Cand. Scient. oppgave i hydroakustikk:

Endelig Element Modellering av Piezoelektriske Skiver

Jan Kocbach

Fysisk Institutt
Universitet i Bergen
Juni 1996

Cand. Scient. oppgave i hydroakustikk:

Endelig Element Modellering av Piezoelektriske Skiver

Jan Kocbach

Fysisk Institutt
Universitet i Bergen
Juni 1996

Forord

Ved Universitetet i Bergen (UiB) og Christian Michelsen Research (CMR) har det i mange år pågått et omfattende arbeid når det gjelder konstruksjon og analyse av piezoelektriske transdusere. Som et ledd i dette arbeidet har det lenge vært planer om å starte opp et arbeid med endelig element modellering av piezoelektriske strukturer ved UiB og CMR. Dette arbeidet er satt i gang med denne Cand. Scient. oppgaven, som tar for seg endelig element modellering av piezokeramiske skiver. I oppgaven er implementering og forståelse av den grunnleggende teorien samt testing av programmet prioritert fremfor systematiske undersøkelser av forskjellige egenskaper ved piezoelektriske skiver, for å være sikker på at implementeringen av teorien er korrekt. Problemstillingene som det blir sett på her er i stor grad de samme som studert i en doktoravhandling av N. Guo fra 1989. Reproduksjon av en del sentrale resultater i avhandlingen har vært prioritert høyt under arbeidet. På grunn av en del avvik på dette området, ble relativt mye tid lagt ned i testing mot andre resultater.

Selv om begge veilederne mine, Per Lunde og Magne Vestrheim, har jobbet mye innenfor analyse og konstruksjon av transdusere, har bruk av endelig element metoden i en slik analyse vært nytt for dem. Begge har vært interessert i å sette seg inn i metodene som benyttes, slik at arbeidet med oppgaven har blitt svært interessant, og det har vært relativt mye samarbeid med hovedveilederen Per Lunde. Når det gjelder selve endelig element analysen har jeg jobbet relativt mye på egen hånd, men faste ukentlige møter og en rekke fruktbare diskusjoner med veilederne, har allikevel vært til meget stor nytte under arbeidet med oppgaven. Jeg har særlig hatt stor nytte av deres innsikt i forbindelse med grunnleggende teori og en rekke forskjellige modeller for analyse av piezoelektriske transdusere.

Oppgaven er blitt svært omfattende, slik at det har vært nødvendig å dele den opp i to deler. Den første delen av oppgaven inneholder hoveddelen av oppgaven, mens den andre delen av oppgaven inneholder beskrivelse av implementeringen og en fullstendig programlisting.

Jeg vil spesielt takke Per Lunde (ekstern veileder) ved CMR og Magne Vestrheim ved UiB for god veiledning under arbeidet med hovedoppgaven. Videre vil jeg takke min medstudent Tore Magne Skar for målte resultater, Halvor Hobæk ved UiB for god hjelp på flere områder, min far Ladislav Kocbach for en rekke diskusjoner, og CMR og UiB for tilgang til datamaskiner. Dessuten vil jeg rette en stor takk til N. Guo som var svært positiv ved vår henvendelse angående detaljer omkring hans endelig element simuleringer, og som velvillig har gitt CMR/UiB tilgang til detaljerte resultater fra sine beregninger, som jeg har hatt tilgang til gjennom CMR. Arbeidet med denne oppgaven har fått støtte fra Norges Forskningsråd (Tungregneprosjektet) gjennom regnetid på CRAY.

Bergen, 3.6.1996

Jan Kocbach

Oppsummering

Ved konstruksjon av ultralyd-transdusere er det ønskelig å kunne modellere vibrasjonsmønsteret i piezoelektriske elementer på en nøyaktig måte. Ved Universitetet i Bergen og Christian Michelsen Research blir det hovedsakelig benyttet analytiske modeller for denne modelleringen. Et verktøy som kan være med på å beskrive effektene som opptrer i et piezoelektrisk element på en bedre måte enn de analytiske modellene, er endelig element modellering.

Problemstillingene som det blir sett på her er i stor grad de samme som studert i en doktoravhandling av N. Guo fra 1989, der vibrasjonsmønsteret i piezokeramiske skiver blir studert ved hjelp av endelig element metoden. Med bakgrunn i denne avhandlingen og annen litteratur om endelig element metoden, er endelig element teori for piezoelektriske strukturer gjennomgått. Denne teorien er implementert i programmet FEMP (*"Finite Element Modellering av Piezoelektriske strukturer"*) for piezokeramiske skiver. Relativt mye tid er lagt ned i å forsøke å reprodusere resultater fra doktoravhandlingen til N. Guo ved hjelp av FEMP. Hovedsakelig gjelder dette resonansfrekvenser for piezoelektriske skiver. Dette har dessverre ikke lykkes fullt ut. Korrespondanse med N. Guo har heller ikke kunnet hjelpe oss til å finne årsaken til avvikene. Det ble derfor satt i gang omfattende sammenlingninger med en rekke andre publiserte resultater (hovedsakelig endelig element metode-resultater) og egne simuleringer med det kommersielle endelig element programmet ABAQUS. Ved sammenligning med resonansfrekvenser for piezokeramiske skiver med ABAQUS er det funnet svært god overensstemmelse. Ved sammenligning med andre publiserte resultater har det i mange tilfeller vært vanskelig å trekke klare konklusjoner, fordi det ofte benyttes andre typer elementer i endelig element metoden enn det som er tilfellet i FEMP. I alle tilfellene er det allikevel funnet rimelig godt kvalitativt samsvar mellom resultatene. Ut fra denne testingen, der sammenligningen med det kommersielle endelig element programmet ABAQUS som her representerer en uavhengig implementering er sentral, kan man konkludere med at det er sannsynlig at FEMP regner ut resonans- og antiresonansfrekvenser for piezoelektriske skiver på en korrekt måte, slik at implementeringen av denne delen av teorien er korrekt. Det er benyttet langt mindre tid på å teste de andre funksjonene som kan regnes ut i programmet FEMP, som for eksempel mekaniske og elektriske responsfunksjoner. Det er tatt med noen tester der svingeformer og elektriske responsfunksjoner (impedans/admittans) for piezokeramiske skiver er sammenlignet med simulerte og målte resultater. Disse resultatene indikerer at FEMP regner ut disse funksjonene på en riktig måte, selv om testingen er for lite omfattende til at man kan trekke klare konklusjoner.

Det er i oppgaven foretatt relativt omfattende konvergenstester for endelig element metoden anvendt for piezoelektriske skiver. Ut fra dette blir det gitt anbefalte krav for elementoppløsning i antall elementer pr. bølgelengde. Det gjenstår fremdeles en del arbeid i forbindelse med konvergenstestene. Det er også gitt eksempler på hvordan FEMP kan benyttes til analyse av piezokeramiske skiver når programmet er ferdigtestet, blant annet for analyse av vibrasjonsmoder omkring tykkelsesmoden og for transientanalyse. Dette er resultater som er tatt med for å vise at endelig element metoden kan være et svært kraftig verktøy innenfor analyse av piezokeramiske skiver og andre piezoelektriske strukturer.

Det gjenstår en del arbeid innenfor testing av forskjellige funksjoner før FEMP kan benyttes som et verktøy for grundige analyser av forskjellige piezoelektriske og elastiske strukturer, men resultatene i denne oppgaven indikerer at FEMP kan bli et kraftig verktøy for slike analyser i fremtiden. I tillegg er det også mulig å utvide modellen til å ta seg av utstråling av lyd til væske/gass-medium.

Innhold

Del I

Hoveddel

Kapittel 1

Innledning

Ved Universitetet i Bergen (UiB) og Christian Michelsen Research (CMR) har det i mange år pågått et omfattende arbeid når det gjelder konstruksjon og analyse av piezoelektriske transdusere. I dette arbeidet har en rekke hovedfagsoppgaver inngått. Ved konstruksjon av ultralydtransdusere er det ønskelig å kunne modellere vibrasjonsmønsteret i piezoelektriske elementer på en nøyaktig måte. Ved UiB og CMR blir det hovedsakelig benyttet analytiske modeller for denne modelleringen. Et verktøy som kan være med på å beskrive de forskjellige vibrasjonsmodene i et piezoelektrisk element på en bedre måte enn de analytiske modellene, er endelig element modellering. Endelig element modellering er i dag et kraftig verktøy for analyse av vibrasjonsmønsteret i generelle piezoelektriske strukturer (se f.eks. [10] [7]).

Som et ledd i arbeidet innenfor analysen av piezoelektriske transdusere har det lenge vært planer om å starte opp et arbeid innenfor endelig element modellering ved UiB og CMR. Dette arbeidet er satt i gang med denne Cand. Scient. oppgaven, som tar for seg endelig element modellering av piezokeramiske skiver. Arbeidet med oppgaven er i stor grad lagt opp etter en doktoravhandling av N. Guo fra 1989 [10]. Mange av resultatene fra denne avhandlingen er også publisert av N.Guo i artikler sammen med P.Cawley [49] [50] [51]. Med bakgrunn i avhandlingen til Guo og annen litteratur om endelig element metoden, er endelig element teori for piezoelektriske strukturer gjennomgått på en grundig måte. Denne teorien er implementert i programmet FEMP (*"Finite Element Modellering av Piezoelektriske strukturer"*) for piezokeramiske skiver. Et hovedpoeng i arbeidet med oppgaven har vært å kontrollere at implementeringen av endelig element metoden i FEMP er riktig.

I dette kapittelet blir det sett litt på hva den piezoelektriske effekten er, og hvilke grunnligninger som styrer dennne effekten. Det blir også sett litt på hvilke modeller som finnes for å modellere piezoelektriske transdusere og piezoelektriske skiver. I seksjon 1.4 er oppbygningen av oppgaven skissert.

1.1 Den piezoelektriske effekten - grunnligninger

I materialer der den piezoelektriske effekten opptrer, oppstår det mekaniske spenninger og tøyninger når et elektrisk felt blir påtrykt, og omvendt. Effekten er reversibel, og lineær til første orden. Den piezoelektriske effekten ble først oppdaget i kvarts av brødrene Pierre og Jaques Curie i 1880 [54].

Den piezoelektriske effekten i et piezoelektrisk medium (figur 2.1) kan beskrives ved hjelp av et sett med grunnligninger. På komponentform for et kartesisk koordinatsystem kan disse uttrykkes på følgende måte, der summasjonskonvensjonen er benyttet ([40], [4]):

- De konstitutive relasjonene for piezoelektriske media gir koblingen mellom de mekaniske og elektriske størrelsene i systemet:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c^E_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k && (1.1) \\ D_i &= e_{ikl} S_{kl} + \epsilon^S_{ik} E_k && (1.2) \end{aligned}$$

  der

T_{ij}	er mekaniske spennings-tensor $[N/m^2]$
S_{kl}	er mekanisk tøyningstensor
D_i	er den elektriske forskyvningsvektoren $[C/m^2]$
E_k	er den elektrisk feltvektoren $[V/m]$
c^E_{ijkl}	er elastiske konstant tensor ved konstant $\underline{E}$-felt, $[N/m^2]$
e_{ikl}	er piezoelektrisk spennings-konstant tensor, $[C/m^2]$
ϵ^S_{ik}	er dielektrisk konstant tensor ved konstant tøyning $[F/m]$

  Disse konstitutive relasjonene kan også settes opp på andre former [40]. For det tapsfrie tilfellet er disse konstant-tensorene reelle. Komplekse konstant-tensorer kan innføres for å representere elastiske, piezoelektriske og dielektriske tap [35].

- Komponentene S_{ij} til tøyningstensoren **S** finner man ut fra komponentene til forskyvningsvektoren $\underline{u}$ som:

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{1.3}$$

  der

u_l	er forskyvningsvektoren $[m]$

- Den elektriske oppførselen til det piezoelektriske materialet er beskrevet av Maxwell's ligninger i tillegg til de konstitutive relasjonene for et piezoelektrisk medium gitt i ligning 1.1- 1.2. Den kvasielektrostatiske approksimasjonen kan innføres [4], slik at det elektriske feltet $\underline{E}$ er relatert til det elektriske potensialet ϕ ved:

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

  der

ϕ	er det elektriske potensialet $[V]$

  Videre har vi at:

$$\frac{\partial D_l}{\partial x_l} = \rho_e \tag{1.5}$$

  der

ρ_e	er fri elektrisk ladningstetthet $[C/m^3]$

  og det er antatt at det eksisterer frie elektriske ladninger i materialet, noe som ikke er gjort i [40]. Dette er allikevel gjort her fordi frie elektriske ladninger blir introdusert når endelig element metoden for et piezoelektrisk medium formuleres i [1], og [1] representerer den første formuleringen av metoden for et slikt medium, og derfor har vært viktig i arbeidet med denne oppgaven. ρ_e blir senere satt til null i det piezoelektriske materialet.

- Bevegelsesligningen (Newton's 2. lov) for et piezoelektrisk medium der det virker volumkrefter $\underline{f}^b$ kan uttrykkes som:

$$\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_k} = \rho \ddot{u}_l - f^b_l \tag{1.6}$$

  der

ρ	er massetettheten $[kg/m^3]$
f^b_l	er den ekstern mekaniske volumkraften $[N/m^3]$

og $\ddot{u}_l = \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2}$ og t er tiden.

I [40] er volumkraften f_l^b satt til null, men fordi dette ikke er gjort i [1], er det her valgt å ta med virkningen av volumkraften i beskrivelsen.

Disse grunnligningene kan benyttes i analysen av piezoelektriske transdusere. I seksjon 2.1 blir disse ligningene funnet ut fra en variasjonsformulering.

1.2 Analyse av piezoelektriske transdusere

Piezoelektriske transdusere transformerer elektrisk energi til mekanisk energi og omvendt ved hjelp av den piezoelektriske effekten. Piezoelektriske transdusere er i bruk på mange forskjellige områder, deriblant som undervanns-sonar, hydrofoner og mekaniske resonatorer. Piezoelektriske transdusere benyttes også i medisinsk diagnose og innen oljeindustrien.

Tradisjonelt blir piezoelektriske transdusere analysert ved å lage en enkel tilnærmet modell for det fysiske systemet, og deretter løse det forenklete problemet analytisk. Forenklingene som må innføres for at det skal være mulig å løse problemet analytisk er ofte så store at løsningen ikke beskriver det fysiske systemet på en god nok måte. Modellene og forenklingene kan altså i en del tilfeller være for dårlige, slik at de estimerte verdiene for resonansfrekvenser, elektriske responsfunksjoner og andre funksjoner for en transduser kan gi betydelige avvik fra målte verdier. Her kan numeriske løsninger, som endelig element metoden, være med på å gi en bedre beskrivelse av mekanismene som opptrer i en piezoelektrisk transduser.

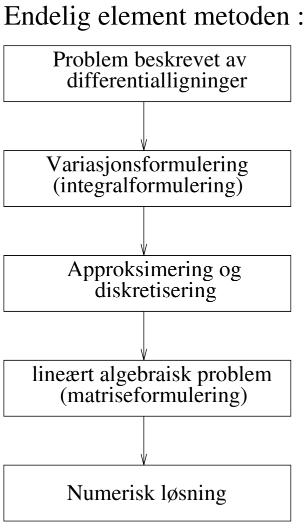
1.2.1 Analytiske modeller

Forskjellige en-dimensjonale modeller for analyse av piezoelektriske skiver/transdusere har vært i bruk i mer enn 40 år. Blant disse er Mason-modellen [54] og KLM-modellen [55] blant de mest populære. I disse modellene blir elektriske krets-analogier benyttet til å analysere det mekaniske systemet. På grunn av at modellene er en-dimensjonale, er de ikke alltid i stand til å modellere alle mekanismene som foregår i en piezoelektrisk skive med endelig forhold mellom diameter og tykkelse (D/T) på en tilstrekkelig god måte. Særlig kan det være problematisk å modellere pizokeramiske skiver og sylindere der både tilnærmingen som tynn skive og tilnærmingen som lang sylinder er dårlige (f.eks. for skiver med D/T-forhold mellom 3 og 8), der det er sterk kobling mellom de ulike vibrasjonsmodene.

Det eksisterer to-dimensjonale modeller for isotrope elastiske plater (f.eks. [57]), som er utvidet også til å gjelde for det piezoelektriske tilfellet [56]. Disse modellene gir relativt god overensstemmelse [10] mellom målte og simulerte frekvenser for ulike vibrasjonsmoder, men det er ikke mulig å simulere andre størrelser for piezoelektriske skiver ved hjelp av disse modellene. Aggarwal's tre-dimensjonale aksesymmetriske analytiske løsning av bølgeligningen for elastiske isotrope skiver [58],[59] kan også benyttes til å analysere vibrasjonene i piezoelektriske skiver, men fordi ikke alle grensebetingelsene som problemet krever er oppfylt, vil denne modellen ikke alltid gi korrekte svar.

1.2.2 Endelig element metoden

Endelig element metoden (beskrevet i f.eks. [5], [42], [37]) (figur 1.1) ble først benyttet i strukturell analyse rundt 1950, for å analysere vibrasjoner i elastiske strukturer. Metoden bygger på en variasjonsformulering og oppsplitting av strukturen som skal analyseres i diskret underområder, såkalte endelige elementer. Oppdelingen av strukturen i elementer er en approksimasjon der det blir antatt at vibrasjonene i strukturen kan beskrives av vibrasjonene i et endelig sett med punkter, nodene til de endelige elementene. Dersom man øker antallet elementer og noder, vil løsningen gå mot den virkelige løsningen på den teoretiske modellen, dersom man ser bort fra numeriske feil [37]. Endelig element metoden er i dag en svært populær metode for løsning differentialligninger innenfor en rekke forskjellige fagfelt.



Figur 1.1: Skjematisk representasjon av endelig element metoden for et generelt problem.

Den generelle endelig element formuleringen for et piezoelektrisk materiale ble først gitt av Allik og Hughes [1] i 1970. Siden da har metoden vært mye benyttet innenfor vibrasjonsanalyse av piezoelektriske transdusere og transduserkonstruksjoner, både ved lave og høye frekvenser.

Aksesymmetriske piezoelektriske strukturer er studert av en rekke forfattere ved hjelp av tredimensjonale aksesymmetriske modeller, slik at strukturen kan modelleres i to dimensjoner. For eksempel studerer Kagawa et. al. lavfrekvente Langevin-type transdusere ved hjelp av en aksesymmetrisk endelig element modell i [14]. I [6] studerer Kunkel et. al. piezoelektriske skiver med varierende forhold mellom diameter og tykkelse (D/T) av materialet PZT5H. I [10] studerer Guo piezoelektriske skiver av materialet PZT5A med D/T forhold mellom 0.1 og 20. Jensen studerer resonansfrekvenser og mode-former for piezoelektriske skiver av materialet PZT5H i [23].

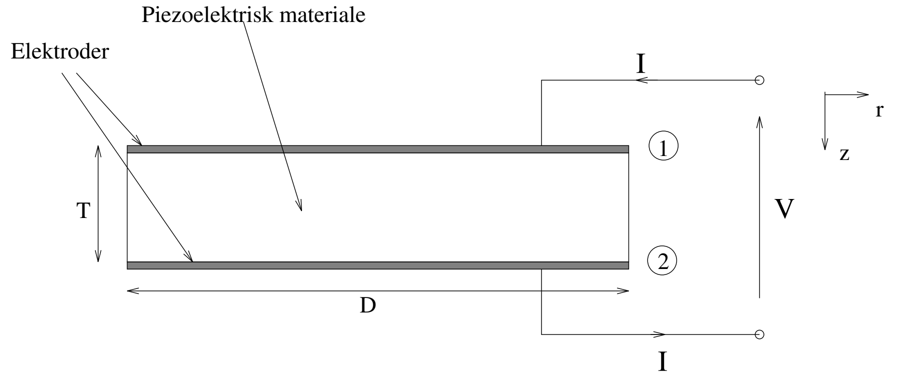
Tre-dimensjonale piezoelektriske strukturer er analysert i f.eks. [12],[15] av Lerch, og i [43] av Challande. Piezoelektriske stenger med forskjellig forhold mellom bredde og tykkelse (W/T) blir studert ved hjelp av en to dimensjonale simuleringer i f.eks. [25] (Naillon et. al.). I tillegg er endelig element metoden benyttet til å studere en rekke andre piezoelektriske transduserkonstruksjoner.

Endelig element metoden for piezoelektriske transduserkonstruksjoner kan håndtere komplekse geometrier og strukturer med elastiske påbygninger ([14], [12]). I tillegg er det mulig å bygge på med en endelig element modell for utstråling til et gass- eller væskemedium ([21], [13]). Både harmonisk analyse, egenverdianalyse og transientanalyse ([10]) kan utføres ved hjelp av endelig element modellen. Dette gjør endelig element metoden til en kraftig og generell metode for analyse av piezoelektriske transduserkonstruksjoner [10].

Det finnes i dag en rekke kommersielle programmer for analyse av piezoelektriske strukturer ved hjelp av endelig element metoden. De kommersielle programmene ABAQUS [30], ANSYS [13] og MODULEF [68] er generelle endelig element programmer som kan utføre piezoelektrisk analyse i tillegg til en rekke andre analyseområder. PZFlex [69] og ATILA [70] er endelig element programmer utelukkende for piezoelektrisk analyse, som kan håndtere flere problemer enn de generelle endelig element programmene. Det kan i mange tilfeller være hensiktsmessig å benytte disse programmene til analyse av piezoelektriske transduserkonstruksjoner, men dersom man er interessert i å studere spesielle problemer og å se på hvilken effekt variasjoner av ulike inngangsparametre har på responsen til transduserkonstruksjonen, har man større frihet dersom man implementerer teorien selv. I tillegg har man større kontroll over metoden, man får økt forståelse av den grunnleggende teorien, og man kan vurdere resultatene som metoden gir på en langt bedre måte. Videre er de kommersielle endelig element programmene på markedet svært kostbare. Ulempen med å implementere teorien selv, er at det kan være vanskelig å implementere teorien på en feilfri måte, og at det derfor stilles høye krav til testing av programmet. Dette viste f.eks. et NTNF-finansiert arbeid for modellering av piezoelektriske svingere ved ELAB-RUNIT (avsluttet 1989) [19], der hele programmet ikke var operativt ved prosjektets slutt [19].

I denne oppgaven er det valgt å implementere teorien selv. Hovedmotivasjonen for å foreta implementeringen selv, og ikke å bruke kommersielle programmer, er at arbeidet med implementeringen gir en økt forståelse av teorien, metodens begrensninger, og hvilke fallgruber det finnes i forbindelse med bruk av endelig element metoden til å modellere piezoelektriske transdusere.

1.3 Piezoelektriske skiver



Figur 1.2: En piezoelektrisk skive med elektroder. Tykkelsen på elektrodene antas å være så liten at den kan ignoreres.

I mange tilfeller er det hensiktsmessig å benytte transdusere der piezoelektriske sirkulære skiver inngår som en viktig del av transduserkonstruksjonen. Disse kan analyseres ved hjelp av 2-dimensjonale aksesymmetriske modeller på grunn av symmetrien i problemet. Dette gjør problemet noe enklere enn det fulle tre-dimensjonale problemet. I figur 1.2 er det vist en skive av et piezoelektrisk materiale med tykkelse T og diameter D. På hver av endeflatene i tykkelsesretningen er det elektroder. Tykkelsen på elektrodene antas å være så liten at den kan neglisjeres. Mellom elektrodene er det en potensialforskjell V, og vi har en strøm I inn på elektrodene.

Egenskapene til piezoelektriske skiver er veldig avhengig av D/T-forholdet, noe som er vist både ved eksperimentelle studier ([2],[61],[60]) og simuleringer ([6],[10]). Vibrasjonsmønsteret i skiven kan være svært komplisert, særlig for høye D/T-forhold, da det eksisterer en rekke forskjellige vibrasjonsmoder i piezoelektriske skiver. Disse vibrasjonsmodene er i det tapsfrie tilfellet egenmoder for resonans eller antiresonans for den piezoelektriske skiven. Disse finner man for frekvenser der den elektriske spenningen over elementet er konstant (resonans) eller ladningen på elektrodene er konstant (antiresonans). Modene i en piezoelektrisk skive kan kategoriseres som [10] R-moder (Radielle moder), E-mode ("Edge" mode), TS-moder (Tykkelses skjær moder), TE-moder ("Thickness extensional" moder) og A-moder (Høyere ordens radielle moder).

Ved å plotte frekvensspektere der frekvens*tykkelse (f*T) for resonans-modene for piezoelektriske skiver med varierende D/T-forhold blir plottet ([2],[10],[6],[60],[61]), er det mulig å studere hvordan egenskapene til en piezoelektrisk skive varierer med D/T-forholdet, og hva slags kobling som eksisterer mellom de ulike vibrasjonsmodene. På denne måten er det mulig å finne hvilket D/T-forhold som er ideelt med tanke på de egenskapene som er ønskelige for en piezoelektrisk skive. Videre er det mulig å bruke dette til å se på koblingen mellom de ulike modene.

1.4 Oppgavens formål og oppbygning

Formålet med denne Cand. Scient. oppgaven har vært å gå grundig gjennom endelig element teori for piezoelektriske skiver, og å implementere denne teorien på en datamaskin. Her var det spesielt viktig at implementeringen måtte være grundig gjennomtestet mot andre endelig element resultater, andre modeller, og målinger, for at programmet skulle kunne brukes på en fornuftig måte i senere arbeider. Testing av de grunnleggende delene av programmet er derfor høyt prioritert i denne oppgaven. Dette er årsaken til at det ikke inngår grundige og systematiske undersøkelser av de forskjellige egenskapene til piezoelektriske skiver i denne oppgaven. Slike analyser er det aktuelt å utføre i videre arbeider, der programmet FEMP som er utviklet i forbindelse med arbeidet med denne oppgaven vil ha en viktig plass.

Oppgaven er blitt svært omfattende, slik at det har vært nødvendig å dele den opp i to deler. Den første delen av oppgaven inneholder hoveddelen av oppgaven, mens den andre delen av oppgaven inneholder beskrivelse av implementeringen, en liten bruksanvisning til programmet FEMP, og en fullstendig programlisting.

I kapittel 2 blir endelig element formuleringen for piezoelektriske materialer gjennomgått på en generell måte. I Kapittel 3 blir det sett på hvordan ulike funksjoner kan simuleres for en piezoelektrisk skive ved hjelp av endelig element modellen. Her inngår det også en diskusjon av hvordan tapene og den elektromekaniske koblingen kan beskrives. En grundig beskrivelse av testingen av programmet er tatt med i kapittel 4. Konvergensegenskapene til modellen er studert i kapittel 5. Til slutt er det vist hvordan programmet FEMP kan benyttes i analyse av piezoelektriske transdusere i kapittel 6. Konklusjoner og forslag til videre arbeid finnes i kapittel 7. I vedleggene i del 1 er det sett på de elektriske grensebetingelsene. I tillegg er det tatt med en del detaljresultater fra testingen.

I del 2 er hele programlistingen samt beskrivelse av implementeringen og en liten bruksanvisning for programmet tatt med.

Kapittel 2

Teoretisk grunnlag for endelig element modellen

I dette kapittelet blir endelig element formuleringen for piezoelektriske materialer funnet ved å benytte Hamilton's prinsipp for et lineært piezoelektrisk medium. Denne formuleringen gir et diskret sett med matriseligninger som kan løses for forskyvningen og potensialet for gitte grensebetingelser. Disse matriseligningene er de samme som de som er gitt i doktoroppgaven til N. Guo [10]. Det blir også sett på ulike elementtyper som kan benyttes for analyse av aksesymmetriske strukturer ved hjelp av endelig element metoden. Konvensjonene som er benyttet for notasjonen for krefter og ladninger er oppsummert i tabell 2.1, for at det skal være lettere å følge utledningen av endelig element ligningene.

Tabell 2.1: Konvensjoner for notasjon for krefter og ladninger i denne oppgaven.

$\underline{F}$	Kraft	$[N]$
$\underline{t}$	Overflatekraft	$[N/m^2]$
$\underline{f}$	Volumkraft	$[N/m^3]$
Q	Ladning	$[C]$
q	overflateladningstetthet	$[C/m^2]$
ρ_e	volumladningstetthet	$[C/m^3]$

2.1 Formulering av endelig element ligningene

Endelig element ligningene for et piezoelektrisk medium ble første gang formulert i 1970 av Allik og Hughes [1]. Tilsvarende ligninger finner man også i f.eks. [10] [25] [65] [43] [12] [15] [13] [14] [23] [26] [27] [44] [49] [66].

Det er mange forskjellige måter å komme frem til endelig element ligningene for et piezoelektrisk medium på. Man kan benytte prinsippet for virtuelt arbeid som gjort i f.eks. [17], minimalisere den totale energien i det piezoelektriske mediet som gjort i f.eks. [10], benytte en mer matematisk fremgangsmåte som gjort i [25], eller benytte Hamilton's prinsipp [56] [52] som det blir gjort i denne oppgaven. Grunnlaget for alle disse metodene er en energianalyse.

Det er her valgt å benytte Hamilton's prinsipp [56] [52] til å formulere endelig element ligningene for et piezoelektrisk medium, blant annet fordi dette gir grensebetingelsene og differensialligningene som beskriver problemet direkte ut fra energiprinsippet. Utledningen av endelig element ligningene som følger nedenfor bygger delvis på formuleringen av Hamilton's prinsipp for et piezoelektrisk medium gitt i [56], og delvis på formuleringen av endelig element ligningene i [1]. Tapsmekanismer blir først innført i kapittel 3.

2.1.1 Hamilton's prinsipp for et lineært piezoelektrisk medium

I klassisk mekanikk er Lagrangefunksjonen L som definerer energien i et system definert ved ([56], s. 43)

$$L = T(\dot{q}_k) - V(q_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) \tag{2.1}$$

der

L	er Lagrangefunksjonen $[J]$
T	er den kinetiske energien $[J]$
V	er den potensielle energien $[J]$
q_k	er posisjons-koordinater $[m]$
t	er tiden $[s]$

Hamilton's prinsipp stadfester at for et konservativt holonomisk system må ([56], s. 43)

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = 0 \tag{2.2}$$

for *alle variasjoner* δq_k av posisjons-koordinatene q_k som er konsistent med de holonomiske førings-betingelsene og som er *null for* t_0 *og* t. At førings-betingelsene er holonome betyr at disse er gitt ved algebraiske ligninger eller integrerbare differensialligninger. At systemet er konservativt og holonomisk innebærer at alle føringsbetingelsene er holonomiske ([32] s. 114) og at alle kreftene som virker i systemet konservative. Dersom systemet ikke er konservativt, slik at ikke alle kreftene som virker er konservative, kan prinsippet generaliseres ved å regne ut det virtuelle arbeidet δW gjort av de ikke-konservative kreftene for en virtuell forskyvning konsistent med føringsbetingelsene. Hamilton's prinsipp kan da reformuleres som:

$$\delta \int_{t_o}^{t} L dt + \int_{t_o}^{t} \delta W dt = 0 \tag{2.3}$$

der

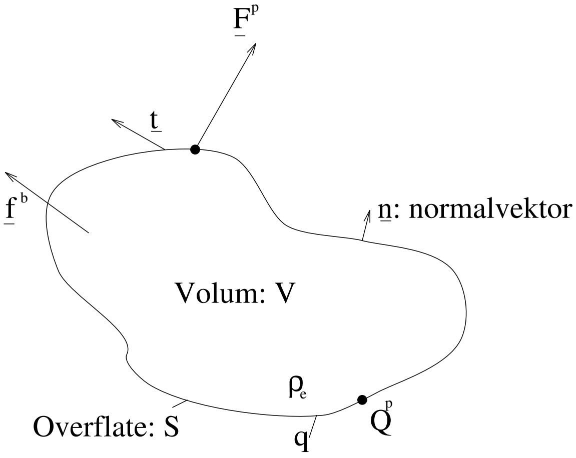
δW	er det virtuelle arbeidet $[J]$

Det virtuelle arbeidet δW vil i det piezoelektriske tilfellet også inkludere den elektriske analogen til det virtuelle arbeidet utført av krefter, som er det virtuelle arbeidet utført av ladninger [56].

Vi er nå interessert i å finne Lagrangefunksjonen L og det virtuelle arbeidet δW for et piezoelektrisk medium med volum V og overflate S (figur 2.1). I [56] blir det utelukkende operert med det virtuelle arbeidet utført av overflatekrefter og overflateladning på overflaten S. Tilsvarende ser man også i endelig element ligningene i [25]. I [23] og [1] er også det virtuelle arbeidet utført av volumkrefter og volumladninger i volumet V tatt med i uttrykket for det virtuelle arbeidet δW, men dette blir satt til null før endelig element ligningene formuleres.

For å få en mest mulig generell formulering av endelig element ligningene, er det her valgt å ta med bidraget til det virtuelle arbeidet fra både volumkrefter og volumladning i tillegg til overflatekrefter og overflateladning. Bidraget fra punktkrefter på overflaten blir tatt med i formuleringen på et senere tidspunkt (ligning 2.18).

Det antas altså at det virker overflatekrefter $\underline{t}$ på overflaten S og volumkrefter $\underline{f}^b$ i volumet V. Ladningstettheten på overflaten S antas å være q og volumladningstettheten i volumet V antas å være ρ_e. Volumladningstettheten vil senere bli satt til null, men er tatt med her for å få en mest mulig generell beskrivelse, og fordi volumladningstettheten ikke er satt til null i [1].



Figur 2.1: Et piezoelektrisk materiale med volum V, overflate S, og normalvektor $\underline{n}$ på overflaten blir studert. På overflaten S virker det overflatekrefter $\underline{t}$, i volumet V virker det volumkrefter $\underline{f}^b$, og i tillegg virker det punktkrefter $\sum_i \underline{F}_i^p$ på flaten S. Ladningstettheten på overflaten S er q, volumladningstettheten i volumet V er ρ_e, og i tillegg har vi punktladninger $\sum_i Q_i^p$ på flaten S.

Det virtuelle arbeidet pr. areal gjort av overflatekreftene $\underline{t}$ for en liten virtuell forskyvning $\delta\underline{u}$ av overflaten S er da $t_k \delta u_k$ ([56] s. 44). Analogt finner man det virtuelle arbeidet pr. volum gjort av volumkreftene $\underline{f}^b$ for en liten virtuell forskyvning $\delta\underline{u}$ av volumet V som $f_k^b \delta u_k$ ([23] s.13). Det virtuelle arbeidet pr. areal gjort av overflateladningen med overflateladningstetthet q for en liten variasjon $\delta\phi$ av det elektriske potensialet ϕ er gitt ved $-q\delta\phi$ ([56], s.44), og det virtuelle arbeidet gjort av volumladningen med volumladningstetthet ρ_e er $-\rho_e \delta\phi$ ([23] s.13).

Det totale virtuelle arbeidet finner man da som:

$$\delta W = \int_V (f_l^b \delta u_l - \rho_e \delta\phi) dV + \int_S (t_l \delta u_l - q\delta\phi) dS \tag{2.4}$$

der

f_l^b	er den ekstern mekaniske volumkraften $[N/m^3]$
t_l	er overflatekraften $[N/m^2]$
ρ_e	er fri elektrisk ladningstetthet $[C/m^3]$
q	er overflateladningstetthet $[C/m^2]$

der summasjonskonvensjonen er benyttet. Lagrangen for det piezoelektriske mediet er definert ved ([56] s. 44):

$$L = \int_V [\frac{1}{2}\rho \dot{u}_l \dot{u}_l - H(S_{kl}, E_k)] dV \tag{2.5}$$

der [56]

$$H(S_{kl}, E_k) = \frac{1}{2}(T_{kl} S_{kl} - E_k D_k) \tag{2.6}$$

og

H er den elektriske entalpi-tettheten [40] $[J/m^2]$

I [56] er det vist at:

$$\frac{\partial H}{\partial S_{kl}} = T_{kl} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial E_k} = D_k \tag{2.8}$$

som blir benyttet nedenfor.

Fra ([56] s. 45) finner man at:

$$\delta \int_{t_0}^{t} \left[\int_V [\frac{1}{2}\rho \dot{u}_l \dot{u}_l] dV \right] dt = -\int_{t_0}^{t} dt \int_V \rho \ddot{u}_l \delta u_l dV \tag{2.9}$$

og

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t} dt \int_V H(S_{kl}, E_k) dV &= \int_{t_0}^{t} dt \int_V \left[\frac{\partial H}{\partial S_{kl}} \delta S_{kl} + \frac{\partial H}{\partial E_k} \delta E_k \right] dV \\ &= \int_{t_0}^{t} dt \int_V \left[T_{kl} \delta S_{kl} - D_k \delta E_k \right] dV \end{aligned} \tag{2.10}$$

der ligning 2.7- 2.8 er benyttet i den siste overgangen. Vi innfører så Lagrangefunksjonen L for et piezoelektrisk medium definert i ligning 2.5 og det virtuelle arbeidet for et piezoelektrisk medium definert i ligning 2.4 i den modifiserte formen av Hamilton's prinsipp i ligning 2.3. Det gir oss Hamilton's prinsipp for et piezoelektrisk medium. Ved å benytte ligning 2.10 og ligning 2.9 kan dette skrives som:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} dt \Bigg[-\int_V \rho \ddot{u}_l \delta u_l dV - \int_V (T_{kl} \delta S_{kl} - D_k \delta E_k) dV &\quad + \\ \int_V (f_l^b \delta u_l - \rho_e \delta \phi) dV + \int_S (t_l \delta u_l - q \delta \phi) dS \Bigg] &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ved å uttrykke den mekaniske tøyningen ved forskyvningen (ligning 1.3) og det elektriske feltet ved potensialet (ligning 1.4) og benytte seg av symmetrien i spenningstensoren, kan man ved hjelp av divergensteoremet vise at ([56], s.46):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} dt \Bigg[\int_V (\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_k} - \rho \ddot{u}_l + f_l^b) \delta u_l dV + \int_V (\frac{\partial D_k}{\partial x_k} - \rho_e) \delta \phi dV &\quad + \\ + \int_S (t_l - n_k T_{kl}) \delta u_l dS - \int_S (q + n_k D_k) \delta \phi dS \Bigg] &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Her er variasjonene δu_l og $\delta\phi$ *vilkårlige* innenfor volumet V. Ligning 2.12 gir da at $\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_k} - \rho \ddot{u}_l + f_l^b = 0$ og $\frac{\partial D_k}{\partial x_k} - \rho_e = 0$ må være oppfylt i volumet V. Disse ligningene er identisk med bevegelsesligningen i ligning 1.6 og en av Maxwell's ligninger i ligning 1.5.

Fra ligning 2.12 finner man følgende grensebetingelser på overflaten S([56] s.46):

- Enten er δu_l vilkårlig og $t_l - n_k T_{kl} = 0$, eller u_l er gitt og $\delta u_l = 0$.
- Enten er $\delta\phi$ vilkårlig og $q + n_k D_k = 0$, eller ϕ er gitt og $\delta\phi = 0$. Det innebærer at

  $$q = -n_k D_k = -\underline{D} \cdot \underline{n} \tag{2.13}$$

  Denne definisjonen på overflateladningstettheten blir benyttet til å finne sammenhengen mellom den elektriske strømmen I og den elektriske ladningen på elektrodene i vedlegg A.

Ut fra Hamilton's prinsipp er altså differensial-ligningene som beskriver problemet samt grensebetingelsene funnet. Differensialligningene er de samme som ble gitt i seksjon 1.1. Dette viser at variasjonsprinsippet som ble funnet i ligning 2.11 beskriver problemet vårt på en korrekt måte.

De konstitutive relasjonene for piezoelektriske media i ligning 1.1- 1.2 gir sammenhengen mellom mekanisk spenning T_{kl}, mekanisk tøyning S_{kl}, elektrisk forskyvning $\underline{D}$ og elektrisk felt $\underline{E}$. Det innebærer at man får en kobling mellom det mekaniske og elektriske systemet som følge av den piezoelektriske effekten. Innføring av de konstitutive relasjonene for piezoelektriske media i ligning 2.11 gir

$$\int_{t_0}^{t} dt \left[- \int_V \rho \ddot{u}_l \delta u_l dV - \int_V (S_{ij} c^E_{ijkl} \delta S_{kl} - E_i e_{ikl} \delta S_{kl} - S_{ij} e_{kij} \delta E_k - E_i \epsilon^S_{ki} \delta E_k) dV + \int_V (f^b_l \delta u_l - \rho_e \delta \phi) dV + \int_S (t_l \delta u_l - q \delta \phi) dS \right] = 0 \quad (2.14)$$

der det blir benyttet at $c^E_{ijkl} = c^E_{klij}$ [40].

I [23] blir det her antatt harmonisk bevegelse (dvs. at forskyvning og potensial varierer som $e^{i\omega t}$), slik at tidsintegrasjonen kan utføres, og man kan stryke tidsleddene fra variasjonsligningen. Vi er interessert i å ha en mest mulig generell beskrivelse, slik at endelig element metoden også skal kunne benyttes til transient analyse. Det er derfor valgt å ikke anta en slik variasjon av potensial og forskyvning på dette stadiet i denne utledningen.

2.1.2 Innføring av punktkrefter og punktladninger

I beskrivelsene i [1], [15] og [10] ser man at også det virtuelle arbeidet utført av punktkrefter og punktladninger på overflaten er tatt med i formuleringen. Dette kan for eksempel være interessant når man vil finne responsen til en struktur når det virker en kraft $\underline{F}^p$ i et punkt $\underline{r}_0$ på overflaten til strukturen. Det er derfor valgt å ta med virkningen av punktkrefter og punktladninger på overflaten til strukturen i beskrivelsen, selv om disse ikke blir benyttet i denne oppgaven, og blir satt til null i seksjon 2.5. Disse kan innføres på følgende måte:

- Anta at vi har en punktkraft $\underline{F}^p$ som virker i et punkt $\underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ på flaten S. Definer en liten flate S_0 omkring punktet $\underline{r}_0$. La $\underline{t}^{tot}$ være summen av alle overflatekreftene som virker, inkludert punktkraften $\underline{F}^p$. La $\underline{t}$ være overflatekreftene bortsett fra punktkraften $\underline{F}^p$, og $\underline{t}^P$ bidraget til overflatekreftene på flaten S_0 fra punktkraften $\underline{F}^p$, slik at $\underline{F}^p = \int_{S_0} \underline{t}^P dS_0$. Det virtuelle arbeidet som overflatekreftene utfører på hele overflaten S kan da skrives som

  $$\int_S t^{tot}_l \delta u_l dS = \int_S t_l \delta u_l dS + \int_{S_0} t^P_l \delta u_l dS_0 \quad (2.15)$$

  I grensen $S_0 \to 0$ kan da δu_l settes utenfor integralet, og vi får:

  $$\begin{aligned} \int_S t^{tot}_l \delta u_l dS &= \int_S t_l \delta u_l dS + \delta u_l \int_{S_0} t^P_l dS_0 \\ &= \int_S t_l \delta u_l dS + F^p_l \delta u_l \end{aligned} \quad (2.16)$$

  På den måten kan man innføre en rekke punktkrefter $\sum_i \underline{F}^p_i$ på overflaten S.

- En helt analog fremgangsmåte for punktladninger gir:

  $$\int_S q^{tot} \delta \phi dS = \int_S q \delta \phi dS + Q^p \delta \phi \quad (2.17)$$

Alternativt kan punktladninger og punktkrefter innføres ved hjelp av δ - funksjonen ([31] s. 48).

Dersom punktkrefter og punktladninger innføres i ligning 2.14, får man følgende variasjonsprinsipp på komponentform:

$$\int_{t_0}^{t} dt \left[- \int_V \rho \ddot{u}_l \delta u_l dV - \int_V (S_{ij} c^E_{ijkl} \delta S_{kl} - E_i e_{ikl} \delta S_{kl} - S_{ij} e_{kij} \delta E_k - E_i \epsilon^S_{ki} \delta E_k) dV + \int_V (f^b_l \delta u_l - \rho_e \delta \phi) dV + \int_S (t_l \delta u_l - q \delta \phi) dS + \left(\sum_i (F^p_l)_i \delta u_l - \sum_i (Q^p)_i \delta \phi \right) \right] = 0 \quad (2.18)$$

der

$(Q^p)_i$ er punktladninger $[C]$
$(F_k^p)_i$ er punktkrefter $[N]$

2.1.3 Matriseformulering

Det er hensiktsmessig å omforme ligningen til matriseform med forenklet notasjon, slik at man tar hensyn til symmetrien i tøynings- og spennings-tensorene. Da vil $S_{ij} \rightarrow S_p$, $T_{kl} \rightarrow T_q$, $c^E_{ijkl} \rightarrow c^E_{pq}$a og $e_{ikl} \rightarrow e_{iq}$, $p, q = 1 \ldots 6$ slik at man får vektorer istedenfor matriser for representasjon av tøyningen og spenningen [40] [53]. Konvensjonen som er brukt for indeksene her er at[53]:

$$\begin{array}{ccc} 11 \rightarrow 1 & 22 \rightarrow 2 & 33 \rightarrow 3 \\ 23, 32 \rightarrow 4 & 13, 31 \rightarrow 5 & 12, 21 \rightarrow 6 \end{array}$$

slik at f.eks. definisjonen på tøyningsvektoren blir:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ 2S_{yz} \\ 2S_{xz} \\ 2S_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

I fortsettelsen vil både vektorer og matriser bli representert ved klammeparanteser, slik at f.eks. vektoren $u_l \rightarrow [u]$, og matrisen $c^E_{pq} \rightarrow [c^E]$. Den transponerte til en matrise skrives som $[.]^T$. Det gir følgende variasjonsformulering på matriseform:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} dt \Bigg[\int_V \Big(\rho [\delta u]^T [\ddot{u}] + [\delta S]^T [c^E][S] - [\delta S]^T [e]^T [E] - [\delta E]^T [e][S] \quad & - \\ [\delta E]^T [\epsilon^S][E] \Big) dV + \int_V \delta\phi \rho_e dV - \int_V [\delta u]^T [f^b] dV - \int_S [\delta u]^T [t] dS \quad & + \\ \int_S \delta\phi q dS + \sum_i \delta\phi Q_i^p - \sum_i [\delta u]^T [F_i^p] \Bigg] \quad & = \quad 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

der $[c^E]$ (6x6-matrise), $[e]$ (3x6-matrise) og $[\epsilon^S]$ (3x3-matrise) er konstant-matriser for det piezoelectriske materialet i det 3-dimensjonale tilfellet [40]. Denne ligningen inneholder de samme leddene som variasjonsformuleringen gitt i [1], men på grunn av at Hamilton's prinsipp er benyttet til å finne variasjonsprinsippet her, mens prinsippet for virtuelt arbeid er benyttet i [1], kommer det inn en tidsintegrasjon i ligning 2.20 som man ikke ser i [1].

Definisjonen av tøyningskomponentene som blir benyttet i store deler av den generelle endelig element litteraturen [1] ([42] [5]) avviker fra måten det er vanlig å definere dette på i akustikken [40], og som er benyttet i denne utledningen (ligning 1.3 med forenklet notasjon). For å kunne benytte konstantmatrisene på den formen de er definert i [40], må tøyningsvektoren for et kartesisk koordinatsystem defineres som [40]:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ 2S_{yz} \\ 2S_{xz} \\ 2S_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = [L_u][u] \tag{2.21}$$

---

[1] I endelig element litteraturen er det ofte vanlig å operere med tøyningstensoren/spenningstensoren som $[S]^T = [S_{xx} S_{yy} S_{zz} 2S_{xy} 2S_{yz} 2S_{xz}]$.

og den elektriske feltvektoren ved:

$$[E] \quad = \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \phi = \quad -[L_\phi]\phi \tag{2.22}$$

der derivasjonsoperator-matrisene er definert ved:

$$[L_u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

og

$$[L_\phi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Definisjonen av den mekaniske tøyningsvektoren $[S]$ og den elektriske feltvektoren $[E]$ i ligning 2.22-2.21 gjelder kun for et 3-dimensjonalt ***kartesisk*** koordinatsystem. Det samme gjelder derivasjons-operator-matrisene $[L_u]$ og $[L_\phi]$. I våre beregninger for piezoelektriske skiver benytter vi et ***sylindrisk*** koordinatsystem. Fra [53] finner man definisjonen på tøyningsvektoren for et sylindrisk 3-dimensjonalt koordinatsystem som:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{rr} \\ S_{\theta\theta} \\ S_{zz} \\ 2S_{\theta z} \\ 2S_{rz} \\ 2S_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = [L_u][u] \tag{2.25}$$

og den elektriske feltvektoren for et sylindrisk koordinatsystem som:

$$[E] \quad = \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{bmatrix} \quad = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \phi = \quad -[L_\phi]\phi \tag{2.26}$$

Den mekaniske spenningsvektoren er i det sylindriske koordinatsystemet definert ved[53]:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{rr} \\ T_{\theta\theta} \\ T_{zz} \\ T_{\theta z} \\ T_{rz} \\ T_{r\theta} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

og den elektriske forskyvningen ved:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_r \\ D_\theta \\ D_z \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Vi antar nå at vi har et piezoelektrisk materiale som har samme form på konstantmatrisene $[c^E]$,$[e]$ og $[\epsilon^S]$ som et heksagonalt krystall i symmetriklassen 6mm [53]:

$$[c^E] = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$[\epsilon^S] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

der $c_{66}^E = \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)$. Dette inkluderer piezokeramikk (dvs. polarisert ferroelektrisk keramikk). Blant materialene som har en slik form på konstantmatrisene inngår blant annet PZT5A og PZT5H [62] som er benyttet i analysen i doktoravhandlingen til N. Guo [10].

I [53] er det vist at for et sylidrisk koordinatsystem der tøyningsvektoren, spenningsvektoren, den elektriske feltvektoren og den elektriske forskyvningsvektoren er definert som i ligning 2.25- 2.28 og konstantmatrisene har formen gitt i ligning 2.29- 2.31, vil følgende relasjon gjelde:

$$[T] = [c^E][S] - [e]^T[E] \tag{2.32}$$

$$[D] = [e][S] + [\epsilon^S][E] \tag{2.33}$$

der konstantmatrisene $[c^E]$,$[e]$ og $[\epsilon^S]$ er de samme som i det kartesiske tilfellet. Det innebærer at de er gitt på samme form som konstantmatrisene gitt i [62] [40].

Vi er interessert i å analysere aksesymmetriske strukturer, som f.eks. piezoelektriske skiver. Symmetrien i problemet gir at [53]

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \tag{2.34}$$

$$u_\theta = 0 \tag{2.35}$$

Man trenger altså kun å ta med to koordinater, r og z, i beskrivelsen. Problemet kan derfor kategoriseres som et 2-dimensjonalt problem. Problemet vil her bli kalt et 2-dimensjonalt aksesymmetrisk problem. Ligning 2.34- 2.35 gir at [53]

$$S_{\theta z} = 0 \tag{2.36}$$

$$S_{r\theta} = 0 \tag{2.37}$$

$$E_\theta = 0 \tag{2.38}$$

slik at man kun trenger å ta med 4 mekaniske tøyningskomponenter og 2 komponenter av det elektriske feltet i analysen. Tøyningsvektoren kan i det 2-dimensjonale aksesymmetriske tilfellet defineres som[11]:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{rr} \\ S_{\theta\theta} \\ S_{zz} \\ 2S_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix} = [L_u][u] \tag{2.39}$$

og den elektriske feltvektoren som:

$$[E] = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \phi = -[L_\phi]\phi \tag{2.40}$$

Derivasjons-operator-matrisene $[L_u]$ og $[L_\phi]$ får også en annen form:

$$L_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$L_\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

I fortsettelsen vil vi hovedsakelig se på aksesymmetriske strukturer som modelleres ved hjelp av et sylindrisk koordinatsystem med tøyningsvektoren definert ut fra ligning 2.39 og den elektriske feltvektoren definert ut fra ligning 2.40.

I det 2-dimensjonale aksesymmetriske tilfellet må da en del rekker og søler taes ut av konstantmatrisene, fordi den 4. og 6. komponenten til tøynings- og spenningsvektoren og den 2. komponenten til den elektriske felt- og forskyvningsvektoren er fjernet (fordi disse er null). Det gir at $[c^E]$ blir en 4x4-matrise (rekke/søyle 4 og 6 fjernes), $[e]$ en 2x4-matrise (søyle 4 og 6, og rekke 2 fjernes) og $[\epsilon^S]$ en 2x2-matrise (rekke/søyle 2 fjernes):

$$[c^E] = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

$$[\epsilon^S] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

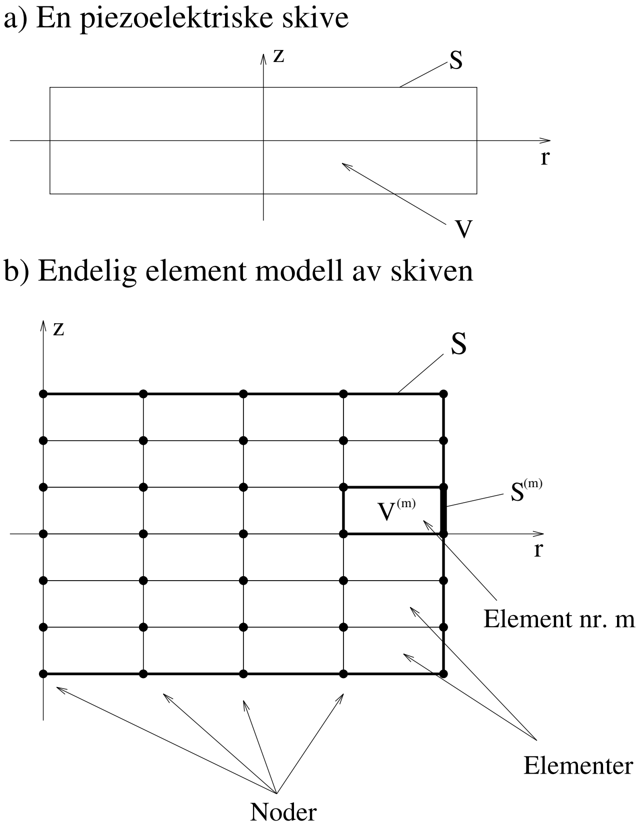
Dette gir tilsvarende relasjoner mellom spenning, tøyning, elektrisk felt og elektrisk forskyvning som de gitt i [20],[53].

2.1.4 Oppdeling av strukturen i elementer

I denne seksjonen blir det sett på hvordan strukturen kan deles opp i elementer i det aksesymmetriske tilfellet. For det fulle 3-dimensjonale tilfellet er fremgangsmåten helt analog. Dette er beskrevet i f.eks. [42] [5] [37]. I seksjon 2.4 blir det sett litt på hvordan endelig element metoden kan anvendes til 3-dimensjonal analyse.

I en endelig element prosess approksimerer man strukturen som analyseres med et endelig antall elementer. Vi benytter en endelig element prosess, og deler volumet V opp i et endelig antall små volum $V^{(m)}$ [5]. Disse volumene er *elementene* i endelig element metoden. Innenfor hvert volum defineres det en rekke *noder*, som er punkter der de ukjente (forskyvningskomponentene og potensialet) skal bestemmes. Dette er vist i figur 2.2 for en piezoelektrisk skive, som på grunn av symmetrien kan modelleres i 2 dimensjoner. Hvert enkelt element i strukturen dreies om symmetriaksen (i dette tilfellet z-aksen), slik at elementet egentlig er et omdreiningslegeme (figur 2.3) [42]. En vilkårlig variabel A som blir brukt i element nr. m, dvs. i volumet $V^{(m)}$, vil her bli skrevet som $A^{(m)}$. Variasjonsformuleringen i ligning 2.20 blir omformet til en sum over volumene og overflatene til hvert enkelt element. Denne kan da skrives som:

$$\int_{t_0}^{t} dt \left[\sum_m \left(\int_{V^{(m)}} \left(\rho^{(m)} [\delta u^{(m)}]^T [\ddot{u}^{(m)}] + [\delta S^{(m)}]^T [c^{E(m)}][S^{(m)}] - [\delta S^{(m)}]^T [e^{(m)}]^T [E^{(m)}] \right.\right.\right.$$
$$\left. - \quad [\delta E^{(m)}]^T [e^{(m)}][S^{(m)}] + [\delta E^{(m)}]^T [\epsilon^{S(m)}][E^{(m)}] \right) dV + \int_{V^{(m)}} \delta\phi^{(m)} \rho_e^{(m)} dV$$

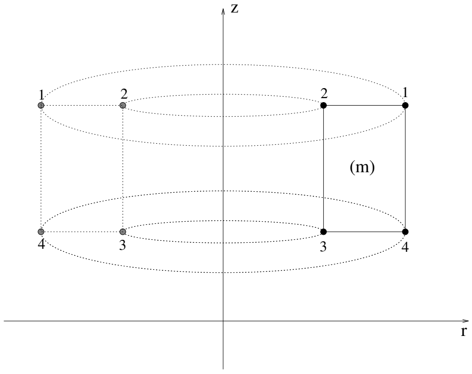


Figur 2.2: Oppdeling av strukturen i noder og elementer. Vi ser her på det aksesymmetriske tilfellet, og antar at strukturen som skal modelleres er en skive. Videre er elementene tegnet slik at hvert element har 4 noder. I a) er skiven som skal modelleres, med volum V og overflate S vist. I b) er det vist hvordan skiven kan deles opp i elementer og noder. Element nr. m med volum $V^{(m)}$ og overflate $S^{(m)}$ er vist i figuren. Det er tilstrekkelig å modellere halvparten av skiven (for $r > 0$) fordi problemet er aksesymmetrisk.

$$
\begin{aligned}
- & \int_{V^{(m)}} [\delta u^{(m)}]^T [f^{b(m)}] dV - \int_{S^{(m)}} [\delta u^{(m)}]^T [t^{(m)}] dS \\
+ & \int_{S^{(m)}} \delta\phi^{(m)} q^{(m)} dS + \sum_i \delta\phi^{(m)} Q_i^{p(m)} - \sum_i [\delta u^{(m)}]^T [F_i^{p(m)}] \Bigg) \Bigg] \quad = \quad 0 \qquad (2.46)
\end{aligned}
$$

Her er $V = \sum_{m=1}^{N} V^{(m)}$ og $S = \sum_{m=1}^{N} S^{(m)}$, slik at $S^{(m)}$ *kun er definert for elementer som har overflate på overflaten S til strukturen.* Overflateintegralene i ligning 2.20 gjelder altså kun for elementer der deler av overflaten $S^{(m)}$ ligger på overflaten til strukturen S. $[c^{E(m)}]$, $[e^{(m)}]$ og $[\epsilon^{S(m)}]$ er konstantmatrisene for element nr. m. $\rho^{(m)}$ er massetettheten til element nr. m. $[f^{b(m)}]$, $[t^{(m)}]$ og $[F_i^{p(m)}]$ er henholdsvis volumkrefter, overflatekrefter og punktkrefter som virker på element nr. m. $\rho_e^{(m)}$, $q^{(m)}$ og $Q_i^{p(m)}$ er henholdsvis volumladningstetthet, overflateladningstetthet og punktladninger i element nr. m.

Forskyvningen innenfor hvert enkelt element antas å være en funksjon av forskyvningen til de n nodene til elementet [42], der interpolasjonsfunksjonene $N_i(r, z)$ tar seg av kartleggingen fra



Figur 2.3: Her er element nr. m vist. Ved modellering av en aksesymmetrisk struktur ved hjelp av et 2-dimensjonalt sylindrisk koordinatsystem er hvert element et omdreiingslegeme. [42]. Elementet blir altså en slags smultring.

forskyvningen i nodepunktene til forskyvningen i et vilkårlig punkt (r, z) innenfor element nr m. Det antas altså at r- og z-komponenten til forskyvningen i ethvert punkt i element nr. m kan uttrykkes som:

$$\left(u^{(m)}(r,z)\right)_r = \sum_{i=1}^{n} N_i(r,z)\hat{u}_{r,i}^{(m)} \tag{2.47}$$

$$\left(u^{(m)}(r,z)\right)_z = \sum_{i=1}^{n} N_i(r,z)\hat{u}_{z,i}^{(m)} \tag{2.48}$$

der $\left(u^{(m)}(r,z)\right)_r$ er r-komponenten til forskyvningen i punktet (r, z) i element nr. m, $\left(u^{(m)}(r,z)\right)_z$ er z-komponenten til forskyvningen i punktet (r, z) i element nr. m, $N_i(r, z)$ er interpolasjonsfunksjoner regnet ut i punktet (r, z), $\hat{u}_{r,i}^{(m)}$ er forskyvningen til node nr. i i element nr. m i r-retningen, og $\hat{u}_{z,i}^{(m)}$ er forskyvningen til node nr. i i element nr. m i z-retningen. En viktig egenskap ved interpolasjonsfunksjonene er at [5]

$$N_i(r_j^{(m)}, z_j^{(m)}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & for \;\; i = j \\ 0 & for \;\; i \neq j \end{array} \right. \tag{2.49}$$

der $(r_j^{(m)}, z_j^{(m)})$ er koordinaten til node nr. j. Det gir at

$$\left(u^{(m)}(r_j^{(m)}, z_j^{(m)})\right)_r = \hat{u}_{r,j}^{(m)} \tag{2.50}$$

$$\left(u^{(m)}(r_j^{(m)}, z_j^{(m)})\right)_z = \hat{u}_{z,j}^{(m)} \tag{2.51}$$

slik at *interpolasjonsfunksjonene gir riktig verdi for forskyvningen i nodepunktene.*

Man trenger like mange interpolasjonsfunksjoner som det er noder i elementene:n [5]. Foreløpig blir det bare antatt at man har forskjellige interpolasjonsfunksjoner som tar hånd om transformasjonen fra nodeforskyvning til forskyvning i ethvert punkt i elementet. I seksjon 2.2.1 og seksjon 2.2.2 blir det sett på hvordan disse interpolasjonsfunksjonene bør velges for at endelig element metoden skal gi tilfredsstillende resultater.

På vektorform kan ligning 2.47- 2.48 skrives på følgende form:

$$[u^{(m)}(r,z)] = [N_{u,l}^{(m)}(r,z)][\hat{u}^{(m)}] \tag{2.52}$$

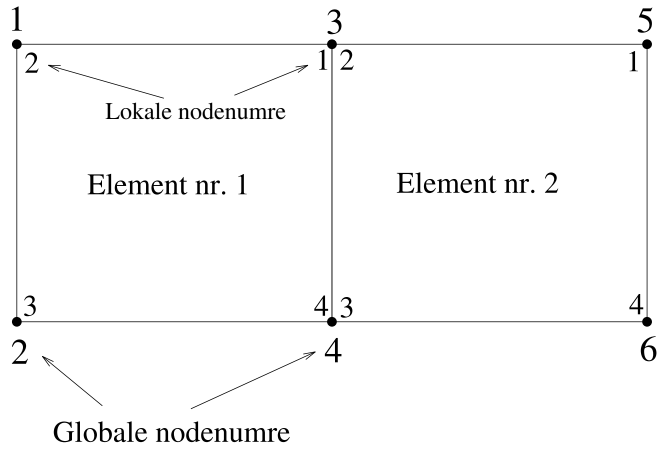
der $[\hat{u}^{(m)}]^T = [\hat{u}^{(m)}_{r,1}\hat{u}^{(m)}_{z,1} \;....\; \hat{u}^{(m)}_{r,n}\hat{u}^{(m)}_{z,n}]$ er en vektor av forskyvningen til de n nodene i element nr. m med lokal nodenummerering, $[N^{(m)}_{u,l}(r,z)]$ er den lokale interpolasjonsmatrisen for forskyvningen for element nr. m, og $[u^{(m)}(r,z)]$ er forskyvningsvektoren i punktet (r,z) for element nr. m. Fra ligning 2.47- 2.52 finner man da at den lokale interpolasjonsmatrisen for forskyvningen for element nr. m, $[N^{(m)}_{u,l}(r,z)]$, må være gitt som [5]:

$$[N^{(m)}_{u,l}(r,z)] = \begin{bmatrix} N_1(r,z) & 0 & N_2(r,z) & 0 & \cdots & N_n(r,z) & 0 \\ 0 & N_1(r,z) & 0 & N_2(r,z) & \cdots & 0 & N_n(r,z) \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

I endelig element formuleringen er det hensiktsmessig å uttrykke forskyvningen i punktet (r,z) i element nr. m ved forskyvningen til alle nodene i hele strukturen fordi dette forenkler overgangen mellom lokale og globale matriser i den videre formuleringen [5]. Forskyvningen $[u^{(m)}(r,z)]$ i punktet (r,z) i element nr. m uttrykt ved alle nodene i hele strukturen kan uttrykkes som [5]:

$$[u^{(m)}(r,z)] = [N^{(m)}_u(r,z)][\hat{u}] \tag{2.54}$$

der $[\hat{u}]^T = [\hat{u}_{r,1}\hat{u}_{z,1} \;....\; \hat{u}_{r,N}\hat{u}_{z,N}]$ er en vektor av forskyvningen til de N nodene i ***hele strukturen med global nodenummerering***, og $[N^{(m)}_u(r,z)]$ er den globale interpolasjonsmatrisen for forskyvningen for element nr. m. Her er det altså gitt en sammenheng mellom forskyvningen i et punkt (r,z) innenfor strukturen, og forskyvningen i *alle nodene i strukturen*. Dette innebærer at den globale interpolasjonsmatrisen for forskyvningen for element nr. m, $[N^{(m)}_u(r,z)]$, må inneholde nuller for alle forskyvningskomponentene for de nodene i strukturen som ikke er en av nodene til elementet [5]. Elementene i matrisen $[N^{(m)}_u(r,z)]$ vil da avhenge av hvordan strukturen er delt opp i noder og elementer, og hvordan nodene er nummerert både i det lokale og globale elementet. For den enkle strukturen vist i figur 2.4, som består av 2 4-noders elementer får matrisen $[N^{(m)}_u(r,z)]$ følgende form (der (r,z) er sløyfet for enkelhets skyld):



Figur 2.4: En enkel struktur som består av 2 4-noders elementer. I teksten brukes denne figuren til å gi et eksempel på hvordan matrisen $[N^{(m)}_u(r,z)]$ vil se ut.

$$[N^{(1)}_u] = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

$$[N^{(2)}_u] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

Tilsvarende interpolasjonsfunksjoner som de som ble innført for forskyvningen ovenfor må man også ha for det elektriske potensialet, overflatekrefter, volumkrefter, overflateladning og volumladning. Det er vanlig å benytte de samme interpolasjonsfunksjonene for disse størrelsene som man benytter for den mekaniske forskyvningen [1]. Det vil også bli gjort her.

Vi får da:

$$\begin{aligned}
\phi^{(m)}(r,z) &= \sum_{i=1}^{n} N_i(r,z)\hat{\phi}_i^{(m)} && (2.57)\\
\rho_e^{(m)}(r,z) &= \sum_{i=1}^{n} N_i(r,z)\hat{\rho}_{e_i}^{(m)} && (2.58)\\
q^{(m)}(r,z) &= \sum_{i=1}^{n} N_i(r,z)\hat{q}_i^{(m)} && (2.59)\\
\left(f^{b(m)}(r,z)\right)_r &= \sum_{i=1}^{n} N_i(r,z)\hat{f}_{r,i}^{b(m)} && (2.60)\\
\left(f^{b(m)}(r,z)\right)_z &= \sum_{i=1}^{n} N_i(r,z)\hat{f}_{z,i}^{b(m)} && (2.61)\\
\left(t^{(m)}(r,z)\right)_r &= \sum_{i=1}^{n} N_i(r,z)\hat{t}_{r,i}^{(m)} && (2.62)\\
\left(t^{(m)}(r,z)\right)_z &= \sum_{i=1}^{n} N_i(r,z)\hat{t}_{z,i}^{(m)} && (2.63)
\end{aligned}$$

der $\hat{\phi}_i^{(m)}$ er det elektriske potensialet i node nr. i i element nr. m, $\hat{\rho}_{e_i}^{(m)}$ er volumladningstettheten i node nr. i i element nr. m, $\hat{q}_i^{(m)}$ er overflateladningstettheten i node nr. i i element nr. m, $\hat{f}_{r,i}^{b(m)}$ er r-komponenten til volumkraften i node nr. i i element nr. m, og $\hat{t}_{r,i}^{(m)}$ er r-komponenten til overflatekraften i node nr. i i element nr. m.

På tilsvarende måte som for forskyvningen ovenfor, defineres det lokale og globale interpolasjonsmatriser for elektrisk potensial, ladninger og krefter.

For potensialet i et vilkårlig punkt (r,z) får man da:

$$\begin{aligned}
\phi^{(m)}(r,z) &= [N_\phi^{(m)}(r,z)][\hat{\phi}] && (2.64)\\
\phi^{(m)}(r,z) &= [N_{\phi,l}^{(m)}(r,z)][\hat{\phi}^{(m)}] && (2.65)
\end{aligned}$$

der $\phi^{(m)}(r,z)$ er potensialet i punktet (r,z), $[N_\phi^{(m)}(r,z)]$ er den globale interpolasjonsmatrisen for potensialet for element nr. m, $[N_{\phi,l}^{(m)}(r,z)]$ er den lokale interpolasjonsmatrisen for potensialet for element nr. m, $[\hat{\phi}]$ er vektoren av potensialet i alle nodene i hele strukturen med global nodenummerering gitt ved

$$[\hat{\phi}]^T = [\hat{\phi}_1\,\hat{\phi}_2 \ldots\ldots \hat{\phi}_N] \qquad (2.66)$$

og $[\hat{\phi}^{(m)}]$ er vektoren av potensialet i alle nodene i element nr. m med lokal nodenummerering gitt ved

$$[\hat{\phi}^{(m)}]^T = [\hat{\phi}_1^{(m)}\,\hat{\phi}_2^{(m)} \ldots\ldots \hat{\phi}_n^{(m)}] \qquad (2.67)$$

Ut fra ligning 2.57 må den lokale interpolasjonsmatrisen for det elektriske potensialet være gitt ved:

$$[N_{\phi,l}^{(m)}(r,z)] = \left[\begin{array}{cccc} N_1(r,z) & N_2(r,z) & \cdots & N_n(r,z) \end{array}\right] \qquad (2.68)$$

Den globale interpolasjonsmatrisen for det elektriske potensialet finner man fra den lokale interpolasjonsmatrisen for det eleketriske potensialet på tilsvarende måte som beskrevet for interpolasjonsmatrisene for forskyvningen ovenfor.

For kreftene og ladningene blir bare uttrykkene der den globale interpolasjonsmatrisen for element nr. m inngår skrevet opp (svarende til ligning 2.64 for potensialet). Kreftene og ladningene i et vilkårlig punkt i element nr. m kan da uttrykkes ved verdien til krefter og ladninger i nodene til strukturen og de globale interpolasjonsfunksjonene for elementet som:

$$
\begin{aligned}
[f^{b(m)}(r,z)] &= [N_{f^b}^{(m)}(r,z)][\hat{f}^b] && (2.69)\\
[t^{(m)}(r,z)] &= [N_t^{(m)}(r,z)][\hat{t}] && (2.70)\\
\rho_e^{(m)}(r,z) &= [N_{\rho_e}^{(m)}(r,z)][\hat{\rho}_e] && (2.71)\\
q^{(m)}(r,z) &= [N_q^{(m)}(r,z)][\hat{q}] && (2.72)
\end{aligned}
$$

med

$$
\begin{aligned}
[\hat{f}^b]^T &= [\hat{f}^b_{r,1}\hat{f}^b_{z,1} \;....\; \hat{f}^b_{r,N}\hat{f}^b_{z,N}] && (2.73)\\
[\hat{t}]^T &= [\hat{t}_{r,1}\hat{t}_{z,1} \;....\; \hat{t}_{r,N}\hat{t}_{z,N}] && (2.74)\\
\hat{q} &= [\hat{q}_1 \;....\; \hat{q}_N] && (2.75)\\
\hat{\rho}_e &= [\hat{\rho}_{e1} \;....\; \hat{\rho}_{eN}] && (2.76)
\end{aligned}
$$

der $[N_{f^b}^{(m)}(r,z)]$ er den globale interpolasjonsmatrisen for volumkraft for element nr. m, $[N_t^{(m)}(r,z)]$ er den globale interpolasjonsmatrisen for overflatekraft for element nr. m, $[N_{\rho_e}^{(m)}(r,z)]$ er den globale interpolasjonsmatrisen for volumladningstetthet for element nr. m, og $[N_q^{(m)}(r,z)]$ er den globale interpolasjonsmatrisen for overflateladningstetthet for element nr. m. Videre er $[\hat{f}^b]$ vektoren av volumkraften i nodene, $[\hat{t}]$ vektoren av overflatekraften i nodene, $\hat{q}$ vektoren av overflateladningstettheten i nodene, og $\hat{\rho_e}$ vektoren av volumladningstettheten i nodene.

Ut fra ligning 2.57- 2.63 og ligning 2.69- 2.76 ser man at interpolasjonsmatrisene for kreftene må være de samme som interpolasjonsmatrisen for forskyvningen, og interpolasjonsmatrisene for ladningene må være den samme som interpolasjonsmatrisene for det elektriske potensialet når de samme interpolasjonsfunksjonene benyttes for alle interpolasjonsmatrisene. Det gir at:

$$
\begin{aligned}
[N_{\rho_e}^{(m)}] &= [N_q^{(m)}] = [N_\phi^{(m)}]\\
[N_t^{(m)}] &= [N_{f^b}^{(m)}] = [N_u^{(m)}]
\end{aligned}
\qquad (2.77)
$$

eller for de lokale matrisene

$$
\begin{aligned}
[N_{\rho_e,l}^{(m)}] &= [N_{q,l}^{(m)}] = [N_{\phi,l}^{(m)}]\\
[N_{t,l}^{(m)}] &= [N_{f^b,l}^{(m)}] = [N_{u,l}^{(m)}]
\end{aligned}
\qquad (2.78)
$$

der (r,z) er sløyfet fordi disse relasjonene vil gjelde i et vilkårlig koordinatsystem.

Innføring av interpolasjonsmatriser for forskyvning og potensial gir den mekaniske tøyningen $[S^{(m)}]$ og det elektriske feltet $[E^{(m)}]$ i ethvert punkt innenfor element nr. m fra ligning 2.39- 2.40 som:

$$
\begin{aligned}
[S^{(m)}] &= [L_u][u^{(m)}] = [L_u][N_u^{(m)}][\hat{u}] = [B_u^{(m)}][\hat{u}] && (2.79)\\
[E^{(m)}] &= -[L_\phi]\phi^{(m)} = -[L_\phi][N_\phi^{(m)}][\hat{\phi}] = -[B_\phi^{(m)}][\hat{\phi}] && (2.80)
\end{aligned}
$$

med $[B]$-matrisene definert som:

$$
\begin{aligned}
[B_u^{(m)}] &= [L_u][N_u^{(m)}] && (2.81)\\
[B_\phi^{(m)}] &= [L_\phi][N_\phi^{(m)}] && (2.82)
\end{aligned}
$$

2.1.5 Definisjon av elementmatrisene

Uttrykkene for den mekaniske forskyvningen i ligning 2.54 og den mekaniske tøyningen og det elektriske feltet i ligning 2.79-2.80 samt uttrykket for kreftene, ladningene og det elektriske potensialet i ligning 2.69- 2.72 settes inn i variasjonsformuleringen i ligning 2.46. For det første leddet i ligning 2.46 får man da [1]:

$$\begin{aligned} \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} [\delta u^{(m)}]^T [\ddot{u}^{(m)}] dV &= \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} ([N_u^{(m)}][\delta \hat{u}])^T ([N_u^{(m)}][\ddot{\hat{u}}]) dV \\ &= [\delta \hat{u}]^T \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} [N_u^{(m)}]^T [N_u^{(m)}] dV [\ddot{\hat{u}}] \end{aligned} \quad (2.83)$$

Her kan den andrederiverte med hensyn på tiden av forskyvningen i *nodene* $[\ddot{\hat{u}}]$ settes utenfor integralet fordi denne er konstant i $V^{(m)}$. Av samme grunn kan variasjonen til forskyvningen i nodepunktene, $[\delta \hat{u}]^T$ også setter utenfor integralet, slik at integralet som inngår i uttrykket i ligning 2.83 er en matrise som defineres som den globale massematrisen for element nr. m, $[M_{uu}^{(m)}]$:

$$[M_{uu}^{(m)}] = \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} [N_u^{(m)}]^T [N_u^{(m)}] dV \quad (2.84)$$

Følgelig kan integralet i ligning 2.83 skrives som:

$$\int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} [\delta u^{(m)}]^T [\ddot{u}]^{(m)} dV = [\delta \hat{u}]^T [M_{uu}^{(m)}][\ddot{\hat{u}}] \quad (2.85)$$

I seksjon 2.3.4 blir også den lokale massematrisen for element nr. m, $[M_{uu,l}^{(m)}]$ definert. For de andre matrisene og vektorene som blir definert nedenfor vil det også senere bli innført globale matriser og vektorer. Det er de globale matrisene og vektorene som regnes ut i programmet FEMP. For dimensjoner på de forskjellige matrisene som blir innført, se tabell 2.4.

Vi gjør det samme med resten av leddene i variasjonsformuleringen i ligning 2.46, som det som ble gjort for det første leddet ovenfor [1]. I den forbindelse blir en rekke matriser som inngår i endelig element ligningene definert:

- Stivhetsmatrisen, global for element nr. m:

  $$\int_{V^{(m)}} [\delta S^{(m)}]^T [c^{E(m)}][S^{(m)}] dV = [\delta \hat{u}]^T [K_{uu}^{(m)}][\hat{u}] \quad (2.86)$$

  Her er $[K_{uu}^{(m)}]$ den globale stivhetsmatrisen for element nr m:

  $$[K_{uu}^{(m)}] = \int_{V^{(m)}} [B_u^{(m)}]^T [c^{E(m)}][B_u^{(m)}] dV \quad (2.87)$$

- Den "piezoelektriske stivhetsmatrisen", global for element nr. m:

  $$\int_{V^{(m)}} [\delta S^{(m)}]^T [e^{(m)}]^T [E^{(m)}] dV = -[\delta \hat{u}]^T [K_{u\phi}^{(m)}][\hat{\phi}] \quad (2.88)$$

  Her er $[K_{u\phi}^{(m)}]$ den globale "piezoelektriske stivhetsmatrisen" for element nr. m:

  $$[K_{u\phi}^{(m)}] = \int_{V^{(m)}} [B_u^{(m)}]^T [e^{(m)}]^T [B_\phi^{(m)}] dV \quad (2.89)$$

  Fra ligning 2.46 finner man også:

  $$\int_{V^{(m)}} [\delta E^{(m)}]^T [e^{(m)}][S^{(m)}] dV = -[\delta \hat{\phi}]^T [K_{\phi u}^{(m)}][\hat{u}] \quad (2.90)$$

  der matrisen $[K_{\phi u}^{(m)}] = [K_{u\phi}^{(m)}]^T$.

- Den ”dielektriske stivhetsmatrisen”, global for element nr. m:

  $$\int_{V^{(m)}} [\delta E^{(m)}]^T [\epsilon^{S(m)}][E^{(m)}]dV \quad = \quad -[\delta\hat{\phi}]^T [K_{\phi\phi}^{(m)}][\hat{\phi}] \tag{2.91}$$

  Her er $[K_{\phi\phi}^{(m)}]$ den globale ”dielektriske stivhetsmatrisen” for element nr. m:

  $$[K_{\phi\phi}^{(m)}] = -\int_{V^{(m)}} [B_\phi^{(m)}]^T [\epsilon^{S(m)}][B_\phi^{(m)}]dV \tag{2.92}$$

  Matrisen $[K_{\phi\phi}]$ er i noen tilfeller ([25],[26]) definert med motsatt fortegn av det som er tilfellet her, noe som får konsekvenser for den endelige formen til endelig element ligningene (ligning 2.120).

- Volum-ladningsvektoren, global for element nr. m:

  $$\int_{V^{(m)}} \delta\phi^{(m)} \rho_e^{(m)} dV \quad = \quad [\delta\hat{\phi}]^T [Q_B^{(m)}] \tag{2.93}$$

  Her er $[Q_B^{(m)}]$ den globale volum-ladningsvektoren for element nr. m definert ved:

  $$[Q_B^{(m)}] = \int_{V^{(m)}} [N_\phi^{(m)}]^T [N_{\rho_e}^{(m)}]dV[\hat{\rho}_e] \tag{2.94}$$

- Volumkraft-vektoren, global for element nr. m:

  $$\int_{V^{(m)}} [\delta u^{(m)}]^T [f^{b(m)}]dV \quad = \quad [\delta\hat{u}]^T [F_B^{(m)}] \tag{2.95}$$

  Her er $[F_B^{(m)}]$ den globale volum-kraft-vektoren for element nr. m definert ved:

  $$[F_B^{(m)}] = \int_{V^{(m)}} [N_u^{(m)}]^T [N_{f^b}^{(m)}]dV[\hat{f}^b] \tag{2.96}$$

- Overflatekraft-vektoren, global for element nr. m:

  $$\int_{S^{(m)}} [\delta u^{(m)}]^T [t^{(m)}]dS \quad = \quad [\delta\hat{u}]^T [F_S^{(m)}] \tag{2.97}$$

  Her er $[F_S^{(m)}]$ den globale overflate-kraft-vektoren for element nr. m definert ved:

  $$[F_S^{(m)}] = \int_{S^{(m)}} [N_u^{(m)}]^T [N_t^{(m)}]dS[\hat{t}] \tag{2.98}$$

  $[F_S^{(m)}]$ vil være lik null for alle elementer som ikke grenser til overflaten til strukturen, siden $S^{(m)}$ ikke eksisterer for disse elementene.

- Overflateladnings-vektoren, global for element nr. m:

  $$\int_{S^{(m)}} \delta\phi^{(m)} q^{(m)} dS \quad = \quad [\delta\hat{\phi}]^T [Q_S^{(m)}] \tag{2.99}$$

  Her er $[Q_S^{(m)}]$ den globale overflate-ladningsvektoren for element nr. m definert ved:

  $$[Q_S^{(m)}] = \int_{S^{(m)}} [N_\phi^{(m)}]^T [N_q^{(m)}]dS[\hat{q}] \tag{2.100}$$

  $[Q_S^{(m)}]$ vil være lik null for alle elementer som ikke grenser til overflaten til strukturen.

- Punktladnings-vektoren, global for element nr. m:

  $$\sum_i \delta\phi^{(m)} Q_i^{p(m)} = [\delta\hat{\phi}]^T [Q_P^{(m)}] \tag{2.101}$$

  Her er $[Q_P^{(m)}]$ den globale punkt-ladningsvektoren for element nr. m definert ved:

  $$[Q_P^{(m)}] = \sum_i [N_\phi^{(m)}]^T Q_i^{p(m)} \tag{2.102}$$

  der $[N_\phi^{(m)}]$ er regnet ut i posisjonen for den konsentrerte punktladningen for hver enkelt punktladning! $[Q_P^{(m)}]$ vil være lik null for alle elementer som ikke grenser til overflaten til strukturen.

- Punktkraft-vektoren, global for element nr. m:

  $$\sum_i [\delta u^{(m)}]^T [F_i^{p(m)}] = [\delta\hat{u}]^T [F_P^{(m)}] \tag{2.103}$$

  Her er $[F_P^{(m)}]$ den globale punkt-kraft-vektoren definert ved:

  $$[F_P^{(m)}] = \sum_i [N_u^{(m)}]^T [F_i^{p(m)}] \tag{2.104}$$

  der $[N_u^{(m)}]^T$ er regnet ut i posisjonen for den konsentrerte punktkraften for hver enkelt punktkraft! $[F_P^{(m)}]$ vil være lik null for alle elementer som ikke grenser til overflaten til strukturen.

2.1.6 Endelig element ligningene for et piezoelektrisk medium

Vi samler leddene som er multiplisert med variasjonen i forskyvningen $[\delta\hat{u}]^T$ og leddene som er multiplisert med variasjonen i potensialet $[\delta\hat{\phi}]^T$ i ligning 2.20 hver for seg. Vi kan her sette $[\delta\hat{u}]^T$, $[\delta\hat{\phi}]^T$, $[\hat{u}]^T$, $[\hat{\phi}]^T$, og $[\ddot{\hat{u}}]$ utenfor summen over elementene fordi det her benyttes en global nodenummerering, slik at:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} dt \Big[[\delta\hat{u}]^T \Big([M_{uu}][\ddot{\hat{u}}] + [K_{uu}][\hat{u}] + [K_{u\phi}][\hat{\phi}] - [F] \Big) &\quad + \\ [\delta\hat{\phi}]^T \Big([K_{\phi u}][\hat{u}] + [K_{\phi\phi}][\hat{\phi}] + [Q] \Big) \Big] &= 0 \end{aligned} \tag{2.105}$$

der

$$[F] = [F_B] + [F_S] + [F_P] \tag{2.106}$$
$$[Q] = [Q_B] + [Q_S] + [Q_P] \tag{2.107}$$

og

$$[M_{uu}] = \sum_m [M_{uu}^{(m)}] \tag{2.108}$$
$$[K_{uu}] = \sum_m [K_{uu}^{(m)}] \tag{2.109}$$
$$[K_{u\phi}] = \sum_m [K_{u\phi}^{(m)}] \tag{2.110}$$

$$
\begin{aligned}
[K_{\phi u}] &= \sum_m [K_{\phi u}^{(m)}] && (2.111)\\
[K_{\phi\phi}] &= \sum_m [K_{\phi\phi}^{(m)}] && (2.112)\\
[F_B] &= \sum_m [F_B^{(m)}] && (2.113)\\
[F_S] &= \sum_m [F_S^{(m)}] && (2.114)\\
[F_P] &= \sum_m [F_P^{(m)}] && (2.115)\\
[Q_B] &= \sum_m [Q_B^{(m)}] && (2.116)\\
[Q_S] &= \sum_m [Q_S^{(m)}] && (2.117)\\
[Q_P] &= \sum_m [Q_P^{(m)}] && (2.118)\\
& && (2.119)
\end{aligned}
$$

Ligning 2.105 må være gyldig for alle mulige variasjoner av forskyvningen $[\delta\hat{u}]^T$ og potensialet $[\delta\hat{\phi}]^T$ over nodepunktene. Følgelig må hvert av uttrykkene $[M_{uu}][\ddot{\hat{u}}] + [K_{uu}][\hat{u}] + [K_{u\phi}][\hat{\phi}] - [F]$ og $[K_{\phi u}][\hat{u}] + [K_{\phi\phi}][\hat{\phi}] + [Q]$ være lik null. Dette gir følgende endelig element formulering for et piezoelektrisk medium uten grensebetingelser:

$$
\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\hat{\phi}} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} F \\ -Q \end{bmatrix}
\qquad (2.120)
$$

Denne ligningen er den samme som er gitt i ligning (3.45) i doktoroppgaven til N. Guo [10], som mye av arbeidet med denne hovedfagsoppgaven er lagt opp etter, med unntak av fortegnet på ladningsvektoren $[Q]$. Fremgangsmåten som er benyttet for å finne endelig element ligningene (ligning 2.120) i [10] avviker noe fra metoden som er benyttet her. Istedenfor å benytte Hamilton's prinsipp for å sette opp variasjonsprinsippet, blir den totale energien tilgjengelig i det piezoelektriske volumet funnet og minimalisert, som beskrevet i [42].

Tilsvarende endelig element ligninger for beskrivelsen av et piezoelektrisk medium som ligning 2.120 finner man også igjen i blant annet [1], [15], [12], [25], [23]. I de fleste av disse referansene har man et positivt fortegn på ladningsvektoren $[Q]$. Det negative fortegnet på ladningsvektoren $[Q]$ i ligning 2.120 skyldes definisjonen av overflateladningstettheten q som $q = -\underline{D}\cdot\underline{n}$ gjort i variasjonsprinsippet i [56], som ble benyttet for å utlede endelig element ligningene i ligningssettet 2.120. Et negativt fortegn på ladningsvektoren $[Q]$ finner man også i [23], der også variasjonsprinsippet fra [56] er benyttet til utledning av endelig element ligningene. I [43], der ladningsvektoren også kommer ut med negativt fortegn på grunn av definisjonen av overflateladningstettheten, er det valgt å multiplisere hele den andre ligningen i ligningssettet 2.120 med (-1), slik at man får et positive fortegn på ladningsvektoren Q, og et negativt fortegn på matrisen $[K_{u\phi}^T]$: $-[K_{u\phi}^T][\hat{u}] + [K_{\phi\phi}][\hat{\phi}] = [Q]$ der i tillegg matrisen $[K_{\phi\phi}]$ er definert med motsatt fortegn.

Det er valgt å beholde det negative fortegnet på vektoren $[Q]$ i fortsettelsen istedenfor å definere ladningsvektoren $[Q]$ som $-[Q_B] - [Q_S] - [Q_P]$ som det er gjort i [1] [15], og som hadde gitt samme fortegn for den elektriske ladningsvektoren som man ser i [10], [1], [12], [25]. Årsaken til dette er at det er mest logisk å ha samme fortegn på ladningsvektoren som man har på de ulike komponentene som ladningsvektoren er sammensatt av, slik at man får en konsistent beskrivelse.

Dersom vi hadde definert overflateladningstettheten q ved $q = \underline{D} \cdot \underline{n}$, hadde vi fått vektoren $[Q]$ som $[Q] = -[Q_B] + [Q_S] + [Q_P]$ og positivt fortegn for $[Q]$ i ligning 2.120. Dette er ikke en naturlig definisjon av ladningsvektoren, siden volumladningsvektoren $[Q_B]$ kommer inn med motsatt fortegn av overflateladningsvektoren.

Til tross for at fortegnet på den elektriske ladningsvektoren blir motsatt av f.eks. i [25], får man allikevel samme fortegn på den elektriske strømmen når denne blir innført i vedlegg A.

For et piezoelektrisk materiale vil den elektriske volumladningstettheten ρ_e være lik null[40], slik at $[Q_B] = 0$.

2.1.7 Sammenligning med et ikke-piezoelektrisk elastisk medium

Sammenligner man ligningssettet i ligning 2.120 for et piezoelektrisk medium med et tilsvarende ligningssett for et ikke-piezoelektrisk elastisk medium [42],

$$[M_{uu}][\ddot{\hat{u}}] + [K_{uu}][\hat{u}] = [F] \tag{2.121}$$

ser man at det er store likheter mellom disse to tilfellene. Ved å sette materialkonstantene i $[e]$-matrisen til null, finner man ligning 2.121 fra ligning 2.120. Den piezoelektriske koblingen kommer altså inn gjennom matrisene $[K_{u\phi}]$. Likheten mellom det piezoelektriske og det ikke-piezoelektriske tilfellet gjør også at det er svært enkelt å benytte samme dataprogrammet til å løse både piezoelektriske og rent elastiske problemer.

2.2 Interpolasjonsfunksjoner og koordinattransformasjoner

I ligning 2.52-2.80 ble det innført interpolasjonsfunksjoner som kartlegger forskyvning og potensial i nodene til et element over på forskyvning og potensial i ethvert punkt i elementet. Det ble ikke spesifisert nærmere hvordan man finner disse. Her blir det sett på hvordan disse kan velges for at det skal være mulig å løse problemet på en effektiv måte. Disse interpolasjonsfunksjonene er selve kjernen i endelig-element prosessen. Det er en rekke forskjellige typer interpolasjonsfunksjoner å velge mellom [42],[5],[37], men nøyaktigheten på løsningen er ikke like god for alle typer interpolasjonsfunksjoner. Det blir her utelukkende sett på interpolasjonsfunksjoner i 2 dimensjoner, siden problemene vi ser på i denne oppgaven er aksesymmetriske og kan modelleres i 2 dimensjoner nå det blir benyttet et sylindrisk koordinatsystem.

Her blir det innført interpolasjonsfunksjoner for to forskjellige aksesymmetriske elementer, et 4-noders isoparametrisk element, og et 8-noders isoparametrisk element. Det 8-noders isoparametriske elementet blir benyttet i doktorgradsavhandlingen til N. Guo [10]. Fremgangsmåten som blir benyttet for å finne interpolasjonsfunksjonene for disse elementene i denne oppgaven, er analog med det som er gjort i [5].

Ved å definere de lokale elementene i et eget (ξ, η)-koordinatsystem, kan man forenkle utregningen av matrisene definert i seksjon 2.1.4. Det er vanlig at ξ og η er mellom -1 og 1. Dette blir f.eks. gjort i [5] [42]. Forbindelsen mellom de globale og lokale variablene for et 4-noders element som blir beskrevet i seksjon 2.2.1 er vist i figur 2.5.

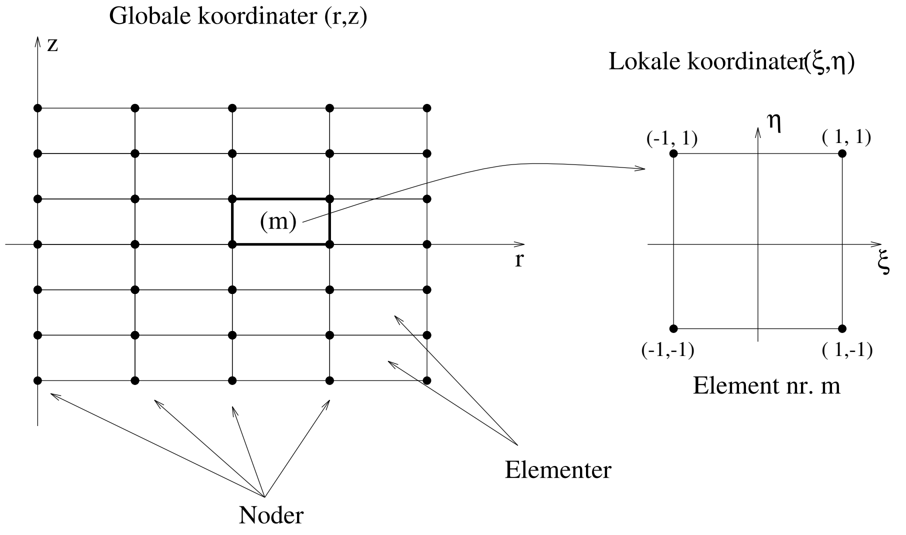
Den enkleste måten å definere interpolasjonsfunksjonene på, er å anta at forskyvningen i et vilkårlig punkt (ξ, η) i elementet varierer som et polynom. Det gir at[5]:

$$u_r^{(m)}(\xi,\eta) = \alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)}\xi + \alpha_3^{(m)}\eta + \alpha_4^{(m)}\xi\eta + \cdots \tag{2.122}$$

$$u_z^{(m)}(\xi,\eta) = \beta_1^{(m)} + \beta_2^{(m)}\xi + \beta_3^{(m)}\eta + \beta_4^{(m)}\xi\eta + \cdots \tag{2.123}$$

der $\alpha_i^{(m)}$ og $\beta_i^{(m)}$ er de generaliserte koordinatene. På matriseform kan dette skrives som[5]:

$$[u^{(m)}] = [\Lambda][\alpha^{(m)}] \tag{2.124}$$



Figur 2.5: Forbindelsen mellom de globale og lokale variablene for et 4-noders element som blir beskrevet i seksjon 2.2.1. 4-noders elementet har noder i $(\pm 1, \pm 1)$ i det lokale koordinatsystemet.

der

$$
\begin{aligned}
[u^{(m)}] &= \begin{bmatrix} u_r^{(m)}(\xi,\eta) \\ u_z^{(m)}(\xi,\eta) \end{bmatrix} && (2.125)\\
[\Lambda] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \eta & \dots & \dots \end{bmatrix} && (2.126)\\
[\alpha^{(m)}]^T &= [\alpha_1^{(m)}\beta_1^{(m)}\alpha_2^{(m)}\beta_2^{(m)}\alpha_3^{(m)}\beta_3^{(m)}......] && (2.127)
\end{aligned}
$$

der matrisene er definert på en noe forskjellig måte enn det som er gjort i [5].

Ut fra de generaliserte koordinatene $\alpha_i^{(m)}$ og $\beta_i^{(m)}$ er vi interessert i å finne uttrykk for interpolasjonsfunksjonene N_i som ble innført i seksjon 2.1.4. I seksjon 2.1.4 ble interpolasjonsfunksjonene $N_i(r,z)$ innført i globale koordinater. Her er vi interessert i å finne interpolasjonsfunksjonene i lokale koordinater, $N_i(\xi,\eta)$, fordi dette gir enklere uttrykk for interpolasjonsfunksjonene. Dette er også den måten det er vanligst å finne interpolasjonsfunksjonene på i litteraturen [42] [5] [37] [11] [10].

Antallet ledd som taes med i rekken avhenger av ønsket nøyaktighet og kompleksitet. Mange ledd vil generelt gi et komplekst problem, som kan være vanskelig å programmere, og i mange tilfeller også ta lang tid å løse numerisk. Dersom man tar med få ledd i rekken, og får et enkelt problem, kan man kompensere for den lavere nøyaktigheten ved å operere med et økt antall elementer [5]. Generelt vil det være optimalt å ha polynomer som er komplette opp til en viss grad, da konvergensraten henger sammen med det komplette polynomet av høyest grad ([11], s. 566), f.eks. $\alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)}\xi + \alpha_3^{(m)}\eta$ (komplett polynom av grad 1 i ξ og η) eller $\alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)}\xi + \alpha_3^{(m)}\eta + \alpha_4^{(m)}\xi\eta + \alpha_5^{(m)}\xi^2 + \alpha_6^{(m)}\eta^2$ (komplett polynom av grad 2 i ξ og η).

Det er også mulig å benytte andre funksjoner enn polynomer for å danne interpolasjonsfunksjonene, som f.eks. trigonometriske funksjoner [33].

Sammenhengen mellom det lokale (ξ,η)-koordinatsystemet og det globale (r,z)-koordinatsystemet taes hånd om av en koordinattransformasjon χ [37]:

$$(r,z) = \chi^{(m)}(\xi,\eta) \tag{2.128}$$

For hvert element må denne transformasjonen være en-til-en, slik at hvert punkt i det "globale elementet" i (r,z)-koordinater svarer til et punkt i det "lokale elementet" i (ξ, η)-koordinater. Særlig er det viktig at grenseflatene i det lokale elementet blir kartlagt på grenseflatene i det "globale elementet" [37].

Den vanligste måten å definere koordinattransformasjonen χ på, er ved den *isoparametriske fremgangsmåten* [11]. Det innebærer at man benytter *interpolasjonsfunksjonene* N_i *til å utføre koordinattransformasjonene*[11]:

$$r(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} r_i^{(m)} N_i(\xi,\eta) \tag{2.129}$$

$$z(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} z_i^{(m)} N_i(\xi,\eta) \tag{2.130}$$

der $(r_i^{(m)}, z_i^{(m)})$, $i = 1 \ldots n$ er de globale koordinatene til de n nodene for element nr. m, og $N_i(\xi,\eta)$ er interpolasjonsfunksjonene som ble innført i seksjon 2.1.4 i *lokale koordinater.* Fordelen med disse isoparametriske elementene er at man kun trenger et sett med funksjoner for *både interpolasjon og koordinattransformasjon.*

Overgangen mellom deriverte med hensyn på lokale og globale variable kan finnes ved å benytte kjerneregelen. Det gir [5]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.131}$$

der $[J]$ er Jacobi-matrisen gitt ved

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.132}$$

Ved innsetting av koordinattransformasjonene i ligning 2.129-2.130 i Jacobi-matrisen i ligning 2.132 får vi Jacobi-matrisen som:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i^{(m)} & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i^{(m)} \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i^{(m)} & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i^{(m)} \end{bmatrix} \tag{2.133}$$

De deriverte med hensyn på de globale variablene uttrykt ved hjelp av de deriverte med hensyn på de lokale variablene finner man ut fra ligning 2.131 som[5]:

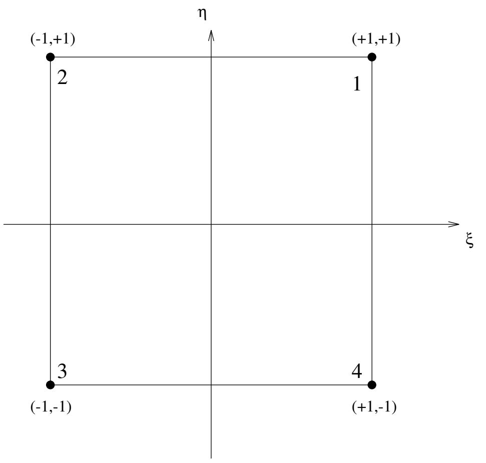
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.134}$$

Jacobi-determinanten $|J|$ benyttes også til utregning av volum- og overflate-integralene i massematrisen $[M_{uu}]$, stivhetsmatrisene $[K_{uu}]$, $[K_{u\phi}]$, $[K_{\phi u}]$, $[K_{\phi\phi}]$ og de andre matrisene som ble definert i seksjon 2.1.6. Dette er beskrevet i seksjon 2.3.

2.2.1 Et enkelt 2D 4-noders isoparametrisk element

Vi viser nå hvordan vi kommer frem til interpolasjonsfunksjonene i et av de enkleste tilfellene, med et 4-noders rektangulært element, med noder i punktene $(\xi_1, \eta_1) \ldots (\xi_4, \eta_4)$, som for enkelhets skyld (og uten tap av generalitet) blir valgt til $(\pm 1, \pm 1)$ [5] (se figur 2.6). Dette er gjort i f.eks. [5] og [42].

For å finne interpolasjon som ble innført i seksjon 2.1.4, må forskyvningen i et vilkårlig punkt innenfor elementet uttrykkes ved forskyvningen i elementets noder (ligning 2.47- 2.48). Følgelig



Figur 2.6: 4-noders element i et lokalt koordinatsystem med hjørner i $(\pm 1, \pm 1)$. Nodedummereringen er gjort på samme måte som i [42].

må de generaliserte koordinatene som ble innført i ligning 2.122- 2.124 uttrykkes ved forskyvningen til nodene til elementet.

For at man skal kunne finne de generaliserte koordinatene $[\alpha^{(m)}]$ uttrykt ved forskyvningen i nodene $[\hat{u}^{(m)}]$, må antallet generaliserte koordinater være det samme som antallet noder [5]. Følgelig antar vi nå at vi tar med 4 ledd i rekken i ligning 2.122-2.123. Matrisene i ligning 2.124 vil da ha følgende form:

$$[u^{(m)}] = \begin{bmatrix} u_r^{(m)}(\xi,\eta) \\ u_z^{(m)}(\xi,\eta) \end{bmatrix} \tag{2.135}$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \tag{2.136}$$

$$[\alpha^{(m)}]^T = [\alpha_1^{(m)}\beta_1^{(m)}\alpha_2^{(m)}\beta_2^{(m)}\alpha_3^{(m)}\beta_3^{(m)}\alpha_4^{(m)}\beta_4^{(m)}] \tag{2.137}$$

Ved å sette inn koordinatene for den første noden, (ξ_1, η_1) i ligning 2.124 får vi:

$$\begin{aligned}[u^{(m)}(\xi_1,\eta_1)] &= [u^{(m)}(1,1)] = \begin{bmatrix} \hat{u}_{r,1}^{(m)}\hat{u}_{z,1}^{(m)} \end{bmatrix}[\alpha^{(m)}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_1 & 0 & \eta_1 & 0 & \xi_1\eta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \xi_1 & 0 & \eta_1 & 0 & \xi_1\eta_1 \end{bmatrix}[\alpha^{(m)}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}[\alpha^{(m)}] \end{aligned} \tag{2.138}$$

Innsetting av koordinatene for alle 4 nodene i ligning 2.124 gir da [5]

$$[\hat{u}^{(m)}] = [A^{(m)}][\alpha^{(m)}] \tag{2.139}$$

eller

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{r,1}^{(m)} \\ \hat{u}_{z,1}^{(m)} \\ \hat{u}_{r,2}^{(m)} \\ \hat{u}_{z,2}^{(m)} \\ \hat{u}_{r,3}^{(m)} \\ \hat{u}_{z,3}^{(m)} \\ \hat{u}_{r,4}^{(m)} \\ \hat{u}_{z,4}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{(m)} \\ \beta_1^{(m)} \\ \alpha_2^{(m)} \\ \beta_2^{(m)} \\ \alpha_3^{(m)} \\ \beta_3^{(m)} \\ \alpha_4^{(m)} \\ \beta_4^{(m)} \end{bmatrix} \tag{2.140}$$

som kan løses med hensyn på de generaliserte koordinatene ved:

$$[\alpha^{(m)}] = [A^{(m)}]^{-1}[\hat{u}^{(m)}] \tag{2.141}$$

Ligning 2.141 gir altså et uttrykk for de generaliserte koordinatene uttrykt ved forskyvningen i nodene til elementet.

Dette uttrykket settes inn i ligning 2.124, som gir:

$$[u^{(m)}] = [\Lambda][A^{(m)}]^{-1}[\hat{u}^{(m)}] \tag{2.142}$$

Ved sammenligning med ligning 2.52 ser man at den lokale interpolasjonsmatrisen for element nr. m er gitt ved:

$$\begin{aligned} [N_{u,l}^{(m)}] &= [\Lambda][A^{(m)}]^{-1} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\left[\begin{matrix} (1+\xi)(1+\eta) & 0 & (1-\xi)(1+\eta) & 0 \\ 0 & (1+\xi)(1+\eta) & 0 & (1-\xi)(1+\eta) \end{matrix} \right. \\ &\qquad \left. \begin{matrix} (1-\xi)(1-\eta) & 0 & (1+\xi)(1-\eta) & 0 \\ 0 & (1-\xi)(1-\eta) & 0 & (1+\xi)(1-\eta) \end{matrix} \right] \end{aligned} \tag{2.143}$$

der inverteringen av matrisen $[A^{(m)}]$ er enkel å utføre i f.eks. MATLAB.

Dersom man definerer interpolasjonsfunksjonene $N_1 \ldots N_4$ ved $N_i = 1/4(1+\xi_0)(1+\eta_0)$ [42], med $\xi_0 = \xi \cdot \xi_i$ og $\eta_0 = \eta \cdot \eta_i$, kan man skrive den lokale forskyvningsinterpolasjonsmatrisen kompakt som [42]

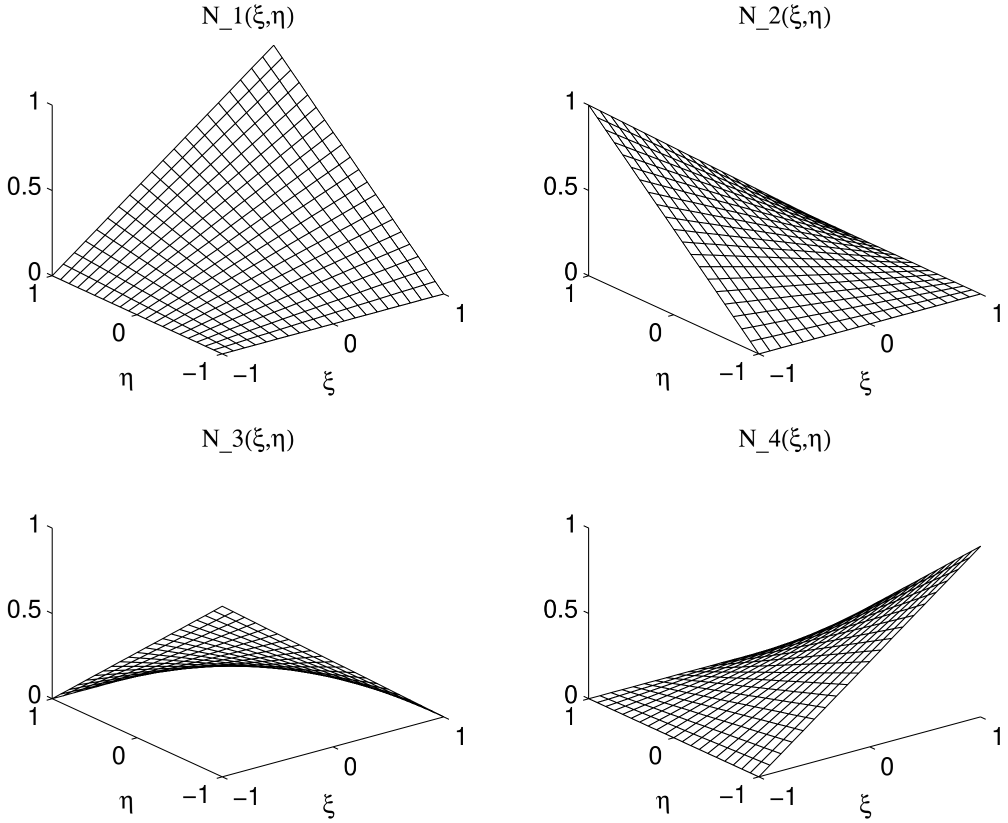
$$[N_{u,l}^{(m)}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{2.144}$$

Tilsvarende lokale interpolasjonsmatrisen for potensialet blir da (fra ligning 2.68):

$$[N_{\phi,l}^{(m)}] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \tag{2.145}$$

Fra ligning 2.78 finner man da uttrykkene for interpolasjonsmatrisene for krefter og ladninger.

Interpolasjonsfunksjonene for det 4-noders isoparametriske elementet er plottet i figur 2.7. Vi ser at en viktig egenskap ved interpolasjonsfunksjonene N_i er at for $(\xi, \eta) = (\xi_j, \eta_j)$ må $N_i = 0$ for $i \neq j$ og $N_i = 1$ for $i = j$. Dette skyldes at interpolasjonsfunksjonene må gi riktig verdi for forskyvningen (og potensialet) i hver av nodene til elementet [5]. Denne egenskapen ved interpolasjonsfunksjonene kan benyttes til å sette opp interpolasjonsfunksjoner for andre elementer direkte ved inspeksjon, uten å gå gjennom den kompliserte fremgangsmåten som er skissert ovenfor [11].



Figur 2.7: Interpolasjonsfunksjonene $N_1 \ldots N_4$ for et 4-noders elementet i et lokalt koordinatsystem med hjørner i $(\pm 1, \pm 1)$.

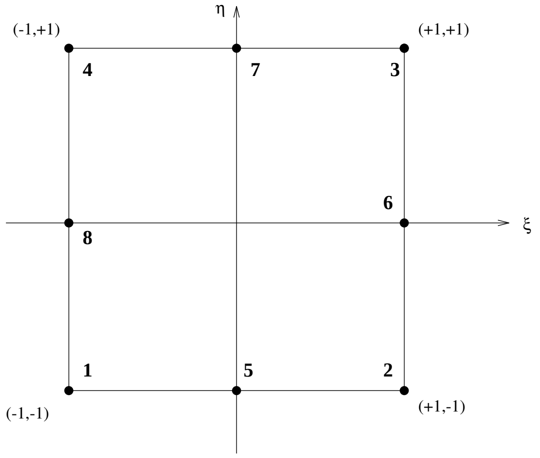
2.2.2 Et 2D 8-noders isoparametrisk element

Det 4-noders isoparametriske elementet som er beskrevet ovenfor, kan i mange tilfeller gi tilfredsstillende resultater, dersom man benytter tilstrekkelig mange elementer i beskrivelsen av strukturen. Fordelen med dette elementet er at det er enkelt å bruke. Men for større beregninger vil det ofte lønne seg å bruke mer komplekse elementer, der variasjonen i de variable(forskyvning og potensial) innenfor hvert enkelt element interpoleres bedre enn for 4-noders elementet [11]. I 4-noders elementet interpoleres det kun lineært langs kantene. I det 8-noders isoparametriske, kvadratiske elementet har vi en kvadratisk variasjon langs kantene. Det betyr at elementet bedre kan beskrive variasjonene i forskyvningen og potensialet innenfor elementet ut fra forskyvningen og potensialet i nodene. Dette gjør at vi får økt konvergensraten [42]. Det elementet vi skal se på her tilhører serendipity familien av elementer ([42] [11]), og uttrykkene for interpolasjonsfunksjonene blir vanligvis funnet ved inspeksjon ([11] s. 620). Det er også mulig å finne interpolasjonsfunksjonene ved å benytte samme fremgangsmåte som for 4-noders elementet i seksjon 2.2.1. Dette er det elementet vi i hovedsak vil benytte i beregningene denne oppgaven. I figur 2.8 ser vi hvordan elementet ser ut i et lokalt koordinatsystem.

Ved inspeksjon finner man at interpolasjonsfunksjonene kan skrives opp som [11] [42]:

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1) &&, \quad i = 1,2,3,4 \\ N_i &= \tfrac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0) &&, \quad i = 5,7 \\ N_i &= \tfrac{1}{2}(1+\xi_0)(1-\eta^2) &&, \quad i = 6,8 \end{aligned} \tag{2.146}$$

der (ξ_i, η_i) er nodene definert i figur 2.8, og $\xi_0 = \xi \cdot \xi_i$ og $\eta_0 = \eta \cdot \eta_i$ som tidligere. De 8

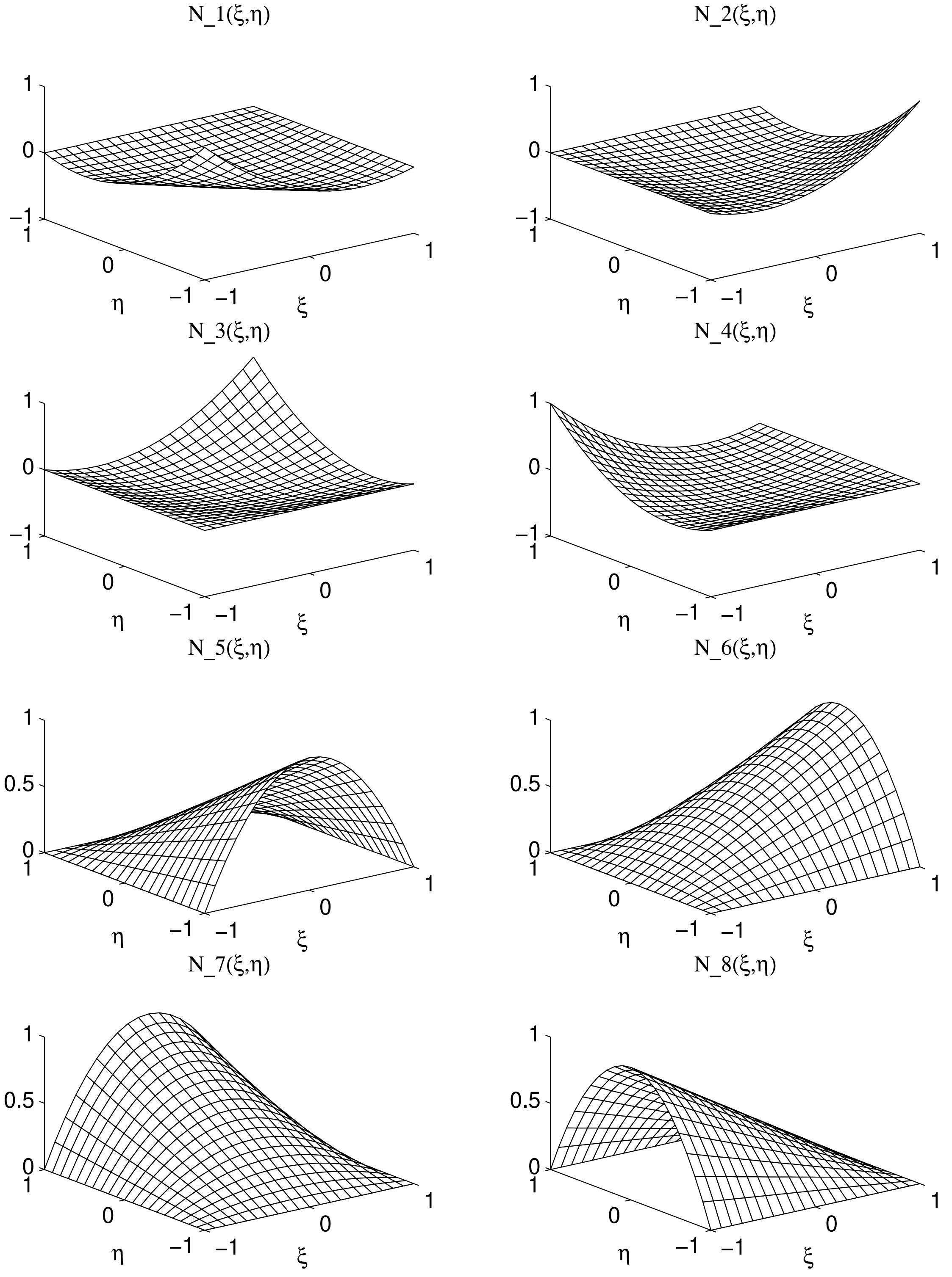


Figur 2.8: 8-noders element i et lokalt koordinatsystem med hjørner i $(\pm 1, \pm 1)$. Det er benyttet samme nodenummerering som i [42]. Dette er årsaken til at nodenummereringen er annerledes enn for det 4-noders isoparametriske elementet.

interpolasjonsfunksjonene er plottet i figur 2.9. På grunn av den andre ordens variasjonen vil disse interpolasjonsfunksjonene kunne gjengi en variasjon i forskyvningen eller potensialet mye bedre enn interpolasjonsfunksjonene for 4-noders elementet i figur 2.7.

Interpolasjonsfunksjonene kan skrives opp på flere måter. Ved implementering kan det være enklere å benytte formen gitt i [5], figur 5.5, side 200.

Dette er også et isoparametrisk element, slik at koordinattransformasjonen er gitt ved ligning 2.129-2.130.



N_1(ξ,η)

N_2(ξ,η)

N_3(ξ,η)

N_4(ξ,η)

N_5(ξ,η)

N_6(ξ,η)

N_7(ξ,η)

N_8(ξ,η)

Figur 2.9: Interpolasjonsfunksjonene for et 8-noders elementet i et lokalt koordinatsystem med hjørner i $(\pm 1, \pm 1)$.

2.3 Utregning av matrisene i det aksesymmetriske tilfellet

2.3.1 Jacobimatrisen

For å regne ut integralene i uttrykkene for de forskjellige matrisene som inngår i endelig-element ligningene for et piezoelektrisk medium, trenger man som tidligere nevnt Jacobi-matrisen for koordinattransformasjonen. I det aksesymmetriske tilfellet benytter vi et (r,z)-koordinatsystem som bli dreiet om z-aksen for å dekke hele det 3-dimensjonale rommet.

Fra ligning 2.134 finner vi de deriverte av interpolasjonsfunksjonene med hensyn på de globale variable som inngår i $[B]$-matrisene som:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.147}$$

der $[J]$ er Jacobi-matrisen definert i ligning 2.133.

2.3.2 $[B]$-matrisene

Vi trenger også matrisene $[B_u^{(m)}]$ og $[B_\phi^{(m)}]$, som er gitt ut fra ligning 2.79-2.80 som

$$[B_u^{(m)}] = [L_u][N_u^{(m)}] \tag{2.148}$$

$$[B_\phi^{(m)}] = [L_\phi][N_\phi^{(m)}] \tag{2.149}$$

I praksis benytter vi de lokale variantene av B-matrisene, med subscript l, der kun de kolonnene som svarer til noder som tilhører elementet er tatt med:

$$[B_{u,l}^{(m)}] = [L_u][N_{u,l}^{(m)}] \tag{2.150}$$

$$[B_{\phi,l}^{(m)}] = [L_\phi][N_{\phi,l}^{(m)}] \tag{2.151}$$

Ut fra definisjonen av derivasjonsoperatormatrisene i ligning 2.41- 2.42 finner vi nå [5]

$$[B_{u,l}^{(m)}] = [B_{u,l,1}^{(m)} B_{u,l,2}^{(m)} \dots B_{u,l,n}^{(m)}] \tag{2.152}$$

med

$$[B_{u,l,i}^{(m)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{2.153}$$

der n er antallet noder i elementet vi benytter. Interpolasjonsfunksjonene derivert med hensyn på de globale variable r og z finner vi ut fra ligning 2.147.

På tilsvarende måte finner vi at

$$[B_{\phi,l}^{(m)}] = [B_{\phi,l,1}^{(m)} B_{\phi,l,2}^{(m)} \dots B_{\phi,l,n}^{(m)}] \tag{2.154}$$

med

$$[B_{\phi,l,i}^{(m)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.155}$$

2.3.3 Konstantmatrisene

Konstantmatrisene for et piezoelektriske materialet som har samme form på konstantmatrisene som et hexgonalt krystall i klassen 6mm er definert i ligning 2.43- 2.45 for det to-dimensjonale aksesymmetriske tilfellet. Denne formen på konstantmatrisene vil vi altså ha for et piezokeramisk materiale

Vi vil i hovedsak benytte materialet PZT5A [62] i de piezoelektriske strukturene vi simulerer. Årsaken til dette er at det har blitt jobbet en god del med PZT5A ved Universitetet i Bergen, og Christian Michelsen Research, samt at det er dette materialet som hovedsakelig er benyttet av N.Guo i hans doktoravhandling [10] som det blir sammenlignet en del med i denne oppgaven. For materialet PZT5A får konstantmatrisene følgende form:

$$[c^E] = \begin{bmatrix} 12.1 & 7.54 & 7.52 & 0 \\ 7.54 & 12.1 & 7.52 & 0 \\ 7.52 & 7.52 & 11.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.26 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} N/m^2 \tag{2.156}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 12.3 \\ -5.4 & -5.4 & 15.8 & 0 \end{bmatrix} \; C/m^2 \tag{2.157}$$

$$[\epsilon^S] = \begin{bmatrix} 916 & 0 \\ 0 & 830 \end{bmatrix} \cdot \epsilon_0 \tag{2.158}$$

der $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} F/m$. I tillegg er massetettheten $\rho = 7750 kg/m^3$ og den mekaniske Q-faktoren gitt som $Q_m = 75$.

For problemer der det ikke opptrer piezoelektriske effekter i materialet, settes konstantmatrisen $[e]$ til null.

2.3.4 Stivhetsmatriser og massematriser

Vi har nå funnet uttrykk for alle matrisene som trengs for å regne ut massematrisen og de forskjellige stivhetsmatrisene. Ut fra ligning 2.84 finner vi nå

$$[M_{uu}^{(m)}] = \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} [N_u^{(m)}]^T [N_u^{(m)}] dV \tag{2.159}$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \rho^{(m)} [N_u^{(m)}(\xi,\eta)]^T [N_u^{(m)}(\xi,\eta)] 2\pi r(\xi,\eta) |J(\xi,\eta)| d\xi d\eta \tag{2.160}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_{gauss}} \rho^{(m)} [N_{u,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)]^T [N_{u,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)] 2\pi r(\xi_k,\eta_k) |J(\xi_k,\eta_k)| W_k \tag{2.161}$$

der det blir benyttet Gauss-integrasjon for å regne ut integralet, og summen er over N_{gauss} Gauss-integrasjonspunkter. (ξ_k, η_k) er koordinatene til Gauss-integrasjonspunktene, W_k er vekten for gaussintegrasjonspunkt nr. k, og $|J(\xi_k, \eta_k)|$ er Jacobi-determinanten utregnet i punktet (ξ_k, η_k). I integralet i ligning 2.159 integreres det over volumet $V^{(m)}$ i globale variable. I ligning 2.160 er det benyttet at $dV = 2\pi r(\xi,\eta)|J(\xi,\eta)|d\xi d\eta$, der det integreres mellom -1 og 1 for ξ og η. Fra koordinattransformasjonen i ligning 2.129 finner man at $r(\xi_k, \eta_k)$ i ligning 2.161 kan regnes ut som $r(\xi_k, \eta_k) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi_k, \eta_k) r_i$, der r_i er r-koordinaten for node nr. i i elementet, og n er antallet noder for elementet. For detaljer om gaussintegrasjon, se f.eks. [42] eller [5]. I tabell 2.2 er det vist hvilke gaussintegrasjonspunkter som benyttes for 3x3 gauss-integrasjon, som f.eks. benyttes for det 8-noders isoparametriske elementet ved full integrasjon.

I praksis er det tungvint å regne med den globale massematrisen for element nr. m som er gitt i ligning 2.161. For en struktur som består av mange noder, vil $[M_{uu}^{(m)}]$ hovedsakelig inneholde null'er, fordi $[N_u^{(m)}]$ inneholder null'er for alle nodene i strukturen som ikke tilhører element nr. m (se seksjon 2.1.4). Matrisen som blir utregnet i praksis er derfor den *lokale massematrisen for element nr.* m,$[M^{(m)}_{uu,l}]$, som er regnet ut ved hjelp av de lokale interpolasjonsmatrisene for element nr. m, $[N^{(m)}_{u,l}]$:

$$\begin{aligned}
[M^{(m)}_{uu,l}] &= \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} [N^{(m)}_{u,l}]^T [N^{(m)}_{u,l}] dV \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \rho^{(m)} [N^{(m)}_{u,l}(\xi,\eta)]^T [N^{(m)}_{u,l}(\xi,\eta)] 2\pi r(\xi,\eta) |J(\xi,\eta)| d\xi d\eta \\
&= \sum_{k=1}^{N_{gauss}} \rho^{(m)} [N^{(m)}_{u,l}(\xi_k,\eta_k)]^T [N^{(m)}_{u,l}(\xi_k,\eta_k)] 2\pi \left(\sum_{i=1}^{n} N_i(\xi_k,\eta_k) r_i \right) |J(\xi_k,\eta_k)| W_k \quad (2.162)
\end{aligned}$$

Hver rekke og søyle i den lokale massematrisen for element nr. m $[M^{(m)}_{uu,l}]$ og den globale massematrisen for element nr. m $[M^{(m)}_{uu}]$ kan ut fra definisjonen på disse i ligning 2.161 og ligning 2.162 assosieres med en frihetsgrad i systemet [5]. I dette tilfellet representerer frihetsgradene forskyvningen av en bestemt node i en koordinatretning.

I den lokale massematrisen vil rekke/søyle nr. 1 svare til forskyvningen av node nr. 1 i elementet med lokal nodenummerering i r-retningen, og rekke/søyle nr. 2 svare til forskyvningen av node nr. 1 i elementet med lokal nodenummerering i z-retningen. Tilsvarende vil rekke/søyle nr. $2 * i - 1$ svare til forskyvningen av node nr. i i elementet i r-retningen, og rekke/søyle nr. $2 * i$ svare til forskyvningen av node nr. i i elementet i z-retningen. I den globale massematrisen vil rekke/søyle nr. $2 * i - 1$ svare til forskyvningen av node nr. i i hele strukturen med global nodenummerering i r-retningen, og rekke/søyle nr. $2 * i$ svare til forskyvningen av node nr. i i hele strukturen med global nodenummerering i z-retningen.

I praksis blir den lokale massematrisen $[M^{(m)}_{uu,l}]$ for hvert enkelt element regnet ut. Den globale massematrisen for hvert element blir deretter funnet ved å flytte hvert enkelt matrise-element i den lokale massematrisen over i den globale massematrisen på en slik måte at matrise-elementet er assosiert med de samme frihetsgradene i den globale massematrisen som i den lokale massematrisen. Den globale massematrisen for hele strukturen $[M_{uu}]$ blir så regnet ut som summen av de globale massematrisene for alle elementene ved hjelp av ligning 2.108. Det samme gjelder for stivhetsmatrisen, den "piezoelektrisk stivhetsmatrisen", den "dielektriske stivhetsmatrisen", og matrisene for ladninger og krefter. Alle disse blir gitt på lokal form nedenfor. Siden matrisene som inngår i ligningssystemet 2.120 er de globale matrisene for hele strukturen, må man transformere de lokale matrisene for hvert enkelt element over på global form for elementet som beskrevet for massematrisen ovenfor, og deretter samle alle de globale elementmatrisene til globale matriser for hele strukturen (ligning 2.108- 2.118).

Stivhetsmatrisen finner vi på tilsvarende måte som

$$\begin{aligned}
[K^{(m)}_{uu,l}] &= \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}_{u,l}]^T [c^{E(m)}][B^{(m)}_{u,l}] dV \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B^{(m)}_{u,l}(\xi,\eta)]^T [c^{E(m)}][B^{(m)}_{u,l}(\xi,\eta)] 2\pi r(\xi,\eta) |J(\xi,\eta)| d\xi d\eta \\
&= \sum_{k=1}^{N_{gauss}} [B^{(m)}_{u,l}(\xi_k,\eta_k)]^T [c^{E(m)}][B^{(m)}_{u,l}(\xi_k,\eta_k)] 2\pi r(\xi_k,\eta_k) |J(\xi_k,\eta_k)| W_k \quad (2.163)
\end{aligned}$$

der man benytter Gauss-integrasjon på samme måte som ovenfor for å utføre den numeriske beregningen av dobbeltintegralet. Uttrykket for matrisen $[K^{(m)}_{uu}]$ blir ikke skrevet opp her for å spare plass, men relasjonen mellom $[K^{(m)}_{uu}]$ og $[K^{(m)}_{uu,l}]$ er den samme som relasjonen mellom den

Tabell 2.2: Gauss-integrasjonspunkter for 3x3 gauss-integrasjon ($N_{gauss} = 9$) som blir benyttet med det 8-noders isoparametriske elementet regnet ut ved hjelp av et Matlab-program (grule/grule2d laget av H.Wilson) hentet fra Mathwork sin ftp-server (http://www.mathworks.com/). Algoritmen som benyttes er beskrevet i [67] s.365. Ytterligere informasjon om Gauss-integrasjon kan man finne i [42] [5].

k	ξ_k	η_k	W_k
1	-0.77459666924148352	-0.77459666924148352	0.30864197530864163
2	0.00000000000000000	-0.77459666924148352	0.49382716049382686
3	0.77459666924148352	-0.77459666924148352	0.30864197530864163
4	-0.77459666924148352	0.00000000000000000	0.49382716049382686
5	0.00000000000000000	0.00000000000000000	0.79012345679012341
6	0.77459666924148352	0.00000000000000000	0.49382716049382686
7	-0.77459666924148352	0.77459666924148352	0.30864197530864163
8	0.00000000000000000	0.77459666924148352	0.49382716049382686
9	0.77459666924148352	0.77459666924148352	0.30864197530864163

lokale og globale massematrisen for element nr. m som ble diskutert ovenfor. Det samme gjelder uttrykkene for de lokale matrisene som blir definert nedenfor.

Uttrykk for de "piezoelektriske" stivhetsmatriser og "dielektrisk" stivhetsmatrise er:

$$[K_{\phi u,l}^{(m)}] = \sum_{k=1}^{N_{gauss}} [B_{\phi,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)]^T [e^{(m)}][B_{u,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)] 2\pi r(\xi_k,\eta_k)|J(\xi_k,\eta_k)|W_k \tag{2.164}$$

$$[K_{u\phi,l}^{(m)}] = [K_{\phi u,l}^{(m)}]^T \tag{2.165}$$

$$[K_{\phi\phi,l}^{(m)}] = -\sum_{k=1}^{N_{gauss}} [B_{\phi,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)]^T [\epsilon^{S(m)}][B_{\phi,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)] 2\pi r(\xi_k,\eta_k)|J(\xi_k,\eta_k)|W_k \tag{2.166}$$

På tilsvarende måte kan man også regne ut volumladningsvektoren, volumkraftvektoren, punktladningsvektoren og punktkraftvektoren. Disse blir ikke benyttet direkte i implementeringen, men er allikevel tatt med her for at beskrivelsen skal være mest mulig fullstendig:

$$[F_{B,l}^{(m)}] = \sum_{k=1}^{N_{gauss}} [N_{u,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)]^T [N_{f^b,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)][\hat{f}^b] 2\pi r(\xi_k,\eta_k)|J(\xi_k,\eta_k)|W_k \tag{2.167}$$

$$[Q_{B,l}^{(m)}] = \sum_{k=1}^{N_{gauss}} [N_{\phi,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)]^T [N_{\rho_e,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)][\hat{\rho}_e] 2\pi r(\xi_k,\eta_k)|J(\xi_k,\eta_k)|W_k \tag{2.168}$$

$$[F_{P,l}^{(m)}] = \sum_i [N_u^{(m)}(\xi_i,\eta_i)]^T [F_i^{p(m)}(\xi_i,\eta_i)] \tag{2.169}$$

$$[Q_{P,l}^{(m)}] = \sum_i [N_\phi^{(m)}(\xi_i,\eta_i)]^T Q_i^{p(m)}(\xi_i,\eta_i) \tag{2.170}$$

der punktkreftene virker i punktene (ξ_i, η_i) og punktladningene er i punktene (ξ_i, η_i).

For overflatekraftvektoren og overflateladningsvektoren må det benyttes en-dimensjonal gauss-integrasjon [5] med $N_{gauss,S}$ Gauss-integrasjonspunkter langs hver av flatene på overflaten (som gjort i [5], s.211-212). Disse vektorene vil kun være forskjellig fra null for elementer som har overflate på overflaten S til strukturen. Det vil være naturlig å benytte 3 punkts Gauss-integrasjon som for den to-dimensjonale Gauss-integrasjonen, slik at $N_{gauss,S} = 3$. For de elementene vi ser på vil enten ξ eller η være konstant under integrasjonen ($\xi = \pm 1$ eller $\eta = \pm 1$). For den lokale overflateladningsvektoren for element nr. m får vi da:

$$\begin{aligned}
[Q_{S,l}^{(m)}] &= \int_{S^{(m)}} [N_{\phi,l}^{(m)}]^T [N_{q,l}^{(m)}] dS[\hat{q}] && (2.171)\\
&= \int_{-1}^{1} [N_{\phi,l}^{(m)}(\xi)]^T [N_{q,l}^{(m)}(\xi)][\hat{q}] 2\pi r(\xi)|J_S(\xi_k)|d\xi && (2.172)
\end{aligned}$$

for kantene der η er konstant lik 1 eller -1, og

$$[Q_{S,l}^{(m)}] = \int_{-1}^{1} [N_{\phi,l}^{(m)}(\eta)]^T [N_{q,l}^{(m)}(\eta)][\hat{q}] 2\pi r(\eta)|J_S(\eta_k)|d\eta \qquad (2.173)$$

for kantene der ξ er konstant lik 1 eller -1. Her vil noen av interpolasjonsfunksjonene være null for hele integrasjonsområdet. $|J_S|$ er Jacobi-determinanten for det 1-dimensjonale tilfellet, og er definert som([5] s.212):

$$|J_S(l)| = \sqrt{\frac{\partial r}{\partial l} + \frac{\partial z}{\partial l}} \qquad (2.174)$$

der l er enten ξ eller η. I vårt tilfelle vil $J_S(l)$ alltid være gitt som enten $|J_S(\xi)| = \frac{\partial r}{\partial \xi}$ eller $|J_S(\eta)| = \frac{\partial z}{\partial \eta}$.

Når Gauss-integrasjonen utføres får man da:

$$\begin{aligned}
[Q_{S,l}^{(m)}] &= \int_{-1}^{1} [N_{\phi,l}^{(m)}(l)]^T [N_{q,l}^{(m)}(l)][\hat{q}] 2\pi r(l)|J_S(l)|dl && (2.175)\\
&= \sum_{k=1}^{N_{gauss,S}} [N_{\phi,l}^{(m)}(l_k)]^T [N_{q,l}^{(m)}(l_k)][\hat{q}] 2\pi r(l_k)|J_S(l_k)|W_k && (2.176)\\
& && (2.177)
\end{aligned}$$

der l settes inn for ξ når η er konstant, eller l settes inn for η når ξ er konstant. l_k er her de en-dimensjonale Gauss-integrasjonspunktene, og W_k Gauss-vekter for en-dimensjonal Gauss-integrasjon [5].

Tilsvarende blir den lokale overflatekraftvektoren for element nr. m:

$$[F_{S,l}^{(m)}] = \sum_{k=1}^{N_{gauss,S}} [N_{u,l}^{(m)}(l_k)]^T [N_{t,l}^{(m)}(l_k)][\hat{t}] 2\pi r(l_k)|J_S(l_k)|W_k \qquad (2.178)$$

Nå har vi skissert hvordan man regner ut alle matrisene som trengs for å sette opp ligningssystemet 2.120 for et aksesymmetrisk problem.

2.4 Utregning av matrisene i det 3-dimensjonale tilfellet

I det 3-dimensjonale tilfellet får vi en del små forandringer i forhold til det aksesymmetriske problemet som vi gikk gjennom ovenfor. Dette er ikke implementert i FEMP. Ligning 2.147 blir utvidet til tre koordinater ved [42]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (2.179)$$

slik at Jacobimatrisen nå blir gitt ved

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{2.180}$$

Matrisen $[L_u]$ vil nå være gitt ved ligning 2.21, og matrisen $[L_\phi]$ vil være gitt ved ligning 2.22, slik at vi får[42]

$$[B^{(m)}_{u,l,i}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.181}$$

$$[B^{(m)}_{\phi,l,i}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.182}$$

Konstantmatrisene for det piezoelektriske materialet er i det 3-dimensjonale tilfellet $[c^E]$ (6x6-matrise), $[e]$ (3x6-matrise) og $[\epsilon^S]$ (3x3-matrise), som gitt i ligning 2.29-2.31. Utregningen av massematrise og stivhetsmatriser er helt analog med det aksesymmetriske tilfellet, med den forskjellen at man nå benytter 3-dimensjonal Gauss-integrasjon for å regne ut integralene[42].

2.5 Grensebetingelser

For å anvende ligning 2.120 som gjelder for et generelt piezoelektrisk medium for å simulere en transduser, må vi gi en del elektriske og mekaniske grensebetingelser [10]. Dette er f.eks. beskrevet i [10] [49] [27]. Metoden som blir benyttet for å gi grensebetingelsene her er analog med det som blir gjort i [27].

For et piezoelektrisk materiale vil den elektriske volumladningstettheten ρ_e være omtrent lik null. Videre blir det antatt at vi ikke har noen punktladninger Q^p_i på overflaten, at volumkraften $\underline{f}^b$ kan settes til null, og at det ikke virker noen punktkrefter $\underline{F}^p_i$ på overflaten. Det gir at:

$$[Q_B] = [Q_P] = 0 \tag{2.183}$$

$$[F_B] = [F_P] = 0 \tag{2.184}$$

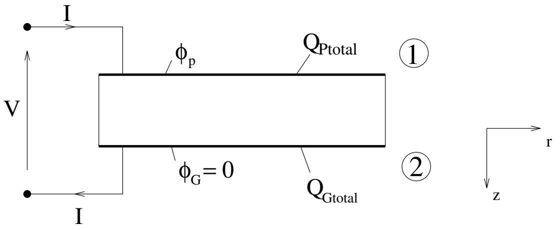
slik at $[Q] = [Q_S]$ og $[F] = [F_S]$.

På en piezoelektrisk transduser har vi to eller flere elektrodebelagte områder. Hvert av disse områdene er ekvipotensielle. Vi antar her at vi ser på en piezoelektrisk struktur med to forskjellige elektroder, som vist for en piezoelektrisk skive i figur 2.10a. I figur 2.10b er det vist hvordan denne skiven kan modelleres når man benytter endelig element metoden.

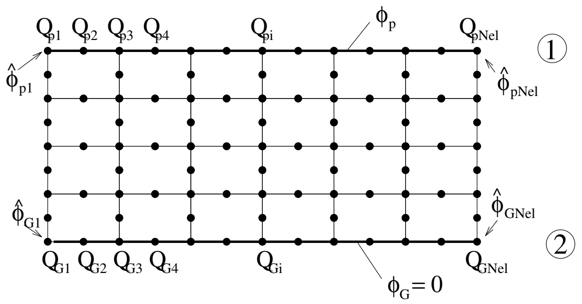
Vi ser nå på en spesiell elektrode som er dekket med N_{el} noder, som f.eks. elektroden nr.1 i figur 2.10, med *ladning* Q_{Ptotal} *og potensial* ϕ_p. Potensialet må være det samme i alle de N_{el} nodene på elektroden [49]. Vi benytter en elektrodenummerering, der vi nummererer nodene på elektrode nr. 1 fra 1 til N_{el}. Da vil[49][27]:

$$\hat{\phi}_{p1} = \hat{\phi}_{p2} = \ldots = \hat{\phi}_{pN_{el}} = \phi_p \tag{2.185}$$

a) En piezoelektrisk skive



b) Endelig element modell av skiven



Figur 2.10: I a) er transduseren som skal simuleres vist. I b) er endelig element modellen av transduseren vist. Elektrode nr. 1 har potensial ϕ_p og ladning Q_{Ptotal}. Elektrode nr. 2 har potensial $\phi_G = 0$ og ladning Q_{Gtotal}. Her står G for *"Grounded"*, og p for potensial-elektroden.

der $\hat{\phi}_{pi}$ er potensialet på node nr. i på elektroden. Vektoren $[\hat{\phi}_p] = [\hat{\phi}_{p1}\hat{\phi}_{p2}\ldots\hat{\phi}_{pN_el}]^T$ er den delen av vektoren $[\hat{\phi}]$ som representerer potensialet på elektrode nr. 1.

Overflateladningstettheten på overflaten til strukturen er q, og overflateladningstettheten i *alle nodene i strukturen* er beskrevet av vektoren $[\hat{q}]$. Elementene i denne vektoren som svarer til noder som ikke er på overflaten til strukturen er pr. definisjon lik null. Ved hjelp av ligning 2.176 og ligning 2.117 finner man ladningsvektoren $[Q_S]$, som gir en oppintegrert verdi for ladningen i hver enkelt node. Det I'te elementet i ladningsvektoren, $Q_{S,I}$, vil da gi den opp-integrerte ladningen på noden med globalt nodenummer I. Anta så at noden som er nummerert som nr. I i den totale strukturen er node nr. i på elektroden. Da vil den oppintegrerte ladningen i node nr. i på elektroden være gitt ved $Q_{pi} = Q_{S,I}$.

Siden den totale ladningen på elektroden er Q_{Ptotal}, må Q_{Ptotal} være summen av den oppintegrerte ladningen på alle nodene på elektroden[49][27]:

$$Q_{Ptotal} = Q_{p1} + Q_{p2} + \cdots + Q_{pn} \tag{2.186}$$

der vektoren som beskriver ladningen på elektroden er definert ved $[Q_p] = [Q_{p1}Q_{p2}\cdots Q_{pn}]^T$. $[Q_p]$ må ikke forveksles med vektoren av punktladninger $[Q_P]$ som er satt til null her.

På vektorform kan ligning 2.185 og ligning 2.186 skrives som:

$$[\hat{\phi}_p] = [I_p]\phi \tag{2.187}$$

$$Q_{Ptotal} = [I_p]^T[Q_p] \tag{2.188}$$

der $[I_p]^T = [1\ 1\ \ldots\ 1]$ med lengde N_{el}.

Elektrode nr. 2 har ladning Q_{Gtotal} og potensial $\phi_G = 0$ (G står for *"Grounded"*). Dersom man går gjennom tilsvarende prosedyre som ovenfor for denne elektroden, finner man:

$$
\begin{aligned}
[\hat{\phi}_G] &= [I_p]\phi_G = 0 & (2.189)\\
Q_{Gtotal} &= [I_p]^T[Q_G] & (2.190)
\end{aligned}
$$

der $[Q_G] = [Q_{G1}Q_{G2}\cdots Q_{Gn}]^T$, og $[\hat{\phi}_G] = [\hat{\phi}_{G1}\hat{\phi}_{G2}\ldots\hat{\phi}_{GN_el}]^T$ analogt med tilfellet for elektrode nr. 1.

I vedlegg A er sammenhengen mellom strømmen I og ladningene Q_{Ptotal} og Q_{Gtotal} vist:

$$I = \frac{\partial Q_{Ptotal}}{\partial t} = -\frac{\partial Q_{Gtotal}}{\partial t} \tag{2.191}$$

I denne oppgaven trenger vi ladningen på elektrodene utelukkende til å regne ut strømmen I inn på elektrodene til den piezoelektriske strukturen som simuleres. *Det er derfor ikke nødvendig å regne ut ladningen på elektrodene direkte ved hjelp av formlene gitt i seksjon 2.3.4.* Istedenfor kan man finne strømmen I direkte ut fra ligning 2.191, og benytte denne til å regne ut f.eks. den elektriske impedansen og admittansen [49].

De mekaniske grensebetingelsene må være slik at normalspenningene og tangentialspenningene på overflaten til strukturen som studeres er lik null når det opereres i vakuum[22]. Det innebærer at

$$\underline{n} \cdot \mathbf{T} = 0 \tag{2.192}$$

på overflaten, der $\underline{n}$ er en ytre normalvektor, slik at man setter overflatekraften definert ved vektoren $[F_S]$ til null når man opererer i vakuum. Sammen med ligning 2.184 gir dette at $[F] = 0$. Foreløpig blir det ikke antatt at man opererer i vakuum. Dette blir gjort i seksjon 3.1.

Vi deler vektoren $[\hat{\phi}]$ opp i tre deler for ulike deler av strukturen [10]:

- $[\hat{\phi}_i]$, en vektor med potensialet til de indre nodene og andre noder som ikke er på en av elektrodene.
- $[\hat{\phi}_p]$, en vektor med potensialet for nodene på elektrode nr. 1 som har potensial ϕ_p.
- $[\hat{\phi}_G]$, en vektor med potensialet for nodene på den jordete elektroden.

slik at $[\hat{\phi}]^T = [\hat{\phi}_i^T\ \hat{\phi}_p^T\ \hat{\phi}_G^T]$.

Oppdelingen av vektoren for potensialet i nodene $[\hat{\phi}]$ i tre deler fører til at matrisene $[K_{u\phi}]$, $[K_{\phi u}]$ og $[K_{\phi\phi}]$ må deles opp i submatriser. Dette gjøres ved at de riktige kolonnene og rekkene i matrisene taes ut. For eksempel vil matrisen $[K_{u\phi}]$ da kunne skrives som $[K_{u\phi}] = [K_{u\phi_i}\ K_{u\phi_p}\ [K_{u\phi_G}]]$ der f.eks. $[K_{u\phi_p}]$ er en matrise der kun kolonnene i matrisen $[K_{u\phi}]$ som svarer til potensialet i nodene på elektrode nr. 1 er tatt med.

Ladningsvektoren $[Q]$ på høyresiden av ligning 2.120 må også deles i tre deler, og kan skrives som $[Q]^T = [Q_iQ_pQ_G]$, der

- $[Q_i] = 0$ fordi ladningen er lik null for alle nodene som ikke ligger på en av elektrodene. Dette skyldes at volumladningen $[Q_B]$ er lik null, og overflateladningen er forskjellig fra null kun på elektrodene.
- Ladningsvektoren $[Q_p]$ gir ladningen i nodene på elektrode nr. 1.
- Ladningsvektoren $[Q_G]$ gir ladningen i nodene på elektrode nr. 2.

Ligningssystemet 2.120 kan nå uttrykkes som:

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi_i} & K_{u\phi_p} & K_{u\phi_G} \\ K_{u\phi_i}^T & K_{\phi_i\phi_i} & K_{\phi_i\phi_p} & K_{\phi_i\phi_G} \\ K_{u\phi_p}^T & K_{\phi_i\phi_p}^T & K_{\phi_p\phi_p} & K_{\phi_p\phi_G} \\ K_{u\phi_G}^T & K_{\phi_i\phi_G}^T & K_{\phi_p\phi_G}^T & K_{\phi_G\phi_G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\phi}_i \\ \hat{\phi}_p \\ \hat{\phi}_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\hat{\phi}}_i \\ \ddot{\hat{\phi}}_p \\ \ddot{\hat{\phi}}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ -Q_p \\ -Q_G \end{bmatrix} \tag{2.193}$$

Når man setter potensialet til null på den jordete elektroden, kan ligningene som svarer til de elektriske frihetsgradene på den jordete elektroden, $[\hat{\phi}_G]$, strykes. Vi får to ligningssystemer:

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi_i} & K_{u\phi_p} \\ K_{u\phi_i}^T & K_{\phi_i\phi_i} & K_{\phi_i\phi_p} \\ K_{u\phi_p}^T & K_{\phi_i\phi_p}^T & K_{\phi_p\phi_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\phi}_i \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\hat{\phi}}_i \\ \ddot{\hat{\phi}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ -Q_p \end{bmatrix} \tag{2.194}$$

og

$$\begin{bmatrix} K_{u\phi_G}^T & K_{\phi_i\phi_G}^T & K_{\phi_p\phi_G}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\phi}_i \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = [-Q_G] \tag{2.195}$$

der vi i hovedsak skal benytte ligningssettet 2.194 [10] i fortsettelsen. Ligningssystemet 2.195 brukes kun til å regne ut ladningen på den jordete elektroden. I programmet FEMP er dette benyttet til å verifisere at $Q_{Ptotal} = -Q_{Gtotal}$.

2.6 Ligningssystemet på [*H*]-form

I f.eks. [25] er ligningssystemet 2.194 skrevet opp på [*H*]-form. Dette er ikke gjort i [10], som mye av denne oppgaven er bygget omkring, men blir allikvel gjort her fordi det forenkler utregningen av en del funksjoner for den piezoelektriske strukturen som studeres, som f.eks. mekaniske og elektriske responsfunksjoner for strukturen.

Ved å benytte kondensering, kan ligningssystemet 2.194 skrives på [*H*]-form, som gjør at vi får færre ukjente, samtidig som vi kun får en elektrisk frihetsgrad (potensialforskjellen mellom elektrodene) med i den modifiserte versjonen av endelig element ligningene for et piezoelektrisk medium[25].

Fra den andre ligningen i settet 2.194 får vi [25]

$$[\hat{\phi}_i] = -[K_{\phi_i\phi_i}]^{-1}\left[[K_{u\phi_i}]^T[\hat{u}] + [K_{\phi_i\phi_p}][\hat{\phi}_p]\right] \tag{2.196}$$

Innsatt i den første og siste ligningen i settet 2.194 gir det

$$\begin{bmatrix} H_{uu} & H_{u\phi_p} \\ H_{u\phi_p}^T & H_{\phi_p\phi_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\hat{\phi}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -Q_p \end{bmatrix} \tag{2.197}$$

med

$$\begin{aligned} [H_{uu}] &= [K_{uu}] - [K_{u\phi_i}][K_{\phi_i\phi_i}]^{-1}[K_{u\phi_i}]^T = [K_{uu}] - [\Delta K_{uu}] && (2.198) \\ [H_{u\phi_p}] &= [K_{u\phi_p}] - [K_{u\phi_i}][K_{\phi_i\phi_i}]^{-1}[K_{\phi_i\phi_p}] && (2.199) \\ [H_{\phi_p u}] &= [H_{u\phi_p}]^T && (2.200) \\ [H_{\phi_p\phi_p}] &= [K_{\phi_p\phi_p}] - [K_{\phi_i\phi_p}]^T[K_{\phi_i\phi_i}]^{-1}[K_{\phi_i\phi_p}] && (2.201) \end{aligned}$$

der

$$[\Delta K_{uu}] = [K_{u\phi_i}][K_{\phi_i\phi_i}]^{-1}[K_{u\phi_i}]^T \tag{2.202}$$

Ved å multiplisere den andre ligningen i ligningssettet 2.197 med matrisen $[I_p]^T$ fra venstre, og å benytte at $[\hat{\phi}_p] = [I]^T \phi_p$ (ligning 2.187) får man

$$\begin{bmatrix} H_{uu} & [H_{u\phi_p}][I_p] \\ [I_p]^T [H_{u\phi_p}]^T & [I_p]^T [H_{\phi_p\phi_p}][I_p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -[I_p]^T [Q_p] \end{bmatrix} \tag{2.203}$$

som vi enkelt omformer til endelig element-ligningene for et piezoelektrisk element med en jordet elektrode på $[H]$-form [25]

$$\begin{bmatrix} H_{uu} & H_{u\phi} \\ H_{u\phi}^T & H_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -Q_{Ptotal} \end{bmatrix} \tag{2.204}$$

der

$$[H_{u\phi}] = [H_{u\phi_p}][I_p] \tag{2.205}$$

$$H_{\phi\phi} = [I_p]^T [H_{\phi_p\phi_p}][I_p] \tag{2.206}$$

$$\phi = \phi_p = (\hat{\phi}_p)_i \ \ \forall i \tag{2.207}$$

Her er Q_{Ptotal} ladningen på den ikke-jordete elektroden, og ϕ er potensialforskjellen mellom elektrodene. Her er $\phi_p = \phi$ fordi elektrode nr. 2 er jordet.

Vi ser at vi nå har fått *en egen ligning* (ligning 2 i ligningssettet 2.204) som kan brukes til å gi eller regne ut potensial/ladning på elektroden. Her skiller resultatet seg fra [1], som kondenserer vekk de elektriske frihetsgradene. Årsaken til at vi ikke lenger har ˆ på potensialet, er at ϕ ikke lenger representerer nodeverdier, men *verdien for potensialet* på elektroden, som er den samme for alle nodene på elektroden.

Denne ligningen er den samme som er gitt i [25], med unntak av fortegnet på $H_{\phi\phi}$ og Q_{Ptotal} som er motsatt i [25] på grunn av en annen definisjon av den "dielektriske stivhetsmatrisen" $[K_{\phi\phi}]$ og ladningsvektoren $[Q]$, som tidligere bemerket.

Tabell 2.3: Tolkning av de ulike leddene i FEM-ligningen på [H]-form som en balanse av krefter og ladning [25].

Uttrykk	tolkning
$[H_{uu}][\hat{u}]$	elastisk kraft
$[H_{u\phi}]\phi$	elektromekanisk kraft
$[M_{uu}][\ddot{\hat{u}}]$	inertialkraft
$[F]$	mekanisk kraft
$[H_{u\phi}]^T[\hat{u}]$	polarisasjonsladning pga. piezoel. effekt
$H_{\phi\phi}\phi$	dielektrisk kondensasjonsladning
q	fri ladning

Ligningssettet 2.204 kan tolkes som en balanse av krefter (den første ligningen) og ladning (den andre ligningen) [25]. Se tabell 2.3 for en slik tolkning.

Fra ligning nr. 2 i settet 2.204 får vi når forskyvningen $[\hat{u}]$ settes til null at:

$$H_{\phi\phi} = -\frac{Q_{Ptotal}}{\phi} \tag{2.208}$$

For en plate-kondensator med ladning Q og $-Q$ på de to elektrodene og spenning V over elektrodene er kapasitansen C gitt ved $C = Q/V$ [31]. Følgelig vil $-H_{\phi\phi}$ representere kapasitansen til den piezoelektriske strukturen [25]. Verdien for $H_{\phi\phi}$ er blitt kontrollert i FEMP i en rekke tilfeller, og alltid funnet negativ. Det ser derfor ut som om det kunne vært hensiktsmessig å definere matrisen

[$K_{\phi\phi}$] med motsatt fortegn enn det som er gjort her, slik at $H_{\phi\phi}$ hadde fått motsatt fortegn. Dette er f.eks. er gjort i [25].

I fortsettelsen vil vi hovedsakelig benytte ligning 2.204 til å simulere forskjellige funksjoner for en piezoelektrisk transduser. I doktoravhandlingen til N. Guo [10] blir ligning 2.120 aldri overført til [H]-form, slik at hovedsakelig ligning 2.120 og ligning 2.194 blir benyttet til utregningen av forskjellige funksjoner for transduseren.

Tabell 2.4: Tabell over dimensjoner for de viktigste matrisene, vektorene og skalarene som blir innført både for det 3D og det aksesymmetrisk tilfelle. N er her det totale antall noder i strukturen, mens n er antall noder for element nr. m. Superscript (m) betyr at matrisen er spesifikk for element nr (m). En subscript (l) betyr at det i tillegg er en "lokal" matrise. Sammenhengen mellom globale matriser/vektorer for et element og globale matriser/vektorer for strukturen er gitt ved: $[A] = \sum_{m=1}^{N} [A^{(m)}]$. Sammenheng mellom lokale og globale matriser for et element er beskrevet i seksjon 2.3.4.

Matrise	Dimensjon 3D	Dimensjon 2D	Matrise	Dimensjon 3D	Dimensjon 2D
$[N_u^{(m)}]$	3x3N	2x2N	$[N_{u,l}^{(m)}]$	3x3n	2x2n
$[N_\phi^{(m)}]$	1xN	1xN	$[N_{\phi,l}^{(m)}]$	1xn	1xn
$[\hat{u}]$	3Nx1	2Nx1	$[\hat{u}^{(m)}]$	3nx1	2nx1
$[B_u^{(m)}]$	6x3N	4x2N	$[B_{u,l}^{(m)}]$	6x3n	4x2n
$[B_\phi^{(m)}]$	3xN	2xN	$[B_{\phi,l}^{(m)}]$	3xn	2xn
$[\hat{\phi}]$	Nx1	Nx1	$[\hat{\phi}^{(m)}]$	nx1	nx1
$[S^{(m)}]$	6x1	4x1	$[E^{(m)}]$	3x1	2x1
$[u]$	3x1	2x1	$[u^{(m)}]$	3x1	2x1
ϕ	1x1	1x1	$\phi^{(m)}$	1x1	1x1
$[c^E]$	6x6	4x4	$[c^{E(m)}]$	6x6	4x4
$[e]$	3x6	2x4	$[e^{(m)}]$	3x6	2x4
$[\epsilon^S]$	3x3	2x2	$[\epsilon^{S(m)}]$	3x3	2x2
$[M_{uu}]$,$[M_{uu}^{(m)}]$	3Nx3N	2Nx2N	$[M_{uu,l}^{(m)}]$	3nx3n	2nx2n
$[K_{uu}]$,$[K_{uu}^{(m)}]$	3Nx3N	2Nx2N	$[K_{uu,l}^{(m)}]$	3nx3n	2nx2n
$[K_{u\phi}]$,$[K_{u\phi}^{(m)}]$	3NxN	2NxN	$[K_{u\phi,l}^{(m)}]$	3nxn	2nxn
$[K_{\phi u}]$,$[K_{\phi u}^{(m)}]$	Nx3N	Nx2N	$[K_{\phi u,l}^{(m)}]$	nx3n	nx2n
$[K_{\phi\phi}]$,$[K_{\phi\phi}^{(m)}]$	NxN	NxN	$[K_{\phi\phi,l}^{(m)}]$	nxn	nxn
$[Q_B]$,$[Q_B^{(m)}]$	Nx1	Nx1	$[Q_{B,l}^{(m)}]$	nx1	nx1
$[N_{\rho_e}^{(m)}]$	1xN	1xN	$[N_{\rho_e,l}^{(m)}]$	1xn	1xn
$[\hat{\rho}_e]$	Nx1	Nx1	$[\hat{\rho}_e{}^{(m)}]$	nx1	nx1
ρ_e	1x1	1x1	$\rho_e^{(m)}$	1x1	1x1
$[Q_S]$,$[Q_S^{(m)}]$	Nx1	Nx1	$[Q_{S,l}^{(m)}]$	nx1	nx1
$[N_q^{(m)}]$	1xN	1xN	$[N_{q,l}^{(m)}]$	1xn	1xn
$[\hat{q}]$	Nx1	Nx1	$[\hat{q}^{(m)}]$	nx1	nx1
q	1x1	1x1	$q^{(m)}$	1x1	1x1
$[F_S]$,$[F_S^{(m)}]$	3Nx1	2Nx1	$[F_{S,l}^{(m)}]$	3nx1	2nx1
$[N_t^{(m)}]$	3x3N	2x2N	$[N_{t,l}^{(m)}]$	3x3n	2x2n
$[\hat{t}]$	3Nx1	2Nx1	$[\hat{t}^{(m)}]$	3nx1	2nx1
$[t]$	3x1	2x1	$[t^{(m)}]$	3x1	2x1
$[F_B]$,$[F_B^{(m)}]$	3Nx1	2Nx1	$[F_{B,l}^{(m)}]$	3nx1	2nx1
$[N_{f^b}^{(m)}]$	3x3N	2x2N	$[N_{f^b,l}^{(m)}]$	3x3n	2x2n
$[\hat{f}^b]$	3Nx1	2Nx1	$[\hat{f}^{b(m)}]$	3nx1	2nx1
$[f^b]$	3x1	2x1	$[f^{b(m)}]$	3x1	2x1
$[F_P]$,$[F_P^{(m)}]$	3Nx1	2Nx1	$[F_{P,l}^{(m)}]$	3nx1	2nx1
$[F_i^p]$	3x1	2x1	$[F_i^{p(m)}]$	3x1	2x1
$[Q_P]$,$[Q_P^{(m)}]$	Nx1	Nx1	$[Q_{P,l}^{(m)}]$	nx1	nx1
Q_i^p	1x1	1x1	$Q_i^{p(m)}$	1x1	1x1
$[H_{uu}]$	3Nx3N	2Nx2N	$[H_{u\phi}]$	1x3N	1x2N
$H_{\phi\phi}$	1x1	1x1	$[L_u]$	6x3	4x2
$[L_\phi]$	3x1	2x1			

Kapittel 3

Teoretisk gjennomgang av simulerbare funksjoner

I dette kapittelet blir det sett på noen av størrelsene og funksjonene det er mulig å simulere ved hjelp av endelig element modellen som ble utviklet i kapittel 2. Blant disse størrelsene er særlig egenmodene til et piezoelektrisk element viktige i arbeidet med denne oppgaven. Størrelser som elektriske og mekaniske responsfunksjoner - både harmoniske og transiente - vil være svært viktige funksjoner i et senere arbeid. Forskjellige tapsmodeller blir også diskutert her.

3.1 Egenmoder

I doktoravhandlingen til N. Guo [10] blir resonansfrekvensene for en struktur som vibrerer harmonisk definert, og deretter funnet ut fra endelig element ligningene. I f.eks. [27] [43] [25] blir i tillegg antiresonansfrekvensene funnet og definert. I denne seksjonen blir resonans- og antiresonansfrekvensene for strukturen funnet ut fra endelig element ligningene (ligning 2.204 på tilsvarende måte som i [27].

Vi antar at elementet vibrerer harmonisk med en frekvens ω, slik at

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u_0} \\ \phi_0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \tag{3.1}$$

der $[F] = [F_0]e^{i\omega t}$ og $Q_{Ptotal} = Q_0 e^{i\omega t}$. Innsatt i ligning 2.204 gir det følgende sett med ligninger som beskriver den harmoniske bevegelsen til det piezoelektriske elementet:

$$\begin{bmatrix} H_{uu} - \omega^2 M_{uu} & H_{u\phi} \\ H_{u\phi}^T & H_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u_0} \\ \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ -Q_0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Vi ser på det tapsfrie tilfellet, slik at alle materialkonstantene er reelle. De elektriske grensebetingelsene kan gies enten ved å spesifisere potensialet eller ladningen på elektroden [27]:

- Dersom *det elektriske potensialet* på den ikke-jordete elektroden blir satt til en kjent verdi (eller null), vil potensialdifferansen mellom elektrodene være konstant. Det piezoelektriske elementet vil da være eksitert ved konstant spenning, og når vi antar at elementet er i vakuum, slik at vektoren som representerer de mekaniske kreftene, $[F_0]$, settes til null, får man ut fra ligning 3.2 følgende ligning som beskriver det piezoelektriske elementet:

$$([H_{uu}] - \omega^2 [M_{uu}])[\hat{u_0}] = -[H_{u\phi}]\phi_0 \tag{3.3}$$

Vi setter potensialforskjellen mellom elektrodene til null, og får *ligningen for resonansfrekvensene* ω_r til elementet som [27]

$$\left([H_{uu}] - \omega_r^2[M_{uu}]\right)[\hat{u}_0] = 0 \tag{3.4}$$

For disse frekvensene vil den elektriske impedansen over det piezoelektriske elementet gå mot null. Disse frekvensene tilsvarer frekvensene f_1 i [40]. Ligning 3.4 er analog med ligning (3.54) i doktorgradsavhandlingen til N. Guo [10]. Formen på ligningen er noe annerledes her, fordi vi har valgt å operere med ligningssystemet på H-form som gjort i f.eks. [25].

Ved å løse egenverdiproblemet i ligning 3.4 finner man $2N$ egenverdier ω_r^2, $r = 1 \ldots 2N$ med tilhørende egenvektorer $\psi_{u,r}$, $r = 1 \ldots 2N$, der N er antallet noder i strukturen, slik at $2N$ er antallet mekaniske frihetsgrader for strukturen. Alle egenvektorene kan samles i en matrise $[\Psi_u]$ som defineres ved[10]:

$$\begin{aligned} [\Psi_u] &= [\psi_{u,1}\psi_{u,2}\ldots\psi_{u,2N}] \\ &= \begin{bmatrix} (\psi_{u,1})_{1,r} & (\psi_{u,2})_{1,r} & \cdots & (\psi_{u,2N})_{1,r} \\ (\psi_{u,1})_{1,z} & (\psi_{u,2})_{1,z} & \cdots & (\psi_{u,2N})_{1,z} \\ (\psi_{u,1})_{2,r} & (\psi_{u,2})_{2,r} & \cdots & (\psi_{u,2N})_{2,r} \\ (\psi_{u,1})_{2,z} & (\psi_{u,2})_{2,z} & \cdots & (\psi_{u,2N})_{2,z} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\psi_{u,1})_{N,r} & (\psi_{u,2})_{N,r} & \cdots & (\psi_{u,2N})_{N,r} \\ (\psi_{u,1})_{N,z} & (\psi_{u,2})_{N,z} & \cdots & (\psi_{u,2N})_{N,z} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.5}$$

der $(\psi_{u,j})_{i,r}$ er forskyvningen i r-retningen for node nr. i for egenvektor (mode) nr. j, og $(\psi_{u,j})_{i,z}$ er forskyvningen i z-retningen for node nr. i for egenvektor (mode) nr. j.

Egenverdiene ω_r^2 samles i en matrise $[\Omega^2]$ som defineres ved:

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{2N}^2 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Ut fra definisjonen på matrisene $[\Omega^2]$ og $[\Psi_u]$ kan egenverdiproblemet i ligning 3.4 skrives som:

$$\left([H_{uu}] - [\Omega^2][M_{uu}]\right)[\Psi_u] = 0 \tag{3.7}$$

- Dersom *den elektriske ladningen* på den ikke-jordete elektroden blir satt til en kjent verdi (eller null) får man åpen krets forhold. Fra ligning 3.2 med de mekaniske kreftene satt til null får man da følgende ligning som beskriver det piezoelektriske elementet [25]:

$$\left[([H_{uu}] - [\Delta H_{uu}]) - \omega^2[M_{uu}]\right][\hat{u}] = [H_{u\phi}]H_{\phi\phi}^{-1}Q_0 \tag{3.8}$$

med

$$[\Delta H_{uu}] = [H_{u\phi}]H_{\phi\phi}^{-1}[H_{u\phi}]^T \tag{3.9}$$

Dersom man nå setter ladningen til null [27] i ligning 3.8, får man følgende ligning for *antiresonansfrekvensene* [27]:

$$[([H_{uu}] - [\Delta H_{uu}]) - \omega_a^2[M_{uu}]][\hat{u}_0] = 0 \tag{3.10}$$

For disse frekvensene går den elektriske impedansen over elementet mot uendelig. Disse frekvensene tilsvarer frekvensene f_2 definert i [40].

Matriser for egenverdiene og egenvektorene til dette egenverdiproblemet kan defineres på linje med det som ble gjort for resonansfrekvensene ovenfor.

Vi har her fått to egenverdiproblemer for resonans- og antiresonansfrekvenser for en piezoelektrisk struktur. De samme egenverdiproblemene finner man igjen flere steder i litteraturen, blant annet i [25], [27], [43]. Disse kan løses på flere forskjellige måter på en datamaskin. Dette er godt beskrevet i litteraturen (f.eks. i [5]), men et godt resultat er avhengig av en god egenverdirutine. Matrisene i egenverdiproblemet kan man regne ut etter formlene i kapittel 2.3 i det aksesymmetriske tilfellet og kapittel 2.4 i det 3-dimensjonale tilfellet.

De frekvensene man får som løsning på egenverdiproblemene vil gå mot den virkelige løsningen for den teoretiske modellen ovenifra når elementoppdelingen forbedres, når det blir benyttet en elementoppdeling som dekker hele strukturen, elementene er kompatible, full integrasjon blir benyttet, og masse-matrisen er konsistent ([37] s.375). Dette er tilfellet i våre beregninger, der det 8-noders isoparametriske elementet blir benyttet og man benytter full integrasjon, dvs. 3x3 Gauss-integrasjonspunkter. Dette kan man se av konvergenstestene som er foretatt i kapittel 5, der man finner lavere verdier for alle egenverdiene når elementoppdelingen forbedres.

3.2 Responsfunksjoner ved harmonisk eksitasjon

De harmoniske responsfunksjonene, som f.eks. impedans/admittans eller utsvinget ved harmonisk spennings-eksitasjon for et piezoelektrisk element modellert ved hjelp av endelig element metoden, kan regnes ut på to forskjellige måter:

1. Bruk av modesuperposisjon, dvs. å først finne egenfrekvensene og egenvektorene (tapsfritt, fra ligning 3.4 for resonansfrekvenser) til elementet, og deretter regne ut responsen til elementet ved å superponere bidraget til responsen fra de ulike modene. Dette er f.eks. gjort i doktoravhandlingen til N. Guo [10] og i [25] [65] for det piezoelektriske tilfellet, og i [5] for det rent elastiske tilfellet. Hvordan dette gjøres er vist i seksjon 3.2.1.
2. Direkte utregning av responsfunksjonene ut fra manipulering av matriseligningene i ligning 3.2. Dette er f.eks. gjort i [27]. Hvordan dette gjøres er vist i seksjon 3.2.2.

Begge metodene vil gi eksakt det samme resultatet dersom responsen regnes ut ved å superponere *alle modene* ved bruk av modesuperposisjonsmetoden ([5] for rent elastisk tilfelle). Det er også mulig å ta med færre moder ved bruk av modesuperposisjonsmetoden. Modesuperposisjonsmetoden krever at man først regner ut egenmodene til systemet. Dette kan være en tidkrevende operasjon, men når disse først er regnet ut, kreves det lite for å regne ut responsfunksjonene. Ved bruk av den direkte metoden slipper man å regne ut egenmodene, men det vil være svært tidkrevende å regne ut responsfunksjoner for et stort frekvensområde.

En fordel ved bruk av modesuperposisjonsmetoden er at det kan velges å kun ta med bidraget fra de laveste modene, som er nøyaktigst modellert, ved utregningen av responsen [5]. Man slipper da å ta med moder som er svært unøyaktig utregnet i en responsanalyse. I tillegg er det lettere å analysere løsningen. Når bare noen moder taes med i utregningen av responsen ved bruk av modesuperposisjonsmetoden, vil responsen utregnet på denne måten kunne avvike fra responsen regnet ut ved hjelp av den direkte metoden.

Ved utregning av responsfunksjonene nedenfor, antas det at det piezoelektriske elementet opereres i vakuum, slik at det ikke virker noen ytre overflatekrefter. Følgelig kan kraften $[F_0]$ settes til null ved utregning av responsfunksjonene. Dersom man er interessert i å ta med effekten av utstråling til et medium, må endelig element-ligningene utvides [23]. Det blir først sett på responsfunksjonene uten å ta med tapseffekter. Tapseffekter blir inkludert i modellen i seksjon 3.5.

3.2.1 Modesuperposisjons-metoden

Her beskrives det hvordan man kan finne responsfunksjonene for den piezoelektriske strukturen ved hjelp av modesuperposisjon. Fremgangsmåten som benyttes her benytter seg av det som er gjort i [5] for det rent elastiske tilfellet, og det som er gjort i [10] og [25] for det piezoelektriske tilfellet.

Den første ligningen i ligningssettet 3.2 gir for det harmoniske tilfellet:

$$([H_{uu}] - \omega^2[M_{uu}])[\hat{u}_0] = -[H_{u\phi}]\phi_0 \tag{3.11}$$

For at problemet skal kunne løses så raskt som mulig på en datamaskin forsøkes det å redusere båndbredden til ligningssystemet ved hjelp av en koordinattransformasjon [5]:

$$[\hat{u}(t)] = [P][z(t)] \tag{3.12}$$

der $[P]$ er en koordinattransformasjonsmatrise med dimensjon $2Nx2N$, og $[z(t)]$ er de generaliserte koordinatene [5] [1]

$$[z(t)]^T = [z_1(t)z_2(t)\ldots z_{2N}(t)]$$

I det harmoniske tilfellet får man da:

$$[\hat{u}_0] = [P][z_0] \tag{3.13}$$

der $[z(t)] = [z_0(t)]e^{i\omega t}$, og

$$[z_0]^T = [z_{1,0}z_{2,0}\ldots z_{2N,0}]$$

Vi vil nå finne den koordinattransformasjonen $[P]$ som gir et enklest mulig ligningssystem. Ligning 3.13 innsatt i ligning 3.11 og hele ligningen multiplisert fra venstre med $[P]^T$ gir

$$([P]^T[H_{uu}][P] - \omega^2[P]^T[M_{uu}][P])[z_0] = -[P]^T[H_{u\phi}]\phi_0 \tag{3.14}$$

Dersom man massenormaliserer egenvektorene (for resonansfrekvensene), dvs. normaliserer egenvektorene slik at [5]

$$[\Psi_u]^T[M_{uu}][\Psi_u] = [I] \tag{3.15}$$

får man fra ligning 3.7 at[10]

$$[\Psi_u]^T[H_{uu}][\Psi_u] = [\Omega^2] \tag{3.16}$$

Vi ser altså at dersom man velger $[P] = [\Psi_u]$ får man et *diagonalt ligningssystem* [5] [10]. Følgelig blir ligningssystemet dekoblet, slik at hver ligning kan løses for seg, uavhengig av de andre ligningene i ligningssystemet. Dette er svært tidsbesparende ved løsning av problemet. Ved valg av tapsmodell i seksjon 3.5 vil det være hensiktsmessig å velge en tapsmodeller som er slik at det denne egenskapen til ligningssystemet ikke ødelegges.

Vår koordinattransformasjon blir altså

$$[u\hat{(}t)] = [\Psi_u][z(t)] = \sum_{r=1}^{2N}[\psi_{u,r}]z_r(t) \tag{3.17}$$

slik at

$$[\hat{u}_0] = [\Psi_u][z_0] = \sum_{r=1}^{2N}[\psi_{u,r}]z_{r,0} \tag{3.18}$$

i det harmoniske tilfellet. Responsen $[\hat{u}(t)]$ kan da skrives som en *superposisjon av egenvektorene* [5]. Følgelig vil $z_r(t)$ fortelle hvor viktig egenmode nr. r er i eksitasjonen ved et tidspunkt t. Tilsvarende vil $z_{r,0}$ i det harmoniske tilfellet fortelle hvor viktig egenmode nr. r er i responsen for en gitt frekvens ω. Jo større verdi z_r har, jo mer bidrar mode nr. r til responsen. Følgelig er z_r en modal vektfaktor. Det kan altså være interessant å plotte z_r for forskjellige frekvenser for å se på

---

[1] $[z(t)]$ kalles også "Modal participation factor" [25] og "Modal displacement vector" [10]. Her vil denne bli kalt modal vekt-faktor når koordinattransformasjonen som benyttes er slik at $[P] = [\Psi_u]$.

hvilke moder som er viktigst ved en harmonisk eksitasjon. Dette er implementert i programmet FEMP, men ikke vist i denne oppgaven på grunn av plassmangel.

Vi er nå interessert i å finne et uttrykk for $z_{r,0}$. Dersom man lar $[P] = [\Psi_u]$ i ligning 3.14, og benytter ortogonalitetsrelasjonene i ligning 3.15- 3.16, får man

$$([\Omega^2] - \omega^2[I])[z_0] = -[\Psi_u]^T[H_{u\phi}]\phi_0 \tag{3.19}$$

På grunn av ortogonaliteten er ligningene i ligningssettet 3.19 dekoblet, slik at man får et uttrykk for $z_{r,0}$ som

$$z_{r,0} = \frac{-[\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}]\phi_0}{\omega_r^2 - \omega^2} \tag{3.20}$$

Innsatt i ligning 3.18 gir dette

$$\begin{aligned} [\hat{u_0}] &= \sum_{r=1}^{2N}[\psi_{u,r}]z_{r,0} \\ &= \sum_{r=1}^{2N}\frac{-[\psi_{u,r}][\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}]\phi_0}{\omega_r^2 - \omega^2} \end{aligned} \tag{3.21}$$

som tilsvarer ligning (3.76) i doktoravhandlingen til N. Guo [10]. Ligning 2 i ligingssettet 3.2 for det harmoniske tilfellet kan skrives som:

$$[H_{u\phi}^T][\hat{u}_o] + [H_{\phi\phi}]\phi_0 = -Q_0 \tag{3.22}$$

Den elektriske inngangs-admittansen $Y(\omega)$ er definert som $Y(\omega) = \frac{I}{\phi} = \frac{I_0}{\phi_0}$ der $I = I_0e^{i\omega t}$. Strømmen I er definert i ligning A.6 ved $I = \frac{dQ_{Ptotal}}{dt} = i\omega Q_0e^{i\omega t}$ der $Q_{Ptotal} = Q_0e^{i\omega t}$, slik at $I_0 = i\omega Q_0$. Uttrykket for forskyvningen i ligning 3.50 innsatt i ligning 3.22 gir da admittansen som (tilsvarer ligning (3.70) i doktoravhandlingen til N. Guo [10]):

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{I_0}{\phi_0} = i\omega\frac{Q_0}{\phi_0} \\ &= -i\omega(\frac{1}{\phi_0}[H_{u\phi}]^T[\hat{u_0}] + H_{\phi\phi}) \\ &= i\omega(\sum_{r=1}^{2N}\frac{[H_{u\phi}]^T[\psi_{u,r}][\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}]}{\omega_r^2 - \omega^2} - H_{\phi\phi}) \\ &= i\omega(\sum_{r=1}^{2N}\frac{r_A}{\omega_r^2 - \omega^2} - H_{\phi\phi}) \end{aligned} \tag{3.23}$$

der r_A er den modale konstanten [10] for mode r definert ved

$$r_A = [H_{u\phi}]^T[\psi_{u,r}][\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}] \tag{3.24}$$

Definisjonen på den modale konstanten tilsvarer ligning (3.68) i doktoravhandlingen til N. Guo [10]. Ved å skrive $r_A(\psi_{u,r})$ kan man vise at dette er den modale konstanten for mode nr. r.

Ut fra dette uttrykket er det da enkelt å finne den elektriske inngangs-impedansen som funksjon av frekvensen ω, ved

$$Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)} \tag{3.25}$$

som gir et uttrykk for impedansen som er analogt med det gitt i [25] og [10].

3.2.2 Direkte metode

Her beskrives det hvordan man kan finne responsfunksjonene for en piezoelektrisk struktur ved hjelp av den direkte metoden. Fremgangsmåten som benyttes her er helt analog med det som gjøres i [27]. Ligning 3.11 kan skrives som [27]:

$$[D][\hat{u_0}] = -[H_{u\phi}]\phi_0 \tag{3.26}$$

der $[D] = [H_{uu}] - \omega^2[M_{uu}]$. For den harmoniske responsen til strukturen gir det:

$$[\hat{u_0}] = -[D]^{-1}[H_{u\phi}]\phi_0 \tag{3.27}$$

Vi setter ligning 3.27 inn i ligning 2 i ligningssettet 3.2 analogt med tilfellet for modesuperposisjonsmetoden, og får [27]:

$$Y = i\omega \left[[H_{u\phi}]^T[D]^{-1}[H_{u\phi}] - H_{\phi\phi}\right] \tag{3.28}$$

3.3 Mekanisk spenning og tøyning samt E- og D-felt i strukturen

Ved utregning av responsen $[\hat{u}]$ for en gitt harmonisk spenningseksitasjon med amplitude ϕ_0, eller ved en transientanalyse, kan det være interessant å se på om de mekaniske grensebetingelsene er oppfylt for løsningen. Videre kan det være interessant å se på variasjonene av den mekaniske spenningen og tøyningen, samt E- og D-feltet innenfor elementet. I [5] [42] er det gitt ligninger for utregning av den mekaniske spenningen i et rent elastisk materiale. I [1] er ligninger for både den mekaniske spenningen og den elektriske forskyvningsvektoren gitt for det piezoelektriske tilfellet. Tilsvarende ligninger blir også funnet her.

Fra ligning 2.79- 2.80 finner man tøyningen og det elektriske feltet i et vilkårlig punkt i element nr. m ved:

$$[S^{(m)}] = [B_u^{(m)}][\hat{u}] \tag{3.29}$$

$$[E^{(m)}] = [B_\phi^{(m)}][\hat{\phi}] \tag{3.30}$$

Ligning 1.1-1.2 gir da:

$$[T^{(m)}] = [c^{E(m)}][B_u^{(m)}][\hat{u}] + [e^{(m)}]^T[B_\phi^{(m)}][\hat{\phi}] \tag{3.31}$$

$$[D^{(m)}] = [e^{(m)}][B_u^{(m)}][\hat{u}] - [\epsilon^{S(m)}][B_\phi^{(m)}][\hat{\phi}] \tag{3.32}$$

der $[\hat{\phi}]$ regnes ut fra potensialet ϕ ved hjelp av ligningene i seksjon 2.5 og seksjon 2.6. Følgelig er det enkelt å regne ut de ønskede størrelsene. For å få mest mulig nøyaktige uttrykk for de ulike størrelsene, bør disse regnes ut i Gauss-integrasjonspunktene av en orden lavere enn den ordenen som gir full integrasjon av elementet ([38], [37]). Det innebærer at for det 8-noders isoparametriske elementet som benyttes i store deler av denne oppgaven, vil f.eks. den mekaniske spenningen kunne regnes ut mest nøyaktig i Gauss-integrasjonspunktene for 2x2-Gauss-integrasjon. Generelt er nøyaktigheten man får ved utregning av spenning og tøyning dårligere enn tilsvarende nøyaktighet for forskyvningen ([37], s. 580-581).

3.4 Utregning av ladningen på elektrodene

Ved utregning av responsen $[\hat{u}]$ for en gitt harmonisk spenningseksitasjon med spennings-amplitude ϕ_0, eller ved en transientanalyse, kan det være interessant å se på om de elektriske grensebetingelsene er oppfylt for løsningen. Dette kan inngå som en del av testingen av implementeringen av teorien.

Fra ligning 2 i ligningssettet 2.204 finner man at:

$$Q_{Ptotal} = -[H_{u\phi}]^T[\hat{u}] - H_{\phi\phi}\phi \tag{3.33}$$

der Q_{Ptotal} er ladningen på den ikke-jordete elektroden.

ligningssettet 2.194 til å finne et uttrykk for $[\hat{\phi}_i]$, får man for ladningen $[Q_G]$ fra ligning 2.195:

$$\begin{aligned} [Q_G] &= -\left[[K_{u\phi_G}] - [K_{\phi_i\phi_G}]^T[K_{\phi_i\phi_i}]^{-1}[K_{u\phi_G}]^T\right][\hat{u}] \\ &- \left[[K_{\phi_p\phi_G}]^T - [K_{\phi_i\phi_G}]^T[K_{\phi_i\phi_i}]^{-1}[K_{\phi_i\phi_p}]\right]\phi[I_p] \end{aligned} \tag{3.34}$$

slik at

$$Q_{Gtotal} = [I_p]^T[Q_G] \tag{3.35}$$

er ladningen på den jordete elektroden.

Ved sammenligning av Q_{Gtotal} og Q_{Ptotal} for forskjellige frekvenser (i det harmoniske tilfellet), eller forskjellige tidspunkt (i en transientanalyse), kan man nå finne ut om de elektriske grensebetingelsene er oppfylt, dvs. om $Q_{Gtotal} = -Q_{Ptotal}$ for alle frekvenser. Dette har blitt bekreftet ved hjelp av FEMP for en rekke forskjellige tilfeller.

3.5 Tapseffekter i et piezoelektrisk materiale

I en piezoelektrisk skive bekledd med elektroder på endeflatene finnes det flere forskjellige tapsmekanismer, som f.eks. tap i det piezoelektriske materialet og tap som følge av utstråling til et medium/baklag. De viktigste tapsmekanismene i en skive av et piezoelektrisk materiale som antas omsluttet av vakuum, er elastiske og dielektriske tapsmekanismer i det piezoelektriske materialet [10]. I denne oppgaven blir det sett på tapsmekanismene i det piezoelektriske materialet, i form av elastiske, dielektriske og piezoelektriske tap. Tapsmodellen som hovedsakelig benyttes i implementeringen av teorien i programmet FEMP, og som er benyttet i resultatene vist i denne oppgaven, tar kun hensyn til elastiske tap.

Disse tapsmekanismene kan modelleres på flere forskjellige måter. I doktoravhandlingen til N. Guo [10] er det benyttet proporsjonal demping for utregning av responsen i det harmoniske tilfellet, som innebærer at det blir innført en dempningsmatrise som er proporsjonal med stivhetsmatrisen [10]. Det blir i [10] antatt at dempningsfaktoren er den samme for alle modene. Da gir modellering av tapsmekanismene med proporsjonal dempning samme resultat som modellering av tapsmekanismene ved hjelp av en strukturell friksjonskraft, som er gjort i [25] [65], og som også er dempningsmodellen som hovedsakelig er benyttet i programmet FEMP. Denne metoden er forklart i seksjon 3.5.2. For den transiente analysen ser det ut som om det i doktoravhandlingen til N. Guo [10] blir benyttet en viskoelastisk tapsmodell, som er beskrevet i seksjon 3.5.3. I [23] blir tapene modellert ved å benytte komplekse konstanter. Denne metoden blir skissert i seksjon 3.5.1. I [15] blir tapene modellert ved hjelp av Rayleigh-dempning, som er beskrevet nøyere i f.eks. [5]. Denne metoden er ikke implementert i programmet FEMP, og heller ikke beskrevet her.

Det er brukt relativt lite tid på å studere de ulike tapsmodellene i denne oppgaven, men det viste seg at det er relativt stor forskjell på beregningstid for de ulike tapsmodellene. I denne oppgaven er det valgt å benytte en tapsbeskrivelse som krever lite beregningstid, selv om ikke tapene er beskrevet på en optimal måte. Følgelig er tapene alltid modellert ved hjelp av den strukturelle tapsmodellen (seksjon 3.5.2) for resultatene vist i denne oppgaven. Ved en grundigere analyse kan man på et senere tidspunkt finne ut hvilke tapsmodeller som vil gi en best mulig beskrivelse av tapene i en piezoelektrisk transduser.

3.5.1 Metode med komplekse konstanter

En måte å innføre tap i et *elastisk* materiale på, er å innføre komplekse verdier for materialkonstantene [24], som gjort i [23]. Dette er den mest generelle metoden av de metodene som blir studert her. Det gir [35]

$$\hat{c_{ij}^E} = c_{ij}^E(1 + i\, tan\, \delta_{ij}^{c^E}) \tag{3.36}$$

der ˆ betyr at en variabel er kompleks. Tilsvarende kan man også gjøre for de dielektriske og piezoelektriske materialkonstantene for et piezoelektrisk materiale, slik at man får [35]:

$$\begin{aligned} \hat{e_{ij}} &= e_{ij}(1 + i\, tan\, \delta_{ij}^{e}) & (3.37)\\ \hat{\epsilon_{ij}^S} &= \epsilon_{ij}^S(1 - i\, tan\, \delta_{ij}^{\epsilon^S}) & (3.38) \end{aligned}$$

Å regne med et fullt sett med komplekse materialkonstanter vil alltid kreve mye minne og CPU-tid. For å finne responsen til en piezoelektrisk struktur ved hjelp av denne tapsmodellen, innfører man det fulle settet med komplekse konstanter direkte i matrisene som definerer materialkonstantene, $[c^E]$, $[e]$ og $[\epsilon^S]$ i ligningene 2.43-2.45, slik at stivhetsmatrisene $[K_{uu}]$, $[K_{\phi u}]$, $[K_{u\phi}]$ og $[K_{\phi\phi}]$ blir komplekse. Det er nå to måter å finne responsen på:

1. Ligningssystemet som definerer egenmodene i ligning 3.4 kan løses ved hjelp av en kompleks ligningsløser [23]. Frekvensene man får som resultat her vil ikke være de samme som resonansfrekvensene i det tapsfrie tilfellet, men bare hjelpestørrelser når modesuperposisjonsmetoden skal benyttes for å finne responsen til strukturen. Det samme gjelder egenvektorene.

   Egenproblemene som skal løses vil bli gitt i komplekse variable, slik at tiden som kreves for å løse egenverdiproblemet vil dobles. Videre økes kravet til minne på datamaskinen. Man vil her få ut *komplekse egenfrekvenser og egenvektorer*, der imaginærdelen kan tolkes som en faseforskyvning. Den harmoniske responsen regnes nå ut fra ligningene i seksjon 3.2.1, der egenfrekvensene og egenvektorene som inngår i uttrykkene da blir komplekse. Tilsvarende kan den transiente responsen regnes ut fra ligningene i seksjon 3.7.

2. Man benytter de *direkte metodene* for utregning av harmoniske og transiente responsfunksjoner, som beskrevet i seksjon 3.2.2 og seksjon 3.7.2, der det regnes med komplekse rutiner. Med direkte menes her at man ikke benytter seg av modesuperposisjon for å løse ligningssystemet.

Generelt vil bruk av de direkte metodene være en svært tidkrevende måte å løse et problem på, men disse metodene kan være nyttige for sammenligning av tapsmodeller. *Følgelig er det mest hensiktsmessig å benytte en kompleks ligningsløser og regne med modesuperposisjonsmetoden dersom man vil regne med et fullt sett med komplekse konstanter.* Dette er implementert i programmet FEMP, men ikke testet grundig. Det er heller ikke med noen resultater som viser hva slags resultater man får med denne tapsmodellen, siden testing av tapsmodeller ikke ble prioritert så høyt under arbeidet med denne oppgaven.

3.5.2 Strukturell friksjonskraft

Som beskrevet ovenfor, er bruk av et fullt sett med komplekse konstanter for å modellere tapene i et piezoelektrisk materiale ofte svært tidkrevende, slik at en slik metode i mange tilfeller ikke er å anbefale. I praksis kan det også ofte være vanskelig å finne $tan\delta_{ij}^{c^E}$ for forskjellige verdier av i og j. For eksempel er det for materialet PZT5A kun oppgitt en verdi for elastiske tap, den mekaniske Q-faktoren Q_m, fra produsenten [62].

Vi definerer [35]

$$Q_{ij}^{c^E} = \frac{1}{tan\delta_{ij}^{c^E}} \tag{3.39}$$

En forenklet måte å beskrive tapene i det piezoelektriske materialet på, er å anta at materialet er isotropt med tanke på elastiske tapseffekter, samt at tapene er frekvensuavhengige (det vil si at Q_m er frekvensuavhengig) [24]. En vanlig antagelse er at $Q_{ij}^{c^E}$ settes lik Q_m for alle i og j, slik at:

$$tan\delta_{ij}^{c^E} = \frac{1}{Q_m} \tag{3.40}$$

Vi setter $g = 1/Q_m$, og får

$$\hat{c}_{ij}^{E} = c_{ij}^{E}(1 + ig) \tag{3.41}$$

Dersom man innfører den komplekse versjonen av de elastiske materialkonstantene i matrisene for materialkonstantene $[c^E]$, får man:

$$[c^E] \rightarrow [c^E](1 + ig) \tag{3.42}$$

Og for stivhetsmatrisen $[K_{uu}]$ [65]:

$$[K_{uu}] \rightarrow [K_{uu}](1 + ig) \tag{3.43}$$

En måte å innføre tapseffekter i et piezoelektrisk materiale på, er ved å innføre en strukturell friksjonskraft $[F_{demp}]$ som er proporsjonal med, og i kvadratur med den elastiske kraften $[K_{uu}][\hat{u}]$ [25] [65].

Vi ser først på det rent elastiske tilfellet (se ligning 2.121) i frekvensdomenet. Dersom man benytter metoden med komplekse konstanter og antar at materialet er isotropt med tanke på tapseffekter (ligning 3.40) får man i det elastiske tilfellet følgende ligning som beskriver problemet [65]:

$$-\omega^2[M_{uu}][\hat{u_0}] + [K_{uu}](1 + ig)[\hat{u_0}] = [F_0] \tag{3.44}$$

som kan omskrives til

$$-\omega^2[M_{uu}][\hat{u_0}] + [K_{uu}][\hat{u_0}] = [F_0] + [F_{demp}] \tag{3.45}$$

med $[F_{demp}] = -ig[K_{uu}][\hat{u_0}]$. Vi ser at vi kan tolke dette som om vi har innført en dempningskraft $[F_{demp}]$ som er proporsjonal med og i kvadratur med den elastiske kraften gitt ved $[K_{uu}][\hat{u_0}]$ (beskrevet for det piezoelektriske tilfellet i [65] [25]). Vi ser at i det elastiske tilfellet gir det å innføre en strukturell dempningskraft det samme som å regne med komplekse konstanter for de elastiske materialkonstantene med de antagelsene vi gjorde i ligning 3.40.

Dersom man ser på det piezoelektriske tilfellet, er den elastiske kraften gitt ved $[H_{uu}][\hat{u_0}] \neq [K_{uu}][\hat{u_0}]$ [25] (I det elastiske tilfellet er $[H_{uu}] = [K_{uu}]$, $[H_{u\phi}] = [0]$, og $H_{\phi\phi} = 0$). Årsaken til at den elastiske kraften er forskjellig i de to tilfellene, er at den piezoelektriske effekten gjør at materialet blir stivere [25]. Følgelig får man en strukturell dempningskraft [25]

$$[F_{demp}] = -ig[H_{uu}][\hat{u_0}] \tag{3.46}$$

I analogi med det elastiske tilfellet setter vi $g = 1/Q_m$. Vi får da systemet vårt på [H]-form som:

$$\begin{bmatrix} (1 + ig)H_{uu} - \omega^2 M_{uu} & H_{u\phi} \\ H_{u\phi}^T & H_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u_0} \\ \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ -Q_0 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

der vi har antatt en tidsharmonisk variasjon. Selv om ligning 3.47 er utledet fra utelukkende elastiske tap i det elastiske tilfellet, er også virkningen av de elastiske tapene gjennom den piezoelektriske koblingen med i modellen fordi den elastiske kraften forandres på grunn av de piezoelektriske effektene i materialet.

Dette er den samme ligningen som blir gitt i [25], [65], [10], [49]. I [65] blir det ut fra en endimensjonal modell argumentert for at denne ligningen skal gjelde, og for at $g = 1/Q_m$.

Det er i hovedsak denne tapsmodellen som blir benyttet for å regne ut harmoniske responsfunksjoner i programmet som er implementert i denne oppgaven, fordi denne tapsmodellen krever minst regnetid, og fordi denne dempningsmodellen gir den samme beskrivelsen som den gitt i doktoravhandlingen til N.Guo [10]. Dersom responsfunksjonene regnes ut fra ligning 3.47 med tap inkludert, får man et par små forandringer i en del av ligningene i seksjon 3.2 [10] [25]. Ligning 3.19 forandres til:

$$((1+ig)[\Omega^2]-\omega^2[I])[z_0] = -[\Psi_u]^T[H_{u\phi}]\phi_0 \tag{3.48}$$

slik at uttrykket for den modale vektfaktoren når tapene er inkludert ved hjelp av den strukturelle dempningsmodellen blir:

$$z_{r,0} = \frac{-[\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}]\phi_0}{(1+ig)\omega_r^2-\omega^2} \tag{3.49}$$

med uttrykk for den mekaniske responsen som:

$$[\hat{u_0}] = \sum_{r=1}^{2N} \frac{-[\psi_{u,r}][\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}]\phi_0}{(1+ig)\omega_r^2-\omega^2} \tag{3.50}$$

og admittansen som:

$$Y(\omega) = i\omega(\sum_{r=1}^{2N} \frac{r_A}{(1+ig)\omega_r^2-\omega^2} - H_{\phi\phi}) \tag{3.51}$$

der r_A fremdeles er definert ved

$$r_A = [H_{u\phi}]^T[\psi_{u,r}][\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}] \tag{3.52}$$

Tilsvarende ligninger for mekaniske og elektriske responsfunksjoener er også gitt i doktoravhandlingen til N. Guo [10] når tap er inkludert i beskrivelsen. I formlene i [10] ser det ut som om tapene er modellert på en litt annen måte, slik at det inngår en modal tapskonstant, η_r, som beskriver tapet for mode nr. r i ligningene istedenfor tapskonstanten g som er lik for alle modene. Men i [10] blir senere den modale tapskonstanten η_r satt lik g for alle modene, slik at resultatet allikevel blir det samme som vist her.

For admittansen utregnet ved hjelp av den direkte metoden får man med denne dempningsmodellen:

$$[\hat{u_0}] = -[D]^{-1}[H_{u\phi}]\phi_0 \tag{3.53}$$

$$Y = i\omega\left[[H_{u\phi}]^T[D]^{-1}[H_{u\phi}] - H_{\phi\phi}\right] \tag{3.54}$$

med

$$[D] = (1+ig)[H_{uu}] - \omega^2[M_{uu}] \tag{3.55}$$

3.5.3 Tapsmodellering i det transient tilfellet - Viskoelastisk tapsmodell

I en transientanalyse er det ikke mulig å operere med en strukturell dempningskraft slik som skissert ovenfor, når man benytter modesuperposisjonsmetoden. Årsaken til dette er at et ligningssystem må kunne dekobles (ligning 3.91) for at det skal være rimelig enkelt å løse problemet på en datamaskin, noe som ikke er tilfelle for den strukturelle dempningskraften.

Det er funnet følgende måter å inkludere tapene på som ikke ødelegger strukturen i ligningssystemet, slik at systemet fortsatt kan debobles:

- Man kan regne med et fullt sett med komplekse konstanter ved utregning av egenmodene.

- Man kan innføre en annen modell for å beskrive tapene i materialet, en viskoelastisk modell [24]. Det må gjøres en kraftig forenkling i denne modellen for at det skal være hensiktsmessig (ut fra et matematisk synspunkt) å benytte den i forbindelse med modesuperposisjonsmetoden [5], og systemet skal kunne dekobles. Denne metoden ser ut til å være benyttet i doktoravhandlingen til N. Guo [10].

Metoden der den viskoelastiske modellen blir kraftig forenklet, er gjennomgått her, fordi det ser ut som om det er denne metoden som er benyttet i [10]. Det er derfor også denne metoden som er benyttet i resultatene fra transientanalysen som er vist i seksjon 6.4.

Utgangspunktet for denne tapsmodellen er at vi innfører et dempningsledd i en av de konstitutive relasjonene (ligning 1.1), slik at [4]:

$$T_{ij} = c^E_{ijkl} S_{kl} + \eta_{v,ijkl} \dot{S}_{kl} - e_{kij} E_k \tag{3.56}$$

der $\eta_{v,ijkl}$ er den viskoelastiske tapstensoren. Dette gir et ekstra ledd $[\delta S]^T [\eta_v][\dot{S}]$ i variasjonsformuleringen på matriseform i ligning 2.20. Innvirkningen på endelig element ligningene er et ledd av typen $[C_{uu}][\dot{\hat{u}}]$ der

$$[C^{(m)}_{uu}] = \int_{V^{(m)}} [B^{(m)}_u]^T [\eta^{(m)}_v][B^{(m)}_u] dV \tag{3.57}$$

slik at ligning 2.120 kan skrives som

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{u}} \\ \dot{\hat{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\hat{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -Q \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

Dersom man vil regne med tapseffekter i en transientanalyse, og er interessert i å benytte modesuperposisjonsmetoden, (metoden vil bli gjennomgått i seksjon 3.7), må man gjøre en del antagelser for at ikke systemet som skal løses skal bli for komplisert. En vanlig måte å gjøre dette på [5] [25] [10] er å anta at dempningsmatrisen $[C_{uu}]$ er ortogonal til egenvektorene, slik at

$$[\psi_{u,r}]^T [C_{uu}][\psi_{u,j}] = 2\omega_r \xi_r \delta_{rj} \tag{3.59}$$

der ξ_r er en modal dempningskoeffisient og δ_{rj} er Kronecker-deltaet. Dette er en modell som sannsynligvis ikke vil gi svært gode resultater i en analyse, fordi forenklingen er gjort på bakgrunn av matematiske og ikke fysiske betraktningen. Forenklingen er allikevel brukt her, fordi dette er gjort i doktoravhandlingen til N. Guo [10]. På et senere tidspunkt kan det være aktuelt å sammenligne resultater der denne tapsmodellen blir benyttet med resultater der det blir benyttet et fullt sett med komplekse konstanter i beregningene.

Dersom man sammenligner uttrykket med det man får for en strukturell dempningskraft, ser man at ξ_r må defineres som $\xi_r = 1/2Q_m$ [10]. Vi regner alltid med samme modale dempningskoeffisient for alle modene. Denne tapsmodellen kan også innføres i det harmoniske tilfellet, men det blir ikke gjort her.

3.5.4 Valg av tapsmodell

De forskjellige tapsmodellene vil ha forskjellige innvirkning på resonansfrekvensene. Avhengig av hvilken tapsmodell som benyttes, kan resonansfrekvensene bli forskjøvet enten oppover eller nedover, men denne forskyvningen er vanligvis svært liten for de tapene man opererer med i piezoelektriske materialer (f.eks. $\approx \sqrt{1-\xi_r^2}$ for den viskoelastiske tapsmodellen [25]). Tapsmodellene vil naturligvis også ha innvirkning på mange av egenskapene til en piezoelektrisk transduser. Det er derfor viktig å bestemme hvilken tapsmodell man skal bruke for at modellen skal passe best mulig til det man ser ved målinger. Dette kan gjøres ved en systematisk analyse av virkningen av de ulike tapsmodellene, men dette er ikke gjort i denne oppgaven.

I resultatene i denne oppgaven er kun den strukturelle dempningskraften benyttet til å modellere tapene ved utregning av harmoniske responsfunksjoner. Dette blir gjort fordi

- Denne tapsmodellen krever minst regnetid, og har allikevel vist seg å gi en relativt god beskrivelse av tapsmekanismene i en piezelektrisk transduser som opereres i vakuum, når man ser på elektriske responsfunksjoner [10] [25], selv om man ser bort fra dielektriske og piezoelektriske tap i denne modellen.
- Dette en tapsmodell man ser mye brukt i endelig element litteraturen (piezoelektrisk) [10] [25] [49] [65]. Blant annet er den benyttet i doktorgradsoppgaven til N. Guo [10], noe som er et svært viktig punkt i denne forbindelsen.

Alternativt vil modellering av tapene med et fullt sett med komplekse konstanter kunne gi en langt bedre taps-modellering. Dette blir det ikke sett nøyere på i denne oppgaven, men metoden er implementert i programmet FEMP, slik at det vil være aktuelt å utføre et slikt arbeid på et senere tidspunkt.

3.6 Eksiteringen av de ulike modene

Ved en analyse av de ulike svingemodene for et piezoelektrisk element, er det interessant å se hvilke moder som kan eksiteres sterkest ved en elektrisk spenningseksitasjon. I denne seksjonen blir det gitt en oversikt over forskjellige uttrykk for hvor sterkt de ulike modene i en piezoelektrisk struktur kan eksiteres. Her inngår kun de uttrykkene for styrken på eksitasjonen av ulike moder som er funnet benyttet i endelig element litteraturen for piezoelektriske strukturer. På et senere tidspunkt kan det være interessant å studere hvilke av disse uttrykkene det er mest hensiktsmessig å benytte i et senere arbeid, og hvilke uttrykk det er lettest å knytte opp mot eksperimentelle verdier. Dette er ikke gjort i denne oppgaven.

I tillegg blir det sett på sammenhengen mellom den modale konstanten, som er benyttet i doktoravhandlingen til N. Guo [10], og uttrykket for den elektromekaniske koblingsfaktoren.

Det er funnet følgende mål for hvor sterkt en mode bidrar ved en eksitering i endelig element litteraturen (piezoelektrisk):

- Den modale konstanten r_A (brukt i [10]).
- Koblingsfaktoren k på flere forskjellige former (brukt innenfor endelig element analysen i f.eks. [25], [48], [43] [66] [15]).

Hovedpoenget ved denne diskusjonen er å kategorisere hva som er gjort på dette området innenfor endelig element analyse (piezoelektrisk) tidligere.

Den elektromekaniske koblingsfaktoren k er definert som forholdet mellom de ulike energiene i materialet på følgende måte [22]:

$$k^2 = \frac{E_m^2}{E_e \cdot E_d} \tag{3.60}$$

der E_e er den elektriske energien, E_d er den dielektriske energien, og E_m er den felles energien ("mutual energy"). Denne definisjonen på koblingsfaktoren er forøvrig tatt ut av den siste IEEE standarden for piezoelektrisitet [40].

For å finne et uttrykk for k uttrykt ved matrisene og vektorene som inngår i f.eks. ligning 2.120, er det nødvendig å utføre en energianalyse. Denne energianalysen kan utføres ved hjelp av energiene som inngår i formuleringen av Hamilton's prinsipp for et piezoelektrisk medium i ligning 2.11 [56].

3.6.1 Energianalyse

Vi ser her på de forskjellige energiene som kan identifiseres i modellen [48] [56]. Disse benyttes senere til å finne uttrykk for koblingsfaktoren.

Fra ligning 2.6 har vi at den elektriske entalpien er gitt ved:

$$H = \frac{1}{2}\left(T_{kl}S_{kl} - E_k D_k\right) \tag{3.61}$$

Integrert over et piezoelektrisk volum V, og skrevet på matriseform som gjort i ligning 2.20, og ved bruk av de konstitutive relasjonene for piezoelektriske media i ligning 1.1 - 1.2 får man den potensielle energien E_{pot} i volumet V som:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\int_V \left([S]^T[c^E][S] - [S]^T[e]^T[E] - [E]^T[e][S] - [E]^T[\epsilon^S][E]\right) dV \tag{3.62}$$

Dersom interpolasjonsmatriser innføres som gjort i seksjon 2.1.4, får man:

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2}\left([\hat{u}]^T[K_{uu}][\hat{u}] + [\hat{u}]^T[K_{u\phi}][\hat{\phi}] + [\hat{\phi}]^T[K_{\phi u}][\hat{u}] + [\hat{\phi}]^T[K_{\phi\phi}][\hat{\phi}]\right) \\ &= \frac{1}{2}[\hat{u}]^T[K_{uu}][\hat{u}] + [\hat{u}]^T[K_{u\phi}][\hat{\phi}] + \frac{1}{2}[\hat{\phi}]^T[K_{\phi\phi}][\hat{\phi}] \\ &= E_e + 2E_m - E_d \end{aligned} \tag{3.63}$$

der

$$E_e = \frac{1}{2}[\hat{u}]^T[K_{uu}][\hat{u}] \tag{3.64}$$

$$E_m = \frac{1}{2}[\hat{u}]^T[K_{u\phi}][\hat{\phi}] \tag{3.65}$$

$$E_d = -\frac{1}{2}[\hat{\phi}]^T[K_{\phi\phi}][\hat{\phi}] \tag{3.66}$$

og E_e er den elastiske energien, E_m er felles energi ("mutual energy") og E_d er den dielektriske energien. Det negative fortegnet på den dielektriske energien skyldes definisjonen av matrisen $[K_{\phi\phi}]$.

I [48] er det benyttet motsatt fortegn av det som er gjort her for både uttrykket for E_d og matrisen $[K_{\phi\phi}]$, slik at man kommer ut med samme fortegnet på den dielektriske energien. I [15] er det benyttet motsatt fortegn på uttrykket for E_d, men samme fortegn på $[K_{\phi\phi}]$, noe som gir et motsatt fortegn på den dielektriske energien enn det som er definert her (i ligning 3.66) og det som er definert i [48]. I [48] er dessuten E_e definert som $[\hat{u}]^T[K_{uu}][\hat{u}]$, E_m definert som $[\hat{u}]^T[K_{u\phi}][\hat{\phi}]$, og E_d definert som $2[\hat{\phi}]^T[K_{\phi\phi}][\hat{\phi}]$ slik at energiene er definert som det doble av det som er gjort her. Årsaken til denne definisjonen er uviss. Dette har ingen innvirkning på størrelsen på koblingsfaktoren, som er uttrykket man er interessert i å komme frem til ved hjelp av denne energianalysen.

I [25] er den elastiske energien E_e definert ved $\frac{1}{2}[\hat{u}]^T[H_{uu}][\hat{u}]$, noe som sammenfaller med definisjonen av $E_{e,stiff}$ nedenfor. Tilsvarende gjelder E_d som er gitt som sammenfaller med $E_{d,surf}$ her, og E_m som er sammenfaller med $E_{m,surf}$ her. Det er uklart hvorfor dette er gjort. Arbeidet i [25] bygger på arbeidet i [48] med samme hovedforfatter.

Det er altså en del forskjellige definisjoner på dette området, men når fortegnet på energiene blir definert som ovenfor, kommer man ut med en reell verdi for koblingsfaktoren.

Nedenfor blir uttrykkene for energiene omformet helt analogt med det som er gjort i [48], men det blir tatt med en del flere mellomregninger her. En del nye størrelser blir innført analogt med det som er gjort i [48]. Definisjonene på disse blir tatt direkte fra [48], og tolkningene fra [48] blir stort sett også benyttet her.

Elastisk energi

Den elastiske energien i det piezoelektriske materialet finner vi da som [48]

$$\begin{aligned}
E_e &= \frac{1}{2}[\hat{u}]^T[K_{uu}][\hat{u}] \\
&= \frac{1}{2}[\hat{u}]^T[H_{uu}][\hat{u}] + \frac{1}{2}[\hat{u}]^T[\Delta K_{uu}][\hat{u}] \\
&= E_{e,stiff} + \Delta E_e \qquad (3.67)
\end{aligned}$$

der

- $\Delta E_e = \frac{1}{2}[\hat{u}]^T[\Delta K_{uu}][\hat{u}]$ er den elastisk energien som følge av at vi har piezoelektrisk kobling [48].
- $E_{e,stiff} = \frac{1}{2}[\hat{u}]^T[H_{uu}][\hat{u}]$ er den elastiske energien for det *stivere* materialet [48].

For et materiale der det ikke opptrer piezoelektriske effekter (elastisk materiale), er $\Delta E_e = 0$ slik at $E_{e,stiff} = E_e$. Årsaken til dette er at vi da ikke har noen piezoelektrisk kobling i materialet.

Dielektrisk energi

Den dielektriske energien i det piezoelektriske materialet er gitt ved [48]

$$\begin{aligned}
E_d &= -\frac{1}{2}[\hat{\phi}]^T[K_{\phi\phi}][\hat{\phi}] \\
&= -\frac{1}{2}[\hat{\phi_i}^T \; \hat{\phi_p}^T]\begin{bmatrix} K_{\phi_i\phi_i} K_{\phi_i\phi_p} \\ K^T_{\phi_i\phi_p} K_{\phi_p\phi_p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\phi_i} \\ \hat{\phi_p} \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\left[[\hat{\phi_i}]^T[K_{\phi_i\phi_i}][\hat{\phi_i}] + [\hat{\phi_i}]^T[K_{\phi_i\phi_p}][\hat{\phi_p}] + [\hat{\phi_p}]^T[K_{\phi_p\phi_i}][\hat{\phi_i}] + [\hat{\phi_p}]^T[K_{\phi_p\phi_p}][\hat{\phi_p}]\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[[\hat{u}]^T[K_{u\phi_i}][K_{\phi_i\phi_i}]^{-1}[K_{u\phi_i}]^T[\hat{u}] + [\hat{\phi_p}]^T\left([K_{\phi_p\phi_p}] - [K_{\phi_i\phi_p}]^T[K_{\phi_i\phi_i}]^{-1}[K_{\phi_i\phi_p}]\right)[\hat{\phi_p}]\right] \\
&= -\frac{1}{2}[\hat{u}]^T[\Delta K_{uu}][\hat{u}] - \frac{1}{2}[\hat{\phi_p}]^T[H_{\phi_p\phi_p}][\hat{\phi_p}] \\
&= E_{d,surf} - \Delta E_e \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

der $E_{d,surf} = -\frac{1}{2}[\hat{\phi_p}]^T[H_{\phi_p\phi_p}][\hat{\phi_p}] = -\frac{1}{2}\phi H_{\phi\phi}\phi$.

Vi ser at den dielektriske energien også kan splittes opp i to komponenter [48], en komponent assosiert med potensialet ϕ på den ikke-jordete elektroden,$E_{d,surf}$, og en komponent som skyldes den piezoelektriske koblingen, ΔE_e, som er den elastiske energien på grunn av koblingen [48].

Energien $E_{d,surf}$ blik analogt med uttrykket for den lagrete energien i en kondensator [31], lik $\frac{1}{2}C_0V^2$ der C_0 for kondensatoren er lik $-H_{\phi\phi}$ her, og V er potensialdifferansen mellom elektrodene, lik ϕ her. Dette indikerer at fortegnet på den dielektriske energien som benyttes her er logisk riktig valgt. Det er valgt å bruke benevnelsen $E_{d,surf}$ fordi dette er gjort i [48].

Dette viser at den rent dielektriske energien er gitt som $E_{d,surf}$.

Felles energi ("mutual energy")

Den felles energien i det piezoelektriske materialet er gitt ved [48]

$$E_m = \frac{1}{2}[\hat{u}]^T[K_{u\phi}][\hat{\phi}]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[\hat{u}]^T [K_{u\phi_i} K_{u\phi_p}] \begin{bmatrix} \hat{\phi}_i \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}[\hat{u}]^T \left[[K_{u\phi_i}][\hat{\phi}_i] + [K_{u\phi_p}][\hat{\phi}_p]\right] \\
&= \frac{1}{2}[\hat{u}]^T [H_{u\phi}]\phi - \frac{1}{2}[\hat{u}]^T [\Delta K_{uu}][\hat{u}] \\
&= E_{m,surf} - \Delta E_e \qquad (3.69)
\end{aligned}$$

der $E_{m,surf} = \frac{1}{2}[\hat{u}]^T [H_{u\phi}]\phi$.

Vi ser at tilsvarende som for den dielektriske energien kan også den felles energien deles opp i to deler, en del assosiert med potensialet ϕ på den ikke-jordete elektroden ($E_{m,surf}$), og den elastiske energien på grunn av koblingen ΔE_e [48]. Fortegnet på ΔE_e avviker fra [48] på grunn av definisjonen på $[K_{\phi\phi}]$ som nevnt tidligere.

3.6.2 Koblingsfaktoren

Den elektromekaniske koblingsfaktoren definert ut fra energibetraktninger

Vi ser på ligningssettet 2.120:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\hat{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -Q \end{bmatrix} \qquad (3.70)$$

og matrisemultipliserer den første matriseligningen med $[\hat{u}]^T$ fra venstre, og den andre matriseligningen med $[\hat{\phi}]^T$ fra venstre. Summen av disse (dividert med 2) gir oss da følgende energiligning [48]:

$$\frac{1}{2}[\hat{u}]^T [K_{uu}][\hat{u}] + [\hat{u}]^T [K_{u\phi}][\hat{\phi}] + \frac{1}{2}[\hat{\phi}]^T [K_{\phi\phi}][\hat{\phi}] + \frac{1}{2}[\hat{u}]^T [M_{uu}][\ddot{\hat{u}}] = \frac{1}{2}\left([\hat{u}]^T [F] - [\hat{\phi}]^T [Q]\right) \qquad (3.71)$$

som gir

$$E_e + 2E_m - E_d + E_{kin} = E_{input} \qquad (3.72)$$

der $E_{kin} = \frac{1}{2}[\hat{u}]^T [M_{uu}][\ddot{\hat{u}}]$. og $E_{input} = \frac{1}{2}\left([\hat{u}]^T [F] - [\hat{\phi}]^T [Q]\right)$. Ligningene 3.72 og 3.71 stadfester altså bare at summen av den potensielle energien og den kinetiske energien i det piezoelektriske materialet er lik den tilførte energien E_{input}, som er lik det eksterne arbeidet som kreftene og ladningene utfører. Denne ligningen uttrykker energibalansen for systemet.

Den elektromekaniske koblingsfaktoren er definert i ligning 3.60 som:

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{E_m^2}{E_e \cdot E_d} \qquad (3.73) \\
&= \frac{(E_{m,surf} - \Delta E_e)^2}{(E_{d,surf} - \Delta E_e) \cdot (E_{e,stiff} + \Delta E_e)} \qquad (3.74)
\end{aligned}$$

Fra 3.71 har vi direkte at [48]

$$\frac{1}{2}[\hat{u}]^T [H_{uu}][\hat{u}] + [\hat{u}]^T [H_{u\phi}]\phi + \frac{1}{2}\phi H_{\phi\phi}\phi + \frac{1}{2}[\hat{u}]^T [M_{uu}][\ddot{\hat{u}}] = \frac{1}{2}\left([\hat{u}]^T [F] - \phi Q_{Ptotal}\right) \qquad (3.75)$$

eller

$$E_{e,stiff} + 2E_{m,surf} - E_{d,surf} + E_{kin} = E_{input} \qquad (3.76)$$

Ut fra sammenligning av de to energibalansene i ligning 3.72 og ligning 3.76 [48], kan man definere en alternativ koblingsfaktor k_{surf} ved [48]

$$k_{surf}^2 = \frac{E_{m,surf}}{E_{d,surf} \cdot E_{e,stiff}} \tag{3.77}$$

I følge [48] er det lettere å finne et tilnærmet uttrykk for k_{surf} som kan finnes eksperimentelt enn det som er tilfellet for den elektromekaniske koblingsfaktoren definert i ligning 3.74. Det er også den alternative koblingsfaktoren som er funnet mest benyttet i endelig element litteraturen ([25], [48], [43] [66]).

Av uttrykket for energien $E_{d,surf}$ sammenlignet med den lagrete energien for en kondensator, ser man at $E_{d,surf}$ representerer den rent dielektriske energien, mens E_d i tillegg inneholder en elastisk del på grunn av den piezoelektriske koblingen. Tilsvarende gjelder også for den felles energien, og for den elastiske energien. Dette kan være et argument for å benytte den alternative koblingsfaktoren k_{surf}. I [26] er uttrykket for den alternative koblingsfaktoren satt opp direkte fra ligning 3.2 og definisjonen på den elektromekaniske koblingsfaktoren i ligning 3.60.

Ved innsetting av uttrykk for de forskjellige energiene fra seksjon 3.6.1 i ligning 3.77 får vi [48] [43] [66]:

$$\begin{aligned} k_{surf}^2 &= -\frac{([\hat{u}]^T [H_{u\phi}]\phi)^2}{([\hat{u}]^T [H_{uu}][\hat{u}]) \cdot (\phi H_{\phi\phi}\phi)} \\ &= -\frac{[\hat{u}]^T [H_{u\phi}] H_{\phi\phi}^{-1} [H_{u\phi}]^T [\hat{u}]}{[\hat{u}]^T [H_{uu}][\hat{u}]} \\ &= -\frac{[\hat{u}]^T [\Delta H_{uu}][\hat{u}]}{[\hat{u}]^T [H_{uu}][\hat{u}]} \end{aligned} \tag{3.78}$$

Her ser vi at matrisen $[\Delta H_{uu}]$ som representerer forskjellen i stivhetsmatrisen for resonans- og antiresonansfrekvenser (seksjon 3.1) inngår i uttrykket for koblingsfaktoren. Fortegnet på koblingsfaktoren avviker fra det man finner i f.eks. [48], [25], [43], [43] på grunn av definisjonen på matrisen $[K_{\phi\phi}]$.

Vi ser på koblingsfaktoren for resonansmode nr. r, med egenvektor $[\psi_{u,r}]$. Da må $[\hat{u}]$ erstattes med $[\psi_{u,r}]e^{i\omega_r}$ i uttrykkene for energiene ovenfor. Faktoren $e^{i\omega_r}$ vil ikke bli skrevet i fortsettelsen, fordi denne er felles for alle leddene. Koblingsfaktoren $k_{surf}^2(\psi_{u,r})$ for en *resonans-mode* kan ut fra ligning 3.78 og 3.16 skrives som:

$$k_{surf}^2(\psi_{u,r}) = -\frac{([\psi_{u,r}]^T [H_{u\phi}])^2}{H_{\phi\phi}\omega_r^2} \tag{3.79}$$

der det er benyttet at $[\psi_{u,r}]^T [H_{uu}][\psi_{u,r}] = \omega_r^2$ som man ser direkte fra ligning 3.16. Det er dette uttrykket for den alternative koblingsfaktoren det krever minst beregning for å regne ut, og som derfor benyttes i programmet FEMP.

Den effektive koblingsfaktoren

Den effektive koblingsfaktoren k_{eff} defineres i IEEE-standarden for piezoelektrisitet (1987) [40] ved:

$$k_{eff} = \sqrt{\frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2}} \quad , \quad \omega_a > \omega_r \tag{3.80}$$

Ligningen 3.80 er en generalisering av en tilsvarende ligning som kun er gyldig i det en-dimensjonale tilfellet [22], men kan taes som en definisjon gyldig for alle moder, også for det 3-dimensjonale tilfellet.

Det er mulig å regne ut den effektive koblingsfaktoren k_{eff} direkte ved å finne både resonans- og antiresonansfrekvenser for et gitt problem ved endelig element modellen og ligningene i seksjon 3.1, og sette disse rett inn i ligning 3.80 [6] [7]. Denne metoden krever dobbelt så mye regnetid som utregning av den alternative koblingsfaktoren k_{surf} definert ut fra energimodellen ovenfor, fordi det må regnes ut to sett med egenmoder (for resonans og antiresonans). Dessuten kan det være vanskelig å identifisere hvilke resonansfrekvenser og antiresonansfrekvenser som hører sammen [6].

I [25] [48] [26] er også den effektive elektromekaniske koblingsfaktoren k_{eff} definert i IEEE-standarden for piezoelektrisitet (1987) [40] tilnærmet ved hjelp av den alternative koblingsfaktoren k_{surf} som ble funnet ut fra energianalysen ovenfor. Nedenfor blir det vist hvordan dette kan gjøres.

For å finne en tilnærming til k_{eff} benyttes det pertubasjonsanalyse [26]. Metoden går ut på å først se på problemet i ligning 3.2 når den piezoelektriske effekten ignoreres [26]. Det gir $\left([K_{uu}] - \omega_M^2 [M_{uu}]\right)[\hat{u}_M] = 0$. Egenverdiene og egenvektorene som er løsning på dette problemet kalles den upertuberte løsningen. Både egenverdiproblemet for resonansfrekvenser i ligning 3.4 og for antiresonansfrekvenser i ligning 3.10 kan skrives på formen [26] $\left([K_{uu}] + [K_P] - \omega_M^2 [M_{uu}]\right)[\hat{u}_M] = 0$ der $[K_P]$ er pertubasjonsmatrisen, som er lik $[\Delta K_{uu}]$ i tilfellet for resonansfrekvenser og lik $[\Delta K_{uu}] + [\Delta H_{uu}]$ i tilfellet for antiresonansfrekvenser. Ut fra disse pertubasjonene er det i [26] vist hvordan resonansfrekvensene ω_r og antiresonansfrekvensene ω_a kan uttrykkes ved egenverdiene for tilfellet der det er sett bort fra piezoelektriske effekter, ω_M, når både første og andre ordens pertubasjoner taes med.

Dersom man kun tar med ledd til første orden gir det at [48] [25] [43]

$$\omega_a^2 - \omega_r^2 \approx -\frac{[\psi_{u,r}]^T [\Delta H_{uu}][\psi_{u,r}]}{[\psi_{u,r}]^T [M_{uu}][\psi_{u,r}]} \tag{3.81}$$

En tilnærming til $(\omega_a^2 - \omega_r^2)/\omega_r^2$ til første orden blir da [48]:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2} &\approx -\frac{[\psi_{u,r}]^T [\Delta H_{uu}][\psi_{u,r}]}{[\psi_{u,r}]^T [H_{uu}][\psi_{u,r}]} \\ &= k_{surf}^2(\psi_{u,r}) \end{aligned} \tag{3.82}$$

Man er her interessert i en tilnærming til den effektive koblingsfaktoren k_{eff} gitt i ligning 3.80. Ut fra ligning 3.82 finner man at $\omega_a^2 \approx \omega_r^2(1 + k_{surf}^2(\psi_{u,r}))$, som gir den effektive koblingsfaktoren som [48] [26] [25]:

$$k_{eff}^2 = \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2} \approx \frac{k_{surf}^2(\psi_{u,r})}{1 + k_{surf}^2(\psi_{u,r})} \tag{3.83}$$

Her kan den alternative koblingsfaktoren $k_{surf}^2(\psi_{u,r})$ finnes fra ligning 3.78 eller ligning 3.79. I [26] er det vist at man også ved å se på en ekvivalentkrets kan vise at uttrykket i ligning 3.83 er en tilnærming til den effektive koblingsfaktoren definert i ligning 3.80.

For å regne ut tilnærmingen til koblingsfaktoren k_{eff}^2 er det altså tilstrekkelig å regne ut egenmodene for resonansfrekvensene, i motsetning til dersom man ønsker å regne ut den effektive koblingsfaktoren direkte fra ligning 3.80. I kapittel 6.1 blir det sett på om tilnærmingen til k_{eff} er god. Det viser seg at det er relativt store avvik mellom tilnærmingen til k_{eff} regnet ut ved hjelp av ligning 3.83 og den effektive koblingsfaktoren regnet ut direkte ved hjelp av ligning 3.80.

3.6.3 Modal konstant r_A

I [10] benyttes den modale konstanten r_A for å bestemme hvilke moder som vil gi størst bidrag ved en spenningseksitasjon. Her blir det sett på hvordan denne er relatert til den alternative koblingsfaktoren.

Den modale konstanten er definert i ligning 3.24, og inngår f.eks. i uttrykket for admittansen gitt i ligning 3.23. Av denne ligningen ser man at jo større den modale konstanten r_A er for en mode, jo større innvirkning vil denne moden få på uttrykket for admittansen. Følgelig vil r_A *fortelle noe om hvor mye de ulike modene blir bidrar ved en eksitering* [10].

Den modale konstanten kan da uttrykkes som [10] $r_A = \left([\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}]\right)^2$, slik at vi fra ligning 3.79 finner en enkel sammenheng mellom den alternative koblingsfaktoren k^2_{surf} og den modale konstanten r_A:

$$k^2_{surf}(\psi_{u,r}) = -\frac{r_A(\psi_{u,r})}{H_{\phi\phi}\omega_r^2} \tag{3.84}$$

Der $r_A(\psi_{u,r})$ er den modale konstanten for mode nr. r. Her vil $H_{\phi\phi}$ være en konstant for alle modene, slik at $k^2_{surf}(\psi_{u,r}) \sim \frac{r_A(\psi_{u,r})}{\omega_r^2}$. Den modale konstanten r_A vil altså være relativt mye større enn k^2_{surf} for høye frekvenser/moder.

3.6.4 Admittansen uttrykt ved den modale konstanten og koblingsfaktoren

Uttrykket for admittansen (og konduktansen) fra ligning 3.51 og ligning 3.23, kan skrives opp både uttrykt ved koblingsfaktoren, og uttrykt ved den modale konstanten. Ved å se på admittansen og konduktansen uttrykt ved den modale konstanten og den alternative koblingsfaktoren er det mulig å se hvilken betydning disse to konstantene har.

Når den strukturelle dempningsmodellen benyttes, kan admittansen fra ligning 3.51 skrives som:

$$\begin{aligned} Y &= i\omega\Big(\sum_{r=1}^{2N} \frac{r_A(\psi_{u,r})}{(1+ig)\omega_r^2 - \omega^2} - H_{\phi\phi}\Big) && (3.85)\\ &= i\omega H_{\phi\phi}\Big(\sum_{r=1}^{2N} \frac{-k^2_{surf}(\psi_{u,r})}{(1+ig) - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}} - 1\Big) && (3.86) \end{aligned}$$

Vi skal nå se på bidraget til den elektriske responsfunksjonen (admittansen) fra en enkel mode for denne moden sin resonansfrekvens, slik at man ser bort fra virkningen av andre moder. Dette er en bra tilnærming for admittansverdien for moder som ligger relativt langt fra andre moder i frekvens, og som har koblingsfaktor/modal konstant som er mye større enn de nærliggende modene. Man får da følgende enkle uttrykk for admittansen for frekvensen ω_r, resonansfrekvensen for mode r:

$$\begin{aligned} Y_r &\approx i\omega_r H_{\phi\phi}\Big(\frac{-k^2_{surf}(\psi_{u,r})}{(ig)} - 1\Big) \\ &= \frac{-\omega_r H_{\phi\phi} k^2_{surf}(\psi_{u,r})}{g} - i\omega_r H_{\phi\phi} && (3.87)\\ &= \frac{r_A(\psi_{u,r})}{g\omega_r} - i\omega_r H_{\phi\phi} && (3.88) \end{aligned}$$

Y_r vil altså gi admittansverdien for resonansfrekvensen ω_r. Av ligningene 3.87 og 3.88 ser man at susceptansen er gitt ved $B_r = -i\omega_r H_{\phi\phi}$, som er et uttrykk for admittansen til en kondensator med kapasitans $-H_{\phi\phi}$. Av ligningene ser man også at konduktansen kan uttrykkes ved henholdsvis $k_{surf}(\psi_{u,r})$ og $r_A(\psi_{u,r})$ som

$$G_r(\omega_r) = \frac{-\omega_r H_{\phi\phi} k^2_{surf}(\psi_{u,r})}{g} = \frac{r_A(\psi_{u,r})}{g\omega_r} \tag{3.89}$$

Ved hjelp av ligning 3.89 kan man altså bestemme verdier for $g = 1/Q_m$ ved målinger av konduktansen. I et senere arbeid kan man tenke seg at man kan bestemme ulike verdier for g for de ulike modene (g_r) ved å foreta målinger av konduktansnivået og sammenligne disse målingene med simulerte verdier for konduktansnivået, for å få beskrevet dempningen i materialet bedre. Dette kan det for eksempel være aktuelt å gjøre i forkant av en transientanalyse, for å få en bedre beskrivelse av det piezoelektriske elementet.

Det kan også være interessant å se på hvor stor den mekaniske responsen (forskyvningen) blir for en gitt spenningseksitasjon. Det er ikke like lett å knytte forskyvningen direkte til den modale konstanten eller koblingsfaktoren, fordi man i forbindelse med forskyvningen opererer med forskyvningen i et stort antall noder. Sammenligning av forskyvningen for ulike frekvenser kan lettest gjøres ved utregning av gjennomsnittlig forskyvning (netto-forskyvning) på overflaten (radiell retning og tykkelsesretning hver for seg). Gjennomsnittlig forskyvning i radiell retning vil da variere på en annen måte enn gjennomsnittlig forskyvning i tykkelsesretningen. Dette er beskrevet grundigere i seksjon 3.8.

3.7 Transientanalyse

Transientanalyse av piezoelektriske transdusere ved hjelp av endelig element metoden er beskrevet i doktoravhandlingen til N. Guo [10] og f.eks. i [52] [51]. Transientanalyse for rent elastiske problemer er beskrevet i [5] [42]. Denne seksjonen inneholder stort sett en oversikt over teorien innenfor transientanalyse av piezoelektriske skiver som er beskrevet i [10]. I tillegg blir det her skissert hvordan man kan finne den transiente responsen for et bølgetog, som ikke er beskrevet i [10].

I likhet med utregning av responsen ved en harmonisk eksitasjon beskrevet i seksjon 3.2, kan man ved en transientanalyse enten benytte en modesuperposisjonsmetode[10][5] [5] [42] [51], eller en mer direkte metode der man ikke går veien om egenmode-utregning [52] [5] [42]. Dersom vi benytter den viskoelastiske dempningsmodellen beskrevet i kapittel 3.5.3, får vi fra ligning 3.2 en eksitasjonsligning på form:

$$[M_{uu}][\ddot{\hat{u}}] + [C_{uu}][\dot{\hat{u}}] + [H_{uu}][\hat{u}] = -[H_{u\phi}]\phi(t) + [F(t)] \qquad (3.90)$$

I både modesuperposisjonsmetoden, og den direkte metoden, er denne ligningen utgangspunktet. Man kan sette matrisen $[C_{uu}]$ i denne ligningen til null, og istedenfor modellere tapene ved å regne med et fullt sett med komplekse konstanter. Dersom man setter matrisen $[C_{uu}]$ til null, og regner med reelle materialkonstanter, ser man på det tapsfrie tilfellet.

Vi ser på elementet i sender-modus, og antar at elementet er i vakuum, slik at $[F(t)]$ i ligning 3.90 settes lik null [10].

3.7.1 Modesuperposisjonsmetode

Dersom vi analogt med kapittel 3.2.1 innfører koordinattransformasjonen $[\hat{u}] = [\Psi_u][z(t)]$, får vi [10]:

$$[\ddot{z}(t)] + [\Psi_u]^T[C_{uu}][\Psi_u][\dot{z}(t)] + [\Omega^2][z(t)] = -[\Psi_u]^T[H_{u\phi}]\phi(t) \qquad (3.91)$$

der det er benyttet samme fremgangsmåte som i [5] for det rent elastiske tilfellet.

Som forklart i seksjon 3.5.3 må matrisen $[C_{uu}]$ være ortogonal til egenvektorene regnet ut i seksjon 3.1 for at det skal være rimelig lett å løse systemet. Dette er en kraftig forenkling, som blir gjort her fordi tilsvarende forenkling er gjort i doktorgradsavhandlingen til N. Guo [10]. Alternativt er det fullt mulig å regne med et fullt sett med komplekse konstanter når man benytter modesuperposisjonsmetoden. Dette vil gi en dobling av beregningstiden, men er ikke mye vanskeligere matematisk. Årsaken til at forenklingen av den viskoelastiske modellen blir benyttet her og i resultatene vist i seksjon 6.4 istedenfor et fullt sett med komplekse konstanter, er at det her er prioritert å reprodusere de resultatene som er gjort i [10].

Dersom forenklingen i ligning 3.59 blir innført kan ligningssystemet dekobles, og man får for mode nummer r [10]:

$$\ddot{z_r}(t) + 2\omega_r\xi_r\dot{z_r}(t) + \omega_r^2 z_r(t) = -[\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}]\phi(t) = f_r(t) \tag{3.92}$$

Dette er en ordinær 2.ordens differensialligning som kan løses på mange forskjellige måter. Vi er her særlig interessert i impulsresponsen. Dersom man benytter Duhamel-integralet ([34] [5] [42]) som gjort i doktoravhandlingen til N. Guo [10] for det piezoelektriske tilfellet, kan ligning 3.92 løses analytisk for en del eksitasjoner. Løsningen på ligning 3.92 gitt ved hjelp av duhamel-integralet, er [5]:

$$z_r(t) = \frac{1}{\overline{\omega_r}}\int_0^t f_r(\tau)e^{-\xi_r\omega_r(t-\tau)}sin[\overline{\omega_r}(t-\tau)]d\tau \tag{3.93}$$

der $\overline{\omega_r} = \omega_r\sqrt{1-\xi_r^2}$, dersom man antar at forskyvningen og hastigheten er null ved tiden $t = 0$ [5].

Den mekaniske forskyvnings-responsen ved tiden t finner man da ut fra ligningen:

$$[\hat{u(t)}] = [\Psi_u][z(t)] = \sum_{r=1}^{2N}[\psi_{u,r}]z_r(t) \tag{3.94}$$

Dette gjelder for en generell eksitasjon.

Impulsresponsen

Når inngangssignalet (den elektriske spenningen) er Diracs deltafunksjon, $\phi(t) = \delta(t)$, vil den transiente responsen være impulsresponsen. Vi får da for den modale vektfaktoren z_r som funksjon av tiden [10]:

$$z_{r,\delta}(t) = -\frac{1}{\overline{\omega_r}}[\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}]e^{-\xi_r\omega_r t}sin(\overline{\omega_r}t) \quad t \geq 0 \tag{3.95}$$

Ved innsetting av den modale konstanten i uttrykket for forskyvningen i ligning 3.94 finner man da:

$$[\hat{u_\delta}(t)] = [\Psi_u][z(t)] \tag{3.96}$$

$$= \sum_{r=1}^{2N} -\frac{1}{\overline{\omega_r}}[\psi_{u,r}][\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}]e^{-\xi_r\omega_r t}sin(\overline{\omega_r}t) \tag{3.97}$$

Responsen for et bølgetog

Når inngangssignalet er et bølgetog (en "burst" eller en påtrykt rektangulær sinus-puls) kan inngangssignalet skrives matematisk som:

$$\phi(t) = V_0 rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right) sin\Omega t \tag{3.98}$$

der V_0 er amplituden, T er lengden til bølgetoget (i tid) og Ω er frekvensen. Her er *rect*-funksjonen definert ved:

$$rect(x) = \begin{matrix} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{matrix} \tag{3.99}$$

Dette tilfellet er ikke behandlet i [10] på en så generell form. For den modale vektfaktoren får man da:

$$z_r(t) = -\frac{1}{\overline{\omega_r}}\int_0^t [\psi_{u,r}]^T[H_{u\phi}]V_0 rect\left(\frac{\tau-T/2}{T}\right) sin\Omega\tau e^{-\xi_r\omega_r(t-\tau)}sin[\overline{\omega_r}(t-\tau)]d\tau \tag{3.100}$$

Dette integralet kan løses analytisk ved å benytte at $sinA = -\frac{i}{2}(e^{iA} - e^{-iA})$, og å løse integralet for forskjellige verdier av t, slik at integranden kun består av eksponentialfunksjoner, som er lette å integrere. Løsningen på integralet inneholder mange ledd, og er derfor ikke tatt med her. Dette er heller ikke en sentral del av oppgaven, selv om noen slike resultater er vist i seksjon 6.4. Resultatene i seksjon 6.4 er kun tatt med for å vise hvilke muligheter man har innenfor endelig element analyse av piezoelektriske strukturer, og er som tidligere nevnt ikke skikkelig gjennomtestet. Uansett forteller disse resultatene noe om mulighetene innenfor dette området.

For spesielt interesserte er det mulig å studere implementeringen av denne teorien i programmet FEMP. Dette er gjort i funksjonene **transcalc** og **trans** i vedlegg F.1.

Den mekaniske responsen for forskyvningen som funksjon av tiden finner man ved innsetting i ligning 3.94.

Responsen for andre inngangssignaler

På tilsvarende måte er det mulig å finne responsen som funksjon av tiden for andre enkle inngangssignaler der Duhamel-integralet kan løses analytisk [5]. Dette er ikke gjort her. For vilkårlige inngangssignal $\phi(t)$ kan man finne responsen ved å løse Duhamel-integralet numerisk, eller ved hjelp av andre løsningsmetoder for ordinære differensialligninger, som f.eks. Newmark-metoden [5].

3.7.2 Direkte metoder

Utgangspunktet for den direkte metoden er ligning 3.90, som kan løses ved f.eks. Newmark- , Houbolt eller Wilson-metodene [5]. Dette er for eksempel gjort for det piezoelektriske tilfellet i [52]. Man utfører da en integrasjon av ligningssystemet 3.90. Metodene er langt mer tidkrevende enn modesuperposisjonsmetoden beskrevet ovenfor, men det er lettere å innføre forskjellige dempningsmodeller i analysen. Dette er ikke gjort i denne oppgaven.

3.8 Gjennomsnittlig forskyvning på overflaten

Forskjellige mål på gjennomsnittsforskyvningen på en del av overflaten til strukturen regnes ut i f.eks. [25] [48] [15].

Her er det tenkt at et mål for gjennomsnittsforskyvningen (eller netto-utsvinget) over overflaten i radiell eller tykkelsesretningen for en piezoelektrisk skive skal kunne brukes til å si noe om i hvilken retning det er størst forskyvninger på overflaten. Dette vil kunne fortelle om hoveddelen av svingningene på overflaten til skiven foregår i tykkelsesretningen eller i radiell retning, og kan følgelig fortelle noe om direktiviteten til den piezoelektriske skiven.

Gjennomsnittsforskyvningen (eller netto-utsvinget) er også tenkt brukt som et mål for hvor sterkt de ulike modene kan eksiteres (dette gjøres i FEMP), når gjennomsnittsutsvinget i både radiell og tykkelsesretning for responsen for en enkelt mode regnes ut. Man kan da observere at for de laveste radielle modene for en piezoelektrisk skive vil gjennomsnittsforskyvningen i radiell retning være relativt stor, mens gjennomsnittsforskyvningen i radiell retning vil være relativt liten for tykkelsesmoden. Disse resultatene er ikke tatt med i denne oppgaven på grunn av plassmangel.

Dersom den mekaniske responsen regnes ut fra ligning 3.50 (harmonisk analyse) eller ligning 3.94 (transient analyse) kan man regne ut et mål for den gjennomsnittlige forskyvningen (eller nettoutsvinget) av en overflate ved å summere forskyvning normalt på en overflate for alle nodene på overflaten, og dele på antallet noder:

$$u_{average,overflate} = \frac{1}{N_0} \sum_{i \in overflate}^{N_0} \hat{u}_{i,n} \tag{3.101}$$

der $\hat{u}_{i,n}$ er komponenten av forskyvningen til node nr. i rettet normalt på overflaten, og N_0 er antall noder på overflaten. Vektoren $[\hat{u}]$ vil være kompleks når tap er inkludert i beskrivelsen. Ved utregning av gjennomsnittsforskyvningen vil da realdelen til $u_{average,overflate}$ benyttes i analysen. Skalaren $u_{average,overflate}$ vil da være et godt mål på gjennomsnittsforskyvningen over overflaten.

I [25] [48] [15] blir det gitt andre mål for gjennomsnittsforskyvningen, som avviker noe fra det som er gitt i ligning 3.101. Det er allikevel valgt å benytte ligning 3.101 her.

Kapittel 4

Testing av FEMP

Teorien som er beskrevet i seksjon 2-3 er implementert i både MATLAB [45] og Fortran 90 (F90). I del 2 av denne oppgaven er det gitt en beskrivelse av implementeringen av teorien, en enkel bruksanvisning for MATLAB-versjonen av programmet, og en fullstendig programlisting. Programmet har fått navnet FEMP ("Finite Element Modellering av Piezoelektriske strukturer").

Det er viktig å teste et program for et bredt spekter av problemer for å være sikker på at programmet vil gi riktige resultater ved senere bruk. En relativt stor del av arbeidet med denne hovedoppgaven har derfor gått med til å teste implementeringen av FEMP. Det viktigste ved denne testingen har vært å teste at implementeringen av endelig element teorien er gjort på en riktig måte, ikke å teste teorien som ligger bak endelig element metoden, siden teorien hovedsakelig er den samme som den benyttet i en rekke andre arbeider (som f.eks. [10] [25] [26] [6]).

Som nevnt tidligere, ble arbeidet med oppgaven i stor grad lagt opp etter en doktoravhandling av N. Guo fra 1989. Relativt mye tid er derfor lagt ned i å forsøke å reprodusere resultater fra doktoravhandlingen til N. Guo. Det har dessverre ikke lykkes å reprodusere disse resultatene på en god nok måte. Korrespondanse med N. Guo har heller ikke kunnet hjelpe oss til å finne årsaken til avvikene. Det ble derfor satt i gang mer omfattende sammenlingninger med andre resultater enn det som ellers hadde vært naturlig. Her inngår sammenligninger med en rekke andre publiserte resultater (hovedsakelig endelig element metode resultater) og egne simuleringer med det kommersielle endelig element programmet ABAQUS.

I forbindelse med testingen har man konsentrert seg om testing av implementeringen av den grunnleggende teorien, det vil si utregning av resonans- og antiresonansfrekvenser (egenverdier) for piezokeramiske skiver. Årsaken til dette er at resten av programmet bygger på at disse egenverdiene er regnet ut på en riktig måte. Det innebærer at egenverdiene er grunnleggende parametre i implementeringen. Et hovedpoeng har derfor vært å kvantifisere nøyaktigheten på de utregnete egenverdiene fra FEMP i forhold til andre endelig element program. I et senere arbeid vil det være aktuellt å teste de andre funksjonene som er implementert i FEMP på en grundigere måte.

Hoveddelen av testingen i dette kapittelet er derfor gjort mot andre endelig element metode resultater, selv om også noen sammenligninger med andre modeller og målinger er tatt med. I tillegg har det også vært viktig å undersøke at løsningene fra FEMP oppfyller grensebetingelsene som er gitt for problemet (seksjon 2.5). Ved sammenligning med andre endelig element metode resultater har det i mange tilfeller vært vanskelig å trekke klare konklusjoner, fordi det ofte benyttes andre typer elementer i endelig element metoden enn det som er tilfellet i FEMP (f.eks. 3-noders elementer som i [23] [6]), eller fordi det har vært vanskelig å se nøyaktig hvilke simuleringsparametre som er benyttet. Dette har i mange tilfeller gjort det svært vanskelig å foreta kvantitative sammenligninger. Det er ut fra mange av testene vanskelig å fastslå om avvikene skyldes forskjellige simuleringsparametre, eller om avvikene skyldes en feil implementering av teorien i FEMP. Allikevel viser disse testene at FEMP gir kvalitativt god overensstemmelse med en rekke forskjellige endelig element resultater.

Testene i dette kapittelet er delt opp i en del forskjellige kategorier, der de mest grunnleggende testene av FEMP kommer først:

- Sammenligning mellom simulerte egenverdier fra MATLAB- og F90-versjonen av FEMP (seksjon 4.1) for å se at de to versjonene av programmet regner likt.
- Sammenligning med "benchmarks" for egenverdiutregning for aksesymmetriske 4- og 8-noders elementene fra NAFEM ("National Agency for Finite Element Methods and Standards") for det rent elastiske tilfelle (seksjon 4.2), for å sjekke at FEMP regner riktig på rent elastiske problemer.
- Sammenligning med simuleringer av egenverdier med det kommersielle endelig element programmet ABAQUS (seksjon 4.3). Her inngår både test-resultater fra "ABAQUS Verification Manual" [29], og egne simuleringer med ABAQUS. Dette gir en verifikasjon på at FEMP regner likt med et uavhengig, kommersielt endelig element program.
- Sammenligninger med en rekke simulerte endelig element resultater for egenverdier i doktoravhandlingen til N. Guo [10], og en del andre simulerte resultater av N. Guo. En del av disse resultatene inngår også i [49] [50].
- Sammenligning av simulerte egenverdier fra FEMP med simulerte og målte resultater for enkle piezoelektriske strukturer (hovedsakelig skiver/sylindere) funnet i litteraturen. Det er også tatt med et par eksempler på hvordan utsvinget ser ut for de simulerte egenverdiene. (seksjon 4.5).
- Sammenligning av simulerte egenverdier fra FEMP med simulerte egenverdier for piezoelektriske strukturer bestående av flere materialer. (seksjon 4.6)
- Testing av mer kompliserte funksjoner i FEMP, som f.eks. impedans/admittans (seksjon 4.7).

I sammenligningene nedenfor inngår det også en del frekvensspektere (dvs. plott av f*T (frekvens*Tykkelse) mot D/T (Diameter/Tykkelse). I tillegg til at frekvensspektre kan gi et godt kvalitativt bilde på overensstemmelsen mellom forskjellige resultater, kan frekvensspektere være en viktig faktor i analyse og fabrikasjon av piezoelektriske transdusere, siden det gir informasjon om sammenhengen mellom geometrien til en transduser, og dens svinge-egenskaper. Frekvensspektere har vært studert nøye både teoretisk og eksperimentelt for å studere hvordan 3-dimensjonale effekter påvirker vibrasjonene i en piezoelektrisk skive. Det er tatt med sammenligninger med den første eksperimentelle studien av frekvensspektere foretatt av Shaw i 1956 [2]. Videre er det tatt med sammenligninger med frekvensspektere simulert ved hjelp av endelig element metoden av Locke et al. [7] og Guo [10].

Dersom det ikke er skrevet noe annet i teksten, blir det i de følgende testene benyttet følgende simuleringsparametre i FEMP:

- Det 8-noders isoparametriske elementet med kvadratisk variasjon langs kantene beskrevet i seksjon 2.2.2 blir benyttet, og den numeriske integrasjonen som benyttes til å finne masse- og stivhetsmatrisene blir utført v.h.a. 3x3 punkts Gauss-integrasjon. Dersom det 4-noders isoparametriske elementet blir benyttet, benyttes det 2x2 punkts Gauss-integrasjon for å utføre integrasjonene.
- Elektrodene på skiven som analyseres ligger på z_{max} og z_{min}, og det piezoelektriske materialet er polarisert i z-retningen.
- Forskyvningen er ikke satt til null i noen noder.
- Tapene er ikke inkludert i egenverdianalysen. I responsanalysen er den strukturelle dempningskraften, beskrevet i seksjon 3.5.2, benyttet.
- Antallet elementer i modelleringen av strukturen er skrevet som $N_z x N_r$ der N_z er antall elementer i tykkelsesretningen, og N_r er antall elementer i radiell retning.

4.1 MATLAB og F90-versjonen av FEMP - sammenligning

Tabell 4.1: Sammenligning av utregnete resonansfrekvenser for de 10 laveste modene for et enkelt testproblem der en struktur av PZT5A med tykkelse 10.01mm og diameter 20.0mm simuleres med 4x4 8-noders isoparametriske elementer. Relativavviket er oppgitt i ppm ("parts pr. million") i forhold til resultatene fra F90-versjonen av FEMP.

Mode nr.	MATLAB [kHz]	F90 [kHz]	Rel. avvik (ppm)
1	87.4245293	87.4245284	0.01
2	132.3044954	132.3044989	0.03
3	174.6032417	174.6032571	0.09
4	208.6279465	208.6279320	0.07
5	249.9820420	249.9820311	0.04
6	277.8016799	277.8016839	0.01
7	302.1008541	302.1008027	0.17
8	361.2929818	361.2929613	0.06
9	372.4944266	372.4944118	0.04
10	381.5024518	381.5024264	0.07

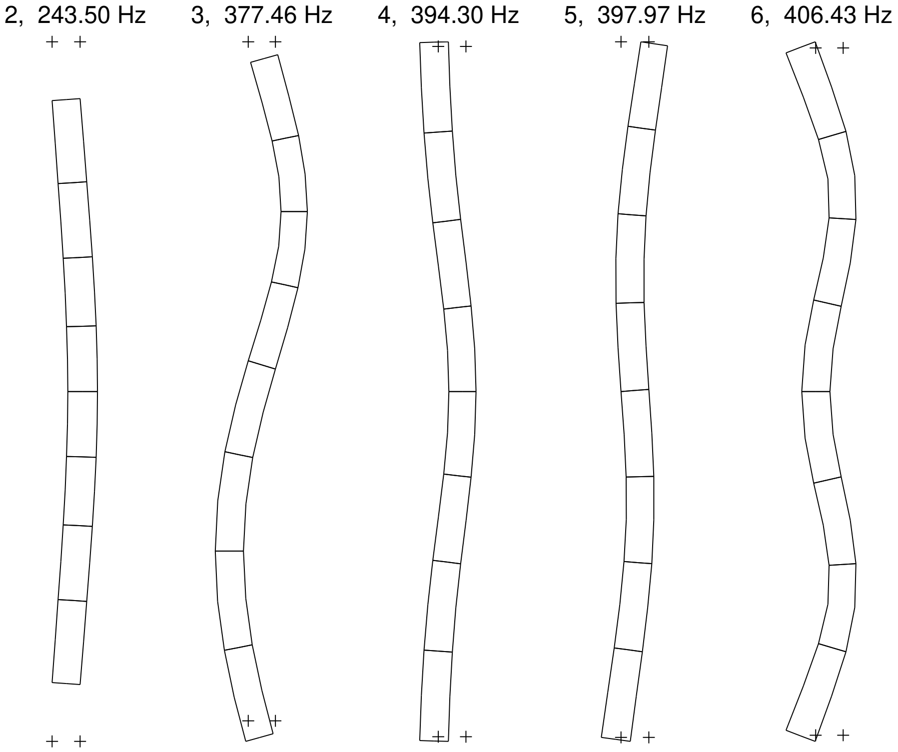
FEMP er implementert i to forskjellige programmeringsspråk, MATLAB og Fortan 90, som beskrevet i kapittel E. Selv om disse to implementeringene ikke er uavhengige (en stor del av koden er tilnærmet identisk), er egenverdirutinene som blir benyttet uavhengige, slik at en naturlig første test på FEMP sine egenskaper, og da i hovedsak egenverdirutinen, er å sammenligne resultater fra de to versjonene med hverandre. Det er foretatt en lang rekke simuleringer for resonans- og antiresonansfrekvenser for forskjellige strukturer og materialer med de to versjonene av programmet. I alle tilfellene er det meget god overensstemmelse mellom resultatene. Se tabell 4.1 for et eksempel på en sammenligning mellom en simulering i F90-FEMP og MATLAB-FEMP for et testproblem. Relativavviket er på opptil 0.2ppm ("parts pr. million"), som sannsynligvis skyldes numeriske forskjeller i egenverdirutinene. I MATLAB-versjonene er det benyttet en innebygget egenverdirutine som finner alle egenverdiene(EISPACK-rutiner som løser det generaliserte egenverdiproblemet direkte). I F90-versjonen er det benyttet en LAPACK-rutine [46] som bare finner noen utvalgte egenverdier (LAPACK-rutinen reduserer først det generaliserte egenverdiproblemet til standard form ved hjelp av Cholesky-faktorisering, og løser deretter problemet på standard form, der kun noen utvalgte egenverdier/vektorer blir regnet ut). Simuleringene er foretatt på forskjellige datamaskiner (F90 simuleringer på en DEC-ALPHA-maskin, og MATLAB simuleringer på en PC, DEC-ALPHA eller en HP-UX maskin), som kan føre til mindre avvik. Avvikene øker noe når antallet elementer øker fordi man da får langt større matrisesystemer som må løses, men det er kun funnet små avvik for resonansfrekvensene også ved de største beregningene som er foretatt (300-400 frihetsgrader i begge versjonene). I beregningen av den modale konstanten (r_A) ser man noe større avvik. Dette skyldes at absoluttverdien til forskyvningsvektoren kvadrert (det vil si egenvektorene) inngår i uttrykket for den modale konstanten, slik at man får en akkumulert usikkerhet. Dette gjelder særlig når forskyvningsvektoren har 300-400 elementer eller mer. Det er registrert så pass store avvik som 1% for den modale konstanten for TE-moden for en skive av PZT5A med D/T=20 med en elementoppdeling på 48x2 elementer. Da vi ikke har testet en 3. uavhengig egenverdirutine, er det her ikke mulig å si noe om hvilken av egenverdirutinene som gir det mest korrekte svaret, men begge egenverdirutinene er anerkjente rutiner.

Ut fra disse testene kan man slutte at egenverdirutinene gir tilfredsstillende og sammenfallende resultater for egenverdiene, men at det forekommer mindre avvik som følge av akkumulerte numeriske feil. Det kan være hensiktsmessig å sammenligne med en 3. uavhengig egenverdirutine i et senere arbeid, men da må det foretas en grundigere analyse.

Dersom egenverdiene er korrekt utregnet, vil feilen på egenvektorene kun avhenge av egenverdirutinen [46]. Det blir benyttet anerkjente og mye brukte egenverdirutiner som sikrer at egenvektorene med meget stor sannsynlighet vil bli regnet med feil i samme størrelsesorden som for egenverdiene [46]. For sammensatte funksjoner vil feilen akkumuleres, slik at feilen for de sammensatte funksjonene (rent numerisk) kan bli langt større enn for egenverdier/egenvektorer.

I praktisk bruk, og følgelig også i testingen av FEMP, blir alltid Fortran 90-versjonen av FEMP benyttet for å finne egenmodene når problemene blir *store*. Disse egenmodene blir deretter tatt inn i MATLAB for videre behandling (som f.eks. plotting av utsving, impedansutregning, osv.). For mindre problemer blir MATLAB-versjonen av FEMP benyttet for hele prosessen. Med mindre problemer menes her problemer som simuleres med opp til 70-80 elementer(avhengig av minne og prosessor). I tillegg benyttes MATLAB-versjonen av FEMP til å simulere mer kompliserte problemer der strukturen som simuleres består av flere materialer, eller det må påføres spesielle grensebetingelser, noe som ikke er beskrevet noe særlig i teorien.

4.2 Testing mot NAFEM-benchmarks



Figur 4.1: Svingeformen for mode 2-6 i NAFEM-testproblemet løst med FEMP, med tilhørende frekvenser.

FEMP er testet mot "benchmarks" fra "National Agency for Finite Element Methods and Standards" (NAFEM) ([28], test nr. FV41). I testproblemet blir det sett på aksesymmetriske vibrasjoner i et fritt sylinderskall med tykkelse 0.4m med indre radius 1.8m. Høyden til sylinderen er 10.0m. Vi ser her på et rent elastisk isotropt materiale med Poissons forhold $\nu = 0.3$, Youngs modulus $E = 200 \cdot 10^9 N/m^2$ og tetthet $\rho = 8000 kg/m^3$.

I figur 4.1 er svingeformene for de 5 laveste realiserbare modene plottet (den laveste moden er ikke realiserbar [28]). Disse stemmer kvalitativt meget bra overens med svingeformene som er avbildet i NAFEM-standarden ([28], test nr. FV41). I tabell 4.2 er egenfrekvensene for problemet

Tabell 4.2: Sammenligning av egenfrekvenser for NAFEM-testproblemet (8-noders element) med verdier som NAFEM oppgir, samt ABAQUS sine verdier for tilsvarende problem. For FEMP-resultatene er relativavviket i forhold til NAFEM-verdiene er gitt i parantes i ppm.

Mode nr.	FEMP [Hz]	NAFEM [Hz]	ABAQUS [Hz]
2	243.50	243.50	243.50
3	377.46	377.46	377.46
4	394.30 (+50ppm)	394.28	394.30
5	397.97 (+75ppm)	397.94	397.97
6	406.43 (+49ppm)	406.41	406.44

Tabell 4.3: Sammenligning av egenfrekvenser for NAFEM-testproblemet regnet ut med FEMP (4-noders element) med verdier som NAFEM oppgir. Sammenligning med "ABAQUS Verification Manual" [29] er ikke tatt med fordi det der er benyttet en annen rutine for 4-noders elementene, og avvikene derfor blir svært store. Relativavviket i forhold til NAFEM-verdiene er gitt i parantes i ppm.

Mode nr.	FEMP [Hz]	NAFEM [Hz]
2	244.01	244.01
3	379.42(+26ppm)	379.41
4	395.44(+76ppm)	395.41
5	401.38(+75ppm)	401.35
6	421.89(+47ppm)	421.87

sammenlignet med NAFEM-standarden sine resultater, samt ABAQUS [29] sine resultater for det samme problemet, der det i alle tre tilfellene er benyttet 8x1 8-noders isoparametriske elementer. Vi ser at avvikene er meget små, mindre enn 80ppm for alle resultatene. Disse avvikene skyldes sannsynligvis forskjeller i egenverdirutinene. Standarden som NAFEM oppgir gjelder spesielt for 8x1 isoparametriske 8-noders elementer, og er ikke den "beste" løsningen som det er mulig å oppnå ved hjelp av FEM [28]. Denne standarden brukes altså til å teste om det 8-noders isoparametriske elastiske elementet fungerer for det isotrope tilfellet. FEMP bestod denne testen.

I tabell 4.3 er egenfrekvensene for de samme problemene sammenlignet, men nå med 16x3 4-noders isoparametriske elementer. Vi ser igjen at det er meget godt samsvar mellom FEMP sine resultater og NAFEM-standarden sine resultater, med et maksimalt avvik på 76ppm. Her ser man at benchmark-verdiene er høyere for 4-noders elementene enn for 8-noders elementene. Dette tyder på at 8-noders elementene gir en bedre løsning enn 4-noders elementene. ABAQUS benytter seg av andre rutiner for 4-noders elementene, slik at sammenligning med ABAQUS ikke er relevant her. FEMP bestod altså også testen for det 4-noders isoparametriske elastiske elementet i det isotrope tilfellet.

Her er altså både 4-noders og 8-noders elementet testet i det elastiske tilfellet, og overensstemmelsen er i begge tilfeller svært god (mindre enn 80ppm avvik). Det er dessverre ikke "benchmarks" for de piezoelektriske elementene i NAFEM-standarden. Disse kan derfor ikke testes på denne måten.

4.3 Det kommersielle FE-programmet ABAQUS

For å få muligheten til å teste FEMP mot en rekke forskjellige problemer, ble det forsøkt å finne et pålitelig FE-program med noen av de samme egenskapene innenfor endelig element analyse som

FEMP. Valget falt på det kommersielle endelig element programmet ABAQUS [1] [29], som blant annet er installert på en CRAY-maskin ved Sintef i Trondheim. [2] Dette er en av hovedårsakene til at ABAQUS ble valgt til testingen. ABAQUS er et stort og mye brukt endelig element program, som kan analysere piezoelektriske strukturer. I testingen mot ABAQUS er det benyttet både egne simuleringer på CRAY-maskinen ved Sintef i Trondheim, og test-resultater fra "ABAQUS Verification Manual" ([29]). Det er foretatt mer enn 50 forskjellige simuleringer med FEMP og ABAQUS uten av det er funnet betydelige avvik (maksimalt avvik i størrelsesorden 5-10ppm). ABAQUS er fullstendig uavhengig av implementeringen i FEMP. Resultater fra ABAQUS er derfor ikke tatt med som sammenligning i alle testene som følger senere. I de fleste tilfeller er allikevel en slik sammenligning utført med tilfredsstillende resultat. I ABAQUS benyttes en Lanczos-metode for utregning av egenverdiene [30].

En stor fordel med sammenligningen med ABAQUS er at man har en nøyaktig problemdefinisjon, i motsetning til hva som er tilfellet i mange artikler. I tillegg er de samme element-typene implementert i både ABAQUS og FEMP, noe som gjør det mulig å foreta nøyaktige sammenligninger. For et eksempel på en input-fil for ABAQUS, se vedlegg B.

4.3.1 Problem fra "ABAQUS Verification Manual"

I "ABAQUS Verification Manual" ([29], 3.5.2) er det beskrevet et testproblem der antiresonansfrekvensene til en sylinder av piezoelektrisk keramikk (PZT4) med tykkelse 20mm, indre radius 5mm og ytre radius 25mm blir funnet. Den øvre og nedre overflaten er elektroder, og det piezoelektriske materialet er polarisert i tykkelsesretningen. Vi har følgende grensebetingelser : Potensialet på nedre elektrode er satt til null, nedre elektrode er fastspent i radiell retning, og ladningen på øvre elektrode er satt til null (krav for antiresonans). I tabell 4.4 er materialparametrene for PZT4 som benyttes i simuleringene listet opp.

Tabell 4.4: Materialparametre for materialet PZT4 som er benyttet i simuleringen for problemet fra "ABAQUS Verification Manual" [29]. Disse avviker noe fra materialparametrene for PZT4 gitt i [62].

c_{11}^E	$13.9 \cdot 10^{10} N/m^2$
c_{12}^E	$7.784 \cdot 10^{10} N/m^2$
c_{13}^E	$7.428 \cdot 10^{10} N/m^2$
c_{33}^E	$11.54 \cdot 10^{10} N/m^2$
c_{44}^E	$2.564 \cdot 10^{10} N/m^2$
e_{31}	$-5.207 C/m^2$
e_{33}	$15.08 C/m^2$
e_{15}	$12.710 C/m^2$
ϵ_{11}^S	$5.872 \cdot 10^{-9} F/m$
ϵ_{33}^S	$6.752 \cdot 10^{-9} F/m$
rho	$5555 kg/m^3$

Dette problemet avviker fra det vi har sett på i teorien, ved at vi her ser på et sylinderskall, mens vi tidligere kun har sett på massive sylindere. Et slikt problem løses enkelt i FEMP ved at hjørnene G1 og G2 defineres som $G1 = [r_1, 0]$, $G2 = [r_2, h]$ der r_1 er den indre radiusen, r_2 er den ytre radiusen, og h er høyden til sylinderen (se vedlegg E.1.2 for definisjon av G1 og G2).

I tabell 4.5 er resultatene fra ABAQUS sammenlignet med resultatene fra FEMP for problemet beskrevet ovenfor. I begge tilfeller er det benyttet 2x2 8-noders isoparametriske elementer. Vi

---

[1] I ABAQUS er retningene 2 og 3 byttet om for definisjonen av spenningsvektoren/tøyningsvektoren, slik at man må bytte om rekke/søyle 2 og 3 i konstantmatrisene i forhold som det som er gjennomgått i teorien her.

[2] Arbeidet med denne oppgaven har fått støtte fra Norges Forskningsråd (Tungregneprosjektet) gjennom regnetid på CRAY.

Tabell 4.5: Sammenligning av antiresonansfrekvenser for problem fra "ABAQUS Verification Manual"[29] med verdier fra FEMP for 2x2 8-noders isoparametriske elementer.

Mode nr.	FEMP [kHz]	ABAQUS [kHz]	Avvik
1	44.640	44.640	-
2	52.024	52.024	-
3	65.493	65.493	-
4	87.054	87.054	-
5	111.629	111.629	-
6	120.460	120.460	-
7	123.680	123.680	-
8	143.271	143.271	-
9	174.761	174.761	-
10	176.480	176.480	-

ser at resultatene er identiske opp til så mange desimaler som ABAQUS oppgir i svaret, slik at overensstemmelsen må sies å være meget bra. Det er også utført egne simuleringer med ABAQUS som bekrefter resultatene fra [29].

4.3.2 Mer omfattende sammenligning med ABAQUS

I vedlegg B er det tatt med omfattende sammenligninger mellom simuleringer i FEMP og simuleringer i ABAQUS. Her er simulerte resonansfrekvenser for en rekke piezoelektriske skiver simulert med FEMP og ABAQUS sammenlignet i tabeller, der også relativavviket (i ppm) mellom simuleringene i ABAQUS og simuleringene i FEMP er tatt med. De samme resultatene er vist grafisk i figur 4.6.

Av disse testene ser man at avvikene mellom simuleringene i FEMP og simuleringene i ABAQUS er på under 5 ppm for alle egenverdiene som er regnet ut. Dette må anses som meget bra.

I de samme tabellene er det også tatt med sammenligninger med resultater fra doktoravhandlingen til N. Guo [10]. Her er det langt større avvik. Dette blir diskutert nedenfor i seksjon 4.4.

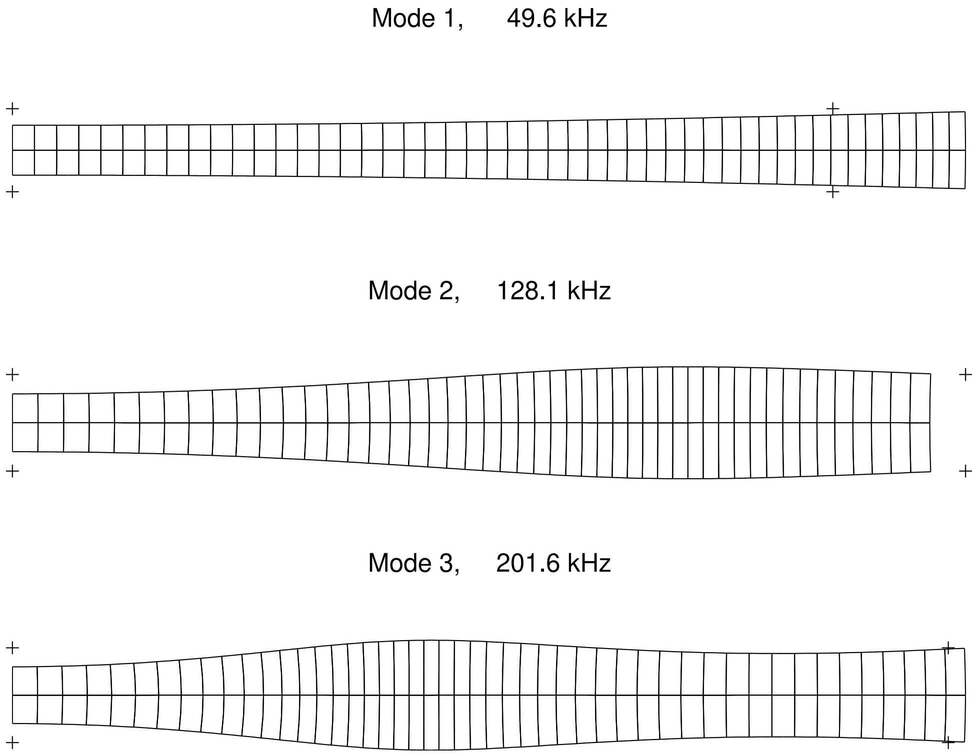
4.4 Sammenligning med simuleringer og målinger av N. Guo

I arbeidet med denne oppgaven ble det som tidligere nevnt tatt utgangspunkt i en doktoravhandling av N. Guo [10]. I tillegg kommer artikler av N.Guo og P.Cawley som inneholder en del av de samme resultatene [49] [50] [51]. I [10] og delvis i [49] [50] [51] blir det blant annet listet opp en rekke simulerte resonansfrekvenser for piezoelektriske skiver av materialene PZT5A og PZT5H. Guo benytter 8-noders isoparametriske elementer, det samme som blir benyttet i FEMP, og oppgir ellers hvilke simuleringsparametre som blir benyttet.

I seksjonene 4.4.1-4.4.3 er simuleringer fra FEMP sammenlignet med tilsvarende simuleringer fra [10] (og delvis fra [49]) for tre forskjellige D/T-forhold, D/T=20 (PZT5A), D/T=5 (PZT5H) og D/T=0.5 (PZT5A). I alle tilfellene er det benyttet samme elementoppdeling for FEMP som oppgitt i Guo sine arbeider. For materialparametre se seksjon 2.3.3 eller [62], [10].

I seksjon 4.4.4 er det utført sammenligninger med plott av f*T (frekvens*Tykkelse) mot D/T (Diameter/Tykkelse) for materialet PZT5A i D/T-området 0.1-20 med data simulert av N.Guo. Disse dataene har jeg hatt tilgang til gjennom CMR, som har fått tilgang til dem gjennom korrespondanse med N. Guo [8]. I vedlegg B er det tatt med tabeller med omfattende sammenligninger av resultater fra FEMP med disse dataene fra Guo [8]. I tillegg er egne simuleringer med ABAQUS tatt med i disse tabellene.

4.4.1 Skive med D/T=20


Mode 1, 49.6 kHz

Mode 2, 128.1 kHz

Mode 3, 201.6 kHz

Figur 4.2: Utsvinget for de første 3 modene for skiven av PZT5A med D/T-forhold lik 20 beskrevet i teksten. De samme modene er vist i [10]. Overensstemmelsen er kvalitativt meget bra. Utsvinget er overdrevet for på en bedre måte å vise hvordan svingemodene ser ut.

En skive med tykkelse 2.03mm og diameter 40.1mm av materialet PZT5A er analysert. I tabell 4.6 er simuleringer med FEMP og simuleringer fra [10] for denne skiven sammenlignet. I begge tilfeller er det benyttet 48 elementer i radiell retning og 2 elementer i tykkelsesretningen ved simuleringene. I figur 4.2 er utsvinget vist for de 3 laveste modene. Sammenligninger med svingeformer i [10] viser at overensstemmelsen er kvalitativt meget bra. Svingeformene fra [10] er ikke tatt med her.

Av tabellen ser man at overensstemmelsen er meget bra for de laveste modene for skiven med D/T=20. For høyere moder blir avvikene etterhvert relativt store. Det ser også ut til at FEMP finner færre symmetriske moder enn det Guo gjør, slik at man får en forskyvning i tabellen. Det ser man blant annet fra den modale konstanten, som må være i samme størrelsesorden for samme moder. Vi ser for eksempel at moden med den største modale konstanten er mode 29 i FEMP sine resultater, og mode 32 i Guo sine resultater (uthevet i tabellen). Tilsvarende forskyvning av modene sees også ved å sammenligne formen på svingemodene i [10] med tilsvarende svingemoder fra FEMP (dette er ikke vist her). Denne forskyvningen av moder gjør at avvikene for de enkelte modene egentlig ikke er så store som de ser ut i tabellen. For tykkelsesmoden gir den en-dimensjonale Masonmodellen en frekvens for tykkelses-moden på 953.2kHz dersom verdien på materialkonstanten c_{33}^D regnes ut fra material-settet som blir brukt i simuleringene i denne oppgaven.

I tabell 4.7 er den samme sammenligningen som ovenfor gjort, men her er det regnet med en bedre elementoppdeling i tykkelsesretningen (totalt 5x40 8-noders isoparametriske elementer). Av tabellen ser man at når man øker antallet elementer i tykkelsesretningen får man bedre overensstemmelse med resultatene fra [10] for noen frekvenser (særlig størrelsen på den modale konstanten for tykkelsesmoden), og dårligere overensstemmelse for andre frekvenser, slik at det ikke er for dårlig elementoppdeling som er årsaken til avvikene mellom Guo og FEMP. Ved sammenligning av tabell 4.7 med tabell 4.6 er det interessant å se at det blir relativt store forskyvninger av de høyere modene (nedover) med bedre elementoppløsning. Dette indikerer at elementoppløsningen benyttet i [10] er for dårlig til å beskrive alle modene på en tilstrekkelig god måte, noe som ble bekreftet av N. Guo i korrespondanse i januar/mars-1996 [9].

Simuleringer for det samme problemet ble også utført ved hjelp av programmet ABAQUS (se vedlegg B, der tabell B.9 svarer til tabell 4.6 ovenfor) for denne skiven. I denne tabellen er det også tatt med prosentvise relativavvik mellom FEMP og Guo-resultater, samt relativavvik mellom FEMP og ABAQUS-resultater i ppm. ABAQUS gir i alle tilfellene resultater som stemmer meget godt overens med FEMP sine resultater, slik at avvikene mellom ABAQUS og FEMP er mindre enn 5ppm, til tross for de store avvikene man ser mellom FEMP og Guo (opp til 8.2% relativavvik for denne skiven). Som beskrevet ovenfor kan en del av dette store avviket forklares ved forskyvning av moder.

Ved sammenligning med de eksperimentelle resultatene til Guo vist i doktoravhandlingen til N. Guo [10] er det vanskelig å avgjøre om FEMP eller Guo sine FEM-simuleringer gir best resultater. Det er uansett en del usikkerhet i materialparametrene, slik at perfekt overensstemmelse ikke er å forvente. For en analyse av årsaken til avvikene mellom FEMP og resultatene fra [10], se seksjon 4.4.5.

Tabell 4.6: Sammenligning av simulerte resonansfrekvenser/modale konstanter fra FEMP med simulerte resonansfrekvenser/modale konstanter for en piezoelektrisk skive av materialet PZT5A med diameter 40.1mm og tykkelse 2.03mm (D/T=20) fra doktoravhandling av Guo. Det blir benyttet 2x48 8-noders elementer. I tabell B.9 er det i tillegg til resonansfrekvensene i denne tabellen også tatt med en sammenligning med resultater fra ABAQUS, og prosentvise avvik.

Mode nr.	Guo f [kHz]	FEMP f [kHz]	Guo r_A $[F/s^2]$	FEMP r_A $[F/s^2]$
1	49.6	49.6	260.3	260.3
2	128.1	128.1	215.5	215.5
3	201.6	201.6	214.1	214.1
4	272.1	272.1	215.9	215.9
5	338.5	338.6	217.8	217.7
6	399.9	400.0	218.1	218.0
7	455.2	455.4	215.9	216.4
8	503.8	504.4	212.1	215.6
9	545.9	547.6	211.3	225.6
10	582.3	586.0	225.2	276.7
11	614.0	619.7	288.7	493.1
12	640.6	642.6	539.6	575.8
13	657.7	666.2	465.4	37.3
14	677.6	699.5	18.9	4.6
15	703.1	735.4	4.8	29.1
16	729.5	772.9	22.1	63.5
17	756.3	811.7	40.3	128.2
18	783.5	847.5	63.9	0.8
19	811.3	849.8	102.5	190.0
20	839.4	852.3	179.0	98.4
21	867.7	856.0	360.4	76.4
22	873.2	864.5	8.6	< 0.1
23	876.4	873.1	6.3	250.9
24	880.0	882.0	55.7	7.1
25	887.0	892.1	39.5	1289.9
26	893.2	900.6	410.9	534.8
27	896.6	926.4	798.5	4869.6
28	914.2	939.6	1188.0	145.2
29	924.8	**957.7**	1480.0	**20523.8**
30	943.5	969.4	4189.0	9101.3
31	955.9	985.1	2368.0	103.0
32	**964.9**	991.5	**26010.0**	2323.2
33	975.5	1008.5	26.3	127.1
34	991.8	1029.7	2455.0	470.4
35	995.2	1038.1	324.0	246.3
36	1009.9	1053.4	49.4	< 0.1
37	1026.3	1074.4	635.1	232.1
38	1040.2	1089.5	84.1	43.1
39	1051.1	1103.4	37.0	4.8
40	1064.4	1121.3	265.0	118.5

Tabell 4.7: Sammenligning av simulerte resonansfrekvenser/modale konstanter fra FEMP med simulerte resonansfrekvenser/modale konstanter for en piezoelektrisk skive av materialet PZT5A med diameter 40.1mm og tykkelse 2.03mm (D/T=20) fra doktoravhandling av Guo der det i FEMP-simuleringene er benyttet 5x40 8-noders isoparametriske elementer.

Mode nr.	Guo f [kHz]	FEMP f [kHz]	Guo r_A $[F/s^2]$	FEMP r_A $[F/s^2]$
1	49.6	49.6	260.3	260.3
2	128.1	128.1	215.5	215.5
3	201.6	201.6	214.1	214.1
4	272.1	272.0	215.9	215.8
5	338.5	338.5	217.8	217.5
6	399.9	399.8	218.1	217.5
7	455.2	455.0	215.9	215.2
8	503.8	503.7	212.1	213.7
9	545.9	546.5	211.3	225.0
10	582.3	584.3	225.2	291.3
11	614.0	615.6	288.7	610.0
12	640.6	633.0	539.6	270.0
13	657.7	660.9	465.4	1.5
14	677.6	695.1	18.9	34.6
15	703.1	730.9	4.8	71.4
16	729.5	767.8	22.1	129.2
17	756.3	797.5	40.3	0.7
18	783.5	799.8	63.9	16.4
19	811.3	802.8	102.5	13.9
20	839.4	805.6	179.0	268.0
21	867.7	809.2	360.4	0.1
22	873.2	811.8	8.6	53.8
23	876.4	829.8	6.3	242.9
24	880.0	843.7	55.7	511.1
25	887.0	859.2	39.5	275.1
26	893.2	881.4	410.9	1068.1
27	896.6	898.1	798.5	337.9
28	914.2	920.1	1188.0	2013.9
29	924.8	942.5	1480.0	1732.8
30	943.5	**956.9**	4189.0	**26429.6**
31	955.9	961.7	2368.0	2124.5
32	**964.9**	976.6	**26010.0**	3619.6
33	975.5	989.5	26.3	1.2
34	991.8	1003.3	2455.0	741.0
35	995.2	1012.1	324.0	337.6
36	1009.9	1033.3	49.4	176.1
37	1026.3	1047.5	635.1	259.0
38	1040.2	1059.7	84.1	1.7
39	1051.1	1078.2	37.0	147.9
40	1064.4	1093.7	265.0	66.1

4.4.2 Skive med D/T=5

Tabell 4.8: Sammenligning av egenfrekvenser for en piezoelektrisk skive av materialet PZT5H [62] [10] med diameter 50mm og tykkelse 10mm (D/T=5) med FEM resultater fra doktoravhandling av Guo samt målte resultater fra Guo. Relativavvikene for FEMP og Guo sine endelig element simuleringer i forhold til Guo sine målinger står i parantes. I kolonnen til høyre er relativavviket mellom endelig element beregningene fra FEMP og endelig element beregningene fra Guo [10] tatt med i %.

Mode	Målt f [kHz]	FEMP f [kHz]	Guo FEM f [kHz]	Rel. avvik FEMP/FEM [10]
1	38.5	37.7 (-2.1%)	37.6 (-2.3%)	-0.3%
2	91.0	90.4 (-0.7%)	90.1 (-1.0%)	-0.3%
3	120.5	121.6 (0.9%)	121.1 (0.5%)	-0.4 %
4	155.5	132.8 (-14.6%)	131.7 (-15.3%)	-0.8%
5	162.5	150.0 (-7.7%)	157.3 (-3.2%)	4.9%
6	179.5	173.2 (-3.5%)	174.2 (-3.0%)	0.6%
7	-	183.1	185.1	1.1%
8	197.5	195.1 (-1.2%)	200.6 (1.6%)	2.8%
9	202.0	211.3 (4.6%)	212.1 (5.0%)	0.4%
10	-	219.2	220.6	0.6%
11	233.5	227.4 (-2.6%)	240.2 (2.9%)	5.6%
12	-	248.1	251.6	1.4%

En skive med tykkelse $10mm$ og diameter $50mm$ av materialet PZT5H er analysert. I tabell 4.8 er simuleringer med FEMP og simuleringer fra [10] for denne skiven sammenlignet. I simuleringen i FEMP er det benyttet 16 elementer i radiell retning og 4 elementer i tykkelsesretningen ved simuleringen. Det er litt uklart om det er benyttet samme elementoppdeling i [10]. Målte resultater fra [10] er tatt med i tabellen, og det er foretatt prosentvise sammenligninger i forhold til målte resultater for både FEMP og resultater fra [10], og mellom FEMP resultater og endelig element resultater fra [10]

Vi ser at vi også her får en del avvik, selv om avvikene ikke er like store som for skiven med D/T=20. For en rekke moder er det bra overensstemmelse. Avvikene mellom FE-simuleringene til Guo og FEMP sine resultater er størst for frekvensene 157/150 kHz, 200/195 kHz og 240/227 kHz, der avviket er oppe i nesten 6%. Det er ikke mulig å se noen sammenheng i forbindelse med stor/liten verdi av den modale konstanten eller koblingsfaktoren for disse frekvensene der avvikene er størst (disse er ikke tatt med i tabellen). Av tabellen ser man også at det er bedre overensstemmelse mellom simuleringene fra FEMP og de målte resultatene fra Guo enn for simuleringene til Guo for alle frekvensene bortsett fra 3. Dette forteller oss ikke så mye, siden det kan være relativt stor usikkerhet i materialparametrene for PZT5H, men det viser iallefall at det ikke er bedre overensstemmelse mellom resultatene fra [10] og de målte resultatene enn det er mellom resultatene fra FEMP og de målte resultatene.

For en analyse av årsaken til avvikene mellom FEMP og resultatene fra [10], se seksjon 4.4.5.

Siden det ved denne sammenligningen er benyttet et annet materiale (PZT5H) enn ved de andre testene (PZT5A) indikerer denne sammenligningen at det ikke er feile materialparametre som er skyld i avvikene. Her er det ikke gjort tilsvarende simuleringer med ABAQUS.

Tabell 4.9: Sammenligning av resonansfrekvenser for en piezoelektrisk sylinder av materialet PZT5A med diameter 5.00mm og tykkelse 10.07mm (D/T=0.5) med FEM resultater fra doktoravhandling av Guo samt målte resultater fra Guo. Enheten for r_A er $[F/s^2]$. Relativavvikene for FEMP og Guo sine endelig element simuleringer i forhold til Guo sine målinger står i parantes. I kolonnen til høyre er relativavviket for resonansfrekvensene mellom endelig element beregningene fra FEMP og endelig element beregningene til Guo [10] tatt med i %.

Målt f [kHz]	Målt r_A	FEMP f [kHz]	FEMP r_A	Guo FEM f [kHz]	Guo FEM r_A	Rel. avvik FEMP/FEM [10]
134.0	9.2	133.4 (-0.4%)	9.4 (2.2%)	133.4 (-0.4%)	9.4 (2.2%)	-
-	-	388.2	0.9	353.5	0.4	9.8%
405.0	3.2	404.4 (-0.1%)	3.1 (-3.1%)	389.3 (-3.9%)	2.1 (-34.4%)	3.9%
478.6	0.8	480.9 (0.5%)	0.7 (-12.5%)	486.7 (1.7%)	3.4 (325.0%)	-1.2%
547.1	3.3	548.4 (0.2%)	4.4 (33.3%)	535.2 (-2.2%)	3.2 (-3.0%)	2.5%
590.4	1.4	604.6 (2.4%)	1.4 (-)	583.9 (-1.1%)	0.3 (-78.6%)	3.5%

4.4.3 Sylinder med D/T=0.5

En sylinder av materialet PZT5A med tykkelse 10.07*mm* og diameter 5.00*mm* blir analysert. I tabell 4.9 er endelig element simuleringer fra doktoravhandlingen til Guo samt målte resultater fra Guo sammenlignet med resultater fra FEMP. Det blir benyttet 8x4 8-noders isoparametriske elementer for endelig element simuleringene både i FEMP og i [10]. FEMP sine resultater ser ut til å stemme mye bedre overens med de målte resultatene enn Guo sin FEM-løsning, unntatt for mode nummer 6. Ved bruk av bedre elementoppløsning, får man verdien 594kHz for denne moden, og også en lavere verdi for den modale konstanten for mode nr. 5 (dette er ikke tatt med her), som forklarer en del av årsaken til disse avvikene. Selv om det også for denne skiven ser ut til å være bedre overensstemmelse mellom simulerte resultater fra FEMP og de målte resultatene til Guo [10] enn for de simulerte resultatene til Guo, er det vanskelig å trekke noen sikre konklusjoner om hvilket program som regner riktigst.

Avvikene mellom FEMP og Guo sine FEM-resultater er store, særlig for mode nr. 2 der avviket er på nesten 10%. Det er også svært store avvik for de modale konstantene (flere hundre prosent). For analyse av årsaken til disse avvikene, se seksjon 4.4.5.

4.4.4 Frekvensspektre for PZT5A

Her blir et plott av frekvens*Tykkelse(f*T) mot Diameter/Tykkelse(D/T) kalt et frekvensspektrum. Det har vært spesielt viktig å sammenligne frekvensspekteret for PZT5A-skiver/sylindre gitt i Guo med egne simuleringer i denne oppgaven, fordi man da får en sammenligning over et stort frekvensområde på en gang, og det er enkelt å se hvor god overensstemmelsen er (kvalitativt). Ved sammenligning av resultater har vi hatt tilgang til Guo sine simulerte data [9], slik at det har vært enkelt å foreta skikkelige sammenligninger (en del feilkilder forsvinner).

Som vist ovenfor er det en del avvik mellom simuleringene i FEMP og hos Guo for enkelt-skiver og sylindere av materialet PZT5A. Det er følgelig å forvente at det opptrer tilsvarende forskjeller i frekvensspekteret, men ved hjelp av et frekvensspektrum er det lettere å se hvor avvikene er størst. For å visualisere avvikene mellom simuleringer fra FEMP og Guo på en best mulig måte, har vi valgt å plotte f*T mot D/T-kurver fra både FEMP og Guo i samme diagram. I alle tilfellene er resultater fra simuleringer med FEMP plottet med heltrukket linje, og resultater som er oppgitt fra Guo plottet med stipplet linje. På alle frekvensspekterene er verdiene for frekvensene for LE-, TE- og TS-modene predikert fra Mason-type modeller plottet(se vedlegg E.2.8 for detaljer).

Det er valgt å gjøre 3 forskjellige sammenligninger med dataene fra Guo:

- Sammenligning av resultater fra Guo og FEMP der det ved simuleringene i FEMP er benyttet de samme parametre og elementoppdelinger som oppgitt i Guo. Se figur 4.3 for denne sammenligningen. Elementoppdelingen oppgitt av Guo ved korrespondansen er sammenfattet i tabell 4.10 (avviker noe fra det oppgitt i [10]. Det er benyttet 8-noders isoparametriske elementer, og integrasjonen er utført ved hjelp av 3x3-punkts Gauss-integrasjon. Tykkelsen på elementene varierer fra element til element, men dette har ingen innvirkning på frekvensspekteret.

  Man ser av figur 4.3 at det er relativt store avvik mellom resultatene til FEMP og Guo for de høyere modene, og for lave D/T-verdier. For de laveste modene ved høye D/T-forhold ser det ut til at overensstemmelsen er bra.

- Sammenligning av de samme dataene fra Guo med resultater fra FEMP der det er benyttet flere elementer i tykkelsesretningen enn det som er benyttet av Guo, for å få en bedre beskrivelse av modene omkring moden som finnes som TS-moden ut fra en en-dimensjonal Mason-type modell. I tillegg er det benyttet en dynamisk variasjon i antall elementer (tabell 4.11) slik at det for alle D/T-forhold er omtrent like mange elementer pr. bølgelengde (dette begrepet er beskrevet i kapittel 5). Det fører til at man unngår hakkete kurver der hvor det blir gått fra en elementoppdeling til en annen. Se figur 4.4 for denne sammenligningen.

  Se seksjon 5.2 for teorien bak den dynamiske elementoppdelingen. Det er her benyttet 5 elementer pr. bølgelengde i r-retningen (kapittel 5) for en maksimal f*T-verdi på 2250 kHz*mm. 5 elementer pr. bølgelengde gir 3 elementer i tykkelsesretningen dersom man benytter kompresjonsbølgelengden som krav, og 7 elementer i tykkelsesretningen dersom man benytter skjærbølgelengden som krav. Vi har her valgt å benytte 4 elementer i tykkelsesretningen. Konvergenstestene i seksjon 5.3.2 indikerer at det gir et maksimalt avvik fra de "fullt konvergerte" verdiene på rundt 0.5% for f*T-verdier lavere enn 2250 kHz*mm. Elementoppdelingen er sammenfattet i tabell 4.11 for de ulike skivene.

Tabell 4.10: Elementoppdelingen som er brukt for forskjellige verdier av D/T hos data fra Guo [8] og i FEMP ved simulering av D/T-plott. Denne elementoppdelingen avviker noe fra den gitt i doktoravhandlingen til N.Guo [10].

D/T	Elementer i r-retning	Elementer i z-retning
0.1-1.5	4	8
2.0-5.0	8	4
5.5-15.0	32	2
15.5-20.0	48	2

Av figur 4.4 ser man at elementoppdelingen som blir benyttet av Guo er for dårlig til å få beskrevet tykkelses-skjær-modene predikert av en Mason-type modell tilstrekkelig godt. TS-terassen kommer for en alt for høy verdi av f*T i Guo sine simuleringer, i forhold til den analytisk predikerte verdien som er markert på figuren med en horisontal linje markert TS. Dette er bekreftet av Guo i korrespondanse [9]. I tillegg ser man en liten forskyvning nedover av de fleste andre svingemodene, men forskjellene er langt mindre enn for modene omkring TS-terrassen.

- Sammenligning av de samme resultatene fra Guo med resultater fra FEMP der den piezoelektriske konstanten e_{15} er satt til null i analysen. Det er benyttet samme elementoppdeling som Guo benytter for denne sammenligningen, som er vist grafisk i figur 4.5.

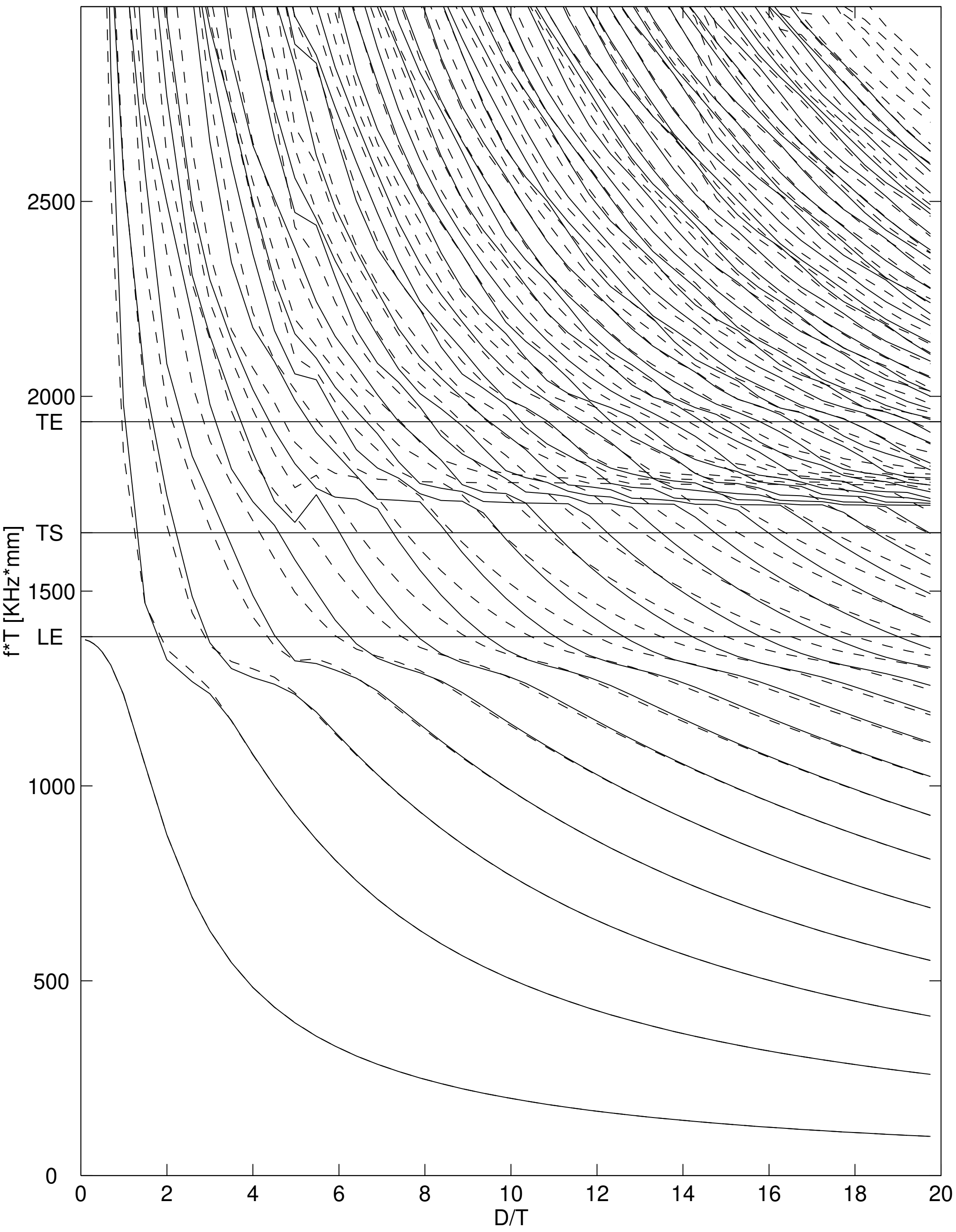
  Sammenligningen er tatt med her fordi den gir den beste overensstemmelsen mellom FEMP og Guo-resultater, særlig for lave D/T-verdier der avvikene er store. Ved simuleringer for sylinderen med D/T-forhold lik 0.5 av materialet PZT5A beskrevet i seksjon 4.4 gir FEMP nesten identiske resultater som de oppgitt av Guo både for resonansfrekvenser og modale konstanter når denne tilnærmelsen gjøres.

> Den gode overensstemmelsen for lave D/T-verdier med e_{15} kan være en tilfeldighet, men sammenligningen er allikevel tatt med her. Det er foretatt mer enn 15 forskjellige simuleringer av hele frekvensspekteret der verdiene på materialparametrene er forandret på ulike måter for å prøve å finne årsaken til avvikene mellom resultatene fra FEMP og [10] og [8].

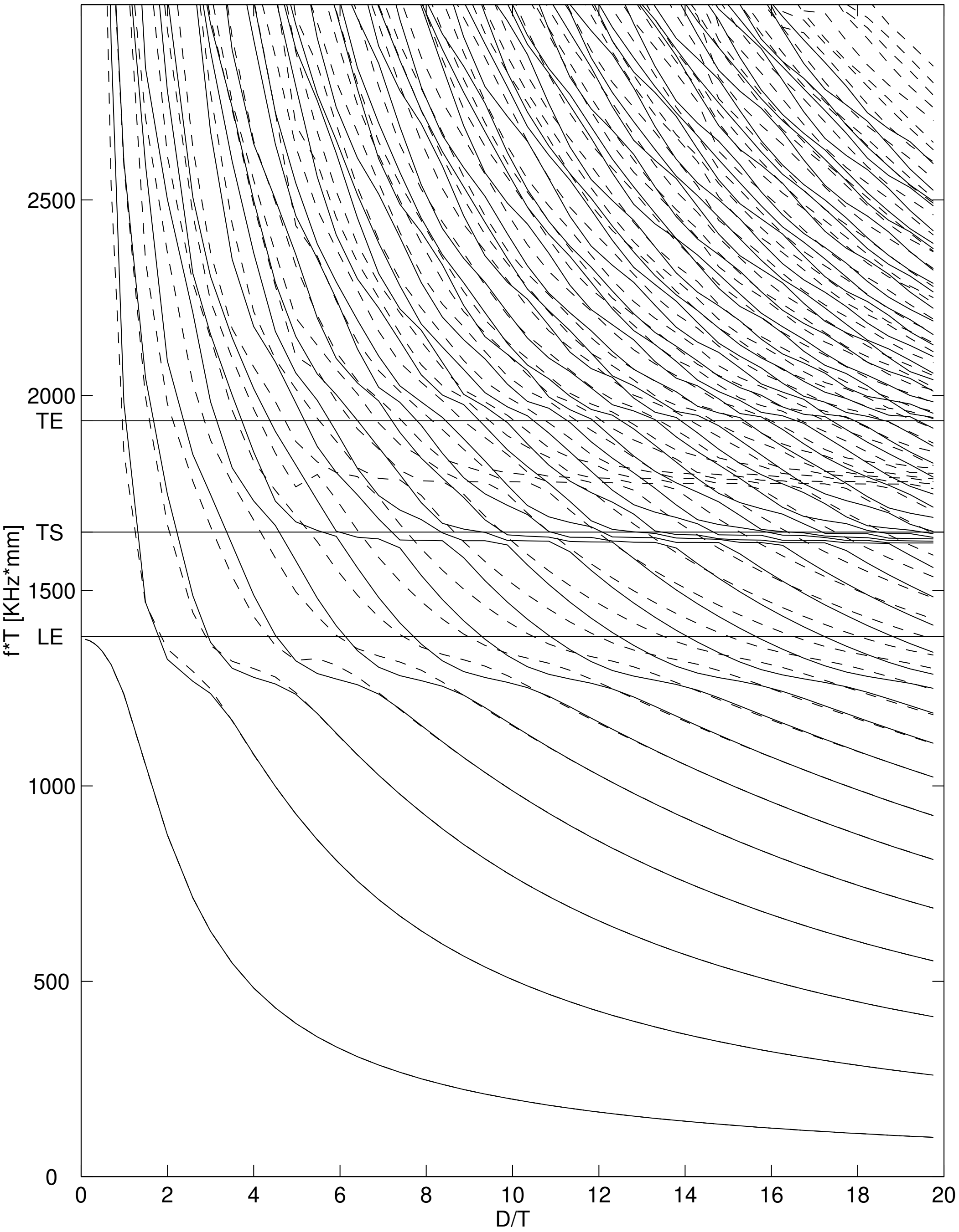
I seksjon B er det tatt med tabeller der simulerte resonansfrekvenser fra FEMP er sammenlignet med simulerte resonansfrekvenser fra ABAQUS og simulerte resonansfrekvenser fra Guo [8] for 9 forskjellige skiver som inngår i D/T-spekteret for PZT5A som er vist i figur 4.3. I figur 4.6 er resultatene fra FEMP sammenlignet med resultatene fra ABAQUS i et frekvensspektrum, der resultatene fra ABAQUS er merket av med kryss i figuren for de 9 utvalgte skivene, mens resultatene fra FEMP er tegnet som heltrukne linjer (for alle skivene som inngår i frekvensspekeret i figur 4.3. Av denne figuren ser man at overensstemmelsen mellom resultatene fra FEMP og ABAQUS ser ut til å være meget bra over hele D/T-området.

Tabell 4.11: Elementoppdelingen som er brukt for forskjellige verdier av D/T i FEMP ved simulering av D/T-plott med dynamisk variasjon av antall elementer i hver retning for at det alltid skal være omtrent like mange elementer pr. bølgelengde. For lave D/T-forhold (mindre enn ca. 2) vil bølgelengdene som er benyttet som grunnlag for utregning av element-oppdelingen ikke være riktige, slik at elementoppdelingene som blir brukt her er for dårlige. Dette er tatt med som et eksempel på en bedre elementoppdeling. .

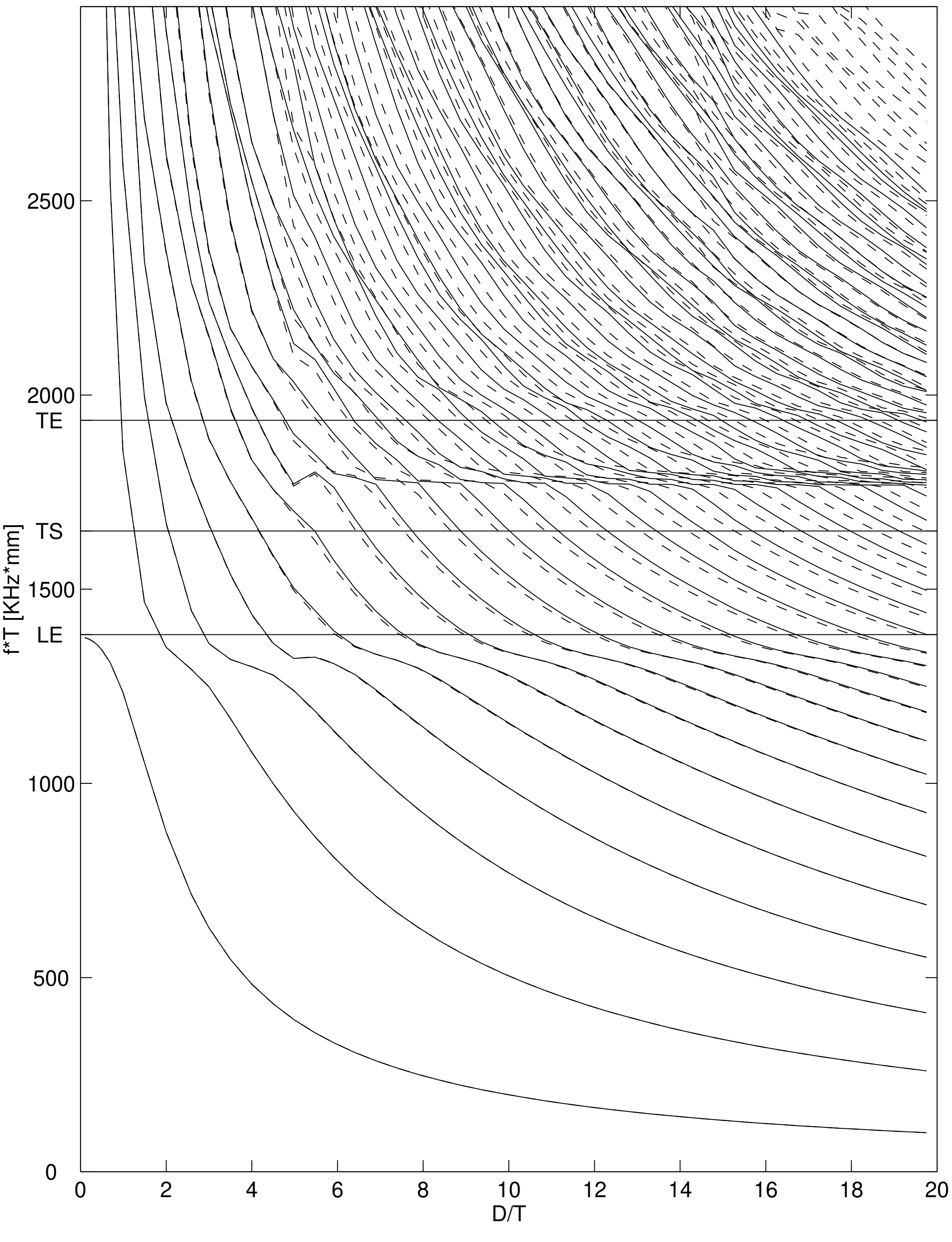
D/T	Elementer i r-retning	Elementer i z-retning
0.10	1	4
0.20	1	4
0.30	1	4
0.40	1	4
0.50	1	4
0.70	1	4
0.99	2	4
1.49	3	4
2.00	4	4
2.59	5	4
3.00	6	4
3.50	6	4
4.00	7	4
4.50	8	4
4.98	9	4
5.47	10	4
5.91	11	4
6.40	12	4
6.90	13	4
7.39	14	4
7.88	15	4
8.37	15	4
8.87	16	4
9.36	17	4
9.88	18	4
10.34	19	4
10.84	20	4
11.33	21	4
11.82	22	4
12.32	23	4
12.81	24	4
13.30	25	4
13.79	26	4
14.29	26	4
14.78	27	4
15.27	28	4
15.76	29	4
16.26	30	4
16.75	31	4
17.24	32	4
17.73	33	4
18.23	34	4
18.72	35	4
19.21	36	4
19.75	37	4



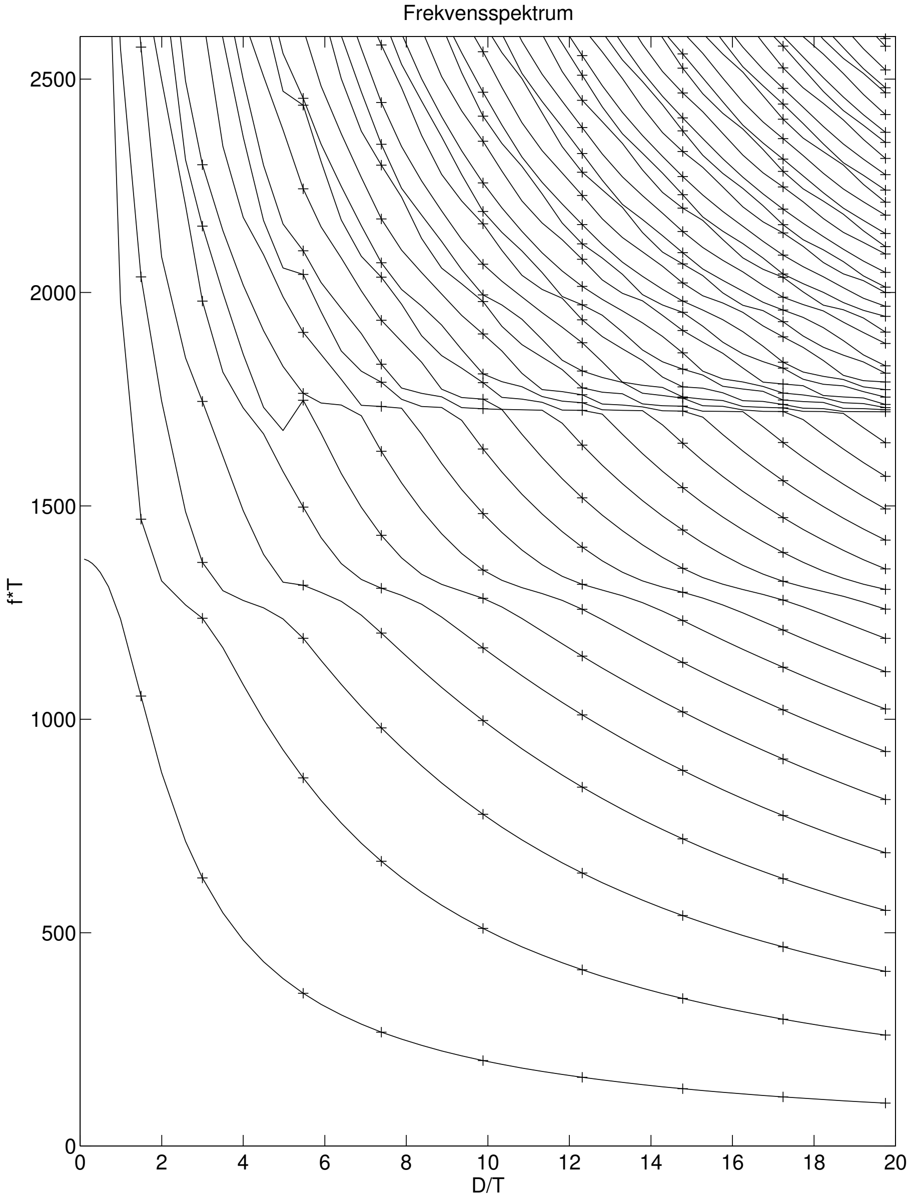
Figur 4.3: f*T mot D/T - diagram for resonansfrekvenser for materialet PZT5A i D/T-området 0.1-20. Sammenligning av resultater fra Guo (stipplet linje) og FEMP (heltrukket linje) der det ved simuleringene i FEMP er benyttet de samme parametre og elementoppdelinger som oppgitt i tabell 4.10.



Figur 4.4: f*T mot D/T - diagram for resonansfrekvenser for materialet PZT5A i D/T-området 0.1-20. Sammenligning av resultater fra Guo (stipplet linje) og FEMP (heltrukket linje) der det ved simuleringene i FEMP er benyttet en dynamisk variasjon i antall elementer (tabell 4.11), slik at det for alle D/T-forhold er omtrent like mange elementer pr. bølgelengde.



Figur 4.5: f*T mot D/T - diagram for resonansfrekvenser for materialet PZT5A i D/T-området 0.1-20. Sammenligning av resultater fra Guo (stipplet linje) og FEMP (heltrukket linje) der den piezoelektriske konstanten e_{15} er satt til null ved simuleringen i FEMP. Det er benyttet samme elementoppdeling som Guo benytter.



Figur 4.6: f*T mot D/T - diagram for resonansfrekvenser for materialet PZT5A i D/T-området 0.1-20. Sammenligning av resultater fra FEMP (heltrukket linje) og ABAQUS-simuleringer for 9 forskjellige skiver/sylindere ('+' for hver simulert resonansfrekvens). Det er benyttet samme elementoppdeling som Guo benytter. De samme FEMP resultatene som er vist i figur 4.3 er benyttet i denne figuren. ABAQUS-resultatene er tabulert i seksjon B.

4.4.5 Årsaker til avvikene

Det er uklart hva som er årsaken til avvikene mellom FEMP og Guo sine resultater, da det i FEMP er benyttet samme materialparametre og elementoppdeling som det Guo oppgir for alle skivene som blir simulert. På grunn av de store avvikene ved sammenligninger med resultatene i doktoravhandlingen til Guo i denne seksjonen og i seksjon 4.4, ble det tatt kontakt med Guo for å avklare en del forhold omkring de forskjellige simuleringene [9]. Ut fra Guo sitt svar på henvendelsen kan det trekkes følgende konklusjoner:

- En mulig årsak til avvikene kan være at egenverdiene i [10] blir funnet ut fra et redusert matrisesystem basert på antall egenverdier som regnes ut (ved hjelp av Lanczos-metoden [5]) istedenfor det fulle matrisesystemet slik som i FEMP. I følge Guo [9] varierte resultatene mye med antall moder som ble regnet ut, slik at nøyaktigheten i resultatene burde være langt bedre dersom alle egenverdiene blir regnet ut, slik som det blir gjort i FEMP.

  Det er forsøkt å benytte Lanczos-metoden for løsning av egenverdisystemet i FEMP. Det viste seg at avvikene mellom denne metoden for å løse egenverdisystemet, og metoden som vanligvis benyttes i FEMP, er mye mindre enn forskjellene mellom FEMP og Guo sine simuleringer, selv om det i noen tilfeller kom inn ”nye” moder, som ikke er en løsning på problemet.

- En annen mulig årsak til avvikene kan være at det i følge Guo [9] er benyttet materialparametre relatert til ”plane-strain”-tilfellet i hans simuleringer. Det er ikke helt klart hva han mener med dette i det aksesymmetriske tilfellet, og forsøk på å forandre materialparametrene for å få resultater som er identiske med Guo sine resultater har ikke vært vellykkede. Et forsøk på å forandre materialparametrene ved å sette den piezoelektriske konstanten e_{15} til null er vist i figur 4.5 for hele D/T-spekteret, men det er lite trolig at det er dette som er gjort i [10].

Det må konkluderes med at det foreløpig ikke er klarlagt hva som er årsaken til avvikene mellom resultatene fra FEMP og simulerte resultater i [10].

Siden FEMP og ABAQUS gir identiske resultater for hele D/T-spekteret som er studert her, og ABAQUS er en helt uavhengig implementering, er dette en sterk indikasjon på at resultatene fra FEMP er riktige, og at avvikene mellom FEMP og [10] skyldes at problemet er implementert på en annen måte i [10] enn det som er beskrevet i denne oppgaven, eller at avvikene skyldes numeriske feil.

4.5 Ytterligere testing av egenverdiutregningen i FEMP

Det er publisert en rekke artikler innenfor endelig element analyse av piezoelektriske strukturer. På grunn av problemene med å reprodusere resultatene fra doktoravhandlingen til N. Guo [10], er FEMP her sammenlignet med de artiklene som er funnet der det regnes ut resonansfrekvenser og/eller antiresonansfrekvenser for ***aksesymmetriske strukturer***. I tillegg er det tatt med en test mot resultater for en lang stang, der problemet også kan løses ved hjelp av 2-dimensjonale simuleringer.

Bortsett fra for sammenligningen med R. Lerch i seksjon 4.5.4, er det enten ikke oppgitt nøyaktig problemdefinisjon for problemet det sammenlignes med, eller så benyttes det en annen type elementer enn det som er implementert i FEMP (f.eks. 3-noders element) i analysen. Som forklart ovenfor, forvansker dette sammenligningen. Resultatene nedenfor er allikevel med på å vise at simuleringer fra FEMP gir rimelig bra kvalitativ overensstemmelse med en rekke forskjellige uavhengige resultater.

Ved simuleringer der det på en eller annen måte er tvil om materialparametrene, er fullstendige matriser for materialparametrene ved simuleringene i FEMP tatt med. I andre tilfeller er det bare tatt med en henvisning til hvor materialparametrene er funnet. Det er i alle tilfellene regnet med materialparametre på form $[c^E]$, $[e]$ og $[\epsilon^S]$.

4.5.1 Skiver av PZT5H - Locke et. al

Tabell 4.12: Sammenligning mellom FEMP-simuleringer og simuleringer fra artikkel av Locke, Kunkel & Pikeroen for resonans- og antiresonansfrekvenser for skiver av materialet PZT5H [62]. Tykkelsen av skivene/sylindrene er i alle tilfeller t=2.54mm. Tabellen viser frekvenser normalisert til frekvensen f_0 definert i teksten (f/f_0). Relativavvikene i forhold til [7] står i parantes.

Locke et al.[7]	FEMP (2x12)	FEMP (3x8)	D/T	Beskrivelse
2.597	2.601 (0.2%)	2.547 (-1.9%)	5	Resonansfrekvens
2.502	2.503 (0.04%)	2.441 (-2.4%)	5	Resonansfrekvens, TE-mode
2.572	2.562 (-0.4%)	2.522 (-1.9%)	5	Antiresonansfrekvens
2.678	2.682 (0.1%)	2.641 (-1.4%)	5	Antiresonansfrekvens, TE-mode
2.632	2.639 (0.3%)	2.598 (-1.3%)	6.25	Antiresonans, TE-mode
2.580	2.579 (0.0%)	2.541 (-1.5%)	8	Antiresonans, TE-mode
2.132	2.148 (0.8%)	2.053 (-3.7%)	4.5	Antiresonans, TS-mode
2.046	2.079 (1.6%)	1.975 (-3.5%)	6.25	Antiresonans, TS-mode
1.510	1.498 (-0.8%)	1.483 (-1.8%)	4.5	Antiresonans, E-mode
1.494	1.481 (-0.9%)	1.470 (-1.6%)	6.25	Antiresonans, E-mode

I [7] og [6] regnes det ut resonans- og antiresonansfrekvenser for aksesymmetriske piezoelektriske keramiske skiver av materialet PZT5H ved hjelp av endelig element metoden. For materialparametre, se f.eks. [62]. I artikkelen studeres det hvordan f*T (frekvens*Tykkelse) varierer med forholdet D/T (Diameter/Tykkelse), og for noen moder for forskjellige D/T-forhold blir det oppgitt simulerte verdier for resonansfrekvenser og antiresonansfrekvenser. I denne seksjonen blir det sammenlignet resonans- og antiresonansfrekvenser for et par moder. I tillegg blir det gjort kvalitative sammenligninger med hele frekvens-spekteret.

Frekvensene som er oppgitt i [7] er normalisert i forhold til halvbølge ustivet tykkelses-skjær resonansfrekvensen f_0, gitt ved $f_0 = V_{44}^E/2t$ med $V_{44}^E = \sqrt{c_{44}^E/\rho}$. Tykkelsen på alle skivene/sylindrene som det blir sett på er $t = 2.54mm$. Det blir i [7] benyttet en elementoppdeling bestående av (6x22)*4 triangulære elementer (slik at hvert rektangel er inndelt i 4 trekanter) for *alle* D/T-forhold mellom 0.2 og 10. Dette gir en svært varierende nøyaktighet på resultatene, da det er forskjellig antall elementer pr. bølgelengde for forskjellige D/T-forhold. I FEMP har vi benyttet en elementoppdeling som gir omtrent de samme resultatene som i [7] (2x12 8-noders elementer), og en elementoppdeling som gir en bedre oppløsning i tykkelsesretningen (3x8 8-noders elementer der oppløsningen i r-retningen er redusert for å korte ned beregningstiden), for sammenligning av de oppgitte resonans- og antiresonansfrekvensene for enkelte svingemoder.

I tabell 4.12 blir resonans- og antiresonansfrekvenser for en del svingemoder fra [7] sammenlignet med simuleringer i FEMP. Vi ser at det er avvik på opp til 1.6% mellom resultatene fra FEMP og resultatene fra [7] når man ser på elementoppdelingen med (2x12) elementer, men resultatene i FEMP konvergerer mot lavere verdier når man bedrer oppløsningen i tykkelsesretningen(det er for få elementer pr. bølgelengde hos Locke et al. til å beskrive alle svingemodene bra [7]). Dette stemmer overens med den konklusjonen som blir trukket i [7] : "... we expect all our results to be high by at least 1.5% to 2.0%". Dersom man trekker fra mellom 1.5% og 2.0% fra Locke's verdier, får man verdier som ligger omkring FEMP's verdier med (3x8) 8-noders elementer. Hvor mye som må trekkes fra vil variere for de forskjellige modene, da antallet elementer pr. bølgelengde varierer mye for de ulike frekvensene og D/T-forholdene som det blir sett på i [7]. For to av frekvensene, som er TS-moder blir avvikene enda større. At avvikene er størst for disse modene er ikke overraskende, siden det er disse modene man trenger best elementoppdeling for å simulere (indikert i seksjon 4.4.4).

Overensstemmelsen mellom simulerte resonans- og antiresonansfrekvenser fra FEMP og [7] må altså sies å være kvalitativt meget bra, selv om det også her er vanskelig å gjøre kvantitative sammenligninger fordi det ikke blir benyttet samme elementtype i [7], samtidig som det ikke er vist "fullt konvergerte resultater" i [7].

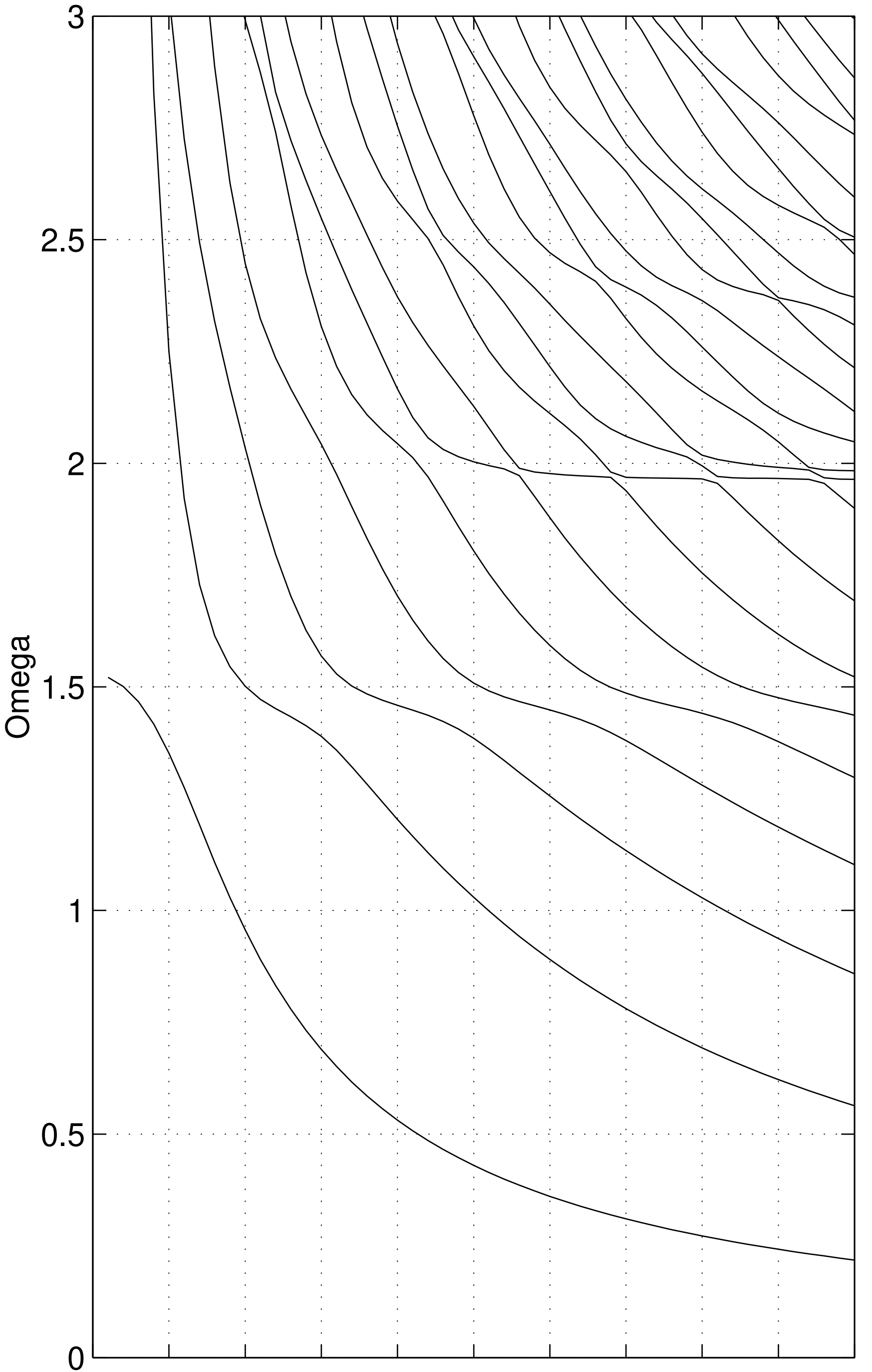
I [7] og [6] er det også sett på frekvensspektre. Ved hjelp av Fortran90-versjonen av FEMP er tilsvarende kurver regnet ut for sammenligning. Materialet som blir benyttet er PZT5H (se [62] eller [7] for materialparametre). Det blir sett på D/T-området fra 0.1 til 10. Tykkelsen på alle skivene/sylindrene er $t = 2.54mm$.

f*T mot D/T-plottene i [7] er laget ved hjelp av (6x22)*4 triangulære elementer med lineær variasjon langs kantene. Siden denne element-typen ikke er implementert i FEMP, er det nødvendig å prøve seg frem med forskjellige elementoppdelinger for det 8-noders isoparametriske elementet. Her er kun plottet med 10x3 8-noders isoparametriske elementer (se figur 4.7), som gir best overensstemmelse i hele f*T-området, tatt med. I tillegg er tilsvarende kurve fra Locke et. al. [7] kopiert opp i samme størrelsen i figur 4.8 for sammenligning.

Ved sammenligning mellom simuleringene fra FEMP og figuren fra [7] ser man at plottene er veldig like, men at det er en liten forskyvning av frekvensene, slik at noen av de høyeste frekvensene ligger noe høyere i FEMP sine simuleringer enn i figuren fra [7]. For en bedre elementoppdeling (12x4 8-noders elementer) ligger verdiene simulert av FEMP minst 1%-2.5% under verdiene fra [7], men man kjenner igjen alle detaljene i plottene. Det var umulig å finne en elementoppdeling med det 8-noders isoparametriske elementet som ga identiske kurver til [7].

Som beskrevet ovenfor er resultatene fra [7] anslått til å ligge minst 1.5% til 2.0% høyere i frekvens enn de "fullt konvergerte" verdiene. Ved å legge til 2% for alle verdiene fra FEMP, og sammenligne med resultatene fra [7], får man en meget god overensstemmelse for de fleste D/T-forhold og f*T-forhold. Dette er ikke vist her.

I seksjon 4.7.4 blir den effektive koblingsfaktoren fra de samme skivene sammenlignet med simuleringer fra FEMP.



Figur 4.7: Plott av $\Omega = (f/f_0)$ mot D/T for materialet PZT5H laget ved hjelp av FEMP med 10x3 8-noders isoparametriske elementer for D/T mellom 0.2 og 10. Plottet er laget for sammenligning med resultater fra Locke et. al. i figuren på neste side. Frekvensen f_0 er definert i teksten.

Figur 4.8: Plott av $\Omega = (f/f_0)$ mot D/T for materialet PZT5H kopiert opp fra artikkel av Locke et. al, for sammenligning med figuren på forrige side.

4.5.2 Skive av P160 - Lanceleur

I [21] blir resonansfrekvenser og admittanskurver for skiver med forskjellige D/T-forhold av materialet P160 analysert ved hjelp av en endelig element modell. Materialparametrene for P160 finnes i [21].

I [21] er det tabulert en del simulerte resonansfrekvenser for en P160-skive med diameter 10mm og tykkelse 0.4mm, slik at D/T=25. I tabell 4.13 har vi sammenlignet disse resultatene med FEMP sine resultater. I [21] blir det benyttet en annen type elementer (triangulære, med lineær variasjon langs kantene) enn FEMP benytter (2*20 triangulære 3-noders elementer). Det er derfor vanskelig å sammenligne resultatene direkte. Ved beregninger i FEMP ble det funnet at rundt 1x10 8-noders isoparametriske elementer gir den samme nøyaktigheten. I tabellen er det også tatt med simuleringer med elementoppdelinger bestående av 1x5 og 2x12 elementer.

Tabell 4.13: Sammenligning av resonansfrekvenser for problem fra artikkel av Lanceleur et. al. En skive av materialet P160 med diameter 10mm og tykkelse 0.4mm (D/T=25) er analysert. Alle frekvensene er oppgitt i MHz. I FEMP er det benyttet tre forskjellige elementoppløsninger. Relativavviket i forhold til verdiene fra [21] står i parantes.

Mode nr.	FEM [21]	FEMP (2x12)	FEMP (1x10)	FEMP (1x5)
1	0.193	0.193 (-)	0.193 (-)	0.193 (-)
2	0.506	0.506 (-)	0.506 (-)	0.506 (-)
3	0.800	0.800 (-)	0.801 (0.01%)	0.804 (0.5%)
4	1.093	1.087 (-0.5%)	1.088 (-0.5%)	1.103 (0.9%)
5	1.390	1.364 (-1.9%)	1.368 (-1.6%)	1.413 (1.7%)
TE	4.752	4.552 (-4.2%)	4.817 (1.4%)	4.836 (1.8%)

Som forventet er overensstemmelsen nærmest perfekt for de laveste modene, der alle elementoppdelingene har mange elementer pr. bølgelengde. For de høyere modene ligger verdiene i [21] alltid mellom verdiene for den beste (2x12) og dårligste (1x5) elementoppdelingen i FEMP. For den elementoppdelingen som kommer nærmest resultatene fra [21], er det maksimale avviket på 1.6%, som er et relativt stort avvik. Årsaken til at det er vanskelig å finne en elementoppdeling med 8-noders elementer som gir samme svar som denne elementoppdelingen for hele frekvensområdet, er at konvergensegenskapene til 3-noder og 8-noders elementer er forskjellige, og at det ser ut til at det ikke presenteres fullt konvergerte resultater her.

Overensstemmelsen mellom [21] og FEMP må sies å være kvalitativt bra. En sannsynlig årsak til at det ikke har vært mulig å få en kvantitativt bedre overensstemmelse er at det er benyttet en annen type elementer i [21].

I seksjon 4.7.3 blir også en admittanskurve fra [21] sammenlignet med resultater fra FEMP.

4.5.3 Skive av PZT5H - Jensen

I [23] benytter Henrik Jensen en endelig element modell til å regne ut resonansfrekvenser for en piezoelektrisk skive av materialet PZT5H (For materialparametre, se f.eks. [62]). Disse blir sammenlignet med eksperimentelle data for en skive av et materiale med lignende materialparametre [23], Pz 29. Det er i Jensen benyttet (5x30) par av 3-noders triangulære elementer (med lineær variasjon i de ukjente langs sidene, slik at interpolasjonsfunksjonene er lineære) for å modellere halve skiven, slik at vi ikke kan sammenligne direkte med resultatene fra FEMP, fordi 3-noders elementer ikke er implementert. I tabell 4.14 er resultatene fra [23] sammenlignet med resultatene for

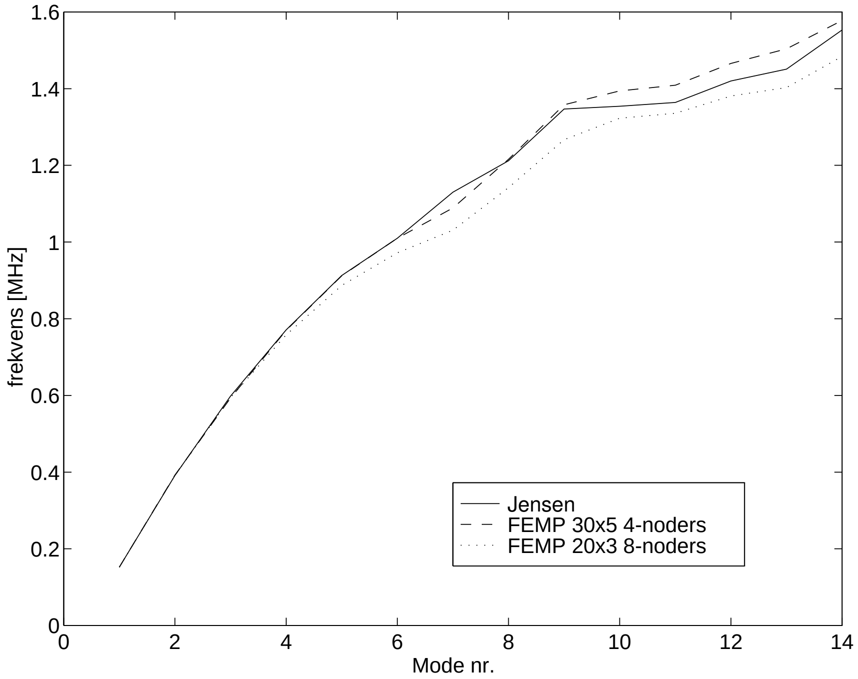
Tabell 4.14: Sammenligning av resonansfrekvenser simulert av FEMP med resultater fra rapport av Jensen. En skive av materialet PZT5H [62] med diameter 12.6mm og tykkelse 1.3mm (D/T=9.7) er analysert. Målingene er gjort på en skive av Pz 29 (Ferroperm) [63] med samme dimensjoner. Alle frekvensene er oppgitt i MHz. Relativavviket mellom de simulerte resultatene i FEMP og de simulerte resultatene fra Jensen [23] er i hvert tilfelle skrevet i parantes.

Mode nr.	Jensen målinger	Jensen 2*(5x30) 3-node el.	FEMP (5x30) 4-node el.	FEMP (3x20) 8-node el.
1	0.157	0.152	0.152	0.152
2	0.403	0.391	0.392 (0.3%)	0.391
3	0.616	0.598	0.593 (-0.8%)	0.594 (-0.7%)
4	0.790	0.771	0.771 (0.0%)	0.758 (-1.7%)
5	0.921	0.913	0.912 (-0.1%)	0.887 (-2.8%)
6	1.001	1.010	1.010	0.972 (-3.8%)
7	1.148	1.130	1.089 (-3.6%)	1.031 (-8.8%)
8	1.256	1.212	1.216 (0.3%)	1.142 (-5.8%)
9	1.334	1.347	1.358 (0.8%)	1.267 (-5.9%)
10	-	1.354	1.394 (3.0%)	1.323 (-2.3%)
11	1.368	1.364	1.409 (3.3%)	1.336 (-2.1%)
12	1.434	1.420	1.466 (3.2%)	1.381 (-2.7%)
13	1.478	1.451	1.504 (3.7%)	1.403 (-3.3%)
14	1.549	1.553	1.578 (1.6%)	1.484 (-4.4%)
15	1.604	1.602	1.623 (1.3%)	1.541 (-3.8%)
16	-	1.637	1.656 (1.2%)	1.586 (-3.1%)

det samme problemet simulert med FEMP, der vi har valgt å benytte to forskjellige elementoppdelinger, (3x20) 8-noders elementer med kvadratisk variasjon langs sidene, og (5x30) 4-noders elementer med lineær variasjon langs sidene. Av tabellen ser vi at resultatene fra endelig element beregningene i [23] stort sett ligger mellom resultatene fra de to forskjellige elementoppdelingene som blir benyttet i FEMP, slik at 8-noders elementene gir et nøyaktigere svar enn 4-noders elementene. Det samme ser man langt tydeligere i en grafisk fremstilling av resultatene i tabell 4.14 i figur 4.9, der resonansfrekvensene for de ulike modene simulert med FEMP er sammenlignet med de eksperimentelle resultatene til Jensen. For de laveste modene er overensstemmelsen meget god, siden det er lave krav til elementoppløsning for å beskrive disse godt.

Resonansfrekvensene i endelig element modellen som vi benytter, med de elementtypene som er benyttet her, vil konvergere ovenifra og nedover mot den korrekte verdien, dersom teorien er riktig implementert [37]. Dersom teorien er riktig implementert i FEMP, er altså en slik situasjon som vi ser ved sammenligningene med Jensen [23] sannsynlig, dersom elementoppdelingen i [23] ikke er god nok. Avvikene i forhold til de målte Pz 29 resultatene kan skyldes avvik i materialparametrene.

Det er altså vanskelig å trekke noen klare konklusjoner ut fra sammenligning av resultatene fra FEMP og resultatene fra [23], men resultatene indikerer allikevel ikke at det er noe feil i implementeringen i FEMP. Problemet ved denne sammenligningen er at man ikke vet om det foreligger "fullt konvergerte resultater". Dersom det foreligger "fullt konvergerte resultater", skulle FEMP gitt samme resultater som resultatene gitt i [23].



Figur 4.9: Sammenligning av resonansfrekvenser for problem fra rapport av Jensen. En skive av materialet PZT5H med diameter 12.6mm og tykkelse 1.3mm (D/T=9.7) er analysert. Den heltrukne linjen er resultater fra rapport av Jensen, den stiplede er resultater fra FEMP med (5x30) 4-noders elementer, og den prikkete er resultater fra FEMP med (3x20) 8-noders elementer. Vi ser at avvikene er små for de laveste modene, mens de øker etterhvert. Verdiene til Jensen ligger nesten alltid mellom de to simuleringene fra FEMP.

4.5.4 2D-simulering for lang PZT5H-stang - Lerch

Tabell 4.15: Sammenligning av resonans- og antiresonansfrekvenser for en lang piezoelektrisk stang av materialet PZT5H med tykkelse 1.53mm og bredde 0.61mm med resultater fra en artikkel av R. Lerch. Relativvavikene står i parantes.

FEMP	Lerch	FEMP	Lerch
f_r [MHz]	f_r [MHz]	f_a[MHz]	f_a[MHz]
0.945(+0.1%)	0.944	1.265(-0.6%)	1.272
2.433(+0.2%)	2.428	2.440(+0.3%)	2.432
2.527(+0.5%)	2.515	2.569(+0.4%)	2.559
3.022(+0.2%)	3.015	3.025(+0.3%)	3.017

I [12] ser R. Lerch på resonans- og antiresonansfrekvenser for en lang stang av materialet PZT5H med tykkelse $1.53mm$, bredde $0.61mm$ og lengde $50mm$, som sammenlignes med målte og eksperimentelle resultater fra [16] for de laveste svingemodene. For materialparametre for PZT5H, se f.eks. [62].

Det antas at stangen er så lang at den mekaniske tøyningen i lengderetningen kan neglisjeres (såkalt "plane-strain"-antagelse). Det er følgelig tilstrekkelig å se på et snitt gjennom stangen (normalt på lengderetningen) ved simuleringen, slik at vi får et 2-dimensjonalt problem i likhet med det aksesymmetriske tilfellet. På grunn av symmetrien i problemet, er det tilstrekkelig å simulere 1/4 av strukturen. Dette gjøres ved å sette forskyvningen i retningen normalt på flatene som man ikke simulerer til null, slik at man kun får med symmetriske moder. I tillegg er det nødvendig å sette den elektriske spenningen til null midt mellom elektrodene. Dette problemet avviker noe fra det som er sett på ovenfor. Forskjellen i implementeringen i forhold til aksesymmetriske strukturer ligger i rutinen **MASSTIFF** som regner ut stivhetsmatriser for et element. Det er ikke tatt med ytterligere detaljer om implementeringen her, men tilfellet er beskrevet i f.eks. [5] [42].

I [12] blir det benyttet 16x8 8-noders isoparametriske elementer, noe som muliggjør en direkte sammenligning med FEMP. Da F90-versjonen av FEMP ikke kan regne med andre mekaniske grensebetingelser enn fri overflate, er det nødvendig å foreta simuleringene i MATLAB-versjonen av FEMP, som maksimalt kan foreta simuleringer med rundt 100 elementer på de datamaskiner som er tilgjengelige ved Fysisk institutt ved Universitetet i Bergen. Det ble derfor valgt å benytte 12x6 8-noders isoparametriske elementer for å beskrive en fjerdedel av strukturen i simuleringen i FEMP. Se tabell 4.15 for sammenligning av de 4 laveste resonans- og antiresonansfrekvensene for den piezoelektriske stangen.

Av tabellen ser man at det er relativt bra overensstemmelse mellom resultatene fra [12] og simuleringene gjort i FEMP, med et maksimalt relativavvik på 0.6%. Avviket er allikevel noe høyere enn forventet, siden det i [12] blir benyttet 8-noders elementer, d.v.s. samme element-type som i FEMP. En del av avviket kan forklares ut fra den noe dårligere elementoppløsning i FEMP.

4.5.5 $BaTiO_3$ - Målte resultater fra Shaw

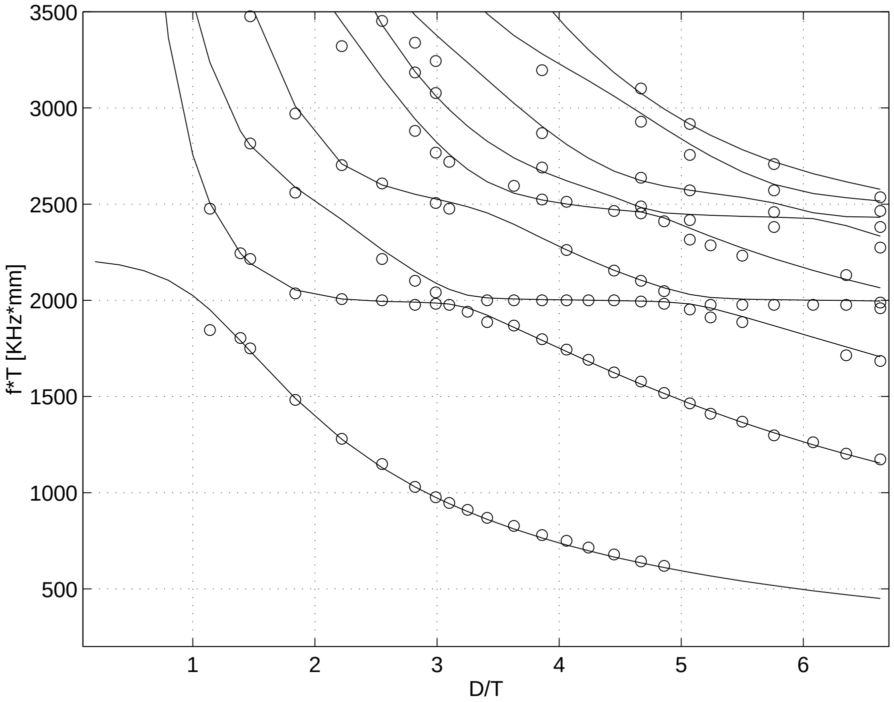
Den første som benyttet seg av f*T mot D/T-diagrammer for å studere vibrasjonsmodene i piezoelektriske skiver eksperimentelt, var Shaw i 1956 ([2]). Han så på materialet Bariumtitanat ($BaTiO_3$) for D/T-verdier mellom 1 og 6.6. En del av hans resultater er avlest fra figuren ([2], fig. 10, s. 45), og plottet på et f*T mot D/T diagram fra FEMP for Bariumtitanat (figur 4.10). For materialparametre som er brukt i disse simuleringene, se [18]. Dette settet med materialparametre er valgt fordi dette er gjort i [18] der det også foretaes sammenligninger med Shaw sine eksperimentelle resultater. I [2] er det ikke oppgitt materialparametre.

Vi ser at overensstemmelsen er kvalitativt meget bra for de laveste modene. Overensstemmelsen er også kvalitativt bra for de høyere modene, selv om avvikene her er noe større. Tilsvarende sammenligninger ser man også i arbeider av Lerch (endelig element, [15]) og Eer Nisse (variasjonsmetode, [17]), med en overensstemmelse som svarer til den fra simuleringer i FEMP; også der er det noen små problemer med de høyere modene.

Shaw har også foretatt målinger av svingeformer for tre resonansfrekvenser. Disse er sammenlignet med resultater fra FEMP i figur 4.11. Sammenligningen er kun kvalitativ, slik at vi ikke ser på størrelsen på utsvinget. Årsaken til dette er at det ikke er oppgitt verdier for inngangsspenningen i [2]. Videre er det kun sett på forskyvningen i tykkelsesretningen, da det kun er denne som er målt i [2]. Man får i tillegg en markert forskyvning i radiell retning som ikke vises her.

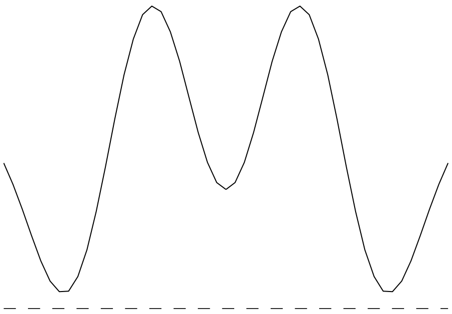
Av figuren ser man at det er store avvik mellom de målte frekvensverdiene fra [2] og tilsvarende simulerte verdier fra FEMP (langt større avvik enn i figur 4.10). Årsaken til dette er at materialet som det er målt på i [2] har andre egenskaper enn det som benyttes for frekvensspekteret ovenfor, som det blir simulert med i FEMP. Det ser man ved å legge resonansfrekvensene for disse tre modene målt fra Shaw inn på f*T mot D/T-diagrammet i figur 4.10. Skiven har D/T-forhold lik 3.86.

Det er kvalitativt bra overensstemmelse mellom de målte svingeformene til Shaw og tilsvarende simulerte svingeformer som er simulert ved hjelp av FEMP, selv om materialet som benyttes i simuleringen har noe forskjellige materialkonstanter enn det som blir benyttet av Shaw, slik at det blir forskyvning i resonansfrekvensene.

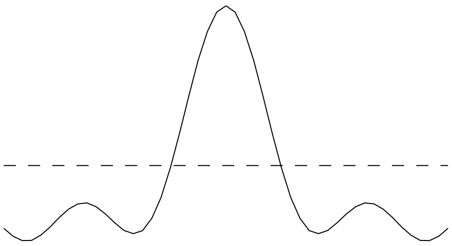


Figur 4.10: f*T mot D/T - diagram for resonansfrekvenser for materialet $BaTiO_3$ i D/T-området 1-7. De heltrukne linjene er resultater fra FEMP. Sirklene er målte verdier avlest fra figur i artikkel av Shaw.

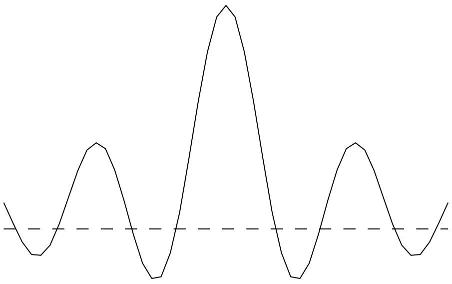
Mode 5, 384.4 kHz



Mode 6, 407.2 kHz



Mode 7, 443.1 kHz



Figur 4.11: Sammenligning av tre målte svingemoder fra artikkel av Shaw med resultater fra FEMP. Figurene til venstre er resultater fra FEMP, og figurene til høyre er tilsvarende resultater fra Shaw. Frekvensene for modene fra Shaw er 375kHz, 400kHz og 425kHz. Materialet som blir benyttet er Bariumtitanat. D/T-forholdet for skiven er 3.86, og tykkelsen er 6.56mm.

4.6 Egenverdier for mer kompliserte strukturer

FEMP er også testet mot en del strukturer som er mer kompliserte enn piezoelektriske skiver, som er sammensatt av flere forskjellige materialer. Det blir her sammenlignet med endelig element resultater fra litteraturen der FEMP blir sammenlignet med en Langevin-type transduser (sandwich-konstruksjon), og en transduserkonstruksjon bestående av PZT4 og messing.

4.6.1 Transduserkonstruksjon av PZT4 og messing - Mercer et. al.

I en rapport fra Mercer, Reddy & Eve ([44]), er det beskrevet et problem der man ser på en transduser av PZT4-materiale (se figur 4.12) med messingkapper på endene. For å løse et slikt problem kreves det en liten modifisering av FEMP: Funksjonen som deler strukturen opp i elementer (**MAKEMESH**) modifiseres slik at regionen som skal modelleres ikke trenger å være rektangulær i rz-planet (figur 4.13). Denne funksjonene er ikke inkludert i den versjonen av FEMP som er lagt ved oppgaven. Testen er allikevel tatt med fordi den tester en del andre egenskaper ved FEMP, som f.eks. modellering av transduserkonstruksjoner som består av flere materialer.

Transduseren består av et sylinderskall av materialet PZT4 med indre radius 11mm og ytre radius 12.5mm. Høyden er 22mm, og på topp og bunn er det en messingkappe med tykkelse 3mm og radius 12.5 mm. Problemet er aksesymmetrisk. På grunn av problemets symmetriegenskaper, blir bare halvparten av transduseren i rz-planet modellert (symmetri om horisontalplanet). Transduseren har elektroder på inn- og utsiden av sylinderskallet, og det piezoelektriske materialet er polarisert radielt utover. I tidligere problemer, og i teorien, har vi kun sett på materialer som er polarisert langs tykkelsesretningen.

Materialparametrene for PZT4 og messing benyttet i simuleringene er ikke listet opp i [44], men de er oppgitt til forfatterne av "ABAQUS Verification Manual" og listet i ([29]). Disse materialparametrene er ikke benyttet på en entydig måte i ABAQUS-testene i [29]. Det er der benyttet forskjellige former på konstantmatrisene for forskjellige elementoppdelinger, noe som helt klart må være feil. Materialparametrene for PZT4 og messing benyttet i simuleringene i FEMP tilsvarer de som er gitt i teksten i [29] (som sammenfaller med materialparametrene for en av simuleringene i [29]), og er gitt ved følgende matriser (der kun de delene av matrisene som benyttes i det aksesymmetriske tilfellet er tatt ut):

$$[c^E] = \begin{bmatrix} 11.54 & 7.428 & 7.428 & 0 \\ 7.428 & 13.9 & 7.784 & 0 \\ 7.428 & 7.784 & 13.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.564 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} N/m^2 \tag{4.1}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 15.08 & -5.207 & -5.207 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.71 \end{bmatrix} C/m^2 \tag{4.2}$$

$$[\epsilon^S] = \begin{bmatrix} 5.872 & 0 \\ 0 & 6.752 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} F/m \tag{4.3}$$

$$\rho = 7500 kg/m^3 \tag{4.4}$$

Materialparametrene for messing[29]:

$$[c^E] = \begin{bmatrix} 18.394 & 10.803 & 10.803 & 0 \\ 10.803 & 18.394 & 10.803 & 0 \\ 10.803 & 10.803 & 18.394 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.796 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} C/m^2 \tag{4.5}$$

$$\rho = 8500kg/m^3 \tag{4.6}$$

Det er i denne oppgaven ikke tidligere sett på modellering av materialer der matrisene av materialparametrene har en form som er forskjellig fra ligning 2.29-2.31. Siden materialparametrene er oppgitt på denne formen i [29], og benyttet på denne formen i [29] for dette problemet, er det allikevel regnet med materialparametre på denne formen for dette problemet, uten å verifisere riktigheten av at dette virkelig kan gjøres. Det kan i et senere arbeid være interessant å se på hvorfor og hvordan det er mulig å gjøre dette, men her er sammenligningen gjennomført uten å se ytterligere på bakgrunnen.

Det blir simulert både resonans- og antiresonansfrekvenser for strukturen. Ved simulering av resonansfrekvenser, blir potensialet på begge elektrodene satt til null, slik at vi har lukket-krets forhold. Ved simulering av antiresonansfrekvenser er den indre elektroden satt til referanseelektrode med potensiale null, og ladningen på den ytre elektroden satt til null, slik at vi har åpen-krets forhold.

Det blir sammenlignet resultater for to forskjellige elementoppdelinger:

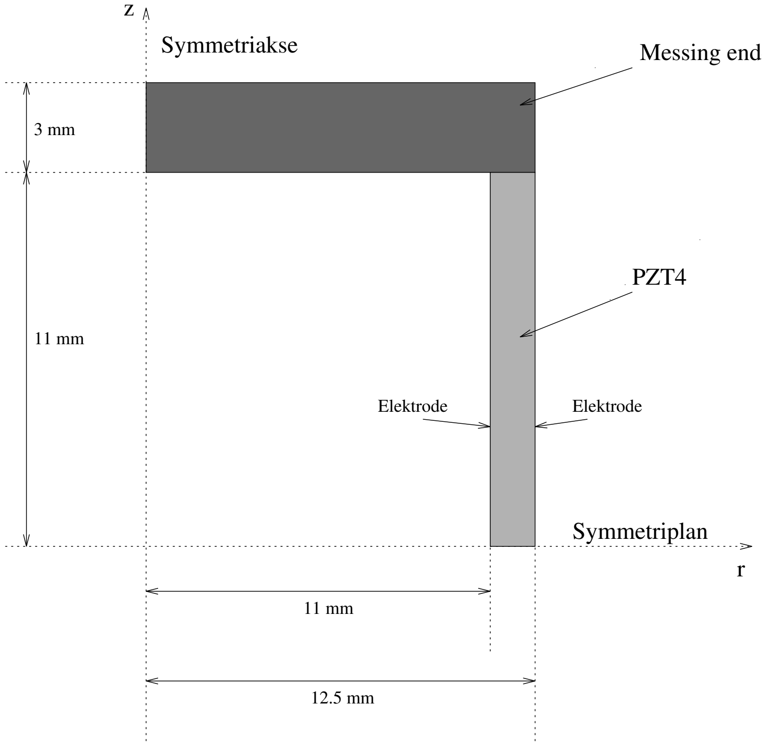
- "MESH1" som består av 5 messing-elementer og 8 PZT4-elementer. Alle elementene er 4-noders isoparametriske elementer. Se figur 4.13a for elementoppdelingen. Det benyttes 2x2 Gauss-integrasjonspunkter ved utregning av integralene. Bruk av 3x3 Gauss-integrasjonspunkter gir kun avvik på mindre enn 10ppm i forhold til bruk av 2x2 Gauss-integrasjonspunkter. Av figuren som beskriver elementoppdelingen i [44] kan det se ut som om de tre messing-elementene øverst til venstre har variabel størrelse, noe som ikke er implementert i FEMP.
- "MESH2" som består av 3 messing-elementer og 2 PZT4-elementer. Alle elementene er 8-noders isoparametriske elementer. Se figur 4.13b for elementoppdelingen. Antallet Gauss-integrasjonspunkter for simuleringene i [44] er ikke oppgitt, og etter forsøk med både 2x2 og 3x3 Gauss-integrasjonspunkter ble det funnet at det sannsynligvis har vært benyttet 3x3 Gauss-integrasjonspunkter for massematrisen og 2x2 Gauss-integrasjonspunkter for stivhetsmatrisene i [44]. Det benyttes derfor 2x2 Gauss-integrasjonspunkter ved utregning av stivhetsmatrisene, og 3x3 Gauss-integrasjonspunkter ved utregnings av massematrisen i resultatene vist for MESH2 her, det samme som blir benyttet av ABAQUS når det benyttes benytter "reduced integration elements". Avvikene mellom beregninger der det blir benyttet forskjellig antall Gauss-integrasjonspunkter for integrasjon viste seg å være helt opp i 0.5% for MESH2, men når man nærmer seg den "fullt konvergerte løsningen" (dvs. forbedrer elementoppdelingen) minker disse forskjellene ned mot null.

Tabell 4.16: Sammenligning av resonansfrekvenser for problem fra rapport av Mercer, Reddy & Eve. Alle frekvensene er oppgitt i kHz.

Mode nr.	"MESH1" : [44]	"MESH1" : FEMP	"MESH2" : [44]	"MESH2" : FEMP
1	23.0	23.0 (-)	19.5	19.5 (-)
2	45.6	45.6 (-)	42.4	42.5 (0.2%)
3	57.1	57.2 (0.2%)	54.7	54.7 (-)
4	75.8	76.0 (0.3%)	62.2	62.1 (-0.1%)
5	101.5	101.6 (0.1%)	96.0	95.9 (-0.1%)

Se tabell 4.16 for sammenligning av resonansfrekvenser simulert ved hjelp av FEMP og [44] for elementoppdelingene "MESH1" og "MESH2" beskrevet ovenfor. For sammenligning av simulerte antiresonansfrekvenser, se tabell 4.17.

Vi ser at avvikene mellom beregninger i FEMP og beregninger fra [44] ligger mellom 0.1% og 0.3% for resonansfrekvensene. For antiresonansfrekvensene er avvikene noe større, helt opp i 3.7% for mode nr. 6 med MESH2 og 0.7% for mode nr. 2 med MESH1. Det er vanskelig å si noe om årsaken til disse avvikene. Dersom man ser på forskjellen mellom resonans- og antiresonansfrekvenser for



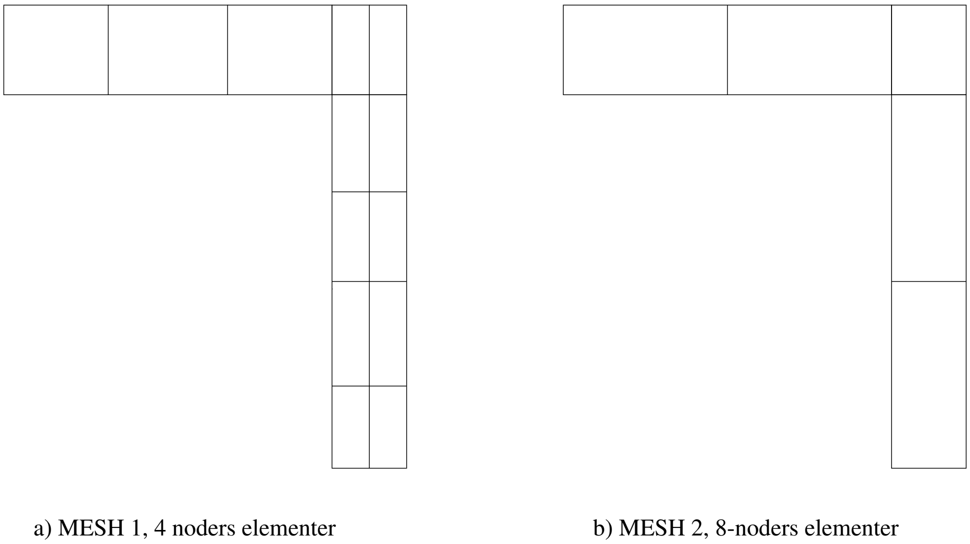
Figur 4.12: Problemdefinisjon for problem fra rapport av Mercer, Reddy og Eve. Vi har et aksesymmetrisk problem der vi ser på resonans- og antiresonansfrekvenser for en transduser av materialet PZT4 med messing-ender. Problemet er aksesymmetrisk og symmetrisk om planet gjennom r-aksen vinkelrett på z-aksen.

Tabell 4.17: Sammenligning av antiresonansfrekvenser for problem fra rapport av Mercer, Reddy & Eve . Alle frekvensene er oppgitt i kHz.

Mode nr.	Eksperimentell	"MESH1" [44]	"MESH1" FEMP	"MESH2" [44]	"MESH2" FEMP
1	18.6	23.1	23.1 (-)	19.5	19.5 (-)
2	35.4	45.9	46.2 (0.7%)	42.5	42.5 (-)
3	54.2	66.4	66.3 (-0.2%)	59.9	59.9 (-)
4	63.3	76.6	76.7 (0.1%)	67.0	66.7 (-0.4%)
5	88.8	101.5	101.6 (0.1%)	99.9	96.3 (3.7%)

"MESH1" og "MESH2" med de to simuleringene i FEMP, ser man at forskjellen er på henholdvis mindre enn 0.1kHz og 0.4kHz. Tilsvarende forskjell mellom "MESH1" og "MESH2" for [44] er på henholdsvis mindre enn 0.1KhZ og 3.9kHz. Denne forskjellen bør være omtrent den samme for forskjellige simuleringer. Resultatene fra FEMP med forskjellige elementoppdelinger ser følgelig ut til å stemme bedre overens med hverandre enn tilsvarende resultater i [44].

For resonansfrekvensene er det også foretatt simuleringer med ABAQUS [29]. For disse simuleringene er det ikke funnet avvik innenfor det antallet desimaler som ABAQUS oppgir, slik at avvikene er på mindre enn 3ppm for alle resonansfrekvensene med begge elementoppdelingene. Ved sammenligning mellom FEMP-resultater og ABAQUS-resultater gitt i "ABAQUS Verification Manual" blir det en del problemer på grunn av at det er benyttet forskjellige materialparametre for de forskjellige simuleringene. Denne defineringen av materialkonstantene (annen orientering av

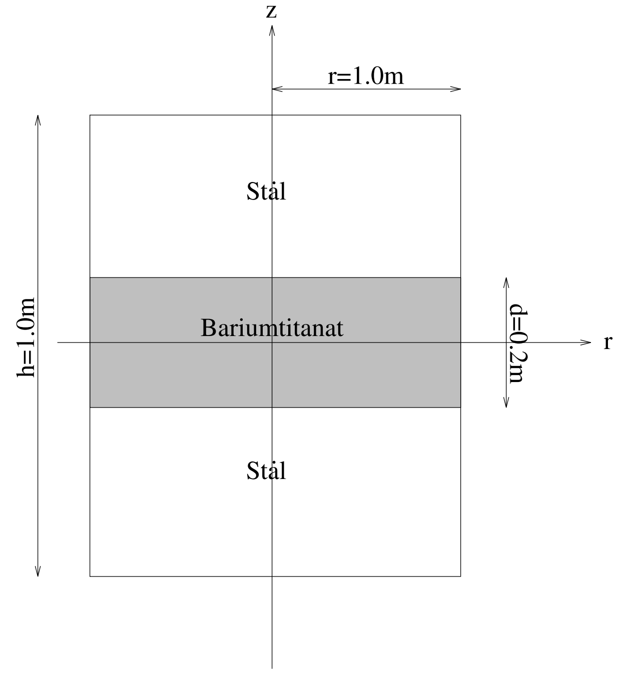

a) MESH 1, 4 noders elementer

b) MESH 2, 8-noders elementer

Figur 4.13: Elementoppdeling for problem fra Mercer, Reddy & Eve . I a) ser man oppdelingen i elementer for "MESH1", og i b) ser man oppdelingen i elementer for "MESH2".

materialet) gir bedre overensstemmelse med de eksperimentelle verdiene, men dårligere overensstemmelse med FE-resultatene fra [44].

4.6.2 Langevin-type transdusere - Kagawa m.fl.



Figur 4.14: Figuren viser dimensjonene for en sylinderformet transduserkonstruksjon av materialene stål og Bariumtitanat, med høyde $1m$ og radius $1m$.

En elektromekanisk Langevin-type transduser er en sandwich konstruksjon, som f.eks. kan konstrueres ved hjelp av stål og Bariumtitanat. For en slik transduserkonstruksjon er det simulert resonansfrekvenser i artikler av Kagawa et al. ([14]), Lerch ([15]) og Ostergaard et al. ([13]). Transduserkonstruksjonen er en sylinder med høyde $h = 1m$ og radius $r = 1m$. I midten er Bariumtitanat med høyde $d = 0.2m$. Resten av sylinderen er av materialet stål (se figur 4.14). Det blir oppgitt følgende materialparametre for Bariumtitanat fra [14] (der formen på matrisene er forandret ut fra det som er forklart i teksten i artikkelen):

$$[c^E] = \begin{bmatrix} 15.0 & 6.6 & 6.6 & 0 \\ 6.6 & 15.0 & 6.6 & 0 \\ 6.6 & 6.6 & 14.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.4 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} N/m^2 \tag{4.7}$$

$$[e'] = \begin{bmatrix} -4.35 & -4.35 & 15.6 & 0 \end{bmatrix} \; C/m^2 \tag{4.8}$$

$$\epsilon_{33}^S = 1260\epsilon_0 \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} F/m \tag{4.9}$$

$$\rho = 5200 kg/m^3 \tag{4.10}$$

der $[e']$ er den andre rekken i $[e]$-matrisen. Materialparametrene for stål:

$$[c^E] = \begin{bmatrix} 27.52 & 11.24 & 11.24 & 0 \\ 11.24 & 27.52 & 11.24 & 0 \\ 11.24 & 11.24 & 27.52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.14 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} C/m^2 \tag{4.11}$$

$$\rho = 7820 kg/m^3 \tag{4.12}$$

I [14] er det antatt at det elektriske feltet er parallelt med z-aksen, og uavhengig av r, slik at $E_r = 0$. Ut fra ligningene gitt i kapittel 2 ser man at dette kan simuleres i FEMP ved å sette konstantene e_{15} og ϵ_{11}^S til null under simuleringene.

Tabell 4.18: Sammenligning av simulerte resultater for en Langevin-type transduserkonstruksjon fra publiserte artikler med simulerte resultater fra FEMP.

FE [14]	FE [15]	FE [13]	FEMP
1595 Hz	1594 Hz	1591 Hz	1592 Hz
2184 Hz	2172 Hz	2136 Hz	2135 Hz
2578 Hz	2571 Hz	2558 Hz	2559 Hz

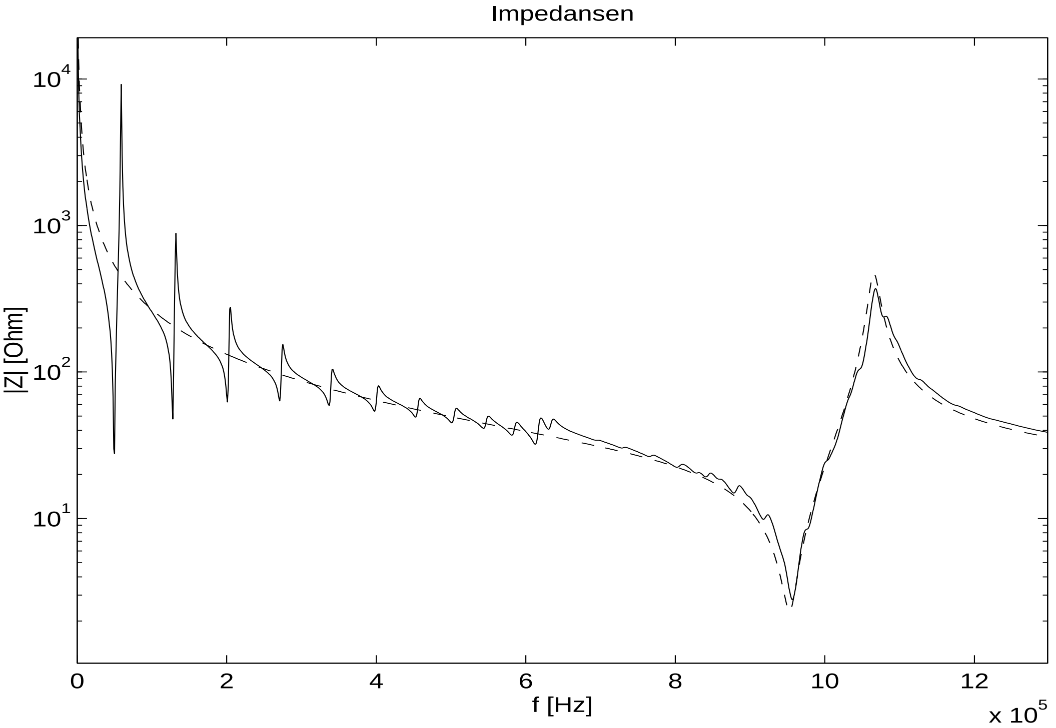
I tabell 4.18 er resultater fra FEMP sammenlignet med resultater fra [14], [15] som benytter 2D aksesymmetriske elementer, og [13] som modellerer en liten sektor av sylinderen med 3D elementer. I FEMP er det benytte 10x8 4-noders isoparametriske elementer for å simulere sylinderen. Elementoppdelingen som er valgt her gir ikke "fullt konvergerte" resultater, men er valgt for å gi best mulig overensstemmelse.

Av tabellen ser vi at det er god overensstemmelse mellom resultatene fra FEMP resultatene fra [13] (mindre enn 0.07%), der programmet ANSYS[71] er benyttet til analysen. Resultatene fra FEMP ligger systematisk under resultatene fra [15] og [14]. Det er uklart hva som er årsaken til dette.

4.7 Testing av mer kompliserte funksjoner i FEMP

Her blir en del mer kompliserte funksjoner fra FEMP testet mot en en-dimensjonal modell (Mason-modellen), målte resultater, og endelig element resultater. Disse testene er tatt med for å vise at FEMP ser ut til å gi tilfredsstillende resultater også for mer kompliserte funksjoner, selv om det benyttet for lite tid på slik testing til at man kan trekke klare konklusjoner.

4.7.1 Skive av PZT5A - Masonmodellen

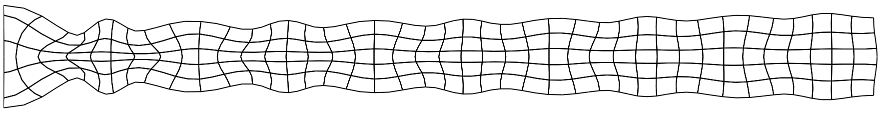


Figur 4.15: Sammenligning av impedanskurve simulert med FEMP (heltrukket linje) med impedanskurve simulert med den 1D Masonmodellen (stipplet linje) for en skive av materialet PZT5A med diameter 40.1 mm og tykkelse 2.03 mm.

En-dimensjonale (1D) modeller for beskrivelsen av f.eks. TE-moden for piezoelektriske transdusere har vært brukt i over 40 år. En mye brukt variant av den en dimensjonale modellen, er Masonmodellen, som modellerer egenskapene til transduseren ved hjelp av en ekvivalent elektrisk krets. Transduseren blir da representert ved hjelp av en 3-ports elektrisk krets. Detaljer om Masonmodellen finnes i de mange lærebøker om akustiske transdusere (f.eks. i [36], [47]). Detaljer om implementeringen av Masonmodellen i FEMP finnes i seksjon E.2.4.

I figur 4.15 er en impedanskurve simulert ved hjelp av Masonmodellen sammenlignet med en tilsvarende simulering fra FEMP. Skiven som simuleres har tykkelsen 2.03 mm og diameter 40.1 mm og er av materialet PZT5A. Den samme sammenligningen er forøvrig gjort i [10]. Det er her benyttet 40 8-noders isoparametriske elementer i radiell retning, og 5 i tykkelsesretningen. Den strukturelle dempniningskraften er benyttet til å beskrive tapene i skiven i FEMP, med $Q_m = 75$, som oppgitt i [62]. Samme verdi for Q_m er også benyttet i Mason-modellen.

Fra figuren ser man at overensstemmelsen er bra rundt den første tykkelsesresonansen omkring 1MHz. Den 1D modellen klarer derimot (som forventet) ikke å simulere de lavere radielle modene. For tykkelsesmoden gir den en-dimensjonale Masonmodellen en frekvens for tykkelses-moden på 953.2kHz (tapsfritt, fra [22]) dersom verdien på materialkonstanten c_{33}^D regnes ut fra materialsettet som blir brukt i simuleringene i denne oppgaven. FEMP gir verdien 956.9kHz for den kraftigst eksiterbare moden, slik at overensstemmelsen med den en-dimensjonale modellen for tykkelsesmoden må sies å være bra, selv om den en-dimensjonale modellen antar at skiven svinger med samme utsving over hele flaten, mens man i endelig element modellen ser at svingemønsteret er langt mer komplisert (figur 4.16).



Figur 4.16: Utsvinget for den moden som ligner mest på tykkelsesmoden for en skive med diameter 40.1 mm og tykkelse 2.03 mm av materialet PZT5A. Moden har frekvens 956.9 kHz, mens tykkelsesmoden predikert av Masonmodellen har frekvens 953.2 kHz.

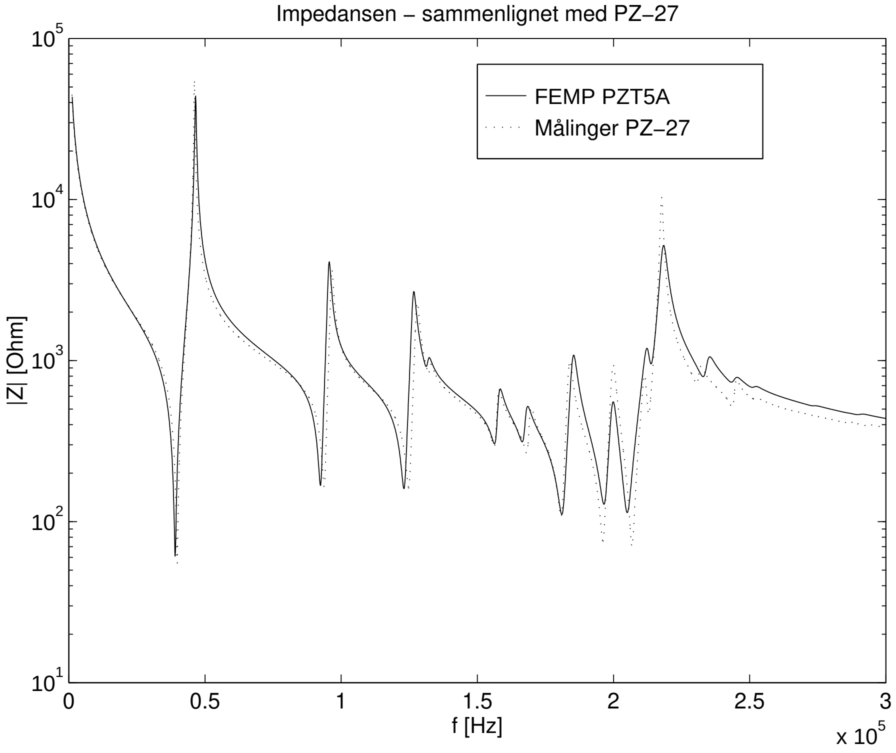
4.7.2 Skive av Pz 27 - målinger

Tore Magne Skar, hovedfagsstudent ved UiB, har foretatt en del målinger av impedanskurver for piezoelektriske elementer (hovedfagsoppgaven er fremdeles ikke publisert). I figur 4.17 er en målt impedanskurve for frekvensområdet 0-300kHz for et piezoelektrisk element av materialet Pz 27 [63] med D/T-forhold lik 5 (diameter 49.96mm, tykkelse 10.02mm) plottet med stipplet linje. Det foreligger ikke et fullstendig sett med elastiske, dielektriske og piezoelektriske konstanter for dette materialet, men materialets egenskaper ligner på egenskapene til materialet PZT5A. For sammenligning med de målte resultatene er det derfor foretatt simuleringer med FEMP med materialparametrene til materialet PZT5A (plottet med heltrukket linje i figur 4.17) med 22 8-noders isoparametriske elementer i radiell retning og 5 i tykkelsesretningen ved simuleringene. Det er simulert for en skive med diameter 50mm og tykkelse 10mm. Den strukturelle dempningsmodellen (beskrevet i seksjon 3.5.2) er benyttet, og verdien for Q_m er 75.

Tabell 4.19: Sammenligning av resonansfrekvenser simulert med FEMP med resultater målt av Tore Magne Skar for en skive av materialet Pz 27. Skiven av Pz 27 har diameter 49.96mm og tykkelse 10.02mm, mens simuleringen med FEMP er gjort for en skive av PZT5A med diameter 50mm og tykkelse 10mm. Målingen av resonansfrekvenser er gjort ved å finne maksimumsverdiene for konduktansen i datafilen. Det er tatt en måling for hver 25 Hz. Relativavviket for simuleringen i forhold til de målte resultatene er tatt med i prosent.

Mode	Måling Skar	FEMP	Relativavvik
1	39.6	39.1	-1.3%
2	93.3	92.5	-0.8%
3	124.2	123.2	-0.8%
4	132.0	131.6	-0.3%
5	155.9	156.9	0.6%
6	167.8	167.1	-0.4%
7	180.1	181.3	0.7%
8	195.4	196.8	0.7%
9	206.0	205.1	-0.5%
10	212.1	213.6	0.7%
11	230.4	233.8	1.5%
12	243.3	244.2	0.4%
13	252.2	251.6	-0.3%

Av figuren ser vi at det er relativt god overensstemmelse mellom målte og simulerte resultater



Figur 4.17: Sammenligning av impedanskurve simulert med FEMP (heltrukket linje) for materialet PZT5A med impedanskurve målt av Tore Magne Skar (stipplet linje) for en skive av materialet Pz 27. Skiven av Pz 27 har diameter 49.96mm og tykkelse 10.02mm, mens simuleringen med FEMP er gjort for en skive med diameter 50mm og tykkelse 10mm. Dempningen er modellert ved hjelp av den strukturelle dempningskraften, og verdien for Q_m som benyttes i simuleringen er 75, som oppgitt for PZT5A.

for hele frekvensområdet. Resonans- og antiresonansfrekvensene stemmer kvalitativt bra for hele frekvensområdet, men det er en del forskjeller på impedansnivået for de høyere frekvensene. Dette skyldes sannsynligvis dempningsmodellen som er benyttet, og avvikene i materialparametre mellom Pz 27 og PZT5A. Dempningen er modellert ved hjelp av den strukturelle friksjonskraften som ikke alltid vil gi en nøyaktig nok beskrivelse av tapsmekanismene som opptrer i en piezoelektrisk skive. Variasjon av verdien for den mekaniske Q-faktoren Q_m (gitt som 75 for PZT5A [62]) ga bedre samsvar for enkelte resonanser, men det ble ikke funnet noen verdi for Q_m som ga merkbart bedre samsvar over hele frekvensområdet.

Resonansfrekvensene fra målingene gjort av Skar er funnet ut fra maksimalverdiene for konduktansen, og sammenlignet med resonansfrekvensene regnet ut ved hjelp av FEMP i tabell 4.19. Det er kun tatt med frekvenser opp til 250kHz i tabellen, da det er svært lave verdier for konduktansen i området mellom 250kHz og 300kHz, noe man også ser av figur 4.17. Avviket for resonansfrekvensene er på under 1.5% for hele frekvensområdet, til tross for at det er benyttet materialparametre for materialet PZT5A ved simuleringene, mens de målte verdiene er funnet ut fra målinger på en skive av materialet Pz 27. Denne overensstemmelsen må sies å være overraskende bra. En indikasjon på at materialparametrene er en av hovedkildene til avvikene, er at avviket for den første moden er stort, mens andre resultater i denne oppgaven viser at det er lettest å få god overensstemmelse med resonansfrekvensene for de laveste modene (se f.eks. seksjon 4.5.5).

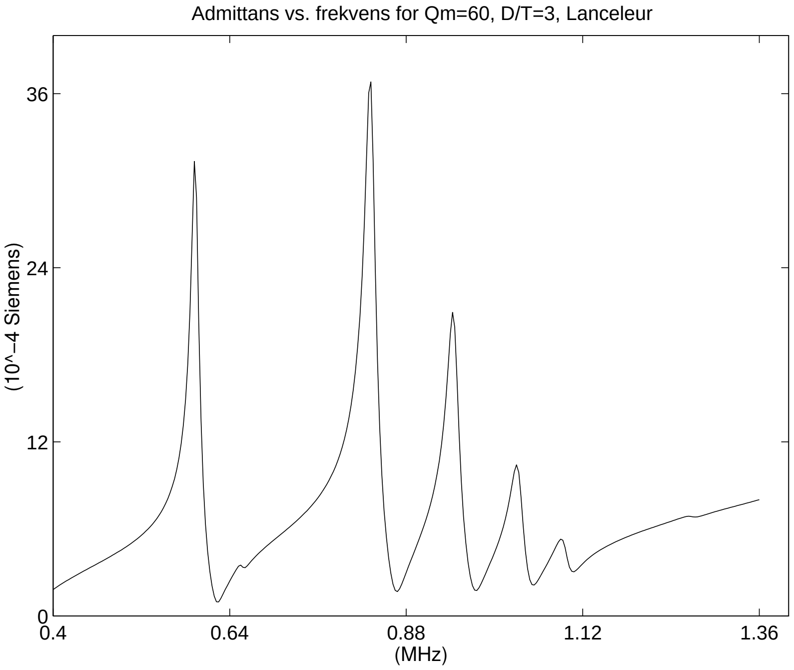
Det ble også gjort sammenligninger med målinger gjort på en annen skive av Pz 27 der det ble gjort målinger som indikerte en lavere verdier av konstantene k_p og c_{33}^D enn det som er oppgitt for materialet Pz 27. Her ble det observert en betydelig forskyvning av resonansfrekvensene (opptil 5 % for de høyeste resonansfrekvensene), men det var bedre samsvar for impedansnivået enn det som er tilfelle for sammenligningen som er vist i figur 4.17. Dette er sannsynligvis tilfeldig. På grunn av plassmangel er det ikke tatt med en figur som viser denne sammenligningen.

4.7.3 P160 - Admittans simulert v.h.a FEM

I seksjon 4.5.2 er simulerte resonansfrekvenser for en skive av P160 fra [21] sammenlignet med FEMP. I [21] blir også admittanskurver for skiver med forskjellige D/T-forhold av materialet P160 analysert ved hjelp av en endelig element modell.

Her sammenligner vi admittansen en skive med diameter $6mm$ og tykkelse $2mm$ (D/T=3) av materialet P160. Kurvene for admittansen (målt og FEM) for D/T=3 er kopiert inn fra [21] som figur 4.19 (modellert med triangulære elementer med lineære interpolasjonsfunksjoner). I figur 4.18 ser vi admittansen for den samme skiven simulert med FEMP (med 11x4 8-noders isoparametriske elementer). Materialparametrene for P160 finnes i [21]. Det blir ikke oppgitt hvilken dempningsmodell som benyttes ved simulering av admittansen. Her er det derfor valgt å benytte en strukturell dempningskraft med $Q_m = 60$ (som gir riktig verdi for den største admittansverdien). Andre dempningsmodeller kunne kanskje beskrevet problemet bedre.

Ved sammenligning med [21] ser man at FEMP gir bedre overensstemmelse med den eksperimentelt målte admittanskurven enn FE-modellen i [21] for mesteparten av frekvensområdet. FEMP får med både den lille resonansen i overkant av 0.65 MHz, den lille resonansen rundt 13 MHz, og et noenlunde riktig størrelsesforhold mellom de tre toppene mellom 0.8 og 1.1 MHz. Med den strukturelle dempningsmodellen blir toppen omkring 0.59 MHz mye høyere enn tilsvarende topp i både det eksperimentelle og det teoretiske tilfellet i [21], altså en dårligere beskrivelse her. Dette har med egenskapene til dempningsmodellen å gjøre.



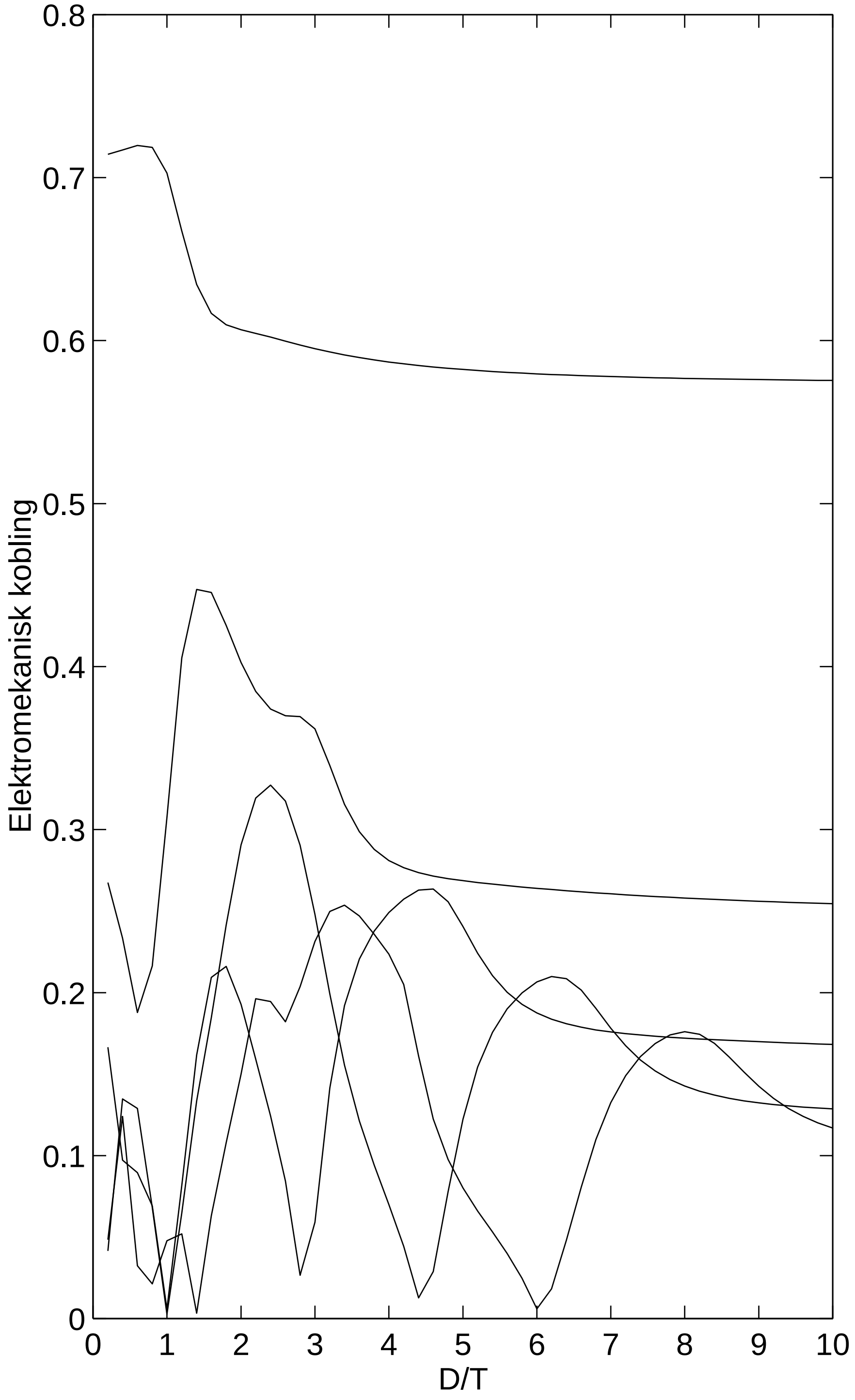
Figur 4.18: Admittanskurve for en skive av P160 med diameter 6mm og tykkelse 2mm (D/T=3). Dempningen er beskrevet ved hjelp av en strukturell dempningskraft, der den mekaniske Q-faktoren Q_m er antatt å være lik 60. Problemet er tatt fra artikkel av Lanceleur et al.

Figur 4.19: Admittanskurve for en skive av P160 tatt fra Lanceleur et. al. for sammenligning.

4.7.4 PZT5H - Sammenligning av koblingskoeffisient

I seksjon 4.5.1 ble simulerte resonansfrekvenser for skiver av PZT5H (materialparametre [62]) fra [7] sammenlignet med simuleringer fra FEMP. Her er det tatt med en sammenligning av utregnet effektiv koblingskoeffisient for de laveste modene som funksjon av D/T, simulert med FEMP i figur 4.20 og kopiert inn fra [7] i figur 4.21. Den effektive koblingskoeffisienten regnes ut etter ligning 3.80 for resonans- og antiresonansfrekvensene predikert av FE-modellen. Det er benyttet 10x3 8-noders isoparametriske elementer for alle verdier av D/T i simuleringene i FEMP. For simuleringene fra [7] gjelder det samme som beskrevet i seksjon 4.5.1.

Overensstemmelsen er kvalitativt bra for hele D/T-området. For det laveste D/T-området ser man at det forekommer noen avvik, som sannsynligvis skyldes at elementoppdelingen er forskjellig.



Figur 4.20: D/T mot k_{eff}-plott for materialet PZT5H laget ved hjelp av FEMP med 10x3 8-noders isoparametriske elementer for D/T mellom 0.2 og 10. Plottet er laget for sammenligning med resultater fra Locke et. al. i figuren på neste side. Den hakkete kurven for lave D/T-verdier skyldes sannsynligvis at elementoppdelingen er for dårlig her.

Figur 4.21: D/T mot k_{eff}-plott for materialet PZT5H kopiert opp fra artikkel av Locke et. al. , for sammenligning med figuren på forrige side.

4.8 Kontroll av grensebetingelser - Spenningsutregning

Den mekaniske spenningen i det piezoelektriske elementet kan regnes ut ved hjelp av ligningene i seksjon 3.3. Ved å undersøke variasjonen av de ulike spenningskomponentene som funksjon av posisjon i elementet, kan man undersøke om løsningen er fornuftig. I følge de mekaniske grensebetingelsene som er gitt for problemet, skal normalspenningene og tangentialspenningene være lik null på elementets grenseflater (seksjon 2.5). I tillegg skal rz-komponenten til spenningen være lik null på hele overflaten til det piezoelektriske elementet.

Den mekaniske spenningen regnes ut i Gauss-integrasjonspunktene av en orden lavere enn det som tilsvarer full integrasjon for det valgte elementet, da det er i disse punktene den mekaniske spenningen kan regnes ut mest nøyaktig (se [38], [37]). For det 8-noders isoparametriske elementet som krever 3x3 punkts Gauss-integrasjon for full integrasjon, vil da den mekaniske spenningen kunne regnes ut mest nøyaktig i Gauss-punktene for 2x2 punkts Gauss-integrasjon. Dersom man regner ut den mekaniske spenningen i andre punkter innenfor elementet, eller i nodepunktene, vil man ofte få svært hakkete kurver. Dersom man trenger den mekaniske spenningen utregnet i andre punkter enn i Gauss-integrasjonspunktene, anbefales det derfor å benytte interpolasjon eller ekstrapolasjon ut fra verdiene for spenningen regnet ut i Gauss-integrasjonspunktene [37].

Ved utregning av komponentene til den mekaniske spenningen, har vi her valgt å se på to forskjellige skiver av materialet PZT5A som test-eksempel for å undersøke spenningsfordelingen for egenmodene for skiver med forskjellige D/T-forhold:

- En skive med et relativt høyt D/T-forhold, D/T=20,med tykkelse $T = h = 2.03mm$ og diameter $D = 2a = 40.1mm$. Dette er en skive som er analysert i [10], og resonansfrekvensene for denne skiven regnet ut med 48x2 elementer i tabell 4.6. I dette tilfellet blir det benyttet 13 elementer i radiell retning og 5 elementer i tykkelsesretningen, som er tilstrekkelig for en god beskrivelse av de laveste 5 modene som vi er interessert i her. Dette gir 5.5 elementer pr. bølgelengde i radiell retning og 12 elementer pr. bølgelengde (skjær) i tykkelsesretningen. Hva som menes med begrepet elementer pr. bølgelengde er forklart i kapittel 5. Den høye oppløsningen i tykkelsesretningen er valgt fordi det skal være lettere å visualisere resultatene. Ved sammenligning med resultatene i tabell 4.6 ser man at det er et avvik på opp til 0.1% i verdien på resonansfrekvensene, som følge av den dårligere oppløsningen som er brukt i radiell retning for denne simuleringen.
- En skive med et relativt lavt D/T-forhold, D/T=2, med tykkelse $h = 2.0mm$ og diameter $2a = 4.0mm$. Her blir det benyttet en elementoppdeling på 7x7 elementer.

I alle tilfellene er den elektriske spenningsforskjellen over de to elektrodene satt til 0 V (resonans, for det tapsfrie tilfellet). Den mekaniske spenningen regnes ut for de laveste egenmodene til skivene. Vi ser her på variasjonen i de 4 spenningskomponentene (T_{rr}, $T_{\theta\theta}$, T_{zz} og T_{rz}) som kan være forskjellig fra null i det aksesymmetriske tilfellet. Alle plottene er ***normalisert i forhold til den maksimale spenningskomponenten for den aktuelle moden***, slik at dette kan brukes til å se på forholdet mellom de ulike spenningskomponentene.

Bare de viktigste figurene som sammenligner de ulike spenningskomponentene i snitt normalt på r- og z-aksen er tatt med i denne seksjonen. I figurene 4.22- 4.25 er sammenligningen av spenningskomponentene for snitt normalt på z-aksen for $z \approx h/2$ (øverst) og snitt normalt på r-aksen for $r \approx a/2$ (nederst) vist for de 5 laveste modene for skiven med D/T-forhold lik 20. I figuren 4.26 er tilsvarende plott for den laveste moden til skiven med D/T lik 2 vist.

En del andre plott som viser hver spenningskomponent for seg er tatt med i vedlegg C. Her er det tatt med plott for de mode 1 og 3 for skiven med D/T lik 20 (figurene C.1- C.8), og den laveste moden for skiven med D/T lik 2 (figurene C.9- C.12). Øverst i hver av disse figurene er variasjonen i den aktuelle spenningskomponenten (i rz-planet) vist i et 3D-plott. Nederst er spenningskomponenten plottet for forskjellige snitt gjennom r- og z-planet (for $r \approx a/4$, $r \approx a/2$, $r \approx 3a/4$, $z \approx h/4$, $z \approx h/2$ og $z \approx 3h/4$. Årsaken til den manglende symmetrien i disse figurene er at dette kun er omtrentlige verdier tilpasset Gauss-punktene.

Av figurene ser man at kravene for normalkomponentene til spenningen er oppfylt for begge D/T-forholdene som er undersøkt her: Normalkomponenten til spenningen går mot null på grenseflatene ved $r = a$,$z = 0$ og $z = h$. Det innebærer at T_{rr} går mot null for $r = a$, og T_{zz} går mot null for $z = 0$ og $z = h$.

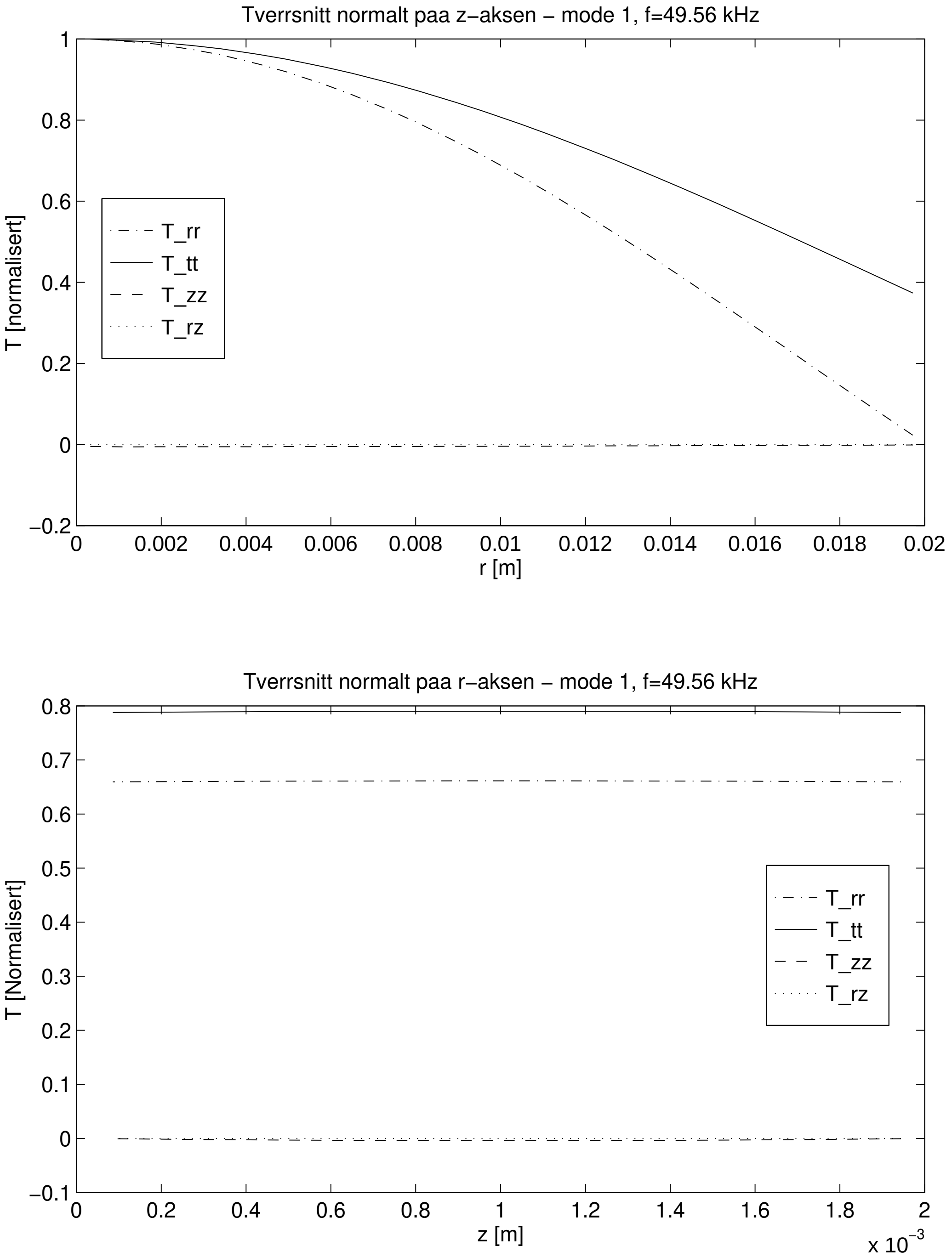
I følge grensebetingelsen for kreftene må rz-komponenten til spenningen være lik null på hele overflaten til det piezoelektriske elementet. Av figur C.12 ser man at T_{rz} går mot null for $r = a$,$z = 0$ og $z = h$ for skiven med lavt D/T-forhold (lik 2). For skiven med D/T=20 ser det ut som om rz-komponenten til spenningen varierer noenlunde tilfeldig i rz-planet (figur C.4 og figur C.8). Men av figur 4.22 og figur 4.23 ser man at rz-komponenten av den mekaniske spenningen er svært liten i hele skiven i forhold til de andre spenningskomponentene. Man kan følgelig si at rz-komponenten til den mekaniske spenningen er tilnærmet lik null for hele skiven med D/T forhold lik 20.

Det ser altså ut som om det er relativt vanskelig å bestemme T_{rz} nøyaktig. Dette skyldes at det inngår deriverte med hensyn på både r og z i uttrykket for rz-komponenten av spenningen, samt at verdien til T_{rz} er svært liten i forhold til de andre spenningskomponentene, noe som gjør at usikkerheten blir større i denne spenningskomponenten enn i de andre spenningskomponentene.

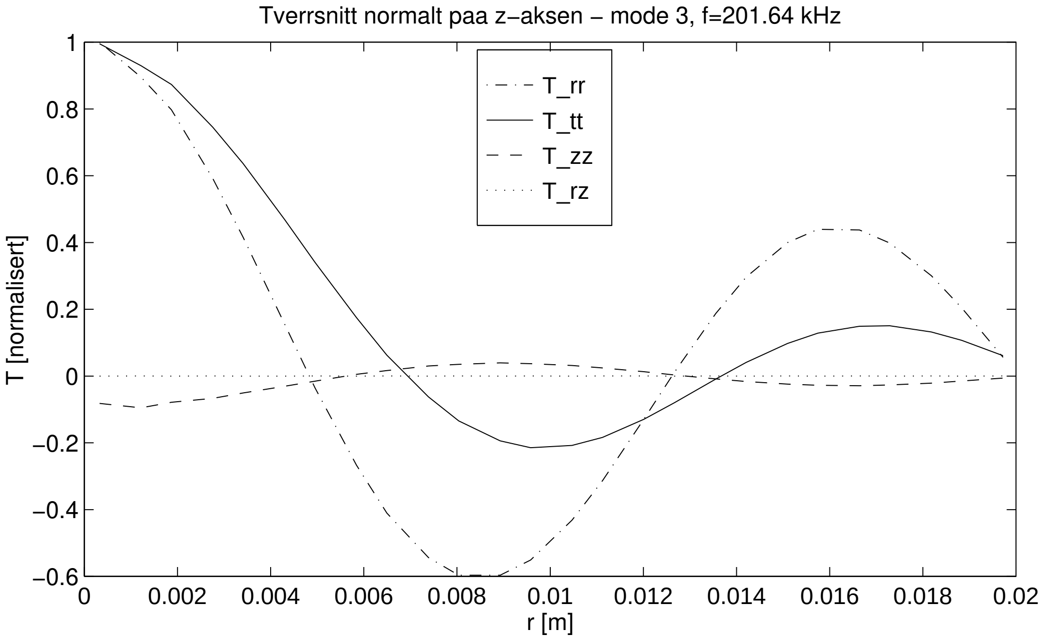
I en 1D-modell for de laveste radielle modene i en piezoelektrisk skive med høyt D/T-forhold [64], er en av antagelsene at spenningskomponentene T_{zz} og T_{rz} er lik null i hele elementet. En av årsakene til at det er tatt med figurer for spenningsvariasjonen for 2 forskjellige D/T-forhold, og 4 forskjellige moder for skiven med høyest D/T-forhold, er å se hvor gode disse antagelsene i den 1D modellen er. Av figur 4.26 ser man at for D/T=2 er T_{zz} i samme størrelsesorden som rr-komponeten til spenningen, mens T_{rz} er en størrelsesorden mindre. For skiven med D/T=20 (figur 4.22), er både zz- og rz-komponentene av den mekaniske spenningen langt mindre enn rr- og $\theta\theta$-komponentene av den mekaniske spenningen for den første moden. For den 3. moden (figur 4.23), ser man at zz-komponenten fortsatt er liten, men noe større enn for den første moden sammenlignet med de andre spenningskomponentene. Dersom man ser på høyere radielle moder (4., 5., 6. osv.), ser man at størrelsen på zz-komponenten av den mekaniske spenningen relativt sett blir større og større (Her er det kun tatt med figurer som viser dette for mode nr. 4 i figur 4.24 og mode nr. 5 i figur 4.25.) Antagelsen som blir benyttet i den 1D-modellen om at zz- og rz-komponentene til den mekaniske spenningen er lik null for de radielle modene for skiver med høye D/T-forhold ser altså ut til å være bra for de laveste modene (mode 1-3), men dårligere jo høyere opp man kommer i moder, for den skiven som er analysert her. Dette er kvalitativt i samsvar med forventet gyldighetsområde for den en-dimensjonale modellen beskrevet i [64].

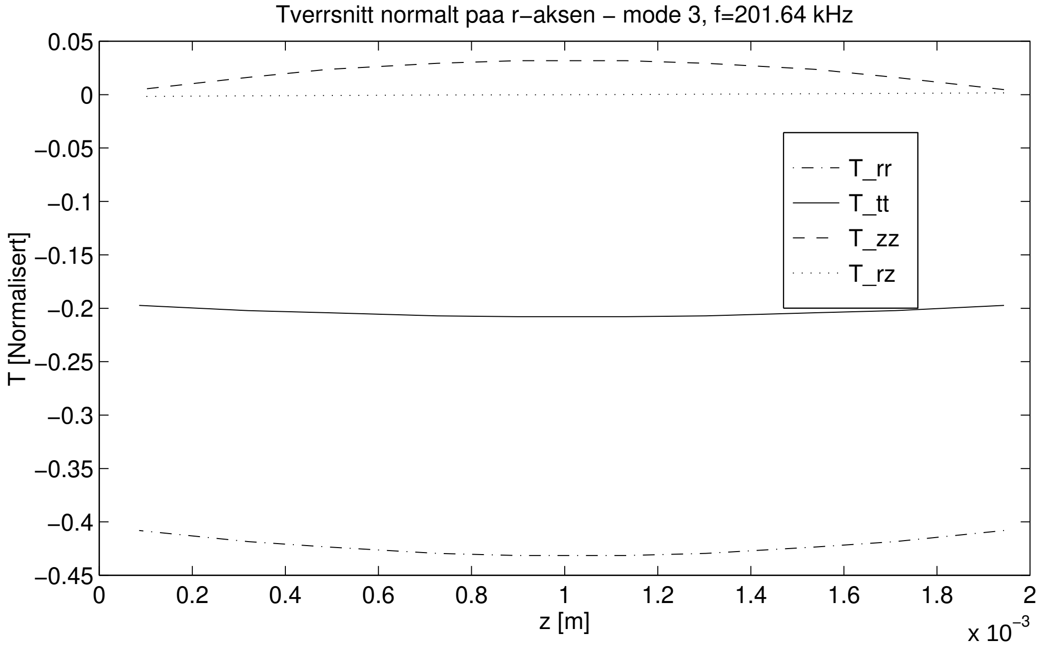
Dersom man forsøker å simulere de mekaniske spenningsvariasjonene i høyere moder, merker man at det kreves større nøyaktighet i simuleringen av spenningen enn i simuleringen av resonansfrekvenser og forskyvning. Dette skyldes at forskyvningen må deriveres (ligning 2.79) for å finne uttrykk for spenningskomponentene, noe som gir dårligere nøyaktighet (en orden dårligere i følge [37]).

Det ble også sett på den mekaniske spenningsfordelingen i piezoelektriske skiver for den *harmoniske responsen til strukturen* når bidraget fra alle vibrasjonsmodene blir superponert, og den strukturelle dempningsmodellen (seksjon 3.5.2) er inkludert (ligning 3.50). Det ble da funnet at spenningskomponenten T_{zz} går mot en verdi som avviker noe fra null på grenseflatene for $z = 0$ og $z = h$. Dette skyldes muligens dempningsmodellen som er benyttet, der det blir innført en strukturell dempningskraft (ligning 3.46). Figurer som viser disse reultatene er ikke tatt med her. Det er nødvendig å utføre mer arbeid på dette området, gjerne i forbindelse med sammenligning av ulike dempningsmodeller.

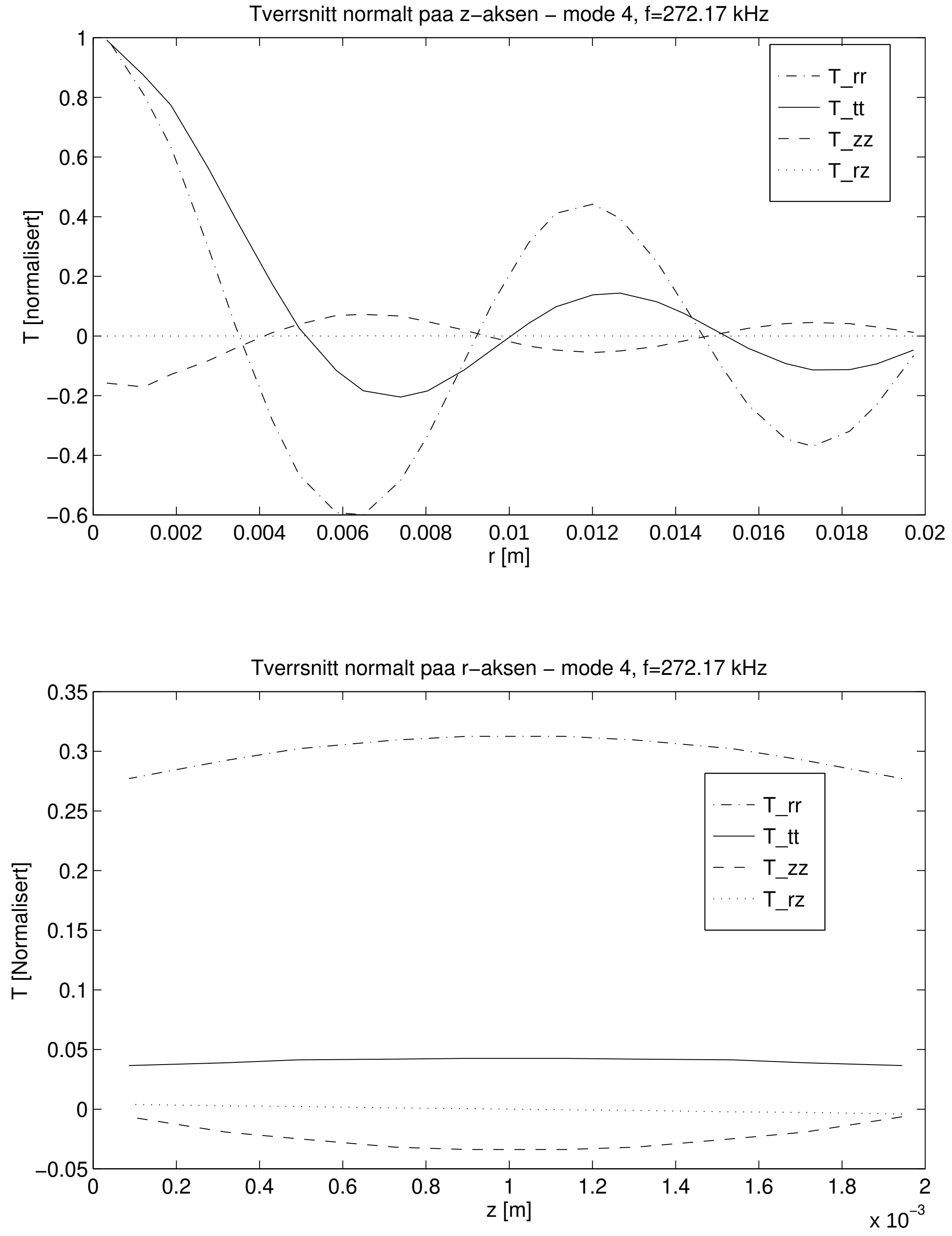


Figur 4.22: Sammenligning av alle komponentene til den mekaniske spenningen for $r \approx a/2$ og $z \approx h/2$ for den 1. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. Denne figuren sammenfatter resultatene fra figur C.1- C.4. T_{tt} tilsvarer $T_{\theta\theta}$ i figuren.

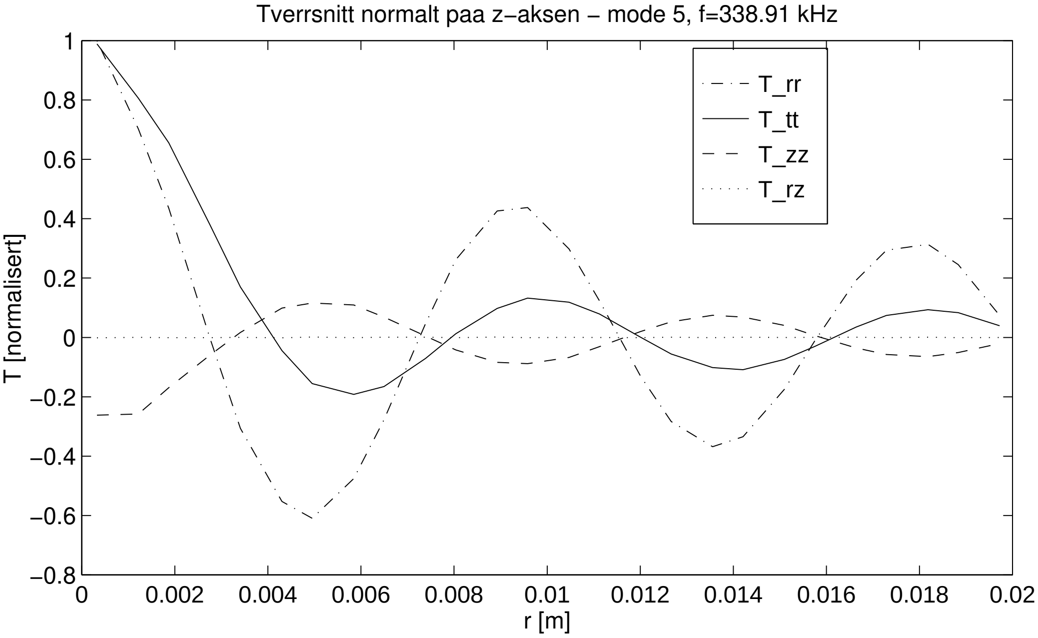


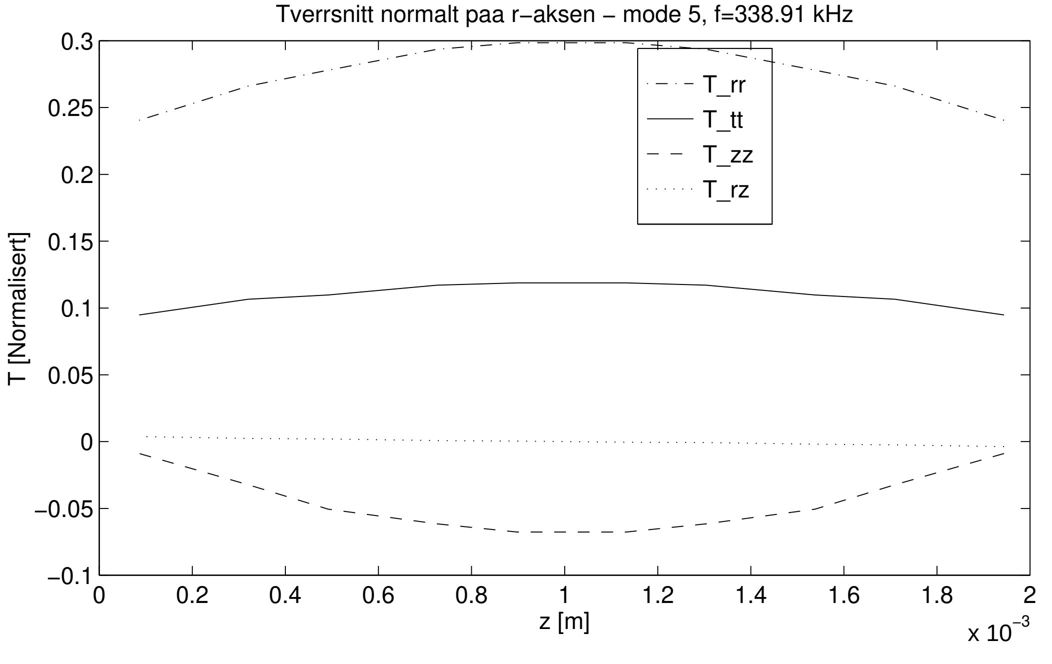


Figur 4.23: Sammenligning av alle komponentene til den mekaniske spenningen for $r \approx a/2$ og $z \approx h/2$ for den 3. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A.Denne figuren sammenfatter resultatene fra figur C.5- C.8. T_{tt} tilsvarer $T_{\theta\theta}$ i figuren.

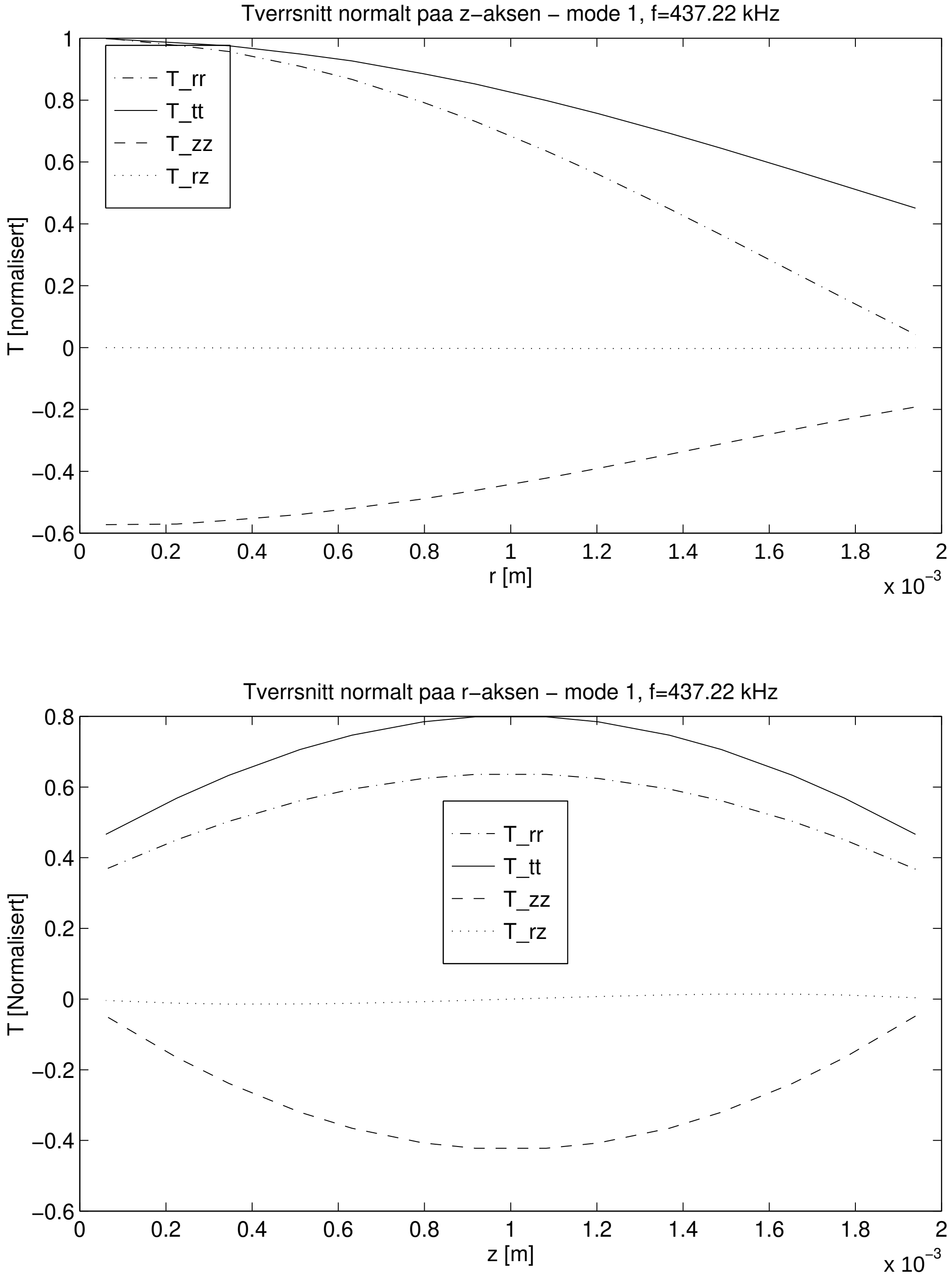


Figur 4.24: Sammenligning av alle komponentene til den mekaniske spenningen for $r \approx a/2$ og $z \approx h/2$ for den 4. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. T_{tt} tilsvarer $T_{\theta\theta}$ i figuren.





Figur 4.25: Sammenligning av alle komponentene til den mekaniske spenningen for $r \approx a/2$ og $z \approx h/2$ for den 5. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. T_{tt} tilsvarer $T_{\theta\theta}$ i figuren.



Figur 4.26: Sammenligning av alle komponentene til den mekaniske spenningen for $r \approx a/2$ og $z \approx h/2$ for den 1. moden i et element med D/T=2 av materialet PZT5A. Denne figuren sammenfatter resultatene fra figur C.9- C.12. T_{tt} tilsvarer $T_{\theta\theta}$ i figuren.

4.9 Utregning av ladningen på elektrodene

I seksjon 3.4 er det beskrevet hvordan man kan regne ut hvilken ladning det er på de to elektrodene til den piezoelektriske skiven ved hjelp av ligningene 3.34 og 3.33. Ved simulering med flere forskjellige materialer (PZT5A, PZT5H, PZT4, P160 osv.) og flere forskjellige D/T-forhold, ble det alltid funnet at de elektriske grensebetingelsene for ladningen er oppfylt, dvs. at $Q_G = -Q_P$ med nøyaktighet på under 1 ppm for de tilfellene det ble sett på.

4.10 Konklusjon av testing

I dette kapittelet er FEMP testet relativt grundig mot et annet FE-program (ABAQUS), publiserte resultater, målte resultater, og andre modeller for beskrivelse av piezoelektriske materialer. I tillegg er oppfylling av de mekaniske og elektriske grensebetingelsene kontrollert. I de aller fleste tilfellene finner man godt kvalitativt samsvar mellom FEMP og resultatene det sammenlignes med. Her følger en oppsummering av test-resultatene:

- Sammenligninger av utregning av resonansfrekvenser mellom MATLAB-versjonen og F90-versjonen av FEMP sikrer at egenverdirutinene som blir benyttet i FEMP virker tilstrekkelig godt. Det innebærer at relativavvikene mellom utregnete verdier for resonansfrekvenser fra MATLAB og F90-versjonen av FEMP er funnet å være godt under 1ppm for noen testproblemer.

- Sammenligninger med NAFEM-standarden sikrer at de isoparametriske elastiske elementene i FEMP fungerer for isotrope materialer. Testene er utført på en enkel sylinder av et elastisk materiale, og de maksimale avvikene som ble funnet ved utregning av egenverdier var på rundt 80ppm.

- Sammenligninger med utregnete resonansfrekvenser fra det kommersielle endelig element programmet ABAQUS gir svært god overensstemmelse for skiver med en rekke forskjellige D/T-forhold. Relativvaviket mellom resultater fra FEMP og resultater fra ABAQUS er funnet å være under 5ppm for alle disse testene.

- Sammenligninger med endelig element simuleringer fra en doktorgrad av Guo[10] som har vært svært viktig i forbindelse med arbeidet med denne hovedfagsoppgaven gir relativt store avvik (opp til 10% for enkelte resonansfrekvenser). Det er ikke funnet noen spesifikk årsak til avvikene. Siden det er meget bra overensstemmelse mellom ABAQUS og FEMP for de samme simuleringene (avvik på under 5ppm), konkluderes det med at resultatene fra FEMP sannsynligvis allikevel er korrekte.

- Sammenligninger med utregnete resonans- og antiresonansfrekvenser fra en rekke artikler viser kvalitativt god overensstemmelse mellom resultatene fra FEMP og de publiserte resultatene for en rekke forskjellige problemer. I noen tilfeller er de prosentvise avvikene på opp mot 8-10%, men stort sett ligger avvikene på under 3-4%. En sannsynlig forklaring på de fleste av disse avvikene er at forskjellige element-typer og element-oppdelinger er benyttet enn det som har vært gjort i FEMP. Dette har vanskeliggjort kvantitative sammenligninger for mange av disse tilfellene. Resultatene fra FEMP tyder på at det i den del publiserte artikler innenfor området endelig element analyse av piezoelektriske strukturer er benyttet for dårlig elementoppløsning, slik at ikke resultatene representerer "fullt konvergerte" resultater.

- Utregning av resonansfrekvenser og antiresonansfrekvenser for strukturer sammensatt av flere materialer gir kvalitativt bra samsvar med to publiserte arbeider, og meget godt samsvar (mindre enn 1ppm avvik) med resultater fra ABAQUS for resonansfrekvenser for et testproblem.

- Utregning av impedans/admittans i FEMP gir resultater som stemmer kvalitativt bra overens med Mason-modellen, målte resultater og publiserte resultater i [21], selv om det gjenstår en del testing av disse funksjonene før man kan konkludere med at de regner riktig. Dessuten bygger utregningen av disse funksjonene på at egenverdier og egenvektorer er riktig utregnet. Sammenligninger med målte resultater gir overraskende god overensstemmelse mellom resultatene fra FEMP og de målte resultatene (på under 1.5% til tross for at det er benyttet er annet materiale ved simulering enn det som det er målt på).
- De mekaniske og elektriske grensebetingelsene ser ut til å være oppfylt for løsningen av problemet i FEMP når elementoppdelingen er god nok.

Bruk av en rekke forskjellige element-typer og element-oppdelinger i publiserte resultater ved bruk av endelig element analysen har altså vanskeliggjort kvantitativt sammenligninger mellom FEMP og publiserte resultater. Det er kun i doktoravhandlingen til Guo [10] at det er funnet resultater som det er mulig å gjøre gode kvantitative sammenligninger med, slik at det er oppgitt nøyaktig problemdefinisjon, og det er benyttet en element-type som er implementert i FEMP. Sammenligning med resultater fra [10] har ikke gitt tilfredsstillende små avvik. Årsaken til disse avvikene er ikke funnet. Sammenligning med det kommersielle endelig element programmet ABAQUS gir svært små avvik i forhold til FEMP, også for resultatene som er vist i [10]. Det må derfor konkluderes med at det er stor sannsynlighet for at FEMP regner riktig for resonansfrekvenser for piezokeramiske skiver, til tross for avvikene mellom resultater fra FEMP og resultater fra doktoravhandlingen til Guo [10]. Dersom egenverdiene er korrekt utregnet, vil feilen på egenvektorene kun avhenge av egenverdirutinen. Det blir benyttet anerkjente og mye brukte egenverdirutiner som sikrer at egenvektorene med meget stor sannsynlighet vil bli regnet med feil i samme størrelsesorden som for egenverdiene. For sammensatte funksjoner vil feilen akkumuleres, slik at feilen for de sammensatte funksjonene (rent numerisk) kan bli langt større enn for egenverdier/egenvektorer.

Når det gjelder andre funksjoner konkluderes det med at testresultatene indikerer at FEMP regner riktig for resonansfrekvenser for strukturer sammensatt av flere materialer og elektriske responsfunksjoner, selv om test-grunnlaget er alt for lite til å trekke klare konklusjoner.

Kapittel 5

Konvergensbetraktninger

I dette kapittelet blir det sett litt på hvilke krav man kan sette til elementer og elementoppdeling for å få en ønsket nøyaktighet på løsningen på et problem. Den løsningen det snakkes om her, er kun resonansfrekvensene. Usikkerheten for egenvektorene vil være omtrent den samme som for egenverdiene i egenverdirutinene [46], slik at diskusjonen som foretaes her også vil være relevant for egenvektorene. Når modesuperposisjonsmetoden blir benyttet, vil alle funksjonene regnes ut fra egenverdiene og egenvektorene, slik at egenverdier og egenvektorer vil være grunnleggende parametre.

Man ser altså ikke på konvergensen av funksjoner som elektrisk eller mekanisk respons, men resultatene som blir vist her vil også være relevante for slike funksjoner.

Når man benytter endelig element metoden for å løse et problem, er det i hovedsak valg av element-type og elementoppdeling som bestemmer nøyaktigheten til løsningen. Det er altså to viktige spørsmål man må ta stilling til i den forbindelse:

- Hvilke typer elementer skal man benytte?
- Hvordan skal strukturen deles opp i elementer? Det vil si, hvor mange elementer skal det benyttes i hver koordinatretning?

5.1 Valg av elementer

På grunn av at vi har vært interessert i å analysere piezoelektriske skiver, har det i denne oppgaven vært hensiktsmessig å benytte aksesymmetriske rektangulære elementer i analysen. I denne oppgaven har vi derfor sett på to forskjellige aksesymmetriske piezoelektriske isoparametriske elementer, et 4-noders med lineær varisjon langs sidekantene, og et 8-noders med kvadratisk variasjon langs sidekantene. Det 8-noders elementet er av særlig stor betydning her, fordi det er denne elementtypen som er benyttet i doktoravhandlingen til Guo [10]. I tillegg finnes det mange andre typer elementer som kan benyttes i en endelig element modell (se f.eks. [42], [5], [37]). Ved sammenligning av resultater for 4-noders elementet med resultater for 8-noders elementet, har det vist seg at 8-noders elementet gir nøyaktigere resultater med kortere regnetid. Implementering av høyere ordens elementer kunne kanskje gitt enda bedre resultater [5].

Ved valg av element for endelig element simuleringer, må man også ta hensyn til strukturen som skal modelleres. Dersom strukturen ikke er rektangulær kan det være hensiktsmessig å benytte triangulære elementer for modelleringen.

I beregningene i denne oppgaven er det hovedsakelig tatt med resultater fra simuleringer med det 8-noders isoparametriske elementet, fordi vi ser på en struktur som kan modelleres ved hjelp av rektangulære elementer, og fordi det har vist seg at de 8-noders elementene gir langt bedre resultater enn de 4-noders elementene. Det er derfor også det 8-noders isoparametriske elementet med kvadratisk variasjon langs sidekantene som blir benyttet i konvergensbetraktningene nedenfor.

5.2 Elementoppdeling

En piezoelektrisk skive kan i det aksesymmetriske tilfellet analyseres ved hjelp av et rektangulært "mesh" i rz-planet for $r > 0$. Da det er variasjoner av samme størrelsesorden innenfor hele elementet, benyttes det her en uniform elementoppdeling, slik at alle elementene er like store. Dersom man f.eks. ser på et piezoelektrisk element med en backing, kan det være hensiktsmessig å variere elementstørrelsen, da variasjonene i de variable i mange tilfeller vil være mindre i backingen enn i det piezoelektriske elementet, avhengig av materialet i baklaget.

Det vanskeligste valget i forbindelse med valg av elementoppdeling, er hvor mange elementer man må benytte i hver koordinatretning for å løse ett problem med tilstrekkelig nøyaktighet. I [10] blir det anslått at et krav for tilstrekkelig nøyaktighet er at man har 5-7 endelig element noder pr. bølgelengde for det frekvensområdet man er interessert i. I [23] er det benyttet et tilsvarende krav på rundt 10 elementer pr. bølgelengde for tykkelsesmoden. Disse kravene avhenger naturligvis av hva slags elementer som blir benyttet (I [10] 8-noders kvadratiske elementer, i [23] 3-noders lineære). For elementer med lineær variasjon langs kantene, må man ha langt flere elementer pr. bølgelengde enn for elementer med kvadratisk variasjon langs kantene, slik som for det 8-noders isoparametriske elementet som blir brukt i de fleste simuleringene i denne oppgaven. Det ser man f.eks. ved testingen mot NAFEM-"benchmarks" i seksjon 4.2, der en elementoppdeling med 8x1 8-noders elementer gir bedre resultat enn en elementoppdeling med 16x3 4-noders elementer.

Da det ikke har vært mulig å finne noen klare krav til elementoppdeling for å løse et problem med tilstrekkelig nøyaktighet i litteraturen, er det her foretatt konvergenstester, for å prøve å finne et slikt krav. I konvergenstestene er elementoppdelingen gradvis forbedret i hver av koordinatretningene for seg, for å finne krav på antall elementer pr. bølgelengde for tilstrekkelig god nøyaktighet. Denne konvergenstesten er bare utført for et materiale, PZT5A, men er gjort for en rekke forskjellige D/T-forhold.

5.2.1 Utregning av bølgelengder

Bølgelengden λ for en bølge som brer seg med fasehastighet v og har frekvens f er definert som[47]

$$\lambda = \frac{v}{f} \tag{5.1}$$

Et piezoelektrisk materiale er generelt anisotropt, slik at man må operere med forskjellige fasehastigheter og bølgelengder i hver koordinatretning. Man må altså regne ut bølgelengden i r- og z-retningen hver for seg. I tillegg har vi både kompresjonsbølger og skjærbølger i det piezoelektriske materialet.

I r-retningen benytter vi her planar-hastigheten for en uendelig skive for fasehastigheten, fordi denne gir en bra tilnærming for høye D/T forhold. Den er gitt som[64][40]:

$$v_r = \sqrt{\frac{c_{11}^p}{\rho}} \qquad c_{11}^p = \frac{s_{11}^E}{s_{11}^{E2} - s_{12}^{E2}} = c_{11}^E - \frac{c_{13}^{E2}}{c_{33}^E} \tag{5.2}$$

der s_{ij}^E er definert i [40]. I tykkelses-retningen er både kompresjonsbølger og skjærbølger viktige. For kompresjonsbølger er fasehastigheten gitt som[22]

$$v_{z,c} = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} \tag{5.3}$$

Tilsvarende fasehastighet for skjærbølger er gitt ved[22]

$$v_{z,s} = \sqrt{\frac{c_{44}^E}{\rho}} \tag{5.4}$$

Fra disse ligningene finner man bølgelengden λ i hver av koordinatretningene ved ligning 5.1. Disse fasehastighetene er også gitt i [6], der de blir brukt innenfor analyse av resultater fra endelig element metoden.

Anta at vi ønsker å ha P_r elementer pr. bølgelengde i r-retningen for en skive med radius a ved frekvensen f. Kravet til antall elementer N_r i radiell retning blir da:

$$N_r = P_r \frac{a}{\lambda_r} = \frac{P_r f a}{v_r} \tag{5.5}$$

Ligning for krav til antall elementer i tykkelsesretningen vil bli helt analog, men her vil vi ha to forskjellige krav avhengig om man regner med fasehastigheten for kompresjonsbølger $v_{z,c}$ eller for skjærbølger $v_{z,s}$. Ved utregning av krav for antall elementer i z-retningen, N_z ved regning med fasehastigheten for kompresjonsbølger får man:

$$N_z = P_{z,c} \frac{T}{\lambda_z} = \frac{P_{z,c} f T}{v_{z,c}} \tag{5.6}$$

og med fasehastigheten for skjærbølger:

$$N_z = P_{z,s} \frac{T}{\lambda_z} = \frac{P_{z,s} f T}{v_{z,s}} \tag{5.7}$$

der $P_{z,c}$ er antall elementer pr. bølgelengde for kompresjonsbølger i z-retningen, og $P_{z,s}$ er antall elementer pr. bølgelengde for skjærbølger i z-retningen. Disse ligningene kan man også bruke til å regne ut antall elementer pr. bølgelengde for en gitt frekvens og elementoppdeling.

Fasehastighetene som er listet opp ovenfor gjelder *under antagelsen av at man har høye D/T-forhold*, men vil være relevante tilnærminger langt ned mot D/T=1 for vår bruk, fordi vi bare trenger omtrentlige verdier. For lave D/T-forhold vil ikke uttrykkene for fasehastighetene være relevante. Det er da nødvendig å regne med andre ligninger for fasehastigheten, slik at man får andre krav til elementoppdeling. Her burde man altså benyttet alternative fasehastigheter for lave D/T-forhold, men siden vi er mest interessert i skiver med relativt høye D/T-forhold i denne oppgaven, er ikke dette gjort her. Vi får altså misvisende krav for D/T mindre enn 2. Det er derfor kun sett på skiver med D/T større enn 2 i diskusjonen i dette kapittelet.

5.3 Konvergenstester

For å få en mest mulig generell testing av konvergensen, er det her valgt å se på det relative avviket i resonansfrekvenser mellom flere forskjellige simuleringer for hele D/T-området mellom 2 og 20 og for en maksimal f*T som er valgt til 2200 kHz*mm. Når det snakkes om N_r (eller N_z) elementer pr. bølgelengde i fortsettelsen, menes det N_r elementer pr. bølgelengde *for en verdi for f*T lik 2200kHz*mm.*

Det blir foretatt to serier med simuleringer med 7 forskjellige elementoppdelinger i hver serie. I den ene simulerings-serien varieres elementoppdelingen i radiell retning mens elementoppdelingen i tykkelsesretningen holdes fast. I den andre simulerings-serien varieres elementoppdelingen i tykkelsesretningen mens elementoppdelingen i radiell retning holdes fast. Størrelsen som det blir sett på her er relativavviket mellom den nøyaktigste av de 7 simuleringene i hver simuleringsserie og hver av de 6 andre simuleringene i serien Dette relativavviket vil være omtrent like stort som avviket i forhold til den "fullt konvergerte" verdien for resonansfrekvensene, siden avvikene blir mye mindre for hver simulering med bedre elementoppdeling. Dersom FEMP regner riktig, vil den "fullt konvergerte" verdien for resonansfrekvensene være lik løsningen for den teoretiske modellen for det fysiske problemet [37]. Det benyttes fire forskjellige typer plott for å vise hvor stort relativavviket er for en simulering:

1. To plott der det relative avviket for hver eneste mode med f*T mindre enn 2200 for hver eneste skive med D/T mellom 2 og 20 merkes av med et '+' i et plott der relativ-avvik plottes mot f*T. Det ene av plottene har lineær skala langs begge koordinataksene, mens det andre plottet har logaritmisk skala langs y-aksen og lineær skala langs x-aksen. Siden det her blir satt et merke for hver eneste simulerte egenfrekvens, får man et godt overblikk over hvor i f*T-området konvergensen er hurtig, og hvor mange av de simulerte egenverdiene som har store avvik. Plottet med linær skala viser best hvordan maksimalavviket varierer, mens plottet med logaritmisk skala best illustrerer hvilke minimumsverdier man finner.
2. To plott der relativavviket for hver mode for hver skive med D/T mellom 2 og 20 plottes mot D/T. Ut fra slike plott får man oversikt over for hvilke D/T-verdier avvikene er størst, og om konvergensen er noenlunde jevn for alle D/T-verdier. Det ene av plottene har lineær skala langs begge koordinataksene, mens det andre plottet har logaritmisk skala langs y-aksen og lineær skala langs x-aksen.

Vi har dessverre bare kunnet utføre konvergenstestene med ett materiale, PZT5A, på grunn av at disse testene tar relativt mye CPU-tid og minne. Når vi holder antall elementer fast i enten radiell eller tykkelsesretningen, er det dessverre ikke mulig å benytte en elementoppdeling i denne retningen som gir maksimal nøyaktighet, fordi man da får problemer med for lite minne på datamaskinen. Følgelig er det ikke sikkert man vil få nøyaktig samme krav til elementoppdeling for en ny simuleringsserie der elementoppdelingen i den retningen der elementoppdelingen holdes fast er forbedret, men det er allikevel sannsynlig at resultatene her vil gi en god pekepinn på hvilke krav man bør ha til elementoppdeling.

For D/T-området mellom 2 og 10 er det mulig å utføre tester med langt bedre elementoppdeling i den koordinatretningen som holdes fast enn det som er gjort her uten at kravet til CPU-tid og minne økes, fordi det er for høye D/T-forhold beregningene er kritisk. Det er ikke gjort på en systematisk måte i denne oppgaven, og anbefales derfor gjort i et senere arbeid, selv om det er utført noen få tester som indikerer at mønsteret blir det samme også når man forbedrer elementoppdelingen i den koordinatretningen der elementoppdelingen holdes fast.

5.3.1 Radiell retning

Vi holder antallet elementer i z-retningen fast (til $N_z = 3$ som tilsvarer $P_{z,c} \approx 5.9$, $P_{z,s} \approx 2.3$)), og varierer kravet til antall elementer pr. bølgelengde i r-retningen (P_r). Dette er ikke en tilstrekkelig god elementoppdeling i z-retningen. Fra tabell 5.2 ser man at dette kan gi avvik på opp til 1.7% fra de "fullt konvergerte" verdiene. Siden elementoppdelingen i z-retningen holdes fast for alle simuleringene, antaes det at man får samme konvergensmønster også når elementoppdelingen i z-retningen forbedres. Dette er ikke undersøkt systematisk, men som nevnt ovenfor er dette aktuelt for et senere arbeid.

Antall elementer i r-retningen regnes ut fra ligning 5.5 der $f * T = 2200 kHz * mm$ er kravet til f*T-verdi. Materialet som benyttes er PZT5A, og tykkelsen T er konstant lik $2mm$ for alle diskene, slik at det kun er diameteren som forandres for hver skive i en simulering. Det utføres 7 simuleringsserier med henholdsvis 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 elementer pr. bølgelengde i radiell retning for hele D/T-spekteret mellom 2 og 20.

I figurene 5.3-5.6 er det vist plott av det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for henholdsvis 3, 4, 5, 6, 7 og 8 elementer pr. bølgelengde i r-retningen($N_r = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer pr. bølgelengde i r-retningen ($P_r = 9$) på fire forskjellige måter

Tabell 5.1: Det maksimale relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser over f*T-området 0-2200 kHz*mm og D/T-området 2-20 for 3-8 elementer pr. bølgelengde i r-retningen ($P_r = 3-8$) i forhold til en simulering med 9 elementer pr. bølgelengde i r-retningen ($P_r = 9$) når antall elementer i z-retningen er 3 ($N_z = 3$, som tilsvarer $P_{z,c} \approx 5.9$, $P_{z,s} \approx 2.3$)

Antall elementer pr. bølgelengde i r-retn. (P_r)	Maksimalt rel. avvik
3	4.7%
4	1.6%
5	0.68%
6	0.30%
7	0.13%
8	0.048%

som skissert ovenfor. I tabell 5.1 er det maksimale relative avviket for hver simulering i forhold til simuleringen med 9 elementer pr. bølgelengde ($P_r = 9$) satt opp i en tabell. Av denne tabellen kan det se ut som om man må benytte 5-6 elementer pr. bølgelengde for å få en nøyaktighet på 0.5% i simuleringene. Dette må ansees som et foreløpig resultat, siden det her er benyttet $N_z = 3$ i analysen, som ikke gir en tilstrekkelig god beskrivelse i tykkelsesretningen. Før man kan gi en sikker verdi for den P_r som kreves for å få en gitt nøyaktighet, må man undesøke hvordan avvikene for resonansfrekvensene varierer når det benyttes høyere verdier for N_z. Det er mulig at økning av verdien for N_z kan føre til at det maksimale relativavviket for forskjellige verdier av P_r i tabell 5.1 vil gå ned fordi man da får en bedre beskrivelse av mekanismene som opptrer i elementet. Disse resultatene er selvsagt gjort på bakgrunn av at man antar at FEMP regner riktig, noe som ble sannsynliggjort i kapittel 4.

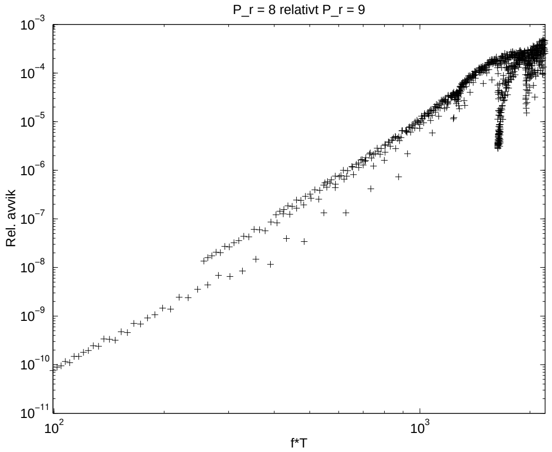
Av både figur 5.3 og figur 5.5 ser man at avvikene er svært små for de lave f*T-verdiene. Dette er å forvente, siden det da er svært mange elementer pr. bølgelengde for alle simuleringene. Figur 5.3 (og også figur 5.5) viser tydelig hvordan den maksimale verdien for relativavviket minker fra nesten 5% i det første plottet med $P_r = 3$ ned mot 0.05% for det siste plottet med $P_r = 8$. Når man forbedrer elementoppdelingen blir de simulerte frekvensverdiene lavere (det er ikke absoluttverdien til relativavviket, men relativavvik med fortegn som er vist i figurene, og dette relativavviket er alltid større enn null her). Dette stemmer overens med at de egenfrekvensene man får som løsning på egenverdiproblemet er en øvre grense for de "fullt konvergerte" verdiene ([37]). Dette er en veldig nyttig observasjon i praktisk bruk av FEMP, fordi dette impliserer at simulerte verdier for resonansfrekvensene alltid ligger høyere enn løsningen på den teoretiske modellen. Man må allikevel ikke bruke dette ukritisk ved alt for dårlige elementoppdelinger, fordi det da allikevel kan bli problemer (se nedenfor).

Av figur 5.5 ser man at relativavviket nesten utelukkende er en funksjon av f*T-verdien, og ikke en funksjon av D/T. Det kan altså være interessant å se på hvordan relativavviket varierer med f*T. Ved å plotte de samme dataene i et koordinatsystem med logaritmisk skala langs begge aksene (loglog-plot), er det lettere å avgjøre hvordan avviket varierer med f*T. Det er kun tatt med et plott som et eksempel på dette på grunn av plassmangel (se figur 5.1).

I dette plottet ser man at kurven er tilnærmet linær for et stort f*T-område. Generelt kan man da skrive en ligning for kurven i det D/T-området der den er lineær i loglog-plottet i figur 5.1 som

$$R = R_0 * \left(\frac{f*T}{(f*T)_0}\right)^k \tag{5.8}$$

der R er relativ-avviket som funksjon av $(f*T)$, R_0 er relativavviket for f*T-verdien $(f*T)_0$, og k er en konstant. Ved plotting av kurven for R gitt ved ligning 5.8 i samme plott som relativ-avviket er det funnet at konstanten k er lik ca. 5 for alle de forskjellige simuleringene, når man leser av en



Figur 5.1: Det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for 8 elementer pr. bølgelengde i r-retningen (d.v.s $P_r = 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer pr. bølgelengde i r-retningen ($P_r = 9$) plottet mot f*T. Antall elementer i z-retningen er i begge tilfeller lik 3 ($N_z = 3$). Det er satt av et kryss for relativavviket for hver eneste simulerte resonansfrekvens. Skalaen er logaritmisk i begge koordinatretninger.

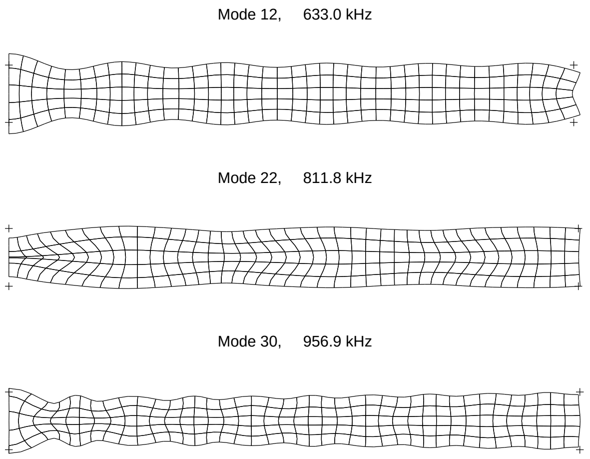
verdi for R_0 ved $(f * T)_0 = 100kHz * mm$ (her er det kun vist et slikt plott for en simulering, men mønsteret er det samme alle simuleringene). Denne verdien er bare en omtrentlig verdi, og det er ikke lagt ned mye arbeid i å bestemme den nøyaktig. Avvikene øker altså kraftig med frekvensen i dette området. Det er ikke sett på høyere frekvenser, slik at det er uvisst om man har samme variasjon for høyere f*T-verdier.

På figuren er det tegnet vertikale linjer for LE-, TS- og TE-moden predikert av en-dimensjonale modeller [22], der LE-moden har lavest f*T-verdi, 1377 kHz*mm, TS-moden nest lavest, 1650 kHz*mm, og TE-moden høyest ,1935kHz*mm. For ligninger for disse frekvensene, se vedlegg E.2.8. Disse frekvensene er også plottet i frekvensspekteret i figur 4.4. Av figur 5.5 ser man tydelig at for noen f*T-verdier har man et minimum, mens man har maksimum for andre verdier av f*T, og at det er en sammenheng mellom ekstremalverdiene for relativavviket og frekvensene predikert av den en-dimensjonale modellen:

- Det kraftigste minimumet har man for en f*T-verdi som ligger omkring TS-moden.
- Et annet markert minimum har man for en f*T-verdi som ligger omkring TE-moden.
- Et tredje minimum (ikke så tydelig) har man for en f*T-verdi som ligger litt nedenfor LE-moden, omtrent for f*T-verdien der man i frekvensspekteret kan identifisere E-moden (”Edge-mode” [6] [49]).

En sannsynlig årsak til at man får mindre relativavvik for disse f*T-verdiene er at man ikke trenger så mange elementer i radiell retning for å modellere disse modene. En slik forklaring innebærer at man trenger relativt få elementer i radiell retning for å modellere TS-moden, TE-moden og E-moden i forhold til modene omkring.

For TE-moden kan dette muligens forklares ut fra at en stor del av vibrasjonene i den piezoelektriske skiven foregår i tykkelsesretningen [49], og at svingningene foregår omkring en middelverdi som er forskjellig fra null [49]. En god tilnærming til svingningene for denne moden er altså et plant stempel [49] (dette er også forenklingen som blir brukt i Mason-modellen). Man trenger få elementer i radiell retning for å modellere et plant stempel på en god måte. Dette kan altså være en forklaring på minimumsverdien for TE-moden.



Figur 5.2: Svingemodene som svarer til E-mode (633.0kHz) , TE-mode (956.9kHz) og TS-mode (811.8kHz) er vist. Disse modene er kategorisert ut fra sammenligninger med [10] og [49]. Elementet det blir sett på har D/T lik 19.8 (ca. lik 20), tykkelse 2.03mm og diameter 40.1mm, og er det samme som det blir sett på i seksjon 4.4. Det er benyttet 5x40 elementer i simuleringene.

For LE-moden ("Length Expander mode") predikert av Mason-type modeller er det forutsatt at man har en høy sylinder (med lengderetning i z-retningen og elektroder for z_{max} og z_{min}) som svinger som et plant stempel i z-retningen [22], slik at det samme argumentet som man benyttet ovenfor for TE-moden kan benyttes i dette tilfellet. Denne tilnærmingen vil bare gjelde når D/T går mot null. E-moden [49] har noen av de samme egenskapene, og kan i følge [49] assosieres med LE-moden i en sylinder for skiver med høyere D/T-forhold.

For TS-moden er det langt mindre variasjon i radiell retning enn for de radielle modene omkring. Det er riktignok store forskyvninger i radiell retning for TS-moden, men variasjonen i forskyvningen som funksjon av r er langt mindre enn for de radielle modene omkring [49].

I figur 5.2 er svingemodene som svarer til E-mode, TE-mode og TS-mode vist. Disse modene er kategorisert ut fra sammenligninger med [10] og [49]. Elementet det blir sett på har D/T lik 19.8 (ca. lik 20), tykkelse 2.03mm og diameter 40.1mm, og er det samme som det blir sett på i seksjon 4.4. Disse modeplottene er med på å understøtte forslaget til begrunnelse for minimumsverdiene for relativavvikene i figur 5.5.

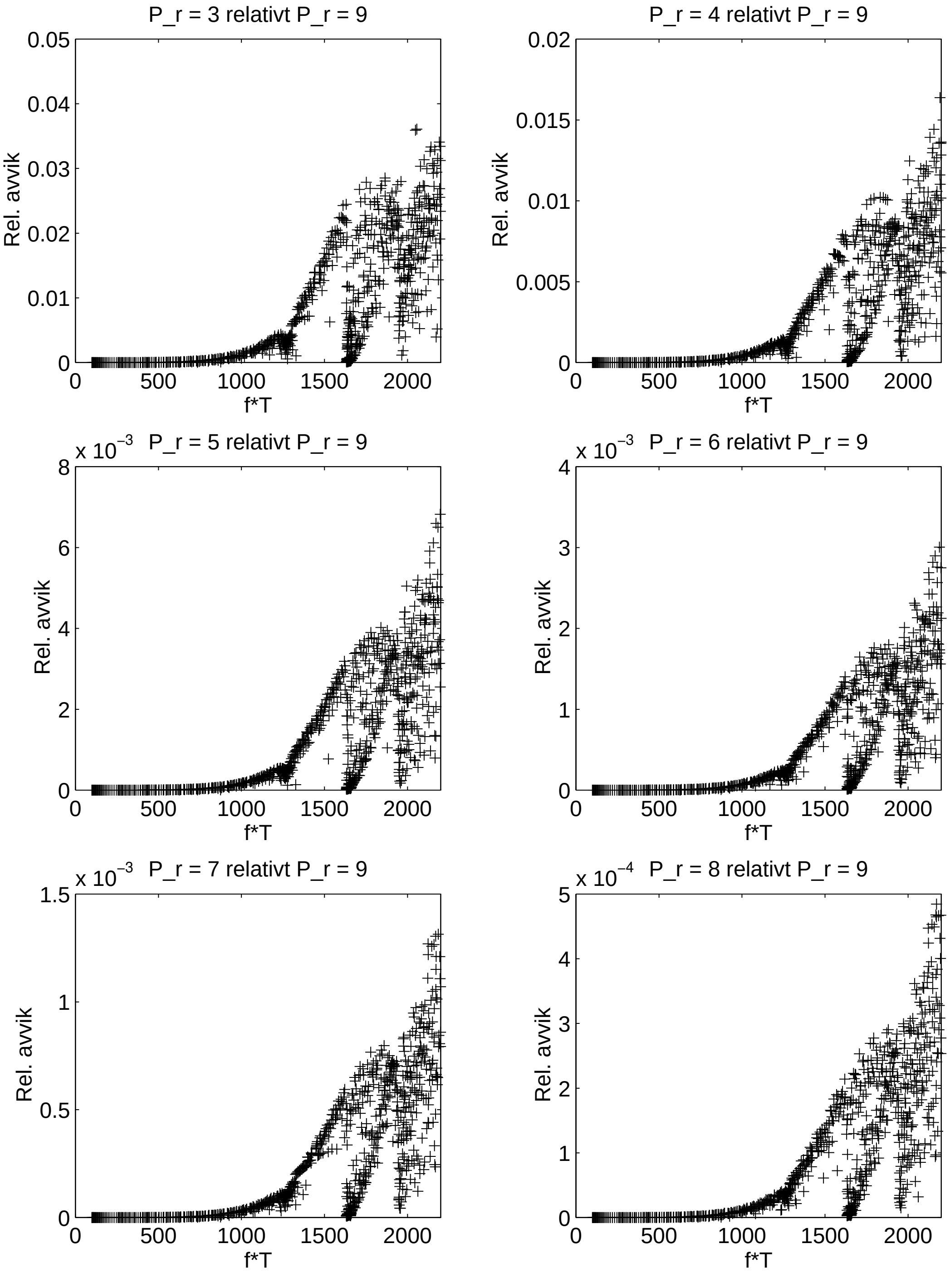
Diskusjonen ovenfor er kun ment som en mulig forklaring på effektene man ser i konvergenstestene i figur 5.3 og figur 5.5. Effektene ble først oppdaget helt i sluttfasen av arbeidet med denne hovedoppgaven, men en liten diskusjon er allikevel tatt med her. Dette er ikke funnet diskutert andre steder i litteraturen.

I figur 5.5 kan man også identifisere en markert forandring i relativavviket mellom den første og den andre svingemoden (lengst til venstre i figurene). Det er uklart hva som er årsaken til at relativavviket øker så mye fra den første til den andre moden.

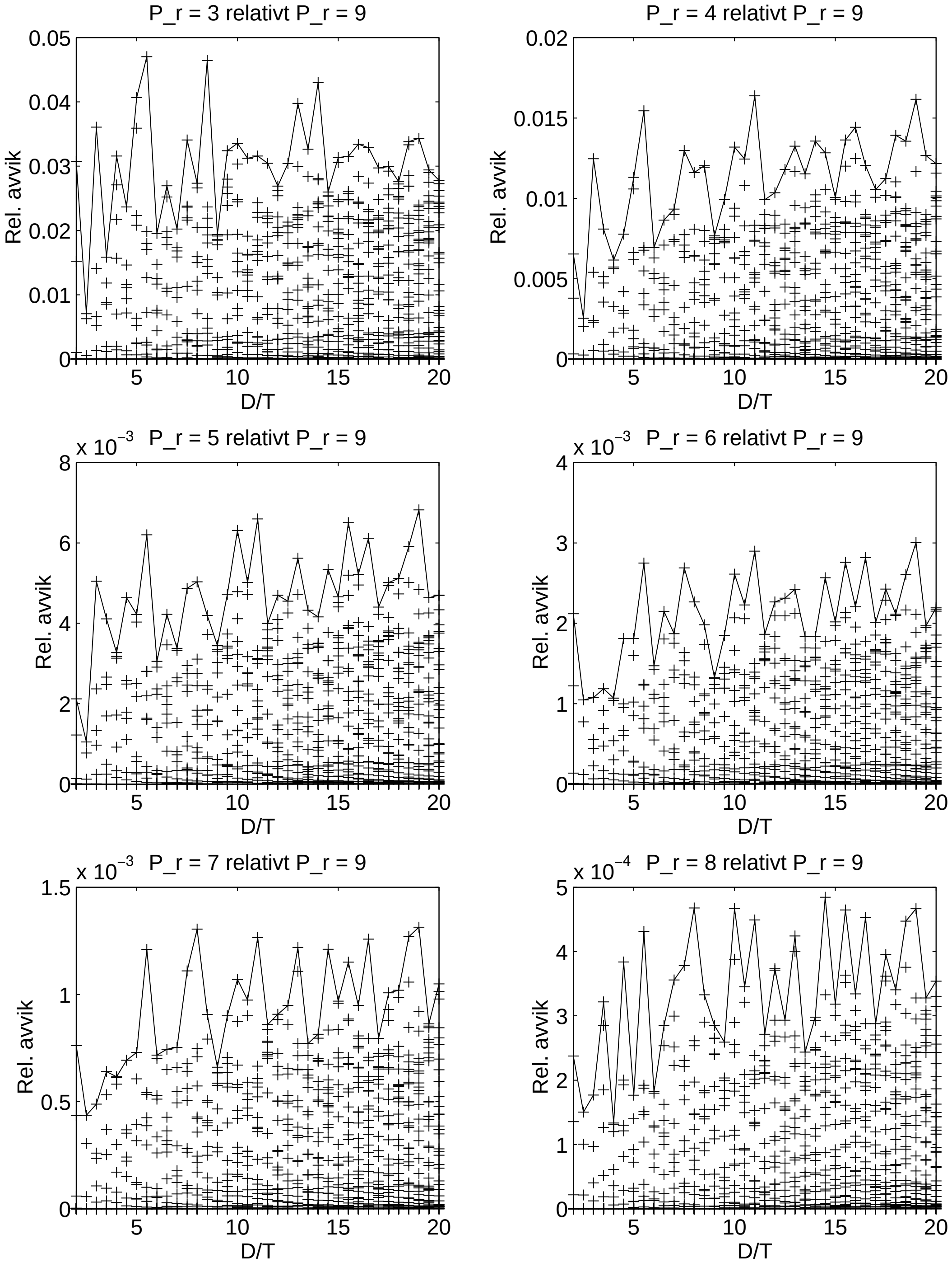
Av figur 5.4 og figur 5.6 ser man at det maksimale avviket er noenlunde konstant for alle D/T-verdier. Hakkene på kurvene skyldes sannsynligvis delvis at man må foreta en avrunding når man regner ut antallet elementer i en koordinatretning ut fra antallet elementer pr. bølgelengde i koordinatretningen, siden antallet elementer i en koordinatretning må være et heltall.

I figur 5.6 ser man igjen effekten av at relativavviket er en funksjon av f*T, som det ble observert ovenfor. I plottet av relativavviket mot D/T kan man på grunn av at relativavviket er en funksjon av f*T skille ut de forskjellige svingemodene. Årsaken til dette er at for to skiver med nesten samme D/T-forhold vil også f*T-verdien for en spesiell mode for disse skivene ligge tett opptil hverandre, og følgelig også relativavviket for moden, siden relativavviket er en funksjon av f*T. For de høyere modene blir mønsteret med komplisert fordi det kommer inn flere moder, og fordi relativavviket avviker mer fra å være en funksjon av f*T.

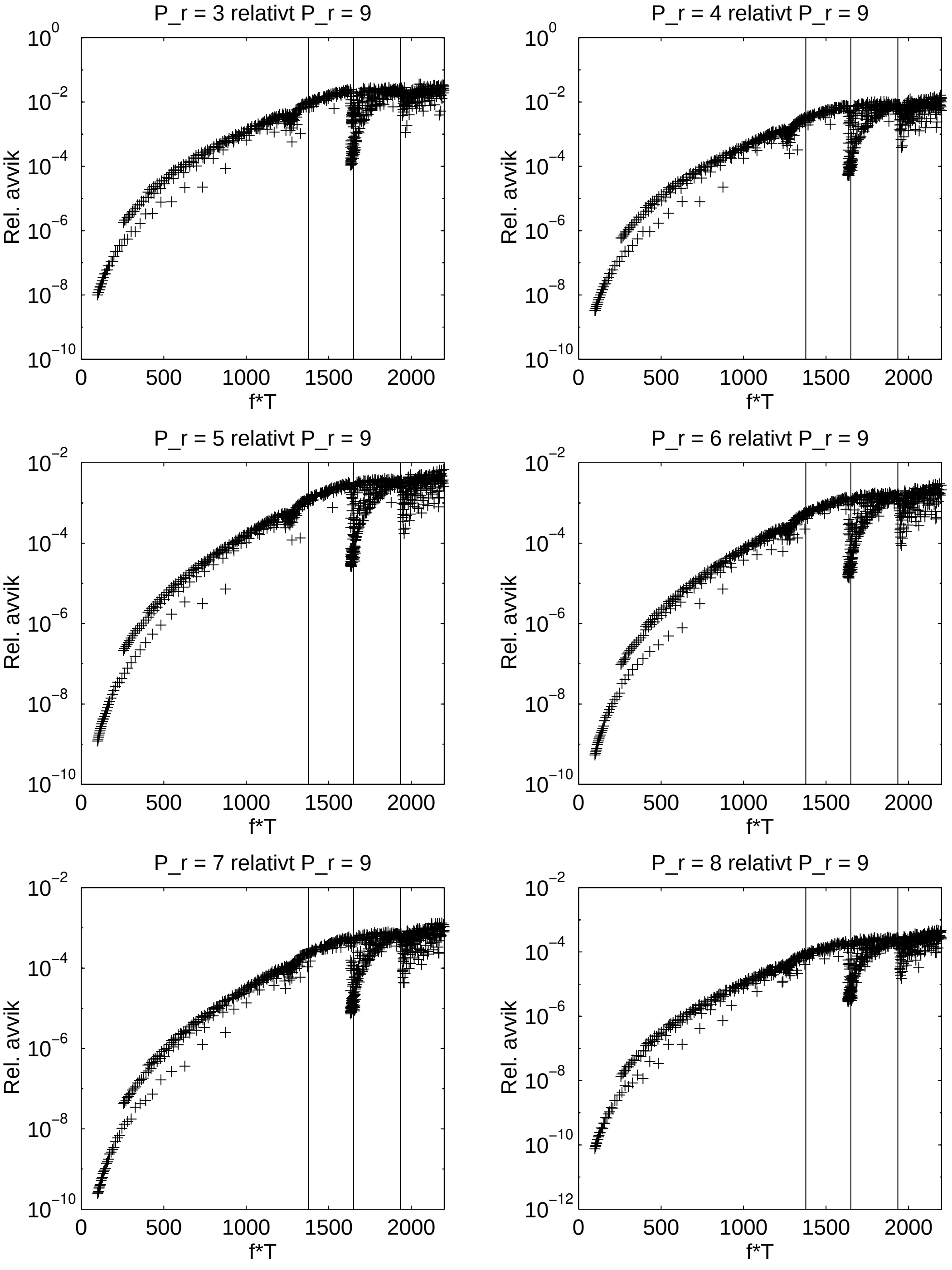
Ved utføring av konvergenstester ble det først forsøkt å holde antallet elementer i tykkelsesretningen fast til $N_z = 2$ ($P_{z,s} = 1.5$ og $P_{z,c} = 3.9$) ved simuleringsserien beskrevet ovenfor. Det viste seg da at man fikk tildels store avvik for simuleringene med mer enn 7 elementer pr. bølgelengde i r-retning ($P_r \geq 7$). En del av resonansfrekvensene ble da ***høyere*** når man forbedret elementoppdelingen (i motsetning til det teorien sier [37]), noe som sannsynligvis skyldes at antallet moder som identifiseres forandres, slik at det for eksempel kommer inn nye moder. Derfor ble den nye simuleringsserien med $N_z = 3$ elementer i tykkelsesretningen, som det er diskutert resultater fra ovenfor, utført. Dette viser at dårlig elementoppdeling i en koordinatretningene kan ødelegge konvergensegenskapene til løsningen i den andre koordinatretningen.



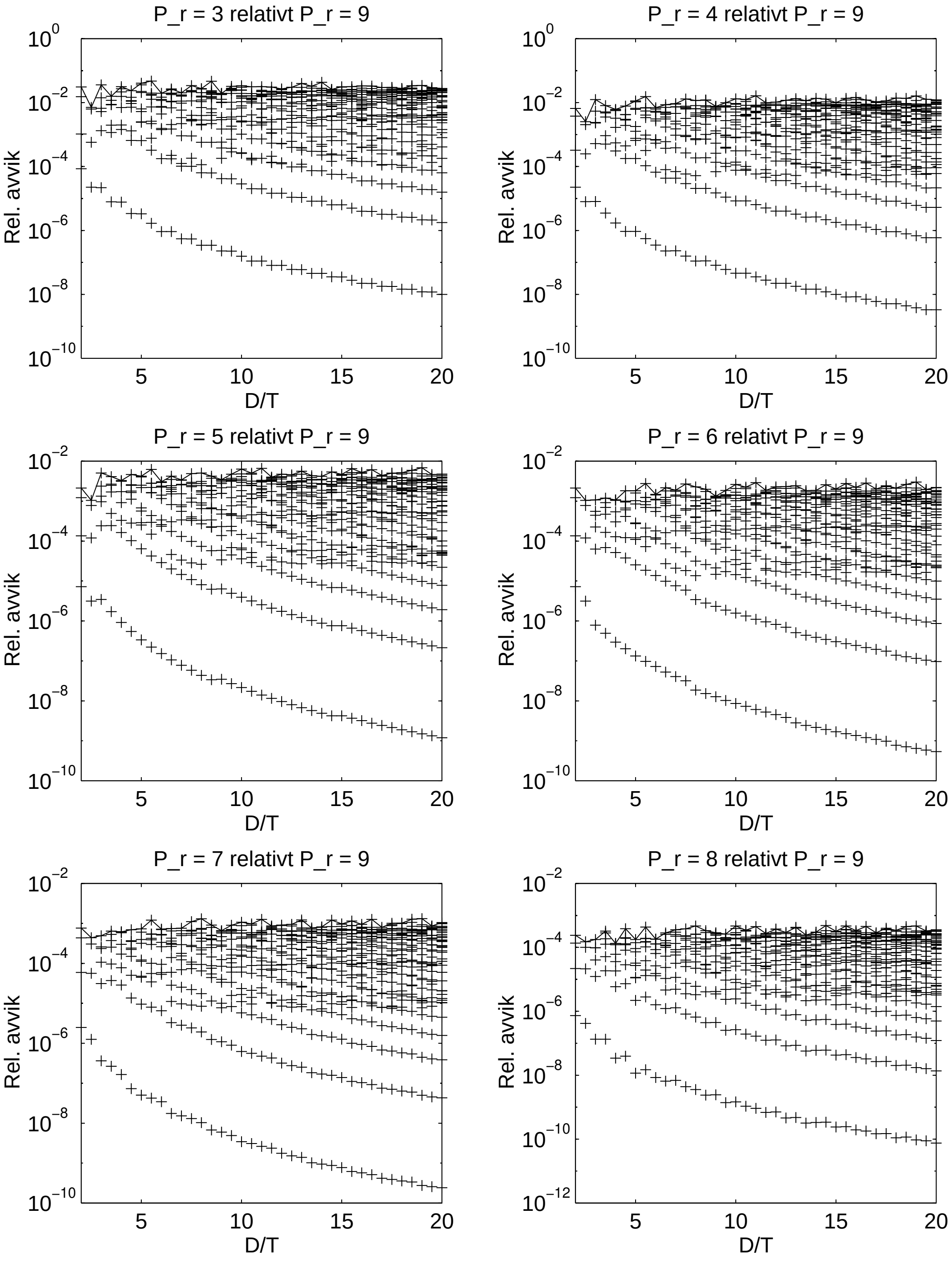
Figur 5.3: Det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for henholdsvis 3,4,5,6,7 og 8 elementer pr. bølgelengde i r-retningen (d.v.s $P_r = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer pr. bølgelengde i r-retningen ($P_r = 9$) plottet mot f*T. Antall elementer i z-retningen er i alle tilfeller lik 3 ($N_z = 3$). Det er satt av et kryss for relativavviket for hver eneste simulerte resonansfrekvens. Skalaen er lineær i begge koordinatretninger.



Figur 5.4: Det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for henholdsvis 3,4,5,6,7 og 8 elementer pr. bølgelengde i r-retningen (d.v.s $P_r = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer pr. bølgelengde i r-retningen ($P_r = 9$) plottet mot D/T. Antall elementer i z-retningen er i alle tilfeller lik 3 ($N_z = 3$). Det er satt av et kryss for relativavviket for hver eneste simulerte resonansfrekvens. Det er plottet en linje som viser maksimalavviket for hver skive. Skalaen er lineær i begge koordinatretninger.



Figur 5.5: Det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for henholdsvis 3,4,5,6,7 og 8 elementer pr. bølgelengde i r-retningen (d.v.s $P_r = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer pr. bølgelengde i r-retningen ($P_r = 9$) plottet mot f*T. Antall elementer i z-retningen er i alle tilfeller lik 3 ($N_z = 3$). Det er satt av et kryss for relativavviket for hver eneste simulerte resonansfrekvens. Skalaen er logaritmisk langs y-aksen og lineær langs x-aksen. På figuren er det tegnet vertikale linjer for LE-, TS- og TE-moden.



Figur 5.6: Det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for henholdsvis 3,4,5,6,7 og 8 elementer pr. bølgelengde i r-retningen (d.v.s $P_r = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer pr. bølgelengde i r-retningen ($P_r = 9$) plottet mot D/T. Antall elementer i z-retningen er i alle tilfeller lik 3 ($N_z = 3$). Det er satt av et kryss for relativavviket for hver eneste simulerte resonansfrekvens. Det er plottet en linje som viser maksimalavviket for hver skive. Skalaen er logaritmisk langs y-aksen og lineær langs x-aksen.

5.3.2 Tykkelsesretningen

I tykkelsesretningen regner vi med 2 forskjellige fasehastigheter, som forklart ovenfor. Det er derfor i utgangspunktet ikke klart hvilken av disse fasehastighetene det er naturlig å benytte til å sette opp et krav til antall elementer pr. bølgelengde ($P_{z,c}$ eller $P_{z,s}$). I utregningene nedenfor blir det derfor benyttet et visst antall elementer i tykkelsesretningen (N_z) og sett på konvergensen i forhold til antallet elementer i tykkelsesretningen (N_z) istedenfor antall elementer pr. bølgelengde ($P_{z,c}$ eller $P_{z,s}$).

Tabell 5.2: Det maksimale relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for 3-8 elementer i z-retningen ($N_z = 3 - 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer i z-retningen ($N_z = 9$) i f*T-området mellom 0 og 2200kHz*mm og D/T-området mellom 2 og 20, der antall elementer pr. bølgelengde i r-retningen er lik 3 ($P_r = 3$) for alle simuleringene. Det er også tatt med hvor mange elementer pr. bølgelengde dette tilsvarer når det blir regnet med skjær- og kompresjonshastigheter ($P_{z,s}$ og $P_{z,c}$.

Antall elementer i z-retn.	Maksimalt rel. avvik	Elementer pr. skjær-bl. ($P_{z,s}$)	Elementer pr. kompresjons-bl. ($P_{z,c}$)
3	1.7%	2.3	5.9
4	0.70%	3.0	7.9
5	0.37%	3.8	9.9
6	0.21%	4.5	11.8
7	0.11%	5.3	13.8
8	0.049%	6.0	15.7

I figur 5.7-5.10 er det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for henholdsvis 3, 4, 5, 6, 7 og 8 elementer i z-retningen ($N_z = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer i z-retningen ($N_z = 9$) plottet på 4 måter som for r-retningen ovenfor. Antall elementer pr. bølgelengde i r-retningen er i begge tilfeller 3 ($P_r = 3$, slik at N_r varierer med D/T etter ligning 5.5). Det er benyttet samme dimensjoner og materiale som i simuleringene for konvergenstesten i radiell retning beskrevet ovenfor. I tabell 5.2 er det maksimale relative avviket for hver simulering i forhold til simuleringen med 9 elementer i z-retningen satt opp i en tabell, der det også fremgår hvor mange elementer pr. bølgelengde for henholdsvis skjærbølgelengden og kompresjonsbølgelengden dette tilsvarer for f*T=2200kHz*mm. Dette er helt analogt med det som er gjort for r-retningen ovenfor. Ut fra tabell 5.2 ser man tydelig at det ikke er bra å benytte kompresjonsbølgelengden for utregning av krav for elementoppdeling dersom man er interesser i å ha et krav for antall elementer pr. bølgelengder som er noenlunde det samme både i r-retningen og z-retningen, siden selv over 10 elementer pr. kompresjonsbølgelengde for f*T=2200kHz*mm gir store avvik. Her vil det altså være mest hensiktsmessig å bruke skjærbølgelengden som krav. For å få en nøyaktighet på rundt 0.5% i utregnete resonansfrekvenser ser det altså ut som om man må benytte rundt 3-4 elementer pr. bølgelengde, dersom man benytter skjærbølgelengden som krav. Her må det også taes forbehold om at dette kravet muligens kan forandre seg når man øker antall elementer pr. bølgelengde i r-retningen (P_r) til en høyere verdi ved konvergenstestene.

Av figur 5.7 og figur 5.9 ser man at avvikene også her er svært små for de lave f*T-verdiene. Figur 5.7 (og også figur 5.9) viser på samme måte som for radiell retning ovenfor hvordan den maksimale verdien for relativavviket minker fra nesten 2% i det første plottet med $N_z = 3$ ned mot 0.05% for det siste plottet med $N_z = 8$.

Figur 5.9 viser at også for tykkelsesretningen relativavviket for resonansfrekvensene ut til å være en funksjon av f*T-verdien, og ikke en funksjon av D/T. Her ble også verdien k i ligning 5.8 bestemt til å være rundt 5 for alle simuleringene ved å studere et loglog-plott, som ikke er tatt med i denne oppgaven.

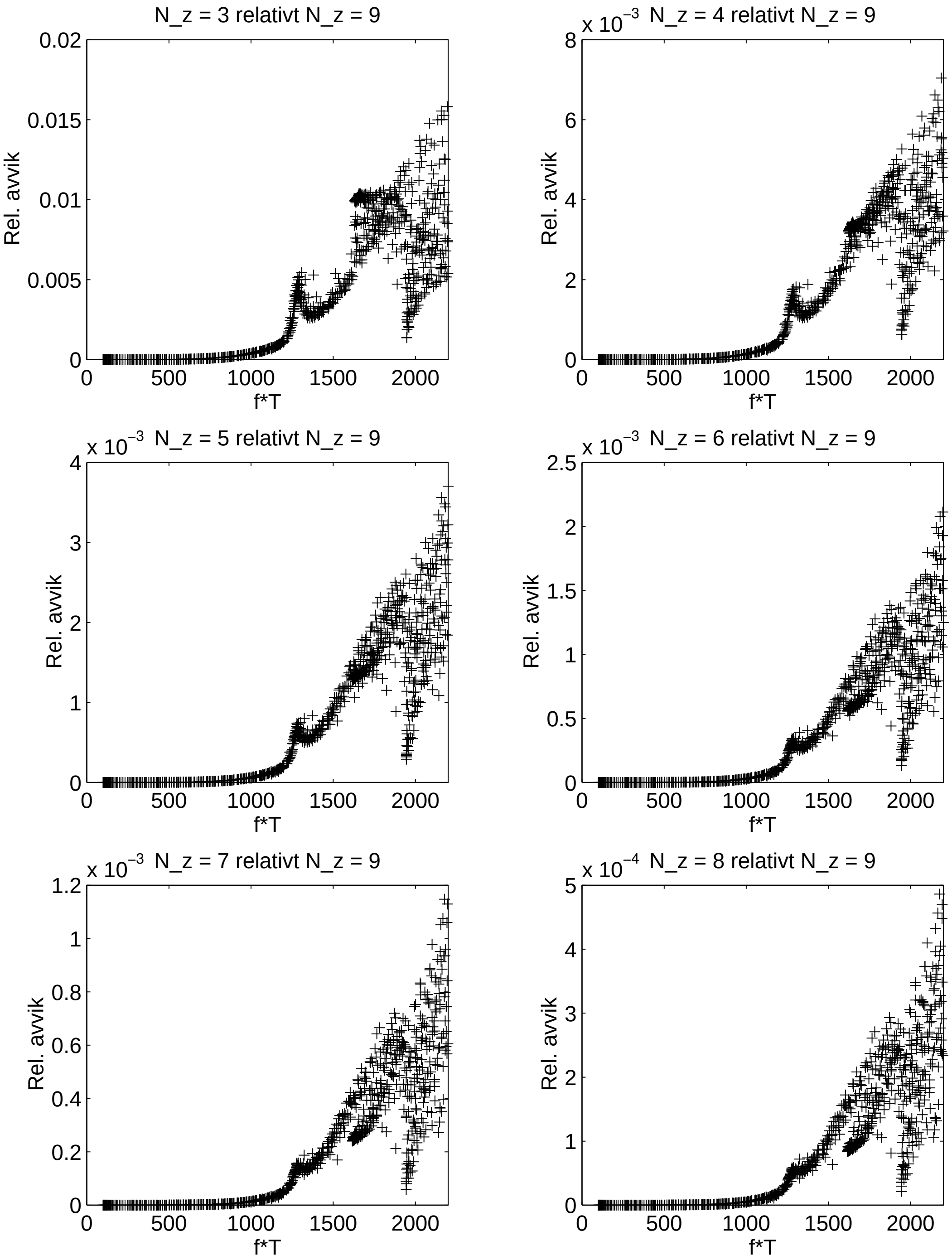
I figur 5.9 ser man også vertikale linjer for LE-, TS- og TE-moden tegnet inn. Ekstremalverdiene for tilfellet der man forandrer elementoppdelingen i z-retningen ser ut til å være omtrent de samme som for tilfellet der elementoppdelingen i radiell retning ble endret, men man ser allikevel vesentlige forskjeller:

- Det kraftigste minimumet har man her for en f*T-verdi som ligger omkring TE-moden.
- For en f*T-verdi som ligger omkring TS-moden har man er maksimum for $N_z = 3$ og $N_z = 4$ lik 4, som etterhvert forsvinner, og ser ut til å bli et lite minimum for $N_z = 8$.
- Et tydelig maksimum har man for en f*T-verdi som ligger litt nedenfor LE-moden, omtrent for f*T-verdien der man i frekvensspekteret kan identifisere E-moden ("Edge-mode" [6] [49]). Dette minimumet har man for samme verdi som maksimumet i forrige seksjon.

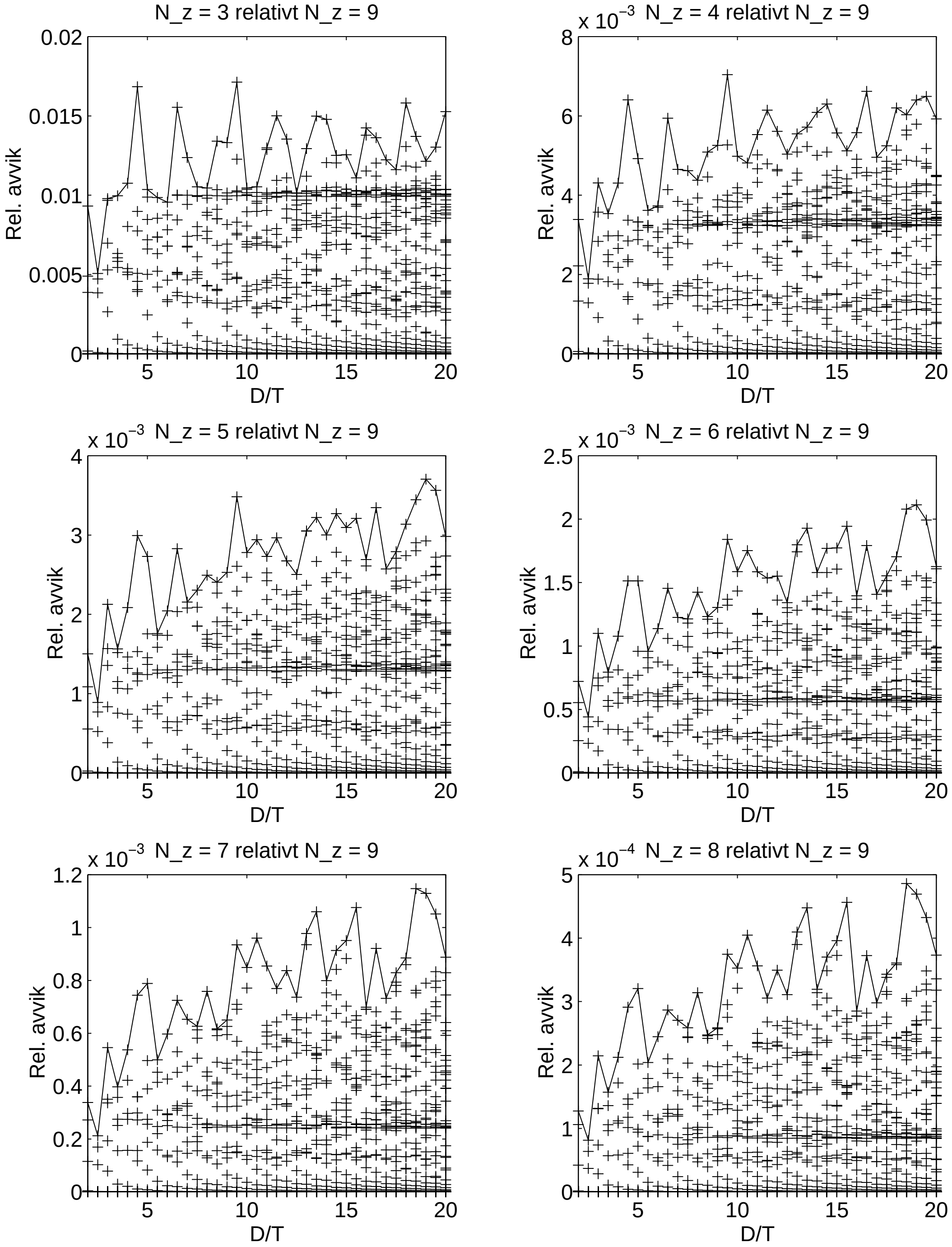
Tilsvarende diskusjon som ble benyttet i forrige seksjon kan benyttes til å gi mulige forklaringer på ekstremalverdiene man ser for relativavviket her. En sannsynlig årsak til at man får mindre relativavvik for enkelte f*T-verdier er at man ikke trenger så mange elementer i tykkelsesretning for å modellere disse modene, og en sannsynlig årsak til at man får økt relativavvik for enkelte f*T-verdier er at man trenger mange elementer i tykkelsesretningen for å beskrive disse på en god måte.

For TE-moden kan dette muligens forklares ut fra at det er små variasjoner i radiell retning for TE-moden, slik at man ikke trenger mange elementer i tykkelsesretningen for å beskrive disse modene på en god måte. Det har ikke lykkes å finne gode forklaringer på effektene man ser omkring TS- og LE-moden (evt. E-moden).

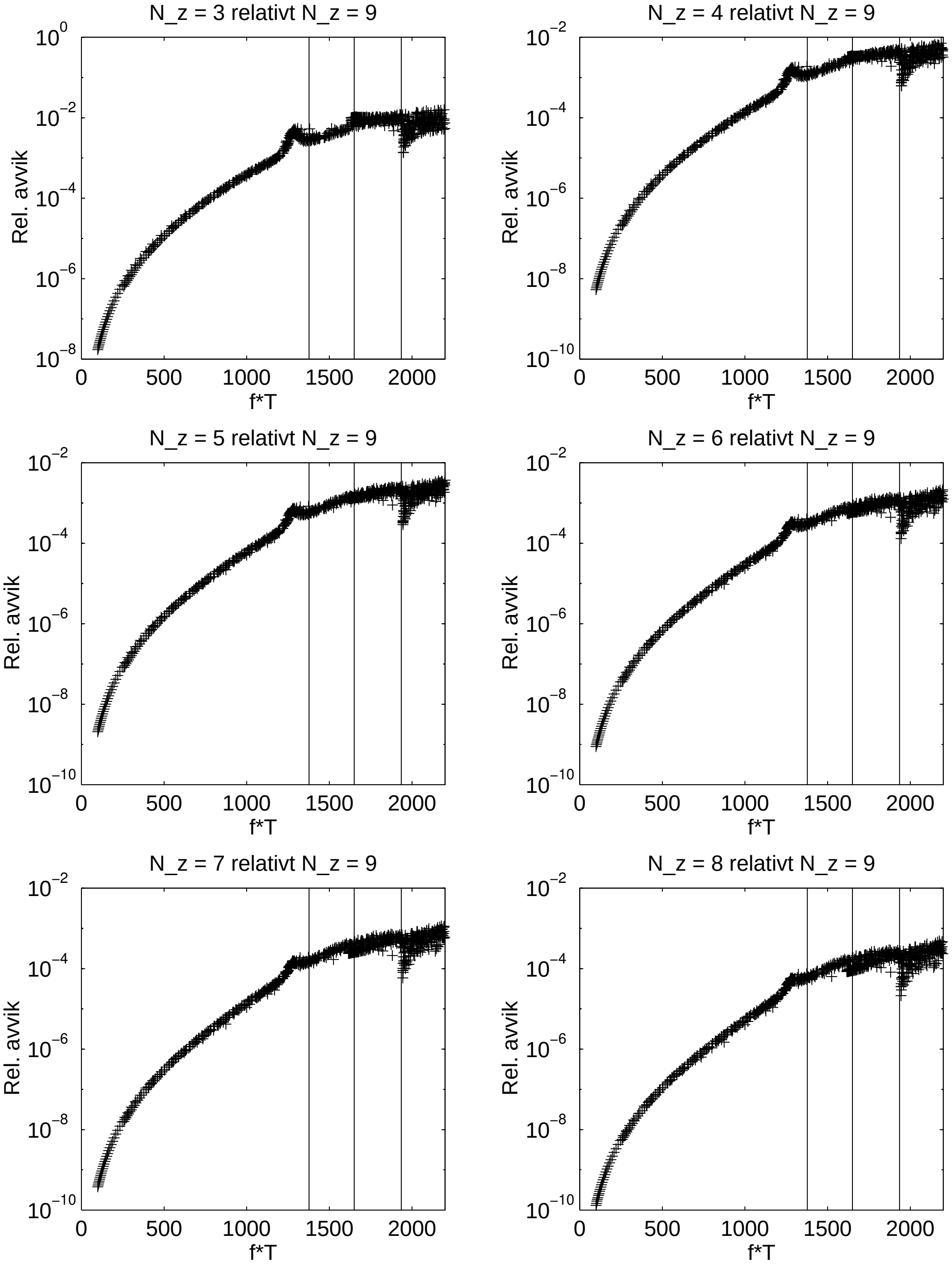
Figur 5.8 og figur 5.10 viser de samme effektene som man så i forrige seksjon. Relativavvikene er noenlunde konstant over hele D/T-området. Også her minker feilen etterhvert som man forbedrer elementoppdelingen.



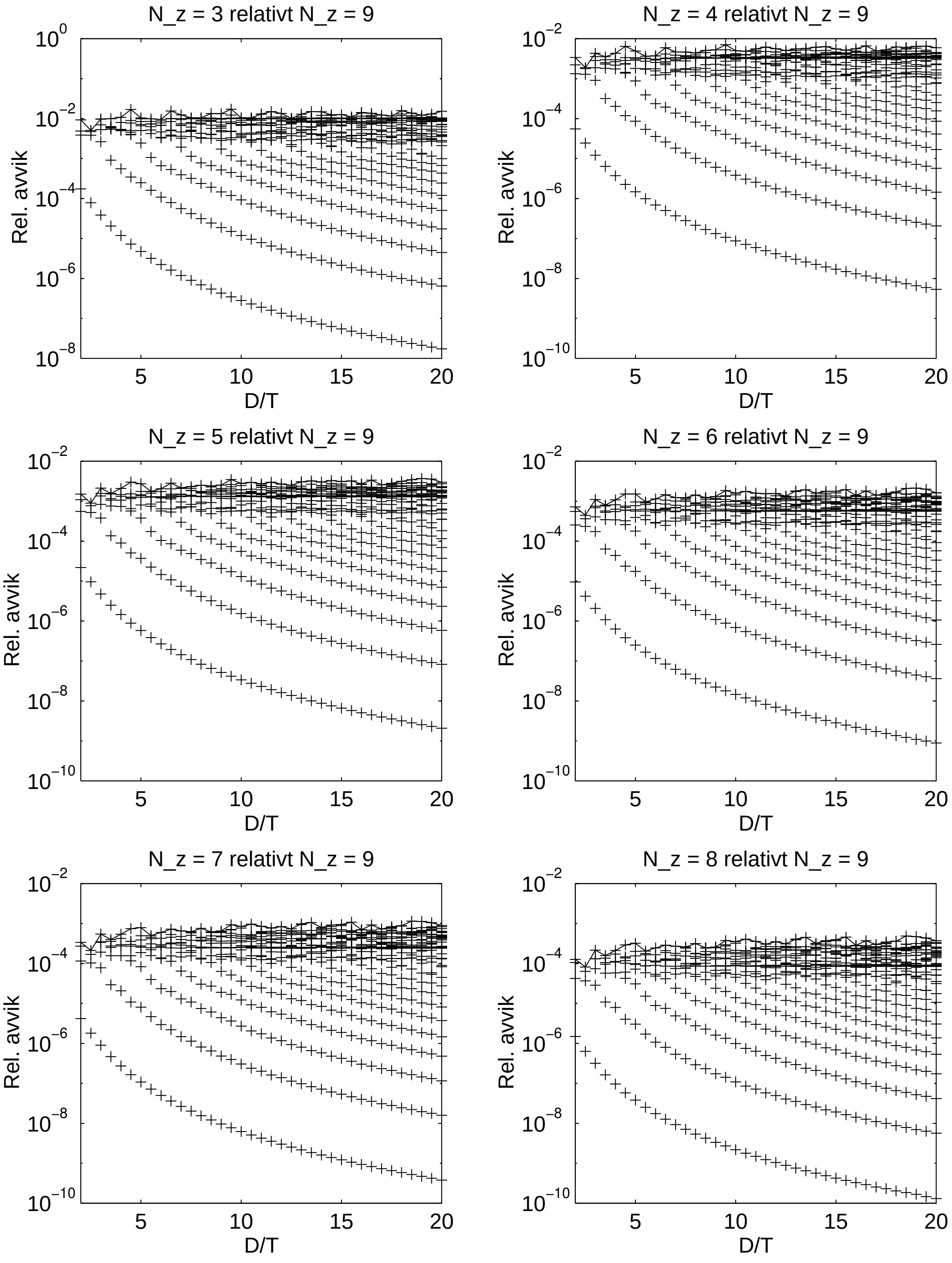
Figur 5.7: Det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for henholdsvis 3,4,5,6,7 og 8 elementer i z-retningen (d.v.s $N_z = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer i z-retningen ($N_z = 9$) plottet mot D/T. Antall elementer pr. bølgelengde i r-retningen er i alle tilfeller lik 3 ($P_r = 3$). Det er satt av et kryss for relativavviket for hver eneste simulerte resonansfrekvens. Det er plottet en linje som viser maksimalavviket for hver skive. Skalaen er lineær i begge koordinatretninger.



Figur 5.8: Det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for henholdsvis 3,4,5,6,7 og 8 elementer i z-retningen (d.v.s $N_z = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer i z-retningen ($N_z = 9$) plottet mot D/T. Antall elementer pr. bølgelengde i r-retningen er i alle tilfeller lik 3 ($P_r = 3$). Det er satt av et kryss for relativavviket for hver eneste simulerte resonansfrekvens. Det er plottet en linje som viser maksimalavviket for hver skive. Skalaen er lineær i begge koordinatretninger.



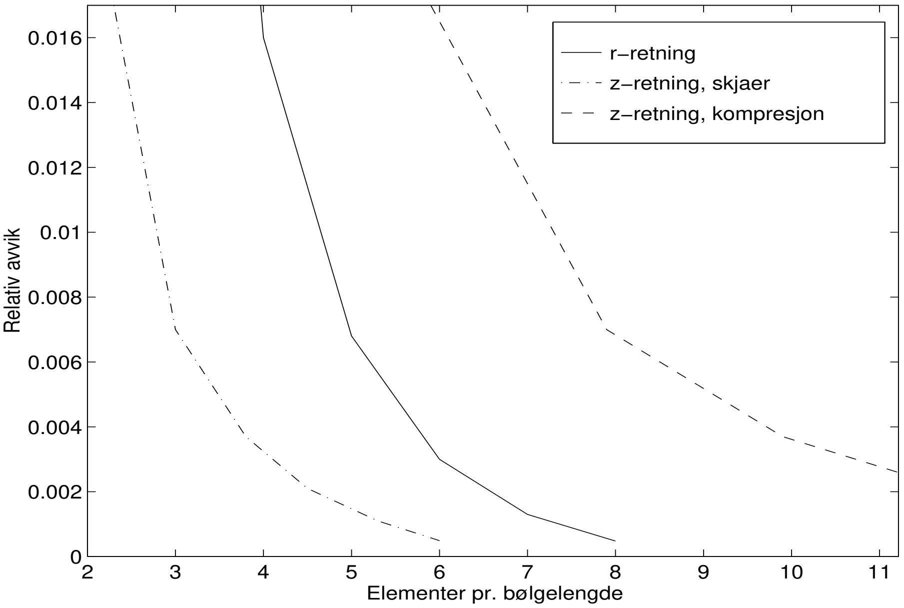
Figur 5.9: Det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for henholdsvis 3,4,5,6,7 og 8 elementer i z-retningen (d.v.s $N_z = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer i z-retningen ($N_z = 9$) plottet mot D/T. Antall elementer pr. bølgelengde i r-retningen er i alle tilfeller lik 3 ($P_r = 3$). Det er satt av et kryss for relativavviket for hver eneste simulerte resonansfrekvens. Det er plottet en linje som viser maksimalavviket for hver skive. Skalaen er logaritmisk langs y-aksen og lineær langs x-aksen. På figuren er det tegnet vertikale linjer for LE-, TS- og TE-moden.



Figur 5.10: Det relative avviket mellom simulerte resonansfrekvenser for henholdsvis 3,4,5,6,7 og 8 elementer i z-retningen (d.v.s $N_z = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) i forhold til en simulering med 9 elementer i z-retningen ($N_z = 9$) plottet mot D/T. Antall elementer pr. bølgelengde i r-retningen er i alle tilfeller lik 3 ($P_r = 3$). Det er satt av et kryss for relativavviket for hver eneste simulerte resonansfrekvens. Det er plottet en linje som viser maksimalavviket for hver skive. Skalaen er logaritmisk langs y-aksen og lineær langs x-aksen.

5.3.3 Sammenligning av krav i r- og z-retningen

I figur 5.11 er det maksimale relativavviket for hver simulering i de to simuleringsseriene (fra tabell 5.1 og 5.2) sammenlignet som funksjon av antall elementer pr. bølgelengde. For hver simuleringsserie er relativavviket regnet i forhold til simuleringen der nøyaktigheten er best - 9 elementer pr. bølgelengde i r-retningen ($P_r = 9$) for simuleringsserien der konvergensen i radiell retning er undersøkt, og 9 elementer i tykkelsesretningen ($N_z = 9$) for simuleringsserien der konvergensen i tykkelsesretningen er undersøkt. For tykkelsesretningen er antall elementer pr. bølgelengde regnet ut ved bruk av både skjær- og kompresjonsbølgelengden ($P_{r,s}$ og $P_{r,c}$).



Figur 5.11: Sammenligning av det maksimale relativavviket for hver simulering som funksjon av elementer pr. bølgelengde for de to simuleringsseriene der konvergensen i radiell retning (heltrukket linje) og i tykkelsesretning (stipplete linjer) er undersøkt. I tykkelsesretningen er antall elementer pr bølgelengde regnet ut ved bruk av både skjær- og kompresjonsbølgelengden.

Som forventet blir avvikene mindre når antallet elementer pr. bølgelengde økes. Dette gjelder både for r- og z-retningen. Av figuren ser man at det er stor forskjell på om det blir benyttet skjær- eller kompresjons-fasehastighet for utregning av antallet elementer pr. bølgelengde i tykkelsesretningen. Det kan altså ikke stilles samme krav til antall elementer pr. bølgelengde i tykkelsesretningen som i radiell retning uansett om man benytter kompresjonsfasehastigheten eller skjærfasehastigheten til utregning av kravet i tykkelsesretningen. Av figuren ser det ut som at dersom man regner ut kravet fra en fasehastighet som ligger midt mellom kompresjonsfasehastigheten og skjærfasehastigheten får man et krav for antall elementer i z-retningen som ligger i nærheten av kravet for antall elementer i r-retningen for å få en gitt nøyaktighet. En mulig årsak til dette er at både kompresjonsbølger og skjærbølger er viktige for vibrasjonene i den piezoelektriske skiven.

Disse konklusjonene må sees på som foreløpige, fordi konvergensen ikke er undersøkt med god nok elementoppdeling i den koordinatretningen som holdes fast. Det er mulig at en forbedring av elementoppdelingen i den koordinatretningen der elementoppdelingen holdes fast vil gi lavere krav til antall elementer pr. bølgelengde i den andre koordinatretningen, slik at det egentlig kan stilles lavere krav til P_r, $P_{z,c}$ og $P_{z,s}$ enn det som er gjort her. Det må også taes et lite forbehold om at FEMP regner riktig.

Resultatene som er vist i dette kapittelet vil sannsynligvis uansett gi en brukbar indikasjon på hva slags krav til elementer pr. bølgelengde man må gi for å få en ønsket nøyaktighet. Dette kan verifiseres, eventuelt korrigeres, i en senere analyse.

5.4 Bruk av adaptive rutiner

Det er mulig å benytte utregnete resultater fra to eller flere forskjellige beregninger til å ekstrapolere seg frem til et bedre resultat ([37], s. 559). Man benytter seg da av at feilen e i en beregning er gitt som $e = O(h^p)$, der h er den "karakteristiske lengden" for elementoppdelingen (gitt som $h = 1/N$ i [37]), og p er en konstant som avhenger av elementtype og hvilken størrelse som skal regnes ut. I følge [37], side 375, er $p = 2$ for egenfrekvensene med det 8-noders isoparametriske elastiske elementet som hovedsakelig er benyttet i våre beregninger.

Ved å benytte Richardson-ekstrapolasjon er det altså mulig å starte med en relativt dårlig elementoppdeling, øke elementoppdelingen gradvis, og på den måten ekstrapolere seg frem til stadig bedre resultater. Samtidig får man et mål for feilen i de utregnete frekvensene. På denne måten har man langt bedre kontroll over feilen i en simulering. Man kan da konstruere et adaptivt program, som gradvis øker elementoppdelingen til en ønsket nøyaktighet er oppnådd. Ved å benytte en slik fremgangsmåte, er man garantert å få den ønskede nøyaktigheten.

I [37] er dette forklart for det rent elastiske tilfellet. For egenverdier og egenvektorer vil metoden kunne fungere bra også i det piezoelektriske tilfellet, men man kan få problemer med å ekstrapolere seg frem til mer nøyaktige verdier for en del størrelser som inngår i det piezoelektriske problemet, som for eksempel matrisen $[H_{u\phi}]$, som ikke regnes ut fra egenvektorer og egenverdier. Dette bør undersøkes før det vurderes om metoden skal implementeres, fordi det ofte ikke er egenverdier/egenvektorer man er interessert i, men mer sammensatte funksjoner som elektriske eller mekaniske responsfunksjoner. Denne metoden er så langt ikke implementert i FEMP.

Ved å benytte adaptive rutiner er det mulig å finne nøyaktigheten for hver enkel beregning, slik at det ikke er nødvendig å foreta generelle konvergenstester slik som det er gjort i dette kapittelet.

5.5 Konklusjon

I dette kapittelet er det vist en del resultater fra konvergenstester, som er diskutert. Videre er en alternativ metode for å sjekke konvergensen beskrevet. Ut fra dette kan man trekke følgende konklusjoner:

- Det er bekreftet at nøyaktigheten øker jo bedre elementoppdeling man benytter når det 8-noders isoparametriske elementet blir benyttet i endelig element beregninger i programmet FEMP, og at resonansfrekvensene konvergerer ovenifra mot en lavere verdi.
- For å få en nøyaktighet på rundt 0.5% kan det se ut som om det er hensiktsmessig å regne med rundt 5-6 elementer pr. bølgelengde i radiell retning, og 3-4 elementer pr. bølgelengde i tykkelsesretningen. Ved slike krav til elementoppdeling kan beregningene ofte bli tidkrevende, og man kan få problemer med minne på datamaskinen. Disse kravene er å anse som foreløpige krav, som muligens må korrigeres når det i et senere arbeid blir utført konvergenstester med bedre elemenoppdeling i den koordinatretningen der elementoppdelingen holdes fast. Uansett vil disse resultatene være en god indikasjon på hva slags krav man må sette til elementoppdeling.
- I fremtiden kan det kanskje være hensiktsmessig å implementere adaptive rutiner for å få bedre kontroll over nøyaktigheten på løsningen, selv om jeg foreløpig ser visse vanskeligheter ved bruk av slike metoder til piezoelektrisk analyse.

Kapittel 6

FEMP: Analysemuligheter

I programmet FEMP som er utviklet i forbindelse med arbeidet med denne hovedoppgaven er teorien beskrevet i kapittel 3 implementert. Grundig testing av programmets grunnleggende funksjoner ble av naturlige årsaker prioritert fremfor testing av de videregående funksjonene og analyse av de forskjellige egenskapene til en piezoelektrisk transduser ved hjelp av endelig element metoden.

I dette kapittelet er det gitt en del eksempler på hvordan FEMP kan benyttes til analyse av piezokeramiske skiver når programmet er ferdigtestet, blant annet for analyse av vibrasjonsmoder omkring tykkelsesmoden og for transientanalyse. Dette er resultater som er tatt med for å vise at endelig element metoden kan være et svært kraftig verktøy innenfor analyse av piezokeramiske skiver og andre piezoelektriske strukturer. Siden det fortsatt gjenstår en del arbeid innenfor testing av forskjellige funksjoner i FEMP før disse kan benyttes til grundige analyser av egenskapene til piezokeramiske skiver og andre piezoelektriske strukturer, må resultatene i dette kapittelet sees på som foreløpige resultater, som kan bli bekreftet eller korrigert på et senere tidspunkt. Resultatene er allikevel tatt med her fordi de viser noen av mulighetene man har ved bruk av endelig element metoden til analyse av piezoelektriske strukturer, og fordi de indikerer at FEMP kan bli et svært kraftig verktøy for slike analyser i fremtiden, når programmet er testet grundigere på flere områder enn på utregning av egenfrekvenser. Selv om det skulle vise seg å være feil i noen av rutinene som blir brukt i dette kapittelet (noe som ingen av testresultatene indikerer), betyr ikke det at diskusjonen i dette kapittelet er verdiløs, fordi hovedpoenget her er å få frem styrken til endelig element metoden som analyseverktøy.

Foreløpige analyseresultater fra fire forskjellige analyseområder blir vist i dette kapittelet:

- Ulike mål for hvor sterkt de forskjellige vibrasjonsmodene i piezoelektriske skiver kan eksiteres blir sammenlignet i seksjon 6.1.
- Den modale konstanten blir plottet som funksjon av f*T, og ut fra dette plottet blir det gjort en del observasjoner som kan være nyttig i analyser av vibrasjonsmodene i piezokeramiske skiver (seksjon 6.2).
- Modene omkring frekvensen for den første tykkelsesmoden blir studert for et lite D/T-område ved hjelp av den modale konstanten [10] for å se hvordan variasjoner av D/T-forholdet påvirker disse modene. Dette er gjort i seksjon 6.3.
- Et par eksempler på hvordan FEMP kan benyttes til en transient analyse er tatt med i seksjon 6.4.

6.1 Sammenligning av ulike uttrykk for koblingsfaktoren

I analysen av de ulike vibrasjonsmodene som kan eksiteres i piezoelektriske skiver, er ønsker man å kunne bestemme hvor sterkt de ulike vibrasjonsmodene kan eksiteres ved en elektrisk spenningseksitasjon [6]. I teorien i seksjon 3.6 er det sett på ulike uttrykk som bestemmer hvor sterkt de enkelte vibrasjonsmodene i en skive av et piezoelektrisk materiale kan eksiteres:

- Den modale konstanten r_A som er foreslått benyttet i [10].
- Flere forskjellige former av den elektromekaniske koblingsfaktoren k, deriblant k_{surf} og k_{eff}.

I tillegg kan den modale vektfaktoren z_r fortelle noe om hvor sterkt de ulike vibrasjonsmodene bidrar til den *totale responsen* når en piezoelektrisk skive blir eksitert ved en spesiell frekvens f, som *ikke* trenger å være frekvensen til en av vibrasjonsmodene som kan identifiseres for skiven.

I denne seksjonen blir forskjellige uttrykk for koblingsfaktoren som er funnet brukt i endelig element litteraturen (piezoelektrisk) sammenlignet. I seksjon 3.6 er det utført en energianalyse for å finne forskjellige uttrykk for den elektromekaniske koblingsfaktoren.

Ved sammenligning av de ulike uttrykkene for koblingsfaktoren ser vi på disker av materialet PZT5H med D/T-forhold som varierer fra 0.2 til 10 (fordi dette D/T-området er benyttet i [6]). I alle tilfeller er det benyttet 3x10 8-noders isoparametriske elementer for simuleringene. Disse parametrene er valgt fordi det i [6] er benyttet parametre som gir omtrent samme nøyaktighet som disse parametrene i FEMP (se seksjon 4.7.4 ved utregning og plotting av koblingskoeffisienten k_{eff} funnet ved å regne ut resonans- og antiresonansfrekvenser hver for seg, og deretter benytte formel 3.80 for direkte utregning av koblingsfaktoren.

I figur 6.1 er følgende uttrykk for koblingsfaktoren sammenlignet grafisk i området D/T=0.2 til 10 for de 3 laveste modene :

- Koblingsfaktoren k_{eff} funnet ved å regne ut resonans- og antiresonansfrekvenser hver for seg, og deretter benytte ligning 3.80:

  $$k_{eff} = \sqrt{\frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2}} \quad , \quad \omega_a > \omega_r \tag{6.1}$$

  for direkte utregning av koblingsfaktoren. Disse kurvene er tegnet som heltrukne linjer i figur 6.1, og tilsvarer figur 6 i [6], som er limt inn som figur 4.21 i denne oppgaven. Sammenligningen i seksjon 4.7.4 viste at det er god kvalitativ overensstemmelse mellom resultatene fra FEMP og resultatene fra [6].

  Denne metoden for utregning av koblingsfaktoren er kun funnet brukt i [6] innenfor endelig element analyse. Generelt er dette det uttrykket for koblingsfaktoren som sannsynligvis er mest brukt, og som også er tatt med i IEEE standarden for piezoelektrisitet fra 1987 [40].

- Et uttrykk for koblingsfaktoren $k_{surf}(\psi_{u,r})$ gitt i ligning 3.79 som

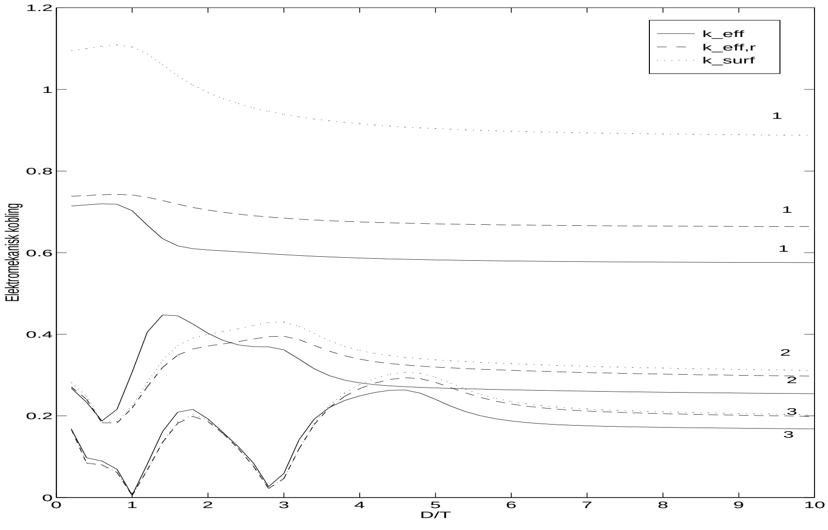
  $$k_{surf}^2(\psi_{u,r}) = -\frac{([\hat{u}_r][H_{u\phi}])^2}{H_{\phi\phi}\omega_r^2} \tag{6.2}$$

  er plottet med prikkete linjer i figur 6.1. Dette uttrykket for koblingsfaktoren får man ved å benytte definisjonen av koblingsfaktoren ut fra et forhold mellom energier for egenmoder som svarer til resonans (se seksjon 3.6.1) Denne metoden for utregning av koblingsfaktoren er funnet brukt i [43], [25],[48] [26].

- En tilnærming til k_{eff} regnet ut i seksjon 3.6.1 fra koblingsfaktoren som man finner ved energianalysen i ligning 3.83 som:

$$k_{eff} \approx \sqrt{\frac{k_{surf}^2(\psi_{u,r})}{1+k_{surf}^2(\psi_{u,r})}} \tag{6.3}$$

er tegnet med stiplede linjer. Denne er kalt den alternative koblingsfaktoren i teorien. Denne metoden for utregning av koblingsfaktoren er funnet brukt i [43], [25], [48], [26]. I figuren er denne merket av som $k_{eff,r}$.



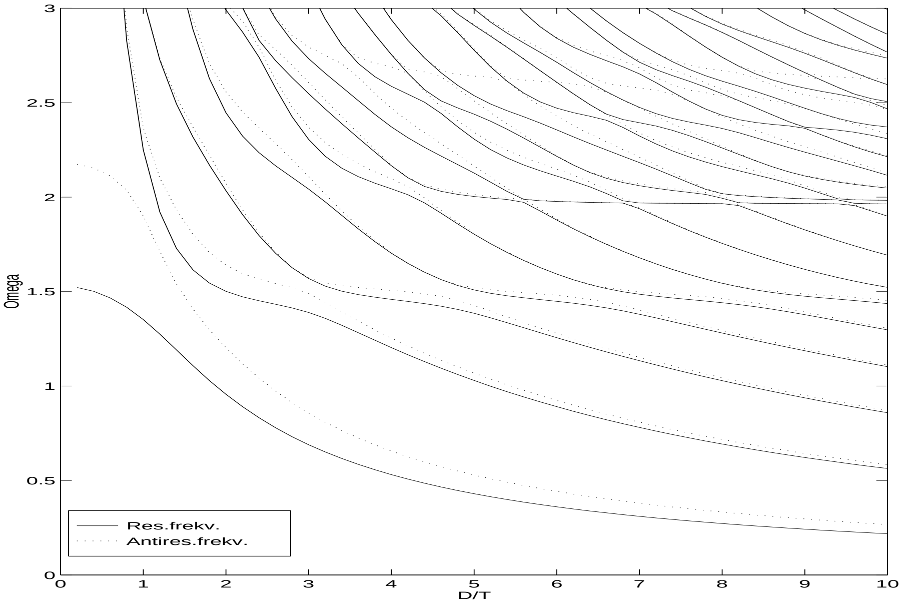
Figur 6.1: Sammenligning av forskjellige uttrykk for koblingsfaktoren for skiver av PZT5H med varierende D/T-forhold, for de tre laveste modene i skivene. Modene er nummerert med tallene 1, 2 og 3. For beskrivelse av de ulike kurvene, se teksten.

I figur 6.2 er resonans- og antiresonansfrekvenser plottet sammen for det samme problemet som beskrevet ovenfor. Ved sammenligning med figur 6.1 ser man at der hvor avstanden mellom kurven for resonans- og antiresonansfrekvensen er størst, er også koblingskoeffisienten størst (som man også ser ut fra ligningen for den effektive koblingsfaktoren).

Ved målinger er det ofte den effektive koblingsfaktoren k_{eff} som blir målt [25]. Utregning av koblingsfaktoren på denne formen i endelig element programmet er krevende, fordi alle egenmodene for både resonans- og antiresonans må regnes ut, og det må identifiseres hvilke moder som korresponderer til hverandre. Utregning av tilnærmingen til k_{eff}, $k_{eff,r}$, er langt mindre krevende, da denne kan regnes ut fra kun resonans-modene.

Ved sammenligning av de tre uttrykkene for koblingsfaktoren i figur 6.1 ser man at for den første moden er forskjellen mellom k_{eff} og den alternative koblingsfaktoren jevnt over er på ca. 16% i D/T-området mellom 2 og 10. Omtrent tilsvarende forhold mellom k_{eff} og den alternative koblingsfaktoren som er en tilnærming til k_{eff} er funnet for lange stenger som funksjon av W/T (bredde/tykkelse) modellert i 2 dimensjoner i [25], s. 355, fig. 10, der koblingsfaktoren for den første moden er plottet for forskjellige verdier av bredde/tykkelse. For k_{surf} er avviket enda større i forhold til k_{eff}, slik at den alternative koblingsfaktoren koblingsfaktoren gir noe bedre overensstemmelse med k_{eff} enn k_{surf}. Den samme effekten ser man for mode nr. 2 og 3.

Disse sammenligningene tyder på at den alternative koblingsfaktoren ikke gir en god tilnærming til den effektive koblingsfaktoren, selv om man ser en liten "forbedring" i forhold til k_{surf}. Dette må



Figur 6.2: Sammenligning av frekvensspetre for resonans- og antiresonansfrekvens for skiver av PZT5H med varierende D/T-forhold. Kurvene for resonansfrekvenser er tegnet med heltrukne linjer, kurvene for antiresonansfrekvenser med stiplede linjer.

sannsynligvis skyldes prosessen som blir benyttet i utledningen av uttrykket for den alternative koblingsfaktoren i seksjon 3.6, der kun første ordens ledd er tatt med i pertubasjonsanalysen. Her taes det forbehold om at FEMP ikke er fullt ut testet for disse funksjonene.

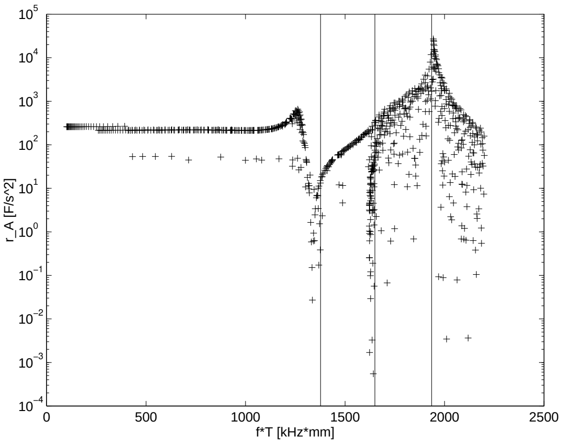
I et senere arbeid kan det være aktuelt å studere hvorfor man får store avvik mellom den alternative koblingsfaktoren og den effektive koblingsfaktoren, og om det er mulig å tilnærme den effektive koblingsfaktoren på en bedre måte. Videre kan det være aktuelt å sammenligne bruk av forskjellige uttrykk for koblingsfaktoren med den modale konstanten benyttet i [10].

6.2 Den modale konstanten plottet som funksjon av f*T

Her foreslåes det å plotte den modale konstanten eller koblingsfaktoren på en av formene beskrevet i seksjon 6.1 som funksjon av f*T som tilleggsinformasjon i forbindelse med analyse av de ulike vibrasjonsmodene i piezokeramiske skiver. Det er vanlig å plotte et mål for hvor sterkt de ulike modene kan eksiteres som funksjon av D/T som gjort i f.eks. [6] [7] (eller W/T i [25]), eller ved å plotte dette som tilleggsinformasjon på et frekvens-spektrum der det for modene plottes sirkler med radius proporsjonal med et mål for hvor sterkt de ulike modene kan eksiteres.

Her blir det presentert et plott av den modale konstanten r_A plottet som funksjon av f*T for materialet PZT5A (figur 6.3). Resultatene blir ikke diskutert, men det blir gjort noen observasjoner. Den "dynamiske elementoppdelingen" presentert i seksjon 4.4.4 er benyttet i figuren, og det er benyttet en logaritmisk skala langs y-aksen, og en lineær skala langs x-aksen.

Av figuren ser man at det ser ut til å være to terrasser for f*T lavere enn ca. 1200kHz*mm der den modale konstanten er noenlunde konstant *uavhengig av D/T-forhold.* Ved nærmere analyse viser det seg at den laveste terrassen er verdier for den modale konstanten for skiver med D/T-forhold mindre enn eller lik 4.5, og den høyeste terrassen er verdier for den modale konstanten for moder for andre skiver. Årsaken til at man får to slike terrasser er ikke analysert. Man ser også at man



Figur 6.3: Den modale konstanten som funksjon av f*T for skiver av PZT5A med D/T-forhold mellom 0.1 og 20. Det er tegnet et '+' for hver mode for hver skive i D/T-området mellom 0.1 og 20. På figuren er det tegnet vertikale linjer for LE-, TS- og TE-moden.

har enkelte minimum og maksimum for ulike verdier av f*T, som ser ut til å ligge i nærheten av LE-, TE- og TS-moden predikert av en-dimensjonale modeller (vedlegg E.2.8).

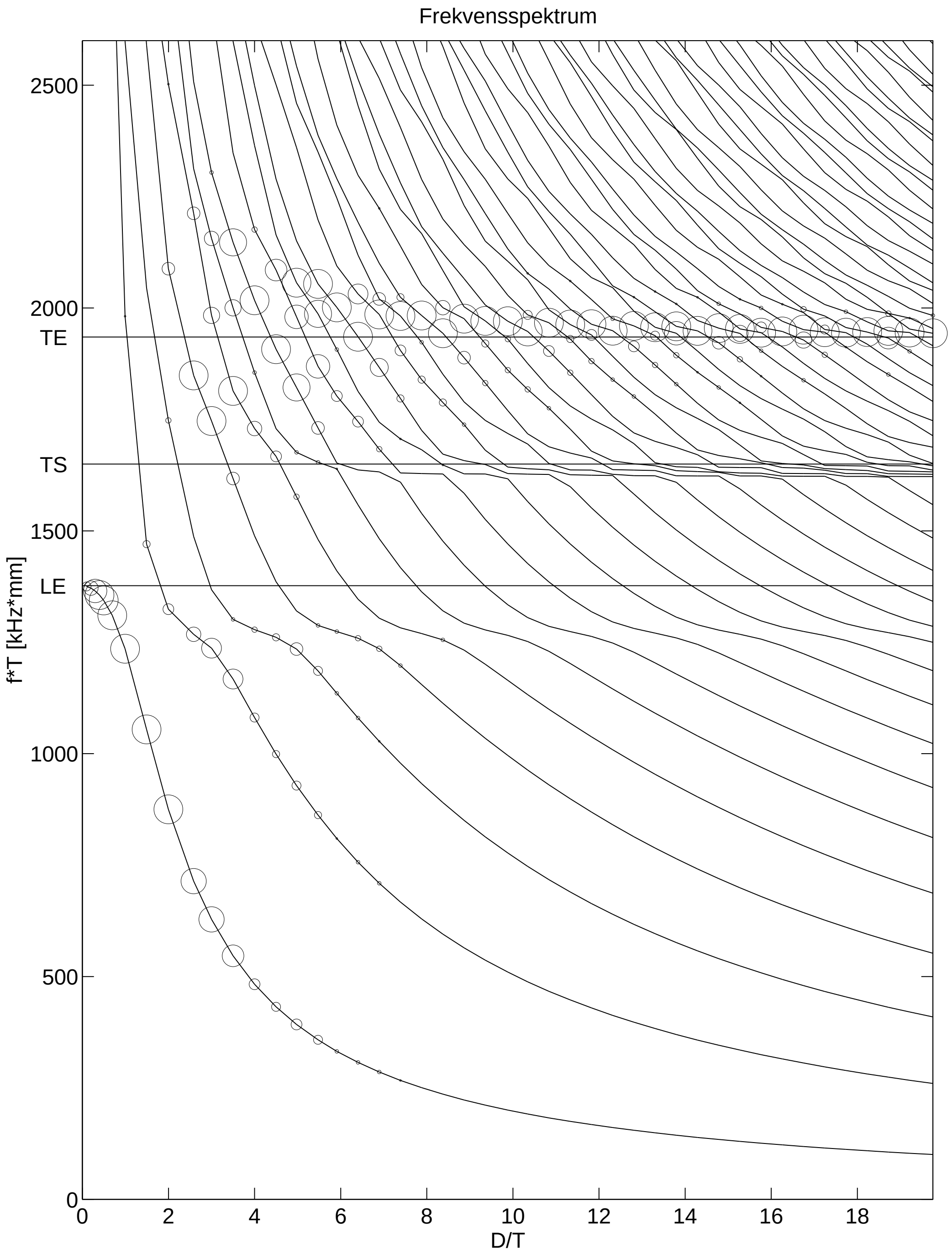
Et slikt plott kan altså se ut til å gi nyttig tilleggsinformasjon for analyse av de ulike vibrasjonsmodene i en piezokeramisk skive, selv om det ikke er forsøkt å utføre en slik analyse her. Det vil være aktuelt å utføre en slik analyse i et senere arbeid, når programmet er testet grundigere, men uansett vil denne måten å plotte dataene på kunne gi nyttig informasjon.

6.3 Analyse av moder omkring tykkelsesmoden i skiver av PZT5A

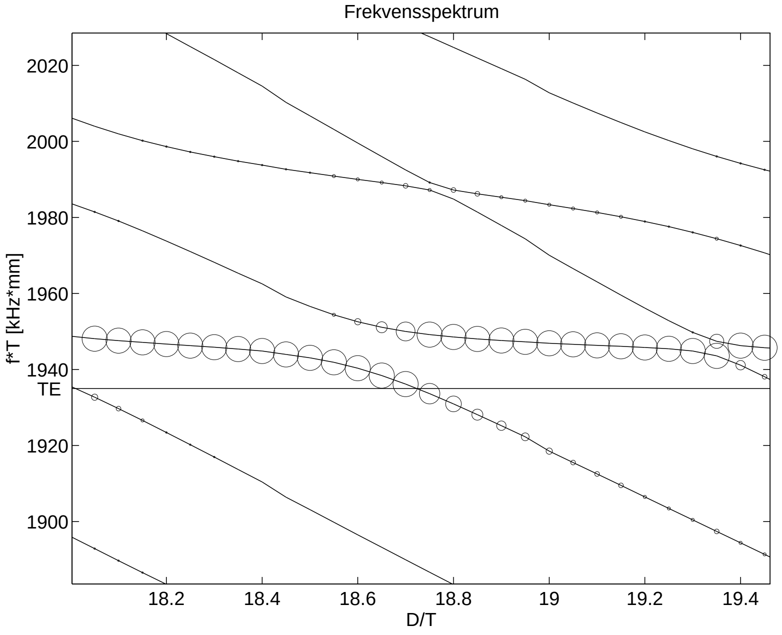
Siden tynne skiver av et piezoelektrisk materiale ofte blir drevet ved frekvenser omkring den første tykkelsesmoden, er denne moden viktig for en piezokeramisk skive. Derfor blir modene omkring denne frekvensen studert for et lite D/T-område ved hjelp av den modale konstanten for å se hvordan variasjoner av D/T-forholdet påvirker disse modene.

I denne seksjonen er det utført en foreløpig analyse av vibrasjonsmodene omkring tykkelsesmoden. Her taes det forbehold om at FEMP foreløpig ikke er testet tilstrekkelig godt for å foreta en slik analyse på et skikkelig grunnlag, og for at det sannsynligvis ikke er benyttet god nok elementoppdeling for alle detaljresultatene i analysen. Allikevel er det sannsynlig at denne analysen vil være kvalitativt riktig, selv om resultatene ikke er kvantitativt gode nok.

Mason-modellen for tynne piezoelektriske skiver predikerer en enkel tykkelsesmode, der hele svingeoverflaten vibrerer med samme utsving [35]. Av frekvensspekteret i figur 6.4 ser man at det eksisterer mange moder i en skive av et piezoelektrisk materiale, også i området omkring frekvensen for den første tykkelsesmoden fra Mason-modellen, som er merket av på figuren med betegnelsen "TE". Det er benyttet de samme simuleringsparametrene som beskrevet i seksjon 4.4 for "dynamisk elementoppdeling". I [10] er det vist at for en skive med D/T lik 20 av materialet PZT5A er det ingen av svingemodene som ligner på svingemoden predikert av Mason-modellen. Det vises i [10] at en av svingemodene som ligger like i nærheten av frekvensen predikert av Mason-modellen har størst gjennomsnittlig forskyvning av alle modene i dette frekvensområdet, og at denne moden har mye større modal konstant enn modene i nærheten. Den tilsvarende svingemoden for den samme skiven simulert ved hjelp av FEMP er plottet i seksjon 4.7.1 i figur 4.16.



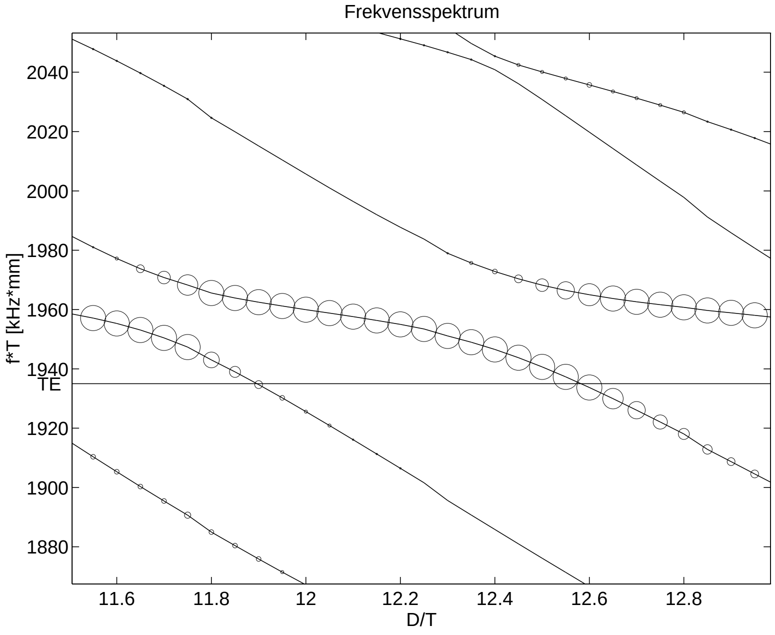
Figur 6.4: Frekvensspektrum for skiver av PZT5A med D/T-forhold mellom 0.1 og 20. Størrelsen for den modale konstanten for de ulike skivene er merket av på plottet ved hjelp av sirkler der diameteren er proporsjonal med den modale konstanten for moden (normalisert til den største modale konstanten for hvert D/T-forhold).



Figur 6.5: Frekvensspektrum for skiver av PZT5A med D/T-forhold mellom 18 og 19.5. Størrelsen for den modale konstanten for de ulike skivene er merket av på plottet ved hjelp av sirkler der diameteren er proporsjonal med den modale konstanten for moden (normalisert til den største modale konstanten for hvert D/T-forhold).

I figur 6.4 er størrelsen på den modale konstanten for de forskjellige modene i skivene vist ved hjelp av sirkler med varierende diameter, proporsjonal med størrelsen på den modale konstanten for den enkelte moden, og normalisert til den maksimale verdien for den modale konstanten for hvert D/T-forhold (dette er også gjort i [10]) Denne figuren indikerer at modene omkring tykkelsesmoden predikert av Mason-modellen har mye større modal konstant enn de andre modene som kan eksiteres i skivene for høye D/T-verdier (høyere enn ca. 5), som det er vist i [10]. Dersom man ser nøye på figuren i området omkring tykkelsesresonansen (merket med TE på figuren), ser man at for noen skiver er det to moder som har en stor verdi for den modale konstanten, mens det for andre skiver er en mode som er dominerende. I området mellom D/T lik 18 og D/T lik 19.5 ble derfor foretatt 30 simuleringer, for å studere hva som skjer i området omkring tykkelsesresonansfrekvensen predikert av Mason-modellen. Et frekvensspektrum for frekvenser omkring tykkelsesmoden for D/T området mellom 18 og 19.5 er vist i figur 6.5. Av dette frekvensspekteret, og frekvensspekteret for hele D/T-området i figur 6.4 ser man at det er en terrasse omkring frekvensen for tykkelsesmoden predikert av den en-dimensjonale modellen, slik at modene som er i frekvensområdet for denne terrassen representerer tykkelsesmoden [10]. Disse modene får da en stor verdi for den modale konstanten. Når forholdet mellom diameteren og tykkelsen i skiven øker, kommer nye moder inn "ovenifra", som da vil representere tykkelsesmoden. Mens denne utskiftingen av moder foregår, vil det for noen D/T-verdier være to forskjellige moder som har modal konstant som er omtrent like store. Da vil det ikke være en enkel mode som representerer tykkelsesmoden, slik som vist i [10]. Dette er for eksempel tilfellet for D/T lik ca. 18.73. For lavere D/T-verdier foregår denne utskiftingen innenfor et større D/T-område, som man ser i figur 6.6 for D/T mellom 11.5 og 13. For enda lavere D/T-verdier foregår denne utskiftingen mellom flere enn 2 moder, slik at det ikke lenger er mulig å plukke ut en enkelt mode som representerer tykkelsesmoden predikert av Mason-modellen. Dette kan sees i figur 6.7 for D/T mellom 7 og 9.

I figur 6.8 er den modale konstanten for de modene i en piezoelektrisk skive av PZT5A med D/T



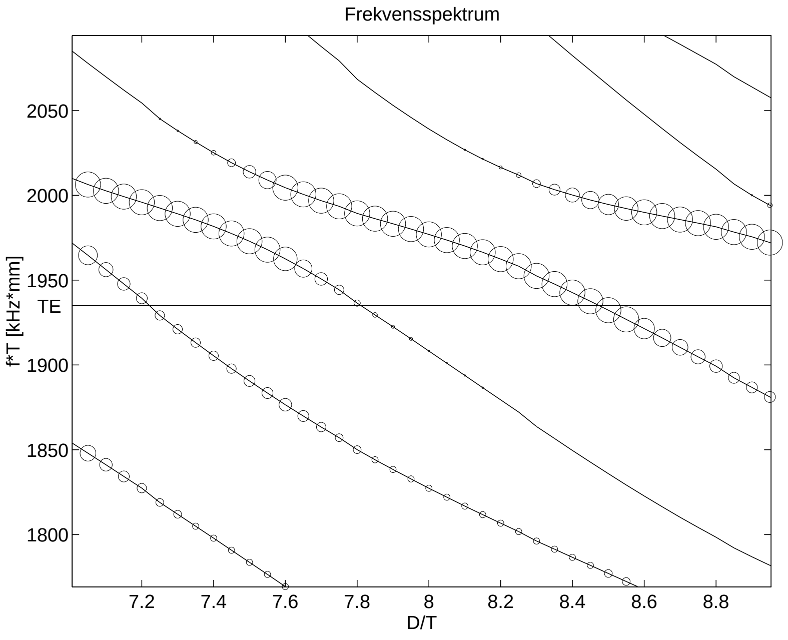
Figur 6.6: Frekvensspektrum for skiver av PZT5A med D/T-forhold mellom 11.5 og 13. Størrelsen for den modale konstanten for de ulike skivene er merket av på plottet ved hjelp av sirkler der diameteren er proporsjonal med den modale konstanten for moden (normalisert til den største modale konstanten for hvert D/T-forhold).

forhold mellom 18 og 19.5 som har høyest modal konstant plottet. De tre høyeste verdiene av den modale konstanten for hver enkelt skive er merket av med '+', 'o' og '*'. Denne figuren viser noe av det samme som figur 6.5, men her er det lettere å identifisere for hvilke D/T-forhold den modale konstanten er lik for to moder, og for hvilke D/T-forhold den modale konstanten er mye større for en enkelt mode enn for de andre modene. Av figuren ser man også hvordan en ny mode kommer inn med høy modal konstant, mens den modale konstanten for de andre modene er liten. Av figuren er det lett å se at for D/T lik ca. 18.45 vil det være en mode som har modal konstant som er mye større enn den modale konstanten for de andre modene i skiven.

For å modellere disse variasjonene omkring tykkelsesmoden trengs det svært god elementoppløsning. Når det ble variert mellom 3 og 4 elementer i tykkelsesretningen og 4 og 5 elementer pr. bølgelengde i radiell retning for D/T området mellom 18 og 19.5, var det store variasjoner i for hvilke D/T-forhold det kun var en mode med en stor modal konstant, og hvilke D/T-forhold det var 2 moder med omtrent like stor modal konstant. Det er mulig at elementoppdelingen som blir benyttet her ikke er tilstrekkelig god for å modellere disse variasjonene omkring tykkelsesmoden, men elementoppdelingen er allikevel sannsynligvis god nok til å gi en kvalitativ beskrivelse av hva som skjer.

Det ser altså ut til at det er store variasjoner i størrelsen på den modale konstanten for modene omkring tykkelsesmoden i skiver av PZT5A med D/T-forhold i underkant av 20. For enda høyere D/T-forhold, ser man lignende variasjoner av den modale konstanten. Dette kan man se for D/T mellom 18 og 22 i figur 6.16.

For å se hvordan denne variasjonen av den modale konstanten påvirker egenskapene til skivene, er to forskjellige skiver med tykkelse 2mm og forskjellig D/T-forhold analysert her. Disse skivene er valgt slik at en av dem har en mode som er fullstendig dominerende, mens den andre skiven har to nærliggnede moder med omtrent like stor modal konstant:

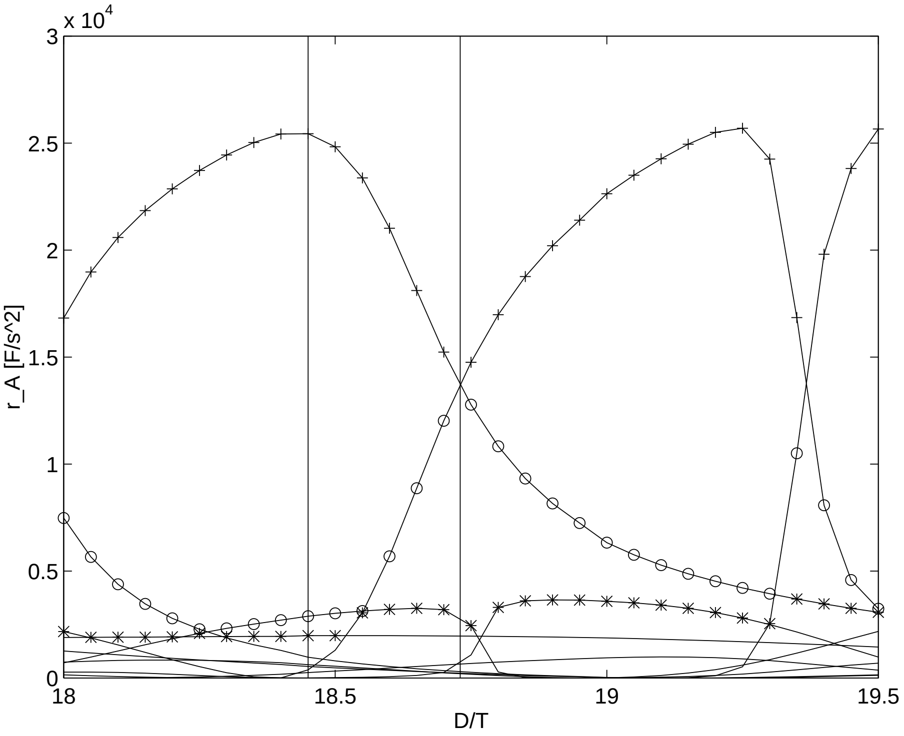


Figur 6.7: Frekvensspektrum for skiver av PZT5A med D/T-forhold mellom 7 og 9. Størrelsen for den modale konstanten for de ulike skivene er merket av på plottet ved hjelp av sirkler der diameteren er proporsjonal med den modale konstanten for moden (normalisert til den største modale konstanten for hvert D/T-forhold).

- En skive med D/T forhold lik 18.45, som har maksimal verdi for den modale konstanten som $25000F/s^2$ for frekvensen 972.0kHz. Den moden som har nest høyest verdi for den modale konstanten, har frekvensverdi 996.3kHz, og modal konstant $2890F/s^2$. Utsvinget i tykkelsesretningen for moden med høyest verdi for den modale konstanten er plottet i figur 6.13. Det er valgt å kun plotte utsvinget i tykkelsesretningen, fordi det er enklere å studere formen på utsvinget når utsvinget blir plottet på denne måten. Skiven er modellert med 4x35 elementer.
- En skive med D/T forhold lik 18.73, som har maksimal verdi for den modale konstanten som $13700F/s^2$ for to forskjellige moder med frekvens 967.3kHz og 974.7kHz. Utsvinget i tykkelsesretningen for disse to modene er plottet i figur 6.12. Skiven er modellert med 4x35 elementer.

Av figurene 6.13- 6.12 ser man at svingeformen for modene med høyest verdi for den modale konstanten for skiven med D/T-forhold 18.73 avviker en del fra svingeformen for tykkelsesmoden for skiven med D/T-forhold lik 18.45. Dette gjelder særlig moden med frekvens 967.3kHz i skiven med D/T-forhold lik 18.73. Dersom man ser på den totale forskyvnings-responsen (ligning 3.50, der den strukturelle dempningskraften er benyttet til å modellere tapene med $Q_m = 75$) fra alle vibrasjonsmodene i skiven med D/T-forhold lik 18.73 for frekvensen 971kHz (figur 6.14), som er midt i mellom frekvensene for de to modene med høyest modal konstant, får man en svingeform som ligner svært mye på svingeformen for tykkelsesmoden for skiven med D/T forhold lik 18.45. I figur 6.15 ser man den modale vektfaktoren z_r for frekvensen 971kHz for skiven med D/T lik 18.73 i frekvensområdet der den modale vektfaktoren er forskjellig fra null. Av figuren ser man at de to modene med høy modal konstant bidrar omtrent like mye til den totale responsen for 971kHz.

Selv om det er store forskjeller for svingeformene for de sterkt eksiterbare modene for de to skivene, er det altså små forskjeller i vibrasjonsmønsteret for frekvenser omkring tykkelsesmoden predikert



Figur 6.8: Plott av den modale konstanten for skiver av PZT5A med D/T-forhold mellom 18 og 19.5. De tre største verdiene av den modale konstanten for hver skive er merket av med '+', 'o' og '*'. I figuren er det tegnet inn vertikale linjer for de to D/T-verdiene det blir foretatt ytterligere analyse for.

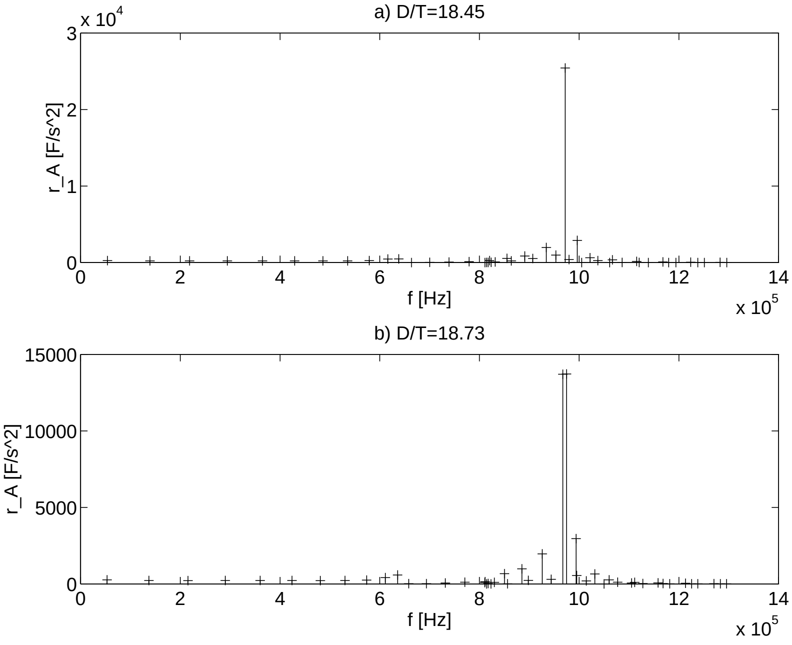
av Mason-modellen for de to skivene, med unntak av at utsvinget vil være mindre for skiven der det er to moder som har modal konstant som er omtrent like stor.

Den modale konstanten er sammenlignet for de to skivene for et stort frekvensområde i figur 6.9. Av figuren ser man at bortsett fra for modene omkring tykkelsesmoden er det relativt små forskjeller på størrelsen på den modale konstanten i de to skivene. I figur 6.10 er konduktansen for de to skivene sammenlignet i frekvensområdet 1MHz-1.3MHz (ligning 3.51 med $Q_m = 75$). Bortsett fra at maksimalverdien for konduktansen er høyere for skiven med D/T lik 18.45, ser man små forskjeller i konduktansen for de to skivene. I figur 6.11 er konduktansen for de to skivene sammenlignet i frekvensområdet omkring tykkelsesmoden. Av dette plottet ser man at for skiven med D/T lik 18.73 er responsen flatere over et større område, men konduktans-nivået er høyere for skiven med D/T lik 18.45.

Det ser altså ut til at selv om det er svært store forskjeller for den modale konstanten for de to skivene, er det ikke så store forskjeller mellom egenskaper som utsving og elektriske responsfunksjoner for de to skivene som man kunne forvente ut fra forskjellen på den modale konstanten.

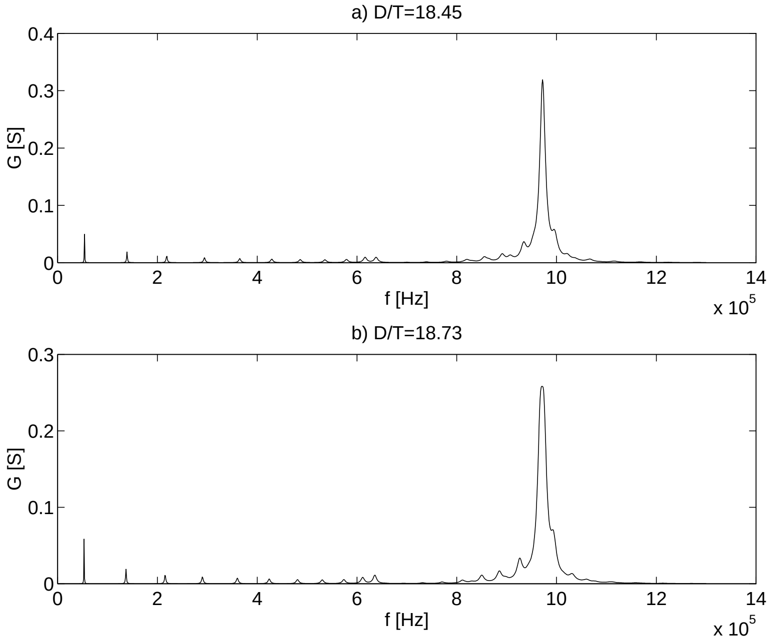
Et plott av D/T mot f*T for frekvensområdet omkring TS-moden predikert av en Mason-type modell [22] er vist i figur 6.17. Den modale konstanten for modene i dette f*T-området er svært liten, og vises derfor ikke på plottet.

Det er altså her funnet relativt liten forskjell i de elektriske og mekaniske responsfunksjonene for frekvenser omkring tykkelsesmoden, fordi superposisjonen av alle modene i skiven gir en respons som ligner for de forskjellige skivene, til tross for at det ser ut som om to moder omkring tykkelsesmoden kan ha omtrent like stor verdi for den modale konstanten. Det må også i denne konklusjonen taes forbehold om at FEMP ikke er grundig nok testet på alle funksjonene som er

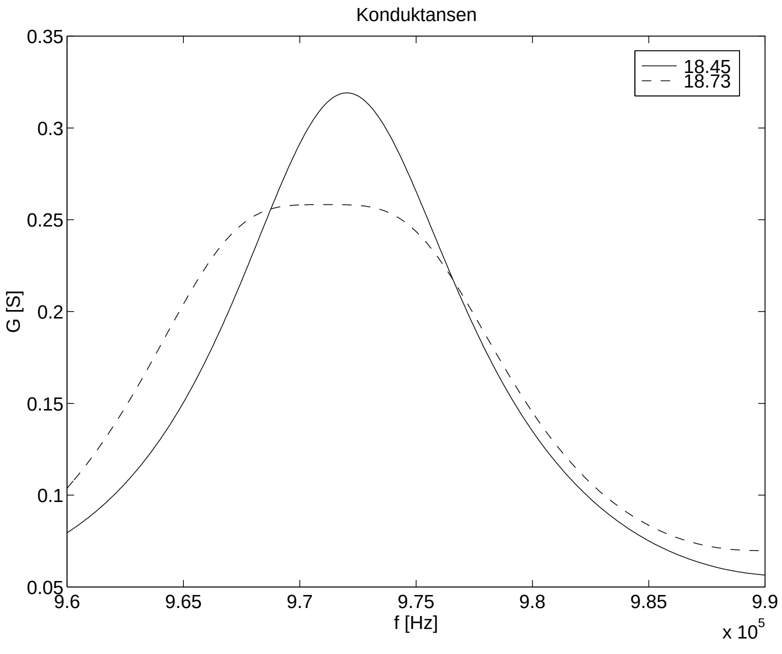


Figur 6.9: Sammenligning av den modale konstanten for de 45 laveste modene for to forskjellige skiver av PZT5A. I a) for en skive med D/T lik 18.45. I b) for en skive med D/T lik 18.73.

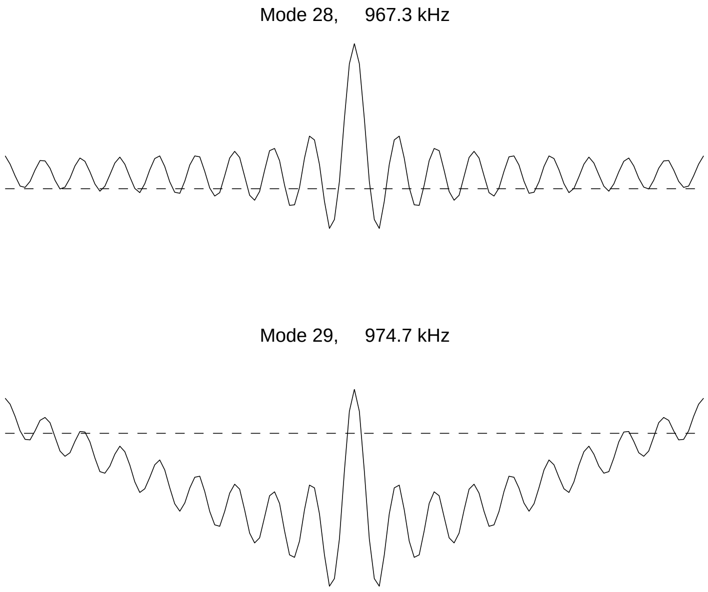
benyttet i denne analysen. Videre er den modale konstanten bare funnet brukt i [10]. Men denne analysen viser allikevel hvordan FEMP kan benyttes til å analysere de ulike vibrasjonsmodene i piezokeramiske skiver, der også måten å plotte den modale konstanten mot f*T på vist i seksjon 6.2 kan inngå som en komponent.



Figur 6.10: Sammenligning av konduktansen for frekvenser opp til 1.3MHz for to forskjellige skiver av PZT5A. I a) for en skive med D/T lik 18.45. I b) for en skive med D/T lik 18.73.



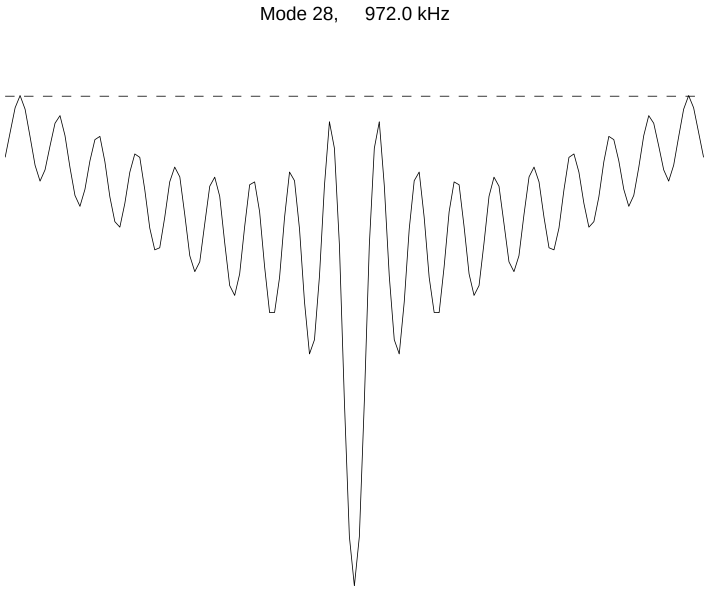
Figur 6.11: Sammenligning av konduktansen for frekvensområdet omkring tykkelsesmoden for to forskjellige skiver av PZT5A. Med heltrukket linje for en skive med D/T lik 18.45, og med stipplet linje for en skive med D/T lik 18.73.



Mode 28, 967.3 kHz

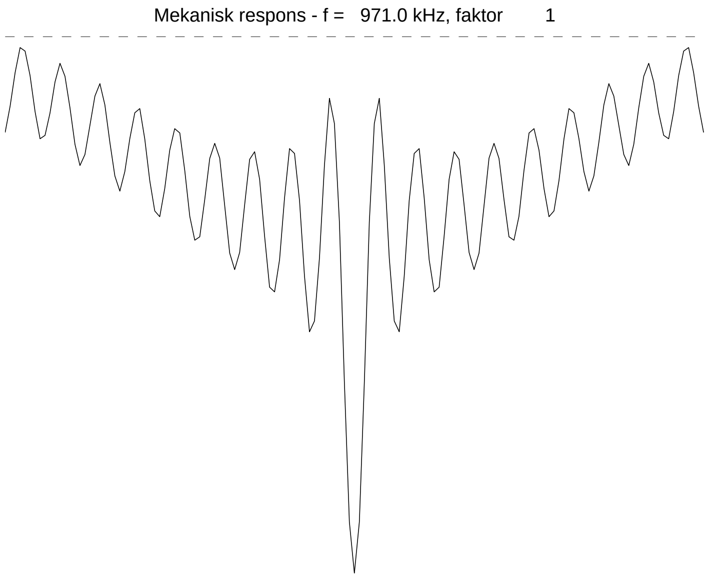
Mode 29, 974.7 kHz

Figur 6.12: Utsvinget for de to modene som har omtrent like stor modal konstant for skiven med D/T lik 18.73.

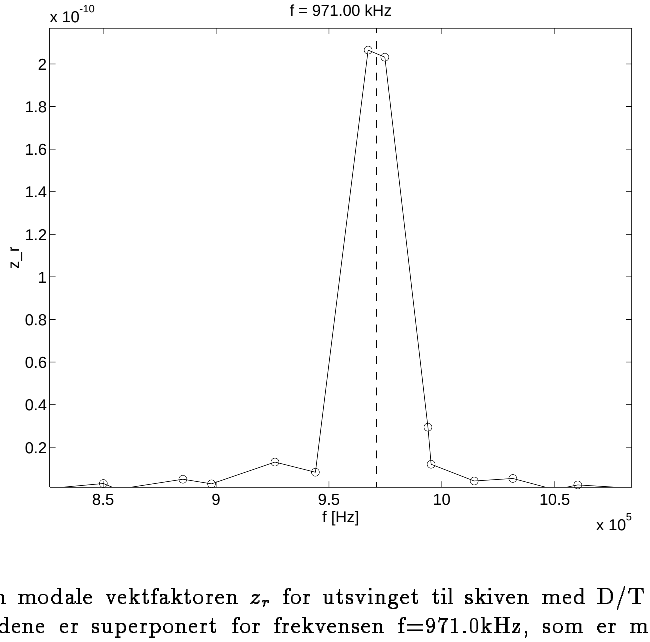


Mode 28, 972.0 kHz

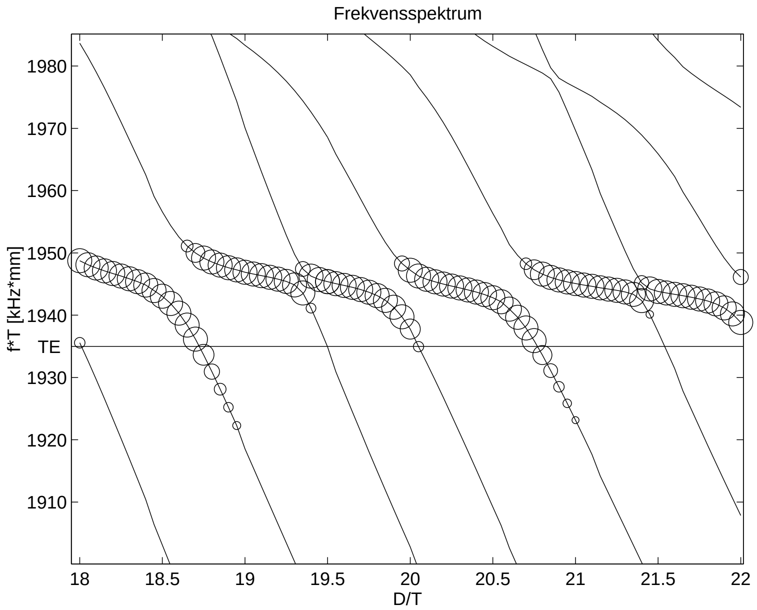
Figur 6.13: Utsvinget for moden med høyest modal konstant for skiven med D/T lik 18.45.



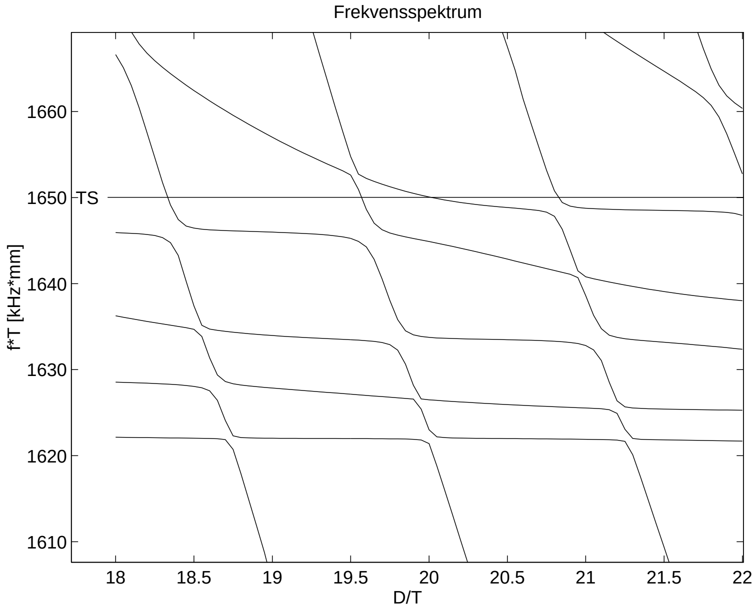
Figur 6.14: Utsvinget for responsen til skiven med D/T lik 18.73 der alle modene er superponert for frekvensen f=971.0kHz, som er midt mellom de to modene med høy modal konstant.



Figur 6.15: Den modale vektfaktoren z_r for utsvinget til skiven med D/T lik 18.73 der alle modene er superponert for frekvensen f=971.0kHz, som er midt mellom de to modene med høy modal konstant.



Figur 6.16: Frekvensspektrum for skiver av PZT5A med D/T-forhold mellom 18 og 22. Størrelsen for den modale konstanten for de ulike skivene er merket av på plottet ved hjelp av sirkler der diameteren er proporsjonal med den modale konstanten for moden (normalisert til den største modale konstanten for hvert D/T-forhold).



Figur 6.17: Frekvensspektrum for skiver av PZT5A med D/T-forhold mellom 18 og 22 for f*T-området omkring TS-frekvensen predikert av Mason - modellen. Man ser tydelig at man får flere terrasser i dette området.

6.4 Transient analyse

Motivasjonen for at dette eksempelet på transientanalyse i FEMP er utført, er at tilsvarende analyse er utført i doktoravhandlingen til Guo [10]. Teorien som ligger bak implementeringen av transient analysen er beskrevet i seksjon 3.7. En piezoelektrisk skive av materialet PZT5A med D/T-forhold lik 20 (D=40.1mm, T=2.03mm) blir analysert i transientanalysen i denne seksjonen. Skiven er modellert med 5x40 8-noders isoparametriske elementer. For mode-analyse av denne skiven, se seksjon 4.4. Dempningsmodellen som blir benyttet er den viskoelastiske dempningsmodellen med forenklingen 3.59 der $\xi_r = 1/(2Q_m)$ og $Q_m = 75$ som i doktoravhandlingen til Guo [10]. Dette er den samme skiven som blir analysert i en transientanalyse i [10] og [51]. I [10] blir det benyttet 2x48 8-noders isoparametriske elementer for å modellere skiven, ellers er simuleringparametrene de samme som her.

Konklusjonene som blir trukket i denne seksjonen er i stor grad trukket på bakgrunn av analysen i [10] sammen med resultatene som er vist her.

Det blir kun benyttet moder med frekvens opp til 1.3MHz ved utregningen av responsen (I [10] er det benyttet moder opp til 1.5MHz, men inkludering av moder opp til 1.5MHz ga svært små forskjeller i responsen). Dette fører til at bidraget fra de høyere modene som sannsynligvis burde vært med i den første delen av signalet, men som er dårlig modellert[10] i endelig element modellen, ikke blir tatt med. Ulempen med dette er at man ikke får modellert det transiente forløpet i det første delen av signalet (før de høyere modene blir dempet vekk) på en tilstrekkelig god måte. Fordelen er at de høye modene, som uansett er dårlig modellert ikke taes med i responsen [10], og at kun en liten del av inngangssignalet har energi over 1.5MHz. Inkludering av alle modene i transientresponsen ga en svært hakkete kurve i den første delen av signalet, noe som sannsynligvsi skyldes at de høyeste modene er for dårlig modellert.

En spenningsvariasjon $V(t)$ blir påtrykt den ene elektroden til den piezoelektriske skiven, mens den andre elektroden er jordet. På grunn av den piezoelektriske effekten vil den påtrykte spenningsvariasjonen gi en mekanisk deformasjon av skiven. De mekaniske deformasjonene i den piezoelektriske skiven kan bli svært kompliserte på grunn av den anisotrope koblingen mellom det elektriske og mekaniske systemet som kommer inn gjennom den piezoelektriske effekten.

Det er særlig interessant å se på den mekaniske deformasjonen av overflaten til en piezoelektrisk skive, siden svingeformen til overflaten avgjør formen til det utsendte lydfeltet.

6.4.1 Impulsresponsen

I seksjon 3.7 er det beskrevet hvordan man kan finne den transiente responsen til en piezoelektrisk transduser for en del enkle elektriske inngangssignaler ved å benytte Duhamel-integralet til utregning av responsen. Det enkleste inngangssignalet for spenningen er Diracs deltafunksjonen. Den transiente responsen til den piezoelektriske skiven når inngangssignalet Diracs deltafunksjonen kalles impulsresponsen. Siden det her kun er tatt med moder med frekvens opp til 1.3MHz i utregningen av den transiente responsen, er inngangssignalet egentlig en sinc-funksjon (den inverse fourier-transformerte av en step-funksjon).

Senterpunktets utsving

I figur 6.18a er impulsresponsen for en skive med D/T lik 20 av materialet PZT5A vist for forskyvningen i tykkelsesretningen til det midterste punktet (senterpunktet) på den øverste elektrodebekledde transduser-overflaten i tiden $0\mu s$-$20\mu s$ etter at impulsen er påført. Denne figuren tilsvarer figur 6.1b i [10]. Ved sammenligning mellom resultatene fra FEMP og resultatene fra [10] ser man at den predikerte responsen er lik for de første svingningene (frem til ca. $9\mu s$. Deretter blir avvikene større. Allikevel er det relativt store likhetstrekk mellom den totale responsen til FEMP og [10] når man ser på et større tidsområde (figur 6.18b her og figur 6.1a i [10]). Årsaken til de store avvikene ligger sannsynligvis i avvikene mellom de modellerte svingemodene for denne skiven fra FEMP og tilsvarende modellerte svingemoder fra [10], beskrevet i seksjon 4.4. Simuleringer med en noe dårligere elementoppløsning i tykkelsesretningen (totalt 2x48 elementer) som gjort i [10], ga noe bedre overensstemmelse (bra overensstemmelse frem til ca. $12\mu s$, mot ca. $9\mu s$ med 5x40 elementer), men man ser fortsatt betydelige avvik i transientforløpet.

Tilsvarende resultater er grundigere tolket i [10] og [51].

Gjennomsnittsutsvinget

I [10] er det kun sett på utsvinget i tykkelsesretningen til det midterste punktet på den øverste elektrodebekledde overflaten. Med FEMP er det også mulig å se på gjennomsnittsutsvinget i tykkelsesretningen på overflaten i tykkelsesretningen og gjennomsnittsutsvinget i radiell retning på overflaten i radiell retning. Gjennomsnittsutsvinget (eller netto-utsvinget) vil generelt kunne fortelle en del om hoveddelen av svingningene for skiven foregår i radiell retning eller i tykkelsesretningen.

I figur 6.18c-d er gjennomsnittsutsvinget i tykkelsesretningen for den samme skiven som ble studert ovenfor vist. Her ser man tydelig at skiven svinger med en frekvens på rundt 1MHz i den første fasen av responsen, selv om responsen er komplisert. Det er rimelig å anta at hovedbidraget til svingningene i denne fasen kommer fra moden med høyest modal konstant med frekvens 957.7kHz. Dette blir bekreftet nedenfor der det blir sett på hvordan den modale vektfaktoren z_r varierer med tiden. Dette er den samme konklusjonen som blir trukket i [10] og [51].

Fra rundt $100\mu s$ blir de høyere orden modene dempet ut, og skiven svinger med en frekvens på rundt 50kHz. I denne fasen er den første radielle moden viktigst for svingningen.

Gjennomsnittsutsvinget i radiell retning er vist i figur 6.18e-f. Utsvinget i radiell retning er svært komplisert. Det ser ut som om den første radielle moden blir viktig langt tidligere i responsen, enn det som er tilfelle for gjennomsnittsutsvinget i tykkelsesretningen, fordi skiven svinger med en dominerende frekvens på rundt 50kHz fra et veldig tidlig tidspunkt (rundt $10\mu s$). Effekten av de høyere modene kommer inn som små hakk på kurvene.

Den modale vektfaktoren

Den modale vektfaktoren z_r gir informasjon om hvilke vibrasjonsmoder som er viktig i den totale responsen. Det ser man blant annet av at den mekaniske responsen $[\hat{u(t)}]$ ved tiden t er gitt som (ligning 3.17):

$$[\hat{u(t)}] = \sum_{r=1}^{N_t} [\psi_{u,r}] z_r(t) \tag{6.4}$$

der $N_t \leq 2N$ er antallet moder som blir tatt med ved utregning av den totale responsen, $[\psi_{u,r}]$ er egenmode nr. r, og $z_r(t)$ er den modale vektfaktoren for mode nr. r ved tiden t. Plotting av den modale vektfaktoren som funksjon av tiden vil altså fortelle noe om hvilke moder som er viktig i den transiente responsen ved forskjellige tidspunkt. Slik analyse er ikke funnet benyttet i litteraturen, men er et forslag til hva som kan gjøres på et senere tidspunkt. Av plasshensyn er det her kun tatt med plott av den modale konstanten for $t = 0.05\mu s$-$0.50\mu s$ (figur 6.19) og $t = 2.05\mu s$-$2.50\mu s$ (figur 6.20). Av figur 6.19 ser man at den modale vektfaktoren er størst for moden med frekvens 957.7kHz og størst modal konstant i den første delen av responsen. Den modale vektfaktoren for denne moden og modene omkring varierer relativt mye i denne fasen av responsen, mens den modale vektfaktoren for de laveste radielle modene øker jevnt. I tiden frem mot $t = 2\mu s$ (ikke med i figurer her) fortsetter den modale vektfaktoren for modene med frekvens omkring 1Mhz å variere med en frekvens som ligger omkring 1MHz, men maksimalverdien minker gradvis. Det innebærer at disse modene langsomt blir dempet ut. I den samme tidsperioden blir de laveste radielle modene stadig viktigere i responsen. Av figur 6.20 ser man at den første radielle moden allerede er blitt svært viktig for $t = 2.5\mu s$ i den totale responsen. For enda senere tidspunkt blir den 1. radielle moden stadig viktigere, og fra rundt $400\mu s$ dominerer den responsen totalt.

Man ser her at den første radielle moden ser ut til å bli svært viktig for responsen på et tidlig tidspunkt. Av figur 6.18 ser man at den første radielle moden kun ser ut til å være viktig for svingningene i radiell retning på et så tidlig tidspunkt, mens den først blir viktig for svingningene i tykkelsesretningen på et senere tidspunkt. Den modale vektfaktoren gir oss altså ikke all den informasjonen vi er interessert i. Resten av informasjonen ligger i egenvektorene. For å få et best mulig bilde av hvor viktig de ulike modene er i responsen for f.eks. svingningene på overflaten i tykkelsesretningen, hadde det sannsynligvis vært mest hensiktsmessig å plotte gjennomsnittsforskyvningen (netto-forskyvningen) for responsen $[\hat{u}_r(t)]$ for hver enkelt mode r, gitt ved $[\hat{u}_r(t)] = [\psi_{u,r}]z_r(t)$ på samme måte som den modale vektfaktoren ble plottet her. Det er ikke gjort her, men er aktuelt for et senere arbeid.

Svingeform

Ved å se på svingeformen til den piezoelektriske skiven ved ulike tidspunkt, kan man lettere få innblikk i hva som skjer når en spenningsforskjell blir påført over elektrodene. I figur 6.21- 6.22 er svingeformen for halvparten av den piezoelektriske skiven for de første 7 mikro-sekundene plottet. Deler av disse figurene tilsvarer figur 6.2 i [10] (det er motsatt polaritet her og i [10], noe som blant annet skyldes at det i [10] er forskjellig retning på det første utsvinget på plottet der midtpunktet er plottet som funksjon av tiden og der svingeformene er plottet som funksjon av tiden). For den første delen av responsen er det kvalitativt bra overensstemmelse mellom resultatene fra FEMP og fra [10]. For senere tidspunkt ser man fortsatt de samme effektene, men overensstemmelsen er ikke lenger like god.

Som beskrevet i [10], ser man av figurene at i startfasen av responsen svinger skiven som en plan "piston". Etter som tiden går, forplanter det seg bølger fra kanten og innover mot sentrum av skiven. Dette er beskrevet i [10] og [51].

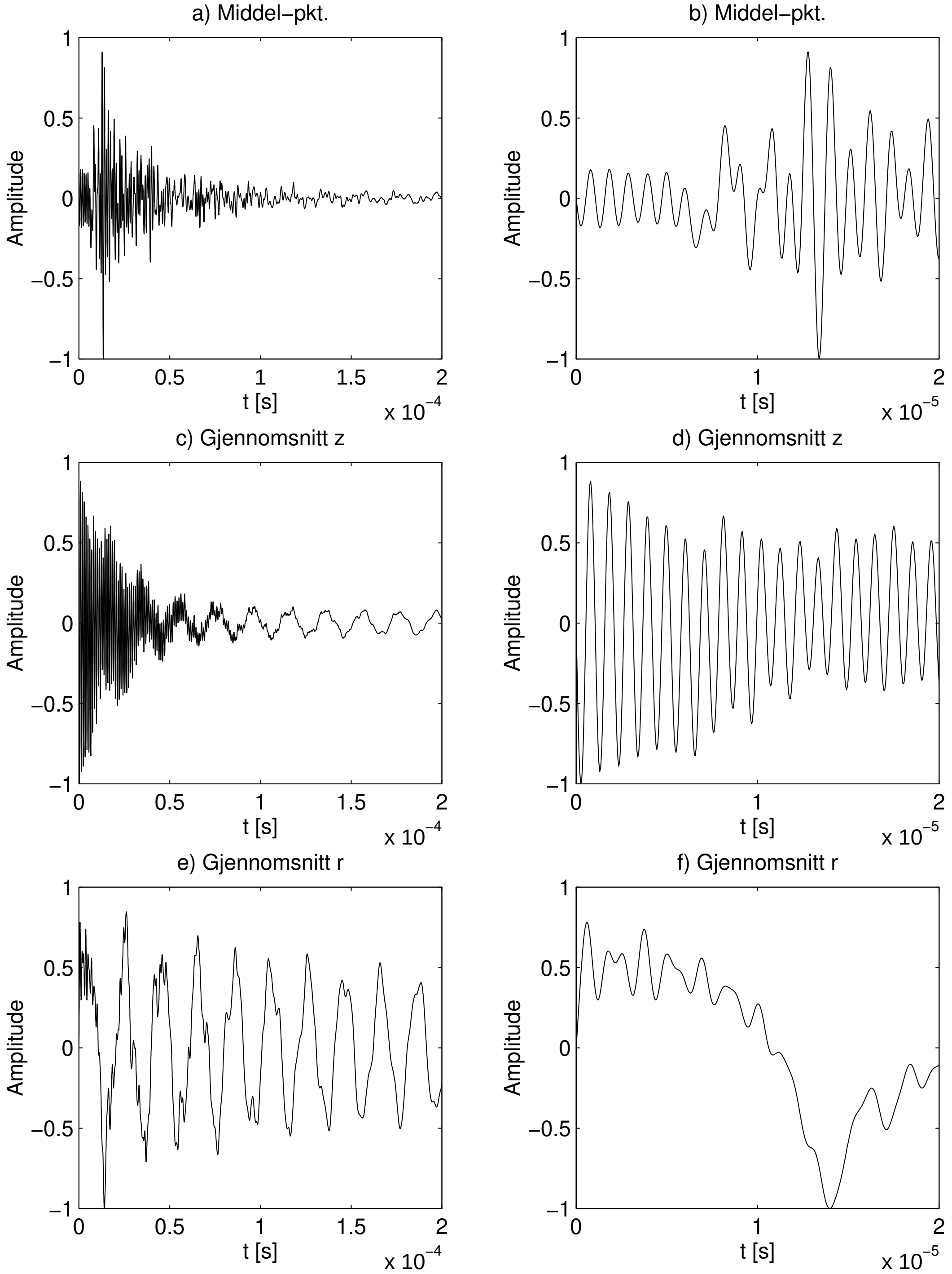
6.4.2 Bølgetog

Resultatene i denne seksjonen er tatt med utelukkende til orientering om mulighetene til endelig element analysen innenfor transientanalyse når inngangssignalet er mer generelt enn Diracs deltafunksjon.

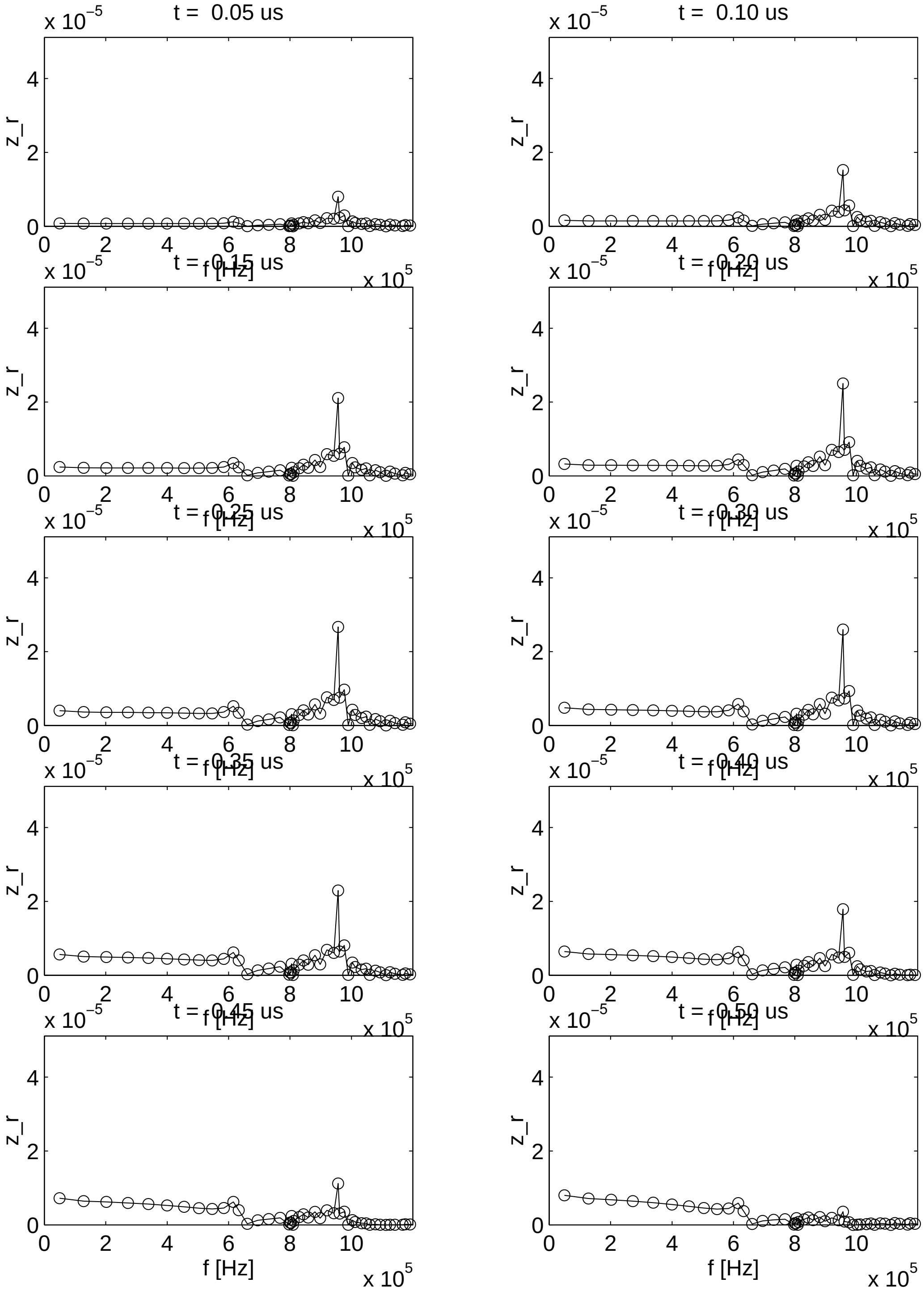
I figur 6.23- 6.24 er det sett på responsen til den piezoelektriske skiven når den elektriske spenningen som blir påtrykt er en "burst" eller et bølgetog. Det blir først sett på responsen når den elektriske inngangsspenningen er null for $t \leq 0$ og $V_0 sin\Omega t$ for $t > 0$ med $f = \Omega/\pi = 1MHz$ og $V_0 = 1V$ i figur 6.23. I figur 6.24 blir det sett på et bølgetog bestående av 20 svingeperioder med frekvens 1MHz, der også spenningen V_0 er lik 1V.

Av figur 6.23c ser man at det kun tar ca. 100 mikrosekunder før de store transiente variasjonene er ferdige i tykkelsesretningen, og skiven svinger med noenlunde konstant amplitude og frekvens. Det tar mye lenger tid før man ser tilsvarende effekt i radiell retning. Her er den første radielle moden viktig i hele tidsrommet som er vist i figur 6.23e (frem til 200 mikrosekunder). Dette ser man av at amplituden til gjennomsnittsutsvinget i radiell retning svinger med en frekvens på omtrent 50kHz, som svarer til frekvensen for den første radielle moden.

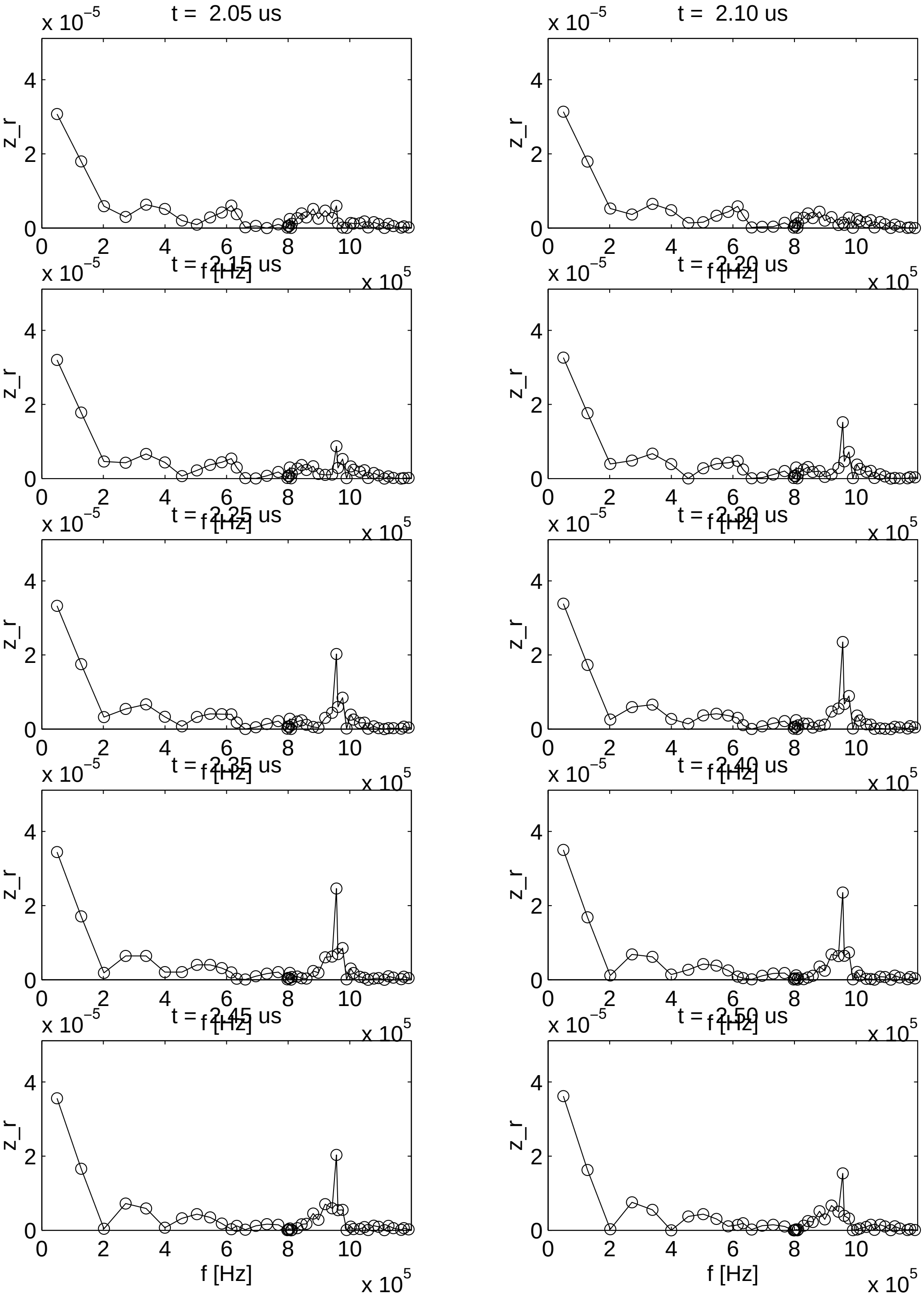
I figur 6.24 kan man se effekten av at spenningen settes til null etter en viss tid. På grunn av dempningen i det piezoelektriske materialet blir responsen dempet ut. Frem til det er slutt på pulsen er responsen den samme som for den uendelige pulsen i figur 6.23 på grunn av kausaliteten i systemet.



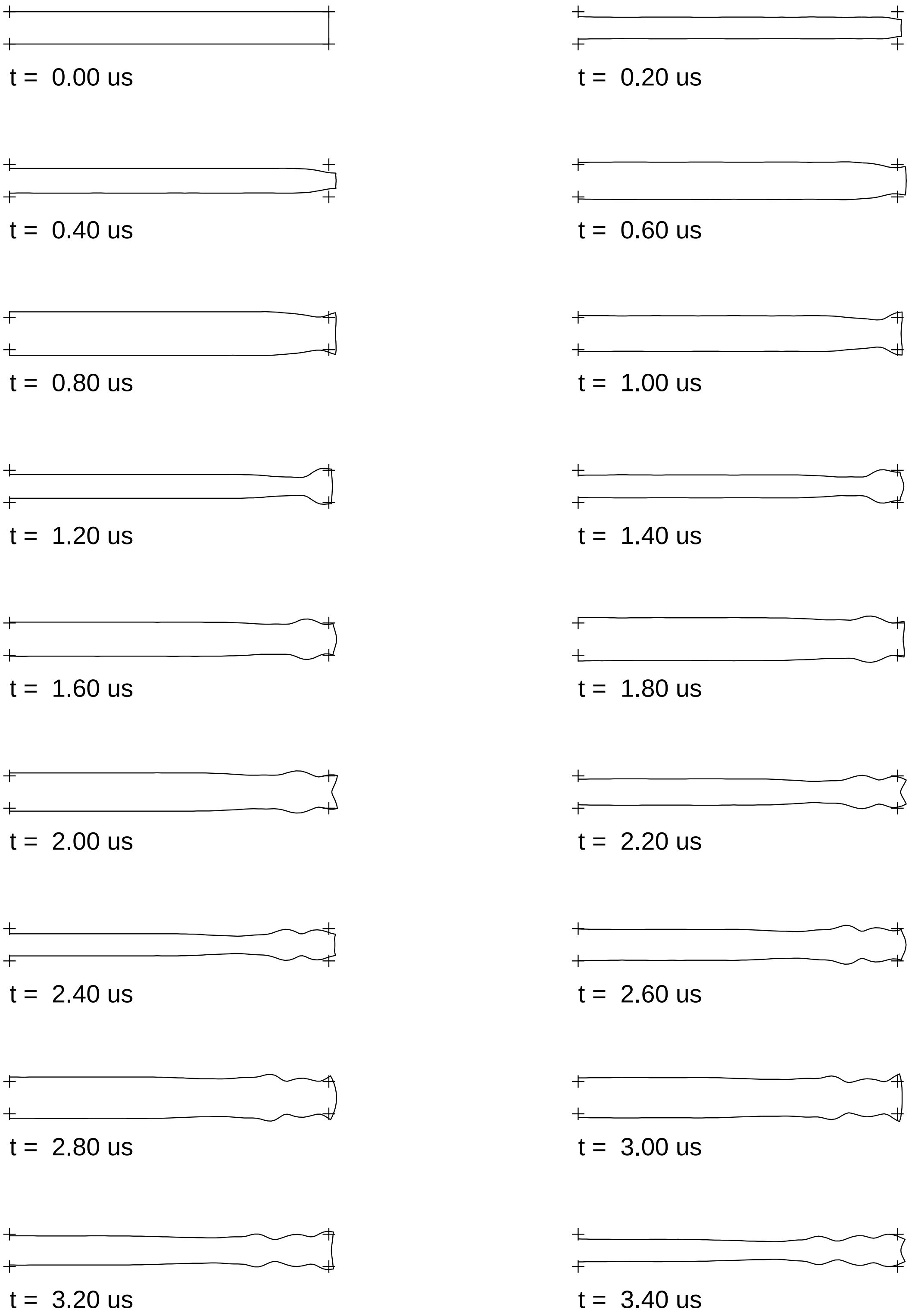
Figur 6.18: Impulsresponsen for forskyvningen for en piezoelektrisk skive med D/T=20. I a) og b) er utsvinget til det midterste punktet(senterpunktet) vist. I c) og d) er middelutsvinget over overflaten i z-retningen vist. I e) og f) er middelutsvinget over den sylindriske flaten(r=a). Her er D=40.1mm, T=2.03mm og materialet som er brukt er PZT5A.



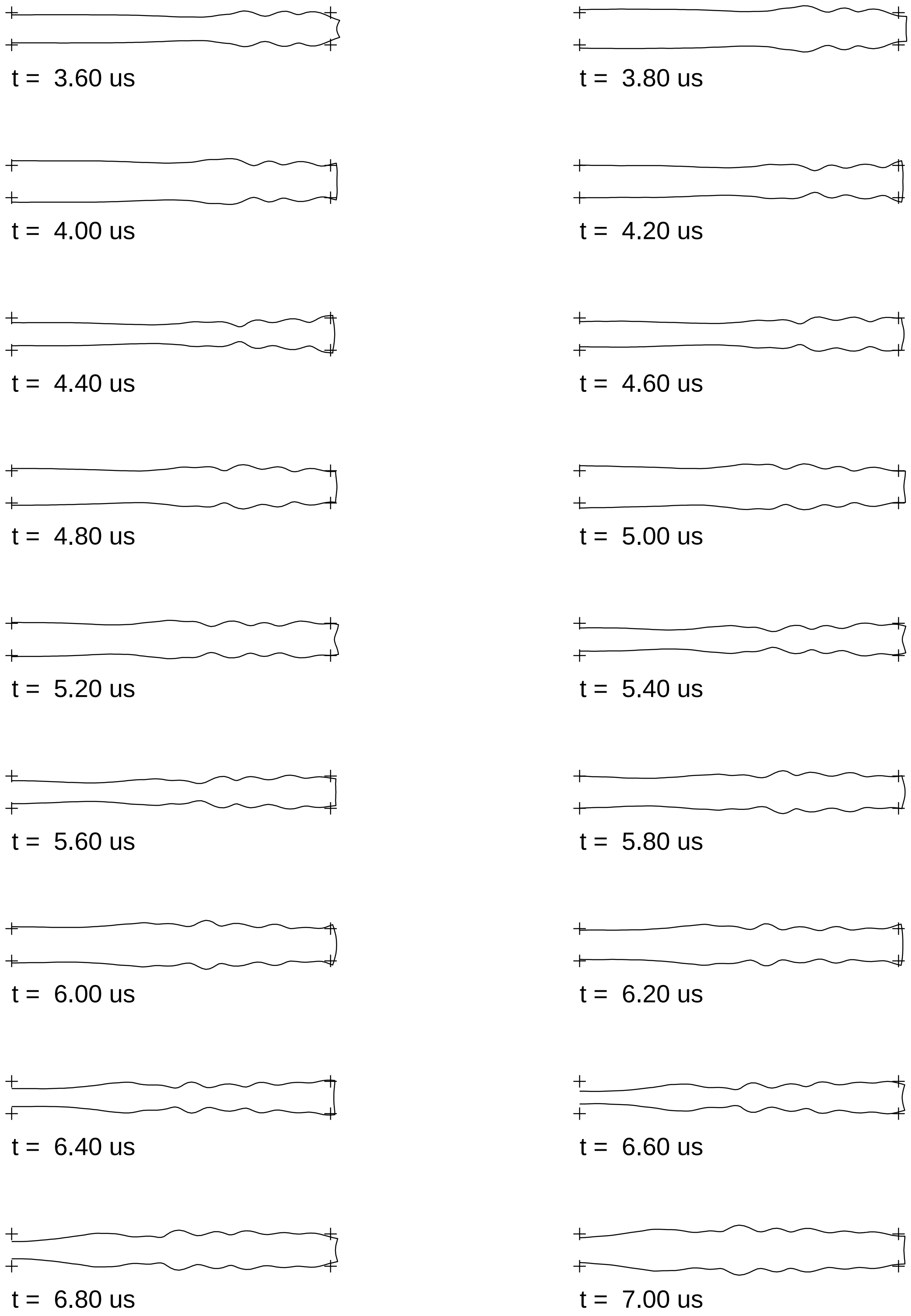
Figur 6.19: Impulsresponsen for forskyvningen for den modale vektfaktoren for en piezoelektrisk skive med D/T=20 for tidsintervallet for $t = 0.05\mu s$ - $0.55\mu s$. Her er D=40.1mm, T=2.03mm og materialet som er brukt er PZT5A.



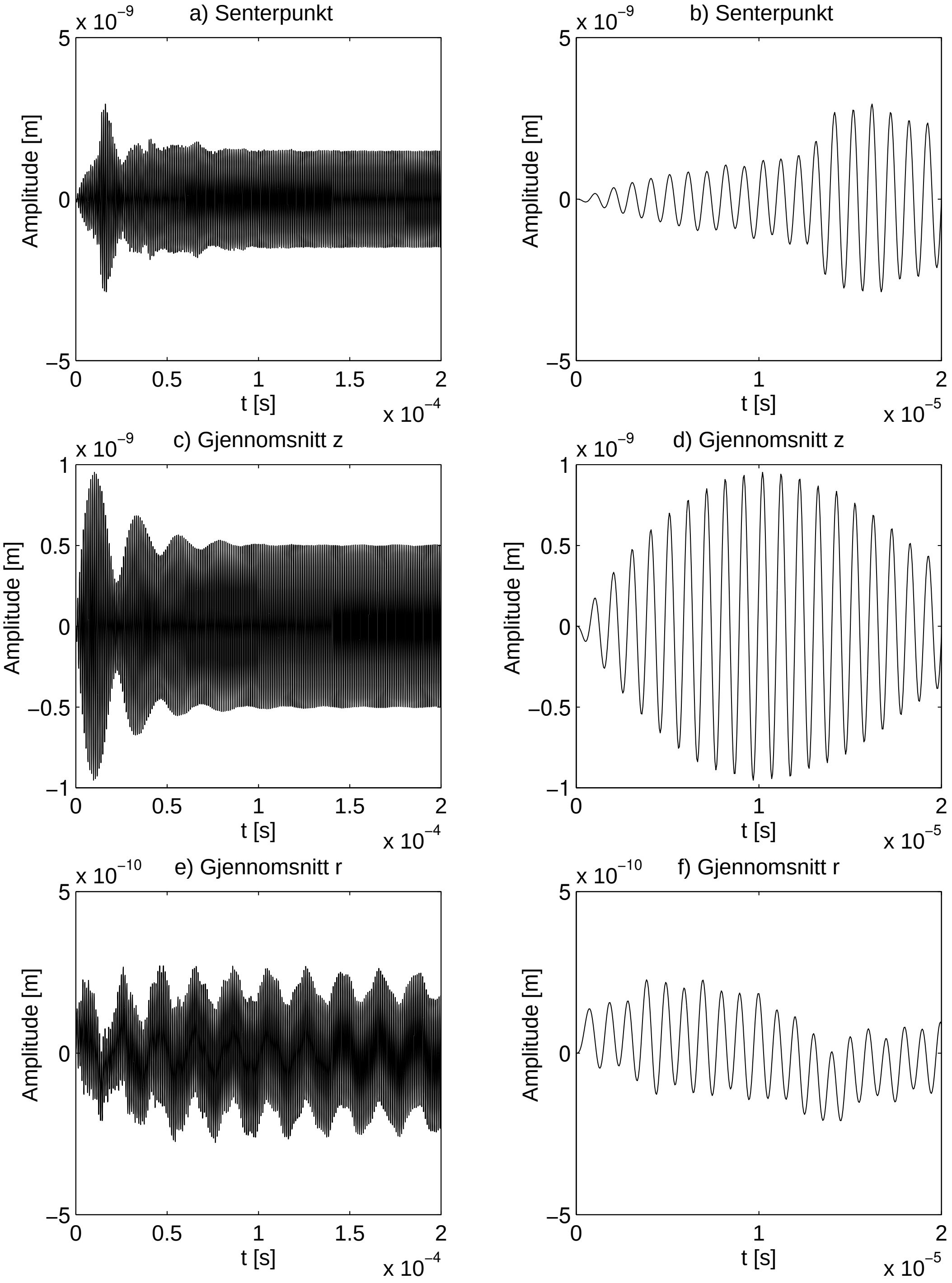
Figur 6.20: Impulsresponsen for forskyvningen for den modale vektfaktoren for en piezoelektrisk skive med D/T=20 for tidsintervallet $t = 2.05\mu s$ - $2.60\mu s$. Her er D=40.1mm, T=2.03mm og materialet som er brukt er PZT5A.



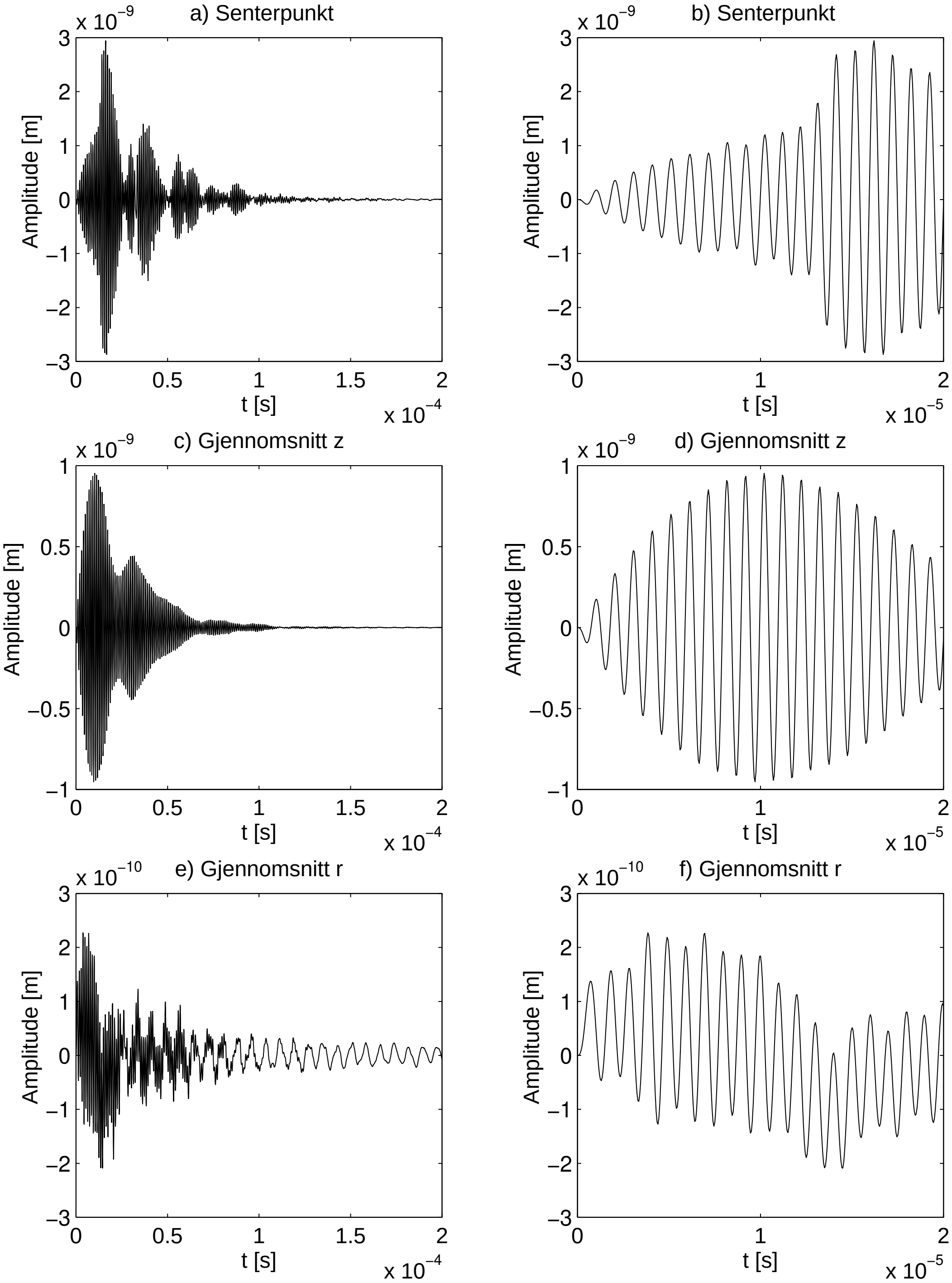
Figur 6.21: Impulsresponsen for utsvinget for en piezoelektrisk skive med D/T=20 i tidsintervallet $t = 0\mu s$ - $3.40\mu s$. Her er D=40.1mm, T=2.03mm og materialet som er brukt er PZT5A.



Figur 6.22: Impulsresponsen for utsvinget for en piezoelektrisk skive med D/T=20 for tidsintervallet $t = 3.60\mu s$ - $7.00\mu s$. Her er D=40.1mm, T=2.03mm og materialet som er brukt er PZT5A.



Figur 6.23: Transient respons for en piezoelektrisk skive med D/T=20 når den elektriske inngangsspenningen er null for $t \leq 0$ og $sin\Omega t$ for $t > 0$ med $\Omega = 1MHz$. I a) og b) er utsvinget til det midterste punktet (senterpunktet) vist. I c) og d) er middelutsvinget over overflaten i z-retningen vist. I e) og f) er middelutsvinget over den sylindriske flaten(r=a). Her er D=40.1mm, T=2.03mm og materialet som er brukt er PZT5A.



Figur 6.24: Transient respons for en piezoelektrisk skive med D/T=20 når den elektriske inngangsspenningen er definert ved 20 sinus-sykluser med frekvens 1MHz. I a) og b) er utsvinget til det midterste punktet (senterpunktet) vist. I c) og d) er middelutsvinget over overflaten i z-retningen vist. I e) og f) er middelutsvinget over den sylindriske flaten(r=a). Her er D=40.1mm, T=2.03mm og materialet som er brukt er PZT5A.

Kapittel 7

Konklusjoner og forslag til videre arbeider

7.1 Konklusjoner

Problemstillingene som det blir sett på her er i stor grad de samme som studert i en doktoravhandling av N. Guo fra 1989, der vibrasjonsmønsteret i piezokeramiske skiver blir studert ved hjelp av endelig element metoden. Et av hovedpunktene ved arbeidet med hovedfagsoppgaven har vært å reprodusere deler av resultatene fra denne avhandlingen og artikler av Guo og Cawley [49][50] [51]

I denne oppgaven er det valgt å implementere teorien selv. Hovedmotivasjonen for å foreta implementeringen selv, og ikke å bruke kommersielle programmer, er at arbeidet med implementeringen gir en økt forståelse av teorien, metodens begrensninger, og hvilke fallgruber det finnes i forbindelse med bruk av endelig element metoden til å modellere piezoelektriske transdusere.

Med bakgrunn i avhandlingen til Guo [10] og annen litteratur om endelig element metoden, er endelig element teori for piezoelektriske strukturer gjennomgått på en generell måte i kapittel 2 og 3, for å gi en beskrivelse av hvordan dette kan implementeres i et dataprogram. I oppgaven er det hovedsakelig sett på piezokeramiske skiver. Teorien for piezokeramiske skiver er implementert i programmet FEMP (*"Finite Element Modellering av Piezoelektriske strukturer"*), i både MATLAB og Fortran 90 (F90). Bare den mest grunnleggende teorien er implementert i Fortran 90-versjonen av FEMP. Det innebærer at F90-versjonen av FEMP kun kan simulere egenverdier (resonansfrekvenser og antiresonansfrekvenser) og egenvektorer (utsvinget for svingemodene) for en eller flere piezokeramiske skiver, samt regne ut den modale konstanten [10], et mål for hvor sterkt de ulike modene kan eksiteres. Denne delen av implementeringen er grundig beskrevet i vedlegg E. MATLAB-versjonen av FEMP kan simulere langt mer kompliserte funksjoner, blant annet den mekaniske spenningsfordelingen i strukturen, harmoniske responsfunksjoner (utsving og impedans/admittans) og transiente responsfunksjoner (utsvinget for en del enkle inngangssignaler som f.eks. Diracs deltafunksjon). I tillegg er det innebygget muligheter for å analysere strukturer som består av flere materialer, og forskjellige tapsmodeller. Fordelen med F90-versjonen er at den kan løse langt større problemer enn MATLAB-versjonen. I tillegg kan de to versjonene "kommunisere" ved hjelp av filer. Implementeringen av MATLAB-versjonen av FEMP er beskrevet noe mindre grundig enn hva tilfellet er for F90-versjonen i, vedlegg E.

Tidlig i arbeidet med testingen av programmet ble det støtt på problemer med å få overensstemmelse med resultater fra doktoravhandlingen til Guo ved hjelp av FEMP. Dette førte til at den grundige testingen av FEMP ble begrenset til de grunnleggende delene av programmet, det vil si utregning av resonans- og antiresonansfrekvenser for piezoelektriske strukturer, og da i hovedsak piezokeramiske skiver. De øvrige delene av programmet er foreløpig ikke testet på en grundig nok måte. Testingen som er utført er beskrevet utførlig i kapittel 4, og kan oppsummeres på følgende måte:

- Avvik mellom simulerte resonansfrekvenser med F90-versjonen og MATLAB-versjonen av FEMP er funnet til å være under 1ppm for en del testproblemer. Sammenligning med NAFEM-standarden, som er en standard for rent elastiske elementer, gir avvik på under 80ppm.
- Det er utført en hel rekke simuleringer(mer enn 50) med det kommersielle endelig element programmet ABAQUS der det er funnet maksimale avvik i forhold til resultater fra FEMP på under 5ppm for resonansfrekvenser for piezokeramiske skiver.
- Sammenligning med utregnete resonansfrekvenser i en doktoravhandling av Guo gir avvik på opp til 10% for enkelte resonansfrekvenser, uten at det er funnet noen spesifikk årsak til avvikene, selv etter korrespondanse med Guo. Sammenligninger med ABAQUS for de fleste av simuleringene fra Guo gir avvik mellom FEMP og ABAQUS på under 5ppm til tross for de store avvikene mellom Guo og FEMP.
- Sammenligninger med utregnete resonans- og antiresonansfrekvenser fra en rekke artikler viser kvalitativt god overensstemmelse mellom resultatene fra FEMP og de publiserte resultatene for en rekke forskjellige problemer, men forskjellige simuleringsparametre har i mange tilfeller vanskeliggjort kvantitative sammenligninger.
- Det er foretatt noen tester for utregning av resonansfrekvenser for strukturer som består av flere materialer og utregning av elektriske responsfunksjoner som indikerer at FEMP regner riktig på dette området, uten at testingen er omfattende nok til at det kan trekkes noen klare konklusjoner.
- De mekaniske og elektriske grensebetingelsene for egenmodene (egenvektorene) ser ut til å være oppfylt.

Bruk av en rekke forskjellige element-typer og element-oppdelinger i publiserte resultater ved bruk av endelig element analysen har altså vanskeliggjort kvantitative sammenligninger mellom FEMP og publiserte resultater. Det er kun i doktoravhandlingen til Guo [10] at det er funnet resultater som det er mulig å gjøre gode kvantitative sammenligninger, slik at det er oppgitt nøyaktig problemdefinisjon, og det er benyttet en element-type som er implementert i FEMP. Sammenligning med resultater fra [10] gir relativt store, uforklarelige avvik, samtidig som det er nærmest perfekt overensstemmelse med ABAQUS (som representerer en uavhengig implementering), og det er kvalitativt bra overensstemmelse med en rekke publiserte resultater. Det er derfor konkludert med at det er stor sannsynlighet for at FEMP regner riktig for egenverdier (resonansfrekvenser og antiresonansfrekvenser) for piezokeramiske skiver, til tross for avvikene mellom resultater fra FEMP og resultater fra doktoravhandlingen til Guo [10]. Dersom egenverdiene er korrekt utregnet, vil feilen på egenvektorene kun avhenge av egenverdirutinen. Det blir benyttet anerkjente og mye brukte egenverdirutiner som sikrer at egenvektorene med meget stor sannsynlighet vil bli regnet med feil i samme størrelsesorden som for egenverdiene. Når det gjelder andre funksjoner konkluderes det med at testresultatene indikerer at FEMP regner riktig for resonansfrekvenser for strukturer sammensatt av flere materialer og elektriske responsfunksjoner, selv om test-grunnlaget er alt for lite til å trekke klare konklusjoner. For andre funksjoner er FEMP for dårlig testet til at det er hensiktsmessig å benytte programmet i en analyse.

I litteraturen har det vært vanskelig å finne klare krav for hvilken elementoppdeling som bør benyttes for å få en løsning med god nøyaktighet. Det er derfor i kapittel 5 foretatt konvergenstester for å finne ut hvilke krav det er nødvendig å sette til elementoppdelingen for at løsning skal oppfylle ønskede krav til nøyaktighet. Det ble funnet et foreløpig krav til elementoppdeling for det 8-noders isoparametriske elementet, som må verifiseres (eller eventuelt korrigeres) ved et senere arbeid, fordi det ikke er regnet med tilstrekkelig god elementoppdeling i den retningen som holdes fast ved konvergenstestene. Kravet som ble funnet er at det anbefales å benytte 5-6 elementer pr. bølgelengde i radiell retning, og 3-4 elementer pr. bølgelengde i tykkelsesretningen (skjærbølgelengde) for å få en løsning med en nøyaktighet på rundt 0.5%. Dette kravet kan muligens senkes når videre analyse blir utført, slik at det fremdeles gjenstår en del arbeid på dette området.

I kapittel 6 er det gitt en del eksempler på hvordan FEMP kan benyttes til analyse av piezokeramiske skiver. Siden det fortsatt gjenstår en del arbeid innenfor testing av forskjellige funksjoner i FEMP før disse kan benyttes til grundige analyser av egenskapene til piezokeramiske skiver og andre piezoelektriske strukturer, må resultatene i kapittel 6 sees på som foreløpige resultater, som kan bli bekreftet eller korrigert på et senere tidspunkt, og som bare er med på å få frem mulighetene man har ved bruk av endelig element metoden til analyse av piezoelektriske skiver. Dette kapittelet er altså ikke et hovedkapittel. I kapittelet blir ulike uttrykk for koblingsfaktoren benyttet i endelig element litteraturen sammenlignet, det blir vist hvordan vibrasjonsmodene omkring tykkelsesmoden for piezoelektriske skiver kan analyseres ved hjelp av endelig element metoden, det blir gitt eksempler på hvordan en transient-analyse kan utføres ved hjelp av programmet FEMP, og det blir sannsynliggjort at plotting av den modale konstanten som funksjon av D/T kan være nyttig i en analyse. Konklusjonene som blir trukket i kapittel 6 er ikke viktige her.

FEMP, et omfattende program for endelig element analyse av piezoelektriske strukturer, er altså implementert i denne oppgaven. Kun et fåtall av funksjonene er fullstendig gjennomtestet, men den utviklede programkoden vil være en svært nyttig basis i videreutvikling og ytterligere testing av programmet. Gjennom relativt omfattende testing er det sannsynliggjort at FEMP regner ut verdier på resonans- og antiresonansfrekvenser på en riktig måte. Konvergenstester, som det sannsynligvis må jobbes litt mer med, kan hjelpe brukeren til å finne et brukbart mål på nøyaktigheten til løsningen. Det er demonstrert at FEMP kan bli et kraftig verktøy innenfor endelig element analyse av piezokeramiske skiver når man får testet det grundig nok.

7.2 Forslag til videre arbeid

Endelig element metoden er et kraftig verktøy til analyse av piezoelektriske skiver og transduserkonstruksjoner. I kapittel 6 er det indikert at programmet FEMP som er utviklet i forbindelse med denne oppgaven kan bli nyttig i forbindelse med analyse av en rekke forskjellige egenskaper for en piezoelektrisk struktur når programmet er ferdigtestet. I tillegg er det mulig å bygge på programmet med andre tilleggsfunksjoner.

Siden arbeidet med endelig elementmetoden for analyse av piezoelektriske transdusere er startet opp ved UiB og CMR med denne oppgaven, er det fremdeles mye som kan (og bør) gjøres innenfor området:

1. Ytterligere testing av egenverdirutiner for å få full sikkerhet om at FEMP gir riktige verdier for egenverdiene. Dette vil være viktig før man kan stole fullstendig på resultatene fra FEMP:
    - Testing for resonans- og antiresonansfrekvenser mot andre endelig element programmer, som f.eks. ANSYS[71] eller PZFlex[69]. Slike tester er nok de eneste som kan gi sikre svar.
    - Testing mot målinger av serieresonans- og paralellresonans-frekvenser.
    - Testing mot andre modeller.
2. Utføring av flere konvergenstester der elementoppdelingen er bedre i den koordinatretningen som holdes fast. Her kan det også være aktuellt å bekrefte konvergens-resultatene for et annet materiale, og å se på hva som skjer med konvergens-egenskapene til løsningen for høyere f*T-verdier. Det kan også være nyttig å analysere konvergensmønsteret til løsningen

på en bedre måte for å få innsikt i de fysiske mekanismene som ligger bak. Her kan det også være aktuelt å se på hvor god beskrivelse den teoretiske modellen gir av det fysiske problemet.

3. Testing av utregnete egenvektorer. For å få kvantitative sammenligninger her må man sammenligne med endelig element resultater. I teksten er det sannsynliggjort at nøyaktigheten for egenvektorene vil være i samme størrelsesorden som for egenverdiene, men dette bør også bekreftes gjennom sammenligninger med andre endelig element resultater.

4. Testing av dagens implementerte funksjoner. Det er allerede implementert en rekke forskjellige funksjoner som kan være nyttige i endelig element analysen av piezoelektriske skiver. Man må følgelig:

    - Teste funksjoner som admittans, utsving, transient analyse og mekanisk spenninsanalyse mot andre endelig element programmer. Sammenligning av f.eks. mekanisk spenningsfordeling i strukturen og transientanalyse kan delvis gjøres i ABAQUS.
    - Admittans og utsving kan også testes mot målinger, selv om dette sannsynligvis ikke vil gi kvantitativt gode sammenligninger på grunn av usikkerheten i materialparametre.
    - Testing av disse funksjonene mot andre modeller kan også være med på å sannsynliggjøre at FEMP regner riktig på dette området.

5. Bruk av FEMP til analyse av piezoelektriske skiver. Her er det en rekke aktuelle områder, siden endelig element metoden gir store muligheter. Bruk av disse funksjonene forutsetter at de først er tilstrekkelig testet. Noen aktuelle områder kan være:

    - Analyse av ulike tapsmodeller, som også kan gi nyttig informasjon om tapsmodeller for analytiske modeller. Her vil det være spesielt viktig å se på hvor gode tilnærminger de forenklete dempningsmodellene, som i dag hovedsakelig brukes til harmonisk og transient analyse, er.
    - Studere de ulike vibrasjonsmodene for skiver med varierende D/T-forhold grundigere. Her er blant annet kobling mellom moder viktig. Her kan blant annet resultatene i kapittel 6 være et utgangspunkt. Dette kan være nyttig for å få bedre forståelse av de fysiske mekanismene som opptrer her.
    - Man kan studere virkningen av elastiske baklag og frontlag, virkning av variasjon av tykkelsen på baklag/frontlag, og variasjon av materialtype.
    - Transient-analyse ved hjelp av FEMP for skiver med ulike D/T-forhold, ulike baklag og med ulike inngangs-signaler.
    - Mer tid kan brukes på å finne et godt mål for hvor sterkt en mode kan eksiteres, som lett kan knyttes til målte verdier, og samtidig ikke krever for mye regnetid.

6. Effektivisering av FEMP, slik at FEMP kan håndtere større datamengder og får kortere regnetid.

    - Det er mulig at man kan minke kravet til minne (og CPU) i FEMP ved å ta hensyn til båndstrukturen i beregningene [10].
    - Implementering av FEMP på en parallell datamaskin kan være med på å øke kapasiteten til FEMP.
    - Omskriving av FEMP til et adaptivt program kan gi gode resultater [37].

7. Videreutbygging av FEMP. Det er en rekke utbyggingsmuligheter for FEMP. Her er noen av de viktigste:

    - Den kanskje viktigste utbyggingsmuligheten er påbygging av endelig element metoden i FEMP, slik at utstråling til et medium blir inkludert[23]. Dette kan da brukes til å studere utstrålingen fra en transduserkonstruksjon.

- På lang sikt kan det også være interessant å se på et system bestående av sendertransduser, et medium, og mottagertransduser med FEMP.
- Det er relativt enkelt å modifisere programmet til også å kunne utføre full 3-dimensjonal analyse, men da vil regnetiden gå kraftig opp.
- Det er mulig å analysere kompositt-transdusere ved hjelp av endelig element modellen. Dette kan også implementeres i FEMP

Der er altså en rekke muligheter for programmet FEMP. Det viktigste her er de første punktene - en mest mulig fullstendig gjennomtesting av alle delene av FEMP, helst mot andre endelig element programmer, og få kvantisert feilen i forhold til den fysiske modellen. Deretter kan man benytte FEMP til en rekke forskjellige analyser. Mange av forslagene til videre arbeid som gies ovenfor kan ligge lang frem i tid.

Referanser

[1] Allik H. and Hughes T.J.R., "Finite element method for piezoelectric vibration," International Journal for Numerical Methods in Engineering **2**, 151-157 (1970)

[2] Shaw E.A.G, "On the resonant vibrations of thick barium titanate disks," The Journal of the Acoustical Society of America **28**(1), 38-50 (January 1956)

[3] Auld B.A., *Acoustic fields and waves in solids Vol I,* (John Wiley and Sons Inc., New York, 1973)

[4] Auld B.A., *Acoustic fields and waves in solids Vol II,* (John Wiley and Sons Inc., New York, 1973)

[5] Bathe H.J., *Finite element procedures in engineering analysis,* (Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982)

[6] Kunkel H.A.,Locke S. and Pikeroen B., "Finite-element analysis of vibrational modes in piezoelectric ceramic disks," IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control **37**(4), 316 (1990)

[7] Locke S., Kunkel H.A. and Pikeroen B., "Finite element modelling of piezoelectric ceramic disks," (Ultrasonics Symposium, Denver, Colorado, 701-706, 1987)

[8] Guo N., Nanyang Technical University, Singapore, Privat kommunikasjon, ved P. Lunde ved CMR og M. Vestrheim ved UiB (1994). Har hatt tilgang til simulerte data (fil på diskett) gjennom CMR.

[9] Guo N., Nanyang Technical University, Singapore, Privat kommunikasjon, ved P. Lunde ved CMR, M. Vestrheim ved UiB og J. Kocbach ved UiB (23. januar 1996 med svar 15. mars 1996).

[10] Guo N., *The vibration characteristics of piezoelectric discs,* (Doctoral Thesis, department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, SW7, 1989)

[11] Burnett D.S., *Finite element analysis - from concepts to applications,* (AT& T Bell Laboraties, Whippany, New Jersey, 1987)

[12] Lerch R., "Berechnung des Schwingungsverhaltens piezoelektrischer kørper mit einem Vektorprozessor," Siemens Forschungs- und Entwicklungsberichte, Springer-Verlag **15**(5), 234-238 (1986)

[13] Ostergaard D.F. and Pawlak T.P., "Three-dimensional finite elements for analyzing piezoelectric structures," Proceedings of the IEEE Ultrasonics Symposium, Williamsburg, VA, 639-642 (1986)

[14] Kagawa Y. and Yamabuchi T., "Finite element approach for a piezoelectric circular rod", IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics **SU-23**, 379-385 (1976)

[15] Lerch, R., "Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements," IEEE-Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control **37**(2), 233-247 (1990)

[16] Jungermann R.L. and Kino G.S., "Measurment of normal surface displacement for the characterization of rectangular acoustic array elements", Journal of the Acoustical Society of America **76**, 516-524 (1984)

[17] EerNisse E.P., "Variational method for electroelastic vibration analysis", IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics **SU-14** (4), 153-160 (1967)

[18] Holland R. and EerNisse E.P., *Design and analysis of piezoelectric resonant devices*, (The M.I.T. press, Cambridge, Massachsetts and London, England, 1969)

[19] Reinen T.A. and Berg T., "Tredimensjonal modellering av piezoelektriske svingarar. Sluttrapport, Rapport nummer STF40 A89032", ELAB-RUNIT, 7034 Trondheim, Norway (1989)

[20] Paul H.S., "Vibrations of circular cylindrical shells of piezoelectric silver iodide crystals", The Journal of the Acoustical Society of America **40** 1077-1080 (1966)

[21] Lanceleur P., Francois de Belleval J. and Mercier N, "Modeling of transient deformation of piezoelectric ceramics", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control **39** (2), 293-301 (1992)

[22] Berlincourt D., Currran D.R. and Jaffe H., "Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers," (In: *Physical Acoustics, Principles and Methods. Volume 1 - Part A.,* Edited by W. P. Mason (Academic Press, New York, 1964), Chapter 3

[23] Jensen, H., "Calculations for piezoelectric ultrasonic transducers, report R-536", Risø National Laboratory, P.O. Box 49, DK-4000 Roskilde, Denmark, (1986)

[24] Coursant R.H., Mequio C. and Pesque P., "Simulation of the acousto-electric response of ultrasonic narrow strip transducers with mechanical losses", 1983 Ultrasonics symposium, 414-419, (1983)

[25] Naillon M., Coursant R.H. and Besnier F., "Analysis of piezoelectric structures by a finite element method", Acta Electronica **25** 4, 341-362 (1983)

[26] Boucher D., Lagier M. and Maerfeld C., "Computation of the vibrational modes for piezoelectric array transducers using a mixed finite element-pertubation method", IEEE Transactions on Sonics, Ultrasonics and Frequency control **SU-28**, 318-330 (Sept. 1981)

[27] Allik H., Webman K.M. and Hunt J.T, "Vibrational response of sonar transducers using piezoelectric finite elements," Journal of the Acoustical Society of America **56**, 1782-1791 (1974)

[28] NAFEM, *The standard NAFEM Benchmarks*, (1990)

[29] *Abaqus/Standard Verification Manual, Version 5.4,* (Hibbit, Karlsson & Sorensen, 1994)

[30] *Abaqus/Standard Users Manual, Version 5.4,* (Hibbit, Karlsson & Sorensen, 1994)

[31] Reitz, Milford and Christy, *Foundation of Electromagnetic Theory*, (Addison-Wesley, 1993)

[32] Ellingsen, T. *Klassisk Mekanikk,* (Matematisk Institutt, Universitet i Bergen, 1987)

[33] Raoelijaona F. and Dulmet B., "Finite element analysis using trigonometric interpolations for quasi-thickness piezoelectric resonators", 1994 Ultrasonic symposium, 965-968 (1994)

[34] Ghali A. and Neville A.M., *Structural Analysis : A unified classical and matrix approach, Second Edition*,(Chapman & Hall Ltd, 1978)

[35] Vestrheim M., *Akustiske målesystemer, Forelesningsnotater i FYS373, akustiske målesystemer ved Fysisk Institutt, Universitetet i Bergen, foreløpig utgave,* (Fysisk Institutt, Universitetet i Bergen, Bergen, 1994)

[36] Vestrheim M., *Forelesningsnotater i FYS272, akustiske transdusere ved Fysisk Institutt, Universitetet i Bergen, foreløpig utgave,* (Fysisk Institutt, Universitetet i Bergen, Bergen, 1994)

[37] Cook, R.D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 2d ed.,* (Wiley, New York, 1981)

[38] Barlow, J., "Optimal stress locations in finite element models," International Journal of Numerical Methods in Engineering **10** 243-251 (1976)

[39] *IEEE Standard on Piezoelectricity - Std. 176 - 1978*, (The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, New York, 1978)

[40] *IEEE Standard on Piezoelectricity - Std. 176 - 1987*, (The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc, New York, 1987)

[41] *Guide to dynamic measurments of piezoelectric ceramics with high coupling*, (International Electrotechnical Commission, Publication 483, 1976)

[42] Zienkewitz O.C., *The Finite Element Method*, (McGraw-Hill, New York, 1977)

[43] Challande P., "Application de la methode des elements finis a l'etide de cavites piezoelectriques: influence de la geometrie sur les modes de vibration et leur coefficient de couplage", Jornal de Mecanique theorique et appliquee **7**(4), 461-477 (1988)

[44] Mercer C.D., Reddy B.D. and Eve R.A, *Finite element method for piezoelectric media*, Technical report UCT/CSIR Applied Mechanics Research Unit No. 92, (Cape Town , University of Cape Town, 1987)

[45] Sigmon K., *Matlab primer*, (Boca Raton , CRC Press, 1994)

[46] Abderson E. et. al., *LAPACK user's guide*, (Philadelphia, Pa. , Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992)

[47] Kinsler L.E and Frey A.R., *Fundamentals of acoustics 2nd ed.*, (New York , Wiley, c1962)

[48] Naillon M., Besnier F. and Coursant R.H. "Finite element analysis of narrow piezoelectric parallepiped vibrations. Energetical coupling modeling", IEEE 1983 Ultrasonics Symposium, Atlanta, 773-777 (1983)

[49] Guo N. and Cawley P., "The finite element analysis of the vibration characteristics of piezoelectric discs," Journal of Sound and Vibration, **159**(1), 115-138 (1992)

[50] Guo N. and Cawley P., "Measurment and prediction of the frequency spectrum of piezoelectric disks by modal analysis," Journal of the Acoustical Society of America, **92**(6), 3379-3387 (1992)

[51] Guo N. and Cawley P., "Transient response of piezoelectric discs to applied voltage pulses," Ultrasonics 1991, **29**, 208-216 (1992)

[52] Kagawa Y., Tsuchiya T. and Kataoka T., "Finite element simulation of responses of piezoelectric actuators", Journal of Sound and Vibration,**191**(4), 519-538 (1996)

[53] Lunde P. and Vestrheim M., "Piezoelectric transducer modelling, Part I: Basic equations for poled ferroelectric ceramics," Chr. Michelsen Institute, Bergen, CMI Report No. CMI-91-A10010 (December, 1991), (Confidential)

[54] Mason W.P., *Electromechanical transducers and wave filters, Second edition*, (D.Can. Norstrand Company Inc., 1948)

[55] Krimholtz R., Leedom D.A. and Matthaei G.L., "New equivalent circuits for elementary piezoelectric transducers," Electronic Letters **6**(13), 398-399 (1970)

[56] Tiersten H.F, *Linear piezoelectric plate vibrations: Elements of the linear theory of piezoelectricity and the vibrations of piezoelectric plates*, (New York , Plenum Press, 1969)

[57] Mindlin R.D and Medick M.A., "Extensional vibrations of elastic plates", ASME Journal of Applied Mechanics **26**, 561-569 (1959)

[58] Aggarwal R.R., "Axially Symmetric vibrations of a finite isotropic disk. I", Journal of the Acoustical Society of America **24**, 463-467 (1952)

[59] Aggarwal R.R., "Axially Symmetric vibrations of a finite isotropic disk. II", Journal of the Acoustical Society of America **24**, 663-666 (1952)

[60] Ueha S., Sakuma S. and Mori E., "Measurment of vibration velocity distributions and mode analysis in thick disks of $PB(ZrTi)O_3$", Journal of the Acoustical Society of America **73**, 1842-1847 (1983)

[61] Ikegami S., Ueda L. and Kobayashi S., "Frequency spectra of resonant vibration in disk plates of $PbTiO_3$ piezoelectric ceramics", Journal of the Acoustical Society of America **55**, 339-344 (1974)

[62] *Piezoelectric ceramic data Bulletin 66011/F*, (Vernitron Piezoelectric Division, 232 Forbes Road, Bedford, OH 44146, 1976)

[63] *Piezoceramics, High quality components and materials for the electronics industry*, (Ferroperm, Stubbeled 7, DK-Vedbæk, Denmark, 1992)

[64] Meitzler A.H., O'Bryan H.M.Jr. and Tiersten H.F., "Definition and measurment of radial mode coupling factors in piezoelectric ceramic materials with large variations in poisson's ration", IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, **SU-20** (3), 233-239 (1973)

[65] Gindre M., Urbach W., Coursant R.H. and Fink M., "Mechenical displacement induced in a piezoelectric structure: Experimental measurement by laser interferometry and simulation by a finite element method", Journal of the Acoustical Society of America **84**(1), 11-19 (1988)

[66] Challande P., "Optimizing ultrasonic transducers based on piezoelectric composites using a finite-element method", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control **17**(2), 135-140 (1990)

[67] Davis P., Rabinowitz P., *Methods of numerical integration*, (New York , Academic Press, 1975)

[68] Du Toit H.F., George P.L., Laug P., Pate P., Steer D., Vidrascu M., *An introduction to MODULEF: MODULEF user guide no. 1, INRIA, France, 1991*

[69] PZflex: *Flex Support, Weidlinger Associates, Inc., 4410 El Camino Real, Suite 110, Los Altos, CA 94022, USA*

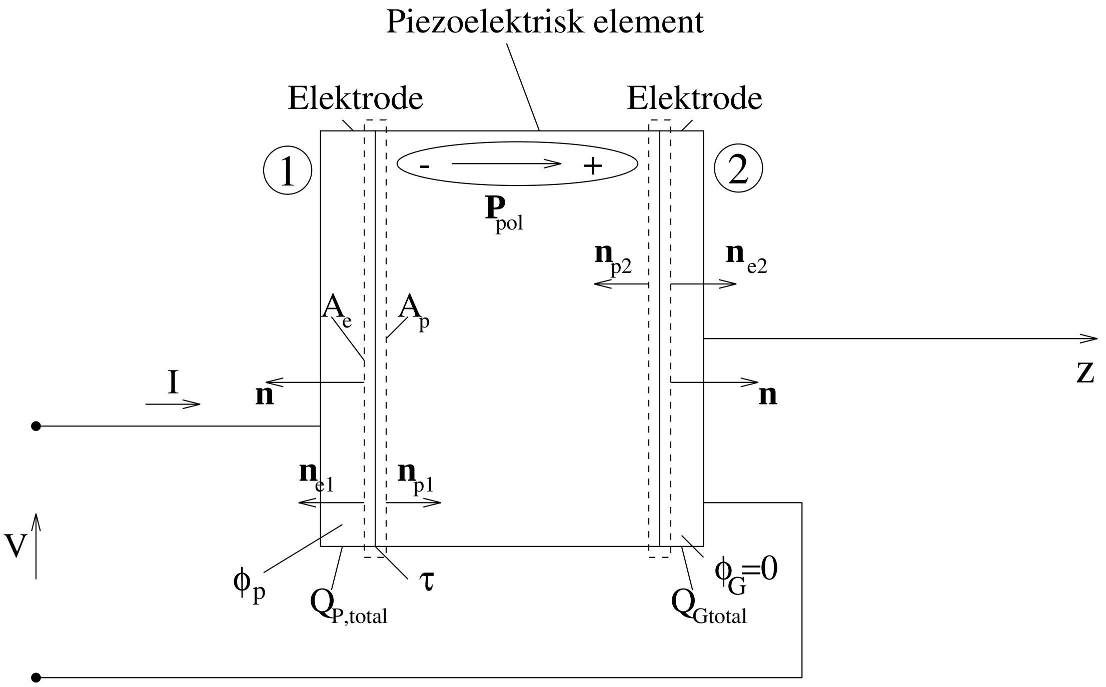
[70] Atila: *Magsoft Corporation, 1223 Peoples Avenue , Troy, NY 12180*

[71] *Ansys revision 5.0 , technical description of capabilities*, (Swanson Analysis Systems, Inc., Johnson Road, P.O. Box 65, Houston, PA 15342-0065, USA, 1992)

Vedlegg A

Definisjon av strømretningen

Vi ser her på de elektriske randkravene. Tilsvarende gjennomgang er gjort f.eks. i [53] [36]. I figur A.1 er det tegnet en skjematisk oppstilling av et piezoelektrisk element, der tykkelsen på elektrodene er sterkt overdrevet.



Figur A.1: Skjematisk oppstilling av et piezoelektrisk element med to elektroder. Tykkelsen på elektrodene er sterkt overdrevet for å få med flaten der vi har overgang fra det piezoelektriske materialet til elektroden. Vi har et infinitesimalt volum τ omkring grenseflaten mellom de to materialene. Ytre enhetsvektor ut av det piezoelektriske volumet er $\underline{n}$. Her er $[P_{pol}]$ polariseringsvektoren.

Vi er interessert i å finne strømmen inn til og ut fra det piezoelektriske elementet uttrykt ved ladningen på de to elektrodene. Elektrode nr. 2 er jordet og har ladning Q_{Gtotal}. Elektrode nr. 1 har ladning Q_{Ptotal}.

Fra [36], [53], [3] har vi at strømmen I som kommer inn på den ene elektroden har samme størrelse som strømmen ut på den andre elektroden.

Fra Maxwell's ligninger [4] (divergensen til ligningen $\nabla \times \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J_c} + \underline{J_s} = \underline{J}$ der $\underline{H}$ er den magnetiske feltintensiteten, $\underline{J_c}$ ledningsstrømtettheten, $\underline{J_s}$ kildestrømtettheten og $\underline{J}$ den totale (generaliserte) strømtettheten.) har vi at

$$\nabla \cdot (\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J_c}) = 0 \tag{A.1}$$

der det er antatt at J_s er lik null [36]. Vi ser først på elektrode nr. 1 i figur A.1, med ladning Q_{Ptotal}. Ligning A.1 integrert over volumet τ som omslutter hele grenseflaten mellom det piezoelektriske materialet og elektrode nr.1 gir:

$$\int_\tau \nabla \cdot (\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J_c}) dV = 0 \tag{A.2}$$

Volumet τ omsluttes av flaten A_{tot}. I grensen $\tau \to 0$ vil A_{tot} være lik $A_e + A_p$. Ved å benytte divergensteoremet på integralet i ligning A.2 får man:

$$\begin{aligned} \int_\tau \nabla \cdot (\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J_c}) dV &= \int_{A_{tot}} (\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J_c}) \cdot d\underline{A} \\ &\approx \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_p} \underline{D} \cdot \underline{n}_{p1} dA_p + \int_{A_e} \underline{J_c} \cdot \underline{n}_{e1} dA_e \\ &= 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Der det er benyttet at $\underline{D} = 0$ i elektroden, og $\underline{J}_c = 0$ i det piezoelektriske materialet [36]. Fra figur A.1 ser man at strømmen er positiv inn i elektrode nr. 1. Det gir følgende definisjon av strømmen:

$$\begin{aligned} I &= -\int_{A_e} \underline{J_c} \cdot \underline{n} dA_e \\ &= -\int_{A_e} \underline{J_c} \cdot \underline{n}_{e1} dA_e \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_p} \underline{D} \cdot \underline{n}_{p1} dA_p \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_p} \underline{D} \cdot \underline{n} dA_p \end{aligned} \tag{A.4}$$

I ligning 2.13 er overflateladningstettheten q definert ved $q = -\underline{D} \cdot \underline{n}$ [56]. Det gir ladningen Q_{Ptotal} på elektrode nr. 1 som:

$$Q_{Ptotal} = \int_{A_p} q dA_P = \int_{A_p} (-\underline{D} \cdot \underline{n}) \, dA_P \tag{A.5}$$

Dersom ladningen Q_{Ptotal} fra ligning A.5 innføres i uttrykket for den elektriske strømmen i ligning A.3 får man følgende uttrykk for strømmen I:

$$I = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_p} \underline{D} \cdot \underline{n} dA_p = \frac{dQ_{Ptotal}}{dt} \tag{A.6}$$

Dersom vi går gjennom samme prosedyre for den høyre elektroden i figur A.1, finner vi at [36]:

$$I = -\frac{dQ_{Gtotal}}{dt} \tag{A.7}$$

I denne oppgaven antas det at tykkelsen på elektrodene er så liten at den kan neglisjeres.

Vedlegg B

Detaljresultater: ABAQUS-sammenligning

Her er simulerte resultater fra FEMP sammenlignet med resultater fra ABAQUS og resultater fra doktoravhandlingen til N.Guo [10], som er mottatt av N.Guo på en datafil [8]. Det er regnet ut resonansfrekvenser for en rekke sylindre/skiver av materialet PZT5A, for å vise at FEMP og ABAQUS gir sammenfallende resultater for simuleringer over hele D/T-området, til tross for at det er store avvik i forhold til de simulerte resultatene til N.Guo. Det er benyttet 8-noders isoparametriske elementer med 3x3 gauss-integrasjonspunkter. For materialparametre, se f.eks. [62]. For sammenligningen fremstillt grafisk for hele D/T-spekteret, se figur 4.6. Det er meget bra overensstemmelse mellom resultatene fra FEMP og ABAQUS. Relativavviket i ppm mellom resultatene fra ABAQUS og resultatene fra FEMP, og relativavviket i % mellom resultatene fra FEMP og resultatene fra Guo[8] er også tatt med i tabellene.

Det er langt dårligere overensstemmelse med resultatene i doktoravhandlingen til N. Guo [10] som også er med i tabellene. En del av årsaken til de store avvikene her, er forskyvning av moder. Selv om verdiene fra Guo ofte er lavere enn verdiene fra FEMP, er ofte verdiene fra FEMP lavere når man ser på moder som har omtrent samme størrelse for den modale konstanten.

Her følger et eksempel på en enkel ABAQUS input-fil. Ved hjelp av denne input-filen finner ABAQUS resonansfrekvensene for en skive av materialet PZT5A med tykkelse 2.03mm og diameter 40.1mm. Det blir funnet både symmetriske og antisymmetriske moder. Disse simuleringsparametrene tilsvarer de gjort i doktoravhandlingen til N. Guo [10].

```
*HEADING
Piezoelectric test-problem
*NODE
1,0.,0.
97,  0.02005, 0.
401, 0.,  0.00203
497,  0.02005,  0.00203
*NGEN, NSET=IN
1, 97
*NGEN, NSET=OUT
401, 497
*NFILL, NSET=ALLN
IN, OUT, 4, 100
*ELEMENT,TYPE=CAX8E
1, 1,3,203,201,2,103,202,101
*ELGEN, ELSET=ALL
```

```
1,48,2,1,2,200,100
*SOLID SECTION, MATERIAL=PZT, ELSET=ALL
*MATERIAL, NAME=PZT
*ELASTIC, TYPE=ORTHO
1.2100e+11,7.5200e+10,1.1100e+11,7.5400e+10,7.5200e+10,1.2100e+11,2.1100e+10,
2.2600e+10,2.1100e+10
*PIEZOELECTRIC, TYPE=S
0.,0.,0.,1.2300e+01,0.,0.,-5.4000e+00,1.5800e+01
-5.4000e+00,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.
0.,1.2300e+01
*DIELECTRIC, TYPE=ANISOTROPIC
8.11026e-09,0.,7.34882e-09,0.,0.,8.11026e-09
*DENSITY
7.75e+03
*NSET, NSET=ELECTROD,GEN
1,97
*NSET, NSET=BOTTOM,GEN
401,497
*BOUNDARY
BOTTOM,9
ELECTROD,9
*STEP, PERT
*FREQUENCY
40,,2.0E4,,50
*EL PRINT, FREQUENCY=0
*NODE PRINT, FREQUENCY=0
*MODAL FILE
*ENDSTEP
```

Tabell B.1: Sammenligning av resonansfrekvenser fra simuleringer med ABAQUS og FEMP, og resultater fra [8] for materialet PZT5A for en skive med tykkelse 10.05 mm og diameter 15.00 mm modellert med 8 elementer i tykkelsesretningen og 4 elementer i radiell retning. Dette gir et D/T-forhold lik 1.5.

Mode nr.	FEMP [kHz]	ABAQUS [kHz]	Guo [kHz]	Rel. avvik ABAQUS i ppm	Rel. avvik Guo i %
1	104.916	104.916	104.832	-	0.1 %
2	146.157	146.157	145.918	-	0.2 %
3	202.643	202.643	198.484	-	2.1 %
4	256.203	256.203	233.196	-	9.9 %
5	275.229	275.229	269.650	-	2.1 %
6	329.531	329.531	320.368	-	2.9 %
7	344.786	344.786	342.652	-	0.6 %
8	403.617	403.617	366.022	-	10.3 %
9	426.128	426.128	-	-	-
10	457.244	457.244	-	-	-

Tabell B.2: Sammenligning av resonansfrekvenser fra simuleringer med ABAQUS og FEMP, og resultater fra [8] for materialet PZT5A for en skive med tykkelse 10.00 mm og diameter 30.00 mm modellert med 2 elementer i tykkelsesretningen og 32 elementer i radiell retning. Dette gir et D/T-forhold lik 3.0.

Mode nr.	FEMP [kHz]	ABAQUS [kHz]	Guo [kHz]	Rel. avvik ABAQUS i ppm	Rel. avvik Guo i %
1	62.806	62.806	62.807	-	0.0 %
2	123.676	123.676	124.859	-	-0.9 %
3	136.757	136.757	136.000	-	0.6 %
4	174.490	174.490	166.440	-	4.8 %
5	197.992	197.992	188.512	-	5.0 %
6	215.550	215.550	214.789	-	0.4 %
7	229.936	229.936	224.125	-	2.6 %
8	265.442	265.442	236.583	-	12.2 %
9	287.242	287.242	277.442	-	3.5 %
10	294.723	294.723	296.616	-	-0.6 %
11	325.458	325.458	303.478	-	7.2 %
12	351.604	351.604	329.531	-	6.7 %
13	365.587	365.587	358.310	-	2.0 %
14	380.915	380.915	-	-	-
15	384.772	384.772	-	-	-
16	410.112	410.112	-	-	-
17	417.257	417.257	-	-	-

Tabell B.3: Sammenligning av resonansfrekvenser fra simuleringer med ABAQUS og FEMP, og resultater fra [8] for materialet PZT5A for en skive med tykkelse 2.01 mm og diameter 11.00 mm modellert med 2 elementer i tykkelsesretningen og 32 elementer i radiell retning. Dette gir et D/T-forhold lik 5.5.

Mode nr.	FEMP [kHz]	ABAQUS [kHz]	Guo [kHz]	Rel. avvik ABAQUS i ppm	Rel. avvik Guo i %
1	178.075	178.075	178.072	-	0.0 %
2	429.215	429.215	429.098	-	0.0 %
3	591.962	591.962	589.503	-	0.4 %
4	653.813	653.813	659.830	-	-0.9 %
5	744.967	744.967	713.631	-	4.4 %
6	869.414	869.414	808.429	-	7.5 %
7	877.557	877.557	894.255	-	-1.9 %
8	948.550	948.550	910.188	-	4.2 %
9	1016.067	1016.070	965.639	-3.0 ppm	5.2 %
10	1043.737	1043.740	1026.603	-2.9 ppm	1.7 %
11	1115.984	1115.980	1058.757	3.6 ppm	5.4 %
12	1213.340	1213.340	1096.780	-	10.6 %
13	1221.384	1221.380	1172.184	3.3 ppm	4.2 %
14	1302.638	1302.640	1231.421	-1.5 ppm	5.8 %
15	1420.226	1420.230	1290.631	-2.8 ppm	10.0 %
16	1430.688	1430.690	1330.689	-1.4 ppm	7.5 %
17	1495.592	1495.590	1415.788	1.3 ppm	5.6 %
18	1622.523	1622.520	1469.742	1.8 ppm	10.4 %
19	1653.678	1653.680	1537.756	-1.2 ppm	7.5 %
20	1702.712	1702.710	-	1.2 ppm	-
21	1807.109	1807.110	-	-0.6 ppm	-
22	1850.314	1850.310	-	2.2 ppm	-
23	1957.601	1957.600	-	0.5 ppm	-
24	1966.764	1966.760	-	2.0 ppm	-
25	2026.052	2026.050	-	1.0 ppm	-

Tabell B.4: Sammenligning av resonansfrekvenser fra simuleringer med ABAQUS og FEMP, og resultater fra [8] for materialet PZT5A for en skive med tykkelse 2.03 mm og diameter 15.00 mm modellert med 2 elementer i tykkelsesretningen og 32 elementer i radiell retning. Dette gir et D/T-forhold lik 7.4.

Mode nr.	FEMP [kHz]	ABAQUS [kHz]	Guo [kHz]	Rel. avvik ABAQUS i ppm	Rel. avvik Guo i %
1	131.521	131.521	131.520	-	0.0 %
2	328.693	328.693	328.672	-	0.0 %
3	482.694	482.694	482.315	-	0.1 %
4	592.090	592.090	589.001	-	0.5 %
5	643.916	643.916	648.948	-	-0.8 %
6	704.965	704.965	683.574	-	3.1 %
7	802.026	802.026	750.942	-	6.8 %
8	853.729	853.729	822.580	-	3.8 %
9	881.725	881.725	878.490	-	0.4 %
10	902.422	902.422	890.697	-	1.3 %
11	953.244	953.244	923.336	-	3.2 %
12	1002.975	1002.970	955.619	5.0 ppm	5.0 %
13	1019.620	1019.620	990.119	-	3.0 %
14	1070.171	1070.170	1026.285	0.9 ppm	4.3 %
15	1132.196	1132.200	1063.489	-3.5 ppm	6.5 %
16	1156.285	1156.290	1089.348	-4.3 ppm	6.1 %
17	1204.568	1204.570	1131.524	-1.7 ppm	6.5 %
18	1271.047	1271.050	1190.755	-2.4 ppm	6.7 %
19	1308.146	1308.150	1231.092	-3.1 ppm	6.3 %
20	1347.499	1347.500	1251.716	-0.7 ppm	7.7 %
21	1423.385	1423.390	1301.332	-3.5 ppm	9.4 %
22	1457.799	1457.800	1375.720	-0.7 ppm	6.0 %
23	1493.027	1493.030	1409.179	-2.0 ppm	6.0 %
24	1580.738	1580.740	1428.189	-1.3 ppm	10.7 %
25	1613.703	1613.700	1487.402	1.9 ppm	8.5 %
26	1639.373	1639.370	1567.233	1.8 ppm	4.6 %
27	1718.404	1718.400	-	2.3 ppm	-
28	1774.724	1774.720	-	2.3 ppm	-
29	1810.370	1810.370	-	-	-
30	1844.004	1844.000	-	2.2 ppm	-
31	1916.083	1916.080	-	1.6 ppm	-
32	1945.891	1945.890	-	0.5 ppm	-
33	2007.011	2007.010	-	0.5 ppm	-

Tabell B.5: Sammenligning av resonansfrekvenser fra simuleringer med ABAQUS og FEMP, og resultater fra [8] for materialet PZT5A for en skive med tykkelse 2.02 mm og diameter 19.96 mm modellert med 2 elementer i tykkelsesretningen og 32 elementer i radiell retning. Dette gir et D/T-forhold lik 9.9.

Mode nr.	FEMP [kHz]	ABAQUS [kHz]	Guo [kHz]	Rel. avvik ABAQUS i ppm	Rel. avvik Guo i %
1	99.210	99.210	99.210	-	0.0 %
2	252.407	252.407	252.401	-	0.0 %
3	384.833	384.833	384.788	-	0.0 %
4	493.634	493.634	493.171	-	0.1 %
5	577.935	577.935	575.182	-	0.5 %
6	635.395	635.395	634.890	-	0.1 %
7	668.191	668.191	663.256	-	0.7 %
8	733.609	733.609	703.443	-	4.3 %
9	808.625	808.625	755.932	-	7.0 %
10	855.287	855.287	810.195	-	5.6 %
11	866.529	866.529	864.795	-	0.2 %
12	885.530	885.530	880.632	-	0.6 %
13	895.757	895.757	891.935	-	0.4 %
14	941.947	941.947	915.104	-	2.9 %
15	979.724	979.724	938.771	-	4.4 %
16	987.411	987.411	964.677	-	2.4 %
17	1023.004	1023.000	987.990	3.9 ppm	3.5 %
18	1069.823	1069.820	1014.352	2.8 ppm	5.5 %
19	1084.152	1084.150	1042.327	1.8 ppm	4.0 %
20	1117.191	1117.190	1057.448	0.9 ppm	5.6 %
21	1165.608	1165.610	1091.847	-1.7 ppm	6.8 %
22	1194.609	1194.610	1136.122	-0.8 ppm	5.1 %
23	1222.372	1222.370	1157.014	1.6 ppm	5.6 %
24	1269.339	1269.340	1173.803	-0.8 ppm	8.1 %
25	1303.652	1303.650	1220.696	1.5 ppm	6.8 %
26	1335.484	1335.480	1266.004	3.0 ppm	5.5 %
27	1378.597	1378.600	1284.191	-2.2 ppm	7.4 %
28	1414.608	1414.610	1305.879	-1.4 ppm	8.3 %
29	1449.897	1449.900	1361.399	-2.1 ppm	6.5 %
30	1486.951	1486.950	1399.364	0.7 ppm	6.3 %
31	1536.032	1536.030	1419.762	1.3 ppm	8.2 %
32	1561.765	1561.760	1447.810	3.2 ppm	7.9 %
33	1591.306	1591.310	1508.996	-2.5 ppm	5.5 %
34	1663.885	1663.890	1539.417	-3.0 ppm	8.1 %
35	1674.333	1674.330	1555.018	1.8 ppm	7.7 %
36	1697.486	1697.490	1597.511	-2.4 ppm	6.3 %
37	1765.184	1765.180	-	2.3 ppm	-
38	1793.474	1793.470	-	2.2 ppm	-
39	1830.225	1830.230	-	-2.7 ppm	-
40	1857.718	1857.720	-	-1.1 ppm	-
41	1901.721	1901.720	-	0.5 ppm	-
42	1938.000	1938.000	-	-	-
43	1985.660	1985.660	-	-	-
44	2002.657	2002.660	-	-1.5 ppm	-
45	2010.165	2010.170	-	-2.5 ppm	-

Tabell B.6: Sammenligning av resonansfrekvenser fra simuleringer med ABAQUS og FEMP, og resultater fra [8] for materialet PZT5A for en skive med tykkelse 2.03 mm og diameter 25.00 mm modellert med 2 elementer i tykkelsesretningen og 32 elementer i radiell retning. Dette gir et D/T-forhold lik 12.3.

Mode nr.	FEMP [kHz]	ABAQUS [kHz]	Guo [kHz]	Rel. avvik ABAQUS i ppm	Rel. avvik Guo i %
1	79.343	79.343	79.343	-	0.0 %
2	203.400	203.400	203.397	-	0.0 %
3	315.120	315.120	315.106	-	0.0 %
4	414.320	414.320	414.239	-	0.0 %
5	497.653	497.653	497.110	-	0.1 %
6	565.541	565.541	563.128	-	0.4 %
7	619.634	619.634	615.280	-	0.7 %
8	648.452	648.452	649.941	-	-0.2 %
9	691.293	691.293	673.186	-	2.7 %
10	748.264	748.264	712.521	-	5.0 %
11	809.119	809.119	755.004	-	7.2 %
12	849.268	849.268	798.577	-	6.3 %
13	857.965	857.965	842.927	-	1.8 %
14	867.188	867.188	874.839	-	-0.9 %
15	875.106	875.106	880.442	-	-0.6 %
16	894.561	894.561	887.487	-	0.8 %
17	927.209	927.209	896.820	-	3.4 %
18	953.648	953.648	925.150	-	3.1 %
19	971.053	971.053	943.529	-	2.9 %
20	992.319	992.319	964.258	-	2.9 %
21	1023.607	1023.610	980.283	-2.9 ppm	4.4 %
22	1041.351	1041.350	1003.967	1.0 ppm	3.7 %
23	1063.629	1063.630	1022.522	-0.9 ppm	4.0 %
24	1097.195	1097.190	1035.135	4.6 ppm	6.0 %
25	1124.067	1124.070	1065.568	-2.7 ppm	5.5 %
26	1145.732	1145.730	1097.534	1.7 ppm	4.4 %
27	1175.671	1175.670	1107.897	0.9 ppm	6.1 %
28	1207.011	1207.010	1130.326	0.8 ppm	6.8 %
29	1235.979	1235.980	1167.011	-0.8 ppm	5.9 %
30	1258.599	1258.600	1192.902	-0.8 ppm	5.5 %
31	1291.684	1291.680	1211.006	3.1 ppm	6.7 %
32	1326.826	1326.830	1238.176	-3.0 ppm	7.2 %
33	1345.500	1345.500	1271.377	-	5.8 %
34	1380.770	1380.770	1301.149	-	6.1 %
35	1413.700	1413.700	1319.561	-	7.1 %
36	1435.342	1435.340	1353.782	1.4 ppm	6.0 %
37	1475.055	1475.060	1379.846	-3.4 ppm	6.9 %
38	1498.847	1498.850	1418.141	-2.0 ppm	5.7 %
39	1525.891	1525.890	1432.113	0.7 ppm	6.5 %
40	1564.262	1564.260	1472.586	1.3 ppm	6.2 %
41	1594.815	1594.820	1498.072	-3.1 ppm	6.5 %
42	1615.581	1615.580	1530.071	0.6 ppm	5.6 %
43	1643.918	1643.920	-	-1.2 ppm	-
44	1701.779	1701.780	-	-0.6 ppm	-
45	1704.371	1704.370	-	0.6 ppm	-

Tabell B.7: Sammenligning av resonansfrekvenser fra simuleringer med ABAQUS og FEMP, og resultater fra [8] for materialet PZT5A for en skive med tykkelse 2.03 mm og diameter 30.00 mm modellert med 2 elementer i tykkelsesretningen og 32 elementer i radiell retning. Dette gir et D/T-forhold lik 14.8.

Mode nr.	FEMP [kHz]	ABAQUS [kHz]	Guo [kHz]	Rel. avvik ABAQUS i ppm	Rel. avvik Guo i %
1	66.180	66.180	66.180	-	0.0 %
2	170.346	170.347	170.345	-5.9 ppm	0.0 %
3	266.105	266.105	266.098	-	0.0 %
4	354.615	354.615	354.585	-	0.0 %
5	433.517	433.517	433.382	-	0.0 %
6	501.153	501.153	500.527	-	0.1 %
7	558.184	558.184	555.994	-	0.4 %
8	606.541	606.541	601.706	-	0.8 %
9	639.155	639.155	638.276	-	0.1 %
10	666.774	666.774	659.081	-	1.2 %
11	711.070	711.070	685.996	-	3.7 %
12	759.984	759.984	720.437	-	5.5 %
13	811.248	811.248	756.007	-	7.3 %
14	848.421	848.421	792.286	-	7.1 %
15	853.955	853.955	829.203	-	3.0 %
16	863.294	863.294	866.204	-	-0.3 %
17	864.656	864.656	873.936	-	-1.1 %
18	876.395	876.395	879.609	-	-0.4 %
19	896.863	896.863	885.222	-	1.3 %
20	915.645	915.645	900.806	-	1.6 %
21	941.405	941.405	906.397	-	3.9 %
22	962.356	962.356	933.130	-	3.1 %
23	975.287	975.287	948.747	-	2.8 %
24	996.289	996.289	965.011	-	3.2 %
25	1018.233	1018.230	977.062	2.9 ppm	4.2 %
26	1031.256	1031.260	998.202	-3.9 ppm	3.3 %
27	1055.677	1055.680	1010.186	-2.8 ppm	4.5 %
28	1082.579	1082.580	1022.507	-0.9 ppm	5.9 %
29	1098.154	1098.150	1047.182	3.6 ppm	4.9 %
30	1119.026	1119.030	1069.807	-3.6 ppm	4.6 %
31	1148.028	1148.030	1080.973	-1.7 ppm	6.2 %
32	1171.772	1171.770	1099.734	1.7 ppm	6.6 %
33	1186.733	1186.730	1125.195	2.5 ppm	5.5 %
34	1215.575	1215.570	1147.297	4.1 ppm	6.0 %
35	1244.175	1244.170	1164.682	4.0 ppm	6.8 %
36	1260.711	1260.710	1183.882	0.8 ppm	6.5 %
37	1285.888	1285.890	1205.769	-1.6 ppm	6.6 %
38	1313.879	1313.880	1235.469	-0.8 ppm	6.3 %
39	1338.876	1338.880	1252.347	-3.0 ppm	6.9 %
40	1359.005	1359.010	1270.538	-3.7 ppm	7.0 %
41	1383.556	1383.560	1292.978	-2.9 ppm	7.0 %
42	1416.714	1416.710	1328.768	2.8 ppm	6.6 %
43	1432.860	1432.860	1341.966	-	6.8 %
44	1457.298	1457.300	1359.198	-1.4 ppm	7.2 %
45	1490.539	1490.540	1386.585	-0.7 ppm	7.5 %

Tabell B.8: Sammenligning av resonansfrekvenser fra simuleringer med ABAQUS og FEMP, og resultater fra [8] for materialet PZT5A for en skive med tykkelse 2.03 mm og diameter 35.00 mm modellert med 2 elementer i tykkelsesretningen og 48 elementer i radiell retning. Dette gir et D/T-forhold lik 17.2.

Mode nr.	FEMP [kHz]	ABAQUS [kHz]	Guo [kHz]	Rel. avvik ABAQUS i ppm	Rel. avvik Guo i %
1	56.757	56.757	56.757	-	0.0 %
2	146.443	146.443	146.443	-	0.0 %
3	229.856	229.856	229.852	-	0.0 %
4	308.669	308.669	308.657	-	0.0 %
5	381.461	381.461	381.422	-	0.0 %
6	446.682	446.682	446.522	-	0.0 %
7	503.538	503.538	502.915	-	0.1 %
8	552.657	552.657	550.746	-	0.3 %
9	595.558	595.558	591.278	-	0.7 %
10	630.193	630.193	625.718	-	0.7 %
11	651.879	651.879	650.507	-	0.2 %
12	685.187	685.187	668.564	-	2.5 %
13	725.402	725.402	696.111	-	4.2 %
14	767.959	767.959	726.124	-	5.8 %
15	812.173	812.173	756.740	-	7.3 %
16	847.929	847.929	787.898	-	7.6 %
17	852.084	852.084	819.607	-	4.0 %
18	855.947	855.948	851.702	-1.2 ppm	0.5 %
19	861.190	861.190	873.637	-	-1.4 %
20	869.209	869.209	876.671	-	-0.9 %
21	879.614	879.614	882.347	-	-0.3 %
22	897.950	897.950	885.691	-	1.4 %
23	904.809	904.809	889.179	-	1.8 %
24	934.075	934.075	908.799	-	2.8 %
25	951.599	951.599	916.922	-	3.8 %
26	965.041	965.041	939.485	-	2.7 %
27	979.733	979.733	953.255	-	2.8 %
28	1002.716	1002.720	965.388	-4.0 ppm	3.9 %
29	1006.657	1006.660	976.202	-3.0 ppm	3.1 %
30	1028.345	1028.350	995.516	-4.9 ppm	3.3 %
31	1054.085	1054.090	1001.357	-4.7 ppm	5.3 %
32	1063.506	1063.510	1015.752	-3.8 ppm	4.7 %
33	1081.403	1081.400	1035.933	2.8 ppm	4.4 %
34	1107.158	1107.160	1052.532	-1.8 ppm	5.2 %
35	1125.008	1125.010	1064.332	-1.8 ppm	5.7 %
36	1139.212	1139.210	1080.561	1.8 ppm	5.4 %
37	1162.832	1162.830	1099.304	1.7 ppm	5.8 %
38	1185.232	1185.230	1121.369	1.7 ppm	5.7 %
39	1202.800	1202.800	1133.830	-	6.1 %
40	1220.885	1220.880	1148.430	4.1 ppm	6.3 %
41	1244.546	1244.550	1169.816	-3.2 ppm	6.4 %
42	1269.566	1269.570	1197.309	-3.2 ppm	6.0 %
43	1281.177	1281.180	1205.521	-2.3 ppm	6.3 %
44	1304.415	1304.420	1219.668	-3.8 ppm	6.9 %
45	1335.858	1335.860	1247.801	-1.5 ppm	7.1 %

Tabell B.9: Sammenligning av resonansfrekvenser fra simuleringer med ABAQUS og FEMP, og resultater fra [8] for materialet PZT5A for en skive med tykkelse 2.03 mm og diameter 40.10 mm modellert med 2 elementer i tykkelsesretningen og 48 elementer i radiell retning. Dette gir et D/T-forhold lik 19.8.

Mode nr.	FEMP [kHz]	ABAQUS [kHz]	Guo [kHz]	Rel. avvik ABAQUS i ppm	Rel. avvik Guo i %
1	49.557	49.557	49.557	-	0.0 %
2	128.065	128.065	128.065	-	0.0 %
3	201.621	201.621	201.619	-	0.0 %
4	272.063	272.063	272.056	-	0.0 %
5	338.556	338.556	338.537	-	0.0 %
6	399.991	399.991	399.934	-	0.0 %
7	455.412	455.412	455.214	-	0.0 %
8	504.450	504.450	503.805	-	0.1 %
9	547.618	547.618	545.875	-	0.3 %
10	586.029	586.029	582.271	-	0.6 %
11	619.699	619.699	614.012	-	0.9 %
12	642.551	642.551	640.627	-	0.3 %
13	666.234	666.234	657.700	-	1.3 %
14	699.452	699.452	677.617	-	3.2 %
15	735.418	735.418	703.073	-	4.6 %
16	772.934	772.934	729.475	-	6.0 %
17	811.688	811.688	756.290	-	7.3 %
18	847.523	847.523	783.544	-	8.2 %
19	849.830	849.830	811.272	-	4.8 %
20	852.343	852.343	839.427	-	1.5 %
21	856.000	856.000	867.691	-	-1.3 %
22	864.453	864.454	873.200	-1.2 ppm	-1.0 %
23	873.084	873.084	876.390	-	-0.4 %
24	882.010	882.010	879.961	-	0.2 %
25	892.148	892.148	886.952	-	0.6 %
26	900.576	900.576	893.182	-	0.8 %
27	926.373	926.373	896.570	-	3.3 %
28	939.597	939.597	914.168	-	2.8 %
29	957.714	957.714	924.812	-	3.6 %
30	969.367	969.367	943.499	-	2.7 %
31	985.116	985.116	955.879	-	3.1 %
32	991.526	991.526	964.945	-	2.8 %
33	1008.495	1008.500	975.535	-5.0 ppm	3.4 %
34	1029.674	1029.670	991.830	3.9 ppm	3.8 %
35	1038.126	1038.130	995.239	-3.9 ppm	4.3 %
36	1053.371	1053.370	1009.922	0.9 ppm	4.3 %
37	1074.412	1074.410	1026.274	1.9 ppm	4.7 %
38	1089.471	1089.470	1040.161	0.9 ppm	4.7 %
39	1103.361	1103.360	1051.081	0.9 ppm	5.0 %
40	1121.291	1121.290	1064.430	0.9 ppm	5.3 %
41	1140.066	1140.070	1081.227	-3.5 ppm	5.4 %
42	1158.559	1158.560	1101.571	-0.9 ppm	5.2 %
43	1170.165	1170.170	1108.335	-4.3 ppm	5.6 %
44	1190.651	1190.650	1122.366	0.8 ppm	6.1 %
45	1215.666	1215.670	1145.074	-3.3 ppm	6.2 %

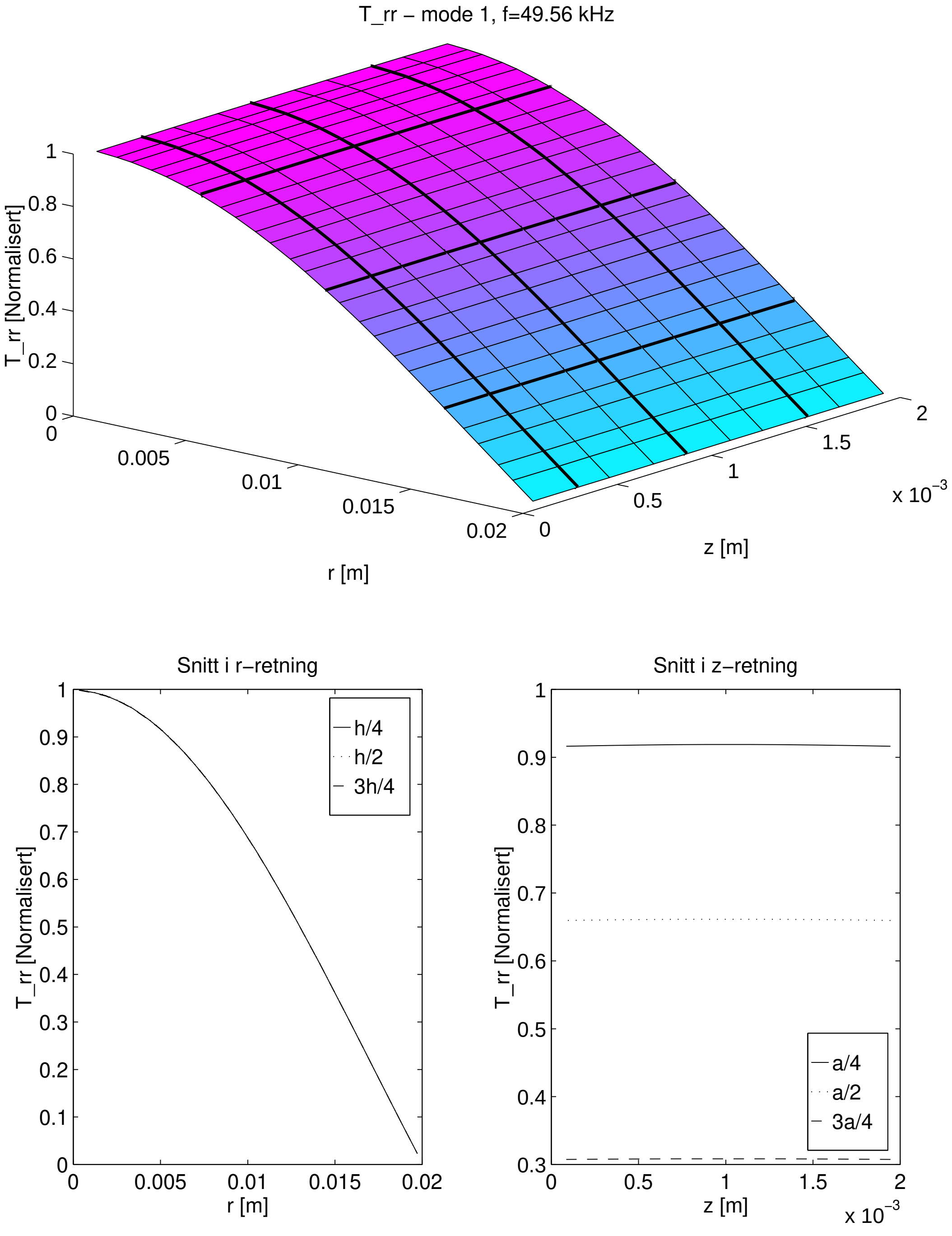
Vedlegg C

Detaljresultater: mekanisk spenningsfordeling

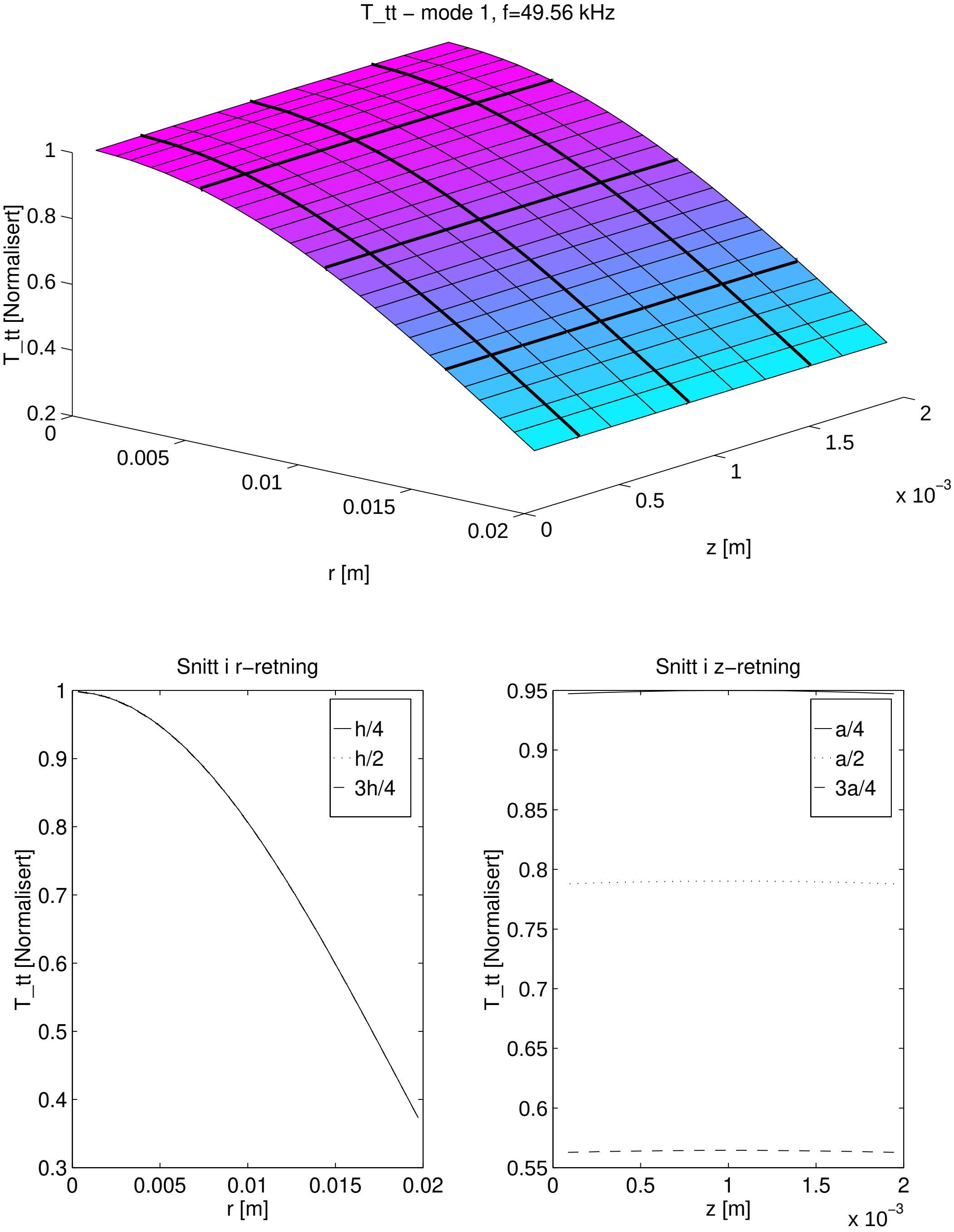
Her er det tatt med en del figurer som viser den mekaniske spenningsvariasjonen i forskjellige piezoelektriske skiver. Dette er et supplement til figurene i seksjon 4.8. Figurene i denne seksjonen viser spenningsfordelingen i to forskjellige elementer (et med D/T=20 og et med D/T=2) ved hjelp av 3D-plott. For skiven med D/T=20 blir det benyttet 13 elementer i radiell retning og 5 elementer i tykkelsesretningen i analysen. For skiven med D/T=2 blir det benyttet en elementoppdeling på 7x7 elementer.

I figurene er hver av de 4-spenningskomponentene T_{rr}, $T_{\theta\theta}$, T_{zz} og T_{rz} som kan være forskjellig fra null i det aksesymmetriske tilfellet fremstilt grafisk for mode nr. 1 og 3 for skiven med D/T=20 og for den laveste moden for skiven med D/T=2. Øverst i hver av disse figurene er variasjonen i den aktuelle spenningskomponenten i rz-planet vist i et 3D-plott. Nederst er spenningskomponenten plottet for forskjellige snitt gjennom r- og z-planet (for $r \approx a/4$, $r \approx a/2$, $r \approx 3a/4$, $z \approx h/4$, $z \approx h/2$ og $z \approx 3h/4$. Disse snittene er merket av som tykkere linjer i 3D-plottene.

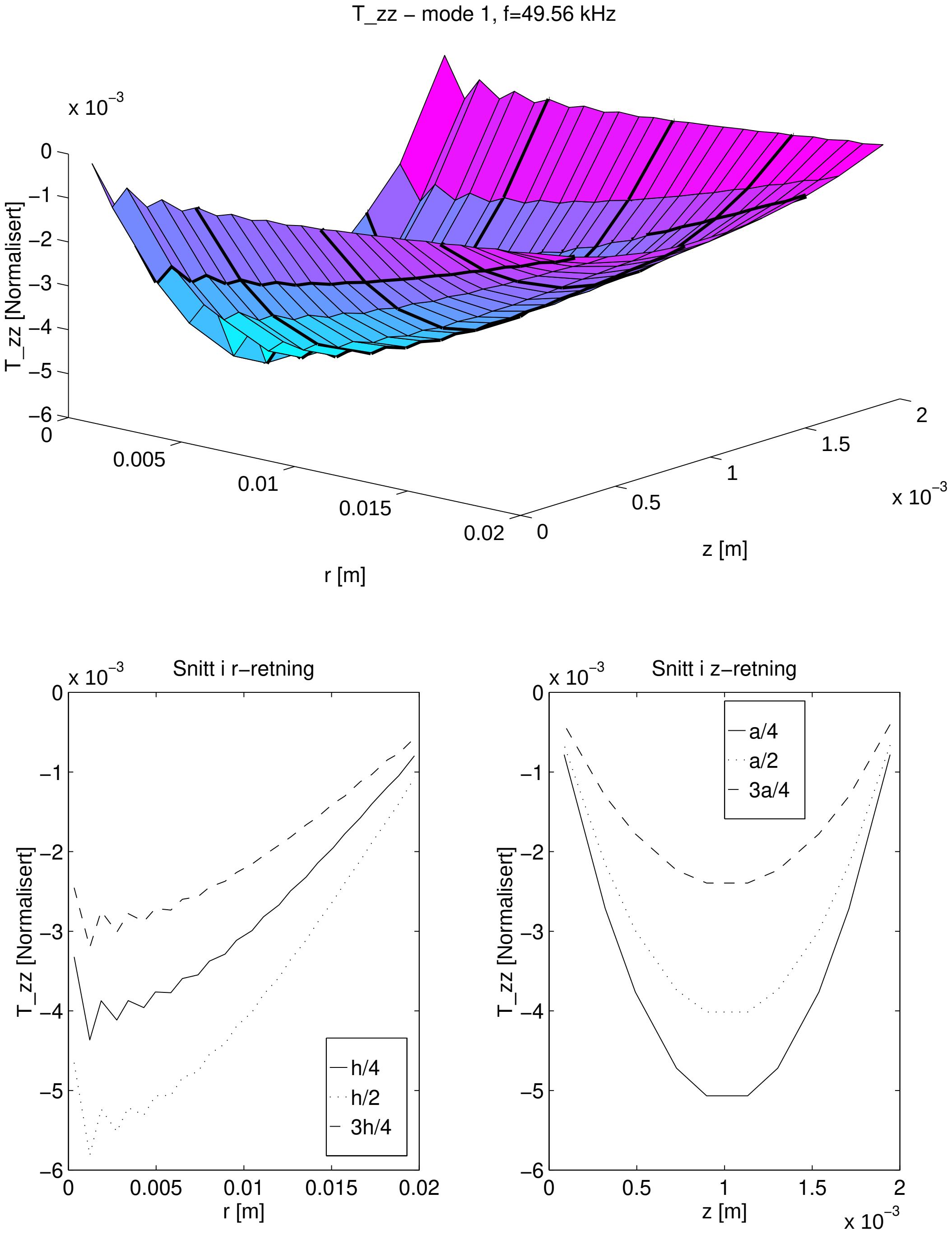
Alle plottene er *normalisert i forhold til den maksimale spenningskomponenten for den aktuelle moden*, slik at dette kan brukes til å se på forholdet mellom de ulike spenningskomponentene.



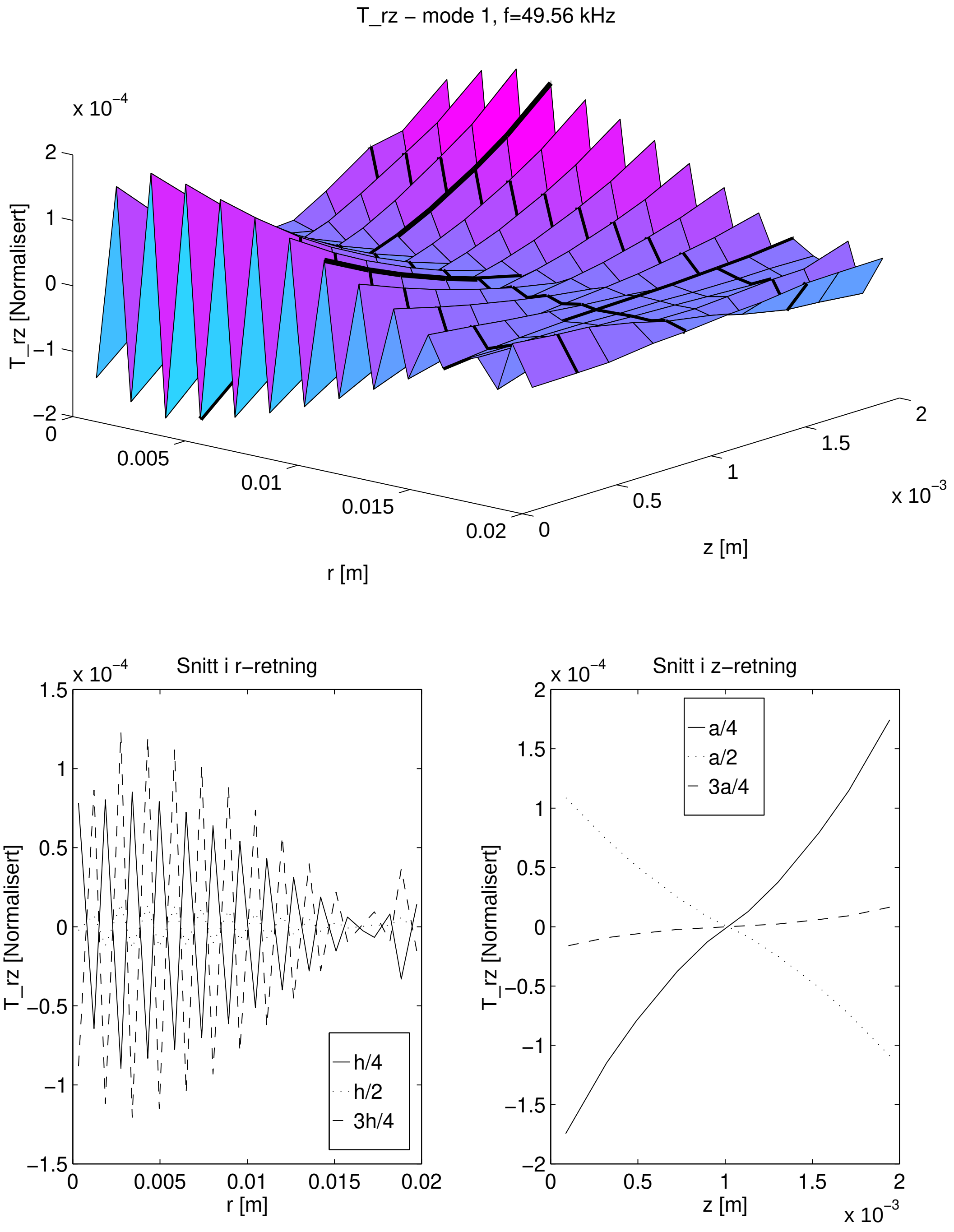
Figur C.1: Simulering av T_{rr} for den 1. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r.



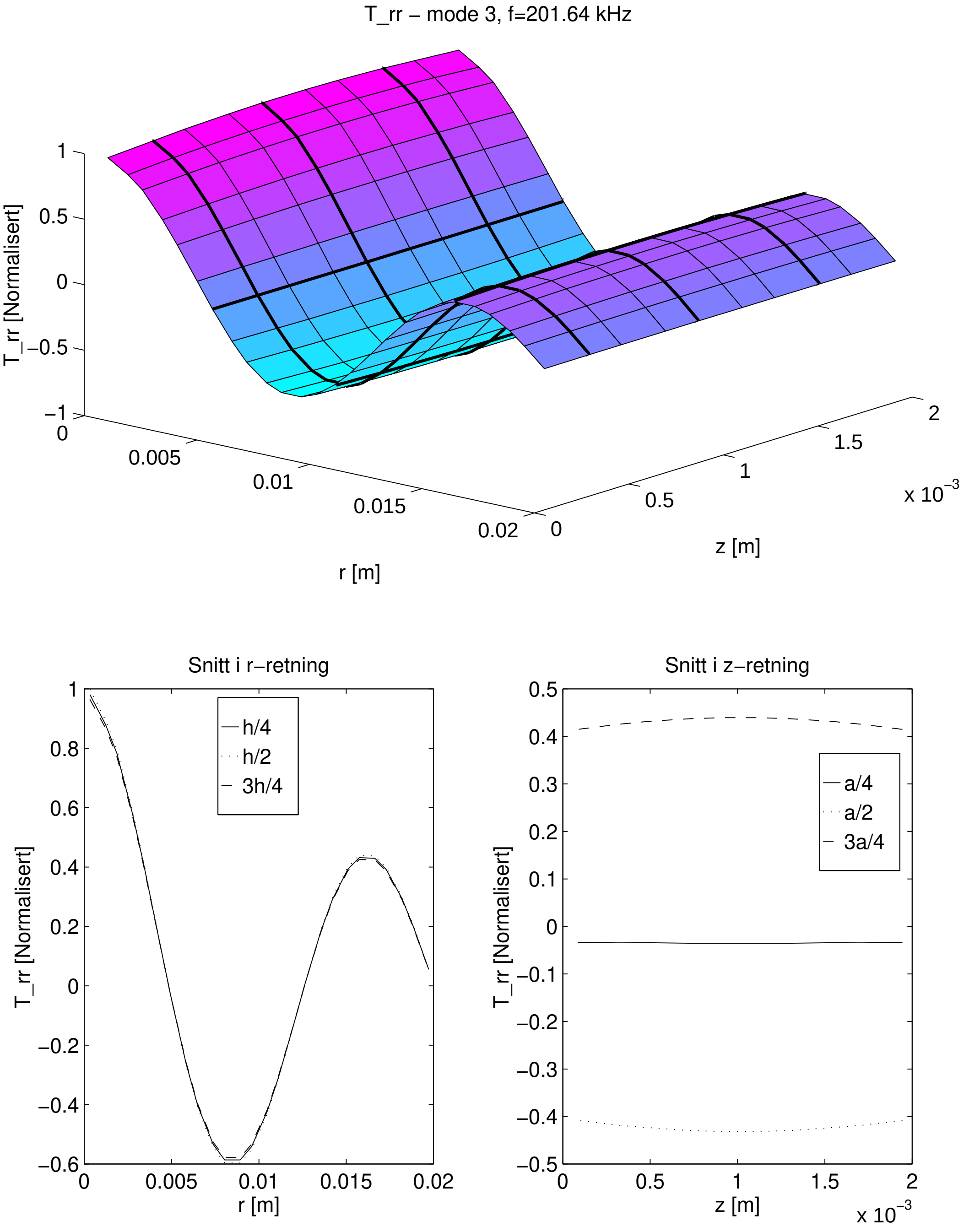
Figur C.2: Simulering av $T_{\theta\theta}$ (T_tt i figur) for den 1. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r.



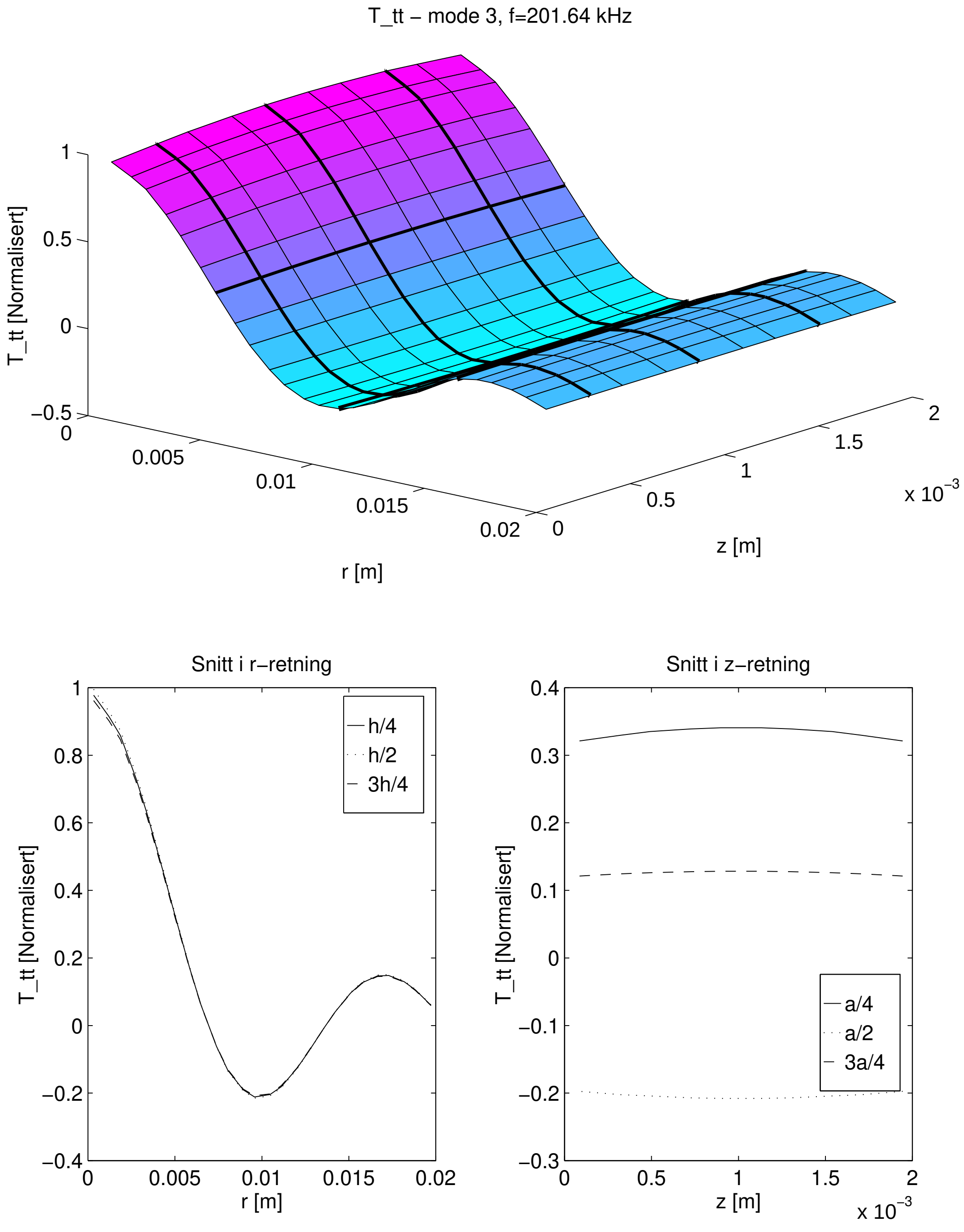
Figur C.3: Simulering av T_{zz} for den 1. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r.



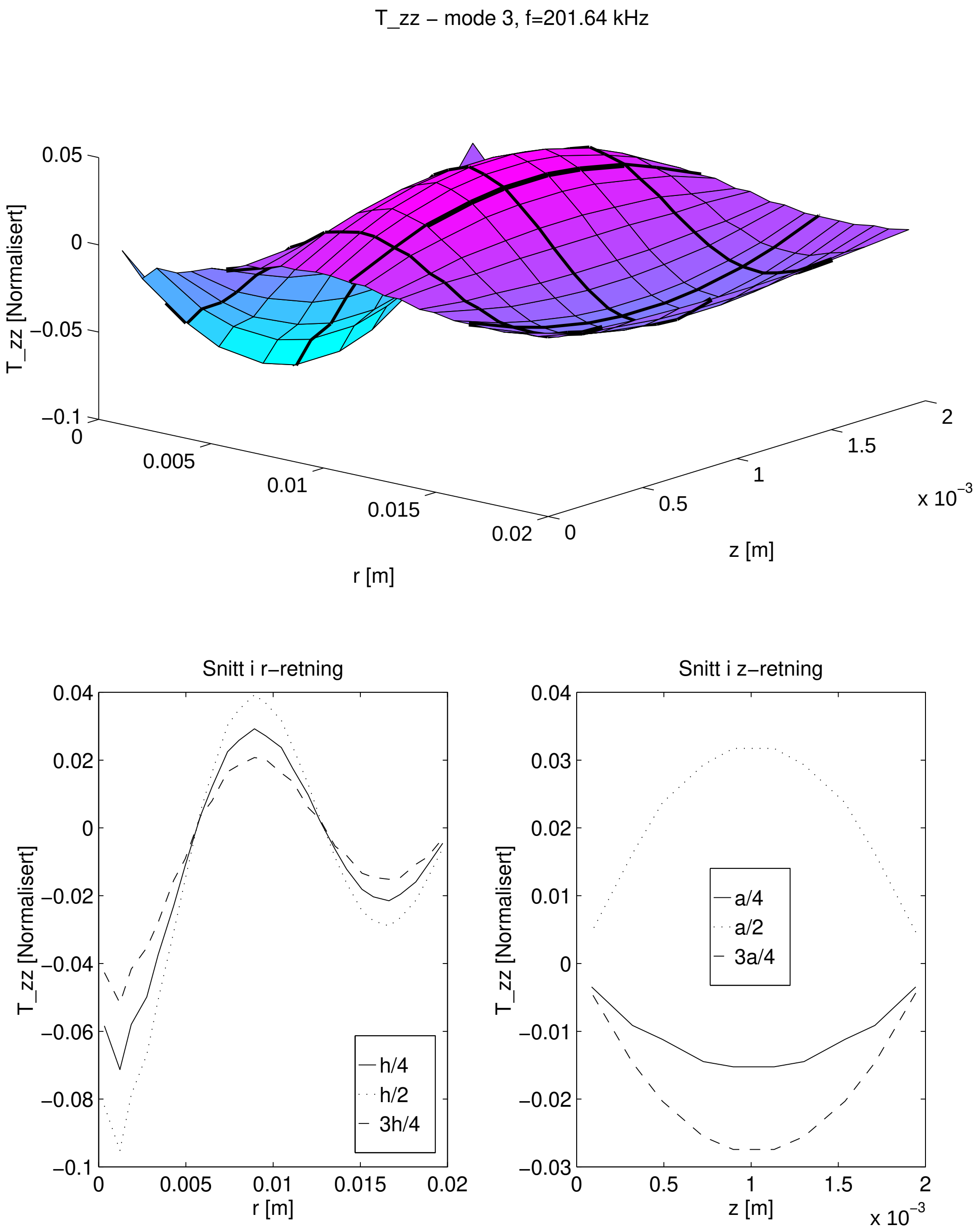
Figur C.4: Simulering av T_{rz} for den 1. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r. Man ser at grensebetingelsene tilsynelatende ikke er oppfylt, men verdien for spenningen er så lav i forhold til de andre spenningskomponentene i hele elementet, at grensebetingelsene allikevel må sees på som oppfylt.



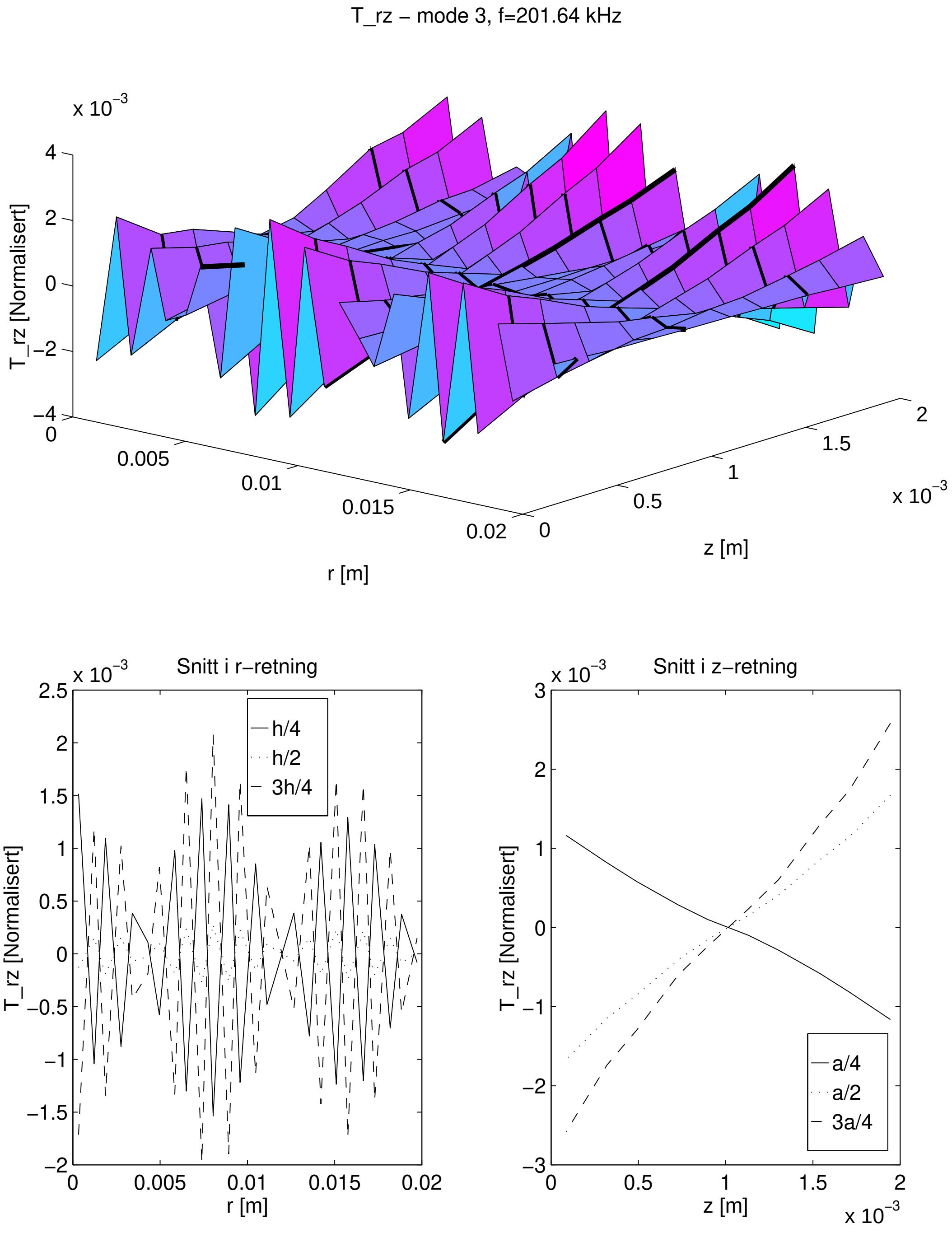
Figur C.5: Simulering av T_{rr} for den 3. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r.



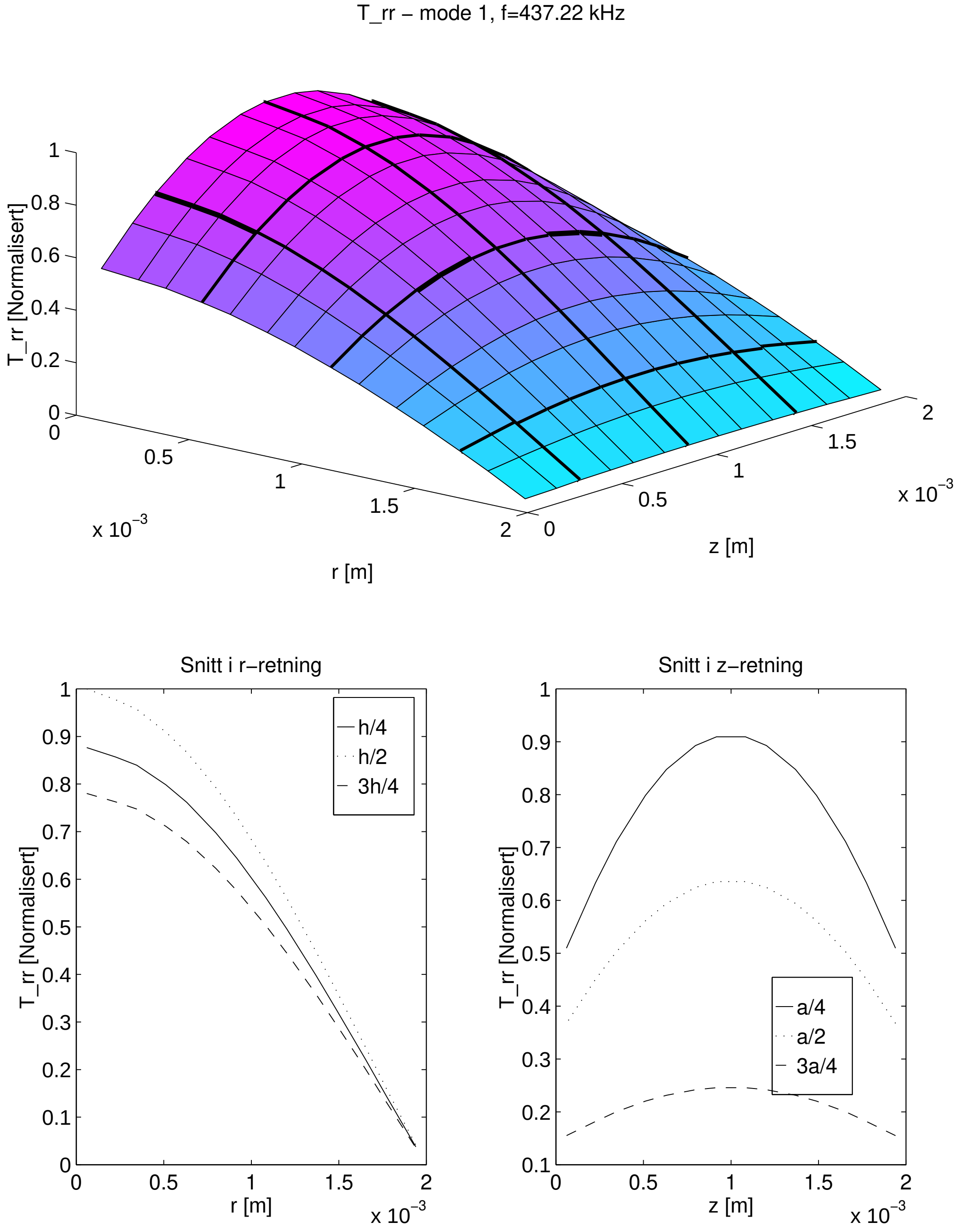
Figur C.6: Simulering av $T_{\theta\theta}$ (T_tt i figur) for den 3. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r.



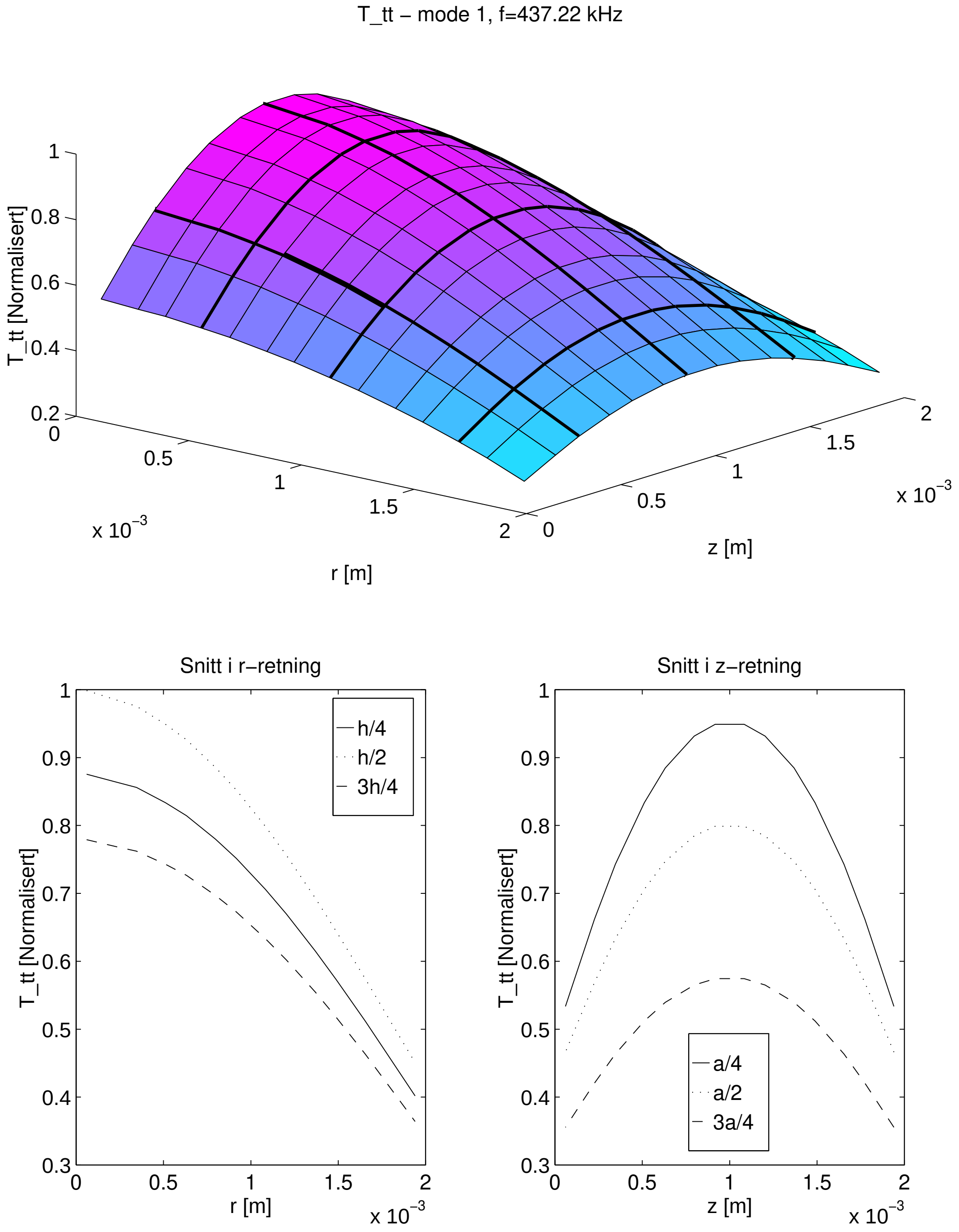
Figur C.7: Simulering av T_{zz} for den 3. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r.



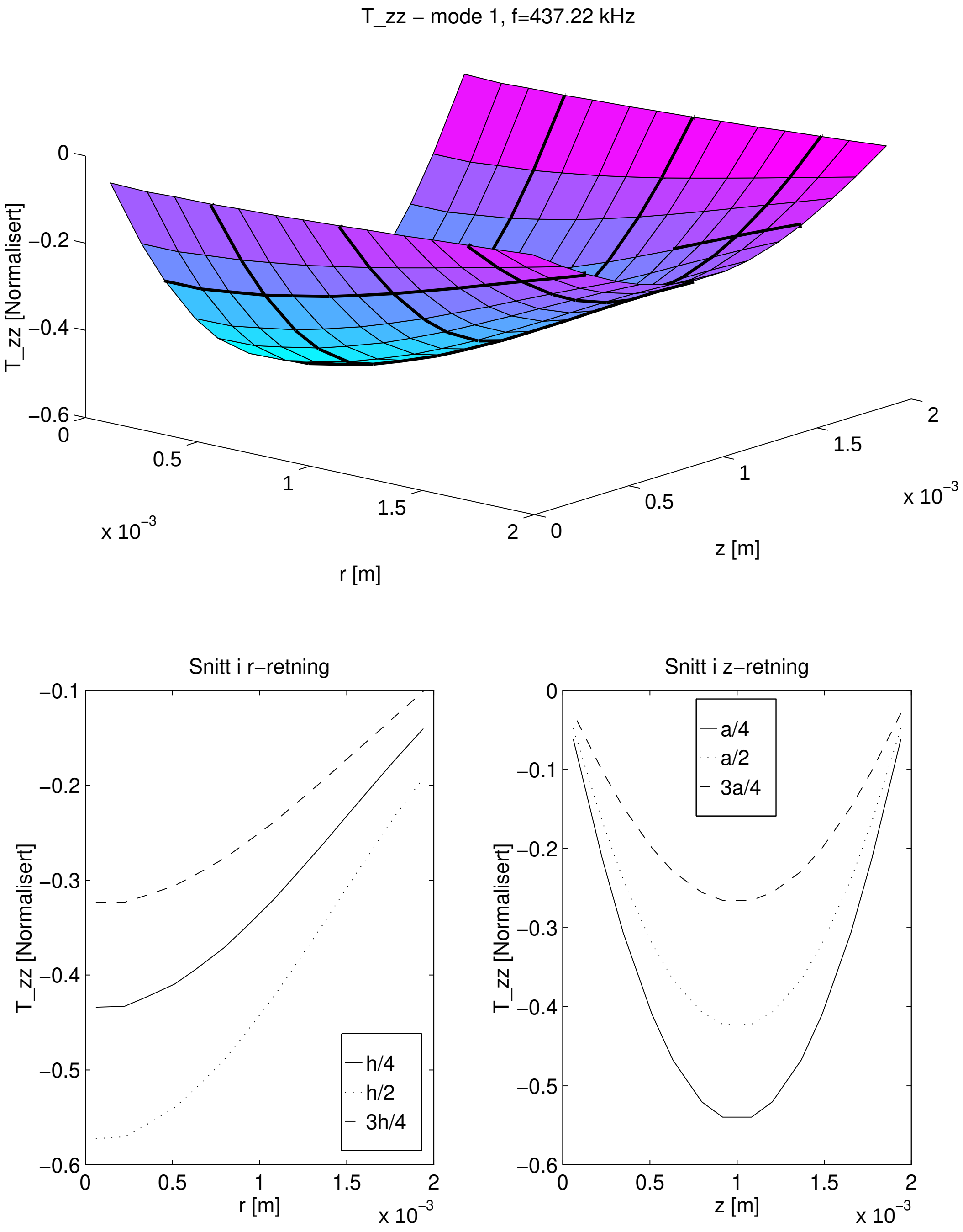
Figur C.8: Simulering av T_{rz} for den 3. moden i et element med D/T=20 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r. Man ser at grensebetingelsene tilsynelatende ikke er oppfylt, men verdien for spenningen er så lav i forhold til de andre spenningskomponentene i hele elementet, at grensebetingelsene allikevel må sees på som oppfylt.



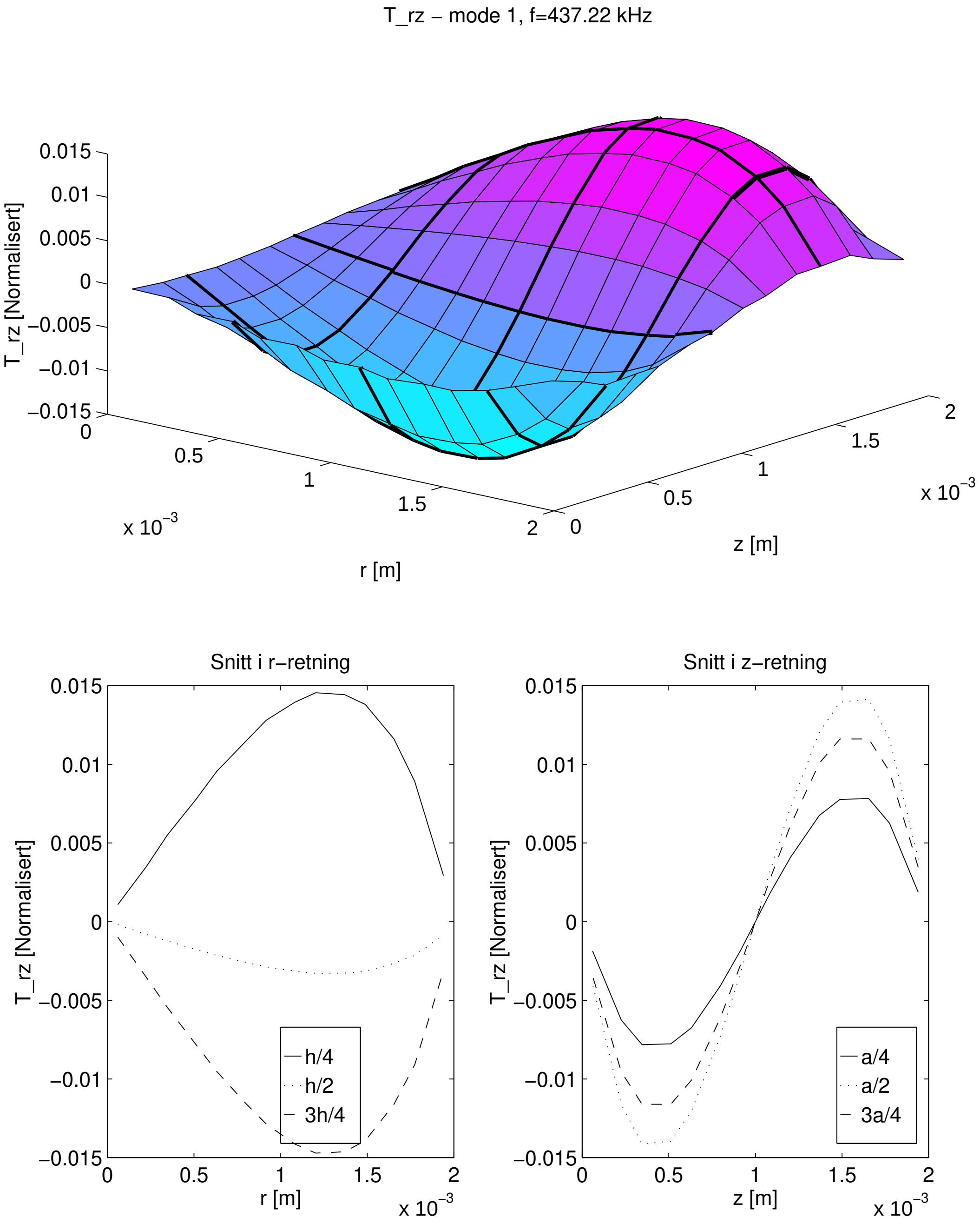
Figur C.9: Simulering av T_{rr} for den 1. moden i et element med D/T=2 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r.



Figur C.10: Simulering av $T_{\theta\theta}$ (T_tt i figur) for den 1. moden i et element med D/T=2 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r.



Figur C.11: Simulering av T_{zz} for den 1. moden i et element med D/T=2 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r.



Figur C.12: Simulering av T_{rz} for den 1. moden i et element med D/T=2 av materialet PZT5A. Den øverste figuren viser et 3D-plott av spenningen i rz-planet for halve skiven. De to nederste figurene viser snitt gjennom 3D-plottet for forskjellige verdier av z og r. Her ser man at grensebetingelsene er oppfylt også for rz-komponenten av spenningen.

Del II

FEMP - program for endelig element analyse

Vedlegg D

Enkel bruksanvisning for MATLAB-FEMP

Her følger en svært enkel bruksanvisning for FEMP. Bruksanvisningen tar seg utelukkende av de helt grunnleggende funksjonene i FEMP. Nedenfor blir det først forklart litt om hvordan programmet virker, og deretter gått gjennom - steg for steg - hvordan man kan løse et enkelt testproblem i FEMP.

Når FEMP startes, møtes man av 3 vinduer:

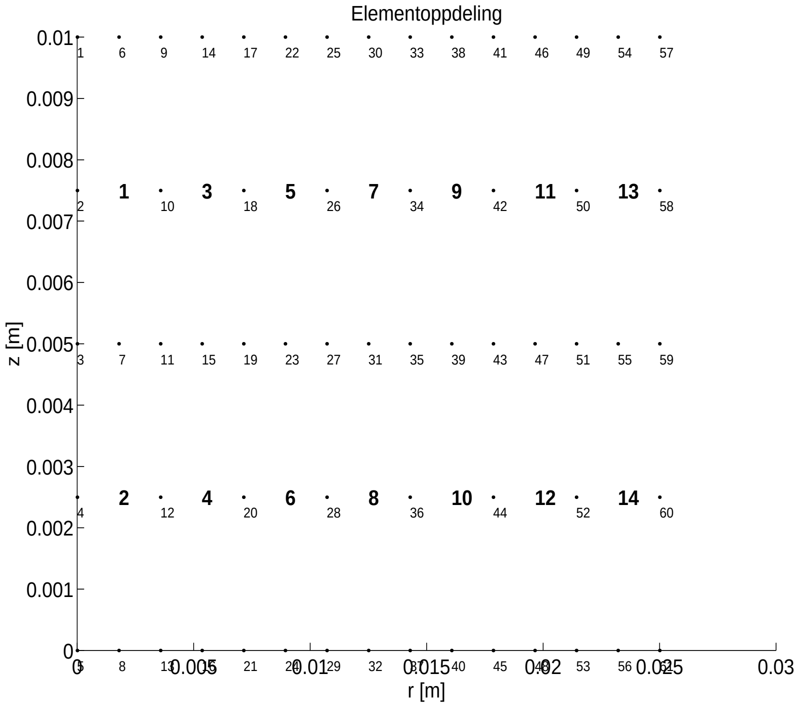
- Et lite grafikk-vindu med teksten FEMP. Dette vinduet har en meny øverst, som alle funksjonene i programmet blir kalt opp fra.
- Et stort tomt grafikk-vindu hvor resultatene av analysene blir vist.
- Et tekstvindu der brukeren gir inn informasjon.

I menyene i det lille grafikk-vinduet kan brukeren definere problemet, og velge hvilke analyser som skal foretas. Noen av disse menyene er valgbare, andre ikke, avhengig av hvilken modus man er i. En kort beskrivelse av de ulike menyene :

- **FIL :** Denne menyen er stort sett knyttet til funksjoner som har med filbehandling å gjøre. I tillegg kan man her velge å forandre problemdefinisjonen etter en simulering, og å starte på nytt med start-problemet.
- **PROBLEMDEF :** I denne menyen definerer man problemet før simuleringen foretas.
- **SIMULER :** Denne menyen benyttes utelukkende til å starte en simulering. Etter simuleringen blir menyene **SIMULER** og **PROBLEMDEF** gjort uvalgbare. For å forandre på problemdefinisjonen må man da velge menypunktet "Fil - Forandre problemdef.".
- **Funksjoner** Denne menyen benyttes til å utføre de ulike analysetypene, som f.eks. plott av svingeformer, elektriske responsfunksjoner, o.l. Menyen blir først valgbar etter at det er utført en simulering.
- **FIGUR :** Denne menyen benyttes til å velge hvilken figur man vil plotte i, farge for plott, linjetype, tekst på akser, osv. Menyen blir først valgbar etter at det er utført en simulering.
- **SPESIELT :** Denne menyen inneholder en del spesielle funksjoner som har med kommunikasjon med ABAQUS og F90-versjonen av FEMP å gjøre. Man må velge "Fil - Spesiell Meny" for å kunne bruke disse funksjonene.

D.1 Et enkelt testproblem

Vi er interessert i å finne resonansfrekvenser for en sirkulær skive med diameter 50mm, og tykkelse 10mm, av materialet PZT5A, som altså har et D/T-forhold lik 5. Vi er kun interessert i de laveste resonansfrekvensene. I tillegg er vi interessert i å se på svingeformen for de ulike modene, og impedans/admittans-plott for skiven.



Figur D.1: Elementoppdelingen for det enkle testproblemet som er beskrevet i teksten.

D.1.1 Problemdefinisjon

Når problemet blir definert, er det utelukkende menyen "Problemdef" som blir benyttet. Vi må gjøre følgende skritt for å definere problemet beskrevet ovenfor :

- Definer tykkelsen på skiven ved å velge meny-punktet "Problemdef - Dimensjoner - Hjorne 1 (z koord, t.)", og skrive inn tykkelsen på elementet (=10e-3) i tekstvinduet.
- Definer diameteren på skiven ved å velge meny-punktet "Problemdef - Dimensjoner - Hjorne 2 (r koord, d/2,w.)", og skrive inn radiusen på elementet (=25e-3) i tekstvinduet.
- For best mulig nøyaktighet i beregningene, velg 8-noders aksesymmetriske elementer ved å velge meny-punktet "Problemdef - Elementtype - 8 noders aksesymmetrisk".
- Det ideelle antall gaussintegrasjonspunkter for dette elementer er 3 i hver koordinatretning. For å bestemme dette, velg meny-punktet "Problemdef - Integrasjonspkt.", og skriv 3.
- Materialet PZT5A er sannsynligvis allerede lagret på fil under navnet "PZT5A.MTA", men vi kan allikevel definere materialet på nytt her. Velg menypunktet "Problemdef - Materiale - Definer nytt", og skriv inn materialkonstanter og tetthet som det blir spurt om i tekstvinduet. Til slutt blir det spurt om filnavn for lagring av materialet. Velg for eksempel "TMP.MTA". For å fortelle FEMP at det er dette materialet du vil bruke i simuleringen, velg meny-punktet "Problemdef - Materiale - Hent fra fil - Materiale 1", og klikk på materialet "TMP.MTA" som du lagret ovenfor.
- For å benytte den vanligste tapsmodellen, som bruker en strukturell dempningskraft for å regne tapene, velg menypunktet "Problemdef - Definer tap", og skriv 0 i tekstvinduet. Velg f.eks. 75 for Qm og 0.02 for den elektriske tapsvinkelen.
- Vi velger ingen mekaniske og elektriske grensebetingelser i menypunktene "Problemdef - Elektriske grensebetingelser" og "Problemdef - Mekaniske grensebetingelser". Da vil FEMP automatisk plassere elektrodene på z=10mm og z=0mm, og ingen nodeforskyvninger blir automatisk satt til null.

- Pass på at det står "Resonansfrekvenser" og ikke "Antiresonansfrekvenser" på tredje nederste plass i menyen "Problemdef", slik at det blir regnet ut resonansfrekvenser for problemet.
- Det viktigste punktet å bestemme i forbindelse med problemdefinisjonen, er elementoppdelingen. Elementoppdelingen avgjør hvor nøyaktig løsningen blir. Det kan være lurt å først simulere med en dårlig elemenoppdeling for å se hvilket frekvensområde som er interessant. Et annet alternativ er å benytte menypunktet "Problemdef - Elementoppdeling - Dynamisk", og å gi inn den maksimale frekvensen man ønsker regnet ut nøyaktig. Kravet til nøyaktighet angis ut fra antall elementer pr. bølgelengde i hver koordinatretning. Velg en maksimal frekvens på 200 kHz (skriv 200000), med antall elementer pr. bølgelengde i hver koordinatretning som (skriv 4 to ganger), og kompresjonsbølgelengden brukt i z-retningen for utregningen (skriv 1). FEMP velger da en fornuftig elementoppdeling. Alternativt kan man velge antall elementer i hver koordinatretning direkte ved hjelp av meny-punktene "Problemdef - Elementoppdeling - r-retning" og "Problemdef - Elementoppdeling - z-retning". Dersom det blir gjort slik som beskrevet ovenfor, vil man få 7 elementer i radiell retning, og 2 elementer i tykkelsesretningen.

Nå er problemdefinisjonen ferdig. Ved å velge menypunktet "Problemdef - Vis Problemdefinisjon", skal man få frem følgende problemdefinisjon :

```
Elementer :  r-retning = 7 , z-retning = 2
Element-type : 8-noders, aksesymmetrisk
Integrasjonspkt i hver retning : 3
Materiale 1 : PZT5A
Materiale 2 : TOMT
Materiale 3 : TOMT
Hjoerner :  nr. 1: ( 0.000e+000  1.000e-002 )
            nr. 2: ( 2.500e-002  0.000e+000 )
D/T = 5.0

Qm    =   7.500000e+001
tande =   2.000000e-002

Noder som ligger paa elektrode med potensial null :
5 8 13 16 21 24 29 32 37 40 45 48 53 56 61

Noder som ligger paa andre elektrode  :
1 6 9 14 17 22 25 30 33 38 41 46 49 54 57

Mekaniske frihetsgrader som er bundet :


Elementer av materiale 1 , PZT5A :
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
```

Dersom man velger "Problemdef - Vis Elementoppdeling", skal man få frem figur D.1 som viser elementoppdelingen som programmet har gjort ut fra de parametre som er gitt inn.

Det er nå mulig å lagre problemdefinisjonen på fil, slik at man slipper å gå gjennom samme prosedyren en gang til dersom man ønsker å se på det samme problemet en gang til. Det gjøres ved å velge menypunktet "Fil - Lagre - Problemdefinisjon", og skrive inn filnavnet. Denne problemdefinisjonen kan når som helst hentes inn igjen ved å velge menypunktet "Fil - Hente - Problemdefinisjon", og velge filen som nå ble lagret.

D.2 Simulering

Å foreta simuleringen er nå veldig enkelt. Velg menypunktet "Simuler - Egenverdilosning". Programmet vil regne en stund (132 CPU-sekunder på en 66MHz DX2-PC), og etterpå returnere til åpningsbildet, med følgende beskjed i tekst-vinduet :

```
Egenverdier utregnet.
CPU-tid : 132.750.
 TID    : 132.640
```

Det tidkrevende delen av problemet er nå ferdig. Alt er klart for den videre analysen.

D.2.1 Analyse

Nå er en del av menyene som tidligere var valgbare, blitt uvalgbare, slik at det ikke er mulig å forandre på den grunnleggende problemdefinisjonen. Er dette ønskelig, må man velge "Fil - Forandre problemdefinisjon", forandre problemdefinisjonen som beskrevet ovenfor, og starte en ny simulering.

I tillegg er menypunktene under menyen "Funksjoner" og menyen "Figur" blitt valgbare. Menyen "Figur" inneholder en hel rekke grafiske funksjoner som f.eks. farge på plott, linjetype, skriving av tekst på figuren, zoom, og mye mer. Disse funksjonene vil det ikke bli gått nærmere inn på her. De er forhåpentligvis ganske selvforklarende.

Menyen "Funksjoner" inneholder en rekke funksjoner som kan inngå i en analyse av et typisk problem. Det første man bør gjøre nå, er å bestemme hvor høye frekvenser som skal være med i den videre analysen. Det gjøres i menypunktet "Funksjoner - Fmaks", der det står hva som er den gjeldende maksimalfrekvensen (her 375.1kHz). Det betyr at kun moder med frekvens opp til 375.1kHz blir tatt med i analysen når det superponeres over modene ved utregning av forskjellige responsfunksjoner (som f.eks. impedansen). Ideelt sett skulle et uendelig antall moder vært tatt med her, men det er følgende problemer med dette:

1. Jo flere moder man tar med, jo lenger tid tar beregningen. Dette er i praksis et lite problem, fordi beregningstiden uansett er relativt kort.
2. De høyeste modene er dårlig beskrevet i modellen, slik at det er fordelaktig å kutte disse ut i den videre analysen.

Generelt er det derfor å anbefale å benytte moder opp til ca. 1.5 ganger den maksimale frekvensen man er interessert i for en responsfunksjon. Dersom det er en mode med stor modal konstant rett ovenfor denne frekvensen, bør kanskje frekvensområdet utvides ytterligere. For transient respons blir naturligvis vurderingen en annen. En mulighet er å benytte funksjonen "zr" til å se hvilke moder som gir store bidrag, men det kommer utenfor dette enkle testproblemet.

Vi utfører nå den ønskede analysen :

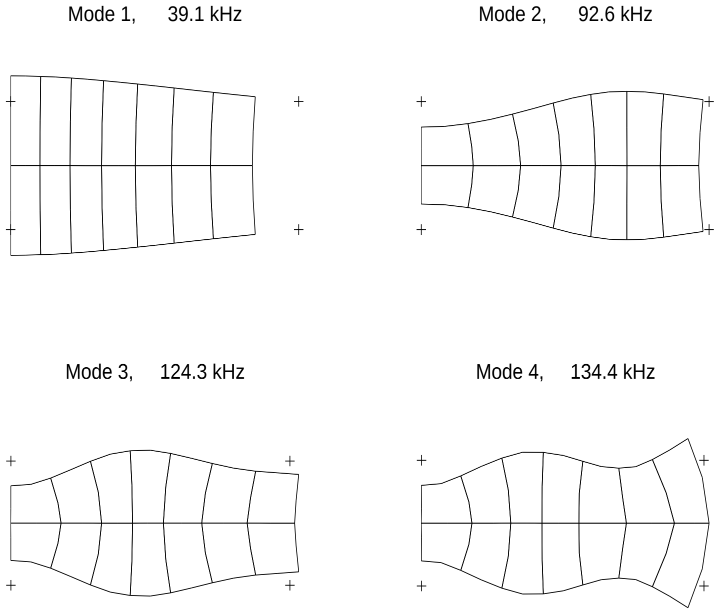
- En tabell over resonansfrekvensene blir skrevet ut ved å velge menypunktet "Funksjoner - Tabell - med el. pr. boelgelengde". Man får opp følgende tabell :

```
Mode    Frekv.            rA    el.r   el.zs  el.zc
  1   3.90528e+001       53.6   21.6    8.5   22.1
  2   9.26072e+001       44.9    9.1    3.6    9.3
  3   1.24314e+002       62.4    6.8    2.7    7.0
  4   1.34429e+002       10.5    6.3    2.5    6.4
  5   1.60189e+002       14.6    5.3    2.1    5.4
  6   1.76220e+002       42.5    4.8    1.9    4.9
  7   1.86619e+002      168.0    4.5    1.8    4.6
  8   2.00564e+002      143.5    4.2    1.6    4.3
  9   2.12177e+002       71.3    4.0    1.6    4.1
 10   2.21959e+002        7.2    3.8    1.5    3.9
```

  som gir resonansfrekvens, modal konstant (rA), og elementer pr bølgelengde for hver node.

- Ved å velge "Funksjoner - Modeplott - Generelt" får man plottet svingeformen til de ulike modene. I menypunktet "Funksjoner - Svingeform for modeplott" kan man velge på hvilken måte et plott av svingeformene skal fremstilles. Se figur D.2 for resultatet av plott av svingeformer. Ved hjelp av menypunktet "Funksjoner - Modeplott - Animer mode" kan også en av svingemodene animeres (sees på som funksjon av tiden).

- I menypunktet "Funksjoner - Elektriske responsfunksjoner - Modesuperposisjonsmetode - Impedans" kan man velge et plott av impedansen for et visst frekvensområde. Skriv f.eks [1000:500:250000] for å få et plott av impedansen i frekvensområdet 1kHz til 250kHz med step 0.5kHz. Resultatet ser man i figur D.3.



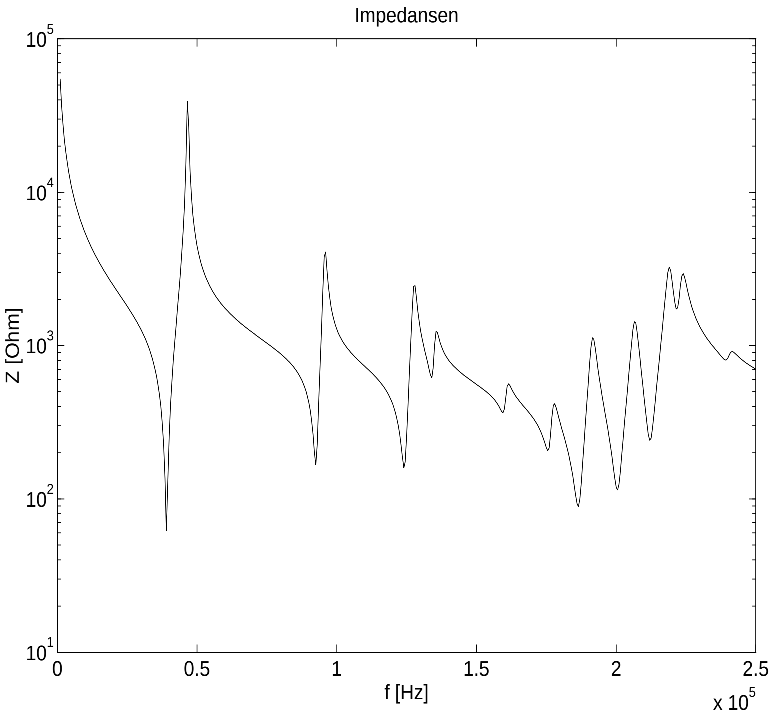
Figur D.2: Svingeform for de laveste modene for det enkle testproblemet som er beskrevet i teksten.

D.3 Mer avanserte funksjoner

D.3.1 Problemdefinisjonen

Det er følgende tilleggsmuligheter i forbindelse med problemdefinisjonen:

- Det kan velges flere forskjellige materialer. Dette gjøres under menyen "Problemdef - Materiale". Først må materialene man ønsker å benytte hentes fra fil, og deretter påføres elementene ved å avgrense et område med musen.
- Det kan velges hvor elektrodene skal plasseres i menypunktet "Problemdef - Elektriske grensebetingelser". Man må også her avgrense et område med musen, som da blir elektroden. Denne funksjonen er ikke 100% gjennomtestet.
- Man kan sette forskyvningen til null i en koordinatretning i forskjellige noder i menypunktet "Problemdef - Mekaniske grensebetingelser". Dette gjøres også grafisk. Dette kan f.eks. benyttes til å utnytte symmetriegenskaper i en struktur.
- Man kan velge plane-strain elementer, slik at man ser på en 2D struktur som har egenskaper som svarer til at strukturen er uendelig i den 3. koordinatretningen. Man må allikevel gi inn en lengde på strukturen for beregningene. Dette gjøres i menypunktet "Problemdef - Dimensjoner - lengde". I menypunktet "Problemdef - Element-type - 8-noders plane-strain" velger man at man skal se på plane-strain tilfellet.



Figur D.3: Impedansen som funksjon av frekvensen for de laveste modene for det enkle testproblemet som er beskrevet i teksten.

- I menyen "Problemdef - Resonansfrekvenser/Antiresonansfrekvenser" velger man om man vil løse for resonans- eller antiresonansfrekvenser for strukturen.
- I tillegg er det mulig å velge komplekse materialparametre når materialparametrene velges. Denne funksjonen er heller ikke 100% gjennomtestet.

D.3.2 Analysemetoder

Det er en rekke tilleggsfunksjoner i forbindelse med analysen :

- Under menypunktet "Funksjoner - Elektriske responsfunksjoner - Modesuperposisjonsmetode" kan man velge å plotte f.eks. Konduktansen, Admittansen, Susceptansen etc. I tillegg kan man lagre data fra simuleringen som tekst-fil.
- Under menypunktet "Funksjoner - Elektriske responsfunksjoner - Masonmodellen" kan man sammenligne simuleringene som er gjort med den 1D Masonmodellen.
- Under menypunktet "Funksjoner - Elektriske responsfunksjoner - Direkte metode" kan man plotte de elektriske responsfunksjonene ved å bruke den direkte metoden istedenfor modesuperposisjonsmetoden (se teorien i seksjon 3.2.2). Dersom man benytter alle modene i modesuperposisjonsmetoden, skal modesuperposisjonsmetoden og den direkte metoden gi identiske resultater. Avvik er numeriske feil.
- Under menypunktet "Funksjoner - Mekanisk respons" kan man regne ut responsen til strukturen ved en spesiell frekvens (superponert over alle modene opp til frekvensen Fmaks). Under punktet "Svingeform" kan man undersøke (og animere) responsen i form av et plott av utsvinget. Under punktet "Gjennomsnittsutsving" blir gjennomsnittsutsvinget over flaten i tykkelsesretningen og flaten i radiell retning regnet ut for et frekvensområdet, slik at man kan identifisere når denne forskyvningen er maksimal. Under menypunktet "Modal vekt-faktor (Zr)" kan man se på de ulike

modenes bidrag til responsen ved ulike frekvenser. Under menypunktet "Eksitering av moder" får man et plott av den modale konstanten eller koblingsfaktoren for de ulike modene.

- Under menypunktet "Funksjoner - Transient analyse" kan man utføre en transient analyse, enten for impulsresponsen eller for en "burst" (et bølgetog). Disse funksjonene er foreløpig lite brukt, og vil ikke bli beskrevet her.
- Under menypunktet "Funksjoner - Mekanisk Spenningsanalyse" kan man utføre en mekanisk spenningsanalyse på en mode av gangen.
- Menypunktet "Funksjoner - Plott-metode for svingeform" gir en muligheten til å bestemme hvordan plott av svingeform skal utføres.

D.3.3 Spesielle funksjoner

Menyen lengst til høyre - "Spesielt" - inneholder en del funksjoner for frekvensspektrum. Å utføre en slik analyse i MATLAB blir for tidkrevende. Man er altså avhengig av å eksportere en problemdefinisjons-fil til Fortran-90 versjonen av FEMP, foreta analysen der, og importere resultatfilen til MATLAB igjen. Dette gjøres i menyen "Spesielt", og vil ikke bli forklart nøyere her.

Vedlegg E

Implementering av teorien på en datamaskin

Teorien som er beskrevet i seksjon 2-3 ble først implementert i MATLAB ([45]). Årsaken til at MATLAB ble benyttet, er i første rekke MATLAB sine gode egenskaper i forbindelse med matrisemanipulasjon og MATLAB sine kraftige grafiske rutiner. Følgelig trenger man ikke å benytte så mye tid på programmering av rutiner for matrisemanipulasjon og grafiske rutiner som f.eks. for plotting av svingemoder. I tillegg gir MATLAB gode muligheter for å utvikle et grafisk brukergrensesnitt. Det er følgelig lettere å lage oversiktlige og korte programmer. I tillegg er MATLAB en interpreter, slik av programmene man skriver i MATLAB ikke må kompileres før hver kjøring. Dette gjør at tiden som kreves for feilsøking går kraftig ned. Dersom hele programmet skulle ha vært skrevet i Fortran fra bunnen av, ville det ikke vært mulig å implementere like mange funksjoner på den tiden jeg har hatt til rådighet.

Ulempen med å benytte MATLAB ser man når problemene blir store (mer enn 400-500 frihetsgrader i FEM-systemet). MATLAB får da minne-problemer, og MATLAB sin innebyggede egenverdirutine bruker da lang tid for å løse ligningssystemet. I forbindelse med hastigheten på simuleringene er det også en ulempe at MATLAB er en interpreter [1].

Generelt ble det funnet at et tilsvarende program skrevet i Fortran går flere ganger hurtigere, noe avhengig av hva slags datamaskiner man opererer på. I tillegg finner MATLAB sin innebyggete egenverdirutine alle egenvektorene/egenverdiene, mens vi i de fleste tilfeller kun er interessert i en liten del av disse.

En naturlig følge av de begrensningene MATLAB ga i forbindelse med løsning av egenverdiproblemet (svært lang beregningstid og minne-problemer ved simulering av store problemer) var å implementere deler av programmet i et annet programmeringsspråk. Dessuten var det viktig å teste egenverdirutinen i MATLAB mot andre egenverdirutiner. Det ble valgt å benytte Fortran 90, da Fortran 90 er bedre utrustet med matrisefunksjoner enn både Fortran 77 og C/C++. I tillegg ble en del Fortran 77-rutiner fra biblioteket LAPACK [46] [2] benyttet for en del matrisefunksjoner og løsning av egenverdiproblemet. Kun de mest tidkrevende delene av teorien ble implementert i Fortran 90. Det innebærer at Fortran 90-versjonen av programmet kun kan løse relativt enkle problemer.

Programmet har fått navnet FEMP ("Finite Element Modellering av Piezoelektriske strukturer"). For spesifikasjon av hva slags problemer de to versjonene av FEMP kan løse, se seksjon E.1 for F90-versjonen og seksjon E.2 for MATLAB-versjonen. De viktigste kalkuleringsrutinene i to programmene er nesten identiske, men det kan være vanskeligere å skille mellom hvilke rutiner som er viktige og mindre viktige i MATLAB-versjonen (med over 35 enkeltrutiner mot ca. 10 for F90-versjonen) fordi denne kan løse langt mer avanserte problemer (blant annet brukerdefinerte elektriske og mekaniske grensebetingelser, og strukturer bestående av flere forskjellige materialer). For å få frem de sentrale delene av implementeringen av teorien beskrevet i kapittel 2 og i begynnelsen av kapittel 3, er det derfor valgt å forklare hvordan denne

---

[1] Det er nå kommet en MATLAB-compiler, men denne er ikke innkjøpt på UiB eller CMR, slik at det ikke er testet hvor mye MATLAB-compileren kan forbedre ytelsen til FEMP for MATLAB.

[2] Programkode samt utførlig dokumentasjon for disse funksjonene kan finnes på World Wide Web på adressen "http://www.netlib.org/lapack/".

delen av teorien er implementert i Fortran 90. Deretter blir det i seksjon E.2 forklart hvordan dette gjøres for mer generelle problemer i MATLAB-versjonen av FEMP.

Matlab versjonen av programmet FEMP virker under både UNIX og Windows (PC) uten forandringer. F90-versjonen av FEMP er testet på flere forskjellige UNIX-maskiner (CRAY, DEC-Alpha, HP-UX), med forskjellige F90-compilere, men ikke på PC. Ved kjøring på CRAY i Trondheim viste det seg at FEMP ikke var effektivt, sannsynligvis fordi både LAPACK-rutinene og resten av FEMP ikke er optimalisert for vektor-maskiner.

E.1 FEMP: F90-versjonen

Som nevnt ovenfor kan F90-versjonen av FEMP kun løse relativt enkle problemer. Det innebærer at:

- Programmet finner endelig element matrisene og løser egenverdiproblemet for enten det aksesymmetriske eller "plane-strain"-tilfeller. Ut fra dette finner programmet egenverdier og egenvektorer (for enten resonans eller antiresonans), modal konstant og koblingsfaktor. Disse eksporteres da som en fil som kan leses inn fra MATLAB-versjonen av FEMP. For andre funksjoner, som for eksempel impedans/admittans-simuleringer, må altså resultatene fra F90-versjonen av FEMP importeres til MATLAB-versjonen av FEMP. Løsning av "plane-strain"-problemer [15] [5] [42] [25] er inkludert i programmet utelukkende for å utføre et par enkle tester mot publiserte resultater, og er ikke beskrevet her, men programkoden er tatt med i seksjon F.2.
- Det opereres med ett enkelt materiale for hele strukturen. Dette materialet kan naturligvis være anisotropt.
- Det er ikke mulig å definere spesielle elektriske eller mekaniske grensebetingelser i denne versjonen av FEMP. Det innebærer at elektrodene alltid ligger paa z_{max} og z_{min}, og at det ikke er predefinerte mekaniske forskyvninger for noen noder.
- Det er ikke inkludert tap i egenverdiløsningen (dette er heller ikke vanlig, men kan gjøres i MATLAB-versjonen).

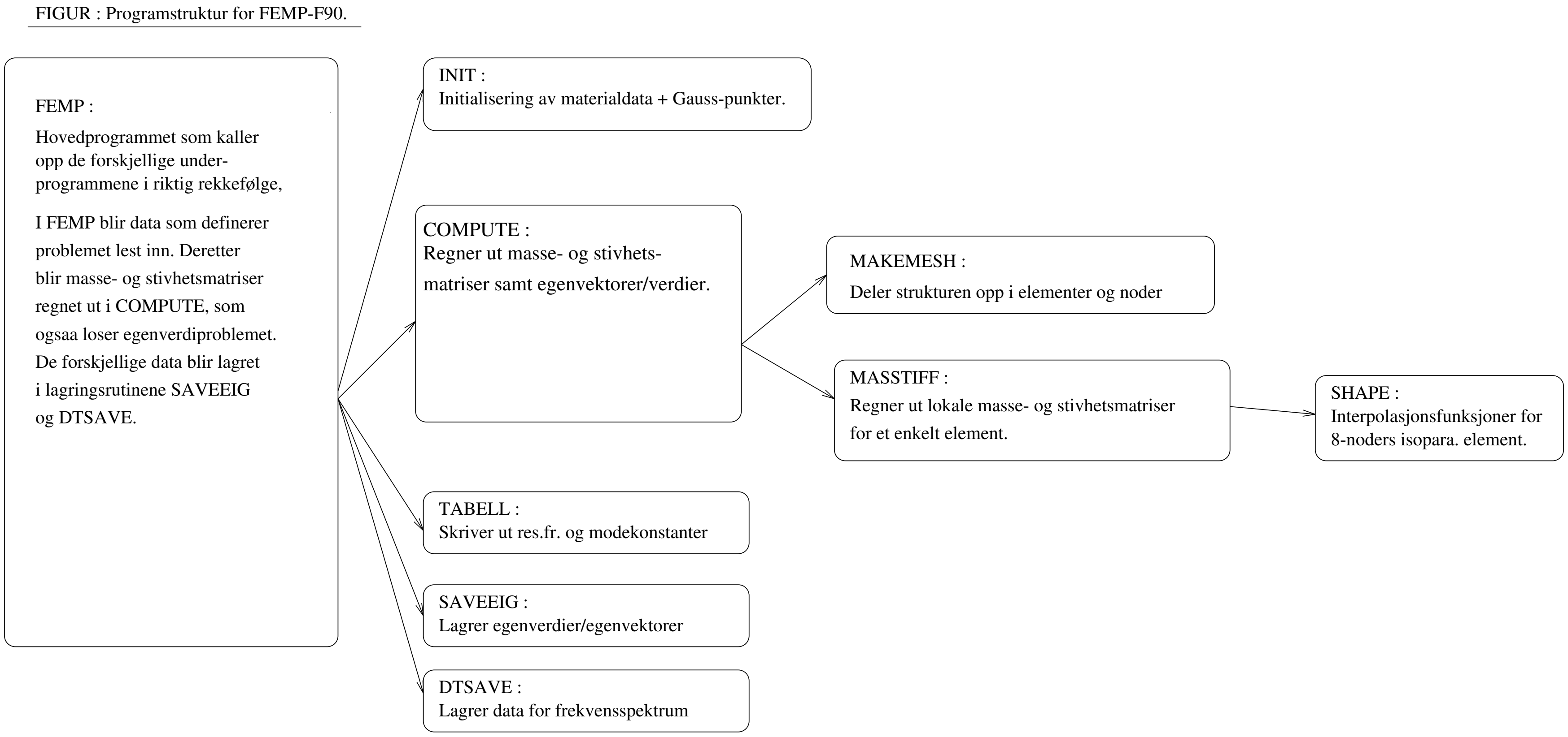
Tabell E.1: Oversikt over de forskjellige funksjonene i F90-versjonen av FEMP.

F90-Funksjon	Forklaring
COMPUTE	Regn ut globale masse- og stivhetsmatriser for hele strukturen
DTSAVE	Lagre egenfrekvenser, modal konstant, ++ for frekvensspektrum
INIT	Initialiser materialdata og Gauss-integrasjonspunkter
FEMP	Hovedprogram som kaller opp alle rutinene i riktig rekkefølge
MAKEMESH	Del strukturen opp i noder og elementer
MASSTIFF	Regn ut masse- og stivhetsmatr. for aksesymmetrisk element
PMASSTIF	Regn ut masse- og stivhetsmatr. for "plane-strain" element
SAVEEIG	Lagre egenverdier/egenvektorer og modesuperposisjonsmetodedata
SHAPE	Regn ut interpolasjonsfunksjoner for 8-noders element
TABELL	Skriv ut frekvenser og modekonstanter for modene

I tabell E.1 er alle funksjonene i programmet listet opp sammen med en liten beskrivelse av hva den enkelte funksjonen gjør. I figur E.1 er hovedstrukturen i programmet FEMP for Fortran 90 skissert. Av figuren kan man se hvilke funksjoner som blir kalt opp av andre funksjoner, og når dette skjer. Nedenfor er det beskrevet litt grundigere hva som skjer i programmet. For fullstendig programlisting, se vedlegg F.2.

E.1.1 Hovedprogrammet FEMP

I denne seksjonen blir det forklart hvilke funksjoner som blir kalt opp underveis i en simulering, og hva som er de viktigste variablene som blir lest inn fra brukeren. For en grundigere beskrivelse av selve kalkuleringsrutinene, se seksjonene E.1.3,E.1.4 og E.1.5. For beskrivelse av hvordan elementoppdelingen foregår, se seksjon E.1.2.



FIGUR : Programstruktur for FEMP-F90.

FEMP :
Hovedprogrammet som kaller opp de forskjellige underprogrammene i riktig rekkefølge,

I FEMP blir data som definerer problemet lest inn. Deretter blir masse- og stivhetsmatriser regnet ut i COMPUTE, som ogsaa loser egenverdiproblemet. De forskjellige data blir lagret i lagringsrutinene SAVEEIG og DTSAVE.

INIT :
Initialisering av materialdata + Gauss-punkter.

COMPUTE :
Regner ut masse- og stivhetsmatriser samt egenvektorer/verdier.

MAKEMESH :
Deler strukturen opp i elementer og noder

MASSTIFF :
Regner ut lokale masse- og stivhetsmatriser for et enkelt element.

SHAPE :
Interpolasjonsfunksjoner for 8-noders isopara. element.

TABELL :
Skriver ut res.fr. og modekonstanter

SAVEEIG :
Lagrer egenverdier/egenvektorer

DTSAVE :
Lagrer data for frekvensspektrum

Figur E.1: Programstrukturen for F90-versjonen av FEMP.

- Hovedprogrammet **FEMP** står først og fremst for organisering av variable, innhenting av problemdefinisjon, og oppkalling av initialiseringsrutine og kalkuleringsrutiner. To moduler blir definert. Disse inneholder variable som blir benyttet i ulike deler av programmet. I modulen *work_array* blir variable som blir benyttet ved simulering av en enkelt skive definert. Se tabell E.2 for en oversikt over variablene. I modulen *dtkurve* blir variable som blir benyttet for å simulere et frekvensspektrum lagret. Se tabell E.3 for en oversikt over disse.
- Etter at de grunnleggende definisjonene av problemet er hentet inn fra brukeren, kaller **FEMP** opp rutinen **INIT** som henter inn materialparametre (i matrisene C, E, EPS og variabelen rho) fra brukeren, og definerer Gauss-integrasjons-punktene og vektene for 3x3-punkts Gauss-integrasjon. All input til programmet blir gjort gjennom kommandoen **read*** som leser fra standard input.
- Programmet henter inn antall skiver det skal simuleres for (ant), det maksimale antall moder som skal lagres for hver skive ($maxmoder$), om egenvektorer skal lagres for hver skive ($saveit$), om resonans- eller antiresonansfrekvenser skal regnes ut (res), og om matriser som trengs i MATLAB-FEMP for mekanisk spenningsanalyse skal lagres ($savestress$). Det blir allokert plass i minnet for variablene i modulen *dtkurve*.
- Programmet går inn i en løkke over det antallet skiver som det skal simuleres for:
  - Elementoppdelingen for denne skiven blir hentet inn fra bruker gjennom variablene xx og yy, som henholdsvis bestemmer antall elementer i x- og y- retningen (r- og z-retningen i det aksesymmetriske tilfellet). Antall egenverdier som skal regnes ut for denne skiven leses inn i variabelen antall. Tykkelsen til denne skiven leses inn gjennom variabelen TT, og D/T-forholdet leses inn gjennom variabelen DTT.
  - Kalkuleringsrutinen **COMPUTE** kalles opp.
    - Denne funksjonen kaller først opp funksjonen **MAKEMESH** som deler strukturen opp i noder (lagret i matrisen XL med koordinatene for hver node som søyler i matrisen) og elementer (lagret i matrisen EL med elementdefinisjonen for det enkelte element som rekker i matrisen) ut i fra parametre gitt av brukeren i variablene xx, yy, TT og DTT.
    - Deretter går den gjennom en løkke for alle elementene, og regner ut lokale masse- og stivhetsmatriser for hvert element ved hjelp av rutinen **MASSTIFF** eller **PMASSTIF** avhengig av om man ser på aksesymmetriske eller "plane-strain" elementer. I fortsettelsen vil vi hovedsakelig se på aksesymmetriske elementer, da det er dette oppgaven konsentrerer seg om.
      - For hvert Gauss-integrasjonspunkt i hvert enkelt element kaller **MASSTIFF** opp rutinen **SHAPE** for å regne ut interpolasjonsfunksjoner og deres deriverte i Gauss-integrasjonspunktet, som benyttes i **MASSTIFF** til utregning av masse- og stivhetsmatriser.
    - De elektriske grensebetingelsene blir så påført, ved at rekker og søyler som svarer til elektriske frihetsgrader for noder på elektrodene blir fjernet. Matrisesystemet blir ført over på H-form, og egenverdiligningene som skal løses i egenverdiproblemet for enten resonans- eller antiresonansfrekvenser blir funnet.
    - Til slutt i rutinen **COMPUTE** blir egenverdisystemet løst ved hjelp av LAPACK-rutiner ([46]).
  - Rutinen **TABELL** blir kalt opp. Denne rutinen identifiserer symmetriske moder, og skriver ut egenverdier, modal konstant og koblingsfaktor for de symmetriske modene. I tillegg blir disse størrelsene lagret i matriser som senere lagres i **DTSAVE**.
- Rutinen **SAVEEIG** som lagrer egenverdier og egenvektorer, samt andre størrelser som trengs i den videre analysen i MATLAB-versjonen av FEMP, blir kalt opp.
- Rutinen **DTSAVE** som lagrer frekvens, modal konstant, koblingsfaktor, tykkelse og D/T-forhold for en rekke skiver (for frekvensspektrum) blir kalt opp.

Tabell E.2: Variablene i modulen work_array (alfabetisk sortert).

Variabelnavn	Forklaring
A1	Vektor av egenverdier etter løsning av egenverdisystem
antall	Antall egenverdier som ønskes utregnet
C	Matrise som lagrer materialdata, c^E, satt i **init**
E	Matrise som lagrer materialdata, e, satt i **init**
EL	Sammensetningen av elementene i strukturen
elements	Antall elementer i hele strukturen
EPS	Matrise som lagrer materialdata, ϵ^S satt i **init**
fri	Antall frihetsgrader pr. node (alltid lik 3)
fri1	Antall mekaniske frihetsgrader pr. node (alltid lik 2)
G1	Koordinater for 1. hjørne i strukturen
G2	Koordinater for 2. hjørne i strukturen
hpp	Matrisen $H_{\phi\phi}$ som inngår i teorien
hup	Matrisen $H_{u\phi}$ som inngår i teorien
kui	Matrisen $K_{u\phi_i}$ som inngår i teorien
kii	Matrisen $K_{\phi_i\phi_i}$ som inngår i teorien
lint	Totalt antall Gauss-integrasjonspunkt (alltid lik 9)
nel	Antall noder pr. element (alltid lik 8)
nodes	Antall noder i hele strukturen
plane	Avgjør om det skal regnes med plane strain eller aksesymmetriske el.
rho	Tettheten til materialet
savestress	Avgjør lagring av matriser for mekanisk spenningsberegning
sg, tg, wg	Gauss-integrasjonspunkt og vekter for 9 pkt. Gauss-int.
VECT	Matrise av egenvektorer etter løsning av egenverdisystem
XL	Koordinatene til alle nodene i strukturen
xx	Antall elementer i r-retning
yy	Antall elementer i z-retning
res	Variabel som avgjør om resonans eller antires. frekv. skal utregnes

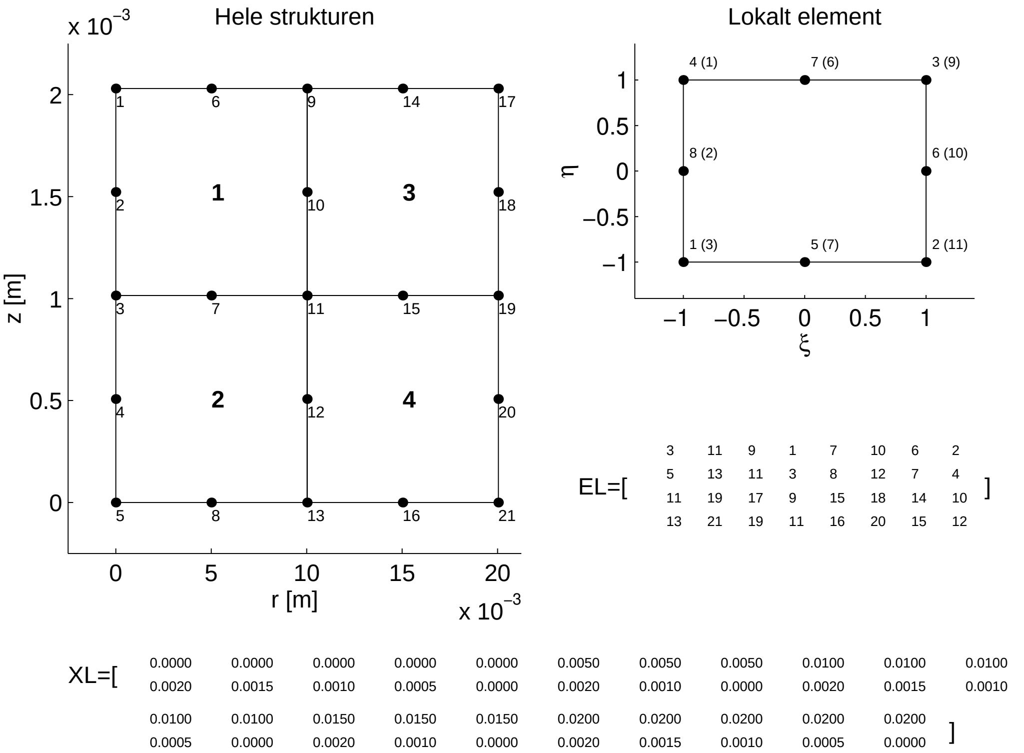
Tabell E.3: Variablene i modulen dtkurve (alfabetisk sortert).

Variabelnavn	Forklaring
ant	Antall skiver som det skal simuleres for
count	Tellevariabel som angir hvilken skive. nr. som simuleres nå
DT	vektor der D/T-forholdet til skivene lagres
FF	matrise der egenfrekvenser for hver skive lagres som søyler
KK	matrise der koblingskonstant for hver skive lagres som søyler
maxmoder	Det maksimale antall moder som skal lagres pr. skive
RR	matrise der modal konstant for en skive lagres som søyler
T	vektor der tykkelsen til skivene lagres

E.1.2 Rutinen MAKEMESH

For å forstå hvordan kalkuleringsrutinene beskrevet nedenfor fungerer, er det essensielt å forstå hvordan matrisene XL og EL som beskriver nodene og elementene i strukturen er definert. Det blir derfor gitt en orientering om hvordan "mesh-generatoren" i rutinen **MAKEMESH** fungerer. Måten node- og element-definisjonene lagres på i FEMP er inspirert av rutiner listet opp i [42].

Strukturen som er definert ved de to hjørnene G1 og G2 (definert ut fra variablene TT og DTT som er "input" fra brukeren), blir delt opp i det antallet elementer i hver koordinatretning som er gitt i variablene xx og yy. Med $xx = 2$ og $yy = 2$ får man altså 4 elementer. Vanligvis vil det øvre venstre hjørnet ha



$$EL=\begin{bmatrix} 3 & 11 & 9 & 1 & 7 & 10 & 6 & 2 \\ 5 & 13 & 11 & 3 & 8 & 12 & 7 & 4 \\ 11 & 19 & 17 & 9 & 15 & 18 & 14 & 10 \\ 13 & 21 & 19 & 11 & 16 & 20 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

$$XL=\begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0050 & 0.0050 & 0.0050 & 0.0100 & 0.0100 & 0.0100 \\ 0.0020 & 0.0015 & 0.0010 & 0.0005 & 0.0000 & 0.0020 & 0.0010 & 0.0000 & 0.0020 & 0.0015 & 0.0010 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0100 & 0.0100 & 0.0150 & 0.0150 & 0.0150 & 0.0200 & 0.0200 & 0.0200 & 0.0200 & 0.0200 \\ 0.0005 & 0.0000 & 0.0020 & 0.0010 & 0.0000 & 0.0020 & 0.0015 & 0.0010 & 0.0005 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Figur E.2: Oppdeling av strukturen i elementer og noder for 8-noders elementet. Til venstre er hele strukturen vist. De store tallene er elementnummereringen, og de små tallene er nodenummereringen. Til høyre er kun element nr. 1 vist. Hver node er nummerert med lokale nodenummer, med globale nodenummer i parantes. I tillegg er matrisene EL og XL for denne elementoppdelingen gitt. Rekke 1 i matrisen EL blir ut fra dette [3 11 9 1 7 10 6 2]. Kolonne 3,11,9,1,7,10,6,2 i XL vil da gi koordinatene til nodene i element nr. 1. Vanligvis vil det øvre venstre hjørnet ha koordinatene $G1$, og det nedre venstre hjørnet koordinatene $G2$.

koordinatene $G1$, og det nedre venstre hjørnet koordinatene $G2$.

I figur E.2 er det gitt et eksempel på oppdeling av en struktur bestående av 2 8-noders elementer i hver koordinatretning, og totalt 21 noder.

I rutinen blir strukturen først delt inn i det nødvendige antallet noder. Nodedefinisjonene blir lagt i matrisen XL. Denne nodeoppdelingen er gjort på en slik måte at det ut fra disse nodene er mulig å definere 8-noders elementer på formen beskrevet i seksjon 2.2.2, og vist i figur 2.8:

```
dx=(G2(1)-G1(1))/xx
dy=(G2(2)-G1(2))/yy
nodes=0;
do i=0,xx
  do j=0,2*yy
    nodes=nodes+1
    XL(1,nodes)=G1(1)+i*dx
    XL(2,nodes)=G1(2)+j*dy/2
  end do
  if (i /= xx) then
    do j=0,yy
      nodes=nodes+1
      XL(1,nodes)=G1(1)+i*dx + dx/2
      XL(2,nodes)=G1(2)+j*dy
```

```
      end do
    end if
  end do
```

Variablene dx og dy som blir introdusert her, er avstanden mellom 2 noder i henholdsvis x- og y-retningen. De to løkkene over i og j deler strukturen opp i noder med likt mellomrom mellom hver node, men på en slik måte at det ikke blir noen overflødige noder når man skal introdusere 8-noders elementene. Den første rekken i matrisen XL er 1. koordinaten til nodene, og den andre rekken i matrisen XL er 2. koordinaten til nodene, slik at XL(j,k) gir koordinat nr. j for node nr. k.

Videre blir strukturen delt opp i elementer der nodene definert ovenfor inngår:

```
  elements=xx*yy
  nr=3
  do k=1,elements
    prg=(2*yy+1)+(yy+1)
    rest=mod(nr,prg)
    prg2=(rest-1)/2

    EL(k,1)=nr
    EL(k,2)=nr+prg
    EL(k,3)=nr+prg-2
    EL(k,4)=nr-2
    EL(k,5)=nr+(2*yy+1)-prg2
    EL(k,6)=nr+prg-1
    EL(k,7)=nr+(2*yy+1)-prg2-1
    EL(k,8)=nr-1

    if (rest==(2*yy+1)) then
        nr=nr+(yy+1)+3
    else
        nr=nr+2
    end if
  end do
```

Her inngår det en løkke over alle elementene, med tellevariabel k. Elementoppdeling blir gjort ved at programmet begynner på en node (nr), og "teller" seg rundt de 8 nodene til elementet, slik at nodene blir definert på samme måte som i figur 2.8. Startnoden (nr) blir definert som node nr. 1 for elementet, og lagt i EL(k,1). Programmet går så to noder til høyre, og definerer denne noden som node nr. 2 for elementet, og legger verdien på noden i EL(k,2). Programmet går så to noder opp, og definerer denne noden som node nr. 3 for elementet. Deretter to noder til venstre, og definerer noden som node nr. 4 for elementet. Deretter tilbake til utgangspunktet, og en node til høyre, og definerer denne noden som node nr. 5 for elementet, en til høyre og en opp og definerer som node nr. 6, en opp og en til venstre og definerer som node nr. 7, og en til venstre og en ned og definerer som node nr. 8. Tellingen blir gjort ved hjelp av hjelpevariablene prg og $prg2$. Akkurat hvordan dette gjøres er mindre viktig. Det som er viktig her, er matrisen EL som man får som resultat av disse operasjonene, sammen med nodedefinisjonen XL som ble regnet ut ovenfor. Sammen vil de ha følgende egenskaper:

- $EL(k,i)$ = globalt nodenummer for den i'te noden i det k'te elementet.
- $XL(l, EL(k,i))$ = den l'te koordinaten for den i'te noden i det k'te elementet, der l er enten 1 (r-koordinaten) eller 2 (z-koordinaten).
- $xll = XL(1:2, EL(k, 1:8))$ = nodedefinisjonen for element nr. k, slik at $xll(l,i)$ vil gi den l'te koordinaten for den i'te noden i det lokale elementet, med lokal nodenummerering. Her er xll er en lokal variabel.

E.1.3 Rutinen SHAPE

Vi fortsetter på det laveste nivået i kalkuleringene, i rutinen **SHAPE**. Her regnes det for et enkelt Gauss-integrasjonspunkt (med koordinater (S,T) som tilsvarer (ξ,η) i teorien, slik at $S,T \in [-1,1]$)

i et spesielt element definert ved nodedefinisjonmatrisen xll. Viktige størrelser blir regnet ut for et 8-noders isoparametrisk element med kvadratisk variasjon langs kantene, som beskrevet i seksjon 2.2.2 og seksjon 2.3. Rutinen regner ut interpolasjonsfunksjoner ($shp(1, 1 : 8)$), de deriverte av interpolasjonsfunksjonene ($shp(2 : 3, 1 : 8)$), og Jacobideterminanten (xsj) for Gauss-integrasjonspunktet.

Først blir interpolasjonsfunksjonene N_1 til N_8 regnet ut etter formelen:

$$\begin{array}{rcl} N_i & = & \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1) \quad , \quad i=1,2,3,4 \\ N_i & = & \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0) \quad , \quad i=5,7 \\ N_i & = & \frac{1}{2}(1+\xi_0)(1-\eta^2) \quad , \quad i=6,8 \end{array} \tag{E.1}$$

med $\xi_0 = \xi \cdot \xi_i$ og $\eta_0 = \eta \cdot \eta_i$. Her følger den delen av programmet som regner ut interpolasjonsfunksjonene og deres deriverte med hensyn på de lokale variablene [1]:

```
! Regn ut interpolasjonsfunksjoner:
SI(1)=-.5
SI(2)=.5
SI(3)=.5
SI(4)=-.5

TI(1)=-.5
TI(2)=-.5
TI(3)=.5
TI(4)=.5

! De foerste fire interpolasjonsfunksjonene og deres deriverte:
do i=1,4
  shp(1,i)=SI(i)*(.5+TI(i)*T)
  shp(2,i)=TI(i)*(.5+SI(i)*S)
  shp(3,i)=(.5+SI(i)*S)*(.5+TI(i)*T)
end do

! De neste fire interpolasjonsfunksjonene og deres deriverte:
s2=(1-S**2)/2
t2=(1-T**2)/2
shp(1,5)=-S*(1-T);
shp(2,5)=-s2;
shp(3,5)=s2*(1-T);

shp(1,6)=t2;
shp(2,6)=-T*(1+S);
shp(3,6)=t2*(1+S);

shp(1,7)=-S*(1+T);
shp(2,7)=s2;
shp(3,7)=s2*(1+T);

shp(1,8)=-t2;
shp(2,8)=-T*(1-S);
shp(3,8)=t2*(1-S);

! Modifisering av de fire foerste interpolasjonsfunksjonene:
k=8
do i=1,4
  l=i+4
  do j=1,3
    shp(j,i)=shp(j,i)-0.5*(shp(j,k)+shp(j,l))
  end do
  k=l
```

---

[1] Store deler av rutinene for utregning av interpolasjonsfunksjonene er tatt fra rutiner gitt i [42]

```
end do
```

Koordinatene til et Gauss-integrasjons-punkt er gitt ved $(\xi,\eta) = (S,T)$. Tilsvarende er koordinatene til nodene $(\xi_0,\eta_0) = (2SI, 2TI)$. Her tilsvarer N_i i teorien shp(3,i) i programlistingen. De lokale deriverte med hensyn på henholdsvis første $(\xi = S)$ og annen $(\eta = T)$ variabel, er lagt i shp(1,i) og shp(2,i).

Deretter blir Jacobi-matrisen regnet ut etter formelen:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

med følgende linjer i programmet:

```
! Utregning av Jacobi-matrisen:
xs=0
do i=1,2
  do j=1,2
    do k=1,8
      xs(i,j)=xs(i,j)+xll(i,k)*shp(j,k)
    end do
  end do
end do
```

der $xs = J$ er Jacobimatrisen, xll er nodedefinisjonen som tidligere, og $shp(1:2, 1:8)$ er de lokale deriverte til interpolasjonsfunksjonene. Jacobideterminanten $(xsj = |J|)$ regnes ut:

```
xsj=xs(1,1)*xs(2,2)-xs(2,1)*xs(1,2)
```

Fra teorien (ligning 2.134 har vi at interpolasjonsfunksjonene med hensyn på de globale deriverte, som inngår i uttrykkene for B-matrisene, er gitt som:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{E.3}$$

Dette blir implementert ved hjelp av programkoden:

```
do i=1,8
  temp=(xs(2,2)*shp(1,i)-xs(2,1)*shp(2,i))/xsj
  shp(2,i)=(-xs(1,2)*shp(1,i)+xs(1,1)*shp(2,i))/xsj
  shp(1,i)=temp
end do
```

Nå er interpolasjonsfunksjoner, deres deriverte med hensyn på de globale variable, og Jacobideterminanten, regnet ut for et gitt Gauss-integrasjonspunkt (S,T). Dette blir returnert til funksjonen **MASSTIFF** som bruker dette til å regne ut lokale masse- og stivhetsmatriser.

E.1.4 Rutinen MASSTIFF

Det nest laveste nivået i kalkuleringsrutinen består av rutinen **MASSTIFF** som opererer på elementnivå. Rutinen regner ut lokale masse- og stivhetsmatriser for *et enkelt element* som blir identifisert ut fra nodedefinisjonsmatrisen xll som gir koordinatene til nodene for elementet (i globale r- og z- variable). Rutinene returnerer matrisene $kuul$, $massl$, $kupl$ og $kppl$ som er de lokale masse- og stivhetsmatrisene for et element, regnet ut etter teori og formler gitt i seksjonene 2.3 og 2.3.4.

Rutinen starter med en løkke over alle Gauss-integrasjonspunktene, der interpolasjonsfunksjonene, deres deriverte, og Jacobideterminanten blir funnet for hvert Gauss-integrasjonspunkt. Gauss-integrasjonspunktene er gitt i lokale variable, dvs. variable som varierer mellom -1 og 1 i begge koordinatretninger (se tabell 2.2 for Gauss-integrasjonspunkter for 9-punkt Gauss integrasjon):

```
do l=1,lint
  ! Finn interpolasjonsfunksjoner for dette punktet:
  call shape(shp,xsj,sg(l),tg(l),xll)
```

der *lint* = 9 er antall Gauss-integrasjonspunkter. Her blir r-koordinaten til punktet funnet ut fra formelen:

$$r(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{8} r_i^{(m)} N_i(\xi,\eta) \tag{E.4}$$

i programlinjene:

```
rr=0
do i=1,nel
  rr=rr+xll(1,i)*shp(3,i)
end do
```

I teorien regnes $[B_{u,l,i}^{(m)}]$- og $[B_{\phi,l,i}^{(m)}]$-matrisene for element nr. m for et Gauss-integrasjonspunkt ut etter formlene:

$$\begin{aligned} [B_{u,l,i}^{(m)}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \\ [B_{\phi,l,i}^{(m)}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

for i mellom 1 og 8. Disse settes sammen til matrisene $[B_{u,l}^{(m)}]$ og $[B_{\phi,l}^{(m)}]$ ved:

$$\begin{aligned} [B_{u,l}^{(m)}] &= [B_{u,l,1}^{(m)}\, B_{u,l,2}^{(m)} \ldots B_{u,l,8}^{(m)}] \\ [B_{\phi,l}^{(m)}] &= [B_{\phi,l,1}^{(m)}\, B_{\phi,l,2}^{(m)} \ldots B_{\phi,l,8}^{(m)}] \end{aligned}$$

I tillegg defineres matrisen av interpolasjonsfunksjoner for element nr. m som:

$$[N_{u,l}^{(m)}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

I programmet gjøres dette i de følgende programlinjene:

```
do j=1,nel
  ii=2*(j-1)
  bu(1,1+ii)=shp(1,j)
  bu(1,2+ii)=0
  bu(2,1+ii)=shp(3,j)/rr
  bu(2,2+ii)=0
  bu(3,1+ii)=0
  bu(3,2+ii)=shp(2,j)
  bu(4,1+ii)=shp(2,j)
  bu(4,2+ii)=shp(1,j)

  bp(1,j)=shp(1,j)
  bp(2,j)=shp(2,j)

  m(1,1+ii)=shp(3,j)
  m(1,2+ii)=0
  m(2,1+ii)=0
  m(2,2+ii)=shp(3,j)
end do
```

Der $bu = [B_{u,l}^{(m)}]$, $bp = [B_{\phi,l}^{(m)}]$ og $m = [N_{u,l}^{(m)}]$.

Nå gjenstår det bare å regne ut emasse- og stivhetsmatriser for det lokale elementet. I teorien opptrer disse som et integral over elementet, som blir regnet ut ved hjelp av Gauss-integrasjon, slik at vi får en vektet sum over Gauss-integrasjonspunktene:

$$[M_{uu,l}^{(m)}] = \sum_{k=1}^{N_{Gauss}} \rho^{(m)} [N_{u,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)]^T [N_{u,l}^{(m)}(\xi_k,\eta_k)] 2\pi r(\xi_k,\eta_k) |J(\xi_k,\eta_k)| W_k \tag{E.5}$$

$$
\begin{aligned}
[K^{(m)}_{uu,l}] &= \sum_{k=1}^{N_{Gauss}} [B^{m}_{u,l}(\xi_k,\eta_k)]^T[c^{E(m)}][B^{m}_{u,l}(\xi_k,\eta_k)]2\pi r(\xi_k,\eta_k)|J(\xi_k,\eta_k)|W_k && \text{(E.6)}\\
[K^{(m)}_{\phi u,l}] &= \sum_{k=1}^{N_{Gauss}} [B^{(m)}_{\phi,l}(\xi_k,\eta_k)]^T[e^{(m)}][B^{(m)}_{u,l}(\xi_k,\eta_k)]2\pi r(\xi_k,\eta_k)|J(\xi_k,\eta_k)|W_k && \text{(E.7)}\\
[K^{(m)}_{u\phi,l}] &= [K^{(m)}_{\phi u,l}]^T && \text{(E.8)}\\
[K^{(m)}_{\phi\phi,l}] &= -\sum_{k=1}^{N_{Gauss}} [B^{(m)}_{\phi,l}(\xi_k,\eta_k)]^T[\epsilon^{S(m)}][B^{(m)}_{\phi,l}(\xi_k,\eta_k)]2\pi r(\xi_k,\eta_k)|J(\xi_k,\eta_k)|W_k && \text{(E.9)}\\
& && \text{(E.10)}
\end{aligned}
$$

og $r(\xi_k,\eta_k)$ er regnet ut i ligning E.4.

I programmet blir dette regnet ut i linjene:

```
dv=xsj*wg(l)*rr*2*3.141592553589793;
kuul=kuul+matmul(matmul(transpose(bu),C),bu)*dv
kupl=kupl+matmul(matmul(transpose(bu),transpose(E)),bp)*dv
kppl=kppl+matmul(matmul(transpose(bp),EPS),bp)*dv
massl=massl+matmul(transpose(m),m)*dv*rho
```

der størrelsene som inngår er definert ovenfor, bortsett fra Gauss-vektene $wg(l) = W_k$, som er gitt i tabell 2.2 for 9-punkts Gauss-integrasjon. Matrisene C, E og EPS er materialparametrene og rho er tettheten. Alle variable er gitt i mks-enheter.

Nå er altså de lokale masse- og stivhetsmatrisene for et element regnet ut. Disse returneres til rutinen compute, som bruker disse til å regne ut de globale masse- og stivhetsmatrisene.

E.1.5 Rutinen COMPUTE

Teorien som inngår her er i hovedsak beskrevet i seksjon 2.3.4 og seksjon 2.5. Se figur E.3 for hovedstrukturen i rutinen.

Rutinen **COMPUTE** opererer på "skive"-nivå, det vil si at den løser problemet for en enkelt skive. Denne rutinen opererer altså på globalt nivå. Dersom man ikke er interessert i å se på et en hel rekke skiver i samme simulering, løser altså rutinen hele problemet, og gir de ønskede egenverdiene/vektorene. Det første rutinen gjør, er å kalle opp **MAKEMESH**, som definerer noder og elementer for hele strukturen.

Deretter går programmet inn i en løkke over alle elementene i strukturen:

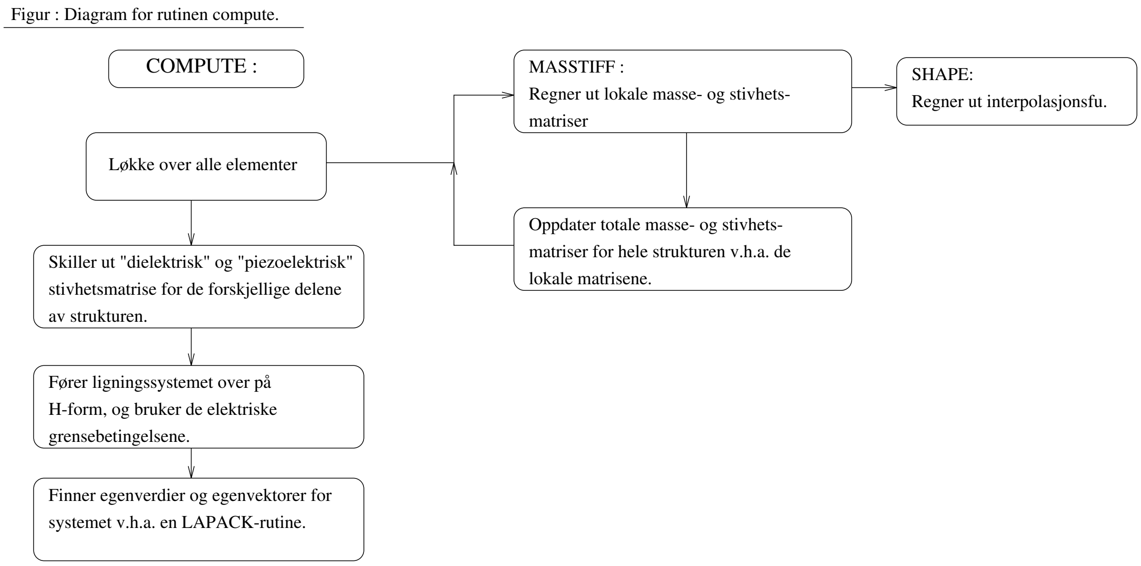
```
do i=1,elements

  ! Finn nodedefinisjonen for det lokale elementet:
  do j=1,nel
    xll(:,j)=XL(:,EL(i,j))
  end do
  ...
  call masstiff(kuul,kupl,kppl,massl,xll)
  ...
```

Her blir nodedefinisjonen for det lokale elementet, element nr. j, funnet (xll) som beskrevet i seksjon E.1.2, ut fra den globale nodedefinisjonen (XL). I det aksesymmetriske tilfellet blir de lokale masse- og stivhetsmatrisene regnet ut ved hjelp av rutinen **MASSTIFF** som beskrevet ovenfor, og returnert som ***kuul*** (stivhetsmatrise), ***kupl*** ("piezoelektrisk stivhetsmatrise"), ***kppl*** ("dielektrisk stivhetsmatrise") og ***massl*** (massematrise).

Neste skritt er å oppdatere de globale matrisene ut fra element-matrisene returnert fra rutinen **MASSTIFF**:

```
  do m=1,nel
     do n=1,nel
```



Figur E.3: Strukturen i rutinen **COMPUTE**

```
        x1f=fril*EL(i,m)-fril+1
        x1t=x1f+fril-1
        x2f=fril*EL(i,n)-fril+1
        x2t=x2f+fril-1
        x1fl=fril*m-fril+1
        x1tl=x1fl+fril-1
        x2fl=fril*n-fril+1
        x2tl=x2fl+fril-1

        kuu(x1f:x1t,x2f:x2t)=kuu(x1f:x1t,x2f:x2t)+kuul(x1fl:x1tl,x2fl:x2tl)
        kup(x1f:x1t,EL(i,n))=kup(x1f:x1t,EL(i,n))+kupl(x1fl:x1tl,n)
        kpp(EL(i,m),EL(i,n))=kpp(EL(i,m),EL(i,n))+kppl(m,n)
        mass(x1f:x1t,x2f:x2t)=mass(x1f:x1t,x2f:x2t)+massl(x1fl:x1tl,x2fl:x2tl)
    end do
end do
```

Det som blir gjort her er beskrevet i seksjon 2.3.4. Det går i hovedsak ut på at rekker og søyler som representerer en frihetsgrad i en element-matrise må kartlegges over på rekker og søyler i de globale matrisene. Dette gjøres ut fra elementdefinisjonen i matrisen EL. Matrisen kuu er stivhetsmatrisen for hele strukturen, $[K_{uu}]$. Matrisen kup er den "piezoelektriske stivhetsmatrisen" for hele strukturen, $[K_{u\phi}]$. Matrisen kpp er den "dielektriske stivhetsmatrisen" for hele strukturen, $[K_{\phi\phi}]$.

Når dette er gjort for alle elementene i strukturen, er de totale masse- og stivhetsmatrisene fra ligningen

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\hat{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ Q \end{bmatrix} \tag{E.11}$$

funnet. For at grensebetingelsene (kapittel 2.5) skal kunne påføres, må den "dielektriske" og "piezoelektriske" stivhetsmatrisen deles opp i tilsvarende matriser for hver av de to elektrodene og for den resterende delen av strukturen som i ligning 2.194:

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi_i} & K_{u\phi_p} \\ K^T_{u\phi_i} & K_{\phi_i\phi_i} & K_{\phi_i\phi_p} \\ K^T_{u\phi_p} & K^T_{\phi_i\phi_p} & K_{\phi_p\phi_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\phi}_i \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{u}} \\ \ddot{\hat{\phi}}_i \\ \ddot{\hat{\phi}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ Q_p \end{bmatrix} \tag{E.12}$$

I programmet gjøres dette ved først å identifisere hvilke noder som ligger på en av elektrodene:

```
allocate(elektro(nodes/2))
allocate(null(nodes/2))
allocate(igjen(2*nodes))

ell=0
nul=0
igl=0
! Finn ut hvilke noder som ligger paa zmax og zmin. Disse omraadene
! blir definert som elektroder.
do i=1,nodes
  if (XL(2,i)==G2(2)) then
    ell=ell+1
    elektro(ell)=i
  else if (XL(2,i)==G1(2)) then
    nul=nul+1
    null(nul)=i
  else
    igl=igl+1
    igjen(igl)=i
  end if
end do
```

Her sammenlignes koordinatene til hver enkelt node med den maksimale z-verdien ($G2(2)$) og den minimale z-verdien ($G1(2)$), da elektrodene automatisk ligger på z_{min} og z_{max}. Dersom noden ligger på den ene elektroden (med potensiale null, for $z = z_{max}$), blir nodenummeret lagt i vektoren *null*. Dersom noden ligger på den andre elektroden, blir nodenummeret lagt i vektoren *elektro*. Dersom noden ikke ligger på noen av elektrodene, blir nodenummeret lagt i vektoren *igjen*. Deretter blir de "piezoelektriske" og "dielektriske stivhetsmatrisene" for de ulike delene av strukturen funnet:

```
do i=1,ell
  kupp(1:nodes*fri1,i)=kup(1:nodes*fri1,elektro(i))
  do j=1,igl
    kipp(j,i)=kpp(igjen(j),elektro(i))
  end do
  do j=1,ell
    kpppp(j,i)=kpp(elektro(j),elektro(i))
  end do
end do

do i=1,igl
  kui(1:nodes*fri1,i)=kup(1:nodes*fri1,igjen(i))
  do j=1,igl
    kii(j,i)=kpp(igjen(j),igjen(i))
  end do
end do
```

Her er $kupp = [K_{u\phi_p}]$, $kipp = [K_{\phi_i\phi_p}]$, $kpppp = [K_{\phi_p\phi_p}]$, $kui = [K_{u\phi_i}]$ og $kii = [K_{\phi_i\phi_i}]$ som inngår i ligningen ovenfor. Nå er altså matrisene i det oppdelte systemet identifisert. Det blir så benyttet LAPACK-rutiner til å invertere matrisen $kii = [K_{\phi_i\phi_i}]$:

```
call dgetrf(igl,igl,kii,igl,IPIV,dum)
call dgetri(igl,kii,igl,IPIV,WORK,LWORK,dum)
```

slik at $kii = [K_{\phi_i\phi_i}]^{-1}$ i programmet. Nå er det lett å transformere systemet over på H-form som beskrevet i teorien i seksjon 2.6:

```
kuu=kuu-matmul(matmul(kui,kii),transpose(kui))
hup=matmul(kupp-matmul(matmul(kui,kii),kipp),Ive)
hpp=matmul(matmul(transpose(Ive),(kpppp-matmul(matmul(transpose(kipp),kii),kipp))),Ive)
```

Nå er $kuu = [H_{uu}]$, $hup = [H_{u\phi}]$ og $hpp = [H_{\phi\phi}]$. Nå har man funnet alle matrisene som trengs for å løse egenproblemet for det piezoelektriske tilfellet som beskrevet i seksjon 3.1, både for resonans- og antiresonansfrekvenser. For antiresonansfrekvenser må man løse egenverdiproblemet:

$$[([H_{uu}] - [\Delta H_{uu}]) - \omega_a^2[M_{uu}]][\hat{u_0}] = 0 \tag{E.13}$$

slik at man må gjøre følgende transformasjon av matrisen *kuu* i programmet før egenverdiene av systemet kan finnes:

```
if (res==0) then
  kuu=kuu-matmul(hup,transpose(hup))/hpp(1,1)
end if
```

Dette gjøres naturligvis ikke for resonansfrekvensene.

Det eneste som da gjenstår før problemet er løst, er å løse det generaliserte egenverdiproblemet definert ved matrisene *kuu* og *mass* i programmet. Dette gjøres ved hjelp av en del LAPACK-rutiner (QR-metoden blir benyttet i LAPACK). Rutinene er ikke spesialisert for endelig element-metode problemer. Allikevel har disse rutinene en klar fordel i forhold til tilsvarende innebyggete MATLAB-rutine: MATLAB-rutinen finner alltid *alle* egenverdiene i egenverdisystemet, mens LAPACK-rutinene som benyttes her kun finner de egenverdiene man ber om. Egenverdirutinene tar ikke hensyn til at både masse- og stivhetsmatrisene har båndstruktur. Ved å ta hensyn til båndstrukturen, kan man løse problemet uten å bruke så mye minne på datamaskinen. Dersom man hadde brukt slike egenverdirutiner, måtte også store deler av det som er beskrevet ovenfor vært forandret, fordi man da ikke kan overføre systemet til H-form, og fordi man da må organisere matrisene på en annen måte. Det er usikkert om dette vil være noe som bør gjøres i en fremtidig versjon av FEMP.

Egenvektorene man får som resultat, må masse-normaliseres (slik at de oppfyller ligning 3.15- 3.16) før de kan brukes til å finne f.eks. den modale konstanten eller andre funksjoner:

```
do i=1,Mant
  U(1:nodes*fri1,1)=VECT(1:nodes*fri1,i)
  ff=matmul(matmul(transpose(U),mass),U)
  VECT(1:nodes*fri1,i)=VECT(1:nodes*fri1,i)/sqrt(ff(1,1))
end do
```

Nå er problemet løst, og egenverdier (enten resonans eller antiresonansfrekvenser, avhengig av hva det er spurt etter i problemdefinisjonen) ligger i vektoren $A1$. Massenormaliserte egenvektorer ligger i matrisen $VECT$.

E.1.6 Andre rutiner i F90-FEMP

Ovenfor er implementeringen av teorien utførlig beskrevet. Det som gjenstår etter at resonansfrekvenser/antiresonansfrekvenser og tilhørende egenvektorer er funnet, er å identifisere hvilke moder som er symmetriske, da det kun er disse som kan eksiteres elektrisk, og å lagre resultatene på en fil, slik at disse kan leses inn av MATLAB-versjonen av FEMP, og prosesseres der. Den modale konstanten og den alternative koblingsfaktoren er i teorien i seksjon 3.6.3 gitt som:

$$\begin{aligned} r_A(U_r) &= ([\hat{u}_r][H_{u\phi}])^2 \\ k_{surf}^2(U_r) &= -\frac{r_A(U_r)}{H_{\phi\phi}\omega_r^2} \end{aligned}$$

Disse størrelsene regnes ut i rutinen **TABELL** ved:

```
uthup=matmul(transpose(hup),VECT(1:nodes*fri1,i:i))
rA=uthup(1,1)*uthup(1,1)
kkk=-(rA/hpp(1,1)/A1(i))
```

der rA er den modale konstanten, og *kkk* er koblingsfaktoren kvadrert.

E.2 FEMP: MATLAB-versjonen

Som forklart ovenfor, kan MATLAB-versjonen av FEMP løse langt mer komplekse problemer enn det F90-versjonen kan. På grunn av plassmangel vil det ikke bli gått like mye i detaljer på implementeringen

Tabell E.4: Oversikt over de forskjellige funksjonene i MATLAB-versjonen av programmet FEMP som blir direkte kalt opp fra en av menyene i FEMP, og deres betydning. Mange funksjoner blir kalt opp fra flere menypunkter, slik at det velges hva som skal gjøres i funksjonen ut i fra en variabel som kan ha flere forskjellige verdier med en funksjonalitet knyttet opp mot hver verdi. Listen er alfabetisk sortert.

Funksjon	Meny	Forklaring
abaqus	Spesielt	Lager ABAQUS input-fil av problemet.
defburst	Funksjoner	Definerer en burst/bølgetog for transient-analyse
defgr	Problemdef.	Definerer mek. og elektr. grensebetingelser og materialtype
deftap	Problemdef.	Definerer tapsmodell og eventuellt tapskonstanter
dtkurve	Spesielt	Plotter frekvensspektrum
dynamel	Problemdef.	Dynamisk elementoppdeling for et element
femp		Hovedprogrammet som sette opp menyer osv.
impedans	Funksjoner	Plotter elektriske responsfu. på forskjellige måter
loadf90	Spesielt	Henter inn Fortran-90 resultat-fil
makef90	Spesielt	Lager en Fortran-90 inn-fil
modekons	Funksjoner	Plotter modal konstant og koblingsfaktor
modeplot	Funksjoner	Plotter forskyvning for en mode, animer forskyvning
nymat	Problemdef.	Definer et nytt materiale
respons	Funksjoner	Mekaniske responsfunksjoner
simuler	Simuler	Starter simulering - løser egenverdiproblemet
skrivpr	Probl. og Funksj.	Skriver ut problemdefinisjon/materialdefinisjon
stress	Funksjoner	Mekanisk spenningsanalyse
tabell	Funksjoner	Tabell over modal konstant, el. pr. bølgelenge, osv.
trans	Funksjoner	Transient analyse
viewmesh	Probl. og Funksj.	Viser elementoppdelingen grafisk
zr	Funksjoner	Plotter z_r, modal vekt-faktor.

av hele MATLAB-versjonen av FEMP som det ble gjort for F90-versjonen ovenfor. Istedenfor vil det her bli fokusert på hvilke muligheter programmet har, og hvilken del av teorien som er implementert i de ulike funksjonene. Rutinene som går utover det som er implementert i F90-versjonen av FEMP er ikke så grundig testet som den delen av programmet som også er implementert i F90. Disse delene av programmet er tenkt testet grundigere og videreutviklet på et senere tidspunkt, men er allikevel tatt med her for å vise hvordan det er mulig å løse en rekke forskjellige problemer ved hjelp av endelig element metoden, og hvordan dette kan implemeneteres på en relativt enkel måte. Alle funksjonene er testet en del, men ikke grundig nok til at man konkludere med at de regner riktig. Det er heller ikke funnet klare indikasjoner på at de regner feil.

Deler av funksjonene går direkte på brukergrensesnitt, som kompliserer funksjonene en del, og som er lite viktig i denne oppgaven. Meny-styringen gjør at de forskjellige funksjonene kan kalles opp når som helst av brukeren. Dette bidrar også til at det blir vanskeligere å se strukturen i programmet, og å forstå gangen i en simulering (når hvilke funksjoner blir kalt opp i løpet av en simulering), men forenkler bruken av programmet betraktelig. Hovedstrukturen i beregningsdelen av programmet er den samme som for F90-versjonen av FEMP, slik at det meste som er forklart om løsningen frem til det løste egenverdiproblemet i seksjon E.1, gjelder også for MATLAB-versjonen. Nedenfor følger en beskrivelse av de utvidete mulighetene i MATLAB-versjonen frem til egenverdiløsningen, og deretter en beskrivelse av de viktigste analyse-funksjonene.

I tabell E.4 er funksjonene som blir kalt opp direkte fra forskjellige meny-punkter listet opp, sammen med en kort beskrivelse av deres funksjon. Videre er det en del hjelpefunksjoner, som er listet opp i tabell E.5. De viktigste variablene i programmet er listet opp i tabell E.6 sammen med en liten beskrivelse av deres betydning. Variablene som har med elektriske og mekaniske grensebetingelser å gjøre er listet opp i tabell E.7. En del grafiske hjelpevariable er listet opp i tabell E.8.

Tabell E.5: Oversikt over de forskjellige hjelpe-funksjonene i MATLAB-versjonen av programmet FEMP (Alfabetisk sortert).

Funksjon	Forklaring
chose	Velger hvilken del av regionen som skal plottes
compute	Regner ut masse- og stivhetsmatriser og løser egenverdiproblemet
cstress	Mekanisk spenningsutregning for hele strukturen
cstressl	Mekanisk spenningsutregning for et enkelt element
cuthup	Regner ut $[u^T][H_{u\phi}]$ for alle egenmodene
cuuthup	Regner ut $[u][u^T][H_{u\phi}]$ for alle egenmodene
dirinit	Finner de enkelte materialkonstantene ut fra matrisene
femptext	Plotter opp startbilde
findfr	Finner TE, TS og LE-frevenser for frekvensspektrum-plott
fixelmf	Tar seg av elektriske og mekaniske grensebetingelser
fixloss	Tar seg av tapene definert av brukeren
fixmenu	Utelukker menyfunksjoner som ikke kan brukes for et spes. problem
fprosent	Plotter hvor langt man er kommet i samling av matrisene i compute
makemesh	Deler strukturen opp i elementer
masstiff	Finner masse- og stivhetsmatriser for et enkelt element
modifu	Modifiserer vektoren av forskyvninger der mekaniske frihetsgrader er fastsp.
move	Animerer en mode
rhold	Sjekkerer om brukeren vil at det skal plottes på neste plott eller ikke
shape	Regnerer ut interpolasjonsfunksjoner og deres deriverte for 4/8-noder
transcal	Hjelperutine for transient analyse som regner respons for en t.
vieweig	Viser svingeform
zrcalc	Hjelperutine for zr som regner for en frekvens/tid.

E.2.1 Kalkuleringsrutinene i MATLAB-FEMP

Den største forskjellen mellom de to versjonene er selvfølgelig at MATLAB-versjonen er meny-styrt, slik at en stor del av hovedprogrammet **FEMP** blir benyttet til å sette opp menyer, og knytte handlinger til de forskjellige punktene i menyene. For en del meny-punkter er handlingene funksjonskall. For andre menypunkter er handlingene et par kommandoer som skal utføres når menyen blir valgt, som for eksempel når det bare skal spørres om en ny verdi for en variabel. Disse kommandoene er da skrevet direkte i hovedprogrammet.

Det er følgende ekstrafunksjoner i MATLAB-versjonen av FEMP i forhold til F90-versjonen av FEMP, når det gjelder funksjoner som påvirker egenverdiløsningen:

- Det er mulig å utføre analyse på en struktur som består av mer enn et materiale. Et eksempel på dette er vist i seksjon 4.6.2, men denne funksjonen er heller ikke grundig nok gjennomtestet, selv om flere forskjellige resultater, blant annet sammenligninger med ABAQUS der egenverdier for sammensatte strukturer er utregnet, indikerer at rutinen virker som den skal.

  Noen av materialene kan være rent elastiske. Foreløpig er denne funksjonen begrenset til 3 forskjellige materialer, men det er trivielt å utvide dette til flere materialer. Innføringen av flere materialer gjøres ved at det i rutinen **MASSTIFF** regnes med forskjellige materialkonstanter for de forskjellige materialene. Dette er den eneste forandringen det er nødvendig å gjøre i kalkuleringsrutinene. Ofte vil det være naturlig at brukeren selv definerer beliggenheten til elektrodene her. I tillegg kommer en del administrative ting:

  - Valg av hvilket element som er av hvilket materiale blir gjort i rutinen **DEFGR**. Variabelen *Materialedef* blir her satt til 1 dersom brukeren har valgt at strukturen skal bestå av flere forskjellige elementer. Denne variabelen er ellers satt til null.
  - I matrisen EL blir det i tillegg til elementdefinisjonen beskrevet for F90-programmet lagret hvilket element som er av hvilket materiale.

Tabell E.6: De viktigste variablene i MATLAB-versjonen av programmet FEMP (Alfabetisk sortert). Denne listen omfatter kun variable som brukes i flere funksjoner, i hovedsak globale variable.

Variabel	Beskrivelse
d	Materialkonstanter for de 3 materialene (6x18)
EL	Elementdefinisjon (inkludert materiale i elementet)
elektr	Definerer hvilke materialer som er piezoelektriske
Elektrodef	1 for brukerdefinert elektrodedefinisjon, 0 for standard
elements	Antall elementer i strukturen
Fastspentdef	1 for brukerdefinert fastspentdefinisjon, 0 for standard
FFr	Vektor av frekvenser for de ulike modene
Fmaks	Maksimal frekvens som taes med i beregninger i modesuperpos. metoden
G1, G2	Koordinater som beskriver dim. til struktur. (1x2)
hpp	modifiser "elektrisk" stivhetsmatrise for den ene elektroden, $[H_{\phi\phi}]$
hup	modifiser "piezoelektrisk" stivhetsmatrise for den ene elektroden $[H_{u\phi}]$
huu	modifiser stivhetsmatrise $[H_{uu}]$
lengde	Kun "plane-strain". Lengde paa strukturen.
lint	lp^2, totalt antall Gauss-punkter
Loss	Tapsmodell - se rutine deftap, fixloss.
lp	Antall Gauss-integrasjonspkt. pr. koordinatretning.
materiale	Streng for materiale-navnene (3x5)
Materialedef	1 for brukerdefinert materialedefinisjon, 0 for standard
matnr	Hvilket materiale det sees på akkurat nå
mass	masse-matrisen for hele strukturen $[M_{uu}]$
nel	Antall noder pr. element
nodes	Antall noder i strukturen
plane	1 for "plane-strain", 0 for aksesymmetrisk problem.
Qm	Mekanisk Q-faktor.
Resonansfrekvenser	Settes til 1 for resonansfrekvenser, 0 for antires.
rho	Tettheten for materialene (1x3)
rr, zz	Antall elementer i r- og z-retning i strukturen.
sg, tg, wg	Gauss-integrasjonspkt. og vekter.
SymmetriskeModer	Bestemmer om kun symmetriske moder skal taes med i videre analyse
tande	Elektrisk tapsvinkel, $tande = tan\delta_e$
UU	Matrise som lagrer egenvektorene for modene
XL	Koordinatene til alle nodene

  - Rutinen **FIXELMF** setter automatisk alle elementer til materiale nummer 1 dersom ikke $Materialedef$ er satt til 1.
  - En rutine **NYMAT** som definerer et nytt materiale og lagrer dette på en fil, er laget.
  - Det er menypunkter for å hente inn materialdefinisjonsfiler for de 3 materialene.

- Brukeren kan definere grafisk hvilke noder som er på den jordete elektroden, og hvilke noder som er på den andre elektroden. Dette blir også gjort i funksjonen **DEFGR**. Dersom brukeren har valgt egne elektriske grensebetingelser, blir variabelen $Elektrodef$ satt til 1. Hvis $Elektrodef$ er lik null når funksjonen **FIXELMF** blir kalt opp, blir de elektriske grensebetingelsene satt på samme måte som i F90-versjonen. Det er ingen andre forskjeller i kalkuleringsrutinen i forbindelse med at andre elektriske grensebetingelser er valgt. Denne rutinen er ikke fullstendig testet, men det er gjort en del sammenligninger med resultater i [10] som virker lovende.
- Brukeren kan bestemme grafisk hvilke noder som skal være fastspent i hvilke koordinatretninger. Dette gjøres i funksjonen **DEFGR**. Når en node er fastspent i en koordinatretning, blir denne forskyvningskomponenten i denne koordinatretningen for noden satt til null. Det vil i praksis si at rekkene og søylene som svarer til denne forskyvningskomponenten i masse- og stivhetsmatrisene

Tabell E.7: Variablene i MATLAB-versjonen av programmet FEMP som definerer hvilke noder som ligger på elektrodene, hvilke noder som har elektriske frihetsgrader, og hvilke noder som er fastspent i en koordinatretning.

Variabel	Beskrivelse
nullel	liste av noder paa elektrode med null potensial
elektro	liste av noder som er paa andre elektroden
igjen	liste av andre noder med elektrisk potensial
vekku	liste av mek. frihetsgrader som er bundet
igjenu	liste av mek. frihetsgrader som ikke er bundet
mediet	liste av noder mot mediet
side	liste av noder paa siden av transduser

Tabell E.8: Grafiske hjelpevariable i MATLAB-versjonen av FEMP

Variabel	Beskrivelse
curr	Figur nr. som det tegnes i akkurat naa.
hcheck	Grafisk hjelpevariabel for hold-plott-meny.
grid	Velger plottemetode ved modeplott.
Hele	Velger plottemetode ved animering ++, se 'chose'.
currt	Linjetype og farge for neste plott

må fjernes fra systemet. Dette gjøres i rutinen **COMPUTE** ved at det kun regnes med rekker og søyler for forskyvningskomponenter som ikke er satt til null:

```
huu=huu(igjenu,igjenu);
mass=mass(igjenu,igjenu);
kup=kup(igjenu,:);
```

der *igjenu* er en vektor med forskyvningskomponentene som ikke er satt til null (dvs. fastspent). Ved modeplott må man senere putte inn nuller på riktige steder i egenvektorene før disse kan plottes på vanlig måte. Dette gjøres i rutinen **MODIFU**.

- Det er laget en funksjon for dynamisk elementoppdeling, **DYNEL**, som spør etter en maksimal frekvens, og krav for elementer pr. bølgelengde i hver koordinatretning, og ut fra dette deler strukturen opp i elementer på en slik måte at dette kravet er oppfylt. Teorien bak dette er beskrevet i seksjon 5.2. Denne funksjonen vil ikke gi gode resultater for lave D/T-forhold (D/T mindre enn ca. 2).
- Det er implementert 4-noders isoparametriske elementer i tillegg til de 8-noders isoparametriske elementene beskrevet i Fortan-90 versjonen. Utregningen av elementoppdelingen for denne elementtypen er inkludert i funksjonen **MAKEMESH**. Utregningen av interpolasjonsfunksjoner er inkludert i funksjonen **SHAPE**.
- Det er mulig å velge et annet antall Gauss-integrasjonspunkter enn 3 i hver koordinatretning. Det benyttes en egen rutine for utregning av Gauss-integrasjonspunkter. Antallet Gauss-integrasjonspunktet i hver koordinatretning blir bestemt i variabelen *lp*, og totalt antall Gauss-integrasjonspunkter i variabelen *lint*. Gauss-integrasjonspunkter og vekter er uansett lagret i vektorene sg, tg og wg.
- Det er mulig å gi komplekse materialkonstanter (fullt sett, med anisotrope tap) både for egenverdiutregningen, og for påfølgende analyse. Dette blir gjort i rutinen **NYMAT** og i rutinen **DEFLOSS**. Denne funksjonen er ikke grundig nok testet, selv om det er foretatt en del enkle testsimuleringer, og MATLAB automatisk regner med komplekse variable, slik at det skal være svært enkelt å implementere denne tapsmodellen.

Bortsett fra disse forskjellene, er kalkuleringsdelen av programmene nærmest identisk. Prosedyrene har også (med noen få unntak) samme navn, slik at det er lett å foreta en sammenligning.

Nedenfor følger en beskrivelse av de ulike analyse-metodene som finnes i FEMP. Det er satt av en seksjon for hvert hovedmeny-punkt som det er knyttet en funksjon til. Rutiner som utskrift, og figurmanipulasjon som går direkte på MATLAB sine egenskaper, er ikke beskrevet. Heller ikke enkle rutiner som utskrift av problemdefinisjon og visning av elementoppdeling, der det ikke foregår noen beregninger.

E.2.2 Tabeller

Rutinen **TABELL** er knyttet til de to menypunktene under "Tabell". Her skrives det ut en tabell med frekvens og modal konstant for hver mode. I tillegg skrives det ut antall elementer pr. bølgelengde i de forskjellige koordinatretningene (r-retningen, z-retningen (skjærbølgelengde) og z-retningen (kompresjonsbølgelengde) eller gjennomsnittsforskyvning på flaten i tykkelsesretningen, gjennomsnittsforskyvning på flaten i radiell retning og koblingsfaktoren, alt etter hva som er valgt av brukeren i menyen.

Den modale konstanten regnes ut etter ligning 3.52 og koblingsfaktoren (for overflatepotensialet, kalt $k_{surf}(U_r)$ i teorien) etter ligning 3.84 i følgende programlinjer:

```
cuthup;
rA=UTHUP.^2;
Ksq=-rA./(2*pi*FFr(1:length(rA))).^2/hpp;
```

Gjennomsnittsforskyvningen på de forskjellige flatene regnes ut fra ligning 3.101, for responsen dersom man antar at kun en enkelt mode bidrar til responsen, slik at man benytter ligning 3.50 der r kun er lik modenummeret og $\omega = \omega_r$. Dette blir gjort i følgende programlinjer:

```
cuuthup;
U=phi0*UUTHUP(:,ii)/(g*omega^2);
uavz=abs(sum(U(2*mediet))/length(mediet));
uavr=abs(sum(U(2*side-1))/length(side));
```

der *mediet* er en vektor bestående av noder som er på flaten mot mediet i tykkelsesretningen, og *side* er en vektor bestående av noder som ligger på flaten ved $r = r_{max}$.

Antall elementer pr. bølgelengde i de forskjellige koordinatretningene regnes ut fra ligningene beskrevet i seksjon 5.2. For utregningen av antall elementer pr. bølgelengde i radiell retning, blir den planare bølgehastigheten c_p benyttet. I tykkelsesretningen blir både kompresjonsbølgehastigheten og skjærbølgehastigheten benyttet. Alle disse bølgehastighetene gjelder egentlig bare for uendelig tynne skiver, men vil gi en bra tilnærmelse langt ned i D/T-forhold. For lave D/T-forhold (mindre enn 1) er disse verdiene ikke så mye å stole på (se forøvrig diskusjon i seksjon 5.2.

E.2.3 Modeplott

Rutinen **MODEPLOT** er knyttet til de tre menypunktene under "Modeplott". For hvert plott av en svingeform kalles rutinen **VIEWEIG** opp. Denne rutinen plotter forskyvningen fra den opprinnelige posisjonen for hver enkelt node. For animering av moder kalles funksjonen **MOVE** opp. Dette er enkle funksjoner uten større beregninger.

E.2.4 Elektriske responsfunksjoner

Rutinen **IMPEDANS** er knyttet til de tre menypunktene under "Elektriske responsfunksjoner". I denne rutinen er det samlet tre forskjellige måter å regne ut de elektriske (harmoniske) responsfunksjonene på:

- Ved analyse med **modesuperposisjonsmetoden** benytter man teorien beskrevet i seksjon 3.2.1 til å regne ut impedans/admittans for et frekvensområde. Admittansen regnes ut etter ligning 3.51. For en frekvens f gjøres dette ved følgende programlinjer:

  ```
  omega=2*pi*f;
  Y=i*omega*(sum((rA(1:Nut)./((2*pi*FFr(1:Nut)).^2*(1+i*g)-omega.^2)))-hpp);
  ```

  der *Nut* er antall moder som taes med ved modesuperponeringen, $g = 1/Q_m$ beskriver tapene, og betydningen av de andre variablene er forklart tidligere i teksten.

- Ved analyse med den **direkte metoden** benytter man teorien beskrevet i seksjon 3.2.2 til å regne ut impedans/admittans for et frekvensområde. Admittansen regnes ut etter ligning 3.54. For en frekvens f gjøres det ved følgende programlinjer:

  ```
  omega=2*pi*f;
  D=huu*(1+i*g)-omega^2*mass;
  Y=-(i*omega*(hpp-hup'*inv(D)*hup));
  ```

  der størrelsene som inngår er beskrevet tidligere i teksten.

- Ved analyse med **Mason-modellen** benyttes Mason-modellen til å regne ut den elektriske responsen til strukturen for TE-moden. I Mason-modellen blir det antatt at skiven er tynn, slik at denne modellen ikke vil gi en god beskrivelse for lave D/T-verdier. Mason-modellen som er implementert her er beskrevet i [36]. En kort oppsummering av ligningene som er implementert:

  $$\begin{aligned} Y &= \frac{i\omega C_0}{1-k_t^2\frac{\tan k_m l/2}{k_m l/2}} \qquad \text{(E.14)} \\ C_0 &= \frac{\epsilon_{33}^S A}{l} \qquad \text{(E.15)} \\ k_t^2 &= \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S c_{33}^D} \qquad \text{(E.16)} \\ k_m &= \frac{\omega}{c_m} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}} \qquad \text{(E.17)} \end{aligned}$$

  Her er l tykkelsen til skiven og A arealet til skiven. Tapene er i programmet regnet ut fra $\hat{c}_{33}^D = c_{33}^D \cdot (1+i/Q_m)$, der c_{33}^D enten kan oppgis av brukeren, eller regnes ut utifra materialkonstantene i $[c^E]$-, $[e]$- og $[\epsilon^S]$-matrisene. Omregningsformler kan finnes i [41].

  I programmet gjøres dette i følgende programlinjer for hele frekvensområdet:

  ```
  c33D=c33D*(1+i/Qm);
  kt2=e33^2/(eps33*c33D);
  cm=sqrt(c33D/rho(matnr));
  C0=eps33*A/l;
  kml2=2*pi*FF/cm*(l/2);
  YY=i*2*pi*FF.*C0./(1-kt2*tan(kml2)./kml2);
  ```

  Der FF er en vektor med frekvenser, $rho(matnr)$ er tettheten for materialet og Qm er den mekaniske Q-faktoren.

E.2.5 Mekanisk respons

Rutinene **RESPONS**, **ZR** og **MODEKONS** er knyttet til de fire menypunktene under "Mekanisk respons". Funksjonene regner ut størrelser som er beskrevet i teorien i seksjon 3.2.1. Forskyvningen i de enkelte nodene, som benyttes i menypunktet "Svingeform", regnes ut fra ligning 3.50, og gjennomsnittsutsvinget som regnes ut og plottes i menypunktet "Gjennomsnittlig forskyvning", regnes ut fra ligning 3.101. Den modale vekt-faktoren z_r som plottes som funksjon av frekvensen i menypunktet "Modal vekt-faktor", regnes ut fra ligning 3.49. Den modale konstanten og koblingsfaktoren som plottes i menypunktet "Eksitering av moder" regnes ut i ligning 3.52 og ligning 3.84. For beskrivelse av utregningen av modal konstant og koblingsfaktor, se seksjon E.2.2.

Før forskyvningen plottes, regnes det ut for hvilken tid forskyvningen er maksimal. Forskyvningsresponsen for denne maksimale tiden regnes ut i følgende programlinjer:

```
for j=1:Nuut
  nev=nev+(UUTHUP(:,j)/((2*pi*FFr(j))^2*(1+i*g)-omega^2));
end;
% Finn den tiden som gir maksimalt utsving.
UY=[0:0.01:1];AA=[];
for y=UY;AA=[AA sum(abs(real(nev*exp(i*y*pi))))];end
[dum,idum]=max(AA);
U=real(nev*exp(i*pi*UY(idum)));
```

E.2.6 Transient analyse

Rutinene **TRANS** og **ZR** er knyttet til de to menypunktene under "Transient analyse". Disse funksjonene regner ut den transiente responsen for strukturen etter ligninger beskrevet i seksjon 3.7.1. Funksjonene regner ut den transiente responsen ved hjelp av Duhamel-integralet etter ligning 3.93 for spenningseksitasjoner som er slik at Duhamel-integralet kan finnes analytisk [5]. For impulsresponsen (menypunkt "Impulsrespons") benyttes ligningene 3.95 og 3.97. Ligningene som brukes for et bølgetog (menypunkt "burst") er ikke tatt med her, men en løsningsmetoden er skissert i seksjon 3.7.1. Utregningen av responsen for en tid t og noder beskrevet av vektoren *chosen* utføres i rutinene **ZRCALC** og **TRANSCAL**. Siden transient-analysen ikke har vært et av de viktigste punktene i oppgaven, er det ikke benyttet mye tid på å utvikle disse funksjonene. Det vil derfor heller ikke bli tatt med detaljer omkring implementeringen av transient-analysen. Interesserte kan sammenligne rutinene **TRANS**, **ZR**, **ZRCALC** og **TRANSCAL** med teorien i seksjon 3.7.1 for impulsresponsen.

Sammenligninger med resultater fra [10] indikerer allikevel ikke at det er feil i implementeringen.

E.2.7 Mekanisk spenningsanalyse

Rutinen **STRESS** er knyttet til de tre menypunktene under "Mekanisk spenningsanalyse". I denne funksjonen er teorien fra seksjon 3.3 implementert.

Rutinen benytter enten den mekaniske responsen for frekvensen til en bestemt mode (med tap) regnet ut ved hjelp av ligning 3.50, eller egenvektoren for moden, til å regne ut hvilken forskyvning av strukturen den mekaniske spenningen skal regnes ut for. Den elektriske spenningsfordelingen i skiven for denne forskyvningen blir regnet ut fra ligning 2.196, og underrutinen **CSTRESSL** blir benyttet til å regne ut den mekaniske spenningen for Gauss-integrasjons-punktene i hvert enkelt element ved hjelp av ligning 3.31. Rutinen **CSTRESS** samler ut fra dette den mekaniske spenningsfordelingen i hele strukturen, som deretter kan bli plottet på flere forskjellige måter.

E.2.8 Spesielt-menyen

I menyen "Spesielt" er det en del funksjoner som er uavhengig av resten av funksjonene i FEMP. Disse funksjonene lager filer som eksporteres til F90-versjonen av FEMP, henter inn resultatfiler fra F90-versjonen av FEMP, og plotter et frekvensspektrum (dvs. D/T mot f*T) ut fra disse dataene. Dette er tilleggsfunksjoner som kunne vært plassert i et eget program. Funksjonene som blir brukt her er:

- **MAKEF90** lager en "input-fil" for F90-programmet. Her er det mulig å benytte seg av dynamisk elementoppdeling, slik at antall elementer for hver skive blir regnet ut utifra krav om et visst antall elementer pr. bølgelengde.
- **LOADF90** henter inn en resultat-fil fra F90-programmet.
- **ABAQUS** lager en ABAQUS "input-fil" for et gitt problem.
- **DTKURVE** plotter et frekvensspektrum, enten som frekvens*Tykkelse mot D/T, normalisert frekvens mot D/T, eller koblingsfaktor mot D/T. Dette er en svært enkel plotte-rutine som bare plotter resultater fra F90-versjonen av FEMP direkte. Det er også mulig å plotte størrelsen av den alternative koblingsfaktoren (k_{surf}) eller den modale konstanten (normalisert for hver skive) som sirkler med varierende radius på plottet.

  Denne funksjonen benytter seg også av rutinen **FINDFR** som finner LE/TS/TE-frekvensen predikert av 1D-modeller, og plotter dem på frekvensspekteret. Disse frekvensene er regnet ut etter følgende formler:

  - **LE:** I [22] er antiresonansfrekvensen for en LE-bar (Length Expander Bar) med elektrisk felt parallelt med lengden, gitt som:

$$f_a = \frac{v_b^D}{2l} = \frac{1}{2l\sqrt{\rho s_{33}^D}} \tag{E.18}$$

der l er lengden. Forholdet mellom resonansfrekvens og antiresonansfrekvens er gitt ut fra følgende formel:

$$\frac{\pi}{2}\frac{f_r}{f_a}cot\frac{\pi}{2}\frac{f_r}{f_a} = k_{33}^2 \qquad \text{(E.19)}$$

som er løst for resonansfrekvensen i programmet.

- **TE:** I [22] er antiresonansfrekvensen for TE-moden ("Thickness expander mode") for en tynn piezoelektrisk plate gitt som:

  $$f_a = \frac{v^D}{2t} = \frac{1}{2t}\sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} \qquad \text{(E.20)}$$

  der t er tykkelsen. Forholdet mellom resonans- og antiresonansfrekvens er gitt ved ligningen:

  $$k_t^2 = \frac{\pi}{2}\frac{f_r}{f_a}cot\frac{\pi}{2}\frac{f_r}{f_a} \qquad \text{(E.21)}$$

  som er løst for resonansfrekvensen i programmet.

- **TS:** I [6] er resonansfrekvensen for TS-moden (Tykkelses-skjær moden, helbølge-resonans) for en tynn piezoelektrisk plate gitt som:

  $$f_r = \frac{v_{44}^E}{t} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{c_{44}^E}{\rho}} \qquad \text{(E.22)}$$

  som er regnet ut i programmet.

Alle størrelsene som inngår i ligningene ovenfor er regnet ut utifra materialkonstantene i $[c^E]$-, $[e]$- og $[\epsilon^S]$-matrisene. Omregningsformler kan finnes i [41].

Vedlegg F

Programlisting

Her følger programlistingen for programmet FEMP som er en implementering av endelig element metoden for aksesymmetriske piezoelektriske problemer. Programmene er listet alfabetisk. Hovedprogrammet heter FEMP.

F.1 FEMP for MATLAB

F.1.1 abaqus

```
% ABAQUS.M : Lager ABAQUS input-fil av problemdef.

% Benytter foelgende funksjoner :
% dirinit

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp


% Denne filen lager en abaqus-fil av problemet det blir
% sett paa. Denne funksjonen kan kun haandtere strukturer
% av et materiale uten bundete frihetsgrader, med elektroder
% paa z=zmin og z=zmax - kun resonansfrekvenser.


% I funksjonen dirinit blir variablene c11, c12, osv.
% definert ut fra matrisen d.
fprintf('Bruker materiale nr. 1, %s\n',materiale(1,1:5));
matnr=1;dirinit
antall=90;

zmax=G2(1);
rmax=G1(2);

% Aapne en fil for skriving.
if Materialedef | Elektrodef | Fastspentdef | elektr(1)==0 | plane==1 | nel~=8
  fprintf('Virker kun for enkelt piezoelektrisk 8-noders aksesymmetrisk standard-problem!\n');
  return;
end;
fprintf('Lager Abaqus input-fil :\n');
[fname,pname]=uiputfile('*.inp','Lagre Abaqus input-file');
if fname~=0,
```

```
  fip=fopen([pname fname],'w');

  fprintf(fip,'*HEADING \n');
  fprintf(fip,'Piezoelectric test-problem \n');
  fprintf(fip,'*NODE \n');
  fprintf(fip,'1,0.,0. \n');
  fprintf(fip,'%d, %8.5f, 0. \n',(2*rr)+1,zmax);
  fprintf(fip,'%d, 0., %8.5f \n',(2*zz*100)+1,rmax);
  fprintf(fip,'%d, %8.5f, %8.5f \n',(2*zz*100)+1+(2*rr),zmax,rmax);
  fprintf(fip,'*NGEN, NSET=IN \n');
  fprintf(fip,'1, %d \n',(2*rr)+1);
  fprintf(fip,'*NGEN, NSET=OUT \n');
  fprintf(fip,'%d, %d \n',(2*zz*100)+1,(2*zz*100)+1+(2*rr));
  fprintf(fip,'*NFILL, NSET=ALLN \n');
  fprintf(fip,'IN, OUT, %d, 100 \n',2*zz);
  fprintf(fip,'*ELEMENT,TYPE=CAX8E\n');
  fprintf(fip,'1, 1,3,203,201,2,103,202,101\n');
  fprintf(fip,'*ELGEN, ELSET=ALL\n');
  fprintf(fip,'1,%d,2,1,%d,200,100\n',rr,zz);
  fprintf(fip,'*SOLID SECTION, MATERIAL=PZT, ELSET=ALL\n');
  fprintf(fip,'*MATERIAL, NAME=PZT\n');
  fprintf(fip,'*ELASTIC, TYPE=ORTHO\n');
  c32=c23;
  fprintf(fip,'%8.4e,%8.4e,%8.4e,%8.4e,%8.4e,%8.4e,%8.4e,\n',c11,c13,c33,c12,c32,c22,c55);
  %fprintf(fip,'%8.4e,%8.4e,%8.4e,%8.4e,%8.4e,%8.4e,%8.4e,\n',c11,c12,c22,c13,c23,c33,c55);
  fprintf(fip,'%8.4e,%8.4e\n',c66,c44);
  fprintf(fip,'*PIEZOELECTRIC, TYPE=S\n');

  % e11,e13,e12,e15,e16,e14,e31,e33,e32,e35,e36,e34,e21,e23,e22,e25,e26,e24
  fprintf(fip,'0.,0.,0.,%8.4e,0.,0.,%8.4e,%8.4e\n',e15,e31,e33);
  fprintf(fip,'%8.4e,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.\n',e32);
  fprintf(fip,'0.,%8.4e\n',e15);

% fprintf(fip,'0.,0.,0.,0.,%8.4e,0.,0.,0.\n',e15);
% fprintf(fip,'0.,0.,0.,%8.4e,%8.4e,%8.4e,%8.4e,0.\n',e24,e31,e32,e33);
% fprintf(fip,'0.,0.\n');

  fprintf(fip,'*DIELECTRIC, TYPE=ANISOTROPIC\n');
  fprintf(fip,'%9.5e,0.,%9.5e,0.,0.,%9.5e\n',eps11,eps33,eps22);
  %fprintf(fip,'%9.5e,0.,%9.5e,0.,0.,%9.5e\n',eps11,eps22,eps33);
  fprintf(fip,'*DENSITY\n');
  fprintf(fip,'%6.3e\n',rho(1));
  fprintf(fip,'*NSET, NSET=ELECTROD,GEN\n');
  fprintf(fip,'1,%d\n',(2*rr)+1);
  fprintf(fip,'*NSET, NSET=BOTTOM,GEN\n');
  fprintf(fip,'%d,%d\n',(2*zz*100)+1,(2*zz*100)+(2*rr)+1);
  fprintf(fip,'*NSET, NSET=MIDDLE,GEN\n');
  fprintf(fip,'%d,%d\n',(zz*100)+1,(zz*100)+(2*rr)+1);
  for i=0:2*rr
    for j=0:zz-1
    fprintf(fip,'*EQUATION\n');
    fprintf(fip,'2\n');
    fprintf(fip,'%d,2,1.0,%d,2,1.0\n',(j*100)+1+i,((2*zz-j)*100)+1+i);
    fprintf(fip,'*EQUATION\n');
    fprintf(fip,'2\n');
    fprintf(fip,'%d,1,1.0,%d,1,-1.0\n',(j*100)+1+i,((2*zz-j)*100)+1+i);
   end
  end
  fprintf(fip,'*BOUNDARY\n');
```

```
  fprintf(fip,'BOTTOM,9\n');
  fprintf(fip,'ELECTROD,9\n');
  fprintf(fip,'MIDDLE,2\n');
  fprintf(fip,'*STEP, PERT\n');
  fprintf(fip,'*FREQUENCY\n');
  fprintf(fip,' %d,,2.0E4,,50\n',antall);
  fprintf(fip,'*EL PRINT, FREQUENCY=0\n');
  fprintf(fip,'*NODE PRINT, FREQUENCY=0\n');
  fprintf(fip,'*MODAL FILE\n');
  fprintf(fip,'*ENDSTEP\n');
end;
```

F.1.2 chose

```
% CHOSE.M : Finner hvilken del av strukturen som skal plottes/animeres

% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% uavkurve, move, trans

% Variabelen 'Hele' settes i femp under menyen 'figur, plott-metode
% for svingeform'. Den bestemmer om hele strukturen eller kun en del
% av strukturen skal plottes ved animert modeplott, impulsrespons
% og lignende.
% Dersom Hele er lik 1, vises hele strukturen. Dersom Hele er lik
% 0 vises fronten og siden av strukturen. Dersom Hele er lik 2 vises
% kun fronten av strukturen. Dersom Hele er lik 3, vises hele
% omkretsen av strukturen. Funksjonen plukker ut de mekaniske
% frihetsgradene som skal plottes (og som det skal regnes for),
% og legger disse i variabelen chosen. Koordinatene til disse
% frihetsgrdene legges i variabelen nyXL dersom Hele er forskjellig
% fra 1.
% For aa finne hvilke noder/frihetsgrader som ligger paa fronten/siden
% av strukturen, brukes variablene mediet, side, null osv. som er
% definert i fixelmf.

% Ut-variable : nyXL og chosen.

global Hele nullel elektro side mediet igjen XL;

if Hele==[]
  Hele=1;
end;
if Hele==1
  chosen=[1:size(XL,2)*2];
  nyXL=XL;
else
  nnull=nullel(length(nullel):-1:1);
  nyelektro=[elektro*2-1 elektro*2];
  nynull=[nnull*2-1 nnull*2];
  nyside=[side*2-1 side*2];
  if Hele==0
    chosen=[mediet*2-1 side*2-1 mediet*2 side*2];
    nyXL=[XL(1,mediet) XL(1,side) XL(2,mediet) XL(2,side)];
  elseif Hele==2
    chosen=[mediet*2-1 mediet*2];
```

```
    nyXL=[XL(1,mediet) XL(2,mediet)];
  elseif Hele==3
    chosen=[mediet*2-1 side*2-1 nnull*2-1 mediet*2 side*2 nnull*2];
    nyXL=[XL(1,mediet) XL(1,side) XL(1,nnull) XL(2,mediet) XL(2,side) XL(2,nnull)];
  end
end
```

F.1.3 compute

```
% COMPUTE : Kalkuleringsrutinen i programmet FEMP.
%

% Benytter foelgende funksjoner :
% masstiff, femptext, fprosent

% Benyttes i foelgende funksjoner :
% simuler

% Funksjonen compute regner ut globale masse- og stivhetsmatriser
% for et problem som er definert ved hjelp av menyen 'Problemdef'
% i programmet FEMP. Deretter blir mekaniske og elektriske
% grensebetingelser paafoert, og egenverdier og egenvektorer for
% problemet regnet ut. Disse blir returnert i vektoren A1 og
% matrisen VECT.

% Null-still global stivhetsmatrise (huu), global piezoelektrisk
% stivhetsmatrise (kup), global dielektrisk stivhetsmatrise (kpp)
% og global masse-matrise (mass).
% Vi bruker her variabelnavnet huu istedenfor kuu for aa slippe aa
% definere begge matrisene (matlab har ikke pekere).
huu=zeros(nodes*fri1,nodes*fri1);
kup=zeros(nodes*fri1,nodes);
kpp=zeros(nodes,nodes);
mass=huu;

% Vis grafisk hvor langt elementberegningen er kommet.
figure(1);cla;
x=0.05;y=0.85;
text(x,y,'Regner ut K & M - Matriser','FontSize',20);hold on;

% Loekke for alle elementene i strukturen der de lokale stivhets-
% og massematrisene blir regnet ut for hvert element. Deretter
% blir de globale stivhets- og massematrisene oppdatert.

for i=1:elements

  % Vis hvor langt man er kommet i beregningene grafisk
  x=0.05;y=0.25;b=0.9;h=0.14;
  fprosent(i,elements,x,y,b,h);

  % Definer xl, som er nodedefinisjonen for element nr. i. Denne finnes ut
  % fra at EL(i,1:nel) angir hvilke noder som inngaar i element nr. i, og
  % XL(:,gl_node) inneholder koordinatene til den globale node nr. gl_node.
  % Foelgelig vil XL(k,EL(n,i)) gi koordinat nr. k for node nr. n i element
  % nr. i.
  % Lengden paa xl avhenger av antallet noder for elementet nel.
  xl=XL(:,EL(i,1:nel));
```

```
  % Funksjonen masstiff regner ut de lokale stivhets- og massematrisene
  % kuul,kupl,kppl,massl for element nr. i.
  [kuul,kupl,kppl,massl]=masstiff(xl,EL(i,nel+1));

  % Loekke over kombinasjonen av alle noder i element nr. i. I denne
  % loekken blir de globale matrisene oppdatert ut fra verdien paa de
  % lokale matrisene som ble regnet ut ovenfor.
  for m=1:nel
    for n=1:nel
      x1f=fri1*EL(i,m)-fri1+1;x1t=x1f+fri1-1;
      x2f=fri1*EL(i,n)-fri1+1;x2t=x2f+fri1-1;
      x1fl=fri1*m-fri1+1;x1tl=x1fl+fri1-1;
      x2fl=fri1*n-fri1+1;x2tl=x2fl+fri1-1;

      huu(x1f:x1t,x2f:x2t)=huu(x1f:x1t,x2f:x2t)+kuul(x1fl:x1tl,x2fl:x2tl);
      kup(x1f:x1t,EL(i,n))=kup(x1f:x1t,EL(i,n))+kupl(x1fl:x1tl,n);
      kpp(EL(i,m),EL(i,n))=kpp(EL(i,m),EL(i,n))+kppl(m,n);
      mass(x1f:x1t,x2f:x2t)=mass(x1f:x1t,x2f:x2t)+massl(x1fl:x1tl,x2fl:x2tl);
    end;
  end;
end;

% Naa er de globale masse- og stivhetsmatrisene som gjelder for et
% piezoelektrisk materiale uten grensebetingelser funnet, og ligger
% i matrisene huu, kup, kpp og mass. Restene av de lokale matrisene
% blir fjernet fra minnet.
clear kuul kupl kppl massl

% De mekaniske grensebetingelsene paafoeres ved at frihetsgradene
% som er satt til null blir fjernet (vekku), og man kun sitter
% igjen med de resterende frihetsgradene (igjenu).
huu=huu(igjenu,igjenu);
mass=mass(igjenu,igjenu);
kup=kup(igjenu,:);

if length(igjen)>0
  % Naar length(igjen)>0 er det minst en node som har elektrisk potensial,
  % slik at vi regner med det piezoelektriske tilfellet.

  % Dersom vi ser paa et piezoelektrisk materiale, maa vi
  % benytte de elektriske grensebetingelsene (sette potensialet
  % til null paa den ene elektroden, og definere den andre elektroden
  % som en ekvipotensiell flate).


  % Skill ut matriser for elektrode med den andre elektroden

  % TMP-rutine
% K=[huu kup;
% kup' kpp];
% K=K([igjenu nodes*fri1+igjen],[igjenu nodes*fri1+igjen]);
% M=[mass zeros(nodes*fri1,length(igjen));
% [zeros(length(igjen),nodes*fri1) zeros(length(igjen),length(igjen))]];
% return;

  kuP=kup(:,elektro);
  kiP=kpp(igjen,elektro);
  kPP=kpp(elektro,elektro);
```

```
  % Skill ut matriser for noder med elektrisk potensial utenfor elektroder.
  kui=kup(:,igjen);
  kii=kpp(igjen,igjen);


  % Skill ut matriser for den jordete elektroden :
  kug=kup(:,nullel);
  kig=kpp(igjen,nullel);
  kPg=kpp(elektro,nullel);
  % Lagre en del av disse matrisene for enkelte beregninger.
  % save kmatriser kug kig kii kui kPg kiP kuu kuP


  clear kup kpp
  % Lagrer massematrisen paa harddisk for aa spare minne-plass.
  save massmat mass
  clear mass % Og fjerner denne fra minnet

  ikii=inv(kii);
  % Lagrer matriser som trengs i rutinen stress
  save deltakuu kui ikii kii kiP kuP kPP
  clear kii

  % Foerer ligningssysteket over paa H-form
  huu=huu-kui*ikii*kui';
  hup=(kuP-kui*ikii*kiP)*ones(size(kuP,2),1);
  hpp=sum(sum(kPP-kiP'*ikii*kiP));
  clear kui kiu kuP kPu kii ikii kPP kug kig kPg kiP

  % Henter mass-matrisen inn igjen.
  load massmat.mat
  if isunix % slett filen etterpaa.
    !rm masmat.mat
  end
  save hmatriser huu hup hpp mass Loss igjen Resonansfrekvenser


  clear hup hpp

else    % Elastiske tilfelle
  % Her er kuu=huu.
  save hmatriser huu mass Loss igjen
end;

% Skriv opp at utregning av egenverdier er paabegynt.
x=0.05;y=0.85;
cla;
text(x,y,'Regner ut egenverdier','FontSize',20);
drawnow;


% For minne-kritiske maskiner :
save all;clear;load hmatriser;

if length(igjen)>0
  % Regn ut resonans- eller antiresonansfrekvenser avhengig av
  % stoerrelsen paa variabelen Resonansfrekvenser.
  if Resonansfrekvenser==1
    % Resonansfrekvenser i det piezoelektriske tilfellet
```

```
    huu=huu;
  else
    % Antiresonansfrekvenser i det piezoelektriske tilfellet
    huu=huu-(hup*inv(hpp)*hup');
  end
  clear hup;
end;

% Loes egenverdiproblemet.

[VECT EIGEN]=eig(huu,mass);
if Loss==0 | Loss==3
  EIGEN=real(EIGEN);
  VECT=real(VECT);
end;

clear huu mass;
% Egenverdiene blir lagt paa diagonalen. Legg f=sqrt(lambda/(2*pi)) inn
% i vektoren A1.
EIGEN=EIGEN/4/pi^2;
A1=sqrt(diag(EIGEN));
clear EIGEN;

% For minne-kritiske maskiner :
load all
% Etter at variablene er slettet maa de globale settes paa nytt
global rr zz nel materiale d lp lint G1 G2 nodes elements rho grid elektr;
global sg tg wg Resonansfrekvenser Qm tande Loss;
global Grafisk hcheck curr Hele plane fri fri1;
global igjen elektro nullel igjenu vekku side mediet Fastspentdef;
global Materialedef Elektrodef lengde XL EL modeanimer;
clear huu
if isunix
  !rm all.mat
end;

% Sett opp startbilde paa skjermen igjen :
cla;femptext;hold off;i=sqrt(-1);
```

F.1.4 cstress

```
function [stressg,straing,koordg]=cstress(EIG,PHI,XL,EL,antpkt)
% CSTRESS : Kalkuler spenning/toyning i gauss-integrasjons-punkter
% for en gitt forskyvning og elektrisk spennings-fordeling


% Benyttes av foelgende funksjoner :
% stress

% Benytter foelgende funksjoner :
% cstressl, grule2d

% globale variable :
global rr zz nel materiale G1 G2 nodes elements rho igjen;
global d elektr fri fri1;

% Spenningen regnes ut mest noeyaktig i gauss-integrasjonspunktene
```

```
% av en orden lavere enn den som gir full integrasjon for elementet.
% Antar her at det benyttes full integrasjon, og velger en grad under
% det som benyttes i elementintegrasjonen. I andre tilfeller boer
% programmet modifiseres her!

lint1=antpkt^2;sg1=[];tg1=[];wg1=[];
[s,t,w]=grule2d(antpkt,antpkt);
for i=1:size(s,1)
   sg1=[sg1 s(i,:)];
   tg1=[tg1 t(i,:)];
end


stressg=[];straing=[];koordg=[];
% Gaar inn i en loekke for alle elementene.
for i=1:elements

   % Bestem koordinater og forskyvning og potensial for
   % nodene i hvert enkelt element
   xl=[XL(:,EL(i,1:nel))];
   delta=[EIG(EL(i,1:nel)*2-1)';EIG(EL(i,1:nel)*2)'];
   delta=reshape(delta,1,16);
   if size(igjen)>0
      phi=PHI([EL(i,1:nel)]);
   else
      phi=0;
   end;

   % Regn ut spenning, toeyning og koordinatverdi i gauss-integrasjonspunktene
   % for det enkelte elementet, og lagre disse i matrisene stressg,
   % straing og koordg.
   matnr=1; % Ser kun paa et materiale
   [stressl,strainl,koordl]=cstressl(xl,delta,phi,sg1,tg1,d(1:6,1:6+matnr*6-6));
   stressg=[stressg stressl];
   straing=[straing strainl];
   koordg=[koordg koordl];

end;
```

F.1.5 cstressl

```
function [strss,strnn,koord]=cstressl(xl2,delta,phi,sg1,tg1,d1)
% cstressl : mekanisk spenningsutregning for et enkelt element.

% Benyttes av :
% cstress
% Benytter :
% shape

% Funksjonen virker kun for aksesymmetriske elementer av et
% enkelt materiale (Materialedef=0, plane=0). Denne funksjonen
% minner litt om masstiff i oppbyggning.

% Globale variable :
global nel rho elektr fri fri1 igjen;

% Definer tomme matriser
```

```
lint1=length(sg1);
strss=zeros(4,lint1);strnn=strss;koord=zeros(2,lint1);

% Finn matrise av materialkonstanter
C=d1(1:4,1:4);
E=d1(5:6,1:4);
EPS=d1(5:6,5:6);


% Loekke for alle punktene der den mekaniske spenningen skal regnes ut :
for l=1:lint1
  m=[];bu=[];bp=[];
  [shp,xsj]=shape(sg1(l),tg1(l),xl2);  % Finn interpolasjonsfunksjoner


  % Regn ut koordinatverdiene.
  r=0;z=0;
  for uu=1:nel
    r=r+xl2(1,uu)*shp(3,uu);
    z=z+xl2(2,uu)*shp(3,uu);
  end;


  % Regn ut B-matrisene i dette gauss-integrasjonspunktet
  for j=1:nel

    buj=   [shp(1,j)        0         ;
            shp(3,j)/r      0         ;
            0               shp(2,j)  ;
            shp(2,j)        shp(1,j)];

    bpj=   [shp(1,j);
            shp(2,j)];

    bu=[bu  buj];
    bp=[bp  bpj];
  end;


  % Regn ut spenning og toeyning i gauss-integrasjonspunktet.
  if length(igjen)==0
    strnn(:,l)=bu*delta';
    strss(:,l)=C*bu*delta';
  else
    strnn(:,l)=bu*delta';
    efelt=bp*phi;
    strss(:,l)=C*strnn(:,l)+E'*efelt;
  end

  % Lagre koordinatene.
  koord(1,l)=r;
  koord(2,l)=z;

end;
return;
```

F.1.6 cuthup

```
% CUTHUP.M : Regner ut U^T*HUP for moder med frekvens lavere enn Fmaks

% Benyttes i foelgende funksjoner:
% zr, tabell, modekons, impedans

% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen

% Funksjonen regner ut U^T*HUP som inngaar i en del uttrykk for
% blant annet den modale konstanten og den
% elektriske responsen. Siden dette er en tidskritisk funksjon,
% er det lurt aa bare regne ut disse en gang!

if ~exist('UTHUP')
  ii=1;
  UTHUP=[];
  while (FFr(ii)<Fmaks) & ii<size(UU,2)
    U=UU(:,ii);
    UTHUP=[UTHUP -conj(U)'*hup];
    ii=ii+1;
  end;
  Nut=ii-1;
  if Fmaks>FFr(length(FFr))
    U=UU(:,ii);
    UTHUP=[UTHUP -conj(U)'*hup];
    Nut=ii;
  end;
end;
```

F.1.7 cuuthup

```
% CUUTHUP.M : Regner ut U*U^T*HUP for moder med frekvens lavere enn Fmaks

% Benyttes i foelgende funksjoner:
% zr, respons,trans, stress

% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen

% Funksjonen regner ut U*U^T*HUP som inngaar i en del uttrykk for
% blant annet impulsresponsen, den mekaniske responsen og den
% mekaniske spenningsutregningen. Siden dette er en tidskritisk funksjon,
% er det lurt aa bare regne ut disse en gang!

if ~exist('UUTHUP')
  iii=1;
  while (FFr(iii)<Fmaks) & iii<size(UU,2)
    iii=iii+1;
  end
  if Fmaks<=FFr(length(FFr))
    Nuut=iii-1;
  else
    Nuut=iii;
  end
  UUTHUP=zeros(length(hup),Nuut);
  for iii=1:Nuut
```

```
    U=UU(:,iii);
    % Her maa man bruke parantesen (tror jeg)!
    UUTHUP(:,iii)=-U*(conj(U)'*hup);
  end;
end;
```

F.1.8 defburst

```
% DEFBURST.M : Definer et boelgetog (burst) for transient analyse i FEMP.

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp, zr, uavkurve, trans, rhold

% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen

figure(curr);
fprintf('Definer et boelgetog/en burst : \n');
% Spoer etter frekvens, antall perioder for boelgetoget, og peak-spenning.
bburstf=input('Frekvens : ');
bburstant=input('Antall Perioder : ');
bburstT=1/bburstf*bburstant;
bburstV=input('Inngangsspennig V_PEAK : ');
% Dersom ingenting er skrevet, fortsett med tidligere definisjon.
if bburstf~=[],burstf=bburstf;end;
if bburstT~=[],burstT=bburstT;end;
if bburstV~=[],burstV=bburstV;end;

% Regn ut koordinatene til burst'en med 20 punkter pr. periode
dt=(1/burstf)/20;
TO=[];FO=[];
for t=-burstT/5:dt:burstT*6/5
  TO=[TO t];
  if t<0 | t>burstT
    FO=[FO 0];  % verdi 0 utenfor omraadet
  else
    FO=[FO burstV*sin(2*pi*burstf*t)];  % verdi V_PEAK*sin() innenfor
  end
end
figure(curr);rhold;
% Plott burst'en med figurtekst etc.
plot(TO,FO);
tit=sprintf('Inngangssignal - f = %5.1f kHz, T= %5.1e s',burstf,burstT);
title(tit);
xlabel('t [s]');ylabel('V [V]');
% Naa er burst'en definert, og kan brukes i de transient-analysen.
```

F.1.9 defgr

```
% DEFGR.M : Definer materialer og grensebetingelser (grafisk).

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp

% Benytter foelgende funksjoner :
% viewmesh

% Denne funksjonen blir brukt fra femp for aa bestemme hvilke elementer
```

```
% som er av hvilket materiale, og mekaniske og elektriske
% grensebetingelser grafisk.

% Viktige variable :
% itype : 1 - Definisjon av hvilke elementer som er av hvilket materiale
% 2 - Definisjon av elektriske grensebetingelser
% 3 - Definisjon av mekaniske grensebetingelser
% matnr : Bestemmer hvilket materiale som det skal velges elementer av
% for itype=1.

% I tillegg blir variablene Materialedef, Elektrodef og Fastspentdef satt.


subplot(1,1,1);figure(curr);viewmesh;   % Tegn opp elementoppdeling.

if itype==1   % Materialedefinisjon

  fprintf('Marker elementer av materiale nr %d, %s \n',matnr,materiale(matnr,1:5))
  [X,Y]=ginput(2);  % Hent koordinatene for 2 punkter fra musklikk.

  % Gaa gjennom alle elementene, og undersoek hvilke som er mellom punktene.
  for ii=1:elements
    middlex=(XL(1,EL(ii,2))-XL(1,EL(ii,1)))/2+XL(1,EL(ii,1));
    middley=(XL(2,EL(ii,3))-XL(2,EL(ii,2)))/2+XL(2,EL(ii,2));
    if middlex<max(X) & middlex>min(X) & middley<max(Y) & middley>min(Y)
      % Alle elementer som er innenfor punktene som er valgt, blir satt
      % til materiale nr. matnr.
      EL(ii,nel+1)=matnr;
      fprintf(' %d ',ii);
    end
  end
  fprintf('\n');
        Materialedef=1;

elseif itype==2   % Definer elektriske grensebetingelser :

  fprintf('\nBestem omraade for elektrode med potensiale null v.h.a\n');
  fprintf('musklikk paa oevre venstre og nedre hoeyre hjoerne\n');
  [X,Y]=ginput(2);  % Hent koordinatene for 2 punkter fra musklikk.
  nullel=[ ];
  for ii=1:nodes
    if XL(1,ii)>min(X) & XL(1,ii)<max(X) & XL(2,ii)>min(Y) & XL(2,ii)<max(Y)
      nullel=[nullel ii];  % Alle noder mellom punktene er paa elektroden
    end
  end
  fprintf('Elektrode med null potensial :\n');
  fprintf(' %d ',nullel);
  % Alle noder paa null-potensial elektroden er naa lagret i vektoren nullel

  fprintf('\n\nBestem omraade for andre elektrode v.h.a\n');
  fprintf('musklikk paa oevre venstre og nedre hoeyre hjoerne\n');
  [X,Y]=ginput(2);  % Hent koordinatene for 2 punkter fra musklikk.
  elektro=[ ];
  for ii=1:nodes
    if XL(1,ii)>min(X) & XL(1,ii)<max(X) & XL(2,ii)>min(Y) & XL(2,ii)<max(Y)
      elektro=[elektro ii];  % Alle noder mellom punktene er paa elektroden.
    end
  end
```

```
  fprintf('Elektrode med varierende potensial :\n');
  fprintf(' %d ',elektro);
  % Alle noder paa den andre elektroden er naa lagret i vektoren elektro.

  fprintf('\n\n');

  % Finn alle andre noder som tilstoeter et element med elektriske
  % egenskaper, slik at disse blir lagret i vektoren igjen.
  el=find(elektr==1);elektroel=[];
  for tt=1:size(el)
    elektroel=[elektroel find(EL(:,nel+1)==el(tt))];
  end;
  elektroel=EL(elektroel,1:nel);

  igjen=[];
  for ii=1:nodes
    if find(elektro==ii)==[] & find(nullel==ii)==[] & find(elektroel==ii)~=[]
      igjen=[igjen ii];
    end
  end

  Elektrodef=1;
  % Elektrodef blir satt til 1. Dette betyr at det er brukerdefinerte
  % elektriske grensebetingelser. I funksjonen fixelmf blir de elektriske
  % grensefetingelsene automatisk satt slik at det er elektroder paa
  % z=maxz og z=minz dersom Elektrodef==0.

elseif itype==3    % Mekaniske grensebetingelser :

  vekku=[];
  for koordinat=1:2
    while 1  % Bestem saa mange fastspente omraader som brukeren vil :
      fprintf('\nBestem omraade for fastspent omraade, koordinat %d v.h.a\n',koordinat);
      fprintf('musklikk paa oevre venstre og nedre hoeyre hjoerne\n');

      % Hent inn koordinater som avgrenser omraadet :
      [X,Y]=ginput(2);
      tmp=[];
      % Finn noder som ligger innenfor omraadet :
      for ii=1:nodes
        if XL(1,ii)>min(X) & XL(1,ii)<max(X) & XL(2,ii)>min(Y) & XL(2,ii)<max(Y)
          tmp=[tmp ii];
        end
      end
      fprintf(' %d ',tmp);
      fprintf('\nHoyre musknapp -> videre, Venstre musknapp -> definer flere.:\n\n');

    [X,Y,k]=ginput(1);
    % Lagre frihetsgradene som skal spennes fast i vektoren vekku :
    vekku=[vekku 2*tmp-(2-koordinat)];
    if k==3,break,end;
    end
  end

  % Her finnes de noder som IKKE skal spennes fast (resten av nodene) :
  igjenu=[];nvekku=[];
  for ii=1:nodes*fri1
    if find(vekku==ii)~=[]
      nvekku=[nvekku ii];
```

```
    else
      igjenu=[igjenu ii];
    end
  end
  vekku=nvekku;
  fprintf('Bundete mekaniske frihetsgrader :\n');
  fprintf(' %d ',vekku);

  Fastspentdef=1;
  % Fastspentdef blir satt til 1, slik at programmet vet at det er
  % fastspente frihetsgrader.

end;
```

F.1.10 deftap

```
% DEFTAP.M : Definer tapsmodell ved verdien paa variabelen 'Loss'.

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp

% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen


% Denne funksjonen definerer tapsmodell gjennom verdien paa
% konstanten 'Loss'. Ullike verdier av variabelen Loss gir
% ulike tapsmodeller. Denne prosedyren kan lett utvides med
% flere tapsmodeller. Det blir hovedsakelig sjekket tapsmodell
% i funksjonen 'fixloss'.
fprintf('Tapsmodeller :\n');
fprintf('0    -    structural damping, g=1/Qm (pass paa at materialematr. er reelle)\n');
fprintf('1    -    Benytt komplekse konstanter fra matdef. for tap (Qm har ingen bet.)\n');
fprintf('3    -    Helt tapsloest i alle beregn. (Qm har ingen betydning)\n');
Loss=input('Tapsmodell : ');


% Dersom det blir benyttet en tapsmodell der variablene Qm eller tande
% blir benyttet, saa spoer etter stoerrelsen paa disse. Qm er her den
% mekaniske Q-faktoren. tande er tangens til den elektriske
% tapsvinkelen, tangens(delta_e).
if Loss==0
  Qm=input('Qm (Inf for tapsloes, QM(1) for materiale 1, QM(2) for...) : ');
  tande=input('tande (0 for tapsloes, TANDE(1) for materiale 1, ...) : ');
end;

return
```

F.1.11 dirinit

```
% DIRINIT.M : Finner de enkelte materialkonstantene ut fra d-matrisen.

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% tabell, abaqus, stress, impedans

% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen
```

```
% Funksjonen finner de enkelte materialkonstantene for et valgt materiale
% matnr, og legger disse i variablene c11, c12, c13, osv, slik at disse
% kan brukes i prosedyrene som kaller dem opp.

% c^E = d(1:4,1:4+..)
c11=d(1,1+6*matnr-6);
c12=d(1,2+6*matnr-6);
c13=d(1,3+6*matnr-6);
c23=d(2,3+6*matnr-6);
c22=d(2,2+6*matnr-6);
c33=d(3,3+6*matnr-6);
c44=d(4,4+6*matnr-6);
c55=c44;
c66=(c11-c12)/2;

% e = d(5:6,1:6+..)
e31=d(6,1+6*matnr-6);
e32=e31;
e33=d(6,3+6*matnr-6);
e15=d(5,4+6*matnr-6);

% eps^S = d(5:6,5:6+..)
eps11=-d(5,5+6*matnr-6);
eps33=-d(6,6+6*matnr-6);
eps22=eps11;
```

F.1.12 dtkurve

```
% DTKURVE.M : Plotter frekvensspektrum for F90-data.

% Benyttes av :
% femp
% Benytter :
% dirinit

% Funksjonen plotter et frekvensspektrum (f*T mot D/T) for data fra
% F90-programmet. Den kan ogsaa plotte verdier normalisert til skjaer-
% boelge-frekvensen langs y-aksen. I tillegg kan den plotte
% koblingsfaktoren som funksjon av f*T.

% Viktige inngangsvariable :
% utype : 1 - Plott frekvenser mot D/T.
% 2 - Plott koblingsfaktor mot D/T.
% itype : 1 - Plott normalisert til TS-frekvens
% 0 - Plott med f*T langs y-aksen.
% type : 0 - uten visning av kobling paa frekvensspektrum
% 1 - med koblingsfaktor paa frekvensspektrum
% 2 - med normalisert modal konstant paa frekvensspektrum
% FF - Frekvenser
% KK - Koblingsfaktorer
% RR - Modale konstanter
% T - Tykkelser
% DT - D/T-forhold

% Sjekk om det finnes noe aa plotte :
if ~exist('RR')
  fprintf('Ingen data hentet inn!\n');
```

```
  return;
end
nRR=[];
orient('tall');
if utype==1 % For frekvensspektrum :
  N=min(size(FF,1),50);
  matnr=1;dirinit; % Materialkonstanter
  f0=sqrt(c44/rho(matnr))./(2.*T);
  % Ordne med normalisering til TS-frekvens :
  itype=ninput('Normalisert til TS-frekvens, 0=nei, 1=ja ',0);
  if itype==0
    maxft=ninput('Max f*T paa plottet ',2600);
    mult=T;
  else
    maxft=ninput('Max Omega paa plottet ',3);
    mult=1./f0;
  end

  % Plott frekvensspektrum
  figure(curr);rhold;
  for i=1:N
    plot(DT,FF(i,:).*mult,currt);
    hold on
  end
  axis([0 DT(length(DT)) 0 maxft])

  norm=32;
  if type==1 % Plott koblingsfaktor
    minr=ninput('Minimal stoerrelse paa sirkler for k_eff : ',0.2);
    for i=1:size(FF,1)
      for j=1:size(FF,2)
        if sqrt(KK(i,j))>minr
          plot(DT(j),FF(i,j)*mult(j),'o','markersize',sqrt(KK(i,j)/(1+KK(i,j)))*norm);
        end
      end
    end
    axis([0 DT(length(DT)) 0 maxft])
  elseif type==2 % Plott modal konstant
    minr=ninput('Minimal rel. stoerrelse paa sirkler for modal konstant : ',0.3);
    norm=16;
    for i=1:size(RR,2)
      nRR(:,i)=RR(:,i)/(max(RR(:,i)));
    end
    for i=1:size(FF,1)
      for j=1:size(FF,2)
        if nRR(i,j)>minr
          plot(DT(j),FF(i,j)*mult(j),'o','markersize',nRR(i,j)*norm);
        end
      end
    end
  end
  title('Frekvensspektrum');
  xlabel('D/T');
  ylabel('f*T [kHz*mm]');
  axis([0 DT(length(DT)) 0 maxft])

elseif utype==2 % Koblingsfaktor som funksjon av D/T
  N=ninput('Antall moder det skal plottes for ',5);
  fprintf('Plotter k_eff_r \n');
```

```
  figure(curr);rhold;
  % Plott koblingsfaktor av type k_eff....
  for i=1:N
    plot(DT,sqrt(KK(i,:)./(1+KK(i,:))),currt);
    hold on
  end
  xlabel('D/T');
  ylabel('Elektromekanisk kobling')
end
```

F.1.13 dynamel

```
% DYNAMEL.M : Regn ut dynamisk elementoppdeling for en struktur

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp

% Benytter foelgene funksjoner :
% dirinit

% Funksjonen spoer om maksimal verdi for frekvensen som skal regnes ut
% noeyaktig, og hvor mange elementer pr. boelgelengde det skal regnes
% med for denne frekvensen. Lavere frekvenser vil da regnes ut med
% hoeyere noeyaktighet.

% Det maa brukes et enkelt materiale for dynamisk utregning :
if Materialedef
  matnr=ninput('Hvilket materiale ',1);
else
  matnr=1;
end;
% Initialiser materialparametre :
dirinit;

% Hent inn info om maksimal frekvens og elementer pr. boelgelengde
Maksf=ninput('Maksimal frekvens som skal regnes ut noeyaktig ',1e6);
elpbr=ninput('Elementer pr. boelgelengde, r-retning ',4);
elpbz=ninput('Elementer pr. boelgelengde, z-retning ',4);
compr=input('Krav for z-retning (1=compressional-w,0=shear-w) :');

% Regn ut tykkelse og diameter for strukturen
t=G1(2);
dd=2*G2(1);

C=[c11 c12 c13 0   0   0  ;
   c12 c22 c23 0   0   0  ;
   c13 c23 c33 0   0   0  ;
   0   0   0   c44 0   0  ;
   0   0   0   0   c55 0  ;
   0   0   0   0   0   c66];

% s^E - konstantene er gitt som s^E = inv (c^E) :
S=inv(C);
s12e=S(1,2);
s11e=S(1,1);

% Utregning av boelgehastighetene nedenfor er tatt fra artikkel av
% kunkel.
```

```
% Boelgehastigheten i r-retningen som gjelder for en uendelig tynn
% plate er gitt ved sqrt(c11p/rho). Denne gjelder altsaa ikke for
% en sylinder med lavt D/T-forhold, selv om det er en rimelig god
% antagelse langt ned i D/T-forhold. Her boer det altsaa brukes en
% annen formel for aa faa oensket noeyaktighet!
c11p=s11e/(s11e^2 - s12e^2);
vr=sqrt(c11p/rho(matnr));

% Boelgehastigheten i z-retningen for kompresjonsboelger :
if elektr(matnr)==1
  c33d=c33+e33^2/eps33;
else
  c33d=c33;
end;

vzcw=sqrt(c33d/rho(matnr));

% Boelgehastigheten i z-retningen for skjaer-boelger :
vzsw=sqrt(c44/rho(matnr));

% Boelgelengden ved en gitt frekvens er gitt som lambda=v/f.
% Det gir den minste boelgelengden i en koordinatretning som
% lambda=v/Maksf, der Maksf er den maksimale frekvensen som skal
% regnes ut.
lambdar=vr/Maksf;
lambdazcw=vzcw/Maksf;
lambdazsw=vzsw/Maksf;

% Antall elementer i r-retningen for aa regne noeyaktig nok, maa da bli
% antall elementer = radius/boelgelengde * elementer pr. boelgelengde
% og tilsvarende for z-retningen
rrr=dd/2*elpbr/lambdar;
zzsw=t*elpbz/lambdazsw;
zzcw=t*elpbz/lambdazcw;

% Vi runder av til naermeste hele
nrr=round(rrr);
nzzcw=round(zzcw);
nzzsw=round(zzsw);

% Vi velger riktig verdi (kompresjonsboelge/skjaerboelge)
if compr
  nzz=nzzcw;
else
  nzz=nzzsw;
end

rr=nrr;
zz=nzz;
fprintf('\nDet gir : rr = %d , zz = %d \n',rr,zz);

% Fiks grensebetingelser og lag elementoppdeling.
makemesh;
```

F.1.14 femp

```
% FEMP er et endelig-element-program for piezoelektriske strukturer.
% FEMP er menydrevet, slik at alle underprogrammene blir kalt opp
% gjennom uimenu-kall.
% FEMP benytter seg stort sett av globale variable.

% Funksjoner som blir kalt opp direkte av FEMP :
% simuler, nymat, modekons, defburst, fixmenu, viewmesh
% respons, deffast, trans, fixelmf, modeplot, defel, zr, deftap
% defmat, skrivpr, tabell, makemesh, abaqus
% impedans, stress

% Grafiske hjelpefunksjoner for FEMP :
% ninput, femptext, rhold


% Definer en del globale variable som kan brukes av alle
% funksjonene, slik at de ikke maa taes med i funksjonskallet
% i hvert enkelt tilfelle.

% Foerst en del variable som definerer problemet :
% ————————————————————————-
% rr, zz : Antall elementer i r- og z-retning i strukturen.
% nel : Antall noder pr. element
% plane : 1 for plane-strain, 0 for aksesymmetrisk problem.
% materiale : Streng for materiale-navnene (3x5)
% d : Materialkonstanter for de 3 materialene (6x18)
% rho : Tettheten for materialene (1x3)
% elektr : Definerer hvilke materialer som er piezoelektriske
% Qm : Mekanisk Q-faktor.
% tande : Elektrisk tapsvinkel, tande=tangens(delta_e)
% Loss : Tapsmodell - se rutine deftap, fixloss.
% lp : Antall gauss-integrasjonspkt. pr. koordinatretning.
% lint : lp^2
% sg, tg, wg : Gauss-integrasjonspkt. og vekter.
% G1, G2 : Koordinater som beskriver dim. til struktur. (1x2)
% lengde : Kun plane-strain. Lengde paa strukturen.
% nodes : Antall elementer i strukturen
% elements : Antall noder i strukturen
% Resonansfrekvenser : Settes til 1 for resonansfrekvenser, 0 for antires.
% XL : Koordinatene til alle nodene
% EL : Elementdefinisjon (inkludert materiale i elementet)
% Elektrodef : 1 for brukerdefinert elektrodedefinisjon, 0 for standard
% Fastspentdef : 1 for brukerdefinert fastspentdefinisjon, 0 for standard
% Materialedef : 1 for brukerdefinert materialedefinisjon, 0 for standard

% En del variable for grensebetingelser :
% —————————————————————
% nullel : liste av noder paa elektrode med null potensial
% elektro : liste av noder som er paa andre elektroden
% igjen : liste av andre noder med elektrisk potensial
% vekku : liste av mek. frihetsgrader som er bundet
% igjenu : liste av mek. frihetsgrader som ikke er bunder
% mediet : liste av noder mot mediet
% side : liste av noder paa siden av transduser.
% Her blir nullel, elektro, igjen, vekku, igjenu, mediet og side
% regnet ut i fixelmf dersom brukeren ikke definerer disse selv i
% menyene.
```

```
% En del grafiske hjelpevariable :
% ———————————————————
% curr : Figur nr. som det tegnes i akkurat naa.
% hcheck : Grafisk hjelpevariabel for hold-plott-meny.
% grid : Velger plottemetode ved modeplott.
% Hele : Velger plottemetode ved animering ++, se 'chose'.
% currt : Linjetype og farge for neste plott

global rr zz nel materiale d lp lint G1 G2 nodes elements rho grid elektr;
global sg tg wg Resonansfrekvenser Qm tande Loss;
global Grafisk hcheck curr currt Hele plane fri fri1;
global igjen elektro nullel igjenu vekku side mediet Fastspentdef;
global Materialedef Elektrodef lengde XL EL modeanimer;

% ————————————————————————
% Initialisering av vinduer/filer
% ————————————————————————

% Legg til selve katalogen og de to underkatalogene grafisk og hjelpefu i
% PATH'en, slik at filene kan kjoeres fra alle kataloger.
if ~exist('grule')
  if ~isunix                    % Hvis vi kjoerer paa PC
    p1=sprintf('%s\\grafisk',pwd); % maa vi ha \ i filnavnet
    p2=sprintf('%s\\hjelpefu',pwd);
  else
    p1=sprintf('%s/grafisk',pwd); % Ellers / i filnavnet
    p2=sprintf('%s/hjelpefu',pwd);
  end
  P=path;path(pwd,P);
  P=path;path(p1,P);
  P=path;path(p2,P);
end

% Paa grunn av problemer med menyen i PC-MATLAB maa man skrive
% 0; og trykke return foerst paa en PC.
if ~isunix
  fprintf('Skriv   >>0;   p.g.a. problem med PC-MATLAB!\n');
end

% Sett opp startbilde
fig=figure(1);set(fig,'menubar','none');cc=clf;
femptext;set(cc,'pointer','crosshair');
set(cc,'Position',[100 500 500 150]);
set(cc,'name','FEMP V1.0','numbertitle','off');


% Current figur for tegning samt farge og linjetype som brukes
% lagres i variablene curr og currt.
curr=2;currt='y- ';
figure(curr);set(curr,'menubar','none');

figure(1);

fri=3; % Antallet frihetsgrader pr. node i det piezoelektriske tilfellet.
fri1=fri-1; % Antallet mekaniske frihetgrader pr. node

% ————————————————————————
```

```
% Definering av startproblem i FEMP.
% ————————————————————————

% Vi definerer et startproblem, slik at dette problemet alltid
% ligger klart naar FEMP startes.

Resonansfrekvenser=1; % 1 for Resonansfrekvenser, 0 for Antiresonansfr.
Loss=0; % Benytt tapsmodell med strukturell dempning
SymmetriskeModer=1; % Identifiser kun symmetriske moder.
rr=2; % Elementoppdeling, 2 elementer i r-retning og
zz=2; % 2 elementer i z-retning.
G1=[0,2.03e-3];         % Dimensjoner for strukturen som modelleres i [m].
G2=[(40.1e-3)/2,0]; % Her er d=40.1mm, t=2.03mm.
plane=0; % Vi regner ikke plane-strain-elementer. Settes til 0 for
lengde=50e-3; % aksesymmetriske elementer, 1 for plane-strain.
lp=3; % Antall gauss-integrasjonspunkter i hver retning er 3.
nel=8; % Antall noder pr. element er 8
grid=0; % Tegn ikke opp opprinnelig struktur ved modeplott.

% Her defineres materialene. Matrisen 'd' inneholder c, e og eps-konstantene
% som definerer materialene. Strengen 'materiale' inneholder navnet paa
% de ulike materialene. 'rho' inneholder tettheten til materialene og
% elektr er 1 hvis et materiale er piezoelektrisk, 0 hvis materialet ikke
% er piezoelektrisk.
materiale=['PZT5A';'TOMT ';'TOMT '];
d=[1.21e11 7.54e10 7.52e10 0 0 -5.4;
   7.54e10 1.21e11 7.52e10 0 0 -5.4;
   7.52e10 7.52e10 1.11e11 0 0 15.8;
   0       0       0 2.11e10 12.3 0;
   0       0       0 12.3 -8.110264e-9 0;
   -5.4 -5.4 15.8 0 0 -7.34882e-9];
d=[d zeros(6,12)];
rho=[7.75e3 0 0];
elektr=[1 0 0];

% Variablene Qm og tande er globale tapskonstanter, som
% blir brukt for tapsmodeller med strukturell tapsmodell (kun Qm),
% Loss=0 og for tapsmodell med Loss=4.
% Variablene QM og TANDE lagrer konstantene Qm og tande
% for det enkelte materiale, slik at man kan har faar lagret
% disse paa fil sammen med resten av materialparametrene.
Qm=75;tande=0.02;
QM=[Qm Inf Inf];TANDE=[tande 0 0];mass=[];

sub1=1;sub2=1;subnr=1;Hele=1; % Sett en del standardverdier

% Variablene Materialedef settes til 0 slik at alle elementer
% automatisk blir satt til materiale nr. 1 naar fixelmf kalles opp.
% Variabelen Elektrodef settes til 0 slik at elektrodene automatisk
% ligger paa z=zmax og z=zmin der zmax og zmin defineres i variablene
% G1 og G2, naar fixelmf kalles opp.
% Variabelen Fastspentdef settes til 0 slik at ingen mekaniske
% frihetsgrader er fastspent, naar fixelmf kalles opp.
Materialedef=0;Elektrodef=0;Fastspentdef=0;

% I rutinen makemesh blir strukturen delt opp i noder og elementer.
% og grensebetingelser ordnet.
makemesh;
```

```
% Sett en maksimumsfrekvens for modesuperposisjons-utregninger.
Fmaks=2e6;

% Rens UTHUP og UUTHUP for sikkerthets skyld.
clear UTHUP UUTHUP;

% ————————————————————————
% Sett opp menyer.
% ————————————————————————

axis('off');
% Finn foerst ut hvordan menyene som kan ha flere forskjellige verdier
% skal defineres.
hold off;hcheck='off';
SymmetriskeModer=1;scheck='on';
Resonansfrekvenser=1;rlabel='Resonansfrekvenser';

% Sett opp alle menyene med tilhoerende kommando.
% paa form uimenu('label', <label>, 'callback', <kommando>)

ffm=uimenu('Label','Fil');
uimenu(ffm,'Label','Forandre problemdef.','Callback',...
        ['clear UTHUP UUTHUP;set(pp,''Enable'',''on'');set(ss0,''Enable'',''on'');' ...
         'set(ss,''Enable'',''off'');set(igg,''Enable'',''off'');']);
uimenu(ffm,'Label','Nytt problem','Callback',...
        ['clear UTHUP UUTHUP;set(pp,''Enable'',''on'');set(ss0,''Enable'',''on'');'...
         'set(ss,''Enable'',''off'');set(igg,''Enable'',''off'');'...
         'load(''init.prb'',''-mat'');']);
ffla=uimenu(ffm,'Label','Lagre','separator','on');

uimenu(ffla,'Label','Problemdefinisjon','Callback',...
        ['[fname,pname]=uiputfile(''*.prb'',''Lagre Problemdefinisjon'');'...
         'if fname~=0,save([pname fname],''QM'',''TANDE'',''Fastspentdef'','...
         ' ''Elektrodef'',''elektro'',''igjen'',''nullel'',''igjenu'','...
         ' ''vekku'',''plane'',''rr'',''zz'',''nel'',''G1'',''G2'',''lp'','...
         ' ''materiale'',''d'',''elektr'',''SymmetriskeModer'','...
         ' ''Resonansfrekvenser'',''Qm'',''tande'',''rho'',''Materialedef'','...
         ' ''lengde'',''XL'',''EL'',''nodes'',''elements'');end;'])
uimenu(ffla,'Label','Modesuperposisjons-data','Callback',...
        ['[fname,pname]=uiputfile(''*.sym'',''Lagre Modesuperposisjons-data'');'...
         'if fname~=0,save([pname fname],''QM'',''TANDE'',''plane'',''lengde'','...
         ' ''Fastspentdef'',''Elektrodef'',''elektro'',''igjen'',''nullel'','...
         ' ''igjenu'',''vekku'',''XL'',''EL'',''FFr'',''UU'',''hup'',''hpp'','...
         ' ''rr'',''zz'',''nel'',''G1'',''G2'',''lp'',''materiale'',''d'',''Qm'','...
         ' ''tande'',''rho'',''elektr'',''Materialedef'',''SymmetriskeModer'','...
         ' ''nodes'',''elements'',''Resonansfrekvenser'',''nodes'',''elements'', '...
         ' ''mediet'',''side'');end;'])
uimenu(ffla,'Label','Direkte metode-data','Callback',...
        ['[fname,pname]=uiputfile(''*.mtr'',''Lagre Direkte metode data'');'...
         'if fname~=0,save([pname fname],''QM'',''TANDE'',''plane'',''Fastspentdef'','...
         ' ''Elektrodef'',''elektro'',''igjen'',''nullel'',''igjenu'',''vekku'','...
         ' ''huu'',''hup'',''hpp'',''mass'',''rr'',''zz'',''nel'',''G1'',''G2'','...
         ' ''lp'',''materiale'',''elektr'',''SymmetriskeModer'',''lengde'','...
         ' ''Resonansfrekvenser'',''Materialedef'',''EL'',''XL'',''nodes'','...
         ' ''elements'',''ikii'',''kui'',''kiP'');end;'])

ffhe=uimenu(ffm,'Label','Hente');
uimenu(ffhe,'Label','Problemdefinisjon','Callback',...
```

```
        ['[fname,pname]=uigetfile(''*.prb'',''Hente Problemdefinisjon'');'...
         'if fname~=0,clear UTHUP UUTHUP;load([pname fname],''-mat'');'...
         'set(pp,''Enable'',''on'');set(ss0,''Enable'',''on'');'...
         'set(ss,''Enable'',''off'');set(igg,''Enable'',''off'');end;']);
uimenu(ffhe,'Label','Modesuperposisjons-data','Callback',...
        ['[fname,pname]=uigetfile(''*.sym'',''Hente Modesuperposisjons-data'');'...
         'if fname~=0,load([pname fname],''-mat'');'...
         'clear UTHUP UUTHUP;mass=[];fixmenu;set(ssss,''enable'',''off'');end;'])
uimenu(ffhe,'Label','Direkte metode-data','Callback',...
        ['[fname,pname]=uigetfile(''*.mtr'',''Hente Direkte metode data'');'...
         'if fname~=0,clear UTHUP UUTHUP;load([pname fname],''-mat'');'...
         'fixmenu;end;'])

ffut=uimenu(ffm,'Label','Utskrift');
uimenu(ffut,'Label','EPS-Fil','Callback',...
        ['[fname,pname]=uiputfile(''*.eps'',''Skriv eps til fil'');'...
         'if fname~=0,figure(curr);print(''-deps'',[pname fname]);end;'])
uimenu(ffut,'Label','PS-Fil','Callback',...
        ['[fname,pname]=uiputfile(''*.ps'',''Skriv ps til fil'');'...
         'if fname~=0,figure(curr);print(''-dps'',[pname fname]);end;'])
uimenu(ffut,'Label','Farge PS-Fil','Callback',...
        ['[fname,pname]=uiputfile(''*.ps'',''Skriv ps til fil'');'...
         'if fname~=0,figure(curr);print(''-dpsc'',[pname fname]);end;'])
uimenu(ffut,'Label','GIF-Fil','Callback',...
        ['[fname,pname]=uiputfile(''*.gif'',''Skriv gif til fil'');'...
         'if fname~=0,figure(curr);print(''-dgif8'',[pname fname]);end;'])
uimenu(ffut,'Label','Orientering av siden','Callback',...
        'orient(input(''Orientering av siden, f.eks. tall, landscape, portrait : ''));')';

uimenu(ffm,'Label','Avslutt','Callback','clear;clf;','separator','on');
uimenu(ffm,'Label','Spesiell meny','Callback',...
        ['set(pp,''enable'',''off'');set(ffm,''enable'',''off'');'...
         'set(ss0,''enable'',''off'');set(igg,''enable'',''on'');'...
         'set(ss,''enable'',''off'');set(ann,''enable'',''on'');'],'separator','on');

pp=uimenu('Label','Problemdef');
ppel=uimenu(pp,'Label','Elementoppdeling');
uimenu(ppel,'Label','r-retning','Callback',...
        'rr=ninput(''Antall elementer i radiell retning'',rr);makemesh;');
uimenu(ppel,'Label','z-retning','Callback',...
        'zz=ninput(''Antall elementer i z-retning'',zz);makemesh;');
uimenu(ppel,'Label','dynamisk','Callback','dynamel;');
ppdi=uimenu(pp,'Label','Dimensjoner');
uimenu(ppdi,'Label','Hjorne 1 (r-koord.)','Callback',...
        'G1(1)=ninput(''Koordinater for hjorne 1 (r)  '',G1(1));makemesh;');
uimenu(ppdi,'Label','Hjorne 1 (z-koord., t)','Callback',...
        'G1(2)=ninput(''Koordinater for hjorne 1 (z),t  '',G1(2));makemesh;');
uimenu(ppdi,'Label','Hjorne 2 (r-koord., d/2,w)','Callback',...
        'G2(1)=ninput(''Koordinater for hjorne 2,d/2,w (r) '',G2(1));makemesh;');
uimenu(ppdi,'Label','Hjorne 2 (z-koord.)','Callback',...
        'G2(2)=ninput(''Koordinater for hjorne 2 (z) '',G2(2));makemesh;');
uimenu(ppdi,'Label','Lengde (kun plane strain)','Callback',...
        'lengde=ninput(''Lengde paa bar (plane-strain) : '',lengde);');

ppel=uimenu(pp,'Label','Element-type');
uimenu(ppel,'label','4-noders aksesymmetrisk','callback', ...
        'plane=0;nel=4;makemesh;');
uimenu(ppel,'label','8-noders aksesymmetrisk','callback', ...
        'plane=0;nel=8;makemesh;');
```

```
uimenu(ppel,'label','4-noders plane strain','callback', ...
      'plane=1;nel=4;makemesh;');
uimenu(ppel,'label','8-noders plane strain','callback', ...
      'plane=1;nel=8;makemesh;');

uimenu(pp,'Label','Integrasjonspkt.','Callback', ...
      'lp=ninput(''Antall integrasjonspunkt i hver retning :'',lp);');
ppma=uimenu(pp,'Label','Materiale');
uimenu(ppma,'Label','Definer nytt','Callback','nymat;');
ppmae=uimenu(ppma,'Label','Elementfordeling');
uimenu(ppmae,'Label','materiale 1','Callback','matnr=1;itype=1;defgr');
uimenu(ppmae,'Label','materiale 2','Callback','matnr=2;itype=1;defgr');
uimenu(ppmae,'Label','materiale 3','Callback','matnr=3;itype=1;defgr');
ppmah=uimenu(ppma,'Label','Hent fra fil');
uimenu(ppmah,'Label','materiale 1','Callback', ...
      ['matnr=1;[fname,pname]=uigetfile(''*.mta'',''Hente Materialdata'');' ...
      'if fname~=0,load([pname fname],''-mat'');d(1:6,[1:6]+matnr*6-6)=d1;' ...
      'rho(matnr)=rho1;QM(matnr)=Qm1;TANDE(matnr)=tande1;' ...
      'materiale(matnr,1:5)=materiale1;elektr(matnr)=elektr1;end;']);
uimenu(ppmah,'Label','materiale 2','Callback', ...
      ['matnr=2;[fname,pname]=uigetfile(''*.mta'',''Hente Materialdata'');' ...
      'if fname~=0,load([pname fname],''-mat'');d(1:6,[1:6]+matnr*6-6)=d1;' ...
      'rho(matnr)=rho1;QM(matnr)=Qm1;TANDE(matnr)=tande1;' ...
      'materiale(matnr,1:5)=materiale1;elektr(matnr)=elektr1;end;']);
uimenu(ppmah,'Label','materiale 3','Callback', ...
      ['matnr=3;[fname,pname]=uigetfile(''*.mta'',''Hente Materialdata'');' ...
      'if fname~=0,load([pname fname],''-mat'');d(1:6,[1:6]+matnr*6-6)=d1;' ...
      'rho(matnr)=rho1;QM(matnr)=Qm1;TANDE(matnr)=tande1;' ...
      'materiale(matnr,1:5)=materiale1;elektr(matnr)=elektr1;end;']);
uimenu(ppma,'Label','Vis materialedefinisjon','Callback','itype=2;skrivpr;');
uimenu(pp,'label','Definer tap','Callback','deftap');
uimenu(pp,'label','Elektriske grensebetingelser','Callback','itype=2;defgr');
uimenu(pp,'label','Mekaniske grensebetingelser','callback','itype=3;defgr');

pps=uimenu(pp,'Label','Symmetriske moder','Checked',scheck,'Separator','on',...
           'Callback',...
            ['if length(scheck)==3,scheck=''on'';SymmetriskeModer=1;else,'...
              'scheck=''off'';SymmetriskeModer=0;end;set(pps,''Checked'',scheck);']);
ppr=uimenu(pp,'Label',rlabel,'Callback',...
           ['Resonansfrekvenser=~Resonansfrekvenser;if Resonansfrekvenser,'...
            'rlabel=''Resonansfrekvenser'';else,rlabel=''Antiresonansfrekvenser'';'...
            'end;set(ppr,''Label'',rlabel);']);

uimenu(pp,'Label','Vis problemdef.','Callback','itype=1;skrivpr;','Separator','on');
uimenu(pp,'Label','Vis elementoppdeling','Callback','figure(curr);viewmesh;');



ss0=uimenu('Label','Simuler');
uimenu(ss0,'Label','Egenverdilosning','Callback','Eigenvalues=1;simuler;');


ss=uimenu('Label','Funksjoner');
ssta=uimenu(ss,'Label','Tabell');
uimenu(ssta,'Label','med el.pr.boelgelengde','Callback','ttype=1;tabell');
sstag=uimenu(ssta,'Label','med gjennomsnittsforskyvning','Callback','ttype=2;tabell');
ssmo=uimenu(ss,'Label','Modeplott');
uimenu(ssmo,'Label','Generelt','Callback','smodplot=0;modeanimer=0;modeplot;');
uimenu(ssmo,'Label','Kun en enkel mode','Callback','smodplot=1;modeanimer=0;modeplot;');
```

```
uimenu(ssmo,'Label','Animer mode','Callback','smodplot=1;modeanimer=1;modeplot;');

ssia=uimenu(ss,'Label','Elektriske responsfunksjoner');
ssiad=uimenu(ssia,'Label','Direkte metode (tidkrevende)');
uimenu(ssiad,'Label','Impedans','Callback','figure(curr);itype=1;type=1;impedans;');
uimenu(ssiad,'Label','Admittans','Callback','figure(curr);itype=1;type=2;impedans;');
uimenu(ssiad,'Label','Susceptans','Callback','figure(curr);itype=1;type=3;impedans;');
uimenu(ssiad,'Label','Konduktans','Callback','figure(curr);itype=1;type=4;impedans;');
uimenu(ssiad,'Label','Resistans','Callback','figure(curr);itype=1;type=5;impedans;');
uimenu(ssiad,'Label','Reaktans','Callback','figure(curr);itype=1;type=6;impedans;');
ssiam=uimenu(ssia,'Label','Modesuperposisjonsmetode (anbefalt)');
uimenu(ssiam,'Label','Impedans','Callback','figure(curr);itype=2;type=1;impedans;');
uimenu(ssiam,'Label','Admittans','Callback','figure(curr);itype=2;type=2;impedans;');
uimenu(ssiam,'Label','Susceptans','Callback','figure(curr);itype=2;type=3;impedans;');
uimenu(ssiam,'Label','Konduktans','Callback','figure(curr);itype=2;type=4;impedans;');
uimenu(ssiam,'Label','Resistans','Callback','figure(curr);itype=2;type=5;impedans;');
uimenu(ssiam,'Label','Reaktans','Callback','figure(curr);itype=2;type=6;impedans;');
uimenu(ssiam,'Label','Forrige til tekstfil','Callback',...
        ['if exist(''YY''),[fname,pname]=uiputfile(''*.txt'', '...
         ' ''Admittans-data til ASCII-fil'');if fname~=0,'...
         'fip=fopen([pname fname],''w'');fprintf(fip,''%25.12e %25.12e %25.12e\n” '...
         ',[FF'' real(YY)'' imag(YY)'']'');fclose(fip);fprintf(''Lagret paa '...
         'form : Frekvens, real(admittans), imag(impedans)'');'...
         'else;fprintf(''Fil-problemer\n'');end;end;']);

ssiab=uimenu(ssia,'Label','Masonmodell');
uimenu(ssiab,'Label','Impedans','Callback','figure(curr);itype=3;type=1;impedans;');
uimenu(ssiab,'Label','Admittans','Callback','figure(curr);itype=3;type=2;impedans;');
uimenu(ssiab,'Label','Susceptans','Callback','figure(curr);itype=3;type=3;impedans;');
uimenu(ssiab,'Label','Konduktans','Callback','figure(curr);itype=3;type=4;impedans;');
uimenu(ssiab,'Label','Resistans','Callback','figure(curr);itype=3;type=5;impedans;');
uimenu(ssiab,'Label','Reaktans','Callback','figure(curr);itype=3;type=6;impedans;');

ssim=uimenu(ss,'Label','Mekanisk respons');
ssims=uimenu(ssim,'Label','Svingeform','Callback','itype=1;respons');
ssimg=uimenu(ssim,'Label','Gjennomsnittsutsving (fu. av f)');
uimenu(ssimg,'label','z-retning','callback','itype=2;utype=1;respons;');
uimenu(ssimg,'label','r-retning','callback','itype=2;utype=2;respons;');
uimenu(ssimg,'label','r- og z-retning','callback','itype=2;utype=0;respons;');
uimenu(ssim,'Label','Modal vekt-faktor (Zr)','callback','itype=1;zr');
ssimeks=uimenu(ssim,'Label','Eksitering av moder');
uimenu(ssimeks,'label','Modal konstant','callback','itype=1;modekons;');
uimenu(ssimeks,'label','Koblingsfaktor','callback','itype=2;modekons;');

sstr=uimenu(ss,'Label','Transient analyse');
sstri=uimenu(sstr,'Label','Impulsrespons');
uimenu(sstri,'Label','Svingeform','Callback','pulstype=1;itype=1;trans;');
sstrig=uimenu(sstri,'Label','Gjennomsnittsutsving');
uimenu(sstrig,'label','z-retning','callback','pulstype=1;itype=3;utype=1;trans;');
uimenu(sstrig,'label','r-retning','callback','pulstype=1;itype=3;utype=2;trans;');
uimenu(sstrig,'label','r- og z-retning','callback','pulstype=1;itype=3;utype=0;trans;');
uimenu(sstri,'Label','Midterste punkt','callback','pulstype=1;itype=2;trans;');
uimenu(sstri,'Label','Modal vekt-faktor (Zr)','callback','pulstype=1;itype=2;zr');

sstrb=uimenu(sstr,'Label','Burst');
uimenu(sstrb,'Label','Definer burst','callback','defburst');
uimenu(sstrb,'Label','Svingeform','callback','pulstype=2;itype=1;trans;');
sstrbg=uimenu(sstrb,'Label','Gjennomsnittsutsving');
uimenu(sstrbg,'label','z-retning','callback','pulstype=2;itype=3;utype=1;trans;');
```

```
uimenu(sstrbg,'label','r-retning','callback','pulstype=2;itype=3;utype=2;trans;');
uimenu(sstrbg,'label','r- og z-retning','callback','pulstype=2;itype=3;utype=0;trans;');
uimenu(sstrb,'Label','Midterste punkt','callback','pulstype=2;itype=2;trans;');
uimenu(sstrb,'Label','Modal vekt-faktor (Zr)','callback','pulstype=2;itype=2;zr');

ssss=uimenu(ss,'Label','Mek. spenningsanalyse');
uimenu(ssss,'Label','Enkel analyse, type 1','callback','type=1;stress');
uimenu(ssss,'Label','Enkel analyse, type 2','callback','type=2;stress');
uimenu(ssss,'Label','Grundigere analyse','callback','type=3;stress');


uimenu(ss,'Label','Vis problemdef.','Callback','itype=1;skrivpr;','Separator','on');
uimenu(ss,'Label','Vis elementoppdeling','Callback','figure(curr);viewmesh;');
uimenu(ss,'Label','Ny verdi tapskonstanter','Callback',...
       ['if Loss==0,Qm=ninput(''Qm, Mekanisk Q-faktor '',Qm);'...
        'tande=ninput(''tangens delta_e (elektrisk tapsvinkel) '',tande);else;'...
        'fprintf(''Denne funksjonen er ikke implementert for tapsmodellen\n'');end;']);
maksstreng=sprintf('Fmaks : %10.1f kHz',Fmaks/1e3);
ssfma=uimenu(ss,'Label',maksstreng,'Callback',...
            ['Fmaks=ninput(''Maks. frekvens for modsuperposisjons-analyse : '',Fmaks);'...
             'maksstreng=sprintf(''Fmaks : %10.1f kHz",Fmaks/1e3);'...
             'set(ssfma,''label'',maksstreng);clear UTHUP UUTHUP;']);

iggpm=uimenu(ss,'Label','Plott-metode for svingeform');
uimenu(iggpm,'label','Hele strukturen','callback','Hele=1;');
uimenu(iggpm,'label','Hele overflaten','callback','Hele=3;');
uimenu(iggpm,'label','Tykkelsesretningen','callback','Hele=2;');
uimenu(iggpm,'label','Tykkelses- og radiell retning','callback','Hele=0;');
uimenu(iggpm,'label','Med/uten opprinnelig elementoppdeling','callback','grid=~grid;');

igg=uimenu('Label','Figur');
iggh=uimenu(igg,'Label','Plott paa forrige plott','Checked',hcheck,'Callback',...
           ['if length(hcheck)==3,hcheck=''on'';hold on;else,'...
            'hcheck=''off'';hold off;end;set(iggh,''Checked'',hcheck);']);
iggfa=uimenu(igg,'Label','Farge');
uimenu(iggfa,'Label','Roed','Callback','currt(1)=''r'';');
uimenu(iggfa,'Label','Blaa','Callback','currt(1)=''b'';');
uimenu(iggfa,'Label','Groenn','Callback','currt(1)=''g'';');
uimenu(iggfa,'Label','Hvit','Callback','currt(1)=''w'';');
uimenu(iggfa,'Label','Svart','Callback','currt(1)=''b'';');
uimenu(iggfa,'Label','Gul','Callback','currt(1)=''y'';');
iggty=uimenu(igg,'Label','Type');
uimenu(iggty,'Label','-','Callback','currt(2:3)=''- '';');
uimenu(iggty,'Label','--','Callback','currt(2:3)=''--'';');
uimenu(iggty,'Label','.','Callback','currt(2:3)=''. '';');
uimenu(iggty,'Label','-.','Callback','currt(2:3)=''-.'';');
uimenu(iggty,'Label',':','Callback','currt(2:3)='': '';');
uimenu(iggty,'Label','+','Callback','currt(2:3)=''+ '';');
uimenu(iggty,'Label','*','Callback','currt(2:3)=''* '';');
uimenu(iggty,'Label','o','Callback','currt(2:3)=''o '';');
iggfi=uimenu(igg,'Label','Figur');
uimenu(iggfi,'Label','Figur 2','Callback','curr=2;figure(curr);set(curr,''menubar'',''none'')');
uimenu(iggfi,'Label','Figur 3','Callback','curr=3;figure(curr);set(curr,''menubar'',''none'')');
uimenu(iggfi,'Label','Figur 4','Callback','curr=4;figure(curr);set(curr,''menubar'',''none'')');
uimenu(iggfi,'Label','Figur 5','Callback','curr=5;figure(curr);set(curr,''menubar'',''none'')');
uimenu(iggfi,'Label','Figur 6','Callback','curr=6;figure(curr);set(curr,''menubar'',''none'')');
uimenu(iggfi,'Label','Figur 7','Callback','curr=7;figure(curr);set(curr,''menubar'',''none'')');
uimenu(iggfi,'Label','Figur 8','Callback','curr=8;figure(curr);set(curr,''menubar'',''none'')');
uimenu(iggfi,'Label','Figur 9','Callback','curr=9;figure(curr);set(curr,''menubar'',''none'')');
```

```
uimenu(iggfi,'Label','Figur 10','Callback','curr=10;figure(curr);set(curr,''menubar'',''none'')');

uimenu(igg,'Label','Rens Figur','Callback','figure(curr);clf;','Separator','on')
uimenu(igg,'Label','Zoom (mindre)','Callback',...
        ['figure(curr);fprintf(''\nTrykk ned musen paa 2 punkter.\n'');'...
         '[x,y]=ginput(2);axis([min(x) max(x) min(y) max(y)]);'])
uimenu(igg,'Label','Zoom (vilkaarlig)','Callback',...
        ['ax=input(''Nye akse-verdier paa format [xmin xmax ymin ymax] : '');'...
         'figure(curr);axis(ax);']);
iggsu=uimenu(igg,'Label','Subplot');
uimenu(iggsu,'Label','Antall plot i x-retning','Callback',...
        'sub2=ninput(''Antall plot i x-retning '',sub2);');
uimenu(iggsu,'Label','Antall plot i y-retning','Callback',...
        'sub1=ninput(''Antall plot i y-retning '',sub1);');
uimenu(iggsu,'Label','Plot nr.','Callback',...
        'subnr=ninput(''Plot nr. '',subnr);');



iggaa=uimenu(igg,'Label','Akser');
iggaax=uimenu(iggaa,'Label','X-aksen');
uimenu(iggaax,'Label','linear','callback',...
        'figure(curr);set(gca,''xscale'',''linear'');');
uimenu(iggaax,'Label','logaritmisk','callback',...
        'figure(curr);set(gca,''xscale'',''log'');');
iggaay=uimenu(iggaa,'Label','Y-aksen');
uimenu(iggaay,'Label','linear','callback',...
        'figure(curr);set(gca,''yscale'',''linear'');');
uimenu(iggaay,'Label','logaritmisk','callback',...
        'figure(curr);set(gca,''yscale'',''log'');');

iggss=uimenu(igg,'Label','Skriv tekst');
uimenu(iggss,'Label','Paa figuren','Callback',...
        ['figure(curr);tx=input(''Tekst : '');'...
         'fprintf(''\nKlikk paa punkt med musen \n'');figure(curr);gk=ginput(1);'...
         'text(gk(1),gk(2),tx);']);
uimenu(iggss,'Label','Overskrift','Callback',...
        'figure(curr);tx=input(''Tekst : '');title(tx);');
uimenu(iggss,'Label','x-akse','Callback',...
        'figure(curr);tx=input(''Tekst : '');xlabel(tx);');
uimenu(iggss,'Label','y-akse','Callback',...
        'figure(curr);tx=input(''Tekst : '');ylabel(tx);');
uimenu(iggss,'Label','z-akse','Callback',...
        'figure(curr);tx=input(''Tekst : '');zlabel(tx);');
uimenu(iggss,'Label','legende','Callback',...
        ['figure(curr);ant=input(''Antall linjetyper :'');for ii=1:ant,'...
         'tln=input(''Linjetype : '');ttx=input(''Tekst : '');'...
         'ln(ii,1:length(tln))=tln;tx(ii,1:length(ttx))=ttx;end;'...
         'if get(gca,''yscale'')==''linear'',ys=0;else,ys=1;end;blegend(ln,tx,ys);']);



ann=uimenu('Label','Spesielt');
annl=uimenu(ann,'label','Lagre');
uimenu(annl,'label','Abaqus-fil','callback','abaqus');
uimenu(annl,'label','Enkel F90-inn-fil','callback','type=1;makef90');
uimenu(annl,'label','D/T-varierende F90-inn-fil','callback','type=0;makef90');

anns=uimenu(ann,'label','Hente');
```

```
uimenu(anns,'label','Enkel F90-ut-fil','callback','type=1;loadf90');
uimenu(anns,'label','D/T-varierende F90-ut-fil','callback','type=0;loadf90');
uimenu(anns,'label','D/T-varierende Matlab-fil','callback',...
       ['[fname,pname]=uigetfile(''*.fdt'',''Hente D/T-varierende Matlab-fil'');'...
        'if fname~=0,load([pname fname],''-mat'');end;']);

annp=uimenu(ann,'label','Plott D/T mot f*T','separator','on');
uimenu(annp,'label','uten aa vise kobling','callback','utype=1;type=0;dtkurve');
uimenu(annp,'label','med koblingskoeffisient','callback','utype=1;type=1;dtkurve');
uimenu(annp,'label','med modal konstant','callback','utype=1;type=2;dtkurve');
uimenu(annp,'label','plott TE, TS og LE-terrasse','callback','findfr');
uimenu(ann,'label','Plott koblingskoeffisient mot f*T','callback','utype=2;dtkurve;');
uimenu(ann,'Label','Velg materiale','Callback',...
       ['fprintf(''Velg materiale for utregning av TS/TE/LE-frekvens\n\n'');'...
        'matnr=1;[fname,pname]=uigetfile(''*.mta'',''Hente Materialdata'');'...
        'if fname~=0,load([pname fname],''-mat'');d(1:6,[1:6]+matnr*6-6)=d1;'...
        'rho(matnr)=rho1;QM(matnr)=Qm1;TANDE(matnr)=tande1;'...
        'materiale(matnr,1:5)=materiale1;elektr(matnr)=elektr1;end;']);


annut=uimenu(ann,'Label','Utskrift','separator','on');
uimenu(annut,'Label','EPS-Fil','Callback',...
       ['[fname,pname]=uiputfile(''*.eps'',''Skriv eps til fil'');'...
        'if fname~=0,figure(curr);print(''-deps'',[pname fname]);end;'])
uimenu(annut,'Label','PS-Fil','Callback',...
       ['[fname,pname]=uiputfile(''*.ps'',''Skriv ps til fil'');'...
        'if fname~=0,figure(curr);print(''-dps'',[pname fname]);end;'])
uimenu(annut,'Label','Farge PS-Fil','Callback',...
       ['[fname,pname]=uiputfile(''*.ps'',''Skriv ps til fil'');'...
        'if fname~=0,figure(curr);print(''-dpsc'',[pname fname]);end;'])
uimenu(annut,'Label','GIF-Fil','Callback',...
       ['[fname,pname]=uiputfile(''*.gif'',''Skriv gif til fil'');'...
        'if fname~=0,figure(curr);print(''-dgif8'',[pname fname]);end;'])

uimenu(ann,'separator','on','label','Vekk fra spesiell-meny','callback',...
       ['set(pp,''enable'',''on'');set(ss0,''enable'',''on'');'...
        'set(igg,''enable'',''off'');set(ffm,''enable'',''on'');'...
        'set(ann,''enable'',''off'');']);

% Sett variable navn paa menyer riktig:
pause(0);
set(iggh,'Checked',hcheck);
set(pps,'Checked',scheck);
set(ppr,'Label',rlabel);
% Slaa av menyer som ikke kan velges i utgangspunktet
set(ss,'Enable','off');
set(igg,'Enable','off');
set(ann,'enable','off');
```

F.1.15 femptext

```
% FEMPTEXT : Grafisk hjelpfunksjon for aapningsbilde i femp.

axis([0 1 0 1]);
% Lag en firkantet boks med FEMP-tekst i
set(gca,'Box','off','XTick',[],'YTick',[],'Visible','on');
axis('off');
```

```
text(0.20,0.70,'FEMP','FontSize',50,'Color','r','Units','normalized');
text(0.19,0.71,'FEMP','FontSize',50,'Color','b','Units','normalized');
text(0.18,0.72,'FEMP','FontSize',50,'Color','g','Units','normalized');
text(0.23,0.10,'Finite Element Modelling for Piezoelectric problems',...
              'FontSize',8,'Color','w','Units','normalized');
```

F.1.16 findfr

```
% FINDFR.M : Denne funksjonen finner terrassefrekvensene for frekvensspektum

% Benyttes av :
% femp
% Benytter :
% dirinit

% Funksjonen finner terrassefrekvensene for frekvensspektrum for
% et materiale (materiale nr. 1), som predikert av den 1D
% teorien. Utregning av disse frekvensene er tatt fra
% Berlincourt og Kunkel.

% Viktige variable :
% itype : 1 - for plott normalisert til foerste symmetriske TS-frekv.
% 0 - ingen slik normalisering (plottes mot f*T)

% Virker kun for et materiale da det kalles opp fra spesielt-menyen.
figure(curr);
ax=axis;matnr=1;dirinit;
hold on;

% Virker kun for Resonansfrekvenser :
fprintf('LE, TS og TE-frekvensene paa plottet gjelder resonansfrekvenser!!\n');

% Regn ut TS-frekvensen for 1D-modell. Denne brukes til normalisering
% av frekvensene.
ftTS2=sqrt(c44/rho(matnr))/2;
if ax(4)<100
  normfrekv=ftTS2;
else
  normfrekv=1;
end;

% Finn frekvensen for tykkelsesmoden (TE)
% Tatt fra Berlincourt. Kan gjoeres mye mer elegant, med en bedre
% loesningsmetode for ligningen, f.eks. halveringsmetoden :
% Dette frekvensomraadet boer kanskje forandres...
frekvens=1700:1:2100;c33d=c33+e33^2/eps33;
vekt=[];
cm=sqrt(c33d/rho(matnr));
for f1=frekvens
  x1=pi*f1/cm;
  hx1=x1*c33d*eps33/e33^2;
  vekt=[vekt abs(tan(x1)-hx1)];
end;
[dum,I]=min(vekt);
ftTE=frekvens(I);
if ftTE==1700 | ftTE==2100
```

```
  fprintf('FEIL !\n');
end
% Plott frekvensen :
plot(ax(1:2),[ftTE ftTE]/normfrekv,'w');
hold on

% Finn frekvensen for 1. symmetriske tykkelses skjaer frekvens,
% predikert av 1D modell :
ftTS=sqrt(c44/rho(matnr));
% Plott frekvensen
plot(ax(1:2),[ftTS ftTS]/normfrekv,'w');

% Finn frekvensen for LE-moden :
% Omregnete verdier :
C=[c11 c12 c13 0   0   0   ;
   c12 c22 c23 0   0   0   ;
   c13 c23 c33 0   0   0   ;
   0   0   0   c44 0   0   ;
   0   0   0   0   c55 0   ;
   0   0   0   0   0   c66];
S=inv(C);
s33e=S(3,3);
d33=2*e31*S(1,3)+e33*S(3,3);
d31=e31*(S(1,1)+S(1,2))+e33*S(1,3);
eps33t=eps33+2*d31*e31+d33*e33;
s33d=s33e-d33^2/eps33t;

vekt=[];
% Dette frekvensomraadet boer helt sikkert forandres. Helst boer
% halveringsmetoden benyttes for aa faa en riktig loesning!
frekvens=1000:1:1500;
fa=1/(2*sqrt(rho(matnr)*s33d));
k332=d33^2/s33e/eps33t;
for f1=frekvens
  x1=pi/2/fa*f1;
  hx1=x1/k332;
  vekt=[vekt abs(tan(x1)-hx1)];
end;
[dum,I]=min(vekt);
%fprintf('%e %e %e \n',frekvens(I),frekvens(I)/f0,dum)
ftLE=frekvens(I);
if ftLE==1000 | ftLE==1500
  fprintf('FEIL !\n');
end
% Plott frekvensen :
plot(ax(1:2),[ftLE ftLE]/normfrekv,'w');

% Skriv ut verdier for de ulike frekvensene :
t=abs(G1(2)-G2(2));
fprintf('Materiale : %s\n',materiale(matnr,1:5));
fprintf('TE : %10.2f kHz*mm \n',ftTE);
fprintf('TS : %10.2f kHz*mm \n',ftTS);
fprintf('LE : %10.2f kHz*mm \n',ftLE);

xverdi=ax(1)-(ax(2)-ax(1))/20;

text(xverdi,ftLE/normfrekv,'LE');
text(xverdi,ftTS/normfrekv,'TS');
text(xverdi,ftTE/normfrekv,'TE');
```

F.1.17 fixelmf

```
% FIXELMF.M : Hjelpefunksjon som setter elektriske grensebetingelser,
% riktige materiale, og mekaniske grensebetingelser dersom
% brukeren ikke selv har valgt disse i funksjonene defel,
% defmat og deffast.

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% makemesh

% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen


global Fastspentdef Elektrodef nodes vekkku igjenu elektro igjen nullel fril Materialedef
global elektr;
if ~Fastspentdef
  vekku=[ ];igjenu=[1:nodes*fril];
end
if ~Materialedef
  for iii=1:elements
    EL(iii,nel+1)=1;
  end
end
if ~Elektrodef
  el=find(elektr==1);elektroel=[ ];
  for tt=1:size(el)
    elektroel=[elektroel find(EL(:,nel+1)==el(tt))];
  end;
  elektroel=EL(elektroel,1:nel);

  elektro=[ ];nullel=[ ];
  for iii=1:nodes
    if XL(2,iii)==G1(2) & find(elektroel==iii)~=[ ]
      elektro=[elektro iii];
    else
      if XL(2,iii)==G2(2) & find(elektroel==iii)~=[ ]
        nullel=[nullel iii];
      end
    end
  end

  igjen=[ ];
  for iii=1:nodes
    if find(elektro==iii)==[ ] & find(nullel==iii)==[ ] & find(elektroel==iii)~=[ ]
      igjen=[igjen iii];
    end
  end
end

side=[ ];mediet=[ ];
for iii=1:nodes
  if XL(2,iii)==G1(2)
    mediet=[mediet iii];
  end
```

```
  if XL(1,iii)==G2(1)
    side=[side iii];
  end
end
```

F.1.18 fixloss

```
% FIXLOSS.M : Ordner riktig tapsmodell

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% tabell, zr, uavkurve, stress, impedans, trans, respons
% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen

% Definering av tapsmodeller. Se funksjonene 'deftap' for
% beskrivelse av de ulike tapsmodellene. Denne funksjonen
% kan utvides til aa inkludere flere tapsmodeller.


if Loss==1 % Tapene er inkludert som komplekse verdier i materialkonst.
  g=0;       % Da blir baade g og beta0 satt til 0.
  beta0=0;
elseif Loss==0 % Strukturell tapsmodell for impedans etc.
  g=1/Qm;        % Viskoes tapsmodell for impulsrespons.
  beta0=1/(2*Qm);
  if sum(sum(imag(d)))~=0
    fprintf('ADVARSEL : Materialkonstantene er ikke reelle, samtidig\n')
    fprintf('           som det regnes med annen tapsmodell.\n\n');
  end
elseif Loss==3 % Fullstendig tapsloes regning. Dette krever at
  g=0;           % materialkonstantene er reelle.
  beta0=0;
  if sum(sum(imag(d)))~=0
    fprintf('ADVARSEL : Materialkonstantene er ikke reelle, samtidig\n')
    fprintf('           som det regnes med tapsloes modell.\n\n');
  end
end
i=sqrt(-1);
```

F.1.19 fixmenu

```
% FIXMENU.M : Hjelpefunksjon som gjoer slik at bare de riktige menyene
% kan velges.

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp, simuler

% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen

% Foerst blir alle menyene satt valgbare
set(ss,'Enable','on');
set(ss0,'Enable','off');
set(igg,'Enable','on');
set(pp,'Enable','off');
set(ssia,'Enable','on');
set(ssim,'Enable','on');
set(sstr,'Enable','on');
```

```
set(ssiam,'Enable','on');
set(sstr,'Enable','on');
set(ssimg,'Enable','on');
set(ssims,'Enable','on');
set(ssss,'enable','on');
set(sstag,'enable','on');
set(ssiad,'enable','on');
set(ann,'enable','off');

% Saa blir enkelte menyer laget ikke-velgbare.
if Materialedef | plane
   % For flere forskjellige materialer og for plane-strain elementer
   % er ikke mekanisk spenningsutregning implementert
   set(ssss,'enable','off');
end;

if ~Resonansfrekvenser
   % For utregnete antiresonansfrekvenser er ikke elektriske respons-
   % funksjoner, mekaniske responsfunksjoner, transientanalyse og
   % spenningsutregning implementert.
   set(ssiam,'Enable','off');
   set(sstag,'Enable','off');
   set(ssim,'Enable','off');
   set(ssss,'enable','off');
   set(sstr,'Enable','off');
end
if Fastspentdef
   % Naar noen frihetsgrader er fastspent er ikke transientanalyse,
   % mekanisk spenningsanalyse, gjennomsnittsutsving og
   % svingeform ved mekanisk respons implementert.
   set(sstr,'Enable','off');
   set(ssss,'enable','off');
   set(ssimg,'Enable','off');
   set(ssims,'Enable','off');
end;
if length(elektro)==0
   % For det elastiske tilfellet er ikke transientanalyse,
   % elektriske responsfunksjoner, mekanisk respons og tabell med
   % gjennomsnittsforskyvning implementert.
   set(sstag,'enable','off');
   set(ssia,'Enable','off');
   set(ssim,'Enable','off');
   set(sstr,'Enable','off');
end

if mass==[]
   % Kan ikke benytte direkte metode naar ikke masse-matrisen er def.
   set(ssiad,'enable','off');
end

% Sett riktig verdi for maksimal frekvens :
maksstreng=sprintf('Fmaks : %10.1f kHz',Fmaks/1e3);
set(ssfma,'label',maksstreng);
```

F.1.20 fprosent

```
function fprosent(i,elements,x,y,b,h);
% FPROSENT : Grafisk hjelpfunksjon for tidsangivelse ved simulering i femp.

pro1=(i-1)/elements;
pro=i/elements;
x1=x+b*pro1;y1=y;
x2=x+b*pro1;y2=y+h;
x3=x+b*pro;y3=y+h;
x4=x+b*pro;y4=y;
fx3=x+b;fx4=x+b;
if i==1
  plot([x1 x2 fx3 fx4 x1],[y1 y2 y3 y4 y1],'w');
  hold on
  fill([x1 x2 x3 x4 x1],[y1 y2 y3 y4 y1],'g','edgecolor','g');
  axis('off');
  axis([0 1 0 1]);
  drawnow
else
  fill([x1 x2 x3 x4 x1],[y1 y2 y3 y4 y1],'g','edgecolor','g');
% plot([x1 x2 fx3 fx4 x1],[y1 y2 y3 y4 y1],'w');
  drawnow;
end
```

F.1.21 impedans

```
% IMPEDANS.M : Regner ut elektriske responsfunksjoner for et frekvensomr.

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp

% Benytter foelgende funksjoner :
% cuthup, fixloss, rhold, dirinit

% Kalles opp fra menyene i femp. Foelgende viktige inngangsvariable :
% itype : 1 - direkte metode
% 2 - modesuperposisjonsmetode
% 3 - mason-modell
% type : 1 - impedans
% 2 - admittans
% 3 - susceptans
% 4 - konduktans
% 5 - resistans
% 6 - reaktans

% Funksjonen regner ut de elektriske responsfunksjonene (impedans, admittans
% susceptans, konduktans, resistans og reaktans) baade ved hjelp av den
% direkte metoden og modesuperposisjonsmetoden som er beskrevet i
% teorien. I tillegg blir de samme funksjonene regnet ut ved hjelp av
% Mason-modellen.

fixloss; % Ta seg av tapsmodellering
figure(curr);rhold; % plott paa riktig figur

fvekt=input('Frekvensomraade?  [ fmin:step:fmax ] '); % velg frekvensomraade
if fvekt==[]
  fvekt=[0:FFr(10)/100:FFr(10)*1.05];
```

```
end;
YY=[];FF=[];

if itype==1  % direkte metode
  % Her regnes de elektriske responsfunksjonene ut direkte fra
  % masse- og stivhetsmatrisene. Her er det lett aa implementere
  % mange tapsmodeller som det er relativt vanskelig aa implementere
  % ved modesuperposisjonsmetoden.
  % Den direkte metoden er mye langsommere enn modesuperposisjonsmetoden,
  % slik at den ikke blir benyttet mye. Begge metodene skal gi samme
  % resultat dersom alle modene benyttes i modesuperposisjonsmetoden.
  fprintf('Direkte metode :\n');
  if mass==[]
    fprintf('Kan ikke benytte direkte metode, da matriser mangler!\n');
    return;
  end
  for f=fvekt % Gaa gjennom frekvensomraadet
    omega=2*pi*f;
    D=huu*(1+i*g)-omega^2*mass; % invertering av D er tidskritisk!
    Y=-(i*omega*(hpp-hup'*inv(D)*hup)); % Regn ut admittansen
    YY=[YY Y]; % lagre admittansen og frekvensen i vektorer YY og FF
    FF=[FF f];
    fprintf('%d %5.5e + %5.5e i \n',f,real(Y),imag(Y)); % skriv ut
  end;

elseif itype==2  % modesuperposisjonsmetode
  fprintf('Modesuperposisjons-metode :\n');
  cuthup; % Regn ut U^T*HUP for alle moder med lavere frekvens enn Fmaks
  mode=0;ii=0;
  rA=UTHUP.^2;
  for f=fvekt % gaa gjennom frekvensene.
    omega=2*pi*f;
    % Regn ut admittansen
    Y=i*omega*(sum((rA(1:Nut)./((2*pi*FFr(1:Nut)).^2*(1+i*g)-omega.^2)))-hpp);
    YY=[YY Y]; % lagre admittansen og frekvensene i vektorer FF og YY
    FF=[FF f];
  end;

elseif itype==3  % mason-modellen
  fprintf('Mason-modellen :\n');

  % Velg hvilket materiale mason-modellen skal regnes ut for :
  if Materialedef
    matnr=input('Materiale nr. for mason-modell-utregning :');
  else
    matnr=1;
  end

  dirinit; % Finn verdier paa c33, e33, eps33 etc. ut fra d-matrisen

  l=G1(2); % Regner alltid for en disk med tykkelse G1(2) og
  r=G2(1); % radius G2(1).
  A=pi*r^2;

  c33D=ninput('Verdi for c33D (0 for utregnet fra andre konst.)',0);
  % eps33=eps33*(1+i*tande);
  if c33D==0
    c33D=c33+e33^2/eps33;
    fprintf('Det gir c33D = %e \n',c33D);
```

```
  end
  fprintf('Tapene blir regnet ut fra c33D*(1+i/Qm)\n');
  c33D=c33D*(1+i/Qm); % Tar med mekaniske tap i modellen

  % Finn tykkelses-koblingsfaktoren :
  kt2=e33^2/(eps33*c33D);

  % Finn lydhastigheten for materialet
  cm=sqrt(c33D/rho(matnr));

  % Finn stoerrelsen C0 (konduktansen):
  C0=eps33*A/l;

  FF=fvekt; % Lagre frekvensene
  kml2=2*pi*FF/cm*(l/2); % Regn ut k_m * l / 2
  YY=(i*2*pi*FF*C0)./(1-kt2*tan(kml2)./kml2); % Regn ut admittansen
end;

% Finn forskjellige maksimumsverdier for admittans, impedans, konduktans
[ZM,I1]=max(abs(YY));
[ZM,I2]=max(abs(1./YY));
[ZM,I3]=max(real(YY));

fprintf('\nmax admittans Y      , f = %10.4e\n',FF(I1));
fprintf('max impedans     Z      , f = %10.4e\n',FF(I2));
fprintf('max konduktans   Re(Y), f = %10.4e\n',FF(I3));

% Plott den elektriske responsfunksjonen som oenskes plottet.
figure(curr);
if type==1
  semilogy(FF,abs(1./YY),currt);
  title('Impedansen')
elseif type==2
  semilogy(FF,abs(YY),currt);
  title('Admittansen')
elseif type==3
  plot(FF,imag(YY),currt);
  title('Susceptansen')
elseif type==4
  plot(FF,real(YY),currt);
  title('Konduktansen')
elseif type==5
  plot(FF,real(1./YY),currt);
  title('Resistansen')
elseif type==6
  plot(FF,imag(1./YY),currt);
  title('Reaktansen')
end
```

F.1.22 loadf90

```
% LOADF90 : Hent inn F90-fil fra disk

% Benyttes av :
% femp
% Benytter
% ingen
```

```
% Funksjonen henter inn data fra F90-versjonen av FEMP. Input filen til
% F90-programmet kan f.eks. vaere laget av funksjonen makef90.
% Funksjonen kan enten hente inn en frekvensspektrum-fil, eller en
% fil for en enkel simulering med egenvektorer og andre matriser
% som trengs for en modesuperposisjonsanalyse.

% Viktige variable :
% type : 0 - frekvensspektrum-fil hentes inn
% 1 - en enkelt simulering med modesuperposisjonsdata hentes inn.

% Hent inn filnavn :
[fname,pname]=uigetfile('*.dat','F90 ut−fil');
if fname~=0,
  % Aapen fil for lesing :
  fip=fopen([pname fname],'r');

  if type==1 % Enkel simulerings-resultat hentes inn :
    Loss=0;
    VECT=[];ikii=[];kui=[];A2=[];hup=[];elektr=1;

    % Hent inn generell problemdefinisjon :
    N=fscanf(fip,'%d',1);
    antall=fscanf(fip,'%d',1);
    nodes=fscanf(fip,'%d',1);
    fri1=fscanf(fip,'%d',1);
    rr=fscanf(fip,'%d',1);
    zz=fscanf(fip,'%d',1);
    nel=fscanf(fip,'%d',1);
    G1(1)=fscanf(fip,'%e',1);
    G1(2)=fscanf(fip,'%e',1);
    G2(1)=fscanf(fip,'%e',1);
    G2(2)=fscanf(fip,'%e',1);
    plane=fscanf(fip,'%d',1);
    lengde=fscanf(fip,'%e',1);
    fri=fri1+1;

    % Hent inn materialparametre :
    for ii=1:4
      for jj=1:4
        d(ii,jj)=fscanf(fip,'%e',1);
      end
    end
    for ii=1:2
      for jj=1:4
        d(ii+4,jj)=fscanf(fip,'%e',1);
      end
    end
    d(1:4,5:6)=d(5:6,1:4)';
    for ii=1:2
      for jj=1:2
        d(ii+4,jj+4)=fscanf(fip,'%e',1);
      end
    end
    rho=fscanf(fip,'%e',1);
    if d(6,6)==0
      elektr(1)=0;
    else
      elektr(1)=1;
```

```
  end

  % Hent inn egenverdier :
  for i=1:antall
    A2(i,1)=fscanf(fip,'%e',1);
  end
  % Egenvektorer :
  for i=1:N
    for j=1:antall
      VECT(i,j)=fscanf(fip,'%e',1);
    end
  end

  if d(6,6)~=0   % De foelgende matrisene hentes kun i det piezoel. til.

    % Matrisen hup :
    for i=1:N
      hup(i,1)=fscanf(fip,'%e',1);
    end
    hpp=fscanf(fip,'%e',1);

    % Disse matrisene kan benyttes for spenningsanalyse :
    % Det boer lages en opsjon om innlesing av disse. Det
    % boer ikke alltid vaere noedvendig, da de tar opp
    % masse diskplass!

    % Matrisen ikii :
    N1=fscanf(fip,'%d',1);
    if N1~=0  % Les inn matrisene hvis de ligger der.
      N2=fscanf(fip,'%d',1);
      for i=1:N1
        for j=1:N2
          ikii(i,j)=fscanf(fip,'%e',1);
        end
      end

      % Matrisen kui :
      N1=fscanf(fip,'%d',1);
      N2=fscanf(fip,'%d',1);
      for i=1:N1
        for j=1:N2
          kui(i,j)=fscanf(fip,'%e',1);
        end
      end
    else
      ikii=[ ];kui=[ ];
    end;
  end;
  A2=sqrt(A2)/2/pi;igjenu=1:nodes*fril;vekku=[ ];

% SymmetriskeModer=1;
  UU=[];FFr=[];
  % Gaa gjennom alle egenverdier/vektorer, og legg dem i vektoren FFr
  % og matrisen UU. Dersom SymmetriskeModer==1, vil kun de symmetriske
  % modene bli sett paa videre.
  for i=1:size(A2,1)
    % Det blir sjekket om modene er symmetrisk paa forskjellig maate
    % for plane-strain-elementer og aksesymmetriske elementer.
    if plane==0
```

```
       issym=(A2(i)<1e10 & A2(i)>1 & ...
       sign(real(VECT(find(igjenu==2),i)))~= ...
       sign(real(VECT(find(igjenu==(fri1*(zz*nel/4)+2)),i))) ...
       & imag(A2(i))<1);
     elseif plane==1
       issym=(A2(i)<1e10 & A2(i)>1 & ...
        sign(real(VECT(find(igjenu==2),i)))~= ...
        sign(real(VECT(find(igjenu==(fri1*(zz*nel/4)+2)),i))) ...
        & sign(real(VECT(find(igjenu==(fri1*(zz*nel/4)+1)),i)))~=...
        sign(real(VECT(find(igjenu==(nodes*2-1)),i))) & imag(A2(i))<1);
     end

     % Dersom dette er en mode som det skal gjemmes paa, saa legg den
     % massenormaliserte vektoren inn i UU, og frkvensen inn i FFr.

     if SymmetriskeModer==0 | issym
        mode=mode+1;
        U=VECT(:,i);
        UU=[UU U];
        FFr=[FFr A2(i)];
    end
  end;
  clear A2;clear VECT;
  clear UTHUP UUTHUP;
  Fmaks=FFr(min(35,length(FFr)));
  materiale(1,1:5)='F90  ';
  mass=[];lp=3;
  Materialedef=0;Elektrodef=0;
  Fastspentdef=0;makemesh;
  fprintf('F90-resultatfil hentet inn....\n\n');
  fixmenu;
  set(ffm,'enable','on'); % Sett menyen 'fil' valgbar

  % For tilfellet uten spenningsutregning :
  if ikii==[] & elektr(1)==1
    set(ssss,'enable','off');
  end;
elseif type==0 % Hent inn frekvensspektrum-fil
  FF=[];RR=[];KK=[];DT=[];T=[];

  % Hent inn materialparametre :
  for ii=1:4
    for jj=1:4
      d(ii,jj)=fscanf(fip,'%e',1);
    end
  end
  for ii=1:2
    for jj=1:4
      d(ii+4,jj)=fscanf(fip,'%e',1);
    end
  end
  d(1:4,5:6)=d(5:6,1:4)';
  for ii=1:2
    for jj=1:2
      d(ii+4,jj+4)=fscanf(fip,'%e',1);
    end
  end
  rho=fscanf(fip,'%e',1);
```

```
    materiale(1,1:5)='F90   ';
    if d(6,6)==0
      elektri=0;elektr(1)=0;
    else
      elektri=1;elektr(1)=1;
    end;

    % Hent inn hjelpestoerrelser :
    maxmoder=fscanf(fip,' %d',1);
    ant=fscanf(fip,' %d',1);

    % Hent inn Tykkelser, D/T-forhold :
    for i=1:ant
      T(i)=fscanf(fip,' %e',1);
      DT(i)=fscanf(fip,' %e',1);
    end

    % Hent inn frekvenser, modal konstant og koblingsfaktor :
    for i=1:ant
      for j=1:maxmoder
        FF(j,i)=fscanf(fip,' %e',1);
        if elektri==1
          RR(j,i)=fscanf(fip,' %e',1);
          KK(j,i)=fscanf(fip,' %e',1);
        end
      end
    end

    % Sett alle nuller til uendelig slik at de ikke synes paa plottet :
    for ii=1:size(FF,1)
      for jj=1:size(FF,2)
        if FF(ii,jj)==0
          FF(ii,jj)=Inf;
        end
      end
    end

    % Lagre som matlab-fil, slik at man benytter mindre plass paa
    % disken :
    [fname,pname]=uiputfile('*.fdt','Lagre som matlab-fil');
    if fname˜=0,
      save([pname fname],'-mat','T','DT','FF','RR','KK','d','rho');
    else
      fprintf('Finner ikke filen!\n');
    end
  end;
else
  fprintf('Finner ikke filen !\n');
end;
fclose(fip);
```

F.1.23 makef90

```
% MAKEF90.M : Lag F90-fil for utregning av egenverdier etc.

% Benyttes av :
% femp
% Benytter :
```

```
% dirinit

% Funksjonen lager en F90-fil av et problem som brukeren selv
% definerer i funksjonen. Det kan enten vaere for D/T-spektrum,
% eller for en enkel simulering. De variablene som er satt i
% programmet blir benyttet i tillegg til at det spoerres om
% en del andre.

% Viktige variable :
% type : 0 - Lag fil for frekvensspektrum
% 1 - Lag fil for enkel simulering (modesuperposisjonsdata).


% Det brukes alltid materiale nr. 1 :
matnr=1;dirinit; % Initialiser materialparametre

% Fortell hva som benyttes av forhaandsdefinerte variable :
fprintf('Definisjoner :\n\n');
if Resonansfrekvenser
  fprintf('Finner resonansfrekvenser\n');
else
  fprintf('Finner antiresonansfrekvenser\n');
end
if plane
  fprintf('Advarsel : Plane strain-element blir benyttet\n');
  fprintf('Det vil oppstaa en del problemer i den forbindelse.\n');
  fprintf('F.eks. vil D/T vaere 2*W/T, ikke bare symmetriske moder med, osv.\n');
elseif plane==0
  fprintf('Aksesymmetrisk element blir benyttet\n');
end
fprintf('Materiale : %s\n',materiale(1,1:5));
fprintf('Antall noder pr. element er 8\n');

% Spoerr etter en del variable som definerer problemet :
if type==0 % lag fil for frekvensspektrum
  % Hvor mange frekvenser skal lagres :
  AntallLagreFrekvenser=ninput('Antall moder som lagres pr. disk ',64);
  Dynamisk=input('Dynamisk elementoppdeling  (1=ja, 0=nei) : ');
  Spenningsutregning=0;
  if Dynamisk % Variable som definerer dynamisk elementoppdeling
    Maksft=ninput('Maksimal f*T for krav til el.pr.b ',2200);
    elpbr=ninput('Elementer pr. boelgelengde, r-retning ',4);
    elpbz=ninput('Elementer pr. boelgelengde, z-retning ',4);
    compr=input('Krav for z-retning (1=compressional-v,0=shear-v) :');
  else % Variable som benyttes for ikke-dynamisk el.oppdeling
    allnrr=ninput('Antall elementer i r-retning ',10);
    allnzz=ninput('Antall elementer i z-retning ',4);
  end;
  Tykkelse=ninput('Tykkelse paa diskene ',2e-3);
  DiamThic=input('Vektor av D/T-forhold for disker det skal simuleres for : ');
  if DiamThic==[]
    DiamThic=[0.1:0.1:1 1.5:0.5:20];
  end;
elseif type==1 % For en enkel simulering
  % Her kan de fleste parametrene taes direkte fra problemdef.
  Spenningsutregning=ninput('Lagre matriser for spenningsutregning (1=ja,0=nei)',0);
  AntallLagreFrekvenser=1;
  Dynamisk=0;
  Tykkelse=G1(2);
```

```
  DiamThic=2*G2(1)/Tykkelse;
  fprintf('Tykkelse  : %f m\n',Tykkelse);
  fprintf('D/T       : %f \n',DiamThic);
  allnrr=rr;allnzz=zz;
end
Thic=Tykkelse*ones(size(DiamThic));
Diam=DiamThic.*Thic;
AntallDisker=length(Thic);

if type==1 % For tilfellet med kun en fil :
  % Hvor mange frekvenser skal lagres :
  AntallFrekvenser=ninput('Antall frekvenser/egenvektorer som lagres ',64);
end;

% Spoerr etter filnavn for resultatfil :
writename=input('Filnavn for resultatfil (.dat) : ');

% Spoerr etter filnavn for lagring :
[fname,pname]=uiputfile('*.i90','F90 D/T mot f*T-inn-fil');

if fname~=0,
  fip=fopen([pname fname],'w');

  % Skriv ut info om valgene som er gjort for dynamisk elementoppdeling :
  if Dynamisk
    fprintf('Elementer pr. boelgelengde : %d (r) %d (z) \n\n',elpbr,elpbz);
    fprintf('Noder pr. boelgelengde : %d-%d (r) %d-%d (z) \n\n',elpbr+1,elpbr*2+1,elpbz+1,elpbz*2+1);
    fprintf('Maks f*T : %d \n',Maksft);
    fprintf(' d/t      r z(c) z(s) \n');
  end

  % Skriv initialiseringsdel av filen (for asfys1) :
  fprintf(fip,'#!/bin/csh\n');
  fprintf(fip,'# QSUB -eo\n');
  fprintf(fip,'# QSUB -q alpha_osf20\n');
  fprintf(fip,'# QSUB -lt 7:00:00\n\n');
  fprintf(fip,'cd ~/f90/nnew/\n'); % Dette maa forandres avhengig av maskin
  fprintf(fip,'./femp <<EOF\n');
  % Skriv materialparametre
  fprintf(fip,' %e,%e,%e,0\n',c11,c12,c13);
  fprintf(fip,' %e,%e,%e,0\n',c12,c22,c23);
  fprintf(fip,' %e,%e,%e,0\n',c13,c23,c33);
  fprintf(fip,'0,0,0,%e\n',c44);
  fprintf(fip,'0,0,0,%e\n',e15);
  fprintf(fip,' %e,%e,%e,0\n',e31,e32,e33);
  fprintf(fip,' %e,0 \n',eps11);
  fprintf(fip,'0,%e \n',eps33);
  fprintf(fip,' %e \n',rho(matnr));
  fprintf(fip,' %e \n',lengde);
  % Skriv annen info om simuleringen
  fprintf(fip,' %d,%d,%d,%d,%d\n',AntallDisker,AntallLagreFrekvenser,...
          type,Resonansfrekvenser+plane*2,Spenningsutregning);

  % Skriv simuleringsdata for hver enkelt disk, som bestaar av tykkelse,
  % D/T-forhold, Antall frekvenser som oenskes, og elementoppdeling.
  for i=1:AntallDisker
    dd=Diam(i);t=Thic(i);
    % Regner ut antallet frekvenser som skal regnes ut. Boer kanskje
    % gjoeres annerledes, slik at brukeren kan velge selv paa en
```

```
% enkel maate.
if type==0
  AntallFrekvenser=dd/t*7;
  if AntallFrekvenser<20
    AntallFrekvenser=20;
  end
end;

% Regner ut elementoppdeling for dynamisk elementoppdeling. Se paa
% funksjonen dynamel for forklaring. Dette er nesten identiske til
% dynamel.
if Dynamisk
  Maksf=Maksft/(t);

  C=[c11 c12 c13 0   0   0  ;
     c12 c22 c23 0   0   0  ;
     c13 c23 c33 0   0   0  ;
     0   0   0   c44 0   0  ;
     0   0   0   0   c55 0  ;
     0   0   0   0   0   c66];
  S=inv(C);
  s12e=S(1,2);
  s11e=S(1,1);

  c11p=s11e/(s11e^2 - s12e^2);
  vr=sqrt(c11p/rho(matnr));      % Boelgehast., r-retn

  c33d=c33+e33^2/eps33;
  vzcw=sqrt(c33d/rho(matnr));   % Kompresjonsboelge.h., z-retn

  vzsw=sqrt(c44/rho(matnr));     % Skjaerboelge.h., z-retn.
  % Utregning av hastigheter er tatt fra kunkel.

  % Boelgelengdene :
  lambdar=vr/Maksf;
  lambdazcw=vzcw/Maksf;
  lambdazsw=vzsw/Maksf;

  % Elementoppdelingene :
  rrr=dd*elpbr/(2*lambdar);
  zzsw=t*elpbz/(lambdazsw);
  zzcw=t*elpbz/(lambdazcw);

  nrr=round(rrr);
  nzzcw=round(zzcw);
  nzzsw=round(zzsw);

  if nzzcw==0,nzzcw=1;end;
  if nzzsw==0,nzzsw=1;end;
  if nrr==0;nrr=1;end

  if compr % Bruk kompresjonsboelgehastighet
    nzz=nzzcw;
  else % Bruk skjaerboelgehastighet
    nzz=nzzsw;
  end
  fprintf(' %5.1f : %d , %d , %d\n',dd/t,nrr,nzzcw,nzzsw);
else
  nrr=allnrr;nzz=allnzz; % Bruk ikke dynamisk elementoppdeling.
```

```
    end;
    fprintf(' %d,%d,%d\n',nrr,nzz,round(AntallFrekvenser));

    fprintf(fip,' %d,%d,%d\n',nrr,nzz,round(AntallFrekvenser));
    fprintf(fip,' %10.3e,%20.16f\n',Thic(i),Diam(i)/Thic(i));
  end
  fprintf(fip,' %s\n',writename);
  fprintf(fip,'EOF\n');
  fprintf(fip,'#\nexit\n');
  fclose(fip);
else
  fprintf('Kunne ikke aapne filen !\n');
end;
```

F.1.24 makemesh

```
function makemesh
% MAKEMESH : Mesh-generator for rektangulaer region, 4/8-noders elementer.

% Benytter :
% fixelmf

% Benyttes av :
% femp, dynamel, loadf90

% Funksjonen deler strukturen som er definer i de forskjellige
% variabelne i menyen 'Problemdefinisjon' opp i elementer.
% Viktige variable her er rr og zz som definerer antall elementer
% i hver koordinatretning, og G1 og G2 som bestemmer dimensjonene
% til strukturen.
% Ut-variable er nodedefinisjonen XL, elementdefinisjonen EL,
% og antall noder, nodes, samt antall elementer, elements.
% Funksjonen kaller ogsaa opp fixelmf, som tar seg av de elektriske
% grensebetingelsene, mekaniske grensebetingelsene, og
% materialinndeling. Alle elementene blir automatisk satt til materiale
% nummer 1.


% De globale variable som blir brukt :
global rr zz G1 G2 nodes elements nel XL EL;
global igjen elektro nullel igjenu vekku mediet side;
global Materialedef Elektrodef Fastspentdef;

XL=[];EL=[];
if nel==4 % 4-noders elementer
  % Del opp strukturen i (rr+1)*(zz+1) noder, jevnt fordelt utover
  % XL(1,k) er r-koordinaten til node nr. k.
  % XL(2,k) er z-koordinaten til node nr. k.
  dr=(G2(1)-G1(1))/rr;
  dz=(G2(2)-G1(2))/zz;
  nodes=0;
  for r=G1(1):dr:G2(1)
    for z=G1(2):dz:G2(2)
        nodes=nodes+1;
        XL(:,nodes)=[r;z];
    end
  end
```

```
  % Del strukturen opp i rr*zz elementer.
  elements=rr*zz;

  % EL(k,i) definerer hvilke node som er node nummer i for
  % element nummer k.
  r=2;
  for k=1:elements
    EL(k,1)=r;
    EL(k,2)=r+(zz+1);
    EL(k,3)=r+(zz+1)-1;
    EL(k,4)=r-1;
    if rem(r,zz+1)==0
        r=r+2;
    else
        r=r+1;
    end;
  end;
elseif nel==8 % 8-noders elementer (noe mer komplisert)

  dr=(G2(1)-G1(1))/rr;
  dz=(G2(2)-G1(2))/zz;
  nodes=0;
  % Del strukturen opp i noder
  % XL(1,k) er r-koordinaten til node nr. k.
  % XL(2,k) er z-koordinaten til node nr. k.
  for r=G1(1):dr:G2(1)
    for z=G1(2):dz/2:G2(2)
        nodes=nodes+1;
        XL(:,nodes)=[r;z];
    end
    if r~=G2(1)
      for z=G1(2):dz:G2(2)
        nodes=nodes+1;
        XL(:,nodes)=[r+dr/2;z];
      end
    end
  end;

  % Del strukturen opp i elementer :
  % EL(k,i) definerer hvilke node som er node nummer i for
  % element nummer k.

  elements=rr*zz;
  nr=3;
  for k=1:elements
    prg=(2*zz+1)+(zz+1);
    prg2=(rem(nr,prg)-1)/2;

    EL(k,1)=nr;
    EL(k,2)=nr+prg;
    EL(k,3)=nr+prg-2;
    EL(k,4)=nr-2;
    EL(k,5)=nr+(2*zz+1)-prg2;
    EL(k,6)=nr+prg-1;
    EL(k,7)=nr+(2*zz+1)-prg2-1;
    EL(k,8)=nr-1;
    if rem(nr,prg)==(2*zz+1)
        nr=nr+(zz+1)+3;
    else
```

```
        nr=nr+2;
    end;
  end
% EL=[EL(:,4) EL(:,3) EL(:,2) EL(:,1) EL(:,7) EL(:,6) EL(:,5) EL(:,8)];
end;

% Ta seg av elektriske/mekaniske grensebetingelser samt valg av
% materiale for de ulike elementer :

% Variablene Materialedef settes til 0 slik at alle elementer
% automatisk blir satt til materiale nr. 1 naar fixelmf kalles opp.
% Variabelen Elektrodef settes til 0 slik at elektrodene automatisk
% ligger paa z=zmax og z=zmin der zmax og zmin defineres i variablene
% G1 og G2, naar fixelmf kalles opp.
% Variabelen Fastspentdef settes til 0 slik at ingen mekaniske
% frihetsgrader er fastspent, naar fixelmf kalles opp.
Materialedef=0;Elektrodef=0;Fastspentdef=0;

fixelmf;
```

F.1.25 masstiff

```
function [kuul,kupl,kppl,massl]=masstiff(xl,materialenr)
% MASSTIFF : Utregning av lokal masse- og stivhetsmatrise

% Benyttes i foelgende funksjoner :
% compute

% Benytter foelgende funksjoner :
% shape

% Globale variable som benyttes :
global nel lp lint rho sg tg wg d plane lengde fri fri1;

% Nullstill de lokale masse- og stivhetsmatriser
kuul=zeros(fri1*nel,fri1*nel);
kupl=zeros(fri1*nel,nel);
kppl=zeros(nel,nel);
massl=kuul;

  % Definer materialkonstant-matrisene.
  if plane==0
    C=d(1:4,[1:4]+materialenr*6-6);
    E=d(5:6,[1:4]+materialenr*6-6);
    EPS=d(5:6,[5:6]+materialenr*6-6);
  elseif plane==1
    C=d([1 3 4],[1 3 4]+materialenr*6-6);
    E=d(5:6,[1 3 4]+materialenr*6-6);
    EPS=d(5:6,[5:6]+materialenr*6-6);
  end;

% Integrasjonen for aa finne masse- og stivhetsmatrisene finnes
% ved hjelp av gauss-integrasjon med integrasjonspunkter (sg,tg)
% og vektet wg.
% Loekke for alle Gaussintegrasjonspunktene (lint) :
for l=1:lint
  m=[];bu=[];bp=[];
```

```
  [shp,xsj]=shape(sg(l),tg(l),xl);


  if plane==0
    r=sum(xl(1,:).*shp(3,:)); % r-koord til punktet (for aksesym.)
    dv=xsj*wg(l)*2*pi*r;        % Multiplum for integranden
  elseif plane==1
    dv=xsj*wg(l)*lengde;        % Multiplum for integranden
  end;
  mdv=dv*rho(materialenr);


  % Finn b- og n-matrisene for elementet :
  for j=1:nel

    % Regn ut bu og bp-matriser.
    if plane==0
      buj=   [shp(1,j)      0         ;
              shp(3,j)/r    0         ;
              0             shp(2,j)  ;
              shp(2,j)      shp(1,j)];
    elseif plane==1
      buj=   [shp(1,j)      0         ;
              0             shp(2,j)  ;
              shp(2,j)      shp(1,j)];
    end;

    bpj=   [shp(1,j);
            shp(2,j)];

    mj=    [shp(3,j)  0            ;
            0          shp(3,j)   ];

    bu=[bu  buj];
    bp=[bp  bpj];
    m=[m  mj];
  end;

  % Regn ut bidraget til integralet fra dette gaussintegrasjonspunktet,
  % og legg det til den verdien som allerede er funnet for masse- og
  % stivhetsmatrisene
  kuul=kuul+bu'*C*bu*dv;
  kupl=kupl+bu'*E'*bp*dv;
  kppl=kppl+bp'*EPS*bp*dv;
  massl=massl+m'*m*mdv;

end;
return;
```

F.1.26 modekons

```
% MODEKONS.M : Regner ut og plotter modal konstant og kobl.koeff.
%
% Benyttes av :
% femp
% Benytter :
% cuthup
```

```
% Viktige inngangsvariable :
% itype : 1 - Plott den modale konstanten mot frekvensen
% 2 - Plott koblingskoeffisienten mot frekvensen

% Funksjonen plotter enten den modale kontanten eller koblingskoeffisienten
% mot frekvensen. Den maksimale frekvensen paa figuren er Fmaks, som
% kan bestemmes i menyene.

cuthup; % Regner ut U^T*HUP.

rA=UTHUP.^2; % Regner ut den modale konstanen som (U^T*HUP)^2.
Ksq=rA./(2*pi*FFr(1:length(rA))).^2/hpp; % Regner ut koblingsfaktoren^2
K=sqrt(-Ksq); % koblingsfaktoren
if itype==2
  fprintf('Benytter koblingsfaktoren k_surf\n');
end;
figure(curr);
hold off

% Loekke gjennom alle frekvensene mindre enn Fmaks
for kk=1:Nut
  if itype==1 % den modale konstanten
    plot(real(FFr(kk)),rA(kk),'y+',...
         [real(FFr(kk)) real(FFr(kk))],[0 rA(kk)],'y-');
    hold on;
  elseif itype==2 % koblingsfaktoren
    plot(real(FFr(kk)),K(kk),'y+',...
         [real(FFr(kk)) real(FFr(kk))],[0 K(kk)],'y-');
    hold on;
  end
end
```

F.1.27 modeplot

```
% MODEPLOT.M : Plotter og animerer svingeformen til moder.

% Benyttes av :
% femp
% Benytter :
% vieweig, move

% Funksjonen plotter enten en og en mode, eller flere moder sammen.
% Den kan ogsaa animere en mode.

% Viktig inngangsvariable :
% smodplot : 1 - Plotter en vilkaarlig mode med vilkaarlig forstoerrelse
% 0 - Plotter flere moder sammen av gangen
%
% modeanimer: 1 - Animer en mode
% 0 - Vis kun plott (ingen animasjon)

% Initialiser variable
sub=1;mode=0;moder=size(UU,2);

if smodplot==1 % kun en enkelt mode
  modene=ninput('Mode nr. ',1); % Legg riktig verdi i variabel modene
  sto=ninput('Forstoerrelse ',1); % Forstoerreselse
  subs=1;subx=1;suby=1; % Kun en av gangen
```

```
elseif smodplot==0 % flere moder
  modene=1:moder; % variabelen modene bestemmer hvilke som skal plottes

  % Bestem antall moder pr. side ut fra D/T-forholdet
  DT=G2(1)/G1(2)*2;
  if DT>10
    suby=3;subx=1;
  elseif DT>4
    suby=2;subx=2;
  elseif DT>1
    suby=1;subx=2;
  else
    suby=1;subx=3;
  end;

  subs=subx*suby;
  % Sett forstoerrelsen til 1
  sto=1;
end
chose; % Velg riktig del av strukturen for plotting.

% Gaa gjennom alle modene som skal plottes :
for mod=modene
  U=real(UU(:,mod)); % La U vaere forskyvningen til moden.
  modifu; % Modifiser U dersom noen frihetsgrader er bundet

  % Regn ut en multiplikasjonsfaktor som gir et noenlunde
  % fornuftig plott.
  factor=max(abs(U(2:fri1:fri1*(rr+1)*(zz+1)-1)))/G1(2)*5;
  nfactor=inv(factor)*sto;

  % Velg riktig figur og subplot :
  figure(curr);
  subplot(suby,subx,sub);hold off;

  % Vis forskyvningen til moden grafisk :
  if modeanimer==0
    vieweig(U(chosen)*nfactor,nyXL); % Tegn opp moden
  elseif modeanimer==1
    move(U*nfactor,FFr(mod)*2*pi); % Animer moden
  end;
  mode=mode+1;

  % Skriv info om moden som tittel
  streng=sprintf('Mode %d, %8.1f khZ',mod,FFr(mod)/1e3);
  title(streng);
  sub=sub+1;

  if sub>subs & smodplot==0 % Spoerr etter flere moder.
    fprintf('Flere moder  - Venstre musknapp=Ja, Hoeyre Musknapp=Nei . \n');
    [dum1,dum2,yes]=ginput(1);
    if yes==3
      break;
    end;
    sub=1;
  end;

end;
```

F.1.28 modifu

```
% MODIFU : Legger inn 0'er i forskyvningsmatrisen for fastspente frihetsg.

% Benyttes av:
% tabell, modeplot
% Benytter :
% ingen

% Funksjonen legger 0'er inn i forskyvningsmatrisen for de fastspente
% frihetsgradene, slik at forskyvningen kan plottes ved hjelp av
% funksjonen vieweig. Den modifiserer variabelen U, som er baade
% inngangs- og utgangsvariabel.

if Fastspentdef % Kun i de tilfeller det finnes fastspente frihetsgr.
  tab=[igjenu vekku];
  [I,itab]=sort(tab);
  U=[U;zeros(size(vekku,2),1)]; % Legg foerst til riktig antall 0'er
  U=U(itab,:); % Sorter disse slik at de ligger i riktig rekkefoelge
end
```

F.1.29 move

```
function [M]=move(nev,omega);
% MOVE.M : Animering av utsvinget til en mode

% Benyttes av :
% modeplot, respons

% Benytter :
% vieweig

% Funksjonen plotter utsvinget ved flere forskjellige tidspunkt
% (et visst antall ganger pr. periode), og lagrer dette som en
% film, som kan avspilles senere.

% Globale variable :
global Hele curr rr zz nodes elements G1 G2 chosen
global Fastspentdef igjenu vekku nel XL EL;

figure(curr); % Velg riktig figur :
ax=axis;mini=ax(3);maxi=ax(4);
i=sqrt(-1);
ant=input('Antall step (15) : '); % Antall step
f=omega/2/pi;T=1/f;dt=T/ant;t=0; % Definer periode og frekvens
M=moviein(ant); % Definer tom matrise for lagring av movie
chose; % Velg riktig del av strukturen for plott
hold off
% Gaa gjennom en periode :
for j=1:ant
  % Regn ut forskyvning ved dette tidspunktet :
  nev2=real(nev(chosen)*exp(i*omega*t));
  % Vis dette grafisk
  vieweig(nev2,nyXL);
```

```
  % Faa det til aa se fint ut
  if Hele~=2
    axis([0 G2(1)*1.3 -G1(2)*.2 G1(2)*1.3]);
    axis('off');
    axis('equal');
    ss=sprintf('Frekvens : %7.1f, %d/%d',f,j,ant);
    text(0,-G1(2),ss);
  else
    axis([-1 1 mini maxi]);
    axis('off');axis('normal');
  end
  drawnow ; % Tegn bilde
  M(:,j)=getframe; % Lagre bilde
  t=t+dt; % Oppdater tiden
  hold off
end

movie(M,25) % Spill filmen
while input('Replay ? (ja=1,nei=0)')
  movie(M,40)
end
```

F.1.30 nymat

```
function nymat
% NYMAT.M : Definer et nytt materiale som lagres paa disk.

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp

% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen

% Denne funksjonen definerer et nytt materiale som enten kan vaere
% isotropt eller anisotropt. Man kan gi inn baade komplekse og
% reelle konstanter. Dersom konstantene er komplekse, maa man passe
% paa aa velge en riktig tapsmodell i funksjonen 'deftap', Loss=1.


% Globale variable som brukes her :
global materiale rho Qm d tande



fprintf('Definering av materiale (konstanter kan vaere komplekse) :\n');
fprintf('Dersom konstantene er komplekse, maa riktig tapsmodell velges!!\n\n');

% Material-navn maa vaere en tekststreng av lengde 5 (maa ikke vaere unik)
tmp='';
while size(tmp)~=[1,5]
  tmp=input('Material-navn :');
end
materiale1=tmp;
iso=input('Isotropt materiale? (1=ja,0=nei) : ');
if ~iso  % dersom ikke isotropt materiale

  % Spoer etter alle materialkonstanter som trengs for aa definere
```

```
% materialet.
c11=input('c11^E : ');
c12=input('c12^E : ');
c13=input('c13^E : ');
c33=input('c33^E : ');
c44=input('c44^E : ');

e31=input('e31 : ');
e33=input('e33 : ');
e15=input('e51 : ');

eps0=8.854e-12;
eps11=input('eps11^S/eps0 : ')*eps0;
eps33=input('eps33^S/eps0 : ')*eps0;

rho1=input('Tettheten rho : ');

% For noen materialer med annen orientering el.l. maa man
% definere flere konstanter.
if input('Benyttes vanlig orthotropt materiale (1=ja,0=nei)')
  c22=c11;
  e32=e31;
  c23=c13;
  e11=0;
  e12=0;
  e13=0;
else
  c22=input('c22^E :');
  c23=input('c23^E :');
  e32=input('e32   :');
  e11=input('e11   :');
  e12=input('e12   :');
  e13=input('e13   :');
end

  c=[c11 c12 c13 0    ; %rr
     c12 c22 c23 0    ; %tt
     c13 c23 c33 0    ; %zz
     0   0   0   c44]; %rz

  e=[e11 e12 e13  e15    ;
     e31 e32 e33   0   ]';

  eps=[eps11  0    ;
       0     eps33];

  % Undersoek om materialet har piezoelektriske egenskaper
  % ved aa se om noen av e eller eps-konstantene er forskjellig
  % fra null :
  if sum(sum(abs(e)))+sum(sum(abs(eps)))==0
    elektr1=0; % Ikke piezoelektriske egenskaper
  else
    elektr1=1; % piezoelektriske egenskaper med
  end;

  % Legg alle konstantene i d1-matrisen som blir lagret
  d1=[c   e     ;
      e'  -eps];
```

```
    fprintf('Verdiene til mekanisk Q-faktor og elektrisk tapsvinkel\n');
    fprintf('blir ikke automatisk benyttet selv om materialet er benyttet\n');
    fprintf('Disse blir bare lagret for materialet, og kan saa benyttes ved\n');
    fprintf('definering av tapsmodell.\n\n');
    tandel=input('tangens(delta_e), elektrisk tapsvinkel : ');

elseif iso % isotropt materiale

  % For et isotropt materiale trenger man kun to konstanter :
  nu=input('nu : ');
  E=input('E : ');


  d1=            [1 nu/(1-nu) nu/(1-nu) 0 0 0;
                nu/(1-nu) 1 nu/(1-nu)  0 0 0;
                nu/(1-nu) nu/(1-nu) 1 0 0 0 ;
                0  0  0 (1-2*nu)/(2*(1-nu)) 0 0;
                0  0  0  0  0  0;
                0  0  0  0  0  0];

  d1=E*(1-nu)/((1+nu)*(1-2*nu))*d1;
  elektr1=0; % Ingen elektriske egenskaper

  rho1=input('Tettheten rho : ');
  tande1=0; % elektriske tapsvinkel er alltid null.

  fprintf('Verdiene til mekanisk Q-faktor \n');
  fprintf('blir ikke automatisk benyttet selv om materialet er benyttet\n');
  fprintf('Denne blir bare lagret for materialet, og kan saa benyttes ved\n');
  fprintf('definering av tapsmodell.\n\n');

end
Qm1=input('Mekanisk Q-faktor, Qm : ');

[fname,pname]=uiputfile('*.mta','Lagre materialfil');
if fname~=0,
  save([pname fname],'d1','rho1','materiale1','Qm1','tande1','elektr1');
end
```

F.1.31 respons

```
% RESPONS.M : Mekanisk (harmonisk) respons i form av svingeform og
% gjennomsnittsforskyvning ved gitte frekvenser.

% Benytter :
% cuuthup, fixloss, rhold, vieweig, move, chose
% Benyttes av :
% femp

% Viktige inngangsvariable :
% itype : 1 - Svingeform
% 2 - Gjennomsnittsforskyvning

% utype : 1 - vis r- og z-retning ved gj.forskyvning
```

```
% 2 - vis r-retning ved gj.forskyvning
% 3 - vis z-retning ved gj.forskyvning

cuuthup; % Regn ut U*U^T*HUP
fixloss; % Ta seg av tap
rhold; % Ta seg av det grafiske forarbeidet

if itype==1 % Svingeform

  f=1;
  while f~=0
    f=input('Ny frekvens (0 for avslutt) :'); % Spoerr etter frekvens
    if f~=0
      omega=2*pi*f;
      nev=zeros(size(UUTHUP,1),1);
      % Regn ut responsen :
      for j=1:Nuut
        nev=nev+(UUTHUP(:,j)/((2*pi*FFr(j))^2*(1+i*g)-omega^2));
      end;

      % Finn den tiden som gir maksimalt utsving.
      % Dette kan kanskje gjoeres paa en bedre maate!
      UY=[0:0.01:1];AA=[];
      for y=UY;AA=[AA sum(abs(real(nev*exp(i*y*pi))))];end
      [dum,idum]=max(AA);
      U=real(nev*exp(i*pi*UY(idum)));

      % Velg en passende faktor for visning :
      factor=max(abs(U(2:fri1:fri1*(rr+1)*(zz+1)-1)))/G1(2)*5;
      streng=sprintf('Forstoerrelse (%10.0f) : ',1/factor);
      nfactor=input(streng);
      if nfactor==[],nfactor=1/factor;end;

      % Plott den oenskede delen av strukturen ved den gitte frekvensen
      chose;rhold;
      vieweig(real(U(chosen))*nfactor,nyXL);
      streng=sprintf('Mekanisk respons - f = %7.1f kHz, faktor %8.0f',f/1e3,nfactor);
      title(streng);
      drawnow;

      % Vis animerte svingninger dersom oenskelig
      if input('Vis variasjon med tiden? (0=nei,1=ja) :')
        rhold;
        move(nev*nfactor,omega);
      end
    end
  end

elseif itype==2 % Gjennomsnittsforskyvning

  % Frekvensomraade for plot av gjennomsnittsforskyvning
  FF=input('Frekvensomraade? [ fmin:step:fmax ] ');

  % Velg del av strukturen for beregningen :
  nelektro=mediet*2;
  nside=side*2-1;
  UAVZ=[];UAVR=[];
  % Gaa gjennom alle frekvensene :
  for f=FF
```

```
    omega=2*pi*f;
    nev1=zeros(size(nelektro,2),1);
    nev2=zeros(size(nside,2),1);

    % Regn ut responsen for denne frekvensen :
    for j=1:Nuut
      nev1=nev1+(UUTHUP(nelektro,j)/((2*pi*FFr(j))^2*(1+i*g)-omega^2));
      nev2=nev2+(UUTHUP(nside,j)/((2*pi*FFr(j))^2*(1+i*g)-omega^2));
    end;

    % Regn ut middelverdien over de oenskete flatene :
    uavz=(sum(nev1))/length(nev1);
    uavr=(sum(nev2))/length(nev2);
    UAVZ=[UAVZ uavz];
    UAVR=[UAVR uavr];
  end;
  [ZM,I1]=max(abs(UAVZ));
  [RM,I2]=max(abs(UAVR));

  fprintf('\nmax gj.forskyvning z, f = %10.4e\n',FF(I1));
  fprintf('max gj.forskyvning r, f = %10.4e\n',FF(I2));

  % Plott gjennomsnittsforskyvningen :
  figure(curr);
  if utype==0
    hold off;
    plot(FF,abs(UAVZ),'-',FF,abs(UAVR),'--')
  elseif utype==1
    plot(FF,abs(UAVZ),currt)
  elseif utype==2
    plot(FF,abs(UAVR),currt)
  end
end;
```

F.1.32 rhold

```
% RHOLD : Grafisk hjelpfunksjon for femp.
figure(curr);
if length(hcheck)==3
  hold off
else
  hold on
end
subplot(sub1,sub2,subnr);
```

F.1.33 shape

```
function [shp,xsj]=shape(S,T,xl)
% shape : Shape-funksjoner (4/8 noder isoparametriske el.) for FEMP.
%
% INN :
% S,T : Lokale koordinater der interpolasjonsfu. skal regnes ut.
% xl : r,z nodale koordinater (globale) for elementet.
% UT:
% shp : r,z deriverte av interpolasjonsfu., og interpolasjonsfu.
```

```
% xsj : Jakobi-determinanten

% Funksjonen regner ut interpolasjonsfunksjoner (betegnet som N_i i
% teorien) for et punkt (S,T) som vanligvis er et gaussintegrasjons-
% punkt for et element definert ved koordinatene xl. Videre blir
% de deriverte av intrerpolasjonsfunksjonene, og jakobi-determinanten
% returnert.

% Benyttes av :
% masstiff, cstressl
% Benytter :
% ingen

% Globale variable
global nel;

if nel==4   % 4-noders element
  % Lokale koordinater for hjoernene:
  SI=[-1 1 1 -1];
  TI=[-1 -1 1 1];

  % Lag :
  % interpoloasjons-funksjonene shp(3,i)
  % lokale derivert mhp. r shp(1,i)
  % lokale derivert mhp. z shp(2,i)

  for i=1:4
    shp(:,i)=1/4*[SI(i)*(1+TI(i)*T) ; TI(i)*(1+SI(i)*S) ; (1+SI(i)*S)*(1+TI(i)*T)];
  end;

elseif nel==8   % 8-noders element

  % Lokale koordinater :
  SI=[-1 1 1 -1];
  TI=[-1 -1 1 1];

  % Lag :
  % interpoloasjons-funksjonene shp(3,i)
  % lokale derivert mhp. r shp(1,i)
  % lokale derivert mhp. z shp(2,i)

  for i=1:4
    shp(:,i)=1/4*[SI(i)*(1+TI(i)*T) ; TI(i)*(1+SI(i)*S) ; (1+SI(i)*S)*(1+TI(i)*T)];
  end;
  s2=(1-S^2)/2;t2=(1-T^2)/2;
  shp(1,5)=-S*(1-T);shp(2,5)=-s2;shp(3,5)=s2*(1-T);
  shp(1,6)=t2;shp(2,6)=-T*(1+S);shp(3,6)=t2*(1+S);
  shp(1,7)=-S*(1+T);shp(2,7)=s2;shp(3,7)=s2*(1+T);
  shp(1,8)=-t2;shp(2,8)=-T*(1-S);shp(3,8)=t2*(1-S);

  % Transformasjon for de fire foerste interpolasjons-
  % funksjonene :
  k=8;
  for i=1:4
    l=i+4;
    for j=1:3
      shp(j,i)=shp(j,i)-0.5*(shp(j,k)+shp(j,l));
    end;
    k=l;
```

```
  end;
end

% Lag jakobien
%
% dr/d(eps) dz/d(eta)
% [J] = { }
% dr/d(eta) dz/d(eps)
%
% der eps og eta er lokale koordinater.

xs=xl(1:2,1:nel)*shp(1:2,1:nel)';

% Jakobi-determinanten:
xsj=det(xs);
% Globale deriverte = inv(Jakobi) * Lokale deriverte
shp(1:2,1:nel)=inv(xs)*shp(1:2,1:nel);
```

F.1.34 simuler

```
% SIMULER.M : Kaller opp utregning av egenverdier/egenvektorer samt
% sjekk av grensebetingelser, gauss-punkter, mode-identifisering
% og meny-fiksing.

% Benytter foelgende funksjoner :
% compute, fixelmf, grule2d, fixmenu

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp



% Gjoer slik at menyer ikke kan benyttes under beregningene
set(pp,'Enable','off');
set(ss,'Enable','off');
set(ss0,'Enable','off');

% Ta tiden paa hvor lang tid beregningen tar
cc=cputime;
tic;

% Fjern variable fra forrige simulering for aa spare plass i minnet.
clear mass huu hup A1 VECT kii ikii kui deltakuu FF KK RR YY U;
clear hpp UU FFr A2 UTHUP UUTHUP;

% Initialiser gauss-integrasjonspunkter
lint=lp*lp;sg=[ ];tg=[];wg=[];
[s,t,w]=grule2d(lp,lp);
for i=1:size(s,1)
  sg=[sg s(i,:)];
  tg=[tg t(i,:)];
  wg=[wg w(i,:)];
end

% Kjoer beregningsrutinen compute som gir egenverdier/vektorer som resultat
compute;

% Sorter egenverdiene etter stoerrelse
```

```
[A2,I]=sort(A1);
clear A1;

UU=[];FFr=[];
% Gaa gjennom alle egenverdier/vektorer, og legg dem i vektoren FFr
% og matrisen UU. Dersom SymmetriskeModer==1, vil kun de symmetriske
% modene bli sett paa videre.
for i=1:size(A2,1)
  % Det blir sjekket om modene er symmetrisk paa forskjellig maate
  % for plane-strain-elementer og aksesymmetriske elementer.
  if plane==0
    issym=(A2(i)<1e10 & A2(i)>1 & ...
      sign(real(VECT(find(igjenu==2),I(i))))~=...
      sign(real(VECT(find(igjenu==(fri1*(zz*nel/4)+2)),I(i)))) ...
      & imag(A2(i))<1);
  elseif plane==1
    issym=(A2(i)<1e10 & A2(i)>1 & ...
      sign(real(VECT(find(igjenu==2),I(i))))~=...
      sign(real(VECT(find(igjenu==(fri1*(zz*nel/4)+2)),I(i)))) & ...
      sign(real(VECT(find(igjenu==(fri1*(zz*nel/4)+1)),I(i))))~=...
      sign(real(VECT(find(igjenu==(nodes*2-1)),I(i)))) & imag(A2(i))<1);
  end

  % Dersom dette er en mode som det skal gjemmes paa, saa legg den
  % massenormaliserte vektoren inn i UU, og frkvensen inn i FFr.
  if SymmetriskeModer==0 | issym
    mode=mode+1;
    U=VECT(:,I(i));
    ff=conj(U)'*mass*U;
    U=U/sqrt(ff);
    UU=[UU U];
    FFr=[FFr A2(i)];
  end
end;

clear VECT A2;
load hmatriser;

% Skriv ut tiden beregningen har tatt
fprintf('Egenverdier utregnet.\n');
fprintf('CPU-tid : %5.3f.\n TID : %5.3f \n ',cputime-cc,toc);

% Fiks opp menyer
Fmaks=FFr(min(20,length(FFr)));
fixmenu;
i=sqrt(-1);
```

F.1.35 skrivpr

```
% SKRIVPR : Skriver ut problemdefinisjonen

% Benyttes av :
% femp
% Benytter :
% ingen

% Funksjonen skriver ut problemdefinisjonen/material-definisjonen
% for det problemet som det sees paa i oeyeblikket.
```

```
% Viktige inngangsparametre :
% itype 2 - Skriv ut material-definisjon
% 1 - Skriv ut resten av problemdefinisjonen


planestr=['aksesymmetrisk';
          'plane strain  '];
elektrstr= ['uten piezoelektrisitet';
            'piezoelektrisk        '];

if itype==2 % Skriv ut materialdefinisjon
  for ii=1:3
    % Skriv ut materialparametre for de materialene som ikke har navnet
    % 'TOMT '
    if materiale(ii,1:5)~='TOMT '
      fprintf('Materialdefinisjon for materialet %s : \n',materiale(ii,:));
      fprintf('------------------------------------------------\n');
      fprintf('C-matrisen:\n');
      fprintf(' %15e %15e %15e %15e \n',d(1:4,[1:4]+6*ii-6)');
      fprintf('E-matrisen:\n');
      fprintf(' %15e %15e %15e %15e \n',d(5:6,[1:4]+6*ii-6)');
      fprintf('EPS-matrisen:\n');
      fprintf(' %15e %15e \n',-d(5:6,[5:6]+6*ii-6)');

      fprintf('rho   = %15e \n',rho(ii));
      fprintf('Qm   = %15e , tande = %15e \n',QM(ii),TANDE(ii));
    end
  end
end

if itype==1 % Skriv ut resten av problemdefinisjonen
  fprintf('Elementer : r-retning = %d , z-retning = %d \n',rr,zz);
  fprintf('Element-type : %d-noders, %s \n',nel,planestr(plane+1,:));
  fprintf('Integrasjonspkt i hver retning : %d \n',lp);
  for ii=1:3
    fprintf('Materiale %d : %s \n',ii,materiale(ii,1:5));
  end
  fprintf('Hjoerner : nr. 1: ( %2.3e %2.3e )\n',G1(1),G1(2));
  fprintf('           nr. 2: ( %2.3e %2.3e )\n',G2(1),G2(2)) ;
  if plane==0
    fprintf('D/T = %2.1f \n\n',2*abs((G2(1)-G1(1))/(G2(2)-G1(2))));
  elseif plane==1
    fprintf('W/T = %2.1f \n\n',abs((G2(1)-G1(1))/(G2(2)-G1(2))));
  end

  fprintf('Qm    = %15e \n',Qm);
  fprintf('tande = %15e \n\n',tande);

  fprintf('Noder som ligger paa elektrode med potensial null :\n');
  fprintf(' %d ',nullel);
  fprintf('\n\n');

  fprintf('Noder som ligger paa andre elektrode  :\n');
  fprintf(' %d ',elektro);
  fprintf('\n\n');

  fprintf('Mekaniske frihetsgrader som er bundet :\n');
  fprintf(' %d ',vekku);
```

```
  fprintf('\n\n');
end

% Skriv ut hvilke elementer som er av hvilket materiale
for ii=1:3
  funnet=find(EL(:,nel+1)==ii);
  if funnet~=[]
    fprintf('Elementer av materiale %d , %s : \n',ii,materiale(ii,1:5));
    fprintf(' %d ',funnet);
    fprintf('\n\n');
  end
end
```

F.1.36 stress

```
% STRESS.M : Mekanisk spenningsutregning for en gitt mode

% Benyttes av :
% femp
% Benytter
% cstress, cuuthup, fixloss,

% Funksjonen regner ut den mekaniske spenningen i gauss-
% integrasjonspunktene av en orden lavere enn det som svarer
% til full integrasjon for elementet for responsen ved
% frekvenser som svarer til en svingemode (egenfrekvens).

% Viktige variable :
% type : 1 - et enkelt 3D plott pr. komponent paa en side hver
% 2 - alle fire komponentene som 3D plott paa en side
% 3 - 3D og 2D plott av alle komponenter samt sammenligning


disp('Utregning av mekanisk spenning : ');
orient('tall');

hold off;figure(curr);
mode=ninput('Mode nr.    ',1); % Hvilken mode skal analyseres?
matnr=1; % Regn ut for materiale nr. 1 (har kun et materiale her)
cuuthup; % Regn ut U*U^T*HUP
fixloss; % Ta seg av tap

% Frekvensen :
f=FFr(mode);
omega=2*pi*f;


fprintf('Spennings-analyse, mode %d, frekvens %10.3e Hz \n',mode,FFr(mode));
colormap('cool');

if length(igjen)>0
  if mass==[]
    f90=ninput('Er data lest inn fra F90-fil? (1=ja,0=nei)',0);
  else
    f90=0; % Her kan det av og til bli noe problemer hvis data
           % er lagret som matriser og hentes inn igjen!
  end;
```

```
  if ~f90
    % Hent inn matriser som trengs for spenningsutregning
    load deltakuu
        end;
        % Utregning av total respons ved en resonansfrekvens :
        nev=zeros(size(UUTHUP,1),1);
        i=sqrt(-1);
        for j=1:Nuut
          nev=nev+(UUTHUP(:,j)/((2*pi*FFr(j))^2*(1+i*g)-omega^2));
        end;
        % Finn tidspunkt for maksimal respons :
        UY=[0:0.01:1];AA=[];
        for y=UY;AA=[AA sum(abs(real(nev*exp(i*y*pi))))];end
        [dum,idum]=max(AA);
        UUU=real(nev*exp(i*pi*UY(idum)));
        dU=UUU;

  % Regn ut den elektriske spenningsfordelingen dersom vi ser paa det
  % elektriske tilfellet
  if ~f90
    phi0=ninput('Elektrisk spenningsforskjell mellom elektroder ',1);
    if phi0~=0
      dU=dU*phi0;
    end;
    PHI = -ikii * (kui' * dU) - ikii * (kiP*ones(size(kiP,2),1)*phi0);
  else
    % Med F90-data maa phi0=0, da kiP-matrisen mangler.
    phi0=0;
    PHI = -ikii * (kui' * dU);
  end
  % Putt inn null'er paa riktig sted for elektrodene med null
  % potensial, og phi0 for elektroden med potensial forskjellig
  % fra null :
  PHI=PHI';
  tabella=[igjen elektro nullel];
  [dum,Itabell]=sort(tabella);
  PHI=[PHI ones(1,length(elektro))*phi0 zeros(1,length(nullel))];
  PHI=PHI(Itabell);
  PHI=PHI';
else
  % Sett PHI=0 i det elastiske tilfellet
  PHI=0;
  dU=UU(:,mode);
  fprintf('For elastiske utregninger er spenningen tilfeldig normalisert!\n');
end

% Regn ut spenningen i et visst antall gauss-integrasjonspunkter,
% da det er i gauss-integtrasjonspunktene av en orden lavere enn
% det som kreves for full integrasjon for et element at
% den mekaniske spenningen kan regnes ut mest noeyaktig.
ant1=ninput('Antall gauss-punkter for utregning ',(lp-1));
if ant1>3
  ant1=3;
  fprintf('Maksimalt antall er 3. Naa satt til 3.\n');
end

if type==3
  se3D=ninput('Vis paa 3D-plott hvor snitt er tatt? (0=nei,1=ja)',0);
```

```
end

% Regn ut mekanisk spenning for moden/frekvensen :
[stressg,straing,koord]=cstress(dU,PHI,XL,EL,ant1);
antpkt=ant1^2;


% Vektorer som beskriver rekkefoelgen paa gaussintegrasjonspunktene,
% som brukes til utvelgelse av plottepunktene for 3D-plott.
if antpkt==1
  velg=1;
elseif antpkt==4
  velg=[2 1;2 2;1 1;1 2];
elseif antpkt==9
  velg=[3 1;3 2;3 3;2 1;2 2;2 3;1 1;1 2;1 3];
end
% Streng av akseverdier paa plott :
streng=['T_rr';'T_tt';'T_zz';'T_rz'];
streng2=['T_rr [N/m^2]';'T_tt [N/m^2]';'T_zz [N/m^2]';'T_rz [N/m^2]'];

strmat=[];koord1=[];koord2=[];
rspenninger=[];zspenninger=[];


for h=1:4  % Loekke over 4 spenningskomponenter
  for i=0:zz-1  % Loekke over alle elementer i z-retning
    for j=0:rr-1  % Loekke over alle elementer i r-retning
      for k=1:antpkt  % Loekke over alle Gauss-punktene
        % Sorter den mekaniske spenningen samt koordinatverdier for
        % plotte-punktene for hvert enkelt punkt ut fra matrisene
        % returnert fra cstress for at det skal kunne vises i et
        % 3D surf-plott.
        strmat(velg(k,1)+ant1*i,velg(k,2)+ant1*j)=stressg(h,k+i*antpkt+j*zz*antpkt);
        toymat(velg(k,1)+ant1*i,velg(k,2)+ant1*j)=straing(h,k+i*antpkt+j*zz*antpkt);
        koord1(velg(k,1)+ant1*i,velg(k,2)+ant1*j)=koord(1,k+i*antpkt+j*zz*antpkt);
        koord2(velg(k,1)+ant1*i,velg(k,2)+ant1*j)=koord(2,k+i*antpkt+j*zz*antpkt);
      end
    end
  end

  % Sett opp undervinduer i figuren alt etter hvilken metode som er valgt :
  if type==1
    subplot(2,2,h);
    hold off
  elseif type==2
    subplot(1,1,1);
    hold off;
  elseif type==3
    subplot(2,1,1);
    hold off
  end

  % 3D-plott av den mekaniske spenningen for komponenten :
  surf(koord1,koord2,real(strmat));

  % Sett paa riktig tittel :
  title(streng(h,:));
  view(40,30);
  xlabel('r [m]');
```

```
  ylabel('z [m]');
  zlabel('T [N/m^2]');



  if type==3 % Plott tilleggsinfo for avansert plott :
    uu1=round(size(strmat,1)/4);
    uu2=round(size(strmat,2)/4);
    % 2D plott som funksjon av r :
    if se3D
      hold on;
      plot3(koord1(uu1,:),koord2(uu1,:),strmat(uu1,:),'y-','linewidth',3);
      plot3(koord1(uu1*2,:),koord2(uu1*2,:),strmat(uu1*2,:),'r-','linewidth',3);
      plot3(koord1(uu1*3,:),koord2(uu1*3,:),strmat(uu1*3,:),'g-','linewidth',3);
      plot3(koord1(:,uu2),koord2(:,uu2),strmat(:,uu2),'y-','linewidth',3);
      plot3(koord1(:,uu2*2),koord2(:,uu2*2),strmat(:,uu2*2),'r-','linewidth',3);
      plot3(koord1(:,uu2*3),koord2(:,uu2*3),strmat(:,uu2*3),'g-','linewidth',3);
      hold off;
    end
    subplot(2,2,3);
    plot(koord1(uu1,:),strmat(uu1,:),'y-',koord1(2*uu1,:),...
         strmat(2*uu1,:),'r:',koord1(3*uu1,:),strmat(3*uu1,:),'g--');
    xlabel('r [m]');
    ylabel(streng2(h,:));
    legend('y-','h/4','r:','h/2','g--','3h/4');
    subplot(2,2,4);
    % 2D plott som funksjon av z :
    plot(koord2(:,uu2),strmat(:,uu2),'y-',koord2(:,2*uu2),...
         strmat(:,2*uu2),'r:',koord2(:,3*uu2),strmat(:,3*uu2),'g--');
    xlabel('z [m]');
    ylabel(streng(h,:));
    legend('y-','a/4','r:','a/2','g--','3a/4');
    % Lagre disse for siste del av analysen :
    rspenninger(h,:)=strmat(2*uu1,:);
    zspenninger(:,h)=strmat(:,2*uu2);
    rtoeyninger(h,:)=toymat(2*uu1,:);
    ztoeyninger(:,h)=toymat(:,2*uu2);
  end
  if type>1 % For pause/utskrift :
    % Skriv ut ved trykk paa hoeyre musknapp :
    fprintf('Trykk hoeyre musknapp for lagring (eps), venstre videre.\n');
    [dum1,dum2,knapp]=ginput(1);
    if knapp==3
      [fname,pname]=uiputfile('*.eps','Skriv eps til fil');
      if fname~=0,figure(curr);print('-deps',[pname fname]);end;
    end;
  end
end

if type==3 % For avansert analyse
  % Sammenligning av stoerrelsen paa de ulike spenningskomponentene
  ptyp=['y-.';'g- ';'r--';'w: '];
  hold off;
  for h=1:4
    subplot(2,1,1);
    % r-retningen :
    plot(koord1(1,:),rspenninger(h,:),ptyp(h,:));

% For plott av toeyningen (dette blir ikke gjort her) :
```

```
% plot(koord1(1,:),rtoeyninger(h,:),ptyp(h,:));

    xlabel('r [m]');ylabel('T [N/m^2]');
    hold on
    subplot(2,1,2)
    % z-retningen :
    plot(koord2(:,1),zspenninger(:,h),ptyp(h,:));

% For plott av toeyningen (dette blir ikke gjort her) :
% plot(koord2(:,1),ztoeyninger(:,h),ptyp(h,:));

    xlabel('z [m]');ylabel('T [N/m^2]');
    hold on
  end
  subplot(2,1,1)
  legend('y-.','T_rr','g- ','T_tt','r--','T_zz','w: ','T_rz');
  subplot(2,1,2)
  legend('y-.','T_rr','g- ','T_tt','r--','T_zz','w: ','T_rz');
end
```

F.1.37 tabell

```
% TABELL.M : Skriver ut tabell over egenfrekvenser + en del funksjoner

% Benyttes av :
% femp
% Benytter :
% fixloss, cuthup

% Skriver ut tabell over egenfrekvenser, modal konstant, koblingskoeffisient,
% elementer pr. boelgelengde og gjennomsnittsforskyvning.

% Viktige inngangsvariable :
% ttype 1 - tabellen inkluderer elementer pr. boelgelengde
% 2 - tabellen inkluderer koblingskoeffisient/gjennomsnittsforsk.

fixloss; % Ta seg av tap.

if length(igjen)>0 & Resonansfrekvenser==1
  cuthup; % Regn ut U^T*HUP
  rA=UTHUP.^2; % Regn ut den modale konstanten, (U^T*HUP)^2
  Ksq=-rA./(2*pi*FFr(1:length(rA))).^2/hpp; % koblingskoeffisienten

elseif length(igjen)==0 % For rent elastisk er ikke rA definert
  Nut=length(FFr);
  fprintf('Da det ikke sees paa elektriske egenskaper i beregningene,\n');
  fprintf('er den modale konstanten og koblingsfaktoren satt til null.\n');
  rA=zeros(size(FFr));
  Ksq=rA;

elseif Resonansfrekvenser==0 % For antiresonans er ikke rA implmentert

  fprintf('Den modale konstanten/koblingsfaktoren er ikke implementert\n');
  fprintf('for antiresonansfrekvenser.\n');
  rA=zeros(size(FFr));
  Ksq=rA;
end
```

```
% Regn ut for riktig materiale :
if Materialedef
  matnr=input('Materiale nr. for utregning av boelgehastighet o.l:');
else
  matnr=1;
end
dirinit; % Initialiser materialparametre

C=[c11 c12 c13 0   0   0  ;
   c12 c22 c23 0   0   0  ;
   c13 c23 c33 0   0   0  ;
   0   0   0   c44 0   0  ;
   0   0   0   0   c44 0  ;
   0   0   0   0   0   c66]; % ?? usikker..

% s^E - konstantene er gitt som s^E = inv (c^E) :
S=inv(C);
s12e=S(1,2);
s11e=S(1,1);

% Regn med riktig tetthet
rhos=rho(matnr);

% Utregning av boelgehastighetene nedenfor er tatt fra artikkel av
% kunkel.
% For forklaring, se tilsvarende utregninger i funksjonen
% dynamel.

c11p=s11e/(s11e^2 - s12e^2);
vr=sqrt(c11p/rhos); % Hastighet i radiell retning (tynn skive)
if elektr(matnr)==1
  c33d=c33+e33^2/eps33;
else
  c33d=c33;
end;
vzcw=sqrt(c33d/rhos);  % Kompresjonsboelgehast., z-retning
vzsw=sqrt(c44/rhos);   % Skjaer-boelge-hast., z-retning

dr=abs(G2(1)-G1(1))/rr;
dz=abs(G2(2)-G1(2))/zz;

% Gaa gjennom alle moder med frekvens lavere enn Fmaks :
for ii=1:Nut

  if ttype==1 % Elementer pr. boelgelengde

    % Regn ut boelgelengder
    lambdar=vr/FFr(ii);lambdazc=vzcw/FFr(ii);lambdazs=vzsw/FFr(ii);
    if ii==1 % Skriv ut heading foerst
      fprintf('Mode    Frekv.              rA    el.r   el.zs   el.zc \n');
    end
    % Skriv ut frekvens, modal konstant og elementer pr. boelgelengde
    fprintf(' %3d %12.5e %10.1f %5.1f %5.1f %5.1f \n',...
            ii,abs(FFr(ii))/1e3,rA(ii),lambdar/dr,lambdazs/dz,lambdazc/dz);

  elseif ttype==2 % Gjennomsnittsforskyvning og koblingskoeffisient

    f=FFr(ii);omega=2*pi*f;phi0=1;
    cuuthup;
```

```
    if Loss==1 % Finn bidraget til responsen fra moden
      U=phi0*(UUTHUP(:,ii)/(omega^2-real(omega)^2));
    else
      U=phi0*UUTHUP(:,ii)/(g*omega^2);
    end
    modifu; % Ta seg av fastspente frihetsgrader (modifisering av U)
    uavz=abs(sum(U(2*mediet))/length(mediet));
    uavr=abs(sum(U(2*side-1))/length(side));
    if ii==1 % Skriv ut heading foerst
      fprintf('I utregning av responsen for gjennomsnittsutsving-utregning\n');
      fprintf('benyttes en inngangsspenning paa 1V peak.\n\n');
      fprintf('Mode    Frekv.        rA       K          UAVZ         UAVR\n');
    end
    % Skriv ut frekvens, modal konstant, koblingskoeff. og gjennomsnittsfor.
    fprintf(' %3d %12.4e %10.2e %10.2e %10.2e %10.2e \n',...
           ii,FFr(ii)/1e3,rA(ii),sqrt(Ksq(ii)),uavz,uavr);
  end;
end;
```

F.1.38 trans

```
% TRANS.M : Regner ut transient respons for burst og impulsrespons.

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp

% Benytter foelgende funksjoner :
% transcalc, cuuthup, fixloss, rhold, defburst, vieweig, rhold

% Viktige inngangsvariable :
% itype : 1 - respons i form av svingeform for elementet
% 2 - respons for midterste punktet
% 3 - gjennomsnittsforskyvning i r og z-retning

% pulstype : 1 - matematisk impuls
% 2 - burst

% utype : 0 - vis r- og z-retning ved gj.forskyvning
% 1 - vis r-retning ved gj.forskyvning
% 2 - vis z-retning ved gj.forskyvning


cuuthup; % Regn ut U^T*U*HUP
fixloss; % Ta seg av tapene i materialet
rhold; % Bestemmer om det skal plottes oppaa forrige plott

% Dersom det ikke er definert en burst, saa gjoer det naa.
if pulstype==2 & ~exist('burstf')
  defburst;
end;


if pulstype==2 & itype==1
  % Velg forstoerrelse for svingeform-plott
  fprintf('Ved valg av forstoerrelse maa man proeve seg frem.\n');
  nfactor=ninput('Forstoerrelse : ',100000);
elseif pulstype==1
  if itype==1
```

```
    nfactor=ninput('Forstoerrelse : ',1);
  else
    nfactor=1;
  end
end;

% Velg oensket tidsintervall. Dersom ikke noe blir valgt, saa regn
% ut et passende tidsintervall.
TT=input('Tidsintervall [to:dt:tmaks] :');
figure(curr);
if TT==[]
  if pulstype==1
    TT=[0:0.1e-6:100e-6];
  elseif pulstype==2
    TT=[0:1/burstf/30:burstT*2];
  end;
end


if itype==1 % Dersom svingeform er valgt

  chose; % Velg riktig region for plotting av svingeform (chosen, nyXL)
  for t=TT
    transcal; % Regn ut responsen for tiden t.
    streng=sprintf('t = %5.2f us',t*1e6');
    nev=real(nev); % Vi ser kun paa realdelen.
    vieweig(nev*nfactor,nyXL); % Plott svingeformen ved tiden t
    if Hele~=2
      axis([0 G2(1)*1.3 -G1(2)*.2 G1(2)*1.3]);
      text(0,-G1(2),streng);
    else
      axis([-1 1 -G1(2)*0.5 G1(2)*0.5]);
      axis('normal');
    end;
    drawnow; % Tegn opp
    hold off
  end

elseif itype==2 % Midtpunktets variasjon (z-forskyvn. for node nr. 1)

  fprintf('NB! Midtpunktets forskyvning for node nr. 1.\n');
  UMIDD=[];
  chosen=2; % Regn kun ut transient responsen for frihetsgrad nr. 2
  for t=TT
    transcal; % Regn ut responsen for tiden t.
    nev=real(nev);
    UMIDD=[UMIDD nev]; % Lagre realdelen av responsen
  end
  plot(TT,UMIDD,currt) % Plott responsen for midtpunktet

elseif itype==3 % Gjennomsnittsforskyvning

  chosen=[2*mediet 2*side-1]; % Regn ut respons for riktige flater
  mlengde=length(mediet);slengde=length(side);
  UAVZ=[];UAVR=[];UMIDD=[];
  tmp=0;
  for t=TT % Tidsintervall
    transcal; % Regn ut respons for en gitt t
    nev=real(nev);
```

```
    % Finn gjennomsnittsutsving i r- og z- retning ved aa
    % midle over forskyvningen paa en flate
    uavz=(sum(nev(1:mlengde))/mlengde);
    uavr=(sum(nev(mlengde+1:mlengde+slengde))/slengde);
    UAVZ=[UAVZ uavz];UAVR=[UAVR uavr];UMIDD=[UMIDD nev(1)];
    if tmp>20
      streng=sprintf('t = %5.2f us',t*1e6');
      fprintf(' %s \n',streng);
      tmp=0;
    else
      tmp=tmp+1;
    end;
  end
  % Plott gjennomsnittsforskyvningen
  if pulstype==1
    UAVZ=UAVZ/max(abs(UAVZ));
    UAVR=UAVR/max(abs(UAVR));
    UMIDD=UMIDD/max(abs(UMIDD));
  end
  if utype==0
    plot(TT,UAVZ,'-',TT,UAVR,'--')
  elseif utype==1
    plot(TT,UAVZ,currt)
  elseif utype==2
    plot(TT,UAVR,currt)
  end
end
```

F.1.39 transcal

```
% TRANSCAL.M : Regner ut transient respons ved en gitt tid t.

% Benytter :
% ingen
% Benyttes av :
% trans

% Viktige inngangsvariable :
% t - tiden det regnes for
% chosen - frihetsgradene det regnes for
% pulstype - 1 - matematisk impuls (diracs delta dunksjon)
% 2 - burst definert ved burstT, burstF, burstV

% Funksjonen regner ut den transiente responsen ved et gitt tidspunkt t
% for en valgt elektrisk spenningsvariasjon, som foreloepig kan vaere
% enten en burst eller diracs delta funksjon.

if pulstype==2 % burst
  if t>burstT % For tiden>perioden, forandres grensene til integralet
    tm=burstT; % perioden burstT blir grensen for integralet
  else
    tm=t; % Tiden t blir grensen for integralet
  end;
  Omega=2*pi*burstf; % Frekvens paa pulsen
end;

nev=zeros(size(chosen,2),1);
```

```
if t>0 % For t<0 er responsen lik null

  % Bidraget fra de Nuut foerste modene (lavere enn frekvens Fmaks)
  % blir regnet ut.
  for j=1:Nuut
    omegar=2*pi*FFr(j);
    omegard=omegar*sqrt(1-beta0^2); % tapseffektene blir regnet gjennom beta0
    if pulstype==2 % burst
      % responsen blir regnet ved hjelp av duhamel-integralet gitt
      % i teorien
      bm=beta0*omegar-i*omegard;
      bp=beta0*omegar+i*omegard;
      A=burstV/4*( -exp(-bm*t)/(bm+i*Omega)*(exp((bm+i*Omega)*tm)-1) ...
                   +exp(-bp*t)/(bp+i*Omega)*(exp((bp+i*Omega)*tm)-1) ...
                   +exp(-bm*t)/(bm-i*Omega)*(exp((bm-i*Omega)*tm)-1) ...
                   -exp(-bp*t)/(bp-i*Omega)*(exp((bp-i*Omega)*tm)-1) );
      nev=nev+UUTHUP(chosen,j)/omegard*A;
    elseif pulstype==1 % impulsrespons
      % responsen blir regnet ved hjelp av duhamel-integralet
      nev=nev+(UUTHUP(chosen,j)/(omegard)*exp(-beta0*t*2*pi*FFr(j))...
          *imag(exp(sqrt(-1)*omegard*t)));
      % eventuellt forandre til virkelig sinusdef istedenfor imag(exp())
    end;
  end;
else % for t<0 er responsen 0
  nev=zeros(size(chosen))';
end
```

F.1.40 uaverage

```
function [uavz,uavr]=uaverage(EIG,XL)
global rr zz fri nodes G1 G2;
global igjen elektro null side mediet fri fril;


for i=1:fril:fril*size(XL,2)
  A=[];
  for j=0:dim-1
    A=[A ; EIG(i+j)];
  end;
  E=[E A];
end;
EIG=E;

  uavz=(sum(EIG(2,mediet))/length(mediet));
  uavr=(sum(EIG(1,side))/length(side));
end
```

F.1.41 vieweig

```
function vieweig(EIG,NXL)
% VIEWEIG.M : Vis forskyvningen til strukturen grafisk

% Benytter :
```

```
% ingen
% Benyttes av :
% respons, trans, modeplot, move

% Funksjonen tegner opp forskyvningen til den delen av strukturen som
% det er valgt ved hjelp av variabelen Hele. Dersom Hele er lik 1, saa
% blir hele strukturen vist. Dersom Hele har en annen verdi, vil kun
% deler av strukturen bli vist. For naermere forklaring, se funksjonen
% chose. Sjekking av variabelen Hele blir gjort foer kallet av
% funksjonen vieweig, slik at kun de noder som skal plottes er gitt
% som input (NXL) med tilhoerende forskyvning (EIG).

% Viktige variable :
% grid : 0 - Tegn ikke opp opprinnelig elementoppdeling
% 1 - Tegn opp opprinnelig elementoppdeling
% NXL : koordinatene til de enkelte nodene som det skal plottes for
% EIG : forskyvning for de enkelte nodene som det skal plottes for

% globale variable
global curr currt nel G1 G2 nodes elements grid EL fri fri1 XL mediet;
global Materialedef;
figure(curr);

if size(NXL)==size(XL) % Dersom hele strukturen skal plottes
  EIG=reshape(EIG,2,size(XL,2));
  XL2=NXL+EIG; % Regn ut ny koordinatverdi for hver node

  % Plott + i hvert hjoerne
  hold off;
  plot([G1(1) G2(1) G1(1) G2(1)],[G1(2) G2(2) G2(2) G1(2)],'w+')
  hold on;

  % Velg hvilke noder som skal forbindes med streker
  if nel==8
    I=[1 5;5 2;2 6;6 3;3 7;7 4;4 8;8 1];
  elseif nel==4
    I=[1 2;2 3;3 4;4 1];
  end

  % Hvis grid=1 saa tegn opp rutenett.
  if grid==1
    R=[];Z=[];
    for i=1:elements % Ett og ett element
      xl=XL(:,EL(i,1:nel)); % Finn koordinatene til elementet
      R=[R [xl(1,I(:,1));xl(1,I(:,2))]]; % r-koordinater til linjer
      Z=[Z [xl(2,I(:,1));xl(2,I(:,2))]]; % z-koordinater til linjer
    end;
    plot(R,Z,'r--'); % Plott rutenett (opprinnelig struktur)
  end;

  % Tegn opp forskyvningen av strukturen
  R=[];Z=[];

  % En farge for hvert materiale :
  farge=['yellow ';
         'red    ';
         'green  ';
         'blue   ';
         'white  '];
```

```
  for i=1:elements % Ett og ett element
    xl=XL2(:,EL(i,1:nel)); % Finn koordinatene til elementet
    R=[R [xl(1,I(:,1));xl(1,I(:,2))]]; % r-koordinater til linjer
    Z=[Z [xl(2,I(:,1));xl(2,I(:,2))]]; % z-koorinater til linjer
    if Materialedef % En farge for hvert materiale :
      dum=plot([xl(1,I(:,1));xl(1,I(:,2))],[xl(2,I(:,1));xl(2,I(:,2))],farge(EL(i,nel+1),:));
      clear dum;
      hold on
    end;
  end;
  if Materialedef==0
    plot(R,Z,currt); % Plott forskyvningen av strukturen
  end;
  axis('off');axis('equal'); % Ikke vis akser

else % Plott kun en del av strukturen

  XL2=NXL+EIG'; % Regn ut koordinater som skal plottes
  ant=length(XL2)/2;
  if length(NXL)==length(mediet)*2
    % egen rutine for kun mot mediet naar det ikke animeres moder
    % Plotter forskyvning for HELE flaten mot mediet
    XL2=XL2(ant+1:2*ant);
    rv=[0:(1/(ant-1)):1];
    plot([-1 1],[0 0],'w--')
    hold on;
    ttt=NXL(length(NXL));
    plot(rv,XL2-ttt,currt)
    plot(-rv,XL2-ttt,currt)
    axis('normal');
    axis('off');
  else
    % Plott opp + i hjoerner paa strukturen
    plot([G1(1) G2(1) G1(1) G2(1)],[G1(2) G2(2) G2(2) G1(2)],'w+')
    hold on;
    % Plott linjer mellom de forskjoevete nodene
    plot(XL2(1:ant),XL2(ant+1:2*ant))
    axis('off');
    axis('equal');
  end
end
```

F.1.42 viewmesh

```
function viewmesh
% VIEWMESH : Se paa elementoppdelingen

% Benyttes av :
% deffast, defel, defmat, femp
% Benytter :
% ingen

% Viser elementoppdelingen. Brukes blant annet til elektriske og
% mekaniske grensebetingelser og valg av materiale.

% Globale variable
```

```
global rr zz nodes elements XL EL nel;

hold off; % Skal ikke kunne plottes oppaa andre figurer
subplot(1,1,1)

% Plott et punkt for hver node
plot(XL(1,:),XL(2,:),'.')

% Skriv nodenummer paa noden :
hold on;
for ii=1:nodes
  text(XL(1,ii),XL(2,ii)-(XL(2,1)-XL(2,2))/10,num2str(ii),'fontsize',8);
end;

% En farge for hvert materiale :
farge=['red     ';
       'yellow  ';
       'green   ';
       'blue    ';
       'white   '];

% Skriv elementnummer midt i elementet med farge som identifiserer
% materialet.
for ii=1:elements
  xl=[XL(:,EL(ii,1)) XL(:,EL(ii,2)) XL(:,EL(ii,3)) XL(:,EL(ii,4))];
  text((XL(1,EL(ii,2))-XL(1,EL(ii,1)))/2+XL(1,EL(ii,1)),...
    (XL(2,EL(ii,3))-XL(2,EL(ii,2)))/2+XL(2,EL(ii,2)),num2str(ii),...
    'color',farge(EL(ii,nel+1),:),'fontweight','bold');
end;
set(gca,'box','off');

% Sett overskrift paa figuren :
title('Elementoppdeling');
xlabel('r [m]');
ylabel('z [m]');
```

F.1.43 zr

```
% ZR.M : Regner ut Z_r enten harmonisk eller for transient analyse

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% femp

% Benytter foelgende funksjoner :
% cuthup, zrcalc, fixloss, rhold, defburst

% Kalles opp fra menyene i femp. Foelgende viktige inngangsvariable :
% itype : 1 - harmonisk analyse
% 2 - transient analyse
% pulstype : 1 - matematisk impulsrespons
% 2 - burst


fixloss; % Ta seg av tapsmodellering
figure(curr);subplot(1,1,1); % riktig figur
cuthup;

F1=ninput('Minimum frekvens paa plottet ',0);
```

```
F2=ninput('Maksimum frekvens paa plottet ',Fmaks);

if itype==2 % transient analyse
  cuthup; % Regn ut U^T*HUP, og lagre denne i UUTHUP
  hold off;
  TT=input('Tidsintervall [to:dt:tmaks] :'); % Velg tidsintervall

  if TT==[]  % Hvis ingenting er valg, saa velg standardintervall.
    if pulstype==1
      TT=[0:0.05e-6:4e-6];
    elseif pulstype==2
      TT=[0:1/burstf/30:burstT*2];
    end
  end

  if pulstype==2 & ~exist('burstf')
    defburst; % Definer burst hvis dette ikke er gjort enda.
    fprintf('Boelgetog/Burst er definert. Trykk en tast.\n');
    pause;
  end;

  ZR=[];
  for t=TT % Gaa gjennom tidsintervallet.
    hold off;
    zrcalc; % Regn ut zr for hver tid i rutinen zrcalc.
    ZR=[ZR;abs(nev)'];
  end
  maxverdi=max(max(ZR)*1.05);
  figure(curr);
  for ii=1:length(TT) % Gaa gjennom tidsintervallet.
    hold off;
    % Plott zr mot frekvensen
    plot(real(FFr(1:Nut)),ZR(ii,:),'y-',real(FFr(1:Nut)),ZR(ii,:),'ro');

    if pulstype==2 % Hvis burst
      % Saa plott frekvensen for burst'en paa figuren
      hold on
      plot([burstf burstf],[0 maxverdi],'w--');
    end;

    streng=sprintf('t = %5.2f us',TT(ii)*1e6');
    title(streng);
    axis([F1 F2 0 maxverdi])
    drawnow; % Tegn neste tid uten aa vente.
    hold off
  end;
  clear ZR TT;
elseif itype==1 % Dersom harmonisk analyse
  hold off;
  FF=input('Frekvensomraade? [ fmin:step:fmax ] '); % frekvensomraade
  ZR=[];
  for f=FF % Gaa gjennom frekvensomraadet
    nev=zeros(Nut,1);
    omega=2*pi*f;
    % Regn ut Zr for denne frekvensen
    for j=1:Nut
      nev(j)=(UTHUP(:,j)/((2*pi*FFr(j))^2*(1+i*g)-omega^2));
    end;
    ZR=[ZR;abs(nev)'];
```

```
  end
  figure(curr);
  maxverdi=max(max(ZR))*1.05;
  for ii=1:length(FF) % Gaa gjennom frekvensomraadet
    nev=zeros(Nut,1);
    omega=2*pi*f;
    % Regn ut Zr for denne frekvensen
    for j=1:Nut
      nev(j)=(UTHUP(:,j)/((2*pi*FFr(j))^2*(1+i*g)-omega^2));
    end;
    % Plott zr mot frekvens for denne frekvensen.
    plot(real(FFr(1:Nut)),ZR(ii,:),'y-',real(FFr(1:Nut)),ZR(ii,:),'ro');
    hold on
    % Plott den loepende frekvensen paa figuren :
    plot([FF(ii) FF(ii)],[0 maxverdi],'w--');
    streng=sprintf('f = %5.2f kHz',FF(ii)/1e3);
    title(streng);
    axis([F1 F2 0 maxverdi])
    drawnow;
    hold off
  end
end
```

F.1.44 zrcalc

```
% ZRCALC.M : Regner ut Z_r for impulsrespons og burst

% Benyttes av foelgende funksjoner :
% zr

% Benytter foelgende funksjoner :
% ingen


% Dersom pulstypen er burst, saa finn ut om vi er innenfor eller
% utenfor bursten i tid.
if pulstype==2 % burst
  if t>burstT
    tm=burstT; % utenfor blir tm satt til burstT
  else
    tm=t; % innenfor blir tm satt til t
  end;
  Omega=2*pi*burstf; % Frekvens paa pulsen i radianer
end;
nev=zeros(Nuut,1);
if t>0
  for j=1:Nuut  % Regn bidrag fra de Nuut foerste modene
    omegar=2*pi*FFr(j);
    omegard=omegar*sqrt(1-beta0^2);
    if pulstype==2 % burst
      % Regn ut responsen for en burst ved tiden t.
      bm=beta0*omegar-i*omegard;
      bp=beta0*omegar+i*omegard;
      Y=burstV/4*( -exp(-bm*t)/(bm+i*Omega)*(exp((bm+i*Omega)*tm)-1) ...
                   +exp(-bp*t)/(bp+i*Omega)*(exp((bp+i*Omega)*tm)-1) ...
                   +exp(-bm*t)/(bm-i*Omega)*(exp((bm-i*Omega)*tm)-1) ...
                   -exp(-bp*t)/(bp-i*Omega)*(exp((bp-i*Omega)*tm)-1) );
```

```
      nev(j)=UTHUP(j)/omegard*Y;
    elseif pulstype==1 % impulsrespons
      % Regn ut responsen fra en matematisk impuls ved tiden t.
      nev(j)=(UTHUP(j)/(omegard)*exp(−beta0*t*2*pi*FFr(j))*imag(exp(sqrt(−1)*omegard*t)));
      % eventuellt forandre til virkelig sinusdef istedenfor imag(exp())
    end;
  end;
else
  nev=zeros(Nuut,1); % Dersom t<=0, saa er responsen null!
end
```

F.2 FEMP for F90

F.2.1 compute

```
! COMPUTE :
! Funksjon for utregning av egenverdier/egenvektorer og
! massematriser/stivhetsmatriser.

subroutine compute
  ! Vi jobber med moduler work_array :
  use work_array
  implicit none

  ! Funksjoner som blir benyttet :
  external init,makemesh,dpotrf,dgetrf

  ! Initialiser lokale variable :
  double precision, dimension(((2*xx+1)*(yy+1)+(xx+1)*yy)*(fri−1),1) :: U
  double precision, dimension(1,1) :: ff
  double precision, dimension(:,:), allocatable :: kuu,mass,kup,kpp
  double precision, dimension(:,:), allocatable :: kupp,kipp,kpppp,huu,tmp,Ive
  integer, dimension(:), allocatable :: IPIV
  double precision, dimension(2*8,2*8) :: kuul,massl
  double precision, dimension(2*8,8) :: kupl
  double precision, dimension(8,8) :: kppl
  double precision, dimension(2,8) :: xll
  integer j,i,m,n,x1f,x1fl,x2f,x2fl,x1t,x1tl,x2t,x2tl
  integer ell,nul,igl
  integer, dimension(:), allocatable :: igjen, elektro, null
  integer dum,info
  integer Mant,TINFO
  double precision rtol
  double precision,dimension(8*(fri−1)*((2*xx+1)*(yy+1)+(xx+1)*yy)) :: WORK
  integer, dimension(5*(fri−1)*(fri−1)*((2*xx+1)*(yy+1)+(xx+1)*yy)) :: IWORK
  integer, dimension((fri−1)*(fri−1)*((2*xx+1)*(yy+1)+(xx+1)*yy)) :: IFAIL
  integer LWORK

  ! Alloker masse− og stivhetsmatriser :
  allocate(kuu(nodes*(fri−1),nodes*(fri−1)))
  allocate(mass(nodes*(fri−1),nodes*(fri−1)))
  allocate(kup(nodes*(fri−1),nodes))
  allocate(kpp(nodes,nodes))
  kuu=0
  kup=0
  kpp=0
  mass=0
```

```
! Del strukturen opp i noder og elementer i funksjonen makemesh :
call makemesh

! Loekke for alle elementene der de lokale masse- og stivhetsmatriser
! blir regnet ut for hvert element, og de tilsvarende globale matrisene
! blir oppdatert ut fra disse :
do i=1,elements

  ! Finn nodedefinisjonen for det lokale elementet :
  do j=1,nel
    xll(:,j)=XL(:,EL(i,j))
  end do

  ! Kall opp utregning av de lokale masse- og stivhetsmatriser for
  ! element nr. i :
  if (plane==0) then
    call masstiff(kuul,kupl,kppl,massl,xll)
  else
    call pmasstif(kuul,kupl,kppl,massl,xll)
  end if

  ! Oppdater de globale matrisene ut fra de lokale matrisene :
  do m=1,nel
     do n=1,nel
        x1f=fri1*EL(i,m)-fri1+1
        x1t=x1f+fri1-1
        x2f=fri1*EL(i,n)-fri1+1
        x2t=x2f+fri1-1
        x1fl=fri1*m-fri1+1
        x1tl=x1fl+fri1-1
        x2fl=fri1*n-fri1+1
        x2tl=x2fl+fri1-1

        kuu(x1f:x1t,x2f:x2t)=kuu(x1f:x1t,x2f:x2t)+kuul(x1fl:x1tl,x2fl:x2tl)
        kup(x1f:x1t,EL(i,n))=kup(x1f:x1t,EL(i,n))+kupl(x1fl:x1tl,n)
        kpp(EL(i,m),EL(i,n))=kpp(EL(i,m),EL(i,n))+kppl(m,n)
        mass(x1f:x1t,x2f:x2t)=mass(x1f:x1t,x2f:x2t)+massl(x1fl:x1tl,x2fl:x2tl)
     end do
  end do
end do

! For det piezoelektriske tilfellet er det her antatt at EPS(2,2) maa
! vaere forskjellig fra 0. Dette er ikke generelt, og boer kanskje
! gjoeres ved hjelp av en egen variabel :
if (EPS(2,2) /= 0) then
  ! Det piezoelektriske tilfellet

  allocate(elektro(nodes/2))
  allocate(null(nodes/2))
  allocate(igjen(2*nodes))

  ell=0
  nul=0
  igl=0
  ! Finn ut hvilke noder som ligger paa zmax og zmin. Disse omraadene
  ! blir definert som elektroder.
  do i=1,nodes
    if (XL(2,i)==G1(2)) then
```

```
    ell=ell+1
    elektro(ell)=i
  else if (XL(2,i)==G2(2)) then
    nul=nul+1
    null(nul)=i
  else
    igl=igl+1
    igjen(igl)=i
  end if
end do

! Alloker plass til en del hjelpevariable og matriser fra teorien :
allocate(kupp(nodes*fri1,ell))
allocate(kipp(igl,ell))
allocate(kpppp(ell,ell))
allocate(kui(nodes*fri1,igl))
allocate(kii(igl,igl))
allocate(IPIV(igl))

! Regn ut piezoelektriske og dielektriske stivhetsmatriser for noder som
! er paa den ene elktroden, og noder som er utenfor elektrodene.
do i=1,ell
  kupp(1:nodes*fri1,i)=kup(1:nodes*fri1,elektro(i))
  do j=1,igl
    kipp(j,i)=kpp(igjen(j),elektro(i))
  end do
  do j=1,ell
    kpppp(j,i)=kpp(elektro(j),elektro(i))
  end do
end do

do i=1,igl
  kui(1:nodes*fri1,i)=kup(1:nodes*fri1,igjen(i))
  do j=1,igl
    kii(j,i)=kpp(igjen(j),igjen(i))
  end do
end do

! LU-faktoriser matrisen kii. (LAPACK)
call dgetrf(igl,igl,kii,igl,IPIV,dum)
TINFO=dum;
LWORK=4*igl

! Inverter matrisen kii. (LAPACK)
call dgetri(igl,kii,igl,IPIV,WORK,LWORK,dum)
TINFO=TINFO+dum;

deallocate(kup,kpp)
allocate(Ive(size(kupp,2),1))
do i=1,size(kupp,2)
  Ive(i,1)=1
end do

! Regn ut systemet paa H-form :
kuu=kuu-matmul(matmul(kui,kii),transpose(kui))
hup=matmul(kupp-matmul(matmul(kui,kii),kipp),Ive)
hpp=matmul(matmul(transpose(Ive),(kpppp-matmul(matmul(transpose(kipp),kii),kipp))),Ive)
deallocate(Ive)
deallocate(kupp,kipp,kpppp)
```

```
    ! Regn ut matrisen som inngaar i loesning av egenverdiproblemet i
    ! tilfellet der antiresonansfrekvenser skal regnes ut :
    if (res==0) then
      kuu=kuu-matmul(hup,transpose(hup))/hpp(1,1)
    end if
  else
    ! I det elastiske tilfellet skal det ikke manipuleres med matrisene
    ! slik som i det piezoelektriske tilfellet :
    print*,"Elastisk"
    hpp(1,1)=1
  end if

  ! Naa er de globale masse- og stivhetsmatrisene utregnet, slik at
  ! det eneste som gjenstaar er loesning av egenverdiproblemet :

  ! Vi Cholesky-faktoriserer masse-matrisen : (LAPACK)
  allocate(tmp(nodes*fril,nodes*fril))
  tmp=mass
  call dpotrf('L',size(tmp,1),tmp,size(tmp,1),dum)
  TINFO=TINFO+dum;

  ! Reduserer det generaliserte egenverdisystemet til standard form
  ! (LAPACK)
  call dsygst(1,'L',size(tmp,1),kuu,size(tmp,1),tmp,size(tmp,1),dum)
  TINFO=TINFO+dum;
  allocate(A1(nodes*fril))
  allocate(VECT(nodes*fril,antall))


  LWORK=8*fril*nodes
  rtol=0.0000000000001

  ! Loeser egenverdisystemet paa standard form (LAPACK)
  call dsyevx('V','I','L',size(kuu,1),kuu,size(kuu,1),0,0,1,
       antall,rtol,Mant,A1,VECT,size(kuu,1),WORK,LWORK,IWORK,IFAIL,INFO)
  TINFO=TINFO+dum;

  ! For aa finne egenvektorene til det generaliserte systemet som vi er
  ! interresert i ut fra egenvektorene til systemet paa standard form,
  ! maa vi foreta en transformasjon av egenvektorene (se LAPACK-manual).

  ! For aa spare minne boer man her lagre noen matriser paa disk.

  ! Inverterer den triangulaere delen av matrisen tmp, som skal
  ! multipliseres med wgwnvwktorene :
  call dtrtri('L','N',size(tmp,1),tmp,size(tmp,1),INFO)
  TINFO=TINFO+INFO;
  do i=1,size(tmp,1)
    do j=1,size(tmp,1)
      if (i<j) then
        tmp(i,j)=0
      end if
    end do
  end do
  tmp=transpose(tmp);

  ! Multipliserer egenvektorene med transformasjonsmatrisen :
  VECT=matmul(tmp,VECT)
```

```
  print*,"INFO = ",TINFO

  ! Dealloker variable som ikke brukes lenger
  deallocate(kuu)
  deallocate(tmp)

  ! Egenvektorene masse−normaliseres :
  do i=1,Mant
    U(1:nodes*fri1,1)=VECT(1:nodes*fri1,i)
    ff=matmul(matmul(transpose(U),mass),U)
    VECT(1:nodes*fri1,i)=VECT(1:nodes*fri1,i)/sqrt(ff(1,1))
  end do

  ! Antallet settes til antall egenvektorer utregnet
  antall=Mant
  deallocate(mass)
  deallocate(IPIV,igjen,elektro,null)
end
```

F.2.2 dtsave

```
! DTSAVE : Lagrer frekvensspektrum for lesing fra matlab−versjonen
!          av FEMP.

subroutine dtsave
  ! Benytt variable i modulene work_array og dtkurve
  use work_array
  use dtkurve
  implicit none

  ! Lokale variable
  integer i,j,N
  character(80) FileName

  N=nodes*fri1
  ! Hent inn filnavn :
  read*,FileName
  ! Aapne fil for skriving :
  open (1,file=FileName,status="replace")
  print*,"Lagrer verdier som ",FileName

  ! Lagre materialparametre :
  write(1,"(E25.18)") C(1,1)
  write(1,"(E25.18)") C(1,2)
  write(1,"(E25.18)") C(1,3)
  write(1,"(E25.18)") C(1,4)
  write(1,"(E25.18)") C(2,1)
  write(1,"(E25.18)") C(2,2)
  write(1,"(E25.18)") C(2,3)
  write(1,"(E25.18)") C(2,4)
  write(1,"(E25.18)") C(3,1)
  write(1,"(E25.18)") C(3,2)
  write(1,"(E25.18)") C(3,3)
  write(1,"(E25.18)") C(3,4)
  write(1,"(E25.18)") C(4,1)
  write(1,"(E25.18)") C(4,2)
  write(1,"(E25.18)") C(4,3)
  write(1,"(E25.18)") C(4,4)
```

```
  write(1,"(E25.18)") E(1,1)
  write(1,"(E25.18)") E(1,2)
  write(1,"(E25.18)") E(1,3)
  write(1,"(E25.18)") E(1,4)
  write(1,"(E25.18)") E(2,1)
  write(1,"(E25.18)") E(2,2)
  write(1,"(E25.18)") E(2,3)
  write(1,"(E25.18)") E(2,4)
  write(1,"(E25.18)") EPS(1,1)
  write(1,"(E25.18)") EPS(1,2)
  write(1,"(E25.18)") EPS(2,1)
  write(1,"(E25.18)") EPS(2,2)
  write(1,"(E25.18)") rho

  ! Skriv dimensjoner for matriser :
  write(1,"(I)") maxmoder
  write(1,"(I)") ant

  ! Lagre tykkelser og D/T-forhold :
  do i=1,ant
    write(1,"(E25.18)") T(i)
    write(1,"(E25.18)") DT(i)
  end do

  ! Skriv frekvenser, modal konstant og koblingsfaktor :
  do i=1,ant
    do j=1,maxmoder
      write(1,"(E25.18)") FF(j,i)
      if (EPS(2,2)/=0) then
        write(1,"(E25.18)") RR(j,i)
        write(1,"(E25.18)") KK(j,i)
      end if
    end do
  end do
  close(1)
end
```

F.2.3 femp

```
! FEMP F90-versjon
! Finite Element Modellering av Piezoelektriske strukturer

! HOVEDPROGRAM

module work_array
  ! Modul for globale variable som benyttes for den enkelte
  ! beregningen :
  integer nodes,elements,xx,yy,nel,fri,antall,fri1
  double precision, dimension(2) :: G1,G2
  double precision, dimension(1,1) :: hpp
  double precision, dimension(:,:), allocatable :: XL,VECT,hup,kii,kui
  integer, dimension(:,:), allocatable :: EL
  double precision, dimension(:), allocatable :: A1
  integer res,plane,savestress
  double precision lengde
  integer lint
  double precision, dimension(4,4) :: C
  double precision, dimension(2,4) :: E
```

```
  double precision, dimension(2,2) :: EPS
  double precision, dimension(9) :: sg,tg,wg
  double precision rho
end module

module dtkurve
  ! Modul for variable som brukes for aa lage frekvensspektrum.
  integer ant,maxmoder,mmax,count
  double precision, dimension(:,:), allocatable :: FF,RR,KK
  double precision, dimension(:), allocatable :: DT,T
end module


! Her begynner hovedprogrammet :

program fem
  ! Bruk modulene work_array og dtkurve i fortsettelsen :
  use work_array
  use dtkurve
  implicit none

  ! Foelgende funksjoner benyttes :
  external compute,tabell

  ! Lokale variable :
  integer saveit
  double precision TT,DTT

  ! Initialisering av antall elementer og frihetsgrader
  ! Virker kun for 8-noders 2D elementer.
  fri=3
  nel=8

  ! Initialiser gauss-integrasjonspunkter og hent materialparametre
  ! fra bruker/fil
  call init

  ! Hent inn
  ! ant        : Antall skiver som skal simuleres
  ! maxmoder : Antall moder(NB) som skal lagres for hver D/T
  ! saveit    : 1 for lagring av egenvektorer etc, 0 for ingen lagring
  ! res        : 0 - Antiresonansfrekvenser, aksesymmetriske tilfellet
  ! res        : 1 - Resonansfrekvenser, aksesymmetriske tilfellet
  ! res        : 2 - Antiresonansfrekvenser, plane-strain tilfellet
  ! res        : 3 - Antiresonansfrekvenser, plane-strain tilfellet
  ! savestress : 1 for lagring av spenning, 0 ellers
  read*,ant,maxmoder,saveit,res,savestress

  ! Modifiser variabelen res og plane ut fra verdien til res.
  if (res==2) then
    plane=1
    res=0
  else if (res==3) then
    plane=1
    res=1
  else
    plane=0
  end if
```

```
! Alloker minne for variablene i modulen dtkurve :
allocate(FF(maxmoder,ant))
allocate(RR(maxmoder,ant))
allocate(KK(maxmoder,ant))
allocate(T(ant))
allocate(DT(ant))
! Sett alle verdier til null :
FF=0
RR=0
KK=0
T=0
DT=0

! Loekke for alle skivene som skal analyseres :
do count=1,ant

!   Hent inn :
!   xx     : Antall elementer i x-retningen  (r)
!   yy     : Antall elementer i y-retningen  (z)
!   antall : Antall egenverdier som skal finnes. Her er egenverdier
!            forskjellig fra symmetriske moder som blir gitt i ant!
  read*,xx,yy,antall
  print*,xx,yy,antall

!   Regn ut antall noder og elementer :
  nodes=(2*xx+1)*(yy+1)+(xx+1)*yy
  elements=xx*yy
  fri1=fri-1

!   Alloker plass for koordinatdef (XL), elementdef. (EL), og
!   matrisen hup.
  allocate(XL(2,nodes))
  allocate(EL(elements,8))
  allocate(hup(nodes*fri1,1))

!   Hent inn :
!   TT  : Tykkelsen til skiven
!   DTT : D/T-forholdet til skiven
  read*,TT,DTT

!   Regn ut koordinater for hjoernene ut fra dette :
  G1(1)=0
  G1(2)=TT
  G2(1)=DTT*TT/2
  G2(2)=0

  print*,G1(2),G2(1)*2

!   Lagre tykkelse og D/T-forhold for denne skiven
  T(count)=TT
  DT(count)=DTT

!   Regn ut stivhetsmatriser/masse-matrise, og finn egenverdier og
!   egenvektorer :
  call compute

!   Skriv ut en tabell over egenverdier og modal konstant :
  call tabell
```

```
  !   Lagre egenverdier/vektorer ++ dersom dette er valgt :
    if (saveit==1) then
      call saveeig
    end if

  ! Dealloker variablene for denne skiven :
    deallocate(XL,EL,A1,VECT,hup,kii,kui)
  end do

  ! Lagre verdier for alle skivene (frekvensspektrum)
  if (ant>1) then
    call dtsave
  end if

end
```

F.2.4 init

```
! INIT :
! Funksjon for initialisering av materialparametre (leses fra
! tastatur/fil) og gaussintegrasjonspunkter.

subroutine init
! Variablene som blir satt her er en del av modulen work_array
  use work_array
  implicit none

  double precision aa,bb,cc,dd

! Hent inn materialparametre fra tastatur/fil :
  read*,C(1,1),C(1,2),C(1,3),C(1,4)
  read*,C(2,1),C(2,2),C(2,3),C(2,4)
  read*,C(3,1),C(3,2),C(3,3),C(3,4)
  read*,C(4,1),C(4,2),C(4,3),C(4,4)

  read*,E(1,1),E(1,2),E(1,3),E(1,4)
  read*,E(2,1),E(2,2),E(2,3),E(2,4)

  read*,EPS(1,1),EPS(1,2)
  read*,EPS(2,1),EPS(2,2)

  read*,rho
  read*,lengde

  EPS=-EPS

! Definer gauss-punkter og vekter :
  lint=9

  aa=7.745966692414835e-01
  sg(1)=-aa
  sg(2)=0
  sg(3)=aa
  sg(4)=-aa
  sg(5)=0
  sg(6)=aa
  sg(7)=-aa
  sg(8)=0
```

```
  sg(9)=aa

  tg(1)=-aa
  tg(2)=-aa
  tg(3)=-aa
  tg(4)=0
  tg(5)=0
  tg(6)=0
  tg(7)=aa
  tg(8)=aa
  tg(9)=aa

  bb=3.086419753086416e-01
  cc=4.938271604938269e-01
  dd=7.901234567901234e-01

  wg(1)=bb
  wg(2)=cc
  wg(3)=bb
  wg(4)=cc
  wg(5)=dd
  wg(6)=cc
  wg(7)=bb
  wg(8)=cc
  wg(9)=bb
end
```

F.2.5 makemesh

```
! MAKEMESH : Del strukturen opp i elementer :
subroutine makemesh

  ! Benytt variable i modulen work_array :
  use work_array
  implicit none

  ! Lokale variable :
  integer i,j,k
  integer nr,prg,prg2,rest
  double precision dx,dy

  ! Fordel noder utover strukturen :
  dx=(G2(1)-G1(1))/xx
  dy=(G2(2)-G1(2))/yy
  nodes=0;
  do i=0,xx
    do j=0,2*yy
      nodes=nodes+1
      XL(1,nodes)=G1(1)+i*dx
      XL(2,nodes)=G1(2)+j*dy/2
    end do
    if (i /= xx) then
      do j=0,yy
        nodes=nodes+1
        XL(1,nodes)=G1(1)+i*dx + dx/2
        XL(2,nodes)=G1(2)+j*dy
      end do
    end if
```

```
  end do

  ! Del strukturen opp i elementer, og lagre hvilke noder som
  ! inngaar i hvilke elementer :
  elements=xx*yy
  nr=3
  do k=1,elements
    prg=(2*yy+1)+(yy+1)
    rest=mod(nr,prg)
    prg2=(rest-1)/2

    EL(k,1)=nr
    EL(k,2)=nr+prg
    EL(k,3)=nr+prg-2
    EL(k,4)=nr-2
    EL(k,5)=nr+(2*yy+1)-prg2
    EL(k,6)=nr+prg-1
    EL(k,7)=nr+(2*yy+1)-prg2-1
    EL(k,8)=nr-1

    if (rest==(2*yy+1)) then
        nr=nr+(yy+1)+3
    else
        nr=nr+2
    end if
  end do
end
```

F.2.6 masstiff

```
! MASSTIFF: Regner ut lokale masse- og stivhetsmatriser for et element

subroutine masstiff(kuul,kupl,kppl,massl,xll)
  ! Benytt variable i modulen work_array :
  use work_array

  implicit none

  ! Benytter foelgende funksjoner :
  external shape

  ! Lokale variable :
  double precision, dimension(2*8,2*8) :: kuul,massl
  double precision, dimension(2*8,8) :: kupl
  double precision, dimension(8,8) :: kppl
  double precision, dimension(2,8) :: xll
  double precision, dimension(3,8) :: shp
  double precision, dimension(4,8*2) :: bu
  double precision, dimension(2,8) :: bp
  double precision, dimension(2,8*2) :: m
  integer i,j,l,ii
  double precision rr,dv,xsj

  ! Sett de lokale masse- og stivhetsmatrisene til null
  kuul=0
  kupl=0
  kppl=0
  massl=0
```

```
  ! Loekke over gauss-integrasjonspunktene :
  do l=1,lint
    ! Finn interpolasjonsfunksjoner for dette punktet :
    call shape(shp,xsj,sg(l),tg(l),xll)

    ! Regn ut r-koordinaten til punktet :
    rr=0
    do i=1,nel
      rr=rr+xll(1,i)*shp(3,i)
    end do

    ! Regn ut B-matrisene samt N-matrisen for dette gauss-
    ! integrasjonspunktet :
    do j=1,nel
      ii=2*(j-1)
      bu(1,1+ii)=shp(1,j)
      bu(1,2+ii)=0
      bu(2,1+ii)=shp(3,j)/rr
      bu(2,2+ii)=0
      bu(3,1+ii)=0
      bu(3,2+ii)=shp(2,j)
      bu(4,1+ii)=shp(2,j)
      bu(4,2+ii)=shp(1,j)

      bp(1,j)=shp(1,j)
      bp(2,j)=shp(2,j)

      m(1,1+ii)=shp(3,j)
      m(1,2+ii)=0
      m(2,1+ii)=0
      m(2,2+ii)=shp(3,j)
    end do

    ! Oppdater de lokal masse- og stivhetsmatrisene :
    dv=xsj*wg(l)*rr*2*3.141592553589793;
    kuul=kuul+matmul(matmul(transpose(bu),C),bu)*dv
    kupl=kupl+matmul(matmul(transpose(bu),transpose(E)),bp)*dv
    kppl=kppl+matmul(matmul(transpose(bp),EPS),bp)*dv
    massl=massl+matmul(transpose(m),m)*dv*rho
  end do
end
```

F.2.7 pmasstif

```
! PMASSTIF: Regner ut lokale masse- og stivhetsmatriser for et element,
!           plane-strain rutine.

subroutine pmasstif(kuul,kupl,kppl,massl,xll)
  ! Benytt variable i modulen work_array :
  use work_array

  implicit none

  ! Benytter foelgende funksjoner :
  external shape

  ! Lokale variable :
```

```
double precision, dimension(2*8,2*8) :: kuul,massl
double precision, dimension(2*8,8) :: kupl
double precision, dimension(8,8) :: kppl
double precision, dimension(2,8) :: xll
double precision, dimension(3,8) :: shp
double precision, dimension(3,8*2) :: bu
double precision, dimension(2,8) :: bp
double precision, dimension(2,8*2) :: m
double precision, dimension(3,3) :: newC
double precision, dimension(2,3) :: newE
integer, dimension(3) :: velg
integer i,j,l,ii
double precision rr,dv,xsj

! Finn materialkonstantmatriser for plane-strain tilfellet :
velg(1)=1
velg(2)=3
velg(3)=4
newC=C(velg,velg);
newE=E(1:2,velg);

! Nullstill matrisene :
kuul=0
kupl=0
kppl=0
massl=0

! Loekke over gauss-integrasjonspunktene :
do l=1,lint
  ! Finn interpolasjonsfunksjoner for dette punktet :
  call shape(shp,xsj,sg(l),tg(l),xll)

  dv=xsj*lengde*wg(l);

  !Regn ut B-matrisene samt N-matrisen for dette gauss-
  ! integrasjonspunktet :
  do j=1,nel
    ii=2*(j-1)
    bu(1,1+ii)=shp(1,j)
    bu(1,2+ii)=0
    bu(2,1+ii)=0
    bu(2,2+ii)=shp(2,j)
    bu(3,1+ii)=shp(2,j)
    bu(3,2+ii)=shp(1,j)

    bp(1,j)=shp(1,j)
    bp(2,j)=shp(2,j)

    m(1,1+ii)=shp(3,j)
    m(1,2+ii)=0
    m(2,1+ii)=0
    m(2,2+ii)=shp(3,j)
  end do

  ! Oppdater de lokale masse- og stivhetsmatrisene :
  kuul=kuul+matmul(matmul(transpose(bu),newC),bu)*dv
  kupl=kupl+matmul(matmul(transpose(bu),transpose(newE)),bp)*dv
  kppl=kppl+matmul(matmul(transpose(bp),EPS),bp)*dv
  massl=massl+matmul(transpose(m),m)*dv*rho
```

```
  end do
end
```

F.2.8 saveeig

```
! SAVEEIG : Lagrer data som trengs for modesuperposisjonsmetode−
!           analyse i et filformat som matlab−versjonen av FEMP
!           kan lese.
subroutine saveeig
  ! Benytt variable i modulen work_array :
  use work_array
  implicit none

  ! Lokale variable :
  integer i,j,N
  character(80) FileName


  N=nodes*fri1
  ! Hent inn filnavn :
  read*,FileName
  ! Aapne fil for skriving :
  open (1,file=FileName,status="replace")
  print*,"Lagrer verdier som ",FileName

  ! Lagre generell problemdefinisjon :
  write(1,"(I)") N
  write(1,"(I)") antall
  write(1,"(I)") nodes
  write(1,"(I)") fri1
  write(1,"(I)") xx
  write(1,"(I)") yy
  write(1,"(I)") nel
  write(1,"(E25.18)")  G1(1)
  write(1,"(E25.18)")  G1(2)
  write(1,"(E25.18)")  G2(1)
  write(1,"(E25.18)")  G2(2)
  write(1,"(I)") plane
  write(1,"(E25.18)") lengde

  ! Lagre materialparametre :
  write(1,"(E25.18)") C(1,1)
  write(1,"(E25.18)") C(1,2)
  write(1,"(E25.18)") C(1,3)
  write(1,"(E25.18)") C(1,4)
  write(1,"(E25.18)") C(2,1)
  write(1,"(E25.18)") C(2,2)
  write(1,"(E25.18)") C(2,3)
  write(1,"(E25.18)") C(2,4)
  write(1,"(E25.18)") C(3,1)
  write(1,"(E25.18)") C(3,2)
  write(1,"(E25.18)") C(3,3)
  write(1,"(E25.18)") C(3,4)
  write(1,"(E25.18)") C(4,1)
  write(1,"(E25.18)") C(4,2)
  write(1,"(E25.18)") C(4,3)
  write(1,"(E25.18)") C(4,4)
  write(1,"(E25.18)") E(1,1)
```

```
write(1,"(E25.18)") E(1,2)
write(1,"(E25.18)") E(1,3)
write(1,"(E25.18)") E(1,4)
write(1,"(E25.18)") E(2,1)
write(1,"(E25.18)") E(2,2)
write(1,"(E25.18)") E(2,3)
write(1,"(E25.18)") E(2,4)
write(1,"(E25.18)") EPS(1,1)
write(1,"(E25.18)") EPS(1,2)
write(1,"(E25.18)") EPS(2,1)
write(1,"(E25.18)") EPS(2,2)
write(1,"(E25.18)") rho



! Lagre egenverdier :
do i=1,antall
  write(1,"(E25.18)")  A1(i)
end do

! Lagre egenvektorer :
do i=1,N
  do j=1,antall
    write(1,"(E25.18)")  VECT(i,j)
  end do
end do

if (EPS(2,2) /= 0) then
  ! Lagre vektoren hup :
  do i=1,N
    write(1,"(E25.18)")  hup(i,1)
  end do

  ! Lagre skalaren hpp :
  write(1,"(E25.18)") hpp(1,1)

  if (savestress==1) then

    write(1,"(I)") size(kii,1)
    write(1,"(I)") size(kii,2)

    ! Enkelte matriser for spenningsberegninger blir lagret, men det
    ! er ikke implementert i matlab-programmet at det blir regnet
    ! spenningsutregninger ut fra resultatfiler fra F90-programmet.
    ! Dette er ikke vanskelig i praksis, men krever ekstra sjekk-variable
    ! o.l.

    ! Lagre matrisen kii (egentlig den inverse) (for spenningsberegninger) :
    do i=1,size(kii,1)
      do j=1,size(kii,2)
        write(1,"(E25.18)")  kii(i,j)
      end do
    end do

    ! Lagre matrisen kui (for spenningsberegninger) :
    write(1,"(I)") size(kui,1)
    write(1,"(I)") size(kui,2)

    do i=1,size(kui,1)
```

```
      do j=1,size(kui,2)
        write(1,"(E25.18)")  kui(i,j)
      end do
    end do
  else
      write(1,"(I)") 0
  end if
end if

  close(1)
end
```

F.2.9 shape

```
! SHAPE :
! Funksjon for utregning av interpolasjonsfunksjoner
! for et gitt punkt (S,T) i et element.

subroutine shape(shp,xsj,S,T,xl)
  implicit none

  ! Lokale variable
  double precision, dimension(3,8) :: shp
  double precision, dimension(2,8) :: xl
  double precision xsj,S,T

  double precision, dimension(4) :: SI,TI
  double precision, dimension(2,2) :: xs
  integer i,j,k,l
  double precision s2,t2,temp

  ! Interpolasjonsfunksjonene blir lagret i shp(3,1:8). De deriverte
  ! med hensyn paa r i foerste kolonne, og med hensyn paa z i andre
  ! kolonne. Jakobideterminanten blir lagret i xsj.

  ! Regn ut interpolasjonsfunksjoner :
  SI(1)=-.5
  SI(2)=.5
  SI(3)=.5
  SI(4)=-.5

  TI(1)=-.5
  TI(2)=-.5
  TI(3)=.5
  TI(4)=.5

  ! De foerste fire interpolasjonsfunksjonene og deres deriverte :
  do i=1,4
    shp(1,i)=SI(i)*(.5+TI(i)*T)
    shp(2,i)=TI(i)*(.5+SI(i)*S)
    shp(3,i)=(.5+SI(i)*S)*(.5+TI(i)*T)
  end do

  ! De neste fire interpolasjonsfunksjonene og deres deriverte :
  s2=(1-S**2)/2
  t2=(1-T**2)/2
  shp(1,5)=-S*(1-T);
  shp(2,5)=-s2;
```

```
  shp(3,5)=s2*(1-T);

  shp(1,6)=t2;
  shp(2,6)=-T*(1+S);
  shp(3,6)=t2*(1+S);

  shp(1,7)=-S*(1+T);
  shp(2,7)=s2;
  shp(3,7)=s2*(1+T);

  shp(1,8)=-t2;
  shp(2,8)=-T*(1-S);
  shp(3,8)=t2*(1-S);

  ! Modifisering av de fire foerste interpolasjonsfunksjonene :
  k=8
  do i=1,4
    l=i+4
    do j=1,3
      shp(j,i)=shp(j,i)-0.5*(shp(j,k)+shp(j,l))
    end do
    k=l
  end do

  ! Utregning av Jakobi-matrisen :
  xs=0
  do i=1,2
    do j=1,2
      do k=1,8
        xs(i,j)=xs(i,j)+xl(i,k)*shp(j,k)
      end do
    end do
  end do

  ! Utregning av Jakobi-matrisen :
  xsj=xs(1,1)*xs(2,2)-xs(2,1)*xs(1,2)

  ! Finn de interpolasjonsfunksjonene med hensyn paa de lokale
  ! deriverte ved aa multiplisere med den inverterte jakobi-
  ! matrisen :
  do i=1,8
    temp=(xs(2,2)*shp(1,i)-xs(2,1)*shp(2,i))/xsj
    shp(2,i)=(-xs(1,2)*shp(1,i)+xs(1,1)*shp(2,i))/xsj
    shp(1,i)=temp
  end do
end
```

F.2.10 tabell

```
! TABELL : Skriver ut en tabell over egenverdier, den modale konstanten
!          og den elektromekaniske koblingsfaktoren. I tillegg lagrer
!          den verdiene for den enkelte skiven i modulen dtkurve,
!          slik at disse kan lagres samlet senere.

subroutine tabell

  ! Benytt variablene i modulene work_array og dtkurve
  use work_array
```

```
use dtkurve
implicit none

! Lokale variable :
double precision dum,rA,kkk
double precision, dimension(1,1) :: uthup
integer i,snode,sym,mode

dum=1

! Variabelen snode bestemmer hvilken node det skal sammenlignes med
! naar symmetriske noder identifiseres.
snode=fri1*(yy*nel/4)+2
mode=0;

! Gaa gjennom alle egenfrekvensene som er regnet ut :
do i=1,antall
  sym=0
  ! Identifiser symmetriske moder :
  if (A1(i)>0 .and. sign(dum,VECT(2,i)) /= sign(dum,VECT(snode,i))) then
    sym=1
  end if
  ! Lagre alle moder for plane-strain-tilfellet :
  if (plane==1) then
    sym=1
  end if

  ! Velg ut symmetriske moder med egenverdi stoerre enn 0, og
  ! skriv ut disse, samtidig som de lagres i modulen dtkurve :
  if (A1(i)>0 .and. sym==1) then
    mode=mode+1;

    ! Regn ut koblingen i det piezoelektriske tilfellet :
    if (EPS(2,2) /= 0) then
      uthup=matmul(transpose(hup),VECT(1:nodes*fri1,i:i))

      ! Modal konstant :
      rA=uthup(1,1)*uthup(1,1)

      ! Elektromagnetisk koblingsfaktor :
      kkk=-(rA/hpp(1,1)/A1(i))

      ! Skriv ut frekvenser, modal konstant of koblingsfaktor :
      print 10,i,(dsqrt(A1(i))/2/3.141592653589793),rA,kkk
    else
      ! I det elastiske tilfellet skrives kun frekvenser ut :
      print 20,i,(dsqrt(A1(i))/2/3.141592653589793)
      rA=0
    end if

    ! Lagring av moder i modulen dtkurve i form av
    ! frekvenser, modal konstant, og koblingsfaktor :
    if (mode<=maxmoder) then
      FF(mode,count)=(dsqrt(A1(i))/2/3.141592653589793)
      RR(mode,count)=rA
      KK(mode,count)=-rA/hpp(1,1)/A1(i)
    end if
  end if
end do
```

```
! Format for utskrift av egenfrekvenser :
10 format(I4,  E20.6 , F15.8 , E20.8 )
20 format(I4,  E20.6  )
end
```