Elevers begrepsforståelse i modelleringskonteksten

En kvalitativ studie av tre elevers begrepsforståelse i arbeidet med autentiske modelleringsoppgaver

Eili Seljeset Ommedal

Masteroppgave i matematikkdidaktikk MAT399K

Universitetet i Bergen

Matematisk institutt

Våren 2017

Forord

Det er fantastisk snart å kunne kalle seg lektor! Fem spennende, utfordrende og ikke minst lærerike år er snart over, og jeg gleder meg til den framtiden jeg har i vente. Om kort tid skal jeg selv undervise mine egne elever i matematikk. Jeg er takknemlig for at jeg har kunnet skrive masteroppgave om begrepsforståelse i modelleringskonteksten, da dette arbeidet har gitt meg inspirasjon og kunnskap som jeg kan ta med meg i læreryrket. En spesiell takk vil jeg derfor rette til læreren som lot meg komme inn i klasserommet, gjennomføre og forske på modelleringsprosjektet. Uten han hadde jeg nok ikke kunne skrive om dette temaet.

Jeg har også flere sentrale personer som jeg ønsker å takke. Først og fremst vil jeg takke veilederne mine; Christoph Kirfel og Elisabeth Engum. Det å skrive masteroppgave har virkelig føltes som en berg- og dalbane. I løpet av prosessen har jeg stadig opplevd et skifte mellom oppturer og nedturer. I enkelte situasjoner har jeg følt at jeg har vært helt på villspor. I de situasjonene jeg har vært som mest frustrert og forvirret, har de veiledet meg i riktig retning. Takk for det!

Videre ønsker jeg å trekke fram to personer som har vært viktige underveis i masterarbeidet og gjennom hele studieløpet; Camilla Meidell og Jorill Ommedal. Camilla og jeg har samarbeidet godt i alle fag og lektorstudiet hadde helt klart ikke vært det samme uten henne. Hun har også vært en viktig diskusjonspartner underveis i masterarbeidet, spesielt når det gjaldt planlegging av datainnsamling. Tanten min, Jorill, har gjennom hele studiet støttet og veiledet meg i forbindelse med oppgaver i pedagogikk og didaktikk. Hun har bidratt med sin kunnskap og erfaring som lærer, noe som har gitt meg viktig innsikt i læreryrket.

Jeg kommer til å savne det gode studentmiljøet på lektorutdanningen ved UIB. Jeg kommer aldri til å glemme Lærarleikane, julebordene, hytteturene, lektortrimmene, lektorvafler, lektordans, lektorlunsj og så videre. Takk til de fantastiske medstudentene i klassen min og studentene ellers på lektorutdanningen, som har bidratt til at studietiden min har vært unik. Jeg ønsker også å takke Fagutvalget for Integrert Lektorutdanning (FIL) sitt styre for tre fantastiske år!

#lektorlove

Bergen, 1. juni 2017
Eili Seljeset Ommedal

Sammendrag

Målet med studien var å få bedre forståelse for hvordan elevers arbeid med en autentisk modelleringsoppgave kunne påvirke begrepsforståelsen. Jeg har i denne studien valgt å fokusere på begrepet den andrederiverte.

I studien ble det benyttet kvalitative forskningsmetoder i form av observasjon og intervju. Som en del av intervjuet ble det også gitt oppgaver om den andrederiverte. Dette for å få et bedre innblikk i elevenes begrepsforståelse. Utvalget besto av tre elever som har programfaget R1 på videregående skole. Datamaterialet er samlet inn i løpet av tre uker, der det ble gjennomført fem økter med modelleringsarbeid samt tre intervjuer. I løpet av observasjonen og i intervjuene ble det fokusert på hvordan begrepsforståelsen ble påvirket. Det ble valgt ut samtalesekvenser fra datamaterialet til analysene, og sekvensene ble analysert ved hjelp av et analyseverktøy som består av teoretiske begreper om begrepsforståelse.

Studiens funn antyder at det er fire sentrale faktorer ved modelleringsarbeidet som påvirker begrepsforståelsen; samtalen, det autentiske aspektet, arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit og bruk av digital graftegner. Når elevene deltar i faglige samtaler, kan dette føre til at de gjør viktige refleksjoner i tilknytning til de begrepene som omhandles. Det autentiske med modellering bidrar til en konkretisering, slik at de matematiske begrepene i større grad kan gi mening fordi de knyttes direkte til elevenes erfaringer. Den tredje faktoren, arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit, gjør at de i større grad må tenke over hvordan de skal løse problemet og derfor kreves det at en må forstå hva begrepene betyr. For den siste faktoren, bruk av digital graftegner, gir denne en spesiell mulighet til visualisering av begrepene.

Funn viser at modelleringen ser ut til å påvirke de tre elevenes begrepsforståelse på ulike måter. I denne sammenhengen indikerer resultatene at modelleringsarbeidets påvirkning på begrepsforståelsen, er tett knyttet til elevenes faglige og sosiale trygghet. Når elevene er trygge kan de tørre å ta steget ut i faglige diskusjoner, noe som kan være utviklende for begrepsforståelsen. På bakgrunn av resultatene, kan det argumenteres for at det i forkant av et modelleringsprosjekt bør arbeides med å øke tryggheten til elevene innenfor de fire ovenfornevnte faktorene. I selve modelleringsprosjektet bør også læreren stille elevene utfordrende spørsmål, noe som kan bidra til at elevene gjør viktige refleksjoner omkring begrepene. Disse momentene ser ut til å være sentrale for å hjelpe elevene med å utvikle en bedre forståelse av begrepene som inngår i modelleringsarbeidet.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

«*Vi gjør alltid det samme i matematikktimene. Kan vi ikke gjøre noe annet enn å jobbe med oppgaver i boken hele tiden?*» (Anders, 15 år)[1]

Utgangspunktet mitt for studien, er at jeg gjennom egen skolegang og praksis i lektorutdanningen har fått inntrykk av at matematikkundervisningen ofte har et fast mønster. Læreren presenterer og forklarer formler og framgangsmåter som trengs for å løse oppgaver, og deretter arbeider elevene med lignende oppgaver fra læreboken. En slik lærebok- og oppgavesentrert undervisning er kjennetegn på en *tradisjonell undervisning* (Alrø & Skovsmose, 2006b, s. 110). Som det kommer fram i utsagnet til Anders, så det ut til at elevene arbeidet med mengder av oppgaver, og det virket som at de i hovedsak reproduserte det læreren hadde sagt. Selv om elever regner mange oppgaver, betyr ikke dette at de forstår begrep, prosedyrer og sammenhenger. Dersom de ikke reflekterer over det som blir gjort, kan dette føre til at elevene utvikler det Skemp (2006, s. 89) beskriver som *instrumentell forståelse*. Det betyr at eleven kun vet hva som skal gjøres, men ikke hvorfor. Dersom eleven derimot vet hvorfor han for eksempel følger den framgangsmåten han gjør, er dette kjennetegn på *relasjonell forståelse* (ibid., s. 89).

Skovsmose (2003) beskriver undersøkelseslandskap som et alternativt læringsmiljø til oppgaveparadigmet. I et undersøkelseslandskap kan elevene ha en undersøkende tilnærming til temaet, formulere spørsmål og planlegge forskjellige ruter i landskapet (ibid.). Studien til Wæge (2008) indikerer at dersom elevene får være aktive og utforskende i matematikk, kan dette bidra positivt til elevenes motivasjon for å lære faget. I tillegg viser TIMSS videostudie at fellestrekk for land med høy måloppnåelse i matematikk, er en elevaktiv undervisning der elevene får utforske matematiske relasjoner (Stigler & Hiebert, 1999). I denne type undervisning kan elevene også bli involverte i arbeidet med prosedyrer og begrep. På den måten kan de utvikle en dypere forståelse og se sammenhenger i matematikk (ibid.). Det er derfor grunn til å tro at utforskende undervisning kan bidra til både økt motivasjon, læring og høy måloppnåelse.

[1] Anders er en elev fra en ungdomsskole, og sitatet er hentet fra min praksisperiode i utdanningsløpet på lektorutdanningen.

Som framtidig lektor ønsker jeg å støtte elevene i læringen, slik at de kan utvikle relasjonell forståelse i matematikk. Derfor er det trolig sentralt å benytte en elevaktiv og utforskende undervisning. Etter å ha lest teori og forskning, ser jeg at autentiske modelleringsoppgaver kan være et nyttig redskap for å utvikle elevenes relasjonelle forståelse. I arbeidet med slike oppgaver får elevene mulighet til å få erfaring og innblikk i hva matematikk kan brukes til. Dette kan trolig være fruktbart i læringsprosessen. Jeg har nemlig en oppfatning av at flere elever opplever den teoretiske matematikken på videregående som abstrakt. Mange ser ikke nytten av det de lærer. Blomhøj & Skånstrøm (2006, s. 8) hevder at slike opplevelser kan føre til at elever blir defensive i deres forhold til matematikk og utvikler lite forståelse.

Flere forskere viser til at modelleringsaktiviteter kan påvirke elevers holdning og motivasjon til matematikk (Blomhøj & Jensen, 2003; Galbraith, 2007; Kaiser & Sriraman, 2006; Zbiek & Conner, 2006). Modellering kan også gjøre at elever i større grad forstår relevansen av matematikk i hverdagslivet samt problemer innenfor vitenskap og miljø (Kaiser & Schwarz, 2010, s. 52). I det virkelige liv er problemstillinger med én spesifikk metode og ett enkelt svar sjelden. Dette er også sjelden i modelleringsoppgaver. I modelleringsarbeid må derfor elevene, i samarbeid med andre, utforske og bruke matematikk til å utvikle en eller flere modeller som representerer problemet tilstrekkelig. I denne prosessen er det rom for å argumentere og reflektere over matematiske relasjoner. Således kan kanskje matematikk gi mer mening for elevene.

Et annet moment som gjør at modelleringsarbeid er noe som interesserer meg, er at modellering ser ut til å ha fått en mer sentral plass i matematikkundervisningen. Ifølge Blomhøj (1993, s. 18) er inndragelsen av modellering det mest markante fellestrekket i løpet av 20 års utvikling av læreplaner på internasjonalt nivå. Modellering kommer også fram som et mål i norske læreplaner for matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d, 2006e, 2006f). Niss og Jensen (2002) inkluderer i tillegg modelleringskompetanse som en av de åtte matematiske kompetansene som en ønsker at elever skal tilegne seg. Med bakgrunn i at modellering er sentralt i matematikkundervisning, ønsker jeg å lære mer om dette selv.

Et aspekt ved relasjonell forståelse som interesserer meg, er hvordan en på best mulig måte kan legge til rette for at elever kan utvikle en relasjonell forståelse av matematiske begreper. Her ser jeg at arbeid med autentiske modelleringsoppgaver har et stort potensial. Blant annet kan den virkelige konteksten som oppgavene er bygget på, bidra til at matematiske begreper blir konkretisert (Blomhøj, 2006; Blomhøj & Kjeldsen, 2010). I tillegg støtter jeg meg til

Brekke (2002, s. 19) som henviser til en mengde forskningsresultater som viser at for å forstå et matematisk begrep, er det bedre å arbeide i dybden med et fåtall velvalgte aktiviteter, enn å gjennomføre en lang rekke øvelser. Her kan modellering komme inn som et nyttig verktøy.

1.2 Problemstilling

På grunnlag av min interesse for å utvide mitt syn på matematikkundervisning, ønsker jeg å studere elevers begrepsforståelse i arbeidet med autentiske modelleringsoppgaver. For å snevre inn studien har jeg valgt kun å fokusere på ett begrep; *den andrederiverte*. Dette begrepet ble valgt på bakgrunn av flere moment. For det første kommer begrepet fram i et kompetansemål for programfaget R1(Kunnskapsdepartementet, 2006d), faget datainnsamlingen foregikk i. I tillegg var det et ønske fra læreren å fokusere på den andrederiverte. Han hadde erfaring med at flere elever hadde utfordringer med å forstå dette begrepet. Dette kan også støttes fra forskning, som spesielt viser at elever har utfordringer med å forstå den andrederiverte representert grafisk (kap. 2.4.4). Mitt ønske om å studere forståelsen av den andrederiverte i modelleringskonteksten, leder meg fram til følgende problemstilling:

"Hvordan kan arbeid med en autentisk modelleringsoppgave påvirke begrepsforståelsen i matematikk, eksemplifisert ved begrepet "den andrederiverte"?"

For å svare på denne problemstillingen på en nyansert og detaljert måte, vil jeg benytte følgende forskningsspørsmål:

1. Hvilke faktorer som påvirker forståelsen av den andrederiverte, er det mulig å observere i modelleringsarbeidet? Hvordan foregår denne påvirkningen?
2. Hvilke bevisste overflateoppfatninger har elevene om hvordan deres forståelse av begrepet den andrederiverte ble påvirket i løpet av modelleringsarbeidet?
3. Hvilke begrepsbilder blir vekket i møte med nye oppgaver om den andrederiverte, i etterkant av modelleringsarbeidet?

I forskningsspørsmål 2 har jeg valgt å fokusere på elevenes bevisste overflateoppfatninger. Dette begrepet beskriver Pehkonen (2003, s. 162-163) som de uttalte oppfatningene en har, og som en kan fortelle om i et intervju. Dybdeoppfatninger er derimot ofte ubevisste og styrer gjerne hvordan en person handler. I studien er det ikke et mål å få tilgang til elevenes ubevisste oppfatninger, da det ville vært for omfattende for denne typen studie. Det er derimot ønskelig å få et innblikk i hvordan elevene gir uttrykk for at deres begrepsforståelse ble påvirket i løpet av modelleringsarbeidet.

I forskningsspørsmål 3 er det et mål å få tilgang til elevenes vekkede begrepsbilder, slik som Tall og Vinner (1989) forklarer det (kap. 2.3.2).

1.3 Oppbygning av oppgaven

Oppgaven er bygd opp av seks kapittel. I kapittel 2 vil det teoretiske grunnlaget for studien presenteres. Jeg vil her starte med å ta for meg sosialkonstruktivismen, læringsteorien som ligger til grunn for studien. Videre vil jeg kort gjøre rede for modellering og modelleringsprosessen. Deretter tar jeg for meg teori om begrepsforståelse som jeg har valgt å benytte meg av ved analyseringen av dataene. Det vil også gjøres rede for forskning om studenters forståelse av begrepet den andrederiverte. Til slutt vil jeg ta for meg teori og forskning om fire faktorer som jeg fant sentrale for påvirkning av begrepsforståelsen i modelleringskonteksten; Samtalen, det autentiske aspektet, digital graftegner som hjelpemiddel og arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit.

Kapittel 3 tar for seg studiens metode. Her presenteres konteksten for datainnsamlingen og metodiske valg som er gjort. Datainnsamlingsmetodene som ble benyttet vil bli gjort rede for og begrunnes. Hvordan analysearbeidet har blitt gjort, er også presentert. I tillegg er det gjort rede for etiske betraktninger og metodiske valg som er tatt for å øke kvaliteten av studien.

I kapittel 4 er resultat og analyse presentert. Kapittelet er delt i to, der jeg i den første delen tar for meg de fire faktorene som ser ut til å påvirke elevenes forståelse av begrepet den andrederiverte. Den andre delen tar for seg hver elevs begrepsforståelse. Her blir det også gjort rede for hver elevs vekkede begrepsbilder i møte med nye oppgaver om den andrederiverte, i etterkant av selve modelleringsprosjektet.

I kapittel 5 vil funnene fra studien videre diskuteres og sees i lys av forskning og teori. Her vil jeg også koble funnene opp mot elevenes faglige og sosiale trygghet. Til slutt i dette kapittelet vil jeg se på studien med et kritisk blikk.

Avsluttende konklusjoner vil bli gjort i kapittel 6. Her ser jeg i tillegg på hvilke implikasjoner studiens resultat har for matematikkundervisning, dersom en ønsker å øke den positive påvirkningen modelleringsarbeid kan ha på begrepsforståelsen. Til slutt har jeg noen siste betraktninger om veien videre.

