Oppfatningar og misoppfatningar i sannsyn

Ein mixed methods-studie av elevar på vidaregåande trinn – yrkesfagleg retning

Tone Handegård

Masteroppgåve i matematikkdidaktikk - MAUMAT 650

Matematisk institutt

UNIVERSITETET I BERGEN

10. januar 2016

Samandrag

Denne masteroppgåva handlar om korleis elevar på vidaregåande trinn – yrkesfagleg retning forstår omgrep innafor sannsyn. Føremålet har vore å avdekkja kva oppfatningar og misoppfatningar elevane har og kva løysingsstrategiar elevane nyttar når dei svarar på spørsmåla. Vidare har eg undersøkt i kva grad funna mine samsvarar med tidlegare funn som er referert i litteraturen i tillegg til å sjå nærare på korrelasjon mellom karakter og resultat.

I studien er det nytta mixed methods for datainnsamlinga. Datainnsamlinga vart gjennomført i januar og februar 2015. Det vart først utført ei kvantitativ spørjeundersøking der 93 elevar deltok. Om lag 2/3 av desse går på vg1 i ulike yrkesfaglege retningar medan om lag 1/3 går på påbygg til generell studiekompetanse. Etterpå vart det utført ein kvalitativ studie der 9 elevar vart intervjua. Ingen av elevane hadde gjennomgått opplæring i sannsyn rett før datainnsamlinga. Spørsmåla byggjer i stor grad på spørsmål frå tidlegare undersøkingar slik at dei til ei viss grad kan seiast å vera kvalitetssikra.

Alle misoppfatningane som eg ynskte å testa, synte seg å vera til stades i varierande grad hjå elevane. Dei talmessige resultata frå undersøkinga mi viser elles at det i stor grad er samanfallande med det forskarar har funne tidlegare, trass i at undersøkingane har stor variasjon i alder, skulebakgrunn og verdsdeler.

Elevane nytta ulike løysingsstrategiar som vi og finn att i litteraturen og tidlegare forsking. Dette gjeld særleg bruk utfallstilnærming og 50-50 tilnærming. Gjennom intervjua fekk eg og avdekka at elevane gjerne stolar på intuisjonen sin og det er først når dei må tenkja i gjennom kva som står i spørsmålet, at dei kan gje eit normativt riktig svar. Det er særleg innafor sannsyn at bruk av intuisjon leier oss inn i ei misoppfatning. Vi nyttar som oftast det vi har lært tidlegare.

Forord

Det første møtet mitt med sannsyn var ved ingeniørstudiet ved Høgskolesenteret i Rogaland. Samanlikna med dei andre matematikkfaga ved studiet, var dette eit lite fag i omfang. Eg hugsar ikkje mange detaljar kring faget, men eg hugsar eg synest det var annleis og «rart». Då eg seinare møtte det att i DELTA-studiet ved NTNU, kjendes det meir forståeleg.

Etter nokre år innafor ymse ingeniør-arbeid, ynskte eg å endra yrkesretning og gjekk såleis over til læraryrket i 2007. Hausten 2011 starta eg på deltidsstudiet «Erfaringsbasert master med fordjuping i matematikk» ved UiB for å få meir fagleg djupn. Det har vore nokre krevjande år, men samstundes noko eg ikkje ville ha vore forutan. Studiet har vore særs nyttig i min eigen undervisningspraksis og ikkje minst har eg fått større forståing kvifor elevane svarar slik dei gjer når vi held på med sannsyn.

Det er mange som fortener ein takk for at eg har kome i hamn med masteroppgåva. Eg vil difor takka følgjande:

- Runar Ile har vore ein framifrå rettleiar som har gjeve meg gode og konstruktive innspel undervegs i prosessen.
- Medstudentar, særleg kull-11: Jorunn, Jill, Elin, Torbjørn og Tom. Vi har oppmuntra og støtta kvarandre undervegs i studiet.
- Arbeidsgjevar som har lagt til rette slik at eg har kome i mål med studiet.
- Elevane som stilte opp i spørjeundersøkinga og intervjua.
- Familien min: Rannveig Elisa, Lars Andreas og Nils for at dei har vore tålmodige når eg har gjort «leksene» mine.

Voss, 10.01.16

Innhald

Figurar og tabellar

1 Innleiing

1.1 Bakgrunn

I følgje Statistisk Sentralbyrå sine utrekningar fram mot år 2030, vil det vera mangel på arbeidskraft innafor yrkesutdanningar som elektrofag, mekaniske fag, bygg- og anleggsfag og ein del handverksfag (Kunnskapsdepartementet, 2015). Det norske arbeidslivet er i omstilling der innhaldet i mange yrke endrar seg i takt med m.a. utviklinga innafor IKT. For å møta krav til ein framtidig arbeidsmarknad og i samfunnslivet elles, må elevane ha ein brei kompetanse. I tillegg til den faglege kompetansen som det einskilde yrket krev, vil og deltaking i arbeidslivet stilla større krav til m.a. matematiske kompetanse (Mason, Nathan & Rosso, 2015).

I yrkeslivet vert det m.a. nytta IKT-baserte verkty som byggjer på modellar om usikkerheit. Innafor mange yrkesretningar som oljeindustri, elektrofag og bygg- og anlegg, må ein kunne utarbeida og/eller vurdera risikoanalysar og sikker jobb analyse (SJA) der ein må fastsetja sannsynet for ulike hendingar. Vurderingar i høve usikkerheit og risiko finn vi og innafor økonomi og finans, medisin, logistikk og ingeniørfag. Samstundes må vi i det daglege handtera og forstå informasjonen rund oss og ta avgjersler på grunnlag av dette. Kunnskap om t.d. statistikk og sannsyn der variasjon, tilfeldigheit og usikkerheit er sentrale emne, er såleis viktig. Det å kunne vurdera og utføra utrekningar innfor sannsyn og statistikk, er difor ikkje berre eit skulefag, men er ein del av både yrkeslivet og samfunnet elles.

I OECD sin rapport *Skills Strategy Diagnostic Report Norway 2014* vert det hevda at Noreg sitt konkurranseføretrinn i framtida, vil bli meir avhengig av innbyggjarane sitt kunnskapsnivå samanlikna med naturressursar (OECD, 2014). OECD har lista opp 12 utfordringar som Noreg har på vegen mot eit meir kunnskapsbasert samfunn. Ei av desse er å sikra grunnleggjande ferdigheiter[1] for alle. Ein del vaksne i Noreg har svake grunnleggjande ferdigheiter, dvs. på nivå 1 eller under i lesing eller rekning sjølv om gruppa som heilskap ligg over gjennomsnittet i OECD. I tillegg gjer unge vaksne (16-24 år) det svakare enn i mange andre land (ibid.). Det vert og vist til at delen av lågtskårande elevar i PISA-undersøkingane innafor matematikk, har auka frå 15,8 % i 2009 til 19,6 % i 2012.

[1] Mi omsetjing av foundation skills

Noreg har sidan 2000 delteke i PISA-undersøkingane[2] som del av OECD-samarbeidet. Generelt skårar Noreg i underkant av gjennomsnitt i OECD, sjølv om delen av elevar på det lågaste prestasjonsnivå har auka noko som nemnd ovanfor. I PISA nyttar ein omgrepet *Mathematical literacy* for skildra elevane sin kompetanse i matematikk (ibid). Det vert vidare vist til at omgrepet må forståast breitt og omfattar m.a. det å kunne gjera matematiske resonnement, bruka matematiske omgrep og prosedyrar og kunne nytta matematikk for deltaking i samfunnet og som grunnlag for avgjersler (ibid). I rapporten *State of the Nation* utgjeve av The British Academy, er det gjeve ei liknande forståing av omgrepet matematisk kompetanse (quantitative skills), men med større vekt på statistisk forståing og ferdigheit:

«The ability to reason using numbers and quantitative values: understanding the world requires development of hypotheses and interpretation of numbers and data to make observations, analysis and forecasts. A diverse range of skills relevant to specific disciplinary, applied or research contexts are needed to understand and interpret numbers and data. This includes an understanding of mathematics, probability and statistics, models, hypothesis construction and testing, and the challenges of the sound measurement of empirical variation so that generalisable conclusions may be drawn. Among other things, the possession of these skills allow for: confidence in the manipulation and interpretation of numbers and data; an understanding of possibilities and limits of measurement; and understanding the role of evidence in testing and modifying models» (Mason et al., 2015).

Det er fire ulike hovudemne innafor matematikk i PISA-undersøkinga: endring og samanheng, rom og form, tal og mål, og usikkerheit (Kjærnsli & Olsen, 2013). Innafor usikkerheit finn vi igjen to hovudtema: identifikasjon og skildring av ulike former for data og analyse og vurdering av variasjon og usikkerheit. Noreg ligg like under snittet i OECD på dei tre første område medan vi ligg over snittet i emnet usikkerheit. Så relativt sett, er norske elevar sterkast i å løysa oppgåver innafor statistikk og sannsyn (ibid.).

Studiar har vist at born utviklar oppfatningar kring sannsyn og sjanse før dei møter fagstoffet på skulen (O'Connell, 1999). Av erfaring ser ein og at elevane viser ei viss forståing av omgrepa i sannsyn når ein arbeider med fagstoffet, men dette er tilsynelatande borte hjå mange etter ei kort stund. Fleire studiar har vist at sannsyn til ei viss grad er i ei særstilling

[2] Programme for International Student Assessment

med omsyn til feilslutningar og misoppfatningar hjå elevar på ulike trinn (Aga, 2008; Amir & Williams, 1995; Batanero, Serrano & Garfield, 1996; Fischbein & Gazit, 1984; Fischbein, Nello & Marino, 1991; Fischbein & Schnarch, 1997; Green, 1982; Jun, 2000; Kennis, 2006; Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier & Lipson, 1993; Lecoutre, Durand & Cordier, 1990; Madsen, 1995; Reading & Shaughnessy, 2004; Rubel, 2002; Shaughnessy & Ciancetta, 2003; Thorsen, 2009).

Det grunnleggjande innafor sannsyn er reint matematisk ikkje så vanskeleg, men omgrepa i sannsyn kjem lett i konflikt med dei intuitive ideane våre som kan vera svært urokkelege (Kahneman, 2012; Moore, 1990). Garfield & Ahlgren (1988) viser til at det kan synast som elevar på alle nivå, har vanskar med å utvikla ein korrekt intuisjon kring sannsyn. Dei meiner det er minst tre grunnar til dette. Mange studentar har vanskar med rasjonale tal og proporsjonale resonnement. Utrekning og vurdering i sannsyn krev at vi m.a. forstår brøk og prosent. Vidare kan det synast som sannsyn er i motsetnad til elevane sine erfaringar, og korleis dei oppfattar verda ikring seg. Den tredje grunnen dei nemner er at mange elevar har utvikla ein aversjon mot sannsyn, fordi det har blitt undervist på ein svært formell og abstrakt måte.

Det kan vera ymse årsaker til at elevane har vanskar med å læra sannsyn i ein undervisningssituasjon. Breiteig (2002) viser til 3 grunnar for at sannsyn er ei didaktisk utfordring i skulen. For det første manglar emnet ein operasjonell basis. Det er vanskeleg å etterprøva eit utfall i sannsyn i motsetnad til t.d. talrekning der ein kan konkretisera og så få stadfesta resultatet med ein gong. Sidan vi begynner matematikkopplæringa i skulen med reknereglar og multiplikasjon, forventar elevane at det dei møter på seinare og er deterministisk. Variasjon kan kjennast både uventa og lite komfortabelt (Moore, 1990). Den andre grunnen Breiteig nemner er at emnet tidleg gjev mot-intuitive resultat. Til dømes kan ein person som får 6 kroner etter kvarandre ved myntkast, intuitivt vurdera det som mest sannsynleg at det vert mynt ved neste kast (ibid.). Den siste grunnen er at emnet byggjer på ein kvalitativt «ny» tenkjemåte. I følgje Breiteig kan elevar si tenking i matematikk delast inn i logisk tenking, årsakstenking og sannsynstenking. I logisk tenking erstattar ein ei utsegn med ei ny utsegn heilt til ein har det enklaste uttrykket som t.d. ved løysing av ei likning. Ved årsakstenking resonnerer eleven ved å peika på årsaken til resultatet. Dette vert gjerne nytta i naturfag og samfunnsfag. I sannsynstenking må ein m.a. sjå på resultatet i høve til ein heilskap, dvs. kva er resultatrommet i høve til utfallsrommet. Breiteig viser og til at elevar har ein tendens til å velja rekkjefølgja logisk – årsak-verknad – sannsynstenking når dei skal gjera ei vurdering.

Som nemnd innleiingsvis, føreset framtidig arbeidsliv at arbeidstakarane har kunnskapar i sjølve faget sitt, men og ein brei matematisk kompetanse. Mange yrkesfag krev og at ein har kunnskapar kring usikkerheit og risikovurdering. I undersøkinga mi har eg såleis sett nærare på korleis elevar i yrkesfaglege retning forstår sannsyn og tilhøyrande omgrep.

1.2 Sannsyn og undervisning i norsk skule

Sannsyn var ikkje eit tema då eg sjølv gjekk på vidaregåande skule så det første møtet med denne delen av matematikkfaget, var ved ingeniørstudiet. Sjølv ved dette studiet var det eit lite fag samanlikna med opplæring i algebra og matematisk analyse. Sannsyn er no kome inn som ein del av læreplanen til matematikk fellesfag (figur 1). Som vi ser av figuren, kjem sannsyn inn som ein del av hovudområdet statistikk og sannsyn på årssteg 5. – 7.

Årssteg	**Hovudområde**					
1.–4.	Tal	Geometri	Måling	Statistikk		
5.–7.	Tal og algebra	Geometri	Måling	Statistikk og sannsyn (bm.: sannsynlighet)		
8.–10.	Tal og algebra	Geometri	Måling	Statistikk, sannsyn og kombinatorikk	Funksjonar	
1T	Tal og algebra	Geometri		Sannsyn	Funksjonar	
1P	Tal og algebra	Geometri		Sannsyn	Funksjonar	Økonomi
1T-Y	Tal og algebra	Geometri			Funksjonar	
1P-Y	Tal og algebra	Geometri				Økonomi

Figur 1. Oversikt over hovudområde i matematikk. Kjelde: www.udir.no

Øyvind Leland har i masteroppgåva si m.a. teke for seg statistikk og sannsyn i den norske skulen i nyare tid (Leland, 2011). Sannsynsrekning kom inn i grunnskulen i læreplanen frå 1986 og fekk auka omfang i læreplanen i 1997 (ibid). I følgje Leland er det ikkje store forskjellar mellom læreplanen frå 1997 og kunnskapsløftet KL06 i dette emnet. Når det gjeld vidaregåande skule, kom statistikk og sannsynsrekning med tyngde inn i læreplanen ved Reform 94. Det vart ei endring ved innføring av KL06 då omfanget av dette fagområdet vart mindre (ibid.). Leland hevdar dette kan skuldast at ein la meir vekt på andre deler for å betra matematikkfaget generelt.

1.3 Forskingsspørsmål og føremål med studien

Føremålet med oppgåva er å forska på kva oppfatninga og misoppfatningar elevar i vidaregåande skule har innafor sannsyn i tillegg til løysingsprosessen og strategiane dei brukar for å koma fram til svara sine. Eit av kjenneteikna på elevar som vel yrkesfag, er svake skuleresultat frå ungdomsskulen (Norges forskingsråd, 2015). Dei norske elevane uttrykkjer og lågaste sjølvoppfatning i matematikk samanlikna med dei andre nordiske landa (Kjærnsli & Olsen, 2013). Eg har difor sett nærare på om det er mogleg å sjå korrelasjon mellom matematikkarakter og dei ulike misoppfatningane. For å setja studien min i ein heilskap, har eg og sett nærare på om resultata mine samsvarar med tidlegare forsking.

Hovudproblemstillingane for studien er følgjande:

Kva oppfatningar og misoppfatningar har elevar på vidaregåande trinn i sannsyn innafor følgjande område: enkle og samansette hendingar, utfallstilnærming, representativitet, lik sannsynsfeil, vilkårsbunde sannsyn og feilslutning om tidsaksen (Falk-fenomenet) og variasjon.

I kva grad samsvarar funna mine med tidlegare forsking?

Korleis er korrelasjonen mellom matematikkarakter og dei ulike misoppfatningane?

Kva løysingsstrategiar brukar elevane når dei løyser oppgåvene?

1.4 Oppbygging av oppgåva

Kapittel 1 – innleiing

I dette kapittelet vert det gjeve ei kort innleiing om sannsyn i skulen og kva utfordringar ein møter innafor dette emnet. Det vert gjeve ei kort utgreiing om sannsyn som emne i matematikkfaget og undervisning i norsk skule.

Kapittel 2 – Teori

Teorikapittelet startar med ei utgreiing om den konstruktivistiske læringsteorien som er det teoretiske rammeverket for oppgåva. Vidare ser eg nærare på forståing, tenking, oppfatningar og misoppfatningar i matematikk før eg går over til å presentera oppfatningar og misoppfatningar i sannsyn som er relatert til forskinga mi.

Kapittel 3 – Forskingsdesign og metode

I denne studien har eg nytta mixed methods som metodisk grunnlag for studien. Det vert gjort greie for val av metode, vitskapsteoretiske og definisjonar kring mixed methods, design av studien og pilotstudie. I tillegg vert det gjort greie for datainnsamlinga, analyse, reliabilitet, validitet og etiske vurderingar.

Kapittel 4 – Resultat og analyse

Kapittel 4 utgjer største delen av oppgåva der eg drøftar resultata frå den kvantitative undersøkinga og intervjua i lys av tidlegare forsking på området og litteratur på området. Eg har vald å utføra resultat og ein førebels analyse i same kapittel for å få betre samanheng mellom funna mine og tidlegare forsking.

Kapittel 5 – Oppsummering og konklusjon

I dette kapittelet vert det først gjeve ei oversikt over samla resultat og overordna statistiske mål før det vert gjeve ei kort oppsummering av dei ulike misoppfatningane. Vidare har eg gjort greie for samanstilling av karakter og resultat og presentert ulike perspektiv som elevane sine løysingsstrategiar, elevane si forståing og bruk av omgrep i sannsyn og konsekvensar for undervisning.

2 Teoretisk bakgrunn

I dette kapittelet gjev eg ein oversikt over aktuelle teori som eg finn relevant som grunnlag for studien min. Eg gjev først ein kort oversikt over læringsteori og læringssyn i matematikkfaget med vekt på kognitiv konstruktivisme. Deretter seier eg noko om forståing, tenking, oppfatningar og misoppfatningar i matematikk. Både forståing og tenking er sentrale omgrep i studien min då eg ynskjer å sjå nærare på kva elevane synast å forstå i sannsyn. Samstundes er dette to omgrep som det finst mykje litteratur om, og som kan vinklast på ulike måtar. Eg har såleis vald å ta med nokre få sentrale teoretikarar som har ei konstruktivistisk tilnærming til forståing i matematikkfaget.

Utgangspunktet for val av problemstilling er som nemnd i kap.1, at sannsyn synast å vera eit utfordrande emne for elevane. Det vert og hevda i litteraturen at omgrepsdanninga i sannsyn har gått seint samanlikna med t.d. algebra og geometri, og sentrale matematikarar fann dette emnet vanskeleg i byrjinga. Ved å sjå nærare på kva hindringar ein støytte på ved danning av omgrep innafor sannsyn, kan det vera mogleg å få ei forståing av elevane sine utfordringar med å læra emnet (Batanero, Henry & Parzyzk, 2005). Eg har difor teke med eit historisk oversyn over danninga av sannsyn som matematisk omgrep. Som ei forlenging av dette, kjem eg inn på dei ulike filosofiske tilnærmingane til sannsyn som er skildra i litteraturen.

Deretter er det gjeve korte utgreiingar om ulike omgrep knytt til sannsyn som m.a. rettferd, sjanse, tilfeldigheit og intuisjon. Til slutt gjev eg eit oversyn over nokre oppfatningar og misoppfatningar i sannsyn knytt til problemstillinga mi.

2.1 Kognitiv konstruktivisme

I dette kapittelet tek eg kort for meg ein av læringsteoriane som har prega matematikkfaget i nyare tid, og som gjev ein bakgrunn for val av det teoretiske grunnsynet mitt. Eg legg mindre vekt på korleis dei ulike læringssyna kan nyttast i undervisning, men ser meir på korleis ein oppfattar kunnskap, forståing og læring. Læringsteoriar kan sjåast på som «briller» vi forstår og ser elevane med (Imsen, 2014). På den måten vert vi medvitne om korleis elevane tenkjer og oppfattar dei ulike omgrepa, og at det ikkje alltid samsvarar med læraren si oppfatning (ibid.)

Det finst fleire ulike definisjonar på læring (Imsen, 2014). Eit fellestrekk for desse er at læring medfører ei varig endring, men det er ulike oppfatningar om kva som vert endra. Det kan vera åtferd eller handling eller det kan vera ei endring på det indre, mentale planet. Sett frå ein kognitiv synsstad, skjer læring i samspel mellom individet og den ytre verden. Dei tre grunnleggjande samspelformene er det sosiale samspelet der kommunikasjon med andre menneske er det viktigaste, materielt samspel som inneber korleis individet kan læra av forsking og utprøving og symbolsk samspel som inneber språk, tekst, bilete, film osb. (ibid.).

Dei kognitive læringssyna er opptekne av dei indre mentale prosessane og sentrale omgrep er læring, hukommelse, tenking og problemløysing (Imsen, 2014). Dette er og viktige omgrep innafor konstruktivisme. Det som skil kognitive læringsteoriar og konstruktivisme, er at sistnemnde ser på kunnskap som noko som er både konstruert og bearbeidd av individet (ibid.). Konstruktivisme kan sjåast på både som ein teori om kva kunnskap er og ein teori om korleis læring går føre seg. Innafor kognitiv konstruktivsime vert læring sett på som ei individuell sak der læring skjer gjennom samspel mellom individet og den fysiske omgjevnaden (ibid.). Sentrale representantar for denne retninga er Jean Piaget og Jerome Bruner.

I følgje Imsen (2014) brukte Piaget ordet læring i ei avgrensa tyding om det å lagra kunnskap frå ein ytre påverknad. Den djupare læring vart sett på som utvikling. Hovudomgrepa i Piaget sin teori har bakgrunn i følgjande funksjonar i læringsprosessen: representasjon, prosess og motivasjon. Gjennom handlingar og den ytre verda får vi ein indre representasjon av handlingsmønster som Piaget kalla skjema. Det vert skilt mellom sensorimotoriske skjema som dominerer dei første leveåra, og kognitive skjema. Dei kognitive skjemaa vert danna på eit høgare nivå og treng ikkje utløyast av ytre stimuli (ibid.).

I Piaget sin teori føregår læring eller utvikling gjennom ein tilpassingsprosess (adaptasjon) der individet går gjennom to prosessar, assimilasjon og akkomodasjon. Desse prosessane går parallelt og gjensidig påverkar og forsterkar kvarandre (Imsen, 2014). Assimilasjon vil seia at ein plasserer ny kunnskap inn i individet sine eksisterande skjema og kunnskapsforståing. Akkomodasjon vil seia å tilpassa eksisterande skjema til ny kunnskap slik at ein kan forstå nye sider ved omgjevnaden og såleis konstruera ny kunnskap. Drivkrafta i prosessen er ei forståing om likevektsprinsippet. Når barnet ikkje er nøgd med ei forklaring, vil det søkja å finna ut av problemet for å skapa indre likevekt. Dette er motivasjonen for utvikling og læring (ibid.).

Påverknaden frå dei konstruktivistiske tankane i matematikkfaget starta rundt 1960-talet, men det var først på 1980-talet det fekk eit meir fotfeste innafor faget (Steffe & Kieren, 1994). Konstruktivisme i matematikkundervisning kom som ein reaksjon til den regelstyrte behaviorismen, der ein var mest oppteken av stimuli-respons og kva elevane gjorde feil (ibid.). Confrey & Kazak (2006) seier det slik: *«Constructivism evolved as researchers' interests in the child's reasoning went beyond a simple diagnostic view of errors to understanding the richness of student strategy and approach»*. Som nemnd ovanfor, har omgrepet konstruktivisme to ulike meiningar. Innafor matematikkfaget tok ein utgangspunkt utfordringane i klasserommet og korleis læring gjekk føre seg (ibid.). Elevane synte svak omgrepsmessig forståing og utfordringar med overføring av kunnskap til nye oppgåver. Vi kan finna røtene til konstruktivismen innafor tre ulike tradisjonar: problemløysing som hjå Polya og Schoenfeld, misoppfatningar, kritiske barrierar og epistemologiske hindringar, og teoriar om kognitiv utvikling som t.d. Piaget sine teoriar (ibid.).

Confrey & Kazak (2006) hevdar at det sosio-kulturelle perspektivet no er rådande innafor matematikkdidaktikken og at det konstruktivistiske synet har vorte fortrengt. Etter deira meining er dette uheldig då det har ført til at det vert lagt mindre vekt på matematikken i seg sjølv, korleis læringa går føre seg og korleis ein kommuniserer dette. Etter deira syn har den konstruktivistiske tilnærminga **individet**[3] som primæreining for analysen, men freistar å avdekkja kjelda til matematisk kunnskap som vert danna i relasjon til biologiske, fysiske og miljømessige omgjevnader samstundes som ein og verdset korleis den sosio-kulturelle konteksten påverkar læringa.

2.1.1 Konklusjon

I ei undersøking slik som oppgåva mi byggjer på, vil ein gjerne ta utgangspunkt i korleis elevane svarar på aktuelle oppgåver og søkja å finna eventuelle mønster. Dersom ein vil vita noko meir om resultata ein får, må ein gå eit steg vidare og spørja kvifor ein ser slike mønster og freista å finna meir ut om årsaken til det. I denne oppgåva der eg ynskjer å sjå nærare på kva løysingstrategiar elevane har og korleis dei tenkjer, legg eg til grunn ei konstruktivistisk tilnærming. Ved å nytta omgrep innafor denne retninga vil det seia at eg søkjer å finna elevane sine første intuitive tolkingar og metodar i sannsyn i staden for å ha einsidig fokus på kva spørsmål dei svarar feil eller riktig på. Eg studerer ikkje læringsfellesskapet i

[3] Mi utheving

klasserommet og kva som påverkar læring og oppnåing av kunnskap hjå den einskilde i eit slikt fellesskap.

2.2 Forståing, tenking, oppfatningar og misoppfatningar i matematikk

Korleis vi oppnår kunnskap er noko av det som skil dei ulike læringsteoriane som nemnd i kap.2.1. I følgje Imsen (2014) er behavioristane sitt syn på kunnskap at dette er noko ferdig som vert overført til individet. Innafor konstruktivisme vert kunnskap konstruert av individet medan innafor det sosio-kulturelle perspektivet ser ein på kunnskap som noko som vert overlevert frå kulturen og internalisert hjå individet (ibid.).

2.2.1 Kunnskap og forståing i matematikk

Hovudfokuset i studien min er misoppfatningar innafor sannsyn og korleis elevane resonnerer seg fram til svaret sitt og kva eventuelle mønster ein kan finna. Sjølv om eg ikkje vil gå djupt inn i forståingsomgrepet , vel eg likevel å ta med nokre sentrale teoretikarar for å setja det inn i ein større samanheng.

Den mest omfemnande tanken innafor matematikkundervisninga er at elevane skal forstå matematikk (Hiebert & Carpenter, 1992). Det kan likevel vera utfordrande som lærar å avdekkja om ein elev forstår det vi ynskjer han skal forstå, og i kva grad og på kva måte han forstår noko. Vi kan sjølvsagt avdekkja noko med ein ordinær prøve i faget. Samstundes veit vi ikkje om eleven har ei djupare forståing eller om han har lært seg nokre algoritmar og reglar som han nyttar der han meiner dei passar. Forståing er heller ikkje eit eintydig omgrep.

Sfard seier det på denne måten:

> *«In spite of the impressive advances, researchers agree today that pinpointing the exact meaning of the word understanding and finding ways to make the principle of learning-with-understanding operative are extremely difficult tasks. The difficulty begins with the elusiveness of the experience that makes us say, «I understand»: This experience is difficult to achieve and to sustain, and it is even more difficult to capture and to explain”* (Sfard, 2008).

Innafor det konstruktivistiske perspektivet finn vi som nemnd i kap. 2.1, fleire ulike retningar. Eit felles kjenneteikn ved dei ulike retningar er at dei tek avstand frå den positivistiske oppfatninga av kunnskap som ein objektiv sannheit (Imsen, 2014). I utgangspunktet er konstruktivisme ei retning innafor psykologien, men det har og vore grunnlaget for korleis ein innafor matematikk som skulefag, oppfattar elevane si forståing.

Nokre sentrale teoretikarar innafor matematikkdidaktikk som legg til grunn ei konstruktivistisk tilnærming og som gjer greie for omgrepa kunnskap og forståing, er m.a. James Hiebert og Richard Skemp. Hiebert & Lefevre (1986) set eit skilje mellom omgrepsmessig- og prosedyrekunnskap. Utviklinga av den omgrepsmessige kunnskapen skjer ved at ein knyter ny informasjon til eit eksisterande nettverk av kunnskap. Denne samankoplinga kan skje mellom to bitar av kunnskap som alt er lagra i minnet, eller der ein får ny informasjon som ein koplar til eksisterande kunnskap (ibid.). Dette finn vi og att hjå Piaget sine omgrep skjema, assimilasjon og akkomodasjon (jf. kap. 2.1). Piaget nytta og omgrepet kognitiv struktur om større grupper av skjema som høyrer saman (Imsen, 2014). Hiebert & Lefevre hevdar at omgrepet «forståing» er det som er mest brukt for å skildra prosessen, når ny matematisk informasjon vert kopla til eksisterande kunnskap på ein passande måte.

Prosedyrekunnskap er bygd opp av det formelle språket og symbolbruken i matematikken i tillegg til algoritmen og reglane for å fullføra ei matematisk oppgåve. Matematisk kunnskap krev at det er ei samankopling mellom omgrepsmessig kunnskap og prosedyrekunnskap. Elevane er ikkje fullt ut kompetente dersom dei manglar ein av kunnskapane eller det ikkje er samankopling mellom dei. Når omgrep og prosedyrar ikkje er kopla saman, kan eleven ha ein god intuisjon for matematikken, men dei evner ikkje å løysa problemet eller dei svarar utan å forstå kva dei gjer (ibid.). Denne to-delinga finn vi og att i Skemp si inndeling i relasjonell og instrumentell forståing (Skemp, 1976). Relasjonell forståing vert forstått som å vite kva ein skal gjera og kvifor ein gjer det slik medan instrumentell forståing er å kjenne att ei oppgåve og vite kva regel ein skal bruka. Skemp kallar dette *«rules without reasons»* (ibid.).

Eit anna moment er kva vi legg i utsegna «god forståing» i matematikk. Ein lærar kan hevda at ein elev ikkje forstår eit emne i faget medan eleven synest sjølv han forstår noko. Dette er likevel ikkje i samsvar med det læraren gjerne legg i omgrepet god forståing (Sierpinska, 1994). Eleven kan ha eit ufullstendig eller overflatisk forståing avgrensa til eit konkret døme i staden for ei meir generell og konseptuell forståing av eit omgrep (ibid.). Det kan ein ofte sjølv erfara som lærar. Eleven ser tilsynelatande ut til å forstå og vite kva han held på med, men gjer elementære feil når han skal overføra kunnskapen til nye område eller rekna oppgåver som ikkje liknar det han har sett i læreboka. Sierpinska (1994) stiller og spørsmål om det er mogleg å kontrollera om ein person si forståing ikkje står i motsetnad til nokre av utsegnene i ein teori. Det er ofte enklare å prova at eleven si forståing ikkje er fullstendig då det er tilstrekkeleg med ei sjølvmotseiing. Sierpinska hevdar at dette er årsaken til at litteratur om matematikkundervisning, stor sett inneheld tema om mangel på forståing, misforståing, misoppfatningar osb.

2.3 Tenking

I delkapittelet ovanfor er det gjort kort greie for omgrepa kunnskap og forståing. Ein anna faktor som påverkar korleis vi synast å oppfatta situasjonar både i dagleglivet og i skulesamanheng, er omgrepa tenking og resonnering. Både Kahneman (2012) og Evans (2003) som begge har psykologibakgrunn, hevdar at vi tenkjer i eitt av to system, anten raskt, intuitivt og kjenslelada (system 1) eller langsamt, rasjonelt og logisk (system 2). Når vi skal ta ei avgjersle, tek vi ofte utgangspunkt i tidlegare erfaringar og slike intuitive avgjersler krev lite refleksjon (Evans, 2003). I tillegg har vi evne til å ta avgjersler med utgangspunkt i mentale modellar og førestellingar om moglege hendingar i framtida. Evans peikar på at vi ikkje kan lære av erfaringar for å unngå farar som t.d. atomkrig eller ukontrollert global oppvarming.

Vi har ofte tendens til først å nytta system 1. Når vi får eit spørsmål som vi oppfattar som vanskeleg, bytter vi ofte til eit lettare utan at vi sjølv er klar over det. Det er først når vi oppfattar at den intuitive løysinga ikkje gjev resultat, at vi skiftar til ein langsamare og meir gjennomarbeidd tenking (Kahneman, 2012). System 1 køyrer automatisk og vidareformidlar inntrykk, intuisjonar, intensjonar og kjensler til system 2. Sistnemnde system vert altså teke i bruk når det dukkar opp hendingar eller spørsmål som system 1 ikkje kan gje svar på (ibid.). Dette fungerer stort sett greitt i dei fleste tilfelle, men system 1 har skeivheiter eller systematisk feil som vert gjort i bestemte høve som t.d. i logikk, sannsyn og statistikk.

Følgjande oppgåve vart gjeve i ei undersøking der om lag 10 % fekk riktig svar (Evans, 2003):

Kvart av korta har ein bokstav på ei side og eit tal på andre sida. Påstand: Dersom det er ein A på eine sida av kortet, er det eit 3-tal på den andre sida. Kva kort må du snu for å vita om dette er sant eller usant?

A	D	3	7

Dei fleste meinte at svaret måtte anten vera A eller A og 3. Det logisk riktige svaret er A og 7 fordi vi kan falsifisera påstanden om det ikkje er eit 3-tal på baksida av A, eller viss det er ein A på baksida av 7.

Dei første intuisjonane vi utviklar er knytt til rom, tid og mengde og desse er i utgangspunktet grunnleggjande riktige (Dawes, 2001). I motsetnad finn vi tenking og resonnering innafor sannsyn som ofte er mot-intuitive og går ut forbi erfaringane våre (ibid.). Det har vist seg at dersom vi berre stolar på intuisjon og ikkje tek i bruk system 2 når vi vurderer spørsmål innafor sannsyn, er det lett for at vi kjem til feil konklusjonar og gjer feilslutningar.

2.4 **Intuisjon og heuristikk**

Som nemnd i innleiinga, har elevar som oftast konstruert sine eigne tolkingar og førestellingar om m.a. sjanse og rettferd når dei møter sannsyn i skulen ut frå korleis dei har møtt hendingar tidlegare. Mange forskarar og forfattarar innafor studiar i sannsyn viser til at ein av vanskane med emnet er m.a. at det er mot-intuitivt på eit heller lågt nivå samanlikna med andre emne innafor matematikk (Bennett, 1998; Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991; Garfield & Ahlgren, 1988).

Fischbein (1975) klassifiserer intuisjon i primære og sekundære intuisjonar. Dei primære intuisjonane vert danna før systematisk instruksjon og undervisning og er uavhengig av dette. Dei sekundære intuisjonane vert forma etter opplæring og dei gjer individet i stand til å gå vidare frå dei første kognitive ideane og tankane. Matematiske intuisjonar fell inn under den siste kategorien (ibid.). Fischbein set vidare eit skilje mellom intuisjon og mentale ferdigheitar som vert assimilert gjennom øving. Døme på slik erverva informasjon er årstal på viktige hendingar i historia eller formelen for løysing av andregradslikningar. Innafor sannsyn er det i følgje Fischbein og naudsynt å skilja mellom den primære intuisjonen i høve sjanse og omgrepet sjanse. Det å forstå omgrepet sjanse føreset eit utvikla omgrepsmessig system og kjennskap til matematiske lover, kausalitet, nødvendigheit osb. (ibid.). (Fischbein, 1984 #18) definerer intuisjon som ei kognitiv førestelling (cognitive beliefs).

Kahneman, Slovic & Tversky (1982) viser til at omgrepet intuisjon og intuitiv vert nytta på tre ulike måtar. Ei avgjersle er intuitiv om ho er fatta på grunnlag av uformelle og ustrukturerte resonnement utan formelle analysar og utrekningar. Denne måten å nytta intuisjon på kan til ei viss grad samanliknast med Fischbein sin primære intuisjon, men hjå Kahneman & Tversky er det ikkje sett noko skilje mellom opplæring eller ikkje. Studiar innafor misoppfatningar i sannsyn viser at vi ofte nyttar uformelle resonnement sjølv om vi har gjennomgått opplæring i emnet.

Den andre måten intuisjon vert nytta på er når ein formell regel eller fakta om eit emne vert kalla intuitiv dersom den samsvarer med vår eiga verdsoppfatning. Vi oppfattar intuitivt at sjansane våre for å vinna i eit lotteri minkar med talet på lodd, men det er mot-intuitivt at det er meir enn 50 % sjanse for at ei gruppe på 23 personar inneheld to personar som har fødselsdag same dag. Den siste måten vi brukar intuisjon på er når vi intuitivt brukar dei grammatiske reglane som ein underliggjande faktor ved tale. Ein regel eller prosedyre inngår i intuisjonen vår, når vi brukar det som ein del av dei vanlege gjeremåla våre (ibid.). Etter Fischbein si klassifisering kan sistnemnde døme på intuisjon falla inn under det han kallar sekundær intuisjon. Bruk av dei grammatiske reglande som nemnd ovanfor, er noko meir enn berre ein mental ferdigheit fordi vi lærer å snakka før vi lærer om den formelle oppbygginga av språket.

Borovcnik & Kapadia (2014b) hevdar at misoppfatningar som vi ser innafor sannsyn, viser at sannsynsrelatert intuisjon kan synast å vera lite velutvikla. Dei meiner dette m.a. kan skuldast ynskje om ei deterministisk forklaring sidan vi har vanskar med å forstå korleis sjanse og tilfeldigheit oppstår og påverkar.

Omgrepet heuristikk kan definerast som ein enkel framgangsmåte eller strategi for å løysa ei oppgåve eller ta ei avgjersle. Ein byggjer ofte på analogiar, arbeider baklengs eller tenkjer middel-mål-relasjon (Teigen, 2012). I artikkelen «Judgment under uncertainty: Heuristics and biases» karakteriserer Tversky & Kahneman (1974) nærare 15 ulike heuristikkar som vi ofte nyttar når vi skal ta ei avgjersle. Slike tommelfingerreglar kan hjelpa oss i ein del situasjonar, men som nemnd ovanfor, kan dei føra til systematiske feil. (Konold, 1991) hevdar at ein av delene i elevane sine førekunnskapar i sannsyn er vurderingsheuristikkar, som verkar på same måte som visuelle oppfatningar. Rekkja KMMKM ser ut som eit meir sannsynleg resultat enn KKKKK, når du kastar ein rettferdig mynt (ibid.). Eg kjem tilbake til nokre av desse skeivheitene i etterfølgjande kapittel.

2.5 Oppfatningar og misoppfatningar

Den grunnleggjande tanken om at elevane utviklar misoppfatningar, er sentral i mykje av den empiriske forsking på læring i matematikk og naturvitskap frå 1970-talet og framover (Savard, 2014). Det synte seg at elevane hadde idear og oppfatningar som konkurrerte med det som vart presentert i klasseromma. Elevane hadde sterk tru på oppfatningane sine som tilsynelatande gav riktig forklaring. Desse oppfatningane var likevel inkonsistente med aksepterte matematiske og vitskaplege omgrep (ibid.).

Konstruktivisme legg vekt at elevane tolkar oppgåver og læringsaktivitetar utifrå deira førkunnskap (Smith Iii, Disessa & Roschelle, 1994). Såleis er feil vanleg i startfasen fordi elevane sin eksisterande kunnskap er utilstrekkeleg. Elevane lærer ved å transformera og foredla førkunnskapen til meir sofistikerte former og denne omgrepsmessige endringa tek tid (ibid.). For oss lærarar kan det vera ei utfordring å få elevar til å forstå at idear og omgrep dei har danna, ikkje alltid gjeld i nye situasjonar (Brekke, 2002). Det er eit viktig skilje mellom det vi kan kalla feil og det som er misoppfatningar. Feil som elevane gjer i matematikk, er gjerne tilfeldig fordi ein ikkje har vore merksam eller brukt nok tid til å lesa oppgåva osb. Misoppfatningar kjem av ufullstendige tankar knytt til omgrep, og at ein overgeneraliserer tidlegare kunnskap til nye område der denne kunnskapen ikkje gjeld i same grad. Brekke seier vidare at misoppfatningar såleis ikkje er tilfeldige fordi det ligg ei bestemt tenking bak som ein brukar rimeleg konsekvent.

I følgje forskarane er det ulike årsaker til at elevane har misoppfatningar eller alternative oppfatningar. Gunnar Gjone[4] klassifiserer desse i; overgeneralisering, overspesialisering, feiloversetting og avgrensa omgrep. Døme på overgeneralisering av tidlegare kunnskap er t.d. multiplikasjon gjer større og divisjon gjer mindre. Ved overspesialisering vil eleven bruka reglar frå andre område eller dei set avgrensingar på eit omgrep. Ei kjend misoppfatning innafor sannsyn er at ein overfører reglar frå algebra og hevdar t.d. at sannsynet for å få ein trear når du kaster ein gong, er P = 1/6 medan sannsynet for å få minst to trearar i to kast er

[4] Gunnar Gjone, førelesing i Erfaringsbasert master i matematikk, UiB 07.03.14, Bergen

P = 2·1/6 osb. Ved feiloversetting gjer elevane feil når dei overset mellom t.d. tekst, tabellar og formlar. Ei vanleg feil elevane gjer i sannsyn er å bruka addisjonssetninga i staden for produktsetninga når dei løyser tekstoppgåver som krev den siste setninga. Dersom oppgåva seier at ein skal finna sannsynet for å trekkja to svarte kuler utan tilbakelegging frå ein boks med 4 svarte og 5 kvite kuler, vil nokre elevar leggja i hop 4/9 og 3/8 i staden for å multiplisera desse tala.

Det er og ulik oppfatning av kva omgrep ein skal nytta for å forklare fenomenet med elevane sine umodne omgrep og alternative oppfatningar. (Smith Iii et al., 1994) hevdar at den tidlegare forskinga på misoppfatningar har lagt vekt på det svake resultaet i elevane si læring i stadenfor å sjå på læringsprosessen. Dei seier vidare at misoppfatningar har rot i produktiv og effektiv kunnskap, men nøkkelen er kontekst – kor og korleis omgrepa vert brukt. Misoppfatningar kan såleis bli sett på som nybyrjaren sitt forsøk på å utvida eit eksisterande omgrep, som er nyttig i ein gitt situasjon, til eit nytt område der dei viser seg å vera utilstrekkelege. Smith III et.al. konkluderer med at produktiv og uproduktiv kan vera meir passande omgrep enn riktig og feil. Swan (2001) seier han mislikar uttrykket misoppfatning fordi det ser ut som det set ei grense mellom ein rett og ein feil måte å tenkja på. Misoppfatning er ifølgje Swan ikkje feil tenking, men eit umodent omgrep eller ei lokal generalisering som eleven har gjort.

Savard (2014) hevdar at omgrepa oppfatning og misoppfatning framleis vert brukt i stor grad av forskarar innafor matematikkutdanning, og bruken av orda er framleis knytt til eleven sine ugyldige resonnement. Savard sjølv er usamd i omgrepet misoppfatning fordi ho meiner den einskilde sine oppfatningar kan vera gyldig i ein anna kontekst. Såleis er det betre å kalla dei alternative oppfatningar (ibid.). Ho legg vidare til grunn eit sosio-kulturelt perspektiv og seier at oppfatningar er situerte. Dei ligg nære sunn fornuft og intuitiv resonnering, men dei er basert på individet sine forklaringar av eit fenomen og såleis er dei til ein viss grad rasjonelle.

Sjølv om omgrepet misoppfatning i seg sjølv har vore kritisert som vist til ovanfor, vel eg å bruka dette omgrepet i denne oppgåva. Som nemnd av Savard, vert omgrepet framleis brukt innafor forsking og ein er stort sett samd i innhaldet og forståinga av det.

2.6 Utviklinga av sannsyn som matematisk omgrep

Sannsyn som matematisk omgrep, kom relativt seint inn i matematikkfaget samanlikna med t.d. geometri og algebra utifrå eit matematikkhistorisk perspektiv. I dette kapittelet vert det gjeve ei kort oppsummering av sannsyn som matematisk omgrep. Dette vert gjort for å setja denne delen av matematikkfaget i ein historisk kontekst samstundes som det og kan gje ei grunnleggjande forståing av utfordringar innafor sannsyn. Sfard (1995) tek utgangspunkt i ei konstruktivistisk tilnærming og seier det slik: *«Difficulties experienced by an individual learner at different stages of knowledge formation may be quite close to those that once challenged generations of mathematicians».*

Vi kan finna spor av sannsynsrelatert aktivitet frå eldre tider både i indiske, babylonske og egyptiske kulturar Bennett (1998). Den tidlegaste seks-sidige terningen som er kjend, vart funnen i utgravingar i tidlegare Mesopotamia, Nord-Irak og er datert til om lag 2750 f.Kr. (Bennett, 1998). Terningen var merka med prikkar slik som vi kjenner han i dag, og dette var mest truleg fordi ein ikkje hadde noko system for numerisk notasjon (ibid.). Terningen vart nytta som eit verkty for å avgjera noko på ein rettferd måte, eller for å føreseia guddommeleg avgjersle (Borovcnik & Kapadia, 2014b).

Trass i at sjansespel ser ut til å vera noko som har vore ein del av sivilisasjonen i fleire tusen år, har omgrepsdanninga innafor sannsyn vore seint utvikla samanlikna med andre emne innafor matematikk (Borovcnik et al., 1991). Det kan skuldast fleire grunnar. I følgje David (sitert i Borovcnik et.al, 1991, s. 28) kan ein av årsakene vera kristendomen sin dominans som meinte at alt var styrt av Guds vilje. Det var såleis umogeleg å utvikla teoretiske hypoteser frå empiriske data (ibid.). Borovcnik et.al. (1991) meiner det og kan vera ein eigenskap ved sannsyn som har hindra utviklinga av formelle omgrep. I sannsynssituasjonar kan vi ikkje gje ein klar prediksjon av neste utfall. Vidare utvikling i omgrepsdanninga føreset såleis at vi oppfattar neste utfall berre som ein representant for framtidige eller hypotetiske utfall. Det talfesta sannsynet på 1/2 for mynt eller krone når vi kastar eit kronestykke, seier ikkje noko om kva som faktisk kjem til å henda eller om vi får krone i neste kast (ibid.).

Både David (referert i Borovcnik et.al., 1991, s. 29) og Bennett (1998) tileignar Cardano den første referansen innafor sannsyn med verket Liber de ludo aleae som vart skrive rundt 1564. Han viste m.a. riktig utfallsrom for kast av 2 terningar (36 utfall) og tre terningar (216 utfall). Borovcnik & Kapadia (2014b) hevdar likevel at det er tvilsamt om Cardano såg ein klar samanheng mellom empirisk frekvens og sannsyn som eit teoretisk omgrep. Dei viser til at dei fleste bøker om matematikken sin historie, meiner at den første omgrepsmessige tilnærminga til sannsyn, var korrespondansen mellom Pascal og Fermat i 1654. I brevvekslinga løyste dei problem som tok utgangspunkt i spel-situasjonar. Når danninga av eit omgrep er i startfasen og lite vel-definert, vil det gjerne oppstå forvirring mellom omgrepsbruken (Borovcnik & Kapadia, 2014a). Ein tek gjerne utgangspunkt i kjende omgrep og difor vart det i byrjinga nytta eksisterande modellar for rettferd og sjanse-spel for å skildra og løysa problem med uvisse (ibid.).

Sjølv om Pascal og Fermat klarte å modellera ei rettferdig deling av eit sjanse-spel, kom dei ikkje nærare i ein definisjon av omgrepet sannsyn i følgje Borovcnik et.al., (1991). Ei vidareføring og meir teoretisk tilnærming til sannsyn vart utført av Christian Hugyens med boka «De Ratiociniis in Ludo aleae» i 1657 (Borovcnik & Kapadia, 2014b). Sjølv om Hugyens ikkje nemde omgrepet sannsyn, hadde han med utgreiingar om hendingar med lik sjanse og forventa verdi (ibid.). På 1700- og 1800-talet ber sannsyn preg av ei rekkje ulike omgrep (Borovcnik & Kapadia, 2014a). Utviklinga av sannsynsteorien vart vidareført av m.a. Jakob Bernoulli, Abraham de Moivre og Thomas Bayes utover 1700-talet (Lysø, 2005).

Det var Pierre de Laplace som gav den første eksplisitte definisjonen av klassisk sannsyn i verket «Théorie analytique des probabilitiés» i 1812 (Borovcnik & Kapadia, 2014b). I dette verket tok han m.a. for seg det som vi kjenner som uniform sannsyn, uavhengigheit og produktsetninga (Lysø, 2005). Det vidare arbeidet med ei omgrepsdanning av sannsyn som matematisk disiplin vart lite arbeidd med utover 1800-talet (ibid.). På 1930-talet framsette matematikaren Andrei Kolmogorov ein aksiomatisk sannsynsteori (Borovcnik & Kapadia, 2014b). I dag er såleis sannsyn matematisk definert via aksiom og eit stokastisk eksperiment er skildra av ulike modellar som kan gje ulike svar som t.d binomisk modell og hypergeometrisk modell. Det einaste spørsmålet er då kva for modell i eit reelt eksperiment som gjev beste prediksjon (ibid.).

2.7 Filosofisk tilnærming til sannsyn

Vi kan skilja mellom tre ulike filosofiske tilnærmingar til sannsyn; klassisk, frekvens og subjektiv tilnærming (Albert, 2003; Batanero et al., 2005; Borovcnik et al., 1991; Konold, 1991). I tillegg har Borovcnik et al. (1991) med strukturell tilnærming. I klassisk tolking antar ein at utfallsrommet er ei samling med like utfall. Vi finn sannsynet for ei hending ved å telja opp talet på gunstige utfall for hendinga og dividerer dette på moglege utfall. Denne tolkinga av sannsyn er avgrensa til situasjonar der utfallsrommet består av utfall som ein antar har likt utfall. Tilnærming er a priori då vi kan rekna ut sannsynet før vi gjer eit forsøk (Borovcnik et al., 1991). Den klassiske tilnærminga vert og ofte referert til som teoretisk sannsyn (Konold, 1991).

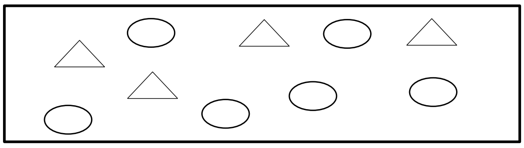
Ved frekvens eller empirisk tilnærming antar ein at eit tilfeldig eksperiment, som kast av mynt eller terning, kan utførast mange gonger dersom same vilkår er til stades (Albert, 2003). Sannsynet for ei hending vert estimert utifrå den relative frekvensen av ei samling eksperiment. Denne tilnærminga går vidare enn den klassiske i høve til utfallsrommet, men den har og avgrensingar. Det er ikkje alle eksperiment som utan vidare let seg repetera som t.d. eit fotballag vinn ein fotballcup (ibid.). Andre utfordringar med denne tilnærminga er og at vi har ei form for sirkularitet og det kan vera vanskeleg å definera kva som er meint med tilfeldigheit (Borovcnik et al., 1991).

Den subjektive tilnærminga ser på sannsyn som eit numerisk mål av ein person si meining om sannsynet av ei hending (Albert, 2003). Denne tilnærminga vil vera avhengig av kva informasjon ein person har og meininga personen måtte ha om ulike hendingar (ibid.). Ei utfordring med den subjektive tilnærminga er at vi ikkje har noko rettleiing om korleis vi skal måla føregåande sannsyn (Borovcnik et al., 1991).

Borovcnik et al. (1991) gjev eit døme på kast av ein terning for å visa skilje mellom dei ulike filosofiske tilnærmingane. Utifrå eit klassisk syn vil tilordna sannsyn for å få ein seksar vera 1/6 sidan ein kan anta at det er seks like sider på terningen. Ved frekvenstilnærming vil ein utføra ei rekkje eksperiment for å finna at fordelinga går mot 1/6 for kvart tal på terningen. For begge desse tilnærmingane, er sannsynet ein ibuande eigenskap ved terningen. I subjektiv tilnærming vil individet kunne endre den mentale konstruksjonen sin ved ny informasjon. Til dømes om terningen er tyngre, mindre eller har ein anna farge.

I ei undersøking av 75 høgskulestudentar fann Albert (2003) m.a. at klassiske sannsynsspørsmål var lettare å svara på enn frekvens og subjektive spørsmål. Studentane som ikkje hadde gjennomgått opplæring enno, fekk utdelt ei spørjeskjema med 9 spørsmål der det var 3 spørsmål under kvar tilnærming. Eit av spørsmåla under klassiske tilnærming var utforma på følgjande måte:

Question 2: Suppose you choose an object at random from this box. What is the chance that you choose a triangle (△)?



Figur 2. Spørsmål under klassisk tilnærming

Under frekvenstilnærminga vart m.a. følgjande spørsmål gjeve:

Question 5: Suppose a baby is born in your local hospital this morning. What is the probability that the baby is a boy?

Figur 3. Spørsmål i frekvenstilnærming

Under subjektiv tilnærming var følgjande eit av spørsmål som vart gjeve:

Question 9: What is the probability you will get married before the age of 25?

Figur 4. Spørsmål under subjektiv tilnærming

Studien viste vidare at studentane hadde tendens til å gje eit 50-50 svar på ein del av spørsmåla. Anten får du ein gut eller ei jente eller du er gift eller ikkje. Studentane prøvde og å rekna ut svara fordi dei trudde at eit tilordna sannsyn alltid måtte baserast på ei utrekning. Det var og ein del studentar som vegra seg for å gje si personlege meining om eit sannsyn sidan det ikkje var basert på numerisk informasjon (Albert, 2003).

Sannsyn er ikkje ein innebygd eigenskap til ei hending, men er basert på den underliggjande modellen vi brukar (Borovcnik & Kapadia, 2014b). Kva modell vi legg til grunn vil såleis vera styrande for korleis vi tolkar sannsynet for ei hending (ibid.). Jendraszek (2008) meiner det kan vera ei utfordring å skilja dei tre tilnærminga og det er ikkje nødvendigvis viktig for å forstå sannsyn i praktiske situasjonar, men dei har ein viktig funksjon for å forstå sannsyn i eit undervisningsperspektiv.

2.8 Forsking på forståing og oppfatningar i sannsyn

Med Piaget og Inhelder si forsking på 1950- og 1960-talet, går ein over til individet si oppfatning og mentale utvikling i høve sannsyn. Forsking på misoppfatning i sannsyn har i første rekkje vore utført med ein psykologisk tilnærming, men i dei seinare åra har det og vore eit interessant tema innafor matematikkdidaktikk og utdanning (Rubel, 2002).

Piaget og Inhelder vert gjerne rekna som føregangspersonar innan forsking på sannsyn, intuisjon og tenkemåte på 1950- og 60-talet (Jones & Thornton, 2005). Jones & Thornton klassifiserer forskinga i tre kronologiske periodar: Piaget perioden, post-Piaget perioden og den moderne perioden. Føremålet med Piaget og Inhelder sine sannsynsstudiar var å finna stadfesting og støtte til Piaget sin epistemologiske teori om mentale operasjonar og utviklingsstadier. Samstundes gav dei verdfull innsikt i omgrep som randomisering, utfallsrom, sannsynsfordeling og lova om store tal (ibid.).

Post-piaget perioden omfattar forskinga på 1970- og 1980-talet. I denne perioden held forskarane fram med same retning som tidlegare. Det var ei sterk interesse for å studera oppfatningar og intuisjon i sannsyn (Jones & Thornton, 2005). I denne perioden såg ein og at forsking på sannsyn frå eit matematisk utdanningsperspektiv byrja å ta form. Det meste av forskinga var tufta på ei klassisk orientering, men nokre forskarar inkorporerte og subjektiv og frekvenstilnærming. I den moderne perioden er det tendens til at ein knyter forskinga nærare klasserommet og læring og undervisning av sannsyn står sentralt (ibid.).

Det går og eit skilje mellom kven det vert forska på; elevar i skulen, både på grunnskule- og vidaregåande skule, studentar ved universitet og lærarar.

2.9 Sentrale omgrep i sannsyn

I dette kapittelet ser eg på ulike omgrep innafor sannsyn som elevane møter på både i dagleglivet og i skulesamanheng. Savard (2014) hevdar at tida frå Kahneman og Tversky sitt arbeid på 1970-talet, har omgrep som representativitet og tilgjengelegheit blitt studert i rikt monn medan andre ikkje har fått like stor merksemd. Omgrepa som vert presentert i litteraturen, har heller ikkje blitt relatert til kvarandre (ibid.). Savard meiner difor at det no er vanskeleg å ha eit breitt perspektiv på folk si oppfatning av sannsyn. I tillegg seier ho at det og eksisterer nokre epistemologiske ulikskapar mellom omgrepa. For å få ei oversikt over folk si oppfatning av sannsyn, må vi kjenna til omgrepa og lenkja dei saman. I tillegg må vi og kjenna til dei matematiske aspekta ved dei (ibid.).

2.9.1 Rettferd

Frå dei er i små, vert born merksame på omgrepa sjanse og rettferd gjennom spel som t.d. Ludo, flasketuten peikar på eller ved loddtrekning av kven som skal få lov å gjera bestemte oppgåver. Dei fleste ungdomar har ein sterk sans for rettferd utan at dei nødvendigvis har ei sterk meining om sjølve omgrepet (Bennett, 1998). Ho hevdar vidare at ideen om rettferd er intuitivt hjå born som ein del av oppfatninga deira av tilfeldigheit. Born lærer raskt at sjanse ikkje er rettferdig i deira auge. Ved tilfeldig trekking av t.d. elevar som får gjera bestemte oppgåver, vil dei raskt sjå det er mogleg at nokre born vert trekt oftare enn andre. Den same kjensla kan vi få når vi er på basar. Det kan ofte verka som om nokre vinn meir enn andre.

2.9.2 Sjanse og tilfeldigheit

Menneska si utvikling av ei forståing av omgrepet sjanse har vore særs gradvis og det var først på 1500-talet at sannsyn vart sett på som eit eige tema innafor matematikken, jf kap. 2.6. Bennett (1998) viser til at historikarar har undrast over kvifor den omgrepsmessige utviklinga på dette området har vore så langdregen. Ho meiner at årsaka til dette er vanskar med å forstå omgrepet tilfeldigheit. Bennett seier vidare at born har vanskar med å akseptera at ein tilsynelatande regulær sekvens, er like sannsynleg som ein sekvens som ser irregulær ut. Alder ser ikkje ut til å ha nokon innverknad på forståinga. Intuitivt trur vi at tilfeldige utfall bør ha ei form for variabilitet frå forsøk til forsøk (ibid.).

Moore (1990) seier at fenomen som har usikre individuelle resultat, men eit regulært mønster av utfall med mange repetisjonar, kan kallast tilfeldige. Det er ei skildring av ein type orden som er ulik den deterministiske. Elevane er gjerne kjende med spel som lotto og tipping, men dei legg meir vekt på premiane og såleis ikkje oppfattar den innebygde ordenen i uvisse.

Sjølv om vi tilsynelatande brukar omgrepet tilfeldigheit med ei felles forståing både i daglegtale og i jobbsamanheng, meiner Falk & Konold (1997) at dette er ein av dei mest flyktige og lite handfaste omgrepa i matematikken. I ein studie med elevar i vidaregåande skule og studentar på høgskule, fann dei at vi har vanskar med å skilja mellom tilfeldige og deterministiske hendingar og vi har vanskar med å avgjera tilfeldige og ikkje-tilfeldige sekvensar. I studien skulle respondentane ta stilling om ulike mønster sett saman av bokstavane O og X, var tilfeldig eller ikkje. Til dømes kan ein få mønster som vist nedanfor. Sjølv om begge sekvensane er tilfeldige, vil mange meine at dei sekvensane som er meir komplekse og mindre hugsbare slik som b), er oftare tilfeldig enn andre sekvensar (ibid.).

OXOXOXOXOXOXOXOXOXOXO

XOXXXXOOOXOOOOXOXXXOX

I ein studie av lærarstudentar si oppfatning av tilfeldigheit fann Batanero, Arteaga, Serrano & Ruiz (2014) at studentane hadde ulike oppfatningar som delvis er riktige men ikkje fullstendige. Prinsippet om årsak og verknad ligg djupt festa i oss og nokre av studentane relaterte tilfeldigheit til kausalitet. Andre studentar oppfatta tilfeldigheit som noko uføreseieleg. Dei hevda at ein ikkje kan føreseia ei framtidig hending basert på tidlegare resultat. Ei tredje oppfatning er å setja likskapsteikn mellom tilfeldigheit og likesannsyn. Det vil seia at ei hending vert oppfatta som tilfeldig dersom hendinga har same sannsynet som andre moglege hendingar i eksperimentet. Nokre studentar assosierte og tilfeldigheit med mangel på modell eller mønster. Desse studentane meinte at ei tilfeldig hending ikkje kunne sjå ordna ut. Det var og nokre få studentar som skildra tilfeldigheit som noko som ikkje kunne bli kontrollert (ibid.).

2.9.3 Uvisse

Innfor sannsyn er uvisse eit grunnleggjande omgrep. Både i dagleglivet og i skule-matematikken søkjer vi gjerne å talfesta denne uvissa. Dersom vi t.d. kastar eit tilfeldig kronestykke, er resultatet usikkert men det er ikkje vilkårleg. Viss vi føreset at kronestykket er «rettferdig», kan vi såleis få mynt eller krone. Ved mange kast, ser vi og at det nærmar seg ei fordeling med halvparten mynt og halvparten krone. Dette er noko vi på sikt kan observera og er såleis ikkje berre ein teoretisk konstruksjon (Moore, 1990).

2.10 Oppfatningar og misoppfatningar i sannsyn

I dette kapittelet refererer eg til tidlegare forsking og resultat innafor dei ulike misoppfatningane. Nokre av resultata til andre forskarar vert gjort nærare greie for i kap. 4

Resultat og analyse der eg samanliknar mine funn med desse. Såleis har eg ikkje teke med alle dei resultata eg finn relevant under dette kapittelet.

Forsking på misoppfatning i sannsyn har i første rekkje vore utført med ein psykologisk tilnærming, men i dei seinare åra har det og vore eit interessant tema innafor matematikkdidaktikk og utdanning (Rubel, 2002).

2.10.1 Representativitet

Ei vanleg misoppfatning i sannsyn er bruk av representativitetsheuristikk. Ved gjennomgang av aktuell teori finn ein at denne misoppfatninga er studert nærare av fleire forskarar (Fischbein, 1997; Shaughnessy, 1977; Tversky, 1974). Denne misoppfatninga har fått namnet sitt etter korleis mange vurderer utfallet av ei vilkårleg hending. Utfallet vert basert på kor godt det representerer dei fleste observerte utfalla i heile populasjonen (Jendraszek, 2008).

I følgje Kahneman, Slovic & Tversky (1982) er representativitet ein relasjon mellom ein prosess eller modell og ein førekomst eller ei hending som er knytt til modellen. Personar som brukar denne tilnærminga, vurderer sannsyn utifrå kva grad hendinga er representativ for prosessen. Innafor representativitet har vi ulike tilnærmingar som ignorering av grunnfrekvens (føregåande sannsyn), ignorering av utvalsstorleik, misoppfatning av tilfeldige hendingar og konjunksjonslova.

Ignorering av grunnfrekvens

Tversky & Kahneman (1974) viser i forskinga si til eit døme med ei personskildring knytt til eit utfallsrom med 100 personar der 70 av dei var ingeniørar og 30 var advokatar og omvendt. Dei fann at fleire av respondentane såg bort frå grunnfrekvensen, og berre nytta personskildringa som grunnlag for avgjersle når dei skulle vurdera sannsynet for at ein person var ingeniør eller advokat (figur 5). Sjølv om dei fekk ei mindre informativ skildring om personen såg mange av respondentane framleis bort frå grunnfrekvensen og svara at det er 50 % sjanse for at vedkommande er ingeniør (ibid). Tversky og Kahneman konkluderer med at når det ikkje vert gjeve nokre opplysningar vert førehandssannsynet brukt, høvesvis 0,7 for ingeniørar og 0,3 for advokatar. Når det vert gjeve verdilaus informasjon, vert grunnfrekvensen ignorert.

Dick is a 30 year old man. He is married with no children. A man of high ability and high motivation, he promises to be quite successful in his field. He is well liked by his colleagues.

Figur 5. Ignorering av grunnfrekvens.

Ignorering av utvalsstorleik

Denne misoppfatning er i hovudsak knytt til lova om store tal. Det var matematikaren Jakob Bernoulli som først beviste denne lova i 1713 (posthumt) i verket *Ars Conjectandi*. Lova kan oppsummerast på følgjande måte: den relative frekvensen til ei vilkårleg hending går mot det teoretiske sannsynet når talet på forsøk aukar (Encyclopedia of Mathematics, 2012).

Lova om store tal sikrar at eit stort utval er representativ i høve populasjonen, medan små utval vi variera i mykje større grad. Personar som har denne misoppfatninga, ser vekk frå grunnfrekvensen og trur at sannsynet for hendingar i eit lite utval og eit stor utval vil vera lik. Tversky & Kahneman (1971) kallar dette *«Belief in the Law of Small Numbers»*. Ved kast av mynt er det mest sannsynleg at du får 2 mynt på 3 kast medan du vil få nærare det teoretiske sannsynet for krone og mynt dersom du kastar kronestykket 300 gonger. For nokon vil det vera logisk at sannsynet vert den same for dei to hendingane, fordi dei ser berre på forholdet.

Eit mykje forska på spørsmål innafor ignorering av utvalsstorleik er ulike variasjonar av den såkalla «sjukehusoppgåva» som Tversky & Kahneman (1974) viser til (figur 6). Resultatet frå undersøkinga deira viste at over halvparten av forsøkspersonane meinte at sannsynet var om lag det same. Tversky & Kahneman hevdar at årsaken til resultatet var at ein oppfatta desse to hendingane som like representative for befolkninga som heilskap. I følgje utvalsteori, er forventa tal på dagar med meir enn 60 % gutar høgare for det minste sjukehuset fordi eit stort utval har mindre sannsyn for å avvika frå 50 % (ibid.).

Noll & Sharma (2014) har utført ein meta-analyse på sjukehusoppgåva. I følgje dei har Kahneman & Tversky si opprinnelege oppgåve blitt kritisert av m.a. Fischbein & Schnarch (1997) fordi ho er tvitydig då storleiken på utfallsrommet ikkje er oppgjeve. Andre forskarar som Bar-Hillel (1982) har stilt spørsmål om 60 % av gutefødslar er langt nok i frå dei forventa 50 % til å kunne seia at intervjuobjekta sine svar har årsak i intuisjon om representativitet (ibid.).

A certain town is served by two hospitals. In the larger hospital about 45 babies are born each day, and in the smaller hospital about 15 babies are born each day. As you know, about 50 percent of all babies are boys. However, the exact percentage varies from day to day. Sometimes it may be higher than 50 percent, sometimes lower.

For a period of 1 year, each hospital recorded the days on which more than 60 percent of the babies born were boys. Which hospital do you think recorded more such days?

- The larger hospital
- The smaller hospital
- About the same (that is, within 5 percent of each other)

Figur 6. "Sjukehusoppgåva"

Batanero et al. (1996) brukte ein variasjon av sjukehusoppgåva i si undersøking av forståing blant 14-åringar samanlikna med 18 år gamle elevar (figur 7) der ein ser på talet på gutar av nyfødde born og ikkje dagar der det vert fødd flest gutar. Dei fann at om lag 63 % av dei 14 år gamle elevane meinte dei to hendingane var like sannsynlege medan 60 % av 18-åringane hevda det same. Det var høvesvis 24 % og 27 % som hadde riktig svar (alternativ a). Forskarane seier at dette kan tyda på at elevane er tilbøyelege til å nytta representativitetsheuristikk og «lova om små tal» (ibid.).

In a certain town hospital a record of the number of boys and girls newborns is kept. Which of these cases is more likely:

a) There will be 8 or more boys in the following 10 newborns
b) There will be 80 or more boys in the 100 following newborns
c) Both a) and B) are equally likely.

Figur 7. Versjon av sjukehusoppgåva

Negativ «recency-effect» (spelaren si feilslutning) og positiv «recency-effect»

Ved gjennomgang av aktuell teori finn ein at negativ «recency-effect» og positiv «recency-effect» er studert nærare av fleire forskarar. Fischbein (1975 s. 29) definerer Recency effects på denne måten: *“Recency effects are the effects the repetition of the same outcome on* *several trials has on the subject's responses".* Thorsen (2009) har omsett desse omgrepa med negativt tilbakeblikk (negative recency-effect) og positivt tilbakeblikk (positive recency-effect).

Fischbein (1975) referer til den amerikanske psykologen William K. Estes sin «Stimulus Sampling Theory» som seier at etter ei rekkje med like utfall som t.d. KKK ved myntkast , vil individet hevda at det neste utfallet i eit forsøk og må vera det same. Jo lengre ei slik rekkje er, jo høgare er sannsynet for at individet vil føreseia likt utfall (positiv recency effects). Fiscbein viser til at Jarvik i ein studie frå 1951, kom fram til at dette ikkje var tilfelle. Individa hadde tendens til å velja det motsette i eit binært forsøk. Dette kalla Jarvik «negative recency effect». Det vil seia at ein hevdar utfallet som ikkje har førekome på ei stund, ville skje ved neste forsøk. Jarvik forklarte negative recency effects med "the gamblers Fallacy" – spelaren si feilslutning.

Tversky & Kahneman (1974) peikar på at kjernen i spelaren si feilslutning (negativ recency-effect) er at vi trur sjanse er ein sjølvkorrigerande prosess. Ved denne feilslutningane trur ein at resultatet av førre hending påverkar neste hending (ibid.). Dersom vi får mange mynt etter kvarandre ved myntkast, vil dei som har denne misoppfatning, tru at det ved neste kast kjem ei krone fordi sekvensen då vil vera meir representativ i høve fordelinga av mynt og krone i det lange løp. Dei har vanskar med å forstå at dette er uavhengige hendingar der resultatet av føregåande myntkast ikkje påverkar neste myntkast.

«Recency effect» kan og i følgje Fischbein (1975), vera eit uttrykk for at vi rasjonaliserer hendingar. Etter at ei svart kule har blitt trekt fem gonger på rad, synes det fornuftig å anta at sannsynet for å trekkja ei kvit kule har auka. Fischbein (1975) seier det slik: *«The need for rationalization, the need for prediction, and the need for human beings to rely on regularity lead them, in this case, to the use of an inappropriate deductive procedure.»*. Han hevdar og at dette fenomenet aukar med alderen fordi intuisjonane våre endrar seg etter aukande kunnskap: *"Intuitions themselves become more "rational" with age, in that they adopt strategies and solutions which are based on rational grounds."*

Konjunksjonslova

Kahneman, Slovic & Tversky (1982) hevdar at den største kontrasten mellom sannsyn og representativitet oppstår ved samansette hendingar. Dei viser vidare til at ein av dei grunnleggjande lovene innafor sannsyn er at spesifikasjonar berre kan redusera sannsynet. Eit mykje brukt døme som vert vist til, er følgjande:

Linda is 31 years old, single, outspoken, and very bright. She majored in philosophy. As a student, she was deeply concerned with issues of discrimination and social justice, and also participated in anti-nuclear demonstrations.
Which is more probable?

1. Linda is a bank teller.
2. Linda is a bank teller and is active in the feminist movement.

Figur 8. Konjunksjonslova

Sannsynet for hendingane A og B er alltid mindre eller lik sannsynet for ein av dei åleine, dvs. $P(A \cap B) \leq P(B)$. Dette kallar Kahneman, Slovic & Tversky konjunksjonslova. Feilslutninga ein ofte vil gjera i dømet ovanfor er at ein knyter informasjonen som vert gjeve om Linda, til sannsynet for at ho er både bankfunksjonær og aktiv i feministrørsla. Sannsynet for at Linda er bankfunksjonar vil etter konjunksjonslova vera større enn sannsynet for både bankfunksjonær og aktiv i feministrørsla.

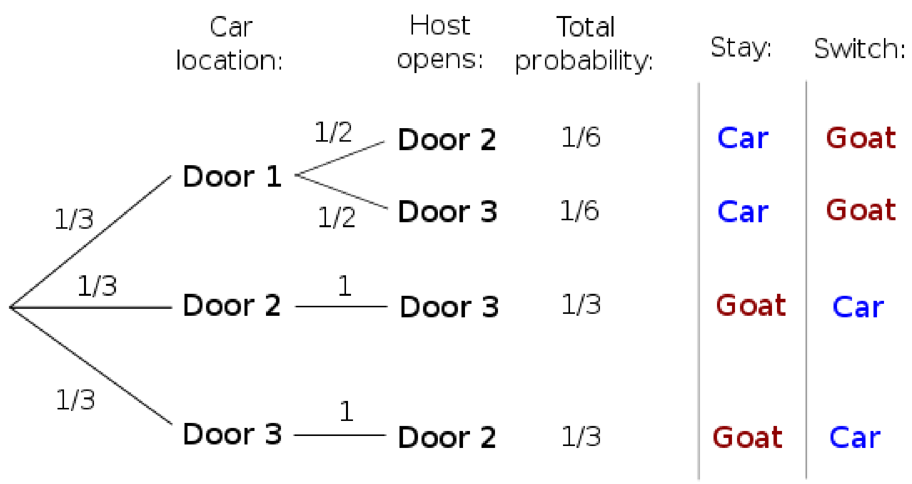
2.10.2 Lik sannsysfeil

Lik sannsynsfeil vil seia at ein oppfattar alle hendingar i ein gjeve situasjon som like sannsynlege sjølv om dei ikkje er det (Jones, Langrall & Mooney, 2007). Denne misoppfatninga har vore utpregа hjå elevar på alle nivå frå grunntrinn til universitet og på kryss av ulike kulturar (ibid.). Frå ein historisk synsstad ser ein at dette ikkje er berre noko elevar kan ha utfordringar med i dag. Den franske matematikaren d'Alembert som levde på 1700-talet, hevda at det ved kast av to myntar er tre moglege utfall; to kroner, to myntar og ein av kvar (Onstad, 2000). d'Alembert skilde såleis ikkje mellom hendingane krone-mynt og mynt-krone. I 1814 gav Pierre Simon Laplace ein definisjon av uniform sannsyn i artikkelen *Essai Philosophique sur les Probabilités:*

> *«Teorien om sannsynligheter består i å redusere alle begivenheter av samme slag til et visst antall like sannsynlige tilfeller, det er tilfeller slik at vi er like usikre på om de inntreffer og å finne antall tilfeller som er gunstige for at den begivenheten vi søker sannsynlighet for.»* (Holme, 2004).

Den underliggjande teoretiske føresetnaden for Laplace sin definisjon er likesannsyn (equiprobability) for alle moglege utfall av den tilfeldige prosessen ein studerer (Eichler & Vogel, 2014). Etter Laplace sin definisjon må ein såleis skilja mellom hendingane KK, KM, MK og MM. (Onstad, 2000) påpeikar at både d'Alembert og Laplace sine utfallsrom kan nyttast, men det er berre utfallsrommet til Laplace som tillèt bruk av uniform sannsyn der alle utfall har same sannsynet.

Det klassiske dømet der vi lett vert leia inn i likesannsyn, er Monty Hall[5]-problemet basert på ein amerikansk tv-serie «Lets make at deal» (Rubel, 2002). Programleiaren viser deg tre dører der det er ein bil bak ei dør og geiter bak dei to andre dørene. Du vel først ei dør og vil få det som er bak dersom du held fast på denne døra. Programleiaren opnar så ein av dei andre to dørene og bak denne døra er det ei geit. Så spør programleiaren deg om du vil byta dør. Spørsmålet er då om du bør halda fast ved den valde døra eller byta til den andre uopna døra utifrå ei sannsynsvurdering. Ved første augnekast vil ein gjerne tru at kvar dør har sannsynet 1/3 for å innehalda bilen slik at dei to uopna dørene då gjev same sannsynet for å vinna hovudpremien. Sidan programleiaren opnar ei dør med geit bakom, er bilen bakom døra du har vald eller bak den andre uopna døra. Føresetnaden for denne løysinga er at programleiaren veit kor bilen er. Ved å nytta Bayes regel eller teikna eit valtre (figur 9), vil ein sjå at sannsynet for at den første døra som er vald, inneheld bilen er **P(vald dør)** = 1/3 medan sannsynet for at bilen er bak den andre uopna døra, er **P(uopna dør**) = 2/3 (ibid.).



Figur 9. Monty-Hall problemet. Kjelde: www.en.wikipedia.org

[5] Monty Hall var artistnamnet til progamleiaren i den amerikanske tv-serien «Lets make at deal» som starta i 1963. Han heitte opprinneleg Maurice Halparin og var i tillegg til programleiar, songar, produsent og skodespelar. Kjelde: https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall

I ein studie utført ved University of Missouri fann Granberg & Brown at berre 13 % av 224 studentar ved lågare grad valde å byta dør (referert i Jendraszek, 2008 s. 84). Kennis (2006) gav eit tilsvarande spørsmål til 303 elevar i vidaregåande skule og fann at 16 % hadde riktig svar. Det var 56 % som meinte at sannsynet var 50/50 for val av dei to uopna dørene. I følgje Falk (1992) er dette svaret i tråd med bruken av «uniformity assumption» der ein ser vekk frå vilkår og vurderer sannsynet utifrå det nye utfallsrommet med to lukka dører. Falk seier vidare at dei som trur på uniformitet ikkje berre er talrike, men dei er og svært sikre på at dei har rett. Overtydinga deira kan sjåast på som ein primær intuisjon (ibid.). Kustos (2010) har m.a. sett nærare på kor sikre elevar på sjuande, niande og ellevte trinn er når dei svarar på sannsynsspørsmål. Statistisk analyse av spørsmål om likesannsyn (terningsspørsmålet som nemnd elles i dette kapittelet) viste at det ikkje var nokon signifikant korrelasjon mellom dei ulike trinna og svar. Kustos fann vidare at dei som svara riktig, synest å vera mindre sikre på svaret sitt enn elevar som hadde feil svar.

I Kennis si undersøking som referert til ovanfor, var det i tillegg 26 % som meinte at svaret var 1/3. Kennis viser til at desse elevane tek utgangspunkt i det opprinnelege utfallsrommet der kvar dør har 1/3 sannsyn for å bli vald. Den ovanfor nemnde oppgåva er og eit døme på vilkårsbunde sannsyn sidan det føreset at programleiaren veit kvar bilen er og opnar ei dør med ei geit bakom. Eg går elles ikkje nærare inn på diskusjon kring ulike vilkår som gjev andre løysingar til Monty Hall problemet. Dette kan ein finna nærare utgreiing om i t.d. Falk (1992) sin diskusjon kring 3-fange spørsmålet som er analogt til Monty Hall-problemet jf. t.d. Rubel (2002), Granberg (1999) eller Shimojo & Ichikawa (1989).

Det har vore fleire forskarar som har sett nærare på fenomenet likesannsyn hjå elevar og studentar på ulike trinn (Keren, 1984; Lecoutre, 1992; Konold et al., 1993; Batanero et al., 1996; Moritz & Watson, 2000; Jun & Pereira-Mendoza, 2002; Jendraszek, 2008). Nokre forskarar knyter og denne oppfatninga til enkle og samansette hendingar (Rubel, 2002). Dette er gjerne meir eit språkleg skilje enn innhaldet i ei tydeleg misoppfatninga der subjekta oppfattar utfall som like sannsynlege sjølv om dei ikkje er det.

Green (1982) studerte korleis likesannsyn er knytt til enkle hendingar og nytta m.a. eit spørsmål der respondentane (elevar mellom 10 og 16 år) skulle vurdera kva som var mest sannsynleg når ein skulle trekkja ein person frå ei gruppe med 13 gutar og 16 jenter. Det var 53 % som meinte at sannsynet var det same for å trekkja gut eller jente. Amir & Williams (1995) nytte det same spørsmålet i si undersøking av 11-12 år gamle born i England. Her var det 47 % som meinte sannsynet var likt. I tillegg gav dei eit spørsmål der samansetjinga var 15 jenter og 5 gutar. Resultatet for dette spørsmålet viste at det no berre var 11 % som meinte sannsynet var det same medan 84 % svara riktig. Amir & Williams hevdar at nokre av dei som svara likesannsyn på det første spørsmålet, kan ha nytta utfallstilnærming (jf. kap. 2.10.4). Dei seier vidare at oppfatninga om likesannsyn, kan ha årsak i eit kulturperspektiv fordi ein i den vestlege del av verda vert opplærd i t.d. spel basert på lik sjanse for moglege utfall. Jun (2000) har forska på misoppfatningar i sannsyn hjå 567 elevar på 6., 8. og 12. trinn i kinesisk skule. Ho fann at om lag 20 % av respondentane nytta likesannsyn minst ein gong i undersøkinga. Dette er likevel lågare enn det som har vore presentert i andre studiar. Jun konkluderte med at dette i hovudsak skuldast utforminga av spørsmåla og kontekst.

Omgrepet «equiprobability bias» (feilslutning om likesannsyn) er skildra i Lecoutre (1992) som ei eige misoppfatning/feilslutning på lik line med t.d. representativitet. Lecoutre og kollegaene hennar studerte resultatet for over 1000 studentar. Respondentane skulle samanlikna sannsynet for ein femmar og ein seksar når du trillar to terningar med sannsynet for å få to seksarar. Det vart utført forsøk der fleire av faktorane vart endra som t.d. terningar med ulik farge, etterfølgjande kast med terningar og endring av formuleringa i spørsmålet. I tillegg såg dei på om den sannsynsteoretiske bakgrunnen til subjekta hadde noko å seia eller om erfaring med sjansespel hadde innverknad. Lecoutre konkluderte med at ingen av desse faktorane hadde stor effekt på feilslutning om likesannsyn då om lag 50 % av respondentane viste denne tendensen. Denne misoppfatninga er såleis svært resistent mot endring hjå den einskilde (ibid.). Ved nærare studie fann Lecoutre at følgjande type argument var mest utbreidd: *«The two results to compare are equiprobable because it's a matter of chance»* (Lecoutre, 1992). Sjølv om mange ser på likesannsyn som ein ibuande eigenskap ved sjanse, kan det likevel synast som den einskilde har ulik grunngjeving for feilslutning om likesannsyn. Jun (2000) fann følgjande tre forklaringar i si studie av kinesiske elevar: kvart utfall har 50 % sannsyn, alle utfall har lik sannsyn og sannsyn som ligg nær kvarandre, er det same i praksis, jf. Green og Amir & Williams sine spørsmåla ovanfor om trekk av person i ei elevgruppe med om lag like mange gutar som jenter.

Spørsmålet med kast av to terningar som nemnd ovanfor (Lecoutre, 1992), er nytta av fleire forskarar i studiar med ulike aldersgrupper. Fischbein, Nellog & Marino (1991) utførte ein studie med 618 elevar på mellomtrinnet (9 -11 år) og ungdomstrinnet (11- 14 år) i Pisa, Itali. Den eine gruppa på ungdomstrinnet hadde fått noko opplæring i sannsyn. Forskarane ynskte å sjå nærare på nokre intuitive hindringar i sannsyn som samansette hendingar, typar av hendingar (umoglege, moglege og sikre) og ulik presentasjon av same matematiske innhald. Vurdering av utfallsrommet var sentral i dei fleste spørsmåla respondentane fekk. Forskarane nytta to ulike spørjeskjema med parallelle spørsmål i høve sannsynsproblemet, men utforminga av spørsmåla var ulik (ibid.). Fischbein, Nello, & Marino fann at om lag 47 % av elevane på mellomtrinnet og 56 % av elevane utan opplæring på ungdomstrinnet meinte hendingane fem og seks på terningane eller to seksarar hadde same sannsynet. I gruppa med opplæring var det 72 % som meinte dei to hendingane var like sannsynlege. Forskarane fann og at det var fleire av dei yngste (22,6 %) som hadde riktig svar i motsetnad til dei som hadde fått opplæring. Her var det berre 9,2 % som hadde riktig svar. Fischbein, Nello, & Marino konkluderte med at moglege hendingar ikkje vert tald opp separat slik som 6-5 og 5-6 og seier vidare at det kan synast som denne typen av ei samansett hending basert på orden, er intuitivt mangelfull.

Fischbein et al. (1991) gav og eit meir generelt spørsmål der dei spurte om kva som var mest sannsynleg å få same tal eller ulike tal når ein trillar to terningar. På dette spørsmålet var hadde riktig svarprosent auka og var 34 % for mellomtrinnet, 43 % for ordinært ungdomstrinn og 38 % for gruppa med opplæring. Forskarane hevdar at den einaste plausible forklaringa er at mange av dei som svara riktig, har ein intuitiv evne til å vurdera storleik og struktur på utfallsrommet på eit overordna nivå. Dei meiner og at denne intuitive evna betrar seg med alderen.

Nokre studiar tek og sikte på å gje ein oversikt over om formell undervisning i sannsyn har innverknad på elevane sine grunngjevingar. Batanero et al. (1996) undersøkte to grupper av spanske elevar i vidaregåande skule. Den eine gruppa (147 elevar) gjekk første året og hadde inga opplæring i emnet medan den andre gruppa (130 elevar) gjekk siste året på vidaregåande skule. Desse hadde hatt om lag ein månad med undervisning i sannsyn. Elevane fekk eit spørjeskjema med 8 spørsmål der følgjande spørsmål synast å vera det vanskelegast i følgje forskarane:

> *«When two dice are simultaneously thrown it is possible that one of the following results occurs: Result I: 5 and 6 are obtained; Result 2: 5 is obtained twice. Select the response that you agree the most: a) The chances of obtaining each of these results is equal. b) There is more chance of obtaining result I. c) There is more chance of obtaining result 2.d) It is impossible to give an answer.»* (Batanero et al., 1996)

Om lag 18 % av respondentane svara at dei to hendingane var like sannsynlege medan nær 63 % av elevane på første året og 52 % av elevane på siste året meinte det var umoglege å gje eit svar. Batanero et al. (1996) seier at dette kan tyda på at respondentane har nytta utfallstilnærming (jf. kap. 2.10.4) heller enn feilslutning om likesannsyn. Samstundes var dette som nemnd, eit utfordrande spørsmål for elevane. Det var høvesvis 16 % og 19 % som hadde riktig svar av dei to gruppene. Forskarane konkluderer elles med at heile undersøkinga viser at elevane har dei same utfordringane som tidlegare studiar har vist, sjølv etter formell opplæring (ibid.). Nokre av forskjellane på svara som er gjeve i dei ulike undersøkingane, kan og skuldast kva svaralternativ respondentane kan velja mellom. I Batanero, Serrano, & Garfield (1996) si undersøking kunne som nemnd, respondentane velja alternativet: det er umogleg å gje eit svar.

Eit anna moment er om ei misoppfatning eller intuisjon synast å endra seg med alder. Som vi kan sjå ut frå nokre av undersøkingane nemnd ovanfor, kan det synast som denne misoppfatninga førekjem i ulike aldersgrupper. Fischbein & Schnarch (1997) undersøkte fem grupper av elevar på femte, sjuande, niande og ellevte trinn i tillegg til ei gruppe lærarstudentar som studerte matematikk. Ingen av dei hadde fått opplæring i sannsyn. Respondentane fekk m.a. spørsmålet om det er same sannsynet å få ein femmar og ein seksar som to seksarar når du trillar to terningar. På dei to yngste trinna var det 70 % som meinte hendingane var like sannsynlege medan det var 75 % av elevane på dei neste to trinna som meinte det same. Blant lærarstudentar var det 78 % som hevda det var same sannsynet for dei to hendingane. Fordelinga av riktig svar var høvesvis 15 %, 20 %, 10 %, 25 % og 6 %. Fischbein & Schnarch hevdar såleis at denne misoppfatninga var vanleg og stabil i høve alder.

Oppfatninga *«equiprobability bias»* som ei eige misoppfatning, er som nemnd skildra i Lecoutre (1992) og byggjer på forskinga til Lecoutre med fleire. Jendraszek (2008) som har studert misoppfatningar i sannsyn hjå lærarstudentar, hevdar at omgrepet kan vera forvirrande fordi eit utfallsrom i seg sjølv kan ha likesannsynlege utfall. Ho viser her til at hendinga «eksakt ei krone» når du kastar to myntar, ikkje er eit enkeltutfall men eit sett med to utfall, KM og MK. Då vil settet av utfall {KM, MK, KK, MM} vera like sannsynlege kvar med sannsynet 1/4. Jendraszek seier at feilslutninga om likesannsyn kunne såleis vore kategorisert som feil å sjå moglege utfall i eit utfallsrom og samansetjinga av desse.

2.10.3 Vilkårsbunde sannsyn, avhengige og uavhengige hendingar

I kapittel 2.10.2 om likesannsyn vart det gjort nærare greie for Monty-hall problemet. Sjølv om dette problemet og kan vera døme på misoppfatningar i likesannsyn, er det samstundes eit døme på vilkårsbunde sannsyn. Svaret er m.a. avhengig av kva kjennskap programleiaren har om kva som er bak dørene. Falk (1989) viser til at mange spørsmål om usikre hendingar, både i dagleglivet og i teoretiske kontekstar, er avhengig av relevant informasjon og at vi vurderer ulike vilkår. Talfesting av uvisse kring hendingar vert såleis uttrykt som vilkårsbunde sannsyn (ibid.).

Falk (1986) påpeikar at sjølv om den formelle definisjonen av sannsynet for hending A føresett hending B, P(A | B), i seg sjølv kan synast enkel, ser ein at elevane har misoppfatningar og vanskar med omgrepet. Ho seier vidare at definisjonen av kva hending som set vilkåret, ofte er utfordrande og viser til trekort-problemet som døme (s. 293):

> *«Three cards are in a hat. One is blue on both sides, one is green on both sides, and one is blue on one side and green on the other. We draw one card blindly and put it on the table as it comes out. It shows a blue face up. What is the probability that the hidden side is also blue?»*

I følgje Falk vil dei fleste intuitivt hevda at sannsynet er ½. Dei føreset då at kortet som er grønt på begge sider, er ute. Dei to attverande korta vert såleis oppfatta som like sannsynlege (ibid.). Falk forklarer spørsmålet med at det er riktig at kortet med to grøne sider ikkje kan liggja på bordet, men dette er ikkje vilkåret vi kan rekna ut sannsynet i frå. Vi må oppfatta dei seks ulike sidene som utfallsrommet der alle sidene er like sannsynlege. Vilkåret vi må ta utgangspunkt i er hendinga «blå side opp». Utifrå dette er det to av tre sider som har blått på baksida, slik at svaret er 2/3 (ibid.). Det er fleire forskarar som har nytta dette spørsmålet i studien sin. Bar-Hillel & Falk (1982) gav dette spørsmålet til 53 førsteårs psykologistudentar. Nær 66 % av dei meinte at svaret var 1/2. Rubel (2002) har funne eit liknande resultat i si undersøking av m.a. elevar på 11. trinn i vidaregåande skule. Her var det 62 % som meinte at sannsynet var 1/2.

Ei anna utfordring vi kan ha med vilkårsbunde sannsyn er at vi ikkje skil mellom P(A | B) og P(B | A) (Falk, 1986). Det er særleg innafor tolking i ein medisinsk kontekst dette er aktuelt der sannsynet for ein sjukdom gitt positivt testresultat, vert feilaktig likestilt med sannsynet for positivt resultat gitt at ein har sjukdomen (ibid.). Eit aktuelt døme er å sjå på sannsynet for å vera smittta med HIV dersom testen viser eit positivt utslag. I ein folkesetnad er sannsynet for å vera smitta med HIV sett til 0,11 %. Dersom du er smitta, vil testen gje positivt utslag i 98 % av tilfella. Dersom du ikkje er smitta, vil testen gje positivt utslag i 0,2 % av tilfella. Ved bruk av Bayes setning vert sannsynet P(sjuk | positivt utslag) om lag 35 %.

Ei anna utfordring med vilkårsbunde sannsyn er at vi oppfattar vilkåret som kausalitet (Falk, 1986). Det såkalla «Falk-fenomenet» som er skildra av Falk (1986, 1989), viser at mange ser bort frå informasjonen som vert gjeven. I ei urne er det fire kuler, 2 svarte og 2 kvite, og vi trekkjer to kuler og ser at den første kula er kvit. Når vi veit at denne første kula er kvit, er sannsynet for at den andre kula og er kvit gjeve ved $P(K_2|K_1) = \frac{1}{3}$. I eit anna tilfelle har vi same talet på kuler i ei urne og skal trekkja to av dei. No ser vi ikkje kva farge den første kula vi trekkjer har, men vi ser at kule nr. 2 er kvit og då er det to svarte og ei kvit kule som må vurderast i høve det første trekket. Sannsynet for $P(K_1|K_2)$ er såleis $\frac{1}{3}$. Falk hevdar at nokre vil påstå dette ikkje er lovleg medan mesteparten av dei som svarar, seier at sannsynet er 1/2. Desse elevane grunngjeve svaret med at før første trekk har ein ikkje utført andre trekket og at første ballen ikkje vert påverka av om andre ballen er svart eller kvit. Dei baserer såleis svaret sitt på korleis forholdet mellom svarte og kvite ballar er i krukka før eksperimentet uavhengig av seinare utfall. Det er såleis mot-intuitivt at ei etterfølgjande hending kan seia noko om sannsynet av ei føregåande hending. Argumentasjonen til elevane syner at dei har ei kausal tilnærming til hendinga. Utfallet av det andre trekket er årsaksmessig avhengig av første trekket, medan det motsette er ikkje er tilfelle. I det første tilfellet der $P(K_2|K_1) = \frac{1}{3}$, er hendinga kompatibel med den tidsmessige forståinga vår medan hendinga $P(K_1|K_2)$ er likegyldig i høve tidsaksen (Falk, 1986).

2.10.4 Utfallstilnærming

Ved utfallstilnærming vil ein ikkje sjå på sannsynet i seg sjølv, men om utfallet vil skje eller ikkje. Ein oppfattar høgt sannsyn for ei hending som at utfallet vil henda og lågt sannsyn som at utfallet ikkje kjem til å henda. I utfallstilnærming vert ofte sannsynet vurdert i høve «ankerverdiane» 100 %, 0% og 50 % som kan omsetjast til meiningane «ja», «nei» og «eg veit ikkje» (Konold, 1991).

Amir & Williams (1995) hevdar at persona som nyttar denne tilnærminga undervurder informasjon om frekvensen. Amir & Williams nytta nokre av same spørsmål som Konold (1989), i si undersøking av 11-12 år gamle elevar. Dei vart mellom anna spurt om «ver-spørsmålet» der respondentane skulle vurdera kva det tyder når vermeldaren seier det er 70 % sjanse for regn i morgo. I eit anna spørsmål vart det opplyst at ein sekssida terning var måla svart på fem sider og kvit på ei side. Respondentane skulle avgjera kva som har sannsyn av å få svart seks gonger eller fem svarte og ei kvit når du trillar terningen seks gonger. Generelt synast respondentane i undersøkinga å bruka utfallstilnærming ganske ofte, men ikkje nødvendigvis systematisk på tvers av spørsmåla (ibid.). I følgje Amir & Williams (1995) var det om lag 46 % som svara i samsvar med utfallstilnærminga på ver-spørsmålet medan 23 % tydleg nytta denne tilnærminga i terningspørsmålet. Amir & Williams seier at dette kan skuldast at ver-spørsmålet vert sett på som noko meir realistisk som ikkje treng talfestast. Dette kan og vera døme på korleis kontekst påverkar utfallstilnærminga.

2.10.5 Variasjon

I følgje Reading & Shaughnessy (2004) har forsking vist at det kan vera omgrepsmessige band mellom elevane si forståing av variasjon i eit datasett og forståing av utfallsrommet i eit sannsynseksperiment. Reading & Shaughnessy seier det slik:

> *«The probability question is: What is the range of all possible outcomes, and which ones are more likely to occur than others (i.e., what is the sample space)? The statistical question is: If we repeat a probability experiment many times, what sort of variation in outcomes do we observe, and what is the range of the more likely outcomes (i.e., what interval captures most of our trials)?»*

Det er ulike spørsmål knytt til vurdering kring variasjon i sampling (Reading & Shaughnessy, 2004). Eit av desse er kopla til representativitet (jf. kap.2.10.1), der ein trur at små utval gjev pålitelege representasjonar av foreldrepopulasjonen. Innafor denne forskinga har ein m.a. funne at respondentane legg større vekt på senter eller gjennomsnitt av populasjonen i staden for spreiing og variasjon når dei estimerer sannsynet for ei hending. Forsking har og vist at respondentane har låg intuisjon om korleis utfalla er fordelt rundt sentrum av ein binomisk fordeling (ibid.). Eit anna tema innafor forskinga er knytt til spenninga mellom variabilitet og representativitet der ein ser på moglegheitene for at for mykje variasjon er i konflikt med spørsmålet om eit utval er representativt for populasjonen (ibid.).

Reading & Shaughnessy (2004) viser til ei forsking på forståing av variasjon hjå 400 elevar på 4. til 6. trinn i Australia, New Zeland og USA og 700 elevar på vidaregåande trinn i USA. I den eine versjonen fekk elevane presentert ein situasjon der ein har 100 drops i ei skål, 50 raude, 30 gule og 20 blå. Elevane skulle vurdera kor mange raude dei forventa å få når ein tilfeldig tok opp 10 drops frå skåla. Dei skulle og seia noko om talet på raude når forsøket vart repetert seks gonger (med tilbakelegging). Reading & Shaughnessy (2004) seier at det i svara frå elevane, kom fram nokre klare kategoriar. Nokre av elevane viste at dei forstod variasjon, men dei meinte likevel at alle moglege utfall for raud ville skje. Dette knyter Reading og Shaughnessy til likesannsynsmodellen fordi elevane meinte at alle variasjonar av talet på raud hadde same sjanse for å henda. Dersom ein har liten kunnskap om variasjon som omgrep eller har tendens til å bruka likesannsyn eller utfallstilnærming, vil ein gjerne gje opp for mange raude eller at vi får om lag same utfallet kvar gong vi trekkjer 10 seigmenn (ibid.).

2.10.6 Enkle og samansette hendingar

Utrekning av sannsynet for hendingar er basert på informasjon om utfallsrommet. Når vi kjenner og forstår utfallsrommet, er vi langt på veg til å løysa problemet (Bryant & Nunes, 2012). For enkle hendingar som å trilla ein terning eller trekkje ei kule frå ei mengd, ser vi det går greitt for dei fleste elevane. Det kan bli ofte bli meir utfordrande for samansette hendingar. Dette omgrepet kan referera til hendingar slik som *A* eller *B*, *A* og *B* eller den komplementære hendinga til *A*. I tillegg kan omgrepet samansette hendingar vera eit to-steg eller to-dimensjonalt tilfeldig eksperiment slik som t.d. kast av to terningar samstundes (Polaki, 2005). I denne oppgåva legg eg til grunn Polaki si tolking der samansett hending vert sett på som det sistnemnde.

Den vanlegaste feilen ein gjer i slike tilfelle er å tenkja lineært og ikkje multiplikativt (ibid.). Keren (1984) utførde ein studie av universitetsstudentar på lågare grad for å sjå korleis dei tolka utfallsrommet for ei samansett hending. Respondentane fekk følgjande oppgåve[6]:

Dan får ein mynt når han trekkjer eit svart kort frå ein kortstokk, og Mike får ein mynt dersom det er eit raudt kort. Kva er mest sannsynlig av hendingane: a) ein av gutane får tre myntar b) ein av gutane får to myntar og den andre ein mynt c) dei to ovanfor nemnde moglegheitene er like sannsynlege.

[6] Mi omsetjing

Vi får då følgjande utfallsrom U = {DDD, DDM, DMD, DMM, MDD, MDM, MMD, MMM} og ser at det er størst sannsyn for svaralternativ b. Keren undra seg over at nesten halvparten av respondentane meinte at hendingane var like sannsynlege medan andre halvparten svara riktig (alternativ b). Ingen meinte at det vart størst sannsyn for at den eine guten fekk 3 myntar. Forsøket vart utført med fleire grupper med ulike tilleggsspørsmål. I tillegg til opprinneleg spørsmål fekk den tredje gruppa eit spørsmål om å lista opp alle dei 8 moglege utfalla av fordeling av myntar mellom dei to gutane. No var det om lag 36 % som meinte at dei to hendingane var like sannsynlege, medan resten hadde riktig svar. Keren hevdar at det utfallsrommet den einskilde legg til grunn, kan forklara ein del av variasjonen i respondentane sine svar. I det siste tilfellet der respondentane skulle liste opp dei moglege utfalla, ser ein at svarprosenten for riktig svar auka monaleg.

2.11 Avsluttande kommentarar

I dette kapittelet har eg teke for meg ulike omgrep knytt til sannsyn og oppfatningar og misoppfatningar vi kan finna hjå elevane i tillegg til overordna omgrep om forståing og tenking. Ifølgje Falk & Konold (1997), er tilfeldigheit ein av dei mest flyktige og lite handfaste omgrepa i matematikken. Likevel er vurdering av tilfeldigheit og uvisse det første steget for å løysa eit sannsynsproblem. Bryant & Nunes (2012) seier det slik: *«Randomness is the hallmark of any probability problem»*. Om vi kjenner moglege utfall for ei hending, kan vi rekne ut sannsynet for kvar av dei sjølv om vi ikkje kan seia noko om kva for eit utfall som vert det neste (ibid.). Om vi legg til grunn ei klassisk tilnærming, må vi m.a. avgjera om eit forsøk i ei rekkje hendingar er avhengig eller uavhengig av føregåande hending. Ein anna faktor vi og må ta omsyn til er om utfalla er likesannsynlege (jf. kap. 2.10.2).

I etterfølgjande kapittel gjer eg greie for resultata av spørjeundersøkinga mi og samanliknar desse med tidlegare studiar. Som nemnd innleiingsvis, gjer eg ikkje greie for alle dei tidlegare undersøkingane eg finn interessant i høve studien min i dette teorikapittelet. Eg har likevel freista å gje eit oversyn over relevant litteratur, definisjon av aktuelle omgrep og til ei viss grad resultat av tidlegare forsking som til saman dannar eit teoretisk rammeverk som eg set forskinga mi inn i.

3 Forskingsdesign og metode

Dette kapittelet tek for seg vurderingar kring val av metode, pilotstudie, gjennomføring av sjølve studiet for masteroppgåva, etiske vurderingar, reliabilitet og validitet.

Forsking kan sjåast på som ein aktivitet som har til føremål å svara på eller belysa spørsmål om kva som går føre seg og kva som kan ha ført til dette. Vi kan skilja mellom nomotetisk forsking slik som innafor naturvitskapen der ein søkjer etter lover som er allmenngyldige, eller idiografisk forsking der enkelthendingar spelar ei viktig rolle Kleven, Tveit & Hjardemaal (2011). Empirisk pedagogisk forsking kan seiast å vera i ein mellomposisisjon. Vi studerer t.d. både enkeltindivid og grupper og skulen som institusjon. I nokre tilfelle søkjer vi etter generelle konklusjonar samstundes som ein er open for ulikskapar som kjem fram (ibid.)

Føremålet med denne studien er m.a. å sjå nærare på kva oppfatningar og misoppfatningar elevar i yrkesfag har innafor sannsyn som ein del av kravet til matematisk kompetanse den einskilde treng, både i arbeidsmarknaden og som deltaktar i samfunnet elles (Mason et al., 2015). Eg samanliknar m.a. funna mine med andre studiar og søkja å finna ut meir om eventuelle misoppfatningar og kva tankesett og system elevane brukar for å finna svara sine.

Det er ulike syn på kva som er avgjerande for val av metode i eit forskingsarbeid. I følgje Christoffersen & Johannessen (2012) er val av metode styrt ut frå undersøkinga si problemstilling. Vi kan og seia at det er framgangsmåtar vi brukar for å svara på eller belysa dei spørsmåla vi har stilt eller det er framgangsmåtar vi brukar for å få kunnskap (Kleven et al., 2011). Krumsvik (2013) trekkjer og inn den vitskapsmessige ståstaden til forskaren og seier det på følgjande måte: « Kva for type forskingsdesign ein skal nytte når ein skal drive forsking, er heilt avhengig av kva for forskingsspørsmål ein opererer med. For å avgjere dette må ein også først halde seg til og kjenne til den forskingskonteksten og diskursen det er snakk om». I ytste konsekvens vil nokre forskarar sjå på epistemologi og metode som synonyme og såleis setja likskapsteikn mellom t.d. kvantitativ metode og positivisme (Johnson & Onwuegbuzie, 2004).

Kleven et al. (2011) hevdar at val av metode i ei undersøking bør gjerast utifrå vurderingar av kva metodane kan tilby i høve problemstillinga enn å velja utifrå eit reint vitskapsfilosofisk grunnlag.

I følgje Creswell & Garrett (2008) må forskarar innafor utdanning og pedagogikk ha ei stor verktykasse av metodar og design fordi forskinga omfattar komplekse og tverrfaglege forskingsspørsmål. Dei seier vidare at forskingstilnærmingane utviklar og endrar seg i takt med dei meir komplekse og samanvevde globale samfunna våre. Mixed methods som nyttar både kvantitativ og kvalitativ tilnærming, kan såleis vera eit alternativ som gjev oss meir innsikt i det vi ynskjer å forska på.

3.1 Mixed methods – vitskapsteoretiske vurderingar og definisjon

Det er nytta både kvantitativ og kvalitativ metode i studien med utgangspunkt i den metodiske retninga kalla mixed methods. Dette valet er gjort utifrå at det var ynskjeleg å få kvantitative data for å kunne samanlikna med tidlegare forsking samstundes som det var ynskjeleg å forklara resultata meir i detalj. Nedanfor vil eg koma nærare inn på vitskapsteoretiske vurderingar og val av forskingsdesign innafor denne retninga.

Mixed methods er formelt sett ei relativ ny metodisk tilnærming innafor forsking. Det har vore ulike tolkingar og usemjer kring ulike tema som design, forskingsspråk, korleis kvantitative og kvalitative data skal integrerast og spenninga mellom forskingsparadigma i kvalitativ og kvantitativ forsking (Creswell & Garrett, 2008). Tashakkori & Teddlie (2010) hevdar på si side at bruken av kvalitativ og kvantitativ tilnærming i same studie ikkje er ny, men har djupe røter i samfunnsvitskapleg forsking. Likevel kan retninga seiast å vera av nyare dato då ein no innafor forsking oppfattar det som eit alternativ til ein formell metode på lik linje med t.d. kvalitative metodar. Dei seier vidare at denne hovudretning oppstod som ein respons på det dei kallar den ukorrekte dikotomien mellom dei kvantitative og kvalitative forskingstradisjonane.

Historisk sett har val av metode i mange høve vore basert på forskarane sin filosofiske ståstad og syn på konstruksjon av kunnskap. Frå ein vitskapsbasert synsvinkel, har ein gjerne sett likskapsteikn mellom positivisme og kritisk realisme og bruk av kvantitativ tilnærming medan den kvalitative tradisjonen har vore kopla til ulike variantar av konstruktivisme (Kleven et.al. 2011; Lund, 2012). I følgje Creswell & Plano Clark (2011) har all forsking eit vitskapsteoretisk (filosofisk) fundament som ligg til grunn for korleis vi skaffar oss kunnskap. Dei hevdar at dette og gjeld mixed methods på same måte som retninga har ei historisk utvikling å sjå tilbake på.

Lund (2012) hevdar at mixed methods kan sjåast på ein pragmatisk tilnærming fordi forskingsspørsmåla i empiriske studiar er det viktigaste og ikkje vitskapsfilosofi som bestemmande for val av metode. Creswell & Plano Clark (2011) på si side meiner at ein kan nytta ulike paradigme i ein mixed methods studie sjølv om pragmatisme ofte har vore forbunde med mixed methods. Trass i at paradigma ikkje alltid er kopla direkte til framgangsmåtar i forsking, er dei likevel med å utforma desse (ibid). Både kunnskap, erfaring og haldningar er noko forskaren tek med seg inn i ein studie (Nilssen, 2012). Studien har såleis eit rammeverk som er utleia av forskaren sin forforståing, men dette er ikkje nødvendigvis den teorien som vert brukt til å tolka og forklara funna. Det kan heller sjåast på som teoretiske briller som ein ser og oppfattar verda gjennom og som gjer at vi ser det vi ser (ibid). Vi må likevel passa på at vi ikkje let det teoretiske rammeverket vera så styrande at vi ikkje ser at t.d. omgrep utanfor rammeverket vårt kan forklara funna våre (ibid). Nilssen (2012 s. 66) viser her til Ely et. al som samanliknar dette med Askepott sine stesystre som prøver å pressa foten ned i glasskoen.

Creswell & Plano Clark (2011) hevdar at dersom ein studie innafor mixed methods startar med ei undersøking, brukar forskaren implisitt eit postpositivistisk paradigme. Dersom forskaren i neste faste skiftar til ein kvalitativ framgangsmåte for å fylgja opp og forklara resultata frå undersøkinga, kan det synast som paradigme skiftar til ein meir konstruktivistisk synsvinkel. Paradigme er såleis relatert til typar av design og eit paradigme kan endra seg i løpet av studien (ibid). I neste steg kan forskaren nytta sine teoretiske briller som ein utformar spørsmåla og tolkar resultata i som t.d. feminisme eller situert læring (Nilssen, 2012).

I litteraturen og i ulike forskingsprosjekt er det nytta ulike tolkingar og framgangsmåtar ved bruk av Mixed methods (Creswell, 2010). Han seier vidare at det dei siste åra har det vore omfattande diskusjon om korleis ein skal definera mixed methods. Det har vore ein endring frå slutten av 1980-talet der fokus var på bruken av multiple metodar. Seinare har det gått mot ein meir metodologisk orientering. Det vil seia frå prosedyrar for datainnsamling, analyse og moglege tolkingar til ein metodologi som omfattar alt frå vitskapsteoretisk grunnsyn til det ferdige resultatet (ibid).

3.2 Val av metode og design i oppgåva

I denne oppgåva nyttar eg Johnson, Onwuegbuzie & Turner (2007) sin definisjon av mixed methods:

> *«Mixed methods research is the type of research in which a researcher or team of researchers combines elements of qualitative and quantitative research approaches (e.g., use of qualitativeand quantitative viewpoints, data collection, analysis, inference techniques) for the broad purposes of breadth and depth of understanding and corroboration.»*

På eit overordna plan nyttar eg såleis ei pragmatisk tilnærming fordi det eg ynskjer å studera, er det avgjerande for val av metode. Utifrå denne tilnærminga kan ulike metodar sjåast på som ulike verkty for å svara på ulike spørsmål (Kvale & Brinkmann, 2009). Dei seier det slik: «Kvalitative metoder handler om *hva slags* og kvantitative metoder *hvor mye av en slags*»[7].

I følgje Tashakkori & Teddlie (2010) har mixed methods delvis utspring frå metode-triangulering. Føremålet med metodetriangulering kan delast i to hovudretningar: forståing og stadfesting av funn. Figur 10 illustrerer korleis ein kan oppfatta triangulering som metodisk tilnærming. Her vert kvantitative og kvalitative data samla inn og analysert parallelt og så slått i hop i tolkinga (Creswell & Garrett, 2008).

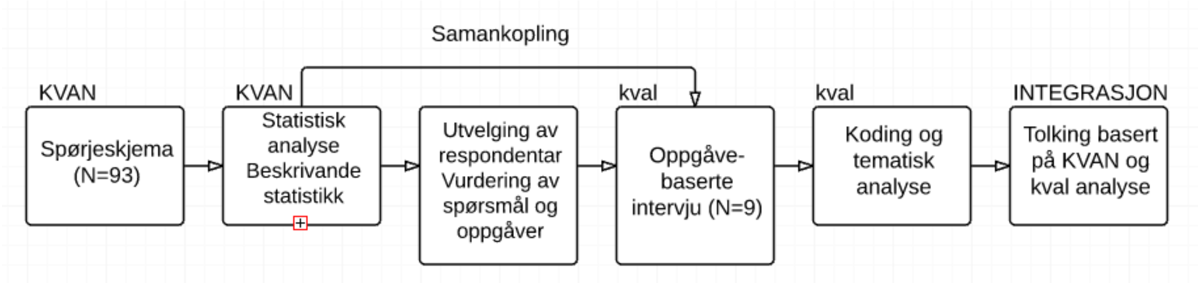
Figur 10. Triangulering

I undersøkinga mi har eg vald å bruka ein sekvensiell forklarande design (explanatory sequential design) i samsvar med Creswell & Plano Clark (2011) sine hovudmodellar innafor mixed methods. Dette designet startar med innsamling og analyse av kvantitative data følgd opp av innsamling av kvalitative data og analyse, før ein til slutt samanfattar dette i ein overordna analyse og tolking. Føremålet med denne typen design er å ta utgangspunkt i og å forklara dei kvantitative resultata meir i detalj både forventa og uventa resultat heller enn å få ei stadfesting av dei kvantitative dataa.

[7] Forfattarane si utheving

Innafor mixed methods litteraturen har ein utvikla ulike notasjonssystem som m.a. viser kva metode som har prioritet i studien (Creswell & Plano Clark, 2011). Dersom ein t.d. legg mest vekt på kvalitativ metode vil ein skrive det slik: KVAL → kvan. I figur 11 har eg vist ein illustrasjon over kva design eg i utgangspunktet har vald for studien. I utgangspunktet kan det synast som det er ei lineær retning frå kvantitativ til kvalitativ metode. I visse høve kan det likevel vera aktuelt å gå tilbake frå kvalitativ analyse til kvantitativ analyse, for å sjå nærare på dataa eller utføra fleire statistiske undersøkingar av dei data ein har funne. Dette vart ikkje gjort i denne studien.

I den kvantitative delen har eg brukt ein skriftleg kartleggingstest og som kvalitativ metode har eg brukt oppgåvebaserte intervju. Dette forklarer eg meir i detalj i kap. 3.5.2.



Figur 11. Sekvensiell utforskande design (etter Ivankova 2014)

3.3 Løyve

Prosjektet var meldepliktig etter personopplysningslova og det vart innhenta naudsynt løyve frå Norsk samfunnsvitenskaplig datatjeneste AS (NSD) i skriv dat. 14.05.14.

Rektor ved skulen gav elles løyve til at data kunne innhentast i dei ordinære matematikktimane til elevane dersom faglærar meinte det var forsvarleg i høve bruk av tid. I tillegg gav rektor løyve til å nytta elevane sine terminkarakterar i matematikk til bruk i statistikk. Det vart på førehand sendt ein førespurnad til aktuelle lærarar om prosjektet og stipulert tidsbruk for datainnsamlinga. I samråd med faglærarar vart det avgjort at to grupper ikkje vart med i prosjektet då dei burde nytta all mogeleg tid til ordinære aktivitetar grunna faglege utfordringar.

3.4 Pilottest

Det er alltid ynskjeleg å gjennomføra ein pilotstudie før sjølve datainnsamlinga for å sikra at både spørsmåla og måleverktyet fungerer bra (Bryman, 2012). Pilotstudie vart gjennomført med 40 respondentar i begynnelsen av juni 2014. Desse respondentane hadde gjennomgått opplæring i sannsyn i løpet av skuleåret og var ferdig med 13-årig skulegang våren 2014. Dei er såleis ikkje med i same grunnlaget som deltok i den ordinære undersøkinga i 2015.

Det var 28 spørsmål i spørjeskjemaet og vart laga eit oppsummeringsnotat med resultat frå denne undersøkinga. I tillegg vart det gjennomført 2 intervju etter spørjeundersøkinga. Det vart gjort nokre mindre språklege endringar i eit par av oppgåvene og talet på spørsmål vart justert ned til 26. Spørsmåla såg i stor grad ut til å dekkja dei misoppfatningane dei vart meint til å avsløra.

Følgjande spørsmål vart teke ut av spørjeskjemaet då respondentane tilsynelatande ikkje forstod spørsmålet eller dei ikkje gav meining, som ein respondent skreiv: «dette var dumme spørsmål» om spørsmål 12 og 26 . Det var 40 % som ikkje svara på spørsmål 22B.

Seks elevar i klassen gjer det same forsøket som i oppgåva ovanfor (kvar har si skål med 100 seigmenn). Skriv ned kor mange raude seigmenn du trur kvar av dei seks elevane får når dei tek 10 seigmenn frå skåla si. Elev 1:____ Elev2:____ Elev 3:_____ Elev 4: ____ Elev 5:_____ Elev 6:_____ Kvifor er dette dei mest sannsynlege tala for raude seigmenn?

Ei undersøking av korleis sal av iskrem og drukningsulykker varierer, viser at når sal av iskrem aukar druknar fleire. Bør myndigheitene stoppa salet av iskrem for å redda folk frå å drukne? O Ja O Nei

Ei undersøking viser at i tidsrommet 1997 – 2011 har talet på ungdom som brukar pc-brukarar gått opp og talet på ungdom som røykjer ned. Bør ein oppmoda ungdom til å bruka pc for å få ned talet på røykjarar? ◯ Ja ◯ Nei ◯ Veit ikkje Kvifor meiner du det?

Det var ynskjeleg å testa respondentane si forståing av både variasjon Eg valde difor å behalda spørsmål 20 som og vart nytta i pilottesten (sjå vedlegg):

Spørsmåla som skulle testa respondentane si forståing av korrelasjon og kausalitet, vart erstatta med spørsmål 25 i vedlagt spørjeskjema. Utifrå at dette spørsmålet heller ikkje synast å gje noko oversikt over elevane si forståing av kausalitet, har eg vald å halda det utanfor analysen min.

3.5 Datainnsamling

Datainnsamlinga gjekk føre seg i to sekvensar slik som nemnd i kap. 3.2. Det vart først samla inn data frå 93 elevar i vg1 og vg3 der dei skulle løysa ulike oppgåver innafor sannsyn. Eg kjem nærare inn på val av respondentar i kap. 3.5.1. Resultatet frå spørjeskjemaet vart førebels analysert. Deretter vart det utført 9 intervju med utgangspunkt i oppgåvene frå spørjeskjemaet.

3.5.1 Kvantitativ datainnsamling - kartleggingstest

Eit av hovudspørsmåla i undersøkinga er å samanlikna resultat frå mi undersøking med tidlegare forsking på området. Oppgåvene mine tek utgangspunkt i spørsmål som er brukt i tidlegare studiar og litteratur på området (jf. kap. 2). Dei er vidare vurdert utifrå kva kompetanse ein kan forventa at elevane har tileigna seg ved gjennomgang av sannsyn etter læreplanen for 10. årstrinn, og utifrå kva nivå (alder eller trinn i skulen) spørsmåla er brukt i andre undersøkingar.

Oppgåvene er utforma med tanke på å avdekkja kva misoppfatningar elevane har i sannsyn og det bør etter mi vurdering helst vera fleire spørsmål som søkjer å avdekka det same slik at ein kan samanlikna desse. Sjølv om ein på førehand har sett seg godt inn i kva oppgåvene er meint å måla, må ein likevel vera merksam på og open for at respondentane kan svara og grunngje på ein lite føreseieleg måte. Det kan vera utfordrande å laga eit godt spørjeskjema der spørsmåla er eintydige og skrive på ein enkel måte (Kleven et a. 2011). Føremålet med å henta spørsmål frå andre undersøkingar er at det er mogleg å gjera direkte samanlikningar, samstundes som dei ofte har gjennomgått relibilitets- og validitetstestar Christoffersen & Johannessen (2012). Samstundes må ein freista å avgrensa talet på oppgåver/spørsmål slik at respondentane ikkje går lei. Sjølve analysen kan og fort bli lite handterbart om ein har for mange spørsmål (ibid). Det er 26 spørsmål i spørjeskjemaet og desse er vurdert utifrå pilotstudien som vart gjennomført i mai 2014. Som nemnd i kap. 3.4, vart det gjort nokre endringar i høve til piloten. Christoffersen & Johannessen (2012) seier at deira erfaring tilseier at når ein overstig om lag 30 spørsmål, kan analysen for bli for omfattande. Dette må ein likevel sjå i samanheng med omfanget av studien og kva type studie det er.

I testen er det 23 lukka spørsmål og 3 spørsmål som er opne. Føremålet med lukka spørsmål er m.a. at det er enkelt å handtera svara og vi kan få eit betre samanlikningsgrunnlag. I tillegg kan svaralternativa gje ein peikepinn på kva som er meint med spørsmålet (Bryman, 2012). Ulempe med slike spørsmål kan vera at ein går glipp av interessante funn fordi dei ikkje er dekka av spørsmåla (ibid). Føremålet med opne spørsmål er at respondentane kan svara med sine eigne ord og ein kan få uføresette men interessante svar. Vi kan og få ein oversikt over respondentane sine kunnskapar og forståing i måten dei ordlegg seg på (ibid). Ulempe er at dei krev større innsats hjå respondenten og det kan vera tidkrevjande å koda svara (ibid). Utforminga av dei opne spørsmåla mine, krev likevel eit rimeleg standardisert svar fordi respondentane skal vurdera konkrete situasjonar og ta utgangspunkt i talmessige tilhøve.

Kartleggingstesten vart utført i elevane sine ordinære matematikktimar med faglærar og meg til stades i veke 4 og 5 i 2015. Elevane brukte mellom 20 og 60 minutt på testen. Det fleste elevane var positive og gav uttrykk for at dei såg på dette som litt variasjon til oppgåvene i læreboka. Det var om lag 4-5 elevar som ikkje ynskte å svara på testen og dei arbeidde difor med ordinære matematikkoppgåver. Nokre få elevar såg moglegheit til å surfa på internett under påskudd av å høyra på musikk sidan det ikkje var ein vanleg time. Dei begynte ikkje på testen eller avslutta etter eit par spørsmål. Desse er teke ut av utvalet. Eit par elevar uttrykte at dei ikkje likte sannsyn på ungdomsskulen for det var så vanskeleg, men dei gjennomførte likevel testen. Elevane fekk bruka kalkulator under gjennomføringa. I spørjeskjemaet var det og ynskjeleg at respondentane gav ei forklaring på svara sine. Det var dessverre under halvparten som valde å gje meir utfyllande svar.

Spørsmåla er til ei viss grad tilfeldig plassert i testen og ikkje etter tema. Dette er gjort for å få mest mogleg uavhengige svar. Eg har likevel vald å gjera eit medvite val om jamt over aukande vanskegrad i spørsmåla.

Utveljing av respondentar

Utveljing av respondentar i ei kvantitativ undersøking kan gjerast på fleire måtar og vi skil gjerne mellom sannsynsutval og ikkje-sannsynsutval (Bryman, 2012). I dette studiet er det nytta såkalla «bekvemmelighetsutvelgelse» ved at ein har nytta elevar ved eigen skule utan å setja opp kriterier for utveljing på førehand. Bryman (2012) definerer det slik: *«A convenience sample is one that is simply available to the researcher by virtue of its accessibility» (s. 201).*

I følgje Christoffersen og Johannessen (2012) er dette ein strategi som ofte vert nytta, men som kanskje ikkje er den mest ynskjelege. Til denne typen forskingsoppgåve finn eg det likevel mest tenleg fordi eg søkjer etter informasjon om elevane sine strategiar for løysing av oppgåver. Dei kjem frå ulike grunnskular og geografiske stader og har difor ikkje fått same opplæringa i sannsyn. Det kan tenkjast at ein kunne få noko anna resultat om ein nytta respondentar frå andre studieretningar t.d. helse og oppvekstfag eller design og handverk. Bryman (2012) seier at sjølv om ein har vald ein slik strategi for utveljing, kan ein få svært interessante resultat. Utfordringa med denne utvalstrategien er likevel at det er umogleg å generalisera fordi vi veit ikkje om utvalet er representativt.

Sidan eg har nytta ein sekvensiell design, må det og vurderast om ein skal nytta dei same eller ulike deltakarar for dei to fasane i prosjektet (Creswell, Plano Clark & Garrett, 2008). Storleiken på utvalet vil gjerne vera ulikt utifrå at kvantitativ forsking gjerne søkjer å generalisera medan kvalitativ tilnærming gjerne vert nytta der ein går i djupna. Det tilseier at ein har eit større utval i den kvantitative delen og eit mindre utval i den kvalitative delen (ibid). I sekvensiell design vert heller ikkje dei to utvala direkte samanlikna. Utgangspunktet for forskinga mi er at den kvalitative fasen skal hjelpa å forklara den kvantitative fasen. I følgje (Creswell et al., 2008) er det då naturleg å velja anten same utvalet i begge fasane eller velja ut nokre av deltakarane frå den kvantitative undersøkinga. Eg har såleis intervjua 9 av dei 93 deltakarane frå den kvantitative delen.

Elevane frå vg1-klassane kjem i hovudsak frå ulike skular i Voss, Hardanger og Vaksdal. Alle desse skal etter læreplanen ha gjennomgått sannsyn på siste årstrinn i ungdomsskulen. Vg3-

elevane kjem frå ulike yrkesfaglege retningar og skular og har etter læreplanen ikkje hatt matematikk på Vg2. Det er såleis noko lenger tid sidan desse elevane har hatt sannsyn som del av matematikk-undervisninga. I oppgåva har eg vald å ikkje skilja mellom elevar i Vg1 og Vg3 i det statistiske materialet fordi det ikkje er stor aldersforskjell mellom dei.

I kodinga la eg inn slik respondentane har svara sjølv om ein ikkje kan vera sikker på om grunngjevinga er riktig. Ved eit par tilfelle kan eg sjå at grunngjevinga synast å vera feil, men dei har kryssa av riktig svar. Eg kan då ikkje vera sikker på kva respondenten har tenkt og dette kan vera ei mogleg feilkjelde. Men sidan ein del av respondentane ikkje har grunngjeve svara sine, synest eg det er mest riktig å behandla alle svara på same måte ved å sjå på kva dei har kryssa av.

3.5.2 Kvalitativ metode – oppgåvebaserte intervju

Eit av kjenneteikna på mixed methods er bruken av fleire tilnærmingar i forskinga for m.a. å få ei djupare forståing. Eg ynskte difor å intervjua nokre av respondentane som hadde gjennomført kartleggingstesten. Nokre av respondentane gav litt forklaring på svara sine i testen, men eg såg at nokre svara riktig men hadde feil grunngjeving og omvendt. Innafor kvalitativ intervjuforsking er det mange ulike tilnærmingar og få standardreglar og prosedyrar (Kvale & Brinkmann, 2009). I studien har eg teke utgangspunkt i oppgåvebasert intervju som kvalitativ tilnærming (Goldin, 2000). Den ontologiske føresetnaden i kvalitativ forsking er at det eksisterer mange verkelegheiter slik at forskaren og forskingsdeltakarane kan oppfatta dette ulikt. Det medfører at forsking kan gje nokre svar, men ikkje nødvendigvis det endeleg svaret.

Ved bruk av spørjeskjema kan datagrunnlaget ofte bli avgrensa til å finna eit mønster av korrekte og ukorrekte svar (Goldin, 2000). Dette kan vera ein del av analysen, men ved bruk av oppgåvebaserte intervju får vi merksemda retta mot respondenten sin prosess med å forstå og løysa det matematiske problemet. Målet for forskaren er altså å få ei verbal grunngjeving (ibid). Vi må og sjå nærare på om vi finn noko mønster i elevane sine svar. Dette gjeld særleg der elevane svarar feil. Dette må vi som forskarar analysera og freista å forstå. Vi må då spørja oss om kvifor elevane synast å ha god oversikt over fagstoffet for så i neste omgang å gjera feil. Goldin (2000) formulerer det slik:

«Mathematical structures of tasks must be analyzed, as well as the subjects interactions with the tasks. Social and cultural context need to be considered, as well as the psychology of individual students. Patterns of incorrect responses must be considered and understood, but part of that understanding needs to be in relation to the existence of correct responses».

Intervjua vart gjennomført i veke 7 og 9 i 2015. Utveljing av dei ni informantane til intervjua var ein kombinasjon av kven som hadde lyst til å bli intervjua, og direkte spørsmål frå meg utifrå svar på testen som kunne synast å vera interessante. Sjølve intervjua varde mellom 25 minutt og 40 minutt.

Det er vald eit delvis strukturert intervju med utgangspunkt i spørsmåla og svara frå kartleggingstesten etter Goldin (2000) sine fire steg som nemnd nedanfor. Sidan informantane ikkje fekk same oppgåvene, vart det berre laga ein generell intervjuguide. I første steg let ein informanten få tilstrekkeleg tid til å respondera og ein startar grunnleggjande spørsmål som t.d. «kva tenkjer du å gjera her?». På neste steg gjev ein informanten litt meir hjelp som t.d. «kan du rekna det ut?». Tredje steg inneber meir rettleiande bruk av tankemessige spørsmål som «kan du seia noko om kvifor det er likt sannsyn?» medan fjerde steg er karakterisert av utforskande metakognitive spørsmål av typen «trur du at du kan forklara kva du tenkte i denne oppgåva?» (ibid).

Eit forskingsintervju kan synast å likna på ein daglegdags samtale og såleis kan ein verta leia til å tru at det er ein enkel tilnærming til ein problemstilling (Kvale & Brinkmann, 2009). Det krev likevel ei stor grad av førebuing ved at vi må ha ei formeining om kva spørsmål som kan hjelpa oss å få svar på problemstillinga. I sjølve intervjusituasjon har vi eit asymmetrisk maktforhold der både intervjuaren og informanten påverkar situasjonen og kvarandre (ibid). Det er intervjuaren som i stor grad styrer samtalen ved at han stiller spørsmål og informanten svarar. I nokre tilfelle kan ein då oppleva at nokre av informantane held tilbake informasjon eller stiller motspørsmål (ibid).

Sjølve intervjua starta med at eg gav ei kort forklaring kva vi skulle gjera under intervjuet og kva eg skulle bruka dataa til. I tillegg opplyste eg at intervjua som vart teke opp ved hjelp av stemmeopptakaren, vert sletta når oppgåva mi vert ferdig. Eg intervjua berre elevar som eg ikkje er faglærar til. Eg valde å gjera det slik fordi ein på den måten kan unngå at respondentane oppfattar det som ein del av det ordinære vurderingsgrunnlaget i matematikk. I kap. 3.8 kjem eg nærare inn på etiske vurderingar kring datainnsamlinga.

Eg hadde ikkje bestemt alle oppgåvene til informantane på førehand, men valde å sjå korleis dei svara på dei første spørsmåla. I nokre tilfelle valde eg neste spørsmål utifrå svara dei gav for å sjå om dei hadde same tilnærming til ulike spørsmål innafor same emnet som t.d. representativitet. Samstundes ynskte eg at eg samla sett var innom alle spørsmåla frå spørjeskjemaet i løpet av intervjua. Nokre spørsmål vart og vald utifrå kva førre informant hadde svara for å kunne få meir forklaring og utdjuping av andre informantar. Ved bruk av eit mindre strukturert intervju har ein større moglegheit til å vera meir fleksibel og på den måten kan koma djupare inn i temaet. Samstundes stiller det krav til at intervjuaren klarer å følgja utviklinga i samtalen og stilla gode oppfølgingsspørsmål (Kleven et.al. 2011).

3.5.3 Dataanalyse

Eg har vald å bruka deskriptiv statistikk for å få oversikt og visa hovudtendensar i datamaterialet frå den kvantitative datainnsamlinga. Til dette føremålet passar Excel godt som verkty. Sidan det er såpass avgrensa tal av respondentar og utveljing av desse er gjort ut i frå eit lagleg utval, er det ikkje utført testing av signifikans.

For å sjå om det kan vera nokon statistisk samanheng mellom terminkarakter og resultat av testen, vart det utført korrelasjonsanalyse. I tillegg vart det utført korrelasjonsanalyse mellom karakter og prosent riktig svar på kvart spørsmål. Det vart nytta Pearsons produktmoment-korrelasjon (Pearsons *r*). Variablane må vera på intervall- eller forholdstalnivå dersom ein skal nytta korrelasjon. Korrelasjon er eit mål for samvariasjon mellom variablar og søkjer å talfesta styrken til ein systematisk relasjon mellom to eller fleire variablar. Ved positiv korrelasjon vil det seia at låg og høg verdi på ein variabel og har høvesvis låg og høg verdi på ein anna (Christophersen, 2013). Pearson *r* uttrykkjer styrken på lineær samanheng og har verdiar mellom -1 og 1. Christophersen (2013) gjev følgjande verdiar på styrke mellom samanhengen utan å ta omsyn til kontekst 0-0,20 (svært svak), 0,20 – 0,40 (svak), 0,40 – 0,60 (moderat), 0,60 – 0,80 (sterk) og 0,80 – 1,00 (svært sterk) med same intervall for negative vrdiar. Christophersen seier vidare at ein må sjå styrke i forhold til kontekst. Han viser til at ein Pearsons *r* på 0,50 i samfunnsfag vert oppfatta som sterk for individdata.

Når forskaren går over i fasen med transkribering av intervjua, er ein begynt på analysefasen fordi vi gjer vurdering, tek avgjersler og tolkar (Kvale & Brinkmann, 2009; Nilssen, 2012). Transkribering av innsamla data kan vera ei nesten fullstendig overføring av «rådata»[8] eller ein redigert og nedkorta versjon (Befring, 2015). I følgje Kvale & Brinkmann (2009) har ein ikkje noko standardreglar for transkripsjonsprosedyrer utanom at forskaren må ta ei rekkje val med omsyn til detaljeringsnivå samt å gjera greie for korleis transkripsjonane er utført.

Dei 9 intervjua vart i utgangspunktet transkribert med vekt på å få mest mogleg korrekt attgiving av samtalane. Ved ny gjennomgang vart det transkriberte materialet fortetta og skrive på normert skriftsspråk for å auka lesbarheit og gjera det mindre synleg kven som hadde svart. Transkribering er eit tidkrevjande arbeid, og slike tekstar vil aldri bli heilt nøyaktige (Nilssen, 2012). Ved fortetting av intervjua, fangar vi berre opp det verbale språket og såleis kan vi i nokre høve gå glipp av informasjon om konteksten slik som informanten si usikkerheit (ibid). Kvale & Brinkmann (2009 s. 187) formulerer det slik: *«Transkripsjoner er kort sagt svekkede, dekontekstualiserte gjengivelser av direkte intervjusamtaler*.»

Føremålet med denne studien er m.a. å sjå på elevane sine tankar og løysingsstrategiar i arbeid med sannsynsoppgåver. Detaljeringsnivået i transkriberinga kan i visse høve vera interessant, t.d. om informanten nølar med å svara eller svarar svært raskt. Dette har eg teke med i nokre av intervjua der eg meiner det var med å understreka korleis informanten løyste den aktuelle oppgåva.

Sitat frå det transkriberte materialet er teke med under dei ulike misoppfatninga både for å understreka funna frå den kvantitative undersøkinga og for å visa kontrastar eller andre funn som ein ikkje hadde føresett.

3.6 Reliabilitet (påliteleg) og validitet (gyldigheit)

To viktige omgrep innafor forsking er reliabilitet og validitet. Reliabilitet seier noko om kor konsistente og pålitelege forskingsresultata er og vert ofte behandla saman med spørsmålet om eit resultat kan reproduserast på andre tidspunkt av andre forskarar (Kvale & Brinkmann, 2009). I ei brei fortolking seier validitet noko om i kva grad ein metode undersøkjer det den er meint å undersøkja (ibid).

[8] Forfattaren si utheving

I kvantitativ forsking er omgrepet realiabilitet knytt til kor nøyaktige og stabile data er og såleis er eit uttrykk for grad av målefeil (Befring, 2015). God reliabilitet i forsking vil seia at data er lite påverka av tilfeldige målingsfeil, men vi har ikkje noko garanti for at data kan vera påverka av andre feilkjelder (Kleven et. al. 2011). For å sikra realiable data i den kvantitative delen av undersøkinga mi, er det i stor grad nytta spørsmål med utgangspunkt i tidlegare undersøkingar og det er freista å nytta eit kort og presis språk i spørsmåla. Det er og nytta fleire ulike spørsmål innafor kvar misoppfatning/emne i sannsyn. Ved bruk av berre eit spørsmål, kan det vera uvisst om ein får målt det ein ynskjer å måla. Det kan t.d. vera utforminga av spørsmålet og språket som påverkar svaret til eleven. Dersom det er store sprik mellom resultat av dei ulike spørsmåla under same misoppfatning, kan det gje ein peikepinn om eventuelle målingsfeil.

I etterkant vart dataa gjennomgått og samanstilt så raskt som mogeleg etter datainnsamlinga. Eg gjennomførte og ein etterkontroll på eit seinare tidspunkt for å sjekka at eg hadde lagt inn dataa under riktig kategori. Det er ikkje utført item-analyse (t.d. Cronbachs alpha) for å vurdera indre konsistens (Kleven et. al, 2011). Eg vurderer ikkje dette som noko stor feilkjelde fordi spørsmåla er som nemnd ovanfor, henta frå andre undersøkingar. I tillegg har eg gjort ein kvalitativ vurdering av kva spørsmål som var ynskjeleg å ha med i testen.

Måling av reliabilitet i den kvalitative delen av undersøkinga er knytt til intervjuet, transkripsjonen og analysen (Kvale & Brinkmann, 2009). Det kan vera utfordrande å gjenta intervjuet i same omgjevnader fordi det forskaren ser eller høyrer ved replikering, kan ikkje samanliknast direkte med den opphavlege forskinga (ibid). Goldin (2000) hevdar det er vanskeleg om ikkje umogleg å definera kvantitative kriterier for reliabilitet i oppgåvebaserte intervju. Vi kan måla konsistensen i måten oppgåvebaserte intervju vert utført på og konklusjonane frå observasjonar (ibid). Vi må då m.a. vurdera om observasjonane er utført på ein påliteleg måte, kjem ulike forskarar fram til same konklusjonen når dei tolkar respondenten si åtferd og støttar uavhengige observasjonar i eit enkeltintervju eller fleire intervju konklusjonane ein kjem fram til (ibid). Under intervjua opplyste eg for informanten at eg ynskte å få fram kva dei tenkte og grunngjevinga for svar sine. Eg intervjua ikkje nokon som eg var faglærar til, for å unngå at dei skulle oppfatta det som ein ordinær vurderingssituasjon i faget. Ein kan likevel ikkje unngå at informantane oppfatta situasjonen som «skulematematikk» og svara utifrå det då intervjua gjekk føre seg i dei ordinære matematikktimane deira. Intervjua vart transkribert i rimeleg kort tid etterpå.

Validitet er eit omgrep som vi ofte knyter til kvantitativ forsking medan det innafor kvalitativ forsking har vore meir omdiskutert og ein har gjerne nytta andre omgrep og tilnærmingar (Onwuegbuzie & Johnson, 2006). Ei snever tolking av omgrepet er i følgje Kvale & Brinkmann (2009), knytt til ein metodologisk positivistisk tilnærming der ein avgrensar omgrepet til å gjelde målingar. Med eit slik forståing vil då den kvalitative forskinga vera ugyldig dersom han ikkje resulterer i tal. Dei seier vidare at i ei breiare fortolking vil validitet seia noko om kva grad ein metode undersøkjer det han er meint å undersøkja. Slik sett kan kvalitativ forsking gje gyldig, vitskapleg kunnskap.

Befring (2015) skil mellom teoretisk (omgrepsvaliditet) og empirisk validitet. Med teoretisk validitet meiner ein om det er samsvar mellom den formelle og den operasjonelle definisjonen av omgrep (ibid). Det vil seia om oppgåvene i studien min er eigna til å avdekkja misoppfatningar i sannsyn slik som føresett. Eg utførte ein pilottest med 40 respondentar og fekk såleis eit rimeleg godt inntrykk om oppgåvene sa noko om det eg ynskte å studera. Etter pilottesten gjorde eg nokre endringar som eg fann naudsynte utifrå svar som vart gjeve (jf. kap. 3.4). Eit moment som kan ha påverka resultatet i piloten er at desse elevane nyleg hadde gjennomgått opplæring i sannsyn, medan informantane i hovudtesten ikkje hadde hatt same opplæringa rett før. Ved å nytta mixed methods fekk eg data frå ulike metodar som kunne utdjupa det eg forska på samstundes som eg og fekk ulik perspektiv og synsvinkel. Ved empirisk validitet samanliknar ein måleresultata med andre målingar og vurderingar (Befring, 2015). Eg har samanlikna framgangsmåte og resultat med tidlegare undersøkingar . I tillegg har eg freista å vera open og detaljert kring framgangsmåte for innsamling og handtering av data. Det kan vera vanskeleg å vurdera om alle respondentane svara på undersøkinga på ein nøyaktig måte, men det vart nøye opplyst kva dataa skulle brukast til for å motivera informantane til å svara på ein truverdig og gyldig måte.

3.7 Avgrensingar og føresetnader

Ein av føresetnadane for studien var at respondentane svara på spørjeskjemaet på ein ærleg og nøyaktig måte. Eit spørjeskjema vart forkasta utifrå kommentarar som vart gjeve på spørsmåla, då desse var heilt urelevante for undersøkinga og ein var i tvil om avkryssinga på fleirvalsoppgåvene og var gjort på same måte. I tillegg var det i utgangspunktet ein føresetnad at respondentane ikkje diskuterte spørsmåla seg i mellom. Ved eit par høve vart det gjort, men eg valde likevel å ta med desse svara i studien då eg føreset at det ikkje er ei stor feilkjelde samla sett.

I oppgåva mi har eg samanlikna resultata med tidlegare studiar. Nokre av forskarane har gjort greie for korleis dei har vurdert datamaterialet sitt og eventuelt korrigert og kategorisert utifrå feil grunngjeving. Eg har vald å bruka avkryssinga slik respondenten har svara sjølv om eg kan sjå at grunngjevinga er feil. Det er heller ikkje alle som har grunngjeve og for å få oversikt over det eg trur er den første intuisjonen til respondentane, har eg vald å gjera det slik. Det er interessant å sjå kor mange som har kryssa av riktig, men nyttar heuristikkar og tilnærmingar som matematisk ikkje er heilt korrekte og i tillegg få ein oversikt over korleis elevane tenkjer når dei løyser oppgåver i sannsyn.

3.8 Etiske vurderingar

I eit forskingsprosjekt som ei masteroppgåve, er det knytt etiske omsyn til dei ulike fasane frå planlegging til den ferdige oppgåva. De nasjonale forskningsetiske komiteene (2014) har utarbeidd retningsliner til bruk som hjelpemiddel for forskarar i tillegg til det som er regulert i lovgjevinga om t.d. teieplikt og behandling av personopplysningar.

I følgje Skaalvik (1999) står skuleforsking i ei spesiell stilling. Skulen er ein offentleg institusjon med ålmenn verdi samstundes som ein samlar inn data om og frå enkeltpersonar. Skaalvik seier vidare at vi gjennom resultatet av forskinga gjev eit bilete av skulen som institusjon, lærarane som yrkesgruppe og elevane som gruppe. Han stiller difor spørsmål om konfidensialitet og anonymitet berre gjeld på individnivå eller om ein og må ta omsyn til den einskilde skule/skular. I studien er informantane omtala som E1, E2 osb. og det er berre eg som forskar, som har tilgang til koplingsnøkkelen mellom namnelister og forkortinga. Det er heller ikkje nokon andre som har tilgang til bærbar pc der eg har lagra transkripsjonar og anna datamateriale. Eg har vald å ikkje oppgje namnet på skulen der eg samla inn data, men det kan vera utfordrande å anonymisera det heilt. Fleire stader gjev eg opplysningar som kan vera med å avdekkja kva for ein skule det gjeld. Etter mitt syn er innhaldet i forskinga likevel ikkje av ein slik karakter at det stigmatiserer elevgruppa eller er til stor belastning for skulen eller dei einskilde faglærarane.

Skaalvik (1999) hevdar at skuleforsking har eit særleg problem om kor stor den reelle frivilligheita er. Han seier vidare at born vegrar seg mot å skilja seg ut og det må finnast klare alternativ dersom ein har undersøkingar i heile klassar. Ved datainnsamlinga vart det informert om bakgrunnen for forskinga og kva eg ynskte å studera. Eg meiner sjølv det kom klart fram at dette ikkje var i regi av skulen, men som ein del av masteroppgåve mi. Sidan ein del av elevane visste at eg og er lærar ved skulen, kan det likevel påverka om elevane oppfatta det som frivillig eller ikkje og som ein del av den ordinære skuleaktiviteten. Det var og opplyst til elevane at det var frivillig å svara på spørsmåla og at resultata ville bli anonymisert. Det vart vidare opplyst at ein kunne trekkja seg frå undersøkinga når ein ynskte. Som nemnd tidlegare, var det nokre elevar som valde å ikkje vera med i undersøkinga. Dei skulle då arbeida med ordinære matematikkoppgåver.

Utifrå elevane sin alder (frå 16 år og oppover) og type opplysningar som vart innhenta, oppfattar eg det slik at dei hadde samtykkekompetanse og det ikkje var naudsynt å innhenta samtykke frå føresette. Utifrå opplysningane som vart gjeve til elevane, meiner eg det stettar kravet til at dei kunne gje eit informert samtykke.

4 Resultat og førebels analyse

Dette kapittelet omhandlar resultatet for undersøkinga mi utifrå dei ulike misoppfatningane eg ynskte å undersøkja: enkle og samansette hendingar, utfallstilnærming, representativitet, konjunksjonslova, lik sannsynsfeil, vilkårsbunde sannsyn og Falk-fenomenet og variasjon. Det er gjeve eit eller fleire spørsmål for å testa dei ulike misoppfatningane som nemnd. Riktig svar er markert med feit tekst i tabell eller vist som skravert kolonne i eit stolpediagram. I tillegg samanliknar eg funna mine med tidlegare forsking om same emna/spørsmål. Eg gjer merksam på at spørsmåla er komprimerte med omsyn til m.a. skriftstorleik slik at dei skal ta minst mogleg plass her. Originalt spørjeskjema er lagt ved som vedlegg. I dette kapittelet er det og utført ein førebels analyse av dei ulike misoppfatning. I kapittel 5 drøftar eg funna mine på eit meir overordna nivå.

4.1 Enkle og samansette hendingar

Det vart gjeve 4 spørsmål for å vurdera elevane si oppfatning av enkle og samansette hendingar. I spørsmåla er det m.a. teke utgangspunkt i situasjonar med kast av terning og omgrepet rettferd. Eg trur dei fleste born og unge er vane med ulike terningspel og kan difor knyta spørsmåla til noko som dei har kjennskap til. Dei tre første spørsmåla er henta frå Lysø (2005) og byggjer på klassisk tilnærming til sannsyn. Elevane må difor kunne telja opp gunstige og moglege utfall i utfallsrommet. Når vi skal finna utfallsrommet til ei samansett hending, seier produktregelen for kombinasjonar at talet på moglege utfall, er produktet av utfalla i kvart delforsøk. Når vi kastar ein terning to gonger eller kastar to terningar ein gong, vert såleis moglege utfall lik $6 \cdot 6 = 36$. Utifrå uniform sannsynsfordeling er kvar av desse utfalla like sannsynlege. Men om ein skal vurdera sannsynet for summen av auge på dei to terningane, har ein 11 ulike utfall som ikkje er like sannsynlege. Til dømes er sannsynet for å få summen 7 lik 6/36 medan sannsynet for å få sum lik 4 er 3/36. Dei enkle utfalla er altså like sannsynlege, men ikkje dei samansette utfalla. I spørsmål 1 er sannsynet for både oddetal og partal lik $P(A) = \frac{1}{2}$.

Anne og Bernt kastar ein terning. Dersom det vert partal vinn Anne elles vinn Bernt. Er spelet rettferdig?

◯ Ja
◯ Nei

Figur 12. Spørsmål 1

Tabell 1. Resultat av spørsmål 1

Resultat	Fordeling i prosent (n = 93)
Ja (riktig svar)	**97**
Nei	3
Usvara	0

Vi ser at 95 % av elevane svara riktig på spørsmål 1 og dette resultatet er som forventa. Dei fleste elevane forklara svaret sitt med at det er 3 partal og 3 oddetal og difor 50 % sannsyn for både partal og oddetal.

Det neste spørsmålet som vart gjeve, omfattar ei samansett hending der ein kastar to terningar (spørsmål 3). I dette tilfellet må ein kunne rekne ut moglege utfall ved å multiplisere talet på utfall i kvart delforsøk. Utfallsrommet for hendinga *summen av auge er partal* består av 18 utfall. Sannsynet for hendinga vert då $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Resultat viser at det er litt over halvparten (54 %) som har riktig svar. Analyse av svara i spørsmål 3 viser at hovudmisoppfatninga er bruk av ei algebraisk tilnærming der elevane ser på kva for addisjonar som gjev partal. Seksten av dei elevane som svara nei, grunngjev på denne måten. Dei hevdar det er større sjanse for partal fordi partal + partal er lik partal og oddetal + oddetal er lik partal medan oddetal + partal er lik oddetal.

Anne og Bernt kastar to terningar. Dersom summen av auge er partal vinn Anne elles vinn Bernt. Er spelet rettferdig?

◯ Ja
◯ Nei

Figur 13. Spørsmål 3

Tabell 2. Resultat av spørsmål 3

Resultat	Fordeling i prosent (n = 93)
Ja (riktig svar)	**54**
Nei	40
Usvara	6

I spørsmålet 24 ser vi på hendinga *begge terningane viser partal.* Vi har 9 gunstige utfall og sannsynet vert $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Dette spelet er ikkje rettferdig om Anne og Bernt skal ha same sjanse for å vinna.

Anne og Bernt kastar to terningar. Dersom begge terningane viser eit partal vinn Anne elles vinn Bernt. Er spelet rettferdig?

◯ Ja
◯ Nei

Figur 14. Spørsmål 24

Her er det 29 % som har riktig svar medan 63 % har svara feil. Tabell 4 viser oversikt over grunngjevingane til elevane som har svara feil. Eg har vald å klassifisera svara i kategoriane «like mange partal og oddetal» og «sannsynet er det same». Grunngjevinga for dette er at forklaringane kan ha bakgrunn i to ulike tilnærmingar. Nokre elevar nyttar likesannsyn medan andre grunngjev samansette hendingar med resultatet for ei enkelt hending. Dette kjem eg nærare inn på i oppsummeringskapittelet nedanfor.

Tabell 3. Resultat av spørsmål 24

Resultat	Fordeling i prosent (n = 93)
Ja	63
Nei (riktig svar)	29
Usvara	8

Tabell 4. Oversikt over grunngjeving for feil svar i spørsmål 24

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
Like mange partal som oddetal	7	Fordi det er like mange auge Fordi det er like mange oddetal og partal på ein terning
Likesannsynleg - 50/50	13	50/50 Like stor sjanse
Meiner det er same spørsmål som 1 og 3	3	Svart på det 2 gonger før
Tilfeldig	2	Det er rein tilfeldigheit
Inga grunngjeving	34	

Det er fleire forskarar som har nytta liknande spørsmål for å vurdera elevar si forståing av enkle og samansette hendingar og vurdering av utfallsrommet. Fischbein & Gazit (1984) undersøkte effekten av eit opplæringsprogram i sannsyn for elevar i alderen 10 til 13 år der elevane m.a. skulle finna sannsynet for at summen er eit partal når du trillar to terningar. Det var 2,8 % på 5. trinn som svara riktig, 16,1 % av elevane på 6. trinn svara rett medan 44,2 % på 7. trinn klarte spørsmålet. Utifrå resultatet til Fischbein & Gazit synast dei eldste elevane å forstå samansette hendingar betre. Elevane i mi undersøking skåra vesentleg lågare enn elevane på 7. trinn som vist til ovanfor. Noko av denne effekten kan truleg skuldast at elevane i Fischbein & Gazit si undersøking, nyleg hadde gjennomgått opplæring i sannsyn.

Det siste spørsmålet under enkle og samansette hendingar er spørsmål 19. Dette spørsmålet er henta frå Shaughnessy & Ciancetta (2002) si undersøking av 652 elevar mellom 6. og 12. trinn. I dette spørsmålet kan eleven løysa oppgåva ved å lista opp utfallsrommet U={SK, KS, KK, SS} eller ved produktregelen $P(vinn) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Dette var tydelegvis eit noko utfordrande spørsmål for elevane. Det er 29 % som har riktig svar, medan 67 % meinte Jan har 50-50 sjanse for å vinna.

På eit tivoli er det eit spel med to rettferdige lykkehjul som vist ovanfor. Du vinn ein premie dersom begge pilene landar på svart, etter at begge lykkehjula vert snurra rundt til dei stoppar. Jan trur han har 50-50 sjanse for å vinna. Er du einig?

○ Ja
○ Nei

Figur 15. Spørsmål 19

Resultat	Fordeling i prosent (n = 93)
Ja	67
Nei (riktig svar)	**29**

Figur 16. Resultat av spørsmål 19 (n = 93).

I Shaughnessy & Ciancetta si undersøking var elevane på ulike nivå og det var rimeleg store forskjellar i resultat. Innafor gruppa på 10. til 12. trinn som følgde eit meir ordinært løp, var det 34 % som hadde riktig svar. Mellom elevane som følgde avansert matematikk, var det i snitt 92 % med riktig svar. I undersøkinga mi er det totalt 27 av dei 93 elevane som har grunngjeve svaret sitt. Døme på grunngjevingar er vist i tabell 5. Grunngjevingane for ja eller nei i mi undersøking, var dei same som Shaughnessy & Ciancetta fann. Det kan og nemnast at dette spørsmålet vart opprinneleg nytta i NAEP[9] si undersøking i 1996 (referert i (Shaughnessy & Ciancetta, 2002). Det var berre 8 % av elevane (av om lag 1100) på trinn 12 som klarte å gje både eit riktig svar og ei riktig grunngjeving.

Tabell 5. Oversikt over grunngjevingar på spørsmål 19.

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
Ja, 50-50 sjanse	14	50 % på begge hjula for å få svart Fordi det er 50-50 svart-kvit Fordi halve er svart på begge Fordi det er to fargar
Nei (riktig svar)	9	Det er 25 % Det er 50 % for den første og ¼ for den andre Du har fyrst ½ og så ¼ sjanse
Utfallstilnærming	4	Fordi det er tilfeldig Hjula spinn ulikt som gjer sjansen mindre

Oppsummering av enkle og samansette hendingar

Ein stor del av elevane klarte å svara riktig på spørsmål 1 som er ei enkel hending, medan spørsmål som gjeld samansette hendingar, synast å vera meir utfordrande. I Fischbein & Gazit (1984) si undersøking seier dei at det gjennomgåande mistaket var at elevane sette utfallsrommet lik 12 i staden for 36 når du trillar to terningar. Dette vert forklart med at det

[9] National Assessment of Educational Progress. Dette er vurderingstestar som skal måla amerikanske elevar sin kunnskap på ulike område som matematikk, lesing, geografi osb.

kan synast som ei additiv tilnærming er meir intuitiv enn produktregelen (ibid). Ein anna forskjell i høve mi undersøking er og at elevane hjå Fischbein & Gazit, nyleg hadde gjennomgått ei grunnleggjande opplæring i sannsyn og truleg hadde ei formeining kring utfallsrommet sjølv om dei ikkje klarte å finna moglege utfall. Fischbein & Gazit seier og at dette kan skuldast ei «teknisk» vanske ved at elevane ikkje har fått nok trening i å rekna ut moglege utfall. Eg har ikkje funne klare teikn på tilsvarande forklaringar hjå mine elevar. I terningsoppgåvene var det gjennomgåande mistaket at elevane hadde ei algebraisk tilnærming og meinte at ein vil få flest partal. Dei seier ikkje noko om gunstige og moglege utfall eller utfallsrommet. Dette er tydelegvis ikkje omgrep som er ein del av vokabularet deira.

Det kan synast som nokre av elevane som svara riktig på spørsmål 3, knyter grunngjevinga opp mot ei enkelt hending som kast av ein terning. Dei viser til at det er like mange partal som oddetal på ein terning. Denne grunngjeving går og att på spørsmål 24 av dei som har svara feil. Det intuitive svaret til dei fleste av elevane er såleis at det er like mange partal som oddetal på ein terning. Nedanfor viser utdrag av intervjuet med elev E3:

I:	*Høyres dette ut som eit rettferdig spel i spørsmål 1?*
E3:	*Ja for det er jo like mange partal som oddetal på ein terning så då vert det jo like stort sannsyn for begge to*
I:	*Så ser vi litt på oppgåve 3. Her kastar dei to terningar (les spørsmålet). Er det rettferdig?*
E3:	*Det er jo eigentleg det same då som det andre. Det er jo berre at det er fleire tal, ein til terning liksom.*

Forklaringa kan og liggja i misoppfatninga som Lecoutre (1992) kalla likesannsyn jf. kap **2.10.2**. Desse elevane skil ikkje mellom enkle og samansette hendingar og vil hevda at når ein trillar to terningar, har alle utfall same sannsynet uansett. Det kan difor tenkjast at nokre av elevane i mi undersøking nyttar same tilnærming når dei seier at både Anne og Bernt har like stor sjanse for å vinna.

Tabell 6 viser del av elevane som m.a. hadde riktig svar både på spørsmål 3 og 24. Det er 10 % som klarte å løysa begge oppgåvene. Vidare var det 43 % som hadde riktig svar på spørsmål 3, men feil på spørsmål 24 medan 19 % fekk til spørsmål 24 men ikkje spørsmål 3. Dei elevane som legg til grunn at vi har like mange partal som oddetal på ein terning, og også nyttar dette tankesettet for samansette hendingar, vil få riktig svar på spørsmål 3, medan denne framgangsmåten vil gje dei feil svar på spørsmål 24.

Dei to spørsmåla kan ved første augekast likna på kvarandre ved at det vert spurt om partal. Det var også nokre elevar som i spørsmål 24 viste til grunngjevinga i spørsmål 1 og 3 og meinte dei hadde svara på dette før. Ei anna feilkjelde kan og vera at spørsmål 24 kjem på slutten av spørjeskjemaet og elevane ikkje les spørsmålet godt nok.

Tabell 6. Samanlikning mellom spørsmål 3 og 24

		Spørsmål 3 (sum auge partal)			
		Riktig	Feil	Usvara	Totalt
Spørsmål 24 (begge viser partal)	Riktig	10 %	19 %	0 %	29 % (27)
	Feil	43 %	15 %	5 %	59 % (63)
	Usvara	1 %	4 %	2 %	8 % (7)
	Totalt	54 % (54)	39 % (36)	8 % (7)	100 % (93)

Spørsmål 19 vart nytta som ein del av ein studie i elevar si forståing i variasjon (Shaughnessy & Ciancetta, 2002). I tillegg vart det gjort ein studie av 28 elevar der ein spelte med lykkehjula for å sjå nærare på variasjon og for å sjå om elevane endra meining etterpå. Sidan eg berre brukte første del av Shaughnessy & Ciancetta sin studie, har eg plassert dette spørsmålet under enkle og samansett hendingar og ikkje under variasjon (jf. kap. 2.10.5).

Intervjuet med elev E5 viser at den første tanken er 50-50 medan vedkommande endrar meining når han får tid til å tenkja seg om.

E5: *Det er ei svart og ei kvit sida. Begge har halvparten så då vert det 50-50*
I: *Kva kombinasjonar kan du få av fargar når du snurrar desse to lykkehjula?*
E5: *svart-kvit, svart-kvit, kvit-kvit, svart-svart*
I: *Ja. Viss han skal vinna, då må han få svart på begge. Er det framleis 50-50?*
E5: *[Stille]*
I: *Viss vi skriv opp det du sa*
E5: *Svart-kvit, svart-svart, kvit-kvit*
I: *Kan du få ein til?*
E5: *Ja kvit-svart*
I: *Er det fortsatt 50-50 tenkjer du?*
E5: *25 prosent sjanse for at kan vera svart-svart. Der måtte eg tenka.*

Det kan og synast som nokon har ei anna tilnærming enn opplisting av utfallsrommet. Elev E4 har tilsynelatande ei formeining om at sannsynet må bli mindre enn 50 % og forklarer det på følgjande måte:

I: *Er du einig med Jan?*
E4: *Nei*
I: *Kvifor ikkje?*

E4: Fordi han gjorde det to gonger.
I: Kva betyr det?
E4: Viss du tapar den eine gongen, så har du tapt.

Spørsmål 19 og 24 er matematisk sett same spørsmålet, men har ulike representasjon. Dette er drøfta nærare i kapittel 5.3.

4.2 Utfallstilnærming

Ved utfallstilnærming vil ein ikkje sjå på sannsynet i seg sjølv, men om utfallet vil skje eller ikkje. Ein oppfattar høgt sannsyn for ei hending som at utfallet vil henda og lågt sannsyn som at utfallet ikkje kjem til å henda. I utfallstilnærming vert ofte sannsynet vurdert i høve «ankerverdiane» 100 %, 0% og 50 % som kan omsetjast til meiningane «ja», «nei» og «eg veit ikkje» (Konold, 1991).

I fleire studiar nyttar ein eit spørsmål der vermeldaren fortel at det er ein viss prosent sjanse for regn neste dag. Det viser seg at det vert solskin. Spørsmålet vert då om vermeldaren tek feil (Madsen, 1995). I Noreg vert vanlegvis ikkje veret meldt med ein oppgjeven verdi for sannsynet. Eg har difor nytta ei anna tilnærming som eg trur er meir kjend for elevane. Eit fotballag har 70 % sannsyn for å vinna mot lag B i neste kamp (figur 17). Lag A taper kampen og spørsmålet vert då om journalisten tok feil. Det andre spørsmålet tek utgangspunkt i stabilitet av breiband. I følgje leverandøren er det 98 % sannsyn for at breibandet deira fungerer normalt. Breibandet vert av og til opplevd som ustabilt. Elevane skal avgjera om leverandøren sin påstand er feil (figur 18).

I ei avisoverskrift står det at lag A har 70 % sjanse for å vinna mot lag B i neste fotballkamp. Det viser seg at lag A taper. Tok journalisten feil? Kvifor eller kvifor ikkje?

Figur 17. Spørsmål 12

Tabell 7 viser kva elevane har svara på spørsmål 12. Det er 44 % som har riktig svar, medan 37 % har svar som vert klassifisert som feil. I tillegg er det 19 % som let vera å svara på dette spørsmålet.

Tabell 7. Oversikt over svar på spørsmål 12

Resultat	Fordeling i prosent (n = 93)
Ja	37
Nei (riktig svar)	**44**
Usvara	19

Elevane som svarar i tråd med utfallstilnærminga, vil forventa at lag A vinn kampen sidan 70 % vert rekna som at hendinga vil skje. Andre utsegner som tilseier utfallstilnærming, er t.d. «fordi alt kan skje», «lag A hadde sikkert vunne meir før». Tabell 8 viser døme på grunngjeving for dei som har svara at journalisten tok feil medan tabell 9 viser døme på grunngjeving for dei som hadde riktig svar (journalisten tok ikkje feil). Viss vi samanliknar tabellane, ser vi at dei som svara feil, hadde større tilbøyelegheit til å bruka utfallstilnærming. Det var 23 av 25 elevar som gav ei slik forklaring. Tabell 9 viser at det var 11 av 38 elevar med riktig svar som brukte utfallstilnærming som grunngjeving.

Tabell 8. Grunngjeving av feil svar på spørsmål 12

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
50-50	2	To lag med 50 % sjanse på kvar.
Tilfeldig Alt kan skje	23	Han tenkte sikker på korleis laga hadde spelt før. Det er mange uføreseielege faktorar i fotball. I fotball kan alt skje. Ja, han kan ikkje spå kven som skal vinna. Han tok feil fordi han veit ikkje kva som skjer når kampen går føre seg. Fordi han tippa lag A kom til å vinna.
Inga grunngjeving	8	

Tabell 9. Grunngjeving av riktig svar på spørsmål 12 (han tok ikkje feil)

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
30 % sjanse for tap	27	Han sa aldri dei kom til å vinna. Han sa dei har 70 % sjanse. Han tok ikkje feil fordi det er berre ei sannsynsrekning Han tok ikkje feil fordi B hadde 30 % sjanse for å vinna Det var 30 % sjanse for at dei tapte så han tok ikkje feil
Tilfeldig Alt kan skje	11	Fordi alt kan skje Sjølv om eit lag er betre enn det andre betyr det ikkje at det vinn Kan vera større sjanse pga betre spelarar, men alt kan skje Nei, eigentleg ikkje sidan dei samanliknar med gamle kampar som er spelt
Inga grunngjeving	3	

Figur 19 viser spørsmål 23 medan tabell 10 viser resultat av svara på dette spørsmålet.

Ein internettleverandør hevdar at sannsynet for at breibandet deira fungerer som normalt, er 98 %. Du bestiller breibandet men opplever at det av og til er ustabilt. Er leverandøren sin påstand nødvendigvis feil? Kvifor eller kvifor ikkje?

Figur 18. Spørsmål 23

Tabell 10. Fordeling av svar på spørsmål 23

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
Feil	15
Ikkje feil (riktig svar)	**54**
Usvara	31

Det var 54 % som hadde riktig svar på spørsmål 23 medan 15 % svara feil. I tillegg var det 31 % som valde å ikkje svara på dette spørsmålet. Ein av grunnane kan vera at dette var eit av dei siste spørsmåla i testen. Dersom ein ikkje er sikker, er det gjerne lettare at det vert ståande blankt.

Oppsummering utfallstilnærming

For å sjå om elevane synast å bruka same tilnærming begge spørsmåla, har eg samanlikna kva den einskilde har svara (sjå tabell s. 147). Eg har utelate dei som har svara blankt på begge spørsmåla, eller som har svara på begge spørsmåla utan grunngjeving.

Tabellen viser at 15 av elevane har riktig svar på begge spørsmåla og har vist til sannsyn som grunngjeving for svara sine, medan 6 har brukt utfallstilnærming på spørsmål 12 og vist til sannsyn på spørsmål 23. Vidare er det 4 som har grunngjeve med sannsyn på spørsmål 12 medan dei nyttar utfallstilnærming på spørsmål 23. Vi ser og at det er 8 med feil svar på spørsmål 12 og riktig svar på spørsmål 23, der dei brukar utfallstilnærming på første spørsmålet og sannsynsforklaring på det andre. I tillegg er det 14 som ikkje svara på nokon av dei to spørsmåla. Utifrå tala i tabellen kan det synast som dei elevane som har riktig svar og viser til normativ forklaring i høve sannsyn, har større tendens til å nytta same framgangsmåte på begge spørsmåla. Det er elles vanskeleg å trekkja nokon bastante konklusjonar utanom at det kan synast som elevane brukar fleire ulike tilnærmingsmåtar, utifrå korleis dei oppfattar spørsmålet. Tendensar til utfallstilnærming viser seg og i nokre av dei andre spørsmåla i spørjeskjemaet. Ei samla vurdering av dette vert teke opp i kapittel 5.5.

4.3 **Representativitet**

Når vi brukar representativitetsheuristikk, vurderer vi sannsynet utifrå likskap og det vi meiner er typisk, eller kor representativ ei hending er i høve populasjonen utvalet er henta frå Shaughnessy (1977). Vi ser altså bort frå faktorar som påverkar sannsynet som t.d. storleiken på utvalet og grunnfrekvensen. Kahneman & Tversky (1972) viser til fleire slike skeivheiter eller misoppfatningar som bruk av representativitetsheuristikken kan føra til. Desse er som nemnd i kap. 2.10.1, ignorering av utvalsstorleik og grunnfrekvens. I tillegg listar dei opp m.a. feiloppfatning av tilfeldigheit som spelaren si feilslutning (negative recency effects) og feiloppfatning av regresjon. I mi undersøking har eg teke med fleire spørsmål vedkommande representativitet. Desse er gruppert i ignorering av utvalsstorleik og lova om store tal (spørsmål 15 og 17), ignorering av grunnfrekvens (spørsmål 26) og misoppfatning av tilfeldige hendingar (spørsmål 2, 9 og 10) og spelaren sin feilslutning (spørsmål 6, 16)

4.3.1 Ignorering av utvalsstorleik og lova om store tal

Lova om store tal seier at jo fleire gonger ei hending skjer, jo nærare vil ein koma det forventa resultatet. Dette byggjer på ei frekvens-tilnærming til sannsyn som seier at sannsynet for ei hending, er den relative frekvensen til hendinga i det lang løp. Når vi meiner at sannsynet for hendingar i eit lite utval og eit stor utval er lik, ser vi bort frå lova om store tal. Tversky & Kahneman (1971) kallar dette *«Belief in the law of small numbers»*. Det kan vera andre årsaker som gjer at elevane svarar lik sannsyn som t.d. utrekning av forhold.

Viss vi gjer eit forsøk med fleire seriar, der vi kastar eit kronestykke 3 gonger, vil vi sjå at det varierer mykje i fordelinga mellom krone og mynt mellom kvar serie. Når vi kastar same kronestykket mange gonger, vil vi sjå at den relative frekvensen stabiliserer seg rundt grenseverdien 0,5 for mynt og krone. Tilfeldige avvik vil få mindre å seia jo fleire forsøk vi gjer. Sannsynet for å få mynt 2 gonger når du kastar 3 gonger, er difor større enn sannsynet for å få 200 mynt på 300 kast. For å finna sannsynet til hendinga 2 mynt på 3 kast, kan vi først setja opp utfallsrommet *U = {(MMM), (MMK), (MKM), (MKK), (KMM), (KMK), (KKM), (KKK)}*. Sidan alle utfalla har same sannsynet, ser vi at hendinga 2 mynt på 3 kast har sannsynet $P(A)=\frac{3}{8}=0,375$. Sannsynet for 200 mynt på 300 kast finn vi ved å bruka ein binomisk modell der *n* er talet på uavhengige delforsøk og *k* er talet på gonger hendinga mynt skjer. Vi finn då sannsynet for hendinga 200 mynt på 300 kast

$$P(X=200)=\binom{300}{200}\cdot 0,5^{200}\cdot(1-0,5)^{100}=2,04\cdot 10^{-9}$$

Som vi ser, er sannsynet for 200 mynt på 300 kast betydeleg lågare enn sannsynet for 2 mynt på 3 kast.

Det vart gjeve 2 spørsmål for å testa ignorering av utvalsstorleik. Det første spørsmålet (sp. 15) byggjer på Fischbein & Schnarch (1997) si undersøking av intuitive misoppfatningar i sannsyn blant elevar mellom 5. og 11. trinn. I dette spørsmålet er det mest sannsynleg at du får 2 mynt på 3 kast medan du vil få nærare det teoretiske sannsynet for fordeling av krone og mynt dersom du kastar kronestykket 300 gonger (figur 19). Lova om store tal seier at jo større utvalet er, jo nærare vil sannsynet vera det teoretisk sannsynet. Dersom ein kjenner til denne lova, vil ein vita at det ikkje er naudsynt å rekna ut sannsynet slik som vist ovanfor, for å kunne seia noko om kva som er mest sannsynleg.

Kva er mest sannsynleg
- ◯ Du får mynt 2 gonger når du kastar eit kronestykke 3 gonger
- ◯ Du får mynt 200 gonger når du kastar eit kronestykke 300 gonger
- ◯ Det er lik sjanse for dei to hendingane over.

Kvifor meiner du det?

Figur 19. Spørsmål 15

Tabell 11. Oversikt over svar på spørsmål 15

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
Mynt 2 gonger på 3 kast (riktig svar)	**33**
Mynt 200 gonger på 300 kast	2
Lik sannsyn for hendingane	63
Usvara	1

Tabell 11 viser fordeling av svar på dei ulike alternativa på spørsmål 15. På dette spørsmålet var det 33 % av elevane som svara riktig medan 65 % svara feil og 1 % let vera å svar. Vi ser at 63 % av elevane meiner det er lik sannsyn for dei to hendingane.

Det er fleire forskarar som har nytta ulike variantar av dette spørsmålet i sine studiar. Tabell 12 viser oversikt over ulike studiar og prosentvis svar for misoppfatninga likesannsyn. Resultatet i undersøkinga mi på dette spørsmålet er såleis i tråd med tilsvarande resultat i tidlegare forsking.

Tabell 12. Samanstilling av resultat frå ulike undersøkingar

	Mi undersøking	Fischbein & Schnarch (1997)	Rubel (2002)	Kennis (2006)	Jendraszek (2008)	Thorsen (2009)
2 mynt på 3 kast	**33 %**					
200 mynt på 300 kast	**2 %**					
Lik sannsyn	**63 %**					
Minst 2 mynt på 3 kast		x			x	
Minst 200 mynt på 300		x			x	
Lik sannsyn		75 %			62 %	
7 mynt på 10 kast			x	20 %		
700 mynt på 1000 kast			x	x		
Lik sannsyn			55 %	72 %		
3 mynt på 4 kast						x
30 mynt på 40 kast						x
Lik sannsyn						57 %

Nedanfor går eg nærare inn på dei ulike svaralternativa og kva grunngjeving elevane har gjeve. Det er 2 elevar som ikkje har svara på spørsmål 15 og berre 23 av 91 gav ei skriftleg grunngjeving på dette spørsmålet. Av dei 31 elevane som har svara riktig, er det berre 4 som har gjeve ei forklaring medan 19 av dei som har svara feil, har grunngjeve svaret sitt. Tabell 13 viser forklaring til elevane med riktig svar. Elevane har ikkje vist eksplisitt til lova om store tal, men dei viser til at det er forskjell når ein har få eller mange kast.

Tabell 13. Oversikt over grunngjeving for riktig svar

Elev nummer	Karakter	Forklaring
11	3	Fordi det er større sannsyn når det er mindre
51	4	Fordi når ein kastar eit kronestykke 300 gonger, vil antal gonger ein får mynt vera nærare 50 %.
82	5	Fordi du må ikkje kaste mange gonger
84	4	Fordi det vert kasta mindre og då er det større sjanse

Tabell 14 viser oversikt over grunngjevinga til elevane som har svara lik sannsyn i spørjeskjemaet. Vi ser at elevane har ulike grunngjevingar for svaret sitt. Desse kan i første omgang grupperast i kategoriane *forhold*, *50-50 tilnærming* og *anna grunngjeving*. Seks av elevane grunngav med at det er 2/3 sannsyn for begge hendingane. Sju av elevane brukte 50-50 tilnærming. Bruk av denne tilnærminga var og vanleg i Rubel (2002, 2007) si undersøking. Det var fem av elevane som nytta grunngjeving som flaks og tilfeldigheit.

Tabell 14. Oversikt over grunngjeving for lik sannsyn for dei to hendingane

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
Forhold 2/3	6	Begge har 2/3 derfor er det lik sjanse. Det er same antallet berre ganga med 100. Fordi det utgjer like store prosentar.
50-50 tilnærming	7	Det er 50 % sjanse for få mynt når ein kastar. 50/50 % sjanse. Kronestykke har to sider. 50 % sjanse for begge deler. 50/50 sjanse og ingen kan vita svaret. Fordi det er like stor sjanse for å få begge to.
Utfallstilnærming	5	Det er tilfeldig. Uforutsigbart. Det handlar om flaks.
Inga grunngjeving	41	

Det var 2 elevar som meinte at 200 mynt på 300 kast var det riktige svaret. Ein av elevane grunngjev dette med følgjande utsegn: *«Fordi på 300 kast har du større sannsyn enn på 3»*. Seks av dei ni elevane som vart intervjua, vart bedne om å svara på spørsmål 15. Utdrag frå nokre av desse intervjua vert referert i oppsummeringa nedanfor.

Som nemnd i kapittel 2, er det fleire forskarar som har nytta variantar av «sjukehusoppgåva». I fleire av desse såg ein på om det var det minste eller største sjukehuset som hadde flest dagar der det var fødd meir enn 60 % gutar. Spørsmål 17 er ein variasjon av «sjukehusoppgåva» som Batanero, Serrano & Garfield (2006) brukte i si undersøking av elevar mellom 14 og 18 år. I deira undersøking skulle elevane vurdera kva som var mest sannsynleg av 8 eller fleire gutar av dei neste 10 nyfødde eller 80 eller fleire gutar av dei neste 100 fødslane. Aga (2008) har og nytta denne varianten, men ser på 7 jenter av dei neste 10 nyfødde samanlikna med 70 jenter av 100 nyfødde. Dette spørsmålet vart og nytta i Green (1982) si undersøking, men han hadde med eit ekstra svaralternativ: «no one can say». Dette resultatet er difor ikkje heilt samanliknbart med mine funn. I Green si undersøking var det 8 % som svara riktig, 25 % valde lik sannsyn medan 61 % svara at det ikkje er mogleg å gje eit svar.

På eit sjukehus fører dei opp talet på nyfødde gutar og jenter. Kva er mest sannsynleg?

- ◯ Det vert født 4 eller fleire gutar av dei neste 5 nyfødde borna
- ◯ Det vert født 80 eller fleire gutar av dei neste 100 nyfødde borna
- ◯ Det er lik sjanse for dei to hendingane over.

Figur 20. Spørsmål 17

Tabell 15. Fordeling av svar på spørsmål 17

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
Fødd 4 eller fleire av 5 (riktig svar)	**20**
Fødd 80 eller fleire av 100	9
Lik sjanse	65
Usvara	6

På dette spørsmålet var det 20 % som hadde riktig svar. Av desse er det berre 2 av elevane som har gjeve ei forklaring. Elev 30 grunngjev det slik: *«Fordi det er større sannsyn sidan det ikkje er så mange»* medan elev 86 seier: *«Fordi i det lange løp vil statistikken vera nærare 50 %»*. Til saman er det 22 av elevane som har grunngjeve svaret sitt. Tabell 16 viser oversikt over kva forklaringar elevane som har svara lik sannsyn, har gjeve. Ingen av dei 8 elevane som har svara 80 gutar av 100 nyfødde, har gjeve ei utgreiing. På tilsvarande måte som i spørsmål 15, er det flest elevar som seier det er lik sannsyn for dei to hendingane (65 %). Dette er og i samsvar med Batanero et.al. (1996) sine resultat. Der var det 63 % av elevane som meinte at hendingane var like sannsynlege. I Aga (2008) si undersøking var det 55 % av dei spurte som svara lik sannsyn.

Tabell 16. Oversikt over grunngjeving av lik sannsyn

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
Forhold 4/5	11	4/5= 8/10 = 80/100 Sjansen er like stor. Om du kortar 80/100 vert det 4/5 Fordi tala viser det same
50-50 tilnærming	7	Fordi at det er 50/50 Det er ½ sjanse for å få gut som jente, derfor kan begge stemme. Lik sjanse for begge
Utfallstilnærming	2	Det er tilfeldig kva kjønn som vert født Fordi du veit aldri
Inga grunngjeving	59	

Oppsummering ignorering av utvalsstorleik og lova om store tal

Tabell 17 viser fordelinga av svaralternativa til elevane i prosent . Vi ser at det 16 % som svarer riktig både på spørsmål 15 og 17 medan litt over halvparten (53 %) svarar lik sannsyn på begge spørsmåla. Det er berre to av elevane som har grunngjeve begge spørsmåla riktig. Resultatet viser at det var nokon fleire (32 %) som svara riktig på spørsmål 15 om mynkast, i høve spørsmål 17 om nyfødde born (20 %). Vi ser og at det er nokre fleire som ikkje har svara på spørsmål 17 i høve til spørsmål 15 (høvesvis 7 % og 2 %).

Tabell 17. Fordeling av svaralternativ spørsmål 15 og 17

		Spørsmål 15				
Spørsmål 17		Riktig	Lik sannsyn	200 av 300 myntkast	Usvara	Totalt
	Riktig	16 %	2 %	1 %	0	20% (18)
	Lik sannsyn	13 %	53 %	0	1 %	65% (62)
	80 av 100 nyfødd	4 %	3 %	1 %	0	9% (8)
	Usvara	0	4 %	0	1 %	7% (5)
	Totalt	32 % (31)	60 % (58)	2 % (2)	2 % (2)	100 % (93)

Nedanfor søkjer eg å gje ei nærare forklaring på resultata mine ut utifrå talmaterialet og intervjua. Det er både likskap og forskjell i formulering og innhald i dei to spørsmåla. Begge spørsmåla søkjer å avdekka misoppfatninga der elevane ser bort frå storleiken på utvalet og lova om store tal. I begge spørsmåla er det flest elevar som har svara lik sannsyn for dei to hendingane, men grunngjevingane i spørjeskjemaet og i intervjua tyder på at elevane vurderer spørsmåla ulikt.

Det er som nemnd tidlegare, 33 % som har svara riktig på spørsmål 15, men berre 5 som har grunngjeve svaret sitt. Til ei viss grad er det mogleg å trekkja nokre konklusjonar utifrå dei som har svara, men det er ikkje grunnlag for å kunne seia noko om alle elevane har ei matematisk riktig forståing eller om dei har nytta ulike kognitive skeivheiter i form av heuristikkar eller andre ikkje-normative tilnærmingar. Elev nr. 4 viser at han har ein tanke om variasjon og storleik av utvalet utan at han nyttar matematiske omgrep. Han seier følgjande: «*Eg ville no satsa på den (peikar på første alternativet) sidan det er mykje mindre tal. Der (peikar på alternativ 2) er det mange fleire sjansar og ikkje få det talet enn der.*»

Det er 63 % som meiner det er lik sannsyn for dei to hendingane i spørsmål 15. Vi ser at det er 7 av elevane som har gjeve ei 50-50 forklaring. Myntkast har eit binomisk utfall og det kan tenkjast at konteksten i spørsmålet leier elevane inn ei 50-50 tenking. Rubel (2007) stiller og spørsmål om dette er eit idiosynkratisk fenomen for spørsmål som gjeld mynt og krone. Vidare er det 6 av elevane som brukar forhold som grunngjeving for lik sannsyn. Dei hevdar at forholdet mellom 2 mynt på 3 kast og 200 mynt på 300 kast har same forholdet og difor er det likt sannsyn. Van Dooren et al. (2003) kallar dette *«over-reliance on the linear model».*

Spørsmål 15 vart og gjeve til nokre av elevane som vart intervjua. Elev 1 sin første respons er at det er lik sannsyn mellom dei to hendingane samstundes som han er noko i tvil ved at han legg til at det og kan vera fleire moglegheiter på svaralternativ 1. Det kan synast som elev 8 og har same forståinga.

> *E1: Igjen. Matematisk lik sjanse, men fleire muligheiter på 300 gonger for at det kan bli sånn. Men det kan og verta på svaralternativ ein.*
> *…*
> *I: Du sa tidlegare at mynt og krone er 50-50. Viss du kastar veldig mange gonger, korleis trur du fordelinga vert då?*
> *E1: Eg veit ikkje heilt. Eg trur ikkje det hadde fordelt seg med 50 -50 på mynt og krone.*
> *I: I kva tilfelle skjer det då? Kor mange må du kaste for at du skal få den fordelinga?*
> *E1: Det er ikkje noko du kan rekna på kor mange du må hiva. Når mynten er i lufta, har du 50-50 prosent sjanse for kvar.*

Utdrag frå intervju med elev nr. 8 på spørsmål 15.

> *E8: Lik sjanse*
> *I: Kvifor tenkjer du det?*
> *E8: Du veit ikkje korleis han landar når du hiv han opp. Du kan liksom ikkje vera sikker på at han skal bli mynt 200 gonger viss du hiv han opp 300 gonger.*
> *I: Viss eg kastar eit kronestykke 10000 gonger, korleis trur du fordelinga hadde vore mellom mynt og krone då?*
> *E8: Det kjem an på eigentleg*

Desse to elevane synest å leggja til grunn at likt sannsyn indikerer at begge alternativa er mogeleg, men at ein ikkje kan føreseia kva som vil skje. Vi ser og at nokre av elevane nyttar utsegner som «det er tilfeldig» eller «uforutsigbart» i grunngjevinga si. Konold et al. (1993) kallar dette forklaringar basert på utfallstilnærming, jf. kap. 2.10.4. Forsking har vist at svært mange brukar heuristikkar som t.d. representativitet når dei skal vurdera eit sannsynspørsmål, men det er og nokre som nyttar ei tilnærming der sannsynsvurdering er fråverande (ibid.). Personar som brukar utfallstilnærming, ser bort frå eventuelle frekvensdata som er gjeve, men fokuserer på utfallet av neste enkeltforsøk. Utifrå deira synsstad kan ein ikkje seia noko om framtidige hendingar basert på tidlegare utfall. Dei kan m.a. hevda at det er umogeleg å rekna ut sannsynet for ei hending slik som elev 1.

På spørsmål 17 var det 20 % av elevane som svara riktig medan det var 65 % som svara lik sjanse. Delen av elevar som ikkje gav noko svar på dette spørsmålet var noko høgare enn spørsmål 15 (7 % og 2 %). Det var 22 av elevane som gav ei forklaring til svaret sitt og 20 av desse svara likt sannsyn. Grunngjevingane for likt sannsyn er gruppert på same måte som i spørsmål 17 ved kategoriane *forhold*, *50-50 tilnærming* og *anna grunngjeving*. Delen som svarar forhold, er noko større enn i spørsmål 15 der flest elevar nytta ei 50-50 tilnærming.

Det er 7 elevar som svarar 50-50 tilnærming på spørsmål 17 så vi ser at nokre vert leia inn i ei 50-50 tilnærming. Dette vert m.a. grunngjeve med at det er lik sjanse for gut og jente. Nedanfor viser utdrag frå intervjuet med elev 3.

> *E3: Eg føler at alle spørsmålene eigentleg er heilt like. Det er jo 50-50 sant. Er det ikkje like stor sjanse for begge då?*
> *I: Kva tenkjer du då?*
> *E3: Er det ikkje 50-50 då på kjønn? Så det er tilfeldig kva som vert.*
> *I: Korleis veit vi at det er om lag 50-50 fordeling gut-jente då?*
> *E3: Det veit eg ikkje, det var fordi det står der?*
> *…*
> *I: Viss vi hadde hatt 1000 babyar, 100 000 babyar. Kvar trur du då fordelinga ville vore mellom gut-jente?*
> *E3: Då trur eg kanskje det ville vore litt jamnare fordelt*
> *I: Trur du då det er noko forskjell på dei to der (peikar på dei to øvste alternativa)?*
> *E3: Det kan vera 4 av 5. Eg veit ikkje heilt*
> *I: Viss eg seier det er den som er riktig (peikar på føste alt.), fire ut av fem. Er den mest sannsynleg?*
> *E3: Det kan vera. Viss det er sånn ca. 50-50 er det litt rart viss det er 80 gutar og berre 20 jenter*

Eg freista og maskera forhold i spørsmål 17 ved å nytta 4 gutar ut av 5 nyfødde og 80 gutar ut av 100 nyfødde. Det kan likevel synast som elevane vert leia inn i ei forholdstenking då 11 av dei 20 elevane som grunngav svaret sitt under lik sjanse, eksplisitt viser til at 4/5 = 80/100. Vi ser og at elev 2 ovanfor først tenkjer forhold. Elles kan det sjå ut som utfallstilnærming er mindre utbreidd i dette spørsmålet.

Spørsmål 15 og 17 vart stilt etter kvarandre til ein av elevane for å testa om han kunne sjå likskapen mellom dei og eventuelt endre meining når han fekk førelagt det matematisk riktige svaret. Vi ser at han i første omgang ikkje oppfattar desse to situasjonen som like, men han endrar meining undervegs i samtalen. Det kan og vera at konteksten i spørsmåla leier eleven bort frå det som er likskapen mellom dei, nemleg lova om store tal.

E2: Det er eigentleg like sannsynleg
I: Kva tenkjer du då?
E2 Viss du tek å deler det på hundre så får du eigentleg same tala, så 2/3 sjanse for begge …
I: Når eg seier til deg at denne er riktig (peikar på mynt 2 av 3 gonger). Har du noko formeining kva eg tenkjer då?
E2: Du har ikkje så mange moglegheiter til å få krone-krone
I: Kva er det som kan skje når du kastar 300 gonger? Kva fordeling forventar du då på mynt og krone?
E2: 150 på kvar fordi det er halvparten sjanse for kvar av dei
…
E2: Det trur eg kanskje at…når du minskar tala får du same svaret. Eg trur 80 av 100. Eg veit ikkje heilt eigentleg
I: Kva reknar vi sannsynet for å få ein gut eller ei jente?
E2: 50-50 prosent. Det er anten eller. Dei har jo rekna på det og då er det litt mindre sjanse for det eine
I: Ja det er ca. 50-50. Tenkjer du då at det vert fødd 80 eller fleire gutar av dei 100 neste nyfødde?
E2: Nei, då trur eg det vert fødd 4 eller fleire av dei neste 5

Det var svært få av elevane med riktig svar som viste direkte eller indirekte til lova om store tal. Det er difor vanskeleg å seia noko om dei har fått riktig svar av spuriøse grunnar eller om dei har nytta lova om store tal i vurderinga si.

Ein del av dei som har svara lik sannsyn, viser til forhold som forklaring Det kjem ikkje klart fram om nokon av elevane tenkjer middelverdi og representativitet som grunn for svaret sitt. Ved bruk av respresentativitet ser ein bort frå storleiken på dei to utvala. Dei som nyttar denne heuristikken vil då meine at sannsynet vil vera det same for dei to hendingane (Kahneman, 2012).

Det var høvesvis 33 % og 20 % som svara riktig på spørsmål 15 og 17, medan 16 % hadde riktig på begge spørsmåla. Andre studiar viser m.a. til 20 %, 23 % og 30,6 % for riktig svar på tilsvarande spørsmål som nr. 15. Det kan tyda på at ignorering av utvalsstorleik er rimeleg konsistent. Elevane kan anten ha vanskar med å forstå lova om store tal eller dei kjenner ikkje til at denne finst. Samstundes ser vi at elevane har ulik grunngjeving for svara sine. Det kan m.a. skuldast utforminga av spørsmål som kan leia elevane til å tenkja forhold eller 50-50 tilnærming. Noko av forklaringa kan og liggja i elevane sine kognitive feilslutningar og at dei manglar omgrep og forståing for variasjon og sentraltendens.

4.3.2 Ignorering av grunnfrekvens

Ved ignorering av grunnfrekvens ser ein bort frå informasjon om grunnfrekvens for hendinga. Spørsmålet er henta frå (Tversky & Kahneman, 1974) og er meint å testa om elevane vurderer om Lars er representativ for ingeniørar utifrå informasjonen som er gjeve om han, eller dei viser til grunnfrekvensen.

I ei gruppe med deltakarar er det 70 ingeniørar og 30 advokatar. Ein av deltakarane er Lars. Han er ein 30 år gamal mann. Han er gift og har ikkje born. Han er dyktig og har sterk motivasjon og gjer stor suksess på sitt felt. Lars er godt likt av kollegane.

Kva er sannsynet for at Lars er ingeniør og kvifor meiner du det ?

Figur 21. Spørsmål 26

Tabell 18. Fordeling av svar på spørsmål 26

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
70% sannsyn for ingeniør (riktig svar)	**47**
Anna svar/feil	23
Usvara	30

Om lag halvparten av elevane hadde riktig svar på dette spørsmålet samla sett (47 %) medan 23 % gav eit anna svar. Det var heile 30 % som ikkje svara på dette spørsmålet.

Trettifem av dei førtifire som har riktig svar, nyttar informasjon om grunnfrekvensen og gjev eit normativt svar. I tillegg er det sju av elevane som grunngjev med at det er fleire ingeniørar enn advokatar utan at dei viser til eksakt utrekning. Få av dei som har svara feil, har grunngjeve svaret sitt.

Spørsmål 26 vart stilt til fire av elevane i intervjua. To av desse svara klart og direkte at det var 70 % sannsyn for at Lars var ingeniør. Dei to andre vurderte og til dels resten av informasjonen som vart gjeve, men konkluderte til slutt med at det var 70 av 100 som var ingeniørar. Nedanfor følgjer utdrag av intervju med elev E1:

E1: *Ja, det treng ikkje ha noko med det at han er gift og ikkje har barn. Kan jo vera kva som helst. Eg veit ikkje heilt. Du kan ha kva som helst yrke og ha sterk motivasjon. Sytti og tretti. Det er ein person og det er hundre personar der fordelt på to yrke, men større sannsyn for ingeniør. Men han eine personen kan jo vera der eller der (peikar på orda ingeniør og advokat). Eg veit ikkje heilt eg.*
I: *Går det an å rekna ut sannsynet for at han er ingeniør?*
...
E1: *Sytti prosent. Er det ikkje det?*
I: *Betyr teksten noko for kva yrke han har?*
E1: *Nei, for alt det me veit kunne han ha vore ein mekanikar.*

Det er vanskeleg å trekkja nokon konklusjon utifrå svara på dette spørsmålet. Dersom fordelinga hadde vore 70 advokatar og 30 ingeniørar, kunne gjerne svarfordelinga vore noko annleis. Likevel grunngjev nær 80 % av dei som svara riktig, med å visa til grunnfrekvensen. Det tyder på at dei som har svara riktig, har sett bort frå den lite informative teksten som vart gjeven. I Tversky & Kahneman si undersøking hadde elevane tendens til å svara 50 % på det same spørsmålet.

Dette var det siste spørsmålet i skjemaet og det kan og ha påverka svarfrekvensen noko. Nokre av elevane kan ha mista motivasjonen til å svara meir og let det stå blankt eller unnlèt å gje forklaring til svaret sitt.

4.3.3 Misoppfatning av tilfeldige hendingar

Dersom vi har kastar eit kronestykke etter kvarandre seks gonger og skriv opp resultatet for kvart utfall, vil vi ha ulik oppfatning av sannsynet for dei ulike rekkjene vi kan få alt etter kva tilnærming vi nyttar. Etter dei normative reglane, vil sannsynet vera det same for alle dei 64 ordna rekkjene (2^6). Likevel vil det vera nokre som legg til grunn ei subjektiv tilnærming. Desse personane vil oppfatta serien KMKMMK som meir sannsynleg enn KKKMMM, fordi sistnemnde ikkje verkar tilfeldig då det er eit meir regulært mønster. Det er og vanleg å oppfatta KMKMMK som meir sannsynleg enn KKKKMK, fordi ein trur sannsyn er sjølvjusterande mot det som vert oppfatta som rettferdig. Ein forventar at grunntrekka ved prosessen er representert både for serien som heilskap og lokalt for kvar enkelt del (Tversky, 1974). Det vil seia at folk forventar at serien skal ha om lag lik fordeling mellom mynt og krone, og fordelinga skal sjå tilfeldig ut. Personar som brukar denne tilnærminga for ei tilfeldig hending, baserer seg på kor godt det representerer dei fleste utfalla i heile populasjonen. Dei forventar at ein tilfeldig sekvens av hendingar representerer heile prosessen sjølv om sekvensen er kort (Kahneman & Tversky, 1972).

Misoppfatning av tilfeldige hendingar omfattar spørsmål 2, 9 og 10. Spørsmål 2 byggjer på m.a. Tversky & Kahneman (1974) og Madsen (1995). Det andre spørsmålet er henta frå Shaughnessy (1977) medan det tredje spørsmålet tek utgangspunkt i Fischbein & Schnarch (1997). I spørsmål 2 er det vist ulike alternativ for rekkjer av mynt og krone ved 6 seks kast. Det normative svaret er at alle rekkjene er like sannsynlege då sannsynet for kvar rekkje er $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0,015625$. I spørsmål 9 er det og same sjanse for kvar av sekvensane sidan kvar av utfalla gut og jente er uavhengige. Ved bruk av representativitet vil ein velja alternativ 1 sidan ein veit at sannsynet for gut eller jente er om lag 50 % for kvar. Oppgåve 10 tek utgangspunkt i lottotrekninga der ein skal velja 7 ut av 34 tal. Sjølv om sannsynet er den same for alle rekkjene i lotto, er det forventa at nokre av elevane vil velja alternativ 2 fordi det ser meir tilfeldig ut enn ei rekkje med etterfylgjande tal. Kvar rekkje har eit sannsyn på $P(A) = \frac{7}{34} \cdot \frac{6}{33} \cdot \frac{5}{32} \cdot \frac{4}{31} \cdot \frac{3}{30} \cdot \frac{1}{28} = 1,87 \cdot 10^{-7}$.

Du kastar eit kronestykke 6 gonger etter kvarandre der M er mynt og K er krone, og skriv ned kva du får i kvart kast. Kva for eit alternativ nedanfor meiner du har størst sjanse for å henda?

- ◯ MKMKMK
- ◯ MMKMKK
- ◯ MMMMMM
- ◯ KKMKMK
- ◯ Alle rekkjene ovanfor er like sannsynlege

Figur 22. Spørsmål 2

Nedanfor viser fordeling av svar på spørsmål 2.

Tabell 19. Fordeling av svar på spørsmål 2

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
MKMKMK	20
MMKMKK	10
MMMMMM	0
KKMKMK	5
1,2 og 4	4
Alle er like sannsynlege (riktig svar)	**58**
Usvara	2

I tabellen har eg og teke med kategorien 1,2 og 4. Det var nokre av elevane som meinte at desse tre var like sannsynlege. Resultatet viser at det var 58 % som svara riktig på dette spørsmålet. Elles var det 20 % som meinte at rekkja MKMKMK var mest sannsynleg, medan 10 % meinte MMKMKK var riktig svar. Det var ingen som valde rekkja MMMMMM.

Tilsvarande eller liknande spørsmål finn vi m.a. hjå Konold et al. (1993), Madsen (1995), Batanero et al. (1996), Rubel (2002), og Aga (2008). I Konold et.al og Batanero et. al sine undersøkingar var spørsmålet utforma med fem kast medan dei andre undersøkinga nytta ulike alternativ med seks kast. Tabell 20 viser samanlikning med nokre tidlegare studiar som har same eller tilsvarande svaralternativ som eg har i mi undersøking, og som gjeld elevar i øvste trinn i grunnskule og i vidaregåande skule. For å kunne samanlikna, har eg sett H = M og T = K.

Tabell 20. Samanlikning med andre resultat

	MKMKMK Eller KMKMKM	MMKMKK	MMMMMM	KKMKMK	MMMKKK	Lik sannsyn	Alle sekvensar med M og K like sannsynleg
Madsen (1995)	28,5 %	16 %	2 %	4 %		44 %	
Rubel (2002)	12 %	6 %		6 %	0 %	69 %	10 %
Kennis (2006)	9 %	6 %			5 %	79 %	
Aga (2008)	22,3 %					56,7 %	
Mi undersøking	**20 %**	**10 %**	**0 %**	**5 %**		**58 %**	**4 %**

Tabellen viser at delen riktig svar varierer mellom 44 % og 79 %. Madsen (1995) opplyser at elevane som var med i testen hans, kom frå ordinære matematikkgrupper som ikkje hadde sannsyn eller statistikk som del av læreplanen. Data i Rubel (2002) si undersøking vart henta frå elevar på ein privatskule for gutar i New York fordelt på ordinære og vidarekomne matematikkgrupper. Skulen nytta ikkje ein offentleg læreplan slik at lærarane hadde stor fridom til å forma innhaldet i opplæringa. Elevane hadde ulike bakgrunn i sannsyn alt etter alder og kva læraren valde å undervisa om emnet (ibid). Samanlikna med Aga (2008) si undersøking der elevane har gjennomgått same læreplan i grunnskulen og som er i same aldersgruppe som i mi undersøking, ser ein at resultatet er rimeleg konsistent

I tabell 21 går eg nærare inn på kva forklaringar og grunngjeving som vart gjeve av elevane med riktig svar. Eg har teke utgangspunkt i Rubel (2002) si kategorisering av svar. Det er ingen av elevane som har vist til at kvar rekkje har eit sannsyn lik 1/64. Det er berre ein elev som antyder at det som har skjedd tidlegare, ikkje påverkar resultatet og såleis er uavhengige forsøk. 50-50 tilnærminga er ganske utbreidd her også og det er 17 av 55 som grunngjev riktig svar med at sannsynet for mynt eller krone er 50 % for kvar. Det er nokon fleire som nyttar utfallstilnærming som forklaring. Desse elevane viser til at det er tilfeldig eller ein kan ikkje føresjå kva kronestykket landar på. I tillegg har eg skilt ut subjektiv tilnærming som ein eigen kategori då det var 3 elevar som knytte svaret til måten ein kastar kronestykket på som avgjerande for utfallet. Det var 13 elevar som ikkje gav nokon forklaring.

Tabell 21. Forklaringar til riktig svar.

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
Kvar har sannsyn 1/64	0	
Uavhengige forsøk	1	Sannsynet er likt uansett kor mange gonger ein har fått krone eller mynt allereie
50-50 tilnærming	17	Fordi det alltid er 50 % Fordi det er like stor sjanse for mynt som krone
Utfallstilnærming	21	Det er tilfeldig. Du kan ikkje føresjå kva krona landar på Fordi ein veit aldri kva ein får
Subjektiv tilnærming	3	Det er ikkje noko sannsynleg at du får MMMMMM. Det er måten du kastar på Korleis mynten vert kasta er ikkje identisk Det kjem an på kor god kasteteknikk du har
Ingen forklaring	13	

Dette spørsmålet skulle testa om elevane fall i freisting til å brukar representativitetsheuristikk når dei svara. Som nemnd ovanfor, var det 20 % som meinte MKMKMK var mest sannsynleg. Dette er ein ordna sekvens og er ikkje i samsvar med bruk av representativitet sjølv om det er like mange M og K (Rubel, 2002). Sekvensen MMKMKK som har eit tilfeldig mønster og like mange mynt og krone (representativitet), er vald av 10 % av elevane. Nokre av desse elevane har grunngjeve svaret sitt. Det vert m.a. vist til at det er to ulike sider og då er det større sjanse for å få annakvar. Såleis er det svært få som nyttar representativitet som grunngjeving på spørsmål 2.

I spørsmål 9 har vi ein sekvens med binomisk utfall for kvart delforsøk der ein anten får gut eller jente ved ein fødsel. Elevane skulle avgjera kva som var mest sannsynleg av sekvensane GJJGJG og GGGGJG eller om det var same sjanse for begge sekvensane.Tabell 22 viser fordeling av svar på spørsmål 9.

Sannsynet for å få ein gut er om lag 50 %. I ein familie har dei 6 born. Kva for sekvens (frå eldst til yngst) er mest sannsynleg

- ◯ GJJGJG
- ◯ GGGGJG
- ◯ Same sjanse for kvar av rekkjefylgjene ovanfor

Figur 23. Spørsmål 9

Tabell 22. Fordeling av svar på spørsmål 9

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
GJJGJG	28
GGGGGJG	5
Same sjanse for begge (riktig svar)	**66**
Usvara	1

På dette spørsmålet var det 66 % som hadde riktig svar medan 28 % meinte at sekvensen GJJGJG var riktig. Det var svært få som meinte GGGGJG (5 %) var det rette svaret.

Av dei 31 elevane (28 %) som svara GJJGJG, er det berre 4 som har grunngjeve svaret sitt. To av desse viser til at det er 50/50 for gut og jente, ein seier at det ser meir tilfeldig ut enn dei andre svara medan ein trur det er meir sannsynleg enn å få 4 gutar på rad.

Det er og interessant og sjå kva grunngjeving elevane med riktig svar har på dette spørsmålet. På same måte som i spørsmål 2 har eg gruppert svara i normativt svar, uavhengig forsøk, 50-50 tilnærming og utfallstilnærming. Det er ingen som har gitt eit normativt svar på dette spørsmålet. Litt under halvparten (46 %) ser på kva som kan henda ved kvart delforsøk og seier såleis at sannsynet er 50 % for gut eller jente. Det er nokre få som viser til at det er tilfeldig medan halvparten ikkje har gjeve noko forklaring.

Tabell 23. Gruppering av riktig svar på spørsmål 9

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
Kvar har sannsyn 1/64	0	
Uavhengige forsøk	0	
50-50 tilnærming	28	Fordi det er 50-50 sjanse Det er 50 % sjanse for kvar gong Like stor sjanse for å få gut eller jente
Utfallstilnærming	3	Tilfeldigheit Det er alltid tilfeldig, ingen fast rekkefølgje
Ingen forklaring	30	

Dette spørsmålet er henta frå Shaughnessy (1977). Han gjorde ei undersøking av lågaregrad studentar der det vart gjeve ei aktivitetsbasert undervisning i sannsyn til ei gruppe medan ei anna gruppe fekk ordinær førelesingar. Figur 25 viser resultatet av før-test og post-test. Det var svært få som tidlegare hadde hatt sannsyn som del av opplæringa. Sidan alle elevane mine har hatt sannsyn som del av matematikkopplæringa på grunnskuletrinnet, er det mest naturleg å samanlikna med Shaughnessy sin post-test sjølv om tidsaspektet for gitt opplæring vil spela inn. Dersom vi ser bort frå sjølve undervisningsforma, var det om lag 43 % som meinte at BGGBGB (GJJGJG hjå meg) var mest sannsynleg medan i overkant av 51 % meinte det var same sannsynet for sekvensane. Dette er noko annleis enn i mi undersøking. Studentane som hadde vald BGGBGB, viste til at dette passa best med ei forventa 50-50 fordeling mellom gutar og jenter og såleis synes å vera eit meir representativ utfall enn BBBGB (Shaughnessy, 1977).

	Pretest responses to R1			Posttest responses to R1		
	BGGBGB	BBBBGB	Same	BGGBGB	BBBBGB	Same
Lecture	27	0	9	22	1	17
Experimental	23	2	9	12	2	24

(Entries in the tables represent the frequencies of the responses)

Figur 24. Henta frå Shaughnessy (1977 s. 309) (N=80)

Det siste spørsmålet under oppfatning av tilfeldige hendingar er som nemnd, henta frå Fischbein & Schnarch (1997). I tillegg har eg teke med eit fjerde svaralternativ henta frå Jendraszek (2008).

I lotto skal ein velja 7 tal frå totalt 34 tal. Kristin har vald 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 medan Arne har vald 34, 1, 17, 9, 2, 33, 25. Kven har størst sjanse for å vinna?

- ◯ Kristin
- ◯ Arne
- ◯ Begge har same sjanse for å vinna
- ◯ Det kjem an på kva som har vore trekt dei siste vekene

Figur 25. Spørsmål 10

Her er det 67 % som har svart riktig, medan 29 % meiner Arne har størst sjanse. Det er berre ein elev som meiner Kristin har størst sjanse medan 2 meiner det er avhengig av kva som har vore trekt dei siste vekene.

Tabell 24. Fordeling av svar på spørsmål 10

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
Kristin	1
Arne	29
Begge har same sannsynet (riktig svar)	**67**
Kva som har vore trekt tidlegare	2
Usvara	1

Mesteparten av dei som svarar riktig, forklarer at det vert trekt 7 tilfeldige tal mellom 1 og 34. Eit par av elevane seier sannsynet er 7/34 for å vinna. Det er og to som forklarer med at sannsynet er 50/50. Av dei 27 elevane som meiner Arne har størst sannsyn, er det berre 11 som har grunngjeve svaret sitt. Alle desse viser til at Arne har meir spreidde tal og det er mindre sannsyn for at tala kjem i stigande rekkjefølgje.

I Fischbein & Schnarch (1997) si undersøking var det 65 % på trinn 11 som meinte at dei to personane hadde same sjanse for å vinna medan 35 % meinte personen med spreidde tal hadde størst sjanse. Det er fleire forskarar som har nytta dette spørsmålet. Aga (2008) utforma spørsmålet sitt med fire alternativ: talrekkja 1, 2, 3, 4, 5, 6 og 7, talrekkja 7, 13, 14, 19, 25, 31, 34, talrekkja 3, 6, 9, 15, 27, 30, 33 og alle rekkjene har lik sjanse. I Aga si undersøking var det nær 57 % som meinte sannsynet var det same for alle rekkjene. Om lag 22 % meinte rekkje nr. 2 var mest sannsynleg medan om lag 15 % meinte det var størst sjanse for rekkje nr. 3. I undersøkinga mi får eg om lag det same resultatet som tidlegare undersøkingar har vist for elevar på om lag same alderstrinn.

Oppsummering av tilfeldige hendingar

Både spørsmål 2 og 9 omfattar hendingar der kvart delforsøk har eit binomisk utfall. Dette kan lett leia elevane inn i ein tenkjemåte som Rubel (2002) kallar 50-50 tilnærming. I tabell 25 ser eg nærare på om elevane brukar same strategiane på desse to spørsmåla.

Tabell 25. Samanstilling av spørsmål 2 og 9

		Spørsmål 2					
		MKMKMK	MMKMKK/ KKMKMK	**Lik sjanse**	1,2 eller 4	Usvara	Totalt
Spørsmål 9	GJJGJG	11 %	11 %	5 %	1 %	0 %	28 %
	GGGGJG	1 %	1 %	2 %	0 %	1 %	5 %
	Lik sannsyn	9 %	3 %	51 %	3 %	0 %	66 %
	Usvara	0 %	0 %	0 %	0 %	1 %	1 %
	Totalt	20 %	15 %	58 %	4 %	2 %	100 % (93)

I overkant av 50 % av elevane har riktig svar på begge spørsmåla medan 11 % som meiner alternativ MKMKMK er riktig på spørsmål 2, seier at alternativ GJJGJG er mest sannsynleg. Det er og 11 % som har svara MMKMKK eller KKMKMK, som har kryssa av for GJJGJG i spørsmål 9. For kombinasjonen MKMKMK på spørsmål 2 og lik sjanse på spørsmål 9, er det 9 % som har vald dette. Utifrå resultatet i tabell 7 kan det synast som dei elevane som svarar feil, nyttar ulike strategiar når dei svarar. Dersom dei var konsekvente i bruk av t.d. representativitet, skulle fleire vald kombinasjonen GJJGJGJ og MMKMKK/KKMKMK.

Eg stilte og spørsmål 2 til nokre av intervjupersonane for å sjå om eg kunne få noko nærare forklaring. Intervjuperson E1 knyter det til eiga erfaring når han skal vurdera sannsynet for MMMMMM.

E1: *Eigentleg meiner eg det ikkje er nokon særleg forskjell på dei, men eg kunne stå på skulen i timarsvis for å sjå om eg fekk mynt, mynt, mynt eller kron, kron, kron.*
I: *Men kan det skje?*
E1: *Det kan jo skje, det er jo ein sannsynlegheit for at det kan skje (MMMMMM), men den verkar mindre enn dei andre*
I: *Er det fordi du har prøvd det?*
E1: *Ja, men det er jo fortsatt sannsynlig for at det kan skje. Så eg er ikkje heilt sikker. Eg synest det er mindre sannsyn for svaralternativ nummer 3 (MMMMMM). Då synest eg det er nokså same sannsyn for dei tre som står igjen.*
...
I: *Det alternativet med berre myntar. Peikar det seg ut på nokon måte?*
E1: *Eg synest det er mindre sannsyn for å få denne. Det er 50 % sjanse for mynt om igjen og om igjen*
I: *I utgangspunktet er dei like sannsynlege. Høyres det riktig ut?*
E1: *Ja, det er jo like sannsynleg. Men sidan eg har prøvd det sjølv, verkar det mindre sannsynlig.*

Same person vart i tillegg stilt spørsmål 10 som og er innafor temaet tilfeldige hendingar. På tilsvarande måte som spørsmål 2, skil vedkommande mellom «røynda» eller er erfart og det som er matematisk riktig.

E1: *Det er lik sjanse. Begge har 7 tal inn forbi dei 34 tala, men eg vil seia at begge har same sjanse for reint matematisk. Men likevel vil eg seia at Arne som har meir spreidd variasjon, trur eg har større sjanse eigentlig. Men viss du reknar på det, då er det same sjanse, sju av trettifire tal.*
I: *Du meiner at det er ein forskjell på det matematiske og det som skjer i verkelegheita?*
E1: *Jo.*
I: *Burde ikkje det vera det same, eller er det forskjell?*
E1: *Det treng ikkje vera det, men det er ikkje ofte du ser at trekning i lotto er 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Sånn sett då, skulle eg ha vald tal, ville eg vald meir variasjon. Du ser meir variasjon i tala enn at dei kjem i rekkjefølgje.*
I: *Og matematisk?*
E1: *Har dei heilt lik sjanse.*

Vi ser og at elevane som svarar riktig, nyttar ulike strategiar for svara sine (jf. tabell 21 og 23). Det er ikkje nokon som har gjeve eit normativt svar og vist til utrekning for sannsynet på nokon av dei tre spørsmåla, og det er berre ein elev som har grunngjeve med uavhengige hendingar. Vi ser at 50-50 tilnærminga vert mykje nytta og nokre brukar utfallstilnærming.

I Konold et al. (1993) si forsking var det totalt 72 % som meinte alle rekkjene med mynt og krone var like sannsynlege når dei blei spurt om kva som var mest sannsynleg. Biletet vart noko annleis då elevane vart spurt om kva som var minst sannsynleg. Her var det berre 38 % som meinte dei same rekkjene var like sannsynlege medan 23 % meinte THTTT var minst sannsynleg. Vidare var det 29 % som meinte HTHTH var minst sannsynleg. Det var altså ein del av elevane som nytta utfallstilnærming på første spørsmålet og så vurderte det andre spørsmålet utifrå representativitet. HTHTH vert sett på som minst representativt fordi det er eit ordna mønster. Konold et. al seier at denne inkonsistensen i svara ikkje kan forklarast berre med representativitet eller utfallstilnærming. Dette kan ha årsak i frasen «mest sannsynleg». Dette samsvarar med utfallstilnærming der individet vurderer sannsynet utifrå om det kan henda eller ikkje. Noko av forklaringa kan og skuldast at individa har multiple perspektiv eller rammeverk når dei skal vurdera usikre situasjonar (ibid.) I tillegg kan det vera sjølve situasjonen som framkallar ulike tankesett. Rubel (2002) viser til at hendingar med myntkast kan få oss til å tenkja 50-50 fordi sannsynet for mynt eller krone er ½ når vi kastar eit kronestykke. Det same vil vi ha med situasjonar der vi har gut-jente. Konold et al. (1993) kallar dette «maximlike beliefs». Det vil seia vi oppfattar noko som ei generell sanning.

Spelaren si feilslutning – «Gamblers fallacy»

Kjernen i denne feilslutninga er at vi trur sjanse er ein sjølvkorrigerande prosess (jf.kap. 2.10.1). Dersom vi til dømes får mange mynt etter kvarandre ved myntkast, vil nokre tru at det kjem ei krone ved neste kast fordi sekvensen då vil vera meir representativ i høve fordelinga av mynt og krone i det lange løp. Dei ser bort frå at dette er uavhengige hendingar, der resultatet av føregåande myntkast ikkje påverkar utfallet av neste myntkast.

I spørsmål 6 ynskjer eg å sjå på om elevane har forståing av tilfeldige hendingar eller dei nyttar representativitet som grunnlag for avgjersla. Det er viktig å få fram at rekkjefølgja har betyding og at vi ikkje samanliknar sekvensar som t.d. KKM og KKK. Sannsynet for kvar av desse sekvensane er $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ medan sannsynet for krone eller mynt i neste kast er tilfeldig og uavhengige av føregåande kast og har begge sannsynet $P(mynt) = P(krone) = \frac{1}{2}$. Resultat frå spørjeskjemaet er vist i tabell 26.

Du kastar eit kronestykke 3 gonger etter kvarandre og får rekkjefølgja K, K, K. Kva forventar du å få dersom du kastar kronestykket ein gong til?

Mynt

Krone

Begge er like sannsynlege

Figur 26. Spørsmål 6

Tabell 26. Fordeling av svar på spørsmål 6

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
Mynt	9
Krone	9
Begge er like sannsynlege (riktig svar)	**83**

Det er 83 % som svarar at mynt og krone er like sannsynlege medan det er 9 % som forventar å få krone og 9 % som forventar og få mynt på neste kast. Tabell 27 viser døme på grunngjeving for dei ulike svaralternativa og kor mange som har gjeve ei forklaring.

Tabell 27. Oversikt over grunngjeving for dei ulike svara i spørsmål 6 gjeve i frekvens.

Mest sannsynleg	Frekvens	Døme på grunngjeving
Mynt	2	Fordi ein har fått krone 3 gonger på rad Fordi sannsynet for å få 4 krone etter kvarandre er liten
Krone	4	Fordi kronestykket ikkje vil visa mynten Fordi då er du inne i ein rytme Fordi du har kasta det flest gonger
Mynt og krone like sannsynleg (riktig svar)	51	Anten får du mynt eller krone Fordi det er sånn det er Det har ingenting å seia kva du fekk sist gong Fordi det er 50 % sjanse for å få begge kvar gong du kastar Det er umogeleg å seia Heilt tilfeldig Du kan aldri vita kva du får Ein mynt er uføreseieleg. Den kan snu akkurat som han vil Fordi det er to sider på kronestykket, mynt og krone Fordi norske kronestykke har balansert vekt Eit kast har 50/50 sjanse uansett kva som kjem før

Fleire forskarar har nytta eit liknande spørsmål i si undersøking. Tabell 28 viser samanstilling av nokre av desse resultat. Dersom den einskilde studien inneheld både elevar i vidaregåande skule (evt. i tillegg elevar på øverste grunnskuletrinn) og universitetsstudentar, har eg plukka ut førstnemnde gruppe der de let seg gjera. Eg har og teke utgangspunkt i K,K,K som oppgjeve rekkjefølgje, slik at K vil utgjera positiv «recency effect». Det vil seia ein trur det same vil skje ein gong til. M vil då utgjera negativ «recency effect» eller spelaren sin feilslutning.

Tabell 28. Samanstilling av andre resultat

	Føregåande hending	M (negativ recency effect)	K (positiv recency effect)	**Lik sannsyn (riktig svar)**	Andre svar
Green (1982)[5]	HHHHH	10 %	10 %	79 %	1 %
Konold et al. (1993)[1]	HHHH	19 %	0 %	81 %	
Madsen (1995)[2]	TTTTTT	25 %	34,5 %	34 %	6,5 %
Fischbein & Schnarch (1997)[3]	HHH	15 %	0 %	80 %	5 %
Moritz & Watson (2000)	TTTT	10 %	8 %	82 %	
Rubel (2002,2007)[3]	HHHH	17 %	5 %	76 %	2 %
Kennis (2006)[4] (most likely)	HHHH	22 %	43 %	35 %	
Mi undersøking	**KKK**	**9 %**	**9 %**	**83 %**	

1) High School 2) 13 – 19 år 3) Trinn 9 og 11 4) Trinn 9, 10, 11 og 12 5) 13 – 16 år

Tabellen viser at det er noko forskjell på dei ulike resultata sjølv om hovudtyngda av forskingsresultat viser at om lag 80 % av elevane har riktig svar. Madsen (1995) og Kennis (2006) skil seg ut her med om lag 35 % med korrekt svar. I Madsen si undersøking vart det gjeve ei rekkje med seks «tail», TTTTTT i motsetnad til m.a. Konold som har fire etterfølgjande like utfall, og mi undersøking som har tre kroner etter kvarandre, KKK. Madsen si undersøking kan det synast som dette leier elevane til å tru at sidan det har kome seks like utfall etter kvarandre, vil det halda fram med i same mønster. Det kan tenkjast at desse elevane ser då bort frå at kvart utfall er uavhengig av det førre, men ser på mønsteret som ein heilskap.

Dette spørsmålet var og utforma på ulike måtar i dei ulike studiane. I nokre av studiane var spørsmålet utforma med rein tekst som t.d. «*A fair coin is flipped four times, each time* *landing with heads ut. What is det most likely outcome if the coin is flipped a fifth time?»* (Konold et al., 1993). Dette gjeld og studiane til Green, Fischbein & Schnarch, Moritz & Watson og Rubel medan i Madsen, Kennis og mi undersøking fekk elevane vist ei rekkje med utfall. Resultatet til Madsen og Kennis kan indikera at dette har påverka utfallet. Det stemmer likevel ikkje for mi undersøking som er meir i tråd med dei andre undersøkingane. Andre faktorar som kan spela inn, er elevane sine førekunnskapar om sannsyn og ikkje minst eigne erfaringar med mynt-krone situasjonen. Ein av intervjupersonane viser m.a. til dette, sjå oppsummering nedanfor. Som nemnd i kap. 2.4, hevdar Konold (1991) at elevane og brukar vurderingsheuristikkar som verkar på same måte som visuelle oppfatningar. Dei vurderer utifrå kva som *ser* mest sannsynleg ut.

Spørsmål 16 (figur 28) freistar også å seia noko om spelaren si feilslutning, men dette spørsmålet kan gjerne oppfattast som noko enklare å vurdera. Informasjonen som vert gjeve er at det er to born i ein familie, den eldste er gut og den yngste er jente, og ein skal føreseia sannsynet for at neste born er gut eller jente. Resultat av spørsmålet er vist i tabell 29.

I ein familie er det 2 born der eldste er gut og yngste er jente. Foreldra ventar no eit born til. Kva er mest sannsynleg? Vi reknar her sannsynet for å få ein gut til 50 % og jente til 50 %.

- ◯ Det neste barnet er ein gut
- ◯ Det neste barnet er ei jente
- ◯ Det er lik sjanse for dei to hendingane over.

Figur 28. Spørsmål 16

Resultatet viser at 94 % hadde riktig svar på dette spørsmålet medan 2 % meinte det neste barnet må bli gut og 1 % meinte det var mest sannsynleg at det vert ei jente. Det er berre ein av elevane med feil svar som har gjeve ei forklaring. Han seier at det plar vera annakvar og difor er det størst sjanse for gut. Eleven med anna svar viser til at det tilfeldig kva det vert.

Tabell 29. Fordeling av svar på spørsmål 16

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
Gut	2
Jente	1
Lik sjanse (riktig svar)	**94**
Anna svar	1
Usvara	2

Oppsummering spelaren si feilslutning

Bruk av representativitetsheuristikk ville leia elevane til å meina at utfallet av neste kast av kronetykket vart mynt. Det er likevel berre 9 % som meiner dette. Desse elevane grunngjev m.a. svara sine med at ein har fått 3 kroner på rad og at det er liten sjanse for å få 4 kronestykke etter kvarandre. Innafor matematikkfaget er ein frå første årssteg opptekne av å finna og utvida mønster (Rubel, 2007). Dette kan og vera forklaringa på at nokre hevdar det er mest sannsynleg med krone på det neste kastet, fordi ein då er inne i ein rytme.

Nokre av elevane skulle og svara på dette spørsmålet og vi ser at elev E4 legg til grunn representativitet og ei subjektiv tilnærming utifrå eigne erfaringar.

E4: Då ville eg sagt til meg sjølv at no får eg mynt
I: Kvifor ville du sagt det?
E4: Fordi eg har fått krone 3 gonger på rad og då tenker eg at no har eg vore litt heldig som har fått det 3 gonger så no får eg mynt
I: Betyr det noko kva du har fått tidlegare?
E4: Det betyr vel ikkje noko i reknestykket, men for meg så gjer det jo det. For eksempel når har eg vunne 5 gonger på rad og då tenkjer eg at no har eg vunne så mange gonger så no kjem eg til å tape, så no gjev eg meg.
I: Men kunne du ha vunne? Er det like stor sjanse for å vinna som for å tape neste gong?
E4: Ja men, det gjev liksom litt inntrykk på deg
I: Det er meir ei kjensle du har at no må eg stoppa?
E4: Ja.
I: Skil du på det som er matematisk riktig og….
E4: Eg går for magekjensla
I: Viss eg seier at det er denne som er riktig, mynt og krone er like sannsynlege, kva tenkjer du då?
E4: Eg tenkjer jo at det er det som er riktig, men likevel så tek eg ikkje sjansen.

Resultatet av spørsmål 6 og 16 viser at det er få av elevane som synast å leggja til grunn representativitet når dei svarar på spørsmåla. Likevel er det nokre som vurderer utifrå kjensle enn reint matematisk, slik som elev E4. Dei fleste svarar at det er 50-50 sjanse for krone-mynt på spørsmål 6. Det kan likevel synast som nokre grunngjev i tråd med utfallstilnærming. Desse elevane vil då leggja til grunn at sannsynet er 50-50 for mynt-krone, utifrå at ein ikkje kan føreseia kva som kjem til å skje heller enn at $P(mynt) = P(krone) = \frac{1}{2}$ utifrå ei klassisk tilnærming. Utsegner som «heilt tilfeldig» og «du kan aldri vita kva du får» ligg til grunn for utfallstilnærming i følgje Konold (1991).

Truleg ville eg fått eit anna biletet om eg i tillegg hadde spurt om kva som er minst sannsynleg slik som t.d. Konold et al. (1993), Rubel (2002) og Kennis (2006). I desse studiane fann ein at elevane nytta ei tilnærmingar då det vart spurt om mest sannsynleg og ei anna tilnærming då det vart spurt om kva som var minst sannsynleg. Spørsmål som inneheld frasen mest sannsynleg, vil leia elevane til å føreseia kva for sekvens som har størst sjanse for å henda (Konold et al., 1993). Elevar som nyttar utfallstilnærming, er då tilbøyelege til å svara lik sannsyn fordi dei ikkje klarer å gje noko normativt svar. Dei same elevane skiftar i staden til representativitetheuristikk når dei skal svara på spørsmål der dei vert spurt om minst sannsynleg. Elevane vel då gjerne MKMKMK fordi sekvensen ikkje ser tilfeldig ut (ibid.).

4.3.4 Konjunksjonslova

Det er gjeve eit spørsmål for å undersøkja elevane si forståinga av konjunksjonslova. Innafor logikklæra vil det seia at når vi har ei samansett utsegn, er det berre to moglege verdiar, sant eller galt. Begge må vera sanne for at vi kan seia at den samansette utsegna er sann. I nokre tilfelle vil vi tru at sannsynet for at to hendingar skjer, er større enn for at ei av hendingane skjer.

Spørsmål 18 tek utgangspunkt i Fischbein & Schnarch (1997) si undersøking og gjev ei kort historie om Elsa som ynskjer å bli sjukepleiar (figur 29). Tabell 30 viser resultatet frå undersøkinga.

Elsa ynskjer å bli sjukepleiar. Ho har gått helsearbeidarfaget på vidaregåande skule og ho har hatt sommarjobb på sjukeheimen. Elsa har no fått studieplass og begynt på ein høgskule. Kva meiner du er mest sannsynleg?

Elsa er student ved sjukepleiarutdanninga

Elsa er student.

Figur 29. Spørsmål 18

Tabell 30. Fordeling av svar på 18

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
Student sjukepleiarhøgskule	55
Student (riktig svar)	43
Usvara	2

Vi ser at 43 % av elevane svara riktig på spørsmål 18 medan 55 % meinte det var mest sannsynleg at Elsa var student ved ein sjukepleiarhøgskule. Det var svært få som skreiv noko om kvifor dei valde svaret sitt (28 av 93 elevar). Tabell 31 viser døme på svar som er gjeve av dei som har riktig svar, medan tabell 32 viser døme på grunngjeving for dei som svara feil.

Tabell 31. Oversikt over forklaring på riktig svar

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
Ho er student	12	Fordi ho er student uansett Står ikkje kva ho skal studera For det er 100 % for at ho er student Det er sikkert at ho er student, men ikkje like sikkert at ho er student ved ein sjukepleiarhøgskule
Andre svar	2	

Tabell 32. Forklaring til feil svar

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
Ho vil bli sjukepleiar eller jobba innafor helse	13	Fordi ho vil bli sjukepleiar Fordi ho har jobba mykje med helse Ut frå teksten går ho sikkert på sjukepleiarhøgskule Sannsynleg sidan det er dette ho ynskjer og har jobba seg opp mot
Andre svar	1	

Av norske undersøkingar med same tema finn vi Aga (2008) og Thorsen (2009). Aga sitt spørsmål under denne feilslutninga er noko annleis utforma og er ikkje direkte samanliknbar med mi undersøking. Thorsen har utforma eit spørsmål der Marie er interessert i dyr og rir mykje. Faren hennar er veterinær. Her skulle elevane svara på kva som var mest sannsynleg av a) Marie studerer til å bli veterinær og b) Marie er student. Det var 49 % av elevane på 10. trinn som meinte at Marie studerer til å bli veterinær medan 43 % meinte at Marie er student.

Eg har fått nokolunde same resultat som Thorsen i mi undersøking. Resultatet kan tyda på at ein del elevar legg mest vekt på historia i spørsmålet og vurderer utifrå dette. Det var ein av elevane som fekk dette spørsmålet under intervjuet. Vi ser at eleven klarer til ei viss grad å skjøna kva dette handlar om, med noko hjelp frå intervjuar.

E3: Eg skjøna ikkje heilt det spørsmålet.
I: Viss vi tenkjer at dette er studentar (teiknar ein sirkel). Kunne ho har studert noko anna?
E3: Det kunne ho, men viss ho går på helsefag…..
I: Kva er forskjellen på at ho er student ved sjukepleiarhøgskule og at ho er student?
E3: (les alternativa høgt). Ho er jo student på begge.

I: Er det større sannsyn eller er det mindre sannsyn for at ho er student enn at ho er student ved sjukepleiarhøgskulen?
E3: Det veit eg ikkje. Det var litt vanskeleg.
I: Viss eg seier at det er den som er rett, at Elsa er student som har størst sannsyn. Kva tenkjer eg då?
E3: Det står jo at ho har fått studieplass og begynt ved høgskule då
I: Men står det kva for ein høgskule ho har begynt på?
E3: Nei. Det kan jo vera på ein anna høgskule så ho er jo student uansett.

I litteraturen er det noko ulik oppfatning om konjunksjonsfeil er ei omgrepsmessig feilslutning innafor sannsyn eller om vi vert villeia av historia i teksten eller språkleg utforming (Jendraszek, 2008).

Når det gjeld konjunksjonsfeil, kan eg ikkje trekkja nokre bastante konklusjonar utifrå resultatet. Grunngjevingane i frå spørjeskjemaet og intervjuet med elev E3 kan likevel gje ein peikepinn på at denne feilslutninga er rimeleg vanleg. Utifrå desse kan det tyda på at det er historia kring Elsa som avgjer svaret til den enkelte. Det kan då synast som det er sosial kontekst, som villeiar elevane slik Watson (2005) hevdar.

4.4 Lik sannsynsfeil

Lik sannsynsfeil vil seie at ein oppfattar alle utfall som like sannsynlege sjølv om dei ikkje er det. Nokre ser og på likesannsyn som ein innebygd eigenskap ved tilfeldige hendingar (Morsanyi, Primi, Chiesi & Handley, 2009). Eg har teke med 4 spørsmål under dette kapittelet som igjen er delt i inn i to grupper; trekk av kuler og terningkast

Trekk av kuler

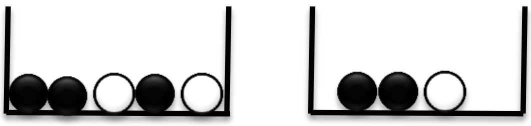
Spørsmål 8 er henta frå Morsanyi et al. (2009). Sannsynet for å få ei blå kule når du trekkjer frå boks A er lik $P(A) = \frac{35}{100} = 0{,}35$ medan sannsynet for å trekkje ei blå kule frå bok B er lik $P(B) = \frac{4}{10} = 0{,}4$. Nokre av elevane vil ofte berre sjå på kor det er flest blå kuler utan å vurdera på sannsynet for å trekkja ei blå kule. Desse vil då velja boks A sjølv om sannsynet for å trekkja ei blå kule er større for boks B (Morsanyi et al., 2009). Vi har eit liknande tilfelle i oppgåve 4, men her er utfallsromma illustrert. Det kan vera interessant å sjå om det vert forskjell i riktig svarprosent på dei to oppgåvene. Dette er klassiske urne-modelloppgåver som forskarar har nytta ulike variasjonar av (Thorsen, 2009). Eg har vald å nytta oppgåver der forholdet ikkje er likt slik at elevane ikkje vert leia inn i forholdstenking med ein gong.

To boksar kalla A og B, er fylt med raude og blå kuler. I boks A er det 100 kuler, 65 raude og 35 blå medan det i boks B er 10 kuler, 6 raude og 4 blå. Du skal først velja boks og så skal du trekkja ei tilfeldig kule frå den valde boksen. Dersom du trekkjer ei blå kule, vinn du 100 kr. Kva for ein boks gjev deg størst vinnarsjanse?

- ◯ Boks A (med 65 raude og 35 blå)
- ◯ Boks B (med 6 raude og 4 blå)
- ◯ Det er lik sjanse i kvar boks

Figur 30. Spørsmål 8

I dei to boksane nedanfor ligg det svarte og kvite kuler. Du trekkjer ei kule utan å kunne sjå ned i boksane.



A **B**

Kva for boks gjev størst sjanse for å trekkja ei svart kule?

- ◯ A gjev størst sjanse
- ◯ B gjev størst sjanse
- ◯ A og B er like sannsynlege

Figur 31. Spørsmål 4

Tabell 33 viser resultat av spørsmål 8 medan tabell 34 viser resultat av spørsmål 4. Det er 71 % som svara riktig på spørsmål 8 medan 63 % svara riktig på spørsmål 4. Begge spørsmåla har ein svarprosent på 17 % for at dei to hendingane er like sannsynleg.

Tabell 33. Resultat av spørsmål 8

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
Boks A	12
Boks B (riktig svar)	**71**
Lik sannsyn for boksane	17

Tabell 34. Resultat av spørsmål 4

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
Boks A	17
Boks B (riktig svar)	**63**
A og B er like sannsynlege	17
Usvara	2

Watson, Collis & Moritz (1997) har og nytta eit liknande spørsmål som nr. 8, der elevane skulle ta stilling til kva boks dei ville velja om dei ynskte ei blå kule. I boks A var det 6 raude og 4 blå og i boks B var det 60 raude og 40 blå kuler. Forskjellen her er at forholdet er det same i dei to boksane. Av 302 elevar på 9. trinn var det 69 % som meinte at det ikkje betydde noko og såleis svara riktig på spørsmålet. Fellestrekket er likevel at spørsmåla inneheld samanlikning av sannsyn mellom to sett av element.

Tabell 35 viser døme på forklaringar som vart gjeve under dei ulike alternativa på spørsmål 8. Prosentvis var det fleire med riktig svar som valde å grunngje svaret sitt.

Tabell 35. Forklaring til spørsmål 8

Svar	Totalfrekvens	Elevar som har gjeve forklaring	Døme på grunngjeving
Boks A	11	4	Det er litt større sjanse for å vinna på a enn b fordi det er litt meir blå kuler i a Fordi det er fleire i A enn B
Boks B (riktig svar)	66	41	Sjå tabell 4
A og B er like sannsynlege	16	3	Forholdet er likt Du veit ikkje kva kule du trekte Fordi det eigentlig er likt, berre det er mindre tal

Tabell 36. Forklaring til dei som har svara riktig på spørsmål 8

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
40% > 35 %	26	I boks A er det 35 % sjanse og i boks B er det 40 %
Andre forklaringar	27	Fordi det er mindre kuler Fordi det er fleire kuler i A enn i B Det er større antall blå i forhold til raud i B
Inga grunngjeving	13	

Tabell 37 viser oversikt for spørsmål 4 over totalfrekvens for dei ulike svaralternativa, kor mange som har gjeve forklaring og døme på grunngjeving. Det var rimeleg mange som valde å grunngje dette spørsmålet på alle svaralternativa. Tabell 38 viser oversikt over kor mange som eksplisitt har vist til brøk eller prosent som grunngjeving for det riktige svaralternativet (boks B). Vi ser at det er 44 % som har ei slik forklaring medan nær 34 % nyttar andre tilnærmingar.

Tabell 37. Oversikt over frekvens og grunngjeving spørsmål 4

Svar	Totalfrekvens	Elevar som har gjeve forklaring	Døme på grunngjeving
Boks A	16	12	Det er 3 svarte kuler Fordi det er fleire svarte i A enn B Det er mindre kvite kuler i forhold til svarte A har ei ekstra svart kule
Boks B (riktig svar)	59	48	Sjå tabell 2
A og B er like sannsynlege	16	11	Fordi det er ein meir svart enn kvit i begge boksane Fordi det er like mange prosent svart i begge Det er flest svarte kuler
Usvara	2		

Tabell 38. Oversikt over grunngjeving for dei som har svara riktig (boks B)

Type forklaring	Frekvens	Døme på grunngjeving
2/3> 3/5 66% > 60 %	26	2:3 er større enn 3:5 B har 66 % sjanse og A har 60 %
Andre forklaringar	20	Fordi det berre ligg ei kvit kule i boksen Fordi det er færre kvite kuler og det gjev mindre sjanse I B er det størst sjanse for der er det dobbelt så mange svarte Fordi det er fleire svarte i forhold til kvite i B Fordi det er berre tre kuler og det er to svarte Fordi det er mindre kuler som gjev større sjanse
Inga grunngjeving	13	

Thorsen (2009) har nytta eit tilsvarande spørsmål som spørsmål 4, i undersøkinga si av elevar på ungdomstrinnet. I overkant av 61 % svara riktig på dette spørsmålet medan nærare 25 % meinte det var likt sannsyn. Andre forskarar som har nytta liknande oppgåver for elevar i vidaregåande skule, er Aga (2008). Eit av spørsmåla hans var utforma slik at ein skulle velja den boksen som gav størst sannsyn for å trekkja ei kvit kule, der det i ein boks er ei kvit kule og tre svarte kuler medan det i ein anna boks er to kvite og sju svarte kuler. Litt over 84 % klarte å gje rett svar på spørsmålet medan nærare 10 % meinte sannsynet var det same for dei to boksane. Green (1982) nytta m.a. eit spørsmål der elevane skulle finne ut kva for boks som gav største sjanse for å trekkja ei svart kule når den eine inneheld 12 svarte og fire kvite og den andre tjue svarte og ti kvite kuler. Resultatet frå Green si undersøking viste at hjå dei eldste elevane (16 år), var det 74 % som hadde riktig svar, medan 4 % meinte det var likt sannsyn å trekkje ei svart kule i dei to boksane. Resten (20 %) valde boksen med flest svarte kuler.

Ved nærare analyse av spørsmål 8 finn ein at det er litt over halvparten (51,6 %) som har gjeve ei forklaring til svaret sitt. Vi ser vidare at det er i overkant av 62 % av dei som har riktig svar, som har grunngjeve. Det er likevel berre 39 % som har vist til prosentvis utrekning for sannsyna eller utvida brøk. Nærare 20 % gav ikkje noko forklaring medan om lag 41 % gav årsaksforklaringar som t.d. «Fordi meir enn halvparten er blå kuler».

Oppsummering trekk av kuler

Det er berre 4 prosent som meiner at lik sannsyn er det rette svaret på begge spørsmåla. For nokre er likevel dette den første intuisjonen deira, slik som for elev E5 nedanfor. Det kan heller ikkje utelukkast at eleven svarar slik fordi han manglar omgrep om forholdsrekning i sannsyn.

> *E5: Begge to er no like sannsynlege?*
> *I: Kvifor tenkjer du at dei er like sannsynlege?*
> *E5: Det er berre å plussa ein kvit på A og ein svart på A så det er 3 svarte i A og to svarte i B. Så ein har plussa det med ein av begge kulene. Det er eigentleg like sannsynleg som i B.*
> *I: Viss eg seier til deg at B er riktig, korleis kan eg seia det?*
> *E5: Det er større moglegheit?*
> *I: Ja det er større moglegheit i B. Kva har eg tenkt då? Kan vi rekna det ut?*
> *E5: Eg veit ikkje….*

Det kan synast som nokre av elevane nyttar ulike huristikkar som ikkje er matematisk riktige, sjølv om dei kjem fram til riktig svar. Breiteig (2002) hevdar at årsakstenking ofte overtek for sannsynstenkinga både hjå born og vaksne. Vi resonnerer oss fram til svaret ved å peika på årsak.

For å svara på desse spørsmåla er det ein fordel med generelle matematiske ferdigheiter slik som brøkrekning. Dette kan og hatt ei medverkande rolle i svara som er gjevne. Utdrag frå intervju med elev E3 viser at forhold og brøkrekning kan vera det avgjerande for svaret:

> *E3: Er det ikkje eigentleg A. Veit ikkje heilt. Det er jo tre svarte og to kvite i A men tek du vekk ein svart og ein kvit så vert det 2 svarte og ein kvit som i den (peikar på B). Så vert det likt som B. Det vert jo eigentleg likt, vert ikkje det det?*
> *I: Viss eg seier til deg at du har størst sjanse for å vinna i boks B, kan du forklare det?*
> *E3: Veit ikkje heilt. Det er jo 2/3 sjanse for at du trekkjer ein svart der.*
> *I: Men A då?*
> *E3: Det er det 3/5 sjanse.*

I: Er det likt?
E3: Nei….
I: Kva som er størst og kva som er minst?
E3: Det er jo kanskje….
I: Kunne du utvida brøkane her for å sjå, finna fellesnemnar?
E3: Ja du kunne vel gjort sånn, ja. Eller. Jo du kan gjera det.
I: Eg sa til deg at det var B som hadde størst sjanse. Er den større enn den (peikar på brøkane)
E3: Eg veit ikkje
I: Er det brøken her som vert utfordrande?
E3: Ja
I: Det er riktig som du seier…
E3: At det er like stor sjanse?
I: Ikkje at det er likt, men at det er 2/3 for B og 3/5 for A. Viss eg skal kunne samanlikne dei, så kan eg utvida brøken (viser på papir)
E3: Då er det jo større sannsyn for den (peikar på den utvidar brøken for B)
I: Er det lettare å sjå no?
E3: Det var jo mykje enklare
I: Var det det som stoppa deg for å kunne vurdera?
E3: Ja!

Det kan og synast som nokon har ei meir praktisk tilnærming og meiner at 0,6 og 0,66 er så å seie det det same, eller at dei 6 % større sannsyn i B ikkje kan reknast om til ei heil kule slik som utdrag frå intervju med elev E1 viser:

E1: Det er likt forhold, jo…
I: Er det lettare å sjå om du skriv det opp?
E1: Viss eg tek vekk dei to i den boksen (peikar på ei kvit og ei svart kule i boks A), så er dei jo heilt like. Då vert det jo likt forhold i begge boksane.
I: Viss du skriv opp forholdet då?
E1: (skriv opp). Det er 60, det er jo faktisk 66 i den andre. Men likevel, den 6 prosenten er ikkje ei heil kule. Du kan ikkje dela ei kule opp i 6 prosent. Så du ser jo det at A og B er like sannsynlige. Utifrå det er det nokså same sannsynet. Tenkjer eg då.
I: Viss du skulle vald då?
E1: Då ville eg ha gått for boks B. Eg veit ikkje heilt kvifor. Det ser ut som det er større sjanse, men er nokså likt.
I: Viss du berre ser på tala som prosent eller brøk, og ikkje på at du kan trekkja ei halv kule. Kva då?
E1: Då er det større sjanse for B. Det er ikkje masse å gå på men berre litt. Då ville eg ha trekt frå boks B.

Green (1982) nytta fem ulike oppgåver for å testa elevar (11 -16 år) sine strategiar for samanlikning av odds. Han nytta oppgåver der forholdet mellom kulene (svarte og kvite) i boksane var det same men med ulikt tal, og oppgåver der både talet på kuler og forholdet var ulikt i boksane. Strategiane som vart nytta var a) velja boks med flest kuler b) velja boks med flest svarte kuler c) velja boks med størst svart:kvit forhold d) velja boks med største svart-kvit differanse. Green fann likevel at det var få elevar (32 %) som konsekvent nytta ein strategi til alle dei fem oppgåvene. Det var og auka bruk av forholdsomgrepet med aukande alder på elevane. Green konkluderte med at mange elevar nyttar ulike strategiar, og at det var rimeleg høg skår i spørsmål der berre eine fargen varierte. Elevane var meir usikre i spørsmål der begge fargane varierte (ibid).

Terningkast

Spørsmål 11 og 13 søkjer og å avdekka om elevane oppfattar at det ikkje er likt sannsyn for hendingane, og byggjer på Fischbein, Nello & Marion (1991) og Fischbein & Schnarch (1997). I spørsmål 11 vil sannsynet vera $\frac{1}{36}$ for å få 6 på begge terningane medan hendinga *5 på den eine terningen og 6 på den andre* består av utfalla (5,6) og (6,5) og har såleis sannsyn lik $\frac{2}{36}$. Spørsmål 13 er ein variant av terningkast der elevane må gjera ei vurdering av heile utfallsrommet. Dette kan gjera det enklare for elevane å sjå at det er større sannsyn for ulik tal på terningane enn same tal på terningane. I det siste spørsmålet i denne misoppfatninga (sp. 14) har vi ein terning med 5 like sider og ei ulik side. Oppgåva er henta frå Madsen (1995) si undersøking av elevar i vidaregåande skule si forståing av sannsyn.

Du trillar to terningar samstundes. Kva har størst sjanse for å henda

- ○ Du får ein femmar og ein seksar
- ○ Du får seks på begge terningane
- ○ Det er lik sjanse for dei to hendingane over.

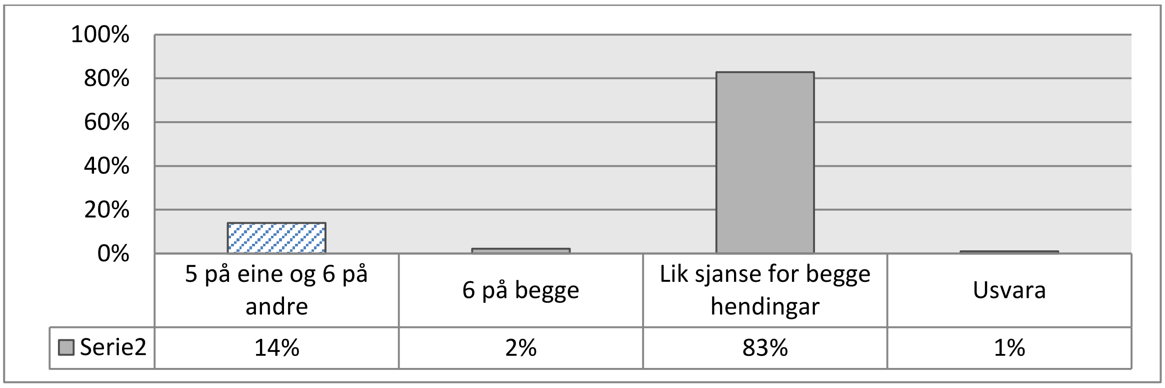
Figur 33. Spørsmål 11

Du trillar to terningar samstundes. Kva har størst sjanse for å henda

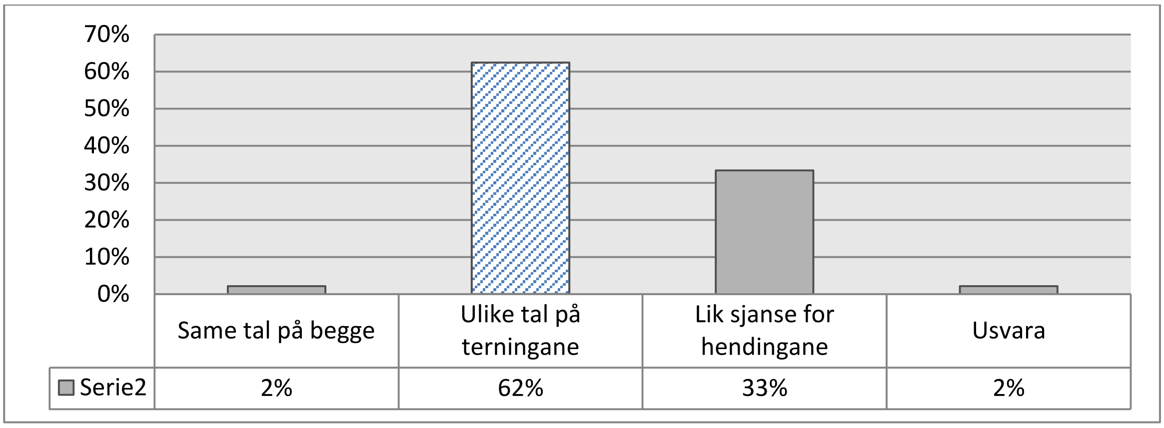
- ○ Same tal på begge terningane
- ○ Ulike tal på terningane
- ○ Det er lik sjanse for dei to hendingane over.

Figur 32. Spørsmål 13

Ved samanlikning av resultatet på desse to spørsmåla, ser vi at det er store forskjellar. På spørsmål 11 er det berre 14 % som har riktig svar medan 62 % svarar riktig på spørsmål 13.



Figur 34. Resultat av spørsmål 11. Skravert er riktig



Figur 35. Resultat av spørsmål 13. Skravert er riktig.

Spørsmål 11 er nytta i fleire tidlegare undersøkingar. Fischbein et.al. (1991) studerte 618 elevar i Italia der 278 av desse gjekk på vidaregåande trinn. Desse elevane hadde ikkje hatt opplæring innafor sannsyn. Det var 18,7 % som hadde riktig svar, medan 56,1 % svara at hendingane var like sannsynlege. I tillegg var det 18,7 % som ikkje svara og resten hadde andre svar. I Fischbein & Schnarch (1997) si undersøking av israelske elevar var det 75 % av elevane på 11. trinn som meinte paret 5 og 6, hadde same sannsyn som paret 6-6 når du trillar to terningar. Det var 25 % som hadde riktig svar. Ingen av desse elevane hadde fått opplæring i sannsyn. Batanero et al. (1996) nytta og eit tilsvarande spørsmål der ein tillegg hadde med svaralternativet: det er umogleg å gje eit svar. Undersøking galdt spanske elevar i aldersgruppene 14 år og 18 år. For elevar på 18 år, var det 19,2 % som svara riktig medan 53,3 % meinte sannsynet var det same for dei to hendingane. I tillegg var det 28,5 % som gav andre svar. I denne undersøkinga er det såleis ein del som har sagt at det er umogleg å gje eit svar, slik at undersøkinga er ikkje direkte samanliknbar med mi. Resultat frå Batanero et.al si undersøking viser likevel tendens til at elevane ikkje skil mellom hendingane.

Spørsmål 13 er ei generell form av spørsmål 11 og vi ser at elevane har mykje større tendens til å svara riktig. I Fischbein et.al. (1991) si undersøking var det no 43,2 % som svara riktig medan 41,7 % meinte sannsynet var likt. I tillegg var det vel 14 % som ikkje svara på spørsmålet.

Tabell 39 viser fordeling og døme på grunngjeving av svara på spørsmål 11. Det er berre 27 av alle elevane som har forklart svaret sitt. Vi ser at elevane som har svara likt sannsyn, har gjeve ulike forklaringar. Det er fleire av elevane som seier at det er tilfeldig. I tillegg er det nokre som viser til at du kan få tala 1 til 6 når du trillar ein terning og det er ikkje noko tal som er meir sannsynleg enn andre tal. Elevane synast å leggja til grunn at vi ser på ein og ein terning om gongen og ikkje utfalla med para (5, 6) og (6, 5). Forklaringane ser ut til å samsvar med konklusjonane som Fischbein et.al. (1991) fann i si undersøking. Dei seier m.a. følgjande (s. 535):

> *«Two main ideas are then used to justify the equality of the probabilities of getting 6-6 and that of getting 5 and 6: (a) The more primitive idea that both events are the effect of chance and therefore there is no reason to expect one more than the other; and (b) The more sophisticated idea that 5 and 6 are equiprobable and therefore every event, representing a binary combination of them, has the same probability.»*

Det er ingen av dei med riktig svar som har vist til utfallsrommet og at dette er ei samansett hending. Elevane viser m.a. til at det er vanskeleg å få to like eller det verkar lite sannsynleg å få to seksarar.

Tabell 39. Fordeling av riktig svar på spørsmål 11

Svar	Totalfrekvens	Elevar som har gjeve forklaring	Døme på grunngjeving
5 på eine og 6 på den andre (riktig svar)	13	5	Det er større sjanse for 2 ulike enn 2 like Fordi å få 2 seksarar verkar lite sannsynleg Det er vanskeleg å få to like Fordi det er berre tilfeldig
6 på begge	2	0	
Sannsynet er det same	77	22	Fordi det er like mange auge på kvar terning Like stor fordi terningen kan stoppa på tala frå 1-6 Det er rein tilfeldigeheit Det er 50 % sjanse for å få alle tala. På begge terningane For det er ikkje noko tal på terningen som er meir sannsynleg Fordi det er 1/12 sjanse for begge to Fordi det er lik sjanse å få 5 som å få 6
Usvara	1		

Tabell 40 viser oversikt over fordeling av svar og døme på grunngjeving for spørsmål 13. Det er berre to som har vist til at det er seks ulike kombinasjonar med like tal, og resten er ulike difor er det størst sjanse for å få ulike tal på terningen. Fischbein et. al. (1991) hevdar at den einaste plausible forklaringa på at det er mange fleire som svarar riktig på spørsmål 13 enn 11, er at mange av elevane klarere intuitivt å evaluera storleiken og strukturen på utfallsrommet på eit overordna nivå. Såleis klarer dei å sjå at det må vera fleire kombinasjonar med ulike tal enn like tal utan at dei talfestar dette. I oppsummeringa kjem eg nærare inn på korleis intervjupersonane grunngjev desse spørsmåla.

Tabell 40. Fordeling av riktig svar på spørsmål 13

Svar	Totalfrekvens	Elevar som har gjeve forklaring	Døme på grunngjeving
Same tal på terningane	2	0	
Ulike tal på terningane (riktig svar)	58	17	Det er 6 sider og gange 2 er lik 2/12 for likt Vanskelegare å få to like tal For det er berre 1/6 sjanse for at begge vert like For det er fleire ulike tal enn like tal Fordi det er mange ulike kombinasjonar og kun 6 kombinasjonar med like tal Fordi det er tilfeldig
Lik sjanse for dei to hendingane	31	3	Alle tal har like stor sjanse Kjem an på flaks
Usvara	2		

Spørsmål 14 er ein anna variant med terningar der ein nyttar farga sider i staden for prikkar eller tal.

Ein terning har **ei** side som er farga svart medan dei fem andre sidene er gullfarga. Dersom terningen vert trilla ein gong, kva farga trur du er på sida som vender opp? ○ Svart ○ Gull ○ Svart og gull er like sannsynlege

Figur 36. Spørsmål 14

Tabell 41 viser resultat av dette spørsmålet. Vi ser at 78 % av elevane har riktig svar medan det fordeler seg jamt på dei andre alternativa. Det er svært få som har grunngjeve svaret sitt her. Dei fleste som har svara riktig, har grunngjeve med at det er fleire gullfarga sider enn svarte sider. Resultatet mitt avvik noko frå det som Madsen (1995) fann i si undersøking. Her var det 47 % som hadde riktig svar medan 23 % meinte svart og gull var like sannsynlege. Madsen forklarer dette med at det kan tenkjast at elevane ikkje har tenkt at svart og gull er like sannsynlege, men heller har oppfatninga at begge er moglege.

Tabell 41. Resultat av spørsmål 14

Svaralternativ	Fordeling i prosent (n = 93)
Svart	6
Gull (riktig svar)	**78**
Ikkje nok informasjon	6
Svart og gull like sannsynlege	6
Usvara	2

Oppsummering av terningkast

Vi ser det er stor forskjell i resultatet når terningspørsmålet vert stilt på ei generelle form slik som spørsmål 13. Desse spørsmåla vart og gjevne til nokre av intervjupersonane og det kan synast som det er spørsmålsstillinga i spørsmål 11 som kan verka villeiande for elevane. For andre er det mest utfordrande å finna totalt utfallsrom for kast av to terningar. Nedanfor følgjer utdrag av intervju med elev E2 og E5:

I: Er det nokon forskjell på dei to (peikar på alternativa)?
E2: Eigentleg ikkje. Du har jo 1/6 sjanse for kvar av terningane uansett.
I: Kor mange gonger kan du få seks på begge terningane?
E2: Ein av tolv gonger
I: Ein femmar og ein seksar. Kan du får det på fleire måtar?
E2: Ja du kan jo få ein seksar på den første terningen eller femmar og det same på den andre, men det må jo vera motsett og då.
I: Er det då lik sjanse for dei to hendingane?
E2: Hmm. Ja eg trur eigentleg eg ville sagt det
I: Når eg seier at svaret er ein femmar og ein seksar, kan du tenkja kva som kan vera grunnen?
E2: Hmm
I: Kor mange moglege kombinasjonar har vi når vi kastar to terningar?
E2: Seks? Tolv? Nei du har eigentleg uendeleg mange kombinasjonar
I: Viss eg gjer slik (teiknar opp aksar for terningane som viser kombinasjonane), kor mange moglege kombinasjonar har vi?
E2: Du har to moglege kombinasjonar for å få ein femmar og ein seksar
I: Ja. Gjev det deg eit større sannsyn?
E2: Ja du har eigentleg berre ein mogleheit for å få to seksarar
I: Ja der har to moglegheiter og der har du ein (peikar på oppgåveteksten). Kor mange moglegheiter har vi totalt når vi trillar to terningar, hugsar du det når eg set det opp slik (peikar på aksane)?
E2: Er det ikkje 36 eller noko sånt?
I: Det er riktig. Då har vi to moglegheiter ut av 36 og der har vi ein moglegheit ut av 36 (peiker på oppgåveteksten).

E5: Lik sjanse
I: Kvifor tenkjer du det?
E5: Det er det same som med ungen. Du veit aldri kva du kan få.
I: Viss eg seier til deg at denne er riktig, at du får ein femmar og ein seksar. Det har større sjanse for å skje enn at du får seks på begge. Korleis kan eg seia det?
E5: Det veit eg ikkje
I: Viss eg seier at vi i sannsyn må telja opp kor mange moglegheiter vi har om det vi spør om. Slik som med kulene der vi tel opp kor mange blå vi har i forhold til totalen. Kan vi gjera det på noko måte her?
E5: Skal vi dela dei på kvarandre og då? Altså 5 delt på 6?
I: Det kan du ikkje gjera, men kor mange kombinasjonar kan du få når du trillar to terningar?
E5: Du kan få tolv kombinasjonar
I: Jaha. Tolv altså. Kor mange kombinasjonar kan du få av ein femmar og ein seksar på to terningar?
E5: Eg skjønar ikkje heilt kva du meiner
I: Kor mange måtar kan du få 5 og 6 på når du kastar to terningar? Vi kan få 5 på den eine og..
E5: Seks på den andre
I: Og så kan vi få?
E5: Fem på den andre og seks på den første
I: Ja slik at vi kan få det på 2 ulike måtar. På kor mange måtar kan vi få to seksarar då?
E5: To?

4.5 Vilkårsbunde sannsyn og Falk-fenomenet

Vilkårsbunde sannsyn kan vera utfordrande for ein del elevar både fordi ein må ta stilling til føregåande hendingar. Nøkkelen her vil vera å kunne lista opp utfallsrommet for hendinga. I første del av dette emnet har eg teke med to spørsmål som gjeld såkalla trekortsproblematikk medan siste delen tek for seg Falk-fenomenet.

Trekortproblematikk

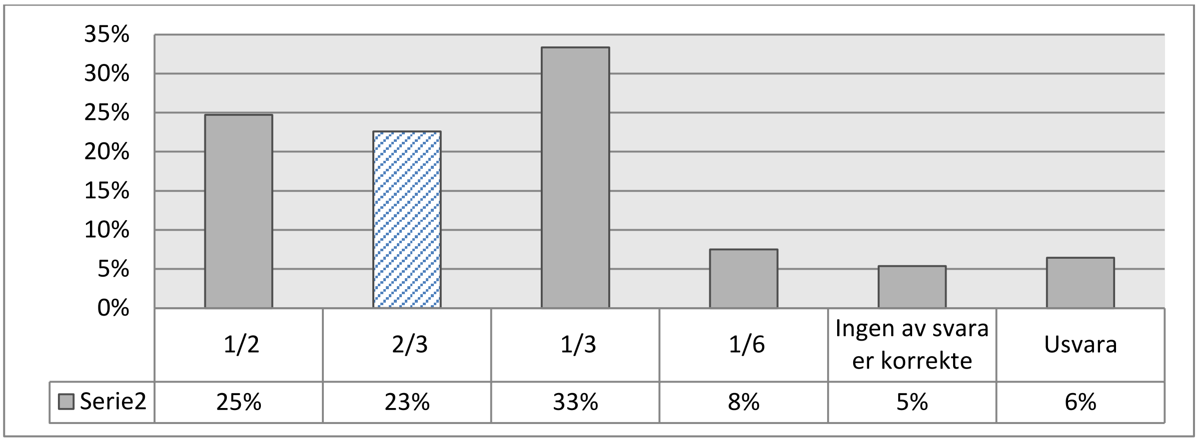
Spørsmål 21 tek utgangspunkt i Bar-Hillel og Falk (1982) si utgreiing om vilkårsbunde sannsyn og Falk (1986) (jf. kap. 2.10.6). Det er lett å tenkja at sannsynet må vera $P(A) = \frac{1}{2}$ sidan det er to kort som er raude på ei side og at alle korta har same sannsynet. Løysinga er at vi må sjå på kor mange sider som er att, og ikkje kor mange kort det er. Når vi veit at ei side er raud, kan vi sjå bort frå kortet der begge sider er kvite. Vi har då att ei kvit side og 2 raude sider. Sannsynet for at kortet er raudt på baksida er $P(A) = \frac{2}{3}$. Spørsmål 5 byggjer på Lecoutre et al. (1990) og er meint til å sjå om elevane har lettare for å kunne seia noko om sannsynet når oppgåva har eit meir konkret geometrisk element.

Du har tre kort der eit er raudt på begge sider. Det andre kortet er raudt på ei side og kvit på den andre sida medan det tredje kortet er kvitt på begge sider. Anta at du trekkjer eit kort og plasserer det med ei vilkårleg side opp. Det viser seg at sida som vender opp, er raud. Kva er sannsynet for at den andre sida på kortet og er raud?

- ○ ½
- ○ 2/3
- ○ 1/3
- ○ 1/6
- ○ Ingen av svara over er korrekte.

Figur 37. Spørsmål 21

Det var 23 % som hadde riktig svar på dette spørsmålet, medan fleirtalet (33 %) meinte at sannsynet var 1/3. I tillegg var det 25 % som meinte at svaret måtte vera ½.



Figur 38. Fordeling av svar på spørsmål 21. Skravert er riktig.

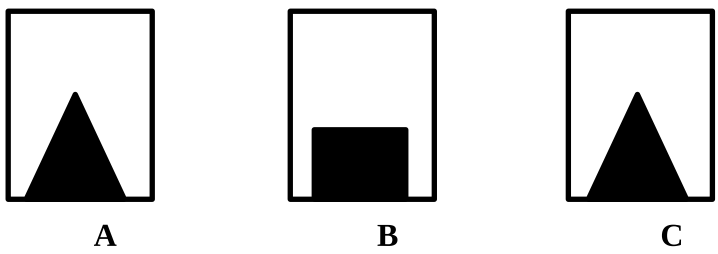
Dette spørsmålet har vore nytta i fleire undersøkingar. Rubel (2002) fann at det berre var 3 % av elevane på 11. trinn med ordinær opplæring, som svara riktig på dette spørsmålet. I gruppa på 11. trinn med avansert matematikk, var det 15 % som hadde rett svar. Kennis (2006) som tok utgangspunkt i Rubel si undersøking, nytta og dette spørsmålet. I undersøking hans var det 15 % som svara riktig medan mesteparten meinte sannsynet var ½ (38 %). Vidare var det 31 % som meinte at 1/3 var riktig svar. Dette var elevar på 9. til og med 12. trinn.

Tabell 42. Forklaringar til spørsmål 21

Svar	Totalfrekvens	Elevar som har gjeve forklaring	Døme på grunngjeving
1/2	23	8	Det er berre to kort som er raude på minst ei side Sidan det tredje var heilt kvitt, har du anten nummer 1 eller 2 Fordi det er 2 kort som har raudt To av dei tre korta er raude på ei eller begge sider derfor er det ½ sjanse for at det er raudt på den andre sida når berre eit av dei er raudt på begge sider
2/3 (riktig svar)	21	4	Det kan ikkje vera det heilt kvite så då er det berre to kort att Fordi det er 2 raude og 3 kvite kort att Fordi du kan utelukka kortet med to kvite sider
1/3	31	3	For det er berre to kort med raudfarge på den eine sida, men den eine er raud på den andre sida og For det er berre eit kort med 2 raude sider
1/6	7	3	Fordi det er 6 moglegheiter og 3 av dei er raude og 3 kvite Det var eit kort som var raudt på begge sider 1/6 fordi det er 6 sider
Ingen er riktig	5	2	Det er berre eit kort som er raudt på begge sider Det er tilfeldig
Usvara	6		

Det kan synast som dette spørsmålet var både utfordrande i høve det å få riktig svar og å gje ei forklaring. Som vi ser i tabell 42, var det berre 20 av elevane som grunngav svaret sitt. Både dei med riktig svar og galt svar har stort sett vist til talet på kort og ikkje talet på sider. Det er berre to av dei som har svara at sjansen er 1/6, som har vist til talet på sider. Dei synast å ta med alle sidene og såleis kjem fram til 1/6 for at ei side er raud. Dette ville vore riktig om ein skulle trekkje tilfeldig og finna sannsynet for ei raud side har utan vilkår.

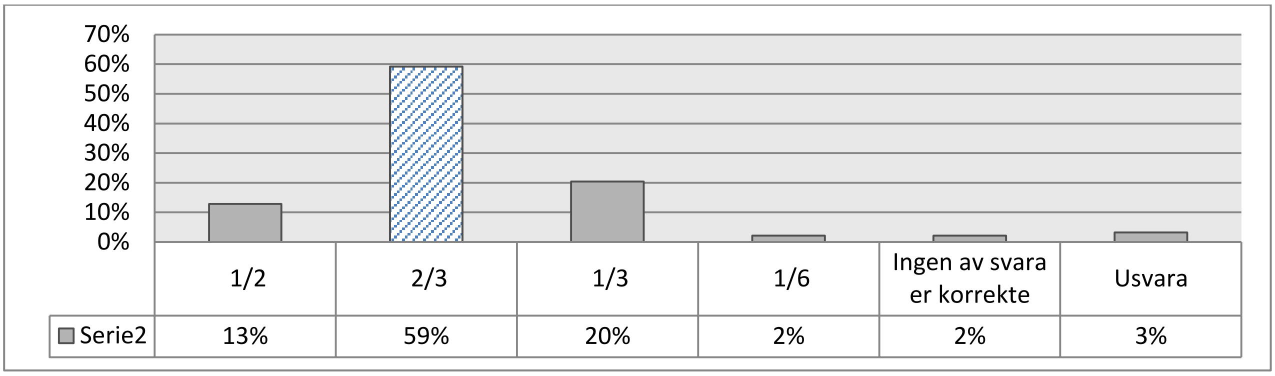
Spørsmål 5 er drøfta i Lecoutre et al. (1990) og vart der nytta for å studera likesannyn og bruk av kognitiv hjelp. Føremålet med oppgåva var å maskera sjanse-aspektet og få elevane til å vurdera «konstruksjonen» i staden for. Du har 3 kort i ein hatt som vist nedanfor, der to har bilete av ein trekant medan eit kort har bilete av eit rektangel. Du kan laga eit hus ved å trekkja korta AB eller BC eller du kan laga ein diamant/rombe ved å trekkja korta AC.



Du trekkjer to av korta i frå hatten utan å kunne sjå kva kort du trekkjer. Kva er sannsynet for at du kan laga eit hus?
- O ½
- O 2/3
- O 1/3
- O 1/6
- O Ingen av svara er korrekte.

Figur 39. Spørsmål 5

Dette spørsmålet gjekk greitt for dei fleste elevane. Figur 40 viser oversikt over prosentvis fordeling på dei ulike svaralternativa. Vi ser at nærare 60 % fekk riktig svar her. Det var elles 20 % som meinte at 1/3 var korrekt.



Figur 40. Fordeling av svar på spørmål 5

Oppsummering tre kort

Resultatet viser altså at 23 % av elevane svar riktig på spørsmål 21 medan 59 % svara riktig på spørsmål 5. Dei to spørsmåla har nok noko ulik vanskegrad, men begge føreset likevel at ein kan setja opp riktig utfallsrom. På det første spørsmålet må vi sjå på talet på sider medan det andre spørsmålet krev at ein kan setja opp utfallsrommet til ei samansett hending. Det var ikkje noko uttala samanheng mellom karakter og riktig svar på spørsmål 21, men på spørsmål 5 var det prosentvis fleire av elevane på dei lågaste karaktertrinna som klarte oppgåva. Ei av forklaringane kan vera at desse elevane har ein meir praktisk tilnærming til spørsmålet og såleis finn svaret utifrå dette. Lecoutre et al. (1990) hevdar at feilslutningane vi ser i elevane sine spontane svar og forklaringar, kan bli riktige om vi klarer å omforma spørsmåla på ein slik måte at elevene klarer å knyta representasjonane sine til situasjonen. For mange er det enklare å vurdera dei geometriske figurane enn å vurdera sjanseomgrepet.

Falk-fenomenet

Spørsmål 7 og 22 byggjer på Falk (1986) si utgreiing om vilkårsbunde sannsyn og tidsaksen. I ein boks ligg det 4 kuler, 2 svarte og 2 kvite, og ein trekkjer ei vilkårleg kule og ser ho er kvit. Utan å leggja tilbake den første kula, trekkjer ein ei kule til. Når vi veit at den første kula er kvit, er sannsynet for at den andre kula og er kvit, gjeve ved $P(K_2|K_1) = \frac{1}{3}$. I spørsmål 22 trekkjer vi først ei kule utan å sjå kva farge ho har. Utan å leggje tilbake den første, trekkjer vi ei til og ser at ho er kvit. Då er det to svarte og ei kvit kule som må vurderast i høve det første trekket. Sannsynet for at den første kule og er kvit er gjeve ved $P(K_1|K_2)= \frac{1}{3}$. Falk hevdar at nokre vil påstå dette ikkje er lovleg medan mesteparten av dei som svarar, seier at sannsynet er ½. Desse elevane grunngjeve svaret med at før første trekk, har ein ikkje utført andre trekket og at første ballen ikkje vert påverka av om andre ballen er svart eller kvit. Dei baserer såleis svaret sitt på korleis forholdet mellom svarte og kvite ballar er i boksen før eksperimentet uavhengig av seinare utfall. Det er såleis mot-intuitivt at ei etterfylgjande hending kan seia noko om sannsynet av ei føregåande hending (ibid.).

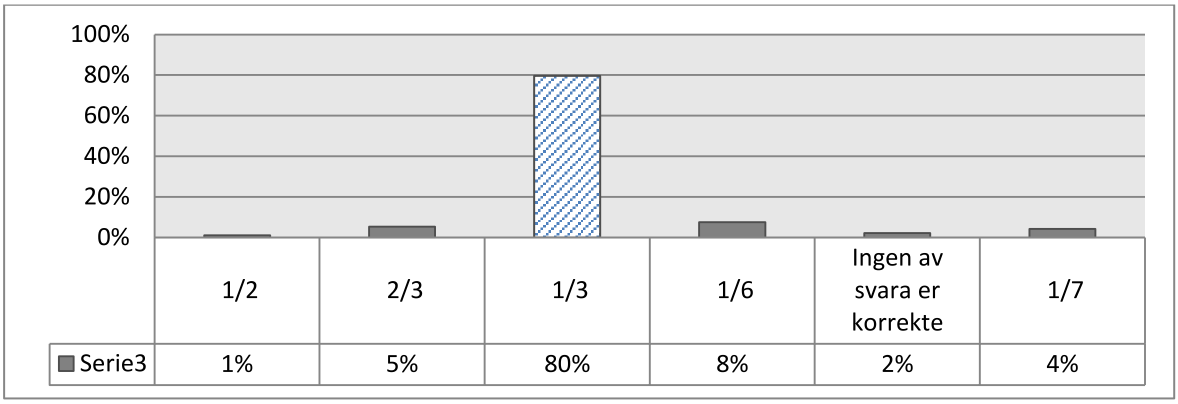
Argumentasjonen til elevane i Falk si undersøking synte at dei har ei kausal tilnærming til hendinga. Utfallet av det andre trekket er årsaksmessig avhengig av første trekket, medan det motsette er ikkje er tilfelle. I det første tilfellet der $P(K_2|K_1) = \frac{1}{3}$, er hendinga i samsvar med den tidsmessige forståinga vår medan hendinga $(K_1|K_2)$ er likegyldig i høve tidsaksen (Falk, 1986).

I ei krukke ligg det 4 kuler, 2 svarte og 2 kvite. Du trekkjer vilkårleg ei kule frå krukka og ser at ho er kvit. Utan å leggja den første kule tilbake, trekkjer du ei kule til. Kva er sannsynet for at den andre kula er kvit?

- ◯ ½
- ◯ 2/3
- ◯ 1/3
- ◯ 1/6
- ◯ Ingen av svara over er korrekte.

Figur 41. Spørsmål 7

Det var svært mange av elevane som hadde riktig svar på dette spørsmålet. Av dei 74 elevane med riktig svar, er det 47 som har gjeve ei forklaring. Alle desse har vist til at det er tre kuler att og ei av desse er kvit slik at sannsynet vert 1/3 for at den andre kula er kvit. Eg har teke med eit tilleggsalternativ fordi 4 av elevane som har svara ingen svar er riktig, har skrive at sannsynet er 1/7. Ingen av desse har gjeve noko nærare forklaring på korleis dei har tenkt. Ei mogleg forklaring er at dei tek utgangspunkt i addisjonssetninga og seier at sannsynet er $P = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. I neste omgang tenkjer dei feil ved brøkrekning og seier at svaret må bli $\frac{1}{7}$.



Figur 43. Resultat av spørsmål 7

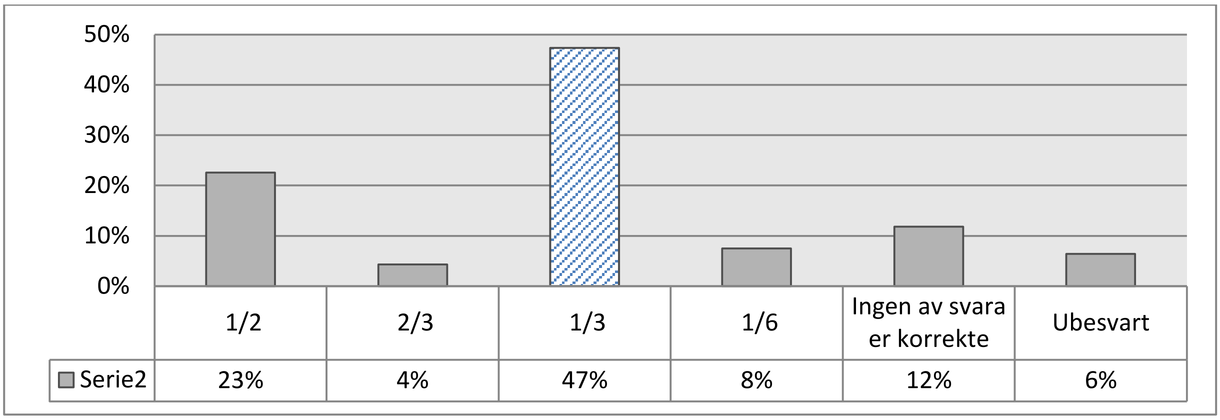
Resultatet vert noko annleis når det gjeld spørsmål 22 der vi ikkje veit noko om den første kula som vart trekt. Figur 45 viser fordeling på dei ulike svara. Framleis er det flest som har svara riktig, og seier at sannsynet er 1/3. Det er likevel 23 % som meiner sannsynet er lik ½ medan 12 % seier at ingen av svara er korrekte. Svært få av elevane har grunngjeve dette spørsmålet. Nokre av dei som har svara riktig, seier t.d. «fordi det er kun tre kuler igjen og berre ei er kvit». Det er og nokre få av dei som har svara at sannsynet er ½, som har gjeve ei forklaring. Dei seier m.a. «Det er like mange svarte som kvite kuler når ein trekkjer første gongen».

I ei krukke ligg det 4 kuler, 2 svarte og 2 kvite. Du trekkjer vilkårleg ei kule frå krukka og legg ho vekk utan å sjå kva farge kula har. Utan å leggja den første kule tilbake, trekkjer du ei kule til og ser at ho er kvit. Kva er sannsynet for at den første kula og er kvit?

- ◯ ½
- ◯ 2/3
- ◯ 1/3
- ◯ 1/6
- ◯ Ingen av svara over er korrekte.

Kvifor meiner du det?

Figur 44. Spørsmål 22



Figur 45. Resultat av spørsmål 22 (skravert stolpe er riktig). N = 93.

Fischbein & Schnarch (1997) nytta ei litt anna utforming av desse spørsmåla i si undersøking. I innleiinga vert det opplyst at ein først trekkjer ei kvit kule og så eit til og ser at denne er kvit. Deretter vert det spurt om sannsynet for den andre kula og er kvit er mindre enn, lik eller større enn sannsynet for ei svart kule. På spørsmål 2 vert det spurt om sannsynet for at den første kula er kvit er mindre enn, lik eller større enn sannsynet for at ho er svart. I deira undersøking var det 30 % av elevane på 11. trinn som svara riktig på begge spørsmåla medan 70 % hadde rett på første spørsmålet og feil på det andre (n = 20).

I Diaz & Batanero (2009) sin studie var det 72 % som hadde riktig på første spørsmålet og 37 % hadde riktig på andre spørsmålet (n = 177). Elevane var førsteårs studentar ved universitetet og var 18-19 år gamle. Alle hadde tidlegare gjennomgått noko sannsynsopplæring på ungdomsskuletrinnet.

Oppsummering vilkårsbunde sannsyn og Falk-fenomenet

Som nemnd ovanfor, var det få som gav ei forklaring på desse spørsmåla. Det er 5 av dei som svara feil på spørsmål 22, som har vist til at det er 50 % sannsyn eller ½ for kvit kule når ein trekkjer den første kula. I tillegg er det 3 som meinte at det var tilfeldig. Nokre av intervjupersonane fekk og dette spørsmålet. Vi ser at både elev 4 og 7 ser bort frå vilkåret som vert gjeve, og berre peikar på tidsaspektet.

E4: Ja ein fjerdedel. Det er jo fire kuler. Den første du trekte var kvit. Ja då må det vera ein halv.
I: Kvifor tenkjer du det?
E4: Fordi det er to kvite og to svarte
I: Betyr det noko at eg har teke ut den kvite kula?

E4: Men det er jo ikkje det som er poenget med oppgåva, er det det då? Det er jo den første kula dei tenkjer på.

I: Viss eg seier til deg at 1/3 er riktig, kva meiner du om det?
E7: Det gjev ikkje meining.
I: Betyr tida noko når vi trekkjer?
E7: Nei. Viss det er to svart og to kvite, så er det halvparten sjanse for kvit.
I: Så sjølv om du ikkje veit kva farge første kula hadde så meiner du det er ½?
E7: Då er det same spørsmålet som i stad. Når du trekkjer den første kula, er det ikkje trukke nokon andre så då er det 2 av 4 som er halvparten

Elev E6 såg derimot bort frå tidsaspektet og la vekt på vilkåret.

I: Er det nokon forskjell på dei to spørsmåla?
E6: Du såg ikkje på den første så du veit ikkje kva du har teke, kva som er igjen oppi. Men det er jo for så vidt det same. Ein tredjedel.
I: Kan du grunngje det noko meir? Kva tenkte då du kom fram til at det måtte vera ein tredjedel?
E6: Det er same prinsippet, at du har trekt ei kule

Resultatet på desse spørsmåla syner at tidsrekkefølgja gjer at vi intuitivt har lett for å sjå bort frå vilkåret og heller leggja vekt på tidspunktet for hendingane sjølv om den stokastiske strukturen er den same i dei to spørsmåla.

Samanlikna med andre studiar viser resultata mine for spørsmåla under vilkårsbunde sannsyn og Falk-fenomenet, at det i stor grad er samanfall.

4.6 Variasjon

Når vi underviser sannsyn i skulen, har vi gjerne merksemda retta på utfallet av enkelthendingar og spørsmål som t.d. kva er sannsynet for å trekkja to raude kuler osb. Det er mindre fokus på variasjon i hendingane (Shaughnessy & Ciancetta, 2002). I spørjeskjemaet har eg teke med eit spørsmål om dette emnet. Spørsmål 20 er henta frå Reading & Shaughnessy (2004) si studie av kva forståing elevar i grunnskulen har om omgrepet variasjon. Dersom ein har liten kunnskap om variasjon som omgrep eller har tendens til å bruka likesannsyn eller utfallstilnærming, vil ein gjerne gje opp for mange raude eller at vi får om lag same utfallet kvar gong vi trekkjer 10 seigmenn (figur 3).

Figur 46 viser spørsmål 20 medan figur 47 viser oversikt over resultatet på første del av spørsmålet.

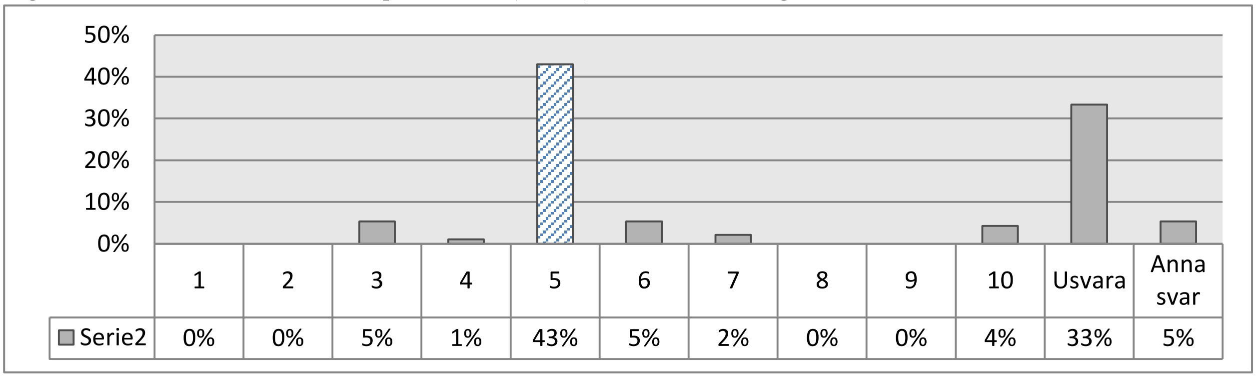
Du har ei skål med 100 seigmenn. 20 er gule, 50 er raude og 30 er grøne. Du tek 10 seigmenn frå skåla.

Kor mange raude trur du at du får?

Vil dette skje kvar gong du tek 10 seigmenn frå ei skål med 100 seigmenn med same fordeling av fargar på seigmennene som nemnd ovanfor?

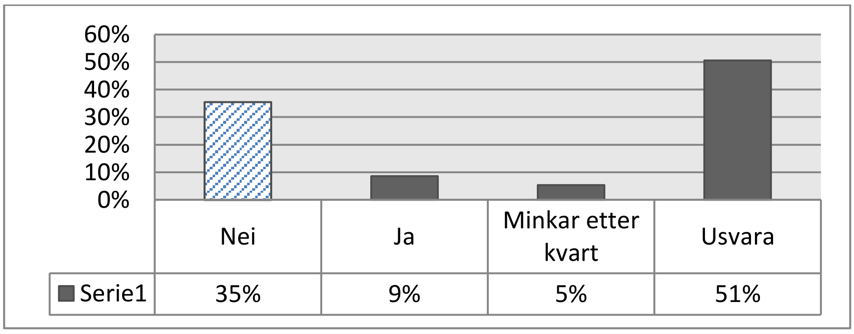
Figur 46. Spørsmål 20

Figur 47. Resultat av første del av spørsmål 20 (n = 93). Skravert er riktig svar



Det var 33 % som ikkje gav noko svar på dette spørsmålet medan 43 % svara riktig utifrå fordelinga av seigmenn som var oppgjeve i teksten.

Figur 48 viser fordeling av svar på andre del av spørsmål 20 der elevane skulle seie noko om variasjon i høve til trekk av raude seigmenn. Det er 35 % som meiner at dette ikkje vil skje kvar gong medan 9 % seier at ein vil få same fordeling. Nokre få elevar har oppfatta spørsmålet slik at talet på seigmenn minkar etter kvar som du tek ut seigmenn og viser til at talet på raude då vil minka. Det er elles 51 % som let denne delen stå open.



Figur 48. Fordeling av svar på del 2 av spørsmål 20

Det er få av elevane som har gjeve ei anna forklaring enn ja eller nei på om det same skjer kvar gong. Nokre seier at det er lite sannsynleg at det skjer to gonger eller at det er heilt tilfeldig.

Utifrå proporsjonalitet vil riktig svar på oppgåve 20 vera at ein forventar 5 raude når ein tek ut 10 seigmenn. Det er berre ein av elevane som gjev eit intervallsvar, og seier om lag 5-6 raude. Tre av elevane fekk og dette spørsmålet under intervjuet og elev E6 viser at han har ei forståinga at hendingar kan variera og mest sannsynleg vil vera fordelt symmetrisk rundt 5.

E6: *Fordi det er like mange som gule og grøne til saman så det jo 50 prosent sjanse for at du får fire, nei fem.*
I: *Viss eg har fleire slike skåler bortover med akkurat hundre i kvar, vil det skje kvar gong eg tek 10 seigmenn?*
E6: *Nei*
I: *Kva grunngjev du det med?*
E6: *Tilfeldig*
I: *Ja. Kva trur du det vil liggja mellom viss du gjer det 5-6 gonger? Vil det variera?*
E6: *Litt, men ikkje med så mange*
I: *Kva trur du det ligg mellom?*
E6: *Rundt fem*
I: *Rundt fem*
E6: *Ja fire-seks*

5 Oppsummering, konklusjon og avslutning

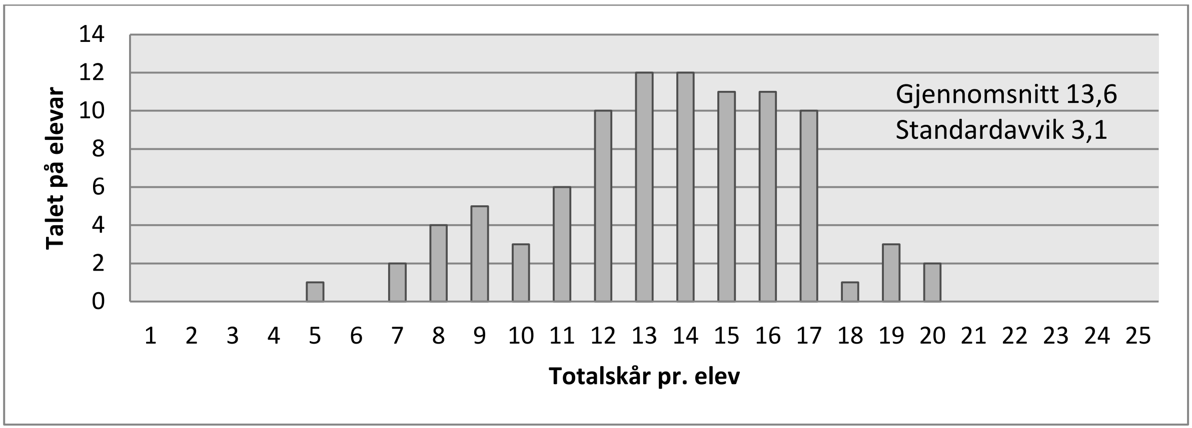
I denne studien har eg sett på ulike oppfatningar og misoppfatningar elevane kan ha når dei skal løysa ulike problemstillingar innafor sannsyn og kva løysingsstrategiar dei nyttar. Eg har og samanlikna funna mine med tidlegare forsking. Det vert først gjeve nokre overordna statistiske mål og deretter ei overordna samanstilling av spørjeskjemaet for å sjå om nokre av spørsmåla merkar seg ut. Vidare vert det gjeve ei kort oppsummering av funna knytt til misoppfatningar innafor enkle og samansette hendingar, utfallstilnærming, representativitet, likesannsynsfeil, feilslutning om tidsaksen (Falk-fenomenet) og vilkårsbunde sannsyn og variasjon.

Nokre av spørsmåla inneheld same matematiske innhaldet, men har ulike representasjonar. Dette er gjort nærare greie for i kap.5.3. Det er og gjort ei vurdering i høve karakter og resultat der eg m.a. nyttar Pearsons *r* for å sjå om det er noko statistisk samanheng. I kap. 5.5 vert det gjeve ei oppsummering av elevane sine løysingsstrategiar medan det er gjort nærare greie for elevane sin bruk av omgrep i kap. 5.6. Kapittelet vert avslutta med konsekvensar for undervisning av sannsyn og til slutt nokre oppsummerande tankar om vidare forsking.

5.1 Samla resultat og overordna statistiske mål

Figur 49 viser oversikt over fordeling av totalskår pr. elev. Det er gjeve eit poeng for riktig svar og 0 poeng dersom svaret er galt. Gjennomsnittleg poengsum i spørjeskjemaet er 13,6 medan standardavviket er 3,1. Det vil seia at elevane i snitt har klart litt over halvparten av spørsmåla. Det er sjølvsagt ikkje noko mål i seg sjølv å få mange riktige svar på denne testen, men å undersøkja kva misoppfatningar elevane har i sannsyn. Diagrammet seier likevel noko om variasjon i fordelinga av skår pr. elev.

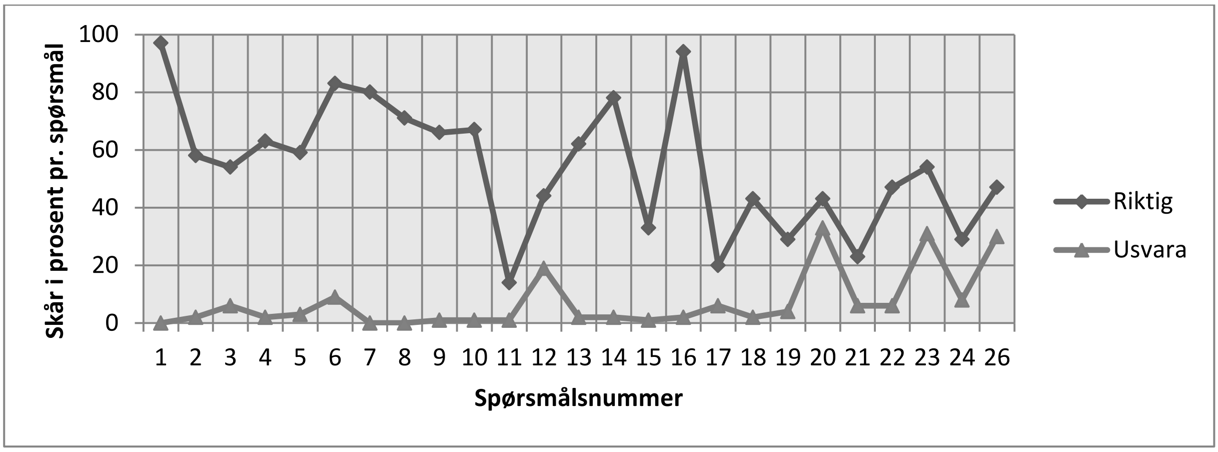
Vi ser og at diagrammet er noko venstreskeivt fordelt. Det kan anten tyda på at oppgåvene var lette eller at elevane har ein viss kunnskap om sannsyn (Kleven et al., 2011).



Figur 49. Fordeling av totalskår pr. elev

5.1.1 Overordna samanstilling av spørjeskjemaet

Ved utarbeiding av spørjeskjemaet vart det gjort ei val om å ha jamt over aukande vanskegrad i spørsmåla (jf. kap. 3.5.1). Figur 50 viser oversikt over spørsmåla og prosentvis riktig skår på kvart av dei. Som grafen viser, er det i snitt høgare skår på dei 10 første spørsmåla medan skåren fell frå spørsmål 17 og utover. Det som merkar seg ut er m.a. spørsmål 11, der respondentane skulle ta stilling til kva som var mest sannsynleg av ein femmar og ein seksar eller to seksarar når ein trillar to terningar (jf. kap. 4.4). Dette er truleg eit spørsmål der utforminga av teksten er det avgjerande for kva elevane svarar, jf. kap. 5.2.4. Eit anna spørsmål som og merkar seg ut, er spørsmål 16 der det var høg skår for riktig svar. For dei fleste elevane er det gjerne intuitivt ut frå erfaring, at det er om lag lik sjanse for å få gut eller jente ved ein fødsel. Spørsmåla 12, 20, 23 og 26 merkar seg og noko ut ved at det er større del av elevane som let vera å svara samanlikna med dei andre spørsmåla. Alle desse fire spørsmåla kravde at elevane måtte skriva eit svar. Det var flest elevar i karaktergruppene 1, 2 og 3 som let vera å svara her.



Figur 50. Skår i prosent pr. spørsmål

5.2 Kort oppsummering av dei ulike misoppfatningane

5.2.1 Enkle og samansette hendingar

Det første emnet i resultatkapittelet gjeld enkle og samansette hendingar. Elevane hadde ikkje vanskar med enkle hendingar, men synte at dei hadde meir utfordringar med samansette hendingar. Det var og litt over halvparten som fekk riktig svar på spørsmål 3, der ein skulle vurdera summen av auge på to terningar. Forklaringa til ein del elevar viste at dei nytta ei algebraisk tilnærming når dei skulle vurdera utfallsrommet og gunstige utfall. Desse elevane meinte at det var større sjanse for at summen viser partal fordi summen av to partal og summen av to oddetal gjev partal, medan eit oddetal og eit partal gjev oddetal. Utifrå eit konstruktivistisk syn kan dette sjåast på som elevane sine forsøk på å nytta førkunnskapen sin på eit nytt område der denne er utilstrekkeleg (jf. kap. 2.5 Oppfatningar og misoppfatningar). I følgje Sfard (1995) kan vi sjå at elevane gjer same feil som tidlegare matematikarar gjorde ved danning av nye omgrep. Misoppfatningane som elevane har i dette spørsmålet, kan og likestillast med d'Alemberts feilslutning (jf. kap. 2.10.2). Han såg bort frå symmetriprinsippet og meinte at utfallsrommet for kast av ein mynt to gonger er {K, MK, MM}. Sett frå prinsippet om likesannsyn vil utfallsrommet for summen av auge ved kast av to terningar vera {OP, PO, PP, OO}. Dette kan igjen komprimerast til utfallsrommet {O, O, P, P}. Såleis er sannsynet for summen av auge er partal lik $\frac{1}{2}$.

Det som ikkje går heilt klart fram er om dei som har svara riktig, har brukt ei normativ forklaring ved å sjå på utfallsrommet eller dei tenkjer på gunstige og moglege utfall for eit enkelt kast. I begge tilfella er det 50 % sannsyn for oddetal eller partal. Desse elevane vil då få riktig svar, men med feil grunngjeving.

Utfordringar med samansette hendingar kjem klarare fram i spørsmål 24 og spørsmål 19. I spørsmål 24 skulle elevane vurdera sannsyn for at begge terningane viser partal. Her var det 29 % som hadde riktig svar. Grunngjevingane for feil svar viser at elevane nyttar ulike strategiar. Nokre har vist til at det er like mange partal som oddetal på ein terning medan andre har nytta ei 50-50 tilnærming. Lykkehjulsoppgåva synast også utfordrande for ein del elevar då det var 67 % som svara feil på dette spørsmålet. Grunngjevingar som går att er at halve lykkehjulet er svart på begge to, og såleis er det 50-50 sjanse.

5.2.2 Utfallstilnærming

Utfallstilnærminga synast å vera utbreidd hjå fleire av elevane, ikkje berre på spørsmåla som er meint å testa denne misoppfatninga, men og på dei andre spørsmåla i kartleggingstesten. Elevane som har nytta denne tilnærminga, viser til at noko er tilfeldig, alt kan skje eller det handlar om flaks.

Denne misoppfatning kan karakteriserast som ei ikkje-matematisk misoppfatning, då eleven t.d. ikkje nyttar ufullstendige omgrep eller overgeneraliserer frå det han har lært tidlegare i andre emne. Ein kan då forventa at dette er mest utbreidd hjå elevar på dei lågare karaktertrinna. Resultatet av spørsmål 12 og 23 som var meint å testa utfallstilnærming, kan i første omgang tyda på dette. Begge spørsmåla viser at det er på grensa til sterk samanheng mellom karakter og riktig svar (Pearson *r* er om lag 0,60). Samstundes ser ein frå gjennomgang av resultatet i kap. 4.2, at både elevar med riktig svar og feil svar grunngjev med utfallstilnærming. Ved å gå nærare inn i datamaterialet finn eg at elevar på karaktertrinna 1, 2 og 3 har større tendens til å lata spørsmåla stå usvara eller dei let vera å grunngje dei. Det er difor ikkje mogleg utifrå resultatet på desse to spørsmåla å konkludera med at dei svakare elevane har større tendens til å nytta utfallstilnærming.

På spørsmåla under enkle og samansette hendingar (jf. kap. 4.1) er det få av elevane som har nytta utfallstilnærming som grunngjeving. Det er heller ikkje særleg utbreidd for spørsmåla som gjeld lova om store tal eller ignorering av grunnfrekvens i hovudkapittelet om representativitet (jf. kap. 4.3). Biletet endrar seg noko når vi kjem til misoppfatning av tilfeldige hendingar. På spørsmål 2 der elevane skulle ta stilling til kva sekvens av mynt og krone som var mest sannsynleg, var det i overkant av 38 % av dei med riktig svar som gav ei grunngjeving som fell inn under utfallstilnærming. Her er det gjerne innhaldet i sjølve spørsmålet som tilseier at elevane fell ned på denne forklaringa. Trekk av kuler i hovudkapittelet lik sannsynsfeil (jf. kap. 4.4) synast ikkje å leia nokon inn i utfallstilnærming som grunngjeving. Her er det ikkje nokon som har vist til tilfeldigheit i svara sine medan hendingar med terningkast i same kapittelet, synast å fremja dette noko meir. Det kan skuldast elevane sine erfaringar med terningspel og at ein knyter omgrepa flaks og tilfeldigheit til terningkast.

Eg har ikkje gått så djupt inn i datamaterialet at eg kan seia noko om det er dei same elevane som tyr til denne forklaringa jamt over, eller om det varierer.

5.2.3 Representativitet

I studien min har eg teke med følgjande tilnærmingar under emnet representativitet: ignorering av utvalsstorleik og lova om store tal, ignorering av grunnfrekvens, misoppfatningar av tilfeldige hendingar og spelaren si feilslutning.

Det vart gjeve to spørsmål under ignorering av utvalsstorleik og lova om store tal, og det var 16 % som hadde riktig på begge spørsmåla. Over halvparten meinte det var likt sannsyn for hendingane sjølv om det er størst sannsyn for t.d. 2 mynt på 3 kast i høve 200 mynt på 300 kast. Grunngjevingane viste at elevane ikkje berre såg på forholdet, men og nytta ei 50-50 tilnærming ved å seia at det er 50 % sjanse for mynt og krone. Rubel (2002) stiller som nemnd i kap. 4.3.1, spørsmål om dette er noko som vi automatisk knyter til myntkast. Det var og fleire elevar som nytta ei utfallstilnærming som grunngjeving.

Shaughnessy & Reading (2004) hevdar at mange av oss har merksemda vår retta mot spørsmål kring sentrum eller gjennomsnitt eller forhold i motsetnad til spreiing eller variasjon når vi estimerer sannsynet for ei tilfeldig hending. Dei seier vidare at vi har manglande omgrep og låg intuisjon om korleis utfall er fordelt kring sentrum i ei binomisk fordeling.

Shaughnessy & Ciancetta (2003) viser til at elevane i deira undersøking hadde tendens til å sjå vekk frå variabilitet dersom oppgåva hadde ein probabilistisk kontekst. I ei oppgåve med terningkast der elevane skulle gjera ei fordeling av kor mange dei trudde ville hamna på sidene 1 til 6 ut av 60 kast, såg mesteparten av elevane berre på enkeltutfallet av eit terningkast, dvs. 1/6 for kvart av tala 1 til 6. Dei fordelte då 10 kast på kvar av tala medan dei på ei oppgåve med trekk av drops og ei med lykkehjul meinte det var større variasjon for utfalla. Shaughnessy & Ciancetta seier vidare at dei antar at elevane føreseier konstante resultat for gjentakande forsøk i kjende situasjonar innafor sannsyn. Dette meiner dei kan skuldast at vi i skulen legg større vekt på å finna sannsynet for enkeltutfall som t.d. ved terningkast og myntkast, i staden for å sjå på rekkjevidda av utfalla.

Det vart gjeve tre spørsmål for å studera elevane sine oppfatningar av tilfeldige hendingar. Mellom 60 og 70 % av elevane fekk riktig svar på desse spørsmåla så det kan synast som om elevane har ei formeining om ei tilfeldig hending. Det var likevel ikkje nokon som viste til utrekning for svaret sitt. Analyse av riktige svar syner at elevane nyttar mange ulike strategiar og tankesett i forklaringane sine. Nokre viser til at det er uavhengige forsøk, andre til 50-50 tilnærming (ved myntkast og gut-jente) eller utfallstilnærming. På spørsmål 10 om lottorekka, er det nær 30 % som meiner Arne har størst sjanse for å vinna. Grunngjevinga er at han har meir spreidde tal og det er det som er det vanlege i lottotrekkinga. Erfaring er såleis eit viktig moment her.

Spørsmål 6 og 16 under spelaren si feilslutning var tydelegvis ikkje noko som elevane fann utfordrande då det var over 80 % som fekk riktig svar her.

5.2.4 Likesannsyn

Mange elevar ser på likesannsyn som ein innebygd eigenskap ved sannsyn. Spørsmåla om trekk av kuler (spørsmål 4 og 8), gjekk tilsynelatande greitt for dei fleste elevane. Det var likevel om lag halvparten som gav ei normativ forklaring, og viste til utrekning av sannsynet. Nokre nytta andre typar forklaringar som t.d. *«fordi det er fleire kuler i A enn i B»* eller *«fordi det berre ligg ei kvit kule i boksen.»* Desse elevane nyttar årsaksforklaringar og peikar på årsak i staden for å vurdera sannsynet (Falk, 1986; Breiteig, 2002; Kahneman et al. 1982). Eit av intervjua viser og at forståinga av ekvivalente brøkar kan vera utfordringa og ikkje sannsynsspørsmålet i seg sjølv. Det kjem ikkje klart fram om dette kan gjelda fleire elevar, men det er nærliggjande å tru det.

Biletet vart noko annleis for spørsmål 11 og 13. Det var litt over 80% som meinte at det var lik sjanse å få ein femmar og ein seksar som to seksarar medan litt over 60 % fekk riktig svar når dei skulle vurdera same tal på terningane og ulike tal på terningane. I begge tilfella må ein vurdera utfallsrommet. Det kan vera fleire årsaker til at det er stor forskjell i fordeling av riktig svar på desse spørsmåla. Utforminga av spørsmål 11 kan vera noko villeiande ved at ein kan tru det skal vera fem på den første terningen og 6 på den andre. Ingen av dei med riktig svar har vist til utfallsrommet på spørsmål 11. Utfallstilnærming går att som forklaring hjå fleire, både dei som har svara riktig og dei med feil svar. Såleis kjem det ikkje klart fram om det er teksten som har vore forvirrande. Det kan synast som elevane har ein intuisjon om at det er mindre sannsyn å få same tal på begge terningane som ulike tal. Berre ein av elevane har eksplisitt vist til at det er 6 kombinasjonar med like tal og resten ulike.

5.2.5 Vilkårsbunde sannsyn

Det grunnleggjande i vilkårsbunde sannsyn er å kunne lista opp utfallsrommet og vurdera føregåande hendingar. I det første trekort-spørsmålet må ein sjå på talet på sider og ikkje kort. Det var litt over 20 % som fekk riktig svar her. Dette endra seg ein del for det andre tre-kort spørsmålet då nær 60 % av elevane fekk riktig svar. Desse spørsmåla vart og stilt i nokre av intervjua. Det gjennomgåande her er at elevane tek utgangspunkt i talet på kort og ikkje sider på spørsmål 21. Dei har vanskar med å sjå for seg korleis vilkåret som vert sett om at ei raud flate vender opp, påverkar resultatet. Elev E2 vurderer det på denne måten:

E2: Det vert vel 1/3 eller 1/6
I: Går det an å teikna det opp?
E2: (Lagar ei skisse på arket med 3 skraverte rektangel og 3 kvite rektangel). Då veit du at det ikkje er med (set kryss over kortet som illustrerer kvit på begge sider). Då er det 50 prosent sjanse. Ja ein halv.

Det kan og tenkjast at dei som svarar 1/3, trur dei skal vurdera sannsynet for å trekkja kortet som er raudt på begge sider slik som elev E8:

E8: Då tenkjer eg at sidan oppsida er raud, så er det berre eit kort som er raudt på begge sider. Då er det eit av tre kort.

Elev E9 har likevel ei formeining om at han må tenkja talet på raude sider, men ser og bort frå vilkåret i spørsmålet.

E9: Du har eit kort som er 100 % raudt, eit som er 50 % raudt og eit som er 0 % raudt. Då har eg 3/6 sjanse eller ein halv.

I spørsmål 5 kan ein leggja til grunn sjølve korta som er vist, og det kan synast enklare for elevane. Elev E1 seier det slik:

E1: Ja, viss du trekkjer A og C vert det ein rombe og då har du ein av tre moglege sjansar. Då vert det 2 av 3 moglege sjansar for at du kan laga eit hus. Du har B og C som kombinasjon og A og B, men diamant er berre A og C. Du har tre forskjellige moglege måtar her då og to av dei kan laga eit hus.

Falk-fenomenet ser og ut til å vera noko utbreidd hjå elevane. Det første spørsmålet gjekk veldig greitt då 80 % fekk riktig svar. På den andre spørsmålet der vi ikkje veit fargen på første kula, er det 47 % av elevane som klarte oppgåva. Det var 34 % som fekk riktig svar på begge spørsmåla medan 40 % hadde rett på første og feil på det andre. For ein del elevar er det mot-intuitivt at vi skal sjå bort frå tidsaspektet sjølv om det matematiske innhaldet er det same i dei to spørsmåla, jf. s. 110. Dette er og eit døme på årsakstenking der den probabilistiske grunngjevinga av utfallet for det andre trekket i det første spørsmålet, fell saman med ei kausal forklaring og tidsperspektivet (Falk, 1986). Det andre spørsmålet der vi ikkje veit fargen på første kula, synast meir utfordrande då vi må bruka ei sannsynsvurdering som er ulik tidsaksen (ibid.). Falk (1986) grunngjev det på denne måten:

«Because of the prevalence of causal schemas in our perception of the world, causal data have greater impact on our probabilistic inference than other data of equal objective informativeness.»

5.2.6 Variasjon

I undersøkinga er det teke med eit spørsmål som søkjer å avdekka kva elevane tenkjer om variasjon i hendingar, jf. kap. 4.6. Det var 43 % som hadde riktig svar på første del av spørsmålet og meinte at det var mest sannsynleg å få 5 raude seigmenn. Samstundes var det 33 % som let vera å gje noko svar. På del to av spørsmålet der ein skulle seia noko om dette vil skje kvar gong, var det 35 % som svara nei, medan litt over halvparten let denne delen stå open. Første del av spørsmålet kan gjerne karakteriserast som eit standard sannsynsspørsmål, der merksemda er retta mot utfallet av ei enkelthending. Elevane vil oppleva dette som attkjennande då den første introduksjonen til sannsyn i skulen gjerne har fokus på slike typar hendingar (Shaughnessy & Ciancetta, 2002). Dei vert gjerne meir usikre på del to av spørsmålet då vurdering av variasjon mest truleg er ein «ny» måte å tenkja på.

5.3 Ulike representasjonar av sannsynsteoretiske innhald

I presentasjon av resultatet har eg vald å gruppera spørsmåla under same emne/misoppfatning. Det er nytta ulike representasjonar av det same sannsynsteoretiske innhaldet for nokre av emna og spørsmåla, slik at eg kan sjå nærare på om dette påverkar elevane sine resultat og oppfatningar. Nedanfor vert det gjeve ei nærare utgreiing av dei ulike spørsmåla dette gjeld.

Under samansette hendingar er spørsmål 19 og 24 matematisk sett det same spørsmålet, men har ulike representasjonar. Viss vi nyttar uniform sannsynsmodell som grunnlag, har vi ordna utval med tilbakelegging når vi tel opp moglege utfall. I spørsmål 19 kan vi får svart eller kvit ved kvar snurring av lykkehjulet medan i spørsmål 24 kan vi får partal eller ikkje-partal når vi trillar terningen. Det var 29 % som hadde riktig svar på kvart av spørsmåla.

Biletet vert litt mindre eintydig om ein ser nærare på kor mange svarar riktig på begge spørsmåla (10 elevar). Det kan tyda på at elevane oppfattar det sannsynsteoretiske innhald som ulikt i dei to spørsmåla. Illustrasjonen som er vist av lykkehjulet, kan nok i visse tilfelle påverka korleis elevane intuitivt forstår oppgåva. Elev E3 viser først til at det er 50 % sjanse for svart på kvart av hjula. Samstundes kan opplisting av utfallsrommet og ha tyding for svaret. Når same eleven vert beden om å lista opp kva kombinasjonar av fargar vi kan få, skil han ikkje i første omgang mellom svart-kvit og kvit-svart slik som i d'Alemberts feilslutning s. 116. Det var likevel ingen av elevane som eksplisitt hevda at sannsynet var $\frac{1}{3}$.

E3: *Det er jo 50 % sjanse for at hamnar på svart der og svart der (peikar på figuren)*
..
I: *Kva kombinasjonar av svart og kvit kan vi få når vi snurrar begge hjula?*
E3: *Svart-svart, kvit-kvit, svart-kvit*

Eleven vart og spurt om illustrasjonen av lykkehjula betydde noko for svaret hans.

I: *Betydde desse bileta noko for deg (peikar på lykkehjula)?*
E3: *Det at du skreiv opp det (peikar på opplisting av utfallsrommet) betydde meir. Eg blei berre meir forvirra av det andre.*

	Spørsmål 24				
Spørsmål 19		Riktig	Feil	Usvara	Totalt
	Riktig	10	14	2	26
	Feil	15	42	4	61
	Usvara	2	3	1	6
	Totalt	27	59	7	93

Figur 51. Samanstilling av spørsmål 19 og 24

Både spørsmål 4 og spørsmål 8 byggjer på uniform sannsynsmodell der vi må sjå på gunstige utfall i høve moglege utfall. I spørsmål 4 er boksane med kuler illustrert medan det er rein tekst i spørsmål 8.

Tabell 43. Samanstilling av spørsmål 4 og 8

		Spørsmål 4				
Spørsmål 8		Boks A	**Riktig (boks B)**	Lik sannsyn	Usvara	Totalt
	Boks A	3 %	8 %	1 %	0	12 % (11)
	Riktig (boks B)	10 %	46 %	12 %	3 %	71 % (66)
	Lik sannsyn	4 %	9 %	4 %	0	17 % (16)
	Usvara	0	0	0	0	0
	Totalt	17 % (16)	62 % (58)	17 % (16)	3 % (3)	100 % (93)

Tabell 43 viser ei samanstilling av spørsmål 4 og 8 der vi ser at litt under halvparten (46 %) av elevane har riktig svar på begge spørsmåla. Vi ser elles at det fordeler seg mellom 8 og 12 prosent for dei som har riktig på eit av spørsmåla og eit anna svar på det andre spørsmålet. Cramers V for tabellen er 0,06 og viser svak statistisk samanheng mellom resultat på individnivå mellom dei to spørsmåla. Det er rimeleg samanfallande resultat mellom dei to spørsmåla og ein kan såleis ikkje seia noko utifrå dette om illustrasjonen i spørsmål 4 var til hjelp i tolking av spørsmålet. Det kan heller synast som det er ein tendens til det motsette, då færre har riktig svar på dette spørsmålet. Intervjua gjev ikkje noko meir utfyllande informasjon.

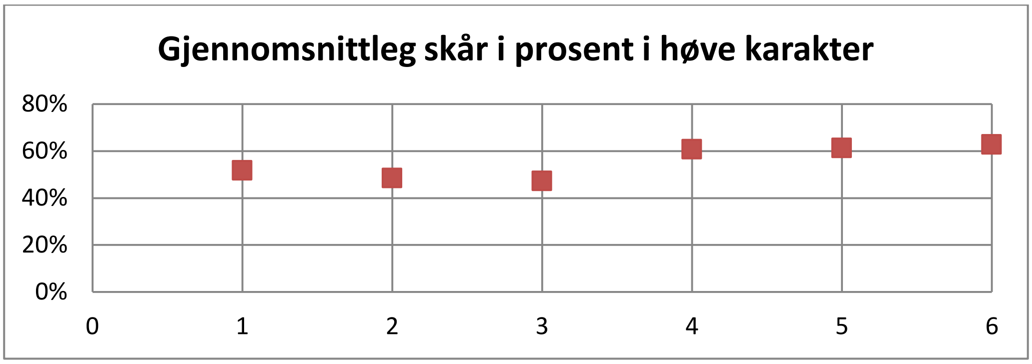
Spørsmål 7 og 22 (Falk-fenomenet) har og same matematiske modell då tida ikkje vedkjem det sannsynsteoretiske. I tabell 44 er spørsmåla stilt saman der ein ser på om eleven har riktig svar på begge spørsmåla, om ein har første riktig og andre feil eller om ein har feil svar på begge spørsmåla osb. Det er 34 % som har riktig på begge spørsmåla, medan 40 % har riktig det første og feil på det andre spørsmålet. Vi ser og at det er 10 % som hadde feil på første spørsmålet, men klarte det andre.

Tabell 44. Samanstilling av spørsmål 7 og 22

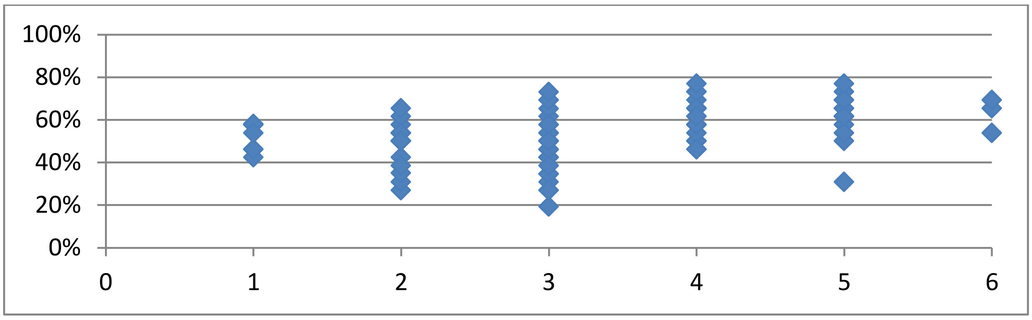
Begge spørsmåla rett	32	34 %
Første rett, andre feil	37	40 %
Begge feil	9	10 %
Første rett, andre usvara	5	5 %
Første feil, andre rett	9	10 %
Andre	1	1 %

5.4 Samanstilling av karakter og resultat

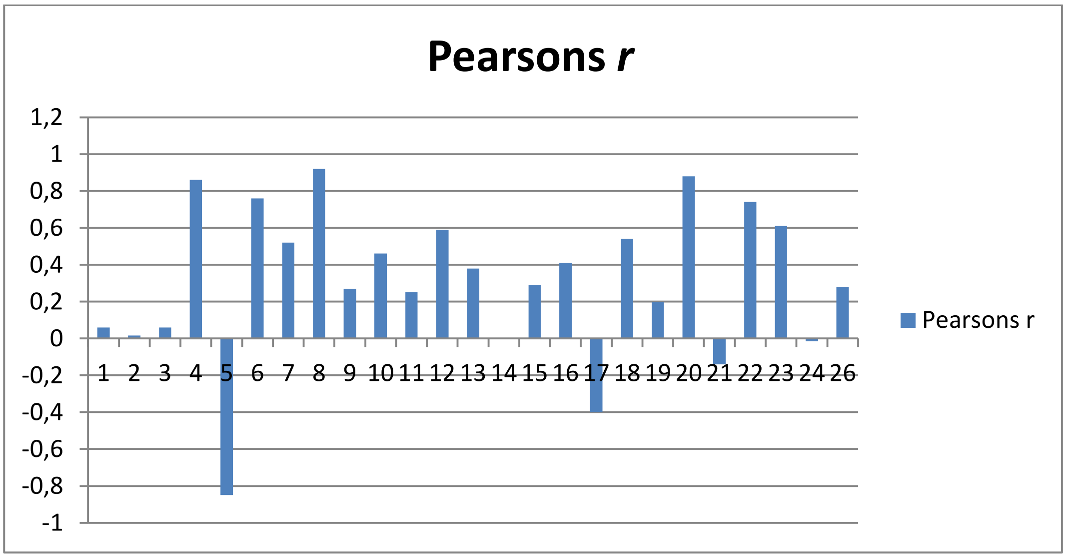
I studien har eg samanlikna terminkarakter og gjennomsnittleg skår for kvart av spørsmåla. Dette varierer mykje mellom dei ulike spørsmåla og misoppfatningane. Viss vi ser nærare på fordelinga av riktig svar (poengsum i prosent) og karakter, ser vi at både karaktertrinn 2 og 3 ligg lågare enn elevane med terminkarakter 1. Det er og verd å merka seg at elevar med karakterane 4, 5 og 6, berre ligg marginalt høgare enn elevar med karakter 1, 2 eller 3 (om lag 10 prosentpoeng). Det må leggjast til at frekvensfordelinga kan påverka resultatet noko då det m.a. i karakterklasse 1 er 7 elevar, i karakterklasse 3 er det 31 elevar medan det er berre 3 elevar som har karakter 6. Innafor dei ulike karaktergruppene er det og stor spreiing i resultatet slik som figur 53 viser. Figurane viser samla sett at det er ein viss tendens til samanheng mellom karakternivå og skår, men at dette ikkje er tydeleg samla sett. Nedanfor går eg nærare gjennom Pearsons *r* mellom karakter og skår for dei ulike misoppfatningane og spørsmåla.



Figur 52. Gjennomsnittleg skår i høve karakter



Figur 53. Variasjon av svar innafor kvar karaktergruppe



Figur 54. Pearsons r mellom skår og karakter

Figur 54 viser ein samla oversikt over Pearson *r* mellom skår og karakter. Som vi ser, er Pearson *r* liten (nær 0) for spørsmål 1, 2, 3, 14, 21 og 24. Både 1, 3 og 24 handlar om terningkast der ein skal ta stilling til m.a. partal. Ved å gå nærare inn i talmaterialet for å sjå på samanhengen mellom karakter og dei som feilaktig har grunngjeve med ei algebraisk tilnærming for kva addisjon som gjev partal, finn eg ein viss samanheng her. Av dei 16 elevane som meiner dette på spørsmål 3, er det 71 % som har karakteren 4 eller betre. Det kan tyda på ei algebraisk tilnærming til spørsmålet og at dette er noko desse elevane intuitivt fell ned på som forklaring.

Det er høg positiv *r* på spørsmål 4, 6, 8, 20, 22 og 23. Felles for spørsmål 4 og 8 og til dels 22 er at ein må ha kunnskapar i forholdsrekning og brøk. Fagleg sterke elevar vil såleis ha ein fordel her. Elevar på dei høgaste karaktertrinna har gjerne større tilbøyelegheit til å rekna ut svara medan ein på lågare karaktertrinn nyttar vurderingsheuristikkar, der ein tek i bruk visuelle oppfatningar og vurderer utifrå det ein synest ser mest sannsynleg ut (Konold, 1991). Spørsmål 20 som gjeld variasjon, har og sterk samanheng mellom svar og karakter då *r* er 0,88. Det er mange av dei på lågaste karaktertrinna som let vera å svara på dette spørsmålet, noko som kan vera ein del av forklaringa.

To av spørsmåla (nr. 5 og 17) viser høvesvis høg negativ *r*. Elevar som er meir praktisk orientert, kan finna spørsmål 5 enklare enn elevar som har ei meir teoretisk tilnærming, jf. s. 120. Elevar som er sterke i algebra, kan og bli leia inn i forholdstenking på spørsmål 17.

Oppsummert kan det tyda på at elevar som er sterke i algebra og har gode matematiske ferdigheiter generelt, har lettare for å falla ned på ei algebraisk tilnærming sjølv om dette i nokre tilfelle ikkje er korrekt utifrå ei probabilistisk vurdering. Ein del av feila som vert gjort i sannsynsvurderingar, er overgeneraliseringar av lineære eigenskapar (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2007). Dette vert grunngjeve med at intuitivt er omgrepa sjanse og forhold nært relatert (ibid.). I skulen arbeider vi gjerne med oppgåver som gjeld trekk av kuler eller seigmenn med ulike fargar. Det er då lett å tenkja at vi skal gjera det same i alle sannsynsrelaterte spørsmål, der det er tale om ein del ut av ein heilskap. Fischbein & Gazit (1984) forklarer dette med at probabilistisk tenking og vurdering av forhold er basert på to ulike mentale skjema. Det vil seia at framgang av den eine retninga ikkje fører til ei forbetring av den andre. Utrekningar i sannsyn krev at vi kan gjera utrekningar og samanlikna brøkar medan forståing av sannsyn i seg sjølv ikkje fører til ei formell forståing av brøkomgrepet (ibid.).

5.5 Elevane sine løysingstilnærmingar

I tillegg til undersøking av elevane sine oppfatninga og misoppfatningar, var føremålet med studien å sjå på ulike strategiar og løysingstilnærmingar elevane nytta. Eg valde å gå breitt ut i høve til kjende misoppfatningar og problemstillingar innafor sannsyn i staden for å avgrensa det til eit emne som t.d. representativitet. På den måten kan ein få eit meir overordna blikk på elevane sine oppfatningar. Elevane synest å nytta ei rekkje med ulike tilnærmingar og nokre av desse er gjennomgåande i så å seie alle spørsmåla. Det gjeld m.a. utfallstilnærming der elevane nyttar omgrep som tilfeldig eller ein veit ikkje kva som kjem til å skje. Elevane har tydelegvis ei formeining om at sannsyn er knytt til tilfeldigheit, men har vanskar med å talfesta det. Ei anna tilnærming som og vert ofte nytta, er å seia at sannsynet for ei hending er 50-50. Dette gjeld særleg spørsmål som er knytt til mynt-krone eller gut-jente. I hovudsak skuldast truleg det at elevane ikkje skil mellom ei enkelt hending og samansette hendingar.

I nokre tilfelle ser vi at elevane skil mellom subjektive oppfatningar av sannsynet til ei hending og «skulematematikk». Då kan vi få utsegner som t.d. i teorien er svaret slik, men eg har erfart noko anna. Rubel (2007) viser og til dette fenomenet i si undersøking. Det er to tilnærmingsmåtar til denne tilsynelatande konflikten mellom det som eleven oppfattar som eit matematisk riktig svar, og det ein trur. Dette kan sjåast på som ulike oppfatningar mellom matematikk på skulen og utafor skulesituasjonen. Eit anna alternativ er å sjå på dette som ein distinksjon mellom teoretisk og empirisk sannsyn (ibid.).

Fischbein hevdar at det er nødvendig å skilja mellom sannsyn som omgrep der ein gjev eksplisitt og korrekt utrekning av odds, og sannsyn som intuisjon, der ein gjer ei subjektiv estimering av odds (referert i Greer, 2014). Det er og semje blant nokre forskarar at born har ei grunnleggjande forståing av sannsyn før dei får formell opplæring. Dei kan såleis samanlikna sannsynet for to hendingar på ein kvalitativ måte (Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens & Verschaffel, 2003). I fleire av spørsmåla kunne ein finne svaret ved å gjera ei slik kvalitativ vurdering. Til dømes meinte ein elev i intervjuet at sannsynet var mindre enn 50 % for å vinna i spørsmål 19. Han såg då at dersom du tapar ein gong (landar på kvit), så har du tapt.

Det er og døme på at elevane ikkje nyttar ei slik kvalitativ vurdering der det er moglege. I spørsmål 24 kan ein gjera ei samanlikning av partal og oddetal under førsetnad av at ein veit kva partal og oddetal er. Utan å setja opp utfallsrommet kan vi då vita at det må vera færre tilfelle av partal på begge terningane, enn talet på utfall med eit partal og eit oddetal og to oddetal til saman. Det var ingen av elevane med riktig svar som viste til ei slik kvalitativ vurdering eller matematisk utrekning av sannsynet. Det kunne heller synast som elevane intuitivt omforma spørsmålet til eit lettare spørsmål og viste til at det er like mange partal og oddetal på ein terning. I følgje Kahneman (2012) er det system 1 som leier oss inn i ei slik feilslutning, jf. kap. 2.3.

I spørsmål der elevane skulle samanlikna to hendingar i høve forhold, slik som spørsmål 4 og 8, kan det synast som elevane har god oversikt. I andre oppgåver kan det synast som elevane nyttar ei algebraisk tilnærming der dette ikkje er mogleg. Van Dooren et al. (2003) kallar dette *«over-reliance on the linear model»*, jf. kap. 5.4.

5.6 Forståing og bruk av omgrep i sannsyn

Elevane si grunngjeving både i spørjeskjemaet og i intervjua viser at dei manglar både språk og omgrep for å kunne uttrykkja seg på ein matematisk måte. Eit utsegn som *«Fordi det er større sannsyn når det er mindre»* viser at eleven har ein viss intuisjon for kva svaret må vera, men han manglar grunnleggjande omgrep frå sannsyn som t.d. hending, utfall og utfallsrom. Jamt over var det mange som ikkje gav noko grunngjeving for svara sine i spørjeskjemaet.

Under intervjua vart det stilt spørsmål om kva elevane tenkjer når dei høyrer ord som tilfeldig, usikkerheit og sjanse. Ein kan gjerne ikkje forventa at elevane skal gje ei djupare forklaringa på omgrepa når dei vert stilt i eit slikt intervju, men ein kan truleg få vita kva dei intuitivt tenkjer. Elev 1 gjev følgjande forklaringar på omgrepa tilfeldig og usikkerheit:

E1: Det er når noko skjer utan at du kunne har føresett at det kunne skjedd.
I: Kor tid er noko usikkert då?
E1: Det er nesten det same. Det er usikkert. Du kan ikkje vera sikker på at det og det skjer. Du har ikkje nokon berekningar på at det er sannsynleg at det og det vil skje. Då er det usikkert.

Elev E6 brukar ordet flaks for å skildra at rekkjene i spørsmål 2, har same sannsynet for å henda. Samstundes knyter han tilfeldigheit til noko som skjer brått og uventa.

I: Viss eg seier at det er denne som er riktig då, at alle rekkjene er like sannsynlege? Kva tenkjer du då?
E6: Det er jo sant det og. For det er stort sett flaks.
I: Når du brukar ordet flaks, kva legg du i det?

E6: *Han (mynten) kan hamna på kva side som helst.*
I: *Er flaks det same som tilfeldigheit?*
E6: *Kanskje.*
I: *Kan du seia noko om kor tid ei hending er tilfeldig?*
E6: *At det berre skjedde plutseleg.*

Ein anna måte å tenkja på omgrepet tilfeldig, er å knyta det til hell slik som elev E9 og E4, medan elev E7 søkjer å talfesta det og brukar frasen 50-50.

E9: *Som å vinna i lotto*

E4: *Då tenkjer eg at ein har vore heldig med det eller uheldig*

E7: *Det er ikkje sikkert du får det du trekkjer. Det kan vera 50-50 sjanse for at du får det.*
I: *Er det alltid 50-50?*
E7: *Nei det kan vera mindre. Det kan til dømes vera 10 % sjanse for at du får noko.*

Jørgensen (2014) har forska på korleis elevar i vidaregåande skule forstår og nyttar omgrep i sannsyn. Resultata hennar viser og at elevane kan ha ein intuitiv forståing av eit sannsynsproblem, men at dei i liten grad nyttar eit matematiske språk og terminologi for å grunngje svara sine. Dette er og gjennomgåande i undersøkinga mi. Elevane nyttar i mange høve ikkje-matematiske forklaringar på riktige svar, men forklaringar som *«det er vanskelegare å få to like tal»* som i spørsmål 13 eller *«fordi det er mindre kuler som gjev større sjanse»* i spørsmål 4.

5.7 Konsekvensar for undervisning av sannsyn

Det er fleire forskarar som har sett nærare på korleis vi kan leggja opp undervisninga for å avgrensa nokre av misoppfatningane innafor sannsyn (Shaughnessy, 1977; Fischbein & Gazit, 1984; Pratt, 2000; Jun, 2000). Undersøkingane deira viser at det kan synast som ulike tilnærmingar gjev auka forståing. Samstundes er det usikkert kor lenge denne forbetringa varer. I intervjua spurte eg elevane kor mykje dei hugsa att frå opplæringa på 10. trinn. Elevane sa at dei hadde litt om det, men hugsar ikkje så mykje att. Nokre tykte det var vanskeleg og rart medan andre synest det var kjekt. Det var fleire av elevane som påpeika at dei berre hadde litt om det, og at dette stoffet var noko dei gjekk fort i gjennom slik som elev E5:

E5: *Veldig lite, men eg hugsar det kapittelet gjekk vi veldig kjapt igjennom. Men eg hugsar litt av det. Det var litt om kva sannsynet for å få ein seksar på eit terningkast og sånn*

I: Kvifor trur du de gjekk fort i gjennom det?
E5: Det var ikkje så mykje meir å snakka om enn det eigentleg.

I følgje Dysthe (1999) har den behavioristiske tilnærming vore det rådande kunnskap- og læringssynet i fleire land. Ein legg til grunn at oppgåver kan brytast ned til deloppgåver og delmål og ein kan laga sekvensar av stimulus-respons øvingar for å sikra innlæring (ibid.). Forståinga vert her «synleg» gjennom ei handling der eleven sin respons på ei oppgåve (stimuli) vert det sentrale. Noko av kritikken mot behaviorismen har vore at denne tilnærming kunne føra til at elevane vert regelorienterte og lite fleksible og ein har fokus på rette og gale svar. Det er likevel nokre teoretikarar i dag som meiner at vi framleis kan finna spor av behaviorismen i skulen. Ein av dei som hevdar at vi har både ei behavioristisk og ei kognitiv tilnærming i skulen, er Usiskin (2015). Han meiner vi ser på forståing som noko som føregår inne i hovudet til eleven, samstundes som vi bed dei om å visa forståinga si ved å svara på oppgåver vi gjev dei (ibid.). I Klette sin rapport frå klasseromsforsking vert det vist til at det i norske klasserom vert lagt stor vekt på å leggja til rette for tileignings- og utprøvingssituasjonar (Kjærnsli & Olsen, 2013). Det vert lagt mindre vekt på aktiviteter knytt til å aktivere eleven sine eigen refleksjon og bevisstheit rundt sin eiga læring (ibid). I praksis vil det seia at elevane arbeider med fagstoffet, løyser oppgåver, sjekkar svara sine i fasiten og får direkte respons i form av aksept av svaret eller ikkje.

Diagnostisk undervisning der ein m.a. legg vekt på å få fram misoppfatningar gjennom ein kongnitiv konflikt, vert gjerne sett på som ein god framgangsmåte (Brekke, 2002). Han viser til at ulike studiar stadfestar at elevane har hatt nytte av dette, særleg i lys av langtidslæring. I mange høve vil truleg ei slik tilnærming i klasserommet vera føremålstenleg, men vi som lærarar må og vera merksame på at elevane ikkje nødvendigvis oppfattar dei same kognitive konfliktane som oss. I Konold et al. (1993) sin studie vart dei merksame på at utifrå eleven sitt perspektiv, var det ingen konflikt. Dei seier vidare at dette ikkje nødvendigvis tyder på at eleven har manglande logisk resonneringsevne. Etter deira syn bør læraren leggja mindre vekt på å fremja kognitive konfliktar, men heller ta i bruk etnografen sitt rammeverk for å søkja og forstå det dei kallar « *the language and practices of a foreign culture*».

Eit anna tiltak som gjerne vert brukt i matematikk for å auka forståing, er konkrektiserings-materiell. Føremålet med bruken av slike konkrete objekt er at dei skal verka som bindeledd mellom ei konkret tilnærming og den abstrakte matematikken (Carbonneau, Marley & Selig.

2013). Det er likevel ikkje eintydig om det har effekt slik som ynskja. Carbonneau et. al. (2013) har utført ein meta-studie og funna deira tyder på at det generelt innfor matematikkopplæringa, er liten til middels effekt ved bruk av konkretiseringsmateriell samanlikna med bruk av abstrakte symbol. Ein av årsakene kan truleg vera at det er fleire andre faktorar som påverkar effekten slik som kor mykje rettleiing elevane fekk og kor godt ein planla bruken som del av undervisninga (ibid.). I verste fall blir dette berre noko som elevane synest er ei morosam avveksling. Innafor sannsyn er det gjerne vanleg å ta i bruk terningar, kort, myntkast og spelbrikker som ein del av undervisninga. Det er fleire forskarar som er kritiske til dette i varierande grad som m.a. Devlin (2014).

Devlin påstår at den mest vanlege misoppfatninga om sannsyn er at vi ser på det som ein eigenskap til ein konkret situasjon som til dømes terningkast. I staden må vi sjå på sannsyn som eit mål for kunnskapen og forventinga vår til kva som mest sannsynleg kjem til å skje. Devlin hevdar vidare at vi trur ein terning vil gje oss seks i 1/6-del av tilfella utifrå eit symmetriperspektiv og ikkje fordi vi har trilla terningen mange nok gonger (ibid.). Etter hans syn kan for stor vekt på empiriske eksperiment som terningkast, vera meir til skade enn nytte. Eichler & Vogel (2014) har eit litt meir moderat syn, men seier det er viktig at vi i undervisninga ikkje blir verande i «the dice world» som dei kallar det. For at elevane skal forstå sannsyn, må vi og leggja vekt på realistiske situasjonar og data (ibid.).

I følgje Moore (1990) er ein av årsakene til konflikten mellom sannsynsteori og elevane sitt syn på verda, delvis grunngjeve med elevane sin avgrensa kunnskap om tilfeldigheit. Han seier vidare at eit av måla med opplæring innafor sannsyn, må vera å få elevane til å forstå at variasjon i sjanse og ikkje deterministiske årsaker, forklarar mange aspekt med verda.

Gjennomgang av litteraturen i dette kapittelet viser at vi ikkje kan slå fast at det finst ein beste metode for å undervisa sannsyn i skulen og såleis få bukt med misoppfatningar som vi ser går att hjå elevane. I følgje Batanero et. al (2014) er undervisning i sannsyn utfordrande fordi vi kan ikkje berre visa ulike modellar og bruken av dei, men vi må ha eit breiare perspektiv og t.d. seia noko om kvifor ein modell er brukbar. Samstundes er det omgrep som synast utfordrande, slik som tilfeldigheit og kausalitet (ibid.). Utifrå ein konstruktivistisk synsstad på læringsprosessen, må vi leggja til grunn at elevane kan utvikla alternative oppfatningar i tillegg til standardisert kunnskap (Savard, 2014). Vi må difor vera opne for at elevane kan parallelle oppfatningar slik som elev E1 har på lotto-spørsmålet (spørsmål 10):

E1:: *Det er lik sjanse. Begge har 7 tal innforbi dei 34 tala, men eg vil seia at begge har same sjanse for det. Matematisk sett. Men likevel vil eg seia at Arne som har meir spreidd, trur eg har større sjanse eigentleg. Men viss du reknar på det, då er det same sjanse*

Bruk av konkretiseringsmateriell meiner eg kan fungera som ein grei motivasjonsfaktor ved introduksjon til emnet. Samstundes må vi ta eit steg vidare å leggja meir vekt på korleis data kan variera og knyta sannsyn til situasjonar i kvardagen.

5.8 Konklusjon

I denne studien har eg forska på oppfatningar og misoppfatningar i sannsyn hjå elevar på vidaregåande trinn. Utvalet har vore 93 elevar på vg1 i yrkesfag og vg3 i påbygging til generell studiekompetanse. Ingen av elevane hadde gjennomgått opplæring i sannsyn rett før datainnsamlinga. Alle misoppfatningane som eg ynskte å testa, synte seg å vera til stades i varierande grad hjå elevane. Dei talmessige resultata frå undersøkinga mi viser elles at det i stor grad er samanfallande med det forskarar har funne tidlegare, trass i at undersøkingane har stor variasjon i alder, skulebakgrunn og verdsdeler.

Elevane nytta ulike løysingsstrategiar som vi og finn att i litteraturen og tidlegare forsking. Dette gjeld særleg bruk utfallstilnærming og 50-50 tilnærming. Gjennom intervjua fekk eg og avdekka at elevane gjerne stolar på intuisjonen sin og det er først når dei må tenkja i gjennom kva som står i spørsmålet, at dei kan gje eit normativt riktig svar. Det er særleg innafor sannsyn at bruk av intuisjon leier oss inn i ei misoppfatning. Vi nyttar som oftast det vi har lært tidlegare.

5.9 Avslutning

Ved bruk av fleirvalsskjema kan ein få ein peikepinn på elevane sine kunnskapar innafor sannsyn. Samstundes må ein vera merksam på at riktig svar i eit slikt skjema, ikkje nødvendigvis viser elevane si normative forståing (Konold et al., 1993). I denne studien har eg nytta mixed methods som utgangspunkt for datainnsamlinga. Dette har vore ein veleigna metode der eg fekk belyst ein del misoppfatningar gjennom ein kartleggingstest og så fekk utdjupa nokre av desse gjennom oppgåvebaserte intervju. I ettertidas klokskap ser eg at eg med fordel kunne nytta betre tid til analyse av dataa frå den kvantitative undersøkinga, før eg gjennomførte intervjua.

Det kan og diskuterast kor mange oppgåver ein skal ta med i ein kartleggingstest for å kunne vurdera oppfatningar og misoppfatningar. Innafor dei fleste emna har eg nytta to eller fleire spørsmål for å ha eit samanlikningsgrunnlag. I nokre tilfelle kan ein og stilla spørsmål om oppgåvene måler det dei er tenkt å måla. Det kan til dømes vera at spørsmål 11 er tvitydig for elevane, fordi dei kan bli leia inn i ein tankegang om at du skal få fem på første terningen og seks på den andre.

I spørjeskjemaet hadde eg med eit spørsmål om kausalitet (sp. 25). Eg valde å ta dette spørsmålet ut av studien fordi det tydelegvis ikkje gav meining for eleven. Dei få svara eg fekk, var av ymse kvalitet. Det kan tyda på at dette spørsmålet var for lite gjennomarbeidd.

Det er fleire interessante grunngjevingar elevane gav og som har gjeve meg mykje meir innblikk i korleis dei tenkjer i sannsyn. Det kunne vore aktuelt å gjennomført ein statistisk analyse på tvers av spørsmåla for å sjå om enkeltelevar nyttar ulike strategiar eller dei varierer alt etter innhaldet i oppgåva. Omfanget til masteroppgåva tilseier at dette måtte eg utelata i denne omgang. Eit aktuelt tema for vidare forsking kan då vera å sjå nærare på om elevane nyttar same strategiar jamt over eller dei vekslar mellom dei.

Bryant & Nunes (2012) har utført ein grundig dokumentanalyse av studiar og litteratur innfor sannsyn. Dei konkluderer med at dersom ein skal kunne lære og forstå sannsyn, må vi sjå nærare på følgjande «Cognitive demands»: forstå tilfeldigheit, finne utfallsrommet, samanlikne og kvantifisera sannsyn og forstå korrelasjon. Resultatet frå undersøkinga mi stadfestar og at elevane har utfordringar med dei omgrepsmessige behova som nemnd av Bryant & Nunes. Det kunne vore aktuelt å utføra ein intervensjonstudie der ein la vekt på desse fire aspekta i undervisninga slik at ein kunne testa ut om det ville gje noko resultat i høve elevane sine oppfatningar.

Som nemnd innleiingsvis, vil deltaking i arbeidslivet krevja at ein har både yrkesfagleg kompetanse og matematiske ferdigheiter i m.a. sannsyn og statistikk. Gjennom studien har eg freista å sjå på kva oppfatning og misoppfatning elevar i yrkesfagleg retning har innafor sannsyn. Samla sett syner mange elevar at dei har ein grunnleggjande intuisjon i sannsyn, men dei manglar både språk og omgrep for å kunne formidla dette. Dette er ikkje særskild for elevane i denne undersøkinga, men går att i mange tidlegare studiar. Kahneman et al. (1982) hevdar at det er grunn til å sjå optimistisk på menneska si evne til å læra sannsyn og statistikk i eit større perspektiv. Samanlikna med andre emne innafor matematikkfaget, er sannsyn eit relativt nytt emne og erfaring viser at menneska si evne til å resonnere, endrar seg i takt med nye kulturelle påverknadsfaktorar og erfaring (ibid.).

Kjelder og litteratur

Aga, L. (2008). *Begreper i sannsynlighet og statistikk på første trinn i videregående skole : en studie av elevers respons på oppgaver om utvalgte begreper.* (Masteroppgåve), Universitetet i Agder, Kristiansand.

Albert, J. (2003). College students' conceptions of probability. *The American Statistician*(57), 37-45.

Amir, G. S., & Williams, J. (1995). *11-12 year old children's informal knowledge and itsinfluence on their formal probabilistic reasoning*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Fransico, USA.

Bar-Hillel, M., & Falk, R. (1982). Some teasers concerning conditional probabilities. *Cognition, 11*(2), 109-122.

Batanero, C., Arteaga, P., Serrano, L., & Ruiz, B. (2014). Prospective Primary School Teachers' Perception of Randomness. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspectives* (pp. 345 - 366). Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Batanero, C., Henry, M., & Parzyzk, B. (2005). The Nature of Chance and Probability. In G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 15-37). New York: Springer Science+Business Media.

Batanero, C., Serrano, L., & Garfield, J. B. (1996). Heuristics and biases in secondary school students' reasoning about probability. *PME CONFERENCE, 2*, 2-51.

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Bennett, D. J. (1998). *Randomness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Borovcnik, M., Bentz, H.-J., & Kapadia, R. (1991). A Probabilistic Perspective. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance Encounters: Probability in Education* (pp. 27-71). Dordrecht, Nederland: Kluwert Academic Publishers.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014a). From Puzzles and Paradoxes to Concepts in Probability. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspective* (pp. 35-73). Dodrecht: Nederland: Springer.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014b). A Historical and Philosophical Perspective on Probability. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspective*: Springer.

Breiteig, T. (2002). *Regn med usikkerhet: Sjanse, risiko og matematikklæring*. Paper presented at the Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU, Trondheim.

Brekke, G. (2002). *Kartlegging av matematikkforståelse. Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Læringssenteret.

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review*. Retrieved from London, England:

Bryman, A. (2012). *Social Research Methods*: OUP Oxford.

Carbonneau, K., Marley, S., & Selig, J. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380-400.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forl.

Christophersen, K.-A. (2013). *Introduksjon til statistisk analyse : regresjonsbaserte metoder og anvendelser*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 305-345). Rotterdam: Sense publishers.

Creswell, J., & Garrett, A. (2008). The "movement" of mixed methods research and the role of educators : research in education : trends and innovations. *South African Journal of Education, 28*(3).

Creswell, J., & Plano Clark, V. (2011). *Designing and conducting mixed methods research*. Los Angeles: SAGE Publications.

Creswell, J. W. (2010). Mapping the Developing Landscape of Mixed Methods Research. In A. Tashakkori, & Teddlie, C (Ed.), *Sage handbook of mixed methods in social & behavioral research* (Second ed., pp. 45-68). Los Angeles: SAGE Publications.

Creswell, J. W., Plano Clark, V. L., & Garrett, A. L. (2008). 5 Methodological Issues in Conducting Mixed Methods Research Designs. Advances in Mixed Methods Research. SAGE Publications Ltd. In M. M. Bergman (Ed.), *Advances in Mixed Methods Research* (pp. 66-84). London: SAGE Publications Ltd.

Dawes, R. M. (2001). Probabilistic thinking. In N. J. Smelser & B. Baltes (Eds.), *International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences* (pp. 12082--12089).

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The Illusion of Linearity. From Analysis to Improvement*. New York: Springer.

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2014, 21.06.14). Generelle forskningsetiske retningslinjer. Retrieved from https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Generelle-forskningsetiske-retningslinjer/

Devlin, K. (2014). The Most Common Misconception About Probability? In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspective*. Dodrecth: Springer.

Diaz, C., & Batanero, C. (2009). University student's knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education (IEJME), 4*(3), 131-162.

Dysthe, O. (1999). Ulike teoriperspektiv på kunnskap og læring. *Bedre skole. Norsk lærerlags tidsskrift for pedagogisk debatt*(3).

Eichler, A., & Vogel, M. (2014). Three Approaches for Modelling Situations with Randomness. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspectives* (pp. 75-100). Dordrecht: Springer.

Encyclopedia of Mathematics. (2012, 21. januar). Law of Large Numbers.   Retrieved from URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Law_of_large_numbers&oldid=26552

Evans, J. S. (2003). In two minds: dual-process accounts of reasoning. *Trends Cogn Sci, 7*(10), 454-459.

Falk, R. (1986). *Conditional Probabilities: Insights and difficulties.* Paper presented at the ICOTS 2, Victoria, Canada.

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. In R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education. The teaching of statistics* (Vol. 7). Paris: Unesco.

Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition, 43*(3), 197-223. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0010-0277(92)90012-7

Falk, R., & Konold, C. (1997). Making sense of randomness: Implicit encoding as a basis for judgment. *Psychological Review*(104), 301-318.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dodrecht: Springer Netherlands.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 1-24.

Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics, 22*(6), 523-549.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96-105.

Garfield, J. B., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 44-63.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Hanbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates Publishers.

Granberg, D. (1999). A new version of the Monty Hall Dilemma with unequal probabilities. *Behavioural Processes, 48*(1–2), 25-34. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0376-6357(99)00066-2
Green, D. R. (1982). *Probability Concepts in School pupils aged 11-16 years.* (Doctor of Philosophy Doctoral), Loughborough University of Technology.
Greer, B. (2014). Commentary on Perspective II: Psycology. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspectives* (pp. 299-309). Dordrecht: Springer Science+Business Media.
Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. *Grouws, Douglas A. (Ed), (1992). Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. , (pp. 65-97). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc, xi, 771 pp*.
Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural knowledge: The Case of Mathematics*. New York: Routledge.
Holme, A. (2004). *Matematikkens historie 2. Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel*. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.
Imsen, G. (2014). *Elevens verden* (5 ed.). Oslo: Universitetsforlaget.
Jendraszek, P. (2008). *Misconceptions of Probability Among Future Mathematics Teachers*. Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller.
Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J., & Turner, L. A. (2007). Toward a Definition of Mixed Methods Research. *Journal of Mixed Methods Research, 1*(2), 112-133. doi:10.1177/1558689806298224
Jones, G., Langrall, C., & Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning : a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. 2, pp. 909-956): Information Age Publishing.
Jones, G., & Thornton, C. (2005). An Overview of Research into the Teaching and Learning of Probability. In G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School* (Vol. 40, pp. 65-92): Springer US.
Jun, L. (2000). *Chinese students' understanding of probability.* (Doctor of Philosophy), Nanyang Technological University, Singapore.
Jun, L., & Pereira-Mendoza, L. (2002). *Misconceptions in probability.* Paper presented at the Proceedings of the sixth international conference on teaching statistics, Developing a statistically literate society. Retrieved October.
Jørgensen, K. (2014). *Muntlig arbeid med sannsynlighet på videregående skole : en kvalitativ studie om bruk av muntlig aktivitet for å fremme elevers begrepsforståelse i sannsynlighet.* (Masteroppgåve), UiT Norges arktiske universitet, Tromsø.
Kahneman, D. (2012). *Tenke, fort og langsomt* (E. Lilleskjæret & G. Nyquist, Trans.). Oslo: Pax.
Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective Probability: A Judgment of Representativeness. *Cognitive Psychology, 3*, 430-454.
Kennis, J. R. (2006). *Probabilistic misconceptions across age and gender.* (Dr. grad), Columbia University, New York.
Keren, G. (1984). On the importance of identifying the correct 'problem space'. *Cognition, 16*(2), 121-128. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0010-0277(84)90002-7
Kjærnsli, M., & Olsen, R. V. (2013). *Fortsatt en vei å gå : norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012*. Oslo: Universitetsforl.
Kleven, T. A., Tveit, K., & Hjardemaal, F. (2011). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode : en hjelp til kritisk tolking og vurdering*. Oslo Unipub.

Konold, C. (1991). Understanding Students’ Beliefs About Probability. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (Vol. 7, pp. 139-156): Kluwert Academic Publishers.
Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J., & Lipson, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 392-414.
Krumsvik, R. J. (2013). *Innføring i forskingsdesign og kvalitativ metode*. Bergen: Fagbokforl.
Kunnskapsdepartementet. (2015). *Utdanning og arbeidsmarkedet. En gjennomgang av Statistisk sentralbyrås beregninger frem mot 2030*. Oslo: Departementet.
Kustos, P. N. (2010). *TRENDS CONCERNING FOUR MISCONCEPTIONS IN STUDENTS’ INTUITIVELY-BASED PROBABILISTIC REASONING SOURCED IN THE HEURISTIC OF REPRESENTATIVENESS.* (Dr. grad), University of Alabama, Tuscaloosa.
Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal.
Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 557-568. doi:10.1007/BF00540060
Lecoutre, M.-P., Durand, J., & Cordier, J. (1990). A Study of two Biases in Probabilistic Judgments: Representativeness and Equiprobability. *Advances in Psychology, 68*, 563-575.
Leland, Ø. (2011). *Statistikk og sannsynlighetsregning - en skisse av det statstiske miljø i Norge fra ca. 1850 og emnenes plass i den norske skolen i nyere tid.* (Masteroppgåve), Universitetet i Agder, Kristiansand.
Lund, T. (2012). Combining Qualitative and Quantitative Approaches: Some Arguments for Mixed Methods Research. *Scandinavian Journal of Educational Research*(2), 155-165. doi:10.1080/00313831.2011.568674
Lysø, K. O. (2005). *Sannsynlighetsregning: en fagdidaktisk innføring*. Bergen: Caspar.
Madsen, R. W. (1995). Secondary Students' Concepts of Probability. *Teaching Statistics, 17*(3), 90-92. doi:10.1111/j.1467-9639.1995.tb00718.x
Mason, G., Nathan, M., & Rosso, A. (2015). *State of the Nation: A review of evidence on the supply and demand of quantitiative skills*. Retrieved from London: http://www.niesr.ac.uk/publications/state-nation-review-evidence-supply-and-demand-quantitative-skills#.VoJRIfnhCUm
Moore, D. S. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Ed.), *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (pp. 95-137). Washington: National Academy Press.
Moritz, J., & Watson, J. M. (2000). *Reasoning and Expressing Probability in Students' Judgements of Coin Tossing.* Paper presented at the Mathematics education beyond 2000: Proceedings of the 23rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Perth, WA.
Morsanyi, K., Primi, C., Chiesi, F., & Handley, S. (2009). The effects and side-effects of statistics education: Psychology students’ (mis-)conceptions of probability. *Contemporary Educational Psychology, 34*(3), 210-220. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.cedpsych.2009.05.001
Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier. Den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.
Noll, J., & Sharma, S. (2014). Qualitative meta-analysis on the Hospital Task: Implications for Research. *Journal of Statistics Education, 22*(2), 1-26.
Norges forskingsråd. (2015). Fullføring av yrkesfaglig studieretning i videregående skole – hvem klarer det og hvorfor? . Retrieved from http://www.forskningsradet.no/servlet/Satellite?blobcol=urldata&blobheader=application%2Fpdf&blobheadername1=Content-Disposition%3A&blobheadervalue1=+attachment%3B+filename%3DFINNUTfaktaarkHegnaweb.pdf&blobkey=id&blobtable=MungoBlobs&blobwhere=1274505794846&ssbinary=true
O'Connell, A. A. (1999). Understanding the Nature of Errors in Probability Problem-Solving. *Educational Research and Evaluation, 5*(1), 1-21. doi:10.1076/edre.5.1.1.3887

OECD. (2014). *Skills Strategy Diagnostic Report Norway*. Retrieved from Paris: http://skills.oecd.org/developskills/documents/OECD_Skills_Strategy_Diagnostic_Report_Norway.pdf

Onstad, T. (2000). Tilfeldighet og sannsynlighet. [Oslo]: NKS-forlaget, 2000.

Polaki, M. (2005). Dealing with Compound Events. In G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School* (Vol. 40, pp. 191-214): Springer US.

Pratt, D. (2000). Making Sense of the Total of Two Dice. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 602-625. doi:10.2307/749889

Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about Variation. In D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 201-226). Nederland: Kluwert Academic Publishers.

Rubel, L. H. (2002). *Probabilistic misconceptions: Middle and high school students mechanisms for judgements under uncertainty (unpublished doctoral dissertation).* (Dr.grad), Columbia University, New York.

Rubel, L. H. (2007). Middle School and High School Students' Probabilistic Reasoning on Coin Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 531-556. doi:10.2307/30034964

Savard, A. (2014). Developing Probabilistic Thinking: What About People´s Conceptions? In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspectives* (pp. 283-298). Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Sfard, A. (1995). The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychologiacal Perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communication. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of Probabilty: An Experiment with a Small-Group, Activity-Based, Model Building Approach to Introductory Probability at the College Level. *Educational Studies in Mathematics, 8*(3), 295-316. doi:10.2307/3482120

Shaughnessy, J. M., & Ciancetta, M. (2003). Middle School Students' Thinking about Variability in Repeated Trials: A Cross-Task Comparison. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 159-166.

Shaughnessy, M., & Ciancetta, M. (2002). *Students' understanding of variability in a probability environment*. Paper presented at the Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics: Developing av Statictically Literate Society, Cape Town, South Africa.

Shimojo, S., & Ichikawa, S. I. (1989). Intuitive reasoning about probability: Theoretical and experimental analyses of the "problem of three prisoners". *Cognition, 32*(1), 1-24. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0010-0277(89)90012-7

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Skaalvik, E. M. (1999). Etiske spørsmål i skoleforsking. *NEM, NENT og NESK, Skriftserie 12*, 87-107.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.

Smith Iii, J. P., Disessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *Journal of the Learning Sciences, 3*(2), 115-163. doi:10.1207/s15327809jls0302_1

Steffe, L. P., & Kieren, T. (1994). Radical Constructivism and Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 711-733. doi:10.2307/749582

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. In P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 147-165). London: RoutledgeFalmer.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (2010). *Sage handbook of mixed methods in social & behavioral research*. Los Angeles, Calif.: SAGE Publications.

Teigen, K. H. (2012, 21. november). Heuristikk: psykologi. I Store norske leksikon. Retrieved from https://snl.no/heuristikk%2Fpsykologi.

Thorsen, T. (2009). *Misoppfatninger til sannsynlighet : en undersøkelse med diagnostiske oppgaver blant elever på ungdomsskolen.* Universitetet i Oslo, Oslo.

Tversky, A. (1974). Uncertainty. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 36*(2), 148-159.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological bulletin, 76*(2), 105-110.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science, 185*(4157), 1124-1131. Retrieved from http://psiexp.ss.uci.edu/research/teaching/Tversky_Kahneman_1974.pdf

Usiskin, Z. (2015). What Does It Mean to Understand Some Mathematics? In S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 821-841): Springer International Publishing.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 113-138.

Watson, J., Collis, K., & Moritz, J. (1997). The development of chance measurement. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 60-82. doi:10.1007/BF03217302

Watson, J. M. (2005). The Probabilistic Reasoning of Middle School Students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 145-170). New York, USA: Springer.

Vedlegg

1. Godkjenning frå NSD

2. Oversikt over tabellar til kapittel 4. Resultat

3. Spørjeskjema

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Runar Ile
Matematisk institutt Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 14.05.2014 Vår ref: 38644 / 3 / KH Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 29.04.2014. Meldingen gjelder prosjektet:

38644	*Oppfatningar og misoppfatningar i sannsyn hjå elevar i vidaregåande skule*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Runar Ile*
Student	*Tone Handegård*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 01.07.2015, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Katrine Utaaker Segadal

Kjersti Haugstvedt

Kontaktperson: Kjersti Haugstvedt tlf: 55 58 29 53
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Tone Handegård tonhan4@hfk.no

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Avdelingskontorer / District Offices
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no

Vedlegg 2

Karakter	Frekvens riktig svar	Frekvens feil svar	Ubesvart	Total frekvens	Prosent riktig	Prosent feil
1	6	1	0	7	86 %	14 %
2	9	7	0	16	56 %	44 %
3	14	17	0	31	45 %	52 %
4	12	10	0	22	55 %	45 %
5	12	1	1	14	86 %	7 %
6	2	1	0	3	67 %	33 %
Totalt	55	37	1	93	59 %	40 %

Spørsmål 2

Karakter	Frekvens riktig svar	Frekvens feil svar	Usvara	Total frekvens	Prosent riktig	Prosent feil
1	3	4	0	7	43 %	57 %
2	7	5	4	16	44 %	31 %
3	18	12	1	31	58 %	39 %
4	13	8	1	22	59 %	36 %
5	8	5	1	14	57 %	36 %
6	1	2	0	3	33 %	66 %
Totalt	50	37	6	93	54 %	40 %

Spørsmål 3

Karakter	Frekvens riktig svar	Frekvens feil svar	Usvara	Total frekvens	Prosent riktig	Prosent feil
1	2	5	0	7	29 %	71 %
2	7	7	2	16	44 %	44 %
3	17	14	0	31	55 %	45 %
4	17	5	0	22	77 %	23 %
5	10	3	1	14	71 %	21 %
6	2	1	0	3	67 %	33 %
Totalt	55	35	3	93	59 %	38 %

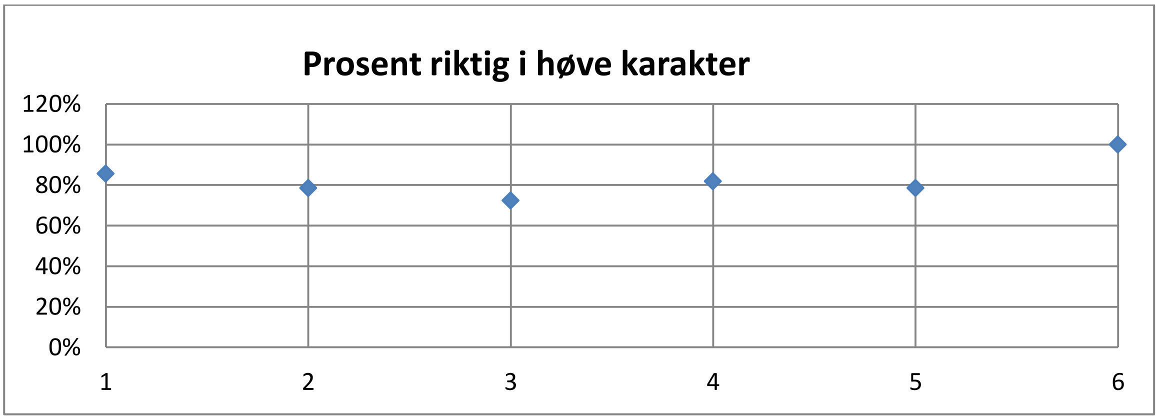
Spørsmål 4

Karakter	Frekvens riktig svar	Frekvens feil svar	Usvara	Total frekvens	Prosent riktig	Prosent feil
1	6	1		7	86 %	14 %
2	10	6		16	63 %	38 %
3	16	13	2	31	52 %	42 %
4	15	7		22	68 %	32 %
5	7	6	1	14	50 %	43 %
6	1	2		3	33 %	67 %
Totalt	55	35	3	93	59 %	38 %

Spørsmål 5

Karakter	Frekvens riktig svar	Frekvens feil svar	Ubesvart	Total frekvens	Prosent riktig	Prosent feil
1	4	3	0	7	57 %	43 %
2	15	1	0	16	94 %	6 %
3	23	8	0	31	74 %	26 %
4	18	4	0	22	82 %	18 %
5	14	0	0	14	100 %	0 %
6	3	0	0	3	100 %	0 %
Totalt	77	16	0	93	83 %	17 %

Spørsmål 6



Spørsmål 7

Karakter	Frekvens riktig svar	Frekvens feil svar	Ubesvart	Total frekvens	Prosent riktig	Prosent feil
1	5	2	0	7	71 %	29 %
2	4	12	0	16	25 %	75 %
3	8	21	2	31	26 %	68 %
4	7	15	0	22	32 %	68 %
5	4	10	0	14	29 %	71 %
6	3	0	0	3	100 %	0 %
Totalt	31	60	2	93	33 %	65 %

Spørsmål 15

Karakter	Frekvens riktig svar	Frekvens feil svar	Ubesvart	Total frekvens	Prosent riktig	Prosent feil
1	1	6	0	7	14 %	86 %
2	3	13	0	16	19 %	81 %
3	6	21	4	31	19 %	68 %
4	7	14	1	22	32 %	64 %
5	2	11	1	14	14 %	79 %
6	0	3	0	3	0 %	100 %
Totalt	19	68	6	93	20 %	73 %

Spørsmål 16

Karakter	Frekvens riktig svar	Frekvens feil svar	Ubesvart	Total frekvens	Prosent riktig	Prosent feil
1	0	1	6	7	0 %	14 %
2	5	6	5	16	31 %	38 %
3	12	7	12	31	39 %	23 %
4	14	3	5	22	64 %	14 %
5	11	3	0	14	79 %	21 %
6	2	1	0	3	67 %	33 %
Totalt	44	21	28	93	47 %	23 %

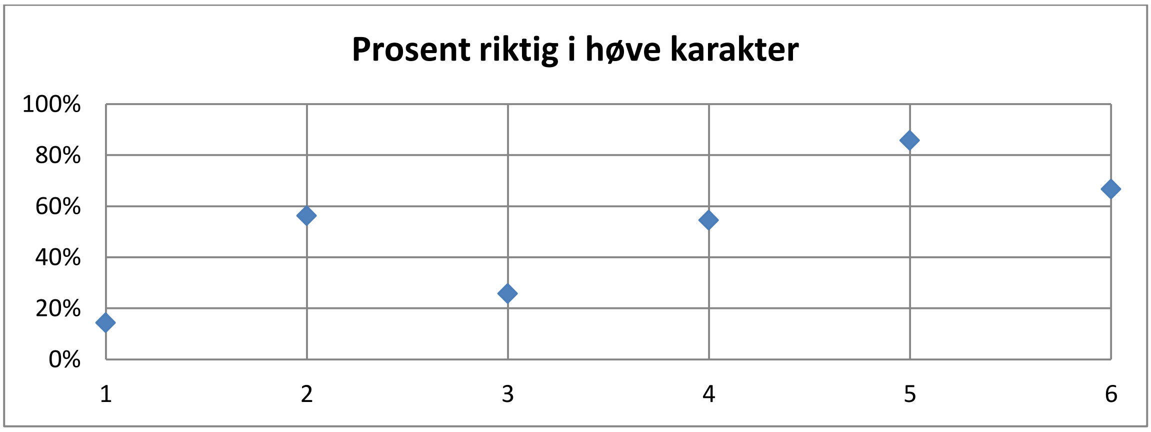
Spørsmål 27

Karakter	Frekvens riktig svar	Frekvens feil svar	Ubesvart	Total frekvens	Prosent riktig	Prosent feil
1	5	2	0	7	71 %	29 %
2	10	6	0	16	63 %	38 %
3	17	14	0	31	55 %	45 %
4	16	6	0	22	73 %	27 %
5	11	2	1	14	79 %	14 %
6	2	1	0	3	67 %	33 %
Totalt	61	31	1	93	66 %	33 %

Spørsmål 9

Karakter	Frekvens riktig svar	Frekvens feil svar	Ubesvart	Total frekvens	Prosent riktig	Prosent feil
1	3	4	0	7	43 %	57 %
2	13	3	0	16	81 %	19 %
3	16	14	1	31	52 %	45 %
4	17	5	0	22	77 %	23 %
5	11	3	0	14	79 %	21 %
6	2	1	0	3	67 %	33 %
Totalt	62	30	1	93	67 %	32 %

Spørsmål 10



Spørsmål 22

Samanstilling av spørsmål 12 og 23

		Spørsmål 12							
Spørsmål 23		Riktig svar/ vist til sannsyn	Riktig svar/ utfall	Riktig / ikkje grunngjeve	Feil svar/ vist til sannsyn	Feil svar/ utfall	Feil svar/ ikkje grunngjeve	Usvara	Totalt
	Riktig svar/ vist til sannsyn	15	6	1		8	2	2	34
	Riktig svar/ utfall	4	1			3	1		9
	Riktig svar/ ikkje grunngjeve	3				2	1	1	7
	Feil svar/ sannsyn								
	Feil svar/ utfall	1	2			5			8
	Feil svar / ikkje grunngjeve			1		1	3	1	6
	Usvara	4	2	1	1	6	1	14	29
	Totalt	27	11	3	1	25	8	18	93

Spørjeskjema – oppfatningar og misoppfatningar i sannsyn – 2015

Kryss av det du meiner må vera rett svar. Det er veldig fint om du gjev ei kort grunngjeving av svaret ditt.

1.

Anne og Bernt kastar ein terning. Dersom det blir partal vinn Anne ellers vinn Bernt. Er spelet rettferdig?

◯ Ja

◯ Nei

Kvifor meiner du det? ____

____

2.

Du kastar eit kronestykke 6 gonger etter kvarandre der M er mynt og K er krone, og skriv ned kva du får i kvart kast. Kva for eit alternativ nedanfor meiner du har størst sjanse for å henda?

◯ MKMKMK

◯ MMKMKK

◯ MMMMMM

◯ KKMKMK

◯ Alle rekkjene ovanfor er like sannsynlege

Kvifor meiner du det?

____

____

3.

Anne og Bernt kastar to terningar. Dersom summen av auge er partal vinn Anne elles vinn Bernt. Er spelet rettferdig?

○ Ja

○ Nei

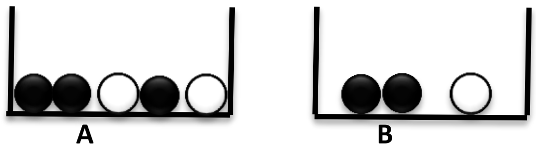
Kvifor meiner du det?

____

____

4.

I dei to boksane nedanfor ligg det svarte og kvite kuler. Du trekkjer ei kule utan å kunne sjå ned i boksane.



Kva for boks gjev størst sjanse for å trekkja ei svart kule?

○ A gjev størst sjanse

○ B gjev størst sjanse

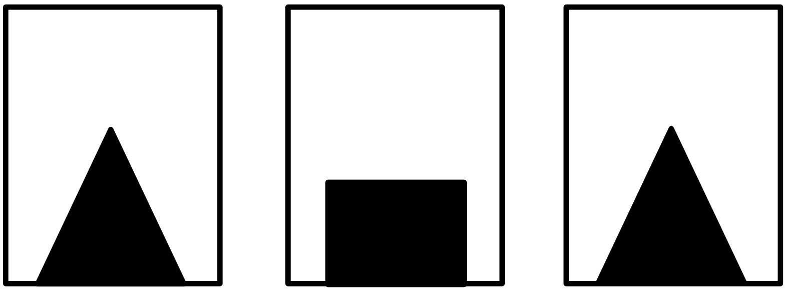
○ A og B er like sannsynlege

Kvifor meiner du det?____

____

5.

Du har 3 kort i ein hatt som vist nedanfor der to har bilete av ein trekant medan eit kort har bilete av eit rektangel. Du kan laga eit hus ved å trekkja korta AB eller BC eller du kan laga ein diamant/rombe ved å trekkja korta AC.



A **B** **C**

Du trekkjer to av korta i frå hatten utan å kunne sjå kva kort du trekkjer. Kva er sannsynet for at du kan laga eit hus?

- ◯ ½
- ◯ 2/3
- ◯ 1/3
- ◯ 1/6
- ◯ Ingen av svara er korrekte

Kvifor meiner du det?

____

____

6.

Du kastar eit kronestykke 3 gonger etter kvarandre og får rekkjefølgja K, K, K. Kva forventar du å få dersom du kastar kronestykket ein gong til?

- ◯ Mynt
- ◯ Kron
- ◯ Mynt og kron er like sannsynlege

Kvifor meiner du det?

____

7.

I ein boks ligg det 4 kuler, 2 svarte og 2 kvite. Du trekkjer vilkårleg ei kule frå boksen og ser at ho er kvit. Utan å leggja den første kule tilbake, trekkjer du ei kule til. Kva er sannsynet for at den andre kula er kvit?

- ◯ ½
- ◯ 2/3
- ◯ 1/3
- ◯ 1/6
- ◯ Ingen av svara over er korrekte.

Kvifor meiner du det?____

____

8.

To boksar kalla A og B, er fylt med raude og blå kuler. I boks A er det 100 kuler, 65 raude og 35 blå medan det i boks B er 10 kuler, 6 raude og 4 blå. Du skal først velja boks og så skal du trekkja ei tilfeldig kule frå den valde boksen. Dersom du trekkjer ei blå kule, vinn du 100 kr. Kva for ein boks gjev deg størst vinnarsjanse?

- ◯ Boks A (med 65 raude og 35 blå)
- ◯ Boks B (med 6 raude og 4 blå)
- ◯ Det er lik sjanse i kvar boks

Kvifor meiner du det?:____

____

9.

Sannsynet for å få ein gut er om lag 50 %. I ein familie har dei 6 born. Kva for sekvens (frå eldst til yngst) er mest sannsynleg

- ◯ GJJGJG
- ◯ GGGGJG
- ◯ Same sjanse for kvar av rekkjefylgjene ovanfor

Kvifor meiner du det?:____

10.

I lotto skal ein velja 7 tal frå totalt 34 tal. Kristin har vald 1, 2, 3, 4, 5, 6,7 medan Arne har vald 34, 1, 17, 9, 2, 33, 25. Kven har størst sjanse for å vinna?

◯ Kristin

◯ Arne

◯ Begge har same sjanse for å vinna

◯ Det kjem an på kva som har vore trekt dei siste vekene

Kvifor meiner du det?____

____

11.

Du trillar to terningar samstundes. Kva har størst sjanse for å henda

◯ Du får ein femmar og ein seksar

◯ Du får seks på begge terningane

◯ Det er lik sjanse for dei to hendingane over.

Kvifor meiner du det?:____

____

12.

I ei avisoverskrift står det at lag A har 70 % sjanse for å vinna mot lag B i neste fotballkamp. Det viser seg at lag A taper. Tok journalisten feil? Kvifor eller kvifor ikkje?

____

____

13.

Du trillar to terningar samstundes. Kva har størst sjanse for å henda

◯ Same tal på begge terningane

◯ Ulike tal på terningane

◯ Det er lik sjanse for dei to hendingane over.

Kvifor meiner du det?:____

____

14.

Ein terning har **ei** side som er farga svart medan dei fem andre sidene er gullfarga. Dersom terningen vert trilla ein gong, kva farga trur du er på sida som vender opp?

◯ Svart

◯ Gull

◯ Det er ikkje nok informasjon til å kunne svara

◯ Svart og gull er like sannsynlege

Kvifor meiner du det?:____

____

15.

Kva er mest sannsynleg

◯ Du får mynt minst 2 gonger når du kastar eit kronestykke 3 gonger

◯ Du får mynt minst 200 gonger når du kastar eit kronestykke 300 gonger

◯ Det er lik sjanse for dei to hendingane over.

Kvifor meiner du det?:____

____

16.

I ein familie er det 2 born der eldste er gut og yngste er jente. Foreldra ventar no eit born til. Kva er mest sannsynleg? Vi reknar her sannsynet for å få ein gut til 50 % og jente til 50 %.

◯ Det neste barnet er ein gut

◯ Det neste barnet er ei jente

◯ Det er lik sjanse for dei to hendingane over.

Kvifor meiner du det?____

____

17.

På eit sjukehus fører dei opp talet på nyfødde gutar og jenter. Kva er mest sannsynleg?

◯ Det vert fødd 4 eller fleire gutar av dei neste 5 nyfødde borna

◯ Det vert fødd 80 eller fleire gutar av dei neste 100 nyfødde borna

◯ Det er lik sjanse for dei to hendingane over.

Kvifor meiner du det?:____

____

18.

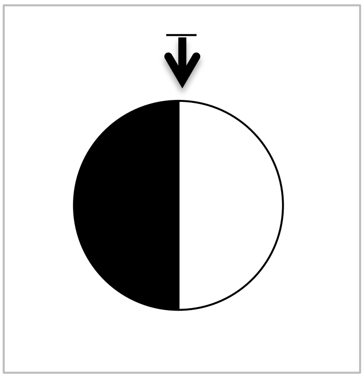
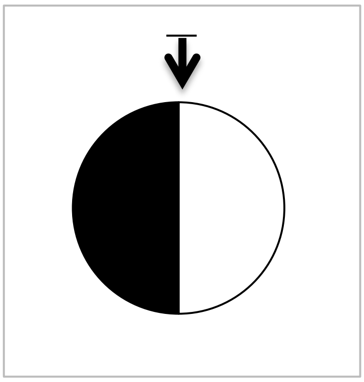
Elsa ynskjer å bli sjukepleiar. Ho har gått helsearbeidarfaget på vidaregåande skule og ho har hatt sommarjobb på sjukeheimen. Elsa har no få studieplass og begynt på ein høgskule . Kva meiner du er mest sannsynleg?

◯ Elsa er student ved ein sjukepleiarhøgskule

◯ Elsa er student.

Kvifor meiner du det?____

19.

På eit tivoli er det eit spel med to rettferdige lykkehjul som vist ovanfor. Du vinn ein premie dersom begge pilene landar på svart, etter at begge lykkehjula vert snurra rundt til dei stoppar.

Jan trur han har 50-50 sjanse for å vinna. Er du einig?

○ Ja

○ Nei

Kvifor meiner du det?:____

____

20.

Du har ei skål med 100 seigemenn. 20 er gule, 50 er raude og 30 er grøne. Du tek 10 seigemenn frå skåla.

Kor mange raude trur du at du får?

Vil dette skje kvar gong du tek 10 seigemenn frå ei skål med 100 seigemenn med same fordeling av fargar på seigemennene som nemnd ovanfor?

Kvifor meiner du det?:____

____

21.

Du har tre kort der eit er raudt på begge sider. Det andre kortet er raudt på ei side og kvit på den andre sida medan det tredje kortet er kvitt på begge sider. Anta at du trekkjer eit kort og plasserer det med ei vilkårleg side opp. Det viser seg at sida som vender opp er raudt. Kva er sannsynet for at den andre sida på kortet og er raud?

- ◯ ½
- ◯ 2/3
- ◯ 1/3
- ◯ 1/6
- ◯ Ingen av svara over er korrekte.

Kvifor meiner du det?____

____

22.

I ei krukke ligg det 4 kuler, 2 svarte og 2 kvite. Du trekkjer vilkårleg ei kule frå krukka og legg ho vekk utan å sjå kva farge kula har. Utan å leggja den første kule tilbake, trekkjer du ei kule til og ser at ho er kvit. Kva er sannsynet for at den første kula og er kvit?

- ◯ ½
- ◯ 2/3
- ◯ 1/3
- ◯ 1/6
- ◯ Ingen av svara er korrekte

Kvifor meiner du det?____

____

23.

Ein internettleverandør hevdar at breibandet deira er 98 % påliteleg. Du bestiller breibandet men opplever at det av og til er ustabilt. Er leverandøren sin påstand feil? Kvifor eller kvifor ikkje?

____

____

24.

Anne og Bernt kastar to terningar. Dersom begge terningane viser eit partal vinn Anne ellers vinn Bernt. Er spelet rettferdig?

◯ Ja

◯ Nei

Kvifor meiner du det? ____

____

25.

Forsking har vist at ungdomsskuleelevar som røykjer, har mykje større risiko for å droppa ut av vidaregåande skule.

Bør ungdomsskulane handheva røykeforbodet mykje strengare for å hindre fråfall i vidaregåande skule?

◯ Ja

◯ Nei

◯ Veit ikkje

Kvifor meiner du det?:____

____

26.

I ei gruppe med deltakarar er det 70 ingeniørar og 30 advokatar. Ein av deltakarane er Lars. Han er ein 30 år gamal mann. Han er gift og har ikkje born. Han er dyktig og har sterk motivasjon og gjer stor suksess på sitt felt. Lars er godt likt av kollegane.

Kva er sannsynet for at Lars er ingeniør og kvifor meiner du det ?

____