Didaktiske tilnærminger til den deriverte i læremidler for matematikk 1T

Tobias Eiksund

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Universitetet i Bergen

2024

År:	2024
Tittel:	Didaktiske tilnærminger til den deriverte i læremidler for matematikk 1T
Forfatter:	Tobias Eiksund

You know the rest.

Sisyphus put his shoulder to the boulder and began to push it up the slope.

Halfway there and he was confident that eternal life was assured.

Three-quarters done and he was tired, but not blown.

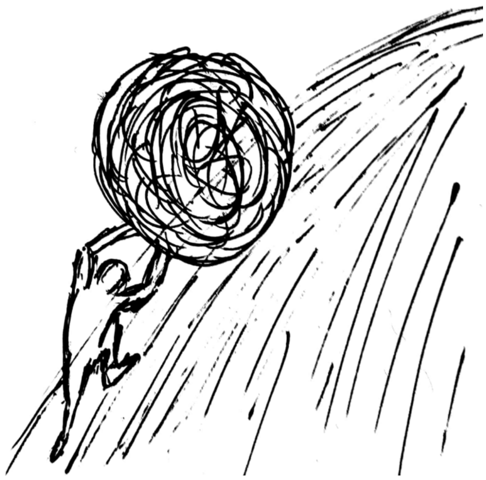
Four-fifths and ... damn, this was hard work.

Five-sixths, pain.

Six-sevenths, agony.

Seven-eights ... He was within an inch of the top now, within a fingernail's length, just one more supreme effort and ...

STEPHEN FRY, *Mythos*



Forord

Med denne oppgaven avslutter jeg min tid som student. Og på mange måter er den et fint bilde på min egen opplevelse av studietiden. Der jeg i utgangspunktet skulle bli ingeniør, skulle denne oppgaven i utgangspunktet handle om digitale hjelpemidler i skolen. Både gjennom reisen som student og i arbeidet med denne oppgaven, har jeg oppdaget nye interesser og nye spørsmål å stille. På denne måten har jeg byttet studiested, studieretning, masterfag og nå tematikk og problemstilling for denne oppgaven. Passende nok tar oppgaven også for seg endring i sin matematiske betydning gjennom den deriverte.

Takk til familien min som har vært støttende gjennom studiet og hele skolegangen, og som har lært meg å se verdien av utdanning.

Takk til studiekameratene mine som gjennom studiet har bidratt til et fellesskap som har gjort en femårig utdanning overkommelig.

Takk til alle vennene i koret mitt, som har vært en konstant kilde til glede og kreativ utfoldelse gjennom studiet, og en god påminnelse om at skole og jobb ikke er de eneste arenaene i livet som betyr noe.

Og sist, men ikke minst, en stor takk til veilederen min, Johan Lie, som har vært en god samtalepartner gjennom hele prosessen og oppmuntret meg til å gjøre prosjektet til mitt eget. Ved hjelp av hans matematiske og didaktiske innsikter, har jeg kunnet forme prosjektet til noe som jeg føler knytter sammen hovedelementene fra utdanningen min på en meningsfylt måte.

Bergen, 3. juni 2024

Sammendrag

I forbindelse med fagfornyelsen LK20, har dybdelæring blitt trukket fram som et sentralt element i norsk skole. I matematikk innebærer dette blant annet å ha en god begrepsmessig forståelse. Denne studien undersøker hvordan ulike læremidler i matematikk 1T introduserer den deriverte, et viktig terskelbegrep for videre matematikklæring. Problemstillingen som undersøkes er:

Hvilke didaktiske tilnærminger bruker et utvalg læremidler i matematikk 1T for introduksjonen av den deriverte, og hvordan legger de til rette for god begrepsmessig forståelse?

Med utgangspunkt i didaktiske perspektiver rundt derivasjon fra blant annet Greefrath mfl. (2016), og med utgangspunkt i Wagner mfl. (2015) sitt rammeverk for den deriverte, analyseres læremidlene Sinus 1T, Mønster 1T og Matematikk 1T gjennom en kvalitativ innholdsanalyse. Analysen viser at læremidlene vektlegger forskjellige egenskaper og ideer ved den deriverte, muligens som følge av ulike tolkninger av læreplanen. Resultatene indikerer at Mønster 1T muligens kan fremme en bedre begrepsmessig forståelse sett i lys av Hähkiöniemi (2006) sin læringssti til den deriverte, spesielt gjennom sin integrasjon av programmering som illustrerer den derivertes lokale lineære egenskaper, i tillegg til ideene om momentan vekstfart som differensialkvotientens grenseverdi og den deriverte som tangentens helning.

Abstract

In connection with the curriculum renewal (LK20) in Norwegian schools, depth learning has been highlighted as a central element. In mathematics, this involves, among other things, having a good conceptual understanding. This study examines how different teaching materials in the course ”Matematikk 1T” approach the introduction of the derivative, an important threshold concept for further learning in mathematics. The research question addressed is:

How do a selection of different teaching materials in ”Matematikk 1T” approach the teaching of the derivative, and how do they facilitate good conceptual understanding?

Based on didactic perspectives on derivation from, among others, Greefrath mfl. (2016), and Wagner mfl. (2015)’s framework for the derivative, the teaching materials Sinus 1T, Mønster 1T, and Matematikk 1T are analyzed through a qualitative content analysis. The analysis shows that the materials employ different properties and ideas of the derivative, possibly as a result of different interpretations of the curriculum. The results indicate that Mønster 1T may promote better conceptual understanding, especially through its integration of programming that illustrates the local linear properties of the derivative, in addition to the ideas of instantaneous rate of change as the limit value of the differential quotient and the derivative as the slope of the tangent.

Innhold

Figurer

Tabeller

Kapittel 1

Introduksjon

I denne oppgaven undersøkes følgende problemstilling:

Hvilke didaktiske tilnærminger bruker et utvalg læremidler i matematikk 1T for introduksjonen av den deriverte, og hvordan legger de til rette for god begrepsmessig forståelse?

I introduksjonen presenteres først oppgavens oppbygning, etterfulgt av en klargjøring av studiens forståelse av begrepet læremiddel og en kort diskusjon rundt sammenhengen mellom læring og læremidler. Problemstillingen begrunnes i kapittel 2.

1.1 Oppgavens oppbygning

Oppgaven er delt inn i syv kapitler. I kapittel 1 presenteres oppgavens problemstilling og oppbygning etterfulgt av en klargjøring av denne oppgavens forståelse av begrepet *læremiddel* og en kort redegjøring av sammenhengen mellom læring og læremidler.

I kapittel 2 presenteres begrepet *dybdelæring* med en kort diskusjon rundt hva dybdelæring i matematikk kan være. Videre introduseres begrepene *begrepsmessig forståelse* og *terskelbegrep*, som redegjøres for i lys av Sfards prosess-objekt-syn på læring av matematikk og Talls tre verdener innenfor matematikk, knyttet opp mot læring av derivasjon. Dette leder til en foreslått vei til den deriverte gjennom ulike representasjoner av grenseverdien til differensialkvotienten basert på læringsstien til Hähkiöniemi (2006). Deretter blir læreplanene for de ulike matematikkfagene hvor man lærer om den deriverte undersøkt, og nåværende og tidligere læreplan i matematikk 1T sammenlignes. Disse perspektivene danner grunnlaget for oppgavens problemstilling, som deretter presenteres og begrunnes.

Kapittel 3 handler om derivasjon og hovedideer knyttet til den deriverte. Først presenteres formelle definisjoner av grenseverdi og den deriverte slik de blir gitt i høyere utdanning. Deretter diskuteres derivasjon i et historisk perspektiv, etterfulgt av en redegjørelse av to utgangspunkt for hvordan man kan tenke om den deriverte: som grenseverdien til differensialkvotienten og gjennom lokal lineær approksimasjon. Videre diskuteres fire sentrale ideer ved den deriverte: momentan vekstfart, tangentens helning, lokal linearitet og den deriverte som forsterkningsfaktor. Deretter betraktes kort hvordan man kan ha en multiplikativ tilnærming til definisjonen av den deriverte, i kontrast til den additive tilnærmingen man vanligvis har. Etter dette diskuteres hvordan man kan nærme seg den deriverte gjennom programmering og *diskretisering*. Til slutt presenteres Wagner mfl. (2015) sin utvidelse av Zandiehs teoretiske rammeverk for den deriverte, som danner grunnlaget for oppgavens analyse.

I kapittel 4 presenteres metoden som ble benyttet i studien. Her diskuteres først innholdsanalyse, spesifikt innenfor matematikkdidaktisk forskning. Datainnsamlingen omfatter vekstfart- og derivasjonskapitlene i tre læremidler for matematikk 1T, og i kapittelet diskuteres avgrensninger og metodiske valg som ble foretatt i forbindelse med datainnsamlingen. Analyseverktøyet og -prosessen presenteres deretter, før kvaliteten på studien betraktes.

I kapittel 5 blir resultatene fra analysen presentert. Resultatene presenteres kronologisk med utgangspunkt i hvert av de ulike læremidlene. Her presenteres læremidlenes teorigjennomgang, bruk av eksempler og kapitlenes oppgaveutvalg med eksempler.

I kapittel 6 settes resultatene opp mot teorien fra kapittel 1, 2 og 3, med en drøfting av hvilke ideer ved den deriverte som vektlegges i læremidlene som har blitt analysert og hvordan læremidlene på bakgrunn av dette legger opp til god begrepsmessig forståelse for den deriverte. På bakgrunn av analysen diskuteres også de ulike læremidlenes tolkning av kompetansemålene, og andre interessante funn fra analysen.

I kapittel 7 oppsummeres oppgaven, med forslag til videre forskning.

Oppgaven inneholder ett tillegg som viser forskjellene mellom derivasjonskapittelet mellom to utgaver av Sinus 1T (Oldervoll mfl., 2014, 2020).

1.2 Studiens forståelse av begrepet læremiddel

I «Forskrift til opplæringslova» (2010, § 17-1) blir læremiddel definert som følger:

> Med læremiddel meiner ein alle trykte, ikkje-trykte og digitale element som er utvikla til bruk i opplæringa. Dei kan vere enkeltståande eller gå inn i ein heilskap, og

dekkjer aleine eller til saman kompetansemål i Læreplanverket for Kunnskapsløftet.

Skott mfl. (2018, s. 211-212) skiller mellom *læremidler* og *curricilumsressourcer*. De peker på at læremidler som oftest brukes om materialer som elever umiddelbart kan bruke og lære av. *Curriculumsressourcer* sikter til alt læringsmateriale, som for eksempel lærebøker, lærerveiledninger, digitale ressurser, didaktiske tidsskrifter og årsplaner. Ettersom denne oppgaven tar for seg hvordan matematisk innhold behandles i lærebøker for matematikk 1T, vil læremidler i fortsettelsen kun sikte til lærebøkene som benyttes i klasserommet, som elevene umiddelbart kan benytte og lære av.

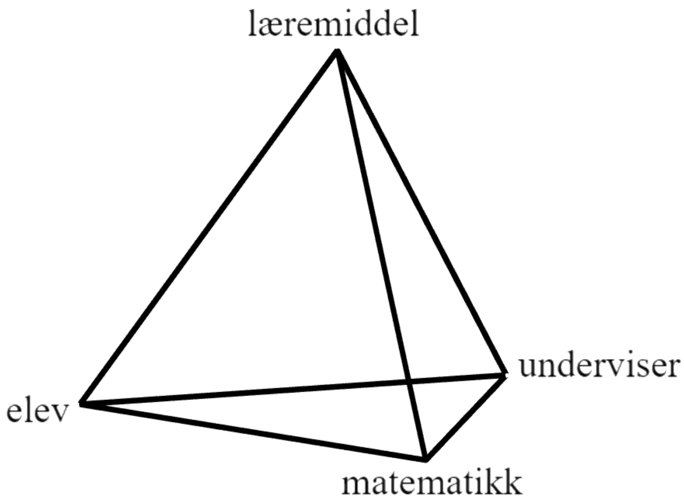
1.3 Sammenhengen mellom læremidler og læring

Matematikk er en ikke-materiell vitenskap, og som elev er man derfor avhengig av ulike *representasjoner* for å lære den. Representasjonene kan være symbolske, grafiske eller tekstbaserte (Rezat & Sträßer, 2015, s. 248). Svingen og Gilje (2018, s. 12) skriver at selv om gode læremidler kan bidra til å skape god undervisning, så er den viktigste enkeltfaktoren for elevenes læringsutbytte kvaliteten på lærerens undervisning. Rezat og Sträßer (2015, s. 248) skriver at læremidler blir sett på som den *potensielt implementerte læreplanen* (potentially implemented curriculum) som befinner seg mellom den *tiltenkte læreplanen* fra offentlig hold og den *faktisk implementerte læreplanen* som avhenger av det som skjer i klasserommet. Forfatterne presenterer videre en modell for læremiddelets posisjon i læringssituasjonen med det didaktiske tetraederet (fig. 1.1). Modellen viser hvordan læremiddel, elev, lærer og matematikk alle avhenger av hverandre, og at de aldri kan studeres i et vakuum uten at fravær eller nærvær av en av de andre faktorene påvirker læringssituasjonen.

Skott mfl. (2018, s. 219) presenterer Stylanides modell for analyse av undervisningsopplegg, hvor det deles inn i tre faser:

1. Hvordan det presenteres i læremiddelet.
2. Hvordan det presenteres av læreren.
3. Hvordan det realiseres gjennom interaksjon i klassen.

Opplegget slik det presenteres i læremiddelet kan transformeres gjennom måten læreren presenterer stoffet til elevene, for eksempel ved å gi klassen mer eller mindre informasjon enn



Figur 1.1: Det didaktiske tetraederet, (Rezat & Sträßer, 2012, s. 645, egen overs.)

forfatteren av opplegget hadde forestilt seg. Elevenes respons og interaksjonen i klasserommet kan igjen endre opplegget fra hvordan læreren ønsket å legge det fram (Skott mfl., 2018, s. 219). Altså er det ikke gitt at innholdet i læremidlene, aktiviteten som skjer i klasserommet og hva elevene faktisk lærer stemmer overens.

Vi ser altså at læremidler presenterer en mulighet til å lære matematikk gjennom å legge frem ulike representasjoner av matematikken. Samtidig er det læreren som er den viktigste enkeltfaktoren for elevenes læring. Læremidlene befinner seg et sted mellom læreplanene og hvordan læreren velger å lære bort matematikken, slik at de ikke nødvendigvis reflekterer hva elevene lærer, eller hva de ut ifra læreplanen er *ment* å lære. Læremidlene reflekterer heller ikke hvordan elevene lærer, ettersom læreren gjennom sine valg eller klasseromssituasjonen kan gjøre ting på en annen måte enn tiltenkt fra læremiddelforfatternes side.

Kapittel 2

Bakgrunn

I dette kapittelet betraktes begrepet dybdelæring og hva dybdelæring i matematikk kan være. På bakgrunn av dette presenteres begrepene begrepsmessig forståelse og terskelbegreper. Den deriverte som et terskelbegrep diskuteres deretter i lys av Sfards prosess-objekt-syn på læring av matematikk og Talls tre verdener innenfor matematikk. Dette leder til Hähkiöniemi (2006) sin foreslåtte vei til den deriverte gjennom ulike representasjoner av den iboende grenseverdien til differensialkvotienten. Videre presenteres kompetansemålene knyttet til derivasjon fra læreplanene til matematikkfagene 1T, S1, S2, R1 og R2, i tillegg til den gamle læreplanen i 1T og høringsutkastet til den nye. Til slutt blir problemstillingen til denne oppgaven formulert på bakgrunn av teorien fra kapittelet.

2.1 Dybdelæring

I forbindelse med innføringen av nye læreplaner med LK20, ble det utviklet nye læremidler i matematikk. I Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen (Utdanningsdirektoratet, 2019f, s. 11) ble dybdelæring beskrevet på følgende måte:

> Skolen skal gi rom for dybdelæring slik at elevene utvikler forståelse av sentrale elementer og sammenhenger innenfor et fag, og slik at de lærer å bruke faglige kunnskaper og ferdigheter i kjente og ukjente sammenhenger. I arbeidet med fagene skal elevene møte oppgaver og delta i varierte aktiviteter av stadig økende kompleksitet. Dybdelæring i fag innebærer å anvende kunnskaper og ferdigheter på ulike måter, slik at elevene over tid kan mestre ulike typer faglige utfordringer individuelt og i samspill med andre.

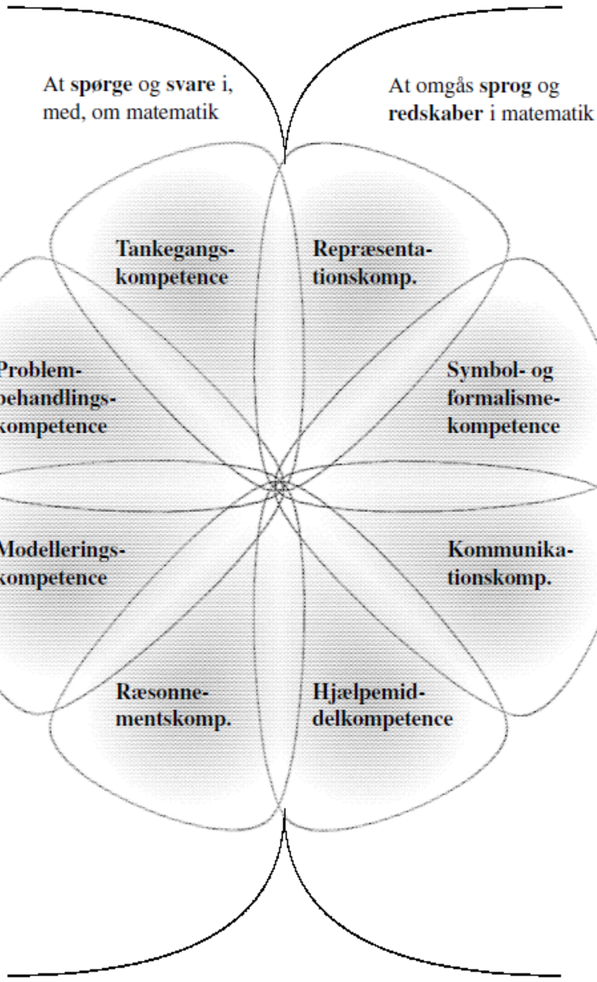
Tabell 2.1: Dybdelæring og overflatelæring (NOU, 2014, s. 36)

Dybdelæring	Overflatelæring
Elever relaterer nye ideer og begreper til tidligere kunnskap og erfaringer.	Elever jobber med nytt lærestoff uten å relatere det til hva de kan fra før.
Elever organiserer egen kunnskap i begreps-systemer som henger sammen.	Elever behandler lærestoff som atskilte kunnskaps-elementer.
Elever ser etter mønstre og underliggende prinsipper.	Elever memorerer fakta og utfører prosedyrer uten å forstå hvordan eller hvorfor.
Elever vurderer nye ideer og knytter dem til konklusjoner.	Elever har vanskelig for å forstå nye ideer som er forskjellige fra dem de har møtt i læreboka.
Elever forstår hvordan kunnskap blir til gjennom dialog og vurderer logikken i et argument kritisk.	Elever behandler fakta og prosedyrer som statisk kunnskap, overført fra en allvitende autoritet.
Elever reflekterer over sin egen forståelse og sin egen læringsprosess.	Elever memorerer uten å reflektere over formålet eller over egne læringsstrategier.

Overordnet del baserer seg på NOU (2014) hvor Ludvigsenutvalget kom fram til at innholdet i skolen var for omfattende og fragmentert, og anbefalte at fag i større grad burde konsentrere seg rundt dybdelæring i enkelte sentrale temaer i hvert fag. Dybdelæring settes ofte i kontrast med overflatelæring, som kjennetegnes ved at ny kunnskap ikke kobles til det elevene kan fra før (Nosrati & Wæge, 2018, s. 3). Se tabell 2.1 for videre beskrivelse av forskjellen mellom dybde- og overflatelæring slik NOU (2014) forstår den.

Dybdelæring i matematikk

Nosrati og Wæge (2018) trekker fram fem komponenter i den matematiske læringsprosessen som sier noe om hva dybdelæring i matematikk kan være. De baserer seg på Ludvigsenutvalgets beskrivelse av dybdelæring, i tillegg til blant annet Hiebert og Lefevre (1986) sine beskrivelser av begrepsmessig og prosedyremessig kunnskap og Skemp og Mellin-Olsens teori om instrumentell og relasjonell forståelse (se Herheim, 2023). De fem komponentene er *begrepsmessig forståelse*, *prosedyrekunnskap*, *anvendelse*, *resonnering* og *metakognisjon og selvregulering*. *Begrepsmessig forståelse* handler om å bygge begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom begreper, ideer og prosedyrer. *Prosedyrekunnskap* innebærer å ha kunnskap om og kunne utføre matematiske prosedyrer. *Anvendelse* handler om å kunne gjenkjenne problemer og utvikle og vurdere løsningsstrategier. *Resonnering* innebærer på sin side det å kunne forklare sin egen tankegang og



Figur 2.1: Åtte kompetanser i matematikk (Niss & Jensen, 2002, s. 45)

følge logiske resonnementer. *Metakognisjon og selvregulering* handler om å kunne reflektere over hensikten med det man lærer, hva man har lært og hvordan man lærer. Denne oppgaven dreier seg hovedsaklig om det første punktet, begrepsmessig forståelse, som på engelsk omtales som *conceptual understanding*.

2.2 Begrepsmessig forståelse

Petterson og Brandell (2018, s. 3) viser til læreplanen i matematikk for den svenske videregående skolen når de skriver at *begrepsforståelse* omfatter å kunne gjøre rede for begrepers definisjoner og egenskaper. Innholdet i begreper vises gjennom hvordan det brukes i ulike sammenhenger i matematikken og i anvendelser. Det angår å kunne anvende begreper, vite hvorfor de er viktige, i hvilke situasjoner de kan brukes og hvordan ulike representasjoner kan brukes til ulike formål. Begreper kan representeres på flere ulike måter, men de må ha et navn. I følge Nosrati og Wæge

Tabell 2.2: Åtte effektive læringspraksiser fra NCTM (2014, s. 10, egen overs.)

Åtte effektive læringspraksiser
1. Fastsett matematiske mål for å fokusere læringen
2. Innfør oppgaver som fremmer resonnement og problemløsning
3. Bruk og knytt sammen matematiske representasjoner
4. Legg til rette for meningsfylt matematisk diskusjon
5. Still hensiktsmessige spørsmål
6. Bygg prosedyremessig kunnskap fra begrepsmessig forståelse
7. Støtt produktiv streving i matematikklæringen
8. Hent frem og bruk evidens på elevtenkning

(2018, s. 4) innebærer *begrepsmessig forståelse* å lage begrepsmessige mentale strukturer slik at man ser sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer, og at det innebærer mer enn å kunne gjengi isolerte regler og fakta. Begrepsmessig forståelse handler om å forstå hvorfor en matematisk ide er viktig og knytte den til tidligere innlærte ideer. Om man har utviklet begrepsmessig forståelse, er man i større grad i stand til å tolke, forstå og bruke ulike representasjoner. I fortsettelsen vil både begrepsforståelse og begrepsmessig forståelse omtales som begrepsmessig forståelse.

Begrepsmessig forståelse omfatter altså mye, og sett i lys av de matematiske kompetansene fra Niss og Jensen (2002), gjengitt i fig. 2.1, ser man at begrepsmessig forståelse inngår i mange av disse. Spesielt inngår begrepsmessig forståelse i de fire kompetansene på høyre side av figuren, som angår å være i stand til omgås ulike språk og redskaper i matematikk. Begrepet kan også knyttes til de åtte effektive læringspraksisene fra NCTM (2014) i tabell 2.2. Punkt 3 handler om å utsette elevene for flere representasjoner og koble disse sammen, og punkt 6 handler om å la elevene tilegne seg god prosedyrekunnskap på et fundament av god begrepsmessig forståelse.

2.3 Terskelbegreper og derivasjon

Land og Meyer (2005) innførte begrepet *terskelbegrep* (treshold concept) for å beskrive enkelte, viktige begreper innenfor matematikken som man er nødt til å forstå for å være i stand til å bevege seg videre til mer utfordrende matematikk. Terskelbegreper karakteriseres ved at de er *vanskelige å lære*, det vil si at det kreves anstrengelse for å tilegne seg kunnskap om terskelbegrepet, og at de er *transformative*, altså at kunnskap om et terskelbegrep gir et endret syn på det matematiske området. De er *integrative*, som vil si at tidligere skjulte sammenhenger og fragmentert kunnskap kobles sammen, og de er *irreversible*, som vil si at når den nye forståelsen er etablert, går man ikke tilbake til det gamle synet (Land & Meyer, 2005, s. 373-374). Brøk og funksjoner er eksempler på terskelbegreper, og Petterson og Brandell (2018) argumenterer for at derivasjon også er et terskelbegrep.

Den deriverte som terskelbegrep

Derivasjon er et sentralt begrep innenfor differensial- og integralregning, sammen med begreper som grenseverdi, kontinuitet og integral. Derivasjon og integraler knyttes sammen i analysens fundamentalsetning, som sier at de er inverse operasjoner. Den deriverte får størst plass av disse i videregåendematematikken og introduseres også vanligvis først, selv om enkelte matematikere har tatt til orde for å introdusere integraler før derivasjon (se Gouvêa, 2020). Det er en viktig grunnstein innenfor matematikken i høyere utdanning og er derfor et begrep hvor det for elevene er viktig med en god begrepsmessig forståelse, slik at de kan lære videre.

Prosess-objekt-overgangen

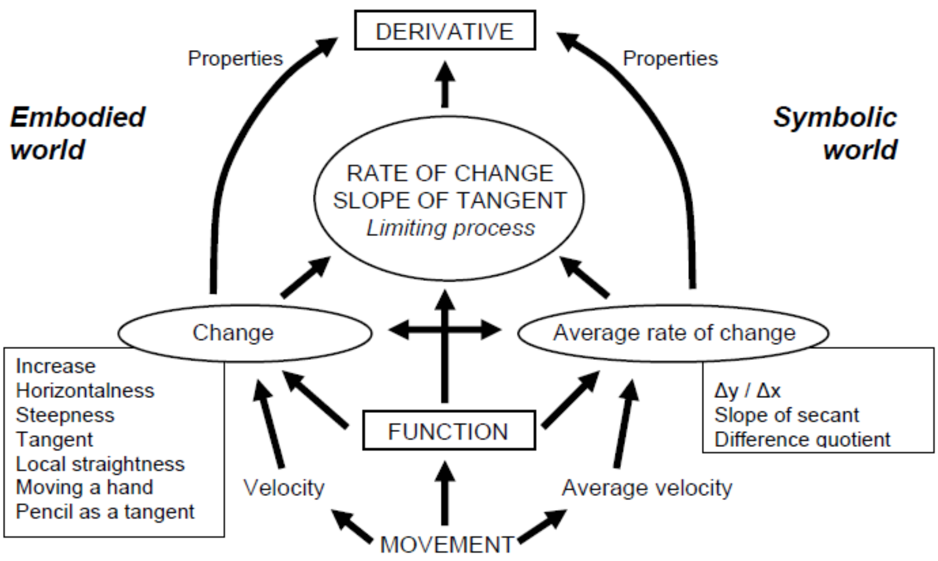
Sfard (1991) skriver at abstrakte, matematiske ideer kan oppfattes og forstås på to fundamentalt ulike måter, som prosess og som objekt. Der mange elever til å begynne med oppfatter en ide som en prosess, for eksempel addisjon som det å addere to tall, vil de senere kunne oppfatte summen i en addisjon som et objekt. Eksempelvis kan en funksjon gå fra å oppfattes som prosessen å regne ut funksjonsverdier, til å bli sett på som et matematisk objekt med visse egenskaper. Overgangen fra å se på det å derivere som en prosess, til den deriverte som et objekt, er ofte komplisert (Petterson & Brandell, 2018, s. 7). En av utfordringene er at den deriverte ikke er ett enkelt objekt, da den kan sees på som både et lokalt og et globalt objekt. Lokalt angir den stigningstallet til tangenten i et punkt i en funksjon, mens den globalt kan sees på som en funksjon, hvor den er et mål på den opprinnelige funksjonens endringshastighet. En tredje måte å oppfatte den deriverte på er som den ukjente i en differensiallikning, hvor sammenhengen med de andre objektene ikke er veldig tydelig for elevene. I og med at differensiallikninger ikke er et sentralt tema i den videregående skolen, går ikke denne oppgaven dypere inn i denne oppfatningen av den deriverte som objekt.

Prosess/objekt-overgangen er også utfordrende gjennom at den deriverte defineres som en grenseverdi. Å gå fra et syn hvor grenseverdi er en dynamisk prosess, til å oppfatte grenseverdien som et objekt med visse egenskaper, er en vanskelig prosess hvor mange misoppfatninger kan oppstå. Petterson og Brandell (2018, s. 7) skriver at grenseverdibegrepet presenteres ganske overfladisk i 1T, både på grunn av plasshensyn og at man vil unngå den utfordrende formelle definisjonen av grenseverdien. Forfatterne foreslår derfor at man er nødt til å støtte elevene i å utvikle en sterk intuitiv forståelse av grenseverdien i undervisning av den deriverte. Med andre ord, bør man altså bygge en sterk begrepsmessig forståelse når det kommer til derivasjon og grenseverdi, hvor man er i stand til å beskrive, argumentere og forklare sin forståelse.

Tre verdener i matematikk

Tall (2008) ser på overgangen fra matematisk tenkning i grunnskole og videregående opplæring til den bevisorienterte, rene matematikken man møter i høyere utdanning. I skolen møter man matematikk i en kombinasjon av visuelle representasjoner og symbolske manipuleringer, mens man i høyere utdanning møter en formell matematikk, bygget på et aksiom- og bevisbasert rammeverk. Tall (2008) skiller mellom tre verdener av matematisk forståelse, den *konkretiserte* eller *kroppsliggjorte* (embodied world), som handler om visualiseringer, den *symbolske* (symbolic world), hvor man benytter seg av symboler og regler, og den *formelt-aksiomske* (formal world), hvor man bygger de matematiske begrepene gjennom definisjoner i en logisk sammenhengende teori.

I skolematematikken beveger man seg altså i andre verdener enn de som inneholder de formelle definisjonene av begrepene grenseverdi og derivasjon. Elevene trenger derfor å bygge opp forståelsen sin av grenseverdien på en annen måte. Hähkiöniemi (2006) sin modell for læring av den deriverte er gjengitt i fig. 2.2. Forfatteren foreslår at gjennom å bli kjent med den *iboende* grenseverdien, kan elevene bygge en intuitiv forståelse av begrepet uten den formelle definisjonen. Denne prosessen kan skje gjennom visualiseringer i den konkretiserte verden eller handlinger i den symbolske verdenen. Det omfatter de ulike visuelle eller symbolske representasjonene hvor grenseverdien gjør seg gjeldende, som tangenten som en grenseposisjon for en sekant, lokal linearitet, momentanhastighet som grenseverdi for en gjennomsnittshastighet, vekstfart, lineær tilpasning eller differensialkvotienten i stadig mindre intervaller (Hähkiöniemi, 2006, s. 75).



Figur 2.2: Hähkiöniemi (2006, s. 74) sin læringssti for den deriverte.

2.4 Kompetansemål om den deriverte

Derivasjon inngår i læreplanen til fem av matematikkfagene som undervises i norsk skole: 1T, S1, S2, R1 og R2. Kompetansemålene som angår derivasjon for disse fagene er oppsummert i tabell 2.3. Som man ser i tabellen, tar derivasjon størst plass i fagene S1 og R1, hvor det nevnes i flere av målene, i tillegg til at beslektede begreper som grenseverdi (S1 og R1) og kontinuitet og deriverbarhet (R1) er nevnt. I 1T er kompetansemålet begrenset til å omfatte det å kunne bruke gjennomsnittlig og momentan vekstfart, og det å kunne ”gjøre rede for” den deriverte. Ettersom denne oppgaven tar for seg introduksjonen av den deriverte, avgrenser også analysen seg til læremidler for matematikk 1T, siden det er her man blir kjent med begrepet for første gang.

I tabell 2.4 er de tidligere kompetansemålene for 1T som omhandler derivasjon gjengitt, sammen med høringsforslaget for dagens læreplan. I den gamle læreplanen for 1T var målene mer spesifisert, med krav om at man skulle kunne gjøre greie for definisjonen til den deriverte. I tillegg skulle eleven kunne bruke denne definisjonen til å utlede en derivasjonsregel for polynomfunksjoner som man igjen skulle være i stand til å drøfte funksjoner ved hjelp av. Dagens læreplan er til sammenligning mindre tydelig i hva som ligger i å ”kunne gjøre rede for” den deriverte. I høringsutkastet til den nye læreplanen var målet noe mer spesifikt enn dette, ved at man skulle kunne gjøre rede for den deriverte ”som funksjon”.

Tabell 2.3: Kompetansemål knyttet til derivasjon i 1T, S1, S2, R1 og R2 etter fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2019b, 2019d, 2019e)

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne
Matematikk 1T: - bruke gjennomsnittlig og momentan vekstfart i konkrete eksempler og gjøre rede for den deriverte
Matematikk S1: - forstå begrepene gjennomsnittlig og momentan vekstfart, grenseverdi og derivasjon, og bruke disse for å løse praktiske problemer - anvende derivasjon til å analysere og tolke egne matematiske modeller av reelle datasett - anvende derivasjon til å analysere og forstå optimaliseringsproblemer
Matematikk S2: - analysere og tolke ulike funksjoner ved å bruke derivasjon og integrasjon
Matematikk R1: - forstå begrepene vekstfart, grenseverdi, derivasjon og kontinuitet, og bruke disse for å løse praktiske problemer - bestemme den deriverte i et punkt geometrisk, algebraisk og ved numeriske metoder, og gi eksempler på funksjoner som ikke er deriverbare i gitte punkter - analysere og tolke ulike funksjoner ved å bruke derivasjon - anvende derivasjon til å analysere og tolke egne matematiske modeller av reelle datasett - utforske, analysere og derivere ulike funksjoner og deres omvendte funksjoner, og gjøre rede for egenskaper til og sammenhenger mellom slike funksjoner
Matematikk R2: - anvende derivasjon og integrasjon til å analysere og tolke egne matematiske modeller av reelle datasett - analysere og tolke ulike funksjoner ved å bruke derivasjon og integrasjon, og anvende integrasjon til å beregne ulike mål av omdreiningslegemer

Tabell 2.4: Kompetansemål knyttet til derivasjon i 1T fra gammel læreplan og høringsutkast til ny læreplan (Utdanningsdirektoratet, 2013, 2019c)

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne
Matematikk 1T (tidligere læreplan): - berekne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjeringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta - gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar
Matematikk 1T (høringsutkast): - bruke gjennomsnittleg og momentan vekstfart i konkrete døme og gjere greie for den deriverte som funksjon

2.5 Oppgavens problemstilling

Ettersom den deriverte er et viktig terskelbegrep i matematikken er det viktig å besitte god begrepsmessig forståelse for den deriverte for å være i stand til å lære vanskeligere matematikk. Sett i lys av Sfards prosess-objekt-syn er den deriverte spesielt utfordrende ettersom den kan sees på både som et lokalt og et globalt objekt og at den defineres som en grenseverdi. I og med at man i den videregående skolen først og fremst beveger seg i den konkretiserte og den symbolske av Talls verdener, må man bygge god begrepsmessig forståelse for den deriverte gjennom å la elevene bli kjent med den iboende grenseverdien til den deriverte, som kommer til syne gjennom for eksempel sekanten som går mot tangenten, lokal linearitet og grenseverdien til differensialkvotienten.

I læreplanen er derivasjon en del av fagene 1T, S1, S2, R1 og R2. Aller størst plass tar det i S1 og R1. I og med at temaet introduseres i 1T og at denne oppgaven omhandler introduksjonen av den deriverte, avgrenses derfor denne oppgavens analyse til læremidler for 1T.

På bakgrunn av det overnevnte lander vi dermed på denne oppgavens problemstilling:

Hvilke didaktiske tilnærminger bruker et utvalg læremidler i matematikk 1T for introduksjonen av den deriverte, og hvordan legger de til rette for god begrepsmessig forståelse?

Problemstillingen er altså todelt, hvor første del tar for seg hvilke didaktiske tilnærminger ulike læremidler for 1T bruker for introduksjonen av den deriverte. Ulike didaktiske tilnærminger for den deriverte blir presentert i kapittel 3. Den andre delen av problemstillingen tar for seg hvordan disse tilnærmingene på sin side legger opp til god begrepsmessig forståelse, med utgangspunkt i teorien fra dette kapittelet.

Kapittel 3

Derivasjon

kapittelet dreier seg om derivasjon, ulike utgangspunkt for hvordan man kan tenke om det og ulike ideer knyttet til den deriverte. Først defineres begrepene grenseverdi og den deriverte formelt på måter man kjenner fra høyere utdanning. Videre presenteres to utgangspunkter for hvordan man kan tenke om den deriverte: som grenseverdien til differensialkvotienten og gjennom lokal lineær approksimasjon. Dette leder oss til fire grunnleggende ideer ved den deriverte som deretter diskuteres. Disse er ideene om momentan vekstfart, tangentens helning, lokal linearitet og den deriverte som forsterkningsfaktor. Videre følger en diskusjon av hvordan man kan møte den deriverte gjennom en additiv så vel som en multiplikativ tilnærming. Deretter belyses hvordan man kan benytte seg av programmering i innlæringen av den deriverte, og hvordan dette relaterer seg til ideene fra Greefrath mfl. (2016) gjennom *diskretisering*. Til slutt i kapittelet presenteres Wagner mfl. (2015) sitt rammeverk for den deriverte, som ligger til grunn for oppgavens analyse.

3.1 Definisjoner

I denne delen blir de formelle matematiske definisjonene av begrepene grenseverdi og den deriverte lagt frem, slik de tradisjonelt blir definert i emner på universitetsnivå. To definisjoner for hvert av begrepene presenteres, fra henholdsvis Adams og Essex (2022) og Månsson og Nordbeck (2011).

3.1.1 Grenseverdi

Med grenseverdi menes den verdien en funksjon nærmer seg når funksjonsargumentet nærmer seg et visst punkt. Grenseverdien betegnes ofte ved hjelp av $\lim_{x\to y}$-notasjon, hvor grenseverdien til et uttrykk som avhenger av x er verdien uttrykket nærmer seg når x nærmer seg y.

Definisjon 3.1. En formell definisjon av grenseverdi

Vi sier at $f(x)$ går mot grensen L når x går mot a, og vi skriver

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \tag{3.1}$$

dersom følgende krav er oppfylt: for alle tall $\varepsilon > 0$ finnes det et tall $\delta > 0$, muligens avhengig av ε, slik at hvis $0 < |x-a| < \delta$, da hører x til definisjonsmengden til f og

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

(Adams & Essex, 2022, s. 89, egen overs.)

Definisjon 3.2. (Gränsvärde då $x \to a$). Vi säger att $f(x)$ har gränsvärdet A då $x \to a$, och skriver

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \tag{3.2}$$

om[a] det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för alla $x \in D_f$ sådana att $0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$.

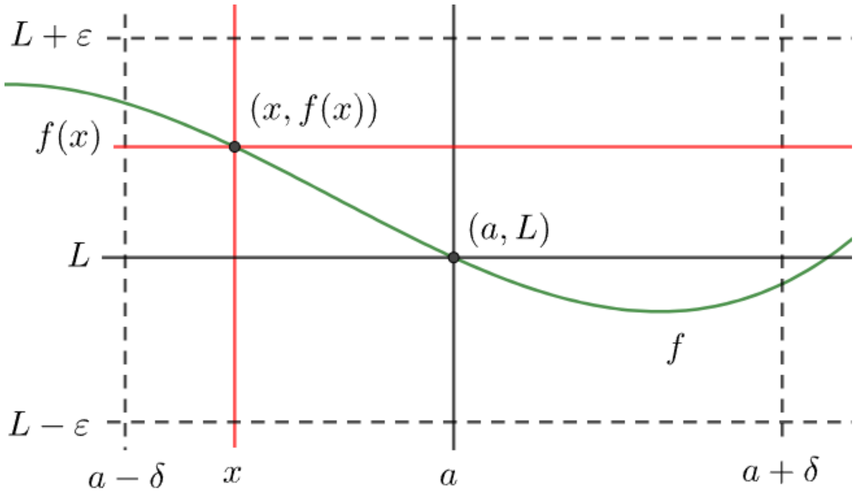
Alternativt skriver vi: $f(x) \to A$ då $x \to a$.

---

[a] Vi kräver dessutom att f är definierad i någon punkt i varje punkterad omgivning av a, dvs. att för varje $\gamma > 0$ finns ett $x \in D_f$ sådant at $0 < |x-a| < \gamma$

(Månsson & Nordbeck, 2011, s. 183)

I fig. 3.1 er grenseverdien fra def. 3.1 illustrert. Gitt at grenseverdien eksisterer, vil man kunne finne en verdi av $f(x)$ vilkårlig nærme L, bare man velger x nære nok a. Vi ser at Månsson og Nordbeck (2011) har et tilleggskrav om at f må være definert i en omegn av punktet x. Ellers er definisjonene relativt like.



Figur 3.1: Illustrasjon av ε-δ-definisjonen av grenseverdi

3.1.2 Den deriverte

Den deriverte sier noe om hvordan en størrelse endrer seg. For en funksjon av én variabel forteller den deriverte i et punkt stigningstallet til tangenten gjennom punktet i grafen til funksjonen. Den deriverte i punktet finnes ved hjelp av grenseverdien til differensialkvotienten.

Definisjon 3.3. Den **deriverte** av en funksjon f er en annen funksjon f' definert ved

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.3}$$

for alle punkter x hvor grenseverdien eksisterer (det vil si at den er et endelig reelt tall). Hvis $f'(x)$ eksisterer, sier vi at f er **deriverbar** i x.

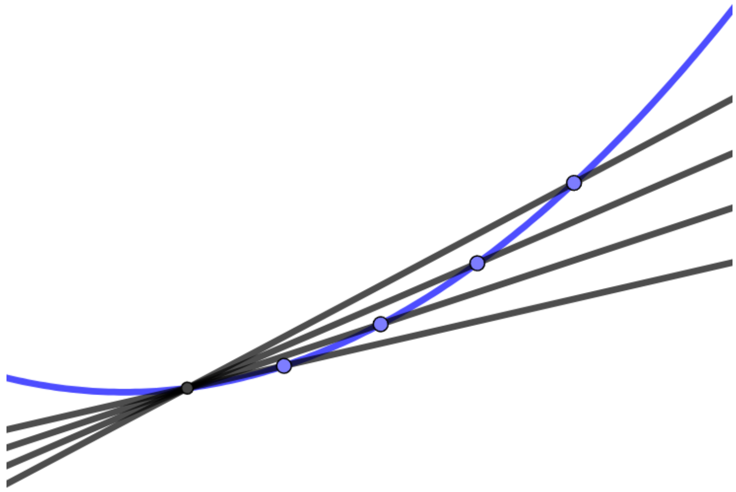
(Adams & Essex, 2022, s. 100, egen overs.)

Definisjon 3.4. (Derivata). Antag att f är definierad i en omgivning av punkten a. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.4}$$

existerar (ändligt) så säger vi att f är **deriverbar** i a. Själva gränsvärdet kallas **deriavatan** av f i punkten a, och betecknas $f'(a)$.

(Månsson & Nordbeck, 2011, s. 206)



Figur 3.2: Dynamisk fremstilling av sekanter mellom punkter som nærmer seg hverandre (Greefrath mfl., 2016, s. 155)

I fig. 3.2 er ulike sekanter mellom to punkter på grafen til en funksjon gjengitt. Når h fra def. 3.3 over nærmer seg 0, vil punktene på grafen nærme seg hverandre, og sekanten vil nærme seg tangenten gjennom et punkt $(x, f(x))$. Den deriverte er lik stigningstallet til tangenten gjennom punktet. Vi bemerker at Adams og Essex (2022) i def. 3.3 definerer den deriverte som en funksjon av x, mens Månsson og Nordbeck (2011) i def. 3.4 definerer den deriverte i ett punkt a.

3.2 Utgangspunkt og ideer rundt den deriverte

3.2.1 Historisk overblikk og notasjon

Opphavet til differensial- og integralregningen tilskrives ofte Sir Isaac Newton (1643–1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) sent på 1600-tallet, mens dagens form ble utviklet på slutten av 1800-tallet, da Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) definerte den deriverte som grenseverdien til differensialkvotienten. Derivasjon er et sentralt konsept innenfor analysen, og ved hjelp av differensiallikninger har man blitt i stand til beskrive og løse matematiske problemer innenfor mange av fagfelt. Med dette har analysen også blitt en hjørnestein i matematikkundervisningen på universitetsnivå (Greefrath mfl., 2016, s. 137-140).

Newton og Leibniz utviklet differensialregningen samtidig og uavhengig av hverandre. Newtons motivasjon var et ønske om å analysere forflytningen til objekter i bevegelse, og han brukte en punktnotasjon ($\dot{y}$) som minner om Lagrange-notasjonen som brukes mye i dag ($f'(x), y'$). Ulike notasjoner for den førstederiverte er oppsummert i likn. (3.5) (Adams & Essex, 2022, s. 104).

$$D_x y = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = D_x f(x) = Df(x) \tag{3.5}$$

Leibniz innførte notasjonen med $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d}{dx} f(x)$. Denne notasjonen blir antydet av def. 3.3 og def. 3.4. Med utgangspunkt i differensialkvotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, finner vi den deriverte $\frac{dy}{dx}$ ved å la $h \to 0$. Dette kan skrives på formen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hvor $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, endringen i funksjonsverdi, og $\Delta x = (x+h) - x = h$, endringen i x-verdi. Vi kan da skrive følgende:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3.6}$$

Mens det er tydelig at differensialkvotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ er en kvotient bestående av de to mengdene Δy og Δx, er det mindre klart at $\frac{dy}{dx}$ er en slik kvotient. Om y er en kontinuerlig funksjon av x, vil Δy gå mot 0 når Δx går mot 0, og $\frac{dy}{dx}$ blir tilsynelatende den meningsløse mengden $\frac{0}{0}$. Likevel er det i blant nyttig å kunne referere til mengdene dy og dx på en slik måte at kvotienten mellom mengdene er den deriverte $\frac{dy}{dx}$. Dette rettferdiggjøres ved å anse dx som en ny uavhengig variabel, kalt differensialen til x, og dy som en ny avhengig variabel, differsialen til y, som en funksjon av x og dx ved følgende sammenheng:

$$dy = \frac{dy}{dx} dx = f'(x) dx \tag{3.7}$$

Ved denne definisjonen er differensialene variabler som kan være både små og store i absoluttverdi. Av Leibniz ble differensialene dy og dx opprinnelig ansett som infinitesimale verdier. Det vil si uendelig små, men ulike 0, med en kvotient $\frac{dy}{dx}$ som ga helningen til tangentlinjen. Det kan vises at infinitesimale verdier ikke kan eksistere som reelle tall. I ikke-standard analyse blir derimot den reelle tallinjen utvidet til å inneholde infinitesimale størrelser, såkalte hyperreelle tall, slik at den deriverte kan defineres ut ifra infinitesimale størrelser (Røkkum, 2019).

Der Newton og Leibniz la mye av grunnlaget for differensialregningens utvikling, var det Cauchy som formelt sett definerte den deriverte ved hjelp av grenseverdien. Videre skal vi se på to utgangspunkter for hvordan man kan tenke om den deriverte med utgangspunkt i grenseverdidefinisjonen til den deriverte.

3.2.2 To utgangspunkt for den deriverte

Greefrath mfl. (2016, s. 142-146) formulerer to ulike utgangspunkt for å forklare hva som menes med den deriverte. Et utgangspunkt er å se på den deriverte som grenseverdien til differensialkvotienten, mens det andre går ut på å se på grafen i stor forstørrelse slik at grafen blir tilnærmet lineær over et lite område. Videre redegjøres det for disse to utgangspunktene.

Grenseverdien til differensialkvotienten

Det første utgangspunktet for den deriverte er å se på den som grenseverdien til differensialkvotienten. Den grafisk-visuelle tolkningen av dette vil være den deriverte som grenseverdien til sekanten mellom to punkter på grafen som nærmer seg hverandre (fig. 3.2). Dette er utgangspunktet for definisjonene for den deriverte i def. 3.3 og def. 3.4. Differensialkvotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, hvor vi lar h gå mot 0, er ekvivalent med $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, om vi heller lar x nærme seg x_0. Med utgangspunkt i den kvadratiske funksjonen $f(x) = x^2$ prøver vi å finne den deriverte i punktet x_0, ved å sette inn for $f(x)$ og $f(x_0)$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x+x_0 \tag{3.8}$$

Om vi nå lar x gå mot x_0 ser vi at den deriverte blir $2x_0$.

Om grenseverdien og restfunksjonen

Med utgangspunkt i definisjonen av grenseverdi fra def. 3.1 setter vi $L = f'(x)$, og viser at for differensialkvotienten i likn. (3.8) gjelder følgende, gitt at grensen eksisterer:

For alle tall $\varepsilon > 0$ finnes det et tall $\delta > 0$ slik at hvis $0 < |x-x_0| < \delta$, da

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon \tag{3.9}$$

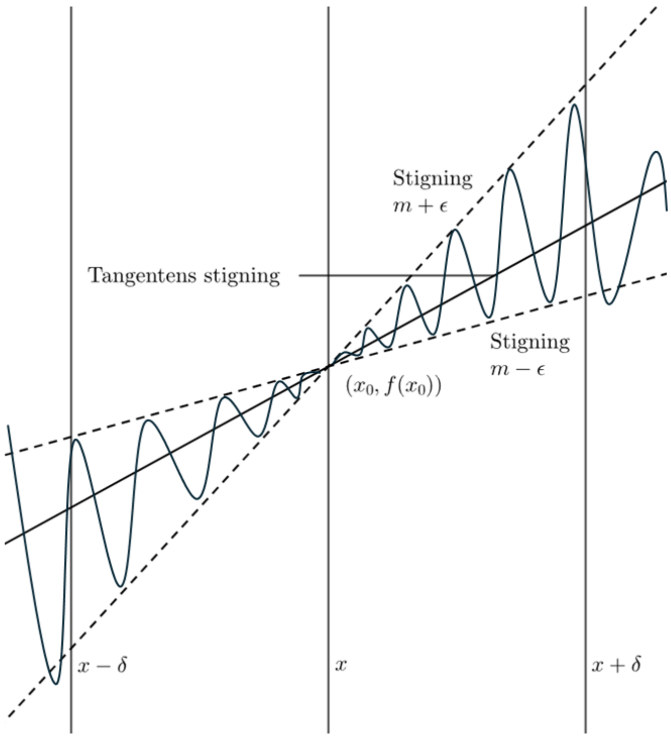
Videre omarrangerer vi ulikheten med hensyn på $f(x)$ slik at vi får to lineære funksjoner på hver side. Tangentfunksjonene beskriver stigningen til to tangenter gjennom punktet $(x_0, f(x_0))$, illustrert ved fig. 3.1 hvor $f'(x_0) = m$:

For $x > x_0$:

$$(f'(x_0)-\varepsilon)\cdot(x-x_0)+f(x_0) < f(x) < (f'(x_0)+\varepsilon)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

For $x < x_0$:

$$(f'(x_0)-\varepsilon)\cdot(x-x_0)+f(x_0) > f(x) > (f'(x_0)+\varepsilon)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$



Figur 3.3: Tangentfunksjoner gjennom $(x_0, f(x_0))$ med stigning hhv. $m+\varepsilon$ og $m-\varepsilon$ (Greefrath mfl., 2016, s. 144, egen overs.)

Det vil si at i en δ-omegn av x_0 skiller ikke funksjonsverdien og verdien av tangentfunksjonen seg så mye, siden ε er et lite tall. Funksjonsgrafen beveger seg lokalt innenfor områdene avgrenset av de to rette linjene gitt ved $x \mapsto (f'(x_0) \pm \varepsilon) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Vi definerer restfunksjonen r som differansen mellom funksjonsverdien $f(x)$ og verdien til tangentfunksjonen $g(x)$ et lite stykke unna x_0:

$$r(x-x_0) := f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Dermed kan kravet i grenseverdien for den deriverte i likn. (3.9) omskrives som følger:

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x-x_0} \cdot r(x-x_0) \right| = \left| \frac{r(x-x_0)}{x-x_0} \right| < \varepsilon \tag{3.10}$$

Vi ser av dette at $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x-x_0)}{x-x_0} = 0$. Det vil si at en deriverbar funksjon lokalt kan approksimeres veldig godt av en rett linje ettersom man kan gjøre feilen så liten man ønsker bare man velger et punkt nære nok x_0. Dette leder oss til neste utgangspunkt hvordan man kan tenke om den deriverte, som lokalt tilnærmet lineær.

Lokal lineær approksimasjon

Det andre utgangspunktet for den deriverte er å se på grafen i stor forstørrelse, hvor endringer oppfører seg som lokalt lineære. Ved å zoome langt inn på grafen vil den se tilnærmet lineær ut. For tilstrekkelig små verdier av Δx vil feilen som oppstår være neglisjerbar. Ut ifra foregående del kan vi nå gi en definisjon av den deriverte ved lokal lineær approksimasjon:

Definisjon 3.5. Den deriverte ved lokal linearisering: La f være en reell funksjon definert i en omegn av punktet $x_0 \in \mathbb{R}$. Man sier at f er deriverbar i punktet x_0 om det finnes et tall m slik at

$$f(x) = f(x_0) + m \cdot (x - x_0) + r(x - x_0) \tag{3.11}$$

hvor restfunksjonen r er slik at: $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x-x_0)}{x-x_0} = 0$. Tallet m kalles den deriverte av f i punktet x_0, dvs. $f'(x_0) := m$.

(Greefrath mfl., 2016, s. 144, egen overs.)

Vi ser igjen på kvadratfunksjonen $f(x) = x^2$, og med den nye definisjonen prøver vi å finne den deriverte m. Vi setter inn for $f(x)$ og $f(x_0)$ i likn. (3.11):

$$x^2 = x_0^2 + m \cdot (x - x_0) + r(x - x_0)$$
$$\Rightarrow r(x - x_0) = x^2 - x_0^2 - m \cdot (x - x_0) = (x - x_0)(x + x_0 - m)$$

Om vi nå velger $m = 2x_0$, får vi restfunksjonen $r(x - x_0) = (x - x_0)^2$, som oppfyller kravet $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x-x_0)}{x-x_0} = 0$, og den deriverte er funnet.

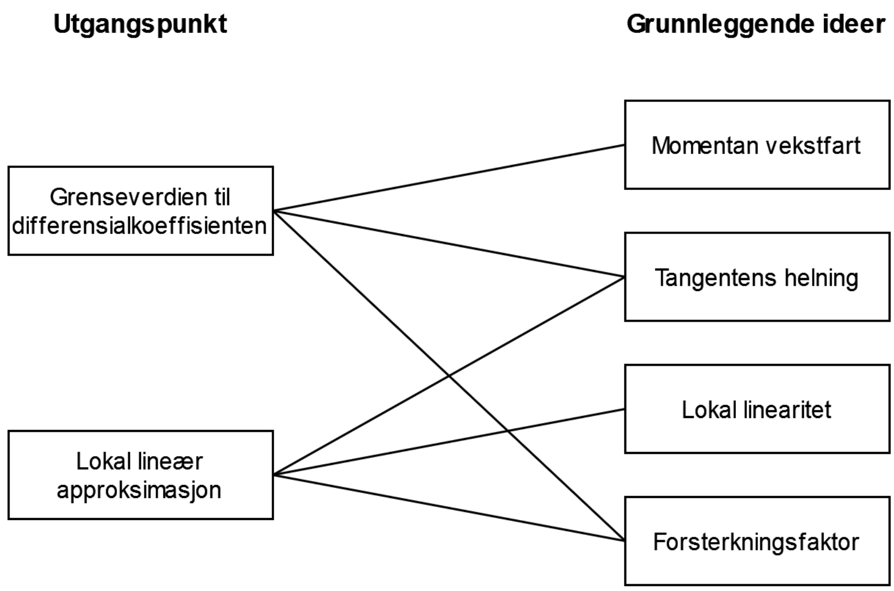
Uttrykket for den deriverte fra likn. (3.11) blir formulert på en alternativ måte av Månsson og Nordbeck (2013, s. 103). For en funksjon $\rho(h)$ som er slik at $\rho(h) \to 0$ når $h \to 0$, gjelder det at

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \rho(h)h, \qquad \text{hvor } \rho(h) \to 0 \text{ når } h \to 0 \tag{3.12}$$

Her er $A = f'(x)$, på samme måte som $m = f'(x)$ i likn. (3.11).

3.2.3 Fire grunnleggende ideer ved den deriverte

I forrige avsnitt ble det gjort rede for hvordan vi kan tenke på og definere den deriverte på to ulike måter. En tar utgangspunkt i derivasjon som grenseverdien til differensialkvotienten, mens



Figur 3.4: To utgangspunkt og fire grunnleggende ideer for den deriverte (Greefrath mfl., 2016, s. 147, egen overs.).

den andre baserer seg på se på funksjonen som lineær over et lite område og finne stigningstallet til funksjonen. På bakgrunn av disse to utgangspunktene legger Greefrath mfl. (2016) fram fire grunnleggende ideer ved den deriverte. Dette er ideene om momentan vekstfart, tangentens helning, lokal linearitet og den deriverte som *forsterkningsfaktor*. I fig. 3.4 er utgangspunktene og ideene med sammenhengen mellom dem oppsummert. I fortsettelsen redegjøres det for hver av de grunnleggende ideene.

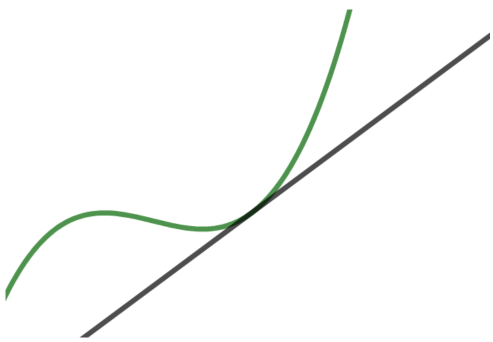
Momentan vekstfart

Ideen om momentan vekstfart baserer seg på ideen om gjennomsnittlig vekstfart, som man introduseres til på ungdomsskolen gjennom ideen om gjennomsnittsfart (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Gjennomsnittlig vekstfart er en kompleks ide, som for mange er utfordrende. Noen anser kvotienten $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ som en enkelt størrelse, mens andre ser på det som to størrelser som endrer seg uavhengig av hverandre. Andre vil igjen først og fremst se kvotienten som en regneoperasjon. Dette kan sees i lys av Sfards prosess-objekt-syn fra kapittel 2. Noen elever ser på vekstfart som noe som alltid er konstant, muligens som er overgeneralisering av stigningen til en rett linje. En utfordring for mange elever er å se forskjellen på gjennomsnittlig vekstfart mellom to endepunkter, og momentan vekstfart i et punkt (Greefrath mfl., 2016, s. 147-148).

Gjennomsnittlig vekstfart viser alltid til et intervall, men gjennom å systematisk redusere intervallet kan man finne momentan vekstfart i et punkt ved hjelp av grenseverdien. Et eksempel er måling av tid og avstand, med tid som uavhengig variabel, hvor man med utgangspunkt i gjennomsnittsfart kan finne øyeblikkelig fart ved å la tidsintervallet gå mot null. Et annet eksempel er forholdet mellom arealet og radiusen til en sirkel, hvor grenseverdien vil gi omkretsen til sirkelen. Ideen om momentan vekstfart baserer seg altså på ideen om gjennomsnittlig vekstfart, men krever en kvalitativt ulik forståelse. Der gjennomsnittlig vekstfart er en kvotient, er momentan vekstfart grenseverdien til en kvotient. Den avhenger av mer en funksjonsverdien i et enkelt punkt. Gjennom å omforme $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ får man en tilnærming til den deriverte, $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, som man kjenner fra utregning av helning ved hjelp av stigningstrekanten, i for eksempel fysikk (Greefrath mfl., 2016, s. 148).

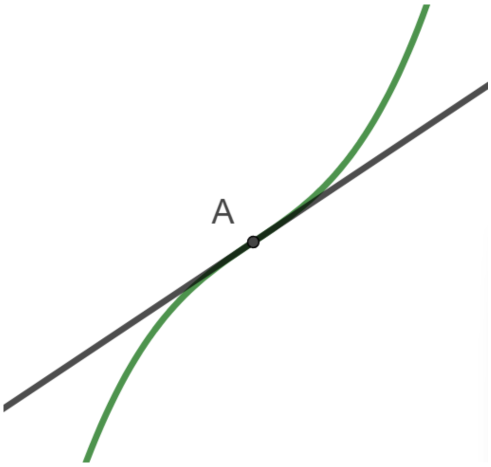
Momentan vekstfart omfatter altså ideene om øyeblikkelig fart i endringsprosesser, helningen til en kurve i et punkt og det at endringen i y er gitt ved $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$. Greefrath mfl. (2016, s. 159) foreslår at ideen kan komme til syne i klasserommet gjennom å studere endringsprosesser, slik som hastighetskonseptet elevene allerede kjenner fra ungdomsskolen. Ved å endre på intervallet man undersøker, kan man belyse hvordan man gjennom en grenseprosess vil nærme seg den momentane vekstfarten.

Tangentens helning



Figur 3.5: Tangentens helning i et punkt på en graf av en funksjon

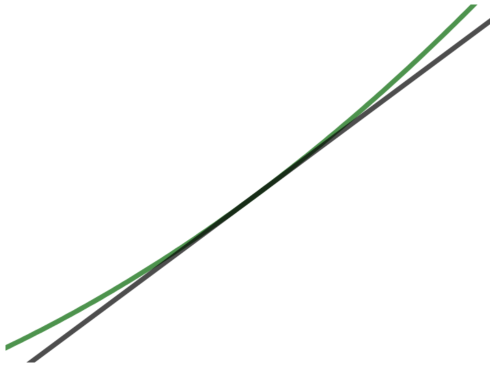
Ideen om tangentens helning (fig. 3.5) er basert på at stigningstallet til tangenten i et punkt på en funksjon er bestemt av den deriverte. Selv om elevene allerede har støtt på tangenten i skolesammenheng tidligere, gjennom tangenten til en sirkel, må begrepet og ideene knyttet til den utvides når man omtaler tangenten til den deriverte. Gjennom å bli kjent med tangenten som tangenten til en sirkel, kan man fort ende med en oppfatning om at den viktigste egenskapen til en tangent er at den rører ved sirkelen i ett og bare ett punkt og at den aldri krysser sirkelperiferien. Dette kan føre til en forståelse av at tangenten gjennom ett punkt i en funksjon aldri vil krysse grafen, noe den kan. Se tangenten gjennom vendepunktet til tredjegradspolynomet i fig. 3.6. Globalt kan tangenten krysse grafen et vilkårlig antall ganger, som for funksjonen $f(x) = \cos x$ og tangenten til grafen i et punkt hvor x er nære 0 (Greefrath mfl., 2016, s. 149).



Figur 3.6: Tangentens helning i vendepunktet A til et tredjegradspolynom

Det er ikke tilstrekkelig å undersøke bare selve punktet a, men man må også se på et tilstrekkelig lite område i omegn av a, som påpekt i def. 3.2 fra Månsson og Nordbeck (2011). Tangentbegrepet kan forstås både som statisk, hvor man gjennom tilstrekkelig forstørrelse kan anse grafen som en rett linje lik tangenten gjennom punktet, og dynamisk, hvor man beveger seg langs grafen og retningen kontinuerlig bestemmes av tangentens stigning. Tangenten kobler ellers flere viktige konsepter knyttet til den deriverte, som koblingen mellom verdien av den deriverte og funksjonens monotoniegenskaper (Greefrath mfl., 2016, s. 150).

Tangentens helning omfatter altså ideen om tangenten som en rett linje, at helningen til tangenten til en kurve er lik helningen til kurven i et gitt punkt og at tangenten lokalt indikerer retningen til en kurve. Greefrath mfl. (2016, s. 155) forslår at man kan bli kjent med den deriverte som stigningen til tangenten gjennom et punkt gjennom å se på sekanten mellom to punkter på en graf med avstand h, og variere verdien til h for å se hvordan sekanten for lave verdier av h vil nærme seg tangenten gjennom ett punkt. Dette kan for eksempel gjøres gjennom dynamiske matematikkprogrammer som GeoGebra.



Figur 3.7: Lokal linearitet

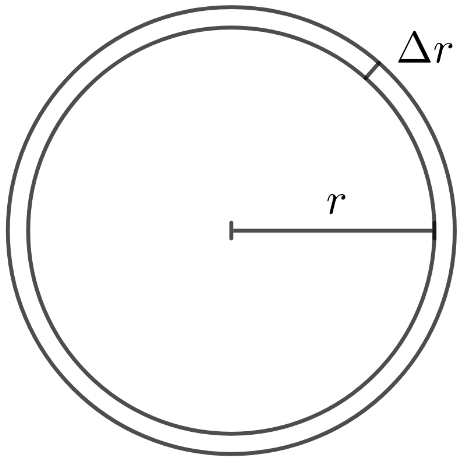
Lokal linearitet

Om man ser på funksjonen og tangenten i fig. 3.5 i større og større forstørrelse, vil tangenten og grafen til funksjonen gradvis likne og nærme seg hverandre. I fig. 3.7 ser man samme funksjon forstørret inn mot det tangerende punktet. At en funksjon er lokalt lineær vil si at Δx er proporsjonal med Δy slik at $f'(x)$ er konstant i en omegn av x_0. Den deriverte angir altså faktoren som beskriver hvordan en liten endring i den uavhengige variabelen påvirker den avhengige variabelen. Dette er hovedideen rundt den deriverte som lokalt lineær. Ideen om lokal linearitet brukes innefor mange områder i matematisk modellering. En vekstmodell for populasjon kan for eksempel beskrives ved en lineær sammenheng innenfor et kort tidsintervall. Ved å deretter se på veksten som proporsjonal med den eksisterende populasjonen, kan endringen beskrives ved en lineær sammenheng (Greefrath mfl., 2016, s. 151).

Lokal linearitet innebærer altså at når man ser på området rundt et punkt på grafen til er deriverbar funksjon i stor forstørrelse, vil man se en rett linje. For små endringer i x-verdi er funksjonen nesten lineær og kan dermed tilnærmet erstattes av lineære sammenhenger. Greefrath mfl. (2016, s. 158) foreslår at ideen kan komme til syne i klasserommet gjennom å benytte et dynamisk matematikkprogram som for eksempel GeoGebra. Her kan man forstørre grafen inntil den er tilnærmet lineær, og ut ifra dette kan man forsøke å bestemme tangentfunksjonen som stemmer overens med grafen lokalt.

Månsson og Nordbeck (2013, s. 192-193) viser hvordan den deriverte kan sees på som en lineær operator for vektorfunksjoner. Med utgangspunkt i likn. (3.12) viser forfatterne hvordan man for en vektorfunksjon av typen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ med funksjonalmatrisen **f**' kan gi følgende sammenheng: $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{h} + \mathbf{R}$. Her er **R** resttermen, en kolonnematrise, og under riktige forutsetninger på **f** blir resttermen relativt liten for små tillegg **h**. Dermed gjelder det at $\Delta\mathbf{f} \approx \mathbf{f}' \cdot \mathbf{h}$, der **h** er et lite tall nær et punkt i definisjonsmengden. Vi ser altså at $\Delta\mathbf{f}$ lokalt kan approksimeres med en *lineærtransformasjon* av tilskuddet **h**, med **f**' som lineær operator.

Forsterkningsfaktor



Figur 3.8: Forsterkningsfaktor (Greefrath mfl., 2016, s. 152)

Ideen om forsterkningsfaktor er tett knyttet til ideen om lokal linearisering. Ved å ta utgangspunkt i feilestimering stiller vi oss spørsmålet: *Hvor mye påvirker en liten endring av en størrelse en annen størrelse som avhenger av den?* I avsnittet om momentan vekstfart ble omkretsen til en sirkel beskrevet som grenseverdien til forholdet mellom en liten endring av arealet og radiusen til sirkelen, med radius r som uavhengig variabel, se fig. 3.8. Med andre ord, kan omkretsen til en sirkel beskrives som den momentane vekstfarten til en sirkel hvor vi legger inn en endring av sirkelens radius. Arealet til en sirkel er gitt ved πr^2, og arealet til en litt større sirkel blir $\pi(r+\Delta r)^2 = \pi(r^2+2r\Delta r+4\Delta r^2)$

Differansen mellom arealet til sirklene blir dermed:

$$\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi r^2 + 2\pi r\Delta r + \pi\Delta r^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta r + \pi\Delta r^2 \approx 2\pi r\Delta r$$

For en liten Δr ser vi at endringsfaktoren av arealet til ringen rundt sirkelen blir tilnærmet omkretsen til sirkelen (Greefrath mfl., 2016, s. 152).

Ideen om den deriverte som forsterkningsfaktor innebærer altså ideene om at den deriverte angir hvor mye små endringer i den uavhengige variabelen påvirker den avhengige variabelen, at høye verdier av den deriverte betyr raske/sterke endringer i funksjonsverdiene og at for små endringer er sammenhengen mellom $\Delta x, \Delta y$ multiplikativ: $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$. Denne ideen ligger også til grunn for Silvanus P. Thompson sin forklaring av den deriverte i Calculus Made Easy, hvor grenseverdibegrepet ikke behandles (Thompson & Gardner, 1998). Ellers spiller ideen tradisjonelt en relativt liten rolle didaktisk (Greefrath mfl., 2016, s. 153).

De fire ulike ideene som har blitt presentert i dette avsnittet, kan på hver sin måte hjelpe med å forklare termene i differensialkvotienten. For momentan vekstfart, indikerer det grenseprosessen til en kvotient. For forståelse av den deriverte som tangent, er dx og dy komponentene til tangenten, eller stigningstrekanten. For ideen om lokal linearitet, beskriver kvotienten proporsjonalitetsfaktoren mellom dx og dy. Som forsterkningsfaktor angir kvotienten hvor store endringer i den avhengige variabelen små endringer i den uavhengige variabelen gir.

3.3 Andre didaktiske innfallsvinkler

I denne delen presenteres andre perspektiver på den deriverte. Først diskuteres den mulige nytteverdien av en multiplikativ tilnærming til definisjonen av den deriverte, etterfulgt av en redegjørelse av hvordan programmering kan benyttes i undervisningen av den deriverte.

3.3.1 Multiplikativ tilnærming til differensialkvotienten

Den tradisjonelle definisjonen av den deriverte fra def. 3.3 og def. 3.4 innebærer ifølge Kirfel (2011, s. 23) en additiv tolkning av grenseprosessen. Forfatteren påpeker hvordan grenseprosessen også kan betraktes i en multiplikativ tolkning, der grensen kommer til syne gjennom en faktor som nærmer seg 1 i stedet for et lite tillegg som nærmer seg 0. Følgende sammenheng er ekvivalent med likn. (3.3) og likn. (3.4):

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{3.13}$$

Dette er igjen ekvivalent med:

$$f'(x) = \lim_{r \to 1} \frac{f(rx) - f(x)}{rx - x} \tag{3.14}$$

Kirfel (2011, s. 23) argumenterer for at en multiplikativ tilnærming til definisjonen av den deriverte kan forenkle utledningene av flere kjente derivasjonsregler, eksempelvis for logaritmiske og trigonometriske funksjoner. Ved hjelp av å formulere definisjonen på denne måten, kan også regelen for derivasjon av en potensfunksjon utledes uten overdreven formalismebruk. Arbeid med selve definisjonen av den deriverte er ifølge Kirfel (2011, s. 21-22) også med på å gjøre elevens begrep om den deriverte mer robust. Gitt $f(x) = x^n$, setter vi inn i likn. (3.14) og om vi kjenner uttrykket for en geometrisk rekke kan vi finne et uttrykk for den deriverte av f:

$$f'(x) = \lim_{r \to 1} \frac{f(rx) - f(x)}{rx - x} = \lim_{r \to 1} \frac{(rx)^n - (x)^n}{x(r-1)} =$$
$$\frac{x^n}{x} \lim_{r \to 1} \frac{r^n - 1}{r - 1} = x^{n-1} \lim_{r \to 1} (1 + r + r^2 \ldots + r^{n-1}) = nx^{n-1} \tag{3.15}$$

I forbindelse med læremidlene for forrige læreplan (Kunnskapsløftet LK06) påstår Kirfel (2011, s. 20) at ”nyere læreverk for den videregående skolen baserer ofte fremstillingen av fagstoffet på en algebraisk formel- og regelorientert filosofi”. Forfatteren mener at geometriske tolkninger og intuisjon, og arbeid med selve definisjonene av begreper, med dette trer i bakgrunnen. Derfor tar forfatteren til orde for at en multiplikativ tilnærming til definisjonen kan lette symbolske utledninger i undervisningen.

3.3.2 Numerisk derivasjon - programmering av den deriverte

Kristensen og Kirfel (2022, s. 90) skriver at i tilfeller med enklere funksjonsuttrykk, er det ofte mulig å integrere og derivere funksjoner for hånd. For mer avanserte funksjoner, kan verktøy som CAS være nyttige. Forfatterne påpeker videre at langt ifra alle funksjonsuttrykk kan skrives på en analytisk form, for eksempel ved tilfeller der funksjonsverdiene er gitt punktvis og vi ikke har et gitt funksjonsuttrykk. Da kan man dra nytte av numerisk derivasjon, hvor man finner ut hvor mye en funksjon endrer seg ved å regne gjennomsnittlig vekstfart fra ett punkt til et annet. Man kan enten finne informasjon til venstre for punktet, til høyre for punktet eller fra begge sider av punktet. Dette fører til ulike tilnærmingsverdier, og ut ifra situasjonen kan en tilnærming være bedre enn en annen.

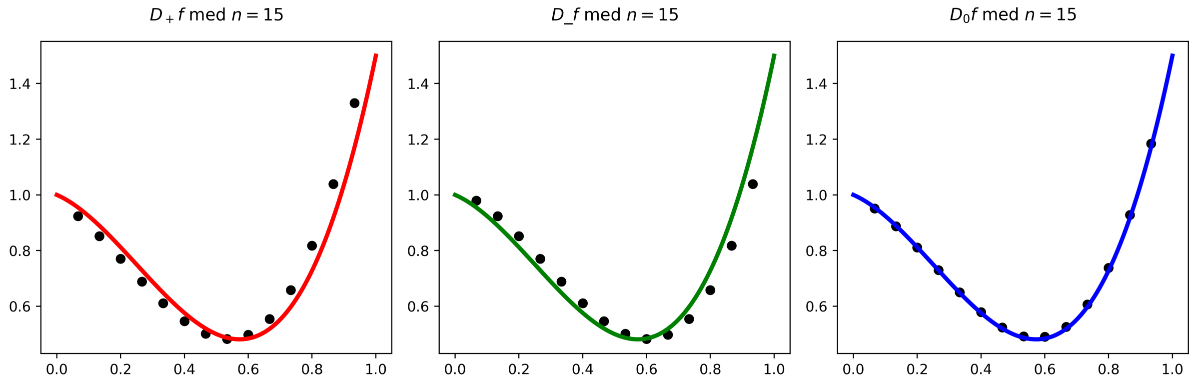
Kristensen og Kirfel (2022, s. 91) definerer med dette tre ulike skjema som regner den deriverte numerisk slik man regner gjennomsnittlig vekstfart. I likn. (3.16), likn. (3.17) og likn. (3.18) gis skjemaene for henholdsvis høyre- og venstrederiverte og et skjema som henter informasjon fra begge sider.

$$D_+ f(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \tag{3.16}$$

$$D_- f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{3.17}$$

$$D_0 f(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})}{x_{n+1} - x_{n-1}} \tag{3.18}$$

I fig. 3.9 er den deriverte av funksjonen $f(x) = x^4 - x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x$ for hver av de ulike numeriske tilnærmingene plottet sammen med den analytiske løsningen $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1$. Som vi ser ligger alle de numeriske løsningene nære den analytiske, selv om skjemaet som tar hensyn til begge sider i størst grad sammenfaller med den analytiske løsningen.



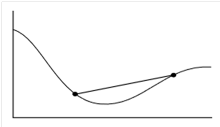
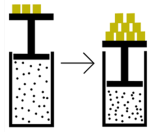
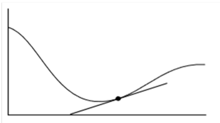
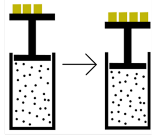
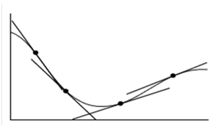
Figur 3.9: Illustrasjon av tre skjema for numerisk derivasjon, med plott av analytisk løsning av den deriverte for $f(x) = x^4 - x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x$. Inspirert av Kristensen og Kirfel (2022, s. 93)

Kristensen og Kirfel (2022, s. 78) skriver at man i en *diskretisering* plukker ut et endelig antall punkter fra definisjonsmengden til en funksjon og analyserer funksjonsverdiene på denne diskrete mengden. Dette kan sees i lys av teorien om den deriverte som lokalt lineær fra Greefrath mfl. (2016). Ettersom verdimengden består av diskrete punkter, kan man regne tilnærmingsverdier til den deriverte gjennom å regne gjennomsnittlig vekstfart mellom punktene. Da antar man at grafen til funksjonen er tilnærmet lokalt lineær mellom de diskrete punktene. Man kan zoome lenger inn på grafen og få mer nøyaktige resultater ved å velge kortere avstand mellom punktene.

3.4 Wagner mfl. (2015) sitt rammeverk for den deriverte

I tabell 3.1 er Wagner mfl. (2015) sitt utvidete teoretiske rammeverk for den deriverte presentert. Dette er en omarbeiding av Zandieh (2000, referert i Wagner mfl., 2015, s. 919) sitt teoretiske rammeverk som ble utviklet for å kartlegge studenters forståelse av den deriverte. Rammeverket inneholder ulike, korrekte, matematiske forståelser av den deriverte, og består av ulike matematiske *kontekster* i horisontal retning. Disse kan tolkes i lys av de tre verdener av matematikk fra Tall (2008). Vertikalt består rammeverket av ulike prosess-objekt lag. Dette bygger på Sfard (1991)

Tabell 3.1: Wagner mfl. (2015, s. 5, egen overs.) sitt utvidete rammeverk for den deriverte.

<table>
<tr><td>Prosess-
objekt lag</td><td>Grafisk
Helning</td><td>Verbalt
Vekstfart</td><td>Symbolsk
Differensial-
kvotienten</td><td>Numerisk
Forhold mellom
endringer</td><td>Fysisk
Målinger</td></tr>
<tr><td>Forhold
(«ratio»)</td><td></td><td>«gjennomsnittlig
vekstfart»</td><td>$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$</td><td>$\frac{1{,}00-0{,}84}{1{,}5-1{,}0}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Grenseverdi
(«limit»)</td><td></td><td>«momentan …»</td><td>$lim_{x \to 0} \cdots$</td><td>$\frac{0{,}89-0{,}84}{1{,}1-1{,}0}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Funksjon
(«function»)</td><td></td><td>«… ved ethvert
punkt»</td><td>$f'(x) = \cdots$</td><td><table><tr><td>x</td><td>y</td><td>$\frac{dy}{dx}$</td></tr><tr><td>0.0</td><td>0.00</td><td>0.96</td></tr><tr><td>0.5</td><td>0.48</td><td>0.72</td></tr><tr><td>1.0</td><td>0.84</td><td>0.32</td></tr><tr><td>1.5</td><td>1.00</td><td>-.18</td></tr></table></td><td>*kjedelig
gjentakelse*</td></tr>
</table>

rammeverk, hvor matematikken sees på som det å utføre prosesser på objekt, som deretter selv omdannes til objekter, som diskutert over. I rammeverket er tre lag inkludert for hver kontekst: som forholdstall knyttet til gjennomsnittlig vekstfart, som grenseverdi for momentan vekstfart og den deriverte som funksjon. Wagner mfl. (2015) sin utvidelse av rammeverket til Zandieh innebærer en tydeliggjøring av den fysiske konteksten, slik at den omfatter den deriverte slik den ofte forstås i naturfagene, og inkluderer det numeriske aspektet som en atskilt kontekst. Wagner mfl. (2015) inkluderer i tillegg en egen tabell for instrumentell forståelse som ikke ingikk i det opprinnelige rammeverket til Zandieh. I denne studien utelates også dette aspektet på bakgrunn av oppgavens tematikk og forskningsmetode.

Videre følger en forklaring av hvordan de fem ulike representasjonene av henholdsvis den deriverte som forhold, som grenseverdi og som funksjon kommer til syne slik Wagner mfl. (2015) forstår dem. Operasjonaliseringen av rammeverket presenteres i kapittel 4 sammen med kodeverktøyet som baserer seg på rammeverket. Her blir videre tilpasninger som er gjort med hensyn på analysen gjort i denne studien tydeliggjort.

Grafisk kontekst

Den grafiske konteksten til den deriverte er helning. I forholdslaget er helningen sekanten som dannes av to punkter på kurven til en funksjon. Som grenseverdi går sekanten mot tangenten i et punkt. For den deriverte som funksjon er vi nødt til å se at helningen er ulik for ulike verdier av den uavhengige variabelen (Wagner mfl., 2015, s. 920).

Verbal kontekst

Den verbale konteksten for den deriverte er ”vekstfart”. I forholdslaget, er dette uttrykt som ”gjennomsnittlig vekstfart”. Når man tar grenseverdien, blir dette ”momentan vekstfart”. For å forstå den deriverte som funksjon er man nødt til å se for seg den momentane vekstfarten over hele domenet til funksjonen (Wagner mfl., 2015, s. 920).

Symbolsk kontekst

Den symbolske konteksten er den formelle definisjonen av den deriverte som grenseverdien til differansekvotienten. Differansekvotienten kan uttrykkes $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ eller tilsvarende. Her kan skillet mellom den deriverte som grenseverdi og funksjon være uklart. Skillet skjer gjennom hvorvidt man gjenkjenner at variabelen som beskriver punktet hvor man tar grensen også kan sees på som argumentet i en funksjon. Dette kan beskrives med ulik notasjon, som for eksempel x_0 for punktverdi, og x som funksjonsargument (Wagner mfl., 2015, s. 920).

Numerisk kontekst

Den numeriske representasjonen begynner i forholdslaget som et forhold mellom to numeriske verdier, for å beskrive endring. I motsetning til symbolske representasjoner, skriver vi ikke $\lim_{\Delta x \to 0} \ldots$ eller gjennomfører noen formell prosedyre, men vi velger små verdier for Δx for å få en tilnærmingsverdi for grenseverdien. For både numeriske og fysiske representasjoner, vil man ved små verdier måtte ta i betraktning usikkerheter knyttet til målinger og tall. I funksjonslaget innebærer den numeriske konteksten gjentatte utregninger (Wagner mfl., 2015, s. 923).

Fysisk kontekst

Ifølge Wagner mfl. (2015) er den fysiske representasjonen av den deriverte en prosess hvor man måler den. Dette kan være en tenkt måling og ikke nødvendigvis være reelle målinger, men målingsprosessen i seg selv er den fysiske representasjonen. Å oppnå en numerisk måling ville krevd bruk av numeriske representasjoner, og beskrivelsen av den vil gjerne innebære en verbal eller grafisk representasjon, men målingen i seg selv er den fysiske representasjonen av den deriverte (Wagner mfl., 2015, s. 922-923).

Kapittel 4

Metode

I dette kapittelet diskuteres metoden som ble benyttet for å besvare problemstillingen:

Hvilke didaktiske tilnærminger bruker et utvalg læremidler i matematikk 1T for introduksjonen av den deriverte, og hvordan legger de til rette for god begrepsmessig forståelse?

Til å begynne med redegjøres det for innholdsanalyse i matematikkdidaktisk forskning, før datamaterialet presenteres og diskuteres. Videre redegjøres det for avgrensninger av datamaterialet knyttet til analysen, før kodeverktøyet basert på rammeverket fra Wagner mfl. (2015) presenteres. Til slutt følger en diskusjon rundt kvaliteten på studien med hensyn på kravene om *reliabilitet* og *validitet*.

4.1 Innholdsanalyse i matematikkdidaktisk forskning

Studier av læremidlers innhold baserer seg som oftest på innholdsanalyse som forskningsmetode (Rezat & Sträßer, 2015, s. 251). Krippendorff (2004, s. 18, egen overs.) definerer innholdsanalyse som "en forskningsmetode for å lage reproduserbare og gyldige slutninger fra tekster (eller annet meningsfylt materiale) til deres brukskontekster". Tradisjonelt har innholdsanalyse blitt utviklet gjennom kvantitative tilnærminger, men kvalitative tilnærminger har også vist seg å være verdifulle (Fauskanger & Mosvold, 2015, s. 79; Krippendorff, 2004, s. 19). Fauskanger og Mosvold (2015, s. 81-83) skiller mellom tre typer for kvalitativ innholdsanalyse i matematikkdidaktisk forskning: Den første er *konvensjonell* innholdsanalyse, hvor analysen starter med hele datamaterialet, kodene utvikles parallelt med analysen og de analytiske kategoriene utledes induktivt fra dataene. Den andre er *summativ* innholdsanalyse, hvor analysene starter med nøkkelord som defineres før og samtidig med analysen og med fokus på ord og deres latente mening i dataene. Den tredje typen er *teoridrevet* analyse, hvor analysene starter med teorien og kodene formuleres som operasjonaliseringer av teoretisk utledede kategorier, med mulighet for utvikling underveis. De analytiske kategoriene defineres ut ifra eksisterende forskning og teori, før analysen. Denne oppgaven er et eksempel på en teoridrevet analyse, hvor rammeverket fra Wagner mfl. (2015) presentert i kapittel 3 danner det teoretiske grunnlaget for kodeverktøyet. Kategoriene genereres altså *deduktivt* (Rezat & Sträßer, 2015, s. 252). Fauskanger og Mosvold (2015, s. 83) bemerker at om man møter et datamateriale med ett gitt teoretisk rammeverk, så er er det enklere å finne bevis for å støtte opp under eksisterende teori enn å utfordre.

Framstilling av analysen

Analysen har blitt framstilt med utgangspunkt i Cohen mfl. (2011, s. 559-569). Forfatterne presenterer 11 steg for å framstille en innholdsanalyse. Først (1) defineres forskningsspørsmålene som skal adresseres av innholdsanalysen, som i denne analysen er:

- Hvordan kommer egenskapene i rammeverket fra Wagner mfl. (2015) til syne i læremidler for matematikk?

Videre (2) defineres populasjonen som datamaterialet er en del av. I denne oppgaven er populasjonen kapitler i læremidler for matematikk 1T hvor gjennomsnittlig og momentan vekstfart samt derivasjon introduseres. Deretter (3) bestemmes datautvalget, som består av læremidlene oppsummert i tabell 4.1. Konteksten for hvordan datamaterialet ble til (4) er gjennom å bli produsert som læremiddel i matematikk 1T med grunnlag i den nye læreplanen for matematikk 1T som diskutert tidligere (Utdanningsdirektoratet, 2019b). Analyseenhetene (5) består av avsnitt som forklarer konsepter innenfor derivasjon, eksempler, utforsk-aktiviteter, nøkkelsetninger og oppgaver som omhandler temaene gjennomsnittlig og momentan vekstfart samt derivasjon. Kodene (6) som benyttes i analysen er gjengitt i tabell 4.3 og baserer seg på rammeverket til Wagner mfl. (2015) i tabell 3.1. Hver kode angir en egenskap ved gjennomsnittlig og momentan vekstfart og den deriverte. Koding av datamateriale gjør det mulig for forskeren å identifisere liknende informasjon (Cohen mfl., 2011, s. 559). Kategoriene (7) som analysen baserer seg på er ulike kontekster for den deriverte, i ulike prosess-objekt-lag, også fra rammeverket til Wagner mfl. (2015). Selve operasjonaliseringen av rammeverket til Wagner mfl. (2015) presenteres i fortsettelsen. Steg (8) består av koding av datamaterialet, etterfulgt av selve dataanalysen i steg (9), hvor resultatene fra analysen genereres. Denne oppgaven er hovedsaklig kvalitativ, men med kvantitative sider. Resultatene består av en kvalitativ gjennomgang av datamaterialet, men med kvantitative framstillinger av oppgaveutvalget til hvert læremiddel. Videre (10) oppsummeres resultatene. I denne oppgaven diskuteres hovedfunnene i kapittel 5 opp mot teorien fra kapittel 1, 2 og 3. Gjennom dataanalysen beveger man seg fra en beskrivelse av datamaterialet, til å til slutt kunne dra spekulative slutninger basert på resultatene sett i lys av relevant teori (11). Her vil resultatene diskuteres i lys av teorien av tidligere kapitler for å besvare oppgavens problemstilling.

4.2 Datainnsamling

Om læremidlene

I oppgaven blir derivasjonskapitler fra tre ulike læremidler i matematikk analysert. Læremidlene som undersøkes er Mønster 1T (Kalvø mfl., 2020), Sinus 1T (Oldervoll mfl., 2020) og Matematikk 1T (Borge mfl., 2020). De aktuelle læremidlene er valgt på bakgrunn av at forlagene er de tre største på markedet for fysiske læremidler i den videregående skolen, med en markedsandel på 98% i 2022 (Forleggerforeningen, 2023, s. 63). I 2017 ble forrige generasjon av de tre forlagenes læremidler i matematikk (hhv. Sigma, Sinus og Matematikk) benyttet ved tilsammen 71% av norske videregående skoler (Difi, 2017, avsnitt 3.1.2.1). Digitale læringsressurser som NDLA og Campus Inkrement undersøkes ikke i denne studien. Utvalget av læremidler med utgiver og sideomfang er oppsummert i tabell 4.1. I fortsettelsen vil datamaterialet for enkelhets skyld omtales etter tittel på læremiddelet, det vil si henholdsvis Mønster 1T, Sinus 1T og Matematikk 1T.

Tabell 4.1: Oversikt over læremidlene som ble analysert

Nr.	Læremiddel	Forfatter	Utgiver	År	Sider
1.	Mønster 1T	Kalvø mfl.	Gyldendal	2020	278-317
2.	Sinus 1T	Oldervoll mfl.	Cappelen Damm	2020	230-267
3.	Matematikk 1T	Borge mfl.	Aschehoug	2020	201-218

Om derivasjonskapittelet i de ulike læremidlene

Læremidlene legger fram begrepet derivasjon på ulike måter. I tabell 4.2 er delkapitlene som ble analysert i denne studien oppsummert. Mønster 1T og Sinus 1T har egne kapitler kalt ”Vekstfart og derivasjon”, som handler om derivasjon. I Matematikk 1T inngår vekstfart og derivasjon som en del av kapittelet ”Funksjoner” i to delkapitler. For Mønster 1T og Sinus 1T analyseres henholdsvis 7 og 8 delkapitler, mens i Matematikk 1T blir kun to delkapitler analysert. Fra tabell 4.1 ser vi at sideomfanget dermed blir 40 sider for Mønster 1T, 38 sider for Sinus 1T og kun 18 sider for Matematikk 1T. Vi bemerker at Sinus 1T i stor grad baserer seg på læremiddelet med samme navn fra 2014 (Oldervoll mfl., 2014, 2020). Forskjellene mellom utgavene er oppsummert i Tillegg A. Læremidlene har også digitale ressurser som er utviklet i sammenheng med dem, men for at analysen skal ta for seg sammenlignbare mengder data, og for å avgrense problemstillingen, tar denne oppgaven kun for seg elevutgavene av de trykte læremidlene av hvert læreverk.

Tabell 4.2: Oversikt over delkapitler om den deriverte i læremidlene fra analysen

Mønster 1T	Sinus 1T	Matematikk 1T
5.1 Vekst og vekstfart	6.1 Gjennomsnittleg vekstfart	4G Vekstfart
5.2 Gjennomsnittleg vekstfart	6.2 Momentan vekstfart	4H Den deriverte
5.3 Momentan vekstfart	6.3 Grenseverdiar for ubestemte uttrykk	
5.4 Den deriverte - stigningstalsfunksjonen	6.4 Vekstfart som grenseverdi	
5.5 Numerisk derivasjon	6.5 Derivasjon	
5.6 Praktisk bruk av derivasjon	6.6 Nokre derivasjonsreglar	
5.7 Derivasjon av polynomfunksjonar	6.7 Funksjonsdrøfting	
	6.8 Numerisk likningsløysing	

4.3 Analyseverktøy og operasjonalisering

Tabell 4.3: Kodeverktøy basert på Wagner mfl. (2015)

Prosess-objekt-lag	Grafisk	Verbalt	Symbolsk	Numerisk	Fysisk
Forhold	**RG**	**RV**	**RS**	**RN**	**RF**
Grenseverdi	**GG**	**GV**	**GS**	**GN**	**GF**
Funksjon	**FG**	**FV**	**FS**	**FN**	**FF**

I analysen ble kodeverktøyet i tabell 4.3 benyttet. Verktøyet baserer seg på rammeverket til Wagner mfl. (2015) i tabell 3.1 som ble presentert i kapittel 3.3. En problemstilling i bruk av kodeverktøyet er hvordan man skal operasjonalisere de ulike matematiske forståelsene som inngår i rammeverket, da rammeverket er lagd med tanke på å beskrive elevers korrekte forståelser knyttet til den deriverte. Denne studien benytter rammeverket for å belyse hvordan disse forståelsene kommer til syne i læremiddelet som egenskaper ved den deriverte, gjennom oppgaver, eksempler, gjennomgang av nytt stoff og utforsk-aktiviteter. I tabell 4.4 følger en beskrivelse av hvordan de ulike egenskapene fra rammeverket har blitt operasjonalisert i analysen.

Tabell 4.4: Operasjonalisering av kodeverktøyet fra tabell 4.3

For den **grafiske** konteksten:	
RG	Grafisk fremstilling av endringen mellom to punkter på grafen til en funksjon.
GG	Grafisk fremstilling av tangenten gjennom et punkt på grafen til en funksjon.
FG	Grafisk fremstilling av tangenten gjennom ulike punkter på grafen til en funksjon eller grafen til den deriverte som funksjon.
For den **verbale** konteksten:	
RV	Skriftlig beskrivelse av ”gjennomsnittlig vekstfart”.
GV	Skriftlig beskrivelse av ”momentan vekstfart”, ”stigningstallet til tangenten” eller ”$f'(a)$”, hvor a er et tall.
FV	Skriftlig beskrivelse av ”den deriverte” eller ”$f'(x)$”, hvor x er en variabel.
For den **symbolske** konteksten:	
RS	Differensialkvotienten uten grenseverdi: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eller $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
GS	Differensialkvotienten med grenseverdi i ett punkt: $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$.
FS	Differensialkvotienten med grenseverdi som en funksjon: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
For den **numeriske** konteksten:	
RN	Numerisk utregning på formen $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ hvor avstanden mellom punktene er stor.
GN	Numerisk utregning på formen $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ hvor avstanden mellom punktene er liten.
FN	Gjentatte numeriske utregninger av momentan vekstfart over et område.
For den **fysiske** konteksten:	
RF	Beskrivelse av fysiske målinger med store endringer av den uavhengige variabelen.
GF	Beskrivelse av fysiske målinger med små endringer av den uavhengige variabelen.
FF	Beskrivelse av gjentatte fysiske målinger av momentan vekstfart over et område.

4.4 Kvaliteten på studien

I Krippendorff (2004, s. 18) sin definisjon av innholdsanalyse fra seksjon 4.1 ble det satt krav til at slutningene man drar fra resultatene av en innholdsanalyse skal være både *reproduserbare* og *gyldige*. Dette knytter seg til kravene for vitenskapelig forskning som dreier seg om *reliabilitet* og *validitet*.

Reliabilitet

I innholdsanalyse dreier *reliabilitet* seg om at forskningsteknikken skal være *pålitelig*. Dette innebærer at forskningsfunnene skal være mulige å replisere for en annen forsker under andre omstendigheter bare man benytter seg av samme teknikk på det samme datamateriale (Krippendorff, 2004, s. 18). Denne studien tar utgangspunkt i rammeverket til Wagner mfl. (2015). I seksjon 4.3 ble det diskutert hvordan rammeverket har blitt operasjonalisert til hvordan de matematiske forståelsene av den deriverte kommer til syne i læremidler for matematikk. Gjennom en systematisk avgrensning av hva som omfattes av hver av kodene fra kodeverktøyet i tabell 4.4, vil en annen forsker forhåpentligvis lande på noenlunde like resultater.

Validitet

Validitet handler om *gyldigheten* til resultatene av en studie. Dette innebærer at forskningsarbeidet er åpent for granskning og at studiens påstander kan opprettholdes i møte med uavhengige bevis (Krippendorff, 2004, s. 18). På bakgrunn av denne studien alene kan det ikke trekkes noen konklusjon om hvilket læremiddel som er det beste for elevens matematikklæring, og vi husker fra kapittel 1 (fig. 1.1) at læremiddelet heller ikke alene bestemmer kvaliteten på undervisningen i klasserommet. I denne studien undersøkes hvordan tre ulike læremidler for matematikk 1T legger til rette for god begrepsmessig forståelse knyttet til den deriverte. Dette innebærer at kun et utdrag av hvert læremiddel blir undersøkt og at kun én av de fem av måtene Nosrati og Wæge (2018) mener at dybdelæring kommer til syne i matematikk analyseres. I tillegg undersøkes kun læremidler for matematikk 1T, som vil si at vi heller ikke kan si sikkert hvilket læremiddel som i størst grad legger til rette for god begrepsmessig forståelse knyttet til den deriverte, da mye av læringen skjer i fagene S1 og R1, og de aktuelle læremidlene for 1T er en del av hver sin læremiddelserie. Analysen tar heller ikke for seg kvaliteten på oppgavene i bøkene, hvorvidt de legger opp til forbindelser mellom representasjoner eller om de er av imitativ eller kreativ karakter (Imitative vs. creative reasoning). Målet med oppgaven er å se på variasjonen av representasjonene av den deriverte som elevene eksponeres for på en kvalitativ måte, og ut ifra teorien argumentere for hvorvidt dette legger til rette for god begrepsmessig forståelse for den deriverte.

Kapittel 5

Resultater

I dette kapittelet presenteres resultatene fra analysen. Introduksjonen av begrepene gjennomsnittlig og momentan vekstfart og den deriverte i hvert av læremidlene blir gjennomgått. Resultatene presenteres delkapittel for delkapittel, hvor både gjennomgang, eksempler og oppgaver blir analysert med utgangspunkt i analyseverktøyet fra forrige kapittel. Kvantitative resultater fra oppgaveanalysen gis i slutten av gjennomgangen av hvert læremiddel. Resultatene diskuteres i lys av teorien fra tidligere kapitler og settes opp mot oppgavens problemstilling i neste kapittel.

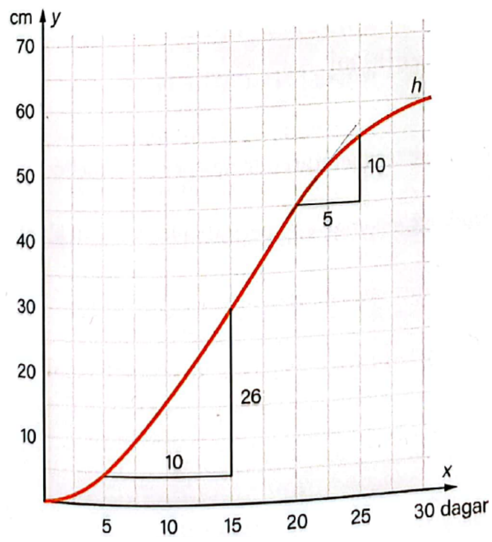
Alle kontekstene fra rammerverket til Wagner mfl. (2015) ble observert, med unntak av den fysiske konteksten, som i stor grad er knyttet til de andre naturvitenskapene og fysiske forsøk. Av denne grunn ble også denne konteksten utelatt fra resultatene fra oppgaveanalysen til hvert av læremidlene, da konteksten ikke ble observert for noen av oppgavene. De grå boksene i kapittelet gjengir ordrett partier fra læremidlene, og figurene i kapittelet er tatt direkte fra læremidlene.

5.1 Sinus 1T

6.1 Gjennomsnittlig vekstfart

Gjennomgangen starter med en diskusjon rundt vekstfart for lineære sammenhenger. Dette leder til definisjonen av gjennomsnittlig vekstfart for funksjoner som varierer. Figur 5.1 presenteres, hvor endring i henholdsvis x- og y-retning er notert mellom to og to punkter i figuren, uten sekanten tegnet inn.

Den gjennomsnittlige vekstfarten for figuren blir regnet ut numerisk, før følgende symbolske definisjon for gjennomsnittlig vekstfart presenteres sammen med en grafisk representasjon fra fig. 5.2, også uten sekanten tegnet inn:

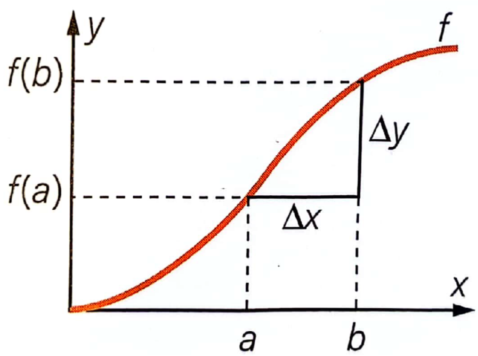


Figur 5.1: Gjennomsnittlig vekstfart fra eksempel i Sinus (Oldervoll mfl., 2020, s. 231)

Den gjennomsnittlige vekstfarten til funksjonen f frå $x = a$ til $x = b$ (i intervallet $[a, b]$), er

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Oldervoll mfl., 2020, s. 232)

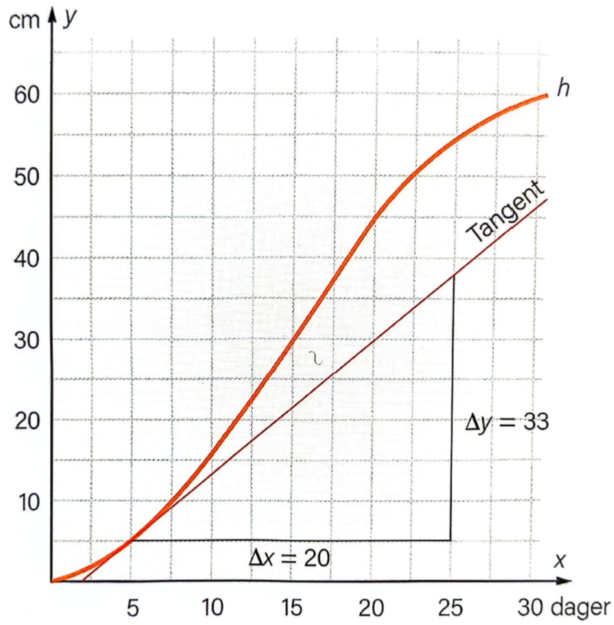


Figur 5.2: Gjennomsnittlig vekstfart fra definisjon i Sinus (Oldervoll mfl., 2020, s. 232)

Et eksempel viser hvordan man regner med gjennomsnittlig vekstfart, og noterer punktene på grafen (uten sekant). Det følges av liknende oppgaver.

6.2 Momentan vekstfart

Delkapittelet starter med et åpent spørsmål om problemet med å finne vekstfart i ett punkt, siden man for gjennomsnittlig vekstfart benytter funksjonsverdiene i endepunktene av et intervall. Momentan vekstfart introduseres ved å se på en plantes vekst og stille spørsmål om hvor fort



Figur 5.3: Momentan vekstfart i Sinus (Oldervoll mfl., 2020, s. 235)

den vokste etter nøyaktig 5 dager. Gjennom å tegne en tangent i punktet på grafen, kan man benytte formelen for å regne stigningstallet til tangenten for å finne den momentane vekstfarten. Tangenten blir beskrevet som en rett linje som er "nøyaktig like bratt som grafen" i punktet, og at den "må røre ved grafen i punktet" (Oldervoll mfl., 2020, s. 235). I fig. 5.3 er tangenten tegnet i punktet. Momentan vekstfart blir definert verbalt som følger:

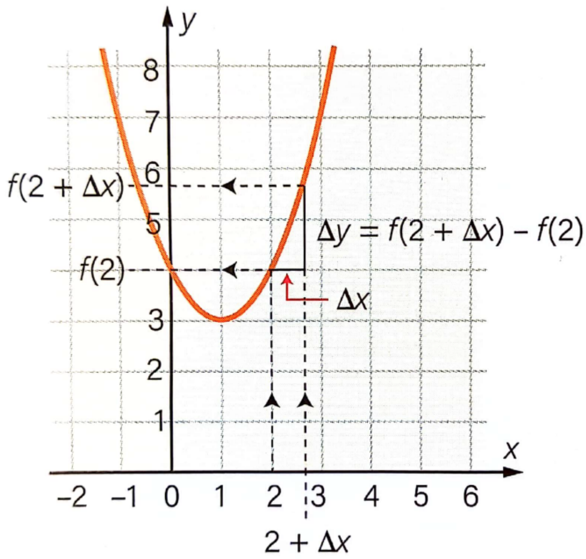
> Når vi skal finne vekstfarten til ein funksjon f for $x = a$ grafisk, teikner vi tangenten til grafen i punktet $(a, f(a))$. Vekstfarten er stigningstalet til tangenten. (Oldervoll mfl., 2020, s. 235)

Et eksempel viser hvordan man kan finne momentan vekstfart i et punkt ved å tegne inn tangenten ved hjelp av linjal, etterfulgt av oppgaver hvor man blant annet tegner inn tangenten flere steder i samme funksjon med linjal. Etter dette vises hvordan man kan tegne tangenten inn med digitale verktøy gitt samme oppgaver.

6.3 Grenseverdier for ubestemte uttrykk

Her introduseres begrepet grenseverdi, uten grafiske representasjoner. Ved å se på den diskontinuerlige funksjonen $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$, beskrives grenseverdien til uttrykket ved hjelp av gjentatte numeriske utregninger av punkter som ligger nærmere og nærmere 0. Fra dette introduseres den formelle symbolske $\lim_{x\to a}$-notasjonen. Deretter vises hvordan man kan regne grenseverdien til tilsvarende diskontinuerlige funksjoner ved et eksempel etterfulgt av oppgaver. Delkapittelet er uten referanser til derivasjon eller vekstfart.

6.4 Vekstfart som grenseverdi



Figur 5.4: Vekstfart som grenseverdi i Sinus (Oldervoll mfl., 2020, s. 240)

Delkapittelet går gjennom hvordan man kan finne den momentane vekstfarten i et punkt ved regning. Med utgangspunkt i en andregradsfunksjon og formelen for gjennomsnittlig vekstfart blir Δx nå ansett som et lite tall, og funksjonsverdiene regnes ut for endepunktene i intervallet $x = [2, 2+\Delta x]$. Figur 5.4 viser situasjonen, som er uten inntegnet sekant eller tangent. Over den neste siden regnes vekstfarten i $f(2)$ ut symbolsk, før det generaliseres til en definisjon for den deriverte *i et punkt*:

> Den deriverte til en funksjon f for $x = a$ er gitt ved
>
> $$f'(a) = \lim_{\Delta x \to a} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$
>
> $f'(a)$ gir vekstfarten når $x = a$ og stigningstalet til tangenten i punktet $(a, f(a))$. (Oldervoll mfl., 2020, s. 242)

Eksempelet som følger viser hvordan man kan regne ut momentan vekstfart ved hjelp av definisjonen som de påfølgende oppgavene også handler om.

6.5 Derivasjon

I delkapittelet introduseres begrepet *deriverbarhet*, og derivasjonsregelen for lineære funksjoner bevises ved hjelp av definisjonen til den deriverte. Et eksempel viser bruk av regelen etterfulgt av regelen for konstante funksjoner og noen oppgaver. Videre vises det ved definisjonen av den deriverte at $(x^2)' = 2x$, noe som leder til at følgende regneregel blir gitt:

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (Oldervoll mfl., 2020, s. 246)

Et eksempel viser bruk av regneregelen numerisk etterfulgt av oppgaver som handler om bruk av denne.

6.6 Nokre derivasjonsreglar

I delkapittelet blir flere regneregler for den deriverte introdusert:

$(k \cdot u(x)) = k \cdot u'(x)$

$(u(v) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$ (Oldervoll mfl., 2020, s. 248)

Eksempler viser bruk av disse regnereglene, etterfulgt av oppgaver. Til slutt vises hvordan man kan benytte digitale hjelpemidler for å løse oppgaver i derivasjon. En *utforsk*-aktivitet stiller et åpent spørsmål om sammenhengen mellom grafen til den deriverte av funksjonen og grafen til funksjonen.

6.7 Funksjonsdrøfting

Delkapittelet starter et åpent spørsmål om vekstfarten til en funksjon i topp- og bunnpunkt. Begrepene maksimal- og minimalpunkt, maksimal- og minimalverdi, voksende og minkende funksjon og monotoniegenskaper introduseres. En grafisk fremstilling viser tangenten gjennom flere punkter på en graf med en forklaring av stigningstallet i hvert av punktene. For en deriverbar funksjon f, gis følgende sammenheng:

Viss $f'(x) > 0$ i intervallet $\langle a, b \rangle$, så er f veksande i intervallet $\langle a, b \rangle$.

Viss $f'(x) < 0$ i intervallet $\langle a, b \rangle$, så er f minkande i intervallet $\langle a, b \rangle$.

(Oldervoll mfl., 2020, s. 254)

Stasjonære punkter og terrassepunkt diskuteres sammen med en grafisk framstilling av dette, før følgende verbale sammenheng gis for topp- og bunnpunkter:

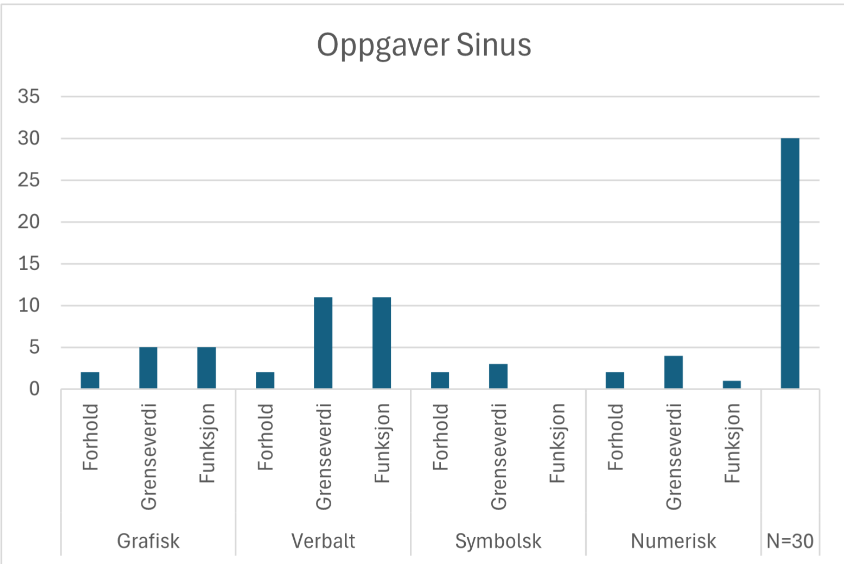
> Viss f er kontinuerlig og $f'(x)$ skiftar forteikn i eit punkt, er punktet eit toppunkt eller eit botnpunkt for f. (Oldervoll mfl., 2020, s. 255)

Eksempler med og uten digitale verktøy, med tydelig bruk av fortegnslinje og liknende oppgaver avrunder delkapittelet.

6.8 Numerisk likningsløysing

I dette delkapittelet vises hvordan newton-rhapson-metoden kan programmeres og brukes for å løse likninger numerisk. Den innebærer bruk av den deriverte, men er ikke direkte relatert til definisjonen av den deriverte og/eller gjennomsnittlig og momentan vekstfart, og dermed ikke passer inn i denne oppgavens rammeverk.

5.1.1 Oppgaver



Figur 5.5: Oversikt over analyserte oppgaver fra Sinus 1T

I oppgaveanalysen ble 30 oppgaver analysert. I fig. 5.5 er resultatene av analysen gjengitt. For de 30 oppgavene ble de 12 egenskapene fra den grafiske, verbale, symbolske og numeriske konteksten observert ved 48 av 360 mulige tilfeller, en dekning på 13%. Den deriverte som funksjon i den symbolske konteksten ble ikke observert. For to av oppgavene ble 5 av egenskapene observert, og under er oppgaver 6.11 og 6.42 gjengitt.

> **6.11**
>
> Stein I. Hage plantar ei solsikke. Høgda målt i centimeter x dagar etter at ho vart planta, er gitt ved $h(x) = 0{,}01 \cdot x^{2{,}7}$
>
> a) Teikn grafen til h digitalt
>
> b) Finn den gjennomsnittlege vekstfarten i periodane [0, 5], [15, 20] og [25, 30].
>
> c) Finn den gjennomsnittlege vekstfarten i periodane [10, 11], [10, 10,1] og [10, 10,01].
>
> d) Kva vil du seie at vekstfarten er etter nøyaktig 10 dagar?
>
> (Oldervoll mfl., 2020, s. 234)

I oppgave 6.11 ble gjennomsnittlig vekstfart observert for den grafiske, verbale, symbolske og numeriske konteksten. I tillegg ble grenseverdi observert i den numeriske konteksten.

> **6.42**
>
> La funksjonen f vere gitt ved $f(x) = x^2$
>
> a) Finn $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ og $f'(3)$ ved rekning.
>
> b) Kva trur du at $f'(a)$ er?
>
> (Oldervoll mfl., 2020, s. 244)

I oppgave 6.42 ble momentan vekstfart observert for den verbale, symbolske og numeriske konteksten. I tillegg ble den deriverte som funksjon observert for den verbale og numeriske konteksten.

5.2 Mønster 1T

Kapittelet starter med åpne spørsmål knyttet til en graf som viser både fart og akselerasjon i en graf uten enheter på y-aksen.

5.1 Vekst og vekstfart

En utforskende oppgave ber eleven undersøke grafisk hvordan tangenten varierer for en andregradsfunksjon, ved hjelp av GeoGebra. Dette følges av en diskusjon rundt løypeprofilen til en fjelltur, og hvordan gjennomsnittsstigningen varierer i løpet av turen. Deretter introduseres begrepet *vekstfart* ved hjelp av en grafisk fremstilling av en lineær funksjon. Stigningstallet forklares ved følgende definisjon:

VEKSTFART

Vekstfart er forholdet mellom endring i y-retning og endring i x-retning:

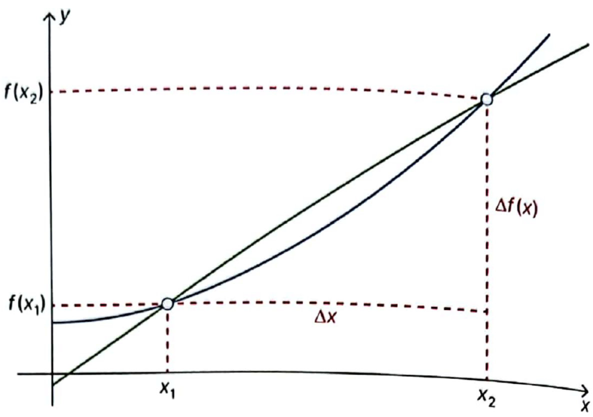
$$\text{Vekstfart} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Eit anna ord for vekstfart er stigningstal. (Kalvø mfl., 2020, s. 286)

Dette følges av et eksempel om hvordan man kan regne vekstfart for et badekar som fylles, og hvordan situasjonen kan beskrives ved en lineær sammenheng. Videre diskuteres forskjellen på lineær og eksponentiell vekst, etterfulgt av eksempel og oppgaver.

5.2 Gjennomsnittleg vekstfart

I delkapittelet blir gjennomsnittlig vekstfart introdusert. Først blir en utforskende aktivitet i GeoGebra presentert. Man blir bedt om å finne stigningstallet mellom to punkter på en graf, før man deretter bes om å flytte punktene nære hverandre og beskrive hva resultatet forteller. Gjennomsnittlig vekstfart blir videre beskrevet grafisk ved hjelp av fig. 5.6 og symbolsk gjennom følgende definisjon:



Figur 5.6: Gjennomsnittlig vekstfart i Mønster (Kalvø mfl., 2020, s. 286)

GJENNOMSNITTLIG VEKSTFART

Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[x_1, x_2]$ er

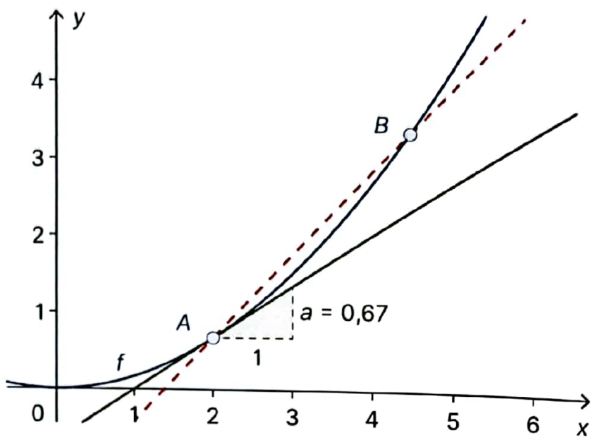
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(Kalvø mfl., 2020, s. 286)

I figuren ser vi at sekanten mellom punktene er tegnet inn. Dette følges av en forklaring av hvordan man kan regne gjennomsnittlig vekstfart også ved hjelp av tabellverdier, siden man i mange tilfeller ikke har et funksjonsuttrykk å forholde seg til. Et eksempel viser hvordan vi kan tegne grafen for en funksjon i GeoGebra og finne gjennomsnittlig vekstfart, etterfulgt av oppgaver.

5.3 Momentan vekstfart

En utforskende aktivitet undersøker først sammenhengen mellom stigningstallet til tangenten i et punkt på grafen til en funksjon og topp- og bunnpunkt. Videre tar et eksempel for seg hvordan man kan finne en tilnærmingsverdi eller numerisk løsning til vekstfarten i et punkt ved å ta gjennomsnittlig vekstfart mellom to punkter som ligger svært nærme hverandre. Eleven utfordres deretter til å reflektere rundt hvorfor dette intervallet ikke kan være lik null. Prosessen ved å se på to punkter som nærmer seg hverandre illustreres grafisk ved fig. 5.7.



Figur 5.7: Momentan vekstfart i Mønster (Kalvø mfl., 2020, s. 290)

Når B flyttes svært nært A, blir linja mellom de to ansett som tilnærmet lik tangenten gjennom punktet A. Stigningstallet til tangenten blir sett på som den momentane vekstfarten i punktet. Deretter følger følgende verbale definisjon av momentan vekstfart:

MOMENTAN VEKSTFART

Den momentane vekstfarten i eit punkt på ein graf er stigningstalet til tangenten i punktet.

(Kalvø mfl., 2020, s. 290)

Det påfølgende eksemplet viser hvordan man kan finne momentan vekstfart ved å tegne inn tangenten ved hjelp av linjal, og ved hjelp av digitale verktøy. En kort diskusjon av likningen for tangenten med eksempel etterfølges av oppgaver hvor man skal finne den momentane vekstfarten i ulike funksjoner grafisk.

5.4 Den deriverte - stigningstalsfunksjonen

Delkapittelet åpner med en utforskende aktivitet hvor man gjennom å finne stigningstallet til tangenten ved ulike x-verdier for en andregradsfunksjon, skal tegne grafen og prøve å finne en lineær sammenheng mellom ulike x-verdier og stigningstallet til funksjonen.

Den deriverte blir deretter introdusert som en forkortet måte å beskrive ”stigningstallet til tangenten i et punkt på en graf”, med følgende verbale definisjon (Kalvø mfl., 2020, s. 294):

Den deriverte av ein funksjon f er ein funksjon som gir oss den momentane vekstfarten i eit vilkårleg punkt på grafen til f. Vi skriv den deriverte funksjonen $f'(x)$ og les ”f derivert av x”.

(Kalvø mfl., 2020, s. 294)

Et eksempel viser hvordan man kan finne et funksjonsuttrykk for den deriverte av en andregradsfunksjon ved å skrive opp ulike verdier for stigningstallet til tangenten i en tabell og finne den lineære funksjonen $f'(x)$. Ved hjelp av funksjonsuttrykket finnes deretter likningen til tangenten gjennom et punkt på grafen til $f(x)$.

En utforskende oppgave ber eleven koble sammen fire og fire ruter i en tabell, hvor det er oppgitt fire ulike grafer for henholdsvis $f(x)$ og $f'(x)$, med tilhørende funksjonsuttrykk for $f(x)$ og $f'(x)$. Videre blir fortegnet til den deriverte diskutert, med henvisning til både monotoniegenskaper og stasjonære punkt. Dette oppsummeres slik:

> I intervall der $f'(x)$ er større enn null, veks funksjonen, og grafen stig. I intervall der $f'(x)$ er mindre enn null, minkar funksjonen og grafen fell. Når $f'(x)$ er null, har vi et stasjonært punkt. (Kalvø mfl., 2020, s. 298)

Et eksempel viser hvordan man kan drøfte monotoniegenskapene til en funksjon ved hjelp av den deriverte og fortegnsskjema, som oppsummeres på følgende måte med en refleksjon rundt andre stasjonære punkt etterfulgt kapitteloppgaver om derivering av lineære og kvadratiske funksjoner:

> **FINNE EKSTREMALPUNKT VED DERIVASJON**
>
> Grafen til ein funksjon $f(x)$ har eit ekstremalpunkt i $(a, f(a))$ dersom den deriverte skifter fortegn i punktet.
>
> Når $f'(x)$ går frå positiv til negativ verdi, har vi eit toppunkt.
>
> Når $f'(x)$ går frå negativ til positiv verdi, har vi eit bunnpunkt.
>
> (Kalvø mfl., 2020, s. 300)

5.5 Numerisk derivasjon

Delkapittelet fokuserer på hvordan man kan finne numeriske tilnærmingsverdier til den deriverte ved hjelp av likningen for gjennomsnittlig vekstfart over små intervaller gjennom programmering i Python. Gjennomgangen gir følgende eksempel på hvordan man kan regne tilnærmingsverdi for den deriverte av en funksjon i punktet $x \approx 5$:

```python
def f(x):
   return x**2+3*x+6
derivert = (f(5.01)-f(5))/.01
print (f'Den deriverte er {derivert:.3f}.')
```

(Kalvø mfl., 2020, s. 302)

Videre gis kodestykker som viser hvordan man kan lage verditabeller for den deriverte, etterfulgt av en kode som tegner grafen til den deriverte ved hjelp av de numeriske løsningene. Til slutt vises hvordan man kan løse likninger med den deriverte ved hjelp av *while*-løkker, etterfulgt av oppgaver.

5.6 Praktisk bruk av derivasjon

Delkapittelet tar for seg hvordan man kan benytte derivasjon i problemløsning. Ved hjelp av digitale verktøy kan man finne den deriverte for mer kompliserte funksjoner enn tidligere i kapittelet. I og med at kapittelet handler om problemløsning, og den deriverte regnes ut med digitale verktøy, havner innholdet utenfor rammeverkets omfang.

5.7 Derivasjon av polynomfunksjonar

Siste delkapittel begynner med en utforskende aktivitet hvor man skal finne regelen for derivering av potensfunksjoner. Denne regelen presenteres deretter:

> **DERIVASJONSREGEL**
>
> Når $f(x) = x^n$, er $f'(x) = nx^{n-1}$. (Kalvø mfl., 2020, s. 313)

Etter dette følger regler for at ulike ledd kan deriveres hver for seg, og konstanter kan settes utenfor:

> $(u(v) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$ $\quad$ $(a \cdot v(x)) = a \cdot v'(x)$
>
> (Kalvø mfl., 2020, s. 313)

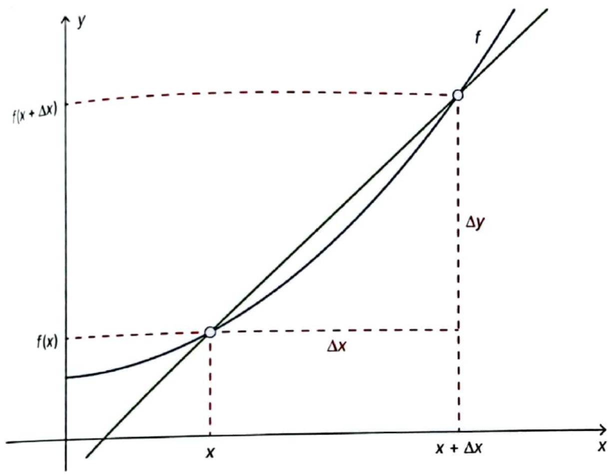
To eksempler viser hvordan man kan benytte seg av reglene for å derivere polynomer. Deretter presenteres definisjonen av den deriverte sammen med fig. 5.8:

> **DEFINISJON AV DEN DERIVERTE**
>
> Når Δx går mot null, går $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ mot $f'(x)$. (Kalvø mfl., 2020, s. 315)

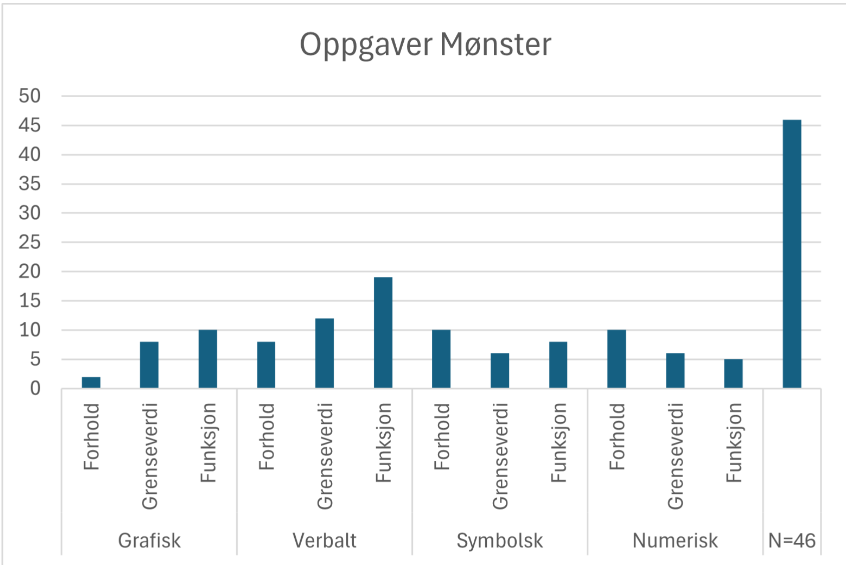
Et eksempel på hvordan man kan bruke definisjonen for å finne uttrykk for den deriverte presenteres før oppgaver avslutter delkapittelet.

5.2.1 Oppgaver

I oppgaveanalysen ble 46 oppgaver analysert. Resultatene er gjengitt i fig. 5.9. For de 46 oppgavene ble de 12 egenskapene fra den grafiske, verbale, symbolske og numeriske konteksten observert ved 105 av 552 mulige tilfeller, en dekning på 19%. For en av oppgavene ble 6 av egenskapene observert, og oppgave 5.29 er gjengitt under.



Figur 5.8: Definisjon av den deriverte (Kalvø mfl., 2020, s. 315)



Figur 5.9: Oversikt over analyserte oppgaver fra Mønster 1T

5.29

Vi har gitt funksjonen $f(x) = 10 \cdot \frac{1}{2^x}$.

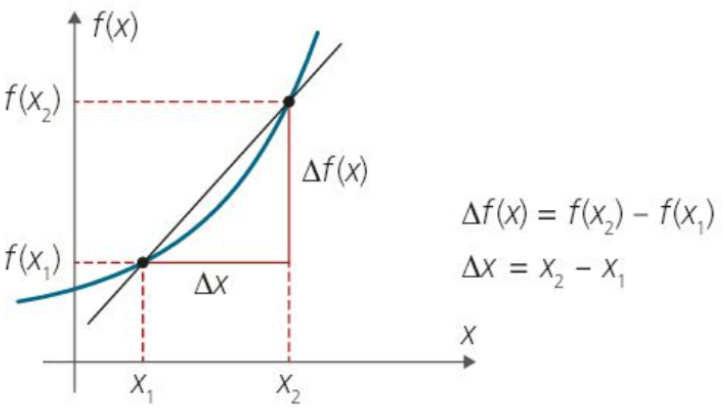
Lag eit program som teiknar grafen til $f(x)$ og til den deriverte $f'(x)$ når $x \in [-1, 9]$. (Kalvø mfl., 2020, s. 305)

I oppgave 5.29 ble grenseverdilaget observert for den symbolske og den numeriske konteksten gjennom programkoden oppgaven krever. I tillegg ble den deriverte som funksjon observert i den grafiske, verbale, symbolske og numeriske konteksten.

5.3 Matematikk 1T

4G Vekstfart

Til å begynne med blir den symbolske fremstillingen av stigningstallet til rette linjer repetert fra tidligere kapitler og vekstfarten til lineære funksjoner blir definert som lik stigningstallet til linjen. Videre spør forfatterne hva vekstfarten til en ikke-lineær funksjon vil være. I og med at man ikke kan gi et entydig svar, foreslår forfatterne å finne hva ”vekstfarten er i gjennomsnitt” over et bestemt intervall (Borge mfl., 2020, s. 201). Videre blir gjennomsnittlig vekstfart beskrevet grafisk i fig. 5.10, med en verbal forklaring av at vi trekker en rett linje mellom to punkter på grafen til f.

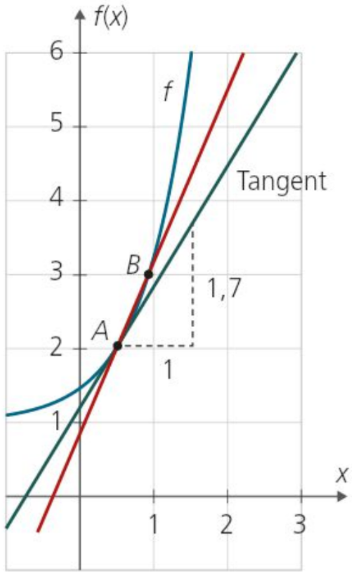


Figur 5.10: Gjennomsnittlig vekstfart i Matematikk (Borge mfl., 2020, s. 201)

Endringen i argumentverdi og funksjonsverdi blir forklart, og deretter blir gjennomsnittlig vekstfart for f i et intervall forklart som stigningstallet for linja mellom mellom to punkter på grafen. Etter dette følger en symbolsk definisjon av gjennomsnittlig vekstfart:

> Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[x_1, x_2]$ er
>
> $$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$
>
> Enheten for vekstfarten er enheten for $f(x)$ dividert med enheten for x.
>
> (Borge mfl., 2020, s. 201)

Et eksempel viser hvordan vi kan regne gjennomsnittlig vekstfart numerisk i et intervall når funksjonen er gitt. I tillegg vises hvordan man kan finne gjennomsnittlig vekstfart ved hjelp av graftegner. Videre følger oppgaver knyttet til å finne gjennomsnittlig vekstfart grafisk og symbolsk.



Figur 5.11: Momentan vekstfart i Matematikk (Borge mfl., 2020, s. 204)

I fortsettelsen tar delkapittelet for seg momentan vekstfart. I forbindelse med å finne momentan vekstfart skriver forfatterne: "Vi kan da ikke bruke definisjonen på gjennomsnittlig vekstfart, for den gjelder bare for et intervall" (Borge mfl., 2020, s. 204). Gjennom fig. 5.11 beskriver forfatterne hvordan linja mellom to punkter A og B på grafen vil nærme seg tangenten gjennom punktet A om man lar B nærme seg A. Dette leder til en verbal definisjon av momentan vekstfart:

> Med momentan vekstfart i et punkt på en graf mener vi stigningstallet for tangenten i dette punktet. (Borge mfl., 2020, s. 204)

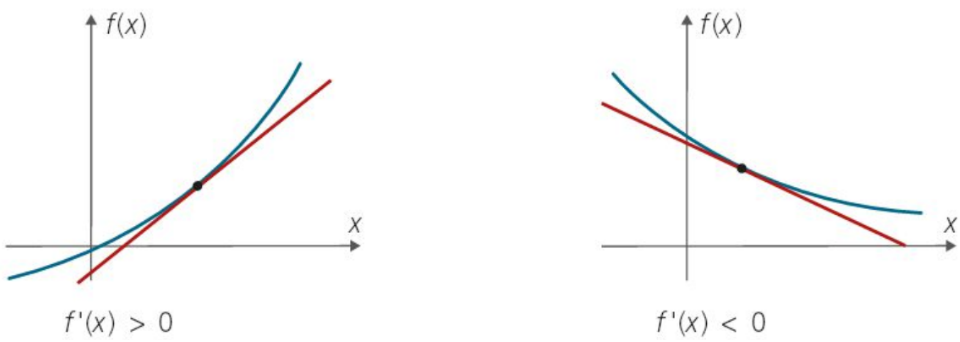
Resten av kapittelet er oppgaver knyttet til momentan vekstfart og mer utfordrende oppgaver knyttet til både gjennomsnittlig og momentan vekstfart.

4H Den deriverte

I delkapittelet blir den deriverte som funksjon introdusert. Først presenteres en utforskende oppgave hvor man blir bedt om å avgjøre momentan vekstfart i ulike punkter på en grafisk fremstilling av en funksjon med inntegnede tangenter. Forfatterne presiserer at "den momentane vekstfarten er forskjellig ulike steder på grafen, og at til én bestemt verdi av x er det bare én bestemt verdi for den momentane vekstfarten som passer" (Borge mfl., 2020, s. 208). Med dette konkluderes det med at momentan vekstfart er en funksjon av x. Videre blir en tenkt funksjon g introdusert, som gir stigningstallet til f for ulike verdier av x. Gjennom å se på figuren fra starten av kapittelet, blir dette motivert grafisk. Videre blir ordet "derivert" introdusert sammen med notasjonen $f'(x)$, gjennom en forklaring av hvordan g er *utledet* fra f. Dette leder til en verbal definisjon av den deriverte:

> Fra en funksjon f kan vi utlede en funksjon f', den deriverte av f. Funksjonen f' er slik at funksjonsverdien $f'(x)$ er lik stigningstallet til tangenten i punktet $(x, f(x))$ på grafen til f. (Borge mfl., 2020, s. 209)

Videre følger et eksempel hvor man finner et funksjonsuttrykk for den deriverte ved hjelp av en grafisk framstilling av en funksjon med tangenter inntegnet i mange punkter. Ved å skrive ned verdier for x, $f(x)$ og $f'(x)$ anslås et uttrykk for $f'(x)$. Dette bekreftes med CAS. Videre følger oppgaver som både handler om å bestemme momentan vekstfart i punkter og den deriverte funksjonen. Deretter gis derivasjonsregelen for lineære funksjoner etterfulgt av flere oppgaver.



Figur 5.12: Sammenheng mellom fortegn og grafens endring i Matematikk (Borge mfl., 2020, s. 211)

I fortsettelsen fokuserer forfatterne på fortegnet til den deriverte. Figur 5.12 viser funksjoner med inntegnede tangenter som er henholdvis positive og negative og følges av følgende boks:

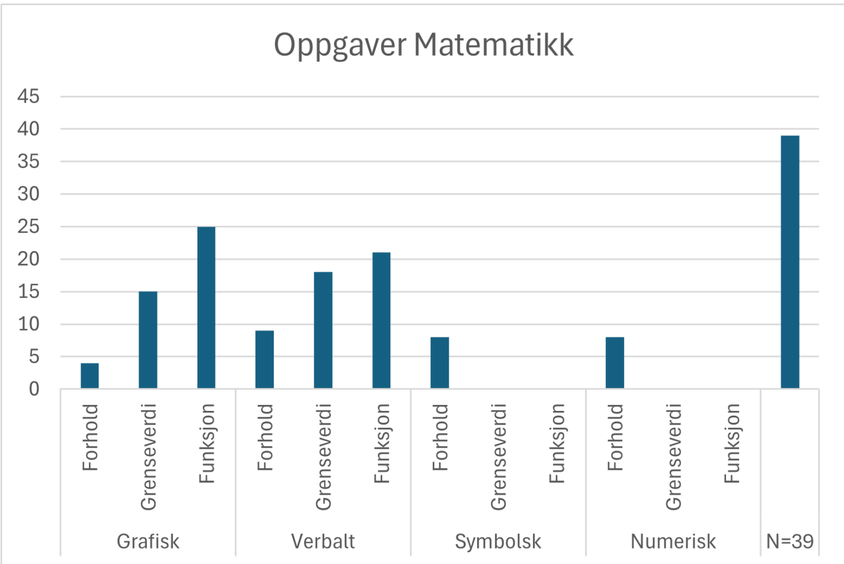
> Når grafen stiger mot høyre, er den deriverte positiv.
> Når grafen synker mot høyre, er den deriverte negativ.
> (Borge mfl., 2020, s. 211)

Et eksempel viser sammenhengen mellom fortegn til den deriverte, og topp- og bunnpunkt, som gir følgende sammenheng:

I topp- og bunnpunkter, som ikke samtidig er i randpunkter, er den deriverte lik null, og den deriverte skifter fortegn i punktet. (Borge mfl., 2020, s. 211)

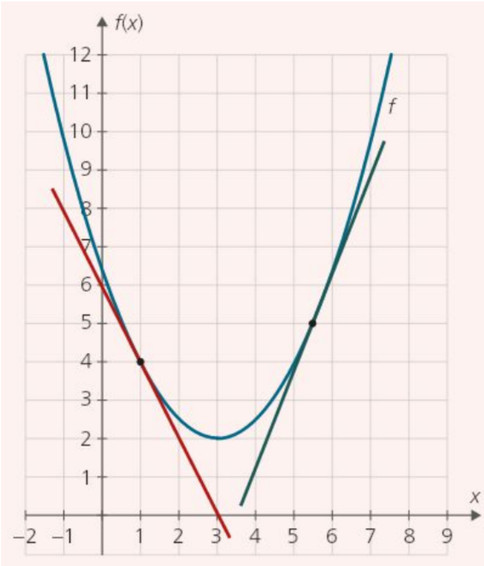
Videre defineres begreper som skjærings-, topp- og bunnpunkt, null-, maksimal-, minimal- og ekstremalpunkt og maksimal-, minimal- og ekstremalverdi. En oppgave om disse begrepen følger. I ”Fra graf til fortegnslinje for den deriverte” blir fortegnslinja introdusert, og oppgavene som følger handler om å lage fortegnslinja til den deriverte ut ifra grafen til den opprinnelige funksjonen. Videre lager man fortegnslinje også med utgangspunkt i grafen til den deriverte, og oppgavene varierer mellom grafiske fremstillinger av f og f'. I ”Fra fortegnslinje til graf” tegnes mulige grafer til funksjoner med utgangspunkt i fortegnsskjemaet til den deriverte. I oppgavene blir eleven blant annet bedt om å knytte sammen riktig graf for funksjon og graf for derivert.

5.3.1 Oppgaver



Figur 5.13: Oversikt over analyserte oppgaver fra Matematikk 1T

I oppgaveanalysen ble 39 oppgaver analysert. Resultatene er gjengitt i fig. 5.13. For de 39 oppgavene ble de 12 egenskapene fra den grafiske, verbale, symbolske og numeriske konteksten observert ved 108 av 468 mulige tilfeller, en dekning på 23%. Momentan vekstfart som grenseverdi og den deriverte som funksjon ble ikke observert for hverken den symbolske eller numeriske konteksten. For oppgave 4.102 ble 7 av egenskapene observert. Vedlagt oppgaven er fig. 5.14.



Figur 5.14: Figur tilhørende oppgave 4.102 i Matematikk 1T (Borge mfl., 2020, s. 207)

4.102

På figuren har vi tegnet grafen til en funksjon f og tangenter i punktene $(1, f(1))$ og $(5,5, f(5,5))$.

a) Finn gjennomsnittlig vekstfart i intervallene $[1,3]$ og $[3,5]$.

b) Finn stigningstallet for tangenten i punktet $(1, f(1))$. Hvor stor er den momentane vekstfarten når $x = 1$?

c) Hvor stor er den momentane vekstfarten når $x = 5,5$?

d) Hvor stor er den momentane vekstfarten når $x = 3$?

(Borge mfl., 2020, s. 207)

I oppgave 4.102 ble forholdslaget observert i alle fire kontekstene. I tillegg ble grenseverdilaget observert i den grafiske og verbale konteksten, og den deriverte observert i den grafiske konteksten.

Kapittel 6

Diskusjon

I dette kapittelet blir resultatene fra analysen satt opp mot teorien som har blitt gjennomgått tidligere i oppgaven for å besvare oppgavens problemstilling:

Hvilke didaktiske tilnærminger bruker et utvalg læremidler i matematikk 1T for introduksjonen av den deriverte, og hvordan legger de til rette for god begrepsmessig forståelse?

Først blir resultatene diskutert ut ifra hvilke av egenskapene fra Wagner mfl. (2015) sitt rammeverk som kom til syne i analysen og hvilke av Greefrath mfl. (2016) sine ideer ved den deriverte som vektlegges i hvert av læremidlene for å belyse første del av problemstillingen. Læremidlene diskuteres hver for seg, og spesielt interessante funn ved læremidlene blir trukket fram. En eksamensoppgave gitt i matematikk 1T høsten 2023 blir presentert, og diskutert opp mot læremidlene og hvordan den knytter seg til elevenes begrepsmessige forståelse. Videre blir funnene satt opp mot andre del av oppgavens problemstilling, og læremidlene kommenteres i lys av Hähkiöniemi (2006) sin modell for introduksjonen av den deriverte med hensyn på hvordan de legger til rette for utvikling av god begrepsmessig forståelse.

6.1 Generelt om resultatene og ideer ved den deriverte

6.1.1 Sinus 1T

Sinus 1T introduserer derivasjon med en vektlegging av symbolske manipulasjoner og prosedyrer gjennom oppfordring til bruk av regler i kapitteloppgavene. kapittelet har relativt få grafiske fremstillinger slik de kommer til syne i rammeverket til Wagner mfl. (2015) i tabell 3.1. Dette gjelder spesielt i kapittelets oppgaveutvalg, hvor de andre læremidlene og spesielt Matematikk 1T inneholder mange oppgaver som krever at man kobler den deriverte som funksjon og den opprinnelige funksjonen. Sinus er også læremiddelet hvor færrest av egenskapene fra rammeverket ble observert i oppgaveutvalget (fig. 5.5), og den deriverte som funksjon ble ikke observert i den symbolske konteksten for noen av oppgaven, tross i at utledningen av definisjonen er forholdsvis symboltung. I resultatdelen er oppgave 6.11 og 6.42 gjengitt. Oppgave 6.11 kobler gjennomsnittlig og momentan vekstfart i den numeriske konteksten gjennom deloppgave c), hvor intervallet man beregner gjennomsnittlig vekstfart over gjøres mindre og mindre. Oppgave 6.42 kobler sammen forståelsen av momentan vekstfart i et punkt og den deriverte som funksjon over hele funksjonens domene.

Av ideene til Greefrath mfl. (2016) kommer ideene om momentan vekstfart og tangentens helning til syne i kapittelet. Lik som de andre læremidlene begynner gjennomgangen med visuelle representasjoner av gjennomsnittlig og momentan vekstfart, hvor gjennomsnittlig vekstfart beskrives som kvotienten mellom endringen i funksjonsverdi og argumentverdi. Momentan vekstfart blir forklart som stigningstallet til tangenten gjennom et punkt på grafen. Sinus 1T kobler dog ikke den grafiske sammenhengen mellom gjennomsnittlig og momentan vekstfart, slik de andre læremidlene gjør gjennom å tegne sekanten som gradvis vil nærme seg tangenten når avstanden mellom punktene blir liten. Dette gjør ideen om den deriverte som en grenseprosess utydelig i dette tilfellet. Definisjonen av den deriverte som presenteres i delkapittelet "6.4 Vekstfart som grenseverdi" likner def. 3.4 fra Månsson og Nordbeck (2011) gjennom at den deriverte blir definert i ett punkt heller enn som en funksjon.

6.1.2 Mønster 1T

Mønster 1T har basert på resultatene en mer balansert tilnærming til derivasjon enn Sinus 1T, med en tydeligere vektlegging av den grafiske sammenhengen mellom gjennomsnittlig og momentan vekstfart. Symbolene fra definisjonen av gjennomsnittlig vekstfart blir benyttet i fig. 5.6. Figuren har store likhetstrekk med fig. 5.8 som presenteres sammen med den formelle definisjonen av den deriverte, helt i slutten av kapittelet. Til forskjell fra Sinus, blir den deriverte i likhet med def. 3.3 definert som en funksjon av x og ikke i et punkt a.

Av ideene til Greefrath mfl. (2016) kommer tre av de til syne i kapittelet. Ideene om momentan vekstfart og tangentens helning kommer til syne gjennom grafiske representasjoner, regneeksempler og utforskende oppgaver hvor man bes om å koble riktig funksjonsuttrykk, uttrykk for den deriverte og grafiske representasjoner av disse. I tillegg kommer ideen om den deriverte gjennom lokal linearisering til syne. I Mønster blir et helt delkapittel satt av til å tilnærme seg den deriverte numerisk gjennom programmering. I kapittel 3 ble programmering av den deriverte i undervisning fra Kristensen og Kirfel (2022) presentert, og gjennom *diskretisering* kan man regne tilnærmingsverdier av den deriverte som tar utgangspunkt i funksjonen som bestående av små linjestykker om man ser på grafen i stor forstørrelse. På dette viset kommer den lokale lineære egenskapen til den deriverte fra Greefrath mfl. (2016) til syne. Mønster 1T vektlegger også hvordan man kan regne ut den deriverte basert på tabellverdier. Dette kan sees i lys av det overnevnte om diskretisering, men demonstrerer også hvordan den deriverte benyttes i kontekster som knytter seg til den virkelige verden. Utenfor matematikkens egen verden eksisterer ikke gitte funksjonsuttrykk med analytiske løsninger, men man baserer tilnærmingene sine på diskrete tallverdier som man deretter kan modellere analytisk.

Selv om den formelle definisjonen av den deriverte først presenteres mot slutten av kapittelet, er oppgaveutvalget Mønster 1T mer balansert enn Sinus 1T med hensyn på hvordan egenskapene fra rammeverket til Wagner mfl. (2015) kommer til syne i fig. 5.9. Mange av oppgavene dreier seg rundt egenskaper til den deriverte som funksjon, selv om dette ikke uttales eksplisitt. Delkapittelet som dreier seg om numerisk derivasjon ved hjelp av den deriverte inneholder blant annet oppgave 5.29 som ble presentert i resultatene over. Denne kobler momentan vekstfart og den deriverte som funksjon i både den symbolske og den numeriske konteksten, i tillegg til å belyse den deriverte som funksjon i den grafiske konteksten.

6.1.3 Matematikk 1T

Matematikk 1T skiller seg fra de andre læremidlene med hvordan den legger fram derivasjon. Introduksjonen av gjennomsnittlig og momentan vekstfart likner i stor grad den som blir gitt i Mønster, med en tydelig kobling mellom ideene om gjennomsnittlig vekstfart som sekanten gjennom to punkter og momentan vekstfart som tangenten i ett punkt. Videre fokuserer læremiddelet på å gi eleven en grundig og intuitiv forståelse av den deriverte som funksjon. Dette skjer gjennom grafiske representasjoner av funksjonen og dens monotoniegenskaper, og gjennom grafiske framstillinger av grafen til den deriverte og hvordan denne knytter seg til grafen til den opprinnelige funksjonen. Av ideene til Greefrath mfl. (2016) er det ideen om tangentens helning som står fram som læremiddelets fokus. Hverken definisjonen til den deriverte eller momentan vekstfart gis, og utenom reglen for å finne momentan vekstfart for lineære funksjoner blir ingen regneregler gitt. Dette blir diskutert mer senere.

Av fig. 5.13 tydeliggjøres det at Matematikk 1T fokuserer på grafiske og verbale tilnærminger til den deriverte, sett ut ifra rammeverket til Greefrath mfl. (2016). De symbolske og numeriske egenskapene ved den deriverte kommer bare til syne i forbindelse med delkapittelet om gjennomsnittlig vekstfart. Likvel er Matematikk 1T det læremiddelet hvor egenskapene fra rammeverket i størst grad ble observert i oppgaveutvalget. Dette kan tyde på at selv om oppgavene dreier seg rundt færre av kontekstene vi kjenner for den deriverte, legger det større vekt på forståelse av grunnideene ved den deriverte, heller enn bruk av den deriverte i matematiske beregninger. I den vedlagte oppgaven ble hele 7 av karakteristikkene fra rammeverket observert. Oppgave 4.102 kobler både gjennomsnittlig vekstfart, momentan vekstfart og den deriverte som funksjon i den grafiske konteksten, i tillegg til at alle fire kontekstene for gjennomsnittlig vekstfart kom til syne.

6.2 Tolkning av læreplanen

Ved eksamen i matematikk 1T høsten 2023 ble følgende oppgave gitt:

> **Oppgave 3**
>
> Funksjonen f er gitt ved
>
> $$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 4$$
>
> Bestem likningen for tangenten i grafen til f i punktet $(1, f(1))$.
>
> (Utdanningsdirektoratet, 2023, s. 15)

Som nevnt i forrige avsnitt blir hverken definisjonen av den deriverte eller regelen for derivasjon av potensfunksjoner gjennomgått i læremiddelet Matematikk 1T. På bakgrunn av dette kan man se for seg at oppgaven over vil være utfordrende for elever med utgangspunkt i dette læremiddelet. En grafisk tilnærming gjennom utregning av tabellverdier for så å tegne funksjonen og tangenten gjennom punktet kan gi et svar, men det krever ferdigheter knyttet til utseende og oppførselen til et tredjegradspolynom.

I tabell 2.3 og tabell 2.4 så vi at høringsutkastet til læreplanen for matematikk 1T skilte seg fra gjeldende læreplan gjennom at den inneholdt en presisering om at man skulle kunne gjøre rede for den deriverte *som funksjon*. Hva denne presiseringen innebærer kan diskuteres, men man kan se for seg at dette fort vil innebære det å kunne finne funksjonsuttrykk og utføre ulike regneoperasjoner med det, som er slik Sinus og Mønster tilsynelatende har tolket kompetansemålet. Tidligere har det blitt diskutert hvordan derivasjonskapittelet i Sinus 1T har slående likheter med kapittelet fra læremiddelet ved samme navn som ble utgitt i forbindelse med den gamle læreplanen i faget. Uklarheter rundt hvordan målet skal tolkes kan være noe av grunnen til at forskjellene mellom utgavene er såpass fåtallige.

Sett i lys av teorien fra Rezat og Sträßer (2015) nevnt i kapittel 1.3, kan det virke som at det er utydelig for de ulike læremiddelforfatterne hva den *tiltenkte læreplanen* fra offentlig hold omfatter, noe som fører til at den *potensielt implementerte læreplan* fra de ulike læremidlene får store forskjeller. Avhengig av den enkelte lærer kan dette få konsekvenser for den *faktisk implementerte læreplanen* som avhenger av hva som skjer i hvert enkelt klasserom. I og med at læremiddelforfatterne har tolket læreplanen ulikt, blir det desto tydeligere at læreren, som Svingen og Gilje (2018) skriver, er den viktigste enkeltfaktoren for elevens læring. En mulig konsekvens av denne uklarheten er imidlertid at læreren lar eksamen legge føringer for undervisningen sin, og i og med at oppgaven over kan sies å teste prosedyrekunnskap ved bruk av regneregler heller enn begrepsmessig forståelse, er det viktig at læreren sørger for at elevene får muligheten til å utvikle en god begrepsmessig forståelse gjennom sin undervisning på andre måter.

Oppgaven over legger opp til bruk av regelen for å finne den deriverte av potensfunksjoner, som blir gitt i både Sinus 1T og Mønster 1T. Ingen av læremidlene utleder imidlertid regelen formelt. I begge læremidlene blir regelen motivert kvantitativt ved å vise at det gjelder for x^n for enkelte verdier av n. En grunn til dette kan være plassmangel, eller på grunn av algebraiske utfordringer. I kapittel 3 viste vi hvordan Kirfel (2011) foreslår at man kan utlede derivasjonsregler ved hjelp av en multiplikativ tilnærming til definisjonen av den deriverte, og at det kan lette utledningene. Dog tar ingen av læremidlene en slik multiplikativ tilnærming til den deriverte, da reglene ikke utledes eksplisitt.

Ved eksamen i matematikk 1T avholdt 23. mai 2024 ble oppgaven under gitt ved del 1. Oppgaven inneholder en programkode som beskriver gjennomsnittlig vekstfart. Programkoden minner om programkoden fra både Kristensen og Kirfel (2022) fra seksjon 3.3.2 og Mønster 1T på side 49, men ettersom den ikke antyder grenseprosessen som knytter gjennomsnittlig vekstfart til momentan vekstfart og den deriverte, burde oppgaven være mulig å løse for elever uavhengig av hvilket læremiddel som har blitt benyttet i undervisningen av temaet.

Oppgave 4 (2 poeng)

Ada har laget programmet nedenfor.

```
def f(x):
    return x ** 2 - 3 * x + 7

a = 0
b = 5

v = (f(b) - f(a))/(b - a)

print(v)
```

Hvilken verdi skrives ut når Ada kjører programmet, og hva forteller denne verdien?

(Utdanningsdirektoratet, 2024, s. 14)

6.3 Tilrettelegging for begrepsmessig forståelse

Videre gjenstår å besvare andre del av oppgavens problemstilling:

Hvilke didaktiske tilnærminger bruker et utvalg læremidler i matematikk 1T for introduksjonen av den deriverte, og hvordan legger de til rette for god begrepsmessig forståelse?

I følge Hähkiöniemi (2006) sin foreslåtte læringssti til den deriverte (fig. 2.2), bør man bygge derivasjonsbegrepet gjennom å bli kjent med den *iboende* grenseverdien til den deriverte. Gjennom ulike visuelle og symbolske representasjoner hvor grenseverdien gjør seg gjeldende, kan man bygge sterkere begrepsmessig forståelse for den deriverte.

Vi har sett at læremidlene fra denne studien har vektlagt ulike ideer ved den deriverte gjennom hvordan temaet legges frem. Sinus 1T vektlegger en symbolsk tilnærming, hvor Greefrath mfl. (2016) sine ideer om momentan vekstfart og tangentens helning kommer til syne. For tangentens helning kommer grenseverdien til syne gjennom at en sekant nærmer seg tangenten i ett punkt. Dette tydeliggjøres ikke i Sinus 1T, og av denne grunn er det i stor grad ideen om momentan vekstfart som synliggjør den iboende grenseverdien hos den deriverte gjennom symbolske manipulasjoner. Mønster 1T har en mer balansert tilnærming til den deriverte, og av Greefrath mfl. (2016) sine ideer synliggjøres ideene om momentan vekstfart og tangentens helning, samt ideen om lokal linearitet. Grenseverdien i ideen om tangentens helning tydeliggjøres av en sekant som går mot tangenten i punktet, og i kapittelet om programmering av den deriverte synliggjøres lokal linearitet gjennom diskretisering av funksjonsuttrykket. Matematikk 1T vektlegger den grafiske forståelsen av den deriverte som funksjon knyttet opp mot den opprinnelige funksjonen. Av Greefrath mfl. (2016) sine fire ideer er det kun ideen om tangentens helning som blir tydelig i gjennomgangen, som følge av at hverken momentan vekstfart eller selve definisjonen til den deriverte motiveres symbolsk. Likevel er dette læremiddelet hvor oppgavene i størst grad dreier seg om forståelse av selve den deriverte, slik de kommer til syne i rammeverket til Wagner mfl. (2015).

Den fysiske konteksten fra rammeverket til Wagner mfl. (2015) ble ikke observert i noen av læremidlene. Denne konteksten knytter seg til den deriverte slik den blir forstått i naturvitenskapene, gjennom fysiske målinger og forsøk. Fysiske representasjoner kan likevel være med å bygge elevenes forståelse av den deriverte som momentan vekstfart, ved at man for eksempel kan måle tid og avstand, og ved å la tidsintervallet gå mot null, finne øyeblikkelig fart, som diskutert i seksjon 3.2.3. Ingen av læremidlene legger opp til praktiske tilnærminger til den deriverte gjennom fysiske målinger.

Oppgaven finner med dette at Mønster 1T er læremiddelet som i størst grad lar eleven blir kjent med den iboende grenseverdien til den deriverte, gjennom å utsette eleven for flere representasjoner av grenseverdien. Dette skjer både gjennom ideene om den deriverte som momentan vekstfart, tangentens helning og den derivertes lokalt lineære egenskaper.

Kapittel 7

Oppsummering

I denne oppgaven har følgende problemstilling blitt undersøkt:

Hvilke didaktiske tilnærminger bruker et utvalg læremidler i matematikk 1T for introduksjonen av den deriverte, og hvordan legger de til rette for god begrepsmessig forståelse?

Tre læremidler for matematikk 1T har blitt undersøkt i denne studien: Sinus 1T, Mønster 1T og Matematikk 1T. I Sinus 1T ble det observert en vektlegging av symbolske tilnærminger til den deriverte, med utgangspunkt i ideene om momentan vekstfart og tangentens helning, selv om grenseprosessen som kobler sekanten i gjennomsnittlig vekstfart og tangenten for momentan vekstfart ikke blir tydeliggjort i læremiddelet. Mønster 1T har en mer balansert tilnærming, med både grafiske og symbolske tilnærminger, og i tillegg til å ta utgangspunkt i ideen om momentan vekstfart og tangentens helning, viser læremiddelet også hvordan man kan regne den deriverte ved hjelp av tabellverdier eller programmering gjennom diskretisering. Dette belyser ideen om den deriverte som lokalt lineær. Matematikk 1T vektlegger en grafisk tilnærming gjennom ideen om tangentens helning, hvor sammenhengen mellom grafen til funksjonen og grafen til den deriverte undersøkes grundig, med mange oppgaver avsatt til å undersøkes grafenes monotoniegenskaper. Ideen om momentan vekstfart vektlegges dog ikke. Læremiddelet diskuterer ikke hvordan man deriverer potensfunksjoner, noe som kreves for nylig gitte eksamensoppgaver for faget matematikk 1T. Tross dette var Matematikk 1T det læremiddelet hvor egenskapene fra rammeverket til Wagner mfl. (2015) i størst grad ble observert for oppgavene i læremiddelet.

Med utgangspunkt i andre del av oppgavens problemstilling og Hähkiöniemi (2006) sin modell for hvordan elever kan bygge god begrepsmessig forståelse for den deriverte i fig. 2.2, kan det virke som at Mønster 1T er boken som i størst grad legger til rette for god begrepsmessig forståelse knyttet til den deriverte, da den belyser tre av de grunnleggende ideene rundt den deriverte fra Greefrath mfl. (2016) i fig. 3.4 gjennom momentan vekstfart, tangentens helning og lokal linearitet.

7.1 Videre forskning

Studien har undersøkt hvordan introduksjonen av den deriverte i læremidler for matematikk 1T legger til rette for god begrepsmessig forståelse av den deriverte som grenseverdi. Begrepsmessig forståelse er ifølge Nosrati og Wæge (2018) en av fem komponenter i den matematiske læringsprosessen som sier noe om hva dybdelæring i matematikk kan være. For å danne et mer fullstendig og nyansert bilde av hvordan de ulike læremidlene legger til rette for god dybdelæring av den deriverte, kunne man undersøkt læremidlene i lys av de andre komponentene også.

Hvert av læremidlene er også en del av en serie bøker som følger eleven gjennom den videregående opplæringen. I og med at læremiddelforfatterne tilsynelatende har tolket læreplanen noe ulikt for matematikk 1T, hadde det vært interessant å undersøke flere av bøkene fra hvert læremiddel. Som diskutert, så tar den deriverte størst plass i læreplanen for fagene R1 og S1. Det kan derfor hende at man vil finne andre resultater for hvordan de ulike læremidlene tilrettelegger for god begrepsmessig forståelse om man ser på hvordan tematikken belyses i fortsettelsen av den matematiske læringsprosessen. Derivasjon er også bare ett av flere temaer som legger grunnlaget for analysen man møter i høyere utdanning. Ved å se på andre temaer, som introduksjonen av integraler i matematikk R2, kunne man sett på hvordan de ulike læremidlene legger grunnlaget for den videre matematikklæringen i høyere utdanning.

Som diskutert i kapittel 1, er det heller ikke læremiddelet som alene legger føringer for hvordan matematikken presenteres i klasserommet. Her er læreren den viktigste enkeltfaktoren, og gjennom eksempelvis klasseromsobservasjon og lærerintervju, kunne man dannet et tydeligere bildet av hvordan den deriverte faktisk introduseres i norske klasserom.

Referanser

Adams, R. A., & Essex, C. (2022). *Calculus: A Complete Course*. Pearson.

Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H., Heir, O., Moe, H., Norderhaug, T. T., & Vie, S. M. (2020). *Matematikk 1T*. Aschehoug.

Cohen, L., Morrison, K., & Manion, L. (2011). Coding and content analysis. I *Research Methods in Education* (s. 559–573). Routledge.

Difi. (2017). *Kartlegging av digital læremidler og læringsplattformer i utdanningssektoren*. Utarbeidet for Direktoratet for forvaltning og IKT. https://www.uutilsynet.no/kartlegginger/kartlegging-av-digital-laeremidler-og-laeringsplattformer-i-utdanningssektoren/943

Fauskanger, J., & Mosvold, R. (2015). En metodisk studie av innholdsanalyse - med analyser av matematikklæreres undervisningskunnskap som eksempel. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 79–96.

Forleggerforeningen. (2023). *Bokmarkedet 2022 - Forleggerforeningens bransjestatistikk*. Den norske forleggerforening. https://forleggerforeningen.no/wp-content/uploads/2023/06/Bransjestatitikk-2022-endelig.pdf

Forskrift til opplæringslova. (2010). https://lovdata.no/forskrift/2006-06-23-724/%C2%A717-1

Gouvêa, F. Q. (2020). Reviews: [Anmeldelse av Calculus Reordered, av David M. Bressoud]. *The American Mathematical Monthly*, *127*(5), 470–477.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). 4. Differenzialrechnung. I *Didaktik der Analysis* (s. 137–216). Springer Spektrum.

Herheim, R. (2023). On the origin, characteristics, and usefulness of instrumental and relational understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 389–404.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (s. 1–27). Routledge.

Hähkiöniemi, M. (2006). *The Role of Representations in Learning the Derivative* [Doktoravhandling, University of Jyväskylä].

Kalvø, T., Opdahl, J. C., Skrindo, K., & Weider, O. (2020). *Mønster 1T*. Gyldendal.

Kirfel, C. (2011). Derivasjon uten omveier. *Tangenten*, *1*, 20–23.

Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis - An Introduction to Its Methodology*. Sage Publications.

Kristensen, T. E., & Kirfel, C. (2022). 5. Numeriske metoder. I *Programmering i matematikkfaget* (s. 77–107). Cappelen Damm Akademisk.

Land, J. H., & Meyer, R. (2005). Threshold concepts and troublesome knowledge (2): Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning. *Higher Education*, 373–388.

Månsson, J., & Nordbeck, P. (2011). *Endimensionell analys*. Studentlitteratur.

Månsson, J., & Nordbeck, P. (2013). *Flerdimensionell analys*. Studentlitteratur.

NCTM. (2014). *Principles to Action: Ensuring Mathematical Success for All*. National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring*. Undervisningsministeriet.

Nosrati, M., & Wæge, K. (2018). Dybdelæring i matematikk. I *Realfagsløyper*. Naturfagsenteret; Matematikksenteret. https://realfagsloyper.no/videregaende/djupnelaering/modul-1-kjenneteikn-pa-djupnelaering

NOU. (2014). *7. Elevenes læring i fremtidens skole - Et kunnskapsgrunnlag*. Kunnskapsdepartementet. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O., & Hals, S. (2014). *Sinus 1T*. Cappelen Damm.

Oldervoll, T., Svorstøl, O., Vestergaard, B., Gustafsson, E., Jacobsen, R. B., Osnes, E. R., & Pedersen, T. A. (2020). *Sinus 1T*. Cappelen Damm.

Petterson, K., & Brandell, G. (2018). Å utvikle elevers begrepsforståelse. I *Realfagsløyper*. Naturfagsenteret; Matematikksenteret. https://realfagsloyper.no/videregaende/djupnelaering/modul-2-utvikle-matematiske-omgrep

Rezat, S., & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM Mathematics Education*, 641–651.

Rezat, S., & Sträßer, R. (2015). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 247–266.

Røkkum, H. (2019). *Ikke-standard analyse i undervisningsperspektiv* [Masteroppgave, Universitetet i Oslo].

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *22*(1), 1–36.

Skott, J., Skott, C. K., Jess, K., & Hansen, H. C. (2018). *Matematik for lærerstuderende Delta 2.0 Fagdidaktikk 1.-10. klasse*. Samfundslitteratur.

Svingen, O., & Gilje, O. (2018). *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk*. Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/kunnskapsgrunnlag-for-kvalitetskriterium-for-laremiddel-i-matematikk/

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 5–24.

Thompson, S. P., & Gardner, M. (1998). On Different Degrees Of Smallness. I *Calculus Made Easy* (s. 41–44). St Martins Press.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. https://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2019a). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn*. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2019b). *Læreplan i matematikk fellesfag vg1 teoretisk (matematikk T)*. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT09-01.pdf?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2019c). *Læreplan i matematikk fellesfag Vg1 teoretisk (matematikk T) (Høringsutkast)*. https://hoering.udir.no/Hoering/v2/343?notatId=692

Utdanningsdirektoratet. (2019d). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R)*. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT03-02.pdf?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2019e). *Læreplan i matematikk for samfunnsfag (matematikk S)*. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT04-02.pdf?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2019f). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/?lang=nob

Utdanningsdirektoratet. (2023). *Eksamen Matematikk 1T Del 1 og 2 [20.11.2023]*. https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html

Utdanningsdirektoratet. (2024). *Eksamen Matematikk 1T Del 1 og 2 [23.05.2024]*. https://sokeresultat.udir.no/eksamensoppgaver.html

Wagner, J. F., Roundy, D., Dray, T., Monogue, C., & Weber, E. (2015). An Extended Theoretical Framework for the Concept of the Derivative. *Proceedings of the Eighteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 919–924.

Tillegg A

Forskjeller Sinus 1T (2014) og Sinus 1T (2020)

Forskjeller i mål i begynnelsen:

Sinus 1T (2014):

- beregne nullpunkter, ekstremalpunkter, skjæringspunkter og gjennomsnittlig vekstfart, finne tilnærmede verdier for momentan vekstfart og gi noen praktiske tolkninger av disse aspektene.
- gjøre greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utlede en derivasjonsregel for polynomfunksjoner, og bruke denne regelen til å drøfte funksjoner.

Sinus 1T (2020):

- formulere og løyse problem ved hjelp av algoritmisk tenkning, ulike problemløysingsstrategiar, digitale verktøy og programmering.
- modellere situasjonar knytte til ulike tema, drøfte, presentere og forklare resultata og argumentere for om modellane er gyldige.
- bruke gjennomsnittleg og momentan vekstfart i konkrete eksempel og gjøre greie for den deriverte.

#.1 Gjennomsnittlig vekstfart

- s.1 figur 2, ny utgave viser vekstfarten på to steder
- s.2 øverst "Grafen viser at planeten da har ..."
- s.2 gjennomsnittlig vekstfart definert ved a og b istedet for x1 og x2
- s.3 eksempel "Endring i tid" istedetfor "Timetallet var" + fjerna "timetallet var" under
- 8.10 b) periodene uttrykt ved ord i stedet for klammeparenteser
- 8.11 d) egen oppgave

#.2 Momentan vekstfart

- utforsk lagt til: nesten identisk med gamle utgave, kun to spørsmål lagt til

- endring i forklaringen av hvordan finne tangent i geogebra
- oppgave 23 og 24 slått sammen til en

#.3 Grenseverdier for ubestemte uttrykk

- side 2 utropstegnet flyttet opp bittelitt

#.4 Vekstfart som grenseverdi

- utforsk ny
- formulering s.241
- eksempel s. 243. bruk av ettpunktsformelen er fjernet

#.5 Derivasjon

- utforsk lagt til
- figur fjernet s. 245 med omformulering
- 50b) og 50d) endret
- utforsk s. 246
- eksempel s. 247. bruk av ettpunktsformelen er fjernet

#.6 Noen derivasjonsregler

- fjernet opplysning om at k er en konstant
- eksempel s. 249. bruk av ettpunktsformelen er fjernet
- eksempel s. 251, oppg b) fjernet (hvorfor ikke .65b) fjernet?)
- s. 252 endring i forklaringen av hvordan løse i geogebra
- utforsk s 253

#.7 Funksjonsdrøfting

- utforsk
- s. 254 fjernet del om definisjonsmengde og kontinuitet
- endret fra x1 og x2 til a og b i diskusjon om monotoniegenskaper
- fjernet opplysning om at dette stajsonære punktet er bunnpunkt. Lagt inn begrepet ”terassepunkt”
- eksempel 256 forenklet noe
- s.257 geogebra gjennomgang endret
- oppg 6.74 er ny
- eksempel s.260, andregradsformel ute, fortegnslinje
- oppg 74 og 75 slått sammen
- utforsk

#.8 Optimering (+ Mer om optimering) (Sinus 2014) / Numerisk likningsløysing (Sinus 2020)

- kapitler byttet ut