2 Teori og tidligere forskning [2]

2.1 Perspektiv på læring og kunnskap

Det finnes flere læringsteorier med ulike perspektiver på læring og kunnskap. I denne studien fokuseres det på hvordan elevenes begrepsforståelse kan bli påvirket i en modelleringskontekst. Det er således naturlig å legge et sosialkonstruktivistisk læringssyn til grunn for studien. Sosialkonstruktivismen ser på læring som individuell tilegnelse, men det sosiale miljøet rundt elevene kan også påvirke denne individuelle utviklingen (Befring, 2012, s. 80; Skott, Hansen, & Jess, 2008). Skott et al. (2008) bruker metaforene "læring som tilegnelse" og "læring som deltagelse" for å forklare dette. Jeg vil kort gjøre rede for hva som ligger i disse metaforene.

<u>Læring som tilegnelse</u>

Metaforen "læring som tilegnelse" brukes av Skott, Hansen og Jess (2008) i sammenheng med den radikale konstruktivismen. Den radikale konstruktivismen har ifølge forfatterne hatt en sentral betydning for at elever bør lære matematikk med forståelse (ibid., s. 63). Læring med forståelse karakteriseres blant annet av at elevene undersøker nye begreper og metoder, i stedet for å overta en definisjon eller prosedyre (ibid., s. 66). Derfor bør ikke begrep og ferdigheter inngå som isolerte element i læringen, men være knyttet til en sammenheng. Undervisningen bør derimot gi rom for begrepsbygging der elevene kan konstruere sammenhenger mellom begreper og metoder (ibid., s. 65).

Den radikale konstruktivismen bygger på prinsippet om at viten bygges aktivt opp i hvert enkelt individ (Skott et al., 2008, s. 70). Ernst von Glaserfeld (1995) hevder at viten kun finnes i hodet til hver enkelt (Skott et al., 2008, s. 70). Å overta andres forståelse i ferdig form er derfor ikke mulig. Enhver må konstruere det en vet på bakgrunn av erfaringene en har gjort. Det er dermed umulig å vite om en forstår et fenomen i overensstemmelse med verden eller med andres forståelse. En kan likevel gjennom kommunikasjon sette ord på det en tenker og forstår, og partene kan utvikle en antatt felles forståelse (ibid., s. 88).

Ifølge Skott et al. (2008, s. 66) kan refleksjon føre til at en kan omorganisere de allerede etablerte forståelser. I denne sammenhengen er Piagiets begreper om *assimilasjon* og *akkomodasjon* sentrale. I Piagiets teori er forståelsen systematisert i kognitive skjema, og utvikling skjer gjennom endring i disse skjemaene (Evenshaug & Hallen, 2000; Skott et al.,

[2] Teorikapittelet er bygget opp slik det er forklart i kapittel 1.3.

2008). Piagiet forklarer assimilasjon som at en tilpasser inntrykk til skjemaene en har fra før. Det en erfarer kan derfor innarbeides i de allerede eksisterende skjemaene (Evenshaug & Hallen, 2000, s. 104; Skott et al., 2008, s. 73). Dersom erfaringen derimot strider imot de etablerte mentale skjemaene, oppstår en ubalanse. Slike situasjoner kan være frustrerende for elevene, men har store læringspotensialer. En vil ifølge Piagiets teori prøve å gjenopprette balansen ved akkomodasjon. Ved akkomodasjon tilpasses skjemaene ved å bli utvidet eller omdannet, fordi de ikke er tilstrekkelige (Evenshaug & Hallen, 2000, s. 104). Dersom elever ikke har en korrekt forståelse av et begrep, vil akkomodasjon være helt sentralt for å utvikle en mer korrekt forståelse.

Læring som deltagelse

I det deltagelsesorienterte læringssynet er utvikling av kunnskap en grunnleggende del av og uatskillelig fra, det å ta del i sosiale praksiser (Skott et al., 2008, s. 93). Ifølge Vygotsky utvikles begrep i sosiale praksiser, og en kan ikke forestille seg å lære begrep uten språk. Ved hjelp av språket kan blant annet tenkningen struktureres (ibid., s. 101- 102). I det deltagelsesorienterte synet vil en derfor gå fra det sosiale til det individuelle, i motsetning til hos den radikale konstruktivismen (ibid., s. 93). I det konstruktivistiske synet bygges kunnskap individuelt, før en bruker kunnskapen i samtaler. Språket sees her i hovedsak som én kilde til assimilasjon og akkomodasjon. I det deltagelsesorienterte synet har språket derimot en betydelig større rolle. Refleksjon trenger her ikke bare skje individuelt, men kan også oppstå i en diskusjon med andre.

Anna Sfard mener at når en er på vei inn i en matematisk diskurs[3] som en enda ikke har individualisert, er deltagelse fra flere parter nødvendig (Skott et al., 2008, s. 96). Det er mulig å gjennomføre et ritual uten å forstå det fullstendig i begynnelsen, men at en etter hvert gradvis utvikler forståelse og individualiserer rutinene. Da kan en overta og lære hvordan et gitt problem kan bearbeides (ibid., s. 97). På en lignende måte beskriver Vygotsky hvordan forståelsen av vitenskapelige begreper utvikles (ibid., s. 102). Slike begreper introduseres ofte formelt, for eksempel ved en definisjon. Etter hvert utvikles begrepets mening, dersom elevene har arbeidet og reflektert over begrepets betydning. Vitenskapelige begreper utvikler seg ifølge Vygotsky i motsatt rekkefølge av hverdagslige, spontane begreper. Hverdagslige begreper, for eksempel "mor", utvikles fra bruk i konkrete hverdagslige sammenhenger. På et

[3] En matematisk diskurs blir beskrevet av Skott et al. (2008, s. 96) som den måten en kommuniserer på i matematikk. Det inkluderer hvilke ord som inngår og hvordan en bruker dem. Denne beskrivelsen av en matematisk diskurs samsvarer med Mellin-Olsen (1996) sin beskrivelse av begrepet.

senere tidspunkt blir barnet bevisst den formelle betydningen. Det blir framhevet at de spontane begrepene må være utviklet til et visst nivå for at vitenskapelige begreper kan gi mening (ibid., s. 102).

Sosialkonstruktivismen

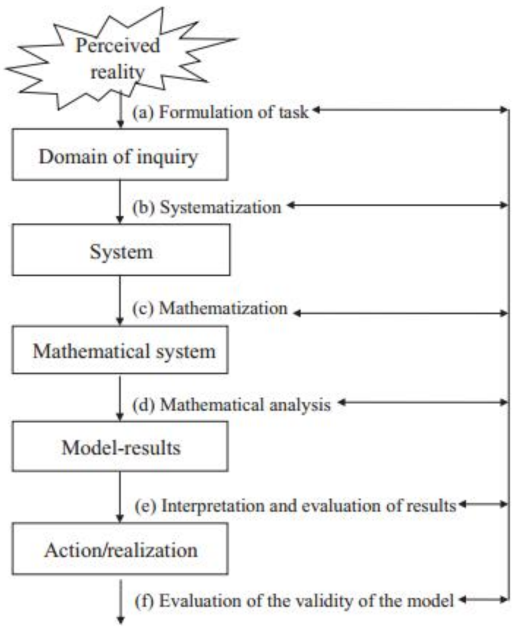
Til tross for at den radikale konstruktivismen og det deltagelsesorienterte læringssynet virker uforenelige, kan det likevel gi mening å ta hensyn til begge. Det deltagelsesorienterte perspektivet kan ifølge Skott et al. (2008, s.133) ikke forklare individuelle forskjeller i elevenes forståelse. På den andre siden har sosiale interaksjoner potensialer for læring som den radikale konstruktivismen ikke kan forklare. For denne studien kan begge synene bidra med viktige grunnleggende syn for å forklare datamaterialet som er innhentet.

Det videre teoretiske grunnlaget for oppgaven som er bygget på det konstruktivistiske synet, er begrepsapparatet om begrepsforståelse (kap. 2.3). I tillegg presenteres teorien om realistisk matematikkundervisning (kap. 2.4.2.1) som også baserer seg på et konstruktivistisk grunnlag. Samtidig er det deltagelsesorienterte synet helt sentralt som grunnlag for å forklare påvirkningene samtaler har på begrepsforståelsen. Utfyllende teori og forskning om samtalens påvirkning på begrepsforståelsen vil bli gjort rede for i kapittel 2.4.1.

2.2 Modellering og modelleringsprosessen

Blomhøj (2006, s. 85) forklarer at dersom en anvender matematikk til å beskrive, beregne eller forklare forhold utenfor matematikken, skjer det en form for modellering. I modellen kan den fysiske virkeligheten, med størrelser og sammenhenger, forbindes til matematiske objekt og relasjoner. En matematisk modell vil derfor være en relasjon mellom virkelige og matematiske aspekt (ibid., s. 85).

Niss (2002, s.121-122) beskriver modelleringskompetansen som at en i en modelleringsprosess først må strukturere informasjon som ofte er gitt fra en virkelig situasjon. Deretter må innholdet oversettes til et matematisk språk, før det kan bearbeides matematisk i en modell. Til slutt kan resultatet oversettes tilbake til den opprinnelige situasjonen. Blomhøj og Jensen (2003, s. 125) presenterer en grafisk modell som viser hvordan modelleringsprosessen er sammensatt av flere delprosesser (Figur 1). Forfatterne hevder at matematisk modelleringskompetanse betyr at en på en selvstendig og innsiktsfull måte kan bevege seg mellom de ulike delprosessene (ibid., s. 126).



Figur 1: Modelleringsprosessen med tilhørende del-prosesser (Blomhøj & Jensen, 2003, s. 125)

Delprosessene i Figur 1 beskrives som følgende av Blomhøj og Jensen (2003, s. 125):

(a) *Formulation of task (more or less explicit) that guides you to identify the characteristics of the perceived reality that is to be modelled.*
(b) *Selection of the relevant objects, relations etc. from the resulting domain of inquiry, and idealisation of these in order to make possible a mathematical representation.*
(c) *Translation of these objects and relations from their initial mode of appearance to mathematics.*
(d) *Use of mathematical methods to achieve mathematical results and conclusions.*
(e) *Interpretation of these as results and conclusions regarding the initiating domain of inquiry.*
(f) *Evaluation of the validity of the model by comparison with observed or predicted data or with theoretically based knowledge.*

De doble pilene i Figur 1 viser at prosessen ikke følger en bestemt rekkefølge mellom de ulike delprosessene. I stedet går en ofte fram og tilbake mellom dem. Refleksjoner og valg som blir tatt i én delprosess, kan påvirke andre deler av modelleringsprosessen.

I litteraturen blir det framhevet en rekke begrunnelser for å inkludere modellering i undervisningen. Hana (2013, s. 181) bruker metaforer for å klassifisere tre ulike begrunnelser for modellering; modellering som *innhold, redskap* eller *kritikk*. Modellering som innhold innebærer at målet med arbeidet er modelleringen i seg selv (ibid., s. 181). Ved å arbeide slik som beskrevet i Figur 1, kan en øve på å løse ekte matematikkproblem. Det at modellering kan sees som et redskap, betyr at arbeidet kan bidra til at elevene får større forståelse for matematiske begrep og prosedyrer (ibid., s. 181). Med modellering som kritikk menes det at en i modelleringsarbeidet kan øve på kritisk refleksjon over matematikken som benyttes i samfunnet (ibid., s. 181). Elevene kan øve på å være kritiske og reflekterte over hvilke antagelser og begrensninger modeller baserer seg på samt modellers rolle i samfunnet (Blomhøj, 2003, s. 70; Blomhøj & Kjeldsen, 2010, s. 558; Blum & Niss, 1991, s. 43; Hansen, 2010). På den måten kan modelleringsarbeid være med å utvikle kritisk demokratisk kompetanse (Hansen, 2010).

Det finnes også flere begrunnelser for å inkludere modellering i undervisningen. Noen momenter er nevnt i kapittel 1.1. Et annet moment er at en kan bruke modellering i sammenheng med andre fag. Andresen og Lindenskov (2009) framhever at tverrfaglige prosjekter kan bidra til at elevene utvikler bedre forståelse og ser sammenhenger mellom fagene. På bakgrunn av observasjon av tverrfaglige prosjekter, ser det ut til at elever kan få økt bevissthet om mulighetene til å overføre begrep og resultat mellom fagene (ibid.).

Det ser ut til å være en mengde begrunnelser for å inkludere modellering i undervisningen. Det er likevel verdt å påpeke at det springer ut et dilemma i forbindelse med planlegging av modelleringsoppgaver i undervisningssammenheng. Ifølge Kjeldsen og Blomhøj (2010, s. 558) bør elevene på den ene siden arbeide med hele modelleringsprosessen, slik den framkommer i Figur 1, for å utvikle modelleringskompetanse. På den andre siden er det også et behov for å trene på de indre delene av modelleringssirkelen separat (ibid., s. 558). Mangel på evner og erfaring kan for mange elever føre til frustrasjon, spesielt knyttet til prosessene c) og d) (Blomhøj, 2006, s. 106). En konsekvens av dette samt blant annet dårlig tid, kan gjøre at lærere kun fokuserer på enkelte deler av prosessen. Ofte blir utviklingen og beskrivelsen av problemet neglisjert i undervisningen, selv om dette er en viktig del av modelleringsprosessen (Blomhøj, 2003, s. 52; Kaiser & Schwarz, 2010, s. 56). Ofte kan problemformulering og systematisering derfor være gitt i oppgaveteksten. Ifølge Blomhøj (2003, s. 52) får elevene ofte ikke selv stille opp modeller og diskutere konsekvenser av modellenes anvendelser. De får bare anvende en gitt modell og fortolke resultatene i en gitt kontekst (Blomhøj, 2003, s.

52). Slikt arbeid med modelleringsoppgaver kan muligens føre til en begrenset utvikling av modelleringskompetanse.

I dette delkapittelet er det blant annet presentert flere begrunnelser for modellering. En av begrunnelsene var å bruke modellering som et redskap til å bedre forståelsen av begrep og prosedyrer. Videre i teoridelen vil det fokuseres på begrepsforståelse og hvordan modelleringsarbeidet har et potensial til å påvirke begrepsforståelsen.

2.3 Begrepsforståelse

Det teoretiske begrepsapparatet jeg har valgt å benytte meg av i tilknytning til begrepsforståelse er basert på begrepsapparatet til Tall og Vinner (1981), Barnard (1998) og Barnard og Tall (1997). Dette begrepsapparatet vil presenteres i kapittel 2.3.1- 2.3.3. På mange måter kan en se på deres begrepsapparat som en videreføring av Piagiets skjematenkning, men det inneholder flere underbegreper og detaljer og er dermed mer spesifikt. I kapittel 2.3.4 vil det gjøres rede for relevant forskning i tilknytning til studenters forståelse av den første- og andrederiverte.

2.3.1 Begrepsbilde og begrepsdefinisjon

Tall og Vinner (1981) bruker en rekke begreper for nærmere å beskrive begrepsforståelse. De skiller blant annet mellom *begrepsbilde* (concept image) og *begrepsdefinisjon* (concept definition).

Fra erfaringer med begrep, utvikler vi en forståelse av disse, før vi senere møter de formelle definisjonene av begrepene. Det eksisterer således en kompleks kognitiv struktur i tankene hos hver enkelt person. Denne personlige kognitive strukturen er det som beskrives som begrepsbildet. *Begrepsbildet* inkluderer alle mentale bilder, tilhørende egenskaper og prosesser som er tilknyttet begrepet (Tall & Vinner, 1981, s. 152). Begrepsbildet blir kontinuerlig utviklet ved relevante erfaringer og etter hvert som eleven modnes (ibid., s. 152).

En *personlig begrepsdefinisjon* blir beskrevet av Tall og Vinner (1981, s. 152) som hvordan en med egne ord forklarer et spesifikt begrep. En slik personlig begrepsdefinisjon vil som regel skille seg fra den *formelle begrepsdefinisjonen*[4] som er godtatt av det matematiske samfunnet (ibid., s. 152).

[4] Jeg tolker "den formelle begrepsdefinisjonen" som det som er matematisk korrekt. I resultat- og analysedelen vil jeg derfor benytte dette begrepet i tilfeller der elevenes vekkede begrepsbilder ikke stemmer overens med det som er matematisk korrekt.

2.3.2 Vekkede begrepsbilder og kognitiv konflikt

Det *vekkede begrepsbildet* blir beskrevet av Tall og Vinner (1981, s.152) som den delen av begrepsbildet som blir aktivert til en gitt tid. Det betyr at i møte med en spesifikk oppgave som inneholder et begrep, vil noen deler av begrepsbildet bli vekket. De samme begrepsbildene trenger ikke å bli vekket ved en annen oppgave, selv om den omhandler det samme begrepet.

Dersom motstridende begrepsbilder blir vekket samtidig, kan en bli forvirret over at de ikke stemmer overens. Dette kan føre til en *kognitiv konflikt* (Tall & Vinner, 1981, s. 152). En kan her se en sammenheng mellom Tall & Vinners (1981) begrepsapparat om begrepsforståelse og Piagiets teori. Dersom en opplever en kognitiv konflikt, vil dette være det samme som at det en erfarer vil stride med det som er etablert i det kognitive skjemaet. Det vil da oppstå en ubalanse og ved akkomodasjon kan en utvide og endre på skjemaene. Dermed kan en utvikle en begrepsforståelse som i større grad stemmer overens med den formelle definisjonen av begrepet.

Dersom de motstridende begrepsbildene blir vekket samtidig, betegnes disse som *kognitive konfliktfaktorer* (Tall & Vinner, 1981, s. 154). Det er viktig å nevne at motstridende begrepsbilder kan blir vekket til ulike tider. Da trenger ikke dette å føre til en kognitiv konflikt og de motstridende vekkede begrepsbildene betegnes da som *potensielle konfliktfaktorer* (ibid., s. 153).

Tall og Vinner (1981, s. 154) hevder at dersom det aldri utløses en kognitiv konflikt fra *potensielle konfliktfaktorer* mellom eget begrepsbilde og den formelle definisjonen av begrepet, kan dette ha en alvorlig konsekvens. Inkonsistensen mellom eget begrepsbilde og den formelle definisjonen vil således ikke bli oppdaget. På den måten kan det utvikles ukorrekte tenkemåter som kan bli brukt nokså konsekvent i møte med nye utfordringer. Brekke (2002, s. 10) beskriver slike ufullstendige tanker knyttet til et begrep som misoppfatninger. Misoppfatninger oppstår ofte fordi en generaliserer tidligere kunnskaper til nye områder der disse kunnskapene ikke gjelder fullt ut (ibid., s. 10). Samtidig hevder Brekke (2002, s. 11) at det trolig ikke er mulig å unngå at misoppfatninger oppstår, fordi det er en naturlig del av barns utvikling. Nye idéer blir tolket ut fra eksisterende erfaring og generaliseringer blir gjort på sviktende grunnlag (ibid., s. 11).

Aspinwall, Shaw og Presmeg (1997) og Vinner (1992) beskriver tilfeller om studenter som har utfordringer med å fjerne ukorrekte begrepsbilder. Trolig er det derfor viktig at elever tidlig gjør erfaringer slik at de oppdager de potensielle konfliktfaktorene som strider med den formelle begrepsdefinisjonen. På den måten trenger ikke disse å videre utvikle seg til misoppfatninger.

2.3.3 Begrepsnettverk og kognitive enheter

Blomhøj og Kjeldsen (2010, s. 573) forklarer at en har mentale nettverk som inneholder representasjoner av matematiske begreper og erfaringer. Nye forbindelser kan skapes mellom "nodene", og allerede eksisterende forbindelser kan styrkes (ibid., s. 573). På den måten kan en i større grad forstå sammenhengen mellom de ulike delene av begrepsnettverket.

Barnard og Tall (1997) beskriver mer detaljert hvordan en kan styrke forbindelsene i begrepsnettverket. Forfatterne presenterer begrepet *kognitiv enhet* som den delen av den kognitive strukturen som kan holdes i fokus i minnet samtidig (ibid., s. 41). Dette kan for eksempel være prosesser, egenskaper eller sammenhenger. En bør imidlertid merke seg at en kognitiv enhet ikke er det samme som et vekket begrepsbilde som ble beskrevet i kapittel 2.3.2. For å bygge en god struktur i tenkningen, framhever Barnard og Tall (1997, s. 41) følgende faktorer som viktige:

1) *The ability to compress information to fit into cognitive units,*
2) *The ability to make connections between cognitive units so that relevant information can be pulled in and out of the focus of attention at will.*

Ved å komprimere informasjon inn i kognitive enheter, kan større mengder informasjon holdes i minnet samtidig (Barnard, 1998, 401; Barnard & Tall, 1997, s. 41). Det kan dermed bli enklere å få oversikt over begrepsbildet sitt. For å klare å komprimere informasjon inn i kognitive enheter, blir det viktig at læreren hjelper elever med å utvikle kognitive enheter som er koblet til andre slike. Således kan det matematiske innholdet få en meningsfull og sammenhengende struktur. Uten slike koblede kognitive enheter, vil tenkningen bli diffus og unøyaktig (Barnard & Tall, 2001, s. 8).

Slik jeg ser det vil de to faktorene til Barnard og Tall (1997) henge tett sammen. En kan gjøre koblinger mellom to kognitive enheter, noe som kan forårsake at en gjør komprimeringer av denne informasjonen inn i en kognitiv enhet. En kan også si at dersom en har komprimert en mengde informasjon inn i ulike kognitive enheter, kan dette gjøre at en har mer oversikt over de ulike delene av begrepsbildet sitt. Det kan da bli lettere å kunne oppdage relasjoner mellom enhetene og dermed gjøre koblinger mellom enhetene.

Begrepet *kognitiv enhet* blir ofte benyttet i sammenheng med Skemps (1979) "varifocal theory". Skemp (1979) forklarer at ved å komprimere flere kognitive enheter til en egen helhet, kan en se på dette som et kognitivt skjema. Dette kan sees i sammenheng med Piagiets teori om skjema. De kognitive skjemaene kan videre bli enheter i nye kognitive strukturer. Slik kan en bygge et nettverk, der en etter hvert kan få kontroll over mer komplekse systemer (ibid.). Barnard (1998) framhever at en da kun trenger å konsentrere seg om noen få kraftige kognitive enheter og koble dem sammen eller åpne dem som støtte når dette er nødvendig. Således kan en minimalisere mental belastning og maksimere effektiviteten av tenkningen i møte med matematiske problemer (ibid.).

2.3.4 Studenters forståelse av den første- og andrederiverte

Det er gjort en del forskning om studenters forståelse av den første- og andrederiverte. Funn fra en studie av Hashemi, Abu, Kashefi og Rahimi (2014) viser at studenter[5] hadde utfordringer med å forstå derivasjonsbegrepet. Det antydes at en årsak til utfordringene er at studentene hadde svake koblinger mellom den algebraiske og grafiske framstillingen av den deriverte. De fleste studentene prøvde også å løse derivasjonsproblemer algebraisk og ikke grafisk (ibid.). I denne sammenhengen har Ferrini-Mundy og Graham (1994) gjort en studie med lignende funn. Studentene i denne studien skulle skissere den deriverte til en funksjon som bare var representert grafisk. Mange valgte å løse problemet med å finne en ligning for funksjonen for videre å derivere denne algebraisk og til slutt skissere grafen for den deriverte (ibid.). For begge studiene viser studentene i hovedsak en algebraisk forståelse av den deriverte. Studentene var derfor trolig usikre på hvordan problemene kunne løses uten et algebraisk uttrykk.

Det finnes flere forskere som viser til funn om at studenter på de første matematikkursene på universitetet har vanskeligheter med å forstå den deriverte representert grafisk (Aspinwall et al., 1997; Baker, Cooley, & Trigueros, 2000; Bayazit, Aksoy, & İlhan, 2010; Ubuz, 2007). I undersøkelsen til Baker, Cooley og Trigueros (2000), skisserte studentene en graf som skulle tilfredsstille flere egenskaper knyttet til den første- og andrederiverte, kontinuitet og grenseverdi. I dette arbeidet var ikke ligningen for funksjonen gitt, og det var vanskelig å finne den ut fra de gitte opplysningene. Dette utfordret antakelig elevenes begrepsforståelse. Studien viste at et signifikant antall av studentene hadde en svært begrenset forståelse av relasjonene mellom den første- og andrederiverte (ibid., s. 572). Blant annet var det flere

[5] Med "studenter" menes studenter fra universitet eller høyskole. Med "elever" menes elever fra grunnskolen eller videregående skole.

studenter som ikke kunne forstå at en funksjon kan være konkav og samtidig ha en positiv førstederivert for deler av funksjonen. Noen studenter ignorerte informasjonen om den andrederiverte, noe som tyder på at de ikke visste hvordan de skulle bruke denne informasjonen (ibid.). Ubuz (2007) og Hashemi et al. (2014) har i tillegg funnet at de fleste studenter har utfordringer med å forklare vendepunktet til en funksjon. Felles for disse funnene er at studenter opplever utfordringer med å forstå hva relevante begreper i tilknytning til den andrederiverte betyr for den grafiske representasjonen.

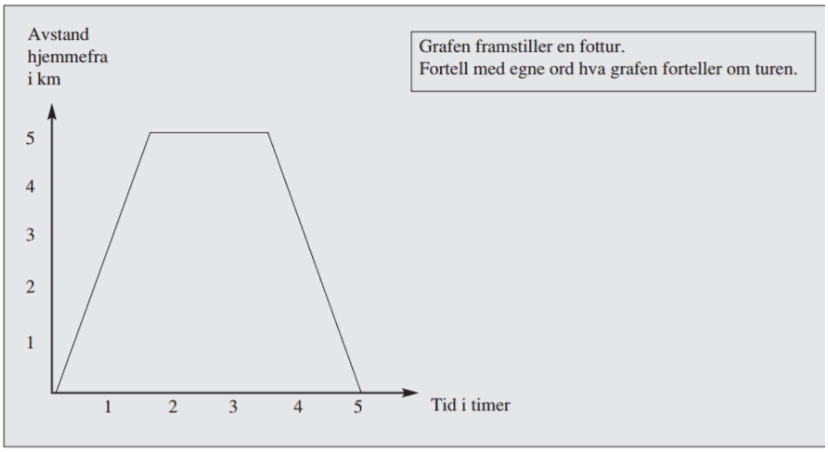
Bayazit, Aksoy og İlhan (2010, s. 120) hevder at studenter ofte følger en innarbeidet framgangsmåte for å derivere, men at få kan se for seg hvordan operasjonene faktisk påvirker den grafiske representasjonen av den deriverte funksjonen. Flere forskere viser til lignende funn som understøtter dette. Orton (1983) viser til funn om at studentene i studien hans generelt hadde tilfredsstillende ferdigheter i rutinearbeid i tilknytning til derivasjon, men at de hadde lav begrepsmessig forståelse. Ifølge Zimmerman og Cunningham (1991), referert i Aspinwall et al. (1997, s. 306), er det vanlig at studenter har en instrumentell forståelse av grafiske representasjoner av den deriverte. Funn fra studier av Baker et al. (2000) og Thompson (1994) viser i tillegg at studenter har utfordringer med å gjenkjenne den førstederiverte som en funksjon. Dersom studentene ikke klarer å se på den førstederiverte som en funksjon, vil det i neste omgang bli utfordrende å kunne forstå den grafiske framstillingen av den andrederiverte (Baker et al., 2000, s. 576). Dermed kan det tenkes at elevenes problemer med å gjenkjenne den førstederiverte som en funksjon, kan være med å forklare funn fra forskning om den begrensede grafiske forståelsen studenter har om den andrederiverte.

Funn fra Nemirovsky og Rubin (1992) antyder også at studenter i liten grad fokuserer på relasjonene mellom en funksjon og den deriverte til funksjonen, representert grafisk. Studentene fokuserte derimot som regel kun på en av grafene i gangen. Det kom fram at de ofte kun så på om grafen stiger eller synker, og hvilket tegn den har, i stedet for å se på relasjonen mellom grafene.

Funnene fra de studiene som er presentert over, antyder at studenter ofte viser en instrumentell forståelse av den første- og andrederiverte. For å bedre den relasjonelle forståelsen av denne sammenhengen, vil trolig arbeid med visualisering i innlæringen av begrepene være fruktbart. Visualisering i Calculus- matematikken blir framhevet av Zimmermann (1991, s. 136) som å ha en fundamental rolle for å forstå begreper bedre. Jeg vil anta at dette har en tilsvarende sentral rolle for matematikk generelt. Aspinwall, Shaw og

Presmeg (1997) er imidlertid kritisk til at visualisering nødvendigvis vil skape bedre begrepsforståelse. De gjennomførte en casestudie med én student. Visualisering var her i fokus for å undersøke forståelsen av de grafiske sammenhengene mellom en funksjon og den deriverte. Funnene viser at visualisering kan skape mer forvirring i stedet for å bedre begrepsforståelsen. De hevder derfor at en visuell tilnærming kan påvirke det mentale bildet av begrepet på en ukontrollerbar måte (ibid.). Hollenberg (1970) viser også til funn som understøtter det kritiske argumentet til Aspinwall et al. (1997). Hollenbergs (1970) funn viser at barn med gode evner til visualisering, kan ha større vanskeligheter ved begrepslæring sammenlignet med barn som har lavere evner til visualisering. Det er imidlertid viktig å poengtere at denne sammenhengen i hovedsak gjelder de yngste barna, noe som fører til at jeg antar at disse funnene ikke vil være så relevant for min undersøkelse.

Doorman (2005, s. 20- 25) viser til ulike forfattere og forklarer flere utfordringer som elever kan møte når de skal tolke grafer. Det blir framhevet at visualiseringen er en sentral faktor som kan føre til problemene. Spesielt blir det framhevet at mange har en forestilling om at en graf er et bilde av en situasjon. Dette er noe også Brekke (2002, s. 11) hevder. Jeg vil trekke fram et eksempel på oppgaveløsning som viser en elevs misoppfatning om grafer. Grafen framstiller en fottur, med tid på x-aksen og avstand hjemmefra på y-aksen (Figur 2). Det er mange elever som her tolker grafen billedlig, ved at de tror at personen først går omtrent rett oppover, så bortover og til slutt nedover. De tolker altså grafen som et bilde og tar ikke hensyn til enhetene på aksene.



Figur 2: Eksempel på grafisk framstilling av en fottur. Mange tror at personen først går omtrent rett oppover, så bortover og til slutt nedover. Dette er en billedlig tolkning og en misoppfatning av en graf. Hentet fra Brekke (2002, s. 12).

Det er tydelig at visualisering i matematikken kan ha en variabel påvirkning på begrepsforståelsen. Jeg vil likevel anta at visuelle hjelpemiddel kan fungere som en positiv støtte for begrepsforståelsen. I kapittel 2.4.4 vil det bli presentert funn om hvordan digitale graftegnere kan fungere som visuelle hjelpemidler for å støtte begrepsforståelsen.

2.4 Begrepsforståelse i modelleringskonteksten

I likhet med Tall og Vinner (1981, s. 153), hevder Blomhøj (1993, s. 23) at det er vanlig at elevenes konstruerte begreper er ufullstendige begrepsdannelser. Ifølge Blomhøj (1993, s. 23) trenger elevene flere erfaringer for videre å kunne konstruere en bedre forståelse av begrepene. Det kan i mange tilfeller være utfordrende å legge til rette for nødvendige og gode erfaringer i undervisningen. Bruk av matematisk modellering kan være én måte å møte denne utfordringen på (ibid.). Modelleringssituasjonen krever at en anvender begreper i en praktisk kontekst, noe som kan gi viktige erfaringer som grunnlag for begrepskonstruksjon. Blomhøj og Kjeldsen (2010, s. 579) viser blant annet til at elever i etterkant av et modelleringsprosjekt refererte tilbake til prosjektet. De brukte her erfaringene som et verktøy når de skulle løse og forstå lignende oppgaver.

Analyser av flere undervisningsforløp med modellering, viser at modelleringskonteksten har et betydelig læringspotensial for elevenes begrepsforståelse (Blomhøj, 1993; Blomhøj & Kjeldsen, 2010; Zbiek & Conner, 2006). Blomhøj og Kjeldsen (2010, s. 572) hevder imidlertid at en forutsetning for et godt læringspotensial, er at elevene reflekterer over den matematiske begrepsforståelsen sin. *Refleksjon* betyr ifølge Alrø og Skovsmose (2006a, s. 132) å bevisstgjøre seg, overveie og på nytt overveie sine tanker, følelser og handlinger. En slik refleksjon er nødvendig og kan føre til at elevene ser sammenhenger mellom den praktiske delen av modelleringssituasjonen og den bakgrunnskunnskapen de har om begrepet. Dette arbeidet kan trolig føre til at elevene gjør viktige koblinger i sitt begrepsnettverk (kap. 2.3.3).

I de neste underkapitlene vil det bli sett på modelleringsarbeidets læringspotensial i tilknytning til begrepsforståelse. Her vil følgende faktorer som kan påvirke begrepsforståelsen i modelleringskonteksten beskrives; *Samtalen, det autentiske aspektet*, *arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit* og *digital graftegner som hjelpemiddel*. Disse påvirkningsfaktorene vil igjen være sentrale i resultat- og analysekapittelet. Analyser av datamaterialet viste også at den sosiale- og faglige tryggheten var viktig for påvirkningen av begrepsforståelsen. Det er gjort rede for hva jeg legger i disse begrepene i kapittel 2.4.1.1.

2.4.1 Samtalen

I denne oppgaven brukes ordet *samtale* som at dette omfatter både dialog mellom flere elever, og den selvrefleksjonen som en elev kan gjøre ved å "tenke høyt".

Samtalen har en sentral rolle for begrepsutvikling sett i lys av et sosialkonstruktivistisk syn (kap. 2.1). I tillegg er det flere studier som viser til funn om at samtalen har vært sentral for elevers læring i modelleringsarbeidet. I studien til Kaiser og Schwarz (2006) var det flere elever som uttalte at de hadde lært mye av å samarbeide. Ved å diskutere, kunne elevene takle den karakteristiske usikkerheten som kan oppstå i modelleringsprosessen. I tillegg kunne også flere løsningsmetoder vurderes (ibid., s. 207). Zbiek og Conner (2006) viser til funn om at samarbeidet underveis i modelleringsarbeidet la til rette for endring i forståelse av matematikk. I modelleringsarbeidet blir forståelsen utfordret og potensielle nye koblinger kan gjøres gjennom sosial interaksjon. I undersøkelsen til Blomhøj (1993) er det registrert at flere sentrale begreper inngikk i dialogene i modelleringsarbeidet, og at begrepene ble diskutert og belyst. Slike diskusjoner om begrepene, kan antakelig bidra til at de kan gi bedre mening.

Dersom elevene i løpet av modelleringsarbeidet oppdager kognitive konfliktfaktorer (kap.2.3.2), kan dialog bidra til å strukturere tenkningen. I dialogen kan alternative løsningsstrategier og begreper diskuteres, og hver enkelt kan således få tilbakemelding på sine idéer. Det blir også framhevet at ved å bruke egne ord til å forklare matematiske begreper, vil en i stor grad gjøre matematikken til sin egen (Brøyn, 2009, s. 64). Dersom en derimot ikke klarer å forklare det matematiske innholdet til medelever, kan dette være en pekepinn på at en ikke har forstått innholdet (ibid., s. 64). Dermed blir det lettere å identifisere hva som ikke er forstått og således få mulighet til å arbeide videre med å øke denne forståelsen. I tillegg framhever Dysthe (1995, s. 52) at en i diskusjoner kan konstruere egen kunnskap ved at en knytter ny kunnskap til det en kan fra før og at stoffet blir belyst gjennom andre elevers måte å oppfatte det på. Disse momentene viser at dialogen i modelleringsarbeidet kan føre til dypere læring og forståelse.

Det er tidligere nevnt at refleksjon er sentralt for å kunne utvikle begrepsforståelsen i løpet av modelleringsarbeidet. Blomhøj og Kjeldsen (2010, s. 572) hevder at selv om refleksjon skjer individuelt på det kognitive planet[6], blir refleksjonen først tydelig i dialoger. Samspillet mellom elever og mellom elev og lærer i modelleringsarbeidet kan i stor grad åpne opp for refleksjon. En kan derfor se på refleksjon som en sosial prosess (ibid., s. 572). Ifølge Alrø og

[6] Blomhøj og Kjeldsen (2010) tar utgangspunkt i et konstruktivistisk læringssyn i sin studie.

Skovsmose (2006a, s. 134) oppstår ofte erkjennelsen mellom partene i en *kollektiv refleksjon*, i stedet for individuelt. Forfatterne forklarer kollektive refleksjoner som blant annet undersøkelse av idéer, høyttenkning og reformulering (ibid.).

Lærerens innbringende dialog[7] i modelleringsarbeidet ser ut til å ha en sentral rolle for utviklingen av elevenes begrepsforståelse (Blomhøj, 1993; Blomhøj & Kjeldsen, 2010). Årsaken til dette er at læreren kan utfordre elevene til å reflektere over begrepene gjennom dialog (Blomhøj, 1993, s. 37; Blomhøj & Kjeldsen, 2010, s. 572). I modelleringssituasjoner er elevene opptatt av å løse problemer som de føler eierskap til. Læreren har da en spesiell mulighet til å få innsikt i elevenes tankeprosesser (Blomhøj & Skånstrøm, 2006, s. 19). Ved å utfordre elevenes ufullstendige begrepsforståelse og stille spørsmål, kan elevene gjennom dialog gjøre viktige oppdagelser. Empiri viser at elevene noen ganger også er interesserte i en utdypende dialog med læreren etter at problemet er løst (ibid., s. 11). I slike situasjoner kan samtalen således være en avgjørende støtte for utvikling av sentrale begrepsdannelser hos elevene. Blomhøj (1993) har observert at dersom elever ikke får den nødvendige lærerstøtten underveis, kan det være flere elever som ikke går inn i potensielt utforskende arbeid. De er gjerne mindre kritiske til eget arbeid og følger intuisjonen i stedet (ibid.). Når elevene følger intuisjonen, kan det tenkes at de vil velge den første løsningsmetoden de kommer på, og kan dermed unngå å gå inn i det utforskende arbeidet.

Den viktige lærerstøtten kan sees i sammenheng med teorien til Vygotsky (1978, s. 86) om *den nærmeste utviklingssonen*. Dersom en elev får støtte fra mer kompetente andre[8], kan eleven ifølge teorien klare mer enn det han kunne gjort på egenhånd. Den støtten som læreren her gir, kan sees i sammenheng med begrepet "stillasbygging" som Jerome Bruner benytter (Dysthe, 1995, s. 55). Lærerens støtte og veiledning kan hjelpe eleven med å få øvelse i mer abstrakt tenkning.

Bakhtin, referert i Dysthe (1995, s. 63), hevder at mening oppstår i dialogen og samspillet mellom deltakerne. Samtidig legger han vekt på at forståelsen er avhengig av at mottakeren i dialogen aktivt kommer "budskapet" i møte med en form for reaksjon (Dysthe, 1995, s. 64). Ved å gi en tilbakemelding eller respons, skaper dette derfor utgangspunkt for forståelse (ibid.).

---

[7] Forfatterne bruker begrepet "innbringende dialog" som at læreren til ulike tidspunkt engasjerer seg i samtalen til gruppen.

[8] Mer kompetente andre er oversatt fra "more cabable peers". Denne personen kan enten være en voksen eller en medelev som kan mer enn eleven som veiledes.

Bakhtins synspunkt kan sees i sammenheng med funn fra undersøkelsen til Sfard og Kieran (2001). Funnene viser at det å arbeide sammen i matematikk ikke alltid vil gi bedre læring (Sfard & Kieran, 2001). På bakgrunn av 30 timers videoopptak med oppgaveløsning, var det tydelig at de to elevene i studien hadde utfordringer med å kommunisere om matematikk. Årsaken var ikke at de ikke var interesserte i å løse oppgavene, men at de ikke hadde en effektiv kommunikasjon. I en *effektiv kommunikasjon* vil den mottakende parten utløse responser som samsvarer med den diskursen som senderen forventer (ibid., s. 49). Dersom kommunikasjonen er effektiv betyr det derfor at deltakerne i diskusjonen bruker samme diskurs og vet derfor at de refererer til de samme objektene når de bruker de samme ordene (ibid., s. 51). Dette gjør at partene forstår det matematiske innholdet i det som blir sagt. Da vil det bli enklere å komme med utdypende spørsmål eller idéer som gjør at dialogen fortsetter. Her ser en at responsen er helt sentral for å utvikle forståelse, i overensstemmelse med Bakhtins synspunkt.

I studien til Sfard og Kieran (2001) ser det ut til at de to elevene ikke responderte på den måten som den andre parten forventet, noe som gjorde at de matematiske samtalene ikke var effektive. Faktisk viste studien at kommunikasjonen mellom dem var lite til nytte for begge og at de sannsynligvis hadde arbeidet bedre individuelt. På bakgrunn av disse funnene er det viktig å være bevisst på at kommunikasjon om matematikk kun har et potensial for læring, men at dette potensialet ikke trenger å bli realisert. Det kan oppstå utfordringer som gjør at det er vanskelig å gjennomføre en god samtale om matematikk.

2.4.1.1 Faglig og sosial trygghet i gruppesamarbeidet

Da jeg begynte å analysere datamaterialet, så det ut til at den sosiale og faglige tryggheten hadde stor betydning for om elevene turte å ta steget ut i diskusjoner for således å utvide begrepsforståelsen sin. Derfor vil jeg her gjøre rede for hva jeg legger i disse begrepene.

Begrepet *faglig trygghet* velger jeg å knytte til begrepene *opplevd mestring* og *mestrings-forventning* (Self- efficcacy) (Bandura, 1977). De erfaringene en gjør og graden av mestringsopplevelser, legger grunnlaget for om en forventer å mestre framtidige oppgaver eller aktiviteter. Bak en elevs forventning, ligger det en vurdering av egne evner til å oppnå et ønsket resultat for en gitt oppgave eller en aktivitet (ibid.) Den mestringsforventningen elevene har, vil antakelig påvirke opplevelsen av faglig trygghet de vil oppleve.

Elevenes *sosiale trygghet* er avgjørende for om de tør å ta ordet i en gruppe. Ifølge Dysthe (1995, s. 63) er tillit og respekt mellom partnerene samt selvtillit grunnleggende forutsetninger for å gå inn i en dialogsituasjon. Dersom disse ikke er tilstede, vil trolig partene ikke være sosialt trygge nok til å gå aktivt inn i dialogen. På den andre siden kan ikke det ene eksistere før det andre. For det er gjennom dialogen at en får en oppfatning av seg selv som igjen påvirker selvtillitten og tilliten en får til andre (Dysthe, s. 63).

2.4.2 Det autentiske aspektet

I modelleringssammenheng er det autentiske aspektet en helt sentral faktor for påvirkningen av begrepsforståelsen. I litteraturen blir ordet autentisitet brukt svært forskjellig. For en oversikt over ulike meninger av begrepet, se Palm (2002). Jeg velger å bruke beskrivelsen til Palm (2007) om autentiske oppgaver. Ifølge forfatteren vil *autentiske oppgaver* beskrive en situasjon fra den ekte verden, på utsiden av selve matematikkfaget. Dataene fra en autentisk oppgave er hentet fra en situasjon som enten har skjedd eller som kan skje (ibid., s. 203).

Ifølge Palm (2007, s. 202) bør en signifikant del av oppgavene elevene arbeider med være autentiske. Matematikk som redskap bør også spille en viktig rolle i tilknytning til de ekte situasjonene. En har da muligheten til å gjøre matematiske simuleringer av virkeligheten, noe som kan erfares som kjent og meningsfullt for elevene (ibid., s.203). Det at modellerings-oppgaver bør være basert på situasjoner utenfor matematikkfaget blir også vektlagt av blant annet Trelinski (1983) og Yerushalmy (1997). Yerushalmy (1997, s. 207) framhever at autentisk modellering skaper en mulighet for å føre situasjoner fra den ekte verden inn i klasserommet. Elever kan her få rike erfaringer med å matematisere autentiske situasjoner (ibid). I studiene til Kaiser & Schwartz (2006, 2010) kom det fram at de fleste studentene verdsatte å arbeide med autentiske modelleringsoppgaver som en del av skolematematikken. Hovedargumentene var at dette bedret deres kompetanse i matematikk i tilknytning til den ekte verden. Zbiek og Conner (2006) viser også til funn om at elever i arbeidet med modelleringsoppgaver oppdaget viktigheten av matematikken siden de kunne knytte det til noe ekte.

I arbeidet med autentiske modelleringsoppgaver kan elever som tidligere nevnt oppleve at begreper og prosedyrer gir mer mening og at de får en større faglig dybde fordi de konkretiseres i den virkelige konteksten (Blomhøj, 2006; Blomhøj & Kjeldsen, 2010). I modelleringsoppgaver kreves det at matematikk brukes til å beskrive, argumentere og forstå omverdenens fenomener. Ved å avdekke nye sider ved begrepene, kan elevene ifølge Blomhøj (2006, s. 93) se nye sammenhenger og styrke og utvide begrepsnettet deres. Den virkelige konteksten har derfor potensialet til at elever kan gjøre oppdagelser som er viktige i læringsprosessen. Det kan således skapes viktige forbindelser mellom elevers erfaringsverden og det matematiske språket og begrepene.

Palm (2007, s. 202) hevder at matematiske oppgaver i skolesammenheng er kritisert fordi de i stor grad mangler det autentiske aspektet. Oppgavene kan da oppleves som pseudo- reelle situasjoner (ibid., 202). Hana (2013, s. 234) beskriver pseudo- realisme som at den realistiske konteksten ikke trenger å bli tatt hensyn til når en løser matematikkoppgaver. Matematikkens spilleregler gjelder derimot fullt ut. Blomhøj (2006, s. 91) framhever at manglende behandling av matematikkens relasjon til virkeligheten kan påvirke elevens læring og fagoppfattelse negativt. Skolematematikken kan da bli oppfattet som adskilt fra virkeligheten og elevens erfaringsverden. Dette fenomenet kalles *parallellitetsoppfattelse* (ibid., s. 91).

Palm (2007) gjennomførte en undersøkelse der det ble gitt to versjoner av et problem til studenter; ett var autentisk og ett var mindre autentisk. Problemene ble fordelt tilfeldig og 160 studenter deltok. Resultatet viste at studentene løste autentiske oppgaver på en effektiv måte, ved hjelp av samlet kunnskap om den virkelige verden (ibid., s. 205). Studentene som fikk autentiske oppgaver svarte i signifikant større grad riktig på disse, sammenlignet med studentene som fikk mindre autentiske oppgaver. Samtidig stiller jeg meg noe kritisk til disse funnene, da det i artikkelen ikke er gitt informasjon om det kunne være noe forskjell i vanskelighetsgrad som en konsekvens av at oppgavene var mer eller mindre autentiske.

Fra intervjuene til Palm (2007, s. 205) kom det fram at en hovedårsak til at studenter svarte feil i oppgavene, var at de ofte brukte det som beskrives som overflate- løsningsstrategier (super- ficial solution strategies). Slike strategier utvikles nettopp fordi en møter mange pseudo- realistiske oppgaver i skolen (ibid., s 205). Kanskje ligner spørsmålsformuleringene i oppgaven på de oppgavene de tidligere har møtt. Dette kan ofte føre til at elevene velger samme metode som tidligere, uten å reflektere. Trolig kan bruken av autentisk modellering bidra til å motvirke utviklingen av overflatestrategier, siden en her må tenke nøyere gjennom hva oppgaven faktisk spør etter. På samme måte må en også tenke nøyere gjennom hva begrepene som inngår betyr i konteksten. Samlet sett kan disse faktorene utvikle en mer relasjonell forståelse av begreper.

Det Palm (2007) beskriver som mindre autentiske oppgaver, kan sees i sammenheng med begrepene "semi- autentisk" og "semi- reell" som ofte blir benyttet (bl.a. Hana, 2013; Hansen, 2010; Skovsmose, 2003). Variasjonen av autentisitetsgrad kan sees i sammenheng med Skovsmoses (2003) systematisering av ulike læringsmiljø. Som tidligere nevnt skilles det mellom undersøkelseslandskap og oppgaveparadigmet. Innenfor disse kan en referere til ren matematikk, semi- reelle referanser eller reelle referanser. De autentiske modellerings-oppgavene som ble benyttet i denne studien, vil jeg kategorisere som undersøkende matematikkoppgaver med reelle referanser.

I dette underkapittelet har det kommet fram kritiske synspunkt når det gjelder oppgaver som er mindre autentiske. Det er viktig å få fram at det er mest kritisk dersom elever får en parallellitetsoppfattelse eller utvikler overflatestrategier. Jeg vil også påstå at så lenge en har en realistisk kontekst å forholde seg til, vil det bli lagt til rette for at elever kan øke sin forståelse om matematiske begreper og framgangsmåter. Den realistiske og konkrete konteksten kan gi rom for gode situerte læringssituasjoner. *Situert læring* vil si at ferdigheter og kunnskap er tett knyttet sammen med situasjonen læringen foregår i (Lave & Wenger, 1991). Både sosial interaksjon og den realistiske konteksten kan blant annet sees som en del av denne situasjonen. Den situerte læringen er også helt sentral i teorien om realistisk matematikkundervisning (RME). Teorien forklarer hvordan den situerte læringen kan sees som et utgangspunkt for å videre utvikle mer abstrakt kunnskap. I neste delkapittel vil jeg gjøre nærmere rede for teorien om Realistisk matematikkundervisning.

2.4.2.1 Realistisk matematikkundervisning (RME)

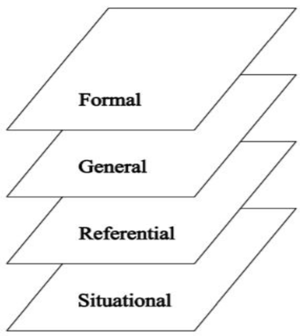
Som nevnt i kapittel 2.1 hevder Vygotsky at begreper ofte blir introdusert formelt ved en definisjon. Hans Freudenthal har, ifølge Gravemeijer og Stephan (2002, s. 146), et konstruktivistisk ståsted og kritiserer undervisningsstrategier der elever får presentert matematisk kunnskap på denne måten. Elevenes kunnskaper da ikke bygget på elevenes erfaringer. Dette fører til at elevene blir fratatt muligheten til å engasjere seg og å bli involverte i prosessen (Skott et al., 2008, s. 380). Et konstruktivistisk alternativ er at symbolisering og mening utvikles samtidig ved et "bottom up"- heuristisk design på undervisningen (Gravemeijer & Stephan, 2002, s. 146). Dette designet er sentralt i teorien for realistisk matematikkundervisning. Ifølge denne teorien bør eleven få mulighet til å "gjenoppdage" matematikken ved å bli involvert i prosessen med å utvikle matematiske resultater. Med modelleringsoppgaver kan elevene få muligheten til å arbeide slik. De kan selv være aktive og utvikle matematiske resultat, i stedet for å få et ferdig resultat.

All matematisk aktivitet blir av Freudenthal sett på som mental modellering (Gravemeijer & Stephan, 2002). Utvikling av egne mentale modeller er sentralt for å utvikle formell matematisk viten. Dette er fordi det må utvikles en ny matematisk realitet, altså en mental modell, på hvert nivå i utviklingen.

I tråd med Freudentals teori, skal elevene starte med matematisk uformelle og realistiske aktiviteter. Det realistiske trenger ikke nødvendigvis å være konkret. Det kan være en historie eller noe som kan brukes til å etablere en sammenheng som elevene kan leve seg inn i (Skott et al., 2008, s. 386). Uformelle løsningsstrategier kan brukes i en realistisk kontekst, noe som gir rom for situert læring. Elevenes symboliseringer kan ifølge Gravemeijer & Stephan (2002) bli brukt spontant i starten. Etter hvert kan disse symboliseringene bli brukt selvstendig og uavhengig. Refleksjon om matematiske relasjoner i denne sammenhengen kan utvikle bedre meningsforståelse og danner grunnlag for begrepsutvikling (Gravemeijer & Stephan, 2002, s. 153). Det oppstår et skifte fra en *modell av* uformell situert aktivitet til en *modell for* mer formell matematisk resonnering (Gravemeijer & Stephan, 2002, s. 146) Strategier, begreper og relasjoner får da en gradvis selvstendig betydning, og det skapes således en ny matematisk realitet.

I RME skjer matematikklæring ved gjenoppdagelse, noe som bør være guidet gjennom horisontal og vertikal matematisering (Gravemeijer & Stephan, 2002). *Horisontal matematisering* vil si at en overfører kunnskaper fra et felt til et beslektet felt, gjerne i en annen kontekst. Dette skjer uten at det foregår en matematisk abstraksjon. Overgangen til et nytt nivå og en ny matematisk realitet, kalles *vertikal matematisering*. Forståelsen av symbol og relasjoner på et nivå kan nå brukes som modell for matematisk tenkning og abstraksjon på et høyere nivå (ibid.).

Gravemeijer og Stephan (2002) skiller mellom ulike nivå der matematikkens abstraksjon utvikles (Figur 3). Disse nivåene bør ikke nødvendigvis sees som et hierarki, siden elevene kan bevege seg mellom de ulike nivåene. På det første nivået skapes det som tidligere nevnt en modell av elevenes situerte viten, fra det som oppleves fra den konkrete situasjonen. På det andre nivået kan elevene med støtte fra modellen velge løsningsmetoder og strategier. Modellen refererer da til den konkrete situasjonen. Det tredje nivået er når elevene ikke er avhengige av den opprinnelige konteksten. Aktiviteten er da på et mer generelt nivå. Her er det fokus på matematiske strategier. På det mest abstrakte nivået trenger ikke elevene støtte fra modellen, i deres formelle matematiske resonnering. Her brukes konvensjonelle matematiske prosedyrer og notasjoner (ibid.).



Figur 3: Aktivitetsnivå (Gravemeijer & Stephan, 2002, s. 159)

Ved en interaksjon mellom horisontal og vertikal matematisering kan en bevege seg mellom de ulike nivåene i Figur 3. Matematisk viten, og derfor også begrepsforståelsen, er derfor et resultat av horisontal og vertikal matematisering (Gravemeijer & Stephan, 2002). Det at en etter hvert kan utvikle en mer abstrakt tenkning på høyere nivåer tolker jeg som at en etter hvert utvikler mer relasjonell forståelse.

2.4.3 Arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit

Arbeidet med modelleringsoppgaver skaper mulighet for at elever kan arbeide uten en kjent framgangsmåte eller en fasit, noe som kan være fruktbart for begrepsforståelsen. Dette arbeidet kan sees i sammenheng med begrepet *problemløsning*.

Jeg vil begynne med å forklare begrepet *problem*. Det er flere måter å beskrive dette begrepet, men jeg velger å bruke beskrivelsen til Blum and Niss (1991). Forfatterne hevder at et problem er en situasjon med åpne spørsmål og at disse spørsmålene utfordrer forståelsen fordi en ikke har en tilgjengelig løsningsmetode for å løse dem (ibid., s. 37). De framhever også at det som er et problem for noen, ikke trenger å være et problem for andre (ibid.).

Ifølge Niss og Jensen (2002) er *problemløsning*, sammen med modelleringskompetanse, en av de åtte kompetansene som utgjør matematisk kompetanse. Blum og Niss (1991, s. 38) beskriver problemløsning som prosessen med å prøve å løse et problem. Ifølge Polya (1957) løses problemer ved hjelp av fire delprosesser; først må en forstå problemet, deretter legge en plan for hvordan en kan løse problemet, gjennomføre løsningsplanen og til slutt se tilbake på løsningen. Disse delprosessene har betraktelige fellestrekk med delprosessene i modellering som er vist i Figur 1. Det som hovedsakelig skiller problemløsning fra modellering, er at en i modellering tar utgangspunkt i en realistisk kontekst og at en lager en modell for å løse problemet. Jeg ser derfor på evnen til problemløsning som å være en sentral del av å løse modelleringsoppgaver.

Autentiske modelleringsoppgaver kan fungere som det Blum og Niss (1991) benevner som *anvendte matematiske problem*. Det vil si at situasjonen som beskrives hører til i den virkelige verden. Samtidig vil en kunne løse problemet situasjonen illustrerer, ved å anvende matematiske begreper, metoder og resultater. Ifølge Blum og Niss (1991, s. 44) er problemløsning, anvendelser og modellering aktiviteter som støtter studenters læring i tilknytning til matematiske begreper, metoder og resultater. Årsaken til dette er trolig at en ikke kan følge en kjent framgangsmåte. Det kreves derfor at en må reflektere nærmere over det en velger å gjøre. Antakelig kan en utvikle en mer relasjonell forståelse av begrepene som inngår, dersom en klarer å anvende dem i en modelleringskontekst.

I likhet med Freudenthal (kap 2.4.2.1), hevder Tall og Vinner (1981, s. 153) at lærere ofte gir elevene en formell definisjon i starten av et nytt tema og at elevene arbeider kort med generell notasjon. Like etter arbeider de med mange eksempel på bruk av en eller flere formler. Tall og Vinner (1981, s. 153) problematiserer nettopp denne undervisningen, fordi elever på den måten kan få en instrumentell innlæring av matematikk. I slike tilfeller kan elevene, ifølge forfatterne, utvikle en begrenset begrepsforståelse fordi begrepsdefinisjonen (kap. 2.3.1) kan bli inaktiv i den kognitive strukturen. En konsekvens kan da være at elever instrumentelt lærer seg hvilken framgangsmåte de skal bruke for å svare på et spørsmål, uten at de forstår det som blir gjort. Når de senere møter problemer i nye kontekster, kan det bli vanskelig å forstå hvordan de skal løse dette problemet (ibid., s. 153).

Dersom elever er vant med en slik undervisning som Tall og Vinner (1981) beskriver, kan det være at elevene opplever det som uvant og utfordrende å arbeide med autentiske modelleringsoppgaver. Dette kan understøttes av Kaiser og Schwarz (2006) som viser til empiri om at det å arbeide med åpne oppgaver og å ta hensyn til det "ikke- matematiske aspektet", kan virke fremmed for elever. Blomhøj (2006, s. 106) viser også til erfaringer om at elever på alle nivå i utdannelsessystemet opplever vanskeligheter med de ulike delprosessene i modellering. Selv om det kan være flere faktorer ved modellering som er uvant, vil jeg anta at det ikke å ha en kjent framgangsmåte eller fasit kan være det som er mest uvant.

Kaiser og Schwarz (2010) gjennomførte et modelleringsprosjekt med 350 elever fra videregående skole. I etterkant var det 28% av elevene som synes at en ikke burde inkludere modellering i matematikktimene. Selv om prosentandelen ikke er så stor, er elevenes argumenter interessante. Elevene mente at modelleringsoppgaver tok for lang tid og at de hadde mer enn nok med å komme seg gjennom pensum. Det ble også påstått at oppgavene var for detaljerte, for vanskelige og lite relevante (ibid.). I modelleringsprosjektet til Blomhøj og Skånstrøm (2006, s. 19), hadde elevene også lignende tilbakemeldinger. De stilte spørsmål ved om de lærte nok og om de lærte det de skulle. Det å arbeide uten lærebok kunne også gjøre noen utrygge (ibid.). Det ser ut til at disse elevene er preget av oppgavediskursen og tradisjonell undervisning. Problem med knapp tid og en plan om å gjennomføre en mengde oppgaver, er karakteristisk for oppgavediskursen (Mellin-Olsen, 1996). Arbeid med modellering kan da oppleves som et brudd med *den didaktiske kontrakten*, som ifølge Brousseau (2002, s. 31-32) er forventninger mellom lærer og elev om deres rolle i undervisningen. I dette ligger det både forventninger om hvordan undervisningen skal være, men også lærerens forventninger om elevens ansvar. Slike forventninger oppstår på bakgrunn av enten eksplisitte eller implisitte regler som utvikles i klasserommet.

Dersom bruk av modelleringsoppgaver fikk plass i den didaktiske kontrakten, kunne elever og lærere hatt en oppfatning av at arbeidet med modellering ikke trenger å være noe som kommer i tillegg til annen undervisning. I stedet kunne det derimot gi mulighet for en dypere matematisk forståelse. Samtidig blir det framhevet at det kan være tidkrevende og utfordrende å gjøre endringer i matematikkundervisningen når det strider med den etablerte didaktiske kontrakten (Jensen, 2005, s. 130). Når det er etablert et sett av rutiner, regler og forventninger som skaper rammer rundt undervisningen som en tror fungerer godt, vil det være utrygt å skulle gå bort fra dette. Dersom læreren gjennomfører en undervisning som strider mot den didaktiske kontrakten, kan elevene oppleve at læreren ikke holder sin del av denne kontrakten. Dette kan resultere i at elevene viser motstand dersom læreren prøver å endre undervisningen.

Til tross for utfordringer med endring av den didaktiske kontrakten, er det flere som henviser til at elever har opplevd modelleringsoppgaver som engasjerende og motiverende (Blomhøj, 2003; Erfjord, 2005; Kaiser & Schwarz, 2006, 2010). Fra undersøkelsen til Kaiser & Schwarz (2010, s. 65) er det flere elever som uttalte at de hadde lært strategier i problemløsning. Flere fortalte at de fikk økt sin evne til å være utholdende, og at de hadde blitt flinkere til å utlede og konstruere funksjoner og formler. Dersom elever og lærere fokuserer på de positive aspektene ved modellering og er åpne for å prøve nye og uvante arbeidsformer, kan kanskje dette føre til ny erkjennelse for begge parter. På den måten kan motstand mot å endre den didaktiske kontrakten minke.

2.4.4 Digital graftegner som hjelpemiddel

I mange modelleringsoppgaver er det nyttig å benytte digitale hjelpemidler som digitale graftegnere og CAS. I studien min ble programmet GeoGebra benyttet som digital graftegner, for å lage en modell av den autentiske situasjonen. Det vil derfor settes søkelys på nettopp dette programmet og hvordan det kan påvirke forståelsen av den andrederiverte.

Mange elever har, som tidligere nevnt, utfordringer med å forstå den andrederiverte representert grafisk (kap. 2.3.4). Hall og Lingefjärd (2014) og Rincon (2009) viser flere eksempler på hvordan GeoGebra kan være et hjelpemiddel for å kunne visualisere begreper og matematiske sammenhenger på en dynamisk måte. Denne visualiseringen kan være en viktig støtte i læringsprosessen og kan således bidra til å bedre begrepsforståelsen. Bayazit et al. (2010, s. 120) framhever at GeoGebra har et betydelig læringspotensial, fordi elevene kan observere hvordan funksjoner blir påvirket av at de blir derivert. Dersom grafen til en funksjon og de tilhørende første- og andrederiverte vises i samme skjermbilde, kan en studere sammenhengen mellom disse.

Zakaria (2012) gjennomførte en kvantitativ undersøkelse med 284 elever fra videregående skole, der den eksperimentelle gruppen hadde fokus på GeoGebra og begrepsforståelsen av funksjoner. Resultatene fra undersøkelsen indikerer at elevene i den eksperimentelle gruppen i etterkant av undersøkelsen hadde en signifikant forsterket begreps- og prosedyremessig kunnskap om temaet funksjoner, sammenlignet med kontrollgruppen (ibid). Selv om studien ikke er gjort i en modelleringskontekst eller handler om begrepet den andrederiverte, ser jeg dette funnet som relevant. Funnet kan blant annet sees i sammenheng med en lignende undersøkelse av Tall (1986) som ble gjort ved bruk av dataprogrammet GRADIENT. Den eksperimentelle gruppen med studenter kunne i post- testen tegne den deriverte grafen til en gitt funksjon på en signifikant bedre måte, sammenlignet med kontrollgruppen. For elevene i den eksperimentelle gruppen, ble begrepsbildene under innlæringen støttet av visualisering gitt ved eksempel og ikke- eksempel ved hjelp av dataprogrammet (ibid.). Lignende studier, gjort av Ubuz (2007) og Asiala et al. (1997), finner også den samme trenden som Tall (1989).

Ubuz (2007, s. 631) trekker imidlertid fram at bruken av digitale hjelpemiddel kan gjøre at en ikke nødvendigvis forstår matematikken bak det som blir gjort, fordi en kun trenger å trykke på riktige knapper for å få korrekt svar. Det matematiske som skjer kan da sees som å være en "Black box". Ubuz (2007) sitt poeng er viktig, og det blir derfor sentralt å fokusere på hvordan digitale hjelpemiddel som GeoGebra kan bidra til bedre forståelse og ikke bidra til å utvikle "Black boxes". Det er også viktig å være bevisst på at visualisering av grafer kan ha uheldig påvirkning på begrepsforståelsen, som forklart i kapittel 2.3.4.

Oppsummert ser det ut til at GeoGebra kan ha en positiv påvirkning på begrepsforståelsen, men at en også må være bevisst på uheldige påvirkninger. Det er trolig både positive og uheldige påvirkninger på begrepsforståelsen for alle de fire presenterte faktorene; Samtalen, det autentiske aspektet, arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit og bruk av digital graftegner.

3 Metode

Opprinnelig betyr begrepet metode *veien til målet* (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 217). Hvilket mål undersøkelsen har er derfor avgjørende for valg av metoder. Dersom det er hensiktsmessig å gjøre kartlegginger, målinger, statistikk eller se sammenhenger mellom ulike variabler, kan kvantitative tilnærminger være naturlig å benytte (Johannessen, Tufte, & Christoffersen, 2016, s. 95). Å benytte kvantitative metoder for å svare på mine forskningsspørsmål ser jeg på som lite hensiktsmessig. Det er derimot ønskelig å få innsikt i hva som skjer i ett modelleringsarbeid og slik få en fyldigere forståelse av situasjonen. Da er det nødvendig å gå i dybden på akkurat dette begrensede området, og en kvalitativ tilnærming til forskningsspørsmålene er derfor mer naturlig (Johannessen et al., 2016, s. 95; Nilssen, 2012, s. 22). Ved bruk av flere kvalitative metoder kan jeg utvikle en bedre forståelse av hvordan ett spesifikt modelleringsarbeid kan påvirke elevenes forståelse av begrepet den andrederiverte.

Videre i metodekapittelet vil jeg først ta for meg studiens forskningsdesign, før jeg beskriver konteksten for datainnsamlingen. Deretter vil jeg forklare og begrunne flere metodiske valg i forskningsprosessen; valg av forskningsdeltakere, valg av forundersøkelse, observasjon og intervju som datainnsamlingsmetoder og valg av metoder i analyseprosessen. Det vil også bli gjort rede for etiske betraktninger og hvordan metodiske valg er blitt tatt for å øke kvaliteten i studien.

3.1 Forskningsdesign

Studien av modelleringsarbeidet med autentiske data kan kategoriseres som et *casestudium*. Johannessen et al. (2016, s.80) trekker fram to spesielle kjennetegn ved et casestudium. Det ene kjennetegnet er *en avgrenset oppmerksomhet mot den spesielle casen*. Det andre er at en har en *mest mulig detaljert beskrivelse av casen.* Modelleringsprosjektet kan her sees som den spesielle casen. Studien har en avgrenset oppmerksomhet mot begrepsforståelse som er forankret i autentisk modellering som case. Det karakteristiske ved den avgrensede casen er at innsamlingen av data er begrenset av tid og sted (Johannessen et al., 2016, s. 80; Postholm, 2010, s. 50). I mitt tilfelle kunne datainnsamlingen kun skje i de spesifikke ukene elevene skulle arbeide med modelleringsoppgaven. Innsamlingen var også begrenset til å skje på den aktuelle skolen.

Caseundersøkelse som forskningsdesign styrer ikke valg av spesielle metoder, men det blir framhevet at en bør kombinere forskjellige metoder for å belyse casen fra ulike sider

(Johannessen et al., 2016, s. 80; Postholm, 2010, s. 53). Derfor vil det bli innhentet detaljert beskrivelse av elevenes modelleringsarbeid både gjennom en forundersøkelse, feltnotat fra observasjon, video- og lydopptak samt intervju i etterkant. Med disse metodene for innsamling av data vil jeg sitte igjen med en detaljert beskrivelse av casen.

De nevnte innsamlingsmetodene ble valgt, fordi de utfyller hverandre, slik at jeg kunne svare på forskningsspørsmålene på en nyansert og detaljert måte. Forundersøkelsen ble i hovedsak benyttet for å generere nye idéer og for å bekrefte eller avkrefte antagelsene mine. I selve innsamlingen var jeg interessert i å få innsyn i hvordan elevene arbeidet med modelleringsoppgavene. Observasjon ble da en naturlig metode som trolig ga meg mer objektiv informasjon om det som skjedde sammenlignet med at elevene kun hadde fortalt om det (Johannessen et al., 2016, s. 129; Tjora, 2017, s. 53). For å utdype dataene fra observasjonen, ble det også gjennomført intervju. Her kunne jeg få tilgang til elevenes subjektive tolkning av situasjonen. I etterkant av intervjuene kunne da elevenes bevisste overflateoppfatninger om påvirkningen av begrepsforståelsen analyseres. Ved også å gi elevene nye oppgaver om den andrederiverte, som en del av intervjuet, kunne jeg få enda en vinkling inn mot elevenes begrepsforståelse ved å analysere elevenes vekkede begrepsbilder.

3.2 Kontekst for datainnsamlingen

Innsamling av data ble gjort i sammenheng med et modelleringsprosjekt i en klasse i programfaget R1 på videregående skole. Modelleringsarbeidet ble gjennomført i løpet av to uker, med tre arbeidsøkter til oppgaveløsning samt én økt med framføringer av prosjektene der elevene ble vurdert med karakter.

Elevene ble delt inn i grupper og alle gruppene fikk ulike oppgaver basert på autentiske situasjoner. Det ble kun samlet inn data fra en gruppe bestående av tre elever; Tora, Kristian og Siri. Denne gruppens modelleringsoppgaver er gjengitt i Vedlegg 1.

De tre elevene som var forskningsdeltakere i studien arbeidet på et eget grupperom der jeg også var tilstede og filmet gruppesamarbeidet. Framføringen ble også filmet, men i ettertid vurderte jeg framføringen til ikke å være relevant å analysere siden det er selve arbeidet med modellering som er i fokus for min undersøkelse. Det var heller ikke nødvendig å transkribere og analysere opptakene fra den første økten, siden elevene i denne økten arbeidet med de innledende oppgavene for den andrederiverte (Vedlegg 1, oppgave 1-3 i del A).

Det viste seg imidlertid at oppgavene var for tidkrevende i forhold til hvor mange timer elevene kunne arbeide med dem på skolen. Derfor ble deler av modelleringsoppgavene ikke gjennomført. På grunn av for knapp tid ble det også nødvendig å møtes en ekstra økt utenom matematikktimene for å ferdigstille framføringen, noe jeg deltok på. I denne økten besto store deler av samtalene om hva de skulle skrive i lysbildene til presentasjonen og andre datatekniske element. Det var derfor få utsagn i denne økten som var relevante for studien. Tabell 1 oppsummerer de ulike øktene med datainnsamling fra selve modelleringsarbeidet.

Tabell 1: Oversikt over økter som ble brukt til datainnsamling av materiale fra selve modelleringsarbeidet.

Økter med modelleringsprosjektet (hver økt varer i to timer)	**Andre kommentarer**
1. arbeidsøkt (1. uke)	Oppgaver som innledet til den andrederiverte. Lite relevant for forskningsspørsmålene.
2. arbeidsøkt (1. uke)	Flest relevante samtaler.
3. arbeidsøkt (2. uke)	En elev er syk (Tora). Noen relevante samtaler.
4. arbeidsøkt (2. uke)	Ekstra økt i tillegg til undervisningstimene. Noen relevante samtaler.
Framføring (2. uke)	Ikke relevant for forskningsspørsmålene.

I uken etter framføringen ble det gjennomført individuelle intervju med elevene. Det ble stilt spørsmål om modelleringsarbeidet i tillegg til at det ble gitt nye oppgaver om den andrederiverte. Hvert intervju varte i omtrent én time.

3.2.1 Utforming av modelleringsoppgaven og oppgavene i intervjuet

Modelleringsoppgaven ble utformet i samarbeid mellom meg og læreren. Elevenes forkunnskap om den andrederiverte var det første vi tok hensyn til. Elevene hadde tidligere arbeidet med den andrederiverte hovedsakelig i form av funksjonsdrøfting. I forbindelse med dette hadde de arbeidet med konkavitet og vendepunkt. Med bakgrunn i dette antas det at elevene hadde grunnleggende kunnskaper om begrepet. For modelleringsprosjektet var det et mål at de i større grad måtte anvende kunnskapen om den andrederiverte i en mer utforskende sammenheng. Slik kunne de utvikle en mer relasjonell forståelse i tilknytning til begrepet.

Vi fokuserte særlig på at oppgavene skulle utfordre elevenes grafiske forståelse av den andrederiverte. Forskning indikerer som tidligere forklart at elever generelt har en svak forståelse av begrepet (kap. 2.3.4). For å være rimelig sikker på at oppgavene skulle utfordre forståelsen av den andrederiverte, fikk oppgavene en mer lukket form enn det jeg i utgangspunktet hadde tenkt. Konsekvensen av dette ble at de heller ikke inkluderte alle delprosessene i modelleringssyklusen til Blomhøj og Jensen (2003) (Figur 1).

Ved utformingen av oppgaven fokuserte vi på at oppgaven måtte være tilknyttet virkeligheten. Vi benyttet datamateriale fra den virkelige verden som er hentet fra NOAA (u.å.) og Global Carbon Atlas (2016). Temaet for oppgaven var CO_2- utslipp og CO_2- nivået i atmosfæren. I oppgaveformuleringen benyttet vi hverdagslige ord og realistiske problemstillinger for å prøve å knytte den andrederiverte tettere opp til virkeligheten.

Modelleringsoppgavene i Del B (Vedlegg 1) handlet ikke eksplisitt om den andrederiverte, men om integrering. Elevene skulle her skissere hvordan den integrerte til grafen ville se ut, noe som krever forståelse for hvordan den matematiske sammenhengen er mellom $f'(x)$ og $f(x)$[9]. Elevene kunne i dette arbeidet bruke det de hadde forstått i oppgave 4e. Der hadde de allerede studert sammenhengen mellom $f(x), f'(x)$ og $f''(x)$ representert grafisk.

Det å forstå hvordan sammenhengen er mellom $f'(x)$ og $f(x)$ i grafisk sammenheng, kan bidra til at en bedre forstår hvorfor en kan se på $f'(x)$ som en funksjon. Dette er ifølge Baker et al. (2000) en forutsetning for å også utvikle en forståelse av den andrederiverte som en funksjon. Viktige sammenhenger mellom $f(x)\ og\ f'(x),$ vil også gjelde mellom $f'(x)$ og $f''(x)$. Elevene kan derfor generalisere sammenhengene som de oppdager, slik at det kan støtte forståelsen av den andrederiverte. Derfor kan erfaringene med oppgaven i del B ha bidratt til at elevene gjorde viktige koblinger i deres begrepsnettverk (kap. 2.3.3).

I etterkant av modelleringsprosjektet ble det som nevnt gjennomført et intervju. I dette intervjuet ønsket jeg å se hvordan elevene overføre kunnskapen til nye sammenhenger. Derfor ble to nye oppgaver presentert for elevene. Oppgavene elevene skulle løse i dette intervjuet er gjengitt i Vedlegg 2. Den første oppgaven lagde jeg med inspirasjon fra en video som er tilgjengelig på Campus Inkrement (u.å.). Spørsmålene i denne oppgaven prøvde jeg å lage relativt like spørsmålene som ble gitt i modelleringsarbeidet. I arbeidet med denne oppgaven krevdes det etter mitt syn en horisontal overføring av kunnskap (kap. 2.4.2.1).

Den andre oppgaven som ble gitt, er en diagnostisk oppgave om derivasjon som er hentet fra Ubuz (2007, 614). I denne oppgaven skulle elevene selv skissere grafene for den første- og andrederiverte uten å ha et gitt funksjonsuttrykk. De kunne heller ikke se sammenhengene fra

[9] Her har jeg benyttet notasjonen "$f(x)$", "$f'(x)$" og "$f''(x)$" fordi dette var mest hensiktsmessig, i stedet for "funksjonen", "den deriverte til funksjonen" og "den andrederiverte til funksjonen". Denne notasjonen vil også hovedsakelig benyttes i resultat- og analysedelen.

GeoGebra, slik de kunne i den første oppgaven og i modelleringsoppgavene. Løsningen av denne oppgaven krever derfor en vertikal matematisering (kap. 2.4.2.1) i forhold til den første oppgaven og modelleringsarbeidet.

3.3 Etiske problemstillinger

Velbegrunnede etiske valg i forskningsarbeidet er viktig for å respektere deltakerne i studien. Det var flere ganger direkte kontakt mellom meg som forsker og elevene som forskningsdeltakere, noe som sannsynligvis påvirket den gjensidige respekten og tilliten som oppsto mellom partene (Tjora, 2017, s. 46- 47).

Nerdrum (1998), henvist i Johannessen et al. (2016, s. 85), legger fram tre typer hensyn som en forsker må tenke gjennom:

1) *Forskningsdeltakernes rett til selvbestemmelse og autonomi.*
2) *Forskerens plikt til å respektere forskningsdeltakernes privatliv.*
3) *Forskerens ansvar for å unngå skade.*

For å sikre *rett til selvbestemmelse og autonomi*, ble det spesielt lagt vekt på å gi elevene et muntlig og skriftlig informert samtykke (Vedlegg 3). Det informerte samtykket ble utformet i overensstemmelse med retningslinjene Norsk senter for forskningsdata (u.å), NSD. Elevene fikk informasjon om bakgrunnen for studien, hva det innebærer å delta, hva som skjer med informasjonen om dem og at deltagelsen er frivillig.

I arbeidet med å planlegge hva elevene skulle få vite på forhånd, oppsto det en konflikt mellom å legge til rette for pålitelige funn på den ene siden og å gi fullstendig informasjon om forskingens formål på den andre siden. Dersom elevene på forhånd fikk vite at jeg studerte deres forståelse av den andrederiverte, ville dette trolig ha påvirket resultatene og svekket påliteligheten. I mitt tilfelle valgte jeg derfor å holde tilbake denne informasjonen i tilknytning til formålet med studien. Det ble gitt mer utfyllende informasjon i etterkant av modelleringsprosjektet, men i forkant av intervjuet. Summen av all informasjon deltakerne fikk, bidro trolig til at det ble etablert et godt tillitsforhold mellom elevene og meg.

Det andre hensynet Nerdrum legger fram er at en som forsker har plikt til å *respektere forskningsdeltakernes privatliv*. Det skal blant annet ikke være mulig å spore dataene tilbake til forskningsdeltakerne ved å lese det publiserte dokumentet (Johannessen et al., 2016, s. 86; Kvale & Brinkmann, 2015, s. 300). I analysearbeidet og i den ferdige oppgaven brukes derfor pseudonym for å ivareta anonymiteten (Johannessen et al., 2016, s. 91). Det vil heller ikke gjøres koblinger mellom utsagn som indirekte kan bidra til å identifisere enkeltpersoner.

Siden det ble brukt videokamera i datainnsamlingen er det mulig å identifisere personer fra selve datamaterialet. Behandlingen av slike personopplysninger er meldepliktig i henhold til Personopplysningsloven (2000, §31). Studien er derfor meldt til, og godkjent av Personvernombudet for forskning ved NSD (Vedlegg 4).

Nerdrums tredje punkt er at *forskeren også har ansvar for å unngå skade*. En bør fokusere på hvordan studien kan bidra til å bedre deltakernes situasjon og minimalisere skadelige konsekvenser (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 301). I planleggingen av modelleringsprosjektet ble denne etiske betraktningen viktig, både med hensyn til læreren og elevene. Det å fokusere på den andrederiverte som begrep kan som tidligere nevnt begrunnes etisk både ut fra kompetansemålene, lærerens ønske og forskning. Slik kunne mitt forskningsfokus bidra til å bedre deltakernes situasjon.

Et annet aspekt er at elevene kan oppleve ubehag enten ved intervjuet eller under observasjon. Dette vil bli diskutert i underkapitlene om intervju (kap. 5.7) og om reliabilitet (kap. 5.9.1).

3.4 Rekruttering og utvalg

I et casestudium benyttes det en allerede eksisterende grense for hva og hvem undersøkelsen skal inkludere (Tjora, 2017, s. 131). For å rekruttere forskningsdeltakere til studien, var det derfor i første omgang nødvendig å finne en lærer som inkluderer modellering i undervisningen. En aktuell lærer ble kontaktet, og han viste seg å være positiv til at det kunne gjennomføres datainnsamling i klassen hans. Rektoren på skolen godkjente også dette.

Det var 13 elever i klassen som samtykket til å delta i studien. Videre måtte utvalgsstørrelse og valg av forskningsdeltakere bestemmes. I metodelitteraturen blir det framhevet at en bør velge så mange forskningsdeltakere som trengs for å kunne belyse problemstillingen (Johannessen et al., 2016; Kvale & Brinkmann, 2015). Utvalgsstørrelsen ble bestemt av den naturlige årsaken at prosjektet var basert på gruppearbeid. Potensielt kunne jeg gått rundt mellom flere grupper og samlet inn data, men en del av målet var at jeg ønsket å studere grundig en gruppe i deres arbeid. Læreren ønsket at gruppestørrelsen skulle være på tre eller fire elever. Vi bestemte oss for at en gruppestørrelse på tre elever var mest gunstig for innsamlingen av data. I en gruppe på fire elever kan arbeidet fort bli delt opp slik at elevene arbeider to og to. Inkludering av alle medlemmene i gruppen i felles diskusjoner var ønskelig og kan antas å være viktig for datainnsamlingen.

I kvalitative undersøkelser vil tilfeldig uttrekking av forskningsdeltakere ifølge Johannessen et al. (2016, s. 113) ikke være egnet. Det vil heller være hensiktsmessig med et strategisk utvalg, der en velger informanter som er relevante og interessante (Johannessen et al., 2016, s. 113; Tjora, 2017, s. 130). Det strategiske utvalget ble gjort ved hjelp av utvalgskriteriene:

1. Verbale og samhandlende elever. For å få innblikk i elevenes forståelse er samtalen mellom elevene viktig.
2. Elevene bør ha en grunnforståelse av den førstederiverte, siden forståelsen av den andrederiverte bygger på dette. Dersom elevene har lav forståelse av den førstederiverte, vil det antakelig bli lite interessante funn om utvikling av forståelsen av den andrederiverte.
3. Elever som ikke på forhånd har høy grad av forståelse for den andrederiverte, men som har et utviklingspotensial.
4. Gruppen bør bestå av begge kjønn

For å ta hensyn til det andre og tredje kriteriet ble det tatt utgangspunkt i lærers oppfattelse av elevenes forståelse, elevens karakter i faget og elevenes prøvebesvarelse om den andrederiverte (Vedlegg 5). De tre elevene som til slutt ble valgt hadde alle middels til høy karakter i faget og hadde fått til noe, men ikke alt på oppgaven fra prøven. To av elevene hadde hatt samme lærer året før (Tora og Kristian), mens den tredje begynte i klassen i inneværende skoleår (Siri).

3.5 Forundersøkelse

Ved å gjennomføre en pilotundersøkelse, kan en i forkant av undersøkelsen få mulighet til å prøve ut blant annet innsamlingsmetoder og opptaksutstyr og vurdere om endringer skal gjøres. Siden en pilotundersøkelse måtte vært utført ett år i forveien på grunn av at elevene da hadde sitt forrige modelleringsprosjekt, ble det ikke gjennomført en slik undersøkelse. Likevel var det ønskelig å gjennomføre en forundersøkelse for å styrke kvaliteten i studien. I forkant av selve prosjektet observerte jeg derfor hvordan vanlig undervisning foregikk i tre matematikkøkter. Dette var nyttig av to grunner; for det første fikk jeg et innsyn i hvordan lærerens ordinære undervisning var. Det viste seg at denne læreren benyttet en mindre tradisjonell undervisningsform preget av omvendt undervisning. For det andre ble elevene vant med at jeg var tilstede i klasserommet. I deler av disse matematikkøktene fungerte jeg som hjelpelærer, noe jeg gjorde for å bli bedre kjent med elevene. På den måten kan dette ha bidratt til at elevene ble mer trygge på meg. Dette ser jeg på som en fordel fordi jeg senere skulle observere og filme deres modelleringsarbeid samt at det skulle gjennomføres intervju.

I tillegg til å observere ordinær undervisning, ble det levert ut et spørreskjema om hvordan elevene erfarte modelleringsprosjektet året før (Vedlegg 6). Her fikk jeg undersøkt nærmere noen av faktorene jeg antok var sentrale for påvirkningen av begrepsforståelsen. De svarene jeg fikk ble senere brukt som bakgrunnskunnskap under observasjonen av selve modelleringsprosjektet, men også som et utgangspunkt for idéer til analysearbeidet. Samtidig var jeg kritisk til at elevenes svar kunne være mindre gyldige siden det kan være utfordrende å huske tilbake til et prosjekt som ble gjennomført for ett år siden. I spørreskjemaet ble det derfor ikke spurt detaljerte spørsmål, men heller mer generelle spørsmål.

Funnene fra forundersøkelsen vil ikke bli presentert i oppgaven, bortsett fra noen av observasjonsfunnene som vil trekkes inn i diskusjonskapittelet (kap 5).

3.6 Observasjon

Under selve observasjonen ble det skrevet feltnotater. I feltnotatene ble det tydelig skilt mellom egne tolkninger av det som skjedde og så objektive beskrivelser av situasjonen som mulig. I tillegg ble det notert tid for når hendelsene skjedde. I de to neste delkapitlene vil jeg gjøre rede for min observasjonsrolle og bruk av video- og lydopptak.

3.6.1 Min rolle som observatør

De ulike rollene en kan ha som observatør blir av Gold (1958) betegnet som *fullstendig deltaker, observerende deltaker, deltakende observatør* og *fullstendig observatør*. Det ble en utfordring å bestemme i hvilken grad og hvordan jeg som forsker skulle være engasjert i det som skjedde i gruppesamarbeidet. Dersom jeg i stor grad skulle være delaktig i veiledning av matematikkoppgavene, kunne dette styrt hvordan diskusjonene utviklet seg. Dette kunne ha påvirket påliteligheten av funnene.

På den andre siden kan det for både meg og elevene oppleves som unaturlig og ubehagelig dersom observasjonsrollen var svært passiv. Jeg ønsket å sørge for en naturlig setting og god arbeidsstemning slik at observasjonene ble mer pålitelige. At elevene får veiledning er en naturlig del av et modelleringsarbeid. Derfor inntok jeg en rolle som byttet mellom å være deltakende observatør og observerende deltaker, noe Tjora (2017, s. 61) benevner som en *interaktiv observasjon*. I hovedsak var jeg kun en deltakende observatør, men når det var naturlig interagerte jeg med elevene og jeg fungerte da som en observerende deltaker.

Det er også et etisk aspekt ved dette valget. De andre elevene i klassen var i klasserommet og fikk veiledning av læreren når de trengte det, mens gruppen som ble observert var på et eget grupperom. Det at jeg kunne fungere som en lærer når dette var nødvendig, gjorde at de ikke fikk mindre veiledning enn de andre. På forhånd var jeg bevisst hvilke rammer deltagelsen min skulle ha. Dersom elevene hadde spørsmål, svarte jeg som regel med et åpent spørsmål tilbake. Jeg prøvde å ikke bruke begreper i tilknytning til den andrederiverte eller spørre om hva de forsto, dersom det ikke var naturlig. Ellers prøvde jeg å handle slik en vanlig lærer ville gjort.

3.6.2 Video- og lydopptak

For å fange opp samhandling mellom elevene under modelleringsarbeidet, ble det benyttet lyd- og videoopptak. Bruk av slike opptak gjør at det kan registreres informasjon som er mer detaljert og nøyaktig, sammenlignet med det en observatør har kapasitet til å registrere, notere og huske (Brekke & Tiller, 2013, s. 159). En kan også i større grad konsentrere seg om å være til stede i situasjonen, i stedet for å måtte notere alt som skjer underveis (Nilssen, 2012, s. 31). Med bruk av videoopptak i tillegg til lydopptak, kan en få bedre tilgang til konteksten og studere kroppsspråk og samspillet mellom forskningsdeltakerne (Johannessen et al., 2016, s. 141; Kvale & Brinkmann, 2015, s. 205-206). For analysearbeidet mitt var det viktig å vite hvilke modeller som ble diskutert, hvor elevene pekte og hvilke detaljer de diskuterte. For å være sikker på at kameraene skulle fange opp det som var ønskelig for studien, hadde to av elevene hver sin GoPro i tillegg til at jeg også hadde det. Dersom ett kamera ikke fanget opp nødvendig informasjon, ville dette trolig bli fanget opp av de andre. Mitt kamera var ofte rettet mot elevene for senere å kunne studere samhandlingen mellom dem. Observasjon av selve situasjonen var også viktig for den senere tolkningen av lyd- og videoopptakene.

Transkribering og analyse blir beskrevet som vanskeligere og mer tidkrevende med videoopptak enn lydopptak (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 206; Tjora, 2017, s. 103). Videoopptak vil ta med mange detaljer og det kan være vanskelig å få oversikt over det store datamaterialet. Forskningsfokuset mitt var å studere én spesiell del av casen autentisk modellering, derfor kan dette gjøre at datamengden ble mer overkommelig. En slik innsnevring av forskningsfokus vil ifølge Tjora (2017, s. 106- 107) gjøre det mulig å utnytte potensialet som video har.

3.7 Intervju

I etterkant av selve modelleringsarbeidet, ble det gjennomført et intervju med hver av de tre elevene. *Én- til- én- intervju* blir framhevet som gunstig for å få detaljerte beskrivelser av forskningsdeltakerens oppfatninger, forståelse, erfaringer og refleksjoner knyttet til et fenomen (Johannessen et al., 2016, s. 146; Tjora, 2017, s. 114). Et slikt intervju kan gi meg et innblikk i elevenes bevisste overflateoppfatninger om hvordan forståelsen av den andrederiverte ble påvirket gjennom prosjektet. Dette var det ene målet med intervjuet. Det andre målet var å få et innsyn i elevenes vekkede begrepsbilder (kap. 2.3.2) i møte med nye oppgaver om den andrederiverte. Oppgavene ble gitt i slutten av intervjuet, og ved å være tilstede under selve oppgaveløsningen, kunne jeg stille elevene spørsmål og be dem begrunne det som ble gjort.

Johannessen et al. (2016, s. 145) hevder at forskningsdeltakernes erfaringer og oppfatninger kommer best fram når de kan snakke mest mulig fritt i intervjuet. Derfor ble det gjennomført et *semistrukturert intervju*. Intervjueren tar da utgangspunkt i en intervjuguide, men rekkefølgen på tema og spørsmål kan variere ut fra hvordan samtalen utvikler seg (Johannessen et al., 2016, s. 148; Kvale & Brinkmann, 2015, s. 46). En har dermed mulighet til å legge til rette for en relativt fri samtale og en kan følge opp interessante utsagn fra forskningsdeltakeren. Samtidig kan en styre samtalen til å handle om de relevante temaene. Intervjuguiden, inkludert oppgavene om den andrederiverte, er gjengitt i Vedlegg 2.

Intervjuspørsmålene til intervjuguiden ble formulert på bakgrunn av forskningsspørsmålene, observasjonene fra gruppesamarbeidet, spørreskjemaet fra forundersøkelsen og ut fra min forkunnskap om modellering og begrepsforståelse. Kvale og Brinkmann (2015, s. 162- 163) hevder at et godt intervju bør bidra tematisk til produksjon av kunnskap og dynamisk til å fremme en god intervjuinteraksjon. Det ble derfor fokusert på å legge til rette for å få tak i nødvendig informasjon til analysearbeidet, blant annet ved å lage tilhørende mulige oppfølgingsspørsmål for å få eleven til å komme med utfyllende informasjon. I tillegg ble det fokusert på at elevene på en naturlig måte kunne reflektere over egne erfaringer fra modelleringsprosjektet, for å skape en god intervjusituasjon.

Den *asymmetriske maktrelasjonen* mellom intervjuer og intervjuperson kan påvirke hvordan intervjupersonen opplever intervjuet (Brekke & Tiller, 2013, s. 136; Kvale & Brinkmann, 2015, s. 51-53). For å redusere den asymmetriske maktrelasjonen, har jeg som tidligere nevnt gjort noen tiltak for å legge til rette for å skape trygghet; jeg har vært med i undervisningsøktene på forhånd for å bli mer kjent med elevene, vært deltakende i modelleringsarbeidet for å skape en naturlig interaksjon og gitt informasjon om forskningsarbeidet. En atmosfære som er preget av tillit og respekt kan være avgjørende for å få intervjuobjektene til å åpne seg og gi fyldig informasjon (Nilssen, 2012, s. 30; Postholm, 2010, s. 82).

Ifølge Kvale og Brinkmann (2015, s. 104) er det hensiktsmessig med en brifing før intervjuet. Her ble det forklart hva som skulle skje i intervjuet og jeg repeterte at det som ble sagt ville bli tatt opp med lydopptak, men jeg vektla her at elevene var anonyme. Under intervjuet ble det kun benyttet lydopptak, blant annet fordi lydopptak kan virke mindre truende enn videoopptak og dermed påvirke situasjonen i mindre grad (Brekke & Tiller, 2013, s. 162). Bruk av videoopptak i intervjusituasjonen ser jeg også som mindre nødvendig enn ved observasjonen, da det i intervjuet i hovedsak var det som ble sagt som var interessant. På bakgrunn av dette ser jeg det som tilstrekkelig med bare lydopptak. Lydopptak ville også være lettere for meg å håndtere i ettertid, da videoopptak som tidligere nevnt er tidkrevende å analysere.

3.8 Analysearbeidet

Etter hver økt med datainnsamling ble datamaterialet transkribert. Transkripsjon av video innebærer en abstraksjon, der det går tapt informasjon om blant annet kroppsspråk, gester, stemmeleie og åndedrett (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 205). Transkripsjonen av lydopptak vil også føre til en abstraksjon, men i hovedsak for stemmeleie og åndedrett. Jeg valgte å transkribere uttrykk som "ehh", "mmh", "ja" og "nei" for ikke å miste viktig informasjon. Disse uttrykkene kan være relevante i studien fordi de kan gi en indikasjon på at eleven er usikker eller må tenke seg om (Nilssen, 2012, s. 49). Jeg valgte å transkribere datamaterialet på bokmål og ikke på dialekt, fordi elevenes dialekt ikke er sentralt for studiens fokus. Utfyllende informasjon om hvordan transkripsjonen ble gjort, finnes i Vedlegg 7.

På grunn av det store datamaterialet fra modelleringsøktene, valgte jeg å transkribere de samtalene som etter mitt syn var relevante. Siden ikke alt ble transkribert fra modellerings-arbeidet, så jeg i etterkant gjennom videoene flere ganger for å vurdere om det kunne være situasjoner som kunne være relevante som jeg ikke tidligere hadde tenkt på. For lydopptakene fra intervjuene ble derimot all lyd transkribert. Dette gjorde jeg fordi det meste som ble sagt i intervjuet kunne være relevant. I tillegg ble det mer oversiktlig å arbeide med fullstendige transkripsjoner i den videre analysen.

I det videre analysearbeidet markerte jeg først utsagn som kunne være relevante for forskningsspørsmålene. Disse transkripsjonene ble kodet med koder som ligger nær opp til meningsinnholdet i datamaterialet, noe Johannessen et al. (2016, s. 175) benevner som *beskrivende koder*. Ved å redusere og ordne datamaterialet med koder, bidro dette til at det videre analysearbeidet ble mer oversiktlig. Etter å ha kodet transkripsjonene, tok jeg først for meg transkripsjonene som var knyttet til forskningsspørsmål 1 og 2. Jeg systematiserte kodene innenfor underkategoriene og kategoriene i Tabell 2. Underkategoriene vil jeg komme tilbake til i kapittel 4 og spesielt i Tabell 3.

Tabell 2: Kategorier og underkategorier som ble brukt i analysearbeidet. Hovedkategoriene er de som i resultatdelen vil benevnes som «faktorer som påvirker forståelsen av den andrederiverte».

Kategorier	**Underkategorier**
Det autentiske	Virkelige tall og data om CO_2 (V)
	Hverdagslige ord, akselerasjon (HOA)
	Hverdagslige ord, oppbremsing (HOO)
	Realistisk problemstilling, tidspunkt for klimamessig forbedring (RPTKF)
	Realistisk problemstilling, journalist (RPJ)
Samtalen	Snakke høyt (SH)
	Lære av andre som forklarer (LAF)
	Støtte fra lærer (SL)
Arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit	Ingen kjent framgangsmetode (IFr)
	Ingen fasit (IFa)
GeoGebra	Sammenligne grafene (SG)

Bakgrunnen for at akkurat de fire hovedkategoriene i Tabell 2 ble valgt, er at jeg gjennom litteratursøk fikk en antagelse om at tre av dem kunne være viktige for påvirkningen av begrepsforståelsen. Bruken av GeoGebra hadde jeg da ikke tenkt på som en sentral faktor. De tre andre faktorene var derfor fokus i spørreskjemaet som ble gitt i forundersøkelsen (Vedlegg 6). Resultatene fra forundersøkelsen ga meg bekreftelse på at disse faktorene var viktige, og i løpet av datainnsamlingen og i analysearbeidet fikk jeg bekreftet dette enda en gang. Underveis i datainnsamlingen og i analysearbeidet forsto jeg at GeoGebra måtte være en egen kategori.

For å velge hvilke utdrag av samtaler som skulle presenteres i oppgaven, har jeg fokusert på flere moment. For det første fokuserte jeg på at disse utdragene måtte kunne hjelpe meg å svare på forskningsspørsmålene. For eksempel ble det valgt utdrag av samtaler som kunne antyde hvordan ulike faktorer påvirket elevenes begrepsforståelse. Det er også presentert utsagn som kan si noe om modelleringsarbeidet påvirket begrepsforståelsen mot en retning som ikke stemmer med det som er matematisk korrekt. Et annet moment er at dersom to eller flere utdrag viste samme poeng, prøvde jeg å velge det som på best mulig måte fikk fram det som var relevant for studien. I tillegg prøvde jeg å velge utdrag slik at leseren kan få et innsyn i alle de tre elevenes begrepsforståelse. Imidlertid var Kristian klart mest deltakende i samtalene, noe som gjør at en i størst grad får innblikk i hans begrepsforståelse. Et ytterligere moment som jeg tok hensyn til, var å ikke velge utdrag dersom jeg hadde stilt ledende spørsmål som kunne svekke påliteligheten eller gyldigheten. Det var ikke til hensikt å stille slike ledende spørsmål, men noen ganger kunne spørsmålene bli ledende likevel. Dette kan nok forklares av min manglende intervjuerfaring.

For å få en bedre oversikt over datamaterialet, lagde jeg et sammendrag for hver av elevene. Dette sammendraget kan sees som det Kvale og Brinkmann (2015, s. 232) beskriver som *meningsfortetting*. I sammendraget noterte jeg min oppfatning av hver elevs forståelse av den andrederiverte i løpet av prosjektet. Det ble også laget sammendrag for hver enkelt elev om deres vekkede begrepsbilder i møtet med nye oppgaver om den andrederiverte. Disse sammendragene ble videre et utgangspunkt for funnene som er presentert i kapittel 4.2. I dette delkapittelet er det ofte presentert meningsfortettede tekster av det som ble sagt i intervjuet. I kapittel 4.1 er det også presentert en del tekst med meningsfortetting i tilknytning til forskningsspørsmål 2. Dette ble gjort for å redusere datamengden slik at leseren får bedre oversikt. Dersom leseren ønsker å nærmere studere relevante transkripsjoner fra intervjuene, finnes disse i Vedlegg 8.

For å analysere datamaterialet opp mot elevenes begrepsforståelse, ble begrepsapparatet til Tall og Vinner (1981), Barnard (1998) og Barnard og Tall (1997) benyttet.

3.9 Kvalitet i studien

I kvalitative undersøkelser er ikke dataene målbare eller stabile. Likevel kan kvaliteten i studien vurderes ved å vurdere om forskningsprosessen har blitt gjennomført på en god måte. Vanlige indikatorer på om studien har god kvalitet er *reliabilitet* og *validitet*. Jeg har valgt å også skille mellom *intern- og ekstern validitet*, slik det blir gjort av Johannessen et al. (2010).

3.9.1 Reliabilitet

Reliabilitet henviser til hvor pålitelige resultatene er (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 137). Dersom forskningen har høy pålitelighet, skal andre forskere på et senere tidspunkt kunne gjenta undersøkelsen og få samme resultat (Johannessen et al., 2016, s. 36; Kvale & Brinkmann, 2015, s. 211). Johannessen et al. (2016, s. 231) hevder at et slikt krav er lite hensiktsmessig for kvalitative studier. Datainnsamlingen i studien er styrt av samtaler som blir konstruert i den spesielle konteksten. Samtaler med samme innhold trenger derfor ikke å oppstå på et senere tidspunkt. I tillegg vil store deler av det som skjer i forskningsprosessen være subjektivt, siden forskeren er det viktigste forskningsinstrumentet i kvalitativ forskning (Brekke & Tiller, 2013, s. 135; Nilssen, 2012, s. 140; Postholm, 2010, s. 127).

Det blir vektlagt at en likevel kan styrke påliteligheten ved å gjøre rede for egen subjektivitet i forskningsprosessen og å gjøre rede for andre sentrale elementer som påvirker påliteligheten (Nilssen, 2012, s. 140). I de følgende avsnittene vil det gjøres rede for betraktninger om min forforståelse, om tiltak for å minske forskningseffekten og om hvordan intervjuene ble gjennomført for å øke påliteligheten. I kapittel 5.8 er det redegjort for hvordan dataene er tolket og hvordan jeg har valgt ut hvilke utdrag som skulle benyttes i oppgaven. Dette er også sentrale momenter som synliggjør egen subjektivitet i forskningsprosessen.

Det blir påpekt at en som kvalitativ forsker blir påvirket av sin *forforståelse* (Johannessen et al., 2016, s. 34- 35; Nilssen, 2012, s. 26; Postholm, 2010; Tjora, 2017, s. 91). De brillene en har, gjør at det som observeres og tolkes blir påvirket av teori, forskning, fordommer og oppfatninger. Det som er rapportert i teoridelen viser i stor grad hvilke briller jeg har sett gjennom. Når det gjelder fordommer og oppfatninger, har jeg prøvd å ikke la dette påvirke interaksjonen med elevene.

Forskerens forforståelse kan påvirke hva det blir fokusert på ved observasjon, hva som skrives i feltnotatene og hvordan dataene tolkes. Forforståelsen er derfor noe som truer påliteligheten. Samtidig er det ifølge Johannessen et al. (2016, s. 34) helt nødvendig å ha en forforståelse når en skal forske, for å kunne forstå fenomenet som studeres. I kvalitativ forskning benyttes ofte teorien deduktivt for å få struktur, men i møte med feltet arbeides det også induktivt (Johannessen et al., 2016, s. 135; Postholm, 2010, s. 36). For ikke bare å fange opp det som er i tråd med min forforståelse, prøvde jeg under observasjonen å være åpen og fange opp mulige forhold som jeg ikke hadde tenkt på. Mot slutten av intervjuet spurte jeg også elevene om de mente at det var andre faktorer som påvirket forståelsen av den andrederiverte, enn de vi allerede hadde snakket om. Således kunne mine antagelser fra teori og forskning endres underveis i løpet av forskningsprosessen. En slik interaksjon mellom deduksjon og induksjon kan ifølge Postholm (2010, s. 36) bidra til at forskerens forståelse av forskingsfeltet utvikles. For meg gjorde dette at min forståelse ble utviklet. Det at jeg aktivt prøvde å være åpen om å fange opp andre forhold, gjorde at jeg inkluderte "GeoGebra" som en egen faktor. I analyseprosessen oppdaget jeg også "sosial og faglig trygghet" som en overordnet faktor som påvirket begrepsforståelsen. Dette vil diskuteres i kapittel 5.

I metodelitteraturen blir det framhevet at funn kan bli påvirket av en *forskningseffekt* (Postholm, 2010, s. 69; Tjora, 2017, s. 71). Deltakerne kan endre oppførsel på grunn av selve forskningssituasjonen. De kan blant annet gjøre sitt beste for å framstå i et godt lys, noe deltakere i studien min kan ha prøvd på. I intervjuet var alle i hovedsak positive til modelleringsprosjektet og mente de hadde lært mye. Det er vanskelig å si om det som ble uttalt er påvirket av forskningseffekten eller om det er deres faktiske meninger. Postholm (2010, s. 69) hevder at forskningseffekten også kan påvirke til det motsatte; at deltakerne ikke gir forskeren relevant informasjon i intervjuet. Mangel på informasjon eller feilinformasjon kan derfor ligge implisitt i datamaterialet.

Tjora (2017, s. 103) hevder at bruken av videoopptak muligens kan bidra til en større forskningseffekt. Videokameraet kan virke forstyrrende eller skremmende for deltakerne. Det er nok en reel fare for at dette påvirket påliteligheten, selv om det ikke så ut til å ha nevneverdig utslag på disse elevene. Det at det ble brukt GoPro- kamera til å filme med, har trolig gjort at elevene ikke ble så påvirket av filmingen sammenlignet med om enn hadde hatt et vanlig videokamera. Kameraene var små og lette, og ble festet på hodet som en hodelykt. Et annet moment er at mange ungdommer kan ha erfaring med å bli filmet, eller at de hadde erfaring med GoPro i sammenheng med for eksempel sport. Dette kan ha gjort at situasjonen ikke var så uvant.

I intervjusituasjonen gjorde jeg noen grep for å øke påliteligheten. Ifølge Tjora (2017, s. 164) er ikke "generaliserte opplevelser" pålitelig nok, og det bør derfor fokuseres på konkrete fortellinger og erfaringer. Med bakgrunn i dette ba jeg i intervjusituasjonen elevene om å forklare, ut fra konkrete eksempler, der det var naturlig. For å sikre en viss grad av konkretisering, viste jeg også et videoklipp til hver av elevene. Videoklippet viste en situasjon som etter mitt syn var viktig for den aktuelle elevens forståelse av den andrederiverte. Det å se et videoklipp der en selv er tilstede, kan trolig vekke rike minner fra situasjonen. Som tidligere nevnt fokuserte jeg også på å ikke stille ledende spørsmål som kunne svekke påliteligheten og validiteten til elevenes utsagn. Samtidig benyttet jeg meg av ledende spørsmål for å kunne kontrollere intervjuerens svar, noe som kan styrke kvaliteten i studien ifølge Johannessen et al. (2016, s. 200- 201).

3.9.2 Intern validitet

Intern validitet, eller *troverdighet*, omhandler spørsmål om en måler det en tror en måler eller i hvilken grad de innsamlede dataene faktisk reflekterer de fenomenene som undersøkes (Johannessen et al., 2016, s. 232; Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). Videre vil det gjøres rede for moment som kan styrke troverdigheten til studien.

Det ble benyttet flere ulike innfallsvinkler inn mot den samme casen for å *triangulere dataene* og således øke troverdigheten (Johannessen et al., 2016, s. 232; Postholm, 2010, s. 132).

Dersom ulike kilder bekrefter eller understøtter hverandre, vil det være med på å styrke kvaliteten i studien (Postholm, 2010, s. 132). I selve modelleringsprosjektet ble det benyttet både feltnotat, videoopptak og lydopptak fra diktafon. I tillegg ble datamaterialet transkribert rett i etterkant av hver økt med datainnsamling. Disse momentene har i stor grad bidratt til at samtalene og interaksjonen mellom elevene er fanget opp, noe som kan gjøre transkripsjonene mer nøyaktige og troverdige.

De ulike metodene som ble benyttet gir også en triangulering av data. I analysearbeidet av gruppesamarbeidet ble det særlig fokusert på kategoriene som ble beskrevet i kapittel 5.8. I intervjuet ble det fokusert på de samme kategoriene, men her fra elevenes subjektive ståsted. Som tidligere nevnt, ga også de nye oppgavene om den andrederiverte meg innsyn i elevenes vekkede begrepsbilder. Sammen kunne disse metodene gi ulike innfallsvinkler til problemstillingen.

Bruken av lyd- og videoopptak er også med på å styrke troverdigheten av de tolkningene som ble gjort i analysen. Slike opptak gir en detaljert ikke- tolket gjengivelse fra situasjonen. En har muligheten til å gå fram og tilbake i datamaterialet og observere diskusjoner flere ganger. Tjora (2017, s. 103) framhever at det er et stort potensial å arbeide slik. En kan kontrollere egne inntrykk og notater og det er mulig å oppdage nye faktorer som kan være sentrale. På den måten kunne transkripsjoner og den videre analysen i større grad unngå å bli påvirket av mine subjektive oppfatninger av det som skjedde. Således kan tolkningene bli mer troverdige.

Det ble også som tidligere nevnt vist et videoklipp til hver av elevene under intervjuene. Jeg ba eleven beskrive situasjonen og etterpå ble det stilt spørsmål. Ved analysen av disse klippene fikk jeg mulighet til å studere både videoklippet og elevenes uttalelser om disse, noe som styrker troverdigheten av tolkningene.

I intervjusituasjonen fokuserte jeg også på å stille kontrollspørsmål, noe som kan gjøre valideringen av fortolkningen lettere i analysearbeidet (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 146). I tillegg studerte jeg transkripsjonene fra det første intervjuet før jeg skulle gjennomføre det neste. Det å se nærmere på hvordan det første intervjuet ble gjennomført, bidro til at det ble gjort noen justeringer slik at jeg brukte flere og bedre kontrollspørsmål og utdypende spørsmål på det neste intervjuet.

Det blir framhevet at troverdigheten kan styrkes dersom en gjennomfører *"member checking*"; at forskningsdeltakerne leser gjennom og bekrefter transkripsjoner og eventuelle tolkninger fra intervjuet (Nilssen, 2012, s. 142; Postholm, 2010, s. 132). Her kan en gjøre justeringer dersom deltakerne mener at noe ikke kom fram på riktig måte. I etterkant av intervjuet, spurte jeg elevene om de ville lese gjennom transkripsjonene, men ingen av dem hadde ønske om dette.

3.9.3 Ekstern validitet

Ekstern validitet omhandler i hvilken grad resultat fra studiet kan *overføres* til lignende situasjoner (Johannessen et al., 2016, s. 232). Det som oppsto hos de tre elvene i studien min trenger ikke å oppstå hos andre elever. Ifølge Postholm (2010, s. 38) kan det i caseundersøkelser ikke snakkes om en direkte overføring eller generalisering. Likevel kan en snakke om det som kalles en *naturalistisk generaliser*ing, der nytteverdien av forskningens funn er sentral for overføringen (Postholm, 2010, s. 38; Tjora, 2017, s. 240). Forfatterne beskriver at dersom en redegjør godt nok for detaljer i det som er studert, kan leseren selv vurdere om funnene vil ha gyldighet i andre situasjoner. Dette er noe som har vært i fokus gjennