Visualisering og konkretisering av omdreiningslegemer ved bruk av Geogebra 3D og 3D-printer

Vibeke Bakken

Erfaringsbasert master i undervisning

med fordypning i matematikk

Matematisk institutt

UNIVERSITETET I BERGEN

Vår 2017

Forord

Det har vært både spennende og givende å være student ved Universitetet i Bergen i fire år. Jeg har gledet meg over reisen gjennom matematikkens historie, som var en «ny» verden for en teknisk utdannet matematiker. Det var også nyttig å lære mer om tallsystemer, tallteori, og differensiallikninger, ved å arbeide med disse emnene fikk jeg mange nyttige erfaringer i forhold til egen undervisning. Men det som i ettertid føles som den viktigste erfaringen etter de to årene med matematiske fag, var det å oppleve frustrasjonen når jeg strevde som mest med den abstrakte algebraen!

Jeg er takknemlig for all støtte, inspirasjon og motivasjon som jeg har fått i løpet av de to årene som har gått med til dette arbeidet med masteroppgaven. Først og fremst vil jeg takke min veileder, Christoph Kirfel, for å ha fulgt meg gjennom hele prosessen fra en liten idé, via prøving og feiling med Geogebra og 3D-printer, til et «ferdig produkt». Det har vært uvurderlig å få så god og konstruktiv veiledning både i forhold til det praktiske arbeidet og oppgaveskrivingen. Jeg har også fått mange gode innspill og idéer fra både lærere og medstudenter hver gang jeg har vært i Bergen. Spesiell takk til Hilde, vi har hatt et godt samarbeid til tross for at vi bor på hver vår kant av landet, og du har også gitt nyttige tilbakemeldinger i forhold til oppgaven min. Takk også til R2-elevene som velvillig deltok i fagdager og intervjuer! Og så må jeg takke Svein Anders Dahl, daglig leder ved VilVite i Bergen, som ga meg idéen om å bruke 3D-printer til konkretisering.

Sist, men ikke minst – takk til min familie! Mine foreldre, Anne-Marie og Kåre som har tatt over på hjemmebane hver gang jeg har reist til Bergen, og til Lene, Kristine og Mads, som har holdt ut med en mamma som i perioder har brukt altfor mange av døgnets timer på matematikk, Geogebra og 3D-printing. Dere har støttet meg, vist interesse og motivert meg gjennom alle fire årene og bidratt til at jeg nå er kommet i mål med masterstudiet.

Borkenes, mai 2017

Vibeke Bakken.

Sammendrag

Digital programvare og digitale verktøy er i stadig utvikling. Matematiske programmer, som for eksempel Geogebra, gir oss mulighet til å visualisere matematikken på en enklere og raskere måte enn tidligere, både gjennom todimensjonale og tredimensjonale representasjoner. De senere år har også 3D-printere blitt tatt i bruk i flere videregående skoler, og dette gir nye muligheter for konkretisering av matematikk. Visualisering og konkretisering er ikke ukjente virkemidler i matematikkfagene, men mitt ønske var å undersøke læringseffekten som eventuelt kan oppnås, ved å bruke digitale hjelpemidler til visualisering og konkretisering. Jeg valgte et emne fra læreplanen i matematikk R2 som egner seg godt for visualisering og konkretisering, omdreiningslegemer, og jeg arbeidet videre ut fra følgende problemstilling:

Hvordan opplever elever at digital 3D-visualisering og konkretisering med 3D-printer bidrar til utvidet forståelse av omdreiningslegemer?

For å prøve å finne svar på denne problemstillingen, gjennomførte jeg en fagdag i matematikk R2, der visualisering og konkretisering med digitale hjelpemidler hadde hovedfokus. Fagdagen inneholdt en kort teoretisk gjennomgang der visualisering, animasjoner og konkreter ble benyttet, og deretter arbeidet elevene med oppgaver. Første oppgave tok utgangspunkt i et konkret plastglass som elevene skulle modellere og visualisere ved hjelp av Geogebra 2D og Geogebra 3D. Deretter skulle de beregne volum av sin «modell» ved hjelp av CAS, og ett eksemplar skulle så lages ved hjelp av 3D-printer. Til slutt fikk de en kreativ oppgave, som gikk ut på at hver elev skulle modellere et eget drikkebeger ut fra omdreining av ett eller flere funksjonsuttrykk. Drikkebegrene skulle visualiseres ved hjelp av Geogebra 3D for så å konkretiseres ved hjelp av 3D-printer.

Min studie viser at elevene opplever at det å bruke digitale hjelpemidler for å visualisere og konkretisere, gjør at de får økt forståelse for hva omdreiningslegemer er. Gjennom å eksperimentere med enkle og sammensatte funksjoner, ble de også tryggere i sin bruk av Geogebra. De lærte også en metode for å visualisere omdreiningsfigurer tredimensjonalt, som de så nytte av i flere sammenhenger. Elevene ga tilbakemeldinger om at de i løpet av fagdagen hadde gjort en ny og positiv erfaring i forhold til matematikk R2; matematikk var ikke lenger bare «noe på papiret», de hadde erfart at matematikk kan bli til noe konkret.

Innhold

1 Innledning/bakgrunn for prosjektet

Min masteroppgave tok utgangspunkt i at jeg hadde et ønske om å arbeide med visualisering og konkretisering i matematikk programfag, både for å prøve å gi rom for større forståelse for faget, men også for å sette matematikken inn i en større sammenheng. Min personlige erfaring knyttet til to av programfagene i matematikk, matematikk R1 og matematikk R2, er at mange elever arbeider svært mye med disse fagene. Men til tross for at de bruker mye tid på fagene, får mange av de arbeidsomme elevene problemer når de møter oppgavetyper eller formuleringer de ikke har arbeidet med før. De blir med andre ord flinke til å bruke innøvde metoder, men ofte uten å forstå matematikken som ligger «bak» metodene. Og i tillegg til å ikke forstå, blir de heller ikke kreative, utforskende eller eksperimenterende. Matematikken er for disse elevene teori og metoder, ikke mer enn det. Og selv om elevene de senere årene har fått gode, digitale verktøy som kan hjelpe dem i eksperimentering og utforskning, så er min erfaring at de matematiske programmene i stor grad bare blir brukt som en «utvidet kalkulator» og ikke som et verktøy for utforsking.

Med dette som utgangspunkt, begynte jeg å se på hvordan et praktisk prosjektarbeid i matematikk R1 eller R2 kunne utformes, der bruk av matematisk programvare skulle være en del av prosjektarbeidet. Geogebra har etter hvert blitt et vanlig valg av digitalt verktøy i matematikk i både grunnskole og videregående skole, og spesielt graftegneren er mye brukt. Jeg hadde et ønske om å bruke Geogebra til litt mer enn en todimensjonal graftegner, jeg ønsket også å utnytte 3D-funksjonen som ligger i programmet. 3D-Geogebra gir elevene mulighet til å ikke bare visualisere grafer, men også å visualisere romfigurer tredimensjonalt. Etter å ha bestemt meg for denne rammen for prosjektarbeidet, gikk jeg gjennom læreplanene i R1 og R2, for å finne læreplanmål som kunne være basis for et slikt arbeid. Jeg kom fram til at det i «Læreplan for matematikk R2» (Utdanningsdirektoratet, 2006), under hovedområde «Funksjoner», finnes to kompetansemål som er godt egnet som utgangspunkt for et slikt prosjektarbeid, sitat:

> *«Mål for opplæringen er at eleven skal kunne tolke det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og bruke det til å beregne arealer av plane områder og volumer av omdreiningslegemer» (Utdanningsdirektoratet, 2006)*

«Mål for opplæringen er at eleven skal kunne formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte» (Utdanningsdirektoratet, 2006)

Det første kompetansemålet er ett av flere delmål som omhandler integrasjon, og siden integrasjon og omdreiningslegemer er emner som alltid har fasinert meg, bestemte jeg meg for at prosjektarbeidet skulle knyttes til omdreiningslegemer. Som lærer i faget matematikk R2 har jeg erfaring med at noen elever har problemer med å forstå volumberegning ved hjelp av integrasjon, og at det kan være vanskelig å se for seg hvordan en funksjon kan være uttrykk for en fysisk romfigur.

Det andre kompetansemålet gir rom for at elevene skal formulere, bearbeide og drøfte, med andre ord gjøre en annen type arbeid enn det som er beskrevet som «vanlig» i faget.

I tillegg står det følgende i den generelle delen av læreplanen i matematikk for realfag:

«Å kunne bruke digitale verktøy i matematikk for realfag innebærer å bruke digitale verktøy til omfattende beregninger og visualisering. Det betyr å hente, bearbeide og presentere matematisk informasjon i elektronisk form. I tillegg vil det si å vurdere verktøyets hensiktsmessighet, muligheter og begrensninger.» (Utdanningsdirektoratet, 2006)

Et prosjektarbeid med det innhold jeg på dette tidspunkt så konturene av, ville kunne være en mulighet til å både gjøre «omfattende beregninger» og visualisering, og i tillegg vise elevene nye muligheter med verktøyene.

Jeg startet planleggingen av den praktiske gjennomføringen av prosjektarbeidet høsten 2015, med plan om å gjennomføre et pilotprosjekt med egen klasse samme høst. Arbeidet mitt tok imidlertid en ny vending etter høstens første mastersamling. Min veileder, Christoph Kirfel, tok oss med på besøk til vitensenteret VilVite i Bergen, og etter å ha hørt min beskrivelse av det tenkte prosjektarbeidet, kom daglig leder Svein Anders Dahl, med følgende spørsmål:

«Hvorfor ikke utvide prosjektarbeidet ved å bruke 3D-printer i tillegg til 3D-programvare?»

Jeg hadde til da ingen erfaring i bruk av 3D-printere, men jeg likte øyeblikkelig tanken om at jeg ikke bare skulle kunne visualisere omdreiningslegemer ved hjelp av 3D-programvare, men også konkretisere dem ved hjelp av 3D-printer. Det som gjensto var å finne ut om det var mulig å overføre nødvendige data fra Geogebra til en programvare som kommuniserer med 3D-printere. Etter en del utforskende virksomhet, kunne jeg ikke finne at Geogebra hadde denne funksjonen, men derimot kunne det se ut som om dette var mulig via programvaren Wolfram Mathematica. Denne programvaren har, som Geogebra, en 3D-funksjon, og jeg fant eksempel på programkode for konvertering til filformatet som 3D-printere bruker: stl-filer. Det gjensto bare å prøve dette ut i praksis, og etter å ha deltatt på kurset «Praktisk 3D-printing – For bruk i skolen» ved Skolelaboratoriet i Trondheim senere samme høst, viste det seg at filene som ble generert fra Mathematica kunne brukes mot ordinære 3D-printere.

Dette gjorde at jeg kunne ferdigstille problemstillingen for denne masteroppgaven:

Problemstilling:

> ***Hvordan opplever elever at digital 3D-visualisering og konkretisering med 3D-printer bidrar til utvidet forståelse av omdreiningslegemer?***

En annen viktig faktor som jeg skjønte ville spille inn, var tilgjengelighet og rammebetingelser. Et faglig opplegg i matematikk kan gjennomføres over en eller flere undervisningsøkter, eller gjennomføres som en sammenhengende fagdag. Mens jeg ennå var i startfasen av min forskning, ønsket ledelsen ved min skole at alle programfagene skulle gjennomføre fagdager i løpet av en bestemt uke på senhøsten. På grunn av at jeg selv hadde en R2 klasse dette skoleåret, og at en bekjent var villig til å stille opp med 3D-printer, så jeg muligheten til å gjennomføre et «pilot-fagdag» allerede denne høsten. Det jeg hadde planlagt så langt i forhold til den praktisk delen av forskningen, var mulig å organisere som en fagdag allerede på dette tidspunkt.

Erfaringene jeg fikk ved å gjennomføre pilot-fagdagen var svært positive, og fagdagen ga nyttige og konstruktive innspill i den videre utvikling av det faglige opplegget.

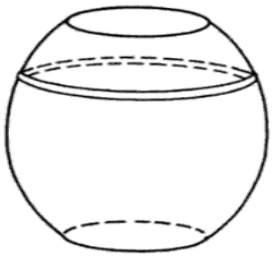
2 Teoretisk bakgrunn

2.1 Historisk utviklingen av volumberegning

Volumberegninger har opptatt matematikere gjennom alle tider, og det er interessant å studere hvordan volumberegninger ble utviklet i oldtiden og hvordan den videre utvikling har skjedd siden. Allerede i den tidlige greske matematikken utarbeidet Eudoxus en metode for areal- og volumberegning som er kalt «the method of exhaustion», som kan oversettes om «uttømmingsmetoden» og som gjengis i Euclid's Elements, bok 12. (Euclid, 2002) Denne metoden sier blant annet at vi kjenner en tilnærmet verdi av volumet av en pyramide hvis vi kjenner summen av volumet til prismer som stables inni pyramiden. Dette ga i første omgang Euklid (325 – 265) og senere Arkimedes (287 – 212) holdepunkter for at volumberegning kan utføres som en sum av en uendelig rekke (Stillwell, 2010, s. 53). Det som er spennende med disse metodene er at de kan visualiseres ved hjelp av skisser, og også konkretiseres ved hjelp av en stabel med prismer som tilnærmet vil danne en pyramide. Etter hvert ble det imidlertid behov for mer systematiske og nøyaktige metoder for beregning av areal og volum.

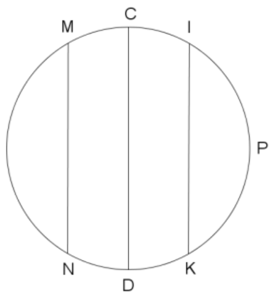
Johannes Kepler (1571 – 1630) var en av de som var med på å introdusere bruk av infinitesimaler i beregninger av areal og volum (Baron, 1969, s. 108). Kepler søkte alltid å forklare matematikkens form og struktur ut fra hvor den kan finnes rundt oss, og han brukte ofte analogier, visualisering og intuisjon når tradisjonelle metoder feilet. Han var også mer interessert i resultater enn i bevis. Kepler publiserte «Nova stereometria» i 1615, og dette verket inneholdt blant annet en samling av metoder for beregning av volum av omdreiningslegemer. Noe som viser hvor stor betydning Kepler hadde i sin tid, er at «Nova stereometria» først ble gitt ut på latin, men allerede året etter ble utgitt som en «populærversjon» på tysk, noe som ble starten på tysk matematisk terminologi.

Kepler var en anerkjent matematiker og astronom, men «Nova stereometria» var opprinnelig var tenkt som en håndbok for de som fremstiller vin, for at de på en mer nøyaktig kunne beregne volumet av vintønnene sine. Kepler brukte som nevnt mange ulike innfallsvinkler for å forklare sine metoder, men viktigst ble det å dele romfigurene i små deler, som gjerne kunne variere i størrelse og form. Han tenkte seg at en vintønnen ble delt i tynne skiver, og ved å beregne volum av hver skive og så summere disse, kunne volumet av hele vintønnen beregnes. (Figur 1).



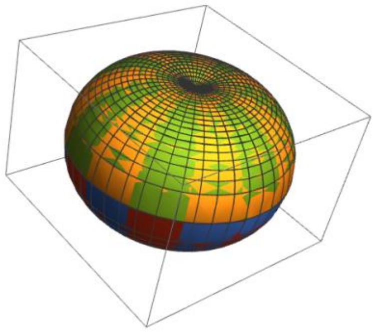
FIGUR 1. VOLUMBEREGNING AV TØNNE

Kepler arbeidet også med hvilke omdreiningslegemer som oppstår ved rotasjon av ulike geometriske figurer, blant annet hvordan rotasjon av deler av sirkulære segmenter kunne produsere ulike objekter. (Figur 2).



FIGUR 2. ROTASJON AV SIRKELSEGMENT, KEPLERS ROTASJONSAKSER.

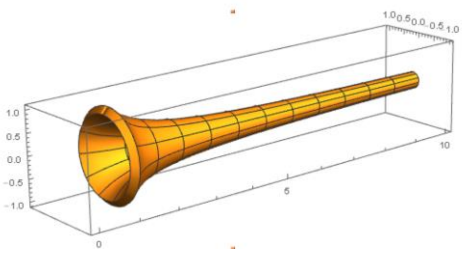
Noen av disse objektene hadde også Arkimedes arbeidet med, som for eksempel at en sfære fremkommer hvis vi roterer halvsirkelen CPD i figur 2 om aksen CD, men Kepler utforsket også nye omdreiningslegemer og satte navn på disse. Ved rotasjon av segmentet MPN om aksen MN fremkommer det Kepler kaller et «eple» (Figur 3), ved rotasjon av det lille segmentet IPK om aksen MN fremkommer en «eplering» og hvis IPK roteres rundt aksen IK får vi en «sitron». (Simmons, 1992, s. 81)



FIGUR 3. KEPLERS EPLE, [WEISSTEIN, ERIC W.] "APPLE." FROM [*MATHWORLD*]--A WOLFRAM WEB RESOURCE. HTTP://MATHWORLD.WOLFRAM.COM/APPLE.HTML

Den italienske matematikeren Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) arbeidet også med infinitesimalregning på 1600-tallet, uten å kjenne til Arkimedes sitt arbeid (Stillwell, 2010, s. 161). Det er heller ingen kjente nedtegninger om at det skjedde noen direkte utveksling av ideer mellom Kepler og Cavalieri (Baron, 1969, s. 116), men det er en mulighet for at Nova stereometria var en inspirasjon for Cavalieri. Cavalieri utviklet en metode for å beregne areal og volum, som i ettertid har blitt kalt «Cavalieris prinsipp», og som også tar utgangspunkt i det som kalles infinitesimalregning. Cavalieri så også på et hvert romlegeme som bestående av uendelig mange tynne elementer, og at summen av volumene til disse enkeltelementene utgjør et romfigurens totale volum.

En annen italiensk matematiker, Evangelista Toricelli (1608 – 1647), var også med på å prege utviklingen av beregninger knyttet til omdreiningsfigurer. I sitt verk, «Opera geometrica» (1644) ga han sin støtte til Cavalieris arbeid med infinitesimaler. (Baron, 1969, s. 183) Toricelli studerte blant annet et helt konkret omdreiningslegeme kalt «Toricellis trompet» eller «Gabriels horn». (Figur 4)



FIGUR 4. GABRIELS HORN/TORRICELLIS TROMPET

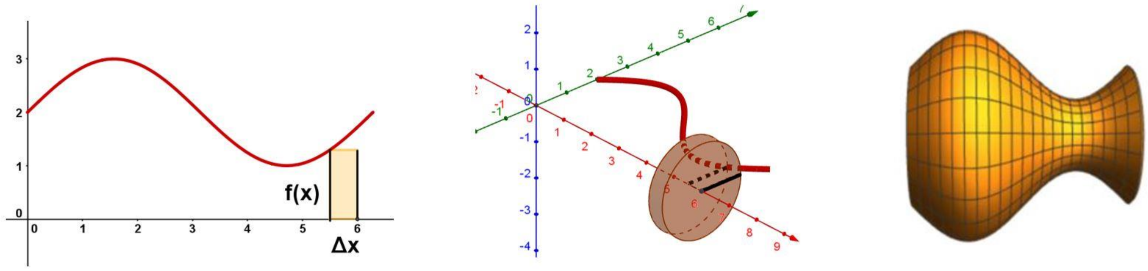
I 1643 beviste han at dette omdreiningslegemet, som ble generert ved å rotere funksjonen $y = \frac{1}{x}$ om x-aksen fra $x = 1$ til $x = \infty$, har et endelig volum, til tross for at det har uendelig utstrekning og overflate. (Simmons, 1992, s. 117).

På slutten av 1600-tallet ble det første arbeid som var knyttet til begrepet «kalkulus» publisert av Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 – 1716), *Nova methous* (1684), og deretter kom *De geometria* (1686). Disse arbeidene ble banebrytende også i forhold til volumberegning. Isaac Newton (1643 – 1727) arbeidet også innen kalkulus, men Leibnitz var som nevnt den første som publiserte. Leibnitz benyttet notasjonen dy/dx, integraltegnet og funksjonsbegrepet og han introduserte notasjonen for fundamentalteoremet (Stillwell, 2010, s. 171). Med dette fikk vi de matematiske verktøyene som også benyttes i dag i forhold til integrasjon, arealberegning og volumberegning. Ved å bruke en slik notasjon fjernet integralregningen seg noe fra det konkrete og visuelle og gikk mot det abstrakte. Tidligere hadde beregning av volum for omdreiningsfigur blitt beregnet ut fra en sum av volum av skivene figuren kunne deles opp i, nå kunne det beregnet rent algebraisk ved hjelp av fundamentalteoremet, og integrasjon ble etter hvert forklart som «omvendt derivasjon».

Den tyske matematikeren Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) bidro med å videreutvikle det Leibnitz og Newton hadde arbeidet med, både i forhold til integrerbarhet (Eves, 1990, s. 428) og arealberegninger (Katz, 2009, s. 785) . Vi omtaler også i dag gjerne «Riemannsummen» i forbindelse med arealberegning. Prinsippet med å dele arealet opp i rektangler, for så å kunne finne en tilnærmet verdi for arealet, overføres til volumberegning for omdreiningsfigurer der man tenker en oppdeling i skiver.

Når norske ungdommer i dag skal lære om volumberegning knyttet til omdreiningsfigurer, er det vesentlig at man i starten har fokus på *hva* som roteres og *hvilken akse* det roteres om. For å beskrive dette, kan vi benytte en «metode» som er brukt i mange sammenhenger i nyere tid, som blant annet Batseba Letty Kedibone Mofolo-Mbokane beskriver i sin doktorgradsavhandling (Mofolo-Mbokane, 2011, s. 13-15). Denne metoden kalles på engelsk «The disc-method», og oversettes ofte med skivemetoden. Siden det i matematikk R2 bare er vanlig å arbeide med rotasjon om x-aksen, har jeg valgt å bare beskrive denne varianten av rotasjon, men tilsvarende metoder kan også benyttes for rotasjon om y-akse eller annen akse.

Skivemetoden beskriver hvordan vi kan beregne et volum for et omdreiningslegeme som fremkommer hvis området mellom en graf og x-aksen roteres om x-aksen, se (Figur 5).



FIGUR 5. SKIVEMETODEN (THE DISK METHOD)

Området mellom x-akse og graf deles med vertikale snitt (vinkelrett på x-akse), slik at hvert snitt får rektangelform, og at hvert rektangel har en høyde som tilsvarer avstanden fra x-aksen til grafen. Bredden av hvert rektangel angis som Δx, og høyden er gitt ved $f(x)$ for enhver x-verdi. Hvert rektangulært snitt vil, ved rotasjon, danne en sylinderformet skive (en disk) med radius lik $f(x)$ og tykkelse lik Δx. Grunnflaten i en sylinder er en sirkel med areal lik (πr^2), og volmet av en slik skive vil derfor være gitt ved

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi(f(x))^2 \cdot \Delta x$$

Volumet av hele omdreiningsfiguren vil derfor være summen av alle skivene:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 \cdot dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 \cdot dx$$

der a og b angir nedre og øvre grenseverdi for x.

I matematikkopplæringa i Norge i dag, introduseres integralregning, areal under grafer og volum av omdreiningslegemer i faget matematikk R2. Læreplanen for faget har, som tidligere nevnt, ett punkt under kompetansemål «Funksjoner» som beskriver hva elevene skal kunne i forhold til tolkning av det bestemte integralet og beregning av volum for omdreiningslegemer:

«Mål for opplæringen er at eleven skal kunne tolke det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og bruke det til å beregne arealer av plane områder og volumer av omdreiningslegemer.» (Utdanningsdirektoratet, 2006)

I læreverket som min skole benytter, «Matematikk R2» fra Aschehoug Forlag (2016), brukes en metode som minner om Keplers metode for volumberegning av tønner, for å forklare og utlede en formel for beregning av volum for generelle romfigurer (Heir, Borge, Engeseth, Haug, & Moe, 2016, s. 37). Læreboka bruker oppdeling av et hardkokt egg, for å visualisere hvordan volumskivene framkommer.

Egget tegnes inn i et koordinatsystem, slik at en tenkt omdreiningsakse er parallell med x-aksen. Deretter vises det hvordan et tilnærmet totalvolum av en del av romfiguren (egget), avgrenset av to vertikale linjer, $x = a$ og $x = b$, kan beregnes, ved at figuren deles opp i n skiver med tykkelse $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Snittflatene står vinkelrett på x-aksen, og arealet av en snittflate, der avstanden fra y-akse til origo er lik x, settes til $A(x)$. For å skille avstandene fra hverandre, settes avstand til nærmeste snittflate lik x_1, avstanden til neste snittflate lik x_2 osv. Dette gir en formel for en tilnærming av samlet volum av skivene:

$$A(x_1) \cdot \Delta x + A(x_2) \cdot \Delta x + A(x_3) \cdot \Delta x + \cdots + A(x_n) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} A(x_i) \cdot \Delta x$$

Læreboka presiserer så at hvis vi deler volumet i flere skiver, så vil det tilnærmede volumet komme nærmere det virkelige volumet. Ut fra dette knyttes det å gjøre skivene stadig tynnere og flere i antall, sammen med grenseverdibegrepet:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i) \cdot \Delta x$$

Og til slutt kobles dette sammen med definisjonen av bestemt integral, på samme måte som den tidligere nevnte «skivemetoden» og volumformel er gitt:

$$V = \int_{a}^{b} A(x) dx$$

Det neste som forklares i læreboka er begrepet omdreiningslegeme, og i første omgang ses det på hva som skjer hvis en kurve blir dreid 360 grader om en rett linje. Snittflatene som ble brukt som utgangspunkt ved utledning av formel for volumberegning ved omdreining, vil dermed få perfekt sirkelform. Og når snittflaten er sirkelformet, vil arealet av snittflatene være gitt ved $A(x) = \pi \cdot r^2$ der r er radius i snittflaten. Og siden r også kan beskrives som funksjonsverdien, $f(x)$, vil vi kunne skrive en ny formel for arealet av en snittflate:

$$A(x) = \pi \cdot (f(x))^2.$$

Til slutt kobler lærebokforfatterne «eggskivemetoden» med «omdreiningsmetoden» og gir formel for volum av et omdreiningslegeme:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Begrepet omdreiningsakse blir også forklart, og det gjøres et forsøk på praktisk eksemplifisering ved å vise til at tregjenstander som lages i dreiebenker og keramikkgjenstander som lages på dreieskiver er eksempler på omdreiningslegemer. Det er også i et eksempel forklart hvordan vi kan beregne volum av et omdreiningslegeme som fremkommer ved omdreining av et område mellom to grafer (Heir et al., 2016, s. 43).

Læreboka til Heir m.fl. (2016) har en god gjennomgang av hvordan vi kommer fram til formlene for volumberegning både for generelle romfigurer og omdreiningsfigurer. Illustrasjonene i boka bidrar til at det blir enklere å se for seg hvilke størrelser og objekter det skrives om i teksten, og det er positivt at forfatterne prøver å knytte matematikken til virkelige prosesser som tresløyd gjort i dreiebenk og keramikkproduksjon ved dreieskive.

