Alternative læringsmåter for derivasjon i R1

- en komparativ analyse

Masteroppgave i matematisk didaktikk

Tom Aksdal

1. juni 2016

Matematisk institutt

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Forord

Denne masteroppgaven har vært avslutningen på det som etter hvert har blitt en fem år lang etterutdanning i matematisk didaktikk. Motivet mitt for å gjennomføre dette studiet har rett og slett vært å bli en bedre matematikklærer.

Jeg vil takke min veileder Christoph Kirfel for verdifulle tilbakemeldinger. Særlig i inn-spurten har disse tilbakemeldingene vært til svært stor hjelp.

Takk også til elevene som har deltatt i prosjektet, og ikke minst til deres faglærere i matematikk R1. Uten sistnevntes velvilje hadde det ikke vært mulig å gjennomføre dette prosjektet.

Dette siste skoleåret har jeg fått økonomisk støtte gjennom den statlige ordningen for etterutdanning av lærere. I årene forut for dette har jeg jobbet 100 % som lærer, samtidig som jeg har vært 50 % student. For at dette skulle la seg gjennomføre, har jeg vært avhengig av en positivt innstilt arbeidsgiver. I løpet av arbeidet med masteren har jeg skiftet skole to ganger. Ved alle tre skolene har jeg kun møtt velvilje og støtte fra skoleledelsen i forbindelse med mitt arbeid som masterstudent. Dette er jeg svært takknemlig for.

Jeg vil også takke alle som har støttet meg gjennom arbeidet med denne masteren. Jeg vil særlig fremheve mine medstudenter på masterstudiet. Elin Jill, Jorunn, Tone og Torbjørn har hver på sin måte bidratt til at dette prosjektet har kommet i havn.

Til slutt vil jeg takke til min gode kollega Anne Bjørnestad, som har gitt meg mange idéer og innspill gjennom hele arbeidet med masteroppgaven. Hun bidro blant annet til de første idéene som munnet ut i problemstillingen min for denne oppgaven.

Sammendrag

I denne masteroppgaven har jeg studert elever som har arbeidet med derivasjon i matematikk R1. Formålet har vært å sammenligne to alternative læringsmåter med tradisjonell oppgave-regning, med tanke på læringsutbytte på kort sikt og på litt lengre sikt. De alternative læringsmåtene var aktiv memorering og problemløsning. Alle elevene som deltok hadde hatt en relativt tradisjonell opplæring i derivasjon på forhånd av sine respektive faglærere.

Motivasjonen min for å prøve ut disse alternative læringsmåtene var erfaringer fra R2, der mye av kunnskapen om derivasjon fra R1 tilsynelatende var helt glemt hos svært mange av R2-elevene mine i løpet av sommerferien. Og selv etter repetisjon var det fortsatt ganske mange som ikke mestret derivasjon slik man forventer i R2.

Det ble gjennomført et derivasjonsprosjekt, der 133 elever fordelt på sju R1-klasser i Bergensregionen deltok. Hver klasse ble delt inn i tre grupper, og hver gruppe arbeidet med hver sin faste læringsmåte over en periode på tre dobbelttimer. I denne perioden ble det gjennomført skriftlige tester. Etter prosjektet ble det gjennomført en spørreundersøkelse, og utvalgte elever ble intervjuet. Etter ca. fire måneder ble det gjennomført en skriftlig posttest. Data fra de 76 elevene som hadde deltatt på alt dette ble deretter analysert og sammenlignet.

Elevene som var med på derivasjonsprosjektet så gjennomgående ut til å oppfatte derivasjon som vanskelig. Det virket dessuten som at de først og fremst forbandt derivasjon med regel-bruk og prosedyrer for å finne ekstremalpunkt.

Jentene som jobbet med alternative læringsmåter så ut til å ha en bedre utvikling på testene enn guttene. Likevel var det en overvekt av gutter som hadde et positivt syn på å jobbe med slike alternative læringsmåter, og de følte i større grad enn jentene at de hadde hatt et positivt læringsutbytte av å være med på derivasjonsprosjektet.

Selv om det var knyttet en viss usikkerhet til resultatene, ser det ut som om aktiv memorering kan gi økt læringsutbytte på kort sikt, mens problemløsning kan se ut til å gi økt læringsutbytte på litt lengre sikt. Det kan altså virke som at matematikklærere som underviser tradisjonelt om derivasjon i R1 med fordel kan vurdere å supplere denne opplæringen med en av de alternative metodene som er testet ut i denne studien.

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

1.1 Bakgrunnen for valg av problemstilling

Mitt utgangspunkt for dette prosjektet, var erfaringer jeg har gjort med elever i matematikk R2 i videregående skole. Både som faglærer og sensor ved skriftlig eksamen har det slått meg at overraskende mange R2-elever har problemer med å løse oppgaver som involverer derivasjon. Dette gjaldt både ren regelbruk i ferdigoppstilte oppgaver, og bruk av standard metoder for å drøfte funksjoner og for å løse optimeringsoppgaver. Disse emnene skal være kjent for R2-elevene både fra 1T og fra R1. Læreverkene i R2 har derfor ikke viet emner innen derivasjon mye plass. Unntaket har hovedsakelig vært i forbindelse med emnet trigonometriske funksjoner (Heir et al., 2008; Oldervoll et al., 2008; Sandvold et al., 2008). Etter at prosjektet startet opp har imidlertid forlagene kommet med nye versjoner av sine læreverk i R2, og her har de nå tatt med mer repetisjon av derivasjon fra R1 (Heir et al., 2015; Oldervoll et al., 2015; Øgrim et al., 2015). Et slikt valg bidro til å styrke mine mistanker om at elevenes manglende derivasjonskunnskaper i R2 var mer utbredt enn man kanskje kunne forventet, med tanke på at R2-elevene tross alt har arbeidet med derivasjon både i vg1 og i vg2.

Hva kunne årsakene være til at akkurat derivasjon så ut til å representere en så stor utfordring for elevene? Mange forskere (Tall & Vinner, 1981; Orton, 1983; Tall, 1985; Cornu, 1991; Sierpinska, 1994; Grønmo et al., 2010) har påvist at en god del elever og studenter har problemer med å forstå derivasjonsbegrepet og de sentrale komponentene som inngår i dette begrepet. For det første er selve derivasjonsbegrepet komplekst. Definisjonen av den deriverte omfatter grenseverdibegrepet, som matematikere historisk brukte veldig lang tid på å utvikle. Derivasjon har dessuten mange ulike representasjoner; både som en formell definisjon, som en rekke formler, som funksjonsuttrykk, som graf (tangent) og som en praktisk tolkning i form av vekstfart. I matematikk R1 må elevene kunne anvende den deriverte, og dette krever at elevene behersker til dels omfattende metoder. På toppen av dette vil elevene ofte møte problemløsningsoppgaver i forbindelse med derivasjon. Derivasjon representerer altså mange matematiske utfordringer for elevene samtidig. Anvendelse av derivasjon krever derfor at elevene har oversikt over de mange aspektene som derivasjon representerer. Ikke minst må elevene ha innsikt i når man skal benytte derivasjon, og på hvilken måte. Det forventes også at de benytter digitale verktøy i forbindelse med derivasjon, der det er hensiktsmessig. Det er altså flere gode grunner til at mange elever og studenter kan oppfatte derivasjon som ganske utfordrende. Problemer knyttet til oppfatningen av derivasjon har da også vært et tema i flere masteroppgaver i Norge (Jørgensen, 2006; Dahl, 2008; Østerli, 2011). Jeg ønsket imidlertid å gå ett steg videre, og ikke bare påvise at derivasjon er utfordrende, men se nærmere på hva som eventuelt kunne gjøres for å bedre elevenes forståelse av derivasjon.

Jeg prøvde å bøte på utfordringene nevnt i første avsnitt ved å la R1-elevene løse derivasjons-oppgaver med jevne mellomrom de siste par måneder av skoleåret, uten at dette førte til noen forbedringer i R2. Dette fikk meg til å stille spørsmål om tradisjonell oppgaveregning var en velegnet måte for elevene å lære derivasjon på. Nå har det ikke manglet på kritiske røster mot bruk av tradisjonell oppgaveregning i matematikkundervisningen. Stieg Mellin-Olsen har tatt et oppgjør med denne tankemåte i sin artikkel "*Oppgavediskursen*" (Mellin-Olsen, 1996). Helle Alrø & Ole Skvovsmose er også meget kritisk til det de kaller *oppgaveparadigmet* i matematikkundervisningen (Alrø & Skovsmose, 2002). Så hvilke læringsmåter kunne jeg benyttet i stedet, for å bedre elevenes læringsutbytte i derivasjon? I "*The Missouri Mathematics Effectiveness Project*" undersøkte forskerne om det var mulig å forbedre læringsutbyttet for elever i 4. klasse, ved å la lærerne undervise etter nøye planlagte instruksjoner (Good & Grouws, 1979). Inspirert av dette forsøket, ønsket jeg å finne noen alternative læringsmåter, og sammenligne disse med tradisjonell oppgaveregning.

I løpet av mitt masterstudium hadde flere av mine medstudenter, som underviste på barne-skolen, fortalt om hvordan de jobbet for å få elevene til å forstå ulike matematiske begreper. Det slo meg at jeg ikke brukte mye tid på slik begrepslæring i min undervisning, og at dette kanskje kunne være årsaken til at derivasjonsbegrepet ikke "festet seg" skikkelig hos mine R1-elever. I tillegg registrerte jeg at TIMSS-undersøkelsen om matematikk i videregående skole fra 2008 viste at norske elever scoret veldig lavt på pugging og problemløsning sammenlignet med de andre landene i undersøkelsen (Grønmo et al., 2010). En utfordring med begrepet "pugging" er at det ikke står særlig høyt i kurs i Norge i dag. Dette har vi stadig kunnet observere i media, når (skole-) politikere, skoleforskere, lærere og elever uttaler seg om den norske skolen. På grunn av de negative følelsene som ofte er forbundet med ordet "pugging", og siden jeg ønsket at elevene skulle gjøre et (aktivt) forarbeid før de startet med å lære utenat, har jeg i stedet valgt å kalle dette for *aktiv memorering*. Jeg hadde dermed fått tre alternative læringsmåter som jeg ønsket å prøve ut, og sammenligne med tradisjonell oppgaveregning: begrepslæring, aktiv memorering og problemløsning.

En utfordring ved dette prosjektet var tiden jeg hadde til rådighet. Selv om derivasjon er et sentralt emne i R1, var det grenser for hvor mye tid faglærerne i de utvalgte R1-gruppene kunne sette av til øving på kompetansemål knyttet til dette emnet. R1-elevene som var med på prosjektet hadde dessuten kommende heldagsprøver og eventuell eksamen å tenke på. En systematisk opplæring i et nytt emne ved hjelp av læringsmåter som begrepslæring og problemløsning ville sannsynligvis kreve mer tid enn det jeg ville kunne få av de aktuelle R1-lærerne, slik jeg vurderte det. De utvalgte R1-gruppene hadde i all hovedsak drevet med tradisjonell oppgaveregning, og det var derfor rimelig å anta at de ville ha liten erfaring med disse to læringsmåtene fra før av. Hattie & Yates advarer dessuten mot å benytte problem-løsning når man introduserer nye emner for elevene. De hevder at elevene helst bør være fortrolige med den aktuelle matematikken som inngår i en problemløsning, før de går løs på slike oppgaver (Hattie & Yates, 2014). Et slags kompromiss ble derfor å la elevene først få opplæring i derivasjon på en relativt tradisjonell måte i forkant av prosjektet av sine respektive lærere, for deretter å se om elevene kunne forbedre sine prestasjoner innen derivasjon ved å arbeide med lærestoffet på en annen måte enn de var vant med. Jeg var særlig interessert i hvilke endringer dette førte med seg på litt sikt.

Avslutningsvis i denne delen av innledningen vil jeg kort gjøre rede for mitt eget syn på tradisjonell oppgaveregning. Jeg vil først understreke at jeg ikke er negativ til tradisjonell oppgaveregning generelt. Gitt de rammebetingelsene matematikklærere i videregående skole har med tanke på pensummengde og tid til rådighet, fremstår tradisjonell oppgaveregning som en effektiv måte å lære elever matematikk på. Mitt inntrykk er at mange av dem som etter-lyser alternative læringsmåter i matematikkundervisningen i videregående skole, da først og fremst har elevene som sliter med matematikken i tankene. Det vil typisk si elever som velger praktisk matematikk; altså 1P-2P på studiespesialiserende, eller 1PY og eventuelt 2PY på yrkesfag. Jeg er langt på vei enig i kritikken mot ensidig praktisering av tradisjonell oppgaveregning for disse elevene. I denne masteroppgaven har jeg imidlertid studert elever som vi gjerne oppfatter som flinke i matematikk. Det er vanligvis slike elever som velger løpet 1T-R1-R2. Basert på egne erfaringer, og på samtaler med lærerkollegaer i matematikk, oppfatter jeg det slik at tradisjonell oppgaveregning fungerer rimelig bra for de aller fleste av disse elevene. Dvs. at de fullfører alle tre matematikk-kursene, og at karakternivået opprett-holdes sånn noenlunde gjennom hele løpet. Videre er min erfaring at de kunnskapene man som lærer i R1 og i R2 forventer elevene skal ha lært i tidligere kurs stort sett er til stede. I alle fall etter noe repetisjon. Dette betyr selvsagt ikke at jeg anser tradisjonell oppgave-regning som "den beste" måten for flinke elever å lære matematikk på. Men jeg har ikke vurdert behovet for alternative læringsmåter som like presserende for denne typen elever, som for de elevene som sliter med matematikken. Det finnes imidlertid ett unntak, og det er knyttet til læringsutbyttet i derivasjon. Slik jeg vurderer det, ser en læringsmåte preget av tradisjonell oppgaveregning i R1 verken ut til å gi elevene den matematiske forståelsen for derivasjon, eller den varige kunnskapsbasen i derivasjon, som er ønskelig for at elevene skal mestre emner knyttet til derivasjon, integrasjon og differensiallikninger i R2. Det var nettopp denne erkjennelsen som lå til grunn for mitt valg av problemstilling i denne masteroppgaven.

I en noe forenklet oversikt deler Alrø & Skovsmose undervisning i matematikk inn etter hvor virkelighetsnære oppgavene er. De opererer med tre kategorier, og hver av disse kan enten utføres innenfor det såkalte oppgaveparadigmet, eller de kan utføres innfor det de kaller *undersøkelseslandskap*, der elevene utvikler kunnskap gjennom utforskende samarbeid. Til sammen utgjør dette seks ulike typer *læringsmiljøer* (Alrø & Skovsmose, 2002). Skovsmose understreker viktigheten av å veksle mellom de ulike miljøene. Selv om han fremhever undersøkelseslandskap som foretrukne læringsmiljøer, mener han likevel ikke at man skal kaste vrak på læringsmiljøer innen oppgaveparadigmet (Skovsmose, 2003). Sfard er inne på noe lignende i sin kommentar til NCTM[1]s forslag til standarder i matematikkundervisningen:

> the needs of mathematics itself and the needs of the child who is supposed to learn it do not necessarily agree. Whatever is done out of a sole concern about mathematics is likely to hurt the child, and whatever is done for the sake of the child invariably compromises some mathematical contents and skills. Any reform movement that tries to make up for the deficiencies of former ways of teaching seems bound to shift the pendulum to the opposite pole (Sfard, 2003, s. 353-354).

Og videre:

> All too often, a new promising idea is embraced to the total exclusion of alternative possibilities. In this way, what was intended as but an ingredient becomes the whole meal; what was supposed to be an optional technique for those who find it helpful and pleasing gradually becomes the only legitimate way of doing things. Such exclusivity is an effective prescription for failure (Sfard, 2003, s. 354).

[1] NCTM er en forkortelse for den amerikanske matematikklærerforeningen National Council of Teachers of Mathematics.

1.2 Problemstilling

Målet med denne oppgaven var å sammenligne læring av derivasjon basert på tradisjonell oppgaveregning med noen alternative læringsmåter. Ikke minst har jeg ønsket å vurdere læringseffekten av de ulike læringsmåtene etter noe tid. De alternative læringsmåtene var her ikke en erstatning for tradisjonell oppgaveregning, men et supplement.

Som nevnt i 1.1 hadde jeg i utgangspunktet tre alternative læringsmåter. Men etter å ha gjennomført en pilot valgte jeg å kutte ut begrepslæring. Dette fungerte rett og slett dårlig (jfr. 3.2). I min undersøkelse har jeg derfor sammenlignet tre ulike læringsmåter:

- Tradisjonell oppgaveregning
- Aktiv memorering
- Problemløsning

Jeg laget et opplegg med konkrete oppgaver for hver av de tre læringsmåtene. Opplegget inngikk i et derivasjonsprosjekt, som ble gjennomført i sju ulike R1-klasser i Bergens-regionen. Hver R1-gruppe ble delt i tre elevgrupper, som benyttet hver sin læringsmåte gjennom hele prosjektperioden. Prosjektet gikk over tre påfølgende dobbelttimer.

I denne masteroppgaven ønsket jeg å svare på følgende to spørsmål:

1. Er det mulig å forbedre læringsutbyttet av undervisning i derivasjon, ved å supplere tradisjonell oppgaveregning med andre læringsmåter i en intensiv periode?
2. Hva vil skje med læringsutbyttet etter noe tid?

1.3 Noen sentrale begreper i oppgaven

Både i bakgrunnen for mitt valg av problemstilling, og i selve problemstillingen, har jeg benyttet noen begreper som krever en avklaring. Selv om jeg vil gå nærmere inn på disse begrepene i teoridelen, er det hensiktsmessig med en kort redegjørelse av disse begrepene allerede nå, siden de dukker opp gjennom hele masteroppgaven.

1.3.1 Læringsmåter

Med læringsmåte mener jeg en bestemt måte som elevene arbeider på for å lære seg et emne i matematikk. Dette for å skille det fra f.eks. læringsmetode eller undervisningsmetode, som jeg oppfatter som noe mer enn bare egenaktiviteten til elevene. En læringsmåte vil da f.eks. kunne være en (mindre) del av en undervisningsmetode. Eksempler på slike læringsmåter er aktiv memorering, problemløsning og begrepslæring, som var de tre opprinnelige alternativene til læringsmåten tradisjonell oppgaveregning i dette prosjektet. Andre eksempler på læringsmåter er varianter av Dewey (1998) sin utforskende "*learning by doing*", og prosjektarbeid.

1.3.2 Læringsutbytte

Med læringsutbytte mener jeg primært en målbar prestasjon (poengsum). Men en subjektiv opplevelse av endret læring inngår også i dette læringsutbyttet. Dette vil bli undersøkt nærmere ved å benytte skriftlige tester og en spørreundersøkelse, i tillegg til intervju.

1.3.3 Tradisjonell oppgaveregning

I en oppfølgingsrapport til TIMSS[2] Advanced 2008 kom det klart frem at den vanligste arbeidsmåten i matematikk i norsk videregående skole var at elevene arbeidet individuelt med å løse oppgaver som liknet på eksempler i læreboken. Denne oppfatningen ble delt av både elever og lærere (Grønmo et al., 2010). Min definisjon av tradisjonell oppgaveregning er i tråd med dette; altså at en god del av undervisningstiden går med til at elevene arbeider med oppgaver fra læreboken, og at elevene stort sett arbeider individuelt. Læreren sin funksjon er da å gå rundt og veilede elever som trenger hjelp.

Jeg vil understreke at min definisjon ikke sier noe om hvilke oppgavetyper elevene jobber med. Moderne lærebøker (Heir et al., 2012; Oldervoll et al., 2013; Øgrim et al., 2015) har vanligvis mange ulike typer oppgaver. Dvs. at elevene ikke bare jobber med ferdigoppstilte drill-oppgaver. Man finner også oppgaver som krever at elevene behersker mer omfattende metoder, der elevene typisk må utføre ganske mange regneprosedyrer. Videre finner man

[2] TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) Advanced er et internasjonalt forskningsprosjekt der formålet er å undersøke utviklingen over tid blant "matematikkspesialister" og "fysikkspesialister" i siste år på videregående skole. Norge deltok i 2008 med elever fra henholdsvis 3MX og 3FY (Grønmo et al., 2010).

tekstoppgaver, der elevene både må trekke ut relevant informasjon, og selv stille opp det matematiske regnestykket. Og ikke minst så finner man problemløsningsoppgaver. Disse siste er riktig nok ikke særlig omfattende. De er dessuten ofte delt opp i mindre delproblemer, slik at elevene blir guidet gjennom oppgaven.

I oppgavediskursen (Mellin-Olsen, 1996) og i oppgaveparadigmet (Alrø & Skovsmose, 2002) nevnt i 1.1, legger man til grunn for kritikken av tradisjonell oppgaveregning at elevene hovedsakelig regner relativt enkle, ferdigoppstilte drill-oppgaver. Min definisjon av tradisjonell oppgaveregning bryter således med dette premisset. Men Mellin-Olsen og Alrø & Skovsmose kritiserer også formen på undervisningen der tradisjonell oppgaveregning spiller en sentral rolle, og denne kritikken er relevant også for min definisjon.

1.3.4 Aktiv memorering

Dette innebærer at elevene skal lære seg formler, prosedyrer og strategier utenat. "Aktiv" henspiller på at elevene må gjøre et forarbeid før de memorerer. Forarbeidet består av to faser: Først samler elevene inn data (det som skal memoreres) individuelt. Disse dataene finner de i all hovedsak i lærebøkene. Deretter diskuterer elevene det de har funnet i grupper, til man har oppnådd enighet innad i hver gruppe. Enigheten omfatter både datamengde, datatype og forståelse av dataene.

1.3.5 Problemløsning

Jeg vil her benytte den samme definisjon som NCTM benytter i sin *Standards 2000*[3]. Her definerer de et problem som en oppgave, der man i utgangspunktet ikke kjenner en metode for å løse oppgaven (NCTM, 2008). Dette er for øvrig i tråd med hvordan jeg selv forstår begrepet "problemløsning". En rundspørring blant faglærerne i de ulike R1-gruppene som var med på dette prosjektet, viste at de også har en liknende oppfatning av hva som menes med problemløsning.

[3] *Standards 2000* er en forkortelse for *Principles and Standards for School Mathematics*, som ble utgitt første gang i år 2000. Dette er et større ressurs- og veiledningshefte, som gir en rekke mål og visjoner for undervisning i matematikk. Heftet er myntet på alle som tar beslutninger som angår matematikkundervisning fra barnehage til videregående skole (NCTM, 2008).

1.4 Oppbygging av oppgaven

Oppgaven består av fem kapitler. I innledningskapittelet har jeg gjort rede for mine beveggrunner for valg av problemstilling, og formulert selve problemstillingen. Til slutt i dette første kapittelet har jeg kort gjort rede for noen sentrale begreper i oppgaven min.

I det andre kapittelet har jeg gjort relativt grundig rede for teoriene jeg har benyttet meg av. Dette omfatter læringsteorier, språk og kommunikasjon knyttet til matematikk, ulike sider ved derivasjonsbegrepet, de læringsmåtene som har vært aktuelle i denne oppgaven og hva som menes med læringsutbytte.

Kapittel 3 tar for seg de metoder jeg har benyttet i min undersøkelse. Etter å ha gjennomført en pilotstudie, ble det samlet inn data gjennom tester, en spørreundersøkelse og intervju. Jeg benyttet altså både kvantitative og kvalitative metoder i min datainnsamling, i den hensikt å få frem ulike sider ved elevenes læringsutbytte. Jeg gjør også rede for valg av informanter, oppbygging av undervisningsopplegget og testene. Videre tar jeg for meg selve data-innsamlingen; dvs. hvordan jeg gjennomførte testene, spørreundersøkelsen og intervjuene. Til slutt i dette kapittelet skriver jeg litt om reliabilitet og validitet, og noe om forskningsetiske refleksjoner i forbindelse med denne undersøkelsen.

I det fjerde kapittelet presenterer jeg mine resultater fra datainnsamlingen i bearbeidet form; dvs. som statistiske tabeller og grafer. Alle tabellene og grafene ble dessuten analysert, slik at jeg hadde et grunnlag for å diskutere eventuelle funn fra testene, spørreundersøkelsen og intervjuene.

I kapittel 5 diskuterer jeg mine resultater, sett opp mot problemstillingen min. Jeg tar også for meg metode og teori som er benyttet i denne masteroppgaven, og vurderer hvordan de har fungert for å belyse min problemstilling. Avslutningsvis gir jeg en kort konklusjon på dette forskningsarbeidet, før jeg vurderer hvilke konsekvenser dette arbeidet kan ha for under-visningen og kommer med noen idéer til videre forskning.

2. Teori

I dette kapittelet gjør jeg rede for teori som står sentralt i denne masteroppgaven. Først tar jeg for meg noen aktuelle læringsteorier, og klargjør mitt læringsteoretiske perspektiv. Deretter presenterer jeg språk og kommunikasjon knyttet til matematikken. Språk er vesentlig i all matematisk begrepslæring, og ikke minst i forhold til forståelse av derivasjonsbegrepet. I tillegg var gruppesamarbeid en del av arbeidsformen for de to alternative læringsmåtene problemløsning og aktiv memorering, og kommunikasjon knyttet til derivasjon var da av vesentlig betydning. Videre skriver jeg om ulike sider ved derivasjonsbegrepet. Dette begrepet er en sentral del av problemstillingen, og dens kompleksitet er nettopp det som rettferdiggjør hele oppgaven min. Så gjør jeg rede for teori knyttet til de fire læringsmåtene jeg startet opp med i forbindelse med derivasjonsprosjektet. Her har jeg lagt vekt på å få frem positive og negative sider ved de ulike læringsmåtene. Til slutt ser jeg nærmere på ulike sider ved læringsutbytte. Her er det et vesentlig poeng å få frem kompleksiteten som læringsutbytte representerer, både i forhold til hva som skal måles, og hvordan. Og ikke minst hvorfor.

2.1 Læringsteorier

Jeg gir her en oversikt over de læringsteoriene som er relevante for denne masteroppgaven. Avslutningsvis gjør jeg rede for mitt valg av læringsteoretisk perspektiv.

2.1.1 Konstruktivistisk læringsteori

Konstruktivistiske teorier tar avstand fra det tradisjonelle synet på kunnskap som et statisk og ferdig produkt som man kan overføre fra ett individ til et annet (Dewey, 1998). Typiske arbeidsformer innen konstruktivismen er "*learning by doing*" (varianter av dette er "*inquiry learning*" og "*discovery learning*"), prosjektarbeid (gjerne tverrfaglige) og problembasert læring. Disse arbeidsformene er kjennetegnet ved elevaktivitet, undersøking, målrettethet og en viss grad av elevstyring (Imsen, 2015). John Dewey fremhever sosiale fellesskap, frie aktiviteter og læring gjennom erfaring som sentrale pedagogiske prinsipper. Skolens formål er, i følge et slikt progressivt syn, å forberede elevene på en verden som hele tiden er i endring (Dewey, 1998).

2.1.1.1 Piaget og refleksiv abstraksjon

Jeg gjør her først rede for noen av de mest sentrale begrepene i Piaget sine teorier, før jeg tar for meg begrepsdannelse og abstraksjon.

Skjema vil si en indre representasjon av et aktivt handlingsmønster som vi utfører på den ytre verden. Piaget skiller mellom to typer skjema. *Sensorimotoriske skjema* er internaliserte handlinger (ikke tanker), mens *kognitive skjema* er etablert på et høyere nivå, og kan hentes frem og anvendes i nye situasjoner. *Tenkning* vil si manipulering med skjemaer, og kan foregå uten symboler. Tenkning forutsetter altså ikke språk, i følge Piagets teori. En *kognitiv struktur* vil si større gruppering av skjema som har vokst sammen fordi de "hører sammen" på en eller annen måte. Med *assimilasjon* menes den første delen av adapsjonsprosessen, der inntrykkene fra nye situasjoner tilpasses de skjema vi har fra før. *Akkomodasjon* er omorganisering og utvidelse av de kognitive strukturene som kan oppstå i møtet med nye situasjoner (Imsen, 2015).

I møtet med ny erfaring kan det oppstå en ubalanse mellom tolkningen av den nye erfaringen og allerede etablerte skjemaer. Da inntrer det Piaget kalte *likevektsprinsippet* (ekvilibrasjon). Dette er en medfødt, selvregulerende akkomodasjonsprosess som sørger for at det igjen blir indre likevekt i de kognitive strukturer. Denne trangen til å gjenskape indre likevekt er drivkraften i intellektuell utvikling, og dermed også i læringsprosessen. Målet med undervisningen er i følge Piaget å utnytte dette likevektsprinsippet, ved å skape ubalanse hos elevene. De må få oppgaver som ligger på grensen av deres erkjennelsesområde (ibid.).

Kunnskapsutviklingen (hos barn) gjennomløper ulike stadier[4], som er biologisk betingede. Stadiene følger en bestemt rekkefølge. Det er altså ikke mulig å hoppe over et stadium. Men sosiale faktorer kan påvirke hvor raskt (eller sent) stadiene gjennomløpes. Det samme kan også evnen til selvregulering (ekvilibrasjon) (Piaget, 1972).

Piaget skiller mellom to typer kunnskap. På den ene siden har vi *figurativ kunnskap*, som er basert på fysisk læring. Det vil si fakta og detaljer som lagres i hukommelsessystemet, uten å knytte dem til noen kognitive strukturer. På den annen side har vi *operativ kunnskap*. Slik kunnskap er knyttet til generelle skjemaer som har sitt utgangspunkt i handling med objekter.

[4] De fire stadiene er den sensorimotoriske perioden (ca. 0-2 år), den preoperasjonelle perioden (ca. 2-7 år), den konkret-operasjonelle perioden (ca. 7-11 år) og den formal-operasjonelle perioden (fra ca. 11 år) (Imsen, 2015).

Piaget kalte dette for logisk-matematisk læring. Symboler har alltid både en figurativ og en operativ side - de har både form og mening. Dette gjelder også for matematiske symboler (Imsen, 2015). Ikke minst gjelder dette for derivasjon. Den deriverte av en funksjon f er f.eks. positiv når grafen til f vokser, og negativ når grafen synker.

Man kan forstå egenskapene hos et objekt ved å gjøre noe med det, og ved å transformere det. I det sistnevnte tilfellet skiller vi mellom *empirisk aktivitet*, som innebærer å endre posisjon, bevegelsesmønster eller egenskaper, og *logisk-matematisk aktivitet*, som vil si å berike objektet med nye egenskaper eller relasjoner gjennom klassifikasjon, sortering, sammenstilling, telling, måling, osv. Kildene til kunnskap ligger i disse to aktivitetene. Det dannes skjema, som et direkte resultat av generalisering av aktivitetene. Disse prosessene er ikke oppstykket, men må ses på som én helhetlig prosess (Piaget, 1972).

På den ene siden kan vi si at et begrep er fattigere enn persepsjonen, siden begrepet dannes gjennom abstraksjon av sansedata og gjennom generalisering av disse. På den annen side er et begrep rikere enn persepsjonen, siden sanseinntrykk korrigeres (perfeksjoneres/idealiseres) i persepsjonsfasen, og ved at aktivitetene tilfører noe mer til objektet som er gjenstand for persepsjon (ibid.).

Piaget opererer med tre former for abstraksjon:

- *Empirisk abstraksjon* - kunnskap utledes ved at man trekker ut felles egenskaper ved objektene man studerer.
- *Pseudo-empirisk abstraksjon* - kunnskap utledes ved at man trekker ut felles egenskaper ut fra handlinger man foretar på objektene.
- *Refleksiv abstraksjon* - kunnskap utledes gjennom indre koordinering av handlinger, og denne indre koordineringen bidrar til at det dannes kognitive strukturer.

I alle tre tilfeller går man fra det spesifikke til det generelle; dvs. man fremhever noen felles egenskaper hos de aktuelle objektene (Dubinsky, 1991). De tre formene for abstraksjon er ikke helt uavhengige av hverandre:

> Empirical and pseudo-empirical abstraction draws knowledge from objects by performing (or imagining) actions on them. Reflective abstraction interiorizes and coordinates these actions to form new actions and, ultimately new objects (which may no longer be physical but rather mathematical such as a function or a group). Empirical abstraction then extracts data from these new objects through mental actions on them, and so on (Dubinsky, 1991, s. 98).

Matematisk aktivitet har i følge Piaget karakter av refleksive abstraksjoner. En tallmengde er f.eks. ikke en konkret størrelse. Tallet 10 kan anta mange konkrete former, men selve tallbegrepet 10 er abstrakt (Skott et al., 2015). Piaget mener altså at

> new mathematical constructions proceed by reflective abstraction (Dubinsky, 1991, s. 98).

Og videre at

> it is reflective abstraction in its most advanced form that leads to the kind of mathematical thinking by which form or process is seperated from content and that processes themselves are converted, in the mind of the mathematician, to objects of content (ibid.).

Helt sentralt i matematisk utvikling står altså konstruksjon av nye kombinasjoner ved hjelp av refleksiv abstraksjon. Piaget skiller mellom fire slike konstruksjonsmåter:

- *Interiorization* - gjennom bruk av symboler, språk, ytre og indre (mentale) bilder konstrueres indre prosesser. Man blir fortrolig med handlingsprosessene, og de blir etter hvert rutiner.
- *Koordinering* eller komponering av to eller flere prosesser, slik at en ny konstrueres.
- *Innkapsling* - dynamiske prosesser konstrueres til statiske objekter. På denne måten blir prosessene til begreper.
- *Generalisering* - en konstruksjon der anvendelsesområdet til et skjema utvides til flere situasjoner. Prosessene kan dermed benyttes i en bredere kontekst.

Dubinsky trekker frem *reversering* som en femte konstruksjon. Her konstruerer man en ny prosess, som går motsatt vei i forhold til den opprinnelige prosessen (Dubinsky, 1991).

2.1.1.2 Bruner og hans representasjoner

I 1959 kom Bruner med sin berømte tese: Et hvilket som helst fag kan undervises effektivt på en intellektuelt redelig måte til et hvilket som helst barn på et hvilket som helst utviklings-trinn. På bakgrunn av denne tesen utvikler Bruner tanken om *spiralprinsippet*: Et emne kan først presenteres for elevene i en forenklet form. Etter hvert som elevene utvikler seg (over flere år) kan samme emne presenteres på stadig mer avanserte måter (Imsen, 2015).

I "*The Process of Education*" (ca. 1960) lanserte Bruner metoden *Learning by discovery*: Elevene skal være aktive, eksperimentere og finne ut av ting på egen hånd. Både lærestoffet, arbeidsmåter og presentasjonsformer må tilpasses elevens utviklingsnivå. Læreplaner må utformes slik at læringen gir elevene en generell forståelse av fagenes struktur. Å forstå struktur vil, i følge Bruner, si å forstå hvordan ting henger sammen. Å forstå et fag vil si å forstå det slik at mange ting kan relateres til det på en meningsfylt måte (ibid.).

Bruner utvikler også en teori om kognitive representasjonsnivåer. Representasjon vil her si en indre forestilling som vi lager av omverdenen. Bruner opererer med tre nivåer. På det laveste nivået har vi det enaktive systemet. Dvs. ferdigheter og handlinger. Det neste nivået er det ikoniske systemet - altså forestillinger (visuelt minne). Det øverste nivået er det symbolske systemet, som bl.a. omfatter språk. Barnet bruker i starten kun det enaktive systemet. Etter hvert som barnet blir eldre, tar det også i bruk det ikoniske systemet. Voksne personer bruker alle tre systemene. En handlingssekvens kan være representert i alle tre systemer samtidig (ibid.). Alle tre representasjonsnivåer er aktuelle i forbindelse med derivasjon. Det symbolske systemet vil nok dominere for mange R1-elever, siden derivasjon som begrep nettopp er så symboltungt; elevene finner dette i form av formler, bruk av unike symboler og ikke minst knyttet til grenseverdibegrepet. Det enaktive systemet tas gjerne i bruk i forbindelse med ulike former for vekstfart, mens det ikoniske systemet typisk benyttes når derivasjon er knyttet til grafer.

2.1.1.3 Von Glasersfeld og radikal konstruktivisme

Den radikale konstruktivismen bygger på to prinsipper:

- Kunnskap mottas ikke passivt via sanser eller kommunikasjon, men bygges aktivt opp av det tenkende individ.
- Tenkning tilpasses den erfarte virkeligheten, og ikke en objektivt eksisterende verden, slik at individet kan organisere sine erfaringer.

Det er det siste punktet som i følge von Glasersfeld gjør denne formen for konstruktivisme radikal; siden vi ikke har direkte tilgang til den virkelige verden, er det ikke mulig for oss å sammenligne vår konstruerte verden med den virkelige. Dette får radikale konsekvenser for begreper som kunnskap, sannhet, kommunikasjon og forståelse (Glasersfeld, 1996).

De to prinsippene i radikal konstruktivisme er i stor grad basert på Piagets begreper om assimilasjon og akkomodasjon, og ikke minst på Piagets mentale skjema. Von Glasersfeld kaller et slikt skjema for handlingsskjema. Når et individ møter en situasjon, vil individet, ved å fortolke situasjonen inn i et handlingsskjema

1. kunne gjenkjenne situasjonen til å være av en bestemt type,

2. kunne utføre et bestemt handlingsmønster, assosiert med denne type situasjon, og
3. kunne forvente et resultat av dette handlingsmønsteret, basert på tidligere erfaringer med tilsvarende type situasjoner (ibid.).

Tradisjonell oppgaveregning knyttet til derivasjon gjør at R1-elevene etter en tid behersker disse tre punktene ganske godt når det er snakk om ferdigoppstilte oppgaver og oppgavetyper de jobber ganske mye med (som f.eks. funksjonsdrøftingsoppgaver). Men i forbindelse med optimeringsoppgaver og problemløsningsoppgaver der derivasjon inngår, er det ting som kan tyde på at en god del R1-elever får litt større problemer, og da særlig i tilknytning til 1. over. Her kan kanskje de to alternative læringsmåtene bidra til å gi elevene et videre perspektiv på hvilke oppgavetyper det vil være naturlig å benytte derivasjon.

I følge radikal konstruktivisme har språk og kommunikasjon en sentral rolle i lærings-prosesser, bl.a. for å bidra til å skape relevante mentale ulikevekter, som er nødvendige for at elever skal akkomodere. Von Glasersfeld mener imidlertid at det ikke er mulig for en lærer og en elev å avdekke om det finnes noen uoverstemmelser mellom deres forståelse av et emne gjennom språket. Man kan kun oppnå det von Glasersfeld kaller *antatt felles forståelse* gjennom sosial interaksjon. Han benytter dessuten han begrepet *levedyktig* ("viable") i stedet for sannhet; handlinger, begreper og operasjoner på begreper er levedyktige, hvis disse kan benyttes på en hensiktsmessig måte innenfor en gitt kontekst (ibid.).

En konsekvens av radikal konstruktivisme er at det ikke finnes objektiv, verdinøytral kunnskap. En lærer må derfor begrunne hvorfor elever skal lære bestemte typer kunnskap. Altså bør man vektlegge forståelse i større grad enn øving i undervisningen, og elevene bør få veiledning i stedet for instruksjoner (ibid.). Dette står i en viss motsetning til tradisjonell undervisning (jfr. 2.4.1), men er mer i tråd med de alternative læringsmåtene som ble benyttet i løpet av derivasjonsprosjektet - kanskje særlig i forbindelse med problemløsning.

En av styrkene til radikal konstruktivisme, er at det er en helhetlig teori som bl.a. kan forklare systematiske feil, misoppfatninger og bruk av alternative begreper i matematikken. En av svakhetene er at teorien i liten grad tar hensyn til det sosiale (Ernest, 1994).

2.1.2 Sosiokulturell læringsteori

Her mener man at læring ikke er noe som utelukkende skjer i individet. I stedet vektlegges det sosiale fellesskapet, kulturen og språket som sentrale elementer i læringsprosessen (Imsen, 2015).

2.1.2.1 Vygotsky og begrepsdannelse

Vygotsky hevder at et psykologisk fenomen må forstås i en historisk utvikling. Dette perspektivet er blitt kalt den *genetiske metode*: Mennesket utvikler seg i et samspill mellom (biologisk) modning og forhold i miljøet, i retning av å nyttiggjøre seg språket som redskap til å mestre omgivelsene. Enhver funksjon i barnets kulturelle utvikling fremtrer to ganger, og på to plan: først på det sosiale planet, og deretter på det psykologiske planet (Imsen, 2015). Barnet utvikler i følge Vygotsky (1978) gradvis et språk: først som egosentrisk tale, og senere internalisert som tenkning. Talen utvikler seg altså fra det ytre til det indre planet. Denne utviklingen gjør at praktiske handlinger og abstrakt tenkning forbindes med hverandre (Skott et al., 2015). For den voksne har språket to funksjoner: "ytre" kommunikasjon, og "indre" tale. Dette medfører at språket bestemmer hvordan man tenker og hvordan man oppfatter verden (Imsen, 2015).

Vygotsky innførte et kognitivt "redskap" som han kaller for *tegn* ("sign"). Gjennom *mediering* lærer mennesket å erstatte selve tingene med språklige symboler i tankene. Slik mediering er grunnleggende for alle høyere psykologiske prosesser. Siden utviklingen går fra det sosiale til det individuelle, er et barn i stand til å utføre en handling i samspill med andre før det er i stand til å utføre den alene. Voksne kan dermed være en medierende hjelper for barnet, ved at de kan vise eller forklare hvordan en handling skal gjøres. Forskjellen mellom det barnet kunne ha klart med hjelp og støtte og det barnet klarer på egen hånd, kalles for *den proksimale utviklingssonen*. Dette er ikke noe barnet har alene, men noe det deler med en hjelper. Størrelsen på utviklingssonen avhenger derfor av hjelperen og hva slags materiell det arbeides med, i tillegg til barnets genetiske forutsetninger (ibid.).

Tradisjonell diagnostisering gir bare informasjon om den "nedre" grensen for den proksimale utviklingssonen. Den pedagogiske utfordringen ligger i å kartlegge elevens øvre grense for en gitt hjelper, og deretter legge opp undervisningen med tanke på at eleven skal kunne fungere på det øverste nivået på selvstendig basis. Slik støttende undervisning blir gjerne kalt "scaffolding" (ibid.).

Begrepsdannelse er i følge Vygotsky (1986) en målrettet aktivitet, som benytter alle intellektuelle funksjoner (f.eks. persepsjon, oppmerksomhet, hukommelse og tenkning), og den er derfor avhengig av språklig mediering (Skott et al., 2015). Vygotsky skiller mellom to typer begreper: *Spontane begreper* er slike som barn lærer på egen hånd i dagliglivet utenfor skolen, og hverdagsbegreper som de utvikler "av seg selv" i skolen. *Vitenskapelige begreper* er utviklet innenfor skolefagene, og har en mer presis betydning. De gir barnet en referanse-ramme for de spontane begrepene, utvider individets handlingsrepertoar og frigjør tenkningen fra rene hukommelsesbilder (Imsen, 2015). Vygotsky (1986) advarer imidlertid mot å undervise barn direkte i vitenskapelige begreper. Dette fører bare til tomt papegøyesnakk (Skott et al., 2015).

2.1.3 Sosial konstruktivisme

I følge Barbara Jaworski kjennetegnes sosial konstruktivisme av tre prinsipper (de to første henter hun fra Paul Ernest (1991), og det siste fra Peter L. Berger & Thomas Luckmann (1966)):

- Kunnskap konstrueres på bakgrunn av erfaringer og tidligere kunnskap.
- Erfaringer og interaksjon med den fysiske og den sosiale verden spiller en viktig rolle, både gjennom fysiske handlinger og ved bruk av språk.
- Virkeligheten er konstruert gjennom forhandlinger mellom individer som deler meninger og sosiale perspektiver i en felles livsverden.

I en slik felles livsverden kan det oppstå delt eller felles kunnskap (Jaworski, 1996).

I følge Ernest finnes det to hovedstrategier innen sosial konstruktivisme. Den ene retningen tar utgangspunkt i radikal konstruktivisme, og føyer til sosiale aspekter. Et eksempel her er Jere Confrey (1991), som inkorporerer både sosial interaksjon og sosialt konstruerte kunnskaper i den radikale konstruktivismen. Den andre retningen utvikler to ulike, men komplementære teorier: én teori for å forklare den individuelle konstruksjonen av kunnskap (i tråd med radikal konstruktivisme), og en annen teori for sosial interaksjon. Et eksempel er

Heinrich Bauersfeld (1994), som kombinerer radikal konstruktivisme med interaksjonistisk[5] teori. Et annet eksempel er Paul Cobb & Erna Yackel (1992), som kombinerer radikal konstruktivisme med sosio-kulturell læringsteori (se 2.1.3.1). Et tredje eksempel er Paul Ernest (1991) selv, som har fokusert på en filosofi om matematikk, der han kombinerer radikal konstruktivisme med konvensjonalisme[6]. Dette har resultert i en falsifiserbar teori basert bl.a. på Wittgenstein og Lakatos (Ernest, 1994).

Ernest mener at ingen av dem som har utviklet sosial-konstruktivistiske teorier med utgangspunkt i radikal konstruktivisme har klart å løse alle problemene knyttet til nettopp radikal konstruktivisme. Han nevner at det tenkende individ forblir isolert, med sine personlige erfaringer. Videre nevner han problemene knyttet til språk, semiotisk mediering og forholdet mellom personlig og offentlig kunnskap (ibid.). Stephen Lerman hevder at dette skyldes iboende svakheter knyttet til radikal konstruktivisme. Selv om den, i følge Lerman, er en sterk og konsistent teori, har den klare begrensninger når det gjelder å forklare menneskelig atferd og menneskelige relasjoner. Hovedproblemet med å forsøke å utvide radikal konstruktivisme til sosial konstruktivisme, ligger i den radikale konstruktivismens grunnsyn om at individets kunnskap er personlig (Lerman, 1994).

2.1.3.1 Cobb og hans analysemodell

Her presenterer jeg de sosial-konstruktivistiske teoriene til Paul Cobb m.fl. som utgjør det læringsteoretiske perspektivet for min masteroppgave. Grunnen til at jeg valgte nettopp dette perspektivet har å gjøre med den fleksibiliteten det gir å se på konstruktivistiske og sosio-kulturelle læringssyn som komplementære, slik Cobb gjør. Hans analysemodell, som er gjengitt i tabellen under, er velegnet for mitt forskningsprosjekt. Den kan nemlig både ta for seg elevenes oppfatninger og refleksjoner knyttet til derivasjon, samtidig som den kan fange opp gruppedynamikken som var ment å finne sted ved gruppene som benyttet de to alternative læringsmåtene. I tillegg så jeg for meg at den kunne anvendes på alle de tre metodene jeg har benyttet i dette forskningsprosjektet; dvs. tester, spørreundersøkelse og intervju.

Paul Cobb mener at kommunikasjonen i en matematikkgruppe bør preges av det han kaller en *refleksiv diskurs*. En slik diskurs har parallell til Piagets refleksive abstraksjon (se 2.1.1.1).

[5] Sosiologisk teori, basert på Berger & Luckmann (1966) og Blumer (1969) m.fl. (Bauersfeld, 1994).
[6] Store norske leksikon definerer konvensjonalisme som "oppfatning, synsmåte eller holdning som har det alminnelig godtatte som norm" (Store norske leksikon, 2005-2007a).

Teori og praksis vil da gjensidig påvirke hverandre i løpet av den aktuelle prosessen. I forbindelse med matematiske aktiviteter i en gruppe, vil en slik refleksiv diskurs manifestere seg ved at elevene først reflekterer hver for seg rundt ulike aspekter ved en fysisk eller mental aktivitet gruppen er engasjert i. I neste omgang drøftes resultatene som hver elev har kommet frem til i fellesskap i gruppen. Cobb mener at en slik kommunikasjonsform vil bidra til at læringspotensialet i gruppen utvikles (Skott et al., 2015).

Cobb har et pragmatisk læringssyn, og ser på konstruktivistiske og sosiokulturelle læringssyn som komplementære. Han er opptatt av hvordan man gjennom undervisningseksperimenter kan finne ut hvordan den enkelte elev konstruerer sine matematiske begreper og metoder, gjennom assimilasjon og akkomodasjon. Men skal dette være mulig, må man også ta hensyn til den sosiale konteksten i klasserommet. Cobb og hans kolleger utviklet derfor en analyse-modell for matematiske aktiviteter i klasserommet, der både sosiale og psykologisk perspektiv inngår. Denne modellen er vist i tabellen under.

Sosialt perspektiv	Psykologisk perspektiv
Sosiale normer i klasserommet	Forestillinger om egen og andres rolle, og om de generelle kjennetegn på matematisk aktivitet i skolen
Sosio-matematiske normer	Matematiske forestillinger og verdier
Matematiske praksiser i klasserommet	Matematiske begreper og aktiviteter

Modellen består av tre nivåer, der hver rad i tabellen representerer ett nivå. Hvert nivå har altså både et sosialt og et psykologisk perspektiv. Vekselvirkningen mellom disse to perspektivene gir et helhetlig perspektiv som Cobb kaller for "emergent perspective". Sosiale normer vil her si de klasseromsaktiviteter som lærer og elever anser for å være akseptable, og som de forventer skal finne sted. Selv om læreren er den autorative personen i klasserommet, er de sosiale normene likevel etablert i et fellesskap mellom lærer og elever. De individuelle forestillingene vil påvirke de sosiale normene. Men det motsatte er også tilfellet. Det er et refleksivt forhold mellom dem. Hvordan undervisningen legges opp i R1, og hvilke lærings-måter som benyttes i faget, er en del av de sosiale normene. Sosio-matematiske normer vil si de sosiale normer som er knyttet spesifikt til matematikken. Her finner vi bl.a. hvilke deler av derivasjonsbegrepet som vektlegges i R1, hvilke krav som stilles når elevene f.eks. skal finne ekstremalpunkt (bruk av fortegnsskjema eller andrederiverttest), og når og hvordan elevene kan bruke digitale verktøy i forbindelse med oppgaver med derivasjon. Matematiske praksiser i klasserommet vil si matematiske "sannheter" som er blitt etablert blant alle elevene i klasserommet, og som elevene derfor kan benytte seg av uten å måtte rettferdiggjøre bruken (Cobb & Yackel, 1996).

Lampert & Cobb refererer til Sfard (1998), som benytter *tilegnelse* og *deltakelse* som metaforer for læring. Selv om det ikke er snakk om noen dikotomi her, mener de at det er hensiktsmessig å dele inn synet på læring etter disse to metaforene. Hvis man ser på læring som tilegnelse, befinner man seg typisk i en prosess-produkt-tradisjon. Kommunikasjonen i klasserommet er gjerne preget av instruksjoner. Etter at en elev har vært eksponert for en slik sesjon med instruksjoner, er tanken at man skal kunne måle elevens læringsutbytte i form av økte matematiske kunnskaper. Ser man derimot på læring som deltakelse i et matematisk fellesskap, er kommunikasjonen både middelet og målet i opplæringen. Man tenker seg at elevene utvikler ny matematisk innsikt ved å kommunisere med hverandre og med læreren i klasserommet. Og etter hvert som kunnskapsnivået øker, vil dette komme til uttrykk ved at kommunikasjonen i klasserommet blir mer sofistikert. Vi sier at elevene blir gradvis bedre til å kommunisere matematisk. Sentralt i læring som deltakelse finner vi:

- *Matematisering* - elevene gjennomgår en prosess, der virkelige gjenstander, handlinger og situasjoner gradvis ses på som matematikk.
- *Definering gjennom forhandlinger* - elevene møter i utgangspunktet med sine personlige idéer, begreper og definisjoner, men gjennom forhandlingsprosesser utvikles disse gradvis mot mer formelle, matematiske definisjoner.
- *Undervisningsstruktur orientert mot deltakelse* - undervisningen organiseres slik at elevene får muligheten til å utvikle sin matematiske forståelse gjennom deltakende kommunikasjon.
- *Fokus på begreper* - formålet med oppgavene elevene arbeider med, er at de skal gi elevene en økt forståelse for matematiske begreper og idéer. Dette i kontrast til oppgaver, der målet er at elevene skal lære seg bestemte prosedyrer.

Lampert & Cobb mener det finnes noe forskningsbelegg (Brown, Stein & Forman, 1996; Silver, Smith & Nelson, 1995; Stein, Grover & Henningsen, 1996) for å hevde at læring som deltakelse kan gi elever økt læringsutbytte, i betydningen bedre evne til matematisk tenkning, resonnering, problemløsning og kommunikasjon (Lampert & Cobb, 2003).

2.2 Språk og kommunikasjon i matematikkundervisningen

Dette delkapittelet var først og fremst tenkt som en teoretisk støtte i tilknytning til begrepslæring. Siden jeg valgte bort denne læringsmåten etter piloteringen, ble dette naturlig nok mindre aktuelt. Jeg valgte likevel å la emnet bestå som et eget delkapittel, siden den språklige dimensjonen uansett var relevant for derivasjon som begrep, og kommunikasjon gjennom gruppesamarbeid var sentralt ved begge de alternative læringsmåtene.

Språk sies å ha to hovedfunksjoner: Det er et verktøy i kommunikasjon mellom mennesker, og det er et redskap for læring og tenkning (Imsen, 2015). Refleksjon og kommunikasjon er sammenvevde prosesser når man skal lære matematikk. I følge Silver, Kilpatrick & Schlesinger (1990) kan kommunikasjon hjelpe elevenes læring av nye matematiske begreper, og misoppfatninger kan identifiseres (NCTM, 2008). Anna Sierpinska hevder at

> Any project of teaching and learning includes problems of communication. If mathematics is the object of communication, language becomes a problem (Sierpinska, 2005, s. 205).

Og videre:

> mathematical thinking cannot be demonstrated directly, and one cannot physically guide anybody in this activity. Communication is necessarily indirect, mediated by a combination of ordinary and highly specialised artificial languages and other sign systems. And there is no direct way of making sure the intended meaning is not lost in the mediation (Sierpinska, 2005, s. 205).

2.2.1 Sfard og hennes teorier om språk og matematikk

Anna Sfard mener at når elever møter utfordringer i matematikken har disse ofte sitt opphav i språket - nærmere bestemt i hvordan vi bruker ord. Vanskeligheter elever opplever i møtet med matematikkfaget kan

> be the product of the way we speak. More specifically it is posited that the source of the problem is in the way we think about human activities in general, in particular in the way we communicate with others and with ourselves about the activity of thinking, mathematical or otherwise (Sfart, 2008, s. 34).

Mange matematiske begreper refererer både til et objekt og en prosess. F.eks. et verbalt begrep som funksjon, et symbolsk begrep som "=" og et visuelt begrep som en graf. Hvis vi ser på et slikt begrep som et objekt, vil vi vurdere begrepet som en virkelig ting (en statisk struktur). Vi kan lett kjenne igjen idéen knyttet til begrepet, og vi manipulerer begrepet som en helhet uten å bry oss om detaljer. Ser vi derimot på begrepet som en prosess, fremstår det som et potensial. Vi kan fremkalle begrepet i alle dets detaljer gjennom sekvensielle handlinger. Anna Sfard hevder at disse to begrepsforståelsene (strukturell eller operasjonell) er komplementære (Sfard, 1991).

Historisk har mange matematiske begreper fått sin endelige form ved å gjennomløpe tre faser med gradvis strukturalisering:

1. *Internalisering*: I startfasen forholder matematikerne seg til det aktuelle begrepet rent operasjonelt, ved at de utfører visse operasjoner på det.
2. *Kondensering*: Etter en tid oppstår idéen om å gjøre om det matematiske begrepet til et selvstendig objekt.
3. *Reifisering*: Til slutt oppstår den strukturelle fasen, der matematikerne ser på begrepet som et objekt.

De tre fasene står i et hierarkisk forhold til hverandre: en fase må sluttføres, før den neste kan påbegynnes (ibid.).

I internaliseringsfasen utfører elevene operasjoner på enklere matematiske objekter, og de blir gradvis dyktigere til å utføre disse operasjonene. I kondenseringsfasen ser elevene på operasjonene mer som en helhet, og mer omfattende operasjoner deles opp i mindre, håndterbare deler som hver for seg ses på som en helhet. Denne helhetstankegangen gjør elevene bedre i stand til å kombinere en operasjonsprosess med andre prosesser, sammenligne prosesser, generalisere ut fra prosesser og veksle mellom ulike representasjoner av det aktuelle begrepet. Elevene befinner seg i kondenseringsfasen så lenge de forholder seg til det nye objektet (begrepsenheten) som operasjoner. I reifiseringsfasen finner det sted et plutselig skifte i elevenes syn på begrepsenheten, fra å se på den som operasjoner til å se på den som et objekt med visse karakteristiske trekk - altså et abstrakt objekt. Eleven har nå gått fra en operasjonell til en strukturell forståelse av begrepet. Ved å gjenta denne prosessen med internalisering, kondensering og reifisering, men nå med utgangspunkt i det allerede reifiserte objektet, kan eleven lære seg stadig mer avanserte matematiske begreper. Ved nesten all matematisk aktivitet vil man veksle mellom en strukturell og en operasjonell tilnærming til de samme begrepene. Hun siterer Henrice (1974): "the structural approach invites contemplation; the operational invites action; the structural approach generates insight; the operational generates result" (ibid.).

Det er imidlertid en stor utfordring knyttet til dualiteten mellom operasjonell og strukturell forståelse av et objekt. På den ene siden er reifikasjon på et lavere nivå nødvendig for at internalisering på et høyere nivå skal finne sted. På den annen side forutsetter reifikasjon at internalisering på et høyere nivå har funnet sted. Dette representerer en "ond sirkel": For at R1-elevene fullt ut skal kunne forstå derivasjonsbegrepet, må de kunne utføre operasjoner på et høyt nivå på derivasjonsbegrepet. Men samtidig må elevene forstå derivasjonsbegrepet for å kunne utføre operasjoner på det på et høyt nivå. I praksis betyr dette at elever i en lærings-prosess kan befinne seg i kondenseringsfasen i veldig lange perioder. De vil da regne oppgaver, uten at de forstår hva de holder på med. Mange finner dette så frustrerende at de mister motivasjonen til å lære matematikk. Men de som ikke gir seg, vil en dag kanskje oppleve et øyeblikks "magi", der forståelsen plutselig "faller på plass". De har da foretatt et ontologisk sprang som resulterer i at et begrep er blitt reifisert. Andre igjen jobber hardt med matematikken over lang tid, uten å nå reifiseringsfasen. (ibid.). Dette er tradisjonell oppgave-regning (jfr. 2.4.1) i et nøtteskall, slik jeg ser det. Elevene regner oppgaver, og hvis de får fasitsvaret går de fornøyd videre til neste oppgave. Uten at de nødvendigvis har forstått den grunnleggende matematikken som ligger til grunn for det de regner på. Men det er helt greit, både for lærer og elever, så lenge de leverer akseptable prestasjoner på prøvene. Og så håper man som matematikklærer at elevene innimellom skal oppleve disse øyeblikkene av "magi", der et begrep blir reifisert. Utfordringen for elever som velger realfagsmatematikk på videre-gående skole (dvs. et 1T-R1-R2-løp), ligger i de endringer som nå finner sted på eksamen. Del 2 består i økende grad av en mer uvant type oppgaver, som stiller større krav om for-ståelse hos realfagselevene. Og i R1 er da ofte derivasjon en sentral del av disse mer problem-baserte oppgavetypene (Utdanningsdirektoratet, 2016i). Dette vil kreve at elevene opplever "magien" noe hyppigere enn det jeg har inntrykk av skjer i dag blant mine R1-elever. Ved å ta i bruk de alternative læringsmåtene var tanken at en slik reifisering av derivasjonsbegrepet skulle finne sted litt oftere, hos litt flere elever. Og kanskje allerede blant noen av elevene som deltok på derivasjonsprosjektet?

Tenkning er i følge Sfard en individualisert form for (mellommenneskelig) kommunikasjon som hun kaller *commognition* (fra ordene "cognition" og "communication"). Videre beskriver hun en *diskurs* som en commognition, der medlemmene av diskursen deltar i kollektive kommunikasjonshandlinger. Hvilke objekter kommunikasjonshandlingene dreier seg om, hvilke hjelpemidler som benyttes og hvilke regler som gjelder for deltakerne definerer diskursen. En matematisk diskurs er kjennetegnet ved

1. Bruken av ord.
2. Visuelle hjelpemidler ("mediators"), som bilder og symbolske artefakter.
3. Fortellinger (narrativer) om objekter, forhold mellom objekter, eller prosesser med eller av objekter. En fortelling aksepteres eller avvises ved hjelp av diskursspesifikke prosedyrer.
4. Rutiner (mønstre).

Matematikk er altså, i følge Sfard, en form for kommunikasjon (Sfard, 2008).

Læreren og elevene vil ofte befinne seg i ulike matematiske diskurser. Dette kan føre til at kommunikasjonen mellom lærer og elev om et utfordrende matematisk begrep nærmest blir en umulighet. Læreren forholder seg typisk til et ferdig utviklet begrep, mens eleven på sin side er i ferd med å konstruere dette begrepet. I slike situasjoner tenker Sfard at læreren kan søke hjelp i matematikkens historie. Innsikt i hvordan det aktuelle begrepet har blitt til, og hvordan matematikere ofte har strevet i lang tid for å komme frem til begrepet, kan gi læreren økt innsikt i elevenes frustrasjoner knyttet til læringen av det aktuelle begrepet, og kanskje også gi noen idéer til hvordan elevene kan ledes på veien mot en forståelse av dette begrepet (Sfard, 1994.)

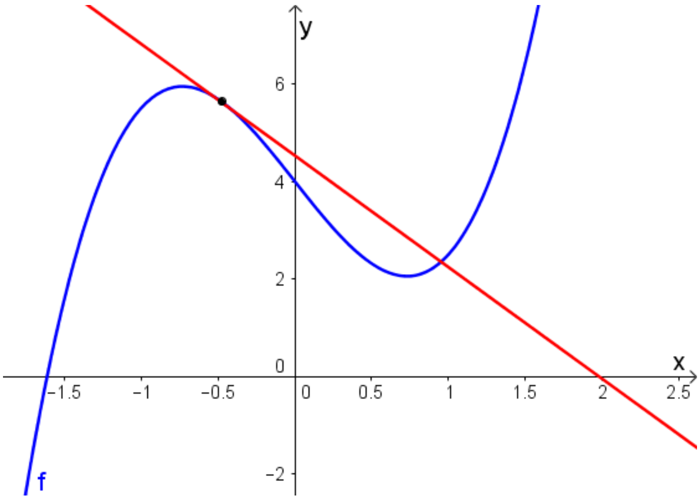
2.3 Derivasjonsbegrepet

Her gjør jeg rede for den historiske utviklingen av derivasjon. Videre tar jeg for meg ulike representasjoner av den deriverte. Dessuten ser jeg nærmere på grenseverdibegrepet, som er svært sentralt i derivasjon. Til slutt ser jeg nærmere på hvordan derivasjon benyttes i ulike matematikkfag i den videregående skole i Norge i dag.

2.3.1 Historisk utvikling

Her presenterer jeg bidrag fra mange av matematikerne som opp gjennom historien har vært med på å utvikle derivasjonsbegrepet slik vi kjenner det i dag. Dette illustrerer noe av kompleksiteten til derivasjonsbegrepet, og at det derfor har tatt veldig lang tid å utvikle det.

Derivasjon sprang ut fra problemet med å finne topp- og bunnpunkt til kurver, og ikke minst fra det beslektede *tangentproblemet*; altså problemet med å finne stigningstallet til tangenten i et gitt punkt på en kurve. En moderne versjon er vist i figuren under.



Figuren er tegnet i GeoGebra.

I følge Katz var tangentproblemet kjent helt tilbake til antikken, men da for helt spesielle geometriske figurer. Euklid fra Alexandria (ca. 300 f.Kr.) hadde flere setninger om tangenten til en sirkel i bok III i *Elementer*. Dette var også kjent av Arkimedes (287-212 f.Kr.), som jobbet en del med parabeltangenter bl.a. i forbindelse med hans parabelkvadratur. Han opererte dessuten med en slags forløper til grenseverdibegrepet, men da i forbindelse med *arealproblemet* (d.e. å finne arealet avgrenset av krumme kurver). Metoden han benyttet kalles *utfyllingsprinsippet* (gjengitt i Euklids bok XII.2), og ble utviklet av Eudoxus (408-355 f.Kr.). Apollonios fra Perga (250-175 f.Kr.), som var mest kjent for å ha funnet en ny måte å definere kjeglesnittene sirkelen, ellipsen, parabelen og hyperbelen på, fant også stigningstallene til tangenter til disse kjeglesnittene i helt spesielle tilfeller (Katz, 2009).

Gresk matematikk ble gjort kjent i India gjennom Alexander den stores erobringer i perioden 336-323 f.Kr. (Katz, 2009). Indiske matematikere kunne dermed inkorporere den greske matematikken i sin egen, og utvikle den videre. Vi kan spore deler av moderne algebra og trigonometri tilbake til Aryabhata (476-550) (Plofker, 2007). Med utgangspunkt i Aryabhatas trigonometri, beregnet Bhaskara II (1114-1185) volumet av en kule ved å benytte en lignende metode som Arkimedes brukte (utfyllingsprinsippet). Bhaskara II viste her at han forstod

prinsippet om infinitesimal tilnærming. Dette prinsippet benyttet han også til å finne den deriverte av sin x, men han benyttet ikke derivasjonsbegrepet (Cooke, 2013).
Arabiske matematikere kjente til den greske matematikken fra antikken. Gjennom den arabiske ekspansjonen som foregikk i perioden 622-1258 fikk arabiske matematikere tilgang til både kinesisk og indisk matematikk. Mange av de klassiske verkene fra gresk, kinesisk og indisk matematikk ble oversatt til arabisk (Holme, 2004). I forbindelse med sitt arbeid med optikk, fant i Ibn al-Haytham (965-1040) en metode for å regne ut volumet av en paraboloide, der han beregnet integralet av polynomer opp til fjerde grad (Berggren, 2007). Og Sharaf al-Din al-Tusi (1135-1213) fant en enkel, numerisk metode for å finne maksimum for kubiske polynomer. I den forbindelse benyttet al-Tusi en likning som vi ikke vet hvordan han kom frem til. Ved første øyekast kunne likningen indikert noe kjennskap til den deriverte. Dette vurderes likevel som lite sannsynlig, selv om det ikke kan utelukkes (Cooke, 2013). En mulig årsak til at de gamle greske, indiske og arabiske matematikerne ikke forsøkte å finne mer generelle metoder for å løse tangentproblemet, var at de ikke kjente til så mange typer kurver. Det var først med framveksten av analytisk geometri på 1600-tallet at matematikerne kunne konstruere alle mulige typer kurver (Katz, 2009).

Pierre de Fermat (1601-1665) løste tangentproblemet for polynomer rundt 1640, men uten å bruke grenseverdibegrepet direkte. I stedet benyttet han en metode han hadde utviklet for å finne topp- og bunnpunkt til grafen til et andregradspolynom, men denne metoden ble ofte algebraisk komplisert. Fermat fant arealet under kurven til $y = px^k$ ved å benytte summen av potensrekker - en metode som senere skulle bli svært sentral i Newton sine arbeider (ibid.). Giles Persone de Roberval (1602-1675) løste arealproblemet ved å benytte samme metode som Fermat, og i brevvekslinger mellom Fermat og Roberval går det tydelig frem at de utviklet løsningene uavhengig av hverandre. Det som derimot ikke kommer frem, er hvor de fikk formelen for summen av potensrekker fra. Vi vet at Arkimedes utviklet en formel for summen av potensrekker i forbindelse med beregning av arealet under kurven $y = px^k$ for $k = 2$, at Aryabhata utviklet en formel for $k = 3$ og at Ibn al-Haytham utviklet en formel for $k = 4$. Katz spekulerer i om Fermat og Roberval kan ha kjent til arbeidene til indiske og arabiske matematikere (Katz, 1995).

Newton og Leibniz utviklet integral- og differensialregning uavhengig av hverandre, men med en helt ulik notasjon. Viktige bidragsytere til deres arbeid, foruten tidligere nevnte

Fermat, var René Descartes (1596-1650), Christiaan Huygens (1629-1695), Blaise Pascal (1623-1662), John Wallis (1616-1703), James Gregory (1638-1675) og Isaac Barrow (1630-1677) (Katz, 2009). Newton forfattet et skrift om differensialregning allerede i 1666. Dette skriftet, i tillegg til senere manuskripter ("Om analyse av likninger med uendelig mange ledd", skrevet i 1669 og "Avhandling om metoden med rekker og fluksjoner", skrevet i 1671) sirkulerte i en engere krets av engelske matematikere. Men Newton publiserte ikke noe av dette, kanskje av frykt for å få kritikk for at stringensen ikke var god nok. Først i 1693 begynte Newton å publisere deler av disse arbeidene, mens den fullstendige versjonen av disse arbeidene ikke ble utgitt før i 1704 (Holme, 2004)

Først i 1673 startet Leibniz på sine arbeider med infinitesimaler, og han utviklet etter hvert sin egen versjon av integral- og differensialregningen. I 1675 skrev han et manuskript der han bruker betegnelsen $f(x)\,\mathrm{d}x$ for første gang. Videre finner han produktregelen for differensialer, og i løpet av 1676 oppdager han formelen $\mathrm{d}\left(x^n\right) = nx^{n-1}\mathrm{d}x$ og det vi i dag kaller kjerneregelen $\mathrm{d}\left(f\left(g(x)\right)\right) = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$. Leibniz publiserte ikke sine arbeider med differensialregning før i 1684. I mellomtiden hadde Newton funnet ut at Leibniz hadde hatt tilgang til sine tidligere manuskripter. Newton var derfor overbevist om at Leibniz hadde stjålet hans idéer. Dette resulterte i en langvarig prioritetsstrid - ikke bare mellom Newton og Leibniz, men også mellom engelske og kontinentale matematikere. Det hele endte med at Leibniz ble fullstendig diskreditert, og da han døde i 1716 ble han kun fulgt til graven av sin tidligere sekretær (ibid.).

I dag sier vi at en funksjon *f* er *deriverbar* i et punkt *x*, hvis

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

eksisterer som et endelig, reelt tall. Tallet $f'(x)$ kalles for den deriverte av *f* i x, og dette tallet er det samme som stigningstallet til tangenten til grafen til *f* i punktet *x*. Uttrykket $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ kalles for Newton-kvotienten til *f* i punktet *x* (Adams, 1991). Ofte skriver vi Δx i stedet for *h*. Og når denne størrelsen nærmer seg null, kaller vi den en infinitesimal størrelse (eller momentet til fluksjonen, som Newton kalte den). Men hverken Newton eller

Leibniz hadde en stringent definisjon av en infinitesimal størrelse. Newton fikk gjennomgå for dette av den irske filosofen og biskopen George Berkeley i 1734 (Holme, 2004).

Den første vi kjenner til som formulerte en stringent definisjon av en infinitesimal størrelse var Augustin Louis Cauchy (1789-1857) i boken *Cours d'analyse* fra 1821 (ibid.). Ved å innføre grenseverdibegrepet kunne Cauchy definere begrepet kontinuitet, men da som kontinuitet i et intervall (og ikke i et punkt). Cauchy brukte også grenseverdibegrepet til å definere konvergens (d.e. om en rekke konvergerer). I etterkant har det vist seg at Bernard Bolzano (1781-1848) hadde utviklet nesten identiske teorier om grenser, kontinuitet og konvergens som Cauchy flere år tidligere, men disse teoriene ble først kjent for det matematiske miljøet mange år etter at Cauchy hadde publisert sine teorier[7] (Katz, 2009).

Selv om idéene til Cauchy (og Bolzano) er i tråd med moderne matematiske teorier, var beviset hans for grenseverdier mangelfullt. Det var først med Karl Weierstraβ (1815-1897) at definisjonen av grenseverdier fikk den formen vi bruker i dag (ibid.):

> Vi sier at $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, hvis det for hvert positivt tall ε eksisterer et positivt tall δ,
>
> slik at $|f(x) - L| < \varepsilon$ når $0 < |x - a| < \delta$ (Adams, 1991).

Gregory og Barrow var blant flere matematikere som, i tiden før Newton og Leibniz utviklet sine teorier for integral- og differensialregning, koplet tangentproblemet til arealproblemet. Men de hadde ingen metoder for å løse disse problemene. Newton og Leibniz utviklet slike metoder, og de var klar over at det var en sammenheng mellom de to løsningsmetodene. Men de koplet aldri disse sammen til ett teorem. Dette skyldes nok at de begge var mer interessert i å løse differensiallikninger, enn å finne arealer avgrenset av kurver (Katz, 2009). I dag koples tangentproblemet til arealproblemet gjennom fundamentalteoremet for matematisk analyse:

> Gitt at funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig i et intervall I om punktet $x = a$,
>
> og la en funksjon $F(x)$ være definert som $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
>
> Da er F deriverbar i I, og $F'(x) = f(x)$ (Adams, 1991).

[7] Det er ingenting som tyder på at Cauchy hadde noen kjennskap til arbeidene til Bolzano. De to mennene ser ut til å ha kommet opp med de samme idéene uavhengig av hverandre (Katz, 2009).

Dette teoremet kunne Cauchy bevise da han brøt med den måten matematikere vanligvis definerte integrasjon på 1700-tallet, nemlig som antiderivert. Cauchy definerte i stedet integrasjon som grenseverdien av en sum. Dette benyttet han til å bevise middelverdi-setningen, som han igjen benyttet til å bevise fundamentalsetningen (Katz, 2009).

2.3.2 Grenseverdibegrepet

Grenseverdibegrepet er sentralt i forbindelse med derivasjon. Vi ønsker å finne endringen Δy av funksjonsverdien, når Δx blir "uendelig liten" (infinitesimal størrelse), og den deriverte er da lik forholdet mellom Δy og Δx i grensetilfellet når Δx går mot null. Hverken Newton eller Leibniz hadde en stringent definisjon av slike infinitesimale størrelser, men opererte med disse på en mer intuitiv måte. I følge David Tall kan det for dagens matematikkstudenter forholde seg nærmest motsatt: Forskere som Cornu (1992) og Williams (1991) fant at studentene lærer den stringente definisjonen av en infinitesimal størrelse, men mangler ofte en intuitiv forståelse av grenseverdibegrepet. Ferrini-Mundi & Gaudard (1992) og Smith & Moore (1991) fant videre at studentene ser ut til å kompensere den manglende forståelsen med å fokusere på bruk av regneregler til å løse mer rutinepregede oppgaver i stedet. Eisenberg (1992) viste at studenter sjelden ser på derivasjon og integrasjon som motsatte operasjoner, men vurderer dem som to separate prosedyrer. Seldon, Mason & Seldon (1989, 1994) viste at studenter som behersker mer standard oppgaver, ofte feiler fullstendig når oppgavene i stedet har en mer uvant form. Tall mener at vi kan gjøre noe med disse utfordringene som forskerne over peker på, ved å benytte oss av mulighetene som moderne datateknologi gir (Tall, 1996). Jeg vil i mitt forskningsprosjekt forsøke å gjøre noe med disse utfordringene ved å benytte to alternative læringsmåter.

Det formelle ε-δ-beviset for grenseverdi inneholder ingen referanser til tid. Men ofte inngår tidsbegrepet, eller en forestilling om bevegelse, som en metafor for grenseverdibegrepet. F.eks. sier vi ofte om $\lim_{x\to a} f(x) = L$ at "når x går mot a, vil $f(x)$ gå mot L". Og vi skriver gjerne dette også slik at denne metaforen trer frem: Når $x \to a$, vil $f(x) \to L$ (Dormolen, 1991). En slik metaforbruk kan fort gi elevene forestillinger om at $f(x)$ aldri kan bli lik grenseverdien L, men bare komme veldig nær denne verdien. Et eksempel er elever som tror at 0,999... ikke er lik 1. Dette gjelder også selv om de behersker bevismetoder som viser at 0,999... faktisk er lik 1. Elevene argumenterer da typisk med at selv om de to størrelsene matematisk er like, så er de likevel ikke det "i virkeligheten": 0,999... er veldig nærme 1, men ikke helt lik (Sierpinska, 1994).

David Tall & Shlomo Vinner benytter *begrepsdefinisjon* ("concept definition") for den formelle definisjonen av et begrep, og *begrepsbilde* ("concept image") for den samlede kognitive strukturen (jfr. Piagets teorier i 2.1.1.1) som en elev knytter til dette begrepet. Begrepsdefinisjonen inngår i begrepsbildet. Den delen av begrepsbildet som aktiveres av eleven i en gitt situasjon, kaller de for *fremkalt begrepsbilde* ("evoked concept image"). Samme begrepsbilde kan i ulike situasjoner gi ulike fremkalte begrepsbilder, og disse kan være i konflikt med hverandre. Dette kaller de en *potensiell konflikt-faktor* ("potensial conflict factor"). En *kognitiv konflikt-faktor* ("cognitive conflict factor") oppstår hvis to ulike fremkalte begrepsbilder som er i konflikt med hverandre, faktisk skaper en kognitiv konflikt. Vi har en potensiell konflikt-faktor hvis begrepsbildet ikke stemmer overens med den formelle definisjonen. Tall & Vinner fremhever grenseverdibegrepet som særlig utsatt for denne typen potensiell konflikt-faktor mellom begrepsbilde og formell definisjon, og de viser til flere eksempler som ligner på eksempelet til Sierpinska i avsnittet over (Tall & Vinner, 1981). For en elev som allerede har dannet seg et begrepsbilde av f.eks. derivasjon, og som senere blir presentert for en formell definisjon av den deriverte, kan vi tenke oss tre mulige situasjoner:

1) Begrepsbildet endres, slik at det også omfatter begrepsdefinisjonen.
2) Begrepsbildet blir ikke påvirket av den formelle definisjonen. I stedet forblir begrepsdefinisjonen isolert fra begrepsbildet. Over tid vil da begrepsdefinisjonen typisk bli glemt. Men det kan også hende at den blir værende som en forkludret versjon, som ikke lenger stemmer overens med den formelle definisjonen.
3) Både begrepsbildet og begrepsdefinisjonen forblir intakt, men uten at det er noen forbindelser mellom dem. En elev kan da f.eks. gjengi definisjonen av den deriverte, men hver gang eleven benytter derivasjon er det begrepsbildet som fremkalles.

Hvis en elev i stedet presenteres for den formelle definisjonen først, og deretter danner seg et begrepsbilde (f.eks. gjennom eksempler, eller ved å regne oppgaver), vil vi kunne få tre tilsvarende mulige situasjoner som 1) - 3) (Vinner, 1991).

Bernard Cornu fremhever det didaktisk krevende ved forskjellen mellom begrepsdefinisjon og begrepsbilde:

Remembering the definition of a limit is one thing, acquiring the fundamental conception is another (Cornu, 1991, s. 153).

Og videre:

> Students are often able to complete many of the exercises they are asked to perform without having to understand the formalism of the definition at all (ibid.).

Det er særlig ordene "gå mot" og "grense" som ser ut til å skape problemer for elevene. En viktig årsak til dette er det Cornu kaller *spontane begreper* ("spontaneous conceptions") - dvs. de idéer, intuisjoner, bilder og kunnskaper som elevene bringer med seg fra sitt dagligliv. Slike spontane begreper fremkalles hos elevene når de møter ord som de allerede har et forhold til. Men elevenes spontane begreper knyttet til "gå mot" og "grense" er ikke nødvendigvis i overensstemmelse med forståelsen som ligger til grunn i den formelle definisjonen av grenseverdi som er gitt ovenfor. De spontane begrepene forsvinner ikke når elevene presenteres for den formelle definisjonen. I stedet mikses de spontane begrepene sammen med begrepsdefinisjonen, og blir en del av begrepsbildet elevene har av grenseverdi. Når elevene senere står overfor problemer der grenseverdi inngår, fremkalles ofte de spontane begrepene, i stedet for begrepsdefinisjonen (Cornu, 1991). Dette skillet mellom de spontane begrepene og begrepsdefinisjoner er for øvrig ganske sammenfallende med Vygotskys skille mellom spontane og vitenskapelige begreper slik det er beskrevet i 2.1.2.1.

Cornu deler kognitive hindringer inn i tre: psykologiske hindringer, didaktiske hindringer og epistemologiske hindringer. Epistemologiske hindringer har i følge Bachelard (1938) to kjennetegn. For det første er de uunngåelige og viktige bestanddeler i utviklingen av kunnskap. For det andre kan man finne dem i den historiske utviklingen av flere begreper. Cornu finner fire slike epistemologiske hindringer i forbindelse med den historiske utviklingen av grenseverdibegrepet:

1) *Å knytte geometri til tall*. De gamle greske matematikerne, som f.eks. Arkimedes, benyttet Eudoxes "utfyllingsprinsipp" for å beregne areal (omtalt i 2.3.1), uten at vi finner spor av at de benyttet begreper som grense og uendelig.
2) *Begrepene uendelig lite (infinitesimal) og uendelig stort*. Som nevnt i 2.3.1 benyttet både Newton, Leibniz og Cauchy begrepet infinitesimal, uten at de hadde noen stringent definisjon av dette begrepet.
3) *Det metafysiske aspektet ved grenseverdibegrepet*. Mange kjente matematikere, som D'Alembert og Lagrange slet med å akseptere dette.

4) *Om det er mulig å nå grensen*. Flere matematikere, blant dem Robins (1697-1751) og D'Alambert, har hevdet at det ikke var mulig å nå grensen.

Disse fire epistemologiske hindringene representerer store utfordringer også for dagens studenter (ibid.).

2.3.3 Ulike representasjonsformer av derivasjon

NCTM understreker at representasjon både vil si en prosess og et produkt. Dvs. at det omfatter begrepsdannelse som foregår på det mentale plan, såvel som observerbare objekter. I løpet av skolegangen, fra førskole til videregående skole, bør elevene bli i stand til å

- lage og bruke representasjoner til å organisere, ta vare på og formidle matematiske idéer.
- velge, anvende og oversette mellom matematiske representasjoner for å løs problemer.
- bruke representasjoner for å modellere og fortolke fysiske, sosiale og matematiske fenomener (NCTM, 2008).

Tommy Dreyfus skiller mellom ytre (symbolsk) og indre (mental) representasjon:

> A symbolic representation is externally written or spoken, usually with the aim of making communication about the concept easier. A mental representation, on the other hand, refers to internal schemata or frames of reference which a person uses to interact with the external world. It is what occurs in the mind when thinking of that particular part of the external world and may differ from person to person (Dreyfus, 1991, s. 31).

Slike mentale representasjoner kan synliggjøres gjennom visualisering:

> the act of generating a mental representation, relies on representation systems, i.e. concrete, external artefacts, which can be materially realized. In the case of functions, graphs are one such artefact, algebraic formulas another, arrow diagrams and value tables still other ones. Mental representations are created in the mind on the basis of these concrete representation systems (ibid.).

Man kan ha flere mentale representasjoner for det samme begrepet. I uheldige tilfeller kan dette skape en konflikt. I mer gunstige tilfeller kan dette føre til at det dannes sterke og korrekte forbindelser mellom de ulike representasjonene, samtidig som man blir i stand til både å veksle og oversette mellom ulike representasjoner, alt etter hva som er mest hensiktsmessig. Da har vi at

> several competing mental representations for the same concept may complement each other and eventually may be integrated into a single representation of that concept (ibid.).

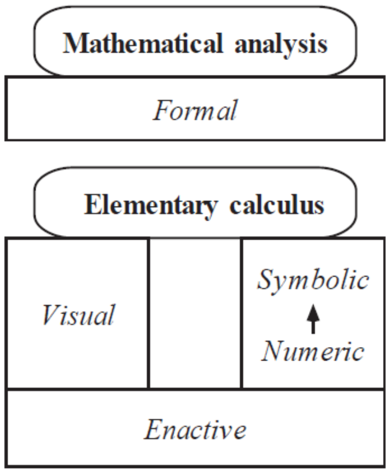
En slik integrasjonsprosess, der generalisering og syntetisering (sammenfatning) av ulike representasjoner står sentralt, resulterer i en abstraksjon av det aktuelle begrepet. En elev som gjennomløper en slik abstraksjonsprosess, konstruerer mentale strukturer ut fra matematiske strukturer - altså ut fra egenskaper ved matematiske objekter og relasjoner mellom disse:

> Such constructive mental activity on the part of a student is heavily dependent on the student's attention being focused on those structures which are to form part of the abstract concept, and drawn away from those which are irrelevant in the intended context; the structure becomes important, while irrelevant details are being omitted thus reducing the complexity of the situation (Dreyfus, 1991, s. 37).

Derivasjon kan representeres på mange ulike måter. Delvis inspirert av Bruner sine tre representasjonsnivåer (se 3.1.1.2), opererer David Tall med fire ulike representasjoner for derivasjon:

- *enaktiv representasjon* (handlingsrepresentasjon), der menneskelig aktivitet gir en følelse av endring, fart og akselerasjon.
- *numerisk og symbolsk representasjon*.
- *visuell-romlig representasjon*, knyttet til virkelige problemer.
- *formell representasjon*.

Disse fire representasjonene inngår i en kognitiv utvikling som eleven må gjennomløpe for å fullt ut forstå derivasjonsbegrepet. Enaktive erfaringer danner et intuitivt fundament for grunnleggende matematisk analyse, som består av numeriske, symbolske og visuelle representasjoner. For å beherske matematisk analyse fullt ut kreves i tillegg formell representasjon på et høyere nivå (Tall, 1996).



Figuren er hentet fra Tall (1996, s. 292).

I følge teoretikere som Piaget (1972), Dubinsky (1991) og Sfard (1991) foregår kunnskapsutvikling i flere faser: først gjennom handlinger på omgivelsene, deretter gjennom prosesser og til slutt som selvstendige objekter som man kan manipulere på et høyere nivå gjennom mentale prosesser. Når f.eks. en elev jobber med derivasjon som numerisk og symbolsk representasjon, gjennomgår eleven en kognitiv utvikling, der en prosess (engelsk: process) blir til et begrep (engelsk: concept). Gray og Tall (1994) kaller en slik kombinasjon, der både prosessen og begrepet ofte har samme symbol, for *procept*. Dermed kan teorien om funksjoner og matematisk analyse oppsummeres som i figuren under. Her vil "doing" og "undoing" si utførelse ("gjøring") og omgjøring av prosesser (ibid.).

Procept		
Change: FUNCTION	doing	calculating values
	undoing	solving equations
Rate of change: DERIVATIVE	doing	differentiation
	undoing	anti differentiation, solving differential equations
Cumulative growth: INTEGRAL	doing	integration
	undoing	fundamental theorem of calculus

Figuren er hentet fra Tall (1996, s. 293).

Undervisning i moderne matematisk analyse bør i følge Cottrill, Dubinsky et al. (1995) følge en utvikling forkortet til APOS: "Actions" blir repeterende "Processes" som samles til "Objects", som i sin tur relateres til "Schema". Gleason et al. (1990) understreker viktigheten av å følge "Rule of Three" i undervisningen. Dvs. at så sant det er mulig bør et emne læres både grafisk, numerisk og analytisk. Målet er å balansere disse tre tilnærmingene, slik at elevene erfarer emnet fra ulike innfallsvinkler. Figuren under viser en oversikt over mulige tilnærminger til funksjoner og matematisk analyse.

		Representations				
		Visuo-spatial	**Numeric**	**Symbolic**	**Graphic**	**Formal**
Procepts		*Enactive* observing experiencing	*Quantitative* estimating approximating	*Manipulative* manipulating limiting	*Qualitative* visualizing conceptualizing	*Deductive* defining deducing
Change: FUNCTION	doing	distance, velocity etc. changing with time	numerical values	algebraic symbols	graphs	set-theoretic definition
	undoing	solving problems	numerical solutions of equations	solving equations symbolically	visual solutions where graphs cross	intermediate value & inverse function theorems
Rate of change: DERIVATIVE	doing	velocity from time-distance graph	numerical gradient	symbolic derivative	visual steepness	formal derivative
	undoing	solving problems e.g. finding distance from velocity	numerical solutions of differential equations	antiderivative—symbolic solutions of differential equations	visualize graph of given gradient	antiderivative—existence of solutions of differential equations
Cumulative growth: INTEGRAL	doing	distance from time-velocity graph	numerical area	symbolic integral as limit of sum	area under graph	formal Riemann integral
	undoing	computing velocity from distance	know area—find numerical function	Symbolic Fundamental Theorem	know area – find graph	Formal Fundamental Theorem
		REAL-WORLD CALCULUS	THEORETICAL CALCULUS			ANALYSIS

Figuren er hentet fra Tall (1996, s. 295)

Grunnlaget for alle disse tilnærmingene er grenseverdibegrepet, som også bør presenteres for elevene gjennom de ulike representasjonene (ibid.).

2.3.4 Derivasjon i norsk videregående skole

Her viser jeg at derivasjon er et sentralt emne i mange av matematikkfagene som tilbys på videregående skole i Norge - ikke minst i matematikk R1.

2.3.4.1 Derivasjon i læreplaner

Etter ungdomsskolen står norske elever overfor valget mellom yrkesfaglig eller studie-spesialiserende videregående skole.

De elevene som velger yrkesfaglig retning, vil få en introduksjon til derivasjonsbegrepet i form av momentan vekstfart, hvis de velger matematikk 1T-Y. Fortsetter de med påbygg i vg3, får de en mer utførlig gjennomgang av derivasjon i matematikk 2T-Y. Elever som velger matematikk 1P-Y vil ikke møte på derivasjonsbegrepet, med mindre de fortsetter med påbygg i vg3. I 2P-Y presenteres elevene for begrepet lineær vekst (Utdanningsdirektoratet, 2016a).

Elever som velger studiespesialiserende retning, vil møte derivasjonsbegrepet i vg1. Men i matematikk 1P vil elevene kun møte begrepet lineær vekst. I matematikk 1T møter elevene i tillegg begrepet momentan vekstfart. Videre presenteres 1T-elevene for definisjonen av den deriverte, og enkle derivasjonsregler for polynomfunksjoner. 1T-elevene skal også anvende derivasjon, gjennom funksjonsdrøfting og optimering (ibid.).

Hvis 1P-elevene velger å fortsette med matematikk S1, møter de den samme derivasjonen som 1T-elevene fikk i vg1. 1T-elever som fortsetter med matematikk R1, møter kjerne-regelen, produktregelen og kvotientregelen for derivasjon, i tillegg til derivasjonsregler for logaritme- og eksponentialfunksjoner. Dette er identisk med det S1-elevene vil møte, hvis de fortsetter med matematikk S2. I matematikk R2 presenteres derivasjonsregler for trigono-metriske funksjoner. I tillegg introduseres integralregning: Integrasjon som antiderivert, integrasjon som areal under en graf (sum av rektangler) og bestemt integrasjon. Elevene møter her også mer avanserte integrasjonsmetoder som delvis integrasjon, integrasjon med variabelskifte (substitusjon) og integrasjon vha. delbrøksoppspalting, og de skal lære å anvende integrasjon til arealberegning og til å finne volum av omdreiningslegemer. R2-elevene introduseres også for differensiallikninger - dvs. 1. ordens differensiallikninger som enten er separable, eller som kan løses vha. integrerende faktor, og 2. ordens lineære, homogene differensiallikninger med konstante koeffisienter (ibid.).

2.3.4.2 Derivasjon på skriftlig eksamen

I Norge er eksamen i matematikk delt inn i to deler, der den andre delen utgjør 3/5 av eksamen: Del 1 gjennomføres uten noen hjelpemidler (unntatt linjal, gradskive og passer). Del 2 gjennomføres med alle hjelpemidler tilgjengelig, inkludert datamaskin, så sant elevene ikke kan kommunisere med andre (Utdanningsdirektoratet, 2016b). Tilgangen (eller fraværet) av hjelpemidler preger oppgavetypene som presenteres. I del 1 gis typisk oppgaver som tester om elevene behersker regneregler og enkle metoder. Men det er ikke uvanlig at del 1 avsluttes med en problemløsningsoppgave eller to. I del 2 er oppgavene gjerne mer komplekse, og ofte problemløsningsoppgaver. De er nesten alltid tekstoppgaver. Men det er sjelden at elevene må løse disse oppgavene ved regning. Tvert imot er det ofte meningen at elevene skal løse oppgavene ved hjelp av digitale verktøy, og et sentralt poeng i disse oppgavene er da å teste om elevene er i stand til å vurdere hvilke oppgaver som bør løses digitalt, og i tilfelle kunne velge et egnet verktøy til å løse disse oppgavene. Alt som er nevnt over om typiske oppgaver i del 1 og del 2 gjelder i aller høyeste grad også for oppgaver som involverer derivasjon.

I løpet av prosjektperioden har eksamensformen blitt endret noe. Fra og med våren 2015 vil det ikke lenger bli gitt oppgaver som skal løses ved regning på del 2. I stedet vil det typisk stå i den enkelte oppgave på del 2 at den skal løses ved å benytte en bestemt type digitalt hjelpemiddel - f.eks. regneark, graftegner eller CAS-verktøy. Tidsbruken ble også endret, slik at det fra og med våren 2015 er den første delen som utgjør 3/5 av eksamen, og ikke 2/5 som tidligere (ibid.).

Jeg har tatt for meg eksamensoppgavene som ble gitt våren 2013. Oppgaver som krevde kunnskaper om derivasjon innen de ulike matematikkfagene i norsk videregående opplæring er vist i vedlegg 7.9. 1P-Y og 1T-Y er ikke med her, siden disse fagene kun har lokalgitt eksamen.

2.3.4.3 Derivasjon i lærebøker i matematikk R1

I Aschehoug sitt verk *Matematikk R1* starter de i kapittel 4 (av 6) med den formelle definisjonen av den deriverte, tar kort for seg sammenhengen mellom kontinuitet og derivasjon, før de repeterer derivasjonsreglene fra 1T. Videre tar de for seg sammensatte funksjoner og kjerneregelen, produktregelen og kvotientregelen (som de kaller brøkregelen). Deretter repeterer de funksjonsdrøfting fra 1T, og presenterer bruk av derivasjon ved praktiske problemer. Avslutningsvis i kapittel 4 introduserer de den andrederiverte, og anvender denne til å finne krumning, vendepunkt og vendetangent. I kapittel 5 gir de derivasjonsreglene for funksjoner som involverer e^x, a^x og $\ln x$. Dette kapittelet avsluttes med derivasjon av vektorfunksjoner (Heir et al., 2007). I 2015 kom Aschehoug med en helt ny versjon av sitt verk *Matematikk R1*. De største forskjellene fra forrige versjon er at derivasjon nå kommer tidligere, at de har en litt mer formell presentasjon av stoffet og at de har med bruk av GeoGebra og CAS (Computer Algebra Systems). I tillegg er derivasjon av vektorfunksjoner flyttet til kapittel 6 om vektorer. (Heir, et al., 2015).

I *Sinus Matematikk R1* presenterer Cappelen Damm derivasjon i praktisk talt samme rekkefølge som Aschehoug, men de er gjennomgående mer formelle i sin presentasjon - bl.a. gir de bevis for alle derivasjonsreglene. Derivasjon kommer i de to siste kapitlene 7 og 8 (Oldervoll et al., 2007). *Sinus Matematikk R1* kom i ny versjon i 2013. Mens den gamle versjonen var delt i to; en grunnbok, og en oppgavesamling, er den nye versjonen en alt-i-ett bok. Her viderefører de i all hovedsak presentasjonen av derivasjon som i den forrige versjonen, men GeoGebra har nå erstattet lommeregneren som digitalt verktøy. Den største endringen finner vi bak i oppgavesamlingen, der eksamensoppgaver (både med og uten hjelpemidler) vektlegges i en helt annen grad enn i den forrige versjonen (Oldervoll et al., 2013).

Gyldendals *Sigma Matematikk R1* presenterer derivasjon i en litt annen rekkefølge enn de andre to læreverkene. De samler definisjonen og alle regler i et eget kapittel; nemlig kapittel 5 (av 7). I kapittel 6 presenteres den andrederiverte, krumning og vendepunkt, før de gir seg i kast med funksjonsdrøfting. Kapittelet avsluttes med kontinuitet og deriverbarhet. Gyldendal legger seg et sted mellom Aschehoug og Cappelen Damm, med hensyn på hvor formelt stoffet presenteres. De gir f.eks. to bevis for derivasjonsregler; nærmere bestemt for e^x og for produktregelen. Vektorfunksjoner, og den deriverte av slike funksjoner, er ikke omtalt i *Sigma* i det hele tatt (Sandvold et al., 2007). Gyldendal kom med sin nye versjon av *Sigma Matematikk R1* i 2012. Det faglige innholdet er helt identisk, med to unntak: Nå har de fått med et del-kapittel med vektorfunksjoner og dens deriverte. I tillegg har de erstattet skjerm-dumper fra lommeregnere, med utskrifter fra et uspesifisert digitalt verktøy (Øgrim et al., 2012).

Alle tre læreverkene i R1 legger vekt på bruk av digitale verktøy til å drøfte funksjoner og løse optimeringsoppgaver. Dette gjelder både for de gamle og for de nye versjonene av læreverkene. Men Gyldendals *Sigma* har ingen eksempler fra GeoGebra eller CAS.

2.4 Læringsmåter

Her tar jeg for meg de fire læringsmåtene som jeg opprinnelig hadde tenkt å benytte meg av i mitt derivasjonsprosjekt. Jeg har forsøkt å presentere både styrker og svakheter ved de ulike læringsmåtene. Min grunntanke er at det ikke finnes en "beste" læringsmåte. For å gjenta Anna Sfard, helt på slutten av 1.1: "Such exclusivity is an effective prescription for failure." (Sfard, 2003, s. 354). Jeg mener at man som lærer i stedet bør kjenne til flere læringsmåter, og benytte den eller de læringsmåter man antar vil gi best læringsutbytte for elevene i den gitte læringskonteksten.

2.4.1 Tradisjonell oppgaveregning

Definisjonen av tradisjonell oppgaveregning gitt i 1.3.3, vektlegger det individuelle i læringen. Elevene arbeider i hovedsak alene med å løse oppgaver fra læreboken. Vi kan si at en slik læringsmåte er i overensstemmelse med et konstruktivistisk læringssyn, slik det er presentert i 2.1.1. Ved å arbeide med ulike typer oppgaver innen et matematisk emne, vil forhåpentligvis elevene få ny innsikt i sentrale aspekter ved dette emnet. Med referanse til Piagets teorier i 2.1.1.1, kan vi da si at elevene konstruerer sin kunnskap i kognitive skjema. Lettere, mer drillpregede oppgaver fører til at elevene assimilerer kunnskap i allerede eksisterende skjema. Mer komplekse oppgaver kan føre til at elevene opplever en kognitiv konflikt. Elevene kan da gjenopprette likevekten, gjennom akkomodasjon. Dette kan føre til at eksisterende skjema utvides, at helt nye skjema oppstår eller at det kan oppstå nye koplinger mellom ulike skjema. I det siste tilfellet vil det da kunne dannes en kognitiv struktur.

Alrø & Skovsmose beskriver en typisk tradisjonell undervisning som todelt: først presenterer læreren noen matematiske idéer og metoder som ligner det elevene finner i læreboken. Deretter jobber elevene med utvalgte oppgaver fra læreboken. Disse oppgavene kan løses ved å benytte metodene som nettopp er blitt presentert for elevene. Oppgavene i læreboken preger således mye av matematikkundervisningen: hvordan elevene jobber, kommunikasjonen mellom elever og lærer, og matematikkfagets rolle i samfunnet. Alrø & Skovsmose kaller den dominerende rollen oppgavene i læreboken har i matematikkundervisningen for *oppgave-paradigmet*, og de er svært skeptiske til dette paradigmet. De finner det problematisk at de matematiske tekstene og oppgavene ikke er bestemt av lærer og elever i klasseroms-situasjonen. Og de er særlig kritiske til at oppgaveparadigmet ofte fører til en ensformig kommunikasjonsform i klasserommet, preget av korreksjon av feil (Alrø & Skovsmose, 2002).

Mange lærere anser imidlertid oppgaveregning som en velegnet måte å øve inn nytt lærestoff på. Elevene regner da oppgaver for å lære seg nye begreper, regler og metoder. Hattie & Yates sier at det tidligere var en feilaktig oppfatning at ren oppgavedrilling stod i motsetning til dypere læring, men at det ikke finnes støtte for dette i forskningen de har studert.

> There is no meaningful cleft between 'mere surface learning' and 'deep understanding'. On the other hand, the notion of automaticity implies that when basic skills are automated, mental space becomes available for deeper levels of thinking and understanding through acquiring knowledge (Hattie & Yates, 2014, s. 58).

Og videre

> Repetition and consolidation are vehicles enabling knowledge to be stored within retrievable units, thereby accelerating mental growth through conceptual mastery and deeper understanding (Hattie & Yates, 2014, s. 58).

Andre igjen er kritiske til en ren oppgaveorientering til matematikken, fordi det i liten grad ser ut til å fremme refleksjon. I "*Oppgavediskursen*" tar Stieg Mellin-Olsen et oppgjør med den voldsomme fokuseringen på oppgaveregning som vi finner i matematikkundervisningen i norsk skole på alle alderstrinn. Her trekkes det frem at elever ofte regner oppgaver, uten å tenke så mye over hva de regner. De bedriver reproduksjon. Mange elever blir dessuten ganske taktiske: de finner etter hvert ut hva som kreves av dem, og gjør ofte ikke mer enn dette (Mellin-Olsen, 1996).

Anna Sfard er på sin side kritisk til idéen om læring med forståelse i startfasen av lære-prosessen. Hun knytter læring til deltagelse i et matematisk fellesskap, som hun kaller en matematisk diskurs. En slik matematisk diskurs er kjennetegnet ved begrunnede og aksepterte fortellinger, og bestemte former for rutiner (handlingsmønstre) som er knyttet til fortellingene. Når en elev møter et nytt stoff, vil eleven først individualisere dette stoffet gjennom ritualer i den aktuelle matematiske diskursen. Eleven forstår ofte ikke meningen med disse ritualene i starten. Men ved å delta i lignende situasjoner i den matematiske diskursen, kan eleven gradvis utvikle forståelse av lærestoffet. Det vil med Sfard sine begreper si at eleven har individualisert rutinen(e) knyttet til det aktuelle lærestoffet (Sfard, 2008). I tradisjonell oppgaveregning vil dette da innebære at elevene ikke nødvendigvis forstår det de regner på i starten når de skal lære et nytt emne. Men hvis de regner mange ulike typer oppgaver knyttet til samme emne, kan de gradvis utvikle en forståelse for emnet. I følge Sfard gjennomgår de da de tre fasene internalisering, kondensering og reifisering (se 2.2.1). Dette er i tråd med det Hattie & Yates hevder i de to sitatene over. Dette er også i overensstemmelse med prosedyrekunnskapen og begrepskunnskapen som Hiebert & Lefevre opererer med (se 2.4.3 og 2.4.4). Man kan ikke drille inn begrepskunnskaper. Men man kan drille inn prosedyre-kunnskaper. Det lineære mønsteret som slik kunnskap følger, gjør den velegnet til drill-oppgaver. Resultatet av slik oppgavedrilling vil i første omgang være løsrevede kunnskaps-biter. Ved en senere anledning kan imidlertid slike løsrevne kunnskapsbiter koples sammen. F.eks. ved å kople symbolene til virkelige objekter. De har da blitt en del av et kunnskaps-nettverk. Eleven har altså dannet en begrepskunnskap. Det som startet ut som isolerte prosedyrer kan altså i visse tilfeller gå over til en dypere forståelse (Hiebert & Lefevre, 1986).

Richard Skemp opererer med begrepet instrumentell forståelse, der elevene ser på matematikk som et sett med regler og algoritmer. Elevene kan bruke disse reglene og algoritmene til å komme frem til riktig svar på oppgaver, men de har ingen dypere forståelse av hvorfor reglene og algoritmene fungerer. Med Skemp sin terminologi vil det altså si at de ikke har en relasjonell forståelse (se 2.4.3). Kritikere av tradisjonell oppgaveregning hevder at en slik læringsmåte gir elevene en instrumentell forståelse. Skemp trekker frem fire ytre årsaker til at så mange elever lærer matematikk på en instrumentell måte:

1. *Backwash-effekten* (se 2.5.3) knyttet til eksamen. Dette kan gi både elever og lærer et kortsiktig fokus, der målsettingen blir å lære å løse bestemte typer oppgaver som man forventer blir gitt på eksamen.
2. Et *overveldende pensum*. Siden læreren har et stort press på seg for å "komme gjennom pensum", gjør stofftrengselen at klassen ikke får tid til å jobbe lenge nok med hvert emne til at elevene oppnår en relasjonell forståelse.
3. *Store undervisningsgrupper*. Det er praktisk talt umulig for læreren å avgjøre om en elev har en instrumentell eller en relasjonell forståelse i et emne, utelukkende basert på karakterer på en prøve. For å finne ut hvilken type forståelse de ulike elevene har, må læreren derfor snakke med hver enkelt elev. Dette er vanskelig å gjennomføre i praksis, når det kanskje er opp mot 30 elever i gruppen.
4. *Vanetenkning*. Det er psykologisk krevende for lærere å bryte med et etablert syn på hvordan matematikkundervisningen skal være. De har kanskje selv lært matematikk på en instrumentell måte som elev. Og som lærer har de kanskje mange kollegaer som

underviser instrumentelt. Kanskje har hele kulturen på skolen, inkludert skoleledelsen, et instrumentelt syn på undervisning (Skemp, 1978).

En utfordring som gjelder mange undervisningsformer, men kanskje særlig tradisjonell undervisning, er at matematikken presenteres som ferdig utviklede teorier. Guy Brousseau mener at elevene dermed går glipp av de, ofte langvarige, prosessene som historisk har ledet frem til de ulike matematiske teoriene. I tillegg presenteres ofte mange av de matematiske begrepene og setningene i en klasseromskontekst, som er helt annerledes enn den opprinnelige historiske konteksten matematikken ble utviklet i (Brousseau et al., 1997). Anna Sfard er inne på noe tilsvarende i 2.2.3. Tommy Dreyfus sier at lærere ofte serverer elevene "the polished formalism, which so often follows the sequence theorem-proof-application" (Dreyfus, 1991, s. 27) i stedet for å presentere matematikken som en utviklingsprosess. Fordelen med en slik presentasjonsform, er at matematikken kan presenteres for elevene på en strukturert og effektiv måte. Ulempen er at elevene risikerer å oppfatte matematikken som noe statisk. Og en slik manglende forståelse for matematikkens fleksibilitet, kan gjøre elevene ute av stand til å løse problemer som presenteres på en uvant måte (Dreyfus, 1991). Tradisjonell undervisning kan altså føre til at

> what most students learn in their mathematical courses is, to carry out a large number of standardized procedures, cast in precisely defined formalism, for obtaining answers to clearly delimited classes of exercise questions (Dreyfus, 1991, s. 28).

Og at elevene

> end up with considerable amount of mathematical knowledge but without the working methodology of the mathamatician, that is they lack the know-how that allows them to use their knowledge in a flexible manner to solve problems of a type unknown to them (Dreyfus, 1991, s. 28).

Morten Blomhøj refererer til Brousseau (1984) sitt begrep om *den didaktiske kontrakt*. Dette er en metafor for de relasjoner som oppstår mellom lærer og elever i et klasserom, og som regulerer de gjensidige oppfatninger, holdninger og forventninger elever og lærer har til hverandre. I tradisjonell undervisning vil den didaktiske kontrakten typisk innebære at

- læreren grundig gjennomgår metodene og algoritmene som presenteres i læreboken,
- læreren kun gir oppgaver som kan løses ved hjelp av verktøy som elevene har fått opplæring i på forhånd,
- oppgavene er løst når alle spørsmålene som inngår i oppgaven er besvart,

- løsningene på oppgavene består av korte svar, som f.eks. et tall, en figur eller til nød en setning,
- elevene har krav på en bedømmelse av læreren, når en oppgave er løst,
- elevenes læring kan bedømmes utelukkende ut fra om de klarer å løse oppgavene de får tildelt,
- elevene gjør sitt beste for å løse de tildelte oppgavene.

En slik didaktisk kontrakt vil ofte få både læreren og de fleste elevene til å føle seg trygge og veltilpassede i klasserommet. Hvis både lærer og elever overholder den didaktiske kontrakten gjennom et skoleår, fungerer kontrakten som en forsikring mot at fagets læringsprosjekt mislykkes. I alle fall for det store flertallet av elever. Ulempen med en slik tradisjonell didaktisk undervisningskontrakt er at den i liten grad setter elevene i stand til å takle uvante problemstillinger (Blomhøj, 1994). Vi ser her klare likhetstrekk mellom Blomhøjs didaktiske kontrakt i tradisjonell undervisning, og både Alrø & Skovsmoses og Dreyfus' beskrivelse av tradisjonell undervisning tidligere i dette delkapittelet. Paul Cobb kaller den didaktiske kontrakt for det sosiale perspektivet på matematikkundervisningen, og dette perspektivet består av sosiale normer i klasserommet, sosio-matematiske normer og matematiske praksiser i klasserommet (se 2.1.3.1). Min definisjon av læringsmåten tradisjonell oppgaveregning (jfr. 1.3.3) er i stor grad i overensstemmelse med den didaktiske kontrakten som Blomhøj her beskriver. Den viktigste forskjellen var lærerens rolle: i mitt derivasjonsprosjekt fungerte læreren som veileder, og ikke som underviser. Elevene fikk først og fremst tilbakemeldinger på oppgavene de jobbet med i form av fasitark, selv om det også forekom at læreren ga dem muntlige tilbakemeldinger.

2.4.2 Problemløsning

I følge Stanic & Kilpatrick (1988) kan vi skille mellom tre ulike tilnærminger til problem-løsning: problemløsning som innhold, som en kompetanse og som en kunstform. I den første tilnærmingen benyttes problemløsning som et virkemiddel for å oppnå andre mål. Stanic & Kilpatrick identifiserer fem slike kontekstkategorier. I det andre tilfellet er problemløsning én av mange matematiske kompetanser som man mener at elevene bør beherske. Problemløsning blir dermed ett av mange verktøy som eleven (etter hvert) har tilgjengelig (Schoenfeld, 1992). En slik forståelse av problemløsning innebærer gjerne at det ikke tar altfor lang tid å løse et problem. En elev rekker dermed å løse flere problemer i løpet av en skoletime.

Når det gjelder problemløsning som kunstform er Pólya et sentralt navn. Han sammenlignet det å lære seg å løse matematiske problemer med det å lære seg en kunstform, som f.eks. å spille piano. Man kan bli en dyktig problemløser ved å studere hvordan eksperter har løst problemer, dvs. gjennom imitasjon, og ved å øve på å løse problemer. Et reelt matematisk problem kan ta lang tid å løse, alt fra noen uker til flere år. Men uansett tidsbruk vil all ekte problemløsning i følge Pólya gjennomløpe fire faser:

1. Forstå problemet.
2. Lag en plan.
3. Gjennomfør planen.
4. Sjekk at problemet er løst (Pólya, 2009).

Pólya sine fire faser har klare paralleller til John Dewey, og hans "reflective inquiry" eller "reflective activity". Her lanserer han fem faser:

- *Antakelse* - en spontan idé om en mulig løsning.
- *Refleksjon* ("intellectualization") rundt problemet: hva er det som avgrenser det, og hva er det som hindrer videre fremdrift?
- *Hypotesedannelse* med utgangspunkt i vår første antakelse.
- *Resonnering*. For et problem som har en matematisk løsning hevder Dewey at

  > When the hypothesis indicated by a series of scientific observations and experiments can be stated in mathematical form, that idea can be transformed to almost any extent, until it assumes a form in which a problem can be dealt with most expeditiously and effectively (Dewey, 1933, s. 78).

- *Testing* av hypotesen gjennom handling - enten som direkte observasjon, eller som et eksperiment. Selv om testingen skulle gi et negativt resultat, har prosessen likevel gitt utforskeren verdifull lærdom. Ut fra denne lærdommen, og ved å foreta ytterligere observasjoner og justeringer, kan man se det opprinnelige problemet i et nytt lys, eller man kan stå overfor et nytt problem.

Disse fem fasene følger ikke en fast rekkefølge. Dewey skiller ellers mellom oppgave ("task") og *problem*. Sistnevnte kaller han

> a troubled, perplexed, trying situation, where the difficulty is, as it were, spread throughout the entire situation, infecting it as a whole (Dewey, 1933, s. 75).

Videre hevder han at problemet trer frem samtidig som vi ser en løsningsmulighet:

> a question well put is half answered. In fact, we know what the problem exactly is simultaneously with finding a way out and getting it resolved. Problem and solution stand

out completely at the same time (ibid.).

Pólya introduserte begrepet heuristikk i forbindelse med problemløsning. I Store norske leksikon defineres *heuristikk* som

> en enkel fremgangsmåte eller strategi som en problemløser kan ta i bruk for å øke sjansen til å løse en oppgave (Store norske leksikon, 2005-2007b).

NDLA[8] definerer heuristikk (de kaller det *heuristisk*) som

> En tommelfingerregel for å løse et spesifikt problem. Dette er steg for steg-prosedyrer som ikke er garantert å virke, men som virker egnet til å løse problemet, og er laget for å være en mulig prosedyre som kan brukes (ndla, 2016a).

Fan & Zhu benytter 17 heuristikker i en studie der de sammenlignet bruken av problem-løsningsstrategier i lærebøker i Kina, Singapore og USA. Noen eksempler på heuristikker fra denne studien er "Change your point of view", "Draw a diagram", "Guess and check", "Look for a pattern", "Make a table", "Restate the problem", "Simplify the problem", "Solve part of the problem", "Think of a related problem", "Use a model", "Use an equation" og "Work backwords" (Fan & Zhu, 2007).

Lesh & Zawojewski finner ingen forskning som viser at opplæring i heuristikker vil forbedre elevers evne til å løse problemer (Lesh & Zawojewski, 2007). Schoenfeld gjør for så vidt heller ikke det, men han kommer opp med en metode som han mener skal kunne benyttes til en systematisk opplæring av studenter i problemløsning. Han identifiserer fem egenskaper som en problemløser bør besitte: Kunnskapsbase, problemløsningsstrategier (heuristikker), selvregulering, tro eller overbevisning ("beliefs") og erfaring. Studentene må bli bevisst sine problemløsningsstrategier gjennom metakognisjon. Metakognitive strategier, sammen med selvregulering og overbevisning, skal gjøre studentene bedre i stand til å avgjøre når, hvorfor og hvordan ulike strategier og prosedyrer skal benyttes for å løse et problem. Selvregulering vil her si evne til å kontrollere og overvåke ("monitoring") egne prosesser (Schoenfeld, 1992). Lesh & Zawojewski hevder på sin side at en kort oversikt over heuristikker blir for generell til å fungere som en oppskrift for elevene. På den annen side vil en omfattende oversikt over strategier for å løse ulike typer problemer fort bli så overveldende at det blir vanskelig for elevene å bestemme når de skal benytte de ulike strategiene. Trekker man i tillegg inn

[8] NDLA står for Norwegian Digital Learning Arena, og er et åpent nettsted for digitale læringsressurser for fag i videregående skole. Nettstedet er blitt til gjennom et interfylkeskommunalt samarbeid. Prosjektet ble startet i 2007, og de første læringsressursene ble gjort tilgjengelige i skoleåret 2008-2009 (ndla, 2016b).

metakognisjon og overbevisning, vil det skape ytterligere vanskeligheter med å anvende problemløsning i klasserommet. De foreslår i stedet at Pólyas heuristikker tolkes som strategier for å reflektere over og forstå problemsituasjonen, mer enn som et hjelpemiddel for hva elevene skal gjøre når de "står fast" i problemløsningen (Lesh & Zawojewski, 2007).

I følge kognitiv belastningsteori[9], vil kompleksiteten som elever møter når de står overfor et problem, slik det er definert i 1.3.4, gjøre at de fort kan oppleve en overbelastning av arbeidsminnet når de skal forholde seg til alle detaljene som inngår i problemet samtidig. Bruk av heuristikker representerer store kognitive utfordringer for en matematisk nybegynner. Den indre kognitive belastningen kan i verste fall bli så stor at den kan være skadelig for elevens læringsutvikling (Merrienböer & Sweller, 2005). Hattie & Yates sier det slik

> Teaching someone a new skill and then expecting that person to immediately apply it within a new and complex situation is asking too much. Even if this person can struggle through, and solve the problem, the effort involved detracts from the overall knowledge-building process and can make further generalization less likely (Hattie & Yates, 2014, s. 152).

Forskning innen CLT finner tre mulige situasjoner der læring av matematikk ved hjelp av problemløsning kan fungere:

> Learning through solving problems becomes viable when the situation is simplistic or involves low levels of item interactivity - or when the ideas have become well understood

[9] Arbeidsminnet har begrensninger. Det kan holde på informasjon i ca. 20 sekunder. I følge George A. Miller (1956) kan arbeidsminnet bearbeide (huske) 7 ± 2 enheter på én gang. Kognitiv belastningsteori ("Cognitive Load Theory", CLT) ble utviklet tidlig på 1980-tallet, og bygger på Millers teorier. Fokus er å utforme instruksjonsbasert undervisningen på en slik måte at man reduserer unødvendig belastning på elevenes arbeidsminne (Merrienböer & Sweller, 2005).

Nyere forskning presentert av van Merrienböer, Sweller & Paas (1998) støtter Millers teori om begrensninger i arbeidsminnet i forhold til persepsjon (tolkning av sanseinntrykk). Ekspertise innen et fagfelt er relatert til kunnskap i langtidsminnet, ikke til evnen til å håndtere ny kunnskap som ikke er lagret som skjema i langtidsminnet. En ekspert organiserer komplekse sammenhenger som en helhet i ett skjema. Eksperten kan senere hente frem et slikt skjema fra langtidsminnet, og behandle det som én enhet i arbeidsminnet. Ut fra dette er det i teorien ingen begrensninger i hvor mye informasjon arbeidsminnet kan bearbeide fra langtidsminnet. Automatisering vil si at skjema hentes fra langtidsminnet og benyttes direkte herfra, uten å være innom arbeidsminnet. *Automatisering* kan oppnås ved at skjema anvendes jevnlig over tid. Både automatisering og evnen til å organisere kunnskap i helhetlige skjema reduserer således den kognitive belastningen til arbeidsminnet (ibid.).

CLT skiller mellom to typer kognitiv belastning:
- *Indre ("intrinsic") kognitiv belastning* - skyldes at mange enheter må håndteres av arbeidsminnet samtidig. Dette er knyttet til vanskelighetsgraden av det som skal læres. Og jo flere forbindelser det er mellom de ulike enhetene, jo vanskeligere er lærestoffet. og kan derfor ikke påvirkes av utformingen av læringsinstruksjonene.
- *Ytre ("extraneous") kognitiv belastning* - skyldes forhold som ikke er knyttet til selve læringen, og som derfor kan påvirkes av utformingen av læringsintruksjonene.

Disse to typene kognitiv belastning er additive, og utgjør til sammen den totale kognitive belastningen (ibid.).

(Hattie & Yates, 2014, s. 151).

Selv om elever kan utvikle sine problemløsningsevner ved å løse problemer på egen hånd, er det mer vanlig at de samarbeider for å løse slike problemer. Dette sosiale aspektet ved problemløsning understrekes av mange (Schoenfeld, 1992; Lesh & Zawojewski, 2007; NCTM, 2008). Det hevdes at hvis man skal bli en dyktig problemløser er det en fordel å delta i et matematisk fellesskap. Dette begrunner de i sosiokulturell læringsteori, slik den er beskrevet i 2.1.3. Sentralt i disse læringsteoriene står språket. Og språket er viktig i alle fire fasene som Pólya mener problemløsning består av. Kanskje særlig i den første fasen, når elevene skal beskrive, og forstå problemet. Gjennom alle fire fasene arbeider elevene dessuten med matematikk som er helt på grensen av hva de mestrer. De befinner seg i det Vygotsky i 2.1.2.1 kaller den proksimale utviklingssonen. Med henvisning til Lampert & Cobb (2003) kan vi si at elevene lærer seg matematikk gjennom deltakelse. De matematiserer og definerer begreper gjennom forhandlinger, slik som beskrevet i 2.1.3.1.

Forskere (Larkin, McDermott, Simon & Simon, 1980; Chi, Feltovich & Glaser, 1981; Silver, 1986) har funnet ut at eksperter som løser problemer benytter underliggende strukturer og begrepsmessige trekk ved problemstillingen, mens nybegynnere fokuserer mer på overfladiske trekk ved problemstillingen og på bestemte regler for symbolmanipulasjon (Hiebert & Lefevre, 1986). Anna Sfard understreker viktigheten av å starte med en overordnet tilnærming når man skal løse problemer. Hvis man gir seg i kast med konkrete operasjoner med en gang, vil man neppe komme langt. I stedet bør man først se på begrepene som inngår i problemet som abstrakte (reifiserte) objekter. Ved å benytte en slik strukturell tilnærming, vil man kunne få nødvendig oversikt over problemet, før man går over til å betrakte begrepene operasjonelt. Det er vanlig at man flere ganger underveis veksler mellom disse to måtene å betrakte begrepene på (Sfard, 1991). En ekspert bruker betydelig mer tid enn en nybegynner på å forstå problemet, men tilsvarende mindre tid på å løse det. Nybegynneren vil ofte kaste seg over en fremgangsmåte med en gang, og holde på denne gjennom hele prosessen. Selv når den ikke ser ut til å lede til noen løsning (Schoenfeld, 1992). Dvs. at nybegynneren i praksis hopper over de to første av Pólyas fire faser.

I følge NCTM er problemløsning en sentral del av matematikkopplæringen. Det er derfor viktig at matematikkundervisningen fra barnehage til videregående skole bør gjøre elevene i stand til å

- bygge ny matematisk kunnskap gjennom problemløsning.
- løse problemer som oppstår i matematikken og i andre sammenhenger.
- anvende og tilpasse et bredt utvalg av egnede strategier for å løse problemer.
- følge med på og reflektere over matematiske problemløsningsprosesser (mens de driver med problemløsning).

NCTM hevder også at problemløsning bidrar til å knytte forbindelser mellom ulike matematiske emner (NCTM, 2008).

På skriftlig eksamen i matematikk i videregående opplæring er matematikkompetansen delt inn i tre kategorier, og problemløsning er en av disse (se 2.5.1). Eksamensveiledningen gir en vid definisjon av et problem, som omfatter alt fra enkle, rutinemessige oppgaver til større, mer sammensatte problemer. I tillegg til å løse slike problemer, omfatter problemløsning her også modellering (dvs. å lage, ta i bruk og vurdere modeller), evnen til å vurdere bruk av hensikts-messige hjelpemidler (f.eks. digitale verktøy) og evnen til å vurdere et matematisk svar (Utdanningsdirektoratet, 2016c).

2.4.3 Aktiv memorering

I en oppfølgingsrapport til TIMSS Advanced 2008 trakk mange matematikklærere frem ordningen med at "alle" hjelpemidler var tillatt til eksamen (og dermed også til de fleste prøver), som en mulig forklaring på hvorfor norske elever gjorde det såpass dårlig innenfor området matematisk analyse (derivasjon og integrasjon). Dette gjorde det vanskelig for lærerne å motivere elevene til å lære seg definisjoner, formler og teknikker utenat (Grønmo et al., 2010). Norske matematikklærere vurderer altså det og aktivt memorere definisjoner, formler og teknikker som verdifullt. Likevel hevder elevene som var med i TIMSS Advanced 2008 at dette nesten aldri forekommer i undervisningen (ibid.). En forklaring på dette kan være at slik aktiv memorering er blitt koplet til manglende matematikkforståelse. Altså at elever med svak matematikkforståelse, kompenserer for dette med å lære seg metoder og fremgangsmåter utenat.

Hiebert & Lefevre skiller mellom begrepskunnskap og prosedyrekunnskap. *Prosedyre-kunnskap* består på den ene siden av språk og symbolske representasjoner (matematiske symboler), og på den andre siden av regler eller algoritmer for å utføre matematiske operasjoner. Det sistnevnte tilfellet omfatter steg-for-steg-prosedyrer for å løse ulike matematiske problemer. En type prosedyre er å omforme et symbolsk uttrykk i en gitt form til en annen form (et svar) ved hjelp av symbolmanipulasjon. Slike prosedyrekunnskaper opererer altså på symboler, og utgjør en ganske begrenset del av matematikkfaget. Men siden mange oppgaver i skolen følger et slikt mønster, er det viktig at elevene mestrer disse enklere prosedyrekunnskapene godt (Hiebert & Lefevre, 1986). Det er ofte slik prosedyrekunnskap som er gjenstand for memorering.

Richard Skemp skiller mellom relasjonell og instrumentell forståelse:

- *Relasjonell forståelse* vil si at elevene vet hvilke handlinger de bør utføre når de står overfor et gitt problem, og hvorfor. Noen fordeler er:
  – relasjonell matematikk er mer fleksibel, ved at den lett kan tilpasses nye problemstillinger.
  – relasjonell matematikk er lettere å huske, når man først har lært den. Men det tar lenger tid å lære matematikk relasjonelt, siden det er mer å kunne.
  – elevene blir mindre avhengig av ytre stimuli (belønning og straff) når de lærer matematikk relasjonelt, siden følelsen av økt forståelse fungerer som belønning i seg selv.
  – relasjonell forståelse er selvforsterkende, ved at følelsen elevene får når de oppnår økt forståelse, stimulerer elevene til å søke ytterligere forståelse.
- *Instrumentell forståelse* oppfatter Skemp (1978, s. 9) som "rules without reasons". En ulempe er at slik forståelse krever et stort antall regler, i stedet for et mindre antall prinsipper av mer generell karakter. Men selv om Skemp mener at målet med matematikkundervisningen bør være å gi elevene en relasjonell forståelse, underslår han likevel ikke at instrumentell matematikk kan ha noen fordeler:
  – elevene vil vanligvis lettere kunne forstå instrumentell matematikk innen et avgrenset emne.
  – elevene kan raskere oppleve en mestringsfølelse hvis de regner riktig, ved at de lett kan sjekke at svaret er korrekt.
  – elevene vil bruke kortere tid på å lære seg å regne sikkert, siden en instrumentell forståelse krever mindre kunnskaper (Skemp, 1978).

Kritikere av memorering vil gjerne hevde at denne læringsmåten fremmer en instrumentell forståelse fremfor en relasjonell forståelse. Utgangspunktet deres er da at relasjonell forståelse er ønskelig, mens instrumentell forståelse er uheldig. Og slik denne læringsmåten er definert i 1.3.4, kan elevenes læringsprosesser fort ende opp som instrumentell forståelse. Altså at elevene lærer seg regler, metoder og strategier, uten at det ligger noen grunnleggende matematisk forståelse bak. Dette gjelder også for den aktive delen, der elevene samler inn og diskuterer seg frem til fagstoffet de skal memorere.

Ett av kjennetegnene som skiller eksperter fra nybegynnere, er at eksperter på en fleksibel måte kan hente frem viktige aspekter fra sin kunnskap uten at de trenger å være oppmerksom på dette. I følge George A. Miller (1956) er det viktig å kunne hente frem kunnskap flytende (uten å måtte anstrenge seg) i forbindelse med problemløsning, fordi det er begrenset hvor mye informasjon en person kan ha oppmerksomhet rettet mot på én gang. En rekke forskere (LaBerge & Samuels, 1974; Anderson, 1981, 1982; Schneider & Shiffrin, 1985; Lesgold et al., 1988) har funnet ut at det som kjennetegner eksperter er at mange delprosesser i forbindelse med en problemløsning utføres automatisk (eller flytende). Ikke minst det å gjenkjenne hvilken type problem det er snakk om. Ved at slike delprosesser er automatiserte, frigjøres kapasitet slik at en person kan konsentrere seg om andre aspekter ved oppgaven (National Research Council, 2000). Dette poenget understrekes også i oppfølgingsrapporten til TIMSS Advanced 2008: "Målet med å automatisere visse ferdigheter er blant annet å frigjøre kognitiv kapasitet som kan brukes til å løse mer avanserte matematiske problemer." (Grønmo et al., 2010, s. 21). Aktiv memorering kan være en velegnet måte å øve opp automatisering av regler og algoritmer, og til å skaffe seg en (overfladisk) oversikt over et emne. I følge Hiebert & Lefevre vil effekten imidlertid bli større om man kan knytte mening til det man har memorert, slik at det blir en begrepskunnskap. Dette reduserer antall prosedyrer man må huske, og øker sannsynligheten for at en egnet prosedyre fremkalles og brukes på en effektiv måte (Hiebert & Lefevre, 1986). R1-elevene som deltok på derivasjonsprosjektet har lært ganske mange derivasjonsregler både i 1T og tidligere i R1. De mer avanserte reglene, som kjerneregelen, produktregelen og kvotientregelen, forutsetter at elevene kan kombinere flere ulike derivasjonsregler. For mange R1-elever kan nok en slik kombinering av regler være utfordrende. Ved å bevisstgjøre seg de derivasjonsreglene man brukte i R1, og ved å memorere disse, kunne kanskje elevene som jobbet med aktiv memorering bli mer effektiv i bruken av derivasjonsreglene ved at disse i større grad automatiseres. Men også prosedyrer knyttet til anvendelse av derivasjon kan i større grad automatiseres, gjennom bevisstgjøring og memorering.

2.4.4 Begrepslæring

Dette er den læringsmåten som kun ble benyttet i pilotundersøkelsen, og som ikke ble med videre i det endelige derivasjonsprosjektet (jfr. 3.2). Jeg har likevel valgt å ta denne læringsmåten med her, for å gi en komplett fremstilling av alle læringsmåtene som var aktuelle i denne masteroppgaven.

Matematiske begreper er knyttet til språk, eller det Sierpinska (2005) i 2.2 over kaller "artificial languages and other sign systems". I 2.1.2.1 definerer Vygotsky begrepsdannelse som en målrettet aktivitet som er avhengig av språklig mediering. I vårt tilfelle er det snakk om det Vygotsky kaller vitenskapelig begrepsdannelse. I 2.2.1 hevder Sfard (1991) at matematiske begreper ofte refererer til både et objekt og en prosess. Videre hevder hun at matematisk begrepsdannelse historisk sett gjennomløper tre faser med gradvis strukturalisering: internalisering, kondensering og til slutt reifisering. Med referanse til Piaget, der barn lærer nye fenomener ved å utføre handlinger på fenomenet, mener hun at elevene går gjennom de samme tre fasene når de lærer seg matematiske begreper. Sfard (2008) tenker seg at utviklingen av et begrep foregår i fire trinn, avhengig av hvordan eleven bruker begrepet: passiv bruk, rutinepreget bruk (handlinger), frasepreget bruk (kommunikasjon) og til slutt objektpreget bruk. En elev som benytter et begrep som om det er et objekt, vil ha det Skemp kaller en relasjonell forståelse (se 2.4.3). Sfard sine teorier om begrepsdannelse kan sies å være en videreutvikling av Bruners teori om kognitive representasjonsnivåer, slik den er beskrevet i 2.1.1.2.

Når elever møter et matematisk begrep første gang, vil de typisk få dette begrepet presentert som en definisjon. Elevene vil da gjerne starte en prosess, der de konstruerer et bilde av dette matematiske begrepet (jfr. Piaget i 2.1.1.2). Dette begrepsbildet kan være en visuell representasjon av begrepet, eller det kan være en rekke inntrykk eller erfaringer som knyttes sammen. Før elevene har dannet et slikt begrepsbilde av det aktuelle begrepet, er dette begrepet kun bruddstykker av symboler og ord gitt av definisjonen. Det er først når elevene har dannet seg begrepsbilder av begrepet at de virkelig har forstått det. Når begrepsbildet er blitt dannet, vil definisjonen bli overflødig. Vi kan si at definisjonen har fungert som et slags "stillas" for eleven (jfr. Vygotsky, og "scaffolding", i 2.1.2.1), inntil eleven har dannet sitt eget begrepsbilde (Vinner, 1991).

Som nevnt i 2.4.3 skiller Hiebert & Lefevre skiller mellom begrepskunnskap og prosedyre-kunnskap. *Begrepskunnskap* består av et nettverk av relasjoner mellom kunnskap. Slik kunnskap konstrueres som relasjoner mellom kunnskapsbiter. Dette kan enten være biter av kunnskap som man allerede besitter, eller det kan være nye biter av informasjon som relateres til eksisterende kunnskapsbiter. I det sistnevnte tilfellet sier vi at det har skjedd læring med forståelse, og et eksempel på slik læring er Bruners *Learning by discovery*. Prosessen involverer det Piaget kalte assimilasjon, der den nye informasjonen blir en del av et kunnskapsnettverk. Ved å knytte begrepskunnskapen til matematiske symboler og/eller algoritmer (altså prosedyrekunnskap), kan dette hjelpe til med å organisere og utnytte begrepskunnskapen, slik at denne blir mer anvendelig (Hiebert & Lefevre, 1986).

Forskning (Gamoran, 2001; Hiebert, 2003; National Research Council, 2001) tyder på at elever utvikler matematisk begrepsforståelse, hvis lærere fokuserer eksplisitt på å lære elevene slik begrepsforståelse i sin undervisning. I følge Brophy (1999) kjennetegnes slik undervisning av sammenhengende og strukturerte diskusjoner om grunnleggende matematiske idéer, der elevene blant annet utfordres til å søke den matematiske forståelsen som ligger til grunn for de ulike fremgangsmåtene de benytter, vurdere ulike løsnings-strategier, se sammenhengen mellom ulike matematiske begreper og studere hvordan ulike matematiske problemstillinger forholder seg til hverandre (Hiebert & Grouws, 2007).

Annen forskning (Brown, 1993; Festinger, 1957; Hatano, 1988; Silver & Stein, 1996) vektlegger at det å forstå nye matematiske begreper er strevsomt for elevene. Men i følge Dewey (1910, 1926, 1929) er det nettopp dette strevet som gir elevene en dypere forståelse av de matematiske begrepene. Dewey kritiserer den tradisjonelle, instruksjonsbaserte under-visningen for å fremme raske svar på problemene, og dermed frata elevene muligheten til å tenke grundig gjennom begrepene som inngår i problemene. Polyá (1957) var også opptatt av viktigheten av å lære elevene å holde ut i sin streben etter å løse problemer. Slitet som kreves for å oppnå ny, og dypere innsikt, skyldes at elevene arbeider med problemer helt på grensen av hva de kan mestre; de befinner seg i det Vygotsky kalte den proksimale utviklingssonen. Men slitet er også i tråd med Piagets teorier. Før elevene oppnår ny innsikt, opplever de en kognitiv konflikt, som løses ved akkomodasjon (ibid.).

Videre viser forskning (Boaler, 1998; Fawcett, 1938; Fuson & Briars, 1990; Good et al., 1983; Hiebert & Wearne, 1993; Stein & Lane, 1996) at undervisning som fremmer begrepsforståelse, også fremmer dyktighet i matematiske ferdigheter (ibid.). Dette siste kaller Hiebert & Lefevre prosedyrekunnskap.

2.5 Læringsutbytte

Læringsutbytte er et komplekst begrep. Theodore Eisenberg refererer til Sinclaire (1987), som hevder at det er umulig å observere den kontinuerlige kognitive utviklingen til en elev. Man kan kun observere statiske tilstander. Og det man observerer er de fremkalte begrepsbildene som eleven gir uttrykk for, enten skriftlig eller muntlig (Eisenberg, 1991). I oppfølgings-rapporten til TIMSS Advanced 2008 trekker de frem formål, innhold og form som vesentlige elementer i vurderingen (Grønmo et al., 2010). Sentrale spørsmål er altså: Hva er hensikten med vurderingen? Hva skal måles, og hvordan skal dette måles? Og hva blir eventuelt konsekvensene av slike målinger? Dette er noe av det jeg forsøker å gjøre rede for i dette delkapittelet.

Det finnes mange definisjoner av læringsutbytte. Tine Prøitz trekker i den forbindelse frem behavioristen Gagné (1974) og den sosiale konstruktivisten Elliot Eisner (1979) som to ytterpunkter. Gagné opererer med et resultatorientert læringsutbytte, som er endelig og målbart, mens Eisner karakteriserer læringsutbytte som prosessorientert, åpent og med begrenset målbarhet. Videre hevder Eisner at læringsutbytte avhenger delvis av eleven, delvis av faget og delvis av læreren. Prøitz fant i sin studie av artikler om læringsutbytte skrevet av forskere med skole som forskningsfelt at Gagné sin definisjon representerte det etablerte synet, mens Eisner sin definisjon representerte et alternativ syn. Den alternative definisjonen var ofte et resultat av kritikk av den etablerte definisjonen (Prøitz, 2010).

2.5.1 Kompetansemål

Historisk har undervisning bestått av et sett med instruksjoner, og formålet med undervisningen har enten vært å øke elevenes ferdigheter eller å øke deres forståelse. Thorndike og Gagné kan sies å være representanter for det førstnevnte formål, mens Dewey og Bruner kan sies å representere det sistnevnte formål (Hiebert & Lefevre, 1986). I dag fremstår dette som et kunstig skille, siden kompetansemålene i Kunnskapsløftet krever både ferdigheter og forståelse av elevene.

I videregående opplæring er matematikkompetansen delt i tre kategorier:

- Begreper og ferdigheter
- Problemløsning og modellering
- Kommunikasjon

Kjennetegnene på høy grad av måloppnåelse for hver av de tre kategoriene er vist i tabellen nedenfor (Utdanningsdirektoratet, 2016d).

Kategori	Kjennetegn
Begreper og ferdigheter	Eleven – bruker representasjoner for matematiske objekter og størrelser, velger en hensiktsmessig representasjon, systematiserer og bruker sammenhenger mellom dem – bruker, forklarer og drøfter sammenhengen mellom et bredt spekter av matematiske begreper med et matematisk språk – gjør og vurderer rimeligheten av overslag, lager og vurderer skisser, tegninger og konstruksjoner, måler og regner med/mellom størrelser – bruker regneoperasjoner, både egne og standardiserte metoder, fremgangsmåter og formler på en fleksibel måte, utnytter kunnskap om sammenhengen mellom metoder
Problemløsning og modellering	Eleven – analyserer tekster, situasjoner og mønstre og formulerer matematiske problemstillinger til praktiske situasjoner, matematiserer situasjonen og formulerer en modell – finner relevant informasjon, vurderer, velger og beskriver fordeler og ulemper ved ulike fremgangsmåter, gjennomfører løsninger i flere trinn på en sikker måte – analyserer og løser sammensatte teoretiske og praktiske problemer, viser kreativitet og sikkerhet i metodevalg – begrunner og avgjør om et svar er rimelig – bruker hjelpemidler på en fleksibel og hensiktsmessig måte
Kommunikasjon	Eleven

	– følger og gjør rede for egne og andres instruksjoner og forklaringer – uttrykker seg skriftlig og muntlig ved å velge mellom formelle og uformelle uttrykksformer, bruker matematiske begreper og matematisk symbolspråk og fagterminologi på en sikker måte – bruker digitale hjelpemidler på en sikker måte – gjengir, forklarer og vurderer egne og andres resonnement og tankegang – forklarer sikkert matematiske sammenhenger og gjennomfører matematiske argumentasjoner – presenterer løsninger på en oversiktlig og hensiktsmessig måte ved hjelp av et klart matematisk formspråk

Ulike sider ved derivasjon (jfr. 2.3) vil kunne komme inn under de ulike punktene som er presentert i tabellen over. Dette gjaldt også for mitt derivasjonsprosjekt, med unntak for modellering, som ble vurdert til å være for tidkrevende for mitt intensive prosjekt.

2.5.2 Måling av læringsutbytte

I følge Store Norske Leksikon er *vurdering* i pedagogisk sammenheng en bedømmelse av en elevs læringsprosess og læringsresultater. Vurderingen skjer i forhold til en referanse. I videregående skole benyttes *målorientert vurdering*, der elevens prestasjoner bedømmes opp mot kompetansemål. Vi skiller mellom *summativ vurdering*, som måler hvor langt eleven har nådd i forhold til kompetansemålene, og *formativ vurdering*, som har til hensikt å gi eleven en veiledning i hvordan hun eller han kan utvikle seg videre (Store norske leksikon, 2005-2007c). Formativ vurdering følger tre trinn: Først en monitorering, så en diagnostisering og til slutt en tilbakemelding. En slik formativ vurdering trenger ikke utføres av læreren. En elev kan med fordel vurdere både seg selv, og sine medelever. Dette kan bidra til å involvere elevene mer i læringsprosessene, og til å gi elevene et eierforhold til sin egen læring. Gjennom metakognisjon og selvregulering kan eleven ta kontroll over egen læringsprosess, og egenvurdering er et viktig virkemiddel for å oppnå dette (William, 2007).

I nyere tid har det blitt vanlig å snakke om *vurdering av læring* i stedet for summativ vurdering, og *vurdering for læring* i stedet for formativ vurdering. Vurdering av læring er vanligvis lærerstyrt, foregår på bestemte tidspunkter, benytter sammenlignbare størrelser for måloppnåelse og er kontekstuavhengig. Ved vurdering for læring er alle disse kjennetegnene, om ikke omvendte, så i alle fall betydelig svekket (Dobson et al., 2009). Samme vurderingsform kan imidlertid benyttes både som vurdering av læring og vurdering for læring. Det er formålet som da avgjør hvilken type vurdering det er snakk om. Et eksempel på dette er TIMSS, som både kan benyttes til å sammenligne og rangere land, men som også kan gi informasjon om hvordan et land kan forbedre læringen (Grønmo et al., 2010). I forbindelse med vurdering for læring, opereres det av og til med begrepet *vurdering som læring*. Dvs. at vurderingen er en integrert del av læringsprosessen. Vurderingen er da gjerne en interaktiv prosess, der læreren fortløpende kan finne ut om elevene har lært som er blitt undervist (William, 2007). NCTM er også opptatt av at vurderingen skal fremme læring. Deres andre av 6 prinsipper som de lanserte i 1995, og som de mener bør ligger til grunn for all vurdering, er at vurdering skal forsterke matematisk læring (NCTM, 2008).

I norsk skole skiller man mellom underveisvurdering og sluttvurdering. *Sluttvurdering* er et mål på elevens kompetanse etter endt opplæring (dvs. vurdering av læring), mens *underveisvurdering* er vurdering for læring. Til grunn for underveisvurderingen ligger følgende fire prinsipper: Elevene og lærlingene skal

1. forstå hva de skal lære og hva som er forventet av dem.
2. få tilbakemeldinger om kvaliteten på arbeidet eller prestasjonen.
3. få råd om hvordan de kan forbedre seg.
4. vurdere eget arbeid og utvikling (Utdanningsdirektoratet, 2016e).

Vi skiller også mellom *formell vurdering* og *uformell vurdering*. Førstnevnte vurdering er ofte en karakter som gis på bakgrunn av en faglig prestasjon på en prøve. I teorien skal en slik karakter være uavhengig av den som vurderer. Da kalles det en *objektiv vurdering*. Uformell vurdering er ofte en muntlig tilbakemelding på det daglige arbeidet, og omfatter gjerne mer enn det rent faglige. Den som vurderer har stor mulighet til å bruke eget skjønn. Dette kalles derfor gjerne for *subjektiv vurdering* (Gundem, 1991).

Vurderingens *validitet* dreier seg om vurderingsverktøyet faktisk måler det vi ønsker å måle. Altså om det er samsvar mellom vurderingens verdisetting og kriteriene for måloppnåelse. Verken mål eller vurderingskriterier er nøytrale størrelser, men har en verdiforankring knyttet til lærings- og kunnskapssyn. Flere forskere (Dysthe & Engelsen, 2003; Eggen, 2004; Gardner, 2006; Greeno, Collins & Resnick, 1996) kopler vurdering av læring til behavioristiske læringssyn og vurdering for læring til kognitive og sosialkonstruktivistiske læringssyn. Læringssyn vil dermed kunne få konsekvenser for gyldighetskrav (A. B. Eggen, i Dobson et al., 2009).

Ofte benytter man et utvidet gyldighetsbegrep. Da foretar man en tredeling av validitets-begrepet. *Innholdsvaliditet* handler om hva som skal vurderes, og er i undervisnings-sammenheng knyttet til læreplanmål. *Ytre validitet* dreier seg om generaliserbarhet, og er knyttet til kontekst. Det vil si hvorvidt vurderingen vi gjør i én sammenheng, er gyldige i andre sammenhenger. *Konsekvensvaliditet* har å gjøre med hvilke implikasjoner vurderingen har for individet som blir vurdert, og for samfunnet (ibid.).

Vurderingens *reliabilitet* er knyttet til selve vurderingsprosessen; altså i hvor stor grad vurderingens verdisetting er avhengig av den som utfører vurderingen. Dette avhenger i sin tur av hvor stort skjønn den som vurderer har i vurderingsprosessen, der grad av skjønn og reliabilitet er omvendt korrelert. Pålitelighet i pedagogisk praksis er også knyttet til tidligere vurderinger. Man må altså kunne dokumentere pålitelige vurderinger over tid (ibid.). Dette var svært viktig i mine tester, siden jeg benyttet åpne oppgaver, som krevde bruk av skjønn når jeg rettet disse testene.

2.5.3 Konsekvenser av vurdering

I Delta defineres *backwash-effekten* som evalueringens tilbakevirkende kraft på faget, undervisningen og elevenes selvoppfatning i forhold til matematikk. Clarke (1997) og William (2007) finner en negativ effekt på elevenes læringsutbytte som følge av backwash-effekten, hvis det benyttes en kvantitativ størrelse (f.eks. en karakter eller en poengsum) som tilbakemelding på en test eller en prøve (Skott et al., 2015). Andre forskere (Langfeldt et al., 2008; Engh, 1996; Stobart, 2008) har påvist at utstrakt bruk av testing fører til en såkalt "*teach to test*"-effekt, der det som vektlegges på testene blir prioritert i undervisningen, på bekostning av andre, mindre kvantifiserbare læringsmål (R. Engh, i Dobson et al., 2009).

Men backwash-effekten gir også muligheter for å styre hvilken del av matematikken som bør vektlegges. Kari Smith hevder at eksamen "blir som en slags bakgrunnslæreplan, og det blir til syvende og sist den som driver mye av undervisningen og læringen som finner sted i de fleste utdanningskontekster" (Smith, 2009, s. 85). Lundgren (2006, s. 12) hevder at "curricula are now expressed in terms of evaluation" (A. B. Eggen, i Dobson et al., 2009). Utformingen av skriftlig eksamen vil således kunne fungere som et styringsverktøy for skolemyndighetene i Norge, dersom de ønsker å endre undervisningspraksisen ved videregående skoler. Læreren har tilsvarende muligheter til å styre hva elevene vil oppfatte som viktig i matematikken gjennom de oppgavene som gis på prøver og tester. Dette siste mener NCTM det er viktig at læreren er bevisst på i planleggingen av hvilke oppgaver som skal inngå i en vurderings-situasjon. De mener at dette faktisk er så viktig at det inngår som det første av de seks prinsippene som de hevder bør ligge til grunn for all vurdering i matematikk (NCTM, 2008). Da elevene ble presentert for derivasjonsprosjektet, ble de samtidig informert i et eget skriv (se 7.1) om at jeg hadde delt derivasjon inn i tre; nemlig i regelbruk, anvendelse og problem-løsning, og at de ville jobbe i en dobbelttime med hver del (minus tiden som gikk med til å gjennomføre testene). Oppgavene på testene ble også delt inn på samme måte, men dette fikk elevene ikke vite på forhånd. Her var det meningen at backwash-effekten skulle slå inn, og at elevene skulle oppdage dette på egen hånd i løpet av prosjektperioden.

3. Metode

På slutten av 1970-tallet ble det gjennomført et større prosjekt i USA, kalt "*The Missouri Mathematics Effectiveness Project*", der forskerne ønsket å finne ut om de kunne forbedre læringsutbyttet i matematikk for elever i 4. klasse ved å la utvalgte lærere følge en bestemt undervisningsmetode som skulle fremme læring med forståelse. Lærerne ble delt i to grupper. Lærerne i den ene kontrollgruppen underviste slik de pleide, mens lærerne i den andre gruppen underviste ut fra et nøye utformet instruksjonssett som var utarbeidet av forskerne. Resultatene fra prosjektet kunne tyde på at det instruksjonsbaserte undervisningsopplegget som forskerne ønsket å teste ut ga et signifikant større læringsutbytte sammenlignet med kontrollgruppene. Men det var vanskelig å identifisere akkurat hvilke deler av den alternative undervisningsmetoden som forårsaket det økte læringsutbyttet (Good & Grouws, 1979). Dette prosjektet dannet et idémessig utgangspunkt for mitt metodevalg.

Senere har Grouws, sammen med Hiebert, kommet til at det er svært vanskelig å undersøke sammenhengen mellom undervisning og læring. Til tross for over 100 år med forskning hevder de at forskningsmiljøet fremdeles har til gode, på en pålitelig måte å kunne presentere gjennomførbare undervisningsmetoder som "garanterer" optimal læring. Forskerne spriker i sine anbefalinger, og også i sin tro på at det i det hele tatt er mulig å finne en slik "beste metode" (Hiebert & Grouws, 2007). Målet med mitt forskningsprosjekt var ikke å finne den optimale metode for matematikkfaget som sådan, men å undersøke om to alternative læringsmåter kunne gi et bedre læringsutbytte enn tradisjonell oppgaveregning innen et avgrenset område av matematikken - nærmere bestemt innen derivasjon.

Undervisning består av mange deler som virker sammen i et system. Dette samspillet gjør det vanskelig å studere avgrensede deler av undervisningen. Ulike undervisningsmetoder kan være effektive for ulike læringsmål, og læringsutbyttet avhenger av medierende faktorer i undervisningen. I tillegg er det veldig mange faktorer utenfor klasserommet som påvirker læringsutbyttet til den enkelte elev. Det er også vanskelig å finne gode indikatorer på læring (ibid.). Utfordringene med å kople læringsutbytte til undervisningsmetode gjorde at jeg i stedet valgte å konsentrere meg om en mer avgrenset del av læringsprosessen; nemlig elevenes egenaktivitet. Jeg ønsket å sammenligne læringsutbyttet når elevene arbeidet på ulike måter med lærestoffet på - altså med det jeg har valgt å kalle ulike læringsmåter, jfr. definisjonen i 1.3.1. Faglærerne har dermed ikke hatt noen undervisningsrolle i tradisjonell forstand i mitt derivasjonsprosjekt. Elevene forsøkte å løse oppgaver jeg hadde laget til dem, og faglærernes rolle var begrenset til å veilede elever som ønsket hjelp med å løse disse oppgavene. Dette var en vesentlig forskjell ved mitt prosjekt, sammenlignet med prosjektet nevnt i første avsnitt.

Jeg har benyttet meg av to indikatorer i forsøket på å måle eventuelt økt læringsutbytte hos elevene som deltok på derivasjonsprosjektet: en kvantitativ forbedring av testresultater (poengsum), og en kvalitativ (subjektiv) opplevelse av at forståelsen av derivasjon har økt (se 1.3.2). For å kunne si noe om endringen av læringsutbyttet, må man ha et sammenlignings-grunnlag. Det ble derfor valgt ut en kontrollgruppe i hver av R1-gruppene som var med på prosjektet. Elevene i kontrollgruppen jobbet med derivasjon omtrent som de pleide - dvs. ved tradisjonell oppgaveregning, slik jeg har definert det i 1.3.3. Det var med andre ord en forutsetning for de R1-gruppene som var med i undersøkelsen at matematikkundervisningen stort sett foregikk på ganske tradisjonelt vis - altså i tråd med Blomhøjs didaktiske kontrakt i tradisjonell undervisning beskrevet i 2.4.1. At dette faktisk var tilfellet forsikret jeg meg om i samtaler med hver enkelt faglærer i forkant av prosjektet.

Samtlige R1-grupper som deltok, hadde jobbet seg gjennom det meste av pensum i derivasjon i forkant av prosjektet ved å benytte tradisjonell oppgaveregning. Elevene skulle dermed være kjent både med derivasjonsbegrepet, de aktuelle derivasjonsreglene og standard metoder i forbindelse med funksjonsdrøfting og optimering når de startet opp med prosjektet. Mitt valg om å la elevene gjøre seg kjent med de sentrale sidene av derivasjon i R1 før prosjektet startet, skyldtes begrensninger i tidsrammen. Hvis elevene skulle hatt opplæring i derivasjon slik læreplanen i R1 forutsetter (jfr. 3.1.1), måtte jeg hatt betydelig mer tid til disposisjon enn de 3 dobbelttimene jeg hadde fått.

Prosjektet gikk over 3 etterfølgende dobbelttimer. Årsaken til at jeg begrenset opplegget til 3 dobbelttimer var at dette ville øke sjansene for at aktuelle R1-lærere ville stille seg positive til å være med på forskningsprosjektet. R1-lærerne har et ganske stramt tidsskjema med tanke på å gjennomgå pensum, gjennomføre sluttvurdering og forberede elevene til eksamen. Basert på egen erfaring med eksterne henvendelser om å få "låne" mine elever til diverse prosjekter, vurderte jeg det som svært vanskelig å få R1-lærere til å avse mer enn 3 dobbelttimer. Dette skulle vise seg å bli en ganske treffsikker vurdering.

To av R1-gruppene som var med på prosjektet benyttet læreverket "*Matematikk R1*" fra Aschehoug, mens de andre gruppene brukte "*Sinus R1 Matematikk*" fra Cappelen Damm. Øvingsoppgavene som ble benyttet under derivasjonsprosjektet ligger vedlagt (se 7.4).

3.1 Metodevalg

Jeg har benyttet meg av metode-triangulering eller "mixed methods", der både kvantitative og kvalitative metoder inngikk i innsamlingen av dataene (Danielsen, 2013). "Mixed methods" er velegnet når man skal undersøke komplekse fenomener, der en kombinasjon av kvantitative og kvalitative undersøkelser gir en bedre forståelse av fenomenet enn om man kun benytter én av de to metodene (Cresswell, 2012). I innledningen til dette kapittelet påpeker Hiebert & Grouws at det er vanskelig å undersøke sammenhengen mellom undervisning og læring. Og som det fremkommer i 2.5, er læringsutbytte et komplekst begrep. Formålet med derivasjons-prosjektet var at elevene skulle få en bedre forståelse for derivasjonsbegrepet. Men som Tommy Dreyfus sier: "What it means to come to understand a mathematical notion or concept is extremely difficult to analyze." (Dreyfus, 1991, s. 25). Det var altså utfordrende å avgrense både hva som skulle måles, og hvordan dette skulle måles. Disse utfordringene var bakgrunnen for mitt valg av metode.

En ren kvantitativ undersøkelse vil ikke nødvendigvis avdekke økt læringsutbytte hos den enkelte elev. Ofte vil man forvente at økt læringsutbytte vil manifestere seg som bedre prestasjoner på en relevant test. Men dette trenger ikke være tilfelle. Det er f.eks. mulig å få en bedre forståelse for derivasjonsbegrepet, uten at denne økte forståelsen fører til at man blir bedre i stand til å løse spesifikke oppgaver. I et forsøk på å komme denne utfordringen til livs, valgte jeg derfor å la de kvantitative undersøkelsene være to-delte. I løpet av det intensive derivasjonsprosjektet gjennomførte elevene tre "objektive", faglige tester for å kartlegge hvordan de presterte på typiske derivasjonsproblemer - én for hver dobbelttime. I etterkant av derivasjonsprosjektet, ble det så foretatt en spørreundersøkelse for å kartlegge elevenes subjektive opplevelser av endringer i læringsutbyttet. Her var det ikke alltid samsvar mellom de "objektive" og de subjektive resultatene. Et utvalg av elever som hadde et slikt manglende samsvar, ble valgt ut til intervju for å undersøke nærmere hva dette avviket kunne skyldes. En tid etter at derivasjonsprosjektet var avsluttet, gjennomførte jeg to posttester.

De kvantitative dataene ble kategorisert. Jeg benyttet en poengsum for hver av de fem testene. I tillegg innførte jeg en kategori som jeg kalte Sum_Tot, som var den samlede poengsummen på de tre testene under derivasjonsprosjektet og den siste posttesten. Spørreundersøkelsen ble kategorisert etter de ni spørsmålene. I tillegg benyttet jeg meg av kategoriene kjønn, skole og gruppe.

Den kvalitative undersøkelsen bestod av intervjuer av utvalgte elever - et såkalt kriteriebasert utvalg (Christoffersen & Johannessen, 2012). Testene og spørreundersøkelsen var designet for å gi meg både en "objektiv" og en subjektiv tilbakemelding på læringsutbyttet av derivasjons-prosjektet. Men en slik kvantitativ oversikt vil nødvendigvis måtte bli noe overfladisk. For å få en mer mangefasettert, og kanskje også dypere, innsikt i hvordan elevene opplevde å være med på dette prosjektet, måtte jeg benytte meg av en mer kvalitativ metode. Et intervju i etterkant av prosjektet ville kunne gi meg en slik innsikt. Jeg har med andre ord benyttet det Cresswell kaller for "embedded design", der data fra den kvalitative undersøkelsen støtter opp om, og gir tilleggsinformasjon til, dataene fra de to kvantitative undersøkelsene (Cresswell, 2012).

Datainnsamlingen ble gjennomført i følgende kronologiske rekkefølge:

$$\text{Test1} \rightarrow \text{Test2} \rightarrow \text{Test3} \rightarrow \text{Spørreundersøkelse} \rightarrow \text{Intervju} \rightarrow \text{Test4} \rightarrow \text{Test5}$$

der Test1-Test3 ble utført i løpet av derivasjonsprosjektet, og Test4 og Test5 var posttester.

3.1.1 Faglige tester

I læreplanen i matematikk R1 er fem av kompetansemålene for funksjoner aktuelle her:

- gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare
- bruke formler for den deriverte til potens-, eksponential- og logaritmefunksjoner, og derivere summer, differanser, produkter, kvotienter og sammensetninger av disse funksjonene
- bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte forløpet til funksjoner og tolke de deriverte i modeller av praktiske situasjoner

– tegne grafer til funksjoner med og uten digitale hjelpemidler, og tolke grunnleggende egenskaper til en funksjon ved hjelp av grafen
– bruke vektorfunksjoner med parameterfremstilling for en kurve i planet, tegne kurven og derivere vektorfunksjonen for å finne fart og akselerasjon

(Utdanningsdirektoratet, 2016f).
Det siste punktet var ikke gjennomgått av alle de sju R1-gruppene på det tidspunktet prosjektet ble gjennomført. Dette temaet ble derfor ikke tatt med på noen av testene.

Siden alt pensum i matematikk 1T som er relevant for matematikk R1 også er pensum i R1, er tre av kompetansemålene for funksjoner fra 1T også aktuelle her:

– beregne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjæringspunkt og gjennomsnittlig vekstfart, finne tilnærmede verdier for momentan vekstfart og gi noen praktiske tolkninger av disse aspektene
– gjøre rede for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utlede en derivasjonsregel for polynomfunksjoner og bruke denne regelen til å drøfte funksjoner
– bruke digitale verktøy til å fremstille og analysere kombinasjoner av polynom-funksjoner, rotfunksjoner, rasjonale funksjoner, eksponentialfunksjoner og potens-funksjoner

Jeg har oversatt kompetansemålene i 1T fra nynorsk til bokmål (Utdanningsdirektoratet, 2016g).

Med bakgrunn i hvordan de ulike læreverkene presenterte derivasjon i matematikk R1, og ut fra hvilke problemer knyttet til derivasjon som gikk igjen på eksamen i R1, valgte jeg å dele inn derivasjon i tre områder:

- Bruk av derivasjonsregler - innebærer å benytte både enklere og mer avanserte derivasjonsregler på ferdigoppstilte oppgaver.
- Anvendelse av derivasjon - det vil her si funksjonsdrøfting og enkel optimering.
- Problemløsning - som vil si å løse problemer i tråd med definisjonen i 1.3.5.

Testene bestod av oppgaver fra hvert av disse tre områdene. Derivasjonsoppgaver som var gitt ved tidligere skriftlige eksamener i R1 fungerte som mal da jeg utformet oppgavene på testene. Dette sikret både kvalitet og relevans. Det siste var viktig da jeg skulle overbevise R1-lærerne om at klassene ville profittere på å være med på derivasjonsprosjektet. Og siden

R1-lærere gjerne har en tendens til å se til eksamen når de utformer prøvene sine (jfr. backwash-effekten omtalt i 2.5.3), ville dette dessuten øke sannsynligheten for at elevene ville være fortrolige med oppgavetypene på testene. En slik fortrolighet var viktig for at elevene på de alternative gruppene skulle kunne prestere på testene, siden de jobbet med en annen type oppgaver i innlæringen før testene. For elevene på kontrollgruppene var ikke en slik fortrolighet like viktig, da de jobbet med en liknende type oppgaver som de fikk på testene.

Det ble gjennomført en test på slutten av hver av de tre dobbelttimene, og alle elevene tok de samme testene. Hver test varte i 40 minutter. I tillegg til disse 3 testene, ble det gjennomført to uforberedt posttester; én like før sommerferien, og én kort tid etterpå. Elevene skrev navnene sine på testene. Alle de fem testene hadde like mange poeng, slik at det skulle være lettere å avdekke mulige trender underveis. Faglærerne i R1-gruppene som var med på derivasjonsprosjektet administrerte gjennomføringen av testene. Testene var utformet slik at elevene måtte forholde seg til ulike representasjoner av den deriverte, slik som beskrevet i 2.3.4. Både visuell-romlig, numerisk, symbolsk og grafisk representasjon forekom på testene. De fem testene ligger vedlagt (se 7.5).

Vurdering for læring, og ikke minst vurdering som læring, er viktige satsingsområder i norsk videregående skole (Utdanningsdirektoratet, 2016h). Men i dette prosjektet, der jeg ønsker å sammenligne læringsutviklingen hos ulike R1-grupper over relativt kort tid, var det mest hensiktsmessig å benytte vurdering av læring (summativ vurdering). Poengsummene på testene fungerte derfor som en indikator på elevenes læringsutbytte i dette prosjektet. Dvs. at det for testenes del var snakk om en summativ vurdering av læring, som kan karakteriseres som formell og objektiv (jfr. 2.5.2).

3.1.1.1 Bruk av derivasjonsregler

I følge Hiebert & Lefevre (1986) i 2.4.3 er mestring av regler og prosedyrer en viktig del av matematikken. De kaller dette for prosedyrekunnskaper som opererer direkte på symboler. På alle skriftlige R1-eksamenene (Utdanningsdirektoratet, 2016i) som har vært gitt til nå, har den første oppgaven på del 1 dreiet seg om prosedyrekunnskaper knyttet til derivasjon. Her tester man om elevene behersker derivasjonsreglene i R1-pensum (evt. også i 1T-pensum), inkludert kjerneregelen, produktregelen og kvotientregelen. Den første oppgaven på samtlige av de fem testene jeg har benyttet i denne undersøkelsen var utformet på en tilsvarende måte. Elevene måtte her forholde seg til en symbolsk representasjon av den deriverte (jfr. 2.3.4).

3.1.1.2 Anvendelse av derivasjon

Bruk av derivasjon i forbindelse med problemstillinger knyttet til funksjonsdrøfting og/eller optimering går igjen på de fleste tidligere gitte R1-eksamener (Utdanningsdirektoratet, 2016i). Den andre oppgaven på alle fem testene jeg har benyttet i denne undersøkelsen dreide seg om funksjonsdrøfting, og ble utformet på en tilsvarende måte som på disse eksamenene. Den siste delen av oppgave 2 på Test2 dreide seg om optimering. Det samme gjaldt oppgave 4 på Test4 og Test5. På de to siste testene kan optimeringsoppgavene til en viss grad også ses på som problemløsningsoppgaver, siden elevene her måtte finne funksjonsuttrykket før de optimerte. Elevene måtte her forholde seg til både symbolsk og grafisk representasjon av den deriverte (jfr. 2.3.4).

3.1.1.3 Derivasjon knyttet til problemløsning

Problemløsningsoppgavene på testene var i overensstemmelse med definisjonen min i 1.3.5. Elevene vil ha direkte nytte av å beherske denne type oppgaver, der derivasjon inngår, både på prøver og på eksamen. Men for meg var hovedgrunnen til mitt valg av problemløsning som en av læringsmåtene jeg ville prøve ut knyttet til det første av NCTMs fire punkter om problemløsning beskrevet i 2.3.2. Tanken var altså at elevene skulle få ny eller forsterket kunnskap om derivasjon, mens de drev med problemløsningen.

Modellering trekkes ofte frem som en sentral del av problemløsning (Schoenfeld, 1992; Lesh & Zawojewski, 2007; NCTM, 2008), og det er også fremhevet som en sentral kompetanse i matematikk R1 (se 3.1.1). Men slike modelleringsprosjekter vil normalt kreve en god del tid. Jeg har derfor ikke tatt med slike oppgavetyper i dette prosjektet. I stedet har jeg i all hoved-sak benyttet det Lesh & Zawojewski, med en litt negativ konnotasjon, kaller *tradisjonell problemløsning*: "In most school mathematics, problem solving involves thinking about things that are countable og measurable, and the favored problems are those that are readily cast within the conventional topics for teaching" (Lesh & Zawojewski, 2007, s. 780).

Vi finner problemløsningsoppgaver knyttet til derivasjon på de fleste tidligere eksamener i R1 (Utdanningsdirektoratet, 2016i). Den siste delen på samtlige av de fem testene jeg har benyttet i denne undersøkelsen var utformet på en tilsvarende måte. Elevene måtte her forholde seg til mange ulike representasjoner av den deriverte. Både visuell-romlige (f.eks. problemløsning knyttet til vekstfart), numeriske (f.eks. bruk av GeoGebra/CAS til å finne tilnærmet verdi), symbolsk og grafiske (f.eks. grafen til f', i stedet for grafen til f) representasjoner ble benyttet (jfr. 2.3.4).

3.1.2 Spørreskjema

Etter at undervisningsopplegget var gjennomført i løpet av de tre dobbelttimene, fikk elevene utdelt et spørreskjema. Bruk av såkalt "cross-sectional survey design" er en velegnet metode for å finne ut av folks holdninger og vaner (Cresswell, 2012, s. 377). Og formålet med dette spørreskjemaet var nettopp å undersøke slike holdninger og vaner blant elevene som deltok i derivasjonsprosjektet. Konkret ønsket jeg å avdekke elevenes opplevde læringsutbytte av derivasjonsprosjektet, og deres forhold til oppgavetypene de benyttet når de jobbet med sine respektive læringsmåter. I tillegg hadde jeg med spørsmål der jeg ønsket å avdekke eventuelle andre forklaringer på testresultatene enn arbeidet med de ulike læringsmåtene. Dette dreide seg om spørsmål om holdninger, motivasjon, arbeidsinnsats og faglig nivå. Spørreskjemaet ligger vedlagt (se 7.6).

Det anbefales å benytte få, konkrete spørsmål i spørreskjemaet, og at svaralternativene er gjensidig utelukkende og mest mulig uttømmende. Dersom det er mulig vurderes det som fordelaktig å benytte skalaer på ordinalnivå - en såkalt Likert-skala (Christoffersen & Johannessen, 2012). Mitt spørreskjema var relativt enkelt bygget opp, helt i tråd med disse anbefalingene. Det ble utformet slik at det skulle være greit for elevene å svare på spørsmålene; altså at det ikke var for mange spørsmål, at spørsmålene skulle være rimelig enkle å tolke for elevene, og at de hadde avgrensede svaralternativer. Dette siste ble sikret gjennom bruk av Likert-skala, der det var hensiktsmessig. Dette gjaldt 6 av de 9 spørsmålene. Disse hadde altså variabler på ordinalnivå; dvs. at verdiene (svaralternativene) var gjensidig utelukkende, og hadde en logisk innbyrdes rangering. De 3 andre spørsmålene hadde variabler på nominalnivå; dvs. at verdiene var gjensidig utelukkende, men at de ikke kunne rangeres på en logisk måte (ibid.).

3.1.3 Intervju

Et forskningsintervju er en fleksibel metode, som kan gi oss fyldige og detaljerte beskrivelser, og som kan la informantene rekonstruere hendelser (Christoffersen & Johannessen, 2012). Intervjuet kan gi oss ny informasjon og nye innfallsvinkler (Sollid, 2013). Og det var nettopp dette som var formålet her; at intervjuene skulle gi elevene muligheten til å beskrive hvordan de opplevde å jobbe med derivasjon på en annen måte enn de var vant med, og i tillegg gi meg informasjon om hvordan elevene vurderte læringsutbyttet ved å jobbe på en slik uvant måte, utover det de kvantitative testene og spørreundersøkelsen var i stand til.

Da jeg sammenstilte testresultatene og svarene på spørreundersøkelsen oppdaget jeg at flere av elevene hadde avvik mellom "objektiv" utvikling og opplevd utvikling. Jeg tolket disse avvikene som uttrykk for kompleksiteten i læringsutbytte, slik det er beskrevet i 2.5, og dette pirret min nysgjerrighet. Da jeg undersøkte nærmere, fant jeg ut at det var ganske mange (43) elever som hadde et slikt avvik, og disse fordelte seg på alle 7 R1-klassene og alle 3 gruppene av læringsmåter. I tillegg var dette elever som både hadde hatt en positiv og en negativ opplevelse av derivasjonsprosjektet. Jeg bestemte meg derfor for å velge intervjuobjekter blant disse elevene.

Et forskningsintervju kan være mer eller mindre strukturert. Valget intervjueren gjør avhenger av forskningstemaet, og av hvem informantene er (Christoffersen & Johannessen, 2012). På den ene siden hadde jeg ganske klart definerte temaer som jeg ønsket å samtale om. Men på den andre siden var det ønskelig å ha en fleksibilitet til å kunne forfølge andre temaer som kunne dukke opp under intervjuet. Jeg valgte derfor å benytte et semistrukturert intervju, basert på en intervjuguide. En intervjuguide er en liste over temaer og generelle spørsmål som man ønsker å belyse i løpet av intervjuet, og som bidrar til å besvare forskerens aktuelle problemstilling (Christoffersen & Johannessen, 2012). Intervjuene ble tatt opp på diktafon. Intervjuguiden ligger vedlagt (se 7.7).

3.2 Pilotering

Like før sommerferien våren 2013 testet jeg ut opplegget i en av de to R1-gruppene på skolen min. Dette resulterte i flere justeringer av både læringsmåtene og oppgavetypene. I tillegg fikk jeg klar tilbakemelding fra mange elever om at opplegget burde vært gjennomført tidligere, da de jobbet med derivasjon. Siden derivasjon kommer sent i alle læreverkene i matematikk R1 fra de tre store forlagene i Norge (Heir et al., 2008; Oldervoll et al., 2008; Sandvold et al., 2008), vil dette si at derivasjon presenteres for elevene en gang på vårparten.

Aktiv memorering viste seg å fungere fint som læringsmåte for pilot-elevene. Dette var litt som forventet, siden denne måten å forholde seg til matematikk ikke var radikalt annerledes enn elevene var vant til. Jeg var på forhånd spent på hvordan problemløsning ville fungere som læringsmåte for pilot-elevene, siden dette gjerne regnes som en ganske krevende måte å lære matematikk på (jfr. 2.4.2). Her ble jeg imidlertid positivt overrasket. Gruppen hadde riktig nok behov for noe veiledning i starten, men ble etter hvert ganske selvgående. Begrepslæring viste seg derimot å fungere svært dårlig i et slikt intensivt opplegg som dette derivasjonsprosjektet representerte. Selv om det var flere matematisk dyktige elever på pilotgruppen som jobbet med begrepslæring, kom de ikke i gang med oppgavene på egen hånd, og de trengte dessuten veldig mye veiledning i alle tre dobbelttimene. Det var tydelig at det å jobbe med matematikk på en rent abstrakt måte var svært uvant for R1-elevene som deltok på pilot-undersøkelsen. Hvis de skulle hatt muligheten til å klare dette på en mer selvstendig måte, med håp om et visst læringsutbytte, måtte de nok hatt en opplæring i denne læringsmåten på forhånd. Men en slik opplæring var ikke mulig å få til i forbindelse med dette forskningsprosjektet.

I forbindelse med piloten gjennomførte jeg også to mindre intervjuer. Erfaringene herfra ledet til intervjuguiden jeg benyttet i de senere intervjuene.

3.3 Valg av informanter

Ideelt sett burde jeg valgt mange skoler, fra ulike deler av landet. På den måten kunne utvalget blitt representativt, og det ville kanskje vært mulig å trekke generelle konklusjoner fra forsøket. Dette forutsatte imidlertid at lærerne underviste på noenlunde samme måte i forkant av forsøket, og at undervisningsopplegget ble presentert (for elevene) og gjennomført på samme måte. Innenfor de tidsrammene jeg hadde til disposisjon, ville det ikke være praktisk mulig å gjennomføre. Jeg valgte derfor å avgrense informantene til skoler i Bergensregionen. Fordelene ved et slikt utvalg, var at det ga meg muligheter for en tettere oppfølging av de utvalgte R1-gruppene; både i forkant av forsøket, og under selve forsøket. Dessuten kunne jeg personlig presentere prosjektet for alle de aktuelle elevene, og være til stede under noen av timene på alle seks skolene. Ulempen var at utvalget da ikke vil være representativt.

3.3.1 Valg av skoler

Jeg valgte ut seks videregående skoler; to i sentrum, og fire i randsonen rundt Bergen. I begge sentrumsskolene var det 2 R1-grupper som var med. Til sammen var det 8 R1-grupper på disse seks skolene som sa seg villige til å delta i forsøket.

Jeg valgte skoler som lå nær nok min daglige livsverden, til at jeg kunne følge opp de aktuelle lærerne og klassene ved å være fysisk til stede på skolene når det var hensiktsmessig. I gjennomsnitt representerte de seks skolene ulike nivåer med hensyn til karakterer, fra å ha mange høytpresterende elever til å ha ganske få slike elever.

3.3.2 Valg av faglærere

Jeg fikk kontakt med de 8 R1-gruppene gjennom deres respektive faglærere. Jeg foretok først noen litt uformelle sonderinger via e-post og mobil våren 2013. Høsten 2013 avtalte jeg så møter med faglærerne hver for seg, og presenterte derivasjonsprosjektet for dem. Det personlige oppmøtet gjorde det lettere å imøtegå eventuell skepsis fra travle R1-lærere, og å svare på eventuelle spørsmål de måtte ha. Jeg lyktes med å "selge inn" prosjektet, og samtlige 8 R1-lærere sa seg villige til å avsette 3 dobbelttimer til derivasjonsprosjektet den påfølgende våren. Jeg benyttet meg altså av en personlig rekruttering av informanter (Christoffersen & Johannessen, 2012). Faglærerne fungerte som dørvoktere til R1-elevene, og ved å presentere prosjektet personlig for disse faglærerne, ble de til mine døråpnere.

Det var kritisk viktig at faglærerne som ble spurt om å være med på prosjektet stort sett underviste på en tradisjonell måte, siden hele poenget med forsøket var å sammenligne noen alternative læringsmåter med en mer tradisjonell læringsmåte. Jeg avklarte dette med hver enkelt faglærer i sonderingene jeg hadde våren 2013.

Et annet viktig moment, var at faglærerne ikke måtte ha en sterk forhåndsoppfatning av de aktuelle læringsmåtene - verken positive eller negative. Dette ville i så fall kunne påvirke elevenes holdninger til noen av læringsmåtene. Faglærerne burde ideelt sett forholde seg til prosjektet på en åpen og undrende måte. Dette var et sentralt poeng på møtene jeg hadde med de 8 R1-lærerne høsten 2013.

3.3.3 Valg av elever

Høsten 2013 presenterte jeg derivasjonsprosjektet for elevene i de 8 utvalgte R1-gruppene, og elevene fikk et informasjonsskriv som ga en relativt detaljert beskrivelse av hva som skulle foregå de 3 dobbelttimene prosjektet varte (se 7.1). De ble også forelagt en forespørsel om å delta på prosjektet, som inkluderte en samtykkeerklæring. Samtykkeerklæringen ga elevene tre valgmuligheter: De kunne velge og ikke være med på prosjektet i det hele tatt. Da ville de jobbe med derivasjonsoppgaver som faglæreren ga dem. Alternativt kunne de være med på derivasjonsprosjektet, og så delta på et eventuelt intervju i etterkant. En siste mulighet var å reservere seg mot å delta på intervju, og kun være med på derivasjonsprosjektet (se 7.2).

Det var veldig få elever som ikke ville være med i det hele tatt. Til sammen i de 8 R1-gruppene var det 141 elever som ønsket å være med. Av disse var det 41 elever som ikke ønsket å være med på et eventuelt intervju.

3.4 Datainnsamling

Selve derivasjonsprosjektet ble gjennomført våren 2014 i april/mai. Jeg var til stede som observatør ved samtlige av R1-gruppene som deltok i én av de tre dobbelttimene prosjektet varte. Den uforberedte posttesten (T4) som skulle måle et eventuelt mer varig læringsutbytte ble gjennomført i juni, etter at skriftlig eksamen var unnagjort. Grunnet komplikasjoner knyttet til gjennomføringen av T4 ved noen av R1-gruppene, ble det gjennomført en ny uforberedt posttest (T5) høsten 2014. De aller fleste elevene som var med på prosjektet hadde da matematikk R2. Opprinnelig ble T5 planlagt gjennomført helt i oppstarten av det nye skoleåret. Men grunnet lærerstreik, ble ikke T5 gjennomført før i starten på september 2014.

Spørreundersøkelsen ble gjennomført umiddelbart etter at prosjektet var avsluttet, mens intervjuene ble gjennomført i løpet av mai 2014.

3.4.1 Informantene

Pga. tidspress med tanke på avvikling av heldagsprøve, vurderte faglæreren ved 1 av de 6 utvalgte skolene at det var såpass problematisk å la elevene i denne R1-gruppen delta i prosjektet, at de valgte å trekke seg fra avtalen. Andre faglærere var i lignende situasjon, og uttrykte en viss bekymring med tanke på forberedelsene til heldagsprøve, men valgte likevel å forholde seg til den avtalen vi hadde inngått på høsten dette skoleåret.

I tillegg til denne ene R1-gruppen, valgte også noen elever i de andre R1-grupper å trekke seg fra prosjektet. Begrunnelsen gikk stort sett på at de var midt i forberedelser til viktige prøver, og var redd for at en deltakelse i prosjektet ville gå ut over karakteren deres i R1. Men det var også elever som ikke var på min opprinnelige liste over deltakere, som nå ønsket å være med. Dette var hovedsakelig elever som hadde vært borte da prosjektet ble presentert. Men det var også noen få som hadde ombestemt seg. Dvs. at de ikke ønsket å være med da prosjektet ble presentert, mens de nå ønsket å være med likevel. Når prosjektet starter opp, var det totale antallet informanter 133 elever fra 7 R1-grupper, fordelt på 5 videregående skoler i Bergens-området.

3.4.2 Testene under derivasjonsprosjektet

Den første gruppen gjennomførte den første testen tidlig i april, mens den siste gruppene gjennomførte den siste testen nærmere midten av mai. Grunnet fravær var det noen elever som ikke hadde gjennomført én eller flere av de tre testene. Disse ble registrert som blanke besvarelser i retteskjemaet.

I forkant av testene jobbet hver gruppe med spesielt tilrettelagte oppgaver. Elevene ved hver gruppe jobbet med tre oppgavesett, ett sett for hver dobbelttime.

3.4.2.1 Oppgavene til kontrollgruppene

Elevene på denne gruppen jobbet individuelt med oppgavene. Første dobbelttime løste de oppgaver med ferdigoppstilte funksjoner som skulle deriveres ved hjelp av kjente derivasjons-regler. Andre dobbelttime jobbet elevene med funksjonsdrøftings- og optimeringsoppgaver. Den siste dobbelttimen jobbet de med problemløsningsoppgaver. Men disse oppgavene skilte seg fra problemløsningsoppgavene beskrevet i 3.4.2.2 ved at de typisk var utformet slik at problemene ble delt inn i mindre, avgrensede delproblemer, og hvert av disse delproblemene kunne løses ved hjelp av kjente prosedyrer. Elevene ble dermed guidet frem mot løsningen. Disse problemløsningsoppgavene var derfor ikke i tråd med definisjonen i 1.3.5, men var mer tenkt som oppøving i mulige problemløsningsteknikker. Oppgavene ligger vedlagt (se 7.4.3).

Elevene jobbet her i det som i 2.1.3.1 omtales som prosess-produkt-tradisjon, der læring ses på som tilegnelse. Hiebert & Lefevre (1986) hevder i 2.4.1 at elever som arbeider med prosedyrekunnskaper over tid likevel kan utvikle begrepskunnskaper. Med Sfard (1991) sin terminologi innebærer dette altså at elevene ved å jobbe med ulike typer oppgaver knyttet til derivasjon kan ta steg på veien fra internalisering, via kondensering til reifisering, der elevene gradvis ser på derivasjon som et objekt (se 2.2.1). Formålet med å ta med gruppene som jobbet med tradisjonell oppgaveregning, var at disse skulle gi et sammenligningsgrunnlag for å vurdere læringsutbyttet til de alternative læringsmåtene.

3.4.2.2 Oppgavene til problemløsningsgruppene

Denne gruppen jobbet med problemløsning alle tre dobbelttimene. Først jobbet hver gruppe-deltaker individuelt med problemene i ca. 20 minutter. Deretter gikk de sammen i par, og jobbet nye 20 minutter med problemene. Til slutt jobbet hele gruppen sammen for å forsøke å løse problemene. Denne arbeidsformen var inspirert av Brousseau, og hans "*Dialectic of action*". Her beskrives et spill ("race to 20"), der elevene først jobbet i par, for så å jobbe i grupper. Hensikten med denne arbeidsformen er å øke mulighetene for at elevene selv skal klare og "avsløre spillets hemmelighet". De fleste parene gjør noen viktige oppdagelser i den innledende fasen. Men det er først når de jobber sammen i større grupper at de oppdager det fullstendige mønsteret, som gjør at de kan utvikle en vinner-strategi (Brousseau et al., 1997). Paul Cobb kaller en slik arbeidsform for en refleksiv diskurs, der elevene først reflekterer individuelt og deretter drøfter resultatene av disse refleksjonene i fellesskap i gruppen (se 2.1.3.1). Jeg vurderte problemløsning til å være en krevende læringsmåte for mange elever, og tenkte at de faglig svakere elevene ville ha relativt magert læringsutbytte av å jobbe på denne måten alene. Ved å la elevene ta del i en refleksiv diskurs, håpet jeg at læringsutbyttet ville bli større for flere elever.

Et eksempel på en problemløsningsoppgave var optimering, der elevene selv måtte finne den aktuelle modellen (funksjonsuttrykket). Et annet eksempel var problemer knyttet til grafen til den deriverte, i stedet for til funksjonen, slik elevene var vant til. Oppgavene ligger vedlagt (se 7.4.1).

I følge faglærerne har ikke de gjennomført noen systematisk opplæring av elevene i problemløsningsstrategier i forkant av prosjektet. Slik opplæring ble heller ikke gitt i løpet av derivasjonsprosjektet. Tanken var at elevene skulle finne ut av dette selv, gjennom arbeidet med problemene og diskusjonene som oppstod i den forbindelsen. Igjen var idéen hentet fra Brousseau, der eleven i et samspill med miljøet (her: medelevene på gruppen) "organizes her strategies, and constructs a representation of the situation which serves as a 'model' and guide for her when making decisions" (Brousseau et al., 1997, s. 9). Formålet med denne lærings-måten var at elevene skulle få det Skemp (1978) i 2.4.3 kaller en relasjonell forståelse av derivasjon, og dermed økt begrepskunnskap - jfr. Hiebert & Lefevre (1986) i 2.4.4.

3.4.2.3 Oppgavene til gruppene som benyttet aktiv memorering

Aktiv memorering vil her si en arbeidsmetode som foregikk i fire faser: Først fant elevene regler, prosedyrer og strategier på egen hånd i læreboken. Deretter gikk elevene sammen i mindre grupper og ble der enige om at det de hadde funnet var "komplett", og at alle gruppene hadde samme forståelse av det de hadde funnet. Neste fase bestod i at de hver for seg lærte utenat det de hadde funnet. Til slutt gikk elevene sammen to-og-to, og hørte hverandre i lærestoffet. Den først dobbelttimen memorerte elevene derivasjonsregler. Den neste dobbelt-timen lærte de seg utenat metoder (algoritmer) for å bruke derivasjon til å drøfte funksjoner og til optimering. Den siste dobbelttimen memorerte de noen enkle strategier for å løse problemer i tråd med definisjonen i 1.3.5, der derivasjon inngikk som en del av problemet. Oppgavene ligger vedlagt (se 7.4.2).

De to siste fasene, sammen med første fase, utgjør tradisjonell pugging. Men andre fase er mer i tråd med det Lampert & Cobb kaller læring som deltakelse. Særlig i tilfellene der elevene skulle lære seg prosedyrer og strategier. Elevene måtte da argumentere for sine valg, og de måtte i fellesskap bli enige om hvilke prosedyrer og strategier som skulle godkjennes som "gyldige". Her vil det altså kunne finne sted definering gjennom forhandlinger. I tillegg var organiseringen av undervisningen strukturert for å fremme deltakende kommunikasjon. Og sist, men ikke minst, var det et mer overordnet fokus på derivasjon enn det man finner i tradisjonell oppgaveregning, der målet typisk er å få riktig svar (Lampert & Cobb, 2003). Det jeg ønsket å oppnå med denne fasen, var at elevene ble mer bevisst på de valgene de gjør når de løser ulike typer oppgaver der derivasjon inngår som en sentral del. Formålet var altså at elevene skulle få en mental oversikt over regler og prosedyrer i forbindelse med derivasjon, og dermed bidra til at den enkelte elev dannet et rikt og oversiktlig begrepsbilde av derivasjon (jfr. 2.3.3). Videre var tanken at de i større grad ville være i stand til å automatisere disse reglene og prosedyrene. Slik automatisering vil kunne frigjøre kognitiv kapasitet til å takle mer utfordrende problemer (jfr. siste avsnitt i 2.4.3).

3.4.2.4 Tilbakemelding fra faglærerne

Flere av faglærerne videreformidlet at en god del elever oppfattet testene som ganske vanskelige. Det ble også meldt om at det ikke var alle elevene som tok testene like alvorlig. Dette siste var spesielt tydelig på den siste testen ved én av skolene. Her skulle elevene ha heldagsprøve et par dager etterpå, så de var ikke så veldig fokusert på derivasjonstesten. På en annen skole var faglæreren fraværende den siste dobbelttimen. Selv om det ble satt inn vikar, var likevel en god del av elevene også fraværende denne dobbelttimen.

3.4.3 Spørreundersøkelsene

Den enkelte faglærer i R1-gruppene som var med på derivasjonsprosjektet administrerte gjennomføringen av spørreundersøkelsen. Det ble ikke meldt om noen problemer hos noen av R1-gruppene i den forbindelse, men noen av elevene var fraværende da undersøkelsen ble gjennomført. Etter noen purringer fikk jeg inn svarene på spørreskjemaet fra så godt som alle elevene som var med på prosjektet. Unntakene var elever som hadde så stort fravær på testene, at det uansett ikke var aktuelt å ha dem med i den videre bearbeidingen av dataene.

3.4.4 Intervjuene

Som nevnt i 3.1.3 ønsket jeg å intervjue elever der det ikke var samsvar mellom en "objektiv" utvikling av læringsutbyttet og en subjektiv opplevelse av læringsutbyttet. For disse elevene var det altså ikke overensstemmelse mellom testresultater deres og det de hadde svart om læringsutbyttet på spørreundersøkelsen.

3.4.4.1 Valg av intervjuobjekter

I utgangspunktet var det 43 elever som oppfylte kriteriet som er nevnt i avsnittet over (3.4.4). Jeg valgte ut 6 av disse elevene til intervju. Sammenlignet med de fleste andre matematikk-grupper i videregående skole, er R1-elever gjennomgående en ganske homogen gruppe med tanke på matematisk nivå. 6 intervjuer ble derfor vurdert som et tilstrekkelig antall i dette prosjektet. Elevene ble valgt i samråd med deres faglærer. Dvs. at jeg sendte en liste til faglærer om aktuelle kandidater, og så ga faglærer en anbefaling om hvem av disse som det etter hans eller hennes mening ville være best egnet som intervjuobjekter. De planlagte intervjuene fordelte seg på tre av de fem skolene (og på fire av de sju R1-gruppene).

Det ene intervjuet ble avtalt ganske sent (siste uken før sommerferien). Da hadde imidlertid mesteparten av elevene i den aktuelle gruppen tatt seg "fri", inkludert den eleven jeg hadde avtalt intervju med. Jeg endte derfor opp med 5 intervjuer. 3 av elevene var fra grupper som jobbet med problemløsningsoppgaver, mens det var 1 elev fra hver av de to andre gruppene (aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning). 1 av elevene jeg intervjuet var jente. De 4 andre var gutter. De oppgitte karakterene i R1 fra første termin varierte fra 4 til 6.

3.4.4.2 Gjennomføring av intervjuene

I et forskningsintervju er det intervjueren som bestemmer temaet for intervjuet, og som styrer samtaleforløpet. Det er altså et asymmetrisk maktforhold mellom intervjuer og intervjuobjekt (Kvale & Brinkmann, 2009). For å unngå at dette asymmetriske maktforholdet ble ytterligere forsterket, valgte jeg å gjennomføre intervjuene på elevenes egen skole. De intervjuede elevene fikk også velge tidspunkt ut fra hva som passet dem. Intervjuene ble gjennomført i et lukket rom. Jeg benyttet diktafon til å ta opp intervjuene, men det var ingen referanser til den enkelte elev på noen av opptakene. Disse referansene var kun lagret på papir.

Før jeg startet med selve intervjuet ble intervjuobjektet fortalt hvorfor jeg hadde valgt ut vedkommende. Alle intervjuene blir innledet med at eleven ble bedt om å komme med sine umiddelbare tanker etter at derivasjonsprosjektet var avsluttet. Deretter fulgte jeg den vedlagte intervjuguiden sånn noenlunde i den rekkefølge som var gitt der (se 7.7).

Forskeren er en del av samtalen, og må ved sitt menneskelige nærvær og gjennom gode spørsmål bidra til at både intervjuer og intervjuobjekt bidrar analytisk til denne samtalen

(Sollid, 2013). Mitt umiddelbare hovedinntrykk var at intervjuene forløp ganske bra. Det var god stemning under intervjuene, og samtalen gled rimelig uanstrengt. Jeg satt også igjen med en følelse et jeg hadde fått noe interessant informasjon etter hvert av intervjuene.

3.4.5 Testene etter derivasjonsprosjektet

Det viste seg at det ble mer problematisk å gjennomføre posttesten før sommerferien (Test4) enn både jeg og faglærerne hadde forestilt oss, siden overraskende mange mattetimer måtte utgå på grunn av diverse aktiviteter på slutten av skoleåret. En av skolene fikk ikke gjennomført den i det hele tatt, og ved en annen skole var det et stort fravær.

Et annet problem var at det for en god del elever ble relativt kort tid mellom tidspunktet de hadde Test4 og sist de jobbet med derivasjon. Dette gjaldt elever som hadde en ganske sen heldagsprøve, og/eller som var opp til skriftlig eller muntlig eksamen. Dette brøt dermed med et vesentlig poeng med posttesten; nemlig at det hadde gått en del tid siden siste elevene hadde jobbet med derivasjon.

På grunn av de to problemene nevnt i avsnittene over, avtalte jeg med de ulike faglærerne at vi gjennomførte en ny test til høsten, helt i oppstarten av R2. En liten ulempe var at noen av elevene sannsynligvis ikke kom til å fortsette med R2. Det kunne også være noen elever som kom til å bytte skole. Men dette ville uansett bare gjelde et fåtall elever. Slik jeg vurderte det, ville derfor fordelene mer enn oppveie ulempene.

3.5 Bearbeiding av data

Rådata er sjelden egnet til å analyseres direkte. For å få frem interessante funn blant dataene, må disse normalt bearbeides, slik at de får en mer hensiktsmessig form. Dette gjaldt både dataene fra testene, spørreundersøkelsen og intervjuene.

Elevene hadde skrevet eget navn og skole på alle testene, og på spørreundersøkelsen. Disse identifiserbare dataene, eksisterte kun i papirformat, og ble oppbevart i et innelåst skap på mitt hjemme-kontor i hele perioden jeg har jobbet med masteren.

3.5.1 Retting av testene

Dette var en kritisk fase, da retting av testene nødvendigvis måtte innebære et visst skjønn. Jeg utsatte rettingen av testene, til jeg hadde fått inn de fleste besvarelsene. På den måten kunne jeg være sikrere på at jeg rettet "likt". Jeg forsøkte å minimere eventuelle forskjeller i rettingen, ved at jeg var svært bevisst denne problemstillingen gjennom hele retteprosessen, og ved at jeg var så nøye som mulig med å rette på "samme" systematisk måte hele tiden.

Resultatene på testene ble ført inn på papirbaserte retteskjemaer - ett skjema for hver skole. Disse retteskjemaene ble oppbevart sammen med de andre identifiserbare dokumentene i det innelåste skapet på mitt hjemmekontor.

3.5.2 Transkribering av intervjuene

Ved transkribering gjøres det muntlige materialet om til skrevet tekst, og dette er ikke en nøytral prosess. Et eksempel på valg som må tas er om man skal skrive nøyaktig det som ble sagt i intervjuene, eller om man skal gjøre teksten mer lesevennlig. Et annet eksempel er om man skal skrive på dialekt, eller på bokmål/nynorsk (Sollid, 2013).

Intervjuene ble transkribert digitalt kort tid etter at de ble gjennomført. Jeg valgte å fortette intervjuene. Blant annet kuttet jeg ut "eh" og oppmuntrende "ja" fra begge parter. Jeg valgte å transkribere intervjuene på bokmål. Noen setninger ble dessuten omformulert til en mer skriftlig form. Elevene som var med på intervjuene ble anonymisert som E1, E2, osv.

3.5.3 Kategorisering av transkripsjonene

Før man kan analysere innholdet i det transkriberte materialet, må dette innholdet gjennomgås på en systematisk måte for å forsøke å finne sammenhenger og mening. Man må forsøke å finne ut hva intervjudataene forteller om forskningsprosjektets problemstillinger. En måte å gjøre dette på er gjennom kategorisering (Sollid, 2013). Jeg identifiserte noen emner som gikk igjen i alle, eller i de fleste intervjuene, og som var relevante for mine problemstillinger:

- Vanskelighetsgrad (knyttet til oppgavene)
- Derivasjon (oppfatning)
- Læringsmåte (som foretrekkes)
- Læringsutbytte

- Varighet (av læringen)

De tre siste kategoriene er direkte knyttet til problemstillingen min i 1.2, og kan ses i sammenheng med testresultatene og spørreundersøkelsen. Den første kategorien er knyttet til mitt grunnleggende premiss for denne masteroppgaven; nemlig at mange elever ser ut til å oppfatte derivasjon som vanskelig. Den andre kategorien har å gjøre med relevansen av oppgavene og testene som ble benyttet i derivasjonsprosjektet; altså om det var samsvar mellom elevenes oppfatning av derivasjon og den oppfatningen jeg la til grunn i utformingen av oppgavene og testene.

3.5.4 Forkasting av informanter

Elever som ikke hadde svart på spørreundersøkelsen ble forkastet. Dette gjaldt 5 elever. Det samme gjaldt elever som var fraværende på minst 3 av de 4 aktuelle testene (T1, T2, T3 og T5). Dette gjaldt 4 elever.

Det mest problematiske her var hvordan jeg skulle forholde meg til elever som virket useriøse i sine besvarelser. Dette ble rapportert som et problem ved to av skolene. Her skulle elevene ha heldagsprøve i R1 relativt kort tid etter derivasjonsprosjektet (1-2 uker etterpå). Faglærerne rapporterte om at en del elever som opprinnelig hadde sagt ja til å være med på prosjektet, nå heller ville forberede seg til heldagsprøven. Dette kan ha preget testbesvarelsene til disse elevene. Elever som hadde ekstremt lave poeng på mange av testene (typisk 0-1 poeng av 17 mulige), til tross for at de hadde brukbare karakterer i R1 (3 eller bedre), var aktuelle kandidater. Ofte hadde de kun svart på de to-tre første deloppgavene på testen. Jeg valgte å tolke dette som at elevene prøvde litt, men med en gang de møtte litt motstand, så gadd de ikke prøve mer. Dette mønsteret fant jeg hos 5 av elevene ved de to nevnte skolene, mens jeg ved de andre skolene bare fant dette mønsteret hos 1 elev. Disse elevene ble forkastet.

På bakgrunn av det som er beskrevet i de to avsnittene over, forkastet jeg totalt 15 elever. Antall elever som ble gjenstand for analyse ble dermed redusert fra 133 til 118.

3.5.5 Bruk av statistisk dataverktøy

Jeg benyttet meg av statistikk-verktøyet SPSS (Statistical Package for Social Science) til å analysere dataene. Da jeg tastet inn dataene fra testene og fra spørreundersøkelsen, ble alle elever og skoler fullstendig anonymisert. Elevene ble betegnet som E001, E002, osv. Alle de andre kategoriene var variabler med forskjellige målenivå; nemlig variabler på nominalnivå, ordinalnivå og forholdstallsnivå. De to førstnevnte er gjort rede for i 3.1.2. Forholdstallsnivå vil si at vi har en skala med et naturlig nullpunkt (Christoffersen & Johannessen, 2012). For poengene på testen innebærer dette f.eks. at 12 poeng er dobbelt så mye som 6 poeng.

De sju R1-gruppene fikk kategorien Skole. Dette var en variabel på nominalnivå, som ble kodet som 1, 2, 3, 4, 5, 6 eller 7. To av skolene hadde to R1-grupper som var med i undersøkelsen. En slik informasjon ville kunnet øke mulighetene for identifisering. For å bøte på dette valgte jeg i stedet å kalle alle R1-guppene for "skoler", selv om de sju gruppene egentlig fordelte seg på fem skoler. Ved å operere med 7 "skoler" i stedet, ville jeg bidra til å styrke anonymiseringen av deltakerne i undersøkelsen.

Kategorien Kjønn var en variabel på nominalnivå, der gutt ble kodet som 1, og jente som 2. Gruppe var en variabel på nominalnivå, der problemløsningsgruppen ble kodet som1, gruppen som jobbet med aktiv memorering som 2, og gruppen som jobbet med tradisjonell oppgave-regning (kontrollgruppen) ble kodet som 3.

Poengsummene på de fem testene fikk kategoriene T1_sum, T2_sum, osv. Dette var variabler på forholdsnivå. Hvis en elev var fraværende på en test ble poengsummen satt til -1. For å ha en kvantitativ størrelse å sammenligne med, summerte jeg poengsummene på de tre testene som ble gjennomført under derivasjonsprosjektet, sammen med den siste posttesten. Dvs. at jeg la sammen verdiene av T1_sum, T2_sum, T3_sum og T5_sum, og kalte denne kategorien for Sum_Tot. Dette var også en variabel på forholdstallsnivå. Hvis en elev var fraværende på minst én av disse fire testene (T1, T2, T2 eller T5), ble Sum_Tot satt lik -1.

De ni spørsmålene i spørreundersøkelsen ble kategorisert som følger:
Sp_B vil si spørsmål nr. 1, om å Beherske derivasjon. Dette var en variabel på ordinalnivå, med mulige verdier fra 1 til 5.
Sp_E vil si spørsmål nr. 2, om Endringer i evner i derivasjon. Dette var en variabel på nominalnivå, der "Bedre" ble kodet som 1, "Dårligere" som 2 og "Uforandret" som 3.
Sp_T vil si spørsmål nr. 3, om Tidligere erfaringer med oppgavetypene. Dette var en variabel på ordinalnivå, med mulige verdier fra 1 til 5.

Sp_L vil si spørsmål nr. 4, om eleven Liker matematikk. Dette var en variabel på ordinalnivå, med mulige verdier fra 1 til 5.
Sp_S vil si spørsmål nr. 5, om det var Samsvar mellom oppgaver i øving og test. Dette var en variabel på nominalnivå, der "Ja" ble kodet som 1 og "Nei" ble kodet som 2.
Sp_N vil si spørsmål nr. 6, om derivasjon vurderes som Nyttig. Dette var en variabel på nominalnivå, der "Ja" ble kodet som 1 og "Nei" ble kodet som 2.
Sp_A vil si spørsmål nr. 7, om Arbeidsinnsats. Dette var en variabel på ordinalnivå, der "Aldri" ble kodet som 1, "Av og til" som 2, "1-2" som 3, "3-4" som 4 og "Minst 5" ble kodet som 5.
Sp_K1 vil si spørsmål nr. 8, om Karakter i 1. termin. Dette var en variabel på ordinalnivå, med mulige verdier fra 1 til 6.
Sp_StPkt vil si spørsmål nr. 9, om StandPunktkarakter. Dette var en variabel på ordinalnivå, med mulige verdier fra 1 til 6.

Det var helt uproblematisk å taste inn testresultatene, men for noen av svarene på spørre-undersøkelsen måtte jeg foreta tolkninger. Dette gjaldt "Ja-Nei"-spørsmålene 5. og 6. Her hadde 8 elever svart en mellomting. Jeg valgte da å tolke "Tja" som "Ja", og "Nja" som "Nei". Når det gjaldt spørsmål 9., var det 5 elever som svarte en mellomting. Her valgte jeg å være optimistisk på elevens vegne. Dvs. at jeg tolket "5-6" som "6" og "4/5" som "5".

3.6 Reliabilitet og validitet

Reliabilitet dreier seg om hvor pålitelig datamaterialet er. Dette er knyttet til hvor nøyaktige og presise vi er i innsamlingen og bearbeidingen av dataene. Vi sier at vi har høy reliabilitet, hvis en undersøkelse gir samme resultat når den gjentas på et senere tidspunkt, uavhengig av hvilken forsker som da gjennomfører undersøkelsen. Validitet på sin side dreier seg om undersøkelsen er en god representasjon av virkeligheten. Validitet sier altså noe om under-søkelsens gyldighet eller troverdighet. Det sentrale her er om vi, ved hjelp av vår metode, faktisk måler det vi ønsker å måle (Christoffersen & Johannessen, 2012).

3.6.1 Reliabilitet

Jeg benyttet tester der det kun var åpne besvarelser, noe som helt klart var et problem i forhold til reliabiliteten til testresultatene. Testene ble rettet i en samlet bolk, for å hindre at jeg vurderte like situasjoner ulikt. Men selv om en slik systematikk bidro til å styrke reliabiliteten, kom man ikke utenom at selve rettingen var en prosess der det ble utøvd en stor grad av skjønn. Dette kunne vært løst ved å benytte tester med lukkede besvarelser - såkalte flervalgsoppgaver. Dilemmaet her var at dette da ville medført at besvarelsene fikk mindre verdi i forhold til min problemstilling, der fokuset var læringsutbytte. Gitt min knappe tidsramme, ville lukkede besvarelser gjøre det bortimot umulig å vurdere tankegangen til elevene når de var stilt over for noe så komplekst som derivasjon, og om de behersket alle delprosessene som ledet frem til svaret. Dette kom tydelig frem i rettingen, der det var svært få besvarelser som var enten helt riktige eller helt feil. En annen utfordring i forhold til reliabiliteten til testresultatene, var at elever som ikke tok testene seriøst, eller at de ga seg ganske raskt da de møtte motstand.

Spørreskjemaet ble utformet på en slik måte at det skulle være minimale muligheter for misforståelser. Man kan likevel ikke utelukke at det kan ha skjedd. Det var dessuten noen elever som krysset av midt mellom de to alternativene "Ja" og "Nei".

All inntastingen av dataene i SPSS ble dobbeltsjekket (henholdsvis linjevis, og kolonnevis kontroll) for å sikre at alle dataene som ble benyttet i forbindelse med statistiske beregninger var korrekte.

Transkriberingen av hvert enkelt intervju ble utført kort tid etter at intervjuet var gjennomført. Dette sikret at intervjuet fremdeles satt friskt i minnet da transkriberingen ble utført.

Jeg har gjort grundig rede for metodene jeg har brukt, og alle valg jeg har gjort underveis. Dette bidrar til å styrke reliabiliteten.

3.6.2 Validitet

De to alternative gruppene benyttet memorering og problemløsning som læringsmåte. Men de samarbeidet også internt i gruppene. Eventuelle læringseffekter innen derivasjon kan derfor like gjerne skyldes dette gruppesamarbeidet som det at elevene jobbet med memorering eller med problemløsning.

R1-elevene i undersøkelsen kom fra 5 skoler i Bergensområdet som hadde ganske stor spredning i inntakspoengene. Antakelsen var at en slik spredning også ville gjøre seg gjeldende når det gjaldt det matematiske nivået til R1-elevene i undersøkelsen. Men utvalget var uansett geografisk begrenset. Så til tross for den antatte spredningen i nivå, var utvalget likevel ikke representativt for norske R1-elever.

Den store spredningen i nivå medførte at det også ble stor spredning på resultatene for de tre testene som ble gjennomført i løpet av derivasjonsprosjektet og den siste posttesten. Dette igjen førte til ganske store standardavvik for disse testresultatene. De endringene i utviklingen av gjennomsnittlige testresultater som ble registrert for de ulike læringsmåtene var derfor mindre enn ett standardavvik. Dette bidro til å svekke validiteten.

Bruk av kvalitative intervju er per definisjon en subjektiv metode. Elevenes svar i intervjuene i denne undersøkelsen var i stor grad basert på følelser, og slike følelser kan endre seg flere ganger i løpet av en kortere tidsperiode. Dette gjelder ikke minst elevenes mestringsfølelse. Tidspunktet intervjuene gjennomføres på kan derfor påvirke elevenes svar.

På de skolene som var i streik høsten 2014 fikk ikke elevene tatt posttesten (Test5) helt i starten av skoleåret. Siden faglærerne følte at de måtte komme i gang med undervisningen da streiken var over, medførte dette at elevene på streikerammede skoler fikk repetert derivasjon før de hadde T5. Dette var ikke gunstig med tanke på å måle den varige læringseffekten av å benytte de ulike læringsmåtene. Siden dette gjaldt for elever på alle tre gruppene ved de aktuelle skolene, var likevel dataene sammenlignbare. Men testresultatene for elevene på disse skolene ble nok bedre enn de ellers ville vært, så konsekvensene av streiken bidro uansett til å svekke validiteten i undersøkelsen.

Både læring og læringsutbytte er komplekse begreper, og det er svært utfordrende å måle utvikling i læring. Ved å benytte metodetriangulering har jeg økt muligheten for å gi et korrekt bilde av utviklingen i derivasjonskunnskaper for elevene som var med i denne undersøkelsen. Dette har bidratt til å styrke validiteten.

3.7 Etiske refleksjoner

Jeg har forsøkt å ivareta prinsippet om frivillighet blant deltakerne i denne undersøkelsen etter beste evne. Dette poenget ble understreket overfor elevene som ble forespurt om å være med i derivasjonsprosjektet; både muntlig og ikke minst skriftlig, i samtykkeerklæringen elevene skrev under på (se 7.2). Det kan likevel ikke utelukkes at noen elever kan ha følt et visst press for å være med. Da vi startet prosjektet var det noen elever som hadde ombestemt seg, og skrev under på at de ville være med på prosjektet likevel. Hvis det i en R1-gruppe kun var snakk om et par elever som ikke ønsket å være med, kan disse f.eks. ha følt et gruppepress for å delta i prosjektet.

Både på testene og på spørreskjemaene ble elevene bedt om å oppgi både navn (fornavn og etternavn) og skole. Datamaterialet bestod altså av identifiserbare personopplysninger på papir. Prosjektet ble derfor meldt inn til Personvernombudet for forskning, NSD, der det ble godkjent (se 7.3). Intervjuene ble lagret digitalt, men disse var ikke identifiserbare. I stedet hadde jeg en oversikt over hvem disse var på papir. I løpet av arbeidet med denne master-oppgaven har alle de nevnte papirene blitt oppbevart i et låst skap på mitt hjemmekontor. Alle data har blitt anonymisert i bearbeidingsfasen. I statistikkprogrammet SPSS ble de 7 R1-gruppene kodet som Skole1, Skole2, osv., og de 76 elevene ble kodet som E001, E002, osv. I transkripsjonene ble de 5 intervjuobjektene kodet som E1, E2, osv. Dessuten ble disse transkripsjonene skrevet i et skriftspråk, i stedet for på dialekt. Alt dette har bidratt til å styrke anonymiseringen.

Det er viktig at intervjuobjektene føler seg trygge i intervjusituasjonen. Dette kan intervjueren bidra til gjennom mer formelle grep, som å sørge for at det er frivillig, at man legger intervjuet til intervjuobjektets "hjemmebane", at deltakelse på intervjuet ikke får uheldige konsekvenser for intervjuobjektet og at det forsikres om at alt som blir sagt i samtalene blir behandlet konfidensielt. I tillegg må intervjueren gjennom klokskap styre samtalen på en måte som ikke stiller intervjuobjektet i ubekvemme situasjoner (Kvale & Brinkmann, 2012). Jeg forsøkte etter beste evne å etterleve dette i min rolle som intervjuer, ved at jeg tilstrebet å balansere mitt ønske om innhenting av informasjon mot ivaretakelse av intervjuobjektenes integritet gjennom alle intervjuene.

Ved å forske i klasserommet kan man komme tettere på elevene, og avdekke funn som ellers ikke ville vært tilgjengelige. Men det er viktig å være bevisst at man som forsker da griper inn i hverdagen til elevene og til faglærer. En slik intervensjon kan forårsake at klassen kommer på etterskudd i pensum, og det kan forstyrre klassen i forberedelser til prøver og eksamener. Begge disse forholdene var til stede i de R1-gruppene som deltok på derivasjonsprosjektet. Dette gjorde at en faglærer valgte å trekke sin gruppe fra prosjektet. Dessuten valgte noen av elevene som hadde skrevet under på samtykkeerklæringen likevel å trekke seg. Frivillighets-aspektet var med andre ord i høyeste grad tilstedeværende, og ble sterkt understreket av meg ved flere anledninger. Det kan likevel ikke utelukkes at det var flere enn de som faktisk trakk seg som ønsket å gjøre dette, men som ble værende i prosjektet på grunn av en form for lojalitetspress eller lignende; altså at faglærere ikke ønsket å "ødelegge" for mitt forsknings-prosjekt, eller at elever ikke ønsket å "svikte" gruppen de var på.

4. Resultater og analyse

Alle de 118 elevene som jeg nå hadde registrert i SPSS hadde deltatt på spørreundersøkelsen. Imidlertid var det 42 elever som hadde vært fraværende på minst én av de fire testene som var aktuelle for meg; nemlig T1, T2, T3 og T5. For at jeg skulle kunne foreta meningsfylte sammenligninger, måtte elevene jeg ønsket å studere nærmere ha deltatt på alle disse testene. Jeg måtte dermed utelate de nevnte 42 elevene fra mine statistiske analyser.

Alle resultater som er presentert i dette kapittelet er basert på grunnlagsdataene i vedlegg 7.7.1, for de 76 elevene som har besvart spørreundersøkelsen og deltatt på samtlige av de tre testene (T1, T2 og T3) som ble gjennomført i løpet av derivasjonsprosjektet våren 2014, i tillegg til posttesten (T5) som ble gjennomført tidlig på høsten 2014. Blant de 76 elevene var det 49 gutter og 27 jenter.

4.1 Testresultater

Her var jeg interessert i å se på utviklingen i testresultater i løpet av de tre testene (T1, T2 og T3) som ble gjennomført i løpet av prosjektperioden, sammen med en uforberedt posttest. Denne fjerde testen ble forsøkt gjennomført i underkant av en måned etter at derivasjons-prosjektet ble avsluttet. Men på grunn av dårlig deltakelse blant noen av R1-klassene, ble det gjennomført en ny posttest (T5) ca. tre måneder etter at derivasjonsprosjektet ble avsluttet. Til sammen var det mulig å få 68 poeng på de fire testene T1, T2, T3 og T5.

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Sum av T1, T2, T3 og T5	76	3,5	61,5	35,526	14,8802
Valid N (listwise)	76				

Tabell 4.1 Noen statistiske beregninger for Sum_Tot.

Som Tabell 4.1 viser, var det veldig stor spredning i den totale summen av testene, fra 3,5 poeng til 61,5 poeng. Gjennomsnittet totalt var 35,5 poeng, med et standardavvik på 14,9. Fordelt på de fire testene kan vi dermed si at gjennomsnittet per test var 8,9 poeng av 17 mulige. Dvs. at elevene i gjennomsnitt presterte ganske middels på disse testene.

I de tre diagrammene som viser utviklingen over tid i gjennomsnittlig poengsum på testene, fordelt på de tre gruppene (Diagram 1, 2 og 3), har jeg valgt å avgrense enhetene på andreaksen til det intervallet gjennomsnittspoengene lå. Dette for å tydeliggjøre eventuelle trender i utviklingen.

4.1.1 Resultater totalt

De tre tabellene under (med samlebetegnelse Tabell 4.2) viser gjennomsnittlig poengsum for elevene som hadde vært med på alle fire testene, fordelt på de tre gruppene som jobbet med problemløsning, aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning (dvs. kontrollgruppen). Maksimal poengsum på hver test var 17 poeng.

Problemløsning (P):

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
T1_sum	27	1,0	16,0	7,944	4,3882
T2_sum	27	,0	14,0	7,926	4,4218
T3_sum	27	,5	16,0	8,352	4,3141
T5_sum	27	,5	16,5	8,722	5,1708
Valid N (listwise)	27				

Aktiv memorering (M):

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
T1_sum	23	,5	15,0	8,500	3,4674
T2_sum	23	1,5	15,0	9,304	3,7922
T3_sum	23	2,5	15,5	10,022	3,3285
T5_sum	23	1,5	16,5	10,065	4,4012
Valid N (listwise)	23				

Tradisjonell oppgaveregning (K):

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
T1_sum	26	2,5	15,5	9,077	3,7221
T2_sum	26	,5	16,0	9,212	4,6950
T3_sum	26	3,0	15,5	9,712	3,9754
T5_sum	26	,5	16,5	8,115	4,9159
Valid N (listwise)	26				

Tabell 4.2 Gjennomsnittlige testresultater, fordelt på de tre gruppene problemløsning, aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning.

Resultatene fra tabell 4.2 er illustrert grafisk i diagrammet under.

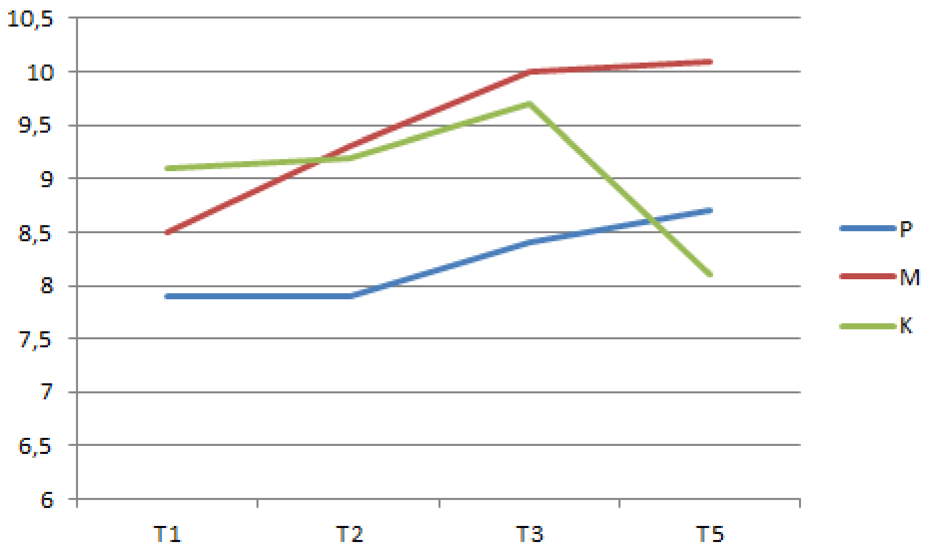


Diagram 1 Utviklingen av testresultater på de fire testene Test1 (T1), Test2 (T2), Test3 (T3) og Test5 (T5), fordelt på de tre gruppene problemløsning (P), aktiv memorering (M) og tradisjonell oppgaveregning (K).

Diagram 1 viser at gruppen som jobbet med aktiv memorering totalt sett har hatt en positiv utvikling i gjennomsnittlig poengsum på alle testene. Problemløsningsgruppen viser en lignende utvikling, bortsett fra i starten, der gjennomsnittlig poengsum var den samme på de to første testene. For kontrollgruppen kan det se ut som om det har vært en positiv utvikling gjennom perioden derivasjonsprosjektet varte, men at den gjennomsnittlige poengsummen har falt markant fra den siste testen på prosjektet (T3) til posttesten (T5). På kort sikt (Test1-3) kan det se ut som gruppene som jobbet med aktiv memorering har hatt den beste utviklingen (en økning på 1,5 poeng i gjennomsnitt), mens problemløsningsgruppen har hatt den svakeste utviklingen. Forskjellene mellom problemløsningsgruppen og kontrollgruppen var riktig nok marginal (en økning på henholdsvis 0,4 poeng og 0,6 poeng i gjennomsnitt). For elever som har hatt en tradisjonell opplæring i derivasjon, og som ønsker å forbedre sine derivasjons-kunnskaper, kan det på sikt se ut som at det kan være gunstig å benytte en av de to alternative læringsmåtene, fremfor å fortsette med tradisjonell oppgaveregning.

I Tabell 4.2 ser vi at standardavvikene for de gjennomsnittlige poengsummene som er illustrert i Diagram 1 varierer fra 3,3 til 5,5. Dette innebærer at alle endringene i Diagram 1 er mindre enn ett standardavvik for alle tre gruppene. Vi har derfor ikke grunnlag for å slå fast at elevene på kontrollgruppene har prestert svakere på posttesten enn elevene på de to andre gruppene. Så selv om det ved første øyekast kan se ut som at de alternative læringsmåtene gir en bedre læringseffekt på sikt, må vi ta forbehold om at usikkerheten her er stor.

4.1.2 Resultater fordelt på kjønn

Hvis vi deler tallmaterialet inn etter kjønn, får vi tabellene og diagrammene som er vist nedenfor. De tre tabellene (med samlebetegnelsen Tabell 4.3) viser gjennomsnittlig poengsum for jentene.

Problemløsning (P):

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
T1_sum	11	3,5	16,0	8,364	3,8347
T2_sum	11	4,5	13,5	8,773	3,1414
T3_sum	11	,5	16,0	9,136	4,2195
T5_sum	11	2,0	16,0	10,045	4,9166
Valid N (listwise)	11				

Aktiv memorering (M):

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
T1_sum	8	2,0	11,5	7,563	3,5801
T2_sum	8	1,5	11,5	7,938	3,6979
T3_sum	8	4,5	12,5	8,125	2,4312
T5_sum	8	1,5	15,0	9,625	4,1382
Valid N (listwise)	8				

Tradisjonell oppgaveregning (K):

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
T1_sum	8	2,5	15,5	8,063	4,3870
T2_sum	8	3,0	13,5	7,813	3,7027
T3_sum	8	5,5	13,5	8,750	3,6154
T5_sum	8	2,5	15,5	7,938	4,3461
Valid N (listwise)	8				

Tabell 4.3 Gjennomsnittlige testresultater for jentene, fordelt på de tre gruppene problemløsning, aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning.

Resultatene fra tabell 4.3 er illustrert grafisk i diagrammet under.

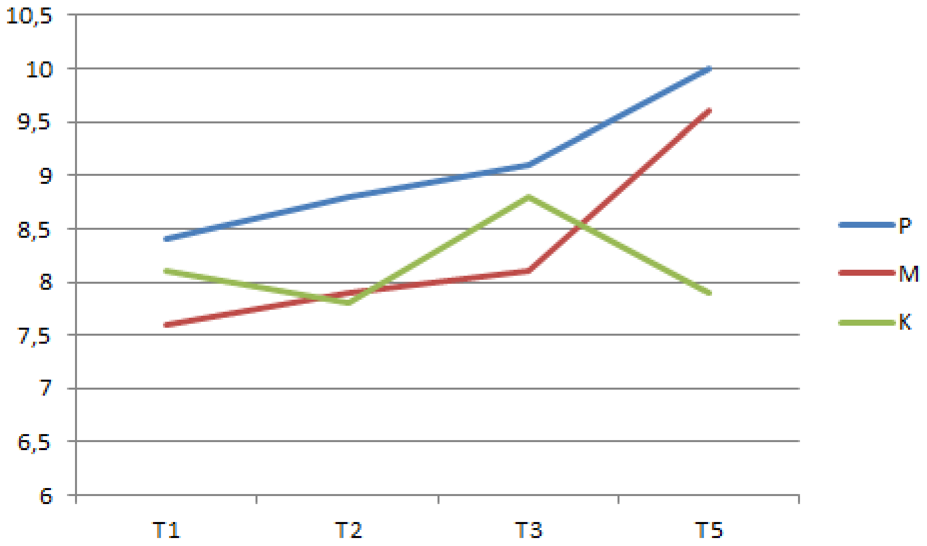


Diagram 2 Utviklingen av testresultater for jentene på de fire testene Test1 (T1), Test2 (T2), Test3 (T3) og Test5 (T5), fordelt på de tre gruppene problem-løsning (P), aktiv memorering (M) og tradisjonell oppgaveregning (K).

De tre tabellene (med samlebetegnelsen Tabell 4.4) viser gjennomsnittlig poengsum for guttene.

Problemløsning (P):

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
T1_sum	16	1,0	14,5	7,656	4,8329
T2_sum	16	,0	14,0	7,344	5,1404
T3_sum	16	,5	14,0	7,813	4,4305
T5_sum	16	,5	16,5	7,813	5,2974
Valid N (listwise)	16				

Aktiv memorering (M):

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
T1_sum	15	,5	15,0	9,000	3,4226
T2_sum	15	2,0	15,0	10,033	3,7582
T3_sum	15	2,5	15,5	11,033	3,3619
T5_sum	15	1,5	16,5	10,300	4,6591
Valid N (listwise)	15				

Tradisjonell oppgaveregning (K):

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
T1_sum	18	4,5	14,5	9,528	3,4277
T2_sum	18	,5	16,0	9,833	5,0439
T3_sum	18	3,0	15,5	10,139	4,1509
T5_sum	18	,5	16,5	8,194	5,2668
Valid N (listwise)	18				

Tabell 4.4 Gjennomsnittlige testresultater for guttene, fordelt på de tre gruppene problemløsning, aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning.

Resultatene fra tabell 4.4 er illustrert grafisk i diagrammet under.

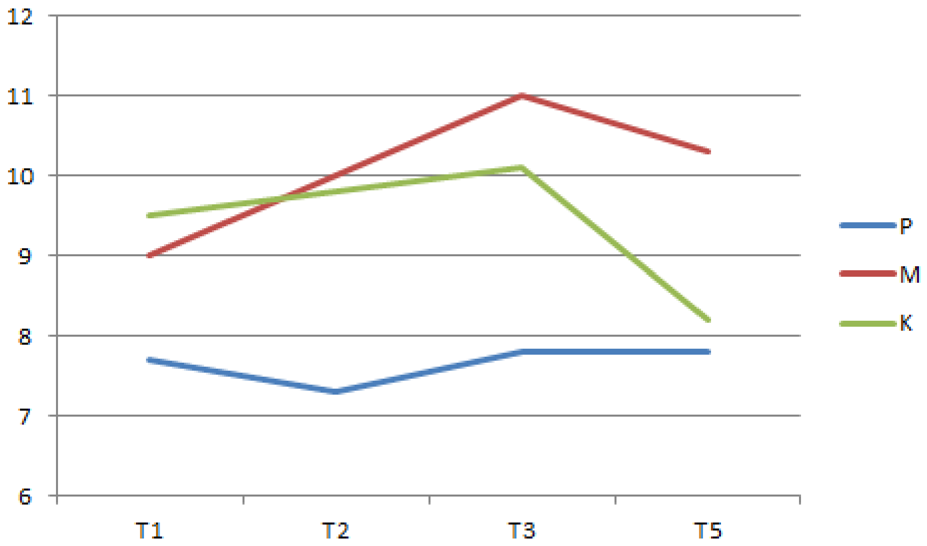


Diagram 3 Utviklingen av testresultater for guttene på de fire testene Test1 (T1), Test2 (T2), Test3 (T3) og Test5 (T5), fordelt på de tre gruppene problemløsning (P), aktiv memorering (M) og tradisjonell oppgaveregning (K).

Hvis vi sammenligner Diagram 2 og Diagram 3, og ser på utviklingen fra T3 til T5, kan det se ut som om jentene på sikt har hatt bedre utbytte av de alternative læringsmåtene enn guttene har hatt. For gruppene som jobbet med aktiv memorering var den langsiktige utviklingen motsatt for jentene og guttene: jentene på disse gruppene hadde den beste utviklingen av alle gruppene, mens guttene hadde en noe negativ utvikling - men likevel ikke så svak som for gruppen som jobbet med tradisjonell oppgaveregning. Det kan se ut som om problemløsningsgruppene har hatt den gunstigste utviklingen på sikt, når vi tar hensyn til både jentene og guttene. Dette kan begrunnes ved at guttene her ikke har hatt en tilbakegang fra T3 til T5 (i motsetning til de andre to gruppene), mens jentene har hatt en fremgang.

Igjen ser vi imidlertid at standardavvikene er relativt store (se Tabell 4.3 og Tabell 4.4), så vi kan ikke fastslå dette sikkert. Et annet moment er at antallet elever i hver gruppe nå begynner å bli svært lavt (8-11 for jentene og 15-18 for guttene). Dette gjør også at vi ikke kan sette altfor mye lit til sammenligningene vi her har gjort.

4.2 Resultater fra spørreundersøkelsen

Etter at derivasjonsprosjektet var avsluttet, ble elevene spurt om følgende i et spørreskjema:

1. Hvor godt de følte at de behersket derivasjon (skala fra 1 til 5, der 5 var best).
2. Om derivasjonsprosjektet hadde endret oppfatningen av hvordan de behersket derivasjon (3 svaralternativer: bedre, dårligere og uforandret).
3. Hvor mye de hadde jobbet med oppgavetypene på derivasjonsprosjektet tidligere (skala fra 1 til 5, der 5 var best).
4. Om de likte matematikk (skala fra 1 til 5, der 5 var best).
5. Om det var samsvar mellom oppgavene de jobbet med før testene, og oppgavene på testene (2 svaralternativer: ja og nei).
6. Om de trodde de kom til å få bruk for derivasjon senere i livet (2 svaralternativer: ja og nei).
7. Hvor ofte de jobbet med matematikk utenom skoletiden (5 svaralternativer: aldri, av og til, 1-2 dager i uken, 3-4 dager i uken og minst 5 dager i uken).
8. Hvilken karakter de fikk i R1 i 1. termin (skala fra 1 til 6, der 6 var best).
9. Hvilken karakter de håpet å få i standpunkt i R1 (skala fra 1 til 6, der 6 var best).

Spørsmål 1., 2., 3. og 5. gikk mer direkte på min problemstilling, mens de andre spørsmålene var mer for å kontrollere for andre forklaringsvariabler enn læringsmåtene. Svake resultater kunne f.eks. skyldes lav motivasjon (spm. 4. og 6.), liten arbeidsinnsats (spm. 7.) eller svake karakterer i faget (spm. 8. og 9.).

4.2.1 Resultater totalt

Jeg benyttet meg av to typer spørsmål i spørreskjemaet. Spørsmål nr. 1, 3, 4, 7, 8 og 9 hadde variabler på ordinalnivå, mens de tre resterende spørsmålene (nr. 2, 5 og 6) hadde variabler på nominalnivå. Siden jeg har benyttet litt ulik statistisk analyse for de to typene spørsmål, har jeg her valgt å presentere resultatene i to bolker etter variabeltype.

4.2.1.1 Spørsmål med variabler på ordinalnivå

De fire tabellene (med samlebetegnelsen Tabell 4.5) viser gjennomsnittet for besvarelsene av de spørsmålene i spørreskjemaet som har en skala. Helt spesifikt viser tabellen svarene på spørsmål 1., 3., 4., 7., 8. og 9., i den rekkefølge. Elevenes besvarelser på 7. ble kodet fra 1 (aldri) til 5 (minst 5) i SPSS.

Totalt:

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Behersker	76	1	5	3,37	,892
Tidligere erfaring	76	1	5	2,75	,926
Liker matte	76	2	5	3,96	,756
Arbeid per uke	76	1	5	2,67	,773
Kar 1. termin	76	2	6	4,30	,938
Kar standpunkt	76	2	6	4,61	,967
Valid N (listwise)	76				

Problemløsning:

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Behersker	27	1	5	3,30	,993
Tidligere erfaring	27	1	4	2,44	,847
Liker matte	27	2	5	4,04	,808
Arbeid per uke	27	1	5	2,78	,974
Kar 1. termin	27	2	6	4,26	1,130
Kar standpunkt	27	2	6	4,70	1,103
Valid N (listwise)	27				

Aktiv memorering:

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Behersker	23	1	5	3,39	,891
Tidligere erfaring	23	1	4	2,57	,843
Liker matte	23	3	5	3,96	,638
Arbeid per uke	23	2	4	2,83	,576
Kar 1. termin	23	3	6	4,39	,783
Kar standpunkt	23	3	6	4,61	,941
Valid N (listwise)	23				

Tradisjonell oppgaveregning:

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Behersker	26	2	5	3,42	,809
Tidligere erfaring	26	1	5	3,23	,908
Liker matte	26	2	5	3,88	,816
Arbeid per uke	26	1	4	2,42	,643
Kar 1. termin	26	3	6	4,27	,874
Kar standpunkt	26	3	6	4,50	,860
Valid N (listwise)	26				

Tabell 4.5 Gjennomsnittlig score på 6 av 9 spørsmål i spørreskjemaet. Øverste tabell viser tallene for alle elevene totalt, mens de tre neste tabellene viser tallene fordelt på elevene i hver av de tre gruppene som jobbet med henholdsvis problemløsning, aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning.

Vi merker oss at det i Tabell 4.5 kun er mindre forskjeller mellom de gjennomsnittlige verdiene for svarene på de seks spørsmålene i de fire tabellene; altså for alle elevene i undersøkelsen totalt, og for elevene i de tre gruppene som jobbet med henholdsvis problem-løsning, aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning. Alle forskjellene ligger dessuten innenfor ett standardavvik. I den videre analysen av tallmaterialet tar jeg derfor bare for meg den øverste tabellen i Tabell 4.5 som viser svarfordelingen totalt.

På spørsmålet om hvor godt elevene følte de behersket derivasjon etter prosjektets avslutning svarte de i gjennomsnitt 3,4, med et standardavvik på 0,9. Hvis vi tolker 3 som "middels", kan vi si at elevene følte at de var middels gode i derivasjon etter derivasjonsprosjektet. Dette samsvarer med 4.1, der gjennomsnittlig poengsum per test var 8,9 poeng av maksimalt 17 poeng.

På spørsmål om oppgavetypene elevene jobbet med i derivasjonsprosjektet var kjent fra før, var gjennomsnittet 2,8 og standardavviket 0,9. Vi kan tolke dette som at oppgavetypene ikke var helt ukjente, men heller ikke velkjente. Dette stemmer ikke helt overens med faglærernes vurderinger i forkant av derivasjonsprosjektet. Samtlige av disse R1-lærerne mente da at oppgavetypene burde være velkjente for elevene. Derimot stemmer det bra med det elevene som ble intervjuet ga uttrykk for i 4.4.1, der 4 av 5 elever mente at oppgavene på testene var vanskelige. Vi ser her at elevene som jobbet med tradisjonell oppgaveregning i større grad enn elevene som jobbet med de alternative læringsmåtene var fortrolige med oppgavetypene. Elevene som jobbet med problemløsning var minst fortrolig med oppgavetypen. Gjennom-snittet var her 0,8 lavere enn for elevene som jobbet med tradisjonell oppgaveregning. Dette var litt som forventet, med tanke på at alle R1-gruppene som var med i derivasjonsprosjektet vanligvis jobbet med nettopp tradisjonell oppgaveregning.

Det gjennomsnittlige svaret på spørsmålet om elevene likte matematikk var 4,0. Standard-avviket var her 0,8. Vi har dermed grunnlag for å si at elevene som var med i denne under-søkelsen var over middels glad i matematikk. Dette er ikke noe overraskende funn, med tanke på at dette var elever som selv har valgt å fortsette med matematikk i vg2, og i tillegg har valgt den mest utfordrende matematikken som tilbys norske vg2-elever. På den andre siden er det en del høyere studier som krever at elevene har matematikk R1 for at de skal komme inn på disse studiene. Det var derfor ikke utenkelig at en del av de 76 elevene hadde valgt R1 av rent taktiske grunner, uten at de likte faget spesielt godt. Men dette ser i liten grad ut til å ha vært tilfelle for elevene som var med i denne undersøkelsen. Det som ofte er avgjørende for om en elev liker matematikk, er at eleven får passe utfordrende oppgaver. Dvs. oppgaver som er på grensen av deres erkjennelsesområde (jfr. Piagets likevektsprinsipp i 2.1.1.1). Elevene befinner seg da i det Vygotsky kalte den proksimale utviklingssonen. Hvilke type oppgaver elevene får brynt seg på bestemmes normalt av læreren. Dette inngår i det Cobb kaller sosio-matematiske normer i klasserommet (jfr. 2.1.3.1). Faglærer vil derfor ofte spille en helt avgjørende rolle i om elevene liker matematikk eller ikke.

Spørsmålet om antall dager elevene arbeidet med matematikk utenom skoletiden ble i gjennomsnitt oppgitt til 2,7, med et standardavvik på 0,8. 2 vil her si "av og til", og 3 betyr "1-2 dager i uken". En rimelig tolkning av dette kan være at elevene som var med på derivasjons-prosjektet i gjennomsnitt arbeidet ca. 1 dag i uken med matematikk utenom skoletiden. Dette fremstår som ganske lavt med tanke på det karakternivået disse R1-elevene oppga. Flere av faglærerne uttrykte både overraskelse, og en smule skuffelse, da de fikk se disse tallene for sine respektive R1-grupper. En forklaring kunne være at elevene hadde fritimer på skolen som de benyttet til å jobbe med matematikk. En annen mulighet var prøvepresset elevene opplevde i vg2. Det er dette skoleåret elevene har flest fag, og dermed flest prøver. En observasjon som jeg selv har merket meg er at mange elever ikke rekker å gjøre noe særlig skolearbeid, fordi det "alltid" er en prøve de må forberede seg på. Elevene skiller ofte ikke mellom de ulike vurderingssituasjonene, slik at alt føles like viktig. Elever som ønsker å få toppkarakter i et fag, føler at de må levere toppresultater på absolutt alle vurderingssituasjoner. Hvis dette har vært tilfelle for flere av elevene som deltok i undersøkelsen, ville de ikke hatt mye tid igjen til å jobbe med R1 utenom prøvene. Det kan være mange ytre faktorer som påvirker elevenes arbeidsinnsats. Men ofte vil elevenes holdninger og verdier veie tungt: hva er viktigst i R1 - å lære matematikk eller å få gode karakterer? Fokuserer faglærer på utviklingsprosessen eller sluttproduktet (resultatet)? De sosiale normer som etableres i klasserommet (jfr. 2.1.3.1) vil med andre ord ofte være svært avgjørende for elevenes arbeidsinnsats i R1.

I gjennomsnitt oppga elevene at de hadde 4,3 i karakter i R1 i første termin, med et standardavvik på 0,9. Gjennomsnittlig standpunktkarakter i 2014 for R1 var 3,9 i Hordaland og 4,0 i Norge (Utdanningsdirektoratet, 2106j). Vi ser altså at elevene i denne undersøkelsen oppga en ganske høy gjennomsnittskarakter i R1. Dette står i noe kontrast til resultatene fra 4.1, der elevene har en stor spredning i poengsummene på testene. Hvis vi studerer tallmaterialet nøye (se vedlegg 7.7.1), ser vi at en god del elever (rundt 30) gjorde det påtakelig svakere på testene enn den oppgitte karakteren i første termin i R1 skulle tilsi. En forklaring på dette kan være at derivasjon er et mye vanskeligere emne enn det elevene har jobbet med til nå i R1. Men vi skal heller ikke utelukke at en del av disse elevene ikke har tatt testene like alvorlig som de gjør når de har tellende prøver i faget. Elev4 ga f.eks. uttrykk for slike holdninger i intervjusituasjonen som er gjengitt i 4.4.4.

Til tross for den ganske høye gjennomsnittlige karakteren elevene har oppgitt i R1 i første termin, viste det seg at de i gjennomsnitt håpet på en enda bedre karakter i standpunkt. Her hadde de oppgitt 4,6 i gjennomsnitt, med et standardavvik på 1,0. Forskjellen mellom den gjennomsnittlige oppgitte karakteren i første termin og det de håpet å få i standpunktkarakter er mindre enn ett standardavvik.

Oppsummert kan vi si at undersøkelsen bekrefter hypotesen om at derivasjon er et vanskelig emne i R1. Til tross for at elevene i derivasjonsprosjektet likte matematikk og hadde ganske høye gjennomsnittskarakterer, var resultatene likevel svært variable på testene. Og til tross for at faglærerne mente at oppgavetypene elevene møtte skulle være kjente, oppfattet elevene disse som noe uvante. Etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet var elevenes oppfatning at de behersket derivasjon middels godt. Dette samsvarer bra med gjennomsnittet av alle test-resultatene. Men i motsetning til testene, var det her marginale forskjeller mellom de tre gruppene - altså mellom elevene som jobbet med problemløsning, aktiv memorering eller med tradisjonell oppgaveregning. Ett unntak var knyttet til hvor fortrolig elevene var med den typen oppgaver de jobbet med. Her var elevene som jobbet med tradisjonell oppgaveregning en god del mer fortrolige med oppgavetypene enn elevene som jobbet med de alternative læringsmåtene.

4.2.1.2 Spørsmål med variabler på nominalnivå

Tabellene under (med samlebetegnelse Tabell 4.6) viser resultatene for de resterende spørsmålene i spørreskjemaet totalt sett; dvs. spørsmål 2., 5. og 6. i den rekkefølge.

Endring av elevenes oppfatning av hvordan de behersket derivasjon etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet (spm. 2.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Bedre	27	35,5	35,5	35,5
	Dårligere	8	10,5	10,5	46,1
	Uforandret	41	53,9	53,9	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

Om det var samsvar mellom oppgavene elevene jobbet med før testene, og de oppgavene de fikk på testene (spm. 5.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ja	40	52,6	52,6	52,6
	Nei	36	47,4	47,4	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

Om elevene mente de ville få bruk for derivasjon senere i livet (spm. 6.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ja	49	64,5	64,5	64,5
	Nei	27	35,5	35,5	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

Tabell 4.6 Besvarelsene på de 3 spørsmålene i spørreskjemaet som ikke er presentert i Tabell 4.5 for alle elevene i undersøkelsen.

Tabellene under (med samlebetegnelse Tabell 4.7) viser resultatene fra spørsmål 2., 5. og 6. i spørreskjemaet, når vi kun ser på elevene i problemløsningsgruppene.

Endring av elevenes oppfatning av hvordan de behersket derivasjon etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet (spm. 2.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Bedre	8	29,6	29,6	29,6
	Dårligere	2	7,4	7,4	37,0
	Uforandret	17	63,0	63,0	100,0
	Total	27	100,0	100,0	

Om det var samsvar mellom oppgavene elevene jobbet med før testene, og de oppgavene de fikk på testene (spm. 5.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ja	11	40,7	40,7	40,7
	Nei	16	59,3	59,3	100,0
	Total	27	100,0	100,0	

Om elevene mente de ville få bruk for derivasjon senere i livet (spm. 6.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ja	15	55,6	55,6	55,6
	Nei	12	44,4	44,4	100,0
	Total	27	100,0	100,0	

Tabell 4.7 Besvarelsene fra elevene i problemløsningsgruppene på de 3 spørsmålene i spørreskjemaet som ikke er presentert i Tabell 4.5.

Tabellene under (med samlebetegnelse Tabell 4.8) viser resultatene fra spørsmål 2., 5. og 6. i spørreskjemaet, når vi kun ser på elevene i gruppene som jobbet med aktiv memorering.

Endring av elevenes oppfatning av hvordan de behersket derivasjon etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet (spm. 2.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Bedre	9	39,1	39,1	39,1
	Dårligere	2	8,7	8,7	47,8
	Uforandret	12	52,2	52,2	100,0
	Total	23	100,0	100,0	

Om det var samsvar mellom oppgavene elevene jobbet med før testene, og de oppgavene de fikk på testene (spm. 5.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ja	11	47,8	47,8	47,8
	Nei	12	52,2	52,2	100,0
	Total	23	100,0	100,0	

Om elevene mente de ville få bruk for derivasjon senere i livet (spm. 6.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ja	17	73,9	73,9	73,9
	Nei	6	26,1	26,1	100,0
	Total	23	100,0	100,0	

Tabell 4.8 Besvarelsene fra elevene i gruppene for aktiv memorering på de 3 spørsmålene i spørreskjemaet som ikke er presentert i Tabell 4.5.

Tabellene under (med samlebetegnelse Tabell 4.9) viser resultatene fra spørsmål 2., 5. og 6. i spørreskjemaet, når vi kun ser på elevene i kontrollgruppene - altså de som jobbet med tradisjonell oppgaveregning.

Endring av elevenes oppfatning av hvordan de behersket derivasjon etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet (spm. 2.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Bedre	10	38,5	38,5	38,5
	Dårligere	4	15,4	15,4	53,8
	Uforandret	12	46,2	46,2	100,0
	Total	26	100,0	100,0	

Om det var samsvar mellom oppgavene elevene jobbet med før testene, og de oppgavene de fikk på testene (spm. 5.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ja	18	69,2	69,2	69,2
	Nei	8	30,8	30,8	100,0
	Total	26	100,0	100,0	

Om elevene mente de ville få bruk for derivasjon senere i livet (spm. 6.):

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Ja	17	65,4	65,4	65,4
	Nei	9	34,6	34,6	100,0
	Total	26	100,0	100,0	

Tabell 4.9 Besvarelsene fra eleven i kontrollgruppene på de 3 spørsmålene i spørreskjemaet som ikke er presentert i Tabell 4.5.

Resultatene fra Tabell 4.6-4.9 er vist i diagrammene nedenfor.

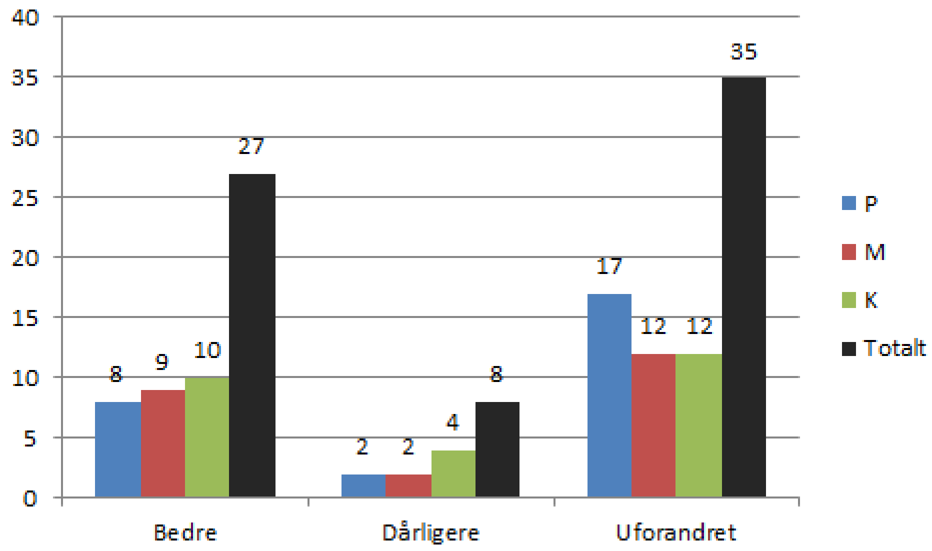


Diagram 4 Endring av elevenes oppfatning av hvordan de behersket derivasjon etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet (spm. 2.).

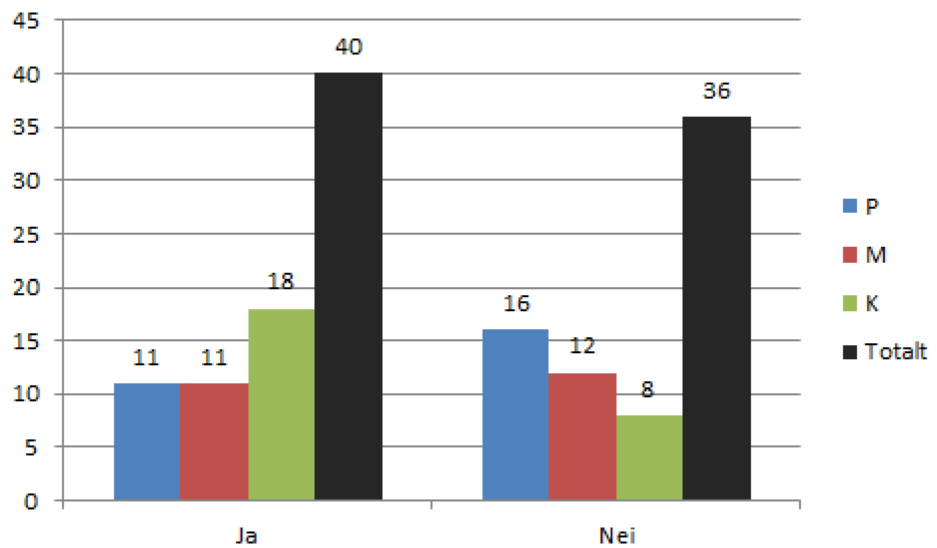


Diagram 5 Om det var samsvar mellom oppgavene elevene jobbet med før testene, og de oppgavene de fikk på testene (spm. 5.).

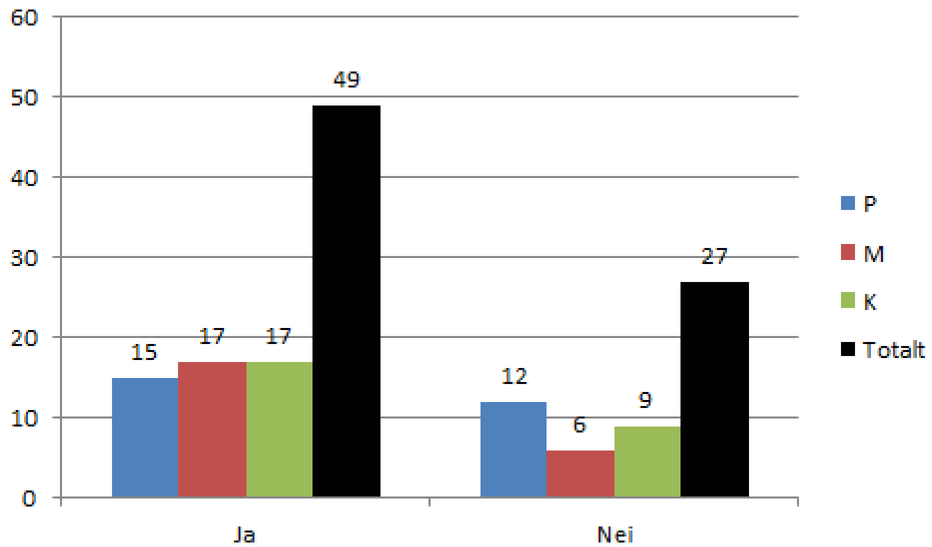


Diagram 6 Om elevene mente de ville få bruk for derivasjon senere i livet (spm. 6.).

På spørsmålet om hvordan elevene følte at derivasjonsprosjektet hadde endret mestrings-følelsen deres innen derivasjon, ser vi i Diagram 4 at flertallet (35) mente at dette var uforandret. Men det var ganske mange (27) som mente at de var blitt bedre i derivasjon i løpet av prosjektet. Dette var ikke spesielt overraskende tall, ut fra tilbakemeldinger jeg hadde mottatt fra faglærerne, og på bakgrunn av observasjoner i de ulike klasserommene jeg hadde besøkt i løpet av derivasjons-prosjektet. Ord som gikk igjen var på den ene siden "interessant", "lært mye" og "gøy", og på den andre siden "litt vanskelig", "uvant" og "forstyrrende for forberedelsene til heldagsprøven". Det mest oppsiktsvekkende her er at det faktisk var 8 elever som mente de var blitt dårligere i derivasjon. Og det etter å ha jobbet intenst med derivasjon i 3 dobbelttimer!

Vi merker oss at fordelingen på de ulike gruppene var ganske jevn. Det var en overvekt blant elevene på problemløsningsgruppene (17 elever, mot 12 for hver av de andre to gruppene) som mente at de ikke hadde opplevd noen endring. Igjen var dette litt som forventet, basert på inntrykkene jeg hadde mottatt underveis i prosjektet. Det var blant disse gruppene jeg fant flest elever som uttrykte en viss frustrasjon over oppgavene. Flere mente at oppgavene var ganske vanskelige. Og en frustrert elev sitter ikke nødvendigvis igjen med en økt mestrings-følelse. Studerer vi de vedlagte grunnlagsdataene (se 7.7.1) nøyere, ser vi at det ikke alltid var samsvar mellom følelsen av å ha blitt dårligere i derivasjon, og prestasjonene på testene. For 5 av de 8 elevene som mente de var blitt dårligere i derivasjon i løpet av prosjektperioden, viste utviklingen på testene det motsatte; nemlig en jevn positiv utvikling. De 3 andre elevene hadde prestert variabelt, men uten noen tydelig negativ trend. Derimot hadde samtlige av de 3 sistnevnte elevene hatt en bedre poengsum på en av de to tidligere testene, enn de hadde på den siste testen (T3) før de svarte på spørreundersøkelsen. Dette kan ha bidratt til en følelse av at derivasjonskunnskapene utviklet seg i feil retning. Ellers ser vi også av grunnlagsdataene (jfr. 7.7.1) at det også var en god del av de som følte at de var blitt bedre i derivasjon i løpet prosjektperioden, som faktisk hadde hatt en heller negativ utvikling på testene.

Når det gjelder spørsmålet om det var samsvar mellom oppgavene de jobbet med i forkant av testene, og de oppgavene de fikk på testene, ser vi i Diagram 5 at det var en liten overvekt (40 mot 36) som mente at det var et slikt samsvar. Deler vi inn tallmaterialet på gruppenivå, ser vi at var en ganske klar overvekt av elevene som jobbet med tradisjonell oppgaveregning (kontrollgruppene) som mente at det var et slikt samsvar (18 elever, mot 11 for de to andre gruppene). For de som mente at det ikke var et samsvar mellom øvingsoppgavene og test-oppgavene, ser vi en jevn økning fra kontrollgruppene (8 elever), via gruppene som jobbet med aktiv memorering (12 elever) til problemløsningsgruppene (16 elever). En slik fordeling på gruppenivå var som forventet, siden testene var bygget opp på en måte som burde være ganske gjenkjennelig for elevene på kontrollgruppene, og kanskje ikke fullt så gjenkjennelig for elevene på problemløsningsgruppene (se 3.1.1 og 7.4).

Vi ser i Diagram 6 at et klart flertall av elevene (49 mot 27) mente at de ville få bruk for derivasjon senere i livet. For mange elever kan en slik følelse av nytte være viktig for motivasjonen for å lære seg et emne i matematikk. Det er da snakk om det Ryan & Deci (1994) kaller ytre motivasjon regulert av identifisering (William, 2007). I så fall kan det i verste fall ha vært ca. 35 % av elevene som deltok i derivasjonsprosjektet som manglet en slik motivasjon for å lære seg derivasjon, utover det som er nødvendig for å prestere på kommende prøver og eksamener i R1. Vi ser at det varierte en del mellom gruppene hvorvidt derivasjon ble oppfattet som nyttig, der det var størst andel av elevene som jobbet med aktiv memorering som mente dette og minst andel blant elevene på problemløsningsgruppene. En viktig faktor som kan være avgjørende for hvorvidt elevene oppfatter derivasjon som nyttig er de sosiale normer som etableres i klasserommet (jfr. 2.1.3.1). Faglæreren vil med andre ord kunne spille en viktig rolle i om elevene oppfatter derivasjon som nyttig.

Oppsummert ser vi at det var en viss spredning mellom de tre gruppene i forhold til om elevene oppfattet derivasjon som nyttig. Videre følte et flertall av elevene at de ikke var blitt bedre i derivasjon av å delta på derivasjonsprosjektet, og dette gjaldt for alle de tre gruppene. Dette siste står i kontrast til utviklingen av testresultatene i Diagram 1, der alle tre gruppene har hatt en positiv utvikling i gjennomsnitt i løpet av derivasjonsprosjektet Det kan altså se ut som det for mange elever ikke var samsvar mellom den objektive læringsutviklingen slik den kom til uttrykk på testene og den subjektive opplevelsen av læringsutviklingen uttrykt i spørreundersøkelsen. Elevene som jobbet med problemløsning opplevde i mindre grad enn elevene som jobbet med tradisjonell oppgaveregning at det var samsvar mellom øvings-oppgavene og testoppgavene. Dette kan bidra til å forklare at problemløsningsgruppene i gjennomsnitt hadde en flat utvikling fra første til andre test (jfr. Diagram 1). Men til tross for denne litt tunge starten, og det manglende samsvaret de følte mellom problemløsnings-oppgavene og testoppgavene, skilte altså ikke denne gruppen seg negativt ut sammenlignet med de andre to gruppene når det gjaldt opplevd mestringsutvikling.

4.2.2 Resultater fordelt på kjønn

Tabellene under er krysstabeller som viser kjønnsfordelingen for besvarelsene av de av spørsmålene i spørreskjemaet som var mest interessante i forhold til min problemstilling.

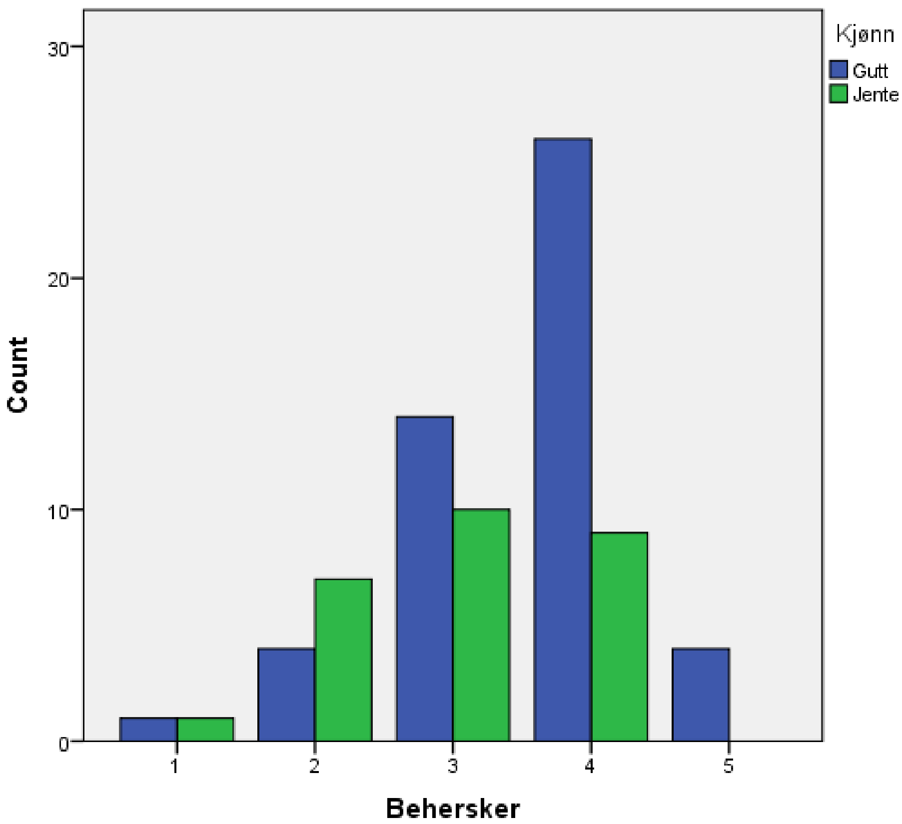


Diagram 7 Hvor godt elevene (på en skala fra 1 til 5, der 5 var best) følte at

de behersket derivasjon etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet (spm. 1.).

Vi ser av Diagram 7 at jentene har en topp for verdien 3, mens guttene har en topp for verdien 4. Vi merker oss også at det var noen gutter som oppga verdien 5, mens ingen jenter gjorde dette. Dette kan tyde på at flere gutter enn jenter følte at de behersket derivasjon godt blant de elevene som var med på derivasjonsprosjektet. For å sjekke om denne mestringsfølelsen stemte overens med prestasjonene på testene, telte jeg opp antall elever som presterte minst 75 % av maksimal poengsum på minst én av testene som ble gjennomført i løpet av derivasjons-prosjektet (T1, T2 og T3), og så hvordan disse fordelte seg på kjønn. Siden 75 % av 17 poeng gir 12,8 poeng, telte jeg opp alle elevene i grunnlagsdataene (se 7.7.1) som hadde 13 poeng eller mer på minst én test. Det var til sammen 20 gutter og 5 jenter som oppfylte dette kriteriet. Og når vi i 4.3 ser at det er en moderat, signifikant korrelasjon (0,689) mellom Sum_Tot og de svarene elevene har oppgitt her (om de følte at de behersker derivasjon), kan det tyde på at mange av guttene kan ha gode grunner for sin positive mestringsfølelse i forhold til derivasjon.

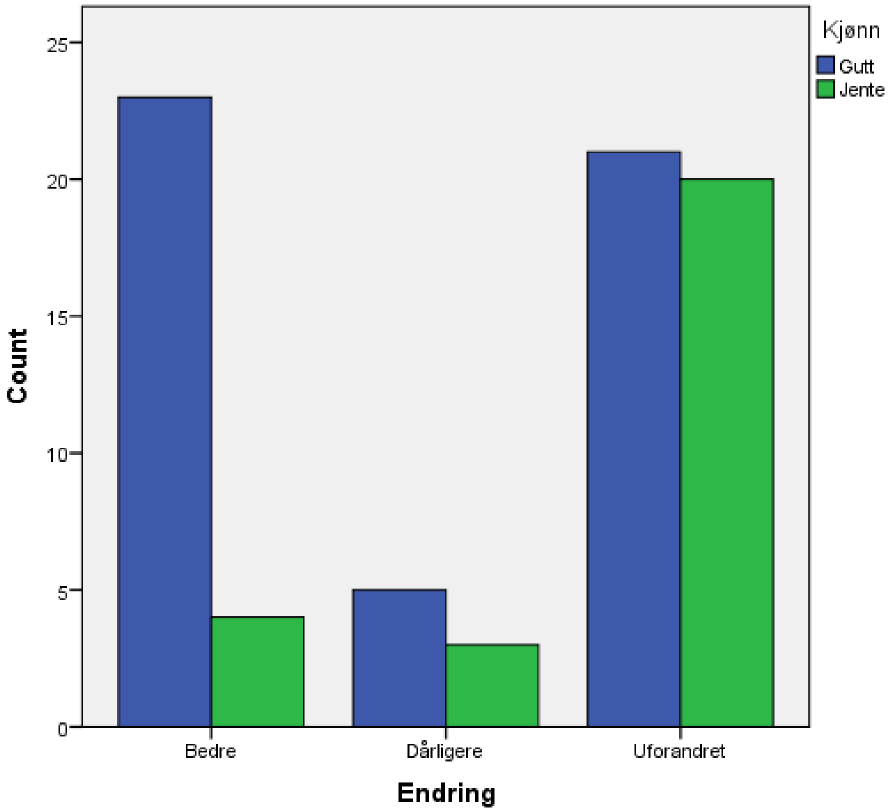


Diagram 8 Hvordan derivasjonsprosjektet hadde endret elevenes oppfatning av hvordan de behersket derivasjon (spm. 2.).

			Kjønn		Total
			Gutt	Jente	
Endring	Bedre	Count	23	4	27
		% within Kjønn	46,9%	14,8%	35,5%
		% of Total	30,3%	5,3%	35,5%
	Dårligere	Count	5	3	8
		% within Kjønn	10,2%	11,1%	10,5%
		% of Total	6,6%	3,9%	10,5%
	Uforandret	Count	21	20	41
		% within Kjønn	42,9%	74,1%	53,9%
		% of Total	27,6%	26,3%	53,9%
Total		Count	49	27	76
		% within Kjønn	100,0%	100,0%	100,0%
		% of Total	64,5%	35,5%	100,0%

Tabell 4.10 Hvordan derivasjonsprosjektet hadde endret elevenes oppfatning av hvordan de behersket derivasjon (spm. 2.).

Når det gjelder hvordan derivasjonsprosjektet har endret elevenes oppfatning av hvordan de behersket derivasjon, ser vi av Diagram 8 at "Bedre" er på topp for guttene, med "Uforandret" like bak. Dette tyder på at guttene opplevde at de har hatt et læringsutbytte av å delta på derivasjonsprosjektet. Hvis vi sammenligner med Diagram 6, ser vi at en slik følelse av økt læring ikke kom til uttrykk i testresultatene i løpet av prosjektperioden (T1-T3) for guttene som var på problemløsningsgruppene og i liten grad for elevene på kontrollgruppene. 5 av guttene mente de var blitt dårligere i derivasjon i løpet av de tre dobbelttimene prosjektet varte. Diagram 8 viser videre at "Uforandret" kommer klart på topp for jentene. Søylene for "Bedre" og "Dårligere" er omtrent like store (henholdsvis 4 og 3 jenter). Besvarelsene her gir inntrykk av at jentene i liten grad har opplevd et økt læringsutbytte av å delta på derivasjonsprosjektet. Sammenligner vi dette med Diagram 1, ser vi at dette ikke helt stemmer overens med utviklingen av testresultatene i løpet av prosjektperioden. Riktig nok var det en liten dupp i utviklingen for kontrollgruppen på T2. Men ellers hadde jentene en positiv utvikling av gjennomsnittspoeng på de tre testene som ble gjennomført i løpet av derivasjonsprosjektet. Når det gjelder utviklingen av de gjennomsnittlige testresultatene for jentene og gutten, må vi ta forbehold om at standardavvikene her var ganske store, og at det dermed er knyttet stor usikkerhet til disse tallene.

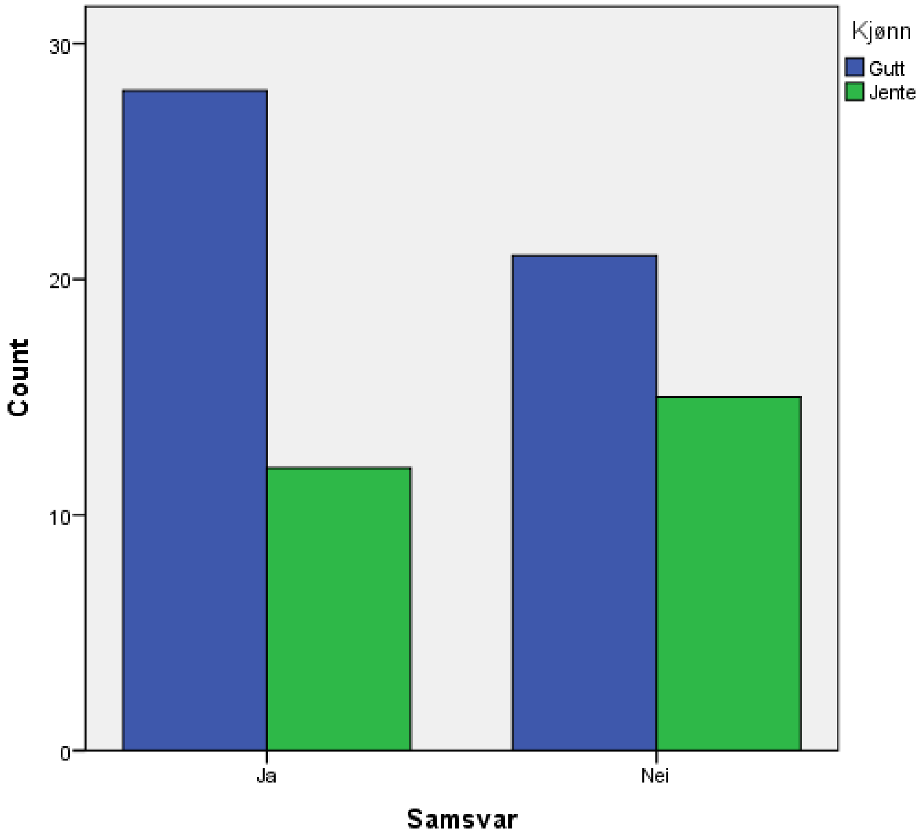


Diagram 9 Om elevene følte det var samsvar mellom oppgavene de fikk på testene, og oppgavene de hadde jobbet med i forkant av testene (spm. 5.).

			Kjønn		Total
			Gutt	Jente	
Samsvar	Ja	Count	28	12	40
		% within Kjønn	57,1%	44,4%	52,6%
		% of Total	36,8%	15,8%	52,6%
	Nei	Count	21	15	36
		% within Kjønn	42,9%	55,6%	47,4%
		% of Total	27,6%	19,7%	47,4%
Total		Count	49	27	76
		% within Kjønn	100,0%	100,0%	100,0%
		% of Total	64,5%	35,5%	100,0%

Tabell 4.11 Om elevene følte at det var samsvar mellom oppgavene de fikk på testene, og oppgavene de hadde jobbet med i forkant av testene (spm. 5.).

Vi ser av Diagram 9 at et flertall av guttene opplevde at det var samsvar mellom oppgavene de jobbet med før testene, og oppgavene de fikk på testene. Det var likevel en stor andel som ikke følte at det var et slikt samsvar. For jentene var det omvendt.

Oppsummert kan det se ut som om guttene generelt har hatt en mer positiv opplevelse av å være med på derivasjonsprosjektet, sammenlignet med jentene. De opplevde en høyere mestringsfølelse i forhold til derivasjon, og følte i større grad enn jentene at de var blitt bedre i derivasjon i løpet av prosjektet. De følte også i større grad at det var samsvar mellom øvingsoppgavene og testoppgavene. Sammenstiller vi dette med resultatene fra 4.1.2, kan det se ut som at jentene har hatt et større faktisk utbytte av å jobbe med derivasjon på en alternativ måte enn guttene, mens guttene generelt (altså uavhengig av hvilken gruppe de har vært på) ser ut til å ha hatt et større opplevd utbytte av å være med på derivasjonsprosjektet, sammenlignet med jentene. Siden alle R1-gruppene som var med i dette forskningsprosjektet i all hovedsak praktiserte tradisjonell oppgaveregning, slik det er definert i 1.3.3, kan en mulig forklaring på denne kjønnsforskjellen ligge i det som i 2.1.3.1 kalles sosio-normative forhold i R1-gruppene. Funnene her kan muligens tyde på at jentene var mer fornøyd med tradisjonell oppgaveregning enn det guttene var, og at guttene kanskje derfor var mer positiv til andre læringsmåter enn jentene. Dette ligger noe på siden av mitt forskningsprosjekt, men kan være interessant å følge opp i fremtidig forskning.

4.3 Korrelasjoner mellom resultater fra testene og spørreundersøkelsen

Korrelasjon vil si samsvar eller samvariasjon, og angis av en koeffisient som ligger i intervallet [-1, 1]. En korrelasjon på 0 vil si at det ikke finnes noen samvariasjon, mens 1 vil si at det er en fullstendig positiv samvariasjon. En korrelasjon på -1 vil si at det er en fullstendig negativ samvariasjon. Hva som regnes som sterk eller svak korrelasjon er avhengig av hva som undersøkes. Cohen & Holliday (1982) foreslår følgende tommelfingerregel:

- $0,00 \le \rho < 0,20$: Veldig svak
- $0,20 \le \rho < 0,40$: Svak
- $0,40 \le \rho < 0,70$: Moderat
- $0,70 \le \rho < 0,90$: Høy
- $0,90 \le \rho < 1,00$: Meget høy (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Tabellene nedenfor angir korrelasjoner mellom resultatene fra de mest interessante spørsmålene med verdier på ordinalnivå i spørreskjemaet i forhold til min problemstilling (spm. 1. og 3.) og den samlede poengsummen fra Test1, Test2, Test3 og Test5, her kalt sum_tot. Jeg har benyttet bivariat korrelasjon i SPSS, med Spearmans Rank (ρ koeffisient). Grunnen til at jeg her har benyttet Spearmans ρ, og ikke den ofte foretrukne Pearsons *r* koeffisienten, var at de aktuelle besvarelsene fra spørreskjemaet var variabler på ordinalnivå (McCormick & Salcedo, 2015).

4.3.1 Korrelasjoner mellom testresultater og mestringsfølelse

Totalt:

			Sum av T1, T2, T3 og T5	Behersker
Spearman's rho	Sum av T1, T2, T3 og T5	Correlation Coefficient	1,000	,689**
		Sig. (2-tailed)	.	,000
		N	76	76
	Behersker	Correlation Coefficient	,689**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	.
		N	76	76

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Problemløsning:

			Sum av T1, T2, T3 og T5	Behersker
Spearman's rho	Sum av T1, T2, T3 og T5	Correlation Coefficient	1,000	,717**
		Sig. (2-tailed)	.	,000
		N	27	27
	Behersker	Correlation Coefficient	,717**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	.
		N	27	27

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Aktiv memorering:

			Sum av T1, T2, T3 og T5	Behersker
Spearman's rho	Sum av T1, T2, T3 og T5	Correlation Coefficient	1,000	,633**
		Sig. (2-tailed)	.	,001
		N	23	23
	Behersker	Correlation Coefficient	,633**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,001	.
		N	23	23

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tradisjonell oppgaveregning:

			Sum av T1, T2, T3 og T5	Behersker
Spearman's rho	Sum av T1, T2, T3 og T5	Correlation Coefficient	1,000	,663**
		Sig. (2-tailed)	.	,000
		N	26	26
	Behersker	Correlation Coefficient	,663**	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	.
		N	26	26

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabell 4.12 Korrelasjon mellom sum_tot og i hvor stor grad elevene følte at de behersket derivasjon etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet. Øverste tabell viser korrelasjonen for alle elevene totalt, mens de tre neste tabellene viser korrelasjonene fordelt på elevene i hver av de tre gruppene som jobbet med problemløsning, aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning.

Vi ser av Tabell 4.12 at det er en moderat korrelasjon mellom sum_tot og i hvor stor grad elevene følte at de behersket derivasjon. Når vi deler inn tallmaterialet på den enkelte gruppe, ser vi at korrelasjonen også er moderate for de gruppene som jobbet med aktiv memorering (0,633) og for de som jobbet med tradisjonell oppgaveregning (0,663), mens den er høy for de gruppene som jobbet med problemløsning (0,717). Det var altså størst samvariasjon for problemløsningsgruppene. Vi merker oss også at alle korrelasjonene her er signifikante ved 1 % nivå (altså at det er mindre enn 1 % sannsynlighet for at sammenhengen skyldes tilfeldigheter).

4.3.2 Korrelasjoner mellom testresultater og erfaringer med oppgavetypene

Totalt:

			Sum av T1, T2, T3 og T5	Tidligere erfaring
Spearman's rho	Sum av T1, T2, T3 og T5	Correlation Coefficient	1,000	,207
		Sig. (2-tailed)	.	,073
		N	76	76
	Tidligere erfaring	Correlation Coefficient	,207	1,000
		Sig. (2-tailed)	,073	.
		N	76	76

Problemløsning:

			Sum av T1, T2, T3 og T5	Tidligere erfaring
Spearman's rho	Sum av T1, T2, T3 og T5	Correlation Coefficient	1,000	,093
		Sig. (2-tailed)	.	,646
		N	27	27
	Tidligere erfaring	Correlation Coefficient	,093	1,000
		Sig. (2-tailed)	,646	.
		N	27	27

Aktiv memorering:

			Sum av T1, T2, T3 og T5	Tidligere erfaring
Spearman's rho	Sum av T1, T2, T3 og T5	Correlation Coefficient	1,000	,304
		Sig. (2-tailed)	.	,159
		N	23	23
	Tidligere erfaring	Correlation Coefficient	,304	1,000
		Sig. (2-tailed)	,159	.
		N	23	23

Tradisjonell oppgaveregning:

			Sum av T1, T2, T3 og T5	Tidligere erfaring
Spearman's rho	Sum av T1, T2, T3 og T5	Correlation Coefficient	1,000	,231
		Sig. (2-tailed)	.	,257
		N	26	26
	Tidligere erfaring	Correlation Coefficient	,231	1,000
		Sig. (2-tailed)	,257	.
		N	26	26

Tabell 4.13 Korrelasjon mellom sum_tot og i hvor stor grad elevene kjente oppgavetypene i derivasjonsprosjektet fra før. Øverste tabell viser korrelasjonen for alle elevene totalt, mens de tre neste tabellene viser korrelasjonene fordelt på elevene i hver av de tre gruppene som jobbet med problemløsning, aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning.

Vi ser av Tabell 4.13 at ingen av korrelasjonene her er signifikante. De tre gruppene har alle ganske høye *p*-verdier (15,9-64,6 %), mens totalen har en *p*-verdi på 7,3 %.

4.4 Resultater fra intervjuene

Etter å ha gjennomgått transkripsjonene fra intervjuene, identifiserte jeg 5 emner som gikk igjen hos intervjuobjektene. Jeg valgte derfor å dele opp resultatene fra intervjuene etter disse 5 kategoriene: Vanskelighetsgrad (oppgaver), derivasjon (oppfatning), læringsmåte (preferanse), læringsutbytte og læringsvarighet.

Elev1, Elev2 og Elev4 var på problemløsningsgrupper, Elev3 var på en gruppe som jobbet med aktiv memorering, mens Elev5 var på en kontrollgruppe som jobbet med tradisjonell oppgaveregning. Videre hadde Elev1 og Elev4 en klar negativ utvikling på testene, men hevdet i spørreundersøkelsen at de hadde blitt bedre i derivasjon i løpet av prosjektperioden. For Elev2, Elev3 og Elev5 var det motsatt; de hadde en klar positiv utvikling på testene, men hevdet likevel at deltakelsen på derivasjonsprosjektet ikke hadde endret hvor godt de følte at de behersket derivasjon. Elev5 hevdet sågar å ha blitt dårligere i derivasjon i løpet av prosjektperioden.

4.4.1 Oppgavenes vanskelighetsgrad

På spørsmål om hvordan det hadde vært å jobbe på en annen måte enn til vanlig, svarte Elev1 følgende:

> E1: Jeg vet ikke helt. Det var veldig vanskelig i forhold til vanlige derivasjons-oppgaver. Det ble litt ekstra utfordrende.

Og videre:

> E1: Det var kanskje litt dårlig tid på oppgavene før. I alle fall var det sånn for meg. For jeg hadde ikke noe særlig god kontroll på derivasjon fra før av. Så bare det å derivere de funksjonene var vanskelig. Også når jeg i tillegg skulle jobbe med sånne problemløsninger. Så det ble litt stressende.

Den andre eleven fikk spørsmål om vedkommende var blitt bevisst på oppbyggingen av oppgavene knyttet til derivasjon - altså at slike oppgaver kunne deles inn i de tre delene regelbruk, anvendelse og problemløsning. Elev2 svarte da

> E2: Ja, det føler jeg. Men jeg synes kanskje oppgavene ... De var litt vanskelige. Jeg vet ikke om det er sånn på eksamen? På testene - det var litt stress.

Og fortsatte videre:

> E2: Etter første testen så følte jeg at det gikk bedre før jeg begynte med det. Jeg tror det var fordi oppgavene var litt vanskelige. Det var lenge siden jeg hadde gjort de der f.eks. (peker på en oppgave fra en av testene, der man skal derivere et funksjonsuttrykk). Jeg klarte ikke de. Vi var jo på problemløsnings-gruppen, så da løste vi sånne oppgaver. Så når jeg skulle derivere ln x, hadde jeg helt glemt det.

Elev2 følte dessuten at det gikk ganske dårlig på testene:

> E2: Ja, det er jo ... Jeg følte i alle fall at når jeg satt og jobbet med oppgaven her, så klarte jeg på en måte å tenke meg til det. Men på testen, da det kom forskjellige

135 ting som vi skulle sette sammen, da gikk det litt dårlig.

Også Elev3 følte at det var mye som var vanskelig i forbindelse med derivasjonsprosjektet:

7 E3: Jeg følte det var litt vanskelig med alle de reglene å pugge. Og jeg skjønte ikke
8 helt hvorfor vi gjorde det. Eller fikk så mye ut av akkurat de.

147 E3: Jeg likte egentlig ikke den så veldig godt. Fordi det var mange av de
148 kompliserte reglene som vi måtte pugge, og jeg skjønte ikke helt hvorfor.

172 I: Du synes ikke det ble noe bedre? Det var like vanskelig hele tiden med disse
173 problemløsingsoppgavene?
174
175 E3: Jeg synes egentlig det. Jeg tror det. Kanskje jeg ikke kan helt definisjonen av
176 den deriverte og sånn? Det skjønte jeg ikke helt på de oppgavene vi jobbet med
177 heller.

284 E3: Men jeg føler at den gruppen vi var på, så... Nei, jeg skjønte ikke så altfor mye
285 av det. Altså jeg pugget de, men jeg vet ikke helt om jeg forstod de.

Elev4 syntes derimot at både øvingsoppgavene og testene var greie å jobbe med:

4 E4: Jeg var på den problemløsningsgruppen, og jeg synes egentlig det var ganske
5 spennende oppgaver. Siden det står ikke så mange problemløsningsoppgaver i
6 boken vår. Det står mest "rett fram"-oppgaver med derivasjon.

150 E4: Nei, jeg likte egentlig de testene.

Elev5 hadde ikke vært til stede da derivasjonsprosjektet ble presentert, og hadde forventet at det skulle komme noen utenfra og lære dem derivasjon på en "lur måte". Starten ble derfor ikke helt som vedkommende hadde sett for seg:

11 E5: Det var litt skuffende. Men vi fikk nå utdelt noen ark med veldig mange
12 oppgaver. Jeg tror ikke jeg kom igjennom halvparten en gang. (lattermild)
13 Jeg merket at det startet på et relativt høyt nivå, så du burde jo ha litt
14 kunnskaper fra før av. For å gjøre en del av de oppgavene så måtte du kunne
15 de kjernereglene og alt det fra før av.

Elev5 var heller ikke helt bevisst de tre ulike oppgavetypene de jobbet med i løpet av prosjektperioden:

160 E5: Jeg merket at det var litt variasjon i oppgavene. Ja, det merket jeg for så vidt.
161 De ble jo mer kompliserte den siste dagen. Det var et sånt uttrykk vi skulle
162 derivere. Nei, vi skulle finne toppunkt eller bunnpunkt. Eller vendepunkt?
163 Og så viste det seg at det ikke eksisterte i flere av tilfellene. Så det var litt
164 frustrerende, kan man si. Men det er jo viktig å finne ut det også.

Og testene var litt vanskelige:

263 E5: Den første testen synes jeg var litt... Jeg vet ikke helt hva jeg skal si. For da
264 hadde vi jo bare jobbet med det første punktet, sant?

Særlig problemløsningsoppgavene:

116 E5: I alle fall den i midten er ganske grei. Oppgave 2 (test 1) synes jeg er veldig
117 grei. 1 skulle jeg nok sikkert klart greit også, men jeg måtte nå tenkt litt mer.
118 Og prøvd å bruke formlene best mulig. Og så den siste: Jeg er litt usikker på
119 det. Hvor den stiger, eller om den synker. Det er nesten litt sånn fifty-fifty.
120 Du må jo på en måte prøve å se for deg grafen da.

Oppsummert ser vi altså at 4 av de 5 elevene som ble intervjuet oppfattet oppgavene som de støtte på i løpet av derivasjonsprosjektet som vanskelige. Faglærerne mente derimot at dette var oppgaver som skulle være kjent for elevene, og at de burde fått til disse. Elevene har altså drevet med tradisjonell oppgaveregning med mange av disse oppgavetypene i forkant av derivasjonsprosjektet (unntaket her var problemløsningsoppgavene, som få eller ingen elever hadde noen særlig erfaring med, i følge faglærerne), men for mange av dem virket det likevel som de var lite fortrolige med slike oppgaver. Dette ser ut til å styrke tre av de grunnleggende premissene for problemstillingen min; nemlig at derivasjon er krevende for mange elever, at tradisjonell oppgaveregning ikke ser ut til å gi elevene en dypere forståelse for derivasjon og at de kunnskapene de har ervervet seg om derivasjon gjennom tradisjonell oppgaveregning ikke ser ut til å vare så lenge.

4.4.2 Oppfatning av derivasjon

De to første elevene som ble intervjuet gjennomførte derivasjonsprosjektet noe tidligere enn de tre siste elevene. Dette så ut til å prege svarene deres, da jeg spurt om hva de tenkte når jeg sa ordet "derivasjon":

36 E1: Ja, litt. Ja, det var egentlig ... ganske. Vi har ikke jobbet så mye med ... Eller
37 har vi det? ... problemløsningsoppgaver. Det har vært mer sånn "Finn toppunkt
38 og bunnpunkt" og ...

38 E2: Da tenker jeg ... Nei, jeg vet ikke.

Men heller ikke Elev3 har en tydelig idé om hva derivasjon er:

26 E3: Jeg tenker jo at det er matte. Med regning.

30 E3: Jeg tenker på vekstfarten.

34 E3: Jeg føler egentlig at det var mye formler for det.

42 E3: Nei, jeg vet egentlig ikke. Nei! Kanskje mer huske hvordan du skal gjøre det.

46 E3: Metode, ja!

Og definisjonen av den deriverte hadde Elev3 ikke viet mye oppmerksomhet:

52 E3: Jeg tror kanskje at det er noe jeg leser, og så er det ikke så interessant.
53 (lattermild)

Elev4 hadde en litt klarere oppfatning av derivasjonsbegrepet enn de tre foregående elevene:

14 E4: Da tenker jeg at som oftest når jeg løser en oppgave med derivasjon, er det for
15 å finne stigningen på grafen. Og eventuelt finne et toppunkt eller et bunnpunkt,
16 der stigningen er null.

20 E4: Ja. Bruk av derivasjon.

Men heller ikke Elev4 tenkte mye på definisjonen av den deriverte:

27 E4: Nei, jeg har ikke tenkt så mye på definisjonene.

I utgangspunktet koplet heller ikke Elev4 derivasjon til problemløsningsoppgavene de jobbet med, men dette endret seg i løpet av derivasjonsprosjektet:

39 E4: Det er sikkert en sammenheng der. Men egentlig så var jo min oppfattelse av
40 derivasjon litt annerledes enn hvordan vi... Eller på noen av oppgavene
41 - problemløsningsoppgavene, tenkte jeg ikke med en gang at vi kunne bruke
42 derivasjon for å løse. Men jeg skjønte jo det etter hvert, siden vi hadde om
43 derivasjon.

Elev5 var først og fremst opptatt av nytteaspektet ved derivasjon, og knyttet dette til fysikk:

44 E5: Hva jeg tenker? Først tenker jeg jo at du egentlig ikke kan bruke det til så
45 veldig mye. Men i fysikken kan du jo gå fra avstandsformler til fartsformler,
46 og akselerasjon. Så sånn sett er det jo ganske nyttig. Ellers så vet jeg ikke helt.

Ellers ga Elev5 inntrykk av å ha et ganske teknisk forhold til derivasjon:

56 E5: Vi var jo så vidt borti det i fjor. Men det var bare sånn enkelt: $3x^2$, og flytte
57 2-eren foran, liksom. Men i år er det jo gått hakket videre da. Og så har jeg
58 merket meg at du må jo lære deg mest ting selv, for å klare å skjønne det.
59 Jeg synes ikke det er det vanskeligste å lære seg, så lenge du bare knekker
60 koden med $g(u)$ og u, og sånn. Litt mer kompliserte ting.

Definisjonen av den deriverte var Elev5 derimot lite opptatt av:

64 E5: Jo, vi har nok det også. (liten latter) Men jeg vet ikke hva...

Elev 5 oppfattet at derivasjon i R1 stort sett har dreid seg om formelbruk:

68 E5: Ja, hvordan du regner det ut, liksom. Det er det vi har jobbet mest med. Ellers
69 har jo læreren fortalt litt fremme på tavlen. Men det er ikke alltid like lett å få
70 med seg alt.

Oppsummert kan vi her si at alle elevene som ble intervjuet knyttet derivasjon til bruk av formler og til en metode for å finne topp- og bunnpunkt. Definisjonen av den deriverte var det ingen som hadde festet seg ved, selv om alle husket at de hadde fått den presentert på et tidligere tidspunkt. Hvis vi benytter begrepene til Tall & Vinner (1981) og Vinner (1991), slik de er beskrevet i 2.3.2, kan vi si at begrepsdefinisjonen av den deriverte ikke ser ut til å ha blitt knyttet til begrepsbildet disse fem elevene har av den deriverte. Siden alle elevene har blitt introdusert for derivasjon (både definisjon, regler og anvendelse) i 1T, kan vi si at de faller inn under situasjon 2) i 2.3.2, der begrepsdefinisjonen forble isolert fra begrepsbildet. Det var heller ingen av de intervjuede elevene som hadde en klar idé om inndelingen av derivasjon i regelbruk, anvendelse og problemløsning. De fremstod mer som det Hiebert & Lefevre (1986) i 2.4.2 kalte nybegynnere, som fokuserte mer på overfladiske trekk ved problemstillingen og på bestemte regler for symbolmanipulasjon. Disse funnene er for øvrig i tråd med flere av forskningsfunnene som David Tall beskriver i 2.3.2.

Elevene som ble intervjuet virker å være preget av det Cobb i 2.1.3.1 kaller matematiske praksiser i klasserommet. Elevene drev i all hovedsak med tradisjonell oppgaveregning til vanlig. De knytter derfor naturlig nok matematikk til oppgaveregning. Definisjoner som ikke benyttes i slik oppgaveregning blir dermed ikke så interessant.

4.4.3 Foretrukket læringsmåte

Elev1 ville helst vært på kontrollgruppen:

> E1: Ja, bedre. Jeg tenkte drilloppgave-gruppen tror jeg hadde passet meg best. Med det første i alle fall. Og så kanskje tatt det gradvis.

Og begrunnet dette med et ønske om å få seg et kunnskapsgrunnlag, før man ga seg i kast med mer kompliserte oppgaver:

> E1: Jeg vet ikke helt. Da forstår du i alle fall det grunnleggende, så hvis du kan det godt, kan du bruke det i andre sammenhenger. Men når jeg ikke hadde kunnskapene fra før av, var det vanskelig å bruke de i problemløsning. Så jeg vet ikke helt.

Elev2 uttrykte mye av det samme som Elev1:

> E2: Jeg synes det var et bra konsept. Og jeg likte måten det var satt opp på. Men jeg følte at jeg kom i feil gruppe. Jeg skulle egentlig lært litt mer om selve derivasjonsbiten. Den drill-gruppen. Jeg var på problemløsningsgruppen.

16 E2: Innarbeidet de ... Altså for å klare de vanskeligere derivasjonsoppgavene, så
17 må man jo kunne derivere først.

Disse to elevenes syn kan forklares med at de ikke hadde jobbet så mye med derivasjon som de andre elevene, før de startet opp med derivasjonsprosjektet. Og i alle fall ikke så mye som de hadde ønsket, for å kunne gi seg i kast med mer kompliserte oppgaver. Både Elev1 og Elev2 gir dermed uttrykk for et lineært syn på læring.

Elev3 foretrakk å jobbe med klare prosedyrer:

115 E3: Nei, jeg liker egentlig å forholde meg til reglene. Men da tenker jeg også at
116 du følger en oppskrift. At det er det samme du gjør.

152 E3: Nei. Alle de der med lim, og Δx og Δy, og sånn. Jeg følte vi gikk tilbake på
153 ting som jeg allerede kan. Jeg vet kanskje ikke helt hvorfor. Men jeg føler at
154 det er enklere og bare lære meg det. (latter)

225 I: Dere er jo vant med å gjøre oppgaver. Det er det dere gjør.
226
227 E3: Ja.
228
229 I: Er det et problem? Altså at du helst vil jobbe på en måte som du er vant til?
230
231 E3: Det kan jo være det. At jeg synes det er greiere å gjøre oppgaver, fordi det er
232 det vi gjør.
233
234 I: Du behersker en måte, liksom?
235
236 E3: Ja.
237
238 I: Det at du blir nødt til å tenke på en annen måte... Nå i etterkant, ser du ikke at
239 det er noe av det du har gjort, som gjør at du nå tenker annerledes? Eller tenker
240 du at det er noe tull hele greiene?
241
242 E3: Jeg vet egentlig ikke helt.

Men Elev3 så likevel at det kunne være positivt å jobbe med derivasjon på andre måter:

272 E3: Det er jo positivt. Å se det fra forskjellige sider. Ikke følge det samme hele
273 tiden. For da er det jo sånn at når vi kommer til de oppgavene (peker på
274 oppgave 3), så må vi ha forskjellige måter å tenke på.
275
276 I: Men samtidig sa du jo tidligere, at du helst vil jobbe på samme måte.
277
278 E3: Ja. Det er jo sant. Nei, det er vel mer det at det er det jeg lærer noe av.

Så selv om Elev3 uttrykte en klar idé om fordelene med å jobbe på andre måter, var likevel tradisjonell oppgaveregning den foretrukne læringsmåten. Elev3 ville derfor helst vært på kontrollgruppen:

284 E3: Men jeg føler at den gruppen vi var på, så... Nei, jeg skjønte ikke så altfor mye

av det. Altså jeg pugget de, men jeg vet ikke helt om jeg forstod de.

I: Så du er litt avhengig av å se mening med det du holder på med da, kanskje?

E3: Ja. Og da å gjøre oppgaver tenkte jeg var litt enklere.

Elev3 var ganske frustrert over ikke å få regne oppgaver. Det var tydeligvis denne måten Elev3 var vant til å lære matematikk på. Dette kom også til uttrykk noe senere i intervjuet:

I: Tror du at det er en sammenheng mellom måten du jobber på, og resultatene du får? Altså hvilken innlæringsmåte du velger. Altså hvis du hadde vært på en annen gruppe, tror du at resultatene ville blitt annerledes?

E3: Kanskje. Det kan jo være mulig. Jeg vet jo ikke, for jeg var jo ikke på noen av de andre gruppene. Men kanskje hvis jeg hadde jobbet på en måte hvor jeg kunne følt at jeg hadde lært mer.

Elev4 ga også uttrykk for å ville drive med tradisjonell oppgaveregning:

E4: Nei, jeg liker som regel best den typen her (peker på oppgave 1) - med å bruke reglene og regne. Og så har vi jobbet veldig mye med den, oppgave 2, med topp- og bunnpunkt og sånn - i boken. 3eren har vi ikke jobbet så mye med, så det er vel den jeg bruker mest tid på.

Dette til tross for at Elev4 startet intervjuet med å si:

E4: Jeg var på den problemløsningsgruppen, og jeg synes egentlig det var ganske spennende oppgaver. Siden det står ikke så mange problemløsningsoppgaver i boken vår. Det står mest "rett fram"-oppgaver med derivasjon.

Elev4 har endret litt synet på gruppearbeid i matematikk:

I: Diskuterte dere på gruppen også?

E4: Ja, det gjorde vi.

I: Det er ikke sånn at det ble forvirrende da? At du bruker ulike tilnærminger? Du tenker at det bare er positivt?

E4: Ja. Vi var egentlig ganske enig, når vi snakket om hvordan vi skulle gjøre det.

I: Er det andre måter som du kunne tenkt deg å... Hvordan pleier du å jobbe til vanlig? Pleier du å regne for deg selv, eller pleier du å samarbeide med folk?

E4: Jeg pleier alltid å regne selv. Nesten aldri samarbeide. I alle fall ikke når jeg skal forberede meg til prøve.

I: Er det sånn at du helst ikke vil jobbe i grupper, eller?

E4: Jeg føler ofte at når vi jobber med matte i en gruppe, så er det som regel et par stykker som gjør mest da. Jeg lærer i alle fall best når jeg jobber selvstendig.

I: Det har kanskje også med type oppgaver å gjøre? Med sånne oppgaver (peker på oppgave 3), er det kanskje fordel...

E4: Ja! Da vil jeg tro at det er bedre å arbeide i en gruppe. Hvis det er noe du ikke

> forstår, så kan det være at de sier noe som får deg til å forstå resten av oppgaven.

Elev4 var i utgangspunktet litt negativ til å løse matematikkoppgaver sammen med andre elever. I løpet av derivasjonsprosjektet har vedkommende likevel oppdaget at det kan være gunstig å samarbeide når det er snakk om problemløsningsoppgaver. Dette samsvarer med kritikken i 2.4.1 som Mellin-Olsen og Alrø & Skovsmose har mot tradisjonell oppgave-regning, om at en slik arbeidsform fremmer en ganske ensidig kommunikasjonsform i klasserommet: Elevene jobber individuelt med oppgaver i læreboken, sjekker at svarene de kommer frem til stemmer med fasiten og går videre til neste oppgave uten å reflektere noe særlig over hva de har gjort.

Elev5, som var den eneste blant de intervjuede elevene som jobbet med tradisjonell oppgave-regning, var likevel ikke helt fornøyd:

> I: Nå har du egentlig jobbet på den samme måten som du ellers... Du sa jo at du håpet at det kom en sånn smart måte... Betyr det at du heller ville vært på en av de andre gruppene?
>
> E5: Nei, egentlig ikke, for det virker som de var... Jeg tror ikke de synes det var så mye bedre.

Men til tross for en følelse av at tradisjonell oppgaveregning ikke alltid ga optimalt læringsutbytte, og at kanskje andre læringsmåter kunne gitt bedre resultater, ønsket likevel Elev5 ikke å jobbe på andre måter:

> E5: Jeg tror det kan være greit å angripe disse her problemene på forskjellige måter. Jeg tror jo det er forskjellig fra person til person, kanskje. At noen lærer bedre på forskjellige måter.
>
> I: Er det andre måter du skulle ønsket at matematikken hadde vært lagt opp i forhold til å lære?
>
> E5: Tja, jeg synes det er greit når du får jobbe med oppgaver, og hvis du kommer til oppgaver som du ikke kan, så er det veldig greit å få hjelp ganske tidlig. Det er en ting å tenke ut, og... Men det tar ofte lang tid. Jeg tror det er greit å jobbe mye med oppgaver, men ikke altfor mye heller. Bare sånn at du skjønner når du skal bruke de forskjellige formlene, og hvordan du skal bruke de. Og heller prøve å forstå det bedre, enn å bare glemme det etter en uke.

Vi kan her oppsummere med at alle elevene som ble intervjuet foretrakk å regne oppgaver som de hadde vært borti før. Tre av elevene så flere fordeler med å benytte andre læringsmåter, men de ville likevel helst jobbe med tradisjonell oppgaveregning. En elev mente likevel det kunne være gunstig å samarbeide når de skulle løse mer komplekse oppgaver som problemløsningsoppgaver. Elevene ser altså ut til å knytte læring til regning av oppgaver. Dette er i tråd med Blomhøjs didaktiske kontrakt for tradisjonell undervisning, der læreren først presenterer lærestoffet og elevene deretter regner oppgaver gitt av læreren (se 2.4.1). Det kan være ganske utfordrende å introdusere nye læringsmåter som bryter med det Cobb i 2.1.3.1 kaller sosiale normer i klasserommet - i dette tilfellet den didaktiske kontrakten for tradisjonell undervisning. Som lærer må man da forhandle på nytt igjen med elevene om de sosiale normene i klassen.

4.4.4 Læringsutbytte

Elev1 opplevde derivasjonsprosjektet som lærerikt:

I: Så du følte kanskje at opplegget kunne kommet senere? At du da hadde hatt mer kompetanse, og dermed fått større utbytte?

E1: Ja. Men jeg lærte mye.

I: Tror du det at du har vært gjennom dette opplegget kan ha påvirket hvor lett det har vært å jobbe mot heldagsprøven? Kan det være noen sammenheng der? Kan det ha gått lettere på grunn av det?

E1: Ja, jeg tror faktisk det. Jeg har blitt litt mer obs på hva jeg trenger å øve på. Så vet jeg det bedre.

Det samme gjaldt for Elev2:

I: Tror du at du må tenke på en annen måte også kanskje, når du jobber med problemløsning, i forhold til når du jobber med ...?

E2: Ja, du må jo det. Det lærte jeg faktisk! Vi var jo flere som kunne snakke litt sammen også, så jeg lærte jo en del faktisk.

I: Ok. Nå har du jobbet med dette, og holder på å forberede deg til heldagsprøve. Det at du har vært gjennom dette opplegget, tror du at det gjør at det er lettere for deg å forberede deg til heldagsprøven?

E2: Ja, jeg tror det! Jeg tror jeg er litt mer bevisst på hva jeg kan øve på. Hva jeg trenger å øve på. Eller, jeg er mer klar over det nå i hvert fall.

Elev2 har endret noe syn på læringsutbyttet av derivasjonsprosjektet. I spørreundersøkelsen mente Elev2 at prosjektet ikke hadde ført til noen forbedringer med tanke på derivasjon. Det kan ellers se ut som om disse to elevenes læringsutbytte først og fremst var strategisk: Det virker som om de har fått en bedre oversikt over oppgavetypene knyttet til derivasjon, og blitt mer bevisst på hva de måtte øve mer på. Årsaken kan kanskje være at de to første elevene ikke hadde jobbet så mye med derivasjon før prosjektet startet. Dette kan ha påvirket deres læringsutbytte - at det var mer strategisk, enn matematisk.

Elev3 koplet læringsutbytte til testresultater:

I: Ja. Så hvis vi bare ser på det, så tyder jo det på at du har forstått noe. Men da lurer jeg litt på hva du legger i... Altså, når du vurderer om du har hatt læringsutbytte. Hva er det du legger i om du har lært... Hva er det som avgjør om du føler at du har lært mer eller ikke lært mer?

E3: Kanskje hvis jeg tar testen, og det går fint.

I: Resultatene på testene da, altså?

E3: Ja. Eller mens jeg gjør de. Jeg merker jo selv om det går greit eller ikke.

I: Men hvis du holder på å jobbe med matte. Så kan det være at du får rett svar. Men plutselig en dag så får du en aha-opplevelse. Og det har jo ingenting med resultatet å gjøre. Det er bare at du ser noe du ikke har sett før.

E3: Jeg vet ikke helt om jeg gjorde det.

I: Neida. Men at det er andre måter du kan se... enn bare å ha... Jeg vet jo at det er mye fokus på resultater her på skolen.

E3: Ja, selvfølgelig.

Og på testene følte eleven at det ikke gikk så bra som forventet:

E3: Jeg følte vel ikke at det gikk veeeldig bra på alle. (kort latter)

I: Er det det som kan ha påvirket din oppfatning av læringsutbyttet? At du følte at dette ikke er som det pleier å være? At du plutselig fikk mindre til enn det du pleier å gjøre?

E3: Ja, det var kanskje noe med det.

I motsetning til de to første elevene, har ikke Elev3 blitt mer bevisst de ulike oppgavetypene som derivasjonsprosjektet har fokusert på:

I: I morgen får dere vite hva dere kommer opp til i eksamen. Tror du at du har blitt mer bevisst på forskjellene innen derivasjon etter dette greiene her, eller er det ikke noen forskjell?

E3: Jeg tror egentlig ikke at jeg merker så veldig stor forskjell.

Elev3 opprettholdt her sin noe negative opplevelse av læringsutbyttet ved å delta på dette derivasjonsprosjektet som ble uttrykt i spørreundersøkelsen. Det kan se ut som om denne negative opplevelsen kan knyttes til en følelse av ikke å ha prestert som forventet på testene. Elev3 var dessuten veldig opptatt av resultater i form av karakterer. I tillegg uttrykte Elev3 en tydelig frustrasjon over å ikke få regne oppgaver (se 4.4.3), slik vedkommende var vant med. Dette kan også ha bidratt til den negative opplevelsen knyttet til læringsutbytte.

Derivasjonsprosjektet hadde gitt Elev4 muligheten til å øve seg på en noe uvant oppgavetype; nemlig problemløsningsoppgaver. Dette ble opplevd som positivt:

4 E4: Jeg var på den problemløsningsgruppen, og jeg synes egentlig det var ganske
5 spennende oppgaver. Siden det står ikke så mange problemløsningsoppgaver i
6 boken vår. Det står mest "rett fram"-oppgaver med derivasjon.

Elev4 mente dessuten at det å jobbe med problemløsningsoppgaver gjør at man reflekterer mer over det man faktisk gjør:

80 I: Ok. Nå var du på problemløsningsgruppen. Det å jobbe med matematikk på en
81 litt annen måte enn du er vant med. Hva tenker du om det?
82
83 E4: Egentlig ganske greit. Jeg tenker at jeg har mer utbytte av å jobbe på den
84 måten. Når du bruker reglene, tenker du ikke så mye over det du gjør. Du
85 bruker egentlig bare reglene. Og hvis du kan de, så får du det til.
86
87 I: Du blir mer tvunget til å reflektere, kanskje da...
88
89 E4: Ja, du tenker litt mer over hva du faktisk gjør.

Det at derivsjonsprosjektet ikke hadde betydning for karakteren i R1 påvirket innsatsen på testene for Elev4:

155 E4: Vi fikk jo vite på forhånd at det ikke hadde noe å si for karakteren, så
156 egentlig prøvde jeg bare å regne meg gjennom så fort som mulig. Og prøve
157 å få et svar på alt. Så jeg så ikke over oppgavene, og tenkte ikke så mye
158 over det, hvis det var noe jeg var usikker på. Men jeg gjorde det så godt
159 som jeg kunne akkurat da.

Elev5 ga uttrykk for to motstridende syn på hva det vil si å forstå. På den ene siden knyttes læringsutbytte til det å beherske regler og formler:

317 E5: Jeg vet ikke direkte hva de andre har gjort, men det virker som om de hadde
318 litt annerledes opplegg. Og det kan godt hende at jeg hadde fått andre utslag
319 da. Det tror jeg kanskje. For det virket som de skulle lære seg formler, og sånn.

Elev5 ønsket kanskje heller å være på gruppen som jobbet med aktiv memorering, og dermed fått muligheten til å pugge formler. Og nettopp pugging av lærestoff som nylig har vært gjennomgått eller arbeidet med så ut til å være den måten Elev5 lærte matematikk på:

263 E5: Den første testen synes jeg var litt... Jeg vet ikke helt hva jeg skal si. For da
264 hadde vi jo bare jobbet med det første punktet, sant?
265
266 I: Stemmer.
267
268 E5: Og da var det litt vanskelig med de andre oppgavene, siden vi ikke hadde
269 gått gjennom de da.
270
271 I: Men dere hadde jo gått gjennom de før!
272
273 E5: Vi hadde gått igjennom det før, men det sitter ikke like sterkt i minnet.

I: Har du tenkt på hvorfor det ikke sitter like sterkt i minnet?

E5: Det er vel fordi det skjer så mye rundt omkring, så...

I: Kan det ha hatt noe med måten du har jobbet på?

E5: Det kan godt hende det har hatt noe med måten jeg har jobbet på, ja.
At jeg har pugget det, og så har det gått litt i glemmeboken.

På den andre siden mente Elev5 at en god test også måtte inneholde andre typer oppgaver enn de som bare krevde ren formelbruk:

E5: Jeg synes de gir et rett bilde, fordi det er jo flere forskjellige problemer som
skal løses. Og at du kan vise at du kan det meste, og ikke bare ha tester der du
kun skal bruke formlene. Det er ikke sikkert at du helt forstår det, men når du
får flere oppgaver på forskjellige måter, så viser det mer at du forstår det, hvis
du klarer å gjøre de.

Elev5 hadde endret syn på læringsutbyttet av derivasjonsprosjektet fra spørreundersøkelsen til intervjuet:

I: Tenker du annerledes om derivasjon nå, enn før du var med på dette?
Ble du mer bevisst ting? Ja, du skrev jo at du har hatt større læringsutbytte.
Nei, det var motsatt! Du hadde egentlig blitt dårligere, sa du.

E5: Ja, nesten. Jeg innser vel at jeg kanskje er blitt hakket... At det sitter hakket
bedre, men at jeg ikke følte det der og da.

Hva som "sitter hakket bedre" kom ikke klart frem her. Men tidligere i intervjuet ga Elev5 tydelig uttrykk for et ganske teknisk og regelbundet syn på derivasjon (se 4.4.3), og det er ikke urimelig å anta at det er bruken av disse reglene som vedkommende nå følte at satt hakket bedre enn før.

Det var litt variabelt hva elevene som ble intervjuet følte de hadde fått ut av derivasjons-prosjektet. To elever fremhevet at de var blitt mer bevisst på at oppgavene de får på heldagsprøve og eksamen i R1 kan deles inn i tre ulike typer (regelbruk, anvendelse og problemløsning). En elev mente at vedkommende var blitt flinkere til å løse problemløsnings-oppgaver, og at dette førte til økt refleksjon rundt bruken av derivasjon. En annen elev følte at vedkommende var blitt noe bedre i formelbruk. Men det var også en elev som mente at derivasjonsprosjektet ikke hadde gitt noen bedringer knyttet til derivasjon i det hele tatt.

Det som var felles for alle elevene som ble intervjuet var at de hadde en ganske klar kopling mellom opplevd læringsutbytte og hvordan de følte det hadde gått på testene. Læring ble altså ikke sett på som en prosess, men som et produkt. Elevene gir her uttrykk for det Richard

Skemp kaller for instrumentell forståelse. Elevene knytter da forståelse om et emne til det å få riktige svar på oppgaver knyttet til dette emnet, eller til å få en god karakter på en test/prøve om emnet (Skemp, 1978). Dette er forøvrig i tråd med Blomhøjs didaktiske kontrakt for tradisjonell undervisning, der en viktig funksjon som læreren har er å gi elevene tilbakemeldinger på arbeidet deres (se 2.4.1). Hvis denne tilbakemeldingen har form av karakterer kan det virke som om elevene som ble intervjuet legger inn en ekstra innsats. Motivasjonen til elevene ser dermed mer ut til å være knyttet til å oppnå gode karakterer, heller enn å lære matematikk. Dette noe snevre synet på læringsutbytte som kommer til uttrykk gjennom disse intervjuene, kan sannsynligvis spores tilbake til det Cobb i 2.1.3.1 kaller de sosiale normene i klasserommet. Hvis det som gir status i omgivelsene (hos medelever, lærere, foreldre, etc.) er gode karakterer, er det naturlig at elevenes målsetting er knyttet til nettopp dette.

4.4.5 Læringens varighet

Elev1 ga klart uttrykk for at kunnskapene ikke ble sittende så lenge:

62 E1: Ja, det var det jeg merket jeg også. Jeg vet ikke om det var på grunn av at
63 oppgavene var vanskelige, eller... Jeg merket at første gang vi jobbet med
64 oppgavene før den første testen, så fikk jeg mye mer til. Mattelæreren måtte
65 bytte på hvor han skulle være, men da hjalp han oss mye mer. Og da forstod
66 jeg det på en måte. Men så glemte jeg litt til neste gang, og da fikk vi ikke like
67 mye hjelp. Så da ble det litt vanskeligere.

Men at dette kunne bedres ved å repetere:

106 E1: Jeg glemmer kanskje litt, og så blir det oppfrisket. Men da går det enda bedre
107 igjen, på en måte. For det ligger litt i underbevisstheten vil jeg tro.

136 E1: Joda! Men det var bare det at det var vanskelig, generelt. Det var vanskelige
137 oppgaver. Jeg tror at hvis jeg hadde prøvd nå, så hadde det gått mye bedre.
138 For nå når jeg har øvd til heldagsprøven, har jeg lært mye om derivasjon.

Elev2 hevdet også at mye av kunnskapen ble glemt etter litt tid:

115 E2: Ja, ja. Jeg tror det var derfor jeg feilet på de i den første testen. I alle fall i
116 begynnelsen. For da hadde jeg helt glemt hvordan vi deriverte de ... enkle ...

Og forklaringen på dette var:

121 E2: Jeg tror jeg er litt for dårlig til å gjøre lekse.

Elev2 var helt på linje med Elev1 her: Kunnskapen må altså repeteres for å bli sittende.

Heller ikke Elev3 mente at kunnskapen ble sittende lenge i minnet:

109 E3: Ja. Hva regelen er? Da er det det leddet pluss det... Nei. Det leddet ganget det
110 leddet derivert, pluss det leddet derivert...

365 E3: Nei, vi hadde før. Så det var kanskje litt glemt også. Eller vi hadde ikke
366 nettopp hatt det.

Selv om Elev4 også trodde at mye ville være glemt etter noe tid, så mente vedkommende at selve forståelsen ville bli værende:

165 E4: Jeg tror ikke alt blir sittende igjen. Kanskje ikke alle reglene? Men jeg tenker
166 at en del av forståelsen fortsatt vil være der.

171 E4: Nå skal vi ha en prøve i det kapittelet på fredag, så jeg kommer sikkert til å
172 huske det en liten stund til. Men om en måneds tid er det ikke sikkert jeg
173 hadde husket alt, nei.

I likhet med Elev1 og Elev2, trakk også Elev4 frem viktigheten av repetisjon. Men Elev4 fokuserte mer på repetisjon som oppfriskning, enn for å unngå og glemme:

178 E4: Men jeg tror egentlig at neste år, så er det kanskje å bruke en dag eller to på å
179 repetere det vi hadde i fjor, så sitter det. For jeg bruker ikke like lang tid på å
180 forstå det da, når jeg går igjennom det neste gang.

Holdningen til Elev4 var altså at når noe først var lært, så krevde det ikke så mye arbeid for å friske opp igjen kunnskapen.

Elev5 hadde også erfart at det ikke gikk altfor lang tid før kunnskapen var glemt:

273 E5: Vi hadde gått igjennom det før, men det sitter ikke like sterkt i minnet.

281 E5: Det kan godt hende det har hatt noe med måten jeg har jobbet på, ja.
282 At jeg har pugget det, og så har det gått litt i glemmeboken.

Vi kan oppsummere med at alle elevene som ble intervjuet ga uttrykk for at det de lærte ikke ble værende så lenge i minnet. Tre av elevene fremhevet viktigheten av å repetere - både for at kunnskapen skulle bli sittende bedre i minnet, men også for å friske opp igjen gammel kunnskap. En av elevene skilte mellom kunnskap som bare var memorert og kunnskap som var forstått. I begge tilfeller mente vedkommende at detaljer ville bli glemt, men i det sistnevnte tilfellet ville selve forståelsen bli sittende igjen. De intervjuede elevene baserer disse svarene på tidligere erfaringer med matematikk i skolen. For R1-elevene som var med på derivasjonsprosjektet innebar dette i all hovedsak erfaringer basert på tradisjonell oppgave-regning. Utviklingen i de gjennomsnittlige testresultatene for elevene på kontrollgruppene (altså de som jobbet med tradisjonell oppgaveregning), presentert i 4.1.1, kan tyde på at de har gode grunner for sine antakelser om at derivasjonskunnskapene ikke vil bli sittende i så lenge.

4.5 Oppsummering av resultater

Her gir jeg en kort oppsummering av funnene jeg har gjort på bakgrunn av de fire testene i undersøkelsen (Test1, Test2 og Test3 under derivasjonsprosjektet, og posttesten Test5), spørreundersøkelsen og intervjuene.

4.5.1 Oppsummering av testresultater

De gjennomsnittlige resultatene på testene var ganske middels for alle tre gruppene (altså kontrollgruppene, problemløsningsgruppene og gruppene som jobbet med aktiv memorering). Sammenstilt mot det ganske høye faglige nivået til disse R1-elevene (uttrykt ved karakterer i faget), og når vi vet at elevene som deltok på derivasjonsprosjektet har jobbet med derivasjon både i 1T og i R1 i forkant av prosjektet, styrker dette den grunnleggende hypotesen bak dette forskningsprosjektet; nemlig at derivasjon er krevende for mange elever.

Alle tre gruppene har imidlertid hatt fremgang i de gjennomsnittlige resultatene på testene i løpet av derivasjonsprosjektet - altså fra Test1 til Test3. Fremgangen var størst for elevene som jobbet med aktiv memorering, og minst for elevene som jobbet med problemløsning. De to sistnevnte gruppene fortsatte fremgangen på posttesten, mens kontrollgruppene hadde en markant tilbakegang på posttesten sammenlignet med den siste testen i derivasjonsprosjektet. Faktisk presterte kontrollgruppene en del lavere på posttesten enn på den første testen i derivasjonsprosjektet.

Hvis vi legger de gjennomsnittlige resultatene på testene til grunn, ser jentene på sikt ut til å ha hatt et større utbytte enn guttene av å ha vært med på derivasjonsprosjektet, uavhengig av gruppe. Tar vi hensyn til begge kjønn, kan det se ut som at aktiv memorering har vært den læringsmåten som har gitt størst læringsutbytte på kort sikt, mens det virker som problem-løsning har gitt størst læringsutbytte på litt lengre sikt.

Alle endringene som er nevnt i de to foregående avsnittene er mindre enn ett standardavvik. Vi må derfor ta forbehold om at det er knyttet stor usikkerhet til disse resultatene.

4.5.2 Oppsummering av resultater fra spørreundersøkelsen

Spørreundersøkelsen avdekket at elevene oppfattet derivasjon som vanskelig. Oppgavetypene på testene ble vurdert som noe uvante - særlig for de som jobbet med problemløsning. Elevene på alle tre gruppene følte dessuten at de kun behersket derivasjon ganske middels etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet. Dette altså til tross for at de har jobbet med dette emnet både i 1T, og i forkant av prosjektet i R1. Guttene følte i en noe større grad enn jentene at de behersket derivasjon.

Den subjektive opplevelsen til flertallet av elevene var at de ikke behersket derivasjon bedre etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet. Men det var likevel ca. 36 % som mente at de var blitt bedre i derivasjon i løpet av prosjektperioden. Dette varierte riktig nok noe mellom de tre gruppene. For både kontrollgruppene og de som jobbet med aktiv memorering var det ca. 39 % som mente de var blitt bedre, mens det kun var ca. 30 % som mente dette blant de som jobbet med problemløsning. Guttene følte i betydelig større grad enn jentene at de var blitt bedre i derivasjon i løpet av derivasjonsprosjektet (henholdsvis ca. 47 % og ca. 15 %).

Litt over halvparten av elevene (ca. 53 %) mente at det var samsvar mellom oppgavene de jobbet med i forkant av testene og oppgavene de fikk på selve testene. Dette varierte en god del mellom de tre gruppene. Ca. 69 % av elevene på kontrollgruppene mente at det var et slikt samsvar. For elevene som jobbet med aktiv memorering var det ca. 48 % som mente dette, mens dette tallet var ca. 41 % for elevene på problemløsningsgruppene. Guttene følte i større grad enn jentene at det var et slikt samsvar (henholdsvis ca. 57 % og ca. 44 %).

Det var en moderat samvariasjon mellom de gjennomsnittlige testresultatene og elevenes mestringsfølelse i forhold til derivasjon for alle tre gruppene. Denne samvariasjonen var størst for problemløsningsgruppene.

Spørreundersøkelsen avdekket ingen markante forskjeller mellom de tre gruppene når det gjaldt motivasjon, arbeidsinnsats eller faglig nivå, bortsett fra om elevene oppfattet derivasjon som nyttig. Her varierte det fra ca. 56 % av elevene på problemløsningsgruppene, via ca. 65

% av elevene på kontrollgruppene, til ca. 74 % av elevene som jobbet med aktiv memorering. Det er likevel ikke urimelig å anta at forskjeller mellom de tre gruppene med tanke på læringsutbytte i all hovedsak kan knyttes til forhold ved den enkelte læringsmåten.

4.5.3 Oppsummering av resultater fra intervjuene

Flertallet av de intervjuede elevene oppfattet derivasjon som vanskelig. Det som gikk igjen blant disse, var at de ikke husket alle derivasjonsreglene. Samtlige syntes det var vanskelig å se hvordan de kunne bruke derivasjon i forbindelse med problemløsningsoppgaver, men for en av elevene (på problemløsningsgruppen) gikk dette lettere etter hvert. Den eneste problem-stillingen som elevene følte de behersket bra var funksjonsdrøfting, der de skulle bruke den deriverte til å finne eventuelle ekstremalpunkter. Dette var noe de hadde jobbet en del med i 1T. Elevene som ble intervjuet hadde ganske gode karakterer i R1 (4 eller bedre), og de var vant til å få til ganske mye på prøver. Men på testene fikk de til mindre enn de pleier. Dette bidro til å forsterke elevenes oppfatning av at derivasjon var vanskelig.

De intervjuede elevene knyttet derivasjon først og fremst til formelbruk, og til metode for å finne ekstremalpunkter. Ingen av elevene var opptatt av definisjonen av den deriverte. De fleste elevene manglet en oversikt over bruksområdene til den deriverte, og var ikke helt klar over inndelingen av oppgavetyper i regelbruk, anvendelse og problemløsning. Noen av dem mente riktig nok at de var blitt mer bevisst dette i løpet av derivasjonsprosjektet.

Alle elevene som ble intervjuet mente at de lærte ved å regne oppgaver. Med ett unntak, uttrykte de derfor at de helst ville vært på kontrollgruppen, og jobbet med oppgaver som de var fortrolige med. Unntaket fant det interessant å jobbe med problemløsningsoppgaver. Dette var lite vektlagt i lærebøkene, og var derfor litt nytt og spennende.

Det var en klar tendens blant de intervjuede elevene at de koplet læringsutbytte mot resultater på testene: Hvis det gikk bra på testene, hadde de blitt bedre i derivasjon. Hvis det ikke gikk så bra, hadde de ikke lært noe særlig, eller kanskje til og med blitt dårligere.

Hvis de ikke repeterte stoffet, regnet samtlige av de intervjuede elevene med at en god del av det de hadde lært om derivasjon ville være glemt om en stund. Men det som var forstått ville sitte bedre igjen, enn det som kun var blitt memorert.

5. Diskusjon og konklusjon

Her diskuterer jeg noen av funnene mine, og vurderer om metoden og teoriene jeg har benyttet er egnet til å gi svar på mine forskningsspørsmål. Videre kommer jeg med en konklusjon for dette forskningsprosjektet, før jeg ser på hvilke implikasjoner dette forsknings-prosjektet kan ha på undervisningspraksis og hvilke forskningsmuligheter dette prosjektet kan åpne opp for.

5.1 Diskusjon av resultater

Her diskuterer jeg noen av funnene som ble presentert i 4.5, i lys av problemstillingen min slik den er gitt i 1.2..

5.1.1 Elevenes forhold til derivasjon

I følge spørreundersøkelsen oppfattet elevene derivasjon som vanskelig. De oppga at de kun behersket derivasjon ganske middels, og flertallet følte at de ikke var blitt bedre i derivasjon i løpet av prosjektperioden. Disse følelsene så ut til å være relativt uavhengig av hvilken læringsmåte elevene hadde benyttet. Også elevene som ble intervjuet ga uttrykk for at de opplevde derivasjon som vanskelig. Testresultatene var i gjennomsnitt ganske middels, mens elevene som deltok på derivasjonsprosjektet oppga at de hadde ganske høye karakterer i R1. Det vil si at alle tre metodene ser ut til å bekrefte den underliggende hypotesen i denne undersøkelsen om at derivasjon er et utfordrende emne for mange elever. Disse funnene stemmer overens med forskning som er nevnt i 1.1.

En grunn til at derivasjon kan fremstå som særlig utfordrende for mange elever som lærer matematikk gjennom tradisjonell oppgaveregning, er at de får servert en ganske kompleks og omfattende "pakke" med kunnskap (jfr. 1.1) som det forventes at de skal kunne ta til seg som en fiks ferdig utviklet teori. Men flere forskere, bl.a. Brousseau og Dreyfus i 2.4.1, og Sfard i 2.2.1, foreslår å legge mer vekt på den historiske utviklingen til matematikken, og la elevene i større grad oppleve matematikken som en utviklingsprosess. Jeg har ikke fulgt denne linjen helt ut, men har i løpet av derivasjonsprosjektet forsøkt å la elevene nærme seg derivasjon på andre måter enn gjennom tradisjonell oppgaveregning. Ved å la elever benytte læringsmåtene aktiv memorering og problemløsning når de har jobbet med derivasjon, har jeg håpet at dette i større grad skulle få dem til å reflektere over de mange ulike sidene ved derivasjonsbegrepet, og hvilke anvendelsesområder av derivasjon elevene kan regne med å møte i R1. Videre var tanken at slike refleksjoner skulle manifestere seg i en dypere forståelse for derivasjon, som igjen skulle føre til at kunnskapen fikk en mer varig karakter.

I intervjuene var det ingen av elevene som knyttet derivasjonsbegrepet til definisjonen av den deriverte. I stedet knyttet de derivasjon til bruk av regler og til prosedyrer for å finne ekstremalpunkt til grafer. Fra et elevperspektiv fremstår dette som et rimelig rasjonelt valg. Selv om alle læreverkene som elevene benyttet i R1 (Heir et al., 2007; Oldervoll et al., 2007; Sandvold et al., 2007) presenterer definisjonen av den deriverte, viser det seg at når elevene senere skal bruke derivasjon er det nettopp regelbruk og prosedyrer for å finne ekstremal-punkt som gjelder. Og når undervisningen i all hovedsak har vært lagt opp slik at elevene jobbet med derivasjon ved å benytte lærebøkene i henhold til Blomhøjs didaktiske kontrakt for tradisjonell undervisning (jfr. 2.4.1), er disse funnene egentlig litt som forventet. Så er spørsmålet om det er gunstig for elevenes læringsutbytte, at elevene forholder seg til en såpass begrenset del av derivasjonsbegrepet. Jeg har i denne masteroppgaven forsøkt å vise at dette ikke er tilfellet. Jeg har også forsøkt å vise at det kan se ut som en lærer kan forbedre mange elevers læringsutbytte ved å la dem benytte alternative læringsmåter som aktiv memorering og problemløsning - selv over en ganske kortvarig periode.

I R1 presenteres derivasjon typisk i denne rekkefølge i lærebøkene: Definisjon, regelbruk, funksjonsdrøfting og optimering (se 2.3.5.3). Dette er også den rekkefølge elevene vanligvis møter derivasjon i 1T. Mitt valg om å dele inn derivasjon i de tre bruksområdene regelbruk, anvendelse og problemløsning hadde sitt utspring i skriftlig eksamen i R1. Backwash-effekten (omtalt i 2.5.3), som gjør at det mange lærere vektlegger i undervisningen og på prøver gjerne styres av eksamen, burde medført at oppgavetypene ville være kjente. Særlig når man vet at skriftlig eksamen i 1T er bygget opp på tilsvarende måte som i R1 (Utdanningsdirektoratet, 2016i). Til tross for dette kan det virke som om få elever har vært bevisst denne tredelingen av derivasjon. Og det selv etter å ha gjennomført derivasjonsprosjektet, der nettopp denne tredelingen stod sentralt. Dette kan tyde på at elevene i denne undersøkelsen ikke er vant med å tenke strategisk - i alle fall i forhold til derivasjon.

5.1.2 Elevenes læringsutbytte av derivasjonsprosjektet

Her diskuterer jeg læringsutbyttet, både på kort sikt og på litt lengre sikt, av derivasjons-prosjektet for hver av de tre gruppene, slik det fremkommer fra dataene fra testene, spørreundersøkelsen og intervjuene. Jeg ser også nærmere på noen kjønnsforskjeller. I all diskusjon om utvikling i gjennomsnittlige testresultater som følger i dette delkapittelet, må det igjen understrekes at alle disse endringene er heftet med ganske stor usikkerhet.

Uavhengig av læringsmåte, tydet intervjuene på at elevene knyttet læringsutbyttet i dette derivasjonsprosjektet opp mot testresultatene; altså hvordan de følte at det hadde gått på de tre første testene. Elevene som var med på derivasjonsprosjektet var generelt vant med å få ganske gode karakterer på prøvene i R1. Intervjuene avdekket at når elevene følte at det ikke gikk like bra på testene som ble gjennomført i løpet av derivasjonsprosjektet som det de var vant med på R1-prøvene, påvirket dette deres syn på det opplevde læringsutbytte på en negativ måte. Det ser altså ut som om tradisjonell undervisning påvirker elevenes syn på læringsutbyttet. På kort sikt er elever som jobber med tradisjonell oppgaveregning vant med å få en tilbakemelding i form av et fasitsvar i læreboken, eller en kommentar fra faglærer. I løpet av en dobbelttime med tradisjonell undervisning i tråd med Blømhøjs didaktiske kontrakt beskrevet i 2.4.1, vil elevene få ganske mange slike tilbakemeldinger. For flinke elever, som det i følge de oppgitte karakterene i R1 virket å være mange av på dette prosjektet, vil majoriteten av disse tilbakemeldingene sannsynligvis være positive. Elevene som benyttet de alternative læringsmåtene fikk ikke slike større doser med positive tilbake-meldinger som de kanskje var vant med. Dette kan også bidra til å forklare at disse elevene ikke var like positive til læringsutbyttet av derivasjonsprosjektet som utviklingen på testene skulle tilsi. På litt lengre sikt er R1-elevene vant med å få en mer formell tilbakemelding i form av karakterer på prøver. Det kom tydelig frem under intervjuene at disse karakterene er viktige for elevene. Men på testene som elevene hadde i løpet av derivasjonsprosjektet, fikk elevene ingen tilbakemelding overhodet. Det var flere elever som etterlyste dette, og fraværet av slike tilbakemeldinger kan ha bidratt til å forsterke elevenes usikkerhet i forhold til deres prestasjoner på testene. I tillegg kan fraværet av karakterer ha medført at ikke alle elevene har jobbet like hardt med testene, som de f.eks. ville gjort hvis det hadde vært prøver som kunne påvirket standpunktkarakteren deres i R1. Det at mange elever oppfattet derivasjon som vanskelig (jfr. 5.1.1) kan også ha påvirket innsatsen deres. Men ikke nødvendigvis i negativ retning. I følge Csikszentmihalyi (1990) er motivasjon noe som oppstår i møtet mellom elev og oppgave. Det sentrale her er hvilke kompetanser eleven har i utgangspunktet, og hvordan oppgaven passer til disse kompetansene. Oppfattes oppgavene som for vanskelige eller for lette, er motivasjonen liten. Er oppgavene derimot passe utfordrende, er motivasjonen stor. Størst er motivasjonen når oppgavene ligger helt i grenseland av hva eleven mestrer. Elevene opplever da en slags "flyt" (William, 2007). Noen elever kan altså miste motivasjonen av å møte vanskeligheter i forbindelse med derivasjonsoppgaver, mens andre igjen kan oppleve en "flyt". I det sistnevnte tilfellet befinner de seg i det Vygotsky i 2.1.2.1 kaller den proksimale utviklingssonen. Læringseffekten er da optimal.

5.1.2.1 De som jobbet med tradisjonell oppgaveregning

Disse elevene så ut til å ha en moderat fremgang i løpet av derivasjonsprosjektet (Test1-3), men så falt de gjennomsnittlige resultatene markant på posttesten (Test5). Denne utviklingen virket å være uavhengig av kjønn. Det at tradisjonell oppgaveregning ser ut til å gi resultater på kort sikt, men at kunnskapen ikke ser ut til å bli sittende igjen på lengre sikt, kan tyde på at denne læringsmåten fremmer en mer instrumentell forståelse av derivasjon, for å bruke Skemp sin terminologi fra 2.4.1. En slik instrumentell forståelse av derivasjon ser imidlertid ikke ut til å skape noen problemer for elevene i R1. En lærer som underviser i henhold til Blomhøjs didaktiske kontrakt for tradisjonell undervisning (jfr. 2.4.1), vil derfor neppe reagere spesielt negativt på elevenes prestasjoner i derivasjon i R1. Det er først når elevene kommer i R2 at eventuelle mangler ved derivasjonskunnskapene til elevene ser ut til å komme til syne.

5.1.2.2 De som jobbet med problemløsning

Elevene som benyttet denne læringsmåten så ut til å ha en litt treg start med tanke på å lære seg derivasjon, men så virket det å løsne litt på slutten av derivasjonsprosjektet. Jentene hadde imidlertid en ganske jevn positiv utvikling gjennom hele prosjektperioden, mens guttene tilsynelatende hadde en mer flat utvikling i denne perioden. På posttesten fortsatte den positive utviklingen totalt. Jentene hadde en svært positiv utvikling, mens guttene fortsatte den mer flate utviklingen. Den noe trege starten som mange elever som benyttet problem-løsning opplevde, kan tyde på at kritikerne av denne læringsmåten kan ha rett i at dette er en krevende læringsmåte for elevene (se 2.4.2). Særlig for guttene ser det ut som det har tatt noe tid å bli fortrolig med denne måten å jobbe med derivasjon på. Men på sikt kan det virke som om denne læringsmåten i alle fall får noen elever til å reflektere mer over bruken av derivasjon, og at dette over tid kanskje kan gi det Skemp i 2.4.1 kaller en relasjonell forståelse av derivasjon. Tar vi hensyn til begge kjønn, ser problemløsning ut til å være den læringsmåten som best forbereder elevene på derivasjon i R2 av de tre vi har undersøkt i dette forskningsprosjektet.

5.1.2.3 De som jobbet med aktiv memorering

Elevene på disse gruppene så ut til å ha en positiv utvikling på kort sikt, mens dette virket å flate noe ut på posttesten. Dette skyldtes at resultatene spriket ganske mye for de to kjønn: Jentene, som virket å ha hatt en ganske moderat positiv utvikling i løpet av derivasjonsprosjektet, så ut til å få en ganske markant positiv utvikling på posttesten. Guttene så derimot ut til å ha en markant positiv utvikling i løpet av derivasjonsprosjektet, for så tilsynelatende å få en tilbakegang på posttesten. Aktiv memorering hadde som mål å gi elevene en mental oversikt over de vanligste bruksområdene til derivasjon i R1. Det var altså meningen at elevene skulle utvikle et rikt og oversiktlig begrepsbilde av derivasjon (se 2.3.3) i løpet av derivasjonsprosjektet. I tillegg var tanken at elevene i større grad skulle kunne automatisere regler og prosedyrer knyttet til derivasjon. Resultatene fra testene kan tyde på at jentene i større grad enn guttene kan ha nådd disse målene. Tar vi hensyn til begge kjønn, ser aktiv memorering ut til å være den av de tre læringsmåtene vi her har undersøkt som gir elevene størst læringsutbytte på kort sikt. Denne læringsmåten burde dermed være velegnet når elevene skal repetere derivasjon i forkant av heldagsprøve og eventuell eksamen i R1.

5.1.3 Elevenes forhold til alternative læringsmåter

Et sentralt spørsmål her er hva elevene mener med læring. Ut fra det som kom frem under intervjuene kan det tyde på at elevene forbinder læring i matematikk med oppgaveregning. De fleste elevene som ble intervjuet ga derfor uttrykk for at de helst ville vært på gruppen som jobbet med tradisjonell oppgaveregning. De ønsket å jobbe på en måte som de var vant med, og som de tidligere hadde erfart at førte til læring i matematikk. E. E. Moise (1984) hevder at

> For the overwhelming majority of students, the calculus is not a body of knowledge, but a repertoire of imitative behavior patterns (Tall, 1996, s. 290).

Elevene sine kunnskaper er dessuten ofte kontekstavhengige. Dette medfører at de kan ha problemer med å benytte kunnskapene i andre sammenhenger enn da de ble lært (Hiebert & Lefevre, 1986). Dette kom særlig til uttrykk hos de elevene som jobbet med problemløsning.

Både Dreyfuss og Blomhøj fremhever i 2.4.1 at en svakhet med tradisjonell undervisning nettopp er at elevene da ofte får problemer når de står overfor uvante oppgavetyper. I samtaler med noen elever i etterkant av derivasjonsprosjektet kom det dessuten frem at de syntes det var forvirrende å lære derivasjon på flere måter. Dvs. at de sliter med å forholde seg til ulike representasjoner av den deriverte (jfr. 2.3.3). Dette er noe som David Tall også finner, selv blant rimelig flinke studenter på universitetsnivå (Tall, 1996).

Det kan altså se ut som at tradisjonell undervisning (jfr. Blomhøjs didaktiske kontrakt i 2.4.1) påvirker elevenes syn på læring, som noe som i all hovedsak skjer gjennom oppgaveregning. Slike etablerte sosio-matematiske normer kan gjøre det utfordrende å introdusere alternative læringsmåter. Denne studien kan imidlertid tyde på at det kan være gunstig for elevenes læring å bryte med slike normer når elevene skal repetere derivasjon. Skal læreren lykkes med dette må vedkommende da reforhandle de sosiale normene i klasserommet (jfr. Cobb i 2.1.3.1).

5.2 Diskusjon av metode og teori

Målet med dette forskningsprosjektet har vært å sammenligne læringsutbyttet ved å benytte tre ulike læringsmåter (tradisjonell oppgaveregning, problemløsning og aktiv memorering) i forbindelse med repetisjon av derivasjon i R1. Som det fremkommer av 2.5 er læringsutbytte et komplekst begrep som det er vanskelig å måle. Ved å kombinere tester, spørreundersøkelse og intervju har jeg likevel forsøkt å avdekke læringsutbyttet for de tre læringsmåtene. Selv om det finnes noen svakheter knyttet til bruken av hver av disse metodene på dette forsknings-prosjektet, mener jeg at denne kombinasjonen av tre metoder har bidratt til å gi et ganske godt grunnlag for å kunne sammenligne læringsutbyttet ved å benytte de tre læringsmåtene.

En klar svakhet med metoden var at derivasjonsprosjektet kun gikk over 3 dobbelttimer. Er det realistisk å skulle forvente målbare forbedringer etter så kort tid? Er dette overhodet mulig? Tommy Dreyfus sier det slik:

> Understanding, more than knowing or being skilled, has always been considered an important goal by mathematics teachers. Understanding, as it happens, is a process occuring in the student's mind; it may be quick, an 'Aha-Erlebnis', a click of the mind; more often, it is based upon a long sequence of learning activities during which a great variety of mental processes occur and interact (Dreyfus, 1991).

Alle R1-elevene som deltok på derivasjonsprosjektet hadde jobbet en god del med derivasjon allerede. Mine forhåpninger var at noen av elevene som jobbet med alternative læringsmåter ville oppleve et slikt "click of the mind" som Dreyfus snakker om. I tillegg håpet jeg at noen av elevene på problemløsningsgruppene ville oppleve kognitive konflikter som kunne sette i gang mentale prosesser (jfr. Piaget sine teorier, gjengitt i 2.1.1.2), og at disse prosessene ville gi økt forståelse på noe sikt. Tanken var at dette da kanskje ville føre til en forbedret poeng-sum på posttesten. For elevene som jobbet med aktiv memorering, var håpet at noen av disse ville få en bedre mental oversikt over regler, prosedyrer og strategier. En slik mental oversikt har en verdi i seg selv. Min tanke var at en slik oversikt i tillegg skulle kunne frigjøre mental kapasitet hos noen elever, slik at de ble i stand til å oppdage nye sider ved derivasjon. For de fleste elevene som deltok på derivasjonsprosjektet var nok dette bare et lite steg i det Dreyfus kaller "a long sequence of learning activities", og at dette steget kanskje ikke var stort nok til at det ga målbare utslag i denne undersøkelsen.

Et sentralt poeng når jeg skulle undersøke varigheten av derivasjonskunnskapene til elevene som deltok i derivasjonsprosjektet, var at det skulle gå en tid før gjennomføringen av post-testen, der elevene i liten grad jobbet med derivasjon. Helt konkret var planen at posttesten skulle gjennomføres den første dagen disse elevene startet opp med R2 høsten 2015. Denne høsten ble imidlertid noen av de aktuelle skolene rammet av lærerstreik. Pga. R2-lærernes behov for å komme i gang med undervisningen etter at streiken ble avsluttet, førte dette til at disse elevene fikk repetert derivasjon i forkant av posttesten. Testresultatene var likevel sammenlignbare, siden dette gjaldt elever fra alle tre gruppene ved de aktuelle skolene. Men konsekvensene av streiken var likevel metodisk uheldig, siden repetisjonen i forkant av post-testen kanskje kan ha bidratt til å minske eventuelle forskjeller mellom de tre læringsmåtene.

En av de største utfordringene med testene viste seg å være den store spredningen i resultatene. Selv om endringene for de ulike læringsmåtene ofte var ganske markante, medførte den store spredningen i resultatene at disse endringene likevel ikke var signifikante. Mulige løsninger på denne utfordringen er diskutert i 5.5.

Spørreskjemaet var papirbasert. Dette gjorde det mulig for elevene å krysse av mellom to alternativer. En slik mulighet kunne vært forhindret ved å benytte et digitalt spørreskjema i stedet. Dette ville også gjort det mulig å redusere eventuelle misforståelse knyttet til de ulike spørsmålene, ved at det kunne vært lagt inn forklaringer eller utdypinger i forbindelse med hvert spørsmål.

Intervjuene avdekket mye interessant som ikke kom frem på testene eller på spørreundersøkelsen. Men dette virket på ingen måte å være uttømmende. Man kunne kanskje fått frem enda flere interessante aspekter knyttet til derivasjonsprosjektet ved å intervjue flere elever. Da ville man også kunne være sikrere på at det man avdekket var representativt for elevene som deltok på derivasjonsprosjektet. Men gitt tidsrammen for dette forskningsprosjektet, var det begrenset hvor mange flere elever det faktisk ville vært mulig å intervjue.

Når det gjelder teorien som er benyttet i dette forskningsprosjektet, mener jeg den har bidratt til å gi teoretiske perspektiver på de ulike fenomenene som jeg har studert i forbindelse med dette prosjektet. Cobbs analysemodell (jfr. 2.1.3.1) var velegnet i forbindelse med intervjuene. Derimot har det vært noe utfordrende å benytte denne modellen på rene kvantitative størrelser som testresultatene, siden det da ikke har vært mulig å observere verken sosiale eller psykologiske perspektiver. Dataene fra spørreundersøkelsen havnet i en mellomposisjon. Selv om disse dataene i utgangspunktet var rent kvantitative, var flere av spørsmålene (f.eks. om holdninger og arbeidsvaner) av en slik karakter at det var naturlig å benytte Cobbs analysemodell på disse.

5.3 Konklusjoner

I denne masteroppgaven har jeg sammenlignet tradisjonell oppgaveregning med to alternative læringsmåter; nemlig aktiv memorering og problemløsning. R1-elever som allerede hadde hatt en innføring i derivasjon på en relativt tradisjonell måte, jobbet videre med dette emnet ved å benytte én av disse alternative læringsmåtene over en ganske kort periode (3 dobbelttimer). Formålet var å se om det var mulig for disse R1-elevene å oppnå et økt læringsutbytte i løpet av denne perioden, sammenlignet med en kontrollgruppe som benyttet en tradisjonell læringsmåte til å jobbe med derivasjon i samme periode.

Masteroppgaven har vist at mange elever opplever derivasjon som et krevende emne i R1. Videre har den vist at det å supplere en tradisjonell læringsmåte med aktiv memorering eller med problemløsning når R1-elever skal lære seg derivasjon, kan ha noen gunstige læringseffekter sammenlignet med tradisjonell oppgaveregning. På kort sikt kan det se ut som at aktiv memorering var den læringsmåten som ga størst læringsutbytte i form av bedring av test-resultater. Tar vi hensyn både til resultatutviklingen på noe lengre sikt, den opplevde mestringsfølelsen og kjønn, fremstod problemløsning som den læringsmåten som totalt sett ga det beste læringsutbyttet.

Oppgaven har også vist at det kan ha vært visse kjønnsforskjeller når det gjelder utbyttet av å supplere en tradisjonell læringsmåte med alternative læringsmåter. Det kan virke som at jentene har hatt størst læringsutbytte av de alternative læringsmåtene, hvis vi kun ser på utviklingen av testresultater. Men når det gjelder den opplevde mestringsfølelsen, kan det se ut som at guttene har hatt størst utbytte av derivasjonsprosjektet.

Sammenligninger av posttester med tidligere tester gjennomført i denne undersøkelsen, antyder at det å benytte en av de to alternative læringsmåtene kanskje kan ha vært positivt for varigheten av det faglige læringsutbyttet. Men dette var det knyttet stor usikkerhet til.

5.4 Konsekvenser for undervisningspraksis

Selv om det er flere positive sider knyttet til det å benytte en tradisjonell læringsmåte, har derivasjonsprosjektet vist at man med fordel kan vurdere å benytte andre læringsmåter. Særlig med tanke på den langvarige effekten av læringen. Aktiv memorering og problemløsning ser begge ut som de kan fungere som gode supplement til tradisjonell oppgaveregning.

Helt konkret ser aktiv memorering ut til å kunne være en effektiv måte for elevene å repetere derivasjon i forkant av heldagsprøve og eventuell eksamen (både skriftlig, såvel som muntlig). I vg2 har ofte elevene et par uker mellom skriftlig og muntlig eksamen, der læreren disponerer tiden relativt fritt. Det er da ikke uvanlig å starte opp med R2, og da gjerne integrasjon. Her kunne det vært en ypperlig anledning til å benytte problemløsning som læringsmåte for repetere derivasjon. Dette ville kunne gi en naturlig overgang til integrasjon som antiderivert.

Personlig kommer jeg i fremtiden til å benytte begge de alternative læringsmåtene, både problemløsning og aktiv memorering, i min R1-undervisning. Jeg vil beholde opplegget med

3 læringsøkter, der hver økt avsluttes med en test. Men jeg vil gjøre en viktig justering i forhold til dette prosjektet. Jeg har nemlig stor tro på at læringsutbyttet vil øke ytterligere, hvis elevene fortløpende får tilbakemelding på testene. Det vil si at de får igjen de rettede testene, med poengsum og kommentarer. Det er viktig at det da settes av tid til at de får bearbeidet læringsarbeidet sitt, før de fortsetter med neste læringsøkt. En slik justering vil naturlig nok føre til at prosjektperioden varer noe lenger (jeg ser for meg 5 dobbelttimer, i stedet for 3), men jeg er overbevist om at dette vil betale seg på sikt. I tillegg vil en slik justering være i tråd med Utdanningsdirektoratets fire prinsipper for underveisvurdering - se 2.5.2.

5.5 Videre forskning

Begrepslæring var ikke blant de alternative læringsmåtene som jeg valgte å benytte i dette derivasjonsprosjektet, siden pilotundersøkelsen avdekket at elevene burde vært mer fortrolig med denne arbeidsformen i forkant av prosjektet for å kunne jobbe noenlunde selvstendig med matematikk på den mer abstrakte formen som begrepslæringen la opp til. I et fremtidig prosjekt kunne imidlertid en slik opplæring ha blitt gitt i forkant. Det ville da vært interessant å undersøke læringsutbyttet av begrepslæring, og f.eks. sammenlignet denne læringsmåten med tradisjonell oppgaveregning.

Det kunne vært interessant å dele resultatdataene opp i mindre deler (såkalte strata) etter nivå, og sett hvordan utviklingen hadde vært for de tre gruppene ut fra elevenes faglige prestasjonsnivå. Jeg kunne f.eks. analysert dataene over og under gjennomsnittet separat. Eventuelt kunne foretatt en finere inndeling (f.eks. i fire like store deler). Men da måtte utvalget økt betydelig. En slik inndeling i ulike strata, kombinert med en større økning av utvalget, ville dessuten redusert usikkerheten i de gjennomsnittlige resultatene for de tre gruppene (problemløsning, aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning).

Videre kunne det vært interessant å studere den enkelte læringsmåte nærmere. Hva er det f.eks. ved de ulike læringsmåtene som eventuelt gir en økt læringseffekt på kort og lang sikt? Hva skjer hvis vi rendyrker de ulike innlæringsmåtene - altså at vi ikke har tradisjonell oppgaveregning i forkant? Det kunne også vært interessant og sett på om vi hadde funnet tilsvarende resultater innenfor andre emner enn derivasjon.

6. Litteraturliste

Adams, R. A. (1991). *Calculus: A Complete Course*. Addison-Wesley Publishers Limited.

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique*. Kluwer Academic Publishers.

Berggren, J. L. (2007). Mathematics in Medieval Islam. I V. J. Katz & A. Imhausen (red.) *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A sourcebook* (s. 515-675). Princeton University Press.

Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnaren*, nr. 4 (s. 36-45). Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM).

Brousseau, G., Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V. (1997). *Theory of Dialectical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990*. Kluwer Academic Publishers.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Abstrakt forlag AS.

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist*, 31 (s. 175-190).

Cooke, R. L. (2013). *The History of Mathematics: A Brief Course.* John Wiley & Sons, Inc.

Cornu, B. (1991 evt. 2002). Limits. I D. Tall (red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 153-166). Kluwer Academic evt. Springer.

Cresswell, J. W. (2012). *Educational Research. Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. Pearson.

Dahl, O. (2008). *Derivasjon i 3MX. En analyse av pilotstudien til TIMSS Advanced 2008* *i Norge. Noe har skjedd i realfagene, men med* $f'(t) < 0$. Masteroppgave. Institutt for lærerutdanning. Universitetet i Oslo.

Danielsen, A. G. (2013). Kunnskapsbygging i skolen via kvantitative verktøy - statistikk og spørreskjema. I M. Brekke & T. Tiller (red.), *Læreren som forsker. Innføring i forskningsarbeid i skolen* (s. 138-154). Universitetsforlaget.

Dewey, J. (1933). How we think. I M. Skilbeck (red.) *John Dewey* (s. 70-82). Tekstutdrag utgitt i 1970. The Macmillan Company.

Dewey, J. (1998). *Experience and Education: The 60th Anniversary Edition*. Kappa Delta Pi.

Dobson, S., Eggen, A. B. & Smith, K. (2009). *Vurdering, prinsipper og praksis. Nye perspektiver på elev- og læringsvurdering*. Gyldendal Norsk Forlag AS.

Dormolen, J. van (1991). Metaphors. I A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen (red.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (s. 89-106). Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. I D. Tall (Red.) *Advanced Mathematical Thinking* (s. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstaction in Advanced Mathematical Thinking. I D. Tall (Red.) *Advanced Mathematical Thinking* (s. 95-123). Kluwer Academic Publishers.

Eisenberg, T. (1991). Functions and Associated Learning Difficulties. I D. Tall (Red.) *Advanced Mathematical Thinking* (s. 140-152). Kluwer Academic Publishers.

Ernest, P. (1994). Social Constructivism and the Psychology of Mathematics Education. I P. Ernest (red.), *Constructing Mathematical knowledge: Epistemology and Mathematics Education* (s. 62-72). The Falmer Press.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: a comparative look at China, Singapore and US mathematics textbooks. *Educational Studies in*

Mathematics, 66 (61-75).

Glasersfeld, E. von (1996). *Radical constructivism. A way of knowing and learning.* RoutledgeFalmer.

Good, T. L. & Grouws, D. A. (1979). The Missouri Mathematic Effectiveness Project: An Experimental Study in Fourth-Grade Classrooms. *Journal of Educational Psychology*, Vol 71, No 3 (s. 355-362).

Grønmo, L. S., Onstad, T. & Friestad Pedersen I. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Unipub.

Gundem, B. B. (1991). *Skolens oppgave og innhold. En studiebok i didaktikk.* Universitetsforlaget.

Hattie, J. & Yates, G. (2014). *Visible Learning and the Science of How We Learn.* Routledge.

Heir, O., Erstad, G., Moe, H., Skrede, P. A. & Borgan, Ø. (2007). *Matematikk R1*. Aschehoug.

Heir, O., Erstad, G., Moe, H. & Skrede, P. A. (2008). *Matematikk R2*. Aschehoug.

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H. & Borgan, Ø. (2015). *Matematikk R1*. Aschehoug.

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H. & Borgan, Ø. (2016). *Matematikk R2*. Aschehoug.

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning. I F. K. Lester jr. (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 371-404). NCTM.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (red.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (s. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers

Holme, A. (2004). *Matematikkens historie 2*. Fagbokforlaget.

Imsen, G. (2015). *Elevens verden.* Universitetsforlaget.

Jaworski, B. (1996). *Investigating Mathematics Teaching*. The Falmer Press.

Jørgensen, J. A. (2006). *Elevar si grafiske forståing av derivasjon. Ei kvalitativ tilnærming*. Hovedoppgave. Matematisk institutt. Universitetet i Bergen.

Katz, V. J. (1995). Ideas of Calculus in Islam and India. *Mathematics Magazine*, Vol 68, No 3, (s. 163-174). Mathematical Association of America.

Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics. An introduction*. Pearson Education, Inc.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* Gyldendal Norsk Forlag AS.

Lampert, M. & Cobb, P. (2003). Communication and Language. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (s. 237-249). NCTM.

Lerman, S. (1994). Articulating Theories of Mathematics Learning. I P. Ernest (red.), *Constructing Mathematical knowledge: Epistemology and Mathematics Education* (s. 248-273). The Falmer Press.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modelling. I F. K. Lester jr. (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 763-804). NCTM.

McCormick, K. & Salcedo, J. (2015). *SPSS Statistics for Dummies*. John Wiley & Sons, Inc.

Mellin-Olsen, S. (1996). Oppgavediskursen i matematikk. *Tangenten* 2/2009 (s. 2-7). Casper forlag AS.

Merriënboer, J. J. G. van & Sweller, J. (2005). Cognitive Load Theory and Complex Learning: Recent Developments and Future Directons. *Educational Psychology Review*, Vol. 17, No 2 (s. 147-177).

National Research Council (Red. Bransford, J. D., Brown, A. L., Cocking, R. R.) (2000). *How People Learn. Brain, Mind, Experience and School: Expanded Edition.* National Academy Press.

NCTM (2008). *Principles and Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

NDLA (desember, 2016a). http://ndla.no/nb/node/48068

NDLA (desember, 2016b). http://om.ndla.no/rapporter

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2007). *Sinus R1. Lærebok i matematikk.* Cappelen Damm AS.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2008). *Sinus R2. Lærebok i matematikk.* Cappelen Damm AS.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2013). *Sinus R1. Lærebok i matematikk.* Cappelen Damm AS.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2015). *Sinus R2. Lærebok i matematikk.* Cappelen Damm AS.

Orton, A. (1983). Students' Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics* 14 (s. 235-250).

Piaget, J. (1972). *Psychology and Epistemology. Toward a Theory of Knowledge.* (Oversatt av P.A. Wells) Allen Lane The Penguin Press.

Plofker, K. (2007). Mathematics in India. I V. J. Katz & A. Imhausen (red.), *The Mathematics* *of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A sourcebook* (s. 385-514). Princeton University Press.

Polya, G. (2009). *How to sove it. A new aspect of mathematical method.* Ishi Press International.

Prøitz, T. S. (2010). Learning outcomes: What are they? Who defines them? When and where are they defined? I S. G. Huber & G. Skedsmo (red.), *Ecucational Assessment, Evaluation and Accountability*, Vol 22, No 2 (s. 119-137). Springer.

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W., S., Mustaparta, S., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2007). *Sigma R1 Matematikk*. Gyldendal Norsk Forlag AS.

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W., S., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2008). *Sigma R2 Matematikk*. Gyldendal Norsk Forlag AS.

Schoenfeld, Alan H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334-370). Macmillan.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (s. 1-36).

Sfard, A. (1994). Mathematical Practices, Anomalies and Classroom Communication Problems. I P. Ernest (red.), *Constructing Mathematical knowledge: Epistemology and Mathematics Education* (s. 248-273). The Falmer Press.

Sfard, A. (2003). Balancing the Unbalanceable: The NCTM Standards in Light of Theories of Learning Mathematics. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (s. 237-249). NCTM.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge University Press.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Falmer Press.

Sierpinska, A. (2005). Discoursing Mathematics Away. I J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Varero (red.), *Meaning in Mathematics Education* (s. 205-230). Springer Science+Business Media, Inc.

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, Vol 26, No 3 (9-15).

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H. C. (2015). *Matematik for lærerstuderende. Delta. Fagdidaktik.* Forlaget Samfundslitteratur.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kan det virkelig passe? - om matematikklæring* (s. 143-157). L & R Uddannelse.

Smith, K. (2009). *Vurdering - en kompleks aktivitet*. I Brøyn, T. (red.) Bedre skole, Nr 3 (s. 83-87). Utdanningsforbundet.

Sollid, H. (2013). Intervju som forskningsmetode i klasserommetsforkning. I M. Brekke & T. Tiller (red.), *Læreren som forsker. Innføring i forskningsarbeid i skolen* (s. 124-137). Universitetsforlaget.

Store norske leksikon (2005-2007a). https://snl.no/konvensjonalisme

Store norske leksikon (2005-2007b). https://snl.no/heuristikk%2Fpsykologi

Store norske leksikon (2005-2007c). https://snl.no/vurdering%2Fpedagogikk

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 12, No 7 (s. 151-169).

Tall, D. (1985). Understanding the Calculus. *Mathematics Teaching*, Vol 110 (s. 49-53). Tilgjengelig fra: http://go.warwick.ac.uk/wrap

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. I A. J. Bishop et al. (red.), *International Handbook of Mathematics Educations* (s. 289-325). Kluwer Academic Publishers.

Utdanningsdirektoratet (2016a). *Læreplaner i matematikk.* Hentet fra http://www.udir.no/Lareplaner/Finn-lareplan/#matematikk

Utdanningsdirektoratet (2016b). *Revidert eksamensordning i matematikk.* Hentet fra http://www.udir.no/Vurdering/Eksamen-videregaende/Endringer-og-overgangsordninger/Endringer/eksamensordning-skriftlig-eksamen-i-matematikk/

Utdanningsdirektoratet (2016c). *Eksamensveiledning for matematikk VGO.* Hentet fra https://dok.udir.no/DokumenterAndrekataloger.aspx?proveType=Ev

Utdanningsdirektoratet (2016d). *Matematikk: Veiledende nasjonale kjennetegn på måloppnåelse for standpunktvurdering etter 10. trinn.* Hentet fra http://www.udir.no/globalassets/upload/vurdering/kjennetegn/matematikk_kjennetegn_bm.pdf

Utdanningsdirektoratet (2016e). *Fire prinsipper for underveisvurdering*. Hentet fra http://www.udir.no/Vurdering-for-laring/4-prinsipper/

Utdanningsdirektoratet (2016f). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram - kompetansemål MAT3-01*. Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Kompetansemaal?arst=1858830315&kmsn=-1169861937

Utdanningsdirektoratet (2016g). *Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål MAT1-04*.

Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal?arst=1858830316&kmsn=2088314978

Utdanningsdirektoratet (2016h). *Vurdering for læring*. Hentet fra http://www.udir.no/Vurdering-for-laring/

Utdanningsdirektoratet (2016i). *Eksamensoppgaver i videregående*. Hentet fra https://dok.udir.no/EksamensOppgaver.aspx?proveType=EV

Utdanningsdirektoratet (2016j). *Skoleporten. Standpunkt programfag*. Hentet fra https://skoleporten.udir.no/rapportvisning/videregaaende-skole/laeringsresultater/standpunkt-programfag/hordaland-fylke?enhetsid=12&vurderingsomrade=11&skoletype=1&utdanningstype=--&skoletypemenuid=1&underomrade=16&sammenstilling=4&fordeling=2

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning. I D. Tall (Red.) *Advanced Mathematical Thinking* (s. 65-81). Kluwer Academic Publishers.

William, D. (2007). Keeping Learning on Track. Classroom Assessment and the Regulation of Learning. I F. K. Lester, jr. (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 1053-1098). NCTM. Information Age Publishing Inc.

Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W., Mustaparta, S., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2012). *Sigma R1 Matematikk*. Gyldendal Norsk Forlag AS.

Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W., Mustaparta, S., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2015). *Sigma R2 Matematikk*. Gyldendal Norsk Forlag AS.

Østerlie, P. G. (2011). *Et diskurtivt møte med den deriverte. Designforskning om tilrettelegging for objektifisering av derivasjonsbegrepet i et teknologirikt miljø*. Masteroppgave. Avdeling for lærer- og tolkeutdanning. Høgskolen i Sør-Trøndelag.

7. Vedlegg

7.1 Informasjonsskriv

Informasjon om undervisningsopplegg med derivasjon

Derivasjon kan deles inn i 3 områder (slik det typisk gjøres til eksamen):

- **Regelbruk** - dvs. løse ferdigoppstilte oppgaver vha. derivasjonsreglene
- **Anvendelse** - dvs. funksjonsdrøfting og optimering
- **Problemløsning** -dvs. uvante innfallsvinkler og/eller tekstoppgaver

Klassen deles inn i 3 grupper. Målet er at dere skal lære dere å løse oppgaver innenfor de 3 nevnte områdene. Hver av gruppene har sin egen måte å forsøke og lære stoffet på. Hver gruppe jobber med de tildelte oppgaven i ca. 50 min. Siste 40 min. blir det en test.

Gruppe 1

Begreper og aktiv memorering: Skal forsøke å få en dypere forståelse av derivasjonsbegrepet, og hvordan du bruker derivasjon til å løse ulike problemer. Dette er særlig nyttig i forbindelse med problemløsning.

Skal lære seg regler og metoder utenat. Hensikten er at du da da kan frigjøre hjerne-kapasitet til å takle mer sammensatte problemstillinger.

Arbeidsmåten består i at dere først forsøker å forstå de ulike begrepene på egen hånd. Deretter diskuteres begrepene i gruppen, slik at dere kommer fram til en felles forståelse. Videre jobber dere igjen alene; nå med å finne regler og metoder, og så pugge disse. Til slutt går dere sammen to-og-to (evt. tre), og hører hverandre i det dere har pugget.

Gruppe 2

Problemløsningsgruppen: Skal rett og slett øve seg på å bli bedre i problemløsning.

Arbeidsmåten består i først å jobbe alene. Etter ca. 15 minutter går dere sammen to-og-to, og jobber videre med oppgavene. Etter nye 15 minutter går hele gruppen sammen om å løse problemene.

Gruppe 3

Kontroll-gruppen: Skal jobbe med derivasjon på tradisjonell måte, ved at du forsøker å løse så mange oppgaver som du klarer innen hvert av de 3 områdene nevnt over. Skal du bli god i matte, kommer du ikke utenom å gjøre mange oppgaver. Ideelt sett skal du være så god i standard derivasjonsoppgaver at du kan regne gjennom slike oppgaver uten å måtte tenke - regningen skal altså gå automatisk. Hvis du får til dette, blir det mye lettere å gå løs på mer kompliserte oppgaver.

Arbeidsmåten består i å jobbe individuelt med de tildelte oppgavene.

7.2 Samtykkeerklæring

Forespørsel om å delta i en studie i forbindelse med en masteroppgave

Bakgrunn

Jeg holder på med en master-oppgave i matematisk didaktikk ved Universitetet i Bergen, og ønsker i den forbindelse å teste ut alternative måter å lære derivasjon. Undervisningsopplegget vil bli gjennomført i flere R1-klasser i Bergensregionen våren 2014. Opplegget går over 3 dobbelttimer, der hver dobbelttime avsluttes med en 40 minutters test. Kort tid etter at opplegget er gjennomført, svarer alle deltakerne i studien på et spørreskjema. I etterkant vil ca. 6 av R1-elevene som deltar i studien, bli valgt ut til å være med på et intervju. Disse vil få tilsendt en intervjuguide i god tid før intervjuene gjennomføres.

Alle personer som medvirker til forskningprosjektet vil bli fullstendig anonymisert.
Alle data vil bli slettet/makulert ved prosjektets avslutning, senest 30.06.2015.
Det samme gjelder for navnelister.

Det er frivillig å være med, og du har mulighet til å trekke deg når som helst underveis, uten å måtte begrunne dette nærmere.

Om du ikke deltar i studien, eller om du trekker deg underveis, får dette ingen innvirkning på faglige forhold.

Praktisk informasjon

Hvis det er noe du lurer på kan du kontakte meg på e-posten tom.aksdal@hfk.no.
Du kan også ta kontakt med min veileder, Christoph Kirfel, ved matematisk institutt på tlf. 55 58 48 73.

Studien er godkjent av Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskaplig datatjeneste (NSD).

Med vennlig hilsen
Tom Aksdal

Samtykkeerklæring

Jeg er villig til å delta i studien, ☐ inkludert eventuelt intervju

☐ men ønsker ikke å bli intervjuet

Navn ....

Signatur ....

7.3 Meldeskjema NSD

Dette prosjektet skulle opprinnelig vært avsluttet i juni 2015. Grunnet økt arbeidsbelastning ved overgang til ny skole, måtte jeg be om et års utsettelse til juni 2016.

7.3.1 Bekreftelse på opprinnelig meldeskjema

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel. +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Christoph Kirfel
Matematisk institutt
Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 23.04.2013 Vår ref:34047 / 3 / MSI Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 01.04.2013. Meldingen gjelder prosjektet:

34047	*Derivasjon - alternative innlæringsmetoder*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Christoph Kirfel*
Student	*Tom Aksdal*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 30.06.2015, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Vigdis Namtvedt Kvalheim

Marte Sivertsen

Marte Sivertsen tlf: 55 58 33 48
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Tom Aksdal, Flaktveitveien 713, 5134 FLAKTVEIT

7.3.2 Bekreftelse på endringsskjema

BEKREFTELSE PÅ ENDRING

Vi har mottatt endringsmelding 31.1.15, og har registrert ny prosjektslutt 30.6.2016.

Vi legger til grunn at det gis informasjon til den delen av utvalget det er mulig å kontakte.

Ved ny prosjektslutt vil personvernombudet rette en ny henvendelse angående status.

--

Vennlig hilsen

Marianne Høgetveit Myhren
seniorrådgiver
Personvernombudet for forskning, NSD
Tel: 55582529

www.nsd.uib.no/personvern

7.4 Oppgavene

Nedenfor følger oppgavene som ble benyttet under derivasjonsprosjektet for hver av de tre gruppene: problemløsning, aktiv memorering og tradisjonell oppgaveregning. Det er tre sett for hver gruppe - til sammen ni sett.

7.4.1 Problemløsning 1

Derivasjon

Problemløsningsoppgaver

Sett 1

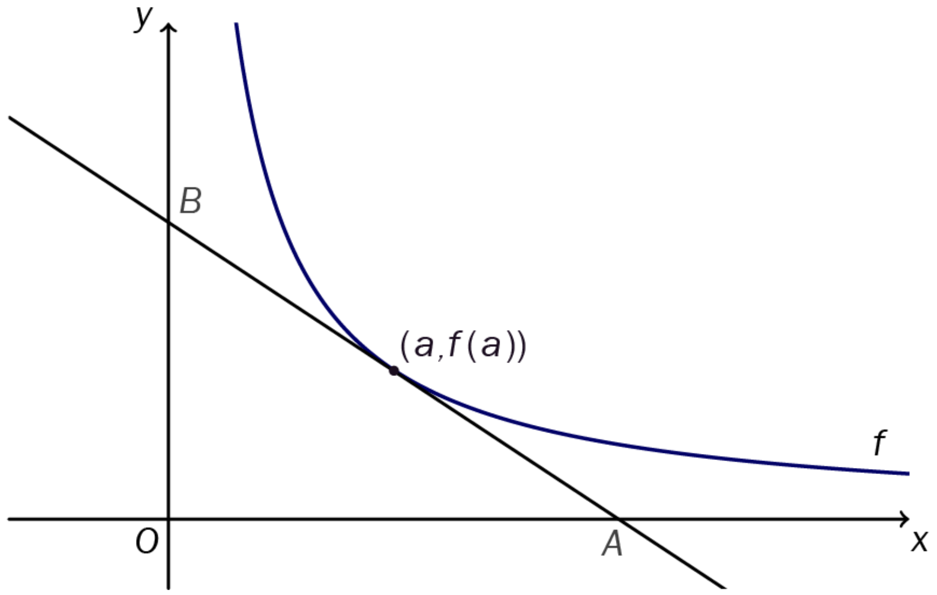
1) Vi har gitt den deriverte til funksjonen f som $f'(x) = 8x^3 - 5x$.

Finn funksjonen f, når du vet at $f(2) = 10$.

2) Vi har gitt funksjonen $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3x - 7$.

Finn a, når du vet at grafen til f har et vendepunkt når $x = 3$.

3) Skissen under viser grafen til $f(x) = \dfrac{1}{x}$, og tangenten til denne grafen i punktet $(a,\ f(a))$



Finn arealet av trekanten OAB, uttrykt ved a.

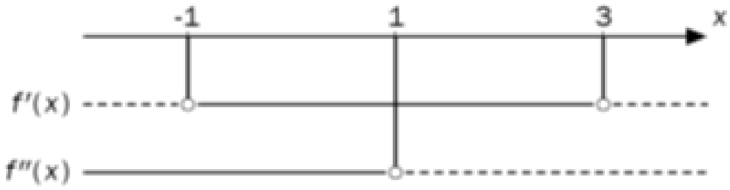
7.4.2 Problemløsning 2

Derivasjon

Problemløsningsoppgaver

Sett 2

1) Fortegnslinjene til $f'(x)$ og $f''(x)$ til en funksjon f er gitt nedenfor.



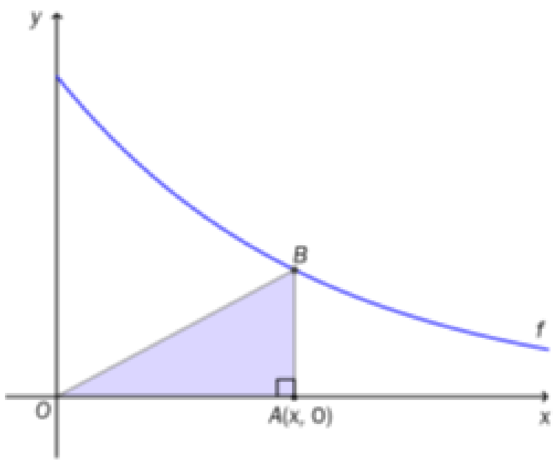
Tegn en skisse av hvordan grafen til f kan se ut.

2) Mengden av lava som spruter ut per time ved et vulkanutbrudd, kan tilnærmet beskrives vet et funksjonsuttrykk $f(t)$. Funksjonsverdiene er målt i tonn, og t er antall timer etter begynnelsen av utbruddet.

Du får vite at: $f(0) = 300$, $f'(10) = 0$ og $f''(10) = -10$

Hva kan du si om vulkanutbruddet på grunnlag av disse opplysningene?

3) Nedenfor ser vi en del av grafen til funksjonen $f(x) = \frac{5}{2}e^{-\frac{x}{2}}$, $x > 0$.



Beregn det største arealet trekanten OAB kan ha.

4) I et rett prisme er lengden av grunnflaten fire ganger så stor som bredden. Volumet av prismet er 200 cm^3.

Hva er den minste overflaten som prismet kan ha?

7.4.3 Problemløsning 3

Derivasjon

Problemløsningsoppgaver

Sett 3

1) Den deriverte til en polynomfunksjon f er gitt ved $f'(x) = 2(x+1)(x-3)$.

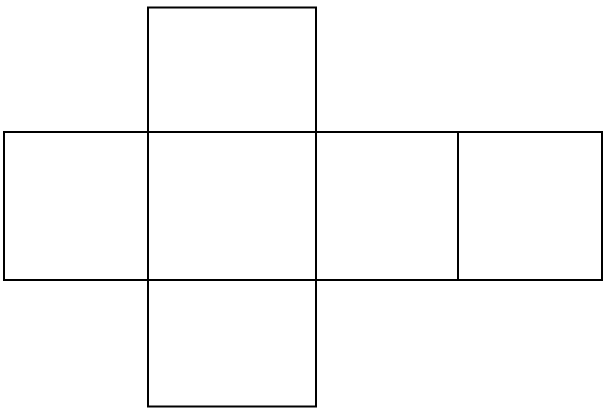
a) Bruk uttrykket over til å finne ut hvor funksjonen f vokser, og hvor den avtar. Bestem også førstekoordinatene til topp- og bunnpunktet på grafen til f.

b) Bestem $f''(x)$.
Bruk $f''(x)$ til å finne førstekoordinaten til vendepunktet på grafen til f.

Den deriverte til en polynomfunksjon g er gitt ved $g'(x) = a(x-b)(x-c)$, der konstantene a, b og c alle er positive. Vi antar at $b < c$. Førstekoordinatene til topp- og bunnpunktet på grafen til g er henholdsvis x_{maks} og x_{min}.

c) Forklar hvorfor grafen til g bare kan ha ett vendepunkt.
Vis at førstekoordinaten til dette vendepunktet ligger midt mellom x_{maks} og x_{min}.

2) Vi har en eske med lokk. Grunnflaten er et kvadrat med side x meter.
Hva er det største volumet esken kan ha, hvis vi har 4 m^2 materiale til rådighet?
Nedenfor er en skisse av esken, når den er brettet ut.



7.4.4 Aktiv memorering 1

Derivasjon

Aktiv memorering

Sett 1

1) Skriv ned definisjonen av den deriverte.

a) Gjør rede for de ulike symbolene som brukes.

b) Hva forteller denne definisjonen

– rent matematisk (symbolsk)?

– grafisk?

c) Hvordan kan vi bruke definisjonen til å finne den deriverte i et punkt $x = x_1$ (altså en eksakt verdi for den deriverte)? - bruk gjerne et konkret eksempel.

d) Hvordan kan vi bruke definisjonen til å finne en tilnærmet verdi for den deriverte i et punkt $x = x_1$?

Hvordan kan vi gjøre denne tilnærmingen bedre?

2) Skriv ned reglene for derivasjon nedenfor

a) $\left(x^r\right)' =$

b) $(x)' =$

c) $(k)' =$

d) $\left(\sqrt{x}\right)' =$

e) $\left(\frac{1}{x^r}\right)' =$

f) $\left(e^x\right)' =$

g) $\left(a^x\right)' =$

h) $(\ln x)' =$

i) $(\lg x)' =$

... og disse mer avanserte reglene.

k) Gitt $f(x) = g\big(u(x)\big)$. $f'(x) =$

l) $(u \cdot v)' =$

m) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' =$

– hva kalles de 3 reglene i **k)**, **l)** og **m)** over?

– fullfør regelen $\big(k_1 u(x) + k_2 v(x)\big)' =$
hva forteller denne regelen?

– forklar at de 4 reglene **b) - e)** er spesialtilfeller av **a)**.

Lær deg alle reglene for derivasjon gitt i **2)** utenat.

7.4.5 Aktiv memorering 2

Derivasjon

Aktiv memorering

Sett 2

1) Hvilken informasjon kan vi få fra fortegnlinjen til

- funksjonen?
- den deriverte av funksjonen?
- den dobbeltderiverte av funksjonen?

2) Ved en standard funksjonsdrøftingsoppgave går vi fram på bestemte måter for å finne ut mest mulig om en gitt funksjon.

Skriv ned en oppskrift på hvordan du går fram når du skal finne

a) nullpunkter.

b) topp- og bunnpunkter.

c) vendepunkter.

d) likningen til en tangent.

3) Ved optimeringsoppgaver, skal vi finne den største eller minste verdien i en gitt situasjon.

Lag deg en oppskrift for hvordan du går fram når du skal løse en typisk optimeringsoppgave.

Lær deg oppskriftene i **2)** og **3)** utenat.

7.4.6 Aktiv memorering 3

Derivasjon

Aktiv memorering

Sett 3

1) **a)** Hva mener vi med vekstfart?

Hva betyr det at vekstfarten er negativ?

Hvordan kan vi finne vekstfarten for en gitt *x*-verdi (f.eks. $x = x_1$)

- grafisk?
- ved regning?

b) Hva mener vi med endringen av vekstfarten?

Hvordan kan vi finne ut når vekstfarten er størst eller minst?

2) **a)** Hva forteller $f''(x)$ om $f'(x)$?

Hvordan kan vi finne ekstremalpunktene til $f'(x)$,
og hva forteller dette oss om $f(x)$?

b) Hva kan grafen til $f'(x)$ fortelle oss om $f(x)$? - skisser gjerne en slik graf

3) Et eksempel på en typisk ("vanlig") derivasjonsoppgave:

> Vi har funksjonen $f(x) = x \cdot e^{-x}$
>
> a) Vis at $f'(x) = (1-x) \cdot e^{-x}$. Bruk dette til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.
>
> b) Bruk $f''(x)$ til å finne eventuelle vendepunkter på grafen til *f*.

Et eksempel på en problemløsningsoppgave:

> I et rett prisme er lengden av grunnflaten fire ganger så stor som bredden.
> Volumet av prismet er 200 cm^3.
>
> Hva er den minste overflaten som prismet kan ha?

a) Hva er det som skiller problemløsingsoppgaver fra mer "vanlige" oppgaver?

b) Hvordan kan vi gå fram når vi står overfor en problemløsingsoppgave?

Skriv ned noen "lure" strategier (framgangsmåter).

Lær deg disse strategiene utenat.

7.4.7 Tradisjonell oppgaveregning 1

Derivasjon

Drill-oppgaver

Sett 1

Finn $f'(x)$.

1)	$f(x)=x^3-2x+3$	**2)**	$f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$
3)	$f(x)=e^x+x^e$	**4)**	$f(x)=x^2\sqrt{x+2}$
5)	$f(x)=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}$	**6)**	$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$
7)	$f(x)=2\sqrt{x-1}$	**8)**	$f(x)=e^x\left(x^2+x\right)^2$
9)	$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{(2-x)^2}$	**10)**	$f(x)=e^{2x}-e^x$
11)	$f(x)=\dfrac{2}{5}x^4-\sqrt{2}x+3$	**12)**	$f(x)=\ln\left(e^{2x}+x\right)$
13)	$f(x)=\sqrt{x}\ln x$	**14)**	$f(x)=\sqrt{e^{2x}+2}$
15)	$f(x)=ex^3-kx+\pi r^2$	**16)**	$f(x)=x\ln 2-2\ln x$
17)	$f(x)=e\ln x^2$	**18)**	$f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(2x-3\right)^2}$
19)	$f(x)=1{,}2x^2-0{,}7x$	**20)**	$f(x)=\ln(\ln x)$
21)	$f(x)=\dfrac{2}{e^{3x}}$	**22)**	$f(x)=\left(x^2+1\right)^3$
23)	$f(x)=x\left(2x-1\right)^3$	**24)**	$f(x)=e^{x^2-x}$
25)	$f(x)=e^{2x}\ln x$	**26)**	$f(x)=x^2\cdot 2^x$
27)	$f(x)=x^{1,5}-2x^{0,7}+x$	**28)**	$f(x)=(\ln x)^2$
29)	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$	**30)**	$f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$
31)	$f(x)=\dfrac{x\ln x}{e^x}$	**32)**	$f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$
33)	$f(x)=xe^x\ln x$	**34)**	$f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$

7.4.8 Tradisjonell oppgaveregning 2

Drill-oppgaver

Sett 2

Finn evt. nullpunkter, toppunkter, bunnpunkter og vendepunkter på grafen til $f(x)$ ved regning.

1) $f(x) = x^2 - x - 2$

2) $f(x) = x - \sqrt{x}$

3) $f(x) = e^{-x} + 1$

4) $f(x) = \ln x$

Finn likningen til tangenten til grafen til $f(x)$ i punktet $x = -2$.
(Funksjonene nedenfor er de samme som **1)** og **3)** over.)

5) $f(x) = x^2 - x - 2$

6) $f(x) = e^{-x} + 1$

7) Et rektangulært område skal gjerdes inn. Vi har 200 m med gjerde.

a) Området ligger i et åpent terreng.
- Tegn figur.
- Kall hver av de to lengdene for x, og hver av de to breddene for y.
- Vis at y kan uttrykkes som $y = 100 - x$.
- Vis at arealet av rektangelet kan uttrykks som $A(x) = 100x - x^2$.

Finn arealet av det største området vi kan gjerde inn.

b) Området ligger inntil en mur, slik at den ene siden ikke trenger gjerdes inn.
Finn arealet av det største området vi kan gjerde inn i dette tilfellet.

8) Et akvarium er 15 cm lenger enn det er høyt, og bredden og høyden er til sammen 60 cm.
Hvilken høyde gir akvariet det største volumet?

Finn evt. nullpunkter, toppunkter, bunnpunkter og vendepunkter på grafen til $f(x)$ ved regning.

9) $f(x) = e^x(x+1)$

10) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$

11) $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$

12) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Finn likningen til tangenten til grafen til $f(x)$ i punktet $x = -2$.
(Funksjonene nedenfor er de samme som i **9)** og **11)** over.)

13) $f(x) = e^x(x+1)$

14) $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$

15) Kostnadene i tusen kroner ved produksjon av x enheter av en vare er

$$K(x) = 0{,}02x^2 + 42x + 600\,, \quad x \in [0,\ 500]$$

og inntektene i tusen kroner er

$$I(x) = -0{,}015x^2 + 63x\,, \quad x \in [0,\ 500]$$

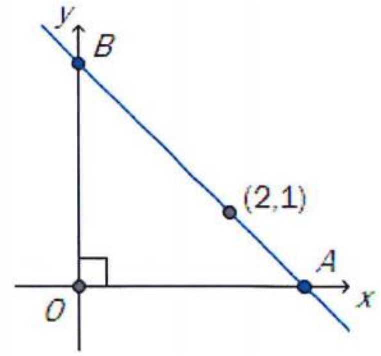
Hva er det største overskuddet denne produksjonen kan ha?

7.4.9 Tradisjonell oppgaveregning 3

Drill-oppgaver

Sett 3

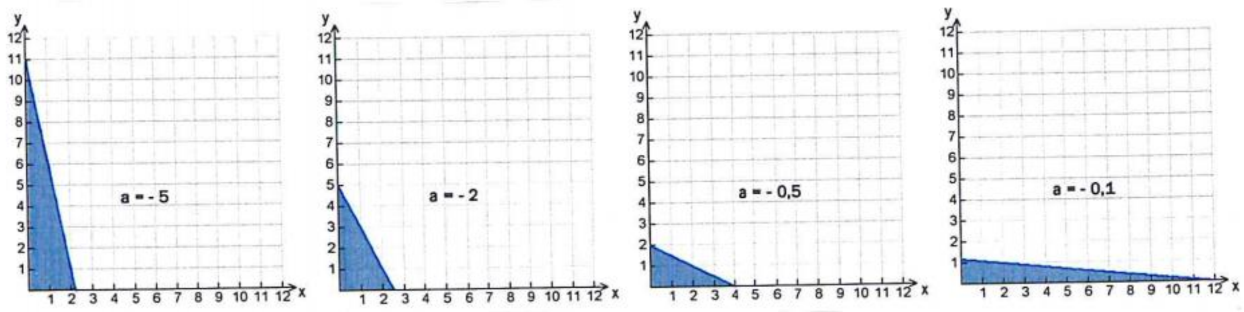
1) En rett linje med stigningstall a går gjennom punktet (2, 1). Linjen skal synke mot høyre.



a) Vis at likningen til linjen kan skrives som

$$y = ax - 2a + 1 \;, \quad \text{der } a < 0$$

Vi kaller skjæringspunktet med x-aksen for A og skjæringspunktet med y-aksen for B. Vi lar $F(a)$ være arealet av trekanten OAB. O er origo. Skissene nedenfor viser trekantene for $a = -5$, $a = -2$, $a = -0{,}5$ og $a = -0{,}1$



b) Vis at $F(a) = -\dfrac{(2a-1)^2}{2a}$.

c) Vis ved regning at $F'(a) = \dfrac{(2a-1)\cdot(-2a-1)}{2a^2}$.

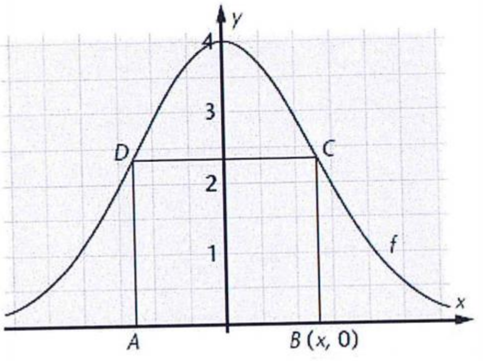
d) Tegn fortegnslinjen til $F'(a)$, og bruk denne til å finne det minste arealet trekanten kan ha.

Hva er likningen til linjen når arealet er minst?

2) Vi har gitt funksjonen $f(x) = 4e^{-2x^2}$

a) Finn $f'(x)$.

Vi har tegnet grafen til *f* sammen med et innskrevet rektangel *ABCD*. Punktene *A* og *B* ligger på *x*-aksen, og punktene *C* og *D* ligger på grafen til *f*. Punktet *B* har koordinatene $(x, 0)$, der $x > 0$.

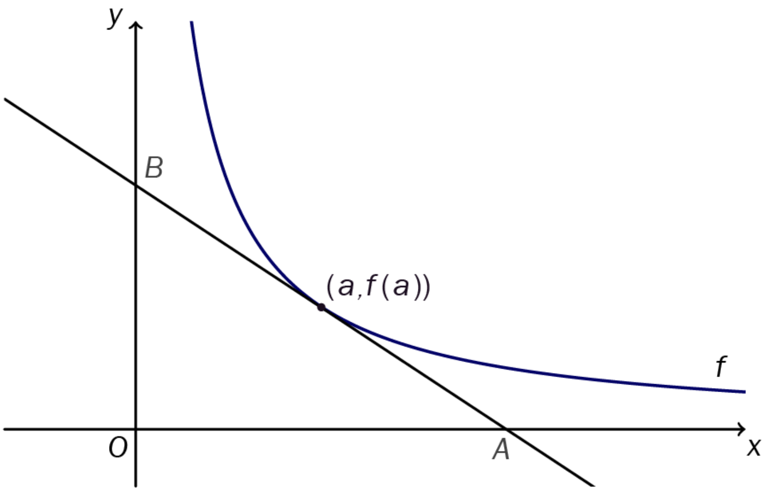


b) Finn koordinatene til *A*, *C* og *D* uttrykt ved *x*.

c) Vis at arealet $A(x)$ av rektangelet er $A(x) = 8xe^{-2x^2}$

d) Finn ved regning den verdien av *x* som gir størst areal.
Finn den eksakte verdien av arealet for denne *x*-verdien.

3) Skissen under viser grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$, og tangenten til denne grafen i punktet $\left(a,\ f(a)\right)$

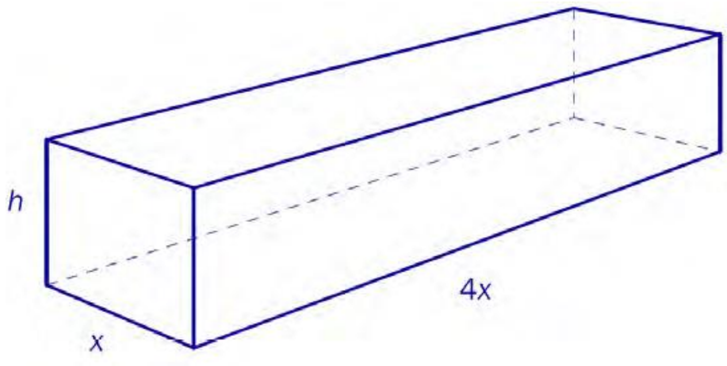


a) Vis at likningen for tangenten er gitt ved $y = -\frac{1}{a^2} \cdot x + \frac{2}{a}$.

b) Bestem koordinatene til *A* og *B*, der tantgenten skjærer koordinataksene.

c) Finn arealet av trekanten *OAB*, uttrykt ved *a*.

4) Vi har et rett prisme der lengden av grunnflaten er fire ganger så stor som bredden. Volumet er 200 cm^3. Vi setter bredden lik x cm. Se skissen nedenfor.



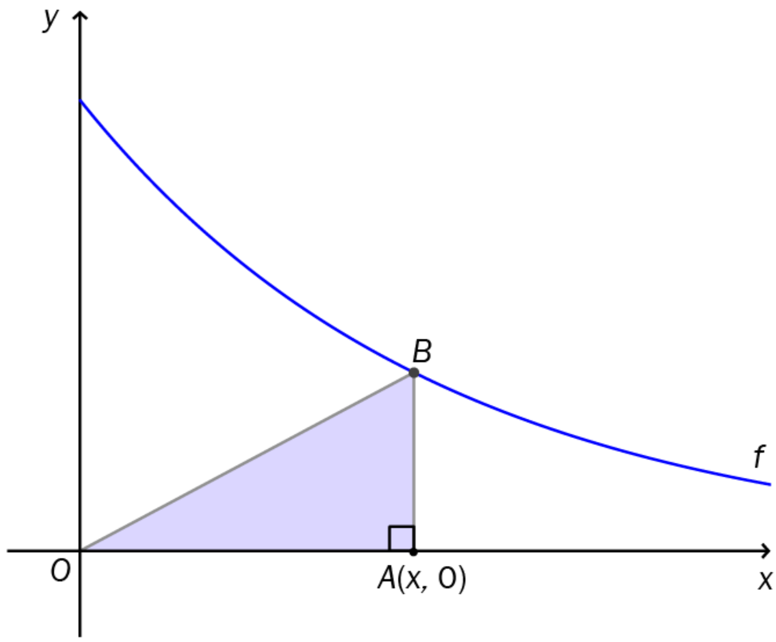
a) Vis at $h = \dfrac{50}{x^2}$.

b) Vis at overflaten O av prismet kan skrives som $O(x) = \dfrac{500}{x} + 8x^2$.

c) Vis ved regning at den deriverte til O er $O'(x) = \dfrac{-500 + 16x^3}{x^2}$.

d) Regn ut den minste overflaten O som prismet kan ha.

5) Nedenfor ser vi en del av grafen til funksjonen $f(x) = \dfrac{5}{2} e^{-\frac{x}{2}}$, $x > 0$.



a) Vis at arealet av trekanten OAB er gitt ved $g(x) = \dfrac{5}{4} x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

b) Beregn det største arealet trekanten OAB kan ha.

7.5 Testene

7.5.1 Test 1

Derivasjon

Test 1

Navn: ______________________________

Skole: ______________________________

Oppgave 1

Deriver funksjonene. Faktoriser svaret om mulig.

2 p **a)** $f(x) = x \ln x$

2 p **b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x) = e^x(1-x)$.

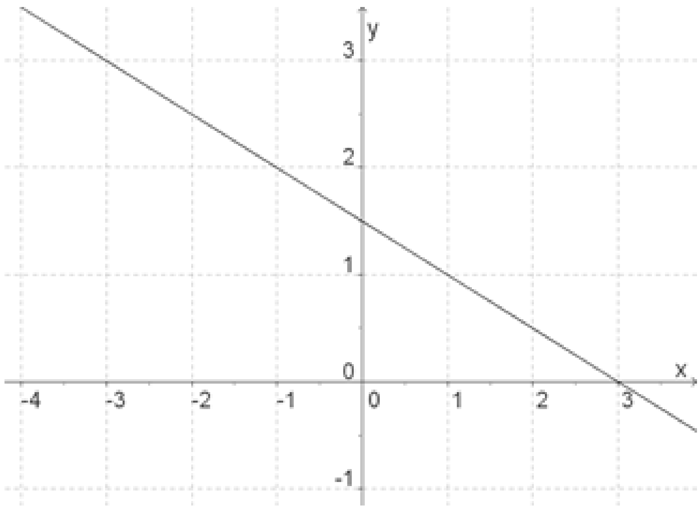
1 p **a)** Finn nullpunktene til f ved regning.

3 p **b)** Finn eventuelle topp- og bunnpunkt til f ved regning.

3 p **c)** Finn eventuelle vendepunkt til f ved regning.

Oppgave 3

Figuren viser grafen til den deriverte av en funksjon f.



2 p **a)** I hvilket intervall stiger grafen til f, og i hvilket intervall synker den?

2 p **b)** Grafen til f går gjennom punktet $P(-1, 5)$.
Finn likningen for tangenten til grafen f i punktet P.

2 p **c)** Finn $f''(x)$.

7.5.2 Test 2

Derivasjon

Test 2

Navn: ______________________________

Skole: ______________________________

Oppgave 1

Deriver funksjonene.

2 p **a)** $f(x) = \ln\sqrt{x}$

2 p **b)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

Oppgave 2

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = xe^{-x}$, $D_f = [0,\ 12\rangle$.

3 p **a)** Vis at $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, og regn ut $f''(x)$.

2 p **b)** Finn toppunktet til f ved regning.

2 p **c)** Finn vendepunktet til f ved regning.

2 p **d)** Finn tangentlikningen til f i punktet $(-1,\ f(-1))$.

En skiprodusent introduserer en ny type smørefri ski. Produsenten regner med at de om x måneder kommer til å selge $S(x)$ par ski per måned, der $S(x)$ er gitt ved

$$S(x) = 1000 \cdot f(x)$$

2 p **e)** Når er salget størst?
Hvor stort er salget da?

2 p **f)** Når er nedgangen i salget størst?
Hvor stor er nedgangen i salget per måned da?

7.5.3 Test 3

Derivasjon

Test 3

Navn: ______________________________

Skole: ______________________________

Oppgave 1

Deriver funksjonene. Faktoriser svaret, og forkort om mulig.

2 p **a)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

2 p **b)** $f(x) = x \cdot (2-x)^3$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x) = \left(x^2 - 3\right)e^x$

4 p **a)** Finn eventuelle topp- og bunnpunkt til f ved regning.

2 p **b)** Finn tangentlikningen til f i punktet $\left(\sqrt{3},\ f\left(\sqrt{3}\right)\right)$.

Oppgave 3 (m/GeoGebra)

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 4x^2 \cdot e^{-x}$.

2 p **a)** Vis ved regning at $f'(x) = \left(8x - 4x^2\right) \cdot e^{-x}$.

2 p **b)** Tegn grafen til f'.

3 p **c)** Bruk grafen til f' til å finne eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til f.

7.5.4 Test 4

Derivasjon

Test 4

Navn: ____________________

Skole: ____________________

Oppgave 1

Deriver funksjonene. Faktoriser svaret om mulig.

2 p **a)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

2 p **b)** $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

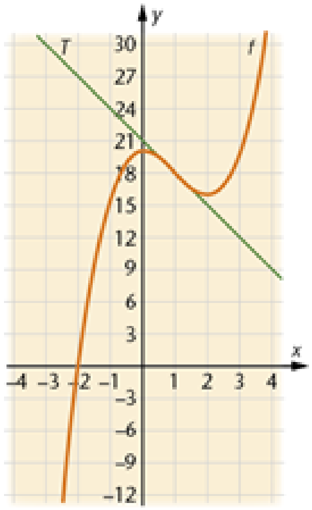
3 p **Oppgave 2**

Gitt funksjonen $f(x) = x \cdot \ln x$.

Finn eventuelle topp- og bunnpunkt til f ved regning.

Oppgave 3

Til høyre har vi tegnet grafen til en polynomfunksjon f av tredje grad, sammen med vendetangenten T i punktet $(1, f(1))$.

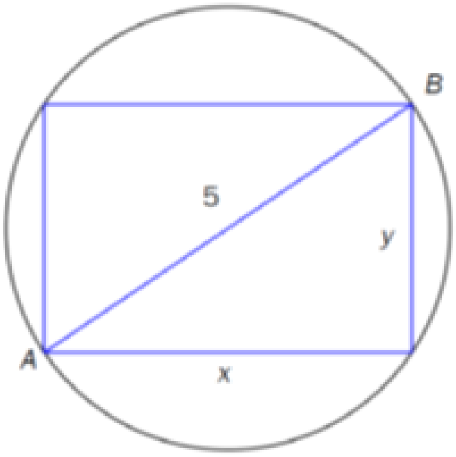


2,5 p **a)** Tegn fortegnslinjen til f' og til f'' når x er mellom -4 og 4.

1,5 p **b)** Finn $f'(1)$.

Oppgave 4 (m/GeoGebra)

Et rektangel med sider x og y er innskrevet i en sirkel med diameter $AB = 5$.



2,5 p **a)** Vis at arealet T av rektangelet er gitt ved

$$T(x) = x\sqrt{25 - x^2}$$

Forklar hvilke verdier x kan ha.

3,5 p **b)** Bruk $T'(x)$ til å bestemme x når arealet er størst mulig. Finn også den tilhørende y. Benytt 4 desimaler i svarene. Forklar framgangsmåten.

Kommenter resultatet.

7.5.5 Test 5

Derivasjon

Test 5

Navn: ______________________________

Skole: ______________________________

Oppgave 1

Deriver funksjonene. Faktoriser svaret om mulig.

2 p **a)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

2 p **b)** $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

3 p **Oppgave 2**

Gitt funksjonen $f(x) = x \cdot \ln x$.

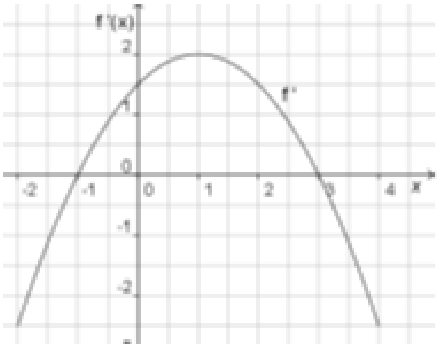
Finn eventuelle topp- og bunnpunkt til f ved regning.

Oppgave 3

Til høyre har vi tegnet grafen til f'.

2 p **a)** Bruk figuren til å tegn fortegnslinjene til f' og f'', når x er mellom -2 og 4.

2 p **b)** Skisser grafen til f.



Oppgave 4

En funksjon er gitt ved $g(x) = e^{0,2x}$, $x \in \langle 0, 10 \rangle$. Figuren til under viser grafen til g, sammen med et rektangel $ABCD$.

2 p **a)** Forklar at arealet av rektangelet på figuren er gitt ved $F(x) = (10 - x) \cdot e^{0,2x}$.

4 p **b)** Finn ved regning koordinatene til punktet A, når arealet av rektangelet er størst mulig. Hvor stort er arealet da?

7.6 Spørreskjema

SPØRRESKJEMA

DERIVAJSON

Navn: ______________________________

Skole: ______________________________

1. På en skala fra 1 til 5 (der 5 er best), hvor godt vil du si at du bersker derivasjon?

   1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐.

2. Har dette undervisningsopplegget bidratt til å endre hvordan du behersker derivasjon?

   Ja, jeg har blitt bedre: ☐
   Ja, jeg har blitt dårligere: ☐
   Nei, det er uforandret: ☐

3. På en skala fra 1 til 5 (der 5 er mest), hvor mye har du jobbet med disse oppgavetypene tidligere?

   1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐.

4. På en skala fra 1 til 5 (der 5 er best), hvor godt vil du si at du liker matematikk?

   1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐.

5. Var det samsvar mellom oppgavene du jobbet med på forhånd, og oppgavene du fikk på testene? Ja: ☐ Nei: ☐

6. Tror du at du kommer til å få bruk for derivasjon senere i livet? Ja: ☐ Nei: ☐

7. Hvor ofte jobber du med matematikk utenom skoletiden?

   Minst 5 dager i uken: ☐
   3-4 dager i uken: ☐
   1-2 dager i uken: ☐
   Av og til: ☐
   Aldri: ☐

8. Hva fikk du i karakter i matematikk R1 i 1. termin?

   1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐.

9. Hvilken karakter regner du med å få i standpunkt i matematikk R1?

   1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐.

7.7 Resultater fra tester og spørreskjema

	Elev	Kjønn	Skole	Gruppe	T1_sum	T2_sum	T3_sum	T4_sum	T5_sum	Sum_Tot	Sp_B	Sp_E	Sp_T	Sp_L	Sp_S	Sp_N	Sp_A	Sp_K1	Sp_StPkt
1	E001	1	1	1	14,5	13,0	10,5	13,5	14,5	52,5	4	1	2	4	1	1	3	5	6
2	E002	2	1	1	9,5	6,5	10,5	13,5	12,0	38,5	2	3	2	4	2	2	2	4	4
3	E003	1	1	1	4,0	4,5	6,0	3,5	5,0	19,5	3	3	2	4	2	2	2	4	4
4	E004	1	1	1	3,5	,5	2,5	3,5	4,5	11,0	1	3	1	3	1	1	1	3	3
5	E005	1	1	1	4,0	,5	,5	4,0	1,5	6,5	3	1	2	5	2	1	2	2	3
6	E006	2	1	1	6,5	7,0	9,0	11,5	8,5	31,0	2	2	3	4	2	1	4	5	6
7	E007	1	1	2	7,0	11,5	14,0	14,0	10,0	42,5	3	2	4	4	2	1	3	5	6
8	E008	1	1	2	12,5	13,0	-1,0	14,0	15,5	-1,0	3	3	1	5	2	2	1	5	5
9	E009	2	1	2	,5	1,5	3,5	1,0	-1,0	-1,0	4	1	4	3	1	2	2	4	3
10	E010	1	1	2	8,5	14,5	13,5	11,5	16,5	53,0	4	3	4	4	1	2	4	5	6
11	E011	1	1	3	8,5	6,0	8,0	7,0	,5	23,0	3	3	4	4	1	2	3	4	4
12	E012	1	1	3	11,0	12,5	13,0	13,5	3,5	40,0	3	2	4	3	2	1	2	5	5
13	E013	2	1	3	2,5	4,0	5,5	5,5	5,0	17,0	2	2	3	5	2	2	2	3	3
14	E014	1	1	3	9,0	15,0	11,0	13,5	16,0	51,0	4	3	3	5	1	1	2	5	5
15	E015	1	1	3	13,5	15,0	14,0	12,5	12,0	54,5	5	2	3	4	2	1	1	5	6
16	E016	2	2	1	13,5	12,0	13,5	14,5	14,0	53,0	4	3	4	5	1	1	3	6	6
17	E017	2	2	1	13,0	11,5	9,5	11,5	-1,0	-1,0	3	3	3	4	1	1	3	5	6
18	E018	2	2	1	8,0	6,0	10,0	14,5	11,5	35,5	3	3	3	4	1	1	3	5	5
19	E019	2	2	1	11,0	12,5	10,0	13,0	-1,0	-1,0	3	3	3	3	2	2	3	4	5
20	E020	1	2	1	-1,0	3,5	12,0	9,5	11,5	-1,0	4	3	3	4	1	1	2	4	5
21	E021	1	2	1	3,5	3,0	3,0	10,0	3,5	13,0	3	3	3	3	2	2	2	4	4
22	E022	2	2	1	7,0	4,5	5,5	7,0	4,5	21,5	3	3	3	3	1	2	3	3	4
23	E023	1	2	2	-1,0	15,5	13,5	13,5	15,0	-1,0	5	3	4	4	2	1	3	6	5
24	E024	2	2	2	11,5	11,5	12,5	9,5	11,5	47,0	4	3	2	4	1	1	3	5	5
25	E025	2	2	2	8,5	11,0	8,5	13,5	13,5	41,5	3	3	2	4	2	1	2	5	5
26	E026	2	2	2	4,5	9,5	6,5	5,0	8,0	28,5	4	3	2	5	2	1	2	5	4
27	E027	1	2	2	8,0	8,5	8,5	13,0	11,5	36,5	4	3	3	4	1	1	3	4	4
28	E028	1	2	2	10,5	14,0	12,0	13,5	1,5	38,0	3	2	4	4	1	1	4	4	5
29	E029	1	2	2	,5	2,0	2,5	5,5	5,0	10,0	2	1	2	3	2	1	3	3	3
30	E030	2	2	3	13,0	14,0	-1,0	13,5	13,5	-1,0	5	3	5	5	2	2	3	6	6
31	E031	1	2	3	14,5	15,0	10,0	14,0	15,5	55,0	4	3	4	5	1	1	4	5	6
32	E032	2	2	3	15,5	12,5	13,5	14,5	15,5	57,0	4	3	4	4	1	1	3	5	5
33	E033	1	2	3	12,5	11,0	11,0	12,0	16,5	51,0	4	3	3	3	1	1	2	5	5
34	E034	1	2	3	9,5	6,5	10,0	10,0	11,5	37,5	4	1	4	5	1	1	3	4	5
35	E035	2	2	3	6,0	2,5	-1,0	-1,0	8,0	-1,0	3	2	3	3	1	1	3	4	3
36	E036	1	3	1	8,0	9,5	10,0	11,0	16,0	43,5	4	1	4	5	2	1	3	4	5
37	E037	2	3	1	8,0	11,5	12,0	13,0	15,5	47,0	4	1	2	5	2	1	4	5	5
38	E038	1	3	1	6,5	8,0	10,0	10,5	8,0	32,5	3	3	2	4	1	2	2	4	4
39	E039	1	3	1	-1,0	5,5	9,0	-1,0	5,5	-1,0	4	1	3	4	1	1	3	4	4
40	E040	1	3	1	5,0	-1,0	7,5	6,0	10,5	-1,0	4	1	3	4	2	1	3	4	4
41	E041	2	3	1	16,0	13,5	16,0	16,0	16,0	61,5	4	1	2	5	2	1	3	6	6
42	E042	1	3	1	12,0	10,0	8,5	7,5	5,5	36,0	4	1	2	4	1	2	2	3	4
43	E043	2	3	1	-1,0	1,0	3,5	3,5	11,0	-1,0	1	3	3	4	2	1	3	3	3
44	E044	2	3	1	2,0	3,0	6,5	,0	-1,0	-1,0	3	1	2	3	2	2	3	3	4
45	E045	2	3	2	-1,0	4,5	-1,0	-1,0	10,0	-1,0	4	3	2	3	1	1	3	4	3
46	E046	2	3	2	11,0	9,0	8,5	7,0	9,0	37,5	3	3	2	4	2	1	3	4	4
47	E047	1	3	2	9,5	9,5	9,5	7,5	7,0	35,5	3	1	2	3	2	2	3	4	5
48	E048	1	3	2	9,0	8,0	10,5	-1,0	12,0	39,5	4	1	3	4	1	1	3	5	5
49	E049	1	3	2	9,0	9,5	12,5	-1,0	14,5	45,5	5	1	4	5	1	1	3	5	5
50	E050	2	3	2	6,5	7,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	3	3	2	3	1	1	2	2	3
51	E051	2	3	2	11,0	11,0	10,0	8,0	8,0	40,0	3	1	2	4	2	1	3	3	4
52	E052	1	3	2	6,0	3,5	7,0	4,5	4,0	20,5	2	3	2	3	2	2	3	3	3
53	E053	1	3	3	5,0	,5	3,0	4,0	5,5	14,0	2	3	2	4	2	1	3	3	3
54	E054	1	3	3	11,0	10,5	10,5	12,5	-1,0	-1,0	4	3	4	4	2	2	3	4	5
55	E055	1	3	3	-1,0	4,0	6,5	1,0	4,0	-1,0	3	1	2	4	2	1	3	4	5
56	E056	1	3	3	7,0	-1,0	-1,0	5,0	5,5	-1,0	3	3	4	4	1	2	2	4	5
57	E057	2	3	3	6,5	3,0	5,5	6,5	11,5	26,5	2	2	1	4	2	2	2	5	5
58	E058	1	3	3	2,5	5,5	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	2	3	3	4	2	1	3	2	3
59	E059	2	3	3	3,0	6,5	6,0	4,5	4,0	19,5	3	3	4	3	2	2	2	3	3

	Elev	Kjønn	Skole	Gruppe	T1_sum	T2_sum	T3_sum	T4_sum	T5_sum	Sum_Tot	Sp_B	Sp_E	Sp_T	Sp_L	Sp_S	Sp_N	Sp_A	Sp_K1	Sp_StPkt
60	E060	2	3	3	-1,0	-1,0	5,0	3,5	8,5	-1,0	3	3	3	4	2	2	2	3	3
61	E061	1	4	1	12,0	12,5	12,5	9,0	16,5	53,5	4	1	2	4	2	1	2	5	6
62	E062	2	4	1	5,5	7,0	6,0	7,0	4,5	23,0	2	3	3	2	1	2	4	2	2
63	E063	1	4	1	-1,0	10,0	12,0	10,5	11,0	-1,0	3	3	2	4	2	1	2	5	4
64	E064	1	4	1	14,5	14,0	14,0	9,5	9,0	51,5	4	3	2	3	2	2	5	4	5
65	E065	2	4	1	10,5	13,0	10,0	10,0	7,5	41,0	4	3	2	5	1	2	5	3	4
66	E066	1	4	1	15,5	-1,0	12,0	9,0	12,5	-1,0	3	1	2	3	1	2	3	4	5
67	E067	1	4	2	15,5	11,5	13,5	9,5	-1,0	-1,0	4	3	3	5	2	1	4	4	5
68	E068	2	4	2	7,5	6,0	8,0	7,5	10,5	32,0	3	3	2	4	1	1	2	4	3
69	E069	1	4	2	15,0	15,0	14,0	14,5	15,5	59,5	4	1	2	3	1	1	2	5	5
70	E070	1	4	2	6,0	-1,0	-1,0	7,0	-1,0	-1,0	4	3	1	3	2	1	3	2	3
71	E071	1	4	2	14,5	13,5	12,5	10,0	15,0	55,5	4	1	3	5	1	1	3	4	6
72	E072	1	4	2	11,0	15,0	-1,0	12,5	11,0	-1,0	4	3	2	4	2	2	4	5	5
73	E073	1	4	3	8,5	16,0	13,5	8,5	11,0	49,0	4	1	3	4	1	1	3	3	4
74	E074	1	4	3	11,5	14,5	15,5	9,0	2,0	43,5	4	1	4	4	1	1	3	5	5
75	E075	1	4	3	13,5	13,0	14,0	12,0	-1,0	-1,0	4	1	3	5	1	1	3	5	5
76	E076	2	4	3	10,0	13,5	13,0	6,5	8,0	44,5	3	3	3	3	1	2	3	3	4
77	E077	1	4	3	13,5	12,5	15,0	9,0	10,0	51,0	3	1	4	3	1	1	2	4	5
78	E078	1	4	3	12,0	11,5	15,0	11,0	12,0	50,5	4	3	4	3	1	2	2	4	5
79	E079	1	4	3	10,0	13,5	13,0	7,0	10,5	47,0	4	1	3	4	1	1	2	4	5
80	E080	1	5	1	11,5	13,5	13,5	13,0	15,0	53,5	4	3	2	5	2	1	3	6	6
81	E081	2	5	1	3,5	8,5	7,5	11,0	14,5	34,0	3	3	4	4	2	2	2	5	6
82	E082	1	5	1	-1,0	3,0	5,0	-1,0	4,0	-1,0	2	1	3	4	1	1	2	3	4
83	E083	2	5	1	4,0	7,0	,5	3,5	2,0	13,5	2	3	4	4	2	2	3	4	5
84	E084	1	5	2	10,5	10,0	12,0	13,0	15,5	48,0	4	3	2	4	2	1	3	6	6
85	E085	1	5	2	7,0	12,0	13,0	13,0	8,5	40,5	4	3	2	4	1	1	3	5	6
86	E086	2	5	2	4,5	4,0	6,5	-1,0	1,5	16,5	3	3	3	4	2	1	3	4	4
87	E087	2	5	3	10,0	8,5	8,0	6,0	6,5	33,0	4	3	3	4	1	2	3	5	5
88	E088	1	5	3	5,0	3,5	6,5	-1,0	4,0	19,0	3	1	2	4	1	1	2	4	4
89	E089	1	5	3	4,5	2,5	5,5	-1,0	2,0	14,5	3	1	5	2	1	1	3	3	3
90	E090	2	5	3	4,0	2,5	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	3	1	2	3	1	1	4	2	3
91	E091	1	6	1	13,5	11,0	11,5	-1,0	5,5	41,5	5	1	2	4	1	1	2	6	6
92	E092	1	6	1	5,5	5,0	-1,0	3,0	5,5	-1,0	3	1	4	4	1	2	2	3	4
93	E093	1	6	1	-1,0	1,5	2,5	6,0	2,0	-1,0	3	3	2	3	2	2	2	3	3
94	E094	1	6	2	10,5	11,0	15,5	14,0	10,5	47,5	4	1	3	5	2	2	2	5	5
95	E095	1	6	2	3,5	4,5	-1,0	10,5	9,5	-1,0	4	1	4	3	2	1	2	4	4
96	E096	2	6	3	11,0	8,0	12,5	-1,0	10,5	42,0	4	1	4	5	1	2	3	5	5
97	E097	1	6	3	8,5	4,5	-1,0	-1,0	6,0	-1,0	3	3	4	4	1	1	2	5	5
98	E098	1	7	1	9,5	11,5	11,0	-1,0	11,5	43,5	5	3	3	4	2	1	3	5	5
99	E099	1	7	1	-1,0	,0	,5	-1,0	1,5	-1,0	3	3	2	4	2	1	3	4	4
100	E100	1	7	1	3,0	3,5	5,0	-1,0	4,0	15,5	4	2	2	5	2	1	3	4	5
101	E101	1	7	1	1,0	,0	2,0	-1,0	,5	3,5	2	3	1	3	1	1	2	4	4
102	E102	2	7	1	2,5	-1,0	2,5	-1,0	3,0	-1,0	3	1	2	4	1	1	3	4	5
103	E103	1	7	1	1,5	2,5	4,5	-1,0	4,5	13,0	3	3	2	4	2	2	2	4	4
104	E104	2	7	2	4,5	-1,0	-1,0	-1,0	9,0	-1,0	4	3	2	5	1	1	3	6	5
105	E105	2	7	2	5,5	16,0	-1,0	-1,0	8,5	-1,0	4	1	4	5	2	1	4	5	6
106	E106	1	7	2	1,0	6,5	-1,0	-1,0	,0	-1,0	3	3	2	4	1	1	3	3	3
107	E107	1	7	2	9,5	8,0	8,5	-1,0	7,5	33,5	4	1	3	4	1	2	3	4	4
108	E108	2	7	2	2,0	1,5	4,5	-1,0	15,0	23,0	1	3	1	3	2	2	2	4	4
109	E109	2	7	2	-1,0	4,5	1,5	-1,0	3,5	-1,0	3	1	1	4	2	2	2	4	4
110	E110	2	7	2	4,0	2,5	5,5	-1,0	-1,0	-1,0	3	1	2	4	2	2	2	4	4
111	E111	1	7	3	5,5	3,5	3,5	-1,0	3,0	15,5	3	1	3	4	2	1	2	4	4
112	E112	1	7	3	4,0	6,5	-1,0	-1,0	3,5	-1,0	2	1	2	4	1	1	2	5	4
113	E113	2	7	3	6,0	6,5	6,0	-1,0	2,5	21,0	2	3	3	4	1	2	2	4	4
114	E114	2	7	3	-1,0	4,0	-1,0	-1,0	4,0	-1,0	3	1	4	5	2	1	3	4	3
115	E115	1	7	3	13,0	11,5	11,0	-1,0	8,5	44,0	4	1	2	5	1	1	2	6	5
116	E116	1	7	3	4,5	6,5	4,0	-1,0	3,5	18,5	4	3	2	3	2	1	2	5	4
117	E117	2	7	3	1,5	1,5	7,0	-1,0	-1,0	-1,0	3	3	3	4	1	2	1	4	4
118	E118	1	7	3	-1,0	4,5	7,5	-1,0	4,5	-1,0	3	1	3	4	2	2	2	4	4

7.8 Intervjuguide

Intervju-guide

- en grov-skisse

Intervjuene vil være semi-strukturerte, og jeg vil konsentrere meg om 3 temaer:

1. Derivasjon

Tanker rundt derivasjon. Hvordan har derivasjon blitt presentert i læreboken, og av faglærer? Hva legger eleven i derivasjonsbegrepet? Er det et enhetlig begrep, eller består det av mange (atskilte) deler? Oppfatter eleven derivasjon som lett eller vanskelig? Er alle deler av derivasjonen like lett/vanskelig? Oppfattes derivasjon som nyttig? Bør man beherske derivasjon i R2, og evt. i studier på høyskole/universitet?

2. Innlæringsmetode

Tanker rundt metoden(e) eleven har jobbet med. Hvilke metoder har blitt benyttet for å lære derivasjon tidligere? Hvordan har det vært å jobbe med andre metoder? Har det vært gøy og/eller lærerikt? Hva kunne vært annerledes med opplegget? Er det gunstig å benytte flere innlæringsmetoder, eller blir det mer forvirrende? Er det andre metoder som eleven tror kunne vært bra å benytte?

3. Tester og læringsutbytte

Tanker rundt testene, og rundt læringsutbytte av mitt opplegg. Hvor fortrolig er eleven med oppgavetypene det ble jobbet med? Oppfattet eleven testene som gode? Hva var det som evt. kunne vært annerledes? Fikk eleven vist sine kunnskaper på testene? Er test-resultatene som forventet? Er det samsvar mellom det eleven oppfatter som gøy/nyttig, og test-resultater? Vil de kunnskapene man får vist på disse testene være noe som blir sittende igjen over tid? Er det en sammenheng mellom bruk av innlæringsmetode(r) og test-resultat?

7.9 Transkriberinger

Jeg har valgt å fortettet intervjuene. Bl.a. kuttet jeg ut "eh" og oppmuntrende "ja" fra begge parter. Noen setninger ble dessuten omformulert til en mer skriftlig form.

7.9.1 Intervjuobjekt 1

I: Ok, nå har du vært igjennom dette opplegget. Hva var dine umiddelbare tanker etterpå?

E1: Jeg vet ikke helt. Det var veldig vanskelig i forhold til vanlige derivasjons-oppgaver. Det ble litt ekstra utfordrende.

I: Var det selve problemløsningsoppgavene, eller var det testene, eller var det alt?

E1: Det var kanskje litt dårlig tid på oppgavene før. I alle fall var det sånn for meg. For jeg hadde ikke noe særlig god kontroll på derivasjon fra før av. Så bare det å derivere de funksjonene var vanskelig. Også når jeg i tillegg skulle jobbe med sånne problemløsninger. Så det ble litt stressende.

I: Så du følte kanskje at opplegget kunne kommet senere? At du da hadde hatt mer kompetanse, og dermed fått større utbytte?

E1: Ja. Men jeg lærte mye.

I: Jeg har valgt å dele inn derivasjon på tre forskjellige måter. Har du vært klar over det, eller vært bevisst på det?

E1: Ja, de drilloppgavene og problemløsningsoppgavene og ...

I: Jeg tenkte på selve oppgavene. Hvis du ser på testene her (holder fram de tre testene). De første oppgavene er vanlig regelbruk. Så kommer oppgaver med anvendelse. Og til slutt så kommer problemløsningsoppgaver. Alle testene er bygget opp på samme måte. Og sånn vil heldagsprøver og eksamen også være bygget opp. Var du klar over dette da du tok testene?

E1: Ja, jeg så det på en måte. Så ja, egentlig.

I: Men både i forhold til sånn som det er gjort i læreboken, og sånn som mattelæreren har gått gjennom på forhånd, så har det vært litt annerledes nå enn det du var vant med?

E1: Ja, litt. Ja, det var egentlig ... ganske. Vi har ikke jobbet så mye med ... Eller har vi det? ... problemløsningsoppgaver. Det har vært mer sånn "Finn toppunkt og bunnpunkt" og ...

I: Er det sånn at hvis du hadde vært på en annen gruppe, så hadde det kanskje ...?

E1: Ja, bedre. Jeg tenkte drilloppgave-gruppen tror jeg hadde passet meg best. Med det første i alle fall. Og så kanskje tatt det gradvis.

I: Tror du at du kan ha lært noe om derivasjon på en annen eller bedre måte, enn om du bare hadde jobbet med drill-oppgaver? Tror du at du hadde lært det samme da?

E1: Jeg vet ikke helt. Da forstår du i alle fall det grunnleggende, så hvis du kan det godt, kan du bruke det i andre sammenhenger. Men når jeg ikke hadde kunnskapene fra før av, var det vanskelig å bruke de i problemløsning. Så jeg vet ikke helt.

I: Du skrev jo at du hadde hatt læringsutbytte, du haket jo av på det. Men testene dine hadde sånn ...

E1: Nei, det var ikke noe særlig.

I: Det var ikke så galt i begynnelsen, men det virker som det gikk dårligere og dårligere på en måte.

E1: Ja, det var det jeg merket jeg også. Jeg vet ikke om det var på grunn av at oppgavene var vanskelige, eller... Jeg merket at første gang vi jobbet med oppgavene før den første testen, så fikk jeg mye mer til. Mattelæreren måtte bytte på hvor han skulle være, men da hjalp han oss mye mer. Og da forstod jeg det på en måte. Men så glemte jeg litt til neste gang, og da fikk vi ikke like mye hjelp. Så da ble det litt vanskeligere.

I: Hva med selve opplegget? Ville du vært på en annen gruppe, eller at det skulle kommet senere?

E1: Ja. Eller kanskje f.eks. først jobbet bare med drill-oppgaver, og så byttet gruppene, kanskje.

I: Det var jo mattelæreren som bestemte når det skulle være. Jeg hadde jo sett for meg at det kanskje hadde vært etter påske da ...

E1: Ja, det kunne kanskje hjulpet.

I: At dere hadde jobbet mer med det, og hatt en prøve... Men dere hadde vært gjennom derivasjon i undervisningen?

E1: Joda.

I: Men dere hadde kanskje ikke jobbet så mye med oppgaver og repetisjon og sånt?

E1: Nei, ikke så mye.

I: All matematikken dere har hatt til nå har jo stort sett vært i å gjøre oppgaver. Og da blir du god til å løse de oppgavene du har trent på. Det er jo logisk. Men hvis du da får noen problemløsningsoppgaver, og det eneste du har gjort er å gjøre oppgaver. Hvordan tror det ...?

E1: Det blir en del vanskeligere da, vil jeg tro. For du forstår ikke alltid en sammenheng. Det er ofte man bare lærer seg formlene og sånt, og fyller inn på en måte.

I: Mitt motiv for å ha dette opplegget er at jeg føler at mange elever sliter veldig med oppgaver som er lite grann vridde. Og så husker du det ikke så lenge. Når du kommer til neste år, så... Jeg vet ikke hvordan du ... når du har jobbet med en ting, og har hatt en prøve, og så går det ... Føler du at du kan det like godt da, eller glemmer du det fort ut, eller hvordan er det? Du sa jo det at du hadde fått litt hjelp, og så...?

E1: Jeg glemmer kanskje litt, og så blir det oppfrisket. Men da går det enda bedre igjen, på en måte. For det ligger litt i underbevisstheten vil jeg tro.

I: Hva synes du om matematikk? Synes du det er gøy, eller ...?

E1: Ja, jeg liker det veldig godt i forhold til andre fag. For det blir litt annerledes. F.eks. fagdager i matematikk. Selv om det er vanskeligere, og jeg får kanskje ikke like god karakter, så ... Tiden går mye fortere liksom, for du har noe å putle med. Hvis det går an å si det sånn?

I: Er dette noe du har tenkt å fortsette med videre, kanskje?

E1: Nei, jeg skal ikke ta R2. Men jeg angrer litt på det. For jeg hadde egentlig tenkt å ta S1 og så S2, sånn at jeg kunne fortsette med matte. Så jeg hadde ett gøyere fag.

I: Så du skal ha R1, og så skal du ikke lenger ha matematikk?

E1: Ja, det var planen. Jeg fant ut at jeg skal ikke utdanne meg til noe i den veien veien uansett, så det ble litt unødvendig, og mye tid.

I: Så i forhold til motivasjon. Derivasjon er noe som du bare må bli ferdig med, og så kommer du aldri mer til å komme borti det?

E1: Litt, kanskje. Jeg vet ikke. Det hadde vært gøy å få bruk for det en eller annen gang, liksom. Det er jo kjekt å holde på med.

I: Når det gjelder testene, så følte du ikke at det helt var samsvar mellom det du jobbet med i gruppen, og det du fikk på ...

E1: Joda! Men det var bare det at det var vanskelig, generelt. Det var vanskelige oppgaver. Jeg tror at hvis jeg hadde prøvd nå, så hadde det gått mye bedre. For nå når jeg har øvd til heldagsprøven, har jeg lært mye om derivasjon.

I: Tror du det at du har vært gjennom dette opplegget kan ha påvirket hvor lett det har vært å jobbe mot heldagsprøven? Kan det være noen sammenheng der? Kan det ha gått lettere på grunn av det?

E1: Ja, jeg tror faktisk det. Jeg har blitt litt mer obs på hva jeg trenger å øve på. Så vet jeg det bedre.

I: Tror du at hvis jeg hadde prøvd deg igjen med en ny test senere, at det hadde gått bedre da?

E1: Ja. En del bedre. Mye bedre.

I: Er det ellers noe du har noen kommentarer til?

E1: Nei. Det var fint opplegg.

I: Da tror jeg vi slutter der.

7.9.2 Intervjuobjekt 2

I: Jeg tenkte kanskje at du først kunne begynne med å fortelle om hva du synes om opplegget, nå i etterkant.

E2: Jeg synes det var et bra konsept. Og jeg likte måten det var satt opp på. Men jeg følte at jeg kom i feil gruppe. Jeg skulle egentlig lært litt mer om selve derivasjonsbiten. Den drill-gruppen. Jeg var på problemløsningsgruppen.

I: Kan det ha noe med tidspunktet å gjøre? Hvis opplegget hadde vært gjennomført etter påske f.eks.?

E2: Ja, det hadde kanskje vært litt bedre. For da hadde vi lært litt mer om det.

I: Det du hadde oppnådd, hvis du hadde vært på drill-gruppen. Da hadde du hatt muligheten til å jobbe med ...

E2: Innarbeidet de ... Altså for å klare de vanskeligere derivasjonsoppgavene, så må man jo kunne derivere først.

I: Men tror det hadde vært noe du hadde gått glipp av, hvis du bare hadde gjort drill-oppgaver? Da blir du jo god til å gjøre akkurat de oppgavene ...

E2: Ja, det er jo det også. Ja, det er viktig... For på eksamen får du jo sånne oppgaver, der kanskje a-oppgaven er å derivere, og så må du forstå senere.

I: Tror du at du må tenke på en annen måte også kanskje, når du jobber med problemløsning, i forhold til når du jobber med ...?

E2: Ja, du må jo det. Det lærte jeg faktisk! Vi var jo flere som kunne snakke litt sammen også, så jeg lærte jo en del faktisk.

I: Når du jobber med drill-oppgaver, så blir det lett at du følger en oppskrift.
Du får et fasit-svar. Og så går du videre, kanskje. Mens med problemløsning, så er det ingen oppskrift. Og da må du kanskje tenke litt mer. Kanskje på derivasjon og sånt ...
Hvis vi ser på derivasjonsbegrepet. Hva tenker du om derivasjon? Hvis jeg sier ordet derivasjon, hva tenker du da?

E2: Da tenker jeg ... Nei, jeg vet ikke.

I Du har jo derivasjonsregler, f.eks. Det er jo en ting. De første oppgavene på testene var jo derivasjonsregler (peker på testene). Så det er jo en ting som er knyttet til derivasjon. Og så har du en definisjon. Men dere jobbet kanskje ikke så mye med den. Og her har du jo anvendelse (peker på testene igjen). Hva skal du med derivasjon? Hva skal vi bruke det til? Det er jo en side - du kan finne topp- og bunnpunkt.

E2: Og vendepunkt, og sånn.

I: Ja. Og så har du problemløsning. Den siste oppgaven er jo problemløsningsoppgave. Så derivasjon har jo ulike sider. Når du regner da. Jeg vet ikke om du har tenkt på det før?

E2: Jo, jeg tenkte ... Nei, ikke før dette, egentlig.

I: Men er du blitt mer bevisst på det nå, eller?

E2: Ja, det føler jeg. Men jeg synes kanskje oppgavene ... De var litt vanskelige. Jeg vet ikke om det er sånn på eksamen? På testene - det var litt stress.

I: De er i utgangspunktet relativt standard.
Det som er litt interessant her er at du hadde skrevet at du ikke hadde lært så mye. Men testene dine hadde faktisk hatt en positiv utvikling. Jeg vet ikke om du var klar over det? Selv om du kanskje følte at det ikke gikk så bra, så hadde du faktisk framgang på testene.

E2: Etter første testen så følte jeg at det gikk bedre før jeg begynte med det.
Jeg tror det var fordi oppgavene var litt vanskelige. Det var lenge siden jeg hadde gjort de der f.eks. (peker på en oppgave fra en av testene, der man skal derivere et funksjonsuttrykk). Jeg klarte ikke de. Vi var jo på problemløsningsgruppen, så da løste vi sånne oppgaver. Så når jeg skulle derivere ln *x*, hadde jeg helt glemt det.

I: Ok. Nå har du jobbet med dette, og holder på å forberede deg til heldagsprøve. Det at du har vært gjennom dette opplegget, tror du at det gjør at det er lettere for deg å forberede deg til heldagsprøven?

E2: Ja, jeg tror det! Jeg tror jeg er litt mer bevisst på hva jeg kan øve på. Hva jeg trenger å øve på. Eller, jeg er mer klar over det nå i hvert fall.

I: Så hvis jeg hadde testet deg senere, tror du at du ville gjort det bedre da?

E2: Ja, jeg håper jo på det.

I: Hva tenker du om matematikk? Er det noe du liker? Eller er det et fag som du må i gjennom?

E2: Nei, jeg synes det er gøy. Det er derfor jeg har valgt R1, og ikke S1 eller 2P. Jeg synes det er gøy. Ihvertfall når jeg får det til.

I: Har du tenkt å fortsette med matematikk, eller?

E2: Jeg er litt usikker. Jeg har ikke helt bestemt meg enda.

I: Videre da? Altså etter videregående skole?

E2: Jeg valgte egentlig R1 fordi det gir samme kompetanse som S1 og S2. Og så eventuelt kanskje ta R2 også. Jeg har jo ikke fysikk. Så jeg vet ikke om jeg får bruk for det.

I: Det kommer jo an på. Det er jo økonomi. Det er en del andre studier som krever matematikk, men som ikke krever fysikk ... For det har jo kanskje litt med motivasjon å gjøre. Hvis du vet at det er noe du skal bruke. Jeg har jo sagt at derivasjon er noe som er veldig viktig neste år. Og hvis du ikke har tenkt å ta matematikk neste år, så er det ikke sikkert ... Jeg vet ikke. Hva du tenker rundt det?

E2: Nei. Sånn sett. Men det er jo greit å lære det.

I: Du tenker ikke så langt? Du tenker egentlig bare sånn til neste prøve?

E2: Ja. He-he. Egentlig.

I: Men du er klar over denne oppdelingen da, sant (peker på testene)?

E2: Ja, ja. Jeg tror det var derfor jeg feilet på de i den første testen. Iallefall i begynnelsen. For da hadde jeg helt glemt hvordan vi deriverte de ... enkle ...

I: Som matematikklærer synes jeg det er litt skremmende hvor fort en glemmer ut ting. For dere har jo kunnet det for en stund siden.

E2: Jeg tror jeg er litt for dårlig til å gjøre lekse.

I: Ok. Men når du jobber med ting. Kan det også ha noe med måten du jobber på? Det er jo det jeg kanskje tror. At hvis du jobber med drill-oppgaver - du ville jo helst vært på drill-gruppen - så driller du en oppskrift der og da. Gjentar det samme. Så blir du ganske bra i det. Men jeg har ofte en følelse av at folk glemmer ut det fort. Så må du repetere igjen. For du har glemt det ut. At du har en overfladisk tilnærming ... Jeg vet ikke hva du har tenkt. For nå har du i alle fall blitt tvunget til å tenke mer grundigere. Når du har jobbet med problemløsning. Det er uvant, så du må tenke på en annen måte. Jeg vet ikke hva du ...?

E2: Ja, det er jo ... Jeg følte i alle fall at når jeg satt å jobbet med oppgaven her, så klarte jeg på en måte å tenke meg til det. Men på testen, da det kom forskjellige ting som vi skulle sette sammen, da gikk det litt dårlig.

I: Så en konklusjon da er at enten ville du vært på en annen gruppe, og jobbet med drill, eller at dette opplegget hadde kommet senere.

E2: Ja.

I: Greit. Er det ellers noe du vil fortelle om, som vi ikke har vært innom?

E2: Nei, egentlig ikke.

I: Nei, men da tror jeg vi stopper her.

7.9.3 Intervjuobjekt 3

I: Først: Hvilke tanker har du gjort deg etter at du er ferdig med dette her?

E3: Jeg vet egentlig ikke. Etterpå?

I: Synes du det har vært en positiv opplevelse? Negativ opplevelse?

E3: Jeg følte det var litt vanskelig med alle de reglene å pugge. Og jeg skjønte ikke helt hvorfor vi gjorde det. Eller fikk så mye ut av akkurat de.

I: Spurte du matte-læreren om hva som var hensikten, eller?

E3: Ja. Men jeg følte at det bare var å se på hvordan reglene var skrevet opp i boken. Og så pugge de.

I: Jeg kan jo si litt sånn som jeg tenker: Du har jo del 1 og del 2, og på del 2 har du alle hjelpemidler. Men du kan ikke drive å slå opp alt hele tiden, så det er en del ting du må kunne. Ikke så farlig i R1, men neste år...

I: Ok. Men hva tenker du rundt derivasjon? Du har jo ikke jobbet så mye med derivasjon. Men hvis jeg sier ordet derivasjon. Hva tenker du da?

E3: Om min opplevelse av det, eller?

I: Ja. Hva er det første som popper opp i hodet ditt, når jeg sier derivasjon?

E3: Jeg tenker jo at det er matte. Med regning.

I: Ja. Men noe mer spesifikt? Tenker du grafer, funksjoner, regler, eller?

E3: Jeg tenker på vekstfarten.

I: Hvordan er derivasjon blitt presentert i læreboken? Sånn som du husker det.

E3: Jeg føler egentlig at det var mye formler for det.

I: Du tenker bruk av formler, altså?

E3: Ja. På hvordan det var.

I: Og faglæreren har lagt vekt på det samme? Er det formelbruk, eller?

E3: Nei, jeg vet egentlig ikke. Nei! Kanskje mer huske hvordan du skal gjøre det.

I: Mer metode, kanskje da?

E3: Metode, ja!

I: Selve begrepet, da? For dere skulle jo også jobbe med begreper. Og det har jo en definisjon. Er dette noe du tar med deg? Eller er det noe som du leser, og så - ok, det er ikke så interessant?

E3: Jeg tror kanskje at det er noe jeg leser, og så er det ikke så interessant. (lattermild)

I: Nei, sant. Du fokuserer på reglene, og ...

E3: Ja.

I: Derivasjon er ganske komplisert. De brukte over 1000 år på å komme fram til derivasjon. Og det består av mange deler. Jeg vet ikke om du har tenkt på det? Du snakket om vekstfart. Men du har jo også grafer, og du har regler. Du har mange sider ved derivasjon. Endring; ting vokser/synker.

E3: Ja. Mye analyse.

I: Er det noe du...

E3: Jeg vet ikke om jeg tenker så mye over det - før det kommer en spesifikk oppgave.

I: Du liker å få oppskrifter, og så...

E3: Ja, jeg tror jeg liker bedre det.

I: Ok. Jeg har delt opp derivasjon i tre. Jeg vet ikke hvor bevisst du har vært det? På testene her, (peker på testene) er det sånn at på først del er det ren regelbruk; om du husker reglene, og kan bruke dem. Så er det metode; anvendelse av derivasjon, der du skal bruke det til å gjøre ting. Og så er det problemløsing på slutten. Alle testene er bygget opp på samme måten. Og sånn vil det bli på heldagsprøve og eksamen. Hvis du kommer opp til eksamen, så er oppgavene bygget opp på samme måten. Oppgavene på testene er forresten hentet fra eksamen, bare så du er klar over det.

I: Er det noen av disse delene du synes er lettere eller vanskeligere enn andre? Regelbruk, metode, problemløsing?

E3: Kanskje nummer to?

I: Det å kunne...

E3: Den er best. Tror jeg. Jeg vet jo ikke hva jeg har fått på de? (litt nervøs latter)

I: Neida. Nå er det snakk om hvilke du følelser du har... Da er vi jo tilbake til det med oppskrift.

E3: Ja. Huske hvordan du skal gjøre det.

I: Det, og så regler. F.eks. hvis du ser på denne saken her. (peker på oppgave 1 i sett 1) Hvilken regel tenker du da på, hvis du ser et sånt uttrykk som dette?

E3: Da tenker jeg den regelen med ln *x* er lik 1 delt på *x*.

I: Ja. Men så står det en *x* foran der. Det lager jo litt krøll.

E3: Å, ja! Stemmer. Da har du to ledd.

I: Ja, eller to faktorer. Og da er det jo en annen regel du må bruke...

E3: Ja. Hva regelen er? Da er det det leddet pluss det... Nei. Det leddet ganget det leddet derivert, pluss det leddet derivert...

I: Ja. Produktregelen. Men den type matematikk. Du foretrekker heller det, enn regel...

E3: Nei, jeg liker egentlig å forholde meg til reglene. Men da tenker jeg også at du følger en oppskrift. At det er det samme du gjør.

I: Ja. Vi tenker kanskje som matematikere at det (peker på oppgave 2) er mer avansert enn dette (peker på oppgave 1). Dette er å huske regelen, og bruke den, mens her må i tillegg til å derivere gjøre noe mer.

I: Tenker du på derivasjon som noe lett eller vanskelig?

E3: Jeg vet egentlig ikke helt. For det kommer helt an på oppgavene. Plutselig er det noen jeg sliter veldig med, mens andre... Men jeg synes det er mer gøy. Fordi det er liksom ren matte.

I: Tenker du at det er nyttig?

E3: Ja, det gjør jeg. Det er jo nyttig å se hvordan ting endrer seg. Når jeg tenker på grafer.

I: Men jeg tenker på deg da. Ser du for deg at du får bruk for derivasjon senere i livet?

E3: Ja. Jeg vet jo at det kommer mye av dette i R2, og studier og alt det der. Men jeg klarer ikke å se for meg at... Med mindre du analyserer et par utviklinger.

I: Men du ser at hvis du skal ta R2 til neste år, så er det fordel å kunne derivasjon?

E3: Ja.

I: Ok. Vi skal se litt på dette med innlæringsmetodene. Du var jo på gruppe med memorering og begreper. Hva tenker du om det?

E3: Jeg likte egentlig ikke den så veldig godt. Fordi det var mange av de kompliserte reglene som vi måtte pugge, og jeg skjønte ikke helt hvorfor.

I: Hva med begrep da? Det var ikke så interessant?

E3: Nei. Alle de der med lim, og Δx og Δy, og sånn. Jeg følte vi gikk tilbake på ting som jeg allerede kan. Jeg vet kanskje ikke helt hvorfor. Men jeg føler at det er enklere å bare lære meg det. (latter)

I: Men tror du ikke det var litt av poenget med dette her. Å gå tilbake. At du kanskje skulle tenke litt gjennom...

E3: Ja. Jeg tror det var veldig poenget.

I: For du har ikke snakket om den siste oppgaven.

E3: Nei. Den synes jeg var vanskeligst.

I: Ja. Det er det den er. Det er problemløsingsoppgave. Og her kan du ikke følge noen oppskrift. Det betyr at du må ha mer forståelse for hva den deriverte er. Og det er den type oppgaver som typisk kommer på del 2 med alle hjelpemidler. Litt av hensikten med dette opplegget er at... Her kan du bare lære deg en oppskrift. (peker på oppgave 1 og 2). Mens her må du ha litt mer forståelse for å få til denne typen oppgave. (peker på oppgave 3)

I: Du synes ikke det ble noe bedre? Det var like vanskelig hele tiden med disse problemløsingsoppgavene?

E3: Jeg synes egentlig det. Jeg tror det. Kanskje jeg ikke kan helt definisjonen av den deriverte og sånn? Det skjønte jeg ikke helt på de oppgavene vi jobbet med heller.

I: Vanligvis er jo dere vant til å få grafen til en funksjon. Men her er det jo grafen til den deriverte. Og hvis du ser på grafen til den deriverte. (peker på oppgave 3 i sett 1) Hvilken informasjon kan du få ut av en sånn graf?

E3: Jeg vet jo at det er noe med at når grafen krysser *x*-aksen så er det topp- eller bunnpunkt.

I: Ja! Hvorfor det?

E3: Men jeg vet ikke helt hvilket?

I: Men hvorfor er det topp- eller bunnpunkt?

E3: For nullpunktene til den deriverte er jo toppunktene til grafen.

I: Men hvis du er her (peker på oppgave 2). Hvordan går du fram når du skal finne ut om det er topp- eller bunnpunkt? Hva gjør du da?

E3: Lager fortegnslinje.

I: Ja. Så hvis det er et toppunkt. Hva må skje med fortegnet da?

E3: Hva må skje? Det må være positivt.

I: Ja. Det må gå fra pluss til...

E3: minus!

I: Ja, det må skifte.

I: Hva tror du skjer her med fortegnet? (peker på oppgave 3 i sett 1)

E3: Det synker.

I: Ja, altså. Her er det positivt. Husk at det er den deriverte. Den deriverte er jo positiv hele veien her. (peker på intervallet $x < 3$) Og så der er den null.

E3: Da blir den negativ her. (peker på intervallet $x > 3$)

I: Så hvilket punkt tenker du vi har her da?

E3: Da er det et toppunkt. Jaaa!

I: Sant! Men det er ikke noe du kan pugge deg til. Du må ha litt mer forståelse for den deriverte.

I: Dere er jo vant med å gjøre oppgaver. Det er det dere gjør.

E3: Ja.

I: Er det et problem? Altså at du helst vil jobbe på en måte som du er vant til?

E3: Det kan jo være det. At jeg synes det er greiere å gjøre oppgaver, fordi det er det vi gjør.

I: Du behersker en måte, liksom?

E3: Ja.

I: Det at du blir nødt til å tenke på en annen måte... Nå i etterkant, ser du ikke at det er noe av det du har gjort, som gjør at du nå tenker annerledes? Eller tenker du at det er noe tull hele greiene?

E3: Jeg vet egentlig ikke helt.

I: Nei. For du har jo hatt framgang på testene.

E3: Framgang fra test 1 til test 3?

I: Ja. Så hvis vi bare ser på det, så tyder jo det på at du har forstått noe.

Men da lurer jeg litt på hva du legger i... Altså, når du vurderer om du har hatt læringsutbytte. Hva er det du legger i om du har lært... Hva er det som avgjør om du føler at du har lært mer eller ikke lært mer?

E3: Kanskje hvis jeg tar testen, og det går fint.

I: Resultatene på testene da, altså?

E3: Ja. Eller mens jeg gjør de. Jeg merker jo selv om går greit eller ikke.

I: Men hvis du holder på å jobbe med matte. Så kan det være at du får rett svar. Men plutselig en dag så får du en aha-opplevelse. Og det har jo ingenting med resultatet å gjøre. Det er bare at du ser noe du ikke har sett før.

E3: Jeg vet ikke helt om jeg gjorde det.

I: Neida. Men at det er andre måter du kan se... enn bare å ha... Jeg vet jo at det er mye fokus på resultater her på skolen.

E3: Ja, selvfølgelig.

I: Det å benytte ulike måter å lære på. Er det positivt eller negativt?

E3: Det er jo positivt. Å se det fra forskjellige sider. Ikke følge det samme hele tiden. For da er det jo sånn at når vi kommer til de oppgavene (peker på oppgave 3), så må vi ha forskjellige måter å tenke på.

I: Men samtidig sa du jo tidligere, at du helst vil jobbe på samme måte.

E3: Ja. Det er jo sant. Nei, det er vel mer det at det er det jeg lærer noe av.

I: Det kan jo kanskje ha noe med komfort-sone å gjøre også? Du har jo holdt på med dette i ganske mange år, siden du gikk på barneskolen. Så det er den samme måten å jobbe på, kanskje. Jeg vet ikke?

E3: Men jeg føler at den gruppen vi var på, så... Nei, jeg skjønte ikke så altfor mye av det. Altså jeg pugget de, men jeg vet ikke helt om jeg forstod de.

I: Så du er litt avhengig av å se mening med det du holder på med da, kanskje?

E3: Ja. Og da å gjøre oppgaver tenkte jeg var litt enklere.

I: Jeg hadde også lagt opp memoreringen, slik at du fulgte dette mønsteret: (peker på testen) Den første dagen jobbet dere med regler. Neste dag var det metode. Og siste dag var det problemløsing. Du ble ikke mer bevisst på hvordan du finner topp- og bunnpunkt, hvordan du finner vendepunkt, hvordan du finner tangentlikning - på den type ting?

E3: Egentlig ikke helt.

I: Nei. Og i forbindelse med problemløsing skulle dere prøve å tenke ut noen lure strategier.

E3: Ja. Ja, på hvordan man kunne gjøre...

I: Ja. Kom dere opp med noe?

E3: Ja, vi fant vel egentlig de metodene som stod i læreboken.

I: Så dere tenkte ikke ut noe selv, altså?

E3: Nei, jeg vet ikke helt om vi gjorde det.

I: Disse testene, da. Synes du at oppgavene harmonerte med det dere jobbet med, eller synes du de var de litt annerledes enn det dere jobbet med?

E3: Vi jobbet jo med derivasjon, og det var jo derivasjon på testene, så sånn sett...

I: Jada, men jeg tenkte mer spesifikt. Var de ulike oppgavene vanskeligere eller annerledes, eller var det lignende som de dere...?

E3: Det var litt lignende noen av de.

I: Hvor fortrolig er du med sånne oppgaver? Har du jobbet mye med denne type oppgaver, eller?

E3: Sånn som akkurat disse (peker på oppgave 1 og 2) finner vi jo egentlig overalt. Mens kanskje disse (peker på oppgave 3) er typisk mer eksamensoppgaver. De har jeg ikke jobbet så mye med.

I: Har du en følelse av at dette er gode tester - at de gir et rett bilde av hvor mye derivasjon du kan?

E3: Ja, jeg synes egentlig det.

I: Så det er ikke noe du synes burde vært annerledes på testene?

E3: Nei, egentlig ikke. Jeg synes alt ble dekket - de forskjellige måtene...

I: Hva med resultatene? Hvilken følelse satt du igjen med når du hadde hatt testene?

E3: Jeg følte vel ikke at det gikk veeeldig bra på alle. (kort latter)

I: Men det har kanskje litt med... Hvis jeg ser her... (blar i spørreundersøkelsen) Litt sånn karakternivå da... så er det vel sånn at du da kanskje litt vant til å få til mesteparten. Vil jeg tro?

E3: Ja.

I: Og nå hadde du ikke en følelse av det, sikkert?

E3: Nei. Det hadde jeg ikke. (kort latter)

I: Nå var det plutselig det at du får til mindre enn det du kanskje pleier?

E3: Ja, det var jo flere jeg ikke kunne gjøre, fordi jeg ikke fikk det til.

I: Er det det som kan ha påvirket din oppfatningen av læringsutbyttet? At du følte at dette ikke er som det pleier å være? At du plutselig fikk mindre til enn det du pleier å gjøre?

E3: Ja, det var kanskje noe med det.

I: Hadde dere heldagsprøve etter dette?

E3: Nei, vi hadde før. Så det var kanskje litt glemt også. Eller vi hadde ikke nettopp hatt det.

I: I morgen får dere vite hva dere kommer opp til i eksamen. Tror du at du har blitt mer bevisst på forskjellene innen derivasjon etter dette greiene her, eller er det ikke noen forskjell?

E3: Jeg tror egentlig ikke at jeg merker så veldig stor forskjell.

I: Nei. Så om du bare hadde regnet oppgaver, så ville det ikke hatt noe å si - for eksempel til eksamen?

E3: Nei, jeg tror ikke det.

I: Tror du at det er en sammenheng mellom måten du jobber på, og resultatene du får? Altså hvilken innlæringsmåte du velger. Altså hvis du hadde vært på en annen gruppe, tror du at resultatene ville blitt annerledes?

E3: Kanskje. Det kan jo være mulig. Jeg vet jo ikke, for jeg var jo ikke på noen av de andre gruppene. Men kanskje hvis jeg hadde jobbet på en måte hvor jeg kunne følt at jeg hadde lært mer.

I: Ja.

I: Er det noe du brenner inne med i forbindelse med dette her? Er det noe du lurer på?

E3: Nei, jeg tror det var greit.

I: Ja. Men da tror jeg at vi har fått dekket det meste. Så hvis du ikke har noen spørsmål, så tror jeg bare vi sier stopp.

7.9.4 Intervjuobjekt 4

I: Det er relativt kort tid siden dere har fullført dette her. Hvilke tanker har du om opplegget?

E4: Jeg var på den problemløsningsgruppen, og jeg synes egentlig det var ganske spennende oppgaver. Siden det står ikke så mange problemløsningsoppgaver i boken vår. Det står mest "rett fram"-oppgaver med derivasjon.

I: Det var rett og slett gøy å prøve noe nytt?

E4: Ja.

I: Hvis jeg sier ordet derivasjon til deg. Hva tenker du da?

E4: Da tenker jeg at som oftest når jeg løser en oppgave med derivasjon, er det for å finne stigningen på grafen. Og eventuelt finne et toppunkt eller et bunnpunkt, der stigningen er null.

I: Så du tenker egentlig bruk av derivasjon?

E4: Ja. Bruk av derivasjon.

I: Men derivasjon er jo et veldig komplisert begrep. Jeg vet ikke om du er klar over det, men de brukte over 1000 år på å komme fram til... Grunnen til at det tok så lang tid var at de måtte utvikle matematikken. Det består av mange bestanddeler. Jeg vet ikke om du har tenkt så mye på det?

E4: Nei, jeg har ikke tenkt så mye på definisjonene.

I: Sånn som definisjonen. Er det noe du bare ser på, så er det et tilbakelagt stadium? Og så er det bruken du først og fremst er interessert i?

E4: Ja. Det er det.

I: Men disse oppgavene som du har sett på nå - sånne problemløsningsoppgaver, der går det ikke an med en oppskrift eller noe sånt. Tror du det kan være en sammenheng mellom hvor godt du forstår derivasjonsbegrepet, og hvor bra du gjør det på disse problemløsningsoppgavene?

E4: Det er sikkert en sammenheng der. Men egentlig så var jo min oppfattelse av derivasjon litt annerledes enn hvordan vi... Eller på noen av oppgavene - problemløsningsoppgavene, tenkte jeg ikke med en gang at vi kunne bruke derivasjon for å løse. Men jeg skjønte jo det etter hvert, siden vi hadde om derivasjon.

I: Oppfatter du derivasjon som noe som er lett eller vanskelig, eller helt greit?

E4: Nå synes jeg er det ganske lett. I fjor (1T) synes jeg det var litt vanskeligere. Men da var det helt nytt. Jeg synes egentlig det er ganske lett.

I: Ja, alle delene også da? (Tar fram testene) Jeg vet ikke hvor bevisst du er det, men testene er bygget opp slik at det er tre atskilte deler, der den første delen er regelbruk - ren gjengivelse av regler. Og så kommer anvendelse - sånn standard anvendelse. Og så er det problemløsning til slutt. Sånn er en typisk vanlig prøve bygget opp også. Og eksamen vil bli bygget opp på samme måte. Del 1 her (peker på oppgave 1), kanskje litt del 1 her også (peker på oppgave 2), og del 2 her (peker på oppgave 2 og 3). Jeg vet ikke hvor bevisst du har vært det?

E4: Nei, jeg liker som regel best den typen her (peker på oppgave 1) - med å bruke reglene og regne. Og så har vi jobbet veldig mye med den, oppgave 2, med topp- og bunnpunkt og sånn - i boken. 3eren har vi ikke jobbet så mye med, så det er vel den jeg bruker mest tid på.

I: Men denne inndelingen av derivasjon. Har du tenkt på det før? At det kan deles inn på den måten?

E4: Jeg har tenkt litt på at du kan dele det inn på de to første måtene, men ikke så mye på den tredje, nei. Men da tenker jeg at du må ha en litt bedre forståelse for å kunne løse de problemløsningene.

I: Tenker du at derivasjon kommer til å bli nyttig for deg? Neste år, og årene framover?

E4: Ja, jeg har hørt at det er mye derivasjon i R2. Så, ja.

I: Ja, så du har en viss motivasjon for å lære det da?

E4: Ja.

I: Ok. Nå var du på problemløsningsgruppen. Det å jobbe med matematikk på en litt annen måte enn du er vant med. Hva tenker du om det?

E4: Egentlig ganske greit. Jeg tenker at jeg har mer utbytte av å jobbe på den måten. Når du bruker reglene, tenker du ikke så mye over det du gjør. Du bruker egentlig bare reglene. Og hvis du kan de, så får du det til.

I: Du blir mer tvunget til å reflektere, kanskje da...

E4: Ja, du tenker litt mer over hva du faktisk gjør.

I: Diskuterte der på gruppen også?

E4: Ja, det gjorde vi.

I: Det er ikke sånn at det ble forvirrende da? At du bruker ulike tilnærminger? Du tenker at det bare er positivt?

E4: Ja. Vi var egentlig ganske enig, når vi snakket om hvordan vi skulle gjøre det.

I: Er det andre måter som du kunne tenkt deg å... Hvordan pleier du å jobbe til vanlig? Pleier du å regne for deg selv, eller pleier du å samarbeide med folk?

E4: Jeg pleier alltid å regne selv. Nesten aldri samarbeide. I alle fall ikke når jeg skal forberede meg til prøve.

I: Er det sånn at du helst ikke vil jobbe i grupper, eller?

E4: Jeg føler ofte at når vi jobber med matte i en gruppe, så er det som regel et par stykker som gjør mest da. Jeg lærer iallefall best når jeg jobber selvstendig.

I: Det har kanskje også med type oppgaver å gjøre? Med sånne oppgaver (peker på oppgave 3), er det kanskje fordel...

E4: Ja! Da vil jeg tro at det er bedre å arbeide i en gruppe. Hvis det er noe du ikke forstår, så kan det være at de sier noe som får deg til å forstå resten av oppgaven.

I: Bare et lite innskyt her. For det kan jo være at det er en som du kanskje ikke vurderer som så flink, kan poppe opp med et eller annet som får deg til å tenke videre.

I: Testene, da? Synes du de gir et godt bilde av hvor godt du kan derivasjon? Altså: Får du testet dine kunnskaper i derivasjon?

E4: Ja. Det tenker jeg egentlig. Vi har ikke jobbet så mye med de oppgavene tidligere. Men det er vel...

I: Ingen av dem?

E4: Ikke så mye med problemløsningsoppgaver som vi hadde på vår gruppe. Men vi har jobbet litt med det.

I: Derivasjonsregler, og topp- og bunnpunkter må dere vel ha jobbet med?

E4: Ja, det har vi jobbet litt med.

I: Oppfattet du testene som gode, da eller...

E4: Jeg synes de var greie, jeg.

I: Eller var det ting som kunne vært annerledes?

E4: Nå husker ikke jeg helt hvordan alle testene var da, men...

I: Neida. Jeg har alle her da, så du kan jo... (tar fram testene) De er bygget opp på samme måte. Det er problemløsningsoppgavene som varierer litegrann. Av og til har jeg spurt etter tangentlikninger, og av og til ikke. (peker på oppgave 2)

E4: Nei, jeg likte egentlig de testene.

I: Nå vet ikke du resultatene, da. Men fikk du en følelse av at det gikk bra på testene?

E4: Vi fikk jo vite på forhånd at det ikke hadde noe å si for karakteren, så egentlig prøvde jeg bare å regne meg gjennom så fort som mulig. Og prøve å få et svar på alt. Så jeg så ikke over oppgavene, og tenkte ikke så mye over det, hvis det var noe jeg var usikker på. Men jeg gjorde det så godt som jeg kunne akkurat da.

I: Hvis jeg hadde kjørt denne testen om en måned, to måneder, tre måneder. Tror du resultatet ville blitt annerledes da? Altså: Hvor mye tror du blir sittende igjen av kunnskap?

E4: Jeg tror ikke alt blir sittende igjen. Kanskje ikke alle reglene? Men jeg tenker at en del av forståelsen fortsatt vil være der.

I: Så det du sier, er at en sånn inndeling av oppgaver... Det er begrenset hvor lenge du husker det?

E4: Nå skal vi ha en prøve i det kapittelet på fredag, så jeg kommer sikkert til å huske det en liten stund til. Men om en måneds tid er det ikke sikkert jeg hadde husket alt, nei.

I: Litt av poenget her, er at i R2 så forutsettes det at dere kan dette her. Det er ikke så mye repetisjon. Og det spørs jo da?

E4: Men jeg tror egentlig at neste år, så er det kanskje å bruke en dag eller to på å repetere det vi hadde ifjor, så sitter det. For jeg bruker ikke like lang tid på å forstå det da, når jeg går igjennom det neste gang.

I: Nei. Det er et viktig poeng.

I: Tror du det er en sammenheng mellom hvilken gruppe du er på, og resultatet? Hvis du hadde vært på en annen gruppe. Tror du det ville blitt et annet resultat da?

E4: Det kan godt være. Nå vet ikke jeg hva de andre gruppene gjorde.

I: Ja, ok. Den ene drev å regnet oppgaver, og oppgaver, og oppgaver. Første dagen den type oppgaver (peker på oppgave 1), andre dagen den type oppgaver (peker på oppgave 2), og tredje dagen den type oppgaver (peker på oppgave 3). Regnet oppgaver, slik dere gjør ellers. Den andre gruppen skulle tenke gjennom matematikken, og memorere ting. De skulle ikke regne, altså.

E4: Ja, da tror jeg at resultatet ville variere litt ut fra hvilken oppgave du har. Men vi holdt jo ikke på med dette programmet så veldig lenge. Så mye av det samme sitter jo igjen hos alle. Vi har jo gått igjennom samme boken, og sånn.

Men kanskje en liten forskjell. Vil jeg tro.

I: Yes! Ellers, er det noe du har på hjertet?

E4: Nei, egentlig ikke.

I: Nei, men det høres flott ut!

7.9.5 Intervjuobjekt 5

I: Det første jeg lurte på er hvilke tanker du har nå om dette prosjektet. Når du har fått det litt på avstand.

E5: Hvilke tanker jeg har om det? Jeg var jo ikke her første gang, når du var inni klasserommet og fortalte om dette her. Så jeg var ikke helt sikker på hva det gikk ut på da. Det jeg trodde det var, var vel at når vi hadde derivasjon på skolen, så skulle du komme å lære oss det på en sånn lur måte.

I: Så det var litt skuffelse der da?

E5: Det var litt skuffende. Men vi fikk nå utdelt noen ark med veldig mange oppgaver. Jeg tror ikke jeg kom igjennom halvparten en gang. (lattermild) Jeg merket at det startet på et relativt høyt nivå, så du burde jo ha litt kunnskaper fra før av. For å gjøre en del av de oppgavene så måtte du kunne de kjernereglene og alt det fra før av.

I: Men dere hadde vært igjennom det, hadde dere ikke?

E5: Joda! Det er jo det vi har. Og så hadde vi hatt heldagsprøven tidligere. Så vi hadde øvd litt på det.

I: Men du følte likevel ikke at du var helt komfortabel med de reglene.

E5: Nei, det var litt mye, kanskje.

I: Grunnen til at jeg hadde mange oppgaver, var i tilfellet du var et sånn lyn som regnet veldig fort...

E5: Ja, sånn super-smarting.

I: Ja. Det var ikke nødvendigvis meningen at du skulle regne alle oppgavene.

E5: Nei, det skjønte jeg ganske tidlig.

I: Du var jo da på den drill-gruppen. Da tenker jeg at du egentlig jobber på en måte som du er vant med. Altså du jobber med oppgaver som... Og så får du lignende på... Sånn intuitivt, så ville jeg jo trodd at det var den måten du vil prestere best på, hvis du skal ha en test. Altså du øver på noe du blir testet i. Det er logisk å tenke slik. Det tenker jo jeg kan være en forklaring på framgangen din: Du har jobbet med ting. Og så kjenner du det igjen på testen.

I: Men hvis jeg sier ordet derivasjon til deg. Hva tenker du da?

E5: Hva jeg tenker? Først tenker jeg jo at du egentlig ikke kan bruke det til så veldig mye. Men i fysikken kan du jo gå fra avstandsformler til fartsformler, og akselerasjon. Så sånn sett er det jo ganske nyttig. Ellers så vet jeg ikke helt.

I: Så du tenker på en måte anvendelse da? Det er ikke sånn at du ser for deg noen bilder i hodet av funksjoner og grafer, eller et eller annet sånn?

E5: Nei, ikke direkte. Eller: Jeg ser jo for meg disse formlene da, etter hvert. Jeg har jo gått gjennom dem en del ganger.

I: Men hvordan er dere blitt presentert for derivasjon, av læreboken og faglærer?

E5: Vi var jo så vidt borti det ifjor. Men det var bare sånn enkelt: $3x^2$, og flytte 2-eren foran, liksom. Men i år er det jo gått hakket videre da. Og så har jeg merket meg at du må jo lære deg mest ting selv, for å klare å skjønne det. Jeg synes ikke det er det vanskeligste å lære seg, så lenge du bare knekker koden med $g(u)$ og u, og sånn. Litt mer kompliserte ting.

I: Nå gikk du rett på reglene. Men dere har ikke blitt presentert for en definisjon?

E5: Jo, vi har nok det også. (liten latter) Men jeg vet ikke hva...

I: Så det du husker er reglene?

E5: Ja, hvordan du regner det ut, liksom. Det er det vi har jobbet mest med. Ellers har jo læreren fortalt litt fremme på tavlen. Men det er ikke alltid like lett å få med seg alt.

I: Men hvis jeg sier toppunkt og bunnpunkt. Tenker du derivasjon da, eller?

E5: Hadde jeg kunnet brukt de hjelpemidlene jeg ville, ville jeg tegnet inn en graf, og funnet ekstremalpunktene. For jeg føler at det er en enklere måte å regne det ut, men det er jo ganske lurt at du kan bruke derivasjon også.

I: Men du ville helst funnet det sånn fysisk?

E5: Ja, sånn at du kan se det, liksom. Sånn liker jeg det.

I: Derivasjon er jo et mangeslungent begrep. Disse testene dere har hatt er delt i tre. Jeg vet ikke hvor bevisst du har vært på det? Det er tre oppgaver. Men de tre oppgavene nærmer seg derivasjon på tre ulike måter.

E5: Åja?

I: Litt overraskende?

E5: (litt latter) Jeg bare begynner på prøven, og så kjører jeg i gang.

I: Den første oppgaven, da er det ren regelbruk: Du skal huske reglene, og så skal du vise at du kan bruke dem. Mens den andre oppgaven er mer sånn standard metode - for å finne topp- og bunnpunkt, og... Altså anvendelse. I fysikken, sånn som du sier: Å finne farten ved derivere strekningen. Det er et eksempel på anvendelse. Mens den siste oppgaven, da er det mer sånn problemløsnings-oppgaver, der du ikke kan ha noen oppskrift.

E5: Nei, så du må liksom finne det ut selv.

I: Dette var jo noe jeg snakket om da jeg presenterte oppgavene, men når du ikke var der, så... Men dere har jo hatt prøver. Heldagsprøve og eksamen er bygget opp på samme måte. Dette er en typisk del 1-oppgave (peker på oppgave 1), kanskje litt inni der (peker på oppgave 2). Og på del 2 får er du liksom i det området her (peker på oppgave 2 og 3). Oppgavene jeg har plukket ut, er enten eksamensoppgaver, eller kunne vært det. Men du har ikke tenkt så mye gjennom det?

E5: Jeg har ikke tenkt så mye gjennom det, nei. (liten latter)

I: Nei. Men da får du det nå. (kort latter)

I: Men hvis du ser på disse delene da (peker på test 1), synes du det er lett eller vanskelig. Er det forskjell på... Er det noe du synes er lettere enn annet?

E5: Iallefall den i midten er ganske grei. Oppgave 2 (test 1) synes jeg er veldig grei. 1 skulle jeg nok sikkert klart greit også, men jeg måtte nå tenkt litt mer. Og prøvd å bruke formlene best mulig. Og så den siste: Jeg er litt usikker på det. Hvor den stiger, eller om den synker. Det er nesten litt sånn fifty-fifty. Du må jo på en måte prøve å se for deg grafen da.

I: Ja, men du må jo egentlig ikke det. Dette er jo grafen til den deriverte. Hva er den deriverte lik, der den krysser *x*-aksen?

E5: Null.

I: Ok. Og hvilken type punkt har vi når den deriverte er null?

E5: Når den deriverte er null, har vi vel et toppunkt eller et bunnpunkt?

I: Ja, vi kan ha det. Og hvis du skal finne ut om det er et topp- eller bunnpunkt, hva må du gjøre da? Hva er det du pleier å gjøre, når du skal finne ut om det er et topp- eller bunnpunkt?

E5: Da pleier jeg å tegne opp sånn skjema, og se hvor den går fra positivt til negativt, og sånn.

I: Ja. Fortegnsskjema. Kan du si noe om fortegnet til den deriverte, ved å se på grafen?

E5: Det ser jo ut som den går fra positivt til negativt. Så det vil si at det er et toppunkt.

I: Ja, nettopp. Ser du? (begge ler litt)

I: Men dette er ikke noe du kan pugge deg til, dette må du forstå.

E5: Forstå, ja.

I: Det er det som skiller denne oppgaven fra de andre. Du er mer komfortabel med oppgaver som... (peker på oppgave 1 og 2)

E5: Ja, vanligvis er jeg det.

I: Nå var jo du på den... Den første dagen jobbet dere med sånne type oppgaver (peker på oppgave 1), andre dagen jobbet dere med sånne (peker på oppgave 2) og tredje dagen jobbet dere med sånne oppgaver (peker på oppgave 3). La du merke til DET da? (kort latter)

E5: Jeg merket at det var litt variasjon i oppgavene. Ja, det merket jeg for så vidt. De ble jo mer kompliserte den siste dagen. Det var et sånt uttrykk vi skulle derivere. Nei, vi skulle finne toppunkt eller bunnpunkt. Eller vendepunkt? Og så viste det seg at det ikke eksisterte i flere av tilfellene. Så det var litt frustrerende, kan man si. Men det er jo viktig å finne ut det også.

I: Tenker du på derivasjon som nyttig for deg? Altså ut over det med fysikken som du nevnte. For deg personlig? Tenker du at det er noe du kommer til å få bruk for senere i livet? Neste år, eller framover?

E5: Foreløpig har jeg ikke peiling. Det kan godt hende at jeg får bruk for det. Kanskje ikke... Det er flere av disse grafene som virker litt sånn usannsynlige av og til. Og da er det ikke sikkert jeg får så veldig mye bruk for det. Men på litt enklere tror jeg du lett kan få bruk for det.

I: Jeg tenkte mer på... Har du tenkt å ta R2 neste år?

E5: Jada.

I: R2, eller eventuelt når du studerer. Jeg tenkte ikke nødvendigvis på jobb. Men som R2-elev eller som student, tror du at dette her...

E5: Å, sånn sett tror jeg absolutt det hjelper. For jeg regner med at det ikke er første gang jeg ser disse oppgavene.

I: Det er ikke siste gang, nei. (kort latter)

I: Nå har du egentlig jobbet på den samme måten som du ellers... Du sa jo at du håpet at det kom en sånn smart måte... Betyr det at du heller ville vært på en av de andre gruppene?

E5: Nei, egentlig ikke, for det virker som de var... Jeg tror ikke de synes det var så mye bedre.

I: Det å lære derivasjon på litt forskjellige måter, er det positivt eller negativt? Er det forvirrende, eller kan det være klargjørende?

E5: Jeg tror det kan være greit å angripe disse her problemene på forskjellige måter. Jeg tror jo det er forskjellig fra person til person, kanskje. At noen lærer bedre på forskjellige måter.

I: Er det andre måter du skulle ønsket at matematikken hadde vært lagt opp i forhold til å lære?

E5: Tja, jeg synes det er greit når du får jobbe med oppgaver, og hvis du kommer til oppgaver som du ikke kan, så er det veldig greit å få hjelp ganske tidlig. Det er en ting å tenke ut, og... Men det tar ofte lang tid. Jeg tror det er greit å jobbe mye med oppgaver, men ikke altfor mye heller. Bare sånn at du skjønner når du skal bruke de forskjellige formlene, og hvordan du skal bruke de. Og heller prøve å forstå det bedre, enn å bare glemme det etter en uke.

I: Men tror du at du bygger forståelse med å regne mange oppgaver?

E5: Ikke direkte, nei. Da danner du vel mer en vane.

I: Godt sagt!

E5: Når du møter det problemet, så kjenner du det igjen, og så... Uten at du helt vet hvorfor du skal gjøre det sånn.

I: Disse testene. Gir de et rett bilde av hvor god du er i derivasjon? Eller blir det helt feil i forhold til...

E5: Tja. Testene var kanskje litt forskjellige fra gang til gang.

I: Nja! Jeg tror nok det at hvis du ser nå (henter fram testene), så vil du se det at alle oppgave 1 er bruk av derivasjonsregler. Alle oppgave 2 er anvendelse. Litt forskjellig anvendelse da. Tangentlikning er ikke alltid med, men topp- og bunnpunkt går igjen. Den største variasjonen er jo den siste oppgaven, fordi det går på problemløsing, og de er jo forskjellige. Men testene er på en måte bygget opp på samme måte. Men uansett: Mener du at testene gir et rett bilde, eller mener du at testene blir helt feil i forhold til dine kunnskaper?

E5: Jeg synes de gir et rett bilde, fordi det er jo flere forskjellige problemer som skal løses. Og at du kan vise at du kan det meste, og ikke bare ha tester der du kun skal bruke formlene. Det er ikke sikkert at du helt forstår det, men når du får flere oppgaver på forskjellige måter, så viser det mer at du forstår det, hvis du klarer å gjøre de.

I: Kjenner du igjen oppgavene, er det noe du er fortrolig med? Eller var det mye rart der?

E5: Det var noen rare ting. Det kan jeg si.

I: Ja, konkret: Hvis du ser på disse oppgavene her (peker på oppgave 1 og 2). Er det noe du har vært borti før, eller var det helt nytt for deg nå?

E5: Jo, de der har jeg vært borti før, ja.

I: Så det er først og fremst disse siste oppgavene du tenker er litt rare, da?

E5: Ja. Eller i hvert fall oppgave 2 har vi gjort mange ganger før. Oppgave 1 er jo et nytt problem, men du bruker som oftest de samme formlene. Den siste er noe helt annet, egentlig. Annerledes.

I: Vi så jo på dette tidligere. Dette er en annen type kompetanse. Det er mer en forståelse, eller kunnskap. Mens her er det mer gjengivelse, og huske reglene, og bruke dem (peker på oppgave 1 og 2). Da kommer det som du sa om vane. Dette er jo vane. Men her er det ikke snakk om noen vane (peker på oppgave 3). Her er det snakk om ny problemstilling å forholde deg til for hver gang.

I: Synes du testene var bra, eller synes du de burde vært lagt opp litt annerledes?

E5: Den første testen synes jeg var litt... Jeg vet ikke helt hva jeg skal si. For da hadde vi jo bare jobbet med det første punktet, sant?

I: Stemmer.

E5: Og da var det litt vanskelig med de andre oppgavene, siden vi ikke hadde gått gjennom de da.

I: Men dere hadde jo gått gjennom de før!

E5: Vi hadde gått igjennom det før, men det sitter ikke like sterkt i minnet.

I: Har du tenkt på hvorfor det ikke sitter like sterkt i minnet?

E5: Det er vel fordi det skjer så mye rundt omkring, så...

I: Kan det ha hatt noe med måten du har jobbet på?

E5: Det kan godt hende det har hatt noe med måten jeg har jobbet på, ja. At jeg har pugget det, og så har det gått litt i glemmeboken.

I: Ofte tenker jeg at det er slik: At du jobber intenst mot en prøve. Og så går det noen uker, og så en kanskje glemt det ut.

E5: Men det er lettere å ta det opp igjen da.

I: Testresultatene dine kan jo på en måte tyde på det. For det kan jo være en forklaring på framgangen din. Første gangen jobbet du bare her (peker på oppgave 1), andre gangen jobbet du bare her (peker på oppgave 2) oppgave 2), og tredje gangen her (peker på oppgave 3). At det er en slags logikk i at du kanskje blir bedre da. Men det var ikke alle som ble det!

E5: Det var forkjellig? (kort latter)

I: Tenker du annerledes om derivasjon nå, enn før du var med på dette? Ble du mer bevisst ting? Ja, du skrev jo at du har hatt større læringsutbytte.

Nei, det var motsatt! Du hadde egentlig blitt dårligere, sa du.

E5: Ja, nesten. Jeg innser vel at jeg kanskje er blitt hakket... At det sitter hakket bedre, men at jeg ikke følte det der og da.

I: Litt skuffelse da, kanskje, over at det ikke kom en som kunne lære deg noe... (kort latter)

I: Men en ting er reglene. Men jeg tenkte også sånn bevissthet - hva du tenker rundt... Sånne oppgaver som det (peker på oppgave 3). Mange elever gidder ikke prøve en gang. De tenker at dette er helt umulig. Men når jeg guidet deg gjennom den, så fikk du det jo til. Det er ikke så vanskelig, egentlig. Man må bare jobbe litt mer.

E5: Ta steg for steg, ja.

I: Tror du at det ville vært annerledes, hvis du hadde vært på en annen gruppe?

E5: Jeg vet ikke direkte hva de andre har gjort, men det virker som om de hadde litt annerledes opplegg. Og det kan godt hende at jeg hadde fått andre utslag da. Det tror jeg kanskje. For det virket som de skulle lære seg formler, og sånn.

I: Ja. En gruppe gjorde det, og den andre skulle jobbe med den type problemer (peker på oppgave 3). Du var jo i kontroll-gruppen, som skulle jobbe på den vanlige måten, mens de andre skulle jobbe med noen alternativer. Så det var litt dumt for deg, hvis du kanskje håpte at det var noe alternativt, så havnet du på den vanlige gruppen. (latter)

E5: Det kunne vært interessant med noe alternativt, ja.

I: Yes! Men er det noe du selv brenner inne med, som du har tenkt på, eller?

E5: Nei, ikke noe direkte. Ikke som jeg kan komme på, nei.

I: Nei, men da tenker jeg vi gir oss der.

7.10 Derivasjon på eksamen våren 2013

Her følger en oversikt over alle oppgaver på eksamen våren 2013 som krever kunnskaper om derivasjon. Oppgavene er sortert på fag.

2P-Y - Del 2, oppgave 5a: Finne lineær modell (lineær vekst).

2T-Y - Del 1, oppgave 3: Finne $f'(x)$ til et andregradspolynom, og bruke dette til å finne topp- eller bunnpunkt.

- Del 2, oppgave 6c: Finne største areal, ut fra et uttrykk for arealet (optimering).

1P - Del 2, oppgave 4d: Finne gjennomsnittlig vekst (lineær vekst).

1T - Del 1, oppgave 7d: Finne likningen for en tangent.

- Del 2, oppgave 6d: Finne $h'(4)$, og tolke svaret.
- Del 2, oppgave 7c: Finne største areal, når uttrykket for arealet er kjent (optimering).

2P - Del 2, oppgave 2b og c: Finne en lineær modell, og tolke stigningstallet (lineær vekst).

S1 - Del 1, oppgave 4b: Finne gjennomsnittlig vekst (lineær vekst).

- Del 1, oppgave 6: Finne $f'(x)$ når f er en tredjegrads polynomfunksjon, og bruke dette til å finne monotoniegenskapene for grafen til f (funksjonsdrøfting).
- Del 2, oppgave 3c: Finne $f'(x)$ når f er en fjerdjegrads polynomfunksjon, og bruke dette til å finne monotoniegenskapene for grafen til f, og topp- og bunnpunktene på grafen til f (funksjonsdrøfting).
- Del 2, oppgave 5b: Finne største overskudd, når kostnads- og inntektsfunksjonen er gitt (optimering).
- Del 2, oppgave 5d: Benytte at stigningstallet til en tangent i punktet $x = a$ er det samme som $f'(a)$.

R1 - Del 1, oppgave 1: Finne $A'(r)$ og $V'(r)$, når $A(r)$ og $V(r)$ er gitt.

- Del 1, oppgave 2: Derivere en sammensatt logaritmefunksjon (kjerneregel), og en rasjonal funksjon med polynom i teller og eksponentielt uttrykk i nevner (kvotientregel).
- Del 1, oppgave 5: Bestemme intervall der f er deriverbar.
- Del 1, oppgave 6: Finne likningen til vendetangent.
- Del 2, oppgave 1b: Finne likningen til en tangent.
- Del 2, oppgave 3b: Finne fartsvektoren $\vec{v}(t)$, når posisjonsvektoren $\vec{r}(t)$ er gitt, og bruke $\vec{v}(t)$ til å finne topp- og bunnpunktet på grafen til $\vec{r}$.

- Del 2, oppgave 3c: Finne akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$, når fartsvektoren $\vec{v}(t)$ er kjent.
- Del 2, oppgave 4b og c: Finne største areal og omkrets, når uttrykkene for arealet og omkretsen er kjent (optimering).

S2 - Del 1, oppgave 1: Derivere et produkt av et polynom og et eksponentielt uttrykk (produktregel), og en rasjonal funksjon med polynom både i teller og nevner (kvotientregel).
- Del 1, oppgave 5: Finne $f'(x)$ og $f''(x)$ når *f* er en tredjegrads polynomfunksjon, bruke dette til å finne topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til *f*, og skissere grafen til *f* ut fra disse opplysningene (funksjonsdrøfting).
- Del 2, oppgave 1: Finne største overskudd, når etterspørsels- og kostnadsfunksjonen er gitt (optimering).
- Del2, oppgave 5b: Finne $f'(x)$ og $f''(x)$, når *f* er en sammensatt eksponentiell funksjon (kjerneregel og produktregel), og finne vendepunktene på grafen til *f*.

R2 - Del 1, oppgave 1: Derivere trigonometriske funksjoner (kjerneregel og produktregel).
- Del 1, oppgave 2a: Integrasjon vha. variabelskifte (derivasjon av polynom).
- Del 1, oppgave 6: Skissere en graf på bakgrunn av fortegnene til $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$ (funksjonsdrøfting).
- Del 2, oppgave 1b: Løse en differensiallikning vha. integrerende faktor (produktregel).
- Del 2, oppgave 2b: Finne topp- og bunnpunkt på grafen til *f*, når *f* er et produkt av et eksponentielt og et trigonometrisk uttrykk (funksjonsdrøfting).
- Del 2, oppgave 5b og c: Finne største omkrets og areal, når uttrykkene for omkretsen og arealet er kjent (optimering).