, s. 1).

TIMSS-undersøkelsen har også gitt verdifull innsikt I norske elevers matematiske ferdigheter. Resultatene fra TIMSS 2019 viste at norske elever har hatt en liten tilbakegang når det gjelder generelle matteferdigheter, og elevene presterer dårligst i algebra, hvor de også gjør det dårligere enn sine internasjonale jevnaldrende (Kaarstein et al., 2020, s. 16-19). Denne tydelige svakheten i algebra understreker et behov for å undersøke hvordan matematikk, spesifikt algebra, undervises i norske skoler.

[1] OECD-land er land som er medlem av Organisasjonen for økonomiske samarbeid og utvikling. Et internasjonalt forum hvor økonomiske og sosiale spørsmål diskuteres og analyseres. Dette hjelper medlemslandene med å utvikle politikk som fremmer økonomisk vekst og sosial trygghet Utenriksdepartementet. (2023, 15.mars 2023). *Kort om OECD*. Regjeringen.no. https://www.regjeringen.no/no/tema/naringsliv/handel/ud_innsikt/om_oecd/id707180/

Lærebokens rolle i matematikkundervisningen er å være hovedkilden til kunnskapen som fremheves i læreplanen. For å kunne undervise og lære matematikk trengs det en representasjon av det som skal læres, og lærebøkene tilbyr dette (Rezat & Strässer, 2017, s. 496). I PISA-undersøkelsen fra 2007 kom det frem at 88% av de norske lærerne som deltok brukte læreboken som hovedkilde når de la opp undervisningen (Mullis et al., 2008, s. 10, s.290). Denne tendensen støttes av senere forskning utført av Gilje (2016), som viste at så mange som 85% av lærerne som deltok i undersøkelsen svarte at de foretrekker fysiske lærebøker, og kun bruker digitale ressurser for å supplere (Gilje, 2016, s. 56).

Elevenes svake prestasjoner i matematikk, nærmere bestemt algebra, og lærebokens sentrale rolle i matematikkundervisningen har ledet til motivasjonen for denne oppgaven: å analysere hvordan algebra er representert i tre norske lærebøker på 8.trinn, og å undersøke mulige forbindelser mellom innholdet i bøkene og elevers læring og forståelse av algebra. Gjennom analysen av algebrakapitlene, og de tilhørende oppgavene, med hensyn på type aktivitet og form for resonnering, håper jeg denne masteroppgaven kan bidra med verdifull innsikt i forbedringsområder som kan hjelpe elever i å oppnå bedre forståelse og resultater i algebra.

1.2 Formulering av problemstilling

Med bakgrunn i valg av tema og metode har jeg utformet følgende problemstilling:

Hvordan presenterer og strukturer tre lærebøker algebrakapittelet for matematikk på 8.trinn, og hvilken innvirkning har dette på forståelsen av algebraiske konsepter blant elever?

For å belyse problemstillingen har jeg utformet fire forskningsspørsmål:

1. Hvordan varierer innholdet og strukturen i algebrakapitlene i de tre utvalgte lærebøkene?
2. Hvordan adresserer de ulike lærebøkene kommunikasjon med elevene gjennom introduksjon av emner, eksempler og definisjoner?
3. Hvilke krav stiller de forskjellige lærebøkene til elevene når det gjelder løsning av algebraoppgaver?

4. Hvordan kan forskjellene i tilnærming av algebraopplæring i de analyserte lærebøkene mulig påvirke elevers læring og forståelse av algebra?

For å svare på forskningsspørsmålene har jeg utviklet et rammeverk med utgangspunkt i Charalambous et al. (2010) sitt rammeverk for lærebokanalyse, som vil bli presentert i metodekapittelet. Med utgangspunkt i rammeverket vil jeg først undersøke hvordan bøkene deler inn algebrakapitlene, hvor mange sider og oppgaver de består av, og hvordan læringsmålene blir presentert. Videre vil jeg se på hvordan kapitlene er bygd opp, med tanke på teori, definisjoner og eksempler.

For å undersøke spørsmål 3 vil jeg analysere alle de nummererte oppgavene i de tre bøkene, ved hjelp av koder jeg har laget med utgangspunkt i Kieran (2004) sine kategorier for matematiske aktiviteter, og Lithner (2008) sitt rammeverk for matematisk resonnering. Jeg vil også undersøke andre algebraiske aktiviteter som finnes i kapitlene, men disse skal ikke kodes slik som de nummererte oppgavene.

1.3 Oppbygning av oppgaven

Denne oppgaven er delt inn i 6 kapittel. I kapittel 1 introduseres bakgrunn for valg av tema og problemstilling.

Kapittel 2 presenterer teorigrunnlaget som er relevant for algebra i lærebøker. Her blir det gjort rede for algebra og dens historie, matematisk forståelse og dybdelæring, lærebøker og læreplanen. Rammeverket til Lithner (2008) om algoritmisk og kreativ resonnering blir presentert, samt Kieran (2004) sin kategorisering av algebraiske aktiviteter. Denne teorien utgjør grunnlaget for den videre undersøkelsen og diskusjonen i oppgaven.

I kapittel 3 beskrives studiens metodiske tilnærming. Her presenteres detaljert informasjon om valgene som ble gjort i forskningsprosessen; inkludert en gjennomgang av studiens vitenskapelige tilnærming, avgrensning av tema, rammeverket som skal brukes i analysen, etterfulgt av datainnsamlingsprosessen og analyseprosessen. Kapittelet avsluttes med en vurdering av studiens kvalitet og etiske betraktninger.

Kapittel 4 legger frem resultatene fra analysen. Her skilles det mellom den vertikale og den horisontale analysen av lærebøkene.

I kapittel 5 diskuteres funnene fra analysen i lys av det teoretiske grunnlaget lagt frem i kapittel 2.

Det 6. og siste kapittelet oppsummerer hovedfunnene fra oppgaven, og her reflekteres det kritisk rundt studiens begrensninger og styrker. Til slutt diskuteres mulige retninger for fremtidig forskning.

2. Teorigrunnlag

2.1 Algebra

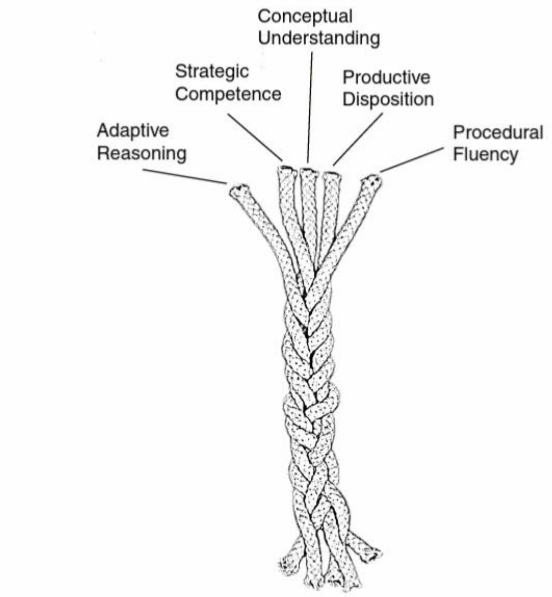
Algebra er, som Pratt (2007) beskriver en gren av matematikken, nært knyttet til andre matematiske felt som geometri, analysen, tallteori og kombinatorikk. Selv om Algebra har sine røtter i numeriske områder som de reelle og komplekse tallene, skiller den seg i sin generelle form fra sine relaterte disipliner ved at den ikke er begrenset til et bestemt matematisk område. Mens geometri omhandler romlige figurer, analyse fokuserer på kontinuerlig variasjon, tallteori på heltallsaritmetikk og kombinatorikk på diskrete strukturer, er algebra like anvendelig innenfor alle disse matematiske feltene, og flere til (Pratt, 2007). Algebra er et verktøy hvor tall og størrelser kan representeres med symboler, og vi kan gjøre beregninger ved hjelp av disse symbolene (Kieran, 1996, s. 271)

2.1.1 Kort om Algebraens historie

Ordet Algebra stammer fra al-jabr wa-al-muqabala, som er tittelen på den aller første boken om algebra. Tittelen kan oversettes til *kompendium i likningsløsning* og ordet algebra betydde opprinnelig *likningsløsning* (Grønmo & Rosén, 1998, s. 35). Boken ble skrevet av den persiske matematikeren al-Khwarizmi ca. 825 e.v.t. I boken ble det ikke brukt algebraiske symboler, så algebra som bokstavregning er et nyere fenomen (Jess et al., 2013, s. 235).

2.2 Matematiske ferdigheter

Kilpatrick et al. (2001) peker på at det ikke finnes et begrep som omfatter aspektene ekspertise, kompetanse, kunnskap og dyktighet i matematikk. De har derfor valgt å sammenfatte disse aspektene til et begrep; Matematiske ferdigheter. Det er fem komponenter som ligger til grunn for å forklare matematiske ferdigheter, henholdsvis *konseptuell forståelse* (conseptual understanding), *beregning* (procedural fluency), *anvendelse* (strategic competence), *resonnering* (adaptiv reasoning) og *engasjement* (productive disposition). Disse komponentene kan også kalles tråder, og det er viktig å se disse trådene i en helhet. De er sammenvevde og avhenger av hverandre når det kommer til utvikling av matematiske ferdigheter (Kilpatrick et al., 2001, s. 116).



Figur 1:Trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001, s. 117).

Konseptuell forståelse handler om å ha en solid begrepsforståelse, hvor elevene klarer å knytte sammen ulike matematiske konsepter, operasjoner og relasjoner. Denne tråden omfatter også tolkning av oppgaver, kjennskap til forskjellig representasjoner og valg av de mest passende representasjonene i bestemte situasjoner (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-119).

Beregning involverer å kjenne til ulike regler og prosedyrer, og ferdigheten til å bruke de nøyaktig og effektivt. Læring av algoritmer og metoder som bidrar til at beregninger kan utføres raskt, er et effektivt verktøy når det kommer til å løse oppgaver i matematikken, og det er viktig å ha mange gode verktøy for å utføre beregninger, så lenge det ikke går på bekostning av den konseptuelle forståelsen (Kilpatrick et al., 2001, s. 121-122).

Anvendelse er knyttet til egenskapen å kunne formulere, representere og løse matematiske problemer, som er basert på hverdagssituasjoner, eller andre scenario elevene kan relatere til. Dette innebærer blant annet valg av egnede representasjoner for både planlegging og gjennomføring, med mål om å løse disse problemstillingene (Kilpatrick et al., 2001, s. 124-125).

Resonnering handler om å tenke logisk og bruke gyldige argumenter for å forklare eller bevise matematiske påstander. Resonnering er nært knyttet til både forståelse og generalisering (Kilpatrick et al., 2001, s. 129). For eksempel; hvis en elev ser på tallrekken 3, 6, 9, 12, kan eleven ved hjelp av resonnering observere at hvert tall øker med 3. Dette viser forståelse av mønsteret, som kan brukes til å forutsi det neste tallet, som illustrerer generalisering.

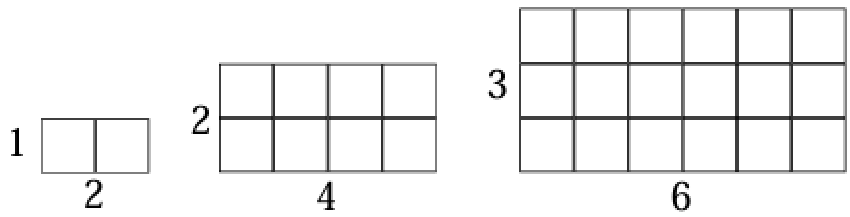
Engasjement handler om å se matematikk som nyttig og verdifull, støttet av troen på egen innsats og effektivitet. For at elever skal utvikle evnene til å forstå, beregne, anvende og resonnere, må de først tro at matematikken er forståelig. For å utvikle en engasjert holdning til matematikk, kreves hyppige muligheter som legger til rette for å forstå matematikk, og å oppleve belønningene som kommer med å få det til (Kilpatrick et al., 2001, s. 131). Til sammen utgjør disse komponentene et komplett bilde av hva som trengs for å mestre matematikk.

2.3 Pre-algebra

Pre-algebra fungerer som en bro mellom aritmetikk og algebra. Mange knytter i dag algebra til bokstavregning, altså regning med bokstaver og ikke bare tall. Dette er det som for elevene utgjør den synlige forskjellen mellom algebra og aritmetikk. Dette stadiet introduserer elevene til konseptet med å bruke bokstaver til å representere tall og variabler, også kalt symboler. Introduksjonen av symboler er viktig, da de fungerer som et hjelpemiddel som tillater elevene å forenkle og generalisere aritmetikken. Når elevene lærer å bruke bokstaver og symboler for å representere tall og variabler, lærer de også at disse symbolene kan brukes til å generalisere forhold og mønstre. Disse ferdighetene er nyttige for videre matematisk forståelse og problemløsning og er begynnelsen på en algebraisk tenkemåte (Bergsten et al., 1997, s. 12-19). Innføring av algebraisk tenkemåte skjer gradvis gjennom pre-algebra. (Grønmo & Rosén, 1998, s. 35).

Grønmo og Rosén (1998) definerer pre-algebra som ulike måter å arbeide med algebra relaterte problemer uten å bruke bokstaver som symboler for variabler. Problemene løses ved hjelp av ulike typer resonnement. Et eksempel som Grønmo og Rosén (1998) viser til, er oppgaver hvor det ene taller i et addisjonsstykke eller et subtraksjonsstykke er erstattet med en tom rute: 15 = 7 + □. Slike oppgaver utfordrer elevene til å reflektere rundt hva som skal stå i den tomme ruten for at vi skal få *like mye* på begge sider (Grønmo & Rosén, 1998, s. 35). Arbeidet med pre-algebra er nødvendig for å skape naturlig progresjon i undervisningen (Bergsten et al., 1997, s. 17).

En strategi for å utvikle algoritmisk tekning blant elever er å introdusere den tidlig for oppgaver som krever sortering og identifisering av mønster. Slike øvelser er viktige for å hjelpe elevene å lære og bruke bokstaver og symboler for å utrykke en generell sammenheng (Grønmo & Rosén, 1998, s. 36):



Figur 2: Eksempel på oppgave om generalisering og mønster. Hentet fra Grønmo og Rosén (1998, s. 36).

En pre-algebraisk oppgave som får disse figurene presentert kunne for eksempel spurt om hvor mange ruter grunnlinjen og høyden i den tiende figuren vil bestå av.

Kieran (2004) foreslår fem justeringer til undervisningen som kan hjelpe elevene til å utvikle en mer algebraisk tenkemåte:

1. Vektlegging av relasjoner fremfor kun numeriske beregninger:

I matematikkundervisningen bør det legges mer vekt på å forstå hvordan tall og operasjoner relaterer til hverandre, fremfor å i stor grad kun fokusere på å finne det riktige svaret gjennom beregning.

2. Fokus på både operasjoner og deres motsatte handlinger, samt ideen om å gjøre og angre:

Elevene bør forstå både hvordan man utfører operasjoner og hvordan de kan reverseres. Dette handler om å forstå matematikken bak handlingene, til eksempel det å addere og trekke fra som motsatte handlinger.

3. En tilnærming som handler om å både fremstille og løse problemer, ikke bare løse dem:

I stedet for å kun fokusere på å finne løsninger, bør elever også lære hvordan de kan representere problemer gjennom symboler og uttrykk, noe som gir en dypere forståelse av problemet.

4. Et bredere fokus som inkluderer både tall og bokstaver, ikke bare tall. Dette omfatter:
    a. Arbeid med bokstaver som kan være ukjente, variabler eller parametere.
    b. Aksept av ufullstendige bokstavutrykk som svar.
    c. Sammenligning av uttrykk basert på deres egenskaper heller enn numeriske evalueringer.
5. En ny tolkning av hva likhetstegnet betyr.

Dette punktet handler om å se likhetstegnet som mer enn bare et tegn som skiller spørsmål fra svar. Det representerer en balanse eller likhet mellom to sider av en ligning, som utrykker en dypere relasjonell forståelse (Kieran, 2004, s. 140-141).

2.4 Algebraiske aktiviteter i skolen

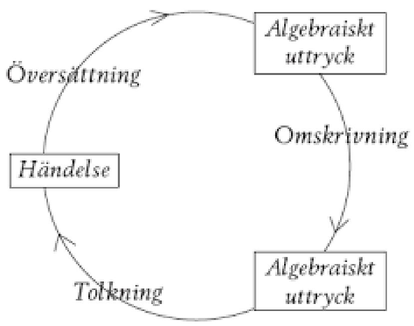
Carolyn Kieran (2004, 1996) presenterte i 1996 på den *12. ICME Study Conference*, en modell som kategoriserer skolealgebra i tre ulike aktiviteter som kjennetegner algebraisk tenkemåte hos elevene. Denne modellen gjengir hun i artikkelen *Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?* som jeg tar utgangspunkt i. Den første kategorien som presenteres er *genererende aktiviteter*, som består i å utforme uttrykk og ligninger. Eksempler på oppgaver i denne kategorien er ligninger som representerer en problemsituasjon, uttrykk utledet fra geometriske mønstre eller tallrekker, og formuleringer av numeriske regler. Disse aktivitetene involverer variabler, ukjente, likhetstegn, og løsning av ligninger, og er sentrale for å skape mening og forståelse i algebra (Kieran, 2004, s. 141-142).

Den andre kategorien er *transformerende aktiviteter*, også kalt de *regelbaserte aktivitetene*, og omfatter prosesser som å trekke sammen like ledd, faktorisere, utvide, substituere, samt addere og multiplisere polynomutrykk. Disse aktivitetene er sentrale i algebra og fokuserer på å modifisere uttrykk eller ligninger på en måte som opprettholder deres matematiske likhet eller ekvivalens (Kieran, 2004, s. 142).

Til slutt har vi aktiviteten som har fått navnet *global meta-nivå,* og som omhandler de aktivitetene som bruker algebra som et verktøy, men som ikke nødvendigvis inneholder algebra. Dette omfatter blant annet problemløsning, modellering, generalisering og bevis – aktiviteter som ikke nødvendigvis inneholder algebra i det hele tatt. Kieran (2004) poengterer at disse *meta-nivå* aktivitetene er like viktige som de to andre aktivitetene i algebra når det kommer til å bygge forståelse, uten disse ville meningen med algebra gå tapt (Kieran, 2004, s. 143).

2.4.1 Algebraisk symbolspråk

Det algebraiske symbolspråket har både en representativ og en manipulativ funksjon. Sammen utgjør språkene tre sentrale aspekter ved arbeid med bokstaver som inngår i det Bergsten et al. (1997) presenterer som den algebraiske syklusen:



Figur 3: Den algebraiske syklusen. Hentet fra Bergsten et al. (1997, s. 15).

Problemer i algebra presenteres ofte ved bruk av vanlig språk eller bilder. Ved å oversette opplysningene i oppgaven kan man få et matematisk utrykk, som gjennom omskriving blir til et algebraisk utrykk, som kan løses med algebraiske fremgangsmåter og algoritmer. Til slutt må symbolutrykket tolkes og oversettes tilbake til tekst eller bilde for å svare på oppgaven (Bergsten et al., 1997, s. 16).

Alle fasene i syklusen er like viktige når man løser algebraiske oppgaver, men mye av tiden går med til å omskrive, og ikke like mye til å oversette og tolke oppgavene. Ved å hoppe over disse prosessene mener Bergsten at elevene risikerer å få mindre forståelse for hva algebra er, og at algebra mister sin mening og blir en mekanisk prosess (Bergsten et al., 1997, s. 16).

2.5 Rike oppgaver

Rike oppgaver utmerker seg ved sin evne til å tilpasse seg og møte elevers ulike behov. Mye av det som gjør en oppgave *rik* er miljøet den presenteres i, dette inkluderer støtte og spørsmål fra læreren, og at elevene inntar en aktiv og selvstendig rolle i egen læringsprosess. På denne måten blir rike oppgaver et verktøy for utforsking og oppdagelse, som er tilgjengelig for alle elever, uavhengig av faglig nivå. Dette fremmer selvstendighet og kreativ bruk av matematisk kunnskap, og legger til rette for læring basert på samarbeid og kritisk tenkning (Piggott, 2018).

Rike oppgaver spiller også en viktig rolle når det kommer til å utvikle algebraiske teknikker. Imidlertid har mange elever negative erfaringer med å arbeide med slike oppgaver, da de ofte blir introdusert mot slutten av et emne, og at lærere ofte undervurderer potensialet disse oppgavene har for å fremme matematisk tenkning, noe som kan hindre elever i å fullt ut engasjere seg i oppgavene (Mason et al., 2011, s. 241).

2.6 Dybdelæring

Dybdelæring i matematikk handler om å utvikle en dyp forståelse av matematiske konsepter og sammenhenger, som er nyttig for at elevene skal kunne anvende matematikken i nye situasjoner. I denne sammenhengen er det nyttig å trekke inn det Mellin-Olsen og Skemp (Sitert i Herheim, 2023) definerer som strukturell og instrumentell forståelse. Instrumentell forståelse baserer seg på ren memorering av prosedyrer, uten å nødvendigvis forstå grunnlaget eller sammenhengen mellom dem (Herheim, 2023, s. 390-391). Dette kan sammenlignes med overflatelæring, hvor fokus er på pugging av algoritmer og fakta, uten at eleven setter kunnskapen i sammenheng (NOU 2014:7, s. 35). Instrumentell matematikk regnes likevel som en form for forståelse, med den fordelen at den gir rask belønning, i form av rett svar (Skemp, 1976, sitert i Herheim, 2023, s. 391).

En av forutsetningene for dybdelæring er at elevene deltar aktivt i egen læringsprosess (NOU 2014:7, s. 35). Dette kan kobles opp mot strukturell forståelse, som legger vekt på elevenes evne til å forstå og bruke matematiske konsepter i nye sammenhenger (Skemp & Mellin-Olsen, sitert i Herheim, 2023, s. 390-391). Skemp (1976, sitert i Herheim, 2023) peker på fire fordeler med strukturell forståelse av matematikk. Elevene blir først og fremst mer forberedt på nye typer oppgaver, som gjør matematikken lettere å huske. Det å ha fokus på en relasjonell forståelse er mer effektivt som mål enn å fokusere på overfladisk læring av fakta og algoritmer, og det gjør det kunnskapen lettere å strukturere og bygge videre på (Herheim, 2023, s. 391).

Oppgaver som bruker reelle og aktuelle problemstillinger, og på den måten kobler læring og samfunnet sammen, kan være med på å bidra til at elevene oppfatter læringsarbeidet som mer relevant og meningsfylt (NOU 2014:7, s. 34). Det er viktig at elevene opplever å se sammenhengen mellom det som undervises og det de tidligere har lært, samt hvordan denne kunnskapen kan brukes i praksis (Sevik, 2016, s. 18).

2.7 Rammeverk for matematisk resonnement

Lithner (2008) ser på de ulike typene resonnement som brukes for å løse matematiske oppgaver, og den sentrale ideen i hans rammeverk skiller mellom læring gjennom memorering, som fremmer imitering, og den motsatte formen for læring som fremmer kreativitet. Han peker på at begrepet resonnering ofte blir brukt av mattelærere med en forventning om en felles forståelse av hva det innebærer. I dette rammeverket er resonnement derimot definert som den rekken av tanker som brukes til å fremsette påstander, og som ender i en konklusjon når det kommer til arbeid med oppgaver. Med *oppgaver* menes det meste av arbeidet som kreves av elevene, slik som lærebokoppgaver, tester og gruppearbeid. *Et problem* er definert som en oppgave som er intellektuelt vanskelig for den som skal løse det. *Svaret* skal gi den informasjonen som er forespurt i oppgaven, og *løsningen* defineres som et svar med begrunnelse for hvorfor det er riktig (Lithner, 2008, s. 256-257).

I rammeverket skilles det mellom imiterende resonnering og kreativ matematisk resonnering. Den imiterende resonneringen deles inn i to hovedtyper: memorert resonnering (MR) og algoritmisk resonnering (AR) (Lithner, 2008, s. 258).

Kriteriene for memorert resonnering er at strategien for å svare på en oppgave er å memorere og gjengi det fullstendige svaret, og gjennomføringen består i å kun skrive ned svaret. Lærebokoppgaver ber vanligvis om beregninger, og selv om all oppgaveløsning innebærer en del memorert kunnskap, vil memorert resonnering kun fungere for noen typer oppgaver, slik som oppgaver hvor et bevis skal gjengis, eller oppgaver som spør om fakta. Slike oppgaver krever kun at elevene husker beviset, eller faktaene, og krever ingen forståelse (Lithner, 2008, s. 258-259).

For algoritmisk resonnering er kriteriene at valget av strategi innebærer å velge en kjent løsningsalgoritme. Den gjenstående delen av resonneringen er nokså enkel for den som resonnere, men en uforsiktig feil kan forårsake helt feil svar. Algoritmisk resonnering stiller i likhet med memorert resonnering, ingen krav til fullstendig forståelse. Det vanskeligste i algoritmisk resonnering er å identifisere en passende algoritme. I rammeverket legges det frem tre ulike måter som blir brukt til å resonnere seg frem til passende algoritme (Lithner, 2008, s. 259-261).

Den første måten er familiær algoritmisk resonnering: Denne strategien velges dersom oppgaven ser kjent ut, og derfor kan løses med korresponderende kjente algoritmer. Da brukes den kjente algoritmen for å løse oppgaven. Ofte velges denne strategien basert på tidligere erfaring med bruk av algoritmen på en oppgave med liknende tekst eller bilder (Lithner, 2008, s. 262).

En annen måte å resonnere seg frem til riktig algoritme er avgrensende algoritmisk resonnement. Dette innebærer at det velges en algoritme fra en begrenset gruppe, basert på dens overfladiske likhet med oppgaven. Resultatet er ikke forutsagt, og argumentasjonen er basert på en overfladisk vurdering som kun er relatert til den resonnerende sin forventing til svaret. Hvis algoritmen som er valgt ikke fører til det som den resonnerende ser på som en rimelig konklusjon, vil prosessen avsluttes uten evaluering, og den resonnerende vil prøve på nytt med en annen algoritme fra sin begrensede gruppe av algoritmer. Denne formen for resonnering kan være rask, dersom den resonnerende bare kjenner til en passende algoritme, eller dersom det første forsøket fører til et rimelig resultat (Lithner, 2008, s. 263).

Når ingen av de ovenstående algoritmiske resonnementene fungerer, må man ty til ekstern veiledning. Dette kalles for guidet algoritmisk resonnering, som går ut på å identifisere overfladiske likheter mellom oppgaven og et eksempel, en definisjon, et teorem, en regel eller andre situasjoner som finnes i en tekstkilde. Algoritmen tas i bruk uten verifiserende argumentasjon. Denne typen resonnement er dominerer i både små-grupper og i individuelle læringssituasjoner (Lithner, 2008, s. 263).

Ikke-imiterende resonnering, også kalt kreativ matematisk resonnering er en form for resonnering som i større grad vektlegger logisk tenkning og argumentasjon. Kriteriene for kreativ matematisk resonnering baserer seg på at det gjennom arbeid med å løse oppgaven blir skapt nye resonnementer, eller at gamle blir gjenskapt. Det finnes argumenter som støtter valg av strategi og/eller implementering av strategi som forklarer hvorfor konklusjonene er sanne eller sannsynlige. Det siste kriteriet er matematisk argument. Altså at argumentene er forankret i de naturlig matematiske egenskapene til komponentene involvert i resonneringen (Lithner, 2008, s. 266).

Kreativ matematisk resonnering trenger ikke være vanskeligere enn imiterende resonnering. Lithner (2008) viser til at algoritmisk resonnering er det som dominerer i flere studier, og at kreativ matematisk resonnering er sjeldent. Han skriver også at fokuset på algoritmisk resonnering vil lede til kortsiktige gevinster for elevene, slik som å mestre lærebokoppgavene og klare eksamensoppgavene som er tilpasset algoritmisk resonnering. Det vil også lede til et langsiktig tap i form av at søken etter algoritmer blir til matematikken, istedenfor å være en del av den. I noen vanlige amerikanske calculus lærebøker kan 70% av oppgavene løses med guidet algoritmisk resonnering, 20% kan løses ved å kopiere et svar med små kreative endringer, og 10% av oppgavene krever kreativ resonnering (Lithner, 2008, s. 263-273).

2.8 Lærebøker

I det gamle læreplanverket L97 definerte de læremidler på følgende måte:

> Alt det som tas i bruk i en læringssituasjon, og som er meningsbærende i seg selv. Læremidler omfatter tekster, programvare, lyd og bilder og lærebøker som er produsert for å ivareta bestemte opplæringsmål, men det kan også være materiell som opprinnelig hadde andre formål, som artikler, filmer eller skjønnlitteratur (Stortingsmelding 28 (2015-2016), s. 75).

Etter kunnskapsløftet i 2006 kom en ny definisjon av læremidler i opplæringsloven:

> Med læremiddel meiner ein alle trykte, ikkje-trykte og digitale element som er utvikla til bruk i opplæringa. Dei kan vere enkeltståande eller gå inn i ein heilskap, og dekkjer aleine eller til saman kompetansemål i Læreplanverket for Kunnskapsløftet (Forskrift til opplæringsloven, 2006).

Det er lite som skiller de to definisjonene, men den største endringen i den nye formuleringen er at læremidlene skal være utviklet spesielt til bruk i opplæringen, og at de skal dekke kompetansemålene i faget (Stortingsmelding 28 (2015-2016), s. 75).

I Norge er det blitt en såkalt 'blandingskultur' når det kommer til bruk av læremidler, der både papirbaserte og digitale læremidler blir brukt i undervisning. Læreren kan fritt velge hvilke læremidler og metoder som skal brukes i undervisningen, og skolene står fritt til å velge mellom papirbaserte og digitale læremidler. På grunn av denne valgfriheten er det store forskjeller i valg av læremidler fra skole til skole, fra fag til fag, og ikke minst fra lærer til lærer (Gilje, 2016, s. 37).

Forskning på lærebøker utgjør et relativt lite område innenfor matematikkundervisning, og de studiene som er gjort er svært spredt og har lite sammenheng med hverandre (Rezat & Strässer, 2017, s. 496).

Reys et al. (2004) presenterer lærebokens tre viktigste roller. Den første er at bokens oppbygning påvirker hvilken rekkefølge læreren legger opp undervisningen. Boken fungerer også som et utgangspunkt for hva læreren skal undervise i innen de ulike kapittelene, med både fagtekster og eksempler innenfor de gitte temaene. Til slutt tilbyr læreboken aktiviteter og oppgaver som læreren kan bruke i undervisningen, som skal bidra til å engasjere og motivere elevene til å lære matematikk. Lengden på de ulike kapittelene er også med på å påvirke hvor viktig kapittelet oppfattes, og hvor lang tid læreren bruker på de ulike kapittelene (Reys et al., 2004, s. 63).

Å lære matematikk gjennom en lærebok omfatter aktiviteter som å lese faglige tekster og tilegne seg nytt stoff, se gjennom løste eksempler, løse oppgaver med mer. Det er læreren som styrer elevenes bruk av lærebokmaterialet, dermed kan den samme læreboken brukes ulikt som undervisningsverktøy i forskjellige klasserom. Den kan brukes som en kilde til øvelser, eller så kan læreren utnytte hele potensialet av materialet som blir presentert i læreboken (Lepik et al., 2015, s. 130).

Oppbygningen av kapittelene i en lærebok benytter ofte *expotion-examples-exercises model*, som på norsk kan oversettes til *forklaring-eksempel-oppgaver-modellen*. Dette indikerer at kapittelene ofte introduseres med en forklaring av stoffet, etterfulgt av eksempler som tar i bruk stoffet til å løse oppgaver, og til slutt blir det gitt oppgaver til eleven som omhandler det nye stoffet (Love & Pimm, 1996, sitert i Kongelf, 2019, s. 35).

I artikkelen *Exemplification in Mathematics Education* (Bills et al., 2006) blir den viktige rollen til eksempler i matematikkundervisningen utforsket grundig. Eksempler anses som sentrale både for utviklingen av matematikk som en disiplin og for undervisningsmetodikken (Leinhardt, 2001, sitert i Bills et al., 2006). De tjener som et nøkkelverktøy for å illustrere og kommunisere matematiske konsepter mellom lærere og elever, og bidrar til å koble teorien til praksis (Bruner et.al, 1956, sitert i Bills et al., 2006).

Ved å tilby utarbeidede løsninger på problemer, gir eksemplene elevene innsikt i trinnvise prosesser for å løse oppgaver, noe som hjelper dem å se de generelle prinsippene gjennom spesifikke eksempler (Bills et al., 2006).

2.9 Læreplanen om algebra

Læreplanen er et styringsdokument for de som arbeider i skolen, og som lærer er man forpliktet å kjenne til og følge læreplanen som står presentert på utdanningsdirektoratet sine nettsider (Sivesind & Bachmann, 2020, s. 322).

I 2020 trådde fagfornyelsen av kunnskapsløftet i kraft. Det ble i den forbindelse utviklet nye læreplaner som ble innført fra skoleåret 2020/2021. Formålet med fagfornyelsen er å forbedre opplæringen i samtlige fag, både på grunnskolen og videregående. Til forskjell fra de gamle læreplanene i kunnskapsløftet fokuserer den nye læreplanen på fagets betydning for eleven, samfunnet og arbeidslivet (Kunnskapsdepartementet, 2019b, s. 327).

Et av de nye elementene som kom med fagfornyelsen er kjerneelementer, disse kan sammenliknes med det som tidligere ble kalt hovedområder (Sivesind & Bachmann, 2020, s. 327). Matematikk på 1-10.trinn er representert av seks kjerneelementer: *Utforsking og problemløsning, modellering og anvendinger, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering* og *matematisk kunnskapsområde* (Kunnskapsdepartementet, 2019b).

I kjerneelementet *matematiske kunnskapsområder* i den nye læreplanen (LK20) beskriver de algebra slik: *Algebra handlar om å utforske strukturar, mønster og relasjonar og er ein viktig føresetnad for at elevane skal kunne generalisere og modellere i matematikk* (Kunnskapsdepartementet, 2019b). I denne definisjonen er det lagt vekt utforsking, modellering og generalisering ved hjelp av algebra, og at algebra derfor er en viktig forutsetning for at elevene generelt skal kunne gjennomføre dette i matematikk.

Etter 8.trinn skal elevene kunne:

- Utforske algebraiske regneregler
- Beskrive og generalisere mønstre med egne ord og algebraisk
- Lage og forklare regneutrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner
- utforske hvordan algoritmer kan skapes, testes og forbedres ved hjelp av programmering
  (Kunnskapsdepartementet, 2019a)

Å undervise i programmering strekker seg utover bare å lære elever å forstå datamaskiner eller å forbedre ferdighetene med digitale verktøy. Det dreier seg også om å utruste elevene med effektive metoder for å håndtere problemoppgaver og utfordringer (Sevik, 2016, s. 13). Algoritmisk tenkning inngår i kjerneelementet *utforsking og problemløsning*, og metoden innebærer å systematisk angripe problemer, både i fasen hvor problemet blir definert, og når det utarbeides mulig løsninger (Utdanningsdirektoratet, 2019).

3. Metode

3.1 Begrunnelse for valg av analysegrunnlag

Når jeg skulle velge datamaterialet som skulle analyseres, falt valget på lærebøker. Lærebøker er, som jeg skrev i kapittel 2.7, en viktig del av matematikkundervisningen. Lærebøkene jeg har valgt er for 8.trinn, dette fordi elever på 8.trinn fortsatt er i fasen hvor algebra introduseres. Tilbudet av mattebøker som har kommet ut etter fagfornyelsen (LK20) er begrenset til tre fysiske bøker, og jeg har derfor valgt å ta med alle tre i denne studien. Til tross for en stadig modernisering av læreverk i skolen, har jeg valgt å se på den fysiske læreboken, for å bruke mest mulig like dokumenter i analysen. Bøkene jeg skal analysere er henholdsvis *Maximum 8* fra Gyldendal forlag, *Matemagisk 8* fra Aschehoug og *Matematikk 8* fra Cappelen Damm.

3.2 Lærebokanalyse

Dokumentanalyse er en systematisk gjennomgang av innholdet i ulike dokumenter for å finne relevant informasjon for det som skal studeres. Informasjonen blir bearbeidet og kategorisert slik at de kan brukes som datagrunnlag i den aktuelle studien. Innholdet kategoriseres etter en forhåndsbestemt modell, og andre data som er relevante registreres (Grønmo, 2016, s. 175). Med denne metoden kan det gjennomføres både *kvalitativ* og *kvantitativ innholdsanalyse*.

Den *kvalitative innholdsanalysen* omhandler kategorisering, analyse og sammenligning av utvalgte sitater, oppgaver eller bilder for å belyse en problemstilling. Metoden kan være til nytte for å få innblikk i argumenter, verdier og holdninger som står sentralt i ulike tekster (Grønmo, 2016, s. 142-143).

Kvantitativ innholdsanalyse dreier seg derimot om å kategorisere innholdet ved hjelp forhåndsbestemte koder. Dersom dokumentet baserer seg på tekst, oppgaver eller bilder brukes kodene til å kartlegge antallet av noe innenfor en gitt kategori (Grønmo, 2016, s. 142-143).

I denne studien er det tre ulike lærebøker for matematikk på 8.trinn som skal analyseres i en *komparativ studie*, som tar utgangspunkt i sammenlikning av flere enheter. En *Kvalitativ komparativ studie* forutsetter at det er få enheter som skal sammenlignes, og at disse er tydelig avgrenset. I dette tilfellet har jeg valgt å avgrense studien til å handle om algebra i de tre lærebøkene. Enhetene studeres i hovedsak individuelt, før forskjellene og likhetene sammenlignes. *Kvantitative komparative studier* tar utgangspunkt i spesifikke variabler (Grønmo, 2016, s. 405-406). I dette tilfellet er denne variabelen antallet oppgaver i bokkapitlene, og antallet oppgaver av forskjellige typer

Kvantitativ og kvalitativ innholdsanalyse er grunnlaget for det som kalles lærebokanalyse. Dette innebærer analyse av innholdet og oppbygningen av en enkelt bok, eller analyse og sammenligning av flere bøker i samme kategori. I analyse av flere bøker er fokuset ofte på hvordan et eller flere temaer presenteres i ulike bøker, eller en sammenlikning av en serie bøker fra samme eller flere forskjellige land. Fokuset ligger ofte i å undersøke likheter og forskjeller ved bøkene (Fan et al., 2013).

Charalambous et al. (2010) har utviklet et rammeverk for å analysere lærebøker i matematikk. Her kategoriserer han tre metoder for analyse av lærebøker, henholdsvis *horisontal, vertikal* og *kontekstuell* analyse.

I den *horisontale analysen* undersøkes det generelle ved læreboken, som tittel, hvem som har skrevet boken og liknende. Denne informasjonen kan kategoriseres som *bakgrunnsinformasjon*. I tillegg er det her nyttig å undersøke bokens generelle struktur, med dette menes hvilke temaer som er representert i de ulike lærebøkene, hvor mange sider som settes av til hvert tema og oppgavemengden i boken og i hvert kapittel (Charalambous et al., 2010, s. 119-123).

Den *vertikale analysen* undersøker hvordan læreboken behandler et enkelt matematisk konsept, og oppfatter læreboken som et miljø for kunnskapsbygging. Denne delen er videre delt inn i tre kategorier, hvor den første tar for seg hva som kommuniseres til elevene, her undersøkes det hvordan læreboken formidler det matematiske innholdet til elevene. Den neste kategorien, hva som kreves av elevene, undersøker hvilke kognitive ferdigheter elevene skal beherske, og hva slags svar oppgavene krever, alt fra enkle svar til fulle matematiske setninger og begrunnelser. Den tredje kategorien, som er kalt forbindelser, tar for seg forbindelser til læreplanen og til andre faglige områder, her undersøkes også sammenhengen mellom læreboken og andre aktiviteter i klasserommet, samt kobling av matematikk til situasjoner utenfor skolen, slik at matematikken føles nyttig og relevant (Charalambous et al., 2010, s. 119-123).

Den tredje tilnærmingen, *kontekstuell analyse,* ser på direkte problemer knyttet til implementering av læreplanen. Dette inkluderer å sikre at målene, metodene og innholdet i lærebøkene faktisk blir brukt slik det er tenkt av forfatterne (Charalambous et al., 2010, s. 119-123). *Kontekstuell analyse* kan gi verdifull innsikt i hvordan læreboken tas i bruk og oppfattes i sitt miljø, som i denne sammenheng er klasserommet.

Horisontal analyse kan sees i likhet med både kvalitativ og kvantitativ innholdsanalyse. I studien skal det både innhentes bakgrunnsdata om lærebøkene, samt innhentes kvantitative data, som antallet oppgaver. Dette gjelder også for den *vertikale analysen*, hvor innholdet i den avgrensede biten i de ulike bøkene skal undersøkes grundigere. Her skal også typen oppgaver kategoriseres, inkludert hva slags type algebraiske aktiviteter de utgjør, basert på Kieran (2004) sin inndeling og hva de krever av elevene i form av resonnement som behøves for å løse oppgaven, basert på rammeverket til Lithner (2008).

Kvantitativ og kvalitativ innholdsanalyse kan kombineres enten ved at det gjennomføres *kvantitative undersøkelser som forberedelse til kvalitative undersøkelser* (Grønmo, 2016, s. 230), eller ved at det utføres *kvalitative undersøkelser som oppfølging av kvantitative undersøkelser* (Grønmo, 2016, s. 231). Det første alternativet bidrar til at forskeren har et visst empirisk grunnlag for å konstruere et best mulig datainnsamlingsverktøy for innsamling og kategorisering av kvantitative data. Det andre alternativet er aktuelt for å se nærmere på den kvantitative dataen. På denne måten kan man kartlegge dataene først, slik at det kommer frem hva det kan være interessant å se nærmere på (Grønmo, 2016, s. 230-231).

3.3 Rammeverk for lærebokanalyse

Rammeverket for analyse av lærebøkene er utviklet med utgangspunkt i Charalambous et al. (2010) sitt rammeverk, men med noen tilpasninger. Jeg har blant annet valgt å ikke ta med *forbindelser*, fordi å analysere dette vil blant annet kreve en dyp forståelse av læreplanen, noe som ville økt omfanget på oppgaven betraktelig. Jeg ønsker derimot å rette fokuset i analysen mot hvordan boken kommuniserer med elevene, hva slags type oppgaver den inneholder, samt hva de krever av elevene i form av resonnering. har derfor valgt å begrense omfanget til horisontal og vertikal analyse av de tre bøkene.

Horisontal lærebokanalyse

Bakgrunnsinformasjon	**Generell struktur**
○ Tittel ○ Antall sider ○ Forfattere ○ Forlag og utgivelsesår ○ Tilleggsmateriell	○ Kapittelinndeling ○ Antall oppgaver ○ Antall oppgaver i hvert kapittel ○ Antall deloppgaver

Vertikal lærebokanalyse

Kommunikasjon med eleven	**Krav til eleven**
○ Introduksjon av et spesifikt emne ○ Eksempler ○ Definisjoner	○ Oppgavetype ○ Algebraisk aktivitet ○ Resonnering

Figur 4: Oversikt over rammeverk for analysen. Basert på rammeverket til Charalambous et al. (2010, s. 123).

I utformingen av dette analytiske rammeverket ble jeg blant annet inspirert av Bergsten et al. (1997) sin beskrivelse av den algebraiske syklusen. Algebraiske problemer introduseres her gjennom vanlig språk eller bilder, for så å oversettes til matematiske og deretter algebraiske uttrykk, som til slutt skrives om til hverdagsspråk igjen. I følge Bergsten et al. (1997) er alle delene av syklusen like viktige, men mange av stegene blir ofte nedprioritert. Dette kan føre til at elevene utvikler en overfladisk forståelse av algebra og at faget reduseres til en mekanisk prosess. På bakgrunn av den algebraiske syklusen, fant jeg det relevant å analysere oppgavene i lærebøkene ut ifra type algebraisk aktivitet.

Jeg valgte også å analysere oppgavene med bakgrunn i Kieran (2004) sin inndeling av matematiske aktiviteter, hvor han skiller mellom oppgaver på global meta-nivå, som kan sammenlignes med oppgaver som fullfører hele syklusen, og genererende og transformerende aktiviteter, som i hovedsak fokuserer på utviklingen av ferdigheter og teknikker for å løse algebraiske problem.

Oppgavene i lærebøkene ble til slutt kategorisert ut ifra rammeverket til Lithner (2008), som omhandler ulike typer matematisk resonnering. Dette rammeverket ble valgt fordi det gir innsikt i hvordan oppgaver kan stimulere til enten mekanisk eller kreativ tenking hos elevene. Kilpatrick et al. (2001) beskriver viktige matematiske ferdigheter, som konseptuell forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement. Inndelingen til Lithner gir innsikt i hvordan disse ferdighetene kan styrkes eller begrenses av lærebokens oppgaver, og ved å bruke dette rammeverket ønsker jeg å undersøke hvor godt lærebøkene legger opp til å resonnering som fremmer kreativ tenking i arbeidet med algebra.

3.4 Avgrensing av tema

Bøkene som skal analyseres har ulik kapittelinndeling. Matematikk 8 og Maximum 8 er inndelt i 4 kapittel, mens Matemagisk 8 har en inndeling på 10. Det var derfor nødvendig å velge ut deler av bøkene som ga et mest mulig likt grunnlag for videre analyse.

Matematikk 8 og Maximum 8 har begge ett kapittel som heter algebra med tilhørende underkapitler som står presentert i tabell 1.

Tabell 1: Inndelingen av algebrakapittelet i Matematikk 8 og Maximum 8. Hentet fra Hjardar og Pedersen (2020, s. 5) og Tofteberg et al. (2020, s. 4)

Matematikk 8	**Maximum 8**
Algebraiske uttrykk	Utforsking av tallmønstre
Addisjon og subtraksjon av algebraiske uttrykk	Algebraiske uttrykk
Potenser i algebraiske uttrykk	Utforske algoritmer
Multiplikasjon og divisjon av algebraiske uttrykk	
Parenteser i algebraiske uttrykk	
Mønster i tall	
Å løse et problem ved hjelp av tegning	
Likninger	
Å kontrollere løsningen på likninger	
Problemløsning og likninger	

For å få et mest mulig likt analysegrunnlag har jeg valgt å analysere alle de tre delkapitlene i Maximum 8, men i Matematikk 8 ser jeg kun på de 6 første delkapitlene, til og med *mønster i tall*, på grunn av at de resterende kapitlene omhandler likninger, noe de andre bøkene tar for seg i egne kapittel. For å begrense analysegrunnlaget har jeg valgt å ikke ta for meg likninger og funksjoner i denne oppgaven, da de krever en spesifikk forståelse av matematiske manipulasjoner, og ved å utelate likninger og funksjoner kan jeg konsentrere meg mer om hvordan bøkene introduserer de grunnleggende algebraiske konseptene.

Matemagisk 8 er inndelt i 10 kapitler For å hente samme data fra denne boken som fra de to andre lærebøkene er det nødvendig å hente data fra ulike kapitler og delkapitler i Matemagisk 8. I tabell 2 står de kapitlene som har relevans til Algebra presentert med tilhørende delkapitler.

Tabell 2: Kapittelinndeling for relevante kapitler i Matemagisk 8. Hentet fra Kongsnes og Wallace (2020, s. 3)

3 **Algebraiske uttrykk og formler**	5 **Algebra og likninger**	6 **Parenteser og likninger**
3A *Verdien av algebraiske uttrykk*	5A *Forenkling av algebraiske uttrykk*	6A *Parenteser i algebraiske uttrykk*
3B *Praktiske situasjoner*	5B *Algebraisk løsningsmetode for likninger*	6B *Likninger med brøker og parenteser*
3C *Programmering med løkker*	5C *Likninger i praktiske situasjoner*	6C *Å løse likning med programmering*
3D *Figurtall*		

Ut fra denne inndelingen har jeg valgt å ta med hele kapittel 3 og delkapitlene 5A og 6A i analysen. Hensikten med å dele Matemagisk 8 inn slik, var at det skulle bli lettere å sammenlikne de tre lærebøkene med hverandre, da dette er temaer de to andre bøkene også tar for seg i større eller mindre grad.

Matematikk 8 har i motsetning til de to andre bøkene ikke en del som tar for seg programmering, likevel har jeg valgt å inkludere denne biten da jeg synes den er aktuell med tanke på at det ble lagt økt vekt på digitale ferdigheter ved innføringen av fagfornyelsen (LK20). Programmering underviser dessuten ikke bare tekniske ferdigheter, men kan i mange sammenhenger også bidra til kritisk tenkning og problemløsning.

3.5 Analyse

I dette kapittelet vil jeg argumentere for utførelsen av den kvalitative og kvantitative analysen av de tre lærebøkene for 8.trinn. Analysen støtter seg på rammeverket for lærebokanalyse som er adaptert fra Charalambous et al. (2010). Rammeverket deler analysen inn i to hoveddeler: en horisontal analyse som ser på bokens struktur og innhold overordnet, og en vertikal analyse som går i dybden på kommunikasjonsmåter og krav til elevene som er spesifikt knyttet til algebrakapitlene i de tre bøkene.

3.5.1 Kvantitativ Analyse

Gjennom den horisontale delen av analysen ble bakgrunnsinformasjonen og den generelle strukturen til lærebøkene kartlagt. Her ble antall sider i bøkene, samt antall oppgaver i bøkene og i hvert kapittel, telt og satt i en tabell. Ved hjelp av disse dataene kan det undersøkes hvor stor del av bøkene algebrakapittelet og oppgavene utgjør.

For å analysere *krav til eleven* gjennom den vertikale analysen, tok jeg for meg de nummererte oppgavene i de valgte kapitlene. De ikke-nummererte oppgavene utgjorde i mange flere sammenhenger både diskusjonsoppgaver og gruppearbeid og er derfor ikke med i den kvantitative analysen, fordi jeg her primært ønsket å se på de standardiserte oppgavene. Dette gjør det lettere å sammenligne resultatene fra de tre bøkene. For å kunne få et mest mulig nøyaktig grunnlag, er alle deloppgavene analysert for seg selv, fordi de ulike deloppgavene innad i en oppgave kan i flere sammenhenger plasseres i ulike kategorier.

Til å kategorisere alle oppgavene i de tre bøkene brukte jeg Microsoft Office Excel. For å holde orden i datamaterialet, fikk hver lærebok et eget regneark. Figur 5 viser inndelingen og kategoriseringen av lærebøkene. Kolonne A viser til hvilken bok oppgaven er hentet fra. Kolonne B viser oppgavenummer. I kolonne C står hvilket kapittel i boken oppgaven er hentet fra, denne kolonnen er mest relevant for Matemagisk 8, da oppgavene er her hentet fra tre ulike kapittel. Videre er oppgavene sortert etter delkapittel i kolonne D og type oppgave det er, står i kolonne E. Standardoppgavene er representert med en *s,* og *se sammenhenger* fra Maximum 8 er representert med *Ss*. I Matemagisk 8 er *følg stien* forkortet til fs og *terrengløypa til* t. Mens oppgavene analysert fra Matematikk 8 forholder seg utelukkende til standardoppgaver.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Bok**	**Oppgave nr.**	**Kapittel**	**Delkapittel**	**Inndeling**	**Oppgavetype**	**Tenkemåte**	**Resonnering**
2	Maximum 8	2.1a	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	CMR
3	Maximum 8	2.1b	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Transformende	AR
4	Maximum 8	2.1c	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Global meta-level	CMR
5	Maximum 8	2.2a	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	CMR
6	Maximum 8	2.2b	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	AR
7	Maximum 8	2.2c	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Transformende	CMR
8	Maximum 8	2.3a	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	CMR
9	Maximum 8	2.3b	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	AR
10	Maximum 8	2.3c	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Transformende	AR
11	Maximum 8	2.3d	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Global meta-level	AR
12	Maximum 8	2.4a	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	AR
13	Maximum 8	2.4b	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	AR
14	Maximum 8	2.4c	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	AR
15	Maximum 8	2.4d	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	AR
16	Maximum 8	2.4e	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	AR
17	Maximum 8	2.4f	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	AR
18	Maximum 8	2.4g	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	AR
19	Maximum 8	2.4h	Algebra	Utforskning av mønstre	s	Tekst	Genererende	AR

Figur 5: Utklipp av kategoriseringsprosessen av Maximum 8 i Excel.

Kieran (2004) skriver at fokus på relasjoner fremfor kun algoritmiske operasjoner, og en tilnærming som involverer både formulering og løsning av problemer, er med på å hjelpe elevene til å utvikle en algebraisk tenkemåte. Derfor ble oppgavene først vurdert ut ifra om de primært kunne kategoriseres som tekstoppgaver eller enkle matematiske problemer i kolonne F. Med tekstoppgaver menes oppgaver som presenterer problemstillingen innvevd i en tekst, mens enkle matematiske problemer fokuserer direkte på matematiske beregninger (Kieran, 2004, s. 140-141).

For å gå dypere inn i hva slags type oppgaver som blir brukt i bøkene, ble de vurdert etter Kieran (2004) sin modell som skiller mellom ulike algebraiske aktiviteter. I kolonne G ble de kategorisert etter om de var genererende aktiviteter, transformerende aktiviteter, eller på Global Meta-nivå. Alle deloppgavene ble bare plassert i en kategori, men de ulike deloppgavene i samme oppgave kunne plasseres i ulike kategorier (Kieran, 2004, s. 141-143).

2.20 Læreren til klasse 8A, Kasper, er k år. Det vil si at Kasper er $k + 1$ år om 1 år, og at han var $k - 2$ år for 2 år siden.

a Lag algebraiske uttrykk for alderen til Kasper på de ulike tidspunktene som er listet opp i tabellen.

Tidspunkt	Alderen til Kasper
Nå	k
Om 1 år	$k + 1$
Om 2 år	
Om 5 år	
Om 10 år	
For 2 år siden	$k - 2$
For 3 år siden	
For 10 år siden	
For 20 år siden	

Elevene får vite at $k - 3 = 38$.

b Hva betyr det?

c Hvor gammel er Kasper nå?

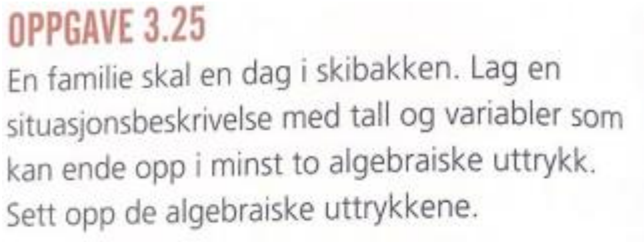
d Lag algebraiske uttrykk for alderen til noen i din familie. Bytt uttrykk med en annen, og finn ut hvor gamle de er. Forklar hverandre hva dere fant ut, og hvordan dere fant det ut.

Figur 6: Eksempel på oppgave som inneholder alle aktivitetene som kjennetegner algebraisk tenkemåte. Hentet fra Tofteberg et al. (2020, s. 107).

Figur 6 viser en oppgave som inneholder deloppgaver innenfor alle de tre formene for algebraisk aktivitet. Oppgave 2.20a) kategoriseres som en genererende aktivitet, fordi den utfordrer elevene til å lage algebraiske uttrykk som beskriver alderen til Kasper på ulike tidspunkt. Oppgave b) og c) går under transformerende aktiviteter da elevene her beskriver hva man kan finne ut med det gitte algebraiske uttrykket, og anvender dette til å bestemme Kaspers nåværende alder. Til slutt er deloppgave d) en Global Meta-nivå aktivitet som utfordrer elevene til å bruke konseptet med aldersbestemmelse ved algebraiske uttrykk, på egne familiemedlemmer. Dette krever forståelse for hvordan algebraiske uttrykk fungerer i varierte kontekster og utvikling av en forståelse for variablenes rolle i slike uttrykk.

Oppgavene ble til slutt, i kolonne H, kategorisert ut ifra de ulike typene resonnement som brukes for å løse matematikkoppgaver, ut ifra Lithner (2008) sitt rammeverk. I inndelingen skilles oppgavene ut ifra de to typene for imiterende resonnering: Memorert resonnering (MR), algoritmisk resonnering (AR) og guidet algoritmisk resonnering

(Guided AR). I lærebøkene var det ingen oppgaver som la opp til å gjengi et eksempel eller et bevis, og alle oppgavene innenfor imiterende resonnering falt derfor under de to typene AR. Den andre typen resonnement oppgavene kunne kategoriseres som, kalles kreativt matematisk resonnement (CMR). I kategoriseringen er det bare skilt mellom AR og CMR, mens guided AR og plassering av eksempler vil bli trukket frem igjen i diskusjonskapittelet.


OPPGAVE 3.25

En familie skal en dag i skibakken. Lag en situasjonsbeskrivelse med tall og variabler som kan ende opp i minst to algebraiske uttrykk. Sett opp de algebraiske uttrykkene.

Figur 7: Eksempel på oppgave som krever CMR. Hentet fra Kongsnes og Wallace (2020, s. 110).

Oppgaven i figur 7 er kategorisert som en oppgave som krever kreativt matematisk resonnement. Dette er en åpen oppgave som krever at elevene bruker både matematisk og språklig kreativitet for å binde en reell situasjon med matematisk formulering.


OPPGAVE 3.1

Hva er verdien av det algebraiske uttrykket $6x - 4$ hvis

a $x = 3$ **b** $x = 1$ **c** $x = -4$

Figur 8: Eksempel på oppgave som krever algoritmisk resonnement. Hentet fra Kongsnes og Wallace (2020, s. 100).

Å sette inn verdier i et algebraisk uttrykk, slik som i oppgaven i figur 8, legger til rette for at elevene kun bruker algoritmisk resonnement for å sette gitte verdier inn i et allerede gitt uttrykk.

3.5.2 Kvalitativ analyse

I den vertikale analysen skal *kommunikasjon med eleven* analyseres. I denne analysedelen inngår i hovedsak teksten og eksemplene på de valgte sidene innenfor algebra. Her blir det blant annet undersøkt hvordan disse lærebøkene legger til rette for læring av algebra, med hensyn til blant annet målsetting, teori, definisjoner og eksempler, og hvordan dette blir anvendt i boken. Noen steder er det også nødvendig å se på hvordan teksten og eksemplene er lagt opp i forhold til oppgaver, for å få et helhetlig inntrykk av boken. For å analysere dette har jeg sett nærmere på hvordan kapitlene formulerer og kommuniserer læringsmålene for kapittelet. Videre analyserte jeg hvordan de ulike bøkene introduserte de ulike temaene og kapitlene, samt hvilke temaer de ulike bøkene dekker når det kommer til algebra. I den kvalitative analysen inngår også de oppgavene som ikke har nummerering, slik som *snakke matte, topptur, underveisvurdering* og *oppgave til tverrfaglig tema* (Kongsnes & Wallace, 2020; Tofteberg et al., 2020; Hjardar & Pedersen, 2020), dette ble gjort for å få et bredere grunnlag når det kom til å undersøke oppgavene og bokens relevans for elevenes daglige liv.

3.6 Studiens kvalitet

I dette delkapittelet diskuteres kriteriene reliabilitet og validitet som utgjør forutsetningene for kvaliteten på studien.

3.6.1 Reliabilitet

Relabilitet angir troverdigheten til det innsamlede datamaterialet. Reliabiliteten anses som høy dersom forskningsdesignet og datainnsamlingsmetodene systematisk fører til pålitelige data. Påliteligheten demonstreres ved at bruk av det samme forskningsdesignet i flere tilfeller av datainnsamling, om de samme fenomenene, resulterer i identiske data. Reliabilitet måler da graden av samsvar mellom datasett samlet inn gjennom slike repeterende prosesser (Grønmo, 2016, s. 240-241).

For å vurdere reliabiliteten til den kvantitative delen av analysen er det nyttig å gjennomføre en *test-retest-metode*. Med denne metoden testes rammeverket for oppgaveanalysen på de samme kildene flere ganger, på ulike tidspunkt. På denne måten kan resultatene fra de ulike gjennomføringene sammenlignes (Grønmo, 2016, s. 244). Oppgavene i de tre lærebøkene Matematikk 8, Matemagisk 8 og Maximum 8 ble til sammen kodet to ganger av meg, med utgangspunkt i de samme kodene. Først ble alle tre bøkene kodet når rammeverket hadde kommet på plass og jeg hadde kommet frem til hvilke koder jeg skulle bruke. Jeg gikk frem og tilbake mellom bøkene, og sammenlignet oppgaver av samme type, for å sørge for at oppgavene i de ulike bøkene skulle bli kodet likt, og at jeg ikke endret måten jeg tenkte på underveis. En uke senere gikk jeg tilbake og kodet oppgavene på nytt, for å kunne sammenligne med mine tidligere vurderinger.

Først ble oppgavene i de tre bøkene kodet etter oppgavetype, og her ble resultatet helt likt på første og andre runde. Når det kom til å kategorisere oppgavene ut ifra algebraisk tenkemåte, fant jeg noen avvik når det kom til om oppgavene var genererende, eller på et globalt meta-nivå. Oppgaver av begge typene krever ofte utleding av matematiske uttrykk, men det varierer i hvilken kontekst og hvor mye informasjon som blir gitt. Oppgaver som, i tillegg til å konstruere uttrykk, la opp til at elevene skulle ta i bruk uttrykket i en mer kompleks og praktisk sammenheng, ble kodet som global meta-nivå. Størst forskjell i resultatet fikk jeg mellom første og andre koding av krav til resonnering. Etter en gjennomgang av avvikene fant jeg ut at de fleste forskjellene lå i at jeg endret fra CMR til AR i andre runde av kodingen, dette skjedde i tilfeller hvor det sto et eksempel presentert tidligere i kapittelet, som kunne brukes som mal for å løse oppgaven, noe jeg ikke tok hensyn til i første runde av kodingen.

Reliabiliteten i kvalitative studier er vanskelig å måle ved hjelp av standardiserte tester, blant annet på grunn av at datamaterialet som skal undersøkes er mindre strukturert enn i kvantitative studier. Reliabiliteten i kvalitative studier baserer seg på at resultatene som presenteres er basert på faktiske forhold, og ikke er påvirket av forskerens personlige oppfatninger (Grønmo, 2016, s. 248-249). Datamaterialet som i denne omgang undersøkes er, som tidligere nevnt, lærebøker i matematikk, og mer spesifikt er det de delene av bøkene som omhandler algebra. Den kvalitative analysen ble gjennomført ved at jeg først så igjennom og gjorde meg kjent med de ulike bøkene, før jeg satte meg ned med hver enkelt bok, for å gå nøye gjennom den delen som skulle analyseres.

Selv om jeg har brukt metoder for å sikre reliabiliteten i analysen av lærebøkene, inkludert test-retest-metoden og detaljerte koder, finnes det fortsatt rom for forbedring. Både i koding av oppgavene og i analysen av innhold og oppbygning er det mine tolkninger som ligger til grunn. For å få et mer objektivt blikk på resultatene kunne jeg fått noen andre til å se på datamaterialet ut ifra rammeverket, for så å sammenligne deres data med meg. Å utvide tidsintervallet mellom de to kodingene, kunne resultert i større forskjeller, da jeg kanskje ikke hadde hatt forrige koding like friskt i minne, og dermed hadde sett på oppgavene med et mer objektivt syn på runde to.

3.6.2 Validitet

Validitet handler om i hvilken grad datamaterialet er gyldig for å diskutere de spesifikke problemstillingene som skal undersøkes. Validiteten anses som høy når forskingsdesignet og metodene frembringer data som er direkte relevant for å belyse disse problemstillingene. Videre indikerer validiteten i hvilken grad det innsamlede datamaterialet faktisk reflekterer forskerens hensikt med studien (Grønmo, 2016, s. 241).

Grønmo (2016) skiller mellom intern og ekstern validitet. Intern validitet handler om hvor godt studien er utført, og om det er til å stole på at resultatene viser en årsakssammenheng under de kontrollerte forholdene i studien (Grønmo, 2016, s. 253-254). I denne studien tok jeg utgangspunkt i Charalambous et al. (2010) sitt rammeverk for å analysere de tre lærebøkene, og oppgavene i bøkene ble analysert ved hjelp av kategoriene til Kieran (2004) og rammeverket til Lithner (2008), for å skille oppgavene på type aktivitet og resonnement. Denne teoretiske forankringen bidrar til pålitelighet av kodingsprosessen og reduserer subjektive tolkninger, og er med på å styrke studiens interne validitet.

Ekstern validitet handler om i hvilken grad funnene fra studien kan generaliseres til andre kontekster utenfor de spesifikke forholdene som ble undersøkt (Grønmo, 2016, s. 254). I denne analysen av lærebøker, hvor jeg undersøker hvordan algebra blir presentert og hvordan bokkapitlene er bygd opp, er det viktig å vurdere om konklusjonene kan gjelde for andre bøker eller klassetrinn. Selv om studien gir innsikt i hvordan ulike tilnærminger til algebra kan påvirke elevers læring, er det for få lærebøker til at resultatene kan generaliseres. For å øke den eksterne validiteten kan fremtidige studier utvide utvalget av bøker til å inkludere flere trinn eller ulike land. Dette kan hjelpe med en bedre forståelse av hvordan ulike pedagogiske tilnærminger til algebra påvirker elevers resultater i et bredere utvalg av undervisningsmiljøer.

3.7 Etiske retningslinjer

Som forsker er det ulike lover og etiske retningslinjer man må forholde seg til. De nasjonale forskningsetiske komiteene (2019) skriver at alle involvert i forskningen skal behandles med respekt. Forskeren bør sørge for at arbeidet gir positive bidrag, at forskningsprosjektet skal være utformet og utført på en rettferdig måte, og at forskeren plikter å følge forskningsetiske normer, samt opptre åpent og ærlig i all kommunikasjon om forskningen.

I analysen av lærebøkene er det viktig å opprettholde kvaliteten på forskningen. Alle de involverte må, enten direkte eller indirekte, behandles med respekt. I denne sammenheng inkluderer det forfatterne og utgiverne av de analyserte lærebøkene. Som forsker har jeg også et ansvar for å sørge for at forskningen bidrar positivt, og er utformet på en måte som reflekterer de etiske standardene. Ved å opptre åpen og ærlig i formidlingen av resultatene, og ved å være transparent om metodene og prosessene jeg har brukt, kan jeg styrke tilliten til analysen, og konklusjonene som kommer. Denne tilnærmingen sørger for at analysen av bøkene ikke bare blir en vitenskapelig undersøkelse, men at den også er etisk forsvarlig og at den respekterer alle de involverte partene i produksjonen av boken.

4. Resultater

4.1 Antall sider og oppgaver

I tabell 3 er det laget en oversikt over antall sider i boken, samt antall sider og oppgaver i hvert kapittel i de tre mattebøkene. Summen av sider inkluderer alle sider som er nummererte, altså innholdsfortegnelse, samt stikkordsregister og eventuell fasit. Antall oppgaver inkluderer alle nummererte oppgaver i kapitlene. Det som står med uthevet skrift i hver kolonne, er antall sider og oppgaver jeg analyserer i den vertikale analysen.

Tabell 3: Oversikt over kapittelinndelingen i de tre mattebøkene (Hjardar & Pedersen, 2020; Tofteberg et al., 2020; Kongsnes & Wallace, 2020).

Matematikk 8	**Maximum 8**	**Matemagisk 8**
Antall sider i boken: 304 Sum oppgaver: 357 1.Tall og tallforståelse ○ 91 sider ○ 142 oppgaver 2.Delelighet og brøk ○ 63 sider ○ 81 oppgaver 3.Algebra ○ 75 sider ○ 104 oppgaver 4.Funksjoner ○ 53 sider ○ 30 oppgaver **Til videre analyse** ○ **33 sider** ○ **51 oppgaver**	Antall sider i boken: 290 Sum oppgaver: 420 1.Tall og tallregning ○ 84 sider ○ 156 oppgaver **2.Algebra** ○ **64 sider** ○ **85 oppgaver** 3.Funksjoner ○ 60 sider ○ 80 oppgaver 4.Likninger og formler ○ 68 sider ○ 99 oppgaver	Antall sider i boken: 332 Sum oppgaver: 490 1.Hele tall ○ 38 sider ○ 73 oppgaver 2.Brøk og desimaltall ○ 54 sider ○ 101 oppgaver 3.Algebraiske uttrykk og formler ○ 28 sider ○ 49 oppgaver 4.Potenser, kvadratrøtter og regnerekkefølge ○ 34 sider ○ 51 oppgaver 5.Algebra og likninger ○ 24 sider ○ 49 oppgaver 6.Parenteser og likninger ○ 26 sider ○ 35 oppgaver 7.Hva er en funksjon? ○ 18 sider ○ 24 oppgaver 8.Grafen til en funksjon ○ 20 sider ○ 29 oppgaver 9.Lineære funksjoner ○ 30 sider ○ 39 oppgaver 10.Sammensatte måleenheter ○ 19 sider ○ 40 oppgaver **Til videre analyse** ○ **52 sider** ○ **90 oppgaver**

Fra tabell 3 kommer det også frem at innholdet og rekkefølgen i de tre bøkene er tilnærmet lik. Som titlene på kapitlene tilsier innføres det først grunnleggende tallforståelse i form av tallregning, delelighet, desimaltall og brøk, før bøkene tar for seg algebra, funksjoner og likninger. Det er tilnærmet like mange sider i alle de tre lærebøkene. Antallet oppgaver er mer varierende, og det er over 100 oppgaver mer i Matemagisk 8 med 490 oppgaver, enn i Matematikk 8 med 357. Antall oppgaver som ble kategorisert i den vertikale analysen var også av stor variasjon, med henholdsvis 51 oppgaver fra Matematikk 8, 99 oppgaver fra Maximum 8, og 90 oppgaver fra Matemagisk 8.

4.2 Presentasjon av bøkene

4.2.1 Matematikk 8

Matematikk 8 fra Cappelen Damm var den første som dukket opp når jeg søkte etter 'mattebok 8.trinn fagfornyelsen'. Dette var den boken jeg selv brukte i undervisningen når jeg var i langpraksis på ungdomsskole, og har derfor erfaring med at jeg synes den har en oversiktlig oppbygning. Læreverket er skrevet av Espen Hjardar og Jan-Erik Pedersen. Boken er inndelt i fire kapitler, henholdsvis *Tall og Tallforståelse*, *Delelighet og brøk, Algebra* og *Funksjoner,* som er inndelt i delkapitler med tilhørende undertemaer. Boken er skrevet til fagfornyelsen, og er en videreutvikling av det som før het faktor 8 – 10. Cappelen Damm skriver også dette om boken på sine nettsider:

Ønsker du en lærebok i matematikk

- med god progresjon og tydelig struktur?
- med gode oppgaver og opplegg for underveisvurdering, halv- og helårsvurdering?
- som legger til rette for større matematisk forståelse hos elevene?
- med tydelig differensiering som hjelper elevene med å oppleve mestring, uansett nivå?
- som legger til rette for dybdelæring?

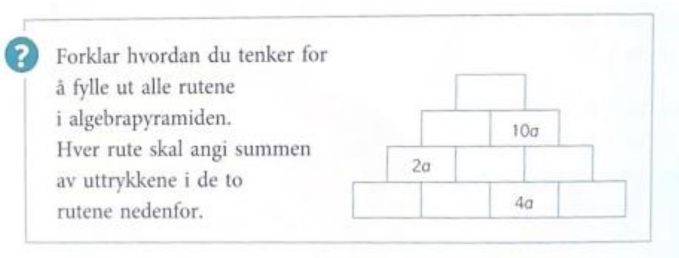
(Cappelen Damm, u.å)

Hjardar og Pedersen (2020) begynner sin lærebok med å presentere elevene for hvordan kapitlene er bygget opp. Hvert kapittel begynner med en illustrert dobbeltside. Her presenteres mål for hva elevene skal lære i kapittelet. Her listes det også opp ulike begreper som kommer til å bli brukt i kapittelet. Over tittelen på alle underkapitlene stilles det et spørsmål, som er markert med en oransje pil, og som i starten av boken blir definert som en *fellesoppgave*.


Hvordan kan du løse et regneuttrykk med bokstaver?

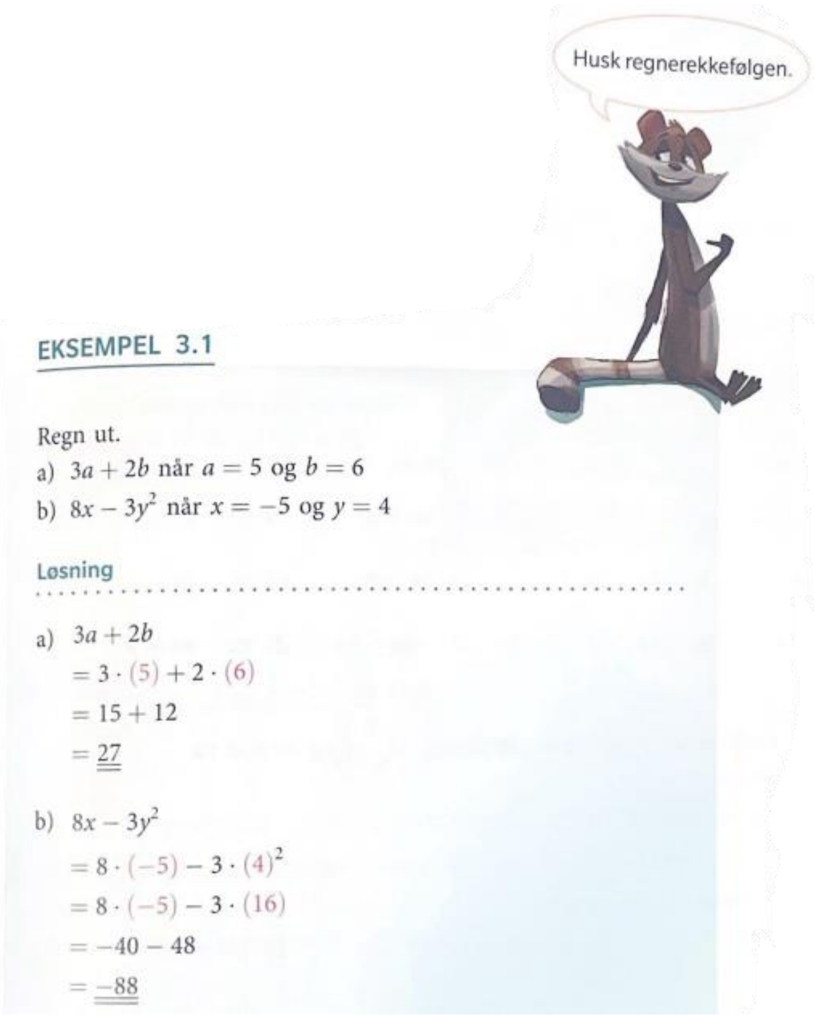
Figur 9: Eksempel på fellesoppgave i starten av et delkapittel. Hentet fra Hjardar og Pedersen (2020, s. 164).

Fellesoppgaver dukker også opp underveis i kapittelet. De står da i en tekstboks markert med spørsmålstegn som vist i figur 10.



Figur 10: Eksempel på fellesoppgave som dukker opp underveis i kapittelet. Hentet fra Hjardar og Pedersen (2020, s. 174).

Delkapitlene med tilhørende undertemaer er bygd opp på en slik måte at all fagtekst presenteres først, etterfulgt av et eksempel, og deretter kommer det oppgaver knyttet til temaet. Dette gjentar seg for hvert nye tema som skal gjennomgås.



EKSEMPEL 3.1

Regn ut.

a) $3a + 2b$ når $a = 5$ og $b = 6$

b) $8x - 3y^2$ når $x = -5$ og $y = 4$

Løsning

a) $3a + 2b$
$= 3 \cdot (5) + 2 \cdot (6)$
$= 15 + 12$
$= \underline{\underline{27}}$

b) $8x - 3y^2$
$= 8 \cdot (-5) - 3 \cdot (4)^2$
$= 8 \cdot (-5) - 3 \cdot (16)$
$= -40 - 48$
$= \underline{\underline{-88}}$

Figur 11: Eksempel som blir presentert etter fagtekst og før oppgaver. Hentet fra Hjardar og Pedersen (2020, s. 165).

På figur 11 sitter Platon, som sammen med Arkimedes dukker opp på ulike steder i boka, og kommer med tips og enkle forklaringer. Disse figurene finnes i alle de tre Matematikk bøkene på ungdomstrinnet.

Noen av oppgavene i boken er nivådelt. En prikk indikerer at oppgavene er på det enkleste nivået, to prikker tilsvarer litt vanskeligere og tre er det vanskeligste nivået.

3.13 Uttrykket $x + 5$ viser alderen til Hanna når alderen til Sara er x år.

• Hvor gammel er Hanna hvis Sara er 14 år?

•• Hvor gammel er Hanna hvis Sara er 9,5 år?

••• Hvor gammel er Sara hvis Hanna er 17 år?

Figur 12: Nivådeling av oppgaver i Matematikk 8. Hentet fra Hjardar og Pedersen (2020, s. 170).

For å øke vanskelighetsgraden har de valgt å endre tallene i oppgavene, for å gjøre det mer komplisert. Men oppgavene spør om det samme. Dette er gjennomgående gjennom boken.

Mot slutten av hvert kapittel finnes det en underveisvurdering. Disse siden er markert med gul marg. Her er det oppgaver som oppsummerer det som er gjennomgått i kapittelet. Og helt til slutt i hvert kapittel er det en tverrfaglig oppgave, som tar med seg det som er lært i kapittelet og setter det i en praktisk situasjon ved å blande det med andre fag.

Bakerst i boken finnes det en liten manual som kan være til hjelp for elevene i arbeidet med GeoGebra og Excel. Her er det også fasit på alle oppgavene i de fire kapitlene, samt et stikkordsregister som kan brukes til å raskt orientere seg i boken.

4.2.2 Maximum 8

Maximum 8 fra Gyldendal er skrevet av Grete Normann Tofteberg, Janneke Tangen, Linda Tangen Bråthe, Ingvill Stedøy og Bjørnar Alseth. Læreboken er delt inn i fire kapitler: *Tall og Tallregning, Algebra*, *Funksjoner* og *Likninger og formler.* Og disse kapitlene er videre inndelt i underkapitler (Tofteberg et al., 2020).

Gyldendal skriver også dette om boka på sine nettsider:

- Gir elevene mulighet til å undre seg, være kreative og oppdage matematikken sammen
- Varierte aktiviteter, med utforskende, rike og åpne oppgaver
- Gir lærerne mulighet til å bruke ulike vurderingsmåter og vurderingssituasjoner underveis i opplæringen
- Innholdsrik gratis digital ressurs som støtter boka
- Heldekkende digital versjon av læreverket, med tilhørende adaptivt øve verktøy.

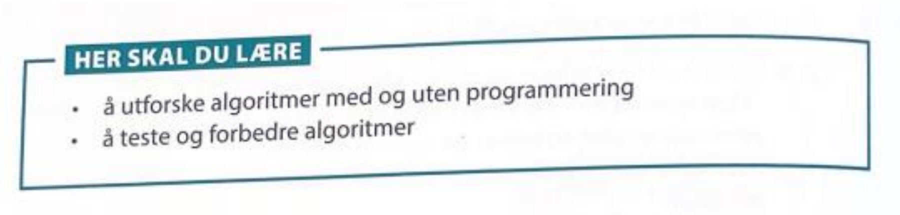
(Gyldendal, u.å)

Maximum 8 innledes med en dobbeltside hvor det står noen setninger om matematikkfaget. Her blir også de ulike elementene som finnes i boka presentert. Hvert kapittel åpner med en dobbel forside med bilde og et tilhørende spørsmål som kan diskuteres før man går i gang med det nye kapittelet. På forsiden finnes også en presentasjon av *matematikk ord* som vil bli brukt gjennom kapittelet, disse kommer igjen med forklaring i sidemargen etter hvert som ordene blir brukt i kapittelet og alle disse ordene er samlet i et *ordkapittel* bakerst i boken.

figurtall antall enheter en figur er satt sammen av

Figur 13: Eksempel på ordforklaring i margen. Hentet fra Tofteberg et al. (2020, s. 92).

Hvert delkapittel åpner med en boks hvor det står mål for hva som skal læres i kapittelet.

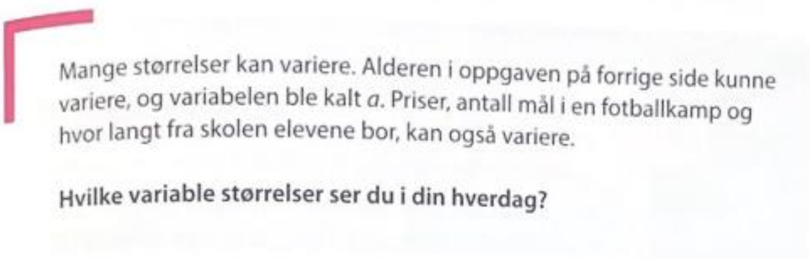


HER SKAL DU LÆRE

- å utforske algoritmer med og uten programmering
- å teste og forbedre algoritmer

Figur 14: Mål for hva eleven skal lære i delkapittelet. Hentet fra Tofteberg et al. (2020, s. 128).

Underveis i hvert kapittel finnes det grå tekstbokser med rosa detaljer. I disse boksene står det forklarende tekst til kapitelets tema, og hver slik fagtekst avsluttes med et refleksjonsspørsmål.



Mange størrelser kan variere. Alderen i oppgaven på forrige side kunne variere, og variabelen ble kalt a. Priser, antall mål i en fotballkamp og hvor langt fra skolen elevene bor, kan også variere.

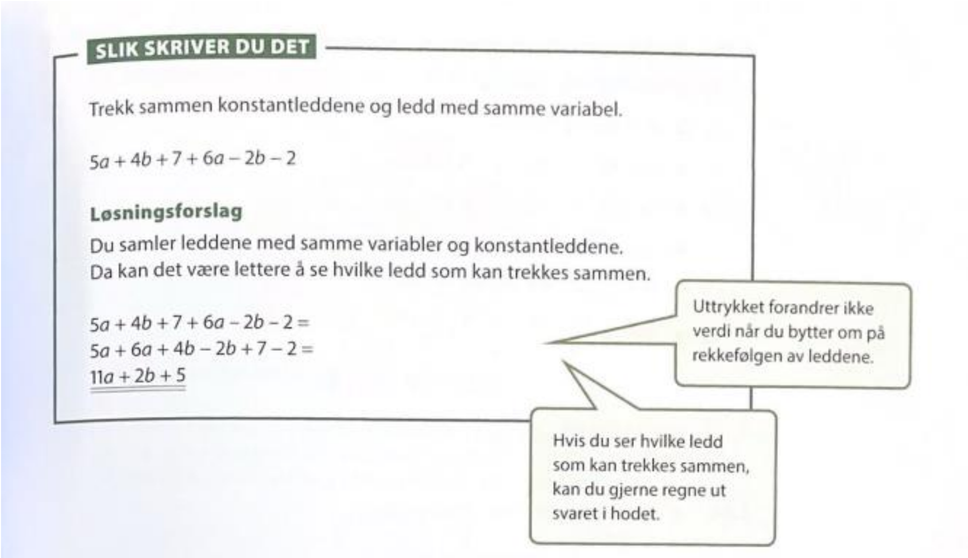
Hvilke variable størrelser ser du i din hverdag?

Figur 15: Boks med fagtekst. Hentet fra Tofteberg et al. (2020, s. 107).

Disse tekstboksene kan stå både før og etter oppgaver, og er ikke alltid det som kommer først i et delkapittel.

På noen steder gjennom boken finnes det noen grønne sider. Disse inneholder praktiske aktiviteter og utforskningsoppgaver, som skal løses ved hjelp av samarbeid. Standardoppgavene står spredd rundt i delkapitlene, både før og etter fagtekst.

Underveis er det også noen typer oppgaver som er presentert med et eksempel på løsningsmetode i grønn boble med tittelen *slik skriver du det*.


SLIK SKRIVER DU DET

Trekk sammen konstantleddene og ledd med samme variabel.

$5a + 4b + 7 + 6a - 2b - 2$

Løsningsforslag

Du samler leddene med samme variabler og konstantleddene.
Da kan det være lettere å se hvilke ledd som kan trekkes sammen.

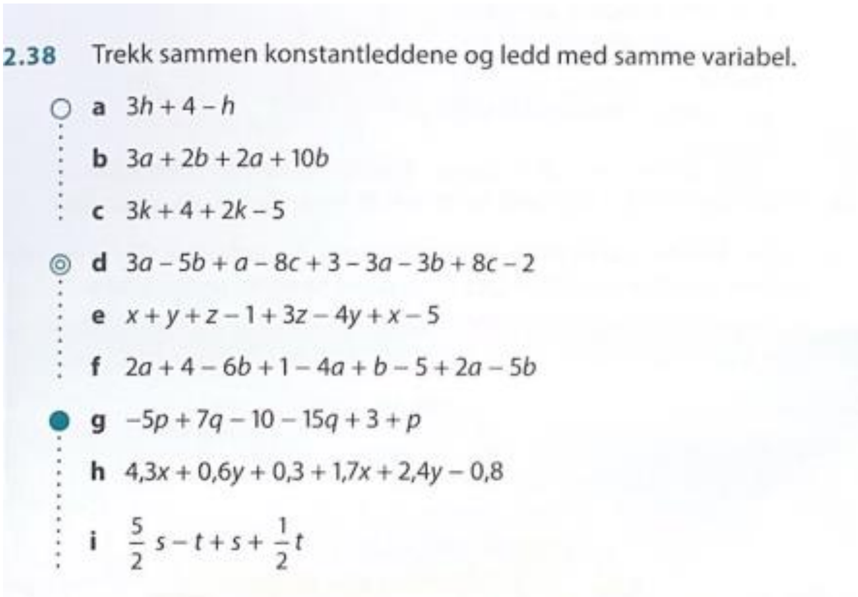
$5a + 4b + 7 + 6a - 2b - 2 =$
$5a + 6a + 4b - 2b + 7 - 2 =$
$\underline{\underline{11a + 2b + 5}}$

Uttrykket forandrer ikke verdi når du bytter om på rekkefølgen av leddene.

Hvis du ser hvilke ledd som kan trekkes sammen, kan du gjerne regne ut svaret i hodet.

Figur 16: Eksempel på løsning av etterfølgende oppgaver. Hentet fra Tofteberg et al. (2020, s. 119)

Noen oppgaver har også deloppgaver med ulik vanskelighetsgrad. Dette markeres med ulike sirkler, slik som i Figur 17. Her økes vanskelighetsgraden ved å bruke flere bokstaver, lengre uttrykk, desimaltall og brøk. Noen tekstoppgaver er også markert med ulik vanskelighetsgrad, men da er det ofte forskjellige type spørsmål, hvor det enkleste kan være å regne ut et svar, mens den vanskeligste er ute etter at eleven skal utforme et uttrykk eller lignende.


2.38 Trekk sammen konstantleddene og ledd med samme variabel.

a $3h + 4 - h$
b $3a + 2b + 2a + 10b$
c $3k + 4 + 2k - 5$
d $3a - 5b + a - 8c + 3 - 3a - 3b + 8c - 2$
e $x + y + z - 1 + 3z - 4y + x - 5$
f $2a + 4 - 6b + 1 - 4a + b - 5 + 2a - 5b$
g $-5p + 7q - 10 - 15q + 3 + p$
h $4,3x + 0,6y + 0,3 + 1,7x + 2,4y - 0,8$
i $\frac{5}{2}s - t + s + \frac{1}{2}t$

Figur 17: Eksempel på nivådeling av oppgave. Hentet fra Tofteberg et al. (2020, s. 119)

Til slutt i hvert kapittel finner vi *Kort sagt* og *Se sammenhenger*. *Kort sagt* sidene inneholder en *oppsummering av læringsmål og hjelp til egenvurdering og repetisjon (Tofteberg et al., 2020, s. 3)*, mens *se sammenhenger* tilbyr *varierte oppgaver, aktiviteter og oppdrag der du får arbeide i dybden med sammenhengen i faget og sammenhengen mellom matematikk og andre fag og temaer (Tofteberg et al., 2020, s. 3)*. Bakerst i boken finnes det et *ordbibliotek*, hvor alle fagbegrepene står med forklaring og sidetall på hvor de er brukt i boken.

4.2.3 Matemagisk 8

Matemagisk 8 er Aschehoug sin lærebok i matematikk. Boken er skrevet av Asbjørn Lerø Kongsnes og Anne Karin Wallace og er delt inn i 10 kapitler som videre er delt inn i delkapitler. Til sammen utgjør disse kapitlene grunnlaget for de samme temaene som de to foregående bøkene, henholdsvis tall og tall-lære, algebra, likninger, funksjoner og sammensatte måleenheter.

Bokens innhold er beskrevet på Aschehoug sine nettsider:

> Grunnbok, matematikk for ungdomstrinnet inneholder en stor variasjon av oppgavetyper, spill og aktiviteter som engasjerer og gjør matematikkundervisningen meningsfull for lærere og elever. Differensieringsmodellen lar elevene lære matematikk på sitt nivå, men likevel i takt med hverandre. Med *Snakke matte* får elevene gjøre aktiviteter som oppfordrer til dem til å argumentere med egne ord og utvikle kritisk tenkning. Elevene vil utvikle algoritmisk tenkning og lære programmering på fagets premisser.

(Aschehoug, u.å)

I begynnelsen av boka blir de ulike oppgavetypene, som elevene møter på underveis i kapitlene, presentert. Hvert kapittel starter med en illustrert forside og noen spørsmål knyttet til denne, som kan diskuteres i fellesskap. I starten av hvert delkapittel introduseres det en eller flere setninger som utgjør mål for hva eleven skal lære i arbeid med kapittelet.

Figur 18: Eksempel på mål i starten av et delkapittel. Hentet fra Kongsnes og Wallace (2020, s. 100).

Videre begynner det som kalles for *fellesløypa*, denne delen består av teori, eksempler, og ulike typer oppgaver som er ment å passe for alle elever. I fellesløypa inngår blant annet det som kalles for *snakke matte*, som er samarbeids oppgaver der elevene skal snakke matte med hverandre, disse inngår ikke i de nummererte standardoppgavene, men er markert i en egen blå boks.

Figur 19: Eksempel på snakke matte oppgaver. Hentet fra Kongsnes og Wallace (2020, s. 105).

Noen av standardoppgavene og *snakke matte* oppgavene er markert med et gult nøkkelhull. Dette indikerer at oppgaven *viser en spesielt viktig ide eller tenkemåte* (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 4).

Figur 20:Nøkkelhull som indikerer oppgaver med viktige tenkemåter og ideer. Hentet fra Kongsnes og Wallace (2020, s. 4)

I *felles løypa* finnes også forklaringer og eksempler, samt spill og aktiviteter.

Figur 21: Eksempel med løsning fremhevet i en grønn boks. Hentet fra Kongsnes og Wallace (2020, s. 116)

Det er også fire figurer, henholdsvis Hiyanna, Henrik, Tuva og Yonas som dukker opp underveis i kapitlene for å hjelpe eleven med å huske ting fra tidligere og kommer med tips og forslag til hvordan oppgaver skal løses.

Figur 22: Hiyanna som hjelper eleven å huske hva gjenomsnitt er. Hentet fra Kongsnes og Wallace (2020, s. 105)

Til slutt i hvert delkapittel kommer det noen røde sider med *følg stien* oppgaver, disse gir mer trening i det som har blitt gjennomgått i delkapittelet, etterfulgt av gule sider med *terrengløypa* oppgaver som er mer sammensatte oppgaver om det som er gjennomgått, samtidig som de inkluderer flere temaer. Etter hvert kapittel finnes det *topptur* oppgaver, dette er mer utfordrende oppgaver som strekker seg utover det som kan forventes av elevene på 8.trinn. Disse oppgavene er ment som en ekstra utfordring til de som mestrer *terrengløypa*. Fire steder i boka er det også plassert ut såkalte *ekspedisjons* oppgaver, som er ekstra avanserte og *gir særlig god trening i abstraksjon, generalisering og avansert problemløsning* (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 5). Helt til slutt i boken finnes det fasit til oppgavene.

4.3 Tilleggsmateriell

Alle de tre lærebøkene kommer med tilleggsmateriell som kan brukes av både lærerne og elevene for å supplere grunnboken. Matematikk 8 kommer med en oppgavebok som inneholder differensierte oppgaver inndelt etter de samme fire kapitlene som grunnboken. Disse oppgavene er tilpasset slik at elevene skal finne oppgaver som passer sitt nivå. I tillegg til denne kom Cappelen Damm i 2023 med en alternativ oppgavebok. Dette er personlige oppgavebøker som elevene kan skrive rett inn i. Matematikk 8-10 har også en tilhørende håndbok, som inneholder regler, manualer med nyttige funksjoner til hjelp i arbeid med digitale verktøy, samt eksamensoppgaver med tilhørende løsningsforslag. Læreren har også sin egen bok, som inneholder de samme sidene som elevenes grunnbok, men med tilhørende informasjon og tips som kan være til hjelp i undervisning- og vurderingssituasjoner. I tillegg til alt det fysiske ekstramateriellet har læreren også tilgang til en digital ressurs som blant annet inneholder nyttige ting som ferdiglagde årsplaner og prøver (Cappelen Damm, u.å).

Gyldendal tilbyr også en fysisk regelsamling tilknyttet Maximum 8-10, som inneholder regler, formler og definisjoner tilknyttet pensum over de tre årene. De tilbyr i tillegg *Skolestudio 8-10* som er en digital læringsressurs på tvers av alle fag i grunnskolen, hvor det ligger innhold som dekker kompetansemålene i alle fag (Gyldendal, u.å).

I tillegg til grunnboken Matemagisk 8, tilbyr Aschehoug en parallellbok, som er et tilbud til elever som har litt vanskeligheter med faget. Denne boken er en erstatning for grunnboken, og har samme struktur som den originale grunnboken. Denne er laget med mulighet for å kunne skrives direkte i. Matemagisk 8-10 har også en tilhørende elevhåndbok som inneholder tips, repetisjonsoppgaver og de vanligste programmeringskommandoene. Aschehoug har også laget et digitalt univers, hvor både lærere og elever kan finne alt de trenger av oppgaver og læringsressurser i alle fagene på grunnskolen. Lærerne har også en digital lærerveiledning for Matemagisk 8-10, som inneholder tips og triks til læreren, samt forslag til årsplan (Aschehoug, u.å)

4.4 Læringsmål

Alle de tre bøkene presenterer læringsmål i starten av hvert kapittel. Disse målene gir elevene en indikasjon på hva de kan forvente å lære i kapittelet, samtidig som det sier noe om hva læreboken vektlegger ved læring av algebra.

Matematikk 8 presenterer sine læringsmål på første siden av kapittelet, hvor det står at elevene skal *lære om,* denne formuleringen gir inntrykk av at målet er at eleven skal lære de algebraiske reglene, og ikke at elevene skal bruke algebra til å forstå eller se sammenhenger. To av målene sier derimot at elevene skal *lære om utforsking, likninger og problemløsning* og *lære om hvordan uttrykke praktiske situasjoner algebraisk* (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 163). Disse målene indikerer at elevene skal forstå de algebraiske reglene, for så å kunne anvende de i praktiske sammenhenger

Både Maximum 8 og Matemagisk 8 har mål for hvert delkapittel. Dette gir en mer oversiktlig oppsummering av hva som forventes å lære i de ulike delkapitlene. Begge kapitlene har, i likhet med Matematikk 8, mål som bygger på å uttrykke praktiske situasjoner algebraisk, men de bruker andre verb for å innlede sine mål. I Maximum 8 brukes verbene *å kjenne igjen, å bruke, å lage, å finne, å utforske, å teste* og *å forklare* for å introdusere målene. Disse verbene brukes om mål for å lære og gjenskape algebraiske regler, og for læringsmål som påvirker eleven til å bruke reglene de har lært til å finne, utforske, teste og forklare algebra og bruke det i en større sammenheng.

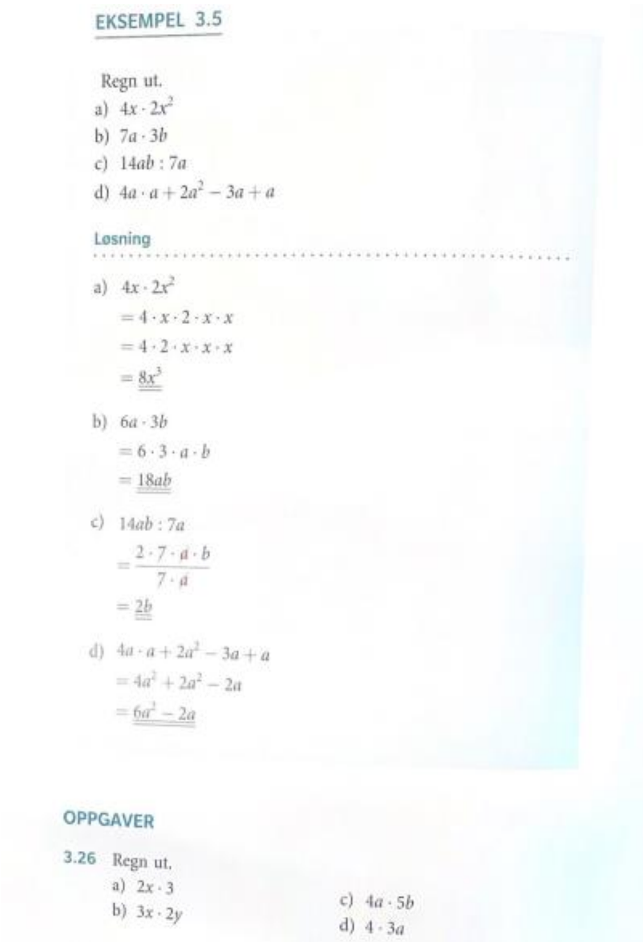
I Matemagisk 8 brukes begrepene *sette inn, generalisere* og *bruke* foran målene som bygger på å lære og bruke algebraiske regler. Videre brukes de samme verbene som i Maximum 8 for å innlede målene som bygger på å utforske, som for eksempel *utforske hvordan vi kan forenkle algebraiske uttrykk* og *utforske oppløsning av parenteser ved hjelp av rektangler, figurtall og regnefortellinger (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 152, 176).* Målene formulert på denne måten legger opp til at elevene skal utforske bruken av algebraiske regler, men de legger bare opp til bruk av algebra i andre kontekster gjennom utforsking ved hjelp av regnefortellinger.

4.5 Introduksjon og utforming

Delkapitlene i Matematikk 8 begynner med et fellesspørsmål som skal fungere som en introduksjon til delkapittelet ved at elevene kan diskutere de sammen. Disse spørsmålene baserer seg på det som senere skal læres, slik som *Hvordan kan du løse et regneuttrykk med bokstaver*. Dette spørsmålet legger opp til at elevene skal tenke seg frem til et svar, ved hjelp av ting de tidligere har lært, men ved å plassere spørsmålet rett før gjennomgangen av temaet, gir man elevene mulighet til å raskt finne svaret uten å reflektere noe rundt løsningen først.

Alle delkapitlene i boken er videre inndelt i underkapitler. Kapittelet tar først for seg algebraiske uttrykk, som er delt opp i en del for innsetting i uttrykk, og en som handler om å lage uttrykk. Neste delkapittel baserer seg også på algebraiske uttrykk, men da er det addisjon og subtraksjon. Etter dette følger *Potenser i algebraiske uttrykk, Multiplikasjon og divisjon av algebraiske uttrykk* og *Parenteser i algebraiske uttrykk (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 175, 179, 183)*. Kapittelet tar også for seg mønster, her introduseres først tallfølger før elevene skal lære å beskrive mønster algebraisk. Denne inndelingen skaper en oversiktlig gjennomgang av algebra, da det er en ny inndeling for hvert tema og undertema som introduseres.

Delkapitlene og deres underkapitler er bygd opp på en tradisjonell måte, hvor temaet først presenteres med en fagtekst og definisjoner, etterfulgt av et passende eksempel med tilhørende løsningsmetode, før det kommer noen oppgaver som passer til temaet. I den faglige introduksjonen trekkes det inn nye faglige begreper som står i kursiv, med tilhørende beskrivelse. Eksemplene presenteres utelukkende før oppgavene og viser løsningsmetoder som elevene kan bruke for å løse kommende oppgaver, noe som leder til guidet algoritmisk resonnering (Lithner, 2008).



EKSEMPEL 3.5

Regn ut.

a) $4x \cdot 2x^2$
b) $7a \cdot 3b$
c) $14ab : 7a$
d) $4a \cdot a + 2a^2 - 3a + a$

Løsning

a) $4x \cdot 2x^2$
$= 4 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot x$
$= 4 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x$
$= \underline{\underline{8x^3}}$

b) $6a \cdot 3b$
$= 6 \cdot 3 \cdot a \cdot b$
$= \underline{\underline{18ab}}$

c) $14ab : 7a$
$= \dfrac{2 \cdot 7 \cdot a \cdot b}{7 \cdot a}$
$= \underline{\underline{2b}}$

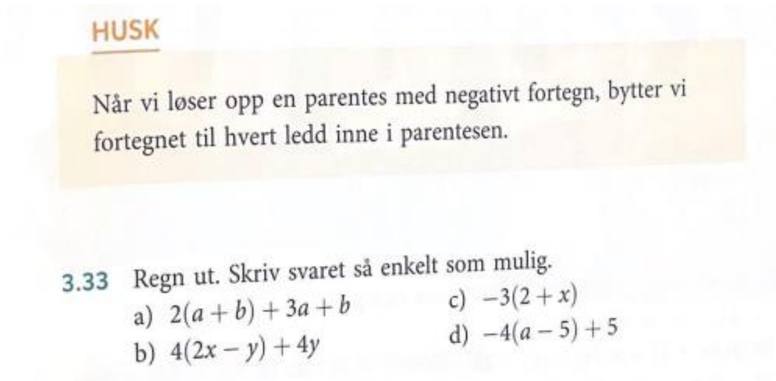
d) $4a \cdot a + 2a^2 - 3a + a$
$= 4a^2 + 2a^2 - 2a$
$= \underline{\underline{6a^2 - 2a}}$

OPPGAVER

3.26 Regn ut.
a) $2x \cdot 3$
b) $3x \cdot 2y$
c) $4a \cdot 5b$
d) $4 \cdot 3a$

Figur 23: Eksempel med tilhørende løsning og etterfølgende oppgave. Hentet fra Hjardar og Pedersen (2020, s. 180).

Underveis i kapittelet kommer forfatterne med nyttige huskeregler, disse plasseres både før, og underveis i oppgavene, og skal hjelpe elevene med å huske ting de har lært tidligere, som nå kan være til nytte i oppgaveløsningen.



HUSK

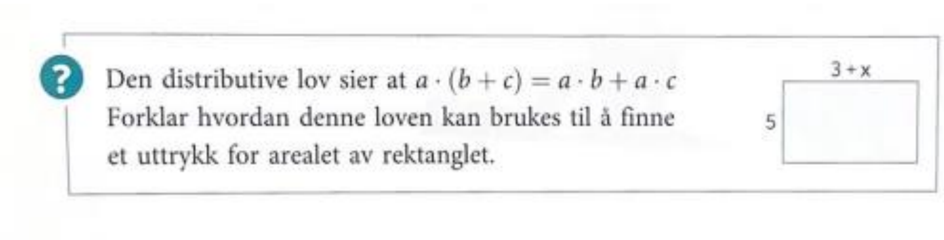
Når vi løser opp en parentes med negativt fortegn, bytter vi fortegnet til hvert ledd inne i parentesen.

3.33 Regn ut. Skriv svaret så enkelt som mulig.
a) $2(a + b) + 3a + b$
b) $4(2x - y) + 4y$
c) $-3(2 + x)$
d) $-4(a - 5) + 5$

Figur 24: Huskeregel for å løse oppgaver med parenteser. Hentet fra Hjardar og Pedersen (2020, s. 185).

Disse huskereglene fungerer som en påminnelse for elevene, og kan være nyttige for å hjelpe elevene med å komme frem til riktig løsning. På en måte kan disse boblene fungere som en innebygd lærer når elevene arbeider med oppgaver på egenhånd. De er også med på å fremme mekanisk læring fordi elevene ikke trenger å huske reglene selv, noe som ikke nødvendigvis bidrar til en dypere forståelse av de ulike matematiske prinsippene.

Det stilles også fellesspørsmål underveis i teksten, som kan brukes som et slags avbrekk fra standardoppgavene. Disse spørsmålene er nok ment for å diskuteres i grupper eller i plenum. Denne type spørsmål er med på å gi elevene mulighet til å anvende prosedyrene og reglene de har lært i andre situasjoner. Slike oppgaver er med på å bygge opp forståelsen.


Den distributive lov sier at $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Forklar hvordan denne loven kan brukes til å finne et uttrykk for arealet av rektanglet.

Figur 25: Eksempel på fellesoppgave. Hentet fra Hjardar og Pedersen (2020, s. 185)

Eksempelet i figur 25 er en fellesoppgave hentet fra delkapittelet som omhandler parenteser i algebrauttrykk.

Maximum 8 har en lignende inndeling av delkapitler med tilhørende underkapitler som i Matematikk 8, men den skiller seg ut med tanke på rekkefølgen av temaene. Algebrakapittelet innledes med *Utforsking av mønstre* (Tofteberg et al., 2020, s. 92), som følges opp av de to underkapitlene *Beskrive tallmønster* og *Generalisere tallmønster* (Tofteberg et al., 2020, s. 94, 96). Videre går boken inn på *Algebraiske uttrykk* (Tofteberg et al., 2020, s. 106). Kapittelet deles inn i *Variable størrelser* (Tofteberg et al., 2020, s. 107). Her blir elevene introdusert for størrelser som kan variere i dagliglivet, og for praktiske sammenhenger hvor det kan være nyttig å bruke variabler. Neste underkapittel handler om å sette inn tall for variablene i algebraiske uttrykk for å finne verdien av utrykket, etterfulgt av et underkapittel som omhandler å *Forenkle algebraiske uttrykk* (Tofteberg et al., 2020, s. 116). Boken har ingen egne delkapitler for potenser og parenteser i algebraiske uttrykk, men å løse oppgaver med potenser blir innført i et eksempel i boken. Til forskjell fra Matematikk 8 innføres algoritmer i algebra kapittelet til

Maximum 8. Her skal elevene lære å utforske algoritmer både med og uten bruk av programmering.

Delkapitlene med tilhørende underkapitler er bygd opp på varierende måter. Kapitlene veksler mellom å åpne med en oppgave tilhørende temaet, eller å åpne med en fagtekst. Hver fagtekst avslutter med et spørsmål som bidrar til at elevene må bruke det de har lest for å komme frem til et svar. I noen av kapitlene kommer det nye seksjoner med fagtekst og innføringer mellom oppgavene underveis. Noen av fagtekstene inneholder også eksempler for å vise elevene hvordan fagkunnskapen anvendes til å løse oppgavene.

I algebra brukes variabler som symboler for tall. Når du regner med variabler, skal du derfor bruke akkurat de samme regnereglene som når du regner med tall.

Når du legger sammen like tall, kan du skrive det enklere med gangetegn slik:
$5+5+5+5+5+5=6\cdot 5$

Med variabler legger vi sammen på samme måten slik:
$a+a+a+a+a+a=6\cdot a=6a$

Vi kan forenkle uttrykk med samme variabel:

$$3a+2a=\underbrace{a+a+a}_{3a}+\underbrace{a+a}_{2a}=5a$$

$$3\cdot 2b=\underbrace{b+b}_{2b}+\underbrace{b+b}_{2b}+\underbrace{b+b}_{2b}=6b$$

$$6c-2c=4c$$

$2a+3b+5$ er et algebraisk uttrykk med tre ledd. De to første leddene, $2a$ og $3b$, inneholder variabler. Disse leddene kalles variabelledd. Det siste leddet, 5, kalles konstantledd.

Du kan forenkle algebraiske uttrykk ved å trekke sammen konstantledd for seg og like variabelledd for seg. Uttrykket $8p-5+4p+7$ kan forenkles til $12p+2$. Du kan ikke trekke sammen ulike variabelledd, for eksempel $2a+3b$. Det er fordi a og b kan ha ulike verdier.

Hvordan kan du trekke sammen uttrykket $4t-3+5-2t+8$? Hvordan kan du generelt trekke sammen uttrykk med flere variabler og konstanter?

Figur 26: Fagtekst med eksempel som demonstrerer løsning. Hentet fra Tofteberg et al. (2020, s. 116).

Det presenteres også eksempler underveis i kapittelet. Noen av delkapitlene inneholder ingen eksempler, mens i andre er eksemplene plassert mellom fagtekst og oppgaver, som i Matematikk 8, men også midt imellom oppgaver, for å hjelpe elever med å løse en ny type oppgaver.

Underveis er det plassert ut små snakkebobler som kommer med tips og påminnelser til eleven. De samme snakkeboblene blir også brukt til å presentere utsagn i diskusjonsoppgaver.

Figur 27: Eksempel på oppgave som bruker snakkeboblene. Hentet fra Tofteberg et al. (2020, s. 124)

Figur 28: Snakkebobler med nyttige tips til oppgaveløsning. Hentet fra Tofteberg et al. (2020, s. 119)

Snakkeboblenes tips kan hjelpe elevene til selvstendig tenking, samtidig som de forklarer konsepter eller metoder på en mer tilgjengelig måte, noe som kan hjelpe elevene til å forstå vanskelige konsepter. De er også presentert på en måte som bryter opp teksten, og som fanger blikket ved å gi en variasjon av sidenes oppbygging.

I motsetning til Matematikk 8 og Maximum 8, er delkapitlene i Matemagisk 8 inndelt etter tall, de har heller ingen underkapitler, slik som de andre kapitlene. Denne inndelingen bidrar til å gjøre kapittelinndelingen veldig oversiktlig, da alle overskriftene står oppført i innholdsfortegnelsen. Gjennom avgrensningen har jeg plukket ut delkapitler som til sammen tar for seg det samme som i de to andre bøkene (se tabell 2).

Delkapitlene jeg har analysert er alle bygd opp ulikt. Til eksempel starter 3A med en fagtekst, etterfulgt av et eksempel på hvordan oppgavene skal løses, før elevene blir presentert for oppgavene. 3C starter rett på oppgaver, og kommer aldri med noe forklarende tekst. Noen av delkapitlene er bygd opp i likhet med delkapitlene i Maximum 8, hvor det til eksempel presenteres et eksempel, før elevene skal i gang med oppgaveløsning, mens i andre blir fagtekst og eksempler presentert innimellom oppgavene i delkapittelet. Fordelen med den tradisjonelle oppbygningen i 3A er at den forbereder elevene på oppgaveløsningen, ved å forklare konseptet bak, og komme med eksempler. Det å starte direkte på oppgaver kan være en effektiv måte hvis kapittelet omhandler et tema som er blitt gjennomgått tidligere. På denne måten blir elevene utfordret til å huske og anvende kunnskap de tidligere har lært. I dette tilfellet omhandlet oppgavene programmering i Python, som blir gjennomgått i kapittel 2D, dessuten bygger oppgavene på å kjøre et gitt program, og gjøre enkle endringer.

Fagtekstene i Matemagisk 8, inneholder i likhet med de to andre bøkene, nye matematiske begreper. Disse er uthevet med fet skrift, og kommer med tilhørende definisjon. Videre er det fire figurer som gjennom kapittelet kommer med tips og info, disse kan sees i likhet med snakkeboblene i Maximum 8, som kommer inn i ulike situasjoner og bryter opp teksten med små kommentarer og huskeregler.

4.6 Utforskende algebraaktiviteter

I tillegg til de tradisjonelle nummererte oppgavene, fant jeg at lærerbøkene også inkluderer andre algebraiske aktiviteter, som gir elevene mulighet til å utforske og anvende matematiske konsepter gjennom mer dynamiske tilnærminger.

Utenom de nummererte oppgavene i Matemagisk 8 fant jeg først *Algebraspillet* (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 101). Her kan to eller flere elever gå sammen for å spille. Målet er å komme først til mål. Man flytter fremover ved at man setter verdiene på terningene inn i det algebraiske uttrykket som er presentert i ruten man står i, og svaret gir antall ruter eleven kan flytte frem. Spillet oppmuntrer til samarbeid og dialog mellom elevene, som bidrar til at elevene må forklare sine tenkemåter. Det gir også elevene mulighet til å anvende de algebraiske løsningsmetodene som et gjennomgått i en mer praktisk situasjon.

Både i kapittel 3 og kapittel 6A i Matemagisk 8 er det inkludert en større oppgave som baserer seg på virkeligheten. Oppgavene heter henholdsvis *Hund* og *Mønster* (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 106-107; 182-183). Den første handler om en familie som skal anskaffe hund, og det ansvaret som følger med dette. Mens oppgaven om mønster omhandler mønster i strikkeklær og hva slags mønster krigsskip danner i sine ulike formasjoner. Her settes matematikken i en realistisk kontekst, som gjør faget mer meningsfylt for elevene. Dette kan hjelpe dem med å forstå hvorfor matematiske ferdigheter er viktige i hverdagslivet.

Topptur (Kongsnes & Wallace, 2020, s. 125), på siste side i kapittel 3 i Matemagisk 8, inneholder oppgaver som gir en dypere forståelse av divisjon og rest, og leder videre inn i formuleringen av algebraiske uttrykk. Oppgavene starter enkelt, før de fort utfordrer elevene til å tenke algebraisk og identifisere tallmønstre. De styrker også elevenes evne til å generalisere matematiske konsepter gjennom utvikling av algebraiske uttrykk som beskriver forholdet mellom tall.

Underveis i algebrakapittelet i Maximum 8 fant jeg hele 6 sider som inneholdt en matematisk aktivitet utenom standardoppgavene. Disse kan sees i likhet med spillet i Matemagisk 8, da de inneholder ulike aktiviteter eller spill som elevene skal gjennomføre to eller flere sammen, og de fremmer samarbeid og kommunikasjon mellom elevene. De bidrar også til at elevene kan se nytten av matematikken i en praktisk kontekst.

De eneste oppgavene jeg fant i Matematikk 8 utenom standardoppgavene var *Underveisvurdering* (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 234-235) i slutten av kapittelet, etterfulgt av *Tverrfaglig oppgave 3* (Hjardar & Pedersen, 2020, s. 236-237). Førstnevnte omfatter 15 oppgaver, som i likhet med oppgavene ellers i kapittelet, i all hovedsak er genererende og transformerende, og utfordrer ikke eleven til å anvende det de har lært i kapittelet til noe annet enn å løse flere enkle matematiske problem. Jeg synes det er uklart når disse oppgavene er ment å komme inn i undervisningen, og hvorfor de ikke er flettet inn i kapittelet underveis.

Den tverrfaglige oppgaven i Matematikk 8 kan sees i likhet med mønster og hundeoppgaven i Matemagisk 8. Oppgaven omhandler FN's tredje bærekraftsmål, og utfordrer elevene til å konstruere og løse ulike matematiske problem som omhandler ulike sykdommer og utbredelsen av disse i verden. Oppgaven inkluderer flere matematiske temaer, samtidig som den utfordrer elevene til å utforske det samfunnsfaglige aspektet rundt sykdomsutviklingen i verden. Denne oppgaven forbereder elevene på å tenke kritisk og å utføre matematiske beregninger knyttet til virkelige utfordringer.

4.7 Krav til eleven

Funnene i den vertikale analysen av oppgaver innenfor algebra i de tre lærebøkene er delt inn i tabeller som presenteres i dette kapittelet. Først vil jeg gjennomgå ulike type oppgaver, deretter hva slags type algebraisk aktivitet de kan kategoriseres som, og til slutt resonneringen som ligger til grunn for å løse oppgavene.

4.7.1 Oppgavetype

Først analyserte jeg hver deloppgave med tanke på utformingen. Her skilte jeg mellom tekstoppgaver og enkle matematiske problemer. Tabell 4 gir en oversikt over oppgavetypene innenfor algebra i de tre lærebøkene, samt hvor stor del av oppgavene som ble analysert de utgjør, i prosent. I tabellen teller hver deloppgave som en deloppgave, og derfor er antallet oppgaver høyere her enn i tabell 3.

Tabell 4: Oversikt over oppgavetyper i lærebøkene.

		Tekst	Problem	Totalt
Matemagisk 8	Oppgaver	209	139	348
	Prosent	60,6%	39,4%	
Matematikk 8	Oppgaver	31	219	250
	Prosent	12,4%	87,6%	
Maximum 8	Oppgaver	230	60	290
	Prosent	79,3%	20,7%	

Fra tabellen ser vi at Matemagisk 8 er boken med flest oppgaver totalt innenfor de kapitlene jeg har tatt med i analysen. Det er derimot ikke den boken hvor jeg har analysert flest sider. Fra tabell 3 kan vi se at analysegrunnlaget i Matemagisk 8 utgjør 52 sider, opp mot 33 sider fra Matematikk 8 og 64 sider fra Maximum 8. Det er altså flere oppgaver per side i Matematikk 8. Av de 348 oppgavene analysert fra Matemagisk 8, er 209 av de kategorisert som tekstoppgaver, altså ca. 60% av oppgavene.

Matematikk 8 er boken med færrest sider, og færrest oppgaver, omtrent 100 oppgaver mindre enn i Matemagisk 8. Dette utgjør omtrent 7,5 oppgaver per side, mens i Matemagisk 8 er det ca. en oppgave mindre per side. I Matematikk 8 utgjør kun 31 av de 250 analyserte oppgavene, tekstoppgaver, noe som utgjør 12,4%. Altså utgjør hele 87,6% enkle matematiske problemer.

4.7.2 Algebraiske aktiviteter

Alle oppgavene ble videre analysert for hva slags algebraisk aktivitet de er. I tabell 5 presenteres antall oppgaver og hvor stor prosentdel de utgjør av alle oppgavene som ble kategorisert. De er inndelt etter Kieran (2004) sine tre kategorier for algebraiske aktiviteter.

Tabell 5: Oversikt over algebraiske aktiviteter i lærebøkene.

		Genererende	Transformerende	Global Meta-Nivå
Matemagisk 8	Oppgaver	70	252	26
	Prosent	20,1%	72,4%	7,5%
Matematikk 8	Oppgaver	39	207	4
	Prosent	15,6%	82,8%	1,6%
Maximum 8	Oppgaver	97	166	27
	Prosent	35,5%	57,2%	9,3%

Resultatene viser at det er gjennomgående transformerende aktiviteter som utgjør flertallet i de tre lærebøkene, samtidig som oppgaver på Global Meta-nivå utgjør den laveste prosenten i de tre lærebøkene. Maximum 8 har høyest prosentandel Global Meta-nivå aktiviteter av alle tre læreverkene med nesten 10% av alle oppgavene, og høyest prosentandel genererende oppgaver med 35% av alle oppgavene i boken.

Matematikk 8 har bare 4 oppgaver som er kategorisert på Global Meta-Nivå. Slike algebraiske aktiviteter fokuserer på å forstå og utforske de grunnleggende algebraiske prinsippene, i stedet for å fokusere på spesifikke problemløsningsoppgaver. I denne sammenhengen kategoriseres dette som transformerende aktiviteter, som utgjør 72,4% av alle oppgavene som ble analysert fra boken.

4.7.3 Form for resonnering

I tabell 6 presenterer jeg resultatene fra den siste analysen jeg foretok av oppgavene. Her så jeg på hva slags form for resonnering som trengtes for å løse oppgavene, med utgangspunkt i Lithner (2008) sitt rammeverk for resonnering.

Tabell 6: Oversikt over oppgavenes krav til resonnering.

		Algoritmisk resonnering	Kreativ matematisk resonnering
Matemagisk 8	Oppgaver	303	45
	Prosent	87,1%	12,9%
Matematikk 8	Oppgaver	243	7
	Prosent	97,2%	2,8%
Maximum 8	Oppgaver	202	88
	Prosent	69,7%	30,3%

Oppgavene i Matematikk 8 skiller seg tydelig fra de andre bøkene når det kommer til form for resonnering som trengs for å løse oppgavene. Boken har kun 7 oppgaver som krever kreativ matematisk resonnering, mens 97% av oppgavene krever algoritmisk resonnement.

I Matemagisk 8 er det 45 oppgaver som krever kreativt matematisk resonnement, mens i Maximum 8 er antallet nesten det dobbelte, til tross for at det her er færre oppgaver analysert. Faktisk utgjør oppgaver som krever kreativt matematisk resonnement nesten så mye som en tredjedel av analysegrunnlaget fra Maximum 8.

5. Diskusjon

I dette kapittelet vil hovedfunnene fra analysen bli diskutert for å utforske og belyse problemstillingen: *Hvordan presenterer og strukturer tre lærebøker algebrakapittelet for matematikk på 8.trinn, og hvilken innvirkning har dette på forståelsen av algebraiske konsepter blant elever?* Resultatene fra analysen diskuteres i sammenheng med teorien som tidligere ble presentert.

5.1 Innhold og struktur

Hvordan varierer innholdet og strukturen i algebrakapitlene i de tre utvalgte lærebøkene?

Som Reys et al. (2004) påpeker, spiller ofte rekkefølgen til kapittelet en rolle når det kommer til hvilken rekkefølge læreren introduserer temaene. Kapittelinndelingen i de tre utvalgte bøkene avslører tydelige forskjeller i tilnærmingen til undervisningen i algebra. I Maximum 8 er algebrakapitlene strukturert på en sekvensiell og systematisk måte, hvor hvert nytt konsept bygger direkte på forståelsen fra det foregående. Den gradvise innføringen av bokstavregning, som begynner med å utforske mønstre før algebraiske uttrykk introduseres, er det Grønmo og Rosén (1998) kaller introduksjon gjennom pre-algebra. Bergsten et al. (1997) påpeker at å jobbe med pre-algebraiske oppgaver er nødvendig for å skape en naturlig progresjon i kapittelet.

I Matemagisk 8 er også de algebraiske temaene arrangert i en logisk rekkefølge, men med sterk vekt på praktiske anvendelser av algebra. Dette støtter dybdelæring ved å fremme forståelse av hvordan algebraiske konsepter kan anvendes i virkelige scenarioer. Slike oppgaver, som integrerer virkelige og relevante problemstillinger, og dermed knytter sammen læring og samfunnet, kan bidra til at elever opplever undervisningen som mer relevant og meningsfull (NOU 2014:7, 2014).

Matemagisk 8 introduserer dessuten algebra på samme måte som Matematikk 8. Begge har en grundig og strukturert tilnærming til algebra, med en tydelig trinnvis utvikling av temaer. Sistnevnte starter med grunnleggende algebraiske uttrykk, og følger videre opp med operasjoner som addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon innenfor disse utrykkene, videre fører bøkene elevene systematisk gjennom potenser, parenteser og bruk av variabler i ulike kontekster. I likhet med Maximum 8, bygger også her hver seksjon på den forrige, dette utgjør et grunnlag for at elevene får en solid forståelse av et tema, før de beveger seg til neste. Begge bøkene har, i motsetning til Maximum 8, valgt å introdusere algebraiske uttrykk før mønster og figurtall. Slik at når elevene skal arbeide med oppgavene som omhandler å utforske og generalisering mønstre, vet de allerede hvordan de skal utarbeide algebraiske uttrykk.

Ut ifra målene i læreplanen, skal elevene etter 8. trinn kunne utforske bruken av algebraiske regler, identifisere og formulere generelle mønstre, og utvikle og forklare matematiske uttrykk (Kunnskapsdepartementet, 2019a). I algebrakapitlene viser både Matemagisk 8 og Maximum 8 en moderne tilnærming ved å integrere programmering. Dette står i kontrast til Matematikk 8, som ikke inkluderer programmering i algebrakapitlene, eller i boken ellers. Inkluderingen av programmering understreker viktigheten av algoritmisk tenkning, en del av kjerneelementet utforsking og problemløsning, og handler om mer enn bare å lære elever å forstå datamaskiner eller forbedre digitale ferdigheter. Det handler om å utruste elevene med effektive metoder for systematisk å angripe problemer, definere dem klart og utarbeide praktiske løsninger (Sevik, 2016; Utdanningsdirektoratet, 2019). Å utvikle en dyp forståelse av algebraiske regler og algoritmer går langt utover tradisjonell boklæring; det forbereder elevene på å håndtere komplekse problemstillinger og fremmer en analytisk tilnærming til ulike typer utfordringer. Videre, ved å integrere praktiske problemløsningsstrategier i matematikkundervisningen, styrkes elevenes evne til å anvende matematiske prinsipper i tverrfaglige sammenhenger, noe som er avgjørende i et stadig mer teknologi-drevet samfunn. Denne tilnærmingen understøtter ikke bare matematisk kompetanse, men også utvikling av kritisk tenkning og kreativ problemløsning, ferdigheter som er høyt verdsatt i alle fagområder og i arbeidslivet. Målet er generelt, men jeg mener det er like viktig i algebra som i de andre kapitlene, fordi det legger grunnlaget for livslang læring og tilpasning til en stadig skiftende fremtid.

5.2 Kommunikasjon med elevene

Hvordan adresserer de ulike lærebøkene kommunikasjon med eleven gjennom introduksjon av emner, eksempler og definisjoner?

Den første av de fem komponentene for matematisk kompetanse slik de er presentert av Kilpatrick et al. (2001) fokuserer på forståelse og vektlegger evnen til å se sammenhenger mellom ulike matematiske begreper, ideer og prosedyrer. Dette aspektet av læring er dypt forankret i konseptene om kognitiv læring og dybdelæring.

I min analyse av de tre bøkene observerte jeg at nye faglige begreper blir introdusert på forskjellige måter, hvor hver bok har sin egen tilnærming til hvordan disse begrepene forklares eller defineres. Å flette inn disse begrepene ser jeg på som sentralt, da elevenes evne til å forstå og anvende matematiske prinsipper på tvers av problemer og sammenhenger er sentral i problemløsning. En viktig faktor i begrepsforklaringene som jeg ikke så på, er språket. Dette spiller en kritisk rolle i hvordan elever oppfatter og tilegner seg de matematiske konseptene. En mer detaljert undersøkelse av språkbruken kunne ha avdekket om terminologien og syntaksen er tilgjengelig for elevene og tilpasset deres forståelse, eller om det bidrar til unødvendige barrierer.

Engasjement i matematikkundervisningen er essensielt for dyp og varig læring, og det understreker viktigheten for hvordan læringsmål formuleres i lærebøker. Engasjement fremmer en holdning der elever oppfatter matematikk som et nyttig og verdifullt fag, har tro på at de kan utvikle seg i faget, og opplever at innsatsen er avgjørende for læringen (Kilpatrick et al., 2001), noe formuleringen av læringsmål kan ha en påvirkning på. I min analyse fant jeg at de ulike lærebøkene tar i bruk ulike tilnærminger til å formidle læringsmål, som påvirker elevenes engasjement for matematikk. Maximum 8 og Matemagisk 8 bruker blant annet aktive verb som *utforske* og *teste* i sine læringsmål. Dette bidrar til å fremheve matematikkens relevans og funksjonalitet, som kan bidra til å øke elevenes motivasjon og tro på fagets verdi, noe jeg opplever som viktig for å lære matematikk. Matematikk er et fag hvor mange elever kan føle at egenskapene for å mestre er noe de enten har, eller mangler.

I kontrast til dette presenterer Matematikk 8 sine læringsmål på en mindre dynamisk måte ved å starte med at elevene skal *lære om* de algebraiske reglene, som gir inntrykk av en mer regelbasert tilnærming. Likevel fant jeg at noen av målene også inkluderer elementer av utforsking og bruk, som når målene oppfordrer eleven til å utforske likninger og problemløsning, samt lære å uttrykke praktiske situasjoner algebraisk. Dette antyder at selv om det er tendens til å fokusere på regler, erkjenner også boken behovet for å sette algebra inn i praktiske situasjoner, og ifølge Kieran (2004), er genererende aktiviteter, transformerende aktiviteter og aktiviteter på global Meta-nivå, alle like viktige.

I analysen av de tre lærebøkene, Matematikk 8, Maximum 8 og Matemagisk 8, observerte jeg hvordan hver bok anvender eksempler for å illustrere og forklare matematiske konsepter. Bruken av eksempler er generelt positiv, fordi de spiller en sentral rolle i å bygge bro mellom teoretisk kunnskap og praktisk bruk, og kan derfor bidra til å styrke elevenes forståelse av algebraiske prinsipper. I Matematikk 8 er eksemplene plassert direkte ved introduksjonen av nye temaer, noe som gir elevene en knagg å henge teorien på i møte med oppgavene. I Matemagisk 8 og Maximum 8 fant jeg at bøkene ikke alltid gir elevene et eksempel på løsningsmetode før de går i gang med oppgavene, men at eksemplene ofte kommer innimellom oppgavene i kapittelet, og da ofte i sammenheng med introduksjon av en ny løsningsstrategi eller oppgavetype.

Eksempler i mattebøker ansees som et nøkkelverktøy for at elevene skal kunne koble teorien som blir presentert om til å brukes i en praktisk situasjon (Bruner et.al, 1956, sitert i Bills et al., 2006). Jeg oppdaget at plasseringen av eksemplene, og oppgavene som fulgte i alle de tre bøkene, kunne bidra til det Lithner (2008) definerer som guidet algoritmisk resonnering. Altså at eksemplene i de mattebøkene jeg analyserte kunne fungere som en mal for hvordan elevene kunne løse de etterfølgende oppgavene. På denne måten bidrar eksemplene i hovedsak til at elevene blir opplært til å følge algoritmer uten kanskje å forstå de underliggende prinsippene.

5.3 Lærebøkenes krav til løsning av oppgaver

Hvilke krav stiller de forskjellige lærebøkene til elevene når det gjelder løsning av algebraoppgaver?

I analysen fant jeg ut at det var klar overvekt av transformerende oppgaver (82,8%) i Matematikk 8, samt at oppgavene primært la til rette for algoritmisk resonnement (97,2%). Dette innebærer at læreboken stiller krav om at elevene skal være flinke til å utføre prosedyrer, som innsetting av tall for bokstaver og regne ut. Boken legger stor vekt på å utvikle elevenes ferdigheter når det kommer til matematiske prosedyrer, som Kilpatrick et al. (2001) beskriver som en av de fem komponentene når det kommer til matematiske ferdigheter. På den annen side, ved å ha et så sterkt fokus på regelbasert problemløsning, kan det være at boken ikke helt strekker til når det gjelder konseptuell forståelse eller oppmuntrer til kreativ og strategisk tenkning i problemløsningen.

Maximum 8 er den som utmerker seg mest med en balansert tilnærming til algebra, ved å i større grad inkludere både genererende og transformerende aktiviteter. Den høye andelen av genererende oppgaver (35,5%) indikerer en forventning om at elevene skal utvikle og bruke en konseptuell forståelse sammen med de numeriske ferdighetene. Samtidig som hele 9,3% av oppgavene som ble analysert er på global meta-nivå. Kapitlene støtter teorien til Kilpatrick et al. (2001) om viktigheten av en helhetlig matematisk ferdighetsutvikling, ved at elevene utfordres til å tenke kreativt og strategisk, noe som krever en dypere forståelse av matematiske konsepter og deres anvendelse i varierte sammenhenger.

Kieran (2004) understreker blant annet viktigheten av å vektlegge relasjoner og å se algebraiske uttrykk i en bredere kontekst, noe Matemagisk 8 prøver å få til gjennom algebraspillet, hvor elevene må bruke algebra i en samarbeidende setting. Dette er med på å gi en praktisk anvendelse av algebra gjennom muntlige forklaringer og bruk av regneregler, som er viktig for å utvikle en dypere forståelse av matematiske konsepter. De større virkelighetsrelaterte og tverrfaglige oppgavene jeg fant i Matemagisk 8, som hunde- og mønsteroppgaven, illustrerer et skifte fra den tradisjonelle problemløsningen, til problemfremstilling. Disse oppgavene inviterer elevene til å utforske og representere oppgavene algebraisk, som er med på å styrke elevenes forståelse av bruken av algebra i virkelige situasjoner. Slike oppgavene støtter utviklingen av alle fem komponentene i modellen til Kilpatrick et al. (2001), spesielt ved å fremme konseptuell forståelse, og engasjement for temaet gjennom engasjerende og relevante aktiviteter.

Ifølge Skemp og Mellin-Olsens (sitert i Herheim, 2023) er det viktig å skille mellom strukturell og intrumentell forståelse når man vurderer matematisk læring. Mens Matematikk 8 hovedsakelig fremmer instrumentell forståelse gjennom sitt fokus på memorering av prosedyrer, reflekterer innholdet i Maximum 8 og Matemagisk 8 en dypere strukturell forståelse. Dette gjør elevene bedre rustet til å bruke algebra i nye og varierte situasjoner, noe som igjen er viktig for den matematiske kompetansen. Maximum 8 støtter denne forståelsen gjennom en blanding av genererende og transformerende oppgaver, som fremmer analytisk tenking og problemløsning. Matemagisk 8 tar dette videre ved å integrere matematikk i praktiske situasjoner, noe som bidrar til at algebra kan oppfattes som nyttig og relevant, samt mer engasjerende og meningsfylt.

5.4 Lærebøkenes tilnærming, påvirkning på elevenes læring

Hvordan kan forskjellene i tilnærming av algebraopplæring i de analyserte lærebøkene potensielt påvirke elevers læring og forståelse av algebra?

Forskjellen i tilnærmingen til algebra i de forskjellige bøkene gir meg inntrykk av at elevers algebraforståelse potensielt kan bli formet av hvilken bok de bruker. For eksempel kan elever som bruker Maximum 8 utvikle sterkere problemløsningsevner og en bedre evne til å tenke algebraisk, som et resultat av bokens fremheving av genererende oppgaver. Disse egenskapene er viktige for å forstå og anvende algebra effektivt. I Matematikk 8 er det derimot større vekt på transformerende oppgaver, som bidrar til å forberede elever godt til for eksempel standardiserte tester. Dette er det elevene opplever høyest behov for i skolesammenheng. Denne tilnærmingen kan derimot anses som mindre effektiv i å utvikle elevers evne til å anvende algebraiske konsepter i nye og ukjente situasjoner.

Bruken av virkelighetsnære problemer i Matemagisk 8 er som nevnt i kapittel 5.3, i tråd med anbefalingene til Kilpatrick et al. (2001) om å gjøre matematikk relevant og engasjerende. Sånn jeg ser det er dette en faktor for å øke elevenes motivasjon og styrke deres forståelse av matematikken sett i praksis, som er essensielt for langsiktig læring og anvendelse av algebra.

6. Konklusjon

Problemstillingen for denne studien er *Hvordan presenterer og strukturer tre lærebøker algebrakapittelet for matematikk på 8.trinn, og hvilken innvirkning har dette på forståelsen av algebraiske konsepter blant elever?*

Denne masteroppgaven har utforsket hvordan tre forskjellige lærebøker – Matematikk 8, Maximum 8 og Matemagisk 8 – presenterer og strukturerer algebra, og hvilken innvirkning dette har på elevers forståelse av algebraiske konsepter. Gjennom en grundig analyse av hver bok sin oppbygning av og tilnærming til temaet, har det kommet tydelig frem at strukturen og metoden for innføring av algebraiske temaer varierer betydelig mellom bøkene, noe som påvirker elevenes evne til å forstå og anvende algebra i praktiske og teoretiske sammenhenger.

Matematikk 8 tilbyr en tradisjonell tilnærming som gradvis bygger opp elevenes forståelse fra de grunnleggende til de mer komplekse algebraiske konseptene. I kontrast til dette, bruker Maximum 8 en mer integrert tilnærming med fokus på utforskende læring og problemløsning gjennom praktiske oppgaver. Matemagisk 8 fokuserer også på å knytte matematikken til virkeligheten, noe som gir elevene en direkte forståelse av algebraens relevans og plass i hverdagen. Disse forskjellene understreker viktigheten av lærebokens struktur og tilnærming i utviklingen av elevenes algebraiske ferdigheter og deres evne til å anvende disse ferdighetene i både akademiske og praktiske sammenhenger.

Fokuset på instrumentell eller strukturell forståelse i de ulike bøkene kommer til syne gjennom oppgavene. Maximum 8 legger tydelig vekt på genererende oppgaver som styrker elevenes strukturelle forståelse og evne til uavhengig problemløsning. Denne metoden oppfordrer elevene til selvstendig tenking og gir elevene verktøy for å håndtere mer komplekse og utfordrende problemstillinger på en mer effektiv måte.

Matematikk 8, derimot, legger større vekt på transformerende oppgaver, som i hovedsak stiller krav til algoritmisk resonnement og dermed fremmer instrumentell forståelse ved at elevene lærer å identifisere mønstre og anvende dem i kjente kontekster. Dette er nyttig i møte med standardiserte prøver, men kan begrense kreativiteten og hindrer elevene i å utforske nye problemløsningsmetoder.

Matemagisk 8 inkluderer matematikk i praktiske og virkelighetsnære kontekster i ulike oppgaver og prosjekter i kapittelet. Dette kan være særlig effektivt i å bidra til å gjøre algebra relevant og engasjerende for elevene, noe som igjen kan hjelpe med å øke motivasjonen og utvikle en varig interesse for temaet og faget. Dette viser hvor viktig det er med pedagogiske tilnærminger som ikke utelukkende fokuserer på algebraiske teknikker, men også på dens anvendelse i sosiale og praktiske sammenhenger.

Denne studien avdekker hvordan de ulike tilnærmingene til algebra i de tre lærebøkene Matematikk 8, Matemagisk 8 og Maximum 8 legger opp til varierende dybde av forståelse og anvendelse av algebra blant elever. Resultatene viser hvor viktig det kan være med en godt balansert oppbygning av lærebøkene, slik at lærerne kan rette sitt fokus mot å utvikle elevenes tekniske ferdigheter og dypere forståelse av temaet. Det er også viktig at matematiske konsepter blir presentert på en måte som oppleves som relevant og nyttig for elevene. Det er tydelig at det ikke finnes en tilnærming som er overlegent god i alle sammenhenger. Det å bruke en blanding av forskjellige metoder og oppgaver kan skape et godt grunnlag, som hjelper elever til å anvende algebra både i skolearbeid og i praktiske sammenhenger.

6.1 Kritisk refleksjon og videre forskning

I denne studien av lærebøker har jeg sett på hvordan bøkene legger opp til læring av algebra, både gjennom å se på oppbygningen av kapittelet og oppgavene ved hjelp av Charalambous et al. (2010) sitt rammeverk for tekstbokanalyse. Jeg valgte å gjøre noen endringer i rammeverket når det kom til innenfor hvilke kategorier jeg ville analysere oppgavene, og det kan derfor tenkes at jeg hadde fått andre resultater dersom jeg hadde analysert andre faktorer ved oppgavene, eller analysert de gjennom et annet rammeverk. En annen faktor som kunne påvirket resultatet ville vært om jeg hadde sett på oppgavene i tilleggsmaterialet til de ulike bøkene. Det er potensielt sett mange oppgaver der som kunne ha gjort drastiske endringer på mine resultater.

Å inkludere et lærerintervju eller en spørreundersøkelse kunne styrket validiteten til oppgaven min. Ved å inkludere disse metodene kunne jeg blant annet fått innblikk i hvordan lærebøkene blir brukt i praksis, om de er hovedkilden til fagstoff, eller om lærere bruker de som et supplement. Studiens omfang og tidsramme har vært en begrensende faktor for hvorfor dette ikke ble gjennomført. For veien videre kunne det derimot vært interessant å gjennomføre en studie hvor man ser på hvordan lærerne tar i bruk læreboken i klasserommet. På denne måten kunne jeg undersøk hvordan ulike typer oppgaver blir tatt i bruk, og hva slags form for resonnement elevene må bruke i algebraundervisningen. Det kunne også vært spennende å se på læring av algebra fra et elevperspektiv, for å få et innblikk i hvordan de opplever bøkene, og temaet. Vi lever også i en tid hvor det innføres mer og mer teknologi i matematikkundervisningen, og det er en stadig debatt om digitalisering av skolene. Det kunne derfor vært interessant å se på elevenes utvikling av algebraiske ferdigheter over tid, hvor man både ser på de elevene som har mattebok som hovedkilde, og de som i hovedsak bruker de digitale ressursene som i dag tilbys.

Referanser

Aschehoug. (u.å). *Matemagisk 8*. https://skoleboker.aschehoug.no/laremiddel/matemagisk-1-7/grunnbok-grunnbok_1-bokmal-8-9-10

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla. NämnarenTema*. NCM, Göteborgs universitet.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J. & Tsamir, P. (2006). Exemplification in mathematics education. *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 126-154.

Charalambous, C., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). A Comperative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning 12*(2), 117-151. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Damm, C. (u.å). *Matematikk 8-10 fra Cappelen Damm*. https://utdanning.cappelendamm.no/verk/matematikk-8-10-fra-cappelen-damm-153429?omtale

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education 45*, 633-646. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Forskrift til opplæringsloven. (2006). (§17-1). Kunnskapsdepartementet.

Gilje, Ø. (2016). På jakt etter ark og app i fire fag i det nye norske læremiddellandskapet. *Learning Tech 8*(1), 36-61. https://doi.org/10.7146/lt.v1i1.107619

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2017). Hovedresultater i matematikk i TIMSS Advanced, TIMSS og PISA. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken* (s. 31-44). Cappelen Damm Akademisk. https://doi.org/10.23865/noasp.26

Grønmo, L. S. & Rosén, B. (1998). Att förstå algbra. *Nämnaren*, (4), 35-41.

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2. utg.). Fagbokforlaget.

Gyldendal. (u.å). *Fem grunner til å velge Maximum*. https://www.gyldendal.no/grs/maximum/c-183621/

Herheim, R. (2023). On the origin, characteristics, and usefulness of instrumental and relational understanding. *Educational Studies in Mathematics*, *113*, 389-404. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-023-10225-0

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2020). *Matematikk 8*. Cappelen Damm.

Jensen, F., Eriksen, A., Frønes, T. S., Løvgren, M., Narvhus, E. K. & Pettersen, A. (2023). *PISA 2022 : norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing*. Cappelen Damm akademisk.
Jess, K., Hansen, H. C., Schou, J. & Skott, J. (2013). *Matematik for lærerstuderende: Tal, algebra og funktioner, 1.-6.klasse*. Samfundslitteratur.
Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. I C. Alsina, J. M. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Red.), *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures* (s. 271-284). S.A.E.M. Thales.
Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.
Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). The Strands of Mathematics Proficiency. I *Adding it Up: Helping Kids Learn Mathematics* (s. 115-156). National Academy Press.
komiteene, D. n. f. (2019, 10.02.2019). *Generelle forskningsetiske retningslinjer*. forskningsetikk.no. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/generelle/
Kongelf, T. R. (2019). *Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge: Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?* [Doktorgradsavhandling, Universitetet i Agder]. HVL Open. http://hdl.handle.net/11250/2616700
Kongsnes, A. L. & Wallace, A. K. (2020). *Matemagisk 8*. Aschehoug.
Kunnskapsdepartementet. (2019a). *Læreplan i matematikk 1.-10.trinn (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob
Kunnskapsdepartementet. (2019b). *Matematikk 1-10 (MAT01-05): Kjerneelementer*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob&curriculum-resources=true
Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.-C., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). TIMSS 2019. Kortrapport. *Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo*.
Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom - the teachers' view. *Nordic Studies in Education*, *20*(3-4), 129-156.
Lithner, J. (2008). A Reasearch Framework for Creative an Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276.

Mason, J., Graham, A. & Johnson-Wilder, S. (2011). Problemløsning. I *Å lære algebraisk tenkning* (s. 241-264). Caspar Forlag

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings From IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eight Grades*. Chestnut Hill: Boston College.

NOU 2014:7. (2014). *Elevens læring i fremtidens skole: Et kunnskapsgrunnlag*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/contentassets/e22a715fa374474581a8c58288edc161/no/pdfs/nou201420140007000dddpdfs.pdf

Piggott, J. (2018). Rich Tasks and Contexts. https://nrich.maths.org/5662

Pratt, V. (2007, 3.11). Algebra. I E. N. Zalta & U. Nodelman (Red.), *The Standford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2022. utg.). https://plato.stanford.edu/entries/algebra/

Reys, B. J., Reys, R. E. & Chávez, O. (2004). Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership 61*(5), 61-66.

Rezat, S. & Strässer, R. (2017). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. I B. Grevholm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences: Research in Nordic and Baltic countries* (s. 495-514). Cappelen Damm.

Sevik, K. (2016). Programmering i skolen.

Sivesind, K. & Bachmann, K. (2020). Læreplaner - fra dokument til dokumentasjon. I R. J. Krumsvik & R. Säljö (Red.), *Praktisk pedagogisk utdanning: en antologi* (2. utg., s. 321-341). Fagbokforlaget.

Stortingsmelding 28 (2015-2016). *Fag - Fordypning - Forståelse - En fornyelse av Kunnskapsløftet*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/?ch=1

Tofteberg, G. N., Tangen, J., Tangen, L., Stedøy, I. & Alseth, B. (2020). *maximum 8* (2. utg.). Gyldendal.

Utdanningsdirektoratet. (2019, 27.mars 2019). *Algoritmisk tenkning*. https://www.udir.no/kvalitet-og-kompetanse/digitalisering/algoritmisk-tenkning/

Utenriksdepartementet. (2023, 15.mars 2023). *Kort om OECD*. Regjeringen.no. https://www.regjeringen.no/no/tema/naringsliv/handel/ud_innsikt/om_oecd/id707180/