Likevel viser det seg at mange elever har problemer både med å forstå det praktiske resonnementet som er knyttet til den matematiske utledningen. Noe av problemet tror jeg er at det ofte settes av lite tid til dette emnet, og at et resultat av dette kan bli at elevene bare lærer seg en teknisk formelbruk uten å forstå hvorfor det blir slik. Emnet er som nevnt visualisert på en god måte, men det at det er fine illustrasjoner kan også føre til at læreren ikke ser nødvendigheten av å konkretisere, det vil si vise konkrete omdreiningsfigurer. Og siden det er gitt eksempler på «virkelige» omdreiningslegemer i læreboka, kan en faglærer kanskje tenke at dette gir et tilstrekkelig bilde for elevene i forhold til hva en omdreining er, og unnlater å visualisere og konkretisere omdreining. Spørsmålet er om elevene har nytte av eksemplene, har elevene sett en dreiebenk eller laget keramikk ved en dreieskive? Hvis svaret er nei, vil ikke disse eksemplene gi økt forståelse for begrepet omdreining. For å kompensere for eventuelle manglende erfaringer hos elevene, kan man knytte praktiske prosjekt til ulike tema i matematikkfaget, som for eksempel Farnell og Snipes gjorde ved å la elevene lage egne omdreiningsfigurer i leire ved bruk av dreieskive (Farnell & Snipes, 2015). Dette prosjektet blir beskrevet senere i denne oppgaven.

2.2 Relasjonell og instrumentell forståelse

Hva legger vi i begrepet forståelse i matematikk? Kan det å forstå matematikk forklares på en entydig måte? Richard R. Skemp (1919 – 1995), som var av de første som satte matematikk, utdanning og psykologi i sammenheng, ble gjort oppmerksom på at forståelse ikke var et entydig begrep, av den norske matematikeren Stieg Mellin-Olsen (Skemp, 1976).

Stieg Mellin-Olsen (1939 – 1995) var professor i didaktikk og pedagogikk, og han var en av de første til å snakke om instrumentalisme som pedagogisk begrep (Mellin-Olsen, 1975). Han mente at elever har et fornuftsgrunnlag for læring, og at dette er med på å bestemme hvordan læring foregår (Mellin-Olsen & Hoel, 1984). Den ene muligheten er det instrumentelle fornuftsgrunnlaget, som innebærer at eleven lærer fordi lærestoffet er en del av skolen, og at skolen er viktig for framtida. Det andre er det sosiale fornuftsgrunnlaget, som innebærer at eleven lærer fordi han finner lærestoffet viktig.

Skemp (1976) trekker Mellin-Olsens diskusjon videre ved å bruke begrepene «relational understanding» og «instrumental understanding», som kan oversettes med relasjonell og instrumentell forståelse. Han innleder med å forklare relasjonell forståelse kort og konsist med at man vet hva man skal gjøre og hvorfor, mens instrumentell forståelse er «regler uten mening», det vil si å lære metoder og regler uten å skjønne hvorfor. Skemp var selv tilhenger av å arbeide mot relasjonell forståelse av matematikken, og han begrunnet dette med at elever som lærer relasjonelt, lettere vil kunne løse oppgaver som er litt annerledes enn de man har øvd inn, og at selv om det kan ta litt mer tid og krefter og lære relasjonelt, så er det lettere å huske når det først er innlært. I tillegg påpeker han at relasjonell forståelse ofte vil være et mål i seg selv, fordi vi mennesker får en større tilfredstillelse av «å forstå» enn å «få til å løse oppgaven». Likevel påpeker Skemp at mange lærere underviser instrumentelt, og at det er mange «gode» grunner til at det er slik. Relasjonell forståelse tar tid, læreplanene er for omfattende, og sist, men ikke minst, så kan det «lønne seg» å arbeide instrumentelt for å gjøre det best mulig på en kommende eksamen. Skemp mener likevel at det å bare satse på instrumentell forståelse er feil, og at det at dette blir satset på i så stort omfang, er en av de viktigste grunnene til det er at så mange elever som har negative holdninger til matematikk, også blant elever som har høyere utdanning i matematikk.

I undersøkelsen TIMSS Advanced 2015, som måler elevers kompetanse i matematikk og fysikk det siste året i videregående skole, benyttes begrepet «operasjonalisering». Matematikkfaglige emner kan operasjonaliseres ved bruk av fysikkfaget, og viktigheten av å kunne gjøre fysiske tolkninger av matematikkfaglige begreper presiseres (Grønmo, Hole, & Onstad, 2016). I oppsummeringen etter undersøkelsen skriver de følgende, sitat:

> *«Et matematikkfaglig sentralt begrep som den deriverte av en funksjon kan vanskelig forstås på en tilfredsstillende måte uten en eller annen form for fysisk tolkning.» (Grønmo et al., 2016)*

Dette kan kobles til det Mellin-Olsen og Skemp beskriver angående instrumentell og relasjonell forståelse, fysiske tolkninger av matematiske begreper kan føre til relasjonell forståelse.

2.3 Visualisering og konkretisering som didaktisk metode

Det er forsket mye på den eventuelle betydningen av visualisering og konkretisering i læring generelt og i matematikk spesielt. Mye av denne forskningen støtter opp om at visualisering og konkretisering er nødvendige faktorer i læringsprosessen, og etter å ha lest noe av det som er skrevet om emnene, ga det støtte til å fortsette forskningen i forhold til dette.

John Dewey (1859 – 1952) var amerikansk pedagog, filosof og psykolog, og hadde stor betydning for utviklingen av skolesystemet, både i sitt hjemland USA og i Europa. Han er kjent for sitt slagord «learning by doing» og ga ut flere bøker om skole og læring. I en av bøkene sine, *«The School and Society»* (Dewey, side 31-33) beskriver han datidens tradisjonelle klasserom som et sted «organisert for lytting», enten ved å lytte til læreren eller ved å «lytte» til læreboka. Dewey ønsket ikke en slik skole, og presiserte viktigheten av å skape rom for kreativitet og utfoldelse. Han ønsket at barnet skulle få mulighet til å skape sine egne erfaringer, og hindre at symboler og metoder ble erstatning for virkelige opplevelser. Dewey påpeker at faren med en slik læringssituasjon, er at barnet ikke tilnærmer seg lærestoffet med verken «intellektuell sult», årvåkenhet eller undring, noe som svekker både muligheten for å undersøke videre på egen hånd og å muligheten til å forstå. Han snakker også i samme bok om viktigheten av at man som lærer bygger på elevenes erfaringer, og hvis de ikke har de nødvendige erfaringer, så må de gis erfaringer. Alternativt må modeller brukes for å skape en erstatning for den virkelige erfaringen. Men det er ikke nok å bruke ferdige modeller, for det er det, ifølge Dewey, for mye av i skolen. Der det er mulig må elevene få være med i utviklingen av modellene, slik at også dette blir en del av erfaringsgrunnlaget.

I «The Child and the Curriculum» (Dewey, 1956, s. 197) oppsummerer Dewey sine tanker og idèer ved å sammenlikne opplevelsen en får ved å ta seg fram i et ukjent landskap, med opplevelsen en får ved å studere et detaljert kart over samme område. De fleste vil være enige i at et kart ikke på noe vis vil være en erstatning for en virkelig erfaring, det vil si en virkelig tur. Man kan ikke forstå terrenget til fulle ut fra et kart, for å klare det, må terrenget utforskes ved å «gå turen».

Mange av situasjonene Dewey beskriver, kjenner jeg igjen fra undervisningen i matematikk i videregående skole. Metoder, beskrivelser og symboler tar ofte over og blir det elevene skal lære å forholde seg til, og disse knyttes ikke ofte nok til elevenes egne erfaringer eller virkelige situasjoner. Og der konkreter benyttes, er det ofte ferdiglagede objekter, elevene lager dem ikke selv. Det er dette jeg har prøvd å gjøre noe med i mitt prosjekt. Elevene skal få lage sine egne, konkrete omdreiningslegemer, og på den måten forhåpentlig vis se sammenhenger mellom funksjonene som omdreiningen tar utgangspunkt i, og det konkrete objektet som «skapes» ved omdreiningen.

Jean Piaget (1896 – 1990) var en sveitsisk psykolog som forsket mye på barns læring og utvikling. Han påpekte, som Dewey, viktigheten av at et barn gjør konkrete erfaringer og handlinger. Piaget sier at det å utvikle seg, og dermed lære, er en prosess om er avhengig av barnets egen aktivitet. Hvis dette knyttes opp mot det som forventes av elevene i videregående skole, i forhold til å lære om omdreiningslegemer og volum, så understrekes igjen viktigheten av konkretisering. Hvis elevene får mulighet til å utvikle egne, konkrete omdreiningslegemer, så vil vi oppnå at de ut fra handling og egen aktivitet, gjør konkrete erfaringer. I boka «The Childs Conception of Space» (Piaget & Inhelder, 1956) ser Piaget og Inhelder på hvordan barn utvikler romforståelse, og selv om det i boka fokuseres på til dels små barn, vil problematikken rundt det å ikke mestre å «se» tredimensjonalt også kunne overføres til ungdommer.

Piaget og Inhelder gjennomfører også ulike eksperiment i forhold til rotasjon, og ett av funnene som er knyttet til disse eksperimentene, er at barn utvikler romforståelse hvis de får anledning til noe så enkelt som å bruke papir til å brette ulike geometriske former. Piaget påstår at det kan være opp til to – tre års forskjell i utvikling av romforståelse hvis barn har fått anledning til dette i tidlig skolegang (Piaget & Inhelder, 1956, s. 276).

Piaget definerer også begreper som er viktige i denne sammenheng. For det første presiserer han begrepet «haptisk oppfattelse» (haptic perception) til å være det å oppfatte hva et objekt er ved å berøre objektet. (Piaget & Inhelder, 1956, s. 17). Han bruker også begrepet «taktilt» om det som kan berøres. Piaget viser til at et barn kan gjenkjenne et objekt og koble det til en gruppe av liknende objekter, etter å ha erfart hva en objektet er både visuelt og taktilt. I tilfellet med omdreiningslegemer kan man derfor ut fra dette anta, at hvis elever får erfaring, visuelt og taktilt, med ulike omdreiningslegemer, så vil dette gi mulighet for at de utvikler forståelse for hva et omdreiningslegeme er.

En annen kjent psykolog som arbeidet innen dette feltet, og som også var opptatt av hvordan matematikk læres, var Jerome Bruner (1915 – 2016). I sin bok *«In Search of Pedagogy. Volume I»* (Bruner, 2006, s. 26) kommenterer han noe det samme som Dewey påpekte, at læringsprosessene i «vanlige» klasserom er passive, og at det først og fremst handler om å få og lagre informasjon i den form som det blir presentert. Bruner sier direkte at det ikke betyr noe *hva* vi har lært, men at det er det vi kan *gjøre med det* vi har lært som betyr noe. Han nevner også flere eksempler på hvordan undervisning i matematikk etter hans mening ikke bør gjennomføres. Han påstår at mye av matematikkundervisningen er slik at barnet ikke lærer matematikk, men derimot kun lærer å bruke metoder og oppskrifter uten å forstå sammenhengene dem imellom. Det å kunne tenke og resonnere ut fra det man lærer, er ifølge Bruner det helt sentrale. Og siden hver disiplin har sin egen måte å tenke på, vil en del av læringen i hvert enkelt fag, bestå i å lære fagets «tenkemåte». Bruner mener også at den beste introduksjonen til et emne er emnet selv, det å skape nysgjerrighet hos eleven i forhold til emnet (Bruner, 2006, s. 54). Elevene bør, ifølge Bruner, få muligheten til å erfare hvordan det føles å være totalt oppslukt i et problem, men dessverre skjer dette, igjen ifølge Bruner, sjelden i skolen.

Bruner setter fokus på flere viktige momenter som støtter mine egne tanker om læringsprosesser i matematikk. Han sier riktignok ikke så mye om bruk av konkreter og visualisering, men han presiserer at mennesket har tre forskjellige metoder for å forstå virkeligheten (Bruner, 2006, s. 107). Den første er gjennom handling, enaktiv metode. Vi kjenner til noe ved å vite hvordan vi gjør det. Den andre måten å kjenne til noe på, er ikonisk. Gjennom forestilling og tankeprosesser dannes bilder. Den tredje og siste er gjennom symboler. Ut fra dette poengterer Bruner at mennesker må ta i bruk alle tre metodene for å ha en god læringsprosess, man lærer gjennom handling, tankeprosesser og symbolbruk. Han påpeker også viktigheten av at elevene er aktive i læringssituasjonene, og sier vi som lærere må være opptatte av at elevene får mulighet til å lære på en slik måte, at de arbeider mot en forståelse og selvstendighet i faget. Dette taler for å prøve ut undervisningsmetoder der kreativitet og utforskende arbeid står i fokus, med intensjon om at det skal føre til større innsikt og forståelse for matematikken.

> *"Learning should not only take us somewhere, it should allow us later to go further more." (Bruner, 2006, s. 40)*

2.4 Innlæring av integrasjon og omdreiningslegemer.

Flere har forsket på studenters forståelse av integrasjon og vansker knyttet til innlæring av teori og metoder knyttet til volum av omdreiningslegemer, og det er viktig å ha denne forskningen som grunnlag for min egen forskning.

I 1983 skrev den britiske universitetslektoren Anthony Orton en artikkel om sin studie knyttet til studenters forståelse av integrasjon i «Educational Studies in Mathematics, Vol 14» (Orton, 1983). Det deltok 110 studenter i alderen 16-22 år i studien, og Orton analyserte studentenes svar på oppgaver som omhandlet integrasjon og grenseverdier. Det ble regnet ut gjennomsnittlig score for hvert emne og de feil som ble gjort ble registrert og klassifisert. Denne klassifiseringen ble gjort ut fra Donaldsons beskrivelse av tre typer feil som kan oppstå, strukturelle, beregningsrelatert eller vilkårlige feil (Donaldson, Withrington, & Duthie, 1963). De strukturelle feilene er de feil som oppstår, hvis det ikke tas hensyn til alle forhold som er knyttet til problemet, eller at man ikke forstår prinsipper som er avgjørende for løsningen. Studien viste blant annet at volumberegninger knyttet til omdreiningslegemer og bruk av grenseverdibegrepet i tilnærmingen til integrasjon, var de vanskeligste emnene for studentene. De feil som ble gjort tilknyttet disse emnene, var alle av strukturell art. Oppgaven som ble gitt tilknyttet omdreiningslegemer, var at studentene, ut fra en gitt graf, skulle beskrive omdreiningslegemet som fremkom, hvis området mellom grafen og x-aksen ble rotert 360 grader om x-aksen. Deretter skulle de forklare hvordan de ville bruke integrasjon for å beregne volumet. Til sist ble de bedt om å forklare metodene de hadde brukt.

Orton konkluderer med at resultatene viser at de fleste studentene hadde liten forståelse for hvordan de kunne beregne et tilnærmet areal eller volum ved å dele inn det totale areal eller et volum i henholdsvis tynne rektangel eller skiver, for deretter å finne det eksakte areal eller volum ved å bruke grenseverdibegrepet. Orton påstår videre at mange lærere har akseptert at mange studenter finner disse emnene vanskelige og har ulike måter å kompensere dette på, en løsning har vært å introdusere integrasjon som en regel, kun forklart som antiderivasjon. Dette er Orton svært uenig i, og han sier at etter hans mening kan det ikke rettferdiggjøres å innføre regler uten begrunnelse, og at det er svært viktig å legge et solid fundament før man introduserer disse emnene.

En annen som har forsket på studenters ferdigheter innen integrasjon, og som også har vist til Ortons studier, er Professor Nevin Mahir, ved Anadolu University i Tyrkia. I sin artikkel, «Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration» (Mahir, 2009) diskuterer han, som tittelen sier, konseptuell kunnskap og prosedyrekunnskap i forbindelse med integrasjon. Mahir definerer konseptuell kunnskap som kunnskap som er bygd på forståelse og tidligere erfaringer. Prosedyrekunnskap kjennetegnes ved at man bruker det formelle språket i matematikk og at man kjenner til regler, algoritmer og prosedyrer som må til for å løse matematiske oppgaver. Konseptuell kunnskap krever mye «hjerneaktivitet» og for å «unngå» dette påpeker Mahir at studenter foretrekker å pugge regler og algoritmer, og at noen av de som velger dette er ikke klar over at det ligger bevis og begrunnelser «bak» prosedyrene de bruker. I forhold til integralregning tar Mahir utgangspunkt i Hiebert og Lefevre (Hiebert & Lefevre, 1986) sin påstand om at de viktigste elementene i integralteorien, er at det bestemte integral til en funksjon er grenseverdien av Riemann-summene, forholdet mellom integral og areal og fundamentalteoremet. Ut fra dette grunnlag gjennomførte Mahir en studie som omfattet 62 studenter ved Universitetet i Anadolu. Elevene fikk fem spørsmål, der de to første kunne løses ved å bruke formler og integrasjonsteknikker, mens det tredje og det fjerde spørsmålet kunne løses både konseptuelt og ved hjelp av prosedyrer. Det aller siste spørsmålet måtte imidlertid løses ved bruk av konseptuell kunnskap, men elevene prøvde uten unntak å løse det algebraisk.

Konklusjonen på studien ble at studentene i forskningsgruppen ikke hadde tilfredsstillende konseptuell forståelse av verken integralbegrepet eller forholdet mellom integral og areal. Mahir avslutter sin artikkel med følgende anbefalinger, som han mener vil forbedre den konseptuelle ferdighetene til studentene, sitat:

> *«When a new concept is taught in class, various graphical, algebraic and real life examples should be given.»* (Mahir, 2009)

En tredje forsker som har sett på problemområder knyttet til forståelse av omdreiningsfigurer spesielt, er som tidligere nevnt, Batseba Mofolo-Mbokane. I sin doktoravhandling «Learning difficulties involving volumes of solids of revolution» (Mofolo-Mbokane, 2011) benytter hun i sin forskning klasseromobservasjon som grunnlag. Hennes resultat var at hoveddelen av studentene ikke hadde tilfredsstillende kunnskap og ferdighet i graftegning, noe som ifølge Mofolo-Mbokane vanskeliggjorde visualisering av grafer, både i 2D og 3D. Det var også vanskelig å velge en representativ «strip» og deretter se for seg eller tegne 3D-objektet som ville fremkomme ved rotasjon. Også Mofolo-Mbokane anbefaler å ha større fokus på forståelse av de grunnleggende begrepene knyttet til integrasjon og areal/volumberegning fra et tidligere tidspunkt, at lærere «undervise mer konseptuelt». Fokus bør ifølge henne heller være på hvordan vi finner formlene ut fra grafene (både 2D og 3D) heller enn å gjøre mange, gjentatte kalkulasjoner av areal og volum. Hun presiserer også viktigheten av visualisering, både i 2D og 3D, og viser til at mange studenter har problemer med å tenke tredimensjonalt, det vil si, de strever med å mentalt visualisere romfigurer.

2.5 Effekt av visualisering i matematikk

Norma Presmeg er en av de som har forsket på betydningen av visualisering i matematikk og i 1986 publiserte hun en artikkel i «For the Learning of Mathematics» som hadde tittelen «Visualization in High School Mathematics» (N. C. Presmeg, 1986). Hun påpeker at tidligere forskning av blant annet den russiske matematikeren Krutetskii, antydet at en elev kan ha svært gode resultater i matematikk uten bruk av visualisering. Dette hadde innflytelse på matematikkutdanningen i Europa fra midten av 1970-tallet, i forhold til at visualisering ikke ble sett på som «nødvendig». Presmeg påpeker imidlertid at noen elever foretrekker å tenke i bilder når de skal lære ny matematikk, og at det er denne type elever som ofte ønsker å velge ingeniørutdanninger. Det er derfor er viktig å forske på effekten av å bruke visualisering som metode. Presmeg diskuterer ulike definisjoner av «visuelt bilde», og trekker fram den som er vanligst i litteraturen: Visuell forestilling er å danne bilder av et objekt i fravær av det virkelige objektet. Deretter drøfter hun visuelle og nonvisuelle metoder for løsning av matematiske problemstillinger, og definerer noen viktige begreper knyttet til visualisering, både som egenskap hos elever og lærere, sitat:

«A person's mathematical visuality is the extent to which that person prefers to use visual methods when attempting mathematical problems which may be solved by both visual and nonvisual methods»

«Visualisers are individuals who prefer to use visual methods when attempting mathematical problems which may be solved by both visual and nonvisual methods»

«A mathematics teacher's teaching visuality is the extent to which that teacher uses visual presentations when teaching mathematics» (N. C. Presmeg, 1986)

Presmegs konkluderer med at «visuelle lærere» kobler matematikkpensumet sammen med andre erfaringer som elevene har, både fra andre fag, fra andre deler av matematikken og ikke minst fra «the real world». Dette oppfattes som positivt, og «visuelle lærere» oppfattes også ofte som kreative. Likevel sier Presmeg at hennes studie ikke gir rom for å si at lærere skal undervise visuelt for enhver pris, heller ikke for elever med gode, visuelle egenskaper. Hun påpeker at visuelle metoder ofte er mer tidkrevende enn ikke-visuelle metoder, og at hvis undervisningen har hovedfokus på visuelle metoder, vil elever som regnes som «visualisers» kunne få problemer med matematisk terminologi eller de vil kunne huske metoder dårligere. Men det motsatte er heller ikke gunstig, ifølge Presmegs undersøkelse. Hvis en elev er en «visualiser» og læreren underviser ikke-visuelt, så vil det virke hemmende på denne elevens læring. Lærere som kombinerer visualisering med abstraksjon og generalisering, viste seg å ha den beste effekten på læring i matematikk for elever som hadde gode, visuelle evner i utgangspunktet.

Bettina Rösken og Katrin Rolka beskriver i artikkelen, «A Picture is worth a 1000 words – the Role of Visualization in Mathematics Learning» (Rösken & Rolka, 2006) noen viktige aspekter i forhold til den rollen visualisering har i forhold til læring av matematikk generelt, og integralbegrepet spesielt. De tar utgangspunkt i at Arcavis (Arcavi, 2003) definisjon av visualisering gir rom for å tenke at visualisering kan være et nyttig verktøy for å utforske matematiske problemer og for å gi mening til matematiske konsepter og sammenhengen mellom dem. De påpeker imidlertid også at begrensninger og problemer knyttet til visualisering samt motvilje mot metoden, har vært diskutert i matematisk forskning. Rösken

& Rolka hadde med andre ord med seg både «for og imot» da de startet sin forskning, der forskningsspørsmålene var som følger:

- Hvilke visuelle bilder har studenter i forhold til integralbegrepet?
- Hvordan håndterer studenter en gitt visualisering?
- I hvilken utstrekning er visuelle bilder brukt av studentene?

I sin artikkel trekker de fram fire av problemstillingene som studentene skulle løse. Disse var knyttet til den geometriske definisjonen av integral samt arealberegninger og det bestemte integralet. En av disse problemstillingene var som følger:

«How would you proceed to calculate $\int_{-1}^{1} sin(2x^3)dx$ *?»*

Dette bestemte integralet kan ikke løses algebraisk, men problemstillingen kan enkelt bli løst ved visualisering og symmetri. Bare 4 % av studentene tok imidlertid dette i betraktning, resten prøvde en algoritmisk tilnærming eller svarte ikke på oppgaven i det hele tatt. Rösken & Rolka konkluderer med at studentene i liten grad gjør bruk av fleksibiliteten i å både benytte visuelle og algoritmiske teknikker, og der visuell løsning uten tvil er den raskeste metoden, tyr de heller til algoritmiske metoder. Dette mener artikkelforfatterne viser at studentene er fiksert på at slike problemer skal løses ved hjelp av algoritmer og prosedyrer, de har en motvilje mot å visualisere.

Det Rösken & Rolka (2006) konkluderer med, er at studentene har et ønske om å kunne bruke de innlærte algoritmer og prosedyrer ved problemløsning samt at de har en motvilje mot å visualisere. Dette er en viktig observasjon. Det er ofte «enklere» og mindre tidkrevende både for lærer og elev å arbeide med algoritmer og prosedyrer, og hvis problemstillingene elevene møter primært stiller krav som kan løses med en slik arbeidsmåte, så er det forståelig at mange velger denne tilnærmingen.

Pamela Woolner har også gjort sammenlikninger mellom visuell/romlig tilnærming og verbal tilnærming i matematikkundervisning (Woolner, 2004). Hun sier at selv om matematikere uten tvil verdsetter evnen til å visualisere, og selv om psykologer har funnet positive sammenhenger mellom visuell/romlige evner og det å lykkes med matematikk, så er fortsatt mange matematikklærere ikke overbevist om at visualisering gir en bedre matematikkundervisning. Woolner påpeker at forskning på 70- og 80-tallet, (Kruteckij, 1976) (N. Presmeg, 1986), konkluderer med at elever som har gode evner i visualisering ikke nødvendigvis er de mest fremgangsrike i matematikk, og at de ofte har problemer i aritmetikk. Men, som også Woolner påpeker, kan det være flere årsaker til dette. En mulig årsak mener hun kan være at gapet mellom elevens egen læringsstil, den visuelle, står i skarp kontrast til lærerens verbale undervisningsstil, og det er blant annet hvordan en slik kontrast påvirker elevens læring, Woolner har undersøkt i sin studie. Undersøkelsen ble gjennomført ved en skole med elever fra 11 til 18 år, og i tillegg til at elevene ble observert, ble det gjennomført mange ulike tester. En hovedkonklusjon etter undersøkelsen viste seg å være at elevene med verbal undervisning gjorde det best på etter-testene, noe som ikke er positivt for de som ønsker mer visuell matematikkundervisning. Men hun innser at spørsmålene som var stilt i ettertid, hadde overvekt av oppgaver med «verbal stil», og dette var noe som etter hennes egen mening begrenset verdien av undersøkelsen. Hun slutter av dette litt av det samme som Presmeg tidligere hadde kommet fram til, at verbal undervisning er den undervisningsformen som er best egnet for «verbale» oppgaver og at hennes prosjekt, slik det var gjennomført, ikke støtter ideen om at matematikkundervisninga bør være mer visuell. Woolners resultat er etter ikke overraskende. Hvis oppgavene som gis som test i en undersøkelse kan løses ved hjelp av algoritmer og prosedyrer, så er det ikke uventet at elever som har hatt fokus på dette i innlæringen, med stor sannsynlighet vil få bedre resultat enn de som også har hatt fokus på det visuelle. Og det er nettopp dette som er «problemet» for de som ønsker mer forståelse og mer visuell tenking i matematikken, det er ikke alltid den visuelle tenkingen «etterspørres» når vurdering skal gis.

2.6 Romforståelse, rotasjon og 3D-geometri

En vesentlig ferdighet i forbindelse med innlæring av omdreiningsfigurer er romforståelse, det vil si, det å kunne tolke romfigurer, forestille seg en rotasjon og ikke minst ha forståelse for geometri i tre dimensjoner. Hvis vi ser en romfigur, så ser vi ikke nødvendigvis hele objektet, og vi må derfor øve oss i å tolke det vi ser slik at vi kan danne oss et bilde av hele objektet. I sin artikkel «Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem Solving» (Tartre, 1990), viser Lindsay Anne Tartre til flere studier som har funnet at ferdigheter knyttet til romforståelse korrelerer positivt med gode resultater i matematikk, og da ikke bare i de geometriske emnene. Hun definerer ferdigheter i romforståelse til å være de mentale ferdigheter knyttet til forståelse, manipulering, reorganisering eller tolkning av sammenhenger visuelt. Tartre tar i sin studie utgangspunkt i to tester som ble gjennomført med 97 elever fra «10th grade high school». Den ene testen var en test i romforståelse, den andre i en test i generelle matematiske emner som var relevant for alderstrinnet. De 10 matematiske oppgavene var satt sammen slik at de kunne løses på mer enn en måte, syv oppgaver handlet om geometri, og fem av disse ble presentert visuelt ved hjelp av konkreter eller bilder. Etter at testene var gjennomført ble de 27 elevene som hadde høyest score og de 30 som lå i nedre tredjedel av resultatfordelingen valgt ut til å bli intervjuet, og de ble bedt om å forklare løsningene i intervjuene.

Tartre oppsummerer sin studie med at den gir signaler om at ferdigheter i romforståelse ser ut til å være knyttet til matematisk problemløsning på spesifikke og identifiserbare måter, og det å koble psykologiske tester knyttet til romforståelse med rene matematiske tester gir hennes studie større tyngde i forhold til å vurdere viktigheten av å kunne utnytte ferdigheter i romforståelse i matematisk problemløsning. Men som Tartre påpeker, så er det er vanskelig å forstå og diskutere «ferdigheter i romforståelse», siden dette er en mental aktivitet, og det er nødvendig å finne måter å identifisere og beskrive den rollen ferdigheter i romforståelse har i matematikken.

Når det kommer til undervisning av matematiske emner knyttet til rotasjon og omdreining, så forutsettes det ofte av læreren at romforståelse er en ferdighet alle elevene innehar, selv om evnen til å orientere seg i rommet, og det å ha såkalt romfølelse, ikke er det samme som kunnskaper i geometri (Gorgorio, 1998). Núria Gorgorió presiserer også viktigheten av at lærere får bedre kunnskap om hvilke strategier elever bruker og hvilke problemer de støter på, når de løser geometriske problemer. Det er derfor viktig å være oppmerksom på de mange ulike problemløsningsstrategier som elever benytter, og at elevene kan forstå en annen strategi bedre enn den strategien læreren foretrekker. Gorgorió ønsker derfor å sette fokus på hvilke strategier elevene bruker og hvilke vanskeligheter de møter når de løser geometriske oppgaver. Hun viser til blant annet forskning gjennomført av Glen Lean og Ken

Clements (Lean & Clements, 1981), som viste at elever med lite utviklet romforståelse ofte får problemer med ulike geometriske emner, blant annet rotasjon. I studien fikk elevene, som var i alderen 12 – 16 år, ni oppgaver som alle omhandlet romlig rotasjon, og alle oppgavene hadde visuell støtte, enten fra virkelige objekter eller 2D-representasjoner av 3D-objekter. I tillegg til å registrere resultatene for hver enkelt student, ble elevene også intervjuet. Gorgoriós forskning viste at det å benytte seg av strategier er nyttig for å forklare elevers problemløsning i geometriske oppgaver, og hun kom frem til at evne til romlig orientering avhenger av at eleven har evne til å bruke strategier som strukturering, prosessering og tilnærming. Videre sier hun at sett fra et undervisningssynspunkt, så kan strategier deles og derfor læres, mens foretrukket gjennomføringsmetode er et individuelt trekk. Videre vil også evner til å tolke og kommunisere romlig informasjon være avgjørende, og Gorgorió konkluderer derfor med at å kun se på romforståelse som en visuell prosess, som mange forskere har gjort tidligere, ikke er tilstrekkelig. Hun mener at det er nødvendig med mer forskning innen dette området for å utfylle det som har vært gjort til nå.

Alan Bishop har forsket mye på romforståelse knyttet til matematikkfaget. I sin artikkel «Spatial Abilities and Mathematics Education – A Rewiew» (Bishop, 2008) viser han blant annet til egen forskning, der han fant at barn som fikk anledning til å bruke konkreter i stor grad, syntes å score bedre på tester i romforståelse enn barn som ikke hadde konkreter i matematikkundervisningen. Dette er interessant sett i forhold til min forskning. Kan dette også gjelde elever i videregående skole, som har valgt høyeste fordypning i matematikk? Vil det å benytte konkreter gi elevene bedre romforståelse?

Bishop (2008) viser til at det er mange tilnærmingsmåter i forhold til hvordan forskning i feltet matematikk/romforståelse kan gjøres, og at det også er resultater som taler både for og imot at romforståelse skal være et viktig element i matematikkopplæringa. For eksempel siterer han to upubliserte doktorgradsstudier av Ranucci (1952) og F. R. Brown (1954) som begge konkluderte med at geometrifag på high school-nivå ikke forbedret elevens score på tester i romforståelse, mens en studie av Michael C. Mitchelmore, referert i «Space and Geometry. Papers from a Research Workshop» konkluderer med følgende:

> *«However, the greatest need is for the development of practical geometrical and spatial teaching programs and for their experimental testing.» (Martin & Bradbard, 1976, s. 172)*

Det at geometrifag ikke nødvendigvis forbedrer elevenes romforståelse, er ikke en begrunnelse for å utelate geometrifag på videregående skole-nivå, men det viser at vi må evaluere måten geometrifagene gjennomføres på i skolen. For som Mitchelmore påpeker, så er det viktig å utvikle den praktiske delen av både plan- og romgeometrien, samtidig som man er bevisst at det er behov for å øve opp romforståelse hos elevene for at de bedre skal kunne forstå og gjøre matematiske beregninger med tredimensjonale objekter.

2.7 Bruk av konkreter i matematikk

Mange studier gir positive signaler i forhold til å benytte visualisering i matematikkopplæringen, og dernest viser andre studier til viktigheten av å ha gode evner innen romforståelse og 3D-geometri. Hvis dette er noe man som lærer ønsker å innarbeide som en del av metodene som benyttes i undervisningen, så vil det raskt bli aktuelt å tenke mot konkreter. Hva sier forskningen om hvilken effekt det har for matematikkforståelse hvis konkreter benyttes i undervisningen? Og det er også interessant om det å kunne «ta og føle» på et matematisk objekt gir større forståelse enn ren visuell observasjon.

Patric W. Thompson reflekterer i sin artikkel, «Concrete Materials and Teaching for Mathematical Understanding» (Thompson & Lambdin, 1994), rundt hvilken rolle konkrete objekter har for matematisk forståelse. Han viser til at hva vi som lærer først og fremst bør spørre oss «Hva vil jeg at mine elever skal forstå?» i stedet for det som litt for ofte blir spørsmålet, nemlig «Hva vil jeg at mine elever skal lære å gjøre?». Thompson viser videre til at det har vært utført mye forskning på bruk av konkreter, helt fra Zoltan Dienes (1916 – 2014) og Jerome Bruners tidlige publikasjoner og frem til nyere forskning, blant annet av Thompson selv. Forskningen har ofte konkludert med at det å se et matematisk objekt i virkeligheten, for eksempel en sylinder, er bedre enn å se den samme sylinderen på et bilde. Men det er ifølge Thompson viktig å huske på at det å se matematiske objekter i virkeligheten, og så koble dem til matematiske ideer, kan være en større utfordring enn mange er klar over. Objektet er konkret, men opplevelsen og forståelsen som du ønsker at elevene skal få, er ikke i objektet. Det er derfor viktig ikke bare å presentere et konkret objekt, men også legge mye forberedelse i hvordan man skal presentere det. Thompson påpeker at det ikke er enkelt å bruke konkreter på riktig måte, men at det derimot er enkelt å bruke dem feil, og at mange studier støtter opp om nettopp dette. Men han er likevel klar på at konkreter etter hans mening kan være et positivt bidrag i matematikkundervisninga, og han mener at konkreter brukes hensiktsmessig på to måter. For det første kan de være utgangspunkt for gode samtaler med elevene knyttet til hva objektet er og hvilke handlinger som kan knyttes til objektet. For det andre kan konkrete objekter føre til at elevene må utføre en handling, noe som kan føre til refleksjon i forhold til handlingene i relasjon til den matematiske teori de har arbeidet med og oppgaver de har løst eller skal løse.

Konkreter blir ofte benyttet i grunnleggende matematikkopplæring i grunnskolen, spesielt i forhold til mengder, tallforståelse og innlæring i regneartene. Spørsmålet blir da om det finnes forskning som viser at bruk av konkreter også gir positive resultater i programfagene i videregående skole. En som har gjennomført en studie knyttet til dette på high school-nivå er Cindy Garrity, som hadde følgende tittel på sin studie: «Does the Use of Hands-On Learning, with Manipulatives Improve the Test Scores of Secondary Education Geometry Students?» Hun presiserer i sin artikkel (Garrity, 1998) at hensikten med å benytte konkreter var å la elevene få mulighet til å lære geometriske prinsipper på mer enn en måte, eller som hun sier:

> *«In other words, instead of just hearing about a math principle, they also get to see it and feel it» (Garrity, 1998, s. 19)*

Studien ble gjennomført i to grupper med totalt 47 elever, og startet med en pre-test der elevenes holdninger til matematikk generelt og geometri spesielt var satt i fokus. Garrity hadde to elevgrupper, den ene ble kalt eksperimentgruppen og den andre kontrollgruppen. Eksperimentgruppen ble undervist med «hands-on» -læring, der konkreter ble benyttet og det var stor grad av samarbeidslæring. Kontrollgruppen ble undervist «tradisjonelt».

Undersøkelsene som ble gjennomført mot slutten av studien viste en klart forbedret score i forhold til positive holdninger til matematikk og samarbeidslæring hos eksperimentgruppen. I tillegg var det også en positiv endring i innstilling i forhold til om matematikk er vanskelig. Garrity ser dette resultatet som gledelig, og anbefaler ut fra sine funn bruk av de læringsmetoder som ble benyttet, til tross for at elevene ikke scoret vesentlig bedre på rene geometritester etter at eksperimentet var gjennomført. Men hun advarer om at denne type undervisningsmetoder vil ta mer tid enn tradisjonell undervisning og vil også gi et betydelig merarbeid for læreren ved forberedelse til undervisningen.

Det er imidlertid slik at noen elever benytter haptiske prosesser i svært utstrakt grad i sin innlæring av matematiske emner, nemlig synshemmede elever. I en artikkel av Lourdes Figueiras og Abraham Arcavi (Figueiras & Arcavi, 2014) beskrives det hvordan haptiske prosesser kan benyttes i forhold til synshemmede elever i deres innlæring av matematikk. De fokuserer på hvilken viktig rolle berøring spiller når matematiske størrelser skal innlæres, og de går spesielt inn på hvordan en blind lærer formidler geometriske begreper knyttet til omdreiningslegemer til sine synshemmede studenter. De mener at metodene som blir benyttet ikke bare er nyttig for synshemmede, men også nyttige for enhver som skal lære om dette emnet. Et eksempel som Figueiras og Arcavi trekker fram (Figueiras & Arcavi, 2014) er hvordan omdreining blir konkretisert ved å la den blinde studenten dreie en rettvinklet trekant om en akse. I en klasse med seende elever vil kanskje ikke læreren tenke at det er nødvendig å visualisere en slik omdreining, at det er nok å bare beskrive det verbalt i den tro at elevene er i stand til å visualisere omdreining mentalt. Men som tidligere påpekt, er dette ikke dette en ferdighet alle elever innehar. Figueiras og Arcavi presiserer også viktigheten av at vi bruker språket på en måte som elevene kan gjøre seg nytte av. I forhold til synshemmede elever er det viktig at vi ikke benytter rent visuelle metaforer, siden disse elevene mest sannsynlig ikke har noen referanse til disse. Og uansett elevgruppe er det viktig å benytte kjente metaforer, men det aller beste er om vi også kan vise det omtalte objektet, både visuelt og haptisk. Seende elever er så heldige at de kan nyttiggjøre seg begge deler, for de blinde elevene er det helt nødvendig å ha mulighet til å ta og føle på objektet.

To lærere fra Kenyon College i Ohio, USA, har brukt konkretisering i forhold til de samme matematiske emnene som jeg ønsker å knytte min studie opp mot, nemlig integrasjon, volumberegning og omdreiningsfigurer. Elin Farnell og Marie A. Snipe (Farnell & Snipes, 2015) har gjennom sin undervisning gjort samme erfaring som meg: Elever strever ofte med å visualisere tredimensjonale omdreiningslegemer. Farnell og Snipe har utarbeidet et prosjektarbeid som de har gjennomført i egne klasser, hvor elevene får anledning til å lage omdreiningsfigurer i leire ved å bruke dreieskiver for så å beregne volum av objektene ved å bruke Riemannsum. Prosjektet de gjennomførte var tredelt. Først var elevene i et pottemakeri og fikk nødvendig opplæring av en instruktør, slik at de kunne lage «relativt symmetriske» objekter i leire ved hjelp av dreieskivene. Så gikk elevene sammen to og to og valgte et objekt som de skulle beregne volumet av. Objektet blir deretter så nøyaktig som mulig delt i to, og elevene får med seg et trykk av den ene halvdelen. På trykket tegner elevene inn omdreiningsaksen og deler deretter objektet inn i rektangler, slik at Riemannsum kan benyttes for volumberegning. I tillegg til dette må elevene ta høyde for eventuelle mangler i symmetri og diskutere eventuelle andre feilkilder. Objektene ble i mellomtiden volumberegnet av instruktør for å ha en «fasit».

Farnell og Snipe har ikke gått gjennom alle trinnene i en forskningsprosess i forhold til dette prosjektet, men presenterer sine erfaringer i sin artikkel (Farnell & Snipes, 2015). Deres konklusjon er at de ut fra et ønske om å gi elevene både en «hands on» opplevelse i forhold til omdreiningsfigurer og erfaring i problemløsning hadde designet et prosjektarbeid som viste seg å gi elevene motivasjon for emnet, i tillegg til bedre forståelse for omdreiningsfigurer og arealtilnærming.

Selv om deres konklusjon ikke er forankret i forskning, fant jeg både prosjektarbeidet og lærernes erfaringer så interessante, at jeg ønsket å bruke noe av den samme oppbyggingen for mitt forskningsprosjekt, men da bytte ut leire med plast og dreieskiva med en 3D-printer. Farnell og Snipe anbefalte også noen mulige modifikasjoner til prosjekt, blant annet foreslo de å legge tidspunktet for gjennomføring av et slikt prosjekt til før, eller eventuelt like etter, at man introduserer omdreiningslegemer for elevene. Dette var et råd som jeg bestemte meg for å følge i min studie.

Ut fra den forskning jeg har gjennomgått som er knyttet til visualisering og konkretisering, har jeg fått styrket min hypotese i forhold til at visualisering og arbeid med konkreter og 3D-modeller i undervisninga i matematikk, kan være et nyttig supplement til den tradisjonelle undervisninga. Flere av de studiene jeg tidligere har henvist til, har konkludert med at det er viktig å kombinere det verbale med det visuelle, men det presiseres også at samtidig med at modeller og prosesser visualiseres og konkretiseres, så må det arbeides parallelt med den teoretiske delen av emnene, slik at også algoritmer og prosedyrer blir innøvd.

3 Bruk av teknologi i matematikkundervisningen.

I løpet av de siste 10 årene har bruk av digitale hjelpemidler blitt en stadig større del av matematikkfagene i videregående skole. Dette har gitt mange nye muligheter, men har det bidratt til at elevene forstår matematikk bedre? Kan virtuelle manipulasjoner erstattet de konkrete, «virkelige» erfaringene? Jeg har vært matematikklærer i videregående skole i så mange år, at jeg også var med på introduksjonen av digitale verktøy. Da jeg hadde min første matematikkgruppe i videregående skole, var kalkulatoren eneste «digitale» hjelpemiddel. Etter reform 94 fikk alle elevene grunnleggende opplæring i «informasjonsbehandling» og forventningen om å inkludere bruk av informasjonsteknologi i alle fag var økende. Matematikk var et av fagene som etter min mening «hang litt etter» i denne utviklingen. Det første som ble tatt i bruk, var regneark, men fortsatt i liten skala. Det var ikke før kunnskapsløftet ble iverksatt, og alle elevene fikk egne, bærbare pc-er, at bruk av matematisk programvare sånn smått kom i gang. Motstanden mot bruken av digitale hjelpemidler var til dels stor, og i starten ble den matematiske programvaren primært benyttet som en utvidet kalkulator. Elevene som hadde realfagsmatematikk hadde på den tiden grafiske kalkulatorer, og mange foretrakk fortsatt å bruke kalkulatoren. Oppgavene som ble gitt på skriftlig eksamen, la fortsatt opp til føring «for hånd» på papir.

I løpet av de siste 3-5 årene har det imidlertid skjedd mye. Den matematiske programvaren er blitt mer brukervennlig, og bruk av slik programvare er ikke lenger bare for å frembringe resultater, men også for å arbeide med den konseptuelle forståelsen av matematikk. Erkjennelsen av hvilke muligheter til manipulasjon og dynamiske endringer den matematiske programvaren gir, har ført til at vi i videregående skole nå ha en «heldigital» del 2 av skriftlig eksamen, og oppgavene i denne delen av eksamen blir stadig mer problemorienterte.

3.1 Geogebra

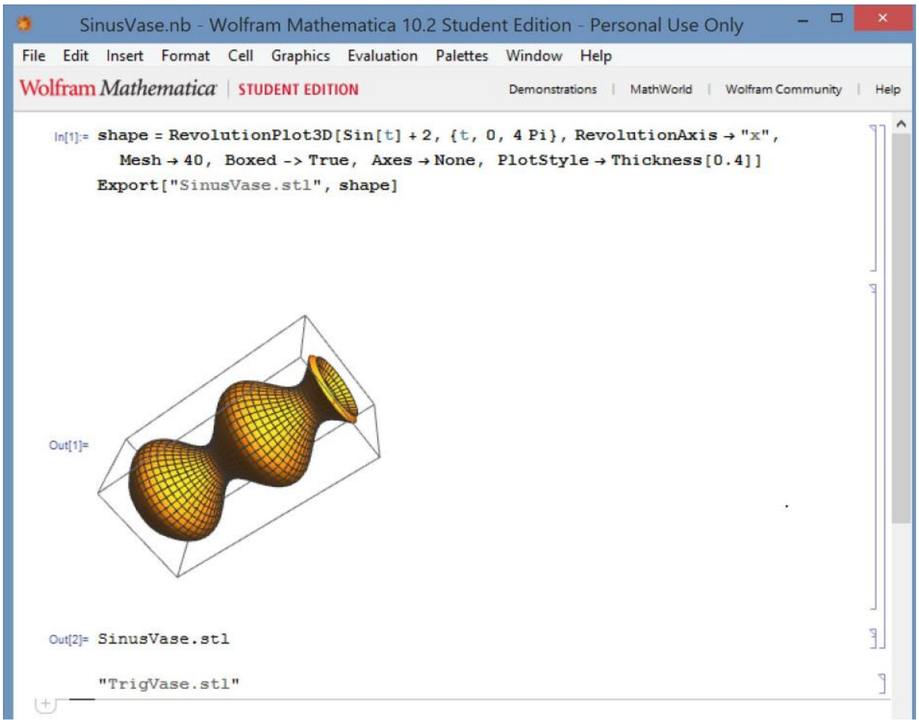
Ulik matematisk programvare har vært brukt siden introduksjonen på midten av 2000-tallet, og som nevnt var programvaren avansert og lite brukervennlig i starten, i tillegg til at det var dyre lisenser knyttet til bruk av disse programmene. Etter hvert ble gratisprogramvaren GeoGebra utviklet, og denne programvaren er nå nesten enerådende i matematikkundervisningen i grunnskolen og videregående skole. Programmet er blitt stadig mer brukervennlig etter som nye versjoner har blitt utviklet. Geogebra er spesielt godt egnet til tegning av grafer og tolkning av disse, men programmet har i de siste versjonene også fått en godt utviklet CAS-del (Computer Algebra System), det vil si en del som regner symbolsk matematikk samt en mulighet for tredimensjonal representasjon.

Det grunnleggende spørsmålet blir da hvordan den matematiske programvaren Geogebra best kan brukes for at elevene skal utvikle konseptuell forståelse for matematikk? Og mer spesielt mot det jeg arbeider med i min forskning: Kan programvaren Geogebra bidra til at elevene får bedre forståelse for integrasjon, omdreiningslegemer og volumberegning?

Utgangspunktet for min forskning var som nevnt i innledningen å bruke Geogebra for å visualisere og manipulere det som skjer i omdreiningsprosessen. Min erfaring etter mange års bruk av Geogebra, er at de elevene som blir trygge på programvaren og dermed bruker den til å eksperimentere med matematiske objekter og funksjoner, utvikler en bedre forståelse for den matematikken de arbeider med. Grafdelen av Geogebra besto i de første versjonene kun av 2D-grafikk, men i de siste versjonene er 3D-grafikk implementert. I denne delen kan elevene på en relativ enkel måte også tegne omdreiningsfigurer til en gitt graf. Dette gjøres ved hjelp av funksjonen «Overflate» (Surface), der funksjon og definisjonsområde oppgis. Fordelen med å kunne bruke 3D-grafikk istedenfor skisser eller konkreter, er at elevene raskt kan gjøre endringer på objektene slik at de i løpet av for eksempel ei økt, kan få testet ut mange flere funksjoner og tilhørende omdreiningslegemer enn om de ikke hadde dette verktøyet.

3.2 Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica er til forskjell fra Geogebra 5.0 relativt kostbar. Programmet er engelskspråklig og er en «koloss» innen matematisk programvare. Programvaren inneholder mange ulike moduler og kan utføre meget avanserte kalkulasjoner, gjøre grafiske framstillinger både i 2D og 3D, lage animerte simuleringer og mye mere. Programvaren inneholder også et eget programmeringsspråk som kan benyttes til blant annet å tegne omdreiningsfigurer og det er i tillegg mulig å konvertere 3D-grafikken til filer. Disse filene kan deretter kan overføres til 3D-printer, og objektet kan «skrives ut». Det å lage en stl-fil ut fra et omdreiningslegeme er en helt nødvendig funksjon for mitt prosjekt, og siden Geogebra så langt ikke innehar denne funksjonen, må jeg benytte Mathematica til dette. Det er imidlertid en relativt høy brukerterskel for dette programmet, og når kostnadene i tillegg er høye, gjør det at det ikke er en programvare som er realistisk å bruke i større skala for elever i videregående skole. Vår bruk av Mathematica blir dermed som en ren «konverterer», men elevene vil kunne se programkoden som benyttes, og de vil visuelt kunne sammenligne omdreiningslegemene Geogebra lager med Mathematica sin versjon (Figur 6).



FIGUR 6. EKSEMPEL PÅ PROGRAMMERING AV OMDREININGSLEGEME I MATHEMATICA

3.3 3D-printere

3D-printing er prosessen som lager et fysisk objekt ut fra en digital, tredimensjonal tegning. 3D-printing er ikke en ny teknologi. Den første patent som kan knyttes til 3D-printerteknologi kom allerede i 1980 i Japan, men denne ble ikke videreutviklet. Derfor regner mange at starten for 3D-printerteknologien var på midten av 1980-tallet, da den første SLA-maskin ble patentert. SLA står for «stereolithography apparatus» og er en teknologien som benyttes også i dag, og i løpet av noen få år kom også de to andre grunnleggende teknologiene, Selective Laser Sintering (SLS) og Fused Deposition Modelling (FDM). Det har i løpet av de om lag 30 årene som har gått siden oppstarten kommet nye metoder innen 3D-printing, og det er nå vanlig å dele inn i 3 grupper av teknologier, der de nevnte tre metodene er i hver sin gruppe:

- Photopolymerisation (SLA, DLP, SPP): Flytende materiale størkner ved hjelp av lys.
- Merging of powder layers (SLS, EBM, DMLS): Kar med pulver, pulveret størkner ved hjelp av lys «der det skal være noe»
- Material extrusion (FDM): En dyse som kan sammenlignes med en limpistol sender ut flytende masse (tynn tråd) som størkner. Dette gjøres lag på lag. Plastmaterialer (PLA) er det vanligste, men andre materialer kan også benyttes. I denne gruppen finner vi de enkleste og billigste 3D-printerne, men det lages også avanserte og dyre maskiner med dette prinsippet.

I starten var 3D-printere noe som bare ble brukt innen høyteknologisk industri og forskning, men i 2009 kom den første kommersielle 3D-printeren på markedet, og etter det har utviklingen gått i to retninger: En utvikling mot stadig mer avanserte 3D-printere både i forhold til hvilke materialer de kan bruke og bruksområder for de ferdige objektene, og på den andre siden en utvikling mot stadig billigere og brukervennlige 3D-printere til for eksempel skole- og hjemmebruk.

3.3.1 Bruksområder for er en 3D-printer?

3D-printere benyttes i dag til «det meste». Et oppslag på en nettside som har spesialisert seg på nyheter innen 3D-print, www.3dprintingindustry.com, gir blant annet nyhetsartikler om stadig større bruk av titan innen 3D-print av maskindeler, vellykket implantering av 3D-printet brystkasse og ankelledd, 3D-printing av tenner, rekonstruksjon av historiske bygninger ved hjelp av 3D-printere og 3D-printede stempler til Ferraris formel 1-biler. Nettsiden sorterer også nyhetene etter bruksområder for 3D-print, og da ser vi i tillegg til det som allerede er nevnt blant annet områder som romfart, kunst, mat, mote og utdanning.

3.3.2 Hvordan bruke 3D-printer til konkretisering i matematikk?

Hod Lipson og Melba Kurman diskuterer i sin bok «Fabricated: The New World of 3D Printing» (Lipson & Kurman, 2013, s. 162) hvilke fordeler det kan ha å ta 3D-printeren inn i klasserommene. De konkluderer med at ikke alle elever gjør det bra i en undervisningssituasjon der teori alltid benyttes som tilnærming til nye emner. Noen studenter strever med å mestre abstrakte konsepter hvis de ikke har sett eller tatt på det de skal arbeide med. Her kan 3D-printere bidra med konkreter.

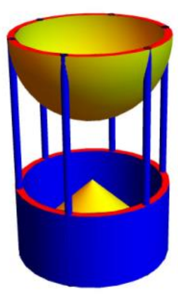
Brukes 3D-printere i videregående skole i Norge i dag? Etter søk på internett og deltakelse på kurs i «Praktisk 3D-printing – for bruk i skolen» i oktober 2015, har jeg kommet fram til at 3D-printere stort sett brukes til produktutvikling innen yrkesfaglige studieretninger, mens de fleste eksempler på bruk innen studiespesialisering er i fagene «Teknologi- og forskningslære» og «Entreprenørskap». Også innen studiespesialisering er det også oftest produktutviklinga som har fokus, men behovet for konkreter innen realfagene er også nevnt som eksempler på bruk. I begge tilfeller er utgangspunktet for 3D-printet en tegning laget i et digitalt tegneprogram.

Jeg har ikke kunnet finne eksempler på bruk av 3D-printer i forbindelse med programfagene i matematiktikk og heller ikke knyttet til temaet omdreiningslegemer på høyere nivå i Norge, men etter omfattende søk på internett, fant jeg noen få eksempler på dette i andre land, og da på høyere nivå enn videregående skole. Den forskning jeg har funnet som er knyttet til bruk av 3D-printing i matematikk på nivå videregående skole eller høyere, er også fra utlandet. Terry Wohler, skrev allerede i 2005 en artikkel om hvordan ulike skoleslag opp til universitetsnivå utnytter 3D-teknologi (Wohler, 2005) . Her framheves spesielt hvordan 3D-printere kan brukes for å la elevene få erfare «engineering», det vil si gi elevene erfaringer mot tekniske yrker. Wohler siterer i samme artikkel Timothy Jump, en lærer ved High School i St. Louis, Missouri, hvor de har spesielt fokus på tekniske fag:

> *«3D-printing stimulates a student's mechanical-spatial awareness in ways that textbooks cannot»*

Den første treff som omhandlet både 3D-printing og matematikk på høyere nivå, var en masteroppgave av Elizabeth Slavkovsky, med tittelen «Feasibility Study For Teaching Geometry and Other Topics Using Three-Dimensional Printers» (Slavkovsky, 2012). I denne masteroppgaven trekker Slavkovsky linjene helt tilbake til Arkimedes, som i sin utvikling av matematikken hadde en sterk forankring til det konkrete og tredimensjonale. Arkimedes beviste som kjent flere sammenhenger mellom en kule, en sylinder og kjegle som har samme radius. Disse sammenhengene arbeidet Slavkovsky med i prosjekter som inkluderte bruk av 3D-printer. Hun brukte tegneprogram for å tegne en sylinder og en sfære med de angitte størrelsene, for så å generere en stl-fil som 3D-printeren kunne bruke for å lage konkreter som kunne brukes i undervisningen.

I et annet prosjekt var det Arkimedes bevis i forhold til kulen, kjeglen og sylinderen som skulle konkretiseres, og til dette programmerte Slavkovsky objektene i riktige dimensjoner, og laget en sammensatt figur. Her kunne det demonstreres at hvis halvkula øverst ble fylt med vann, og vannet så fikk renne ned i delen under (sylinder med kjegle), så ville den fylle «underdelen» nøyaktig opp. (Figur 7)



FIGUR 7. ARKIMEDES KJEGLE, SYLINDER OG HALVKULE

Slavkovsky trekker også fram muligheten av å vise enda mer sjeldne konkreter, som Kleinflasker og fraktaler. Erfaringene som Slavkovsky gjør etter sitt prosjekt, er at hvis elevene skal tegne objektene selv, og deretter være med på 3D-printingen, så får de flere utfordringer som ikke direkte har med matematikk å gjøre. For det første må elevene lære seg å bruke et 3D-tegneprogram. Du underviser med andre ord ikke bare matematikk, og det er både tid- og ressurskrevende å gjennomføre en slik opplæring. I tillegg må skolen ha tilstrekkelig antall pc-er og 3D-printere. Slavkovsky påpeker derfor at i noen prosjekter kan det være hensiktsmessig å ikke bruke tid i klassen på å lage objektene, dersom det viktigste er å bruke det konkrete objektet.

Et eksempel på dette var utviklingen av objektet i figur 8, Arkimedes kjegle, sylinder og halvkule. Dette objektet laget Slavkovsky på forhånd, og da ikke ved tegning, men ved kode i Wolfram Mathematica. For som hun sier, her er det viktigste for elevene ikke prosessen med å lage objektet, men det å prøve ut Arkimedes bevis. (Slavkovsky, 2012, s. 120-121). Det hun presiserer her, er at det er viktig å ha fokus på når det er matematikk som primært skal læres. Noen ganger er det viktig for den totale forståelsen å være med i hele utviklingsprosessen, men andre ganger er utviklingsprosessen så komplisert at det tar fokus bort fra det som egentlig skulle læres.

Etter å ha lest Elizabeth Slavkovskys masteroppgave, ble jeg spesielt interessert i hvordan Mathematica kunne brukes for å programmere matematiske omdreiningsfunksjoner. Etter ytterligere søk fant jeg en artikkel skrevet av nok en amerikaner, Henry Segerman (Segerman, 2012). Segerman beskriver i sin artikkel arbeidet fram mot et tredimensjonalt matematisk objekt, og han presiserer at man arbeider ut fra et matematisk konsept som testes ut på en datamaskin, for deretter å konverteres til en fil i et format som en 3D-printer kan håndtere. Segerman er, til forskjell fra Slavkovsky, mer opptatt av hvordan matematiske funksjoner og uttrykk, satt inn i kodelinjer i Mathematica, kan skape fine og til dels kunstneriske tredimensjonale objekter. Han er med andre ord «ferdig» når produktet er printet, mens Slavkovsky var opptatt av den matematiske læringen som skulle skje både underveis i prosessen og etter at objektet var printet. Men Segermans artikkel viste til fulle de muligheter man har hvis man programmerer i Mathematica istedenfor å bruke tegneprogrammer som grunnlag for matematiske 3D-print objekter.

Til slutt fant jeg et prosjekt som var svært interessant i forhold til det jeg hadde planlagt å forske på, og som kunne være et mulig utgangspunkt for min forskning. Dr. P. Yasskin ved et universitet i Texas hadde skrevet en artikkel om sitt såkalte «Goblet Project» (Yasskin, 2014) hvor en klasse benyttet programmet Maple for å designe et drikkebeger ut fra gitte kriterier, som Yasskin har hentet fra det han kaller «the original Goblet project» (Meade, Sanders, & Wu, 2006). Kriteriene var som følger:

- Drikkebegeret skal være et omdreiningslegeme
- Volumet skal være mellom 177 cm^3 og 237 cm^3 og ikke bruke mer enn 120 cm^3 glass
- Høyden i sentrum av objektet må være mindre enn 3 ganger radiusen til sokkelen slik at det blir stabilitet.
- Tykkelsen til glasset skal være minst 0.25 cm på det tynneste punktet.

Det ble også presisert at studentene skulle ta utgangspunkt i en todimensjonal graf som skulle dreies om en akse, slik at de fikk en tredimensjonal figur. Det er ikke gjort noen vurdering av prosjektet, det er kun gjengitt i forhold til oppgaven som er gitt, kriterier for rapportskriving og vurderingskriterier, men noen bilder av studentenes resultater er tatt med.

Dette prosjektarbeidet var kreativt og inneholdt mye av det jeg ønsket at den praktiske delen av fagdagen skulle inneholde, og jeg besluttet å ha samme utgangspunkt som Yasskin, elevene skulle lage egne drikkebeger ved hjelp av omdreiningsfigurer. I og med at høyde og tykkelse av et 3D-print gjerne blir satt i programmet som styrer 3D-printeren, forkastet jeg kriteriene som satte krav til høyde og tykkelse.

4 Metode

4.1 Metodisk tilnærming

I en tidlig fase av forskningsprosessen må man ta stilling til hvilken grunnleggende metode man vil benytte i sitt arbeid. Det må gjøres valg mellom kvantitativ eller kvalitativ metode, eller eventuelt gå for en blanding av disse, det vil si å kombinere metoder (mixed methods). Det er ikke skarpe skiller mellom disse tre tilnærmingsmåtene, men heller glidende overganger. Og det er også viktig å være oppmerksom på at hvis to studier er definert som kvantitative, kan den ene være «mer kvantitativ» enn den andre (Creswell, 2014, s. 3). Det er med andre ord også variasjoner innen hver kategori. Hvis forskningen baserer seg på kombinert metode, så er dette plassert mellom kvalitativ og kvantitativ metode, siden det, som navnet tilsier, er en kombinasjon av disse to metodene.

En vanlig måte å skille mellom kvantitativ og kvalitativ metode, er at kvantitative metoder primært bygger sin forskning opp rundt tallmateriale eller målinger, mens kvalitative metoder ikke bygger på data i form av tall, men oftest ord. (Creswell, 2014, s. 4) (Punch, 2009, s. 3). En annen forskjell er i forhold til de hypoteser som stilles. Hypotesene i forskning knyttet til kvantitative metoder inneholder ofte lukkede spørsmål, det vil si spørsmål som man kan svare ja eller nei på, mens hypoteser knyttet til kvalitative metoder oftest har åpne spørsmål, som betyr at de ikke kan besvares med ja/nei.

Et annet markant skille mellom kvalitativ og kvantitativ forskning er at den kvalitative ofte bygger på induktive prosesser, mens kvantitative undersøkelsesmetoder ofte bygger på deduksjon. (Olsson, Sörensen, & Bureid, 2003, s. 17). Induktiv forskning kjennetegnes ved at forskeren tar utgangspunkt i erfaringer og opplevelser, som kan føre til allmenne prinsipper og dernest en teori. Hvis forskningsarbeidet derimot er deduktivt, tar forskeren utgangspunkt i en teori, presenterer en antakelse som en hypotese og søker dernest å bekrefte eller avkrefte denne. (Olsson et al., 2003, s. 37)

Når metoden er valgt må forskeren også velge et forskningsdesign, og i forhold til hver av de tre metodene er det ulike muligheter for valg av design. (Creswell, 2014, s. 12). En annen betegnelse for forskningsdesign er forskningsstrategier.

Kvantitativ metode benyttes når man ønsker å gjøre en analyse eller teste ut en teori i forhold til et stort antall «forskningsobjekter». Det benyttes i denne metoden helst målbare data og det gjøres oftest statistiske beregninger ut fra de innsamlede data. Analysen fører gjerne til ulike former for slutninger, og disse kan benyttes for å se om en eller flere variabler henger sammen eller de kan være grunnlag for å si noe om ulike typer årsaksforhold. Innen denne metoden vektlegges objektivitet, systematikk og kontroll, og vi søker breddeinfo ved å benytte mange informanter.

Når det benyttes kvalitative metoder, ønsker man ofte å utforske og forstå enkeltpersoner eller grupper ut fra egenskaper, holdninger eller meninger i forhold til et problem eller situasjon. Kvalitative metoder er måter å finne ut hva mennesker gjør, vet, tenker og føler ved å observere, intervjue og analysere dokumenter (Patton, 2002, s. 145). Denne metoden benyttes derfor ofte når forskeren ønsker å kartlegge teorier og hypoteser knyttet til for eksempel motivasjon, holdninger eller følelser. Vi har ofte nærhet til informantene og benytter gjerne et lite utvalg for å ha mulighet til dybdeforståelse. Subjektivitet står ofte i fokus her.

4.2 Valg av metode og design

Som jeg nevnte i innledningen, har jeg hele tiden hatt som mål at min forskning skulle knyttes til et konkret faglig opplegg i et av matematikkfagene som jeg underviser i. Jeg hadde et ønske om å utvikle meg som lærer og forbedre egen undervisning. Jeg var også bestemt på at den praktiske delen skulle inneholde gjennomføring og evaluering av et slikt undervisningsopplegg. Dette gjorde at jeg ikke kunne bruke et stort utvalg, siden jeg ikke ville ha mulighet til å gjennomføre det faglige opplegget i mange grupper. Det var derfor ikke aktuelt å bruke en ren kvantitativ metode. Kvalitativ metode virket i utgangspunktet mer aktuell for min forskning. Kvalitativ metode kan ifølge Patton (2002, s. 145) hjelpe oss å svare på konkrete spørsmål, støtte utvikling og forbedre eksisterende opplegg. Jeg ville ha nærhet til informantene, siden jeg mest sannsynlig kom til å gjennomføre den praktiske delen på egen skole, og jeg ønsket dybdeforståelse i forhold til hvilken virkning det faglige opplegget hadde på elevene. Alt dette er kjennetegn ved kvalitativ metode, og både grounded theory og narrativ design kunne være aktuelle tilnærmingsmåter. Men siden forskningen min ville komme til å være i forhold til egen praksis, ville det være naturlig å kalle min forskning for aksjonsforskning. Som utgangspunktet ville min variant av aksjonsforskning ha hovedtyngden innen kvalitativ metode, siden jeg hadde et ønske om dybdekunnskap i forhold til elevenes opplevelse og læring knyttet til en aktivitet i faget.

Aksjonsforskning kjennetegnes i litteraturen ofte av at man ønsker å «løse et problem» (Patton, 2002) og «The Sage Handbook of Action Research» (Reason & Bradbury, 2008) har formulert det slik:

> *«...we see action research as a practice for the systematic development of knowing and knowledge»*

Når det gjelder lærere som gjennomfører aksjonsforskning, starter slik forskning ofte med et ønske om å forbedre egen undervisning, og dette kjennetegner også min forskning. Jeg hadde et ønske om at det skulle skje en endring i min egen undervisning, og jeg hadde et håp om at denne endringen ville føre til en forbedring. Endringen som i mitt tilfelle var ønsket, var å gjøre matematikk R2 mindre teoretisk og mer konkret. Som forsker ville jeg også være aktivt deltakende i gjennomføringen, og derfor kan man spesifisere forskningen ytterligere, ved å si at den kan komme inn under det man kategoriserer som «deltakende aksjonsforskning» (participatory action research) (Patton, 2002, s. 269). Ved å være den som leder et undervisningsopplegg, får man både en erfaring knyttet til det å gjennomføre opplegget som lærer, men også en direkte og personlig kontakt med elevene som deltar. Likevel er nok den mest korrekte betegnelsen praktisk eller praksisnær aksjonsforskning, i og med at det både er snakk om lærer- og elevutvikling, og at tanken er at denne forskningen skal føre til en konkret endring.

Aksjonsforskning beskrives også som repeterende, pågående og «syklisk» (Punch, 2009), og dette søker å gjenspeile hvordan prosessen rundt denne forskningen pågår. Etter å ha prøvd ut noe og observert hvordan det gikk, reflekterer man rundt dette, deretter legges nye planer, opplegget gjentas, man observerer, reflekterer … og så videre. Slik ville det også bli i mitt tilfelle. Etter å ha gjennomført en «pilot-fagdag» med observasjoner og enkel datainnsamling, ville jeg ut fra erfaringene gjøre eventuelle endringer før neste fagdag ble gjennomført.

4.3 Valg av deltakere

Når et utvalg til en studie skal gjøres, er det mange faktorer som spiller inn, og det er ofte ulike hensyn som må tas. Prinsippet vi bør følge når et utvalg skal gjøres er at vi generelt sett bør velge den utvalgsprosedyre som gjør at en eventuell generalisering får best mulig validitet.

Det første vi må gjøre, er å tenke populasjon (Lund & Haugen, 2006, s. 104). For enhver forskning vil det finnes en målpopulasjon, det vil si en populasjon som omfattes av problemstillingen. I mitt tilfelle vil populasjonen være elever i Norge som har matematikk R2, siden jeg tar utgangspunkt i læreplanen i dette faget.

Dernest vil det være en tilgjengelig populasjon, og i mitt tilfelle ble dette geografisk betinget. Den videregående skole der jeg er lærer, er eneste skole i denne delen av fylket hvor det gis tilbud om matematikk R2. Ut fra dette, og at mitt masterstudie blir gjennomført parallelt med ordinær jobb, ble tilgjengelig populasjon de elevene på denne skolen som hadde R2 det skoleåret studien skulle gjennomføres. Høsten 2016 var dette 34 elever fordelt på to grupper. Det er imidlertid viktig å være observant i forhold til mulige ulemper ved å gjøre forskning ved egen skole, noe jeg vil komme tilbake til senere i oppgaven.

Videre er det viktig å skille mellom sannsynlighetsutvelging og ikke-sannsynlighetsutvelging (Lund & Haugen, 2006, s. 105-107). Sannsynlighetsutvalg kan gjøres på ulike måter: Enkelt tilfeldig (lotteri), systematisk (fast avstand mellom de som blir valgt), stratifisert (deles i undergrupper = strata, tilfeldig i hvert undergruppe) eller klynge (naturlige grupper, velger tilfeldig innen disse). Ikke sannsynlighetsutvalg har tre undergrupper: Vilkårlig utvalg (også kalt bekvemmelighetsutvalg), et skjønnsmessig utvalg (de som best tilfredsstiller gitte hensyn) og kvoteutvelging (også kalt snøballutvalg).

I utgangspunktet vurderte jeg muligheten av å la alle R2 elevene ved skolen være med i gjennomføringen av fagdagen, men jeg innså at det ville bli for omfattende. I kvalitativ forskning er det vanlig med små utvalg, siden det er ønskelig med en dybdeforståelse, og et utvalg på 34 elever ville ut fra dette bli for stort. Etter anbefaling fra min veileder, valgte jeg da ut den minste av de to gruppene, en gruppe med 16 elever. Utvalget ble derfor et ikke-sannsynlighetsutvalg og et valg ut fra bekvemmelighet, siden det ville blitt praktisk vanskelig for skolen og lærerne hvis jeg skulle gjennomføre en fagdag med et tilfeldig utvalg av elever fra hver av de to gruppene. Ideelt sett kunne utvalget bestått av enda færre elever, men det ville medføre praktiske vanskeligheter for skolen hvis jeg skulle gjennomføre en fagdag med bare noen elever fra en gitt faggruppe.

4.4 Innsamling av kvalitative data

I min studie ønsket jeg å få frem elevenes erfaringer og eventuelle læring gjennom en eller annen form for datainnsamling. Som lærer kan man risikere at spørsmål man stiller styrer samtalen eller gjør at elevene svarer mer ut fra lærerens forventning enn ut fra egne erfaringer. Ved å utarbeide dette undervisningsopplegget hadde jeg som lærer og fagperson forventninger til hva elevene skulle få ut av å delta, i forhold til både erfaringer og læring, men jeg kom fram til at jo mer spesifikke spørsmål jeg valgte å stille, desto snevrere svar kunne jeg risikere å få. Jeg gikk derfor på et tidlig tidspunkt i forarbeidet bort fra rene spørreskjema. Jeg hadde større tro på å bruke inn- og utskriving, en viss grad av deltakende observasjon og intervjuer ville gi de nødvendige data for å gi en evaluering av effektene av en slik fagdag.

4.4.1 Inn- og utskriving

Det å bruke inn- og utskriving som metode for å sette seg inn i elevers faglige situasjon, er en metode jeg har hentet fra naturfagdidaktikk, og som jeg har benyttet i alle fag jeg har undervist i. Odd Valdermo har beskrevet denne teknikken i «Metodisk veiledning i Naturfag» (Kvam, Størkersen, & Valdermo, 1989), da først og fremst som bevisstgjøring for eleven, men også for at læreren skal få mulighet til å se elevenes forventninger og ønsker i forhold til fag og læring. I tillegg vil en slik innskriving gi læreren en mulighet til å avdekke eventuelle misoppfatninger elevene måtte ha i forhold til emnet.

Ved innskriving, som skjer før elevene skal starte på et faglig opplegg, settes det av noen få minutter (5-10 minutter) til å skrive hva de kan om et eller flere faglige emner som opplegget inneholder. Elevene skriver om hva de synes er vanskelig og hvilke forventninger de har i forhold til opplevelser og læring. I utskrivinga, som skjer etter at det faglige opplegget er gjennomført, får elevene litt lengre tid (10 – 15 minutter) for å skrive om de erfaringer de har gjort samt de opplevelser de har hatt, hva de har lært og hva de kunne tenke seg å lære mer om.

I min studie hadde jeg tro på at inn- og utskriving både kunne gi være et bidrag til datainnsamlingen, men at det også kunne gi verdifull informasjon i forkant av intervjuene. Det ville være en mulighet for at det kommer tanker og synspunkter i inn- og utskrivingen som kunne være interessant å snakke videre om i intervjuene.

4.4.2 Deltakende observasjon

Observasjon handler om å avdekke, registrere eller kartlegge hva mennesker gjør i ulike situasjoner (Lund & Haugen, 2006). For en forsker vil det være mulig å velge mellom ulike varianter av observasjon, fra strukturert notasjon i et skjema til utstrukturert der det gjøres frie notater og man kan være deltakende observatør eller observerende deltaker. I det siste begrepet ligger muligheten for at man er «synlig eller skult» observatør.

I min studie vil ikke observasjon ha en framtredende rolle, men jeg så på forhånd for meg at jeg ville benytte meg av muligheten av å være en observerende deltaker, når det passet seg slik, og da gjøre bruk av ustrukturert notasjon, både «der og da» og i en oppsummering etter at fagdagen var avsluttet. Med dette mener jeg at jeg i løpet av fagdagen ville følge med hvordan elevene arbeidet og samarbeidet og notere ned eventuelle utsagn i forhold til engasjement, motivasjon, læring eller annet. De erfaringer jeg som lærer og fagperson gjør i løpet av en slik fagdag er viktige i denne sammenheng, selv om mitt hovedfokus i ettertid vil være på hvordan elevene opplever å gjennomføre det faglige opplegget, det vil si om de selv føler at opplegget er motiverende, og om de opplever læring og/eller mestring i forhold til det faglige innholdet. Observasjonene jeg selv gjør i løpet av fagdagen, vil kunne vise seg å være nyttige både som direkte datainnsamling og for senere intervjuer.

> *«..going where the action is, talking to people and observing what is happening.»*
> (Patton, 2002)

4.4.3 Intervju som forskningsmetode

Vi gjennomfører intervju med mennesker for ved hjelp av dem å finne ut det vi ikke kan observere direkte (Patton, 2002). Det som da er interessant er å få kjennskap til følelser, tanker og hvordan enkeltmennesket opplever samspillet med andre, og intervjuet har som mål å avdekke elementer som dette. Vi kan gjennomføre intervjuer med enkeltpersoner eller med flere personer samtidig. Et forskningsintervju kan deles inn i ulike typer og dernest gjennomføres på ulike måter. Et intervju kan være strukturert, semistrukturert eller ikke strukturert/ustrukturert (Kvale, Brinkmann, Anderssen, & Rygge, 2009) (Punch, 2009). En tilsvarende tredeling, men med litt annen formulering, er gjort av Patton (2002).

I strukturerte intervjuer stilles det en rekke forhåndsbestemte spørsmål i samme rekkefølge til alle intervjuobjektene. Intervjueren har i denne form for intervju en mest mulig nøytral rolle. Hvis intervjueren ønsker å gjennomføre intervjuet mest mulig strukturert, benyttes også et skjema for registrering av svar, der hvert svar må plasseres i en bestemt kategori eller være skalabasert. I min studie hadde jeg et ønske om å få frem elevenes opplevelser, læring og erfaringer etter å ha gjennomført fagdagen, og det som ville være mest spennende, var momenter som jeg på forhånd ikke hadde forutsett. Jeg gikk derfor raskt bort fra å bruke spørreskjema eller strukturert intervju.

Semistrukturerte intervjuer kjennetegnes ved at intervjueren har satt opp en intervjuguide på forhånd. En intervjuguide er en liste med spørsmål eller problemstillinger som ønskes besvart eller drøftet i løpet av intervjuet. Intervjuguiden fungerer som en huskeliste for den som skal gjennomføre intervjuet, men den følges ikke like «slavisk» som spørsmålslisten ved strukturerte intervjuer og intervjueren står også fritt til å snakke om nye tema eller utelate emner, dersom det der og da er mer interessant å gå enda mer i dybden på noe annet. Det er likevel en fordel at det til slike intervjuer er utarbeidet en intervjuguide, da dette sikrer en viss systematikk og «fellesnevner» for de ulike intervjuene.

Det ustrukturerte intervjuet kan i ytterste konsekvens være en uformelle samtale, der intervjueren ønsker maksimal fleksibilitet for å få en hvilken som helst informasjon i hvilken som helst retning. Dette medfører at data som samles inn i slike intervju kan komme til å bli av helt forskjellig art for hvert intervjuobjekt. En svakhet med denne type intervju er at det ofte tar lengre tid å samle informasjon, og hvert intervjuobjekt må oftest intervjues flere ganger. I tillegg kan også data som er samlet på denne måten være vanskeligere å systematisere i etterkant.

Siden jeg hadde gått bort fra å bruke strukturerte intervjuer, sto valget mellom å gjennomføre semistrukturerte eller ustrukturerte intervjuer, og jeg endte opp med noe midt imellom. Litteraturen viser til at det å kombinere ulike metoder kan være gunstig (Patton, 2002, s. 347). Jeg har ikke mye erfaring fra intervjusituasjoner, og var usikker på om jeg ville få elevene til å snakke fritt om sine erfaringer. Derfor utarbeidet jeg en intervjuguide, for å ha noen problemstillinger å ta utgangspunkt i, hvis samtalen viste seg å ikke gå fritt. Håpet var imidlertid at elevene i intervjusituasjonen skulle snakke åpent om sin opplevelse av fagdagen med færrest mulig innspill fra min side. På denne måten hadde jeg som tidligere nevnt et håp om å få fram synspunkter jeg ikke hadde forutsett på forhånd. Dette valget medførte at det måtte gjøres lydopptak av intervjuene, og at de i etterkant måtte transkriberes.

Gruppeintervjuer har vist seg å gi nyttige bidrag i forskning som er knyttet til utdanning, ved at interaksjonen mellom gruppens medlemmer kan gi data og synspunkter som ellers ikke ville kommet fram (Punch, 2009). Det å være i en gruppe kan føre til at det oppstår samtaler mellom personene i gruppen, i stedet for samtaler med intervjueren, og dette kan stimulere til andre innfallsvinkler og resonnementer. Men det er også viktig å være oppmerksom på at det kan oppstå problemer ved gruppeintervjuer, for eksempel kan noen dominere i forhold til de andre eller så kan det være andre problemer knyttet til dynamikken mellom gruppemedlemmene.

I forhold til om jeg skulle velge individuelle intervju eller gruppeintervju i min studie, besluttet jeg å også her å velge en kombinasjon. Ut fra min manglende erfaring med intervjusituasjonen, virket det tryggest å gjennomføre både individuelle intervjuer og gruppeintervjuer. Samtidig hadde jeg en forventning i forhold til at elever som blir intervjuet alene, kanskje åpner seg på en mer personlig måte, enn elever som er i en gruppe, og at det kan oppstå en annen type samtale eller diskusjon mellom elever i en gruppe enn mellom intervjuer og enkeltelev. Hvor mange grupper og hvor mange enkeltelever som skulle intervjues måtte avgjøres når jeg så hvor mange elever som frivillig meldte seg til intervju.

Gruppestørrelsen ville være på 3-4 elever, og gruppene ville bli satt sammen ut fra praktiske hensyn, dvs. i forhold til når de har mulighet til å møte til intervju.

4.5 Reliabilitet

Reliabilitet kan forklares som fravær av tilfeldige feil (Lund & Haugen, 2006). En annen måte å forklare begrepet er at det brukes om konsistens eller stabilitet i målinger, eller graden av overensstemmelse mellom målinger som utføres med samme måleinstrument (Olsson et al., 2003, s. 77) Årsaken til at en måling er feil, kan være tilfeldige eller systematiske feil. Det kan videre være flere faktorer som påvirker reliabiliteten på negativt vis. For eksempel kan spørsmålene være uklare eller tvetydige, noe som medfører at deltakerne feiltolker eller gjetter når de skal besvare disse.

Det finnes flere måter å estimere reliabilitet på, men det er viktig å påpeke at alle har fordeler og ulemper, og ingen av måtene er ut fra dette «perfekte» metoder.

Den kanskje vanligste reliabilitetsmetoden er test-retest-metoden. (Lund & Haugen, 2006, s. 121) Når denne metoden benyttes, utføres samme test to ganger på samme deltakere. Hvis ingen endring har skjedd, og prosedyren er korrekt gjennomført, vil korrelasjonskoeffisienten bli 1. Eventuelle variasjoner gir lavere koeffisient, det vil si at jo høyere koeffisient, desto bedre reliabilitet. Svakheter med test-retest-metoden er at hvis det går lengre tid mellom målingene, så kan personene endre seg.

En annen vanlig metode er å gjøre bruk av to «instrumenter», det vil si at man gjør to målinger, men med to ulike instrumenter. Dette kalles parallelltestmetoden (Lund & Haugen, 2006, s. 121). Det som kan medføre vanskeligheter med denne metoden er at det er vanskelig å lage to ulike tester som måler det samme.

En tredje metode som ofte benyttes i kvalitativ forskning, er at to eller flere observerer de samme situasjonene, og at disse observasjonene så sammenliknes.

I intervjusammenheng henviser reliabilitet til hvor pålitelig resultatene er (Kvale et al., 2009, s. 137)

Jeg har i min forskning ikke valgt å benytte test-retest eller parallellmetoden. Årsaken til dette er at jeg ikke fant at det ville være relevant å gjennomføre faglige tester i ettertid for å måle læringseffekten. En hel dag med matematikk, uansett form og innhold, vil føre til læring, men det er vanskelig å måle økt forståelse ut fra tester. Jeg var også alene om observasjonene så flere observatører var heller ikke aktuelt.

Intervjuene måtte derfor planlegges gjennomført på en måte som gjorde resultatene mest mulig pålitelige, mest mulig holde på samtaleformen og unngå ledende spørsmål.

4.6 Validitet

Validiteten angir instrumentets evne til å måle det som skal måles (Olsson et al., 2003, s. 78), kan resultatene som angis fra instrumentet anses for å være gyldig? Og dernest, i hvilken grad kan man trekke gyldige og relevante slutninger ut fra resultatene i et forsøk?

I forhold til dette er det utarbeidet et såkalt validitetssystem, som består av fire typer slutninger og tilhørende validiteter (Lund & Haugen, 2006). Validiteten angir hvor sikkert vi kan foreta de ulike typer slutninger, og Lund og Haugen (2006) oppsummerer Campbells validitetssystem slik:

- Statistisk validitet gjelder sikkerhet av en statistisk slutning, som angår om resultatene er systematiske (ikke tilfeldige) og av rimelig størrelse.
- Indre validitet tar utgangspunkt i sikkerhet av en kasual slutning, det vil si en fortolkning av årsaksforhold.
- Begrepsvaliditet angår sikkerhet av en begrepsslutning, det vil si en fortolkning om at indikatorer representerer bestemte begreper, validitet for data som er underbygget av test av en hypotese.
- Ytre validitet omhandler sikkerhet av en generalisering, det vil si slutninger som gjelder overføring av resultater til andre personer, situasjoner og tider.

Validitet vil være angitt i grad, og man kan ikke snakke om «perfekt validitet» og det er viktig å presisere at validitet målt ut fra slutninger, ikke ut fra metoder, data eller resultat.

I min studie vil jeg, som tidligere nevnt, gjennomføre intervjuer, og ut fra disse søke å finne svar på problemstillingen. I intervjusammenheng viser validiteten hvorvidt en intervjustudie undersøker det den er ment til å skulle undersøke. (Kvale et al., 2009, s. 137). Mer spesifikt har validitet i denne sammenheng å gjøre med intervjupersonens troverdighet og selve intervjuingens kvalitet (Kvale et al., 2009, s. 278). Måten transkribering av intervjuet gjennomføres på, vil også være en viktig faktor i forhold til validiteten. Utgjør transkriberingen en gyldig overføring fra muntlig til skriftlig form? Analysen påvirker også validiteten. Er spørsmålene som stilles i intervjuet gyldige? Er fortolkningen gyldig?

I min studie er intervjupersonene troverdige i den forstand at de snakker om egne erfaringer i forhold til læring. Usikkerhet i forhold til validitet vil være i forhold til om intervjuets kvalitet, og om den fortolkning jeg gjør i ettertid kan regnes som gyldig. Det er imidlertid viktig at jeg er kritisk i forhold til mitt eget arbeid gjennom hele forskningsprosessen, og at jeg parallelt med at jeg søker svar på min problemstilling også gjør en bevisst vurdering av aktuelle feilkilder. Dette vil jeg komme tilbake til i kapittel 7.

4.7 Etikk

Etikk deles ofte inn i konsekvensetikk, pliktetikk og dydsetikk. Konsekvensetikk angår virkningen av en handling, og hvorvidt den er slik man ønsker den skal være. Pliktetikk har fokus på selve handlingen, og ser på om man ved å gjennomføre handlingen følger eller bryter med etiske regler. Dydsetikk har vekt på personen som utfører handlinger, springer handlingen ut fra rett holdning?

Etiske problemstillinger vil oppstå uansett type forskning, men innen kvalitativ forskning vil slike problemstillinger oppstå oftere og i større grad. Dette skyldes at kvalitativ forskning ofte omfatter mennesker, og ved slik forskning knyttet til mennesker, er det alltid viktige etiske problemstillinger involvert. (Punch, 2009, s. 38) Og når forskningsfeltet er skole og undervisning, og forskeren er lærer, vil det være nødvendig med spesielt fokus på etiske problemstillinger, siden det medfører at forskeren samler data fra mennesker og om mennesker. (Punch, 2009, s. 49) Det er viktig med informert samtykke fra eleven og eventuelt foreldrene hvis eleven ikke er myndig, og det er viktig at de innsamlede data blir behandlet med konfidensialitet. En kompliserende faktor er at det må trekkes en skarp skillelinje mellom forskningsdata og «vanlige» data som innhentes som lærer. Dette betyr at det alltid vil kunne framkomme etiske problemstillinger hvis en lærer bruker informasjon som innhentes i sin lærergjerning som basis for forskning, og læreren må i rollen som forsker bare gjøre dette etter grundige overveielser.

I min forskning har jeg prøvd å ta hensyn til de etiske problemstillingene som er knyttet til å være lærer og forsker. Jeg var oppmerksom på at jeg gjennom min studie ville komme til å ha en nærhet til elevene, og at det var viktig å ikke bruke denne nærheten til annet enn den konkrete forskningen. Jeg brukte derfor tid på å informere elevene om studien, og jeg var tydelig på at det var frivillig deltakelse, og at de når som helst kunne trekke seg ut fra både fagdag og intervju. Jeg informerte også om at jeg ville anonymisere elevene og slette alle lydopptak etter at forskningen var avsluttet. Elevene ga skriftlig samtykke i forhold til deltakelse, både på intervju og fagdag. Siden alle elevene var fylt 18 år på det tidspunktet fagdagen og intervjuene ble gjennomført, var det ikke nødvendig å informere eller få godkjenning fra foresatte.

5 Gjennomføring

5.1 «Pilot-fagdag»

Dersom man gjennomfører en forberedende undersøkelse, kalles dette ofte for en pilotstudie (Olsson et al., 2003). Skoleåret 2015/16 hadde jeg selv en gruppe i matematikk R2, og dette skoleåret ble det besluttet at alle programfagene ved vår skole skulle gjennomføre fagdager i november måned. Jeg så derfor en mulighet til å teste ut deler av undervisningsopplegget som jeg da var i full gang med å utarbeide, og da i min egen R2-gruppe. Denne fagdagen måtte i så fall gjennomføres med innleid assistanse i forhold til 3D-print delen, siden skolen på det tidspunktet ikke hadde egen 3D-printer. Jeg hadde en todelt hensikt med å gjennomføre en «pilot-fagdag». For det første ønsket jeg at også at mine egne elever skulle få del i et undervisningsopplegg som jeg hadde stor tro på, og for det andre ville det å gjennomføre en slik pilot gi nyttige erfaringer i forhold til senere gjennomføring av fagdag i forbindelse med masteroppgaven.

Elevene i min R2-gruppe hadde i forkant av denne fagdagen arbeidet gjennom kompetansemål «Funksjoner» som blant annet omfatter integrasjon, omdreiningslegemer, areal- og volumberegning og trigonometriske funksjoner. Disse elevene hadde arbeidet relativt mye med 3D-geogebra i løpet av høsten, og hadde erfaring i å tegne omdreiningslegemer i 3D. Jeg satte ut fra disse forutsetningene opp følgende plan for fagdagen:

Del 1: Hvordan kan en matematisk funksjon bli til et fysisk objekt?

- Funksjon → graf (2D-geogebra)
- Funksjon + rotasjon om akse (3D-Geogebra) → 3D-figur (på skjerm)
- Programmering Mathematica (funksjon + kode for print) → 3D-figur og STL-fil (på skjerm)
- STL-fil + nødvendig programvare og 3D-printer → 3D-print av omdreiningslegeme.

Del 2: 3D-print av omdreiningslegemer

- Litt om 3D-printere v/ innleid «3D-printer ekspert»
- Demoprint. «Utvidet cosinus», lite format.
- Print av omdreiningslegeme i større format

Del 3: Modellering (Kapittel 3G i læreboka)

- Hva er modellering?
- Regresjon i Geogebra, gjennomgang og eksempler.
- Arbeide med oppgaver.
- **Innleveringsoppgave:** Utvikle funksjon for omdreiningslegeme ved hjelp av modellering, tegne denne som 3D-figur i Geogebra 3D, og eventuelt bestille 3D print.

5.1.1 Erfaringer fra «pilot-fagdag»

Den praktiske gjennomføringa av pilot-fagdagen gikk etter min mening svært bra, tatt i betraktning at jeg ikke hadde hatt så lang tid til å bearbeide det faglige opplegget. Samarbeidet med den innleide «3D-printer-eksperten» gikk fint, og jeg observerte at elevene var engasjerte og arbeidet godt med oppgavene i løpet av dagen. Som hjelp til å evaluere denne pilot-fagdagen valgte jeg å benytte inn- og utskriving, som jeg har gode erfaringer med fra både matematikk og naturfag. Denne type skriving kan ha som mål å bevisstgjøre eleven i forhold til egne ferdigheter i et fag, men kan også fungere som motivasjon. (Kvam et al., 1989, s. 67) I innskrivinga helt i starten av dagen, ba jeg elevene skrive om forkunnskaper og eventuelle forventninger til fagdagen, mens de i utskrivinga ble bedt om å gjøre en evaluering av dagen og reflektere i forhold til om de hadde lært noe nytt innen integrasjon, omdreiningslegemer, 3D-Geogebra og/eller 3D-printing.

Innskrivingen viste seg først og fremst å gi meg tilbakemeldinger som faglærer og ikke som forsker. Jeg fikk informasjon om hva elevene følte at de mestret samt hva de var usikker på i forhold til integrasjon, volum og omdreining, samt 3D-Geogebra. Dette var svært nyttig i forhold til senere arbeid og repetisjon i emnet. Forventningene som ble formulert i innskrivinga, gikk stort sett mot at de så frem til å se en 3D-printer i aksjon. Jeg hadde, sammen med denne elevgruppa, i løpet av høsten arbeidet med konkreter i forskjellige sammenhenger, og også vist elevene ulike varianter av konkrete omdreiningsfigurer. De hadde også fått sett et objekt som var laget ved hjelp av matematiske funksjoner, omdreining og 3D-printer.

Utskrivinga ga derimot mange nyttige tilbakemeldinger i forhold til det videre arbeid med utarbeidelse av opplegg for fagdagen som senere skulle gjennomføres som praktisk del av masterarbeidet mitt. Det var gjennomgående gode tilbakemeldinger på opplegget for dagen.

I forhold til læringsutbytte var det en gjennomgående respons at de ikke følte at de hadde lært noe nytt i forhold til integrasjon. Derimot signaliserte de fleste at de hadde lært mer i forhold til omdreiningsfigurer og bruk av Geogebra 3D og at de hadde lært mye nytt om 3D-printing. Jeg siterer her utdrag fra noen av tilbakemeldingene fra elevenes utskriving på slutten av pilot-fagdagen. Sitatene er omskrevet fra dialekt til bokmål, for å lette forståelsen (Kvale et al., 2009).

«Jeg har egentlig ikke lært noe nytt i forhold til integrasjon, men det har vært lærerikt å bruke det i praksis. Jeg har heller ikke lært så mye nytt om omdreiningslegemer, men dagen har gitt mye repetisjon. Jeg har blitt tryggere på å tegne omdreiningslegemer i 3D-GeoGebra. Jeg har lært mye nytt om 3D-printing.»

«Jeg har blitt mer kjent med 3D-geogebra, og det var fint at vi fikk litt tid til å «leke» oss med figurene. Veldig morsomt og fysisk holde funksjonen vi har drevet på med og sett i 3D-geogebra.»

«Bruk av 3D printer og 3D Geogebra i R2 kan være veldig bra fordi det gir et visuelt bilde av funksjonene vi regner med og tegner. 3D printere viser oss også hvor mye vi trenger matematiske kunnskaper og hvor mye matematikk har å si for framtiden.»

«Nå i etterkant av fagdagen og informasjonen om 3D printer, har jeg blitt veldig positivt overrasket. Mulighetene er mye større enn det jeg kunne forestilt meg på forhånd, og helt klart et interessant fagfelt. Når det er sagt, tror jeg ikke bruk av 3D printer i R2 vil gi mer eller bedre læringseffekt. Ja, det er en morsom bieffekt til faget, men alt-i-alt tror jeg ikke det vil gjøre noen av oss dyktigere i faget matematikk.»

«Lært mye mer om hvordan man lager omdreiningslegemer og endrer på formen ved hjelp av cos og sin. Har lært mer om hvilke verdier som endrer på de forskjellige elementene til figuren.»

«Jeg ser ikke en læringseffekt i den grad at man lærer noe nytt matematisk sett, men det hjelper veldig på forståelsen og det gir et bilde på at matematikken ikke er bare algebra på papiret. Det er en måte å få undervisningen bort fra det teoretiske på. Jeg er egentlig veldig glad i den teoretiske matematikken, men det er veldig gøy å få se at matte FAKTISK er «naturens språk» og at det vi framstiller grafisk faktisk også finnes fysisk.»

«Jeg synes absolutt at 3D-printere har læringseffekt i forhold til matematikk R2. Det er veldig greit å få lagd fysiske figurer av det vi ser i boka og på skjermen. I tillegg blir man motivert i faget når man ser relevant bruk av matten i «det virkelige liv».»

«Har blitt bedre til å lage omdreiningslegemer i Geogebra. Trenger ikke å bruke arket lengre fordi jeg husker formelen og hvordan den skal skrives inn, så det er tidssparende. Det var interessant å få lære om 3D-printere. Jeg har tro på at de kan være nyttig i R2 med at man kan få et håndfast eksempel på hvordan et omdreiningslegeme kan se ut. Ikke alltid det kommer like bra frem på datamaskinen for der er det jo egentlig fortsatt i 2D siden det er på

en skjerm. Kanskje en 3D-printer og mulighetene den gir ville gjort at enda flere ble interessert i å ta matte R2 og senere fortsette å jobbe med 3D-printere og design.»

«Jeg ser mye nytte av å bruke 3D-printere i R2, blant annet for å kunne se og ta på det man gjør på PC-en, og få en bedre forståelse av grafen, og prosessen bak (fra ide til ferdig «produkt»).»

3D-printing bør være perfekt å bruke i matematikk R2. Ved hjelp av de får man et nytt syn på integrasjon, areal og omdreiningslegemer. Istedenfor at læreren må tegne grafen på tavla eller vise i 3D i 2D i Geogebra sitt grafikkfelt, kan man med 3D-printing se hvordan det faktisk ser ut istedenfor å måtte prøve å forestille seg.»

«Jeg mener at 3D-printere er greit for å kunne visualisere funksjoner og få bedre forståelse, men jeg mener ikke at det er noe som er relevant og effektivt å investere mye av undervisningstiden i. Jeg synes opplegget på fagdagen har vært bra og relevant.»

Den viktigste lærdommen etter pilot-fagdagen, var at mange av elevene hadde stort fokus på selve 3D-printeren. Det er forståelig at 3D-printeren vekker interesse og engasjement, siden det er en relativ ny teknologi, både i skole- og privat sammenheng, men jeg ønsket å fremheve matematikken enda mer i neste fagdag, slik at ikke 3D-printingen i seg selv tar for mye av oppmerksomheten. Jeg så det som positivt at de fleste elevene signaliserte at fagdagen ga godt utbytte i forhold til Geogebra 3D, til tross for at elevene i denne klassen hadde arbeidet med dette tidligere. Jeg kom derfor frem til at jeg i stor grad ville videreføre arbeidet med Geogebra, men jeg så at det var behov for å endre rammene for det praktiske arbeidet i neste fagdag, siden jeg neste fagdag ville møte elever som jeg ikke var lærer til i faget. Elevene i min R2-gruppe hadde i forkant av fagdagen blant annet hadde arbeidet med en oppgave der de fikk utdelt en pappkopp som de skulle gjengi i Geogebra 3D ved hjelp av funksjonsuttrykk og omdreining, for så å beregne hvor mye vann pappkoppen maksimalt kan inneholde i ved hjelp av integrasjon i CAS. En variant av en slik oppgave så jeg at jeg med fordel kunne ta med i neste fagdag.

En siste, og nyttig erfaring, var at inn- og utskriving ga konstruktiv informasjon, men jeg erfarte også at det er viktig å stille de «riktige» spørsmålene som utgangspunkt for skrivinga. Elevene sine svar blir ledet i en retning ut fra de spørsmål som stilles av en veileder, og mitt ønske var å få svar på konkrete spørsmål med minst mulig «påvirkning» fra min side.

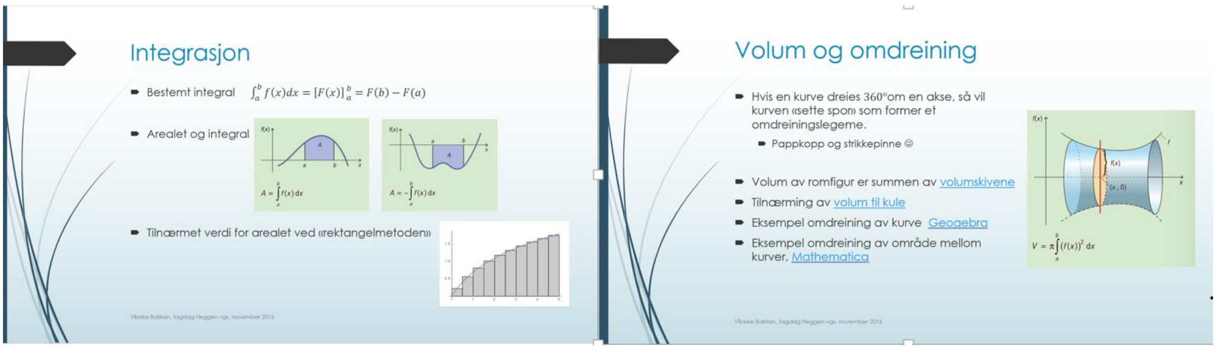
5.2 Fagdag

Den praktiske delen av forskningen ble gjennomført 2. november, som en fagdag for 16 elever. Disse elevene utgjorde en av to matematikk R2-grupper ved sin skole. I etterkant av fagdagen ble det gjennomført intervjuer med 14 av elevene, tre av dem ble intervjuet individuelt, mens de resterende ble intervjuet i grupper på 3-4 elever.

5.2.1 Teoridel

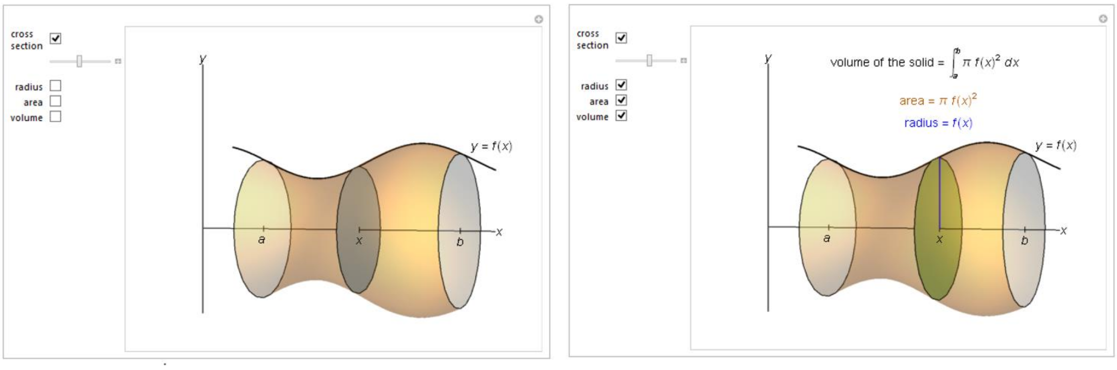
Elevene hadde siste økt før fagdagen arbeidet med temaet omdreiningsfigurer og volumberegning. I øktene før fagdagen hadde tema vært det bestemte integral og areal under grafen. Begrunnelsen for å starte fagdagen med en kort gjennomgang av disse emnene, var at elevene ikke hadde hatt tid til å arbeide mye med dette, og at jeg ønsket å sikre en felles kjennskap til de grunnleggende metoden. Gjennomgangen ble gjort ved bruk av presentasjonsprogram, og elevene bidro underveis.

I «teoridelen» ble det bestemte integralet fremhevet, og deretter tilnærming av areal under kurven som Riemannsum gjennomgått, før omdreining og volumberegning ved hjelp av «skivemetoden» ble diskutert (Figur 8)

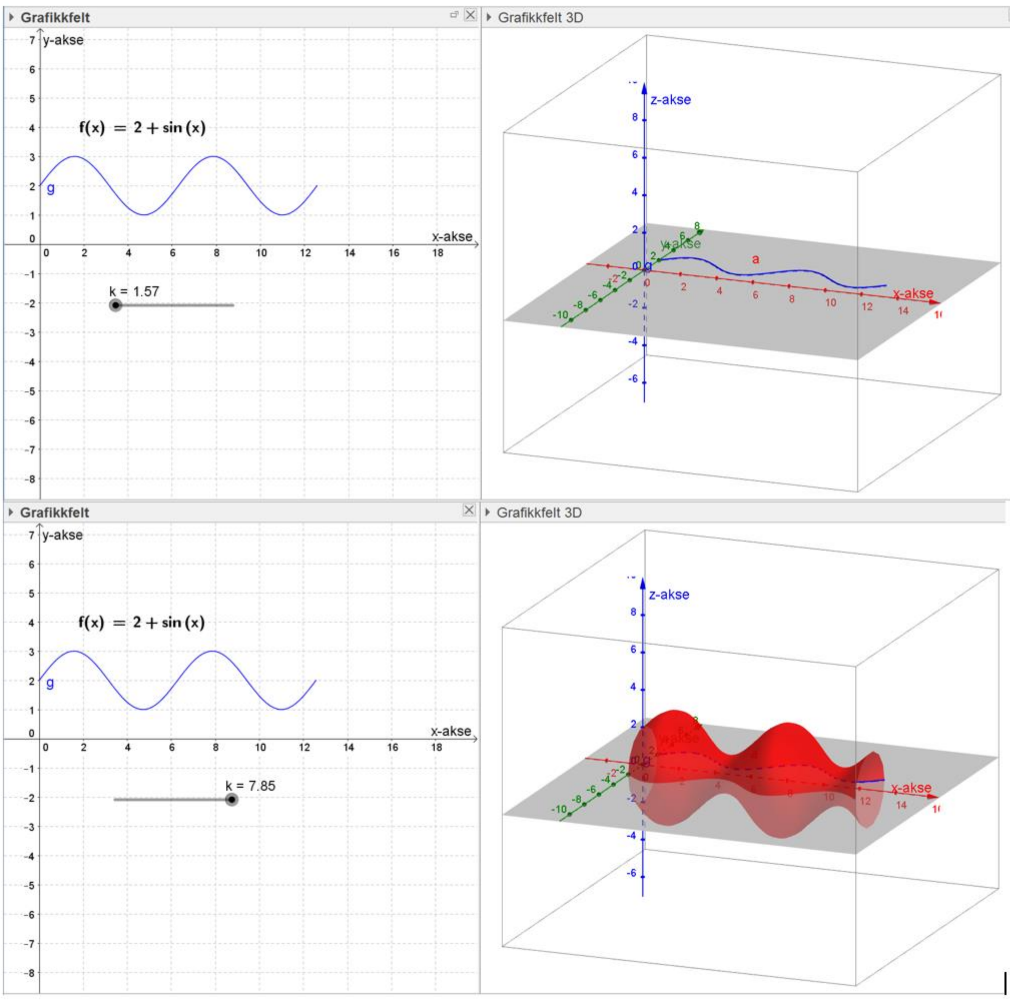


FIGUR 8. INTEGRASJON, OMDREINING OG VOLUM

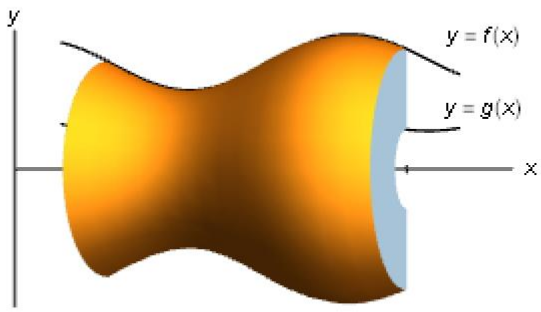
For å demonstrere «The disc method», som ble forklart i kapittel 2.1, ytterligere, benyttet jeg en animasjon fra Wolfram Mathematica, som gir mulig til å visualisere hvordan vi tenker et omdreiningslegeme delt i skiver, hvordan vi beregner areal og volum av hver skive (Figur 9) samt hvordan volum av kule kan tilnærmes med samme metode. Jeg viste også hvordan omdreining av en kurve kan visualiseres ved hjelp av en animasjon i Geogebra, (Figur 10) og hvordan man kan bruke animasjon i Mathematica for å vise omdreining av område mellom to grafer (Figur 11).



FIGUR 9. ANIMASJON AV "THE DISK METHOD", WOLFRAM MATHEMATICA



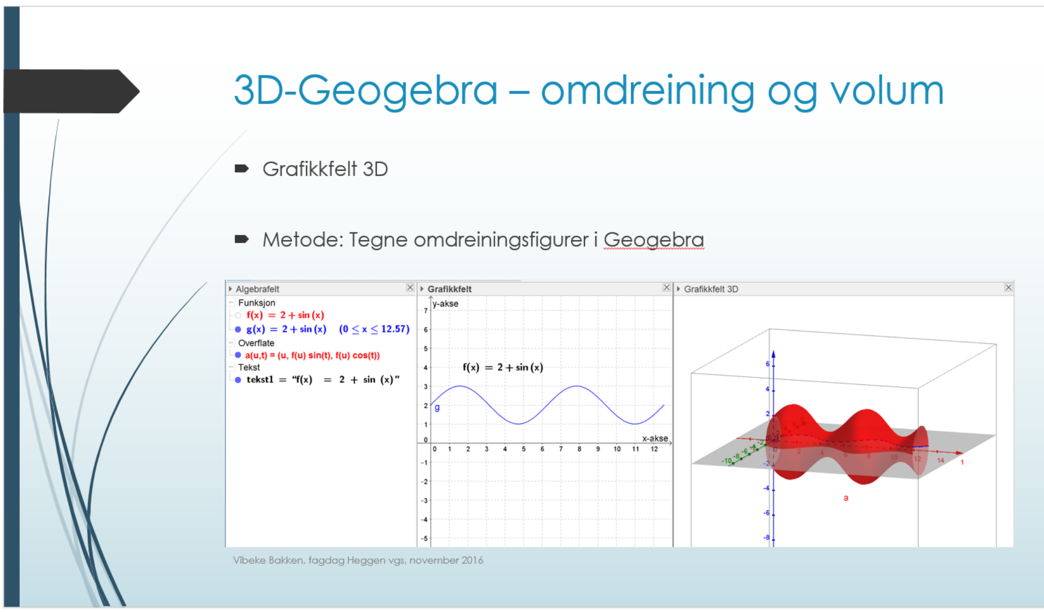
FIGUR 10. ANIMASJON AV OMDREINING, GEOGEBRA 3D



FIGUR 11. ANIMASJON AV OMDREINING AV OMRÅDE MELLOM GRAFER, WOLFRAM MATHEMATICA

5.2.2 Gjennomgang av 3D-Geogebra

Neste del inneholdt en gjennomgang av hvordan et omdreiningslegeme kan tegnes i 3D-Geogebra. Denne delen ble gjennomført ved at jeg i Geogebra 3D demonstrerte hvordan fremgangsmåten er hvis utgangspunktet er en kjent funksjon med gitt definisjonsmengde. Elevene prøvde ut det samme på sine pc-er mens jeg demonstrerte (Figur 12). Vi brukte også Geogebra CAS til å beregne volumet av omdreiningslegemet som ble brukt som eksempel.



FIGUR 12. FRA FUNKSJON TIL OMDREININGSFIGUR I GEOGEBRA 3D.

5.2.3 Praktisk gruppearbeid

I det praktiske gruppearbeidet skulle elevene arbeide sammen to og to. Fra start fikk de utdelt et lite plastglass, som hadde form som en rett, avkortet kjegle, og følgende oppgave:

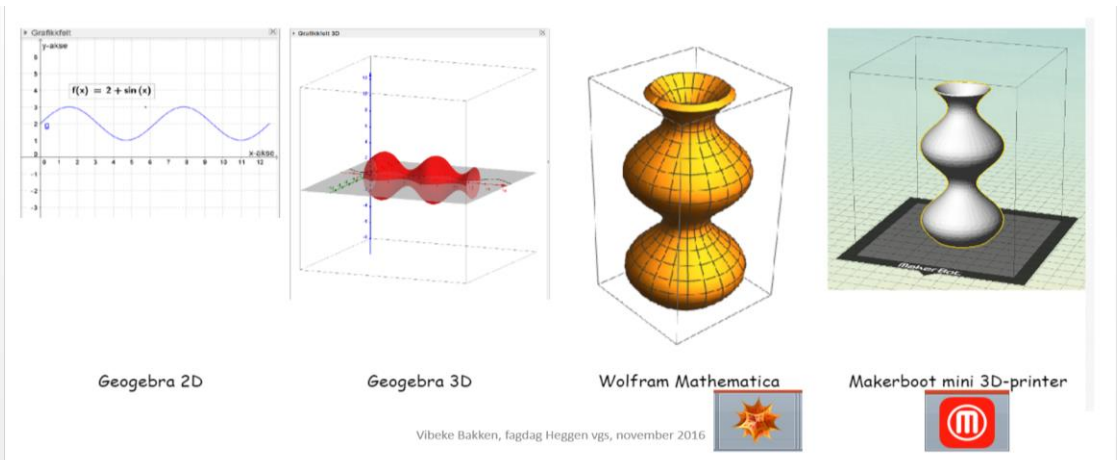
«Bruk det dere har lært om omdreiningslegemer til å lage en så nøyaktig gjengivelse av plastbegeret som mulig i Geogebra 3D. Beregn deretter volum av begeret ved hjelp av CAS.»

Etter at elevene hadde utarbeidet en modell, beregnet de volumet i CAS ved hjelp av integrasjon, og til slutt ble resultatene oppsummert i fellesskap. Volumet av plastglasset ble deretter estimert ved hjelp av digital vekt og vann, og vi sammenlignet med elevenes resultat. Vi valgte deretter ut den modellen som viste seg å være nærmest «den tilnærmede fasiten» for 3D-print.

5.2.4 Hva er 3D-printer og hvordan kan vi bruke den i matematikk?

Denne delen ble tatt med for at elevene skulle få en viss forståelse for hva en 3D-printer er, hvordan den virker og hvordan en 3D-printer kan brukes i matematikk.

I forhold til bruk i matematikk, hadde jeg hovedfokus på hvordan vi går fram for å få omdreining av en graf, som ofte er et funksjonsuttrykk eller graf på papir i utgangspunktet, til å bli et ferdig 3D-print. Prosessen ble gjennomgått trinn for trinn med det samme eksemplet som jeg hadde gjennomgått tidligere. (Figur 13)



FIGUR 13. PROSESSEN FRA MATEMATISK FUNKSJON TIL 3D-PRINT

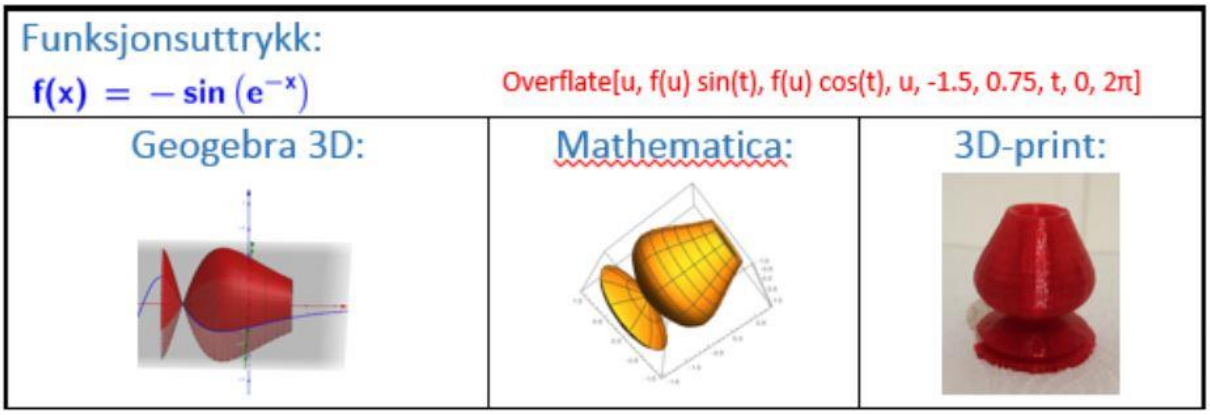
Første trinn er å bruke Geogebra for å visualisere grafen og det tilhørende omdreiningslegeme. Grafen tegnes ut fra gitt funksjonsuttrykk og definisjonsmengde i Geogebra 2D og deretter gjør vi omdreining av grafsegmentet i Geogebra 3D. Denne delen av prosessen har allerede elevene testet ut tidligere i fagdagen, gjennom den individuelle oppgaven. Neste trinn er å gjenskape omdreiningsfiguren i Wolfram Mathematica, siden Geogebra pr dags dato, så vidt jeg vet, ikke har mulighet til å generere filer som en 3D-printer kan gjøre nytte av. Bruk av Mathematica krever som tidligere nevnt bruk av et programmeringsspråk som elevene ikke har lært, så elevene fikk se hvordan programkoden var satt opp, men dette ble gjort som en enkel orientering. Dette faller utenom det rent matematiske innhold i fagdagen, og jeg presiserte derfor at jeg ville være den som skulle legge inn funksjonsuttrykk og definisjonsmengder i Mathematica. Etter å ha sett at funksjonsuttrykk og definisjonsområdet gir riktig omdreiningsfigur også i dette programmet, lagres dette både som Mathematica-fil og som stl-fil. Filformatet stl er et format som driverprogrammet til 3D-printeren, MakerBot desktop, kan behandle. Siste trinn i prosessen er derfor å importere fila i MakerBot desktop, sette en ønsket størrelse på omdreiningslegemet og deretter sende til print.

5.2.5 Individuell oppgave

Den individuelle oppgaven var som følger:

- Bruk **3D-Geogebra** (og de kunnskapene dere har om funksjoner og omdreiningslegemer) for å eksperimentere dere fram til et omdreiningslegeme som kan brukes som et elegant **drikkebeger**.
- Drikkebegeret skal ***ikke*** ha ren kjegleform, vær kreativ!
- Når du er fornøyd med drikkebegeret, tester vi funksjonsuttrykket med definisjonsområde i **Mathematica.**
- Drikkebegeret skal **3D-printes** ☺ men det tar litt tid… ☹
- **Krav til det ferdige produkt:**
    - Det skal gå an å fylle væske i begeret når det er ferdig printet
    - Hele objektet skal lages ved hjelp av omdreining av et eller flere funksjonsuttrykk.

Elevene arbeidet deretter individuelt med hvert sitt «produkt», men idéutveksling og samarbeid om metoder var selvfølgelig tillatt. Et eksempler på «ferdig produkt» etter denne oppgaven er vist nedenfor (Figur 14), og flere eksempler er vist i vedlegg 5.



FIGUR 14. EKSEMPEL PÅ ELEVARBEID, DRIKKEBEGER

6 Funn og analyse

Den praktiske gjennomføringen av fagdagen var etter min mening vellykket. Det oppsatte programmet lot seg gjennomføre i løpet av 3x90 minutter og elevene var aktive og engasjerte i forhold til de arbeidsoppgavene de fikk. Jeg observerte at elevene diskuterte mye med hverandre, både ved løsning av «plastglass-oppgaven» og «drikkebeger-oppgaven». Elevene utvekslet erfaringer i forhold til «gunstige» funksjoner og innimellom kunne jeg høre overraskede utbrudd og i flere tilfeller latter i forhold til hva endring i funksjonsuttrykk og definisjonsmengder førte til.

Som ved gjennomføring av «pilot-fagdagen» gjennomførte jeg inn- og utskriving. Heller ikke denne gang ga innskrivingen isolert sett mye nyttig informasjon, til tross for at jeg hadde endret litt på «instruksjonsteksten» for innskrivingen. Siden det ikke var min egen gruppe elever, var heller ikke behovet for senere repetisjon av emnet til stede. Jeg ser i ettertid at jeg med fordel kunne bedt elevene gjort innskrivingen dagen før, slik at jeg kunne lest gjennom hva de hadde skrevet før fagdagen. Hadde jeg gjort det, ville innskrivingen vært mer til nytte, siden noen av elevene skriver om konkrete ting de ønsker å vite om, både i forhold til de matematiske emnene, og om 3D-printere. Men det var likevel interessant å se på innskrivingene i sammenheng med utskrivingene, og registrere at mens innskrivingene var svært nøkterne i formen, og stort sett var oppramsinger om hva elevene følte at de kunne eller syntes var vanskelig, så inneholdt utskrivingene mye mer engasjement og følelser. Før jeg gikk dypere inn i hva elevene faktisk skrev i utskrivingene, tok jeg denne endringen i form som et tydelig tegn på at dagen hadde skapt en motivasjon og et engasjement.

Utskrivingen ga mange interessante tilbakemeldinger, og flere av elevene har reflektert svært godt i forhold til egen læringsprosess. Alle elevene gir tilbakemelding om at fagdagen var en positiv opplevelse og alle signaliserer at dagen har vært lærerik på en eller flere måter.

6.1 Utskriving

Nedenfor presenterer jeg utvalgte sitater fra elevenes utskriving, og senere i oppgaven vil jeg analysere disse med fokus på opplevelse av læring, faglig innhold, opplevd læringseffekt ved bruk av digitale verktøy og nytte av å lage et konkret produkt ved hjelp av matematiske funksjoner. Jeg har i noen tilfeller tatt med hele utskrivingstekster, mens jeg i andre kun har tatt med deler av teksten. Dette har jeg gjort for å få med de ulike variantene av utsagn som ble skrevet ned i tekstene. Når flere av tekstene illustrerer de samme poengene, har jeg valgt å ta med den av disse teksten som er mest omfattende.

> *Elev A: «Denne fagdagen har vært veldig lærerik og ikke minst interessant. Det var veldig spennende å lære om volum og integrasjon på en helt annen måte enn bare å sitte å regne oppgaver i ei lærebok. Det at vi skulle koble Geogebra-bruken vår opp til noe nytt, i dette tilfellet en 3D-printer var veldig gøy. Jeg følte at vi fikk bruke kunnskapen vi har fått på en ny måte, og med tanke på at vi får det ferdige resultatet, i fysisk form, tror jeg denne lærdommen vil sitte bedre og på en annen måte enn andre ting vi har lært. Visuelt og praktisk arbeid er nyttig av og til, og ikke minst artig. Jeg synes det var veldig smart å først gi oss en fast oppgave der vi måtte bruke det vi har lært om volum og integrasjon av figurer, i dette tilfellet et lite drikkebeger, der oppgaven hadde et svar, før vi fikk slippe fantasien løs og skape noe eget. Å få se 3D-printeren i aksjon var et stort pluss!»*

> *Elev B: «I løpet av denne fagdagen har jeg lært veldig mye om omdreining av grafer. (…) Alt i alt har jeg lært mye og blitt sikrere på mye innenfor integrasjon om omdreiningsfigurer. (…) Gøy å bruke matematikk til noe praktisk siden vi gjør veldig lite praktisk i vanlige mattetimer, det har ikke vært en kjedelig mattedag.»*

> *Elev C: «Dagen har vært gøy, fått et bedre bilde om hvordan omdreiningsfigurer ser ut, også fått større forståelse for noe i Geogebra og hva det kan brukes til. Det å få et konkret og håndfast eksempel på hva man regner ut hjelper også på forståelsen.»*

> *Elev D: «Jeg tar med meg mye positivt fra denne fagdagen. Tidligere hadde jeg ingen kjennskap til volum av omdreiningsfigurer og 3D-printing. Etter mange varierende oppgaver om dette stoffet føler jeg meg mye bedre på dette. Jeg har sett nye sammenhenger mellom volumet til en figur og integralformelen for dette, ved å jobbe med forskjellige oppgaver. Det som var veldig bra med denne fagdagen i forhold til mange andre, er muligheten for å bruke teorien i praksis. Med en 3D-printer var det kanskje lettere å skjønne noe jeg slet med litt tidligere.»*

> *Elev E: «(…) og når vi skulle lage figur/beger, rådslo vi oss med hverandre for å få ideer eller prøve å utbedre det vi hadde. Det sosiale og at vi kunne jobbe fokusert på den ene praktiske anvendelsen, var svært gøy og hjalp masse!»*

Elev F: «Utrolig givende og lærerik dag. For meg har alltid matematikk handlet om det teoretiske og det har for det meste bestått av regning og pugg, derfor ble dette for meg en helt ny måte å praktisere matematikk på. Jeg likte imidlertid denne måten å arbeide med matematikk på. Jeg har fått mye bedre forståelse av dette temaet vi har holdt på med. I stedet for å bare studere eksempler i boken og benytte oss av formler på papiret gav dette oss mulighet til å faktisk produsere noe eget gjennom matematikk. Det har åpnet en helt ny dør til hva man kan bruke matematiske beregninger til i hverdagen og skapt en større interesse for faget.»

Elev G: «Dagen har vært lærerik. Vi fikk en introduksjon til omdreiningslegemer i en vanlig R2 time, men denne fagdagen har gitt meg en fysisk beskrivelse av et omdreiningslegeme. Siden vi laget et legeme og skal få det printet ut, blir det sett på i en ny sammenheng fordi de teoretiske tankene jeg danner meg tar en fysisk reell form.»

Elev H: «Opplevelsen av fagdagen har vært veldig bra. Jeg har lært hvordan man bruker en 3D-printer. Det har vært spennende å lære, pluss at det er morsomt å se noe bli til fra praktisk talt ingenting. Jeg har lært nye ting om 3D-printeren og om hvordan man får 3D-printet noe. Jeg kan nok ikke si at jeg har lært så mye matematisk. Har heller ikke sett flere sammenhenger enn jeg gjorde før, men det kan være fordi jeg hadde ganske god forståelse fra før. Alt i alt har det nok vært greit å se visuelle figurer av omdreiningsfigurer, og dagen har vært spennende og morsom, selv om jeg ikke lærte så mye nytt. Lærte en del ting om geogebra, som er greit å ta med seg. Takk for dagen ☺»

Elev I: «Personlig likte jeg dagen veldig godt og hadde det veldig greit. Jeg synes denne dagen hjalp veldig godt med å få et bedre overblikk over integrasjon, men jeg vet ikke om dette ville hjulpet meg mer med å innfri kunnskapsmålene. Med dette tror jeg at jeg har fått en bedre forståelse og kan hjelpe meg å lære å forstå temaene i R2 bedre.»

Elev J: «Jeg synes dette har vært veldig lærerikt! Man fokuserer ikke på å pugge formler i geogebra, men heller å skape noe 3-dimensjonalt. Dette gjør at man ubevisst plotter inn flere funksjoner samt kommandoer som man husker tilslutt. Det å lage sitt eget drikkebeger gjorde at man fikk anvendt de ulike type funksjonene så dermed fikk man sett på egenskapene til de ulike funksjonene. Man fikk nemlig reflektert og repetert mye av tidligere og fortsatt relevant pensum i matematikk. I tillegg har man fått sett hvordan integrasjon, areal, volum og omdreiningsfigurer kan settes ut i livet, fra å være en geogebrafil. Dette gjorde at man faktisk ser hva det er godt for og hva det kan brukes til. Jeg tror dette vil klistre seg i minne og gjøre at kapittelet om blant annet integrasjon vil huskes mye bedre. Jeg synes dette har vært en veldig fin dag! Har lært mye mer enn jeg trodde jeg ville (ofte er «fagdager» morsomme og ikke faglige). Jeg var positivt innstilt til å lære en god del, men ikke like mye som jeg faktisk gjorde. Tror virkelig at elever vil ha godt utbytte av teori i praksis slik som dette prosjektet!»

6.1.1 Læring, interesse og engasjement

Alle elevene var som tidligere nevnt enstemmig i forhold til at de syntes fagdagen var interessant, og dette kommer også fram i sitatene ovenfor. Men det er også mange som gir tilbakemelding om at de mener at de har lært noe i løpet av dagen, og dette gjenspeiles blant annet av at halvparten av elevene, 8 stykker, brukte begrepet «lærerik» i sin utskriving.

Alle elevene benytter i tillegg positive formuleringer som «spennende», «interessant», «gøy/artig», «positivt» og «givende» i sine beskrivelser av hvordan de opplevde fagdagen. Dette er en tilbakemelding som tydelig viser at fagdagen, i tillegg til å gi elevene en opplevelse av at de har lært noe, også har skapt positivt engasjement.

6.1.2 «Noe annet enn å regne oppgaver og pugge formler»

Hva opplever elevene som «det som er positivt» med fagdagen? Flere av elevene (elev A, B, F og J) framhevet at denne dagen hadde vært noe annet enn «å sitte å regne oppgaver» eller noe annet enn å «pugge formler». Dette var en god tilbakemelding, i og med at en av målsetningene jeg hadde med å utarbeide og gjennomføre en slik fagdag, var å bryte ut av mønsteret med «gjennomgang og påfølgende oppgaveregning», og det at flere av elevene allerede i utskrivinga fremhever dette som positivt, er etter min mening et tydelig signal om at denne målsetningen er nådd.

6.1.3 Mestring i Geogebra

En annen kommentar som ble gitt flere ganger, var at de etter fagdagen opplevde at de var blitt tryggere i bruk av Geogebra, at de hadde lært nye bruksområder for programmet og fått bedre forståelse for hva Geogebra kan brukes til (elev A, C, H og J). Jeg får ofte kommentarer fra elever i ulike matematikkfag om at de er utrygge på Geogebra, eller at de foretrekker å gjøre oppgavene mest mulig manuelt med kalkulator som hjelpemiddel. Dette er ikke bare elever som strever med matematikk, men også, overraskende nok, ofte elever som mestrer matematikk «uten hjelpemidler» svært godt. Det at fagdagen bidro til økt trygghet i forhold til å bruke Geogebra, var også en av de grunnleggende årsakene jeg hadde ved å bruke en hel skoledag til dette.

6.1.4 Nytte av konkret produkt

Et annet viktig moment for min forskning, var om elevene så noen nytte i å få et konkret produkt fra 3D-printeren, om det å «holde sitt eget produkt i hånda» ga et annet utbytte enn å se det på PC-skjermen. Dette var noe flere av elevene kommenterte. Noen poengterte at de trodde lærdommen ville sitte bedre og på en annen måte med tanke på at de fikk det ferdige resultat (elev A), at det ville hjelpe på forståelsen (elev B, D) og at det fikk dem til å se sammenhenger (elev G). Disse elevene ga med andre ord positive tilbakemeldinger i forhold til det å få et konkret objekt som sluttresultat, og noen sa også noe om at de følte at dette ga økt læring. Men dette var noe som gjerne kunne utdypes mer, og det var derfor et moment som jeg ønsket å ta opp i intervjuene.

6.1.5 Læringseffekt ved bruk av digitale hjelpemidler

Etter «pilot-fagdagen» hadde jeg konkludert med at jeg ønsket større fokus på matematikk og mindre fokus på selve 3D-printeren. Jeg ønsket at elevene etter fagdagen skulle sitte igjen med en følelse av at de hadde lært matematikk denne dagen. Bruk av matematisk programvare er en del av matematikkfagene, og sånn sett har de fleste elevene presisert at de følte at de mestret Geogebra bedre etter å ha gjennomført denne fagdagen. Men oppfatter elevene at bruk av Geogebra og 3D-printer gir dem en bedre forståelse av selve matematikken? Noen elever sier noe om dette i utskrivingene. Det kommer utsagn om at de har lært mye om omdreining av grafer (elev B og C) eller at de har sett nye sammenhenger/fått bedre forståelse (elev D og J). Men det var også et par elever som ikke følte at de hadde lært så mye matematikk eller sett noen nye sammenhenger (elev H og I), til tross for at de ellers uttrykker seg positivt om fagdagen generelt og i en annen del av teksten sier at de «har sett flere sammenhenger» og at dagen har «gitt bedre overblikk over integrasjon». Dette var noe jeg håpet at intervjuene ville kunne utdype bedre. Hva gjør at elevene ikke føler at de har hatt matematikkfaglig utbytte når de har arbeidet med matematikkfaglige problemstillinger en hel dag? Er det fordi forståelsen er god fra før (elev H) eller er det fordi de ikke ser at det de har arbeidet med bidrar til måloppnåelse i forhold til kunnskapsmålene (elev I)? Eller er det andre årsaker?

6.2 Intervju

Som nevnt i kapittel 5, hadde jeg kommet fram til at de data som jeg skulle bygge mine eventuelle konklusjoner ut fra, hovedsakelig skulle bli samlet inn gjennom intervjuer i etterkant av fagdagen. Det ble planlagt og gjennomført totalt seks intervjuer, der tre av disse var individuelle intervjuer, mens de resterende tre var gruppeintervjuer med 4 elever i hver gruppe. Jeg gjennomførte de første intervjuene dagen etter fagdagen, deretter fortløpende de neste dagene, slik at siste intervju ble gjennomført en uke etter fagdagen.

Alle elevene var fylt 18 år da fagdagen ble gjennomført, og av de 16 elevene som var med på fagdagen, ønsket 14 å delta på intervju og meldte seg til dette skriftlig.

Alle intervjuene ble innledet ved at jeg sa at jeg primært ønsket at intervjuene skulle forløpe mest mulig som en fri samtale, men at jeg kunne komme til å stille konkrete spørsmål underveis. Jeg presiserte også nå at jeg ville sørge for anonymitet i forhold til bearbeiding av resultatet og at lydopptak ville bli slettet etter innlevering av oppgaven. Det ble også på dette tidspunkt understreket at elevene når som helst kunne trekke seg fra intervjuet hvis de ønsket det.

6.2.1 Helhetlig opplevelse av fagdagen

Hvert intervju ble innledet med at jeg spurte hva eleven/elevene syntes om fagdagen, og elevene ga samme positive tilbakemelding i intervjuene som de hadde gjort i utskrivingene.

> *«Jeg syns det var en veldig lærerik og spennende skoledag hvor jeg fikk gjort noe jeg egentlig har drømt om å få mulighet til å gjøre, hvis en kan si det på den måten.»*
>
> *«Det at vi nå fikk en hel dag der vi jobba med det, jobba med det visuelle, fikk se litt, fikk ta på (ler) de objektene som ble produsert, nei det var kjempebra.»*
>
> *«Det var egentlig en veldig lærerik dag, å få bruke de digitale verktøyene på en litt annen måte, spesielt at vi fikk brukt en 3D-printer, det er jo artig i tillegg til at man får lært fagstoffet.»*
>
> *«Jeg syns det var veldig bra. Først at du tok deg tid til å gjennomgå det der. Du ser jo at eksamenene går mer mot problemløsning og det lærte man på den her dagen, måtte tenke sjøl.»*

«Jeg syns at det var en veldig lærerik dag, det gjorde sånn at jeg lærte mye lettere, det sitt jo, jeg satt faktisk i sted å lagde flere sånne 3D-figurer (ler litt).»

«Jeg syns at det var artig. Det var spennende å lære om 3D-printere og det var spennende å få noe ut av det som vi egentlig kjente som Geogebra. At det kom noe.., altså Geogebra på en pc-skjem og så kom det ut noe fysisk, rett og slett. Sånn sett var det artig. Spennende å gjøre.»

Disse tilbakemeldingene ga meg en bekreftelse på inntrykket som utskrivingene hadde gitt, at elevene likte fagdagen og de følte at de hadde lært noe denne dagen. De innledende kommentarene i starten av intervjuene viste med tydelighet at elevene hadde vært motivert og engasjert i løpet av fagdagen, og at flere så direkte matematikkfaglig nytte i det de hadde gjort. Spesielt likte jeg utsagnet om at en av elevene hadde sittet og laget nye 3D-figurer i forkant av intervjuet, matematikk i 3D kan med andre ord være så spennende at man fortsetter etter at fagdagen er ferdig!

6.2.2 Synspunkter på innhold og gjennomføring av teoridel

Noe vi til ulike tidspunkt kom inn på i alle intervjuene, var hvilke tanker og synspunkter elevene hadde om oppbygning og gjennomføring av fagdagen. Spesielt snakket vi om at fagdagen kom rett etter at omdreiningslegemer hadde blitt introdusert i klassen. Var dette et greit tidspunkt? Og hva syntes de om innhold og gjennomgang av teoridelen?

«Teoridelen var passelig i forhold til hvor vi var i faget. Passe mengde også og ok med powerpoint. Kunne ikke vært mer, for det som var artig var jo når du tok fram Geogebra og vi begynte å jobbe med det. Det var jo det folk ville holde på med.»

«Jeg vil egentlig si at det var passelig mengde. Om du strekker en teoribit for langt ut i tid, så kan det fort bli kjedelig, det må man jo bare være ærlig å si.»

«Det var litt greit, men jeg følte ikke at jeg trengte det helt.»

«Vanligvis ville jeg foretrukket tavla, men sånn som du hadde gjort det nå, likte jeg at det var på powerpoint, siden det var de figurene du skulle vise oss, og at vi regnet det på Geogebra.»

«Jeg syns at det var nyttig for å skille ut de viktigste fakta som vi kom til å ta opp i løpet av dagen, og få plan og informasjon om det vi skulle jobbe med.»

«Jeg følte ikke at jeg fikk noe ut av det. Altså, jeg følte ikke at etter teoriøkta så kunne jeg det, for vi hadde ikke fått noen oppgaver eller noen eksempler til det, så jeg ville ikke sagt at det var en gjennomgang, heller en oversikt over hva det dreide seg om.»

Ut fra det elevene sier i forhold til teoridelen, slutter jeg at denne delen er nyttig for de fleste elevene. Den gir en repetisjon eller oppsummering i forhold til det fagdagen skal handle om, men den bør tilpasses til hvor mye elevene har arbeidet med emnet og hvor lang tid det er gått siden emnet ble arbeidet med. Jeg ser også at det kunne vært en fordel om jeg hadde vært i klassen i økta før, da emnet omdreiningslegemer ble gjennomgått for første gang. Hvis man gjennomfører en slik fagdag i egen klasse, vil man ha mye bedre kunnskap om hva elevene har gjort i emnet, enn om man kommer inn i en fremmed klasse. Jeg hadde imidlertid snakket med læreren på forhånd, og dette gjorde at jeg var klar over at emnet nettopp var gjennomgått, og at elevene ikke hadde rukket å arbeidet så mye med det. Jeg visste også at denne gjennomgangen primært hadde fokusert på den «manuelle» delen av emnet, det vil si hvordan oppgaver skulle løses uten digitale hjelpemidler.

6.2.3 Synspunkter på oppgavene som ble gitt

I intervjuene kom vi også inn på hva elevene syntes om oppgavene de fikk. Hva syntes de om den første oppgaven de fikk, «plastglass-oppgaven», og var det nødvendig å 3D-printe «resultatet» av denne oppgaven?

> *«På en måte får en opp motivasjonen, for man ønsker jo å skape det samme objektet. Så da er det sånn: Nå skal vi få dette til, og man får en mestringsfølelse, at ja, man får det til, og det er veldig likt som det det skal være.»*

> *«Den var jo veldig grei, den oppgaven der. Når vi fikk se hvordan 3D-printeren fungerte… du kunne jo bare ha laget den selv, men da hadde vi ikke fått sett hvordan den fungerte.»*

> *«Jeg syns jo det var artig. Ikke sånn man jobber vanligvis. Jeg liker jo at det av og til er litt annerledes, og det å gjøre det der, litt kreativt og problemløsning, det er jo veldig artig synes jeg.»*

> *«Tja.. Vi kunne i hvert fall sammenligne bedre med den ordentlige koppen, med det vi hadde skrevet ut. At det stemte.»*

Det at elevene sier at også den første oppgaven, som hadde faste rammer og en «fasit» var motiverende, artig og annerledes, viser at noe av det jeg hadde som målsetning for å gjennomføre denne fagdagen allerede var oppnådd helt i starten. Elever som velger programfag i matematikk i videregående skole, har oftest lærebøker der fasit er gitt bakerst i boka, og de fleste bruker denne fasiten til slutt for å kontrollere om svaret de har fått er riktig. I vår «plastglassoppgave» blir fasiten (plastglasset) delt ut på forhånd, og elevene skal via matematikk og 3D-printer «kopiere» plastglasset. Dette er for de fleste en ny måte å løse oppgaver på, og det var positivt at elevene selv følte at det var en motiverende måte å arbeide på. Elevene ga også respons i forhold til at det var greit å starte med en relativt enkel, felles oppgave, og de så nytten i at den ble 3d-printet etterpå. Konkurransemomentet i forhold til å modellere et glass som var så likt originalen som mulig, og hadde så likt volum som mulig, var også en tydelig motivasjon for noen.

Hva tenkte så elevene om å arbeide med en fri oppgave med rammer rundt? Og ga det ekstra motivasjon også her at det skulle bli fysiske objekter til slutt?

> *«Det blir jo på en måte en belønning nesten, for å liksom å ha eksperimentert, for å ha holdt på med det. Og det er jo ikke noe man er vant til å få i fag som det her. Det er vanligvis teoretiske problemer og du får et teoretisk svar, men når du holder et fysisk eksemplar av svaret ditt, så blir det noe annet.»*
>
> *«Altså, hadde vi bare gjort den oppgaven for å få et svar på skjermen, så hadde vi bare gjort den fort for å bli ferdig med den.»*
>
> *«Hvis jeg bare hadde fått opp noe på skjermen, da hadde det bare vært en figur. Det føles ut som et tapt potensiale, bare tenk for en fantastisk vase jeg kunne ha fått (ler). Motivasjon for å kunne tilpasse for å få et produkt er viktig.»*
>
> *«Ja, det er artig å kunne holde det vi har laget sjøl. At vi får holde den funksjonen vi trykket inn.»*

Ut fra det elevene sa i intervjuene virket det også som elevene var fornøyd med denne oppgaven. Flere påpeker, slik det framkommer i sitatene over, at de syntes det var stor forskjell på å «bare få et resultat på skjermen» og det å skulle få et fysisk objekt som resultat. 3D-printing er en ny teknologi for de fleste elevene, og til tross for at det for denne gruppen av elever også var en ny opplevelse å se sine egne omdreiningslegemer i 3D på skjerm, så var det det å få noe de hadde laget selv i konkret form til slutt som motiverte dem mest.

6.2.4 Ga fagdagen læring i matematikk?

Et annet spørsmål som ble stilt i alle intervjuene, var om elevene syntes at de hadde lært noe i forhold til matematikk som resultat av fagdagen. Det viste seg at elevene hadde relativt tydelige meninger i forhold til dette, noe sitatene som følger etter min mening gjenspeiler.

> *«Ja, absolutt. Vi hadde jo hatt litt om det, men vi hadde jo pugget regler. Den her forståelsen om hva det var, det var litt fjernt egentlig. Men det fikk vi jobbet litt med.»*
>
> *«Jeg tror at det kommer til å sitte bedre enn andre ting som vi har gjennomgått.»*
>
> *«Jeg lærte godt av matten som vi hadde, den var ganske tydelig.»*
>
> *«En av de viktigste tingene jeg har lært, eller ikke egentlig lært, men jeg fikk erfare at matematikk ikke bare er på papiret. Frem til nå har matematikk handlet om å løse oppgaver som har stått i ei bok, fordi at dem vil at vi skal gjøre det. …. Altså, matematikk er et verktøy som du bruker til andre ting i verden. Og det er kanskje det som jeg har fått mest ut av denne dagen, at jeg har fått erfare at jeg kan bruke matematikk som et verktøy i det virkelige liv.»*

Elevene som gjengis i de to første sitatene uttrykker at de har fått bedre forståelse for det som de hadde arbeidet med i fagdagen, og at dette var kunnskap de trodde ville «sitte bedre». Et utsagn gikk direkte på at matematikken var «tydelig», og at den aktuelle eleven hadde lært noe, uten at det ble presisert noe nærmere.

For å få et bedre helhetsinntrykk av elevenes tilbakemeldinger i forhold til læring gikk jeg gjennom intervjuene på nytt, og registrerte forekomst av ulike utsagn som har med læring, «matematisk nytteeffekt» og forståelse å gjøre.

Elevenes ord og formuleringer (direkte sitat eller samme betydning)	Antall ganger, intervju	Antall ganger, utskriving
«bedre forståelse»	11	4
«lærerik»	3	8
«lært noe nytt» eller «lært mer om»	7	7
«lettere å se for seg»	5	1
«sitter bedre» eller «husker bedre»	3	3
Matematikken ble «konkretisert»	13	5
Bedre forståelse av Geogebra	8	9

Sitatene og «oppsummeringen» viser at elevene har en klar følelse av at det å arbeide mot et konkret objekt og så få dette objektet, medførte læring. Det at så mange brukte begreper som «lærerik» og «lært noe nytt» eller «lært mer om» er klare indikasjoner på dette. De er også tydelige på at det å se objektene på skjerm (visualisering) og det å få objektene etterpå (konkretisering) gjorde at de forsto bedre hva en omdreiningsfigur er. I tillegg uttalte mange av elevene at de var blitt tryggere i forhold til å bruke Geogebra.

6.2.5 Relevans i forhold til eksamen

Flere av elevene uttrykker også at de ser nytte i det de har arbeidet med, i forhold til både skriftlig og muntlig eksamen.

> *«Til eksamen blir dette mye mer aktuelt. Da mener jeg at dette vil hjelpe ganske mye, hele del 2 er jo egentlig å løe problemer.»*
>
> *«Dette vil være til hjelp på muntlig eksamen. Det har gitt oss en måte å visualisere for en sensor, å kunne forklare og tegne bra.»*
>
> *«Hvis jeg får dette til muntlig eksamen, da skal jeg finne den her fram fra skuffen, og bare si sånn: Sjekk dette, her er omdreiningsfiguren jeg printet ut, det ville være dritkult å si det»*
>
> *«I forbindelse med del2-oppgaver på eksamen, jeg vet ikke hvor mye det er av det her på del 1, men jeg tenker mer sånn at hvis jeg kulle tenke meg en oppgave, så ville det vært å finne ut volumet, og da ville det jo vært som det vi gjorde her. Og da har vi jo brukt verktøyet tidligere, og da har vi jo mer å legge til grunn for å kunne lage noe med faste krav.»*
>
> *«Fått ut kanskje mer sånn for eksamen, hvis det hadde vært mulig eksamen så har man litt sånn, hva man kan snakke om. Jeg fikk ikke noe som jeg kunne brukt på en del 1, men det er jo eventuelt en del 2 eller eventuelt en muntlig eksamen.*
>
> *«Hvis jeg kommer opp til muntlig eksamen ser jeg for meg å smekke opp en sånn her (viser fram omdreiningsfiguren han har laget og ler, latter også fra de andre)»*

Det er interessant, men egentlig ikke overraskende, at mange av elevene så raskt, også på dette nivået, knytter læring opp mot hva som trengs til eksamen. Eksamen er, ved siden av standpunktkarakteren, det som til slutt forteller på hvilket faglig nivå eleven er, og det vil derfor oppleves viktig for elevene at en fagdag kan ha nytteverdi i forhold til eksamen.

Når det gjelder muntlig eksamen, så har jeg allerede sett eksempler på at elevene kan gjøre seg nytte av de erfaringer de har fått ved å være med på en slik fagdag. Jeg gjennomførte som tidligere nevnt «pilotfagdagen» i egen klasse, og en gruppe elever ble påfølgende vår trukket ut til muntlig eksamen. Det ble laget tre oppgaver, der en av oppgavene hadde differensiallikninger og integrasjon/omdreining som tema. De to elevene som trakk denne oppgaven brukte måten vi hadde arbeidet på i fagdagen som utgangspunkt for sin presentasjon av dette emnet, og de benyttet både Geogebra 3D og referanser til 3D-printer samt konkreter for å begrunne og utdype det de presenterte i sin gjennomgang. Også i den påfølgende samtalen viste elevene svært god forståelse for omdreiningslegemer, noe også ekstern sensor kommenterte spesielt.

Det er likevel tydelig at mange av elevene, også i matematikk R2, først og fremst er opptatt av «hva som kreves» og «hva vi må kunne til eksamen» istedenfor å ha fokus på å forstå matematikken og se nytteverdier i faget. Disse elevene arbeider bevisst mot instrumentell forståelse, som beskrevet i kapittel 2.2. Men det viste seg gjennom intervjuene at ikke alle elevene har denne holdningen. I ett av gruppeintervjuene oppsto en diskusjon mellom tre av elevene, og diskusjonen gikk nettopp ut på hva som «lønner seg» i matematikk i videregående skole. To av elevene var svært tydelige på at det som var viktig for dem, og som ble «belønnet» i matematikk, var å «hardpugge» formler. Det var ikke så viktig å forstå matematikken. Den tredje eleven uttalte derimot at han ønsket å forstå, og at han derfor ønsket å bruke mer tid på forståelse og mindre tid på ren metodeinnlæring. Alle tre elevene var imidlertid enige om at det beste ville vært å arbeidet mot forståelse, men at skolesystemet i Norge ikke var «lagt opp slik» i dag. Nedenfor følger et utdrag av denne diskusjonen, og utgangspunktet var at vi snakket om fagdagen hadde ført til økt forståelse:

> ***Elev1:*** *«Vi har jo fått en bedre forståelse av tema, men jeg vet ikke hvor mye det vil hjelpe oss på så kort tid, for å oppnå kunnskapsmålene i faget. For jeg tror vi hadde klart oss bedre med bare å pugge hardt. Men jeg tror vi får en mye bedre forståelse av det her, men for å oppnå kunnskapsmålene så er det bare å pugge formlene, egentlig. Så på kort sikt, så vil jeg nok si at det er bedre å bare «hardpugge», men for å få en bedre forståelse er denne dagen veldig bra.»*
>
> ***Elev2:*** *«Jeg er fan av å kunne forstå, heller enn å gjøre det riktig hele tiden. Så når jeg skal jobbe med ting, så vil jeg heller forstå det, enn å gjøre det helt riktig. Så når jeg jobber med oppgaver så er det min jobb å gjøre færre oppgaver, og heller prøve å*

forstå det, forstå hvorfor det blir sånn. Hvis du pugger, pugger, pugger en metode, så får du det kanskje riktig på prøven, men du aner ikke hvorfor.»

Elev3: *«… skolesystemet er ikke bygd opp sånn at man skal forstå, skolesystemet er bygd opp sånn at du får et kapittel, du lære det kapitlet, får en prøve, får en karakter, ferdig med kapitlet. Og så … det er jo karakterene som har noe å si, derfor blir jo karakterene veldig viktige. Så derfor, for min del, så er det å bare hardpugge, og så få rett svar, spesielt på prøven, det er viktigere enn å forstå. For det er faktisk sånn skolesystemet er bygd opp. Jeg sier ikke at det er en bra måte å bygge opp skolesystemet på, jeg sier bare at sånn er det, og jeg må bare forholde meg til det.»*

Det var svært interessant å høre på elevenes diskusjon, som egentlig omhandlet å gjøre aktive valg mellom instrumentell og relasjonell forståelse(kapittel 2.2), selv om elevene ikke benyttet de eksakte begrepene. Elevene var tydelige på at de mente at fagdagen hadde gitt det som kan betegnes som relasjonell forståelse, men to av de tre elevene mente at dette ikke var noe som kommer «til nytte» i matematikkfaget, det som «blir belønnet» i vårt skolesystem er å pugge formler, det er ikke nødvendig med noen dypere forståelse for å få en god karakter. Det som belønnes er, ifølge disse to elevene, i stor grad instrumentell forståelse.

6.2.6 Reaksjon på å få «sitt eget produkt»

Mot slutten av hvert intervju fikk elevene utdelt sine omdreiningslegemer, som jeg hadde printet ut på forhånd. Reaksjonene sier litt om engasjement og følelser i forhold til det å ha «konkret matematikk» i hånda.

«Utrolig tøft!»

«Det er spennende å se at det faktisk går an å få ut omdreiningslegemer med 3D-printer og at teknologien faktisk er kommet så langt.»

«Nå har jeg jo en funksjon i handa!» (ler)

«Det er jo litt artig da!»

Jeg observerte at alle elevene viste positivt engasjement når de fikk utdelt omdreiningsfigurene de hadde laget i Geogebra, både ved utsagn og kroppsspråk. Det er ingen tvil om at det skulle å få «beviset» på at omdreining av en funksjon kan gi et konkret produkt hadde skapt en forventning hos elevene. Dette ga som tidligere nevnt seg utslag i engasjement også i løpet av selve fagdagen, og flere av elevene poengterte at de hadde brukt mere tid på oppgaven med drikkebegeret nettopp fordi de skulle få det konkrete produktet i ettertid. Dette ble, som flere elever poengterte i intervjuene, en medvirkende årsak til at elevene eksperimenterte mer med funksjoner i Geogebra enn de ellers ville ha gjort.

6.2.7 Funn fra tredje fagdag

Tre måneder etter at jeg hadde gjennomført fagdag og intervjuer, ble jeg forespurt om å gjennomføre en lignende fagdag i en annen R2-gruppe. Denne fagdagen ble gjennomført på samme måte som den forrige, og jeg besluttet å la også denne gruppa gjøre ei utskriving for å se om det kom fram nye synspunkter i forhold til de to foregående gjennomgangene.

Den mest interessante utsagnet som kom fra innskrivingen var følgende:

«Jeg har også fått mye bedre kontroll på bruken av definisjonsmengder i Geogebra»

Dette var en effekt jeg på forhånd ikke hadde tenkt skulle komme ut av denne fagdagen, men etter å ha lest utskrivingen til nevnte elev, skjønte jeg hva eleven mente. Definisjonsmengder brukes ofte i tilknytning til funksjoner, men da helst som en del av en gitt oppgave. Funksjonen har med andre ord en bestemt definisjonsmengde fra start, og elevene trenger nødvendigvis ikke reflektere så mye over hvorfor det er slik. Men i denne fagdagen må de bruke definisjonsmengder aktivt for å få en ønsket form på et omdreiningslegeme, og kanskje kombinere ulike funksjoner med ulike definisjonsmengder. Dette er noe jeg aktivt kommer til å bruke videre i min undervisning i matematikk.

Ellers var tilbakemeldingene ganske like de som kom etter de andre fagdagene, og jeg gjorde også her en opptelling av begreper brukt av elevene i utskrivingene:

Elevenes ord og formuleringer	**Antall ganger, utskriving**
Lærerrik/har lært mer	7
Lært mer Geogebra	9
Interessant	3
Gøy	5
Positivt å få konkret figur/egen figur	6
Lært mer om funksjoner	2
Positivt med praktisk matematikk	5

7 Konklusjon

I denne masteroppgaven har jeg satt fokus på visualisering og konkretisering i et av programfagene i matematikk. Jeg har utviklet, gjennomført og evaluert et undervisningsopplegg som er forankret i flere læreplanmål i matematikk R2, samt i den generelle delen av læreplanen.

Utgangspunktet for dette arbeidet var tredelt. For det første hadde jeg et ønske om å utvikle og forbedre min egen undervisning ved å prøve ut nye undervisningsopplegg og arbeidsmåter. Dernest ønsket jeg at elever som velger programfag i matematikk, skulle få mulighet til å forstå mer av matematikken de arbeider med, ikke bare arbeide instrumentelt med faget. Dette sett i sammenheng med det som ble diskutert i kapittel 2.2 om instrumentell og relasjonell forståelse. Og sist, men ikke minst, ville jeg gjennom dette arbeidet forsøke å bidra til at digitale hjelpemidler ikke bare blir brukt som verktøy for å finne konkrete svar på et matematisk problem, men også som et middel til å forstå matematikk på en bedre måte.

Med dette som utgangspunkt, valgte jeg omdreiningslegemer, volumberegning og det bestemte integral som matematikkfaglig fundament for masteroppgaven. Bruk av Geogebra 3D og 3D-printer ble benyttet for å visualisere og konkretisere omdreiningslegemene. Problemstillingen, som også var mitt forskningsspørsmål, ble ut fra dette slik:

> ***Hvordan opplever elever at digital 3D-visualisering og konkretisering med 3D-printer bidrar til utvidet forståelse av omdreiningslegemer?***

For å finne svar på problemstillingen, innhentet jeg både skriftlige og muntlige tilbakemeldinger fra elevene. Etter gjennomgang av inn- og utskriving samt transkripsjon av intervjuene, har kom jeg fram til følgende «svar» på problemstillingen:

- Elevene opplevde at bruk av digital 3D-visualisering og konkretisering med 3D-printer har gitt dem utvidet forståelse av hva et omdreiningslegeme er.
- Flere elever opplevde at de hadde sett nye sammenhenger mellom volumet til et omdreiningslegeme og integralformelen
- Elevene påpekte at det var viktig for forståelsen av volumberegning, at vi brukte en faktisk måling av volumet som kontroll av den matematiske beregningen.

- Elevene var mer usikre i forhold til om de fikk en bedre forståelse av det bestemte integralet og integralregning generelt. Flere presiserte at de ikke trodde at de var blitt flinkere til å integrere etter å ha gjennomført fagdagen.
- Noen elever var tydelige i forhold til at de opplevde å ha fått ny forståelse av funksjoners definisjonsområde gjennom dette arbeidet, noe som for meg var en uventet, men positiv effekt.

Jeg er glad for å ha fått bekreftelser på at elevene opplever å ha fått økt forståelse for matematiske emner ved å være med på en slik fagdag. Dette gjør at jeg også for kommende R2-elever vil gjennomføre en lignende opplegg. Jeg ser imidlertid også at opplegget kan og bør utvikles videre, og en mulig videreutvikling kan være at man har større fokus på volumberegning. Kanskje kan det være aktuelt å beregne volum av eget drikkebeger? Dette kan sette større fokus på de ulike funksjonsuttrykk og definisjonsområder elevene benytter.

Arbeidet med denne masteroppgaven har også gitt meg tilbakemeldinger på andre områder enn de som direkte knytter seg til problemstillingen.

- Elevene opplever at de er blitt tryggere i bruk av Geogebra etter fagdagen, og de har sett nye bruksområder for programmet.
- Elevene gir positive tilbakemeldinger i forhold til at de har fått sett hva en 3D-printer er, at de har fått vite litt om generelle bruksområder og at de nå vet noe om hvordan en 3D-printer kan brukes i forhold til matematikk.
- Ut fra de observasjoner jeg gjorde i løpet av fagdagen, kan jeg konkludere med at fagdagen skapte et engasjement, en motivasjon og en kreativitet som jeg ikke har opplevd i mine matematikkøkter tidligere.
- Elevene opplevde at fagdagen var nyttig i forhold til kommende eksamener, både skriftlig og muntlig.

Det at elevene etter en slik fagdag er blitt tryggere i bruk av Geogebra, har vært engasjert og fått økt motivasjon, er svært positive tilleggseffekter. Og det at elevene ser nytteeffekt i forhold til eksamen, gjør at de blir tryggere i forhold til at dagen ikke er «bortkastet», faglig sett. Det som i stor grad styrer matematikkundervisningen i videregående skole i Norge i dag, er sentralgitt skriftlig eksamen, enten vi liker det eller ikke. Og slik skriftlig eksamen i programfagene har vært utformet de senere år, har det å kunne algoritmer og prosedyrer vært det som har «lønnet seg». Derfor er det positivt at elevene, etter å ha gjennomført en fagdag med kreativt og eksperimentelt innhold, ser en nytteverdi i forhold til eksamen, både instrumentelt og relasjonelt.

Men det som for meg kanskje var den viktigste tilbakemeldingen i forhold til hva en slik fagdag kan bety for elevene, var følgende «hendelse»:

> *Vi har en pause i fagdagen, og 3D-printeren er i gang med å printe det lille plastglasset.*
>
> *En elev som ikke er med på fagdagen, kommer inn i klasserommet, ser på 3D-printeren, og sier:*
>
> > ***«Men, var det ikke matematikk fagdag dere hadde??»***
>
> *En av fagdagselevene peker på plastglasset i 3D-printeren og sier:*
>
> > ***«Det der <u>er</u> matematikk!»***

8 Veien videre

Jeg har lært mye ved å gjennomføre denne studien. Først og fremst har jeg gjort nye erfaringer i forhold til både bruk av Geogebra og 3D-printer. Dernest har jeg fått ny innsikt i elevenes opplevelser knyttet til læring i og forståelse av matematikk, og sist, men ikke minst, har jeg lært mye om forskning på undervisning. Jeg ser imidlertid også at i forhold til det jeg har arbeidet med i min studie, så er det rom for forbedringer, og det kan arbeides videre i forhold til dette i ulike retninger og med forskjellige fokus.

En mulighet er å ta utgangspunkt i en lignende problemstilling som den jeg hadde, men at man går enda mer i dybden. Jeg hadde for eksempel ingen erfaring med intervjusituasjoner, og ser at det er flere muligheter for forbedringer i forhold til hvordan gjøre intervju og hvordan på best mulig måte gjøre observasjoner i løpet av fagdagen. Video og eventuelt lydopptak kunne med fordel ha vært benyttet på selve fagdagen. Etter å ha transkribert intervjuene, ser jeg at jeg i tillegg til å la elevene snakke fritt om emnene, kunne hatt flere «tema» som ble tatt opp og diskutert i alle intervjuene. Et eksempel kunne vært å hørt flere elevers syn på instrumentell og relasjonell forståelse av matematikk.

En annen mulighet for videre forskning, kan være å ta utgangspunkt i den motivasjon og det engasjement jeg opplevde hos elevene i løpet av fagdagen. Motivasjon for matematikk er et stort og viktig emne. Å forske på om det å lage egne, konkrete objekter med funksjoner som utgangspunkt kan skape motivasjon for matematikk, eller om bruk av digitale hjelpemidler kan gi økt motivasjon for faget, kunne vært både interessant og spennende.

Kreativitet er heller ikke et vanlig tema i programfagene i matematikk. Min studie viser at det er mulig å utarbeide kreative opplegg med forankring i læreplanmålene i matematikk R2. Jeg har også vist at elevene opplever læring gjennom et slikt opplegg. For egen del har jeg derfor satt meg som mål å lage flere kreative opplegg i forhold til både programfagene og fellesfagene i matematikk, gjerne ved hjelp av konkreter og digitale verktøy. Disse oppleggene skal, som fagdagen, kunne knyttes til læreplanen, og de skal ha utvidet forståelse av et matematisk emne, kreativitet og engasjement som målsetning.

9 Litteraturliste

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Baron, M. (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. London: Pergamon Press Ltd.

Bishop, A. (2008). *Critical Issues in Mathematics Education: Major Contributions of Alan Bishop*. Boston, MA: Springer US: Boston, MA.

Bruner, J. S. (2006). *In search of pedagogy : the selected works of Jerome S. Bruner : Vol. I* (Vol. Vol. I). London: Routledge.

Creswell, J. W. (2014). *Research design : qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed. ed.). Los Angeles, Calif: SAGE.

Dewey, J. (1956). *The child and the curriculum ; The school and society*. Chicago: The University of Chicago Press.

Donaldson, M., Withrington, D., & Duthie, J. (1963). A study of children's thinking. London: Tavistock Publications.

Euclid. (2002). *Euclid's Elements, all thirteen books complete in one volume* (T. L. Heath, Trans.).

Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics* (6th ed. ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.

Farnell, E., & Snipes, M. A. (2015). Using the Pottery Wheel to Explore Topics in Calculus. *PRIMUS, 25*(2), 170-180. doi:10.1080/10511970.2014.922151

Figueiras, L., & Arcavi, A. (2014). A touch of mathematics: coming to our senses by observing the visually impaired.(Report). *ZDM, 46*(1), 123.

Garrity, C. (1998). Does the Use of Hands-On Learning, with Manipulatives, Improve the Test Scores of Secondary Education Geometry Students?

Gorgorio, N. (1998). Exploring the Functionality of Visual and Non-Visual Strategies in Solving Rotation Problems. *Educational Studies in Mathematics, 35*(3), 207-231.

Grønmo, L. S., Hole, A., & Onstad, T. (2016). *Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS Advanced 2015. Matematikk og fysikk i videregående skole*. *Ett skritt fram og ett tilbake*

Heir, O., Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H., & Moe, H. (2016). *Matematikk R2*: H. Aschehoug & Co.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis.*: Lawrence Erlbaum, Hillsdale (NJ).

Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics : an introduction* (3rd ed. ed.). Boston, Mass: Addison-Wesley.

Kruteckij, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* (Vol. 1). Chicago: University of Chicago Press.

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M., & Rygge, J. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg. ed.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Kvam, A., Størkersen, I. O., & Valdermo, O. (1989). *Metodisk veiledning i naturfag*. Oslo: Rådet for videregående opplæring : Gyldendal.

Lean, G., & Clements, M. K. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 267-299.

Lipson, H., & Kurman, M. (2013). *Fabricated: The new world of 3D printing*: John Wiley & Sons.

Lund, T., & Haugen, R. (2006). *Forskningsprosessen*. Oslo: Unipub.

Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(2), 201-211.

Martin, J. L., & Bradbard, D. A. (1976). Space and Geometry. Papers from a Research Workshop.

Meade, D., Sanders, R., & Wu, X. (2006). Project 1: Goblet Design. Retrieved 23.03.2017, from http://people.math.sc.edu/calclab/142L-S06/labs/GobletProj106s.pdf

Mellin-Olsen, S. (1975). *Instrumentalisme som pedagogisk begrep : belyst ved undersøkelser av matematikkundervisning*. Bergen: Universitetet.

Mellin-Olsen, S., & Hoel, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet : en undervisninglære*. Bekkestua: NKI-forl.
Mofolo-Mbokane, B. (2011). *Learning difficulties involving volumes of solids of revolution: A comparative study of engineering students at two colleges of Further Education and Training in South Africa*University of Pretoria).
Olsson, H., Sörensen, S., & Bureid, G. (2003). *Forskningsprosessen : kvalitative og kvantitative perspektiver*. Oslo: Gyldendal akademisk.
Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *An International Journal, 14*(1), 1-18. doi:10.1007/BF00704699
Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3rd ed. ed.). Thousand Oaks, Calif: Sage Publications.
Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. London: Routledge & Kegan Paul.
Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *An International Journal, 17*(3), 297-311. doi:10.1007/BF00305075
Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in High School Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 42-46.
Punch, K. F. (2009). *Introduction to research methods in education*. Los Angeles, Calif: Sage.
Reason, P., & Bradbury, H. (2008). *The SAGE handbook of action research : participative inquiry and practice* (2nd ed. ed.). London: SAGE.
Rösken, B., & Rolka, K. (2006). *A picture is worth a 1000 words–the role of visualization in mathematics learning.* Paper presented at the Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
Segerman, H. (2012). 3D Printing for Mathematical Visualisation. *The Mathematical Intelligencer, 34*(4), 56-62. doi:10.1007/s00283-012-9319-7
Simmons, G. F. (1992). *Calculus Gems. Brief Lives and Memorable Mathematics.* New York, USA: McGraw-Hill, Inc, .
Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.
Slavkovsky, E. A. (2012). Feasibility Study For Teaching Geometry and Other Topics Using Three-Dimensional Printers. *Harvard University*.
Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History*. New York, NY: Springer New York, New York, NY.
Tartre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 216-229.
Thompson, P. W., & Lambdin, D. (1994). Concrete materials and teaching for mathematical understanding. *Arithmetic teacher, 41*, 556-556.
Torricelli, E. (1644). Opera geometrica: Florentiæ, typis Amatoris Masse & Laurenti de Landis.
Utdanningsdirektoratet. (2006). Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01). Retrieved 17.03.2017, from https://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Kompetansemaal
Wohler, T. (2005). 3D Printing in Education. Retrieved 24.03.2017, from http://www.wohlersassociates.com/SepOct05TCT3dp.htm
Woolner, P. (2004). *A comparison of a visual-spatial approach and a verbal approach to teaching mathematics.* Paper presented at the Proceedings of the 28th Conference of the International.
Yasskin, D. P. (2014). MATH 152, Spring 2014 Honors Projects. Retrieved 23.03.2017, from http://www.math.tamu.edu/~phil.yasskin/prevclas/152H.14a/Projects/

Vedlegg

Vedlegg nr 1: Søknad om godkjenning til rektor. Samtykkeerklæring.

[redacted]

[redacted], 10.10.16

Søknad om godkjenning av at en gruppe R2-elever ved [redacted] videregående skole deltar i mastergradsprosjekt.

Jeg er nå inne i 4., og forhåpentligvis avsluttende år av mitt masterstudie ved Universitetet i Bergen, og jeg er i gang med masteroppgaven. Masteroppgaven er planlagt levert innen 1. juni 2017.

Min masteroppgave tar utgangspunkt i at jeg har et ønske om å arbeide med visualisering og konkretisering i matematikk programfag, både for å prøve å gi rom for større forståelse for faget, og for å sette matematikken inn i en større sammenheng. I begynnelsen så jeg på muligheten av å knytte et praktisk prosjektarbeid til bruk av matematisk programvare, og da spesielt 3D-Geogebra, men etter hvert kom idéen om å i tillegg benytte 3D-printer.

<u>Masteroppgavens foreløpige tittel</u>: Bruk av 3D-printer og matematisk programvare for visualisering og konkretisering i matematikk R2

<u>Foreløpig problemstilling:</u> Vil bruk av matematisk programvare og 3D-printer i et praktisk prosjektarbeid bidra til at elever i faget matematikk R2 på en bedre måte kan gjøre en tolkning av det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner, og få en bedre forståelse av hva omdreiningslegemer er?

For å få svar på problemstillingen er det nødvendig å gjennomføre prosjektarbeidet i en matematikk R2-gruppe, og jeg ønsker å gjennomføre dette på [redacted] vgs.

[redacted] er positiv til at hans gruppe, [redacted] deltar i prosjektet.

Prosjektinformasjon:

- Prosjektarbeidet er planlagt til onsdag 2. november, foreløpig skisse for program er vedlagt.
- Elevene må ut av ordinær undervisning denne dagen da prosjektarbeidet går over en hel skoledag og kan regnes som en fagdag i matematikk R2.
- I løpet av fagdagen vil elevene bli bedt om å gi skriftlige tilbakemeldinger, og i tillegg vil jeg gjøre observasjoner mens elevene arbeider.
- Faglærer [redacted] vil være tilstede på fagdagen.
- Jeg ønsker å intervjue ca. 5-6 elever like etter prosjektet. Dette vil bli gjort i elevenes studietimer eller utenom skoletiden, og vil være frivillig. Intervjuene vil foregå med lydopptak, som vil bli slettet etter at oppgaven er levert.
- Det vil bli innhentet skriftlig samtykke for deltakelse i intervjuene fra elevene, og eventuelt foresatte dersom det er noen som ikke er fylt 18 år 2. november.
- Elevene vil bli anonymisert i masteroppgaven, og all informasjon vil bli behandlet konfidensielt.

Veileder for denne masteroppgaven er Christoph Kirfel, matematisk institutt, Universitetet i Bergen, tlf. 55 58 48 73, epost: christoph.kirfel@uib.no.

Studien er meldt inn til Personverombudet for forskning.

Håper på positiv tilbakemelding på denne søknaden.

Med vennlig hilsen
Vibeke Bakken.

SAMTYKKEERKLÆRING

Skolens ledelse ved rektor og faglærer i [redacted] samtykker i at Vibeke Bakken kan gjennomføre en fagdag i matematikk R2 onsdag 2. november, med påfølgende intervjuer, som del av forskningsprosjektet tilknyttet sin masteroppgave.

Skolens ledelse og faglærer har lest gjennom informasjonen og fått tilstrekkelig informasjon fra Vibeke Bakken om hvordan hun planlegger å gjennomføre fagdagen og intervjuene.

Dato: ________________________

____________________________________ ____________________________________

Underskrift rektor Underskrift faglærer [redacted]

Vedlegg nr 2: Informasjon om fagdag til elevene. Samtykkeerklæring.

INFORMASJON OM FAGDAG I MATEMATIKK R2
FORESPØRSEL OM DELTAKELSE I INTERVJU I FORBINDELSE MED MASTERGRADSPROSJEKT.

Mitt navn er Vibeke Bakken, jeg er lærer ved [redacted] videregående skole og jeg underviser i matematikk og informasjonsteknologi.

Skoleåret 2013/14 startet jeg en deltidsutdanning ved Universitetet i Bergen: Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk. Planen er at dette studiet skal avsluttes til våren, ved at jeg leverer en masteroppgave innen 1. juni 2017.

Masteroppgavens utgangspunkt:
Jeg har et ønske om å arbeide med visualisering og konkretisering i matematikk programfag, både for å prøve å gi rom for større forståelse for faget og for å sette matematikken inn i en større sammenheng. I starten så jeg på muligheten av å knytte et praktisk prosjektarbeid til bruk av matematisk programvare, og da spesielt 3D-Geogebra, men etter hvert kom idéen om også å benytte 3D-printer.

Masteroppgavens foreløpige tittel:
Bruk av 3D-printer og matematisk programvare for visualisering og konkretisering i matematikk R2

Masteroppgavens foreløpige problemstilling:
Vil bruk av matematisk programvare og 3D-printer i et praktisk prosjektarbeid bidra til at elever i faget matematikk R2 på en bedre måte kan gjøre en tolkning av det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og få en bedre forståelse av hva omdreiningslegemer er?

Rektor og faglærer har godkjent at dere som gruppe kan ha en ekstra fagdag i matematikk R2, der dette prosjektarbeidet gjennomføres. I tillegg til å være en del av min masteroppgave, vil prosjektarbeidet være en fordypning i ett av hovedmålene i læreplanen for matematikk R2, Funksjoner, og da spesielt knyttet til to av kompetansemålene (Utdanningsdirektoratet, 2006):

- ✓ ***Mål for opplæringen er at elevene skal kunne tolke det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og bruke det til å beregne arealer av plane områder og volumer av omdreiningslegemer.***
- ✓ ***Formulerer en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte.***

Prosjektinformasjon:
- Prosjektarbeidet er planlagt til onsdag 2. november.
- For å delta i dette prosjektet må dere ut av ordinær undervisning. Siden dette er et fagrettet opplegg godkjent av rektor, vil dette ikke telle som fravær i forhold til 10% regelen.
- I løpet av fagdagen vil dere bli bedt om å gi noen korte skriftlige tilbakemeldinger som hjelp til masteroppgaven jeg skal skrive, og jeg vil gjøre observasjoner i forhold til arbeidsprosessen.
- Faglærer vil være tilstede på fagdagen.

Fagdagen vil bestå av fire deler:
1. Introduksjon med kort repetisjon av integrasjon, omdreiningsfigurer og volumberegning. Demonstrasjon av 3D-geogebra for tegning av omdreiningsfigurer ut fra funksjonsuttrykk.

2. Praktisk gruppearbeid der et utlevert objekt skal tegnes i 3D-geogebra, og deretter beregnes volum ved hjelp av integrasjon.
3. Hva er en 3D-printer og hvordan virker den? Hvordan bruke programvaren Wolfram Mathematica i kombinasjon med 3D-printer? Demonstrasjon av 3D-printer.
4. Individuell oppgave – hver tegner sin egen omdreiningsfigur etter gitte kriterier ved hjelp av 3D-Geogebra. Hver figur vil bli printet.

Intervju

I tillegg til fagdagen ønsker jeg å intervjue 5-6 elever i ettertid for å få bedre kjennskap til hva dere selv mener at dere fikk ut av fagdagen. Dette må gjøres i en av deres studietimer, eventuelt etter skoletid. Det å være med på et slikt intervju er frivillig, og du kan når som helst trekke ditt eventuelle samtykke uten å oppgi noen grunn. Intervjuene kan skje individuelt eller i gruppe, alt etter hva dere ønsker selv.

Jeg vil tro at de fleste av dere planlegger videre utdanning der det å skrive en bachelor- eller masteroppgave vil inngå, og det vil i den sammenheng være lærerikt for dere å være med på en intervjuprosess.

Det vil bli gjort lydopptak av intervjuene, og disse vil bli slettet etter at masteroppgaven er levert.

Alle elever vil bli totalt anonymisert i masteroppgaven, noe som er mulig siden det jeg skal skrive om er hvilke meninger og oppfatninger dere har om prosjektarbeidet og eventuelle læringsprosesser knyttet til dette. All informasjon vil bli behandlet konfidensielt.

Dersom du ønsker å delta på fagdagen og eventuelt er villig til å delta i et slikt intervju, ber jeg om at du fyller ut samtykkeerklæringen nedenfor med avkrysninger og underskrift.

SAMTYKKEERKLÆRING

Jeg har lest gjennom informasjonen og fått tilstrekkelig informasjon om hensikten med prosjektarbeidet som skal gjennomføres onsdag 2. november 2016.

☐ Jeg ønsker å delta på fagdagen i matematikk R2 onsdag 2. november ut fra beskrivelsen som er gitt i informasjonen.

☐ Jeg godkjenner at mine skriftlige tilbakemeldinger, samt observasjoner som gjøres av min arbeids- og læringsprosess, blir benyttet i Vibeke Bakkens masteroppgave i anonymisert form.

☐ Jeg er villig til å være med på et intervju i etterkant av fagdagen.

Dato: ____________________

____

Underskrift elev

Vedlegg nr 3: Intervjuguide.

INTERVJUGUIDE FOR INTERVJU ETTER PROSJEKTARBEID

Jeg planlegger å intervjue 5-6 elever etter at vi har gjennomført prosjektarbeidet.

Elevene har i løpet av fagdagen skrevet to tekster som beskrevet i dokumentet «Spørreskjema – Masteroppgave.pdf», en innskriving og en utskriving. Innholdet i disse tekstene vil være utgangspunkt for intervjuene jeg skal gjennomføre, og jeg håper å få utfyllende svar og diskusjon rundt erfaringene hver enkelt elev har gjort i prosjektarbeidet.

Håpet er at det blir mer en samtale enn et intervju, men jeg har en momentliste som kan benyttes hvis samtalen «går i stå»:

Momentliste:

- Hva syns du om fagdagen?
  - Positive momenter
  - Negative momenter
  - Mulige forbedringer
- Lærte du noe nytt?
- Fikk du bedre forståelse for ett eller flere emner?
  - Hvis ja, hvilke?
- Liker du å bruke 3D-Geogebra?
  - Hvis ja, hvorfor? Artig variasjon, eller gir det bedre forståelse?
  - Hvis nei, hvorfor ikke?
- Du arbeidet med visualisering av omdreiningslegemer – tenker du at det har noen hensikt å visualisere omdreiningslegemer med 3D-grafikk?
  - Hvis ja, hvorfor?
  - Hvis nei, hvorfor ikke?
- Hva syns du om å bruke 3D-printer i matematikk?
  - Tar det fokus vekk fra matematikken eller gir det bedre forståelse?
  - Kan du tenke deg andre bruksområder i matematikkfaget?
- Vi har ved hjelp av 3D-printer konkretisert omdreiningslegemer – tenker du at det har noen hensikt å konkretisere med 3D-printer?
  - Hvis ja, hvorfor?
  - Hvis nei, hvorfor ikke?
- Forsto du mer av hvordan arealberegning av plane figurer og volumberegning av romfigurer henger sammen?
  - Hvis ja, på hvilken måte?
- Har du gjennom prosjektarbeidet fått økt forståelse av integrasjon?
  - Hvis ja, på hvilken måte?

Det vil gjøres lydopptak av intervjuene. Lydopptakene vil transkriberes og deretter bli slettet. Transkripsjonen vil bli anonymisert.

Vedlegg nr 4: Godkjenning NSD

Christoph Kirfel
Matematisk institutt Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 03.11.2016 Vår ref: 50436 / 3 / HJP Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 06.10.2016. Meldingen gjelder prosjektet:

50436	*Bruk av Geogebra 3D og 3D-printer for konkretisering i matematikk R2.*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Christoph Kirfel*
Student	*Vibeke Bakken*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 01.06.2017, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Hanne Johansen-Pekovic

Kontaktperson: Hanne Johansen-Pekovic tlf: 55 58 31 18
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 50436

REKRUTTERING PÅBEGYNT

I telefonsamtale 02.11.16 informerte student om at rekruttering allerede var påbegynt, og at det er blitt sendt ut informasjonsskriv og samtykkeerklæring til utvalget. Personvernombudet minner om at meldepliktige prosjekter skal meldes senest 30 dager før oppstart. En viktig del av ombudets rolle er å veilede i prosessen med informasjon og samtykke. Førstegangskontakt med utvalget bør derfor vente til personvernombudets tilråding foreligger.

UTVALG

Utvalget består av elever fra tredje trinn ved en videregående skole. I telefonsamtale 02.11.16 informerte student om at alle informantene er fylt 18 år.

DATAINNSAMLING

Datamaterialet vil bestå av egenevalueringer av mattematikkkunnskaper for omtrent 15 elever, observasjon ved fagdag og personlige intervju med 5-6 elever.

For observasjonsdelen av prosjektet har du oppgitt at det er utført observasjon ved utførelse av fagdagen, men det ble ikke samlet inn eller notert ned personopplysninger. Denne delen av prosjektet er derfor vurdert som ikke meldepliktig, og vil ikke inngå i vurderingen av prosjektet. Egenevalueringene ble fylt ut i forbindelse med en fagdag for bruk av Geogebra 3D og 3D printer i matematikk R2. Siden disse er levert inn elektronisk gjennom Fronter er denne delen av prosjektet vurdert som meldepliktig. De personlige intervjuene er også vurdert som meldepliktige da disse vil bli tatt opp med digital lydopptaker, og det vil bli opprettet en koblingnøkkel mellom egenevalueringene og intervjuene.

INFORMASJON OG SAMTYKKE

Utvalget er skriftlig og muntlig informert om prosjektet og har samtykket til deltakelse. Informasjonsskriv og samtykkeerklæring er noe mangelfullt utformet for å oppfylle kravet om et informert samtykke etter personopplysningsloven. Du må derfor gi følgende informasjon til utvalget før du samler inn datamaterialet (egenevalueringer og utfører intervjuer), dersom denne informasjonen ikke allerede er gitt muntlig:

- at deltagelse i prosjektet (innsamling av egenevalueringene og intervju) er helt frivillig, og at hvorvidt elevene deltar i prosjektet ikke vil ha innvirkning på deres relasjon til skolen, faglærer eller karakter i faget.
- hvilken institusjon som er ansvarlig for prosjektet (Universitetet i Bergen)
- kontaktopplysninger til student/veileder
- hvem som vil ha tilgang til datamaterialet med personopplysninger
- dato/tidspunkt for prosjektslutt og anonymisering av datamaterialet

DOBBELTROLLE SOM FORSKER

Av informasjonsskrivet fremkommer det at du er lærer ved skolen det skal rekrutteres fra, og er eller har vært lærer for de elevene som inngår i utvalget. Som lærer og forsker på samme tid inntar du en dobbeltrolle, og bør være oppmerksom på en del problemstillinger som dette reiser. Vi anbefaler at det tydeliggjøres ovenfor foreldre og elever at du inntar en ny rolle som forsker i forbindelse med prosjektet.

Videre bør du være oppmerksom på at prinsippet om frivillig deltakelse kan trues når de som forespørres om deltakelse står i et direkte avhengighetsforhold til deg. Du bør derfor være helt tydelig at det er helt frivillig å delta og at det ikke vil få noen konsekvenser for verken elever eller foreldre om de ikke ønsker å delta i prosjektet.

Det er også viktig at du skiller mellom den kunnskapen du allerede har skaffet i kraft av å være lærer, og de opplysningene/dataene du innhenter som forsker. I prinsippet er det kun de dataene du konkret har innhentet som forsker du kan benytte i prosjektet, og du bør være forsiktig med å trekke inn forhold og situasjoner du har fått kjennskap til fordi du er lærer.

INFORMASJONSSIKKERHET
Personvernombudet legger til grunn at forsker etterfølger Universitetet i Bergen sine interne rutiner for datasikkerhet.

PROSJEKTSLUTT OG ANONYMISERING
Forventet prosjektslutt er 01.06.2017. Ifølge prosjektmeldingen skal innsamlede opplysninger da anonymiseres. Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:
- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette/omskrive indirekte personopplysninger (identifiserende sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f.eks. bosted/arbeidssted, alder og kjønn)
- slette digitale lydopptak

Vedlegg nr 5: Eksempler på elevarbeid, «drikkebeger».

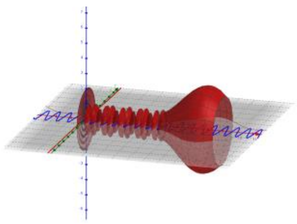
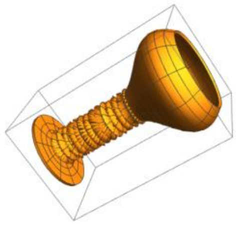
Funksjonsuttrykk:

$a(x) = 1.8 + \sin(x)$

$b(x) = 1000\, x^3 + 2$

$h(x) = \sin(8.5\, x)$

Overflate[u, h(u) sin(t), h(u) cos(t), u, 0, 5, t, 0, 2π]
Overflate[u, a(u) sin(t), a(u) cos(t), u, 4.98, 9, t, 0, 2π]
Overflate[u, b(u) sin(t), b(u) cos(t), u, -0.13, 0, t, 0, 2π]

Geogebra 3D:	Mathematica:	3D-print:
		

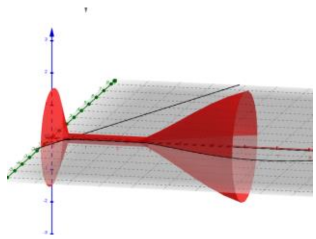
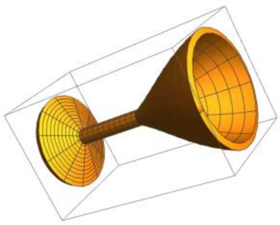
Funksjonsuttrykk:

$f(x) = e^{-1.2}\ (-0.5)$

$g(x) = \sin\left(x^{0.8}\right) - 0.84$

$h(x) = -1.5 + 2.69\, x$

Overflate[u, f(u) sin(t), f(u) cos(t), u, 0.5, 3, t, 0, 6.28319]
Overflate[u, g(u) sin(t), g(u) cos(t), u, 2.3, 6, t, 0, 6.28319]
Overflate[u, h(u) sin(t), h(u) cos(t), u, 0, 0.5, t, 0, 6.28319]

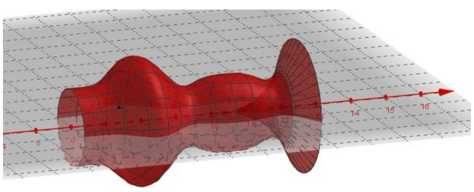
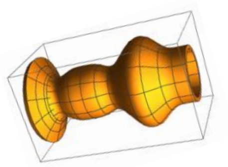
Geogebra 3D:	Mathematica:	3D-print:
		

Funksjonsuttrykk:

$f(x) = \frac{\sin(1.05\, x) + \cos^1(0.9\, x)}{\sin(0.25\, x) + \cos(0.75\, x)^{-4}} + 1.05$

$g(x) = -0.1\, e^{1.2x - 12} + 0.2$

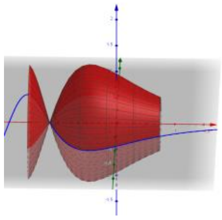
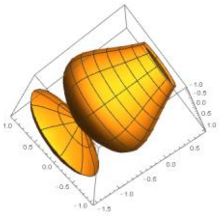
Overflate[u, f(u) sin(t), f(u) cos(t), u, 6, 12, t, 0, 2π]
Overflate[u, g(u) sin(t), g(u) cos(t), u, 10.3, 12.5, t, 0, 2π]

Geogebra 3D:	Mathematica:	3D-print:
		

Funksjonsuttrykk:

$f(x) = -\sin\left(e^{-x}\right)$

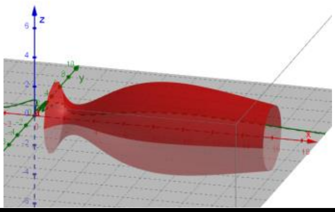
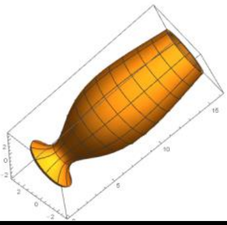
Overflate[u, f(u) sin(t), f(u) cos(t), u, -1.5, 0.75, t, 0, 2π]

Geogebra 3D:	Mathematica:	3D-print:
		

Funksjonsuttrykk:

$h(x) = 2 + \cos\left(\log_{10}\left(3\ x^{6}\right)\right)$

Overflate[u, h(u) sin(t), h(u) cos(t), u, 1.3, 16, t, 0, 6.28319]

Geogebra 3D:	Mathematica:	3D-print:
		

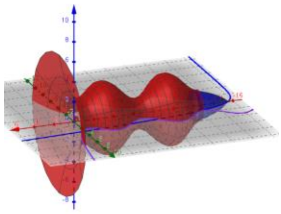
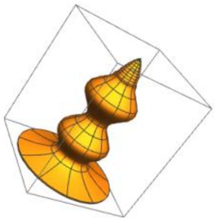
Funksjonsuttrykk:

$f(x) = e^{x} + 2.5 - \cos(x)$

$p(x) = \ln(x + 16.5)$

Overflate[u, f(u) sin(t), f(u) cos(t), u, -12.5, 1.5, t, 0, 2π]

Overflate[u, p(u) sin(t), p(u) cos(t), u, -15.6, -12, t, 0, 2π]

Geogebra 3D:	Mathematica:	3D-print:
		

Funksjonsuttrykk:

$$p(x) = \begin{cases} \ln(x) + 2.2 & : 0 \leq x < 0.5 \\ \dfrac{0.5\ x\ \sin\left(\frac{x}{3}\right) + 2 + \cos\left(x^{2}\right)}{2} & : 0.5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Overflate[u, p(u) sin(t), p(u) cos(t), u, 0.1, 7, t, 0, 6.28319]

Geogebra 3D:	Mathematica:	3D-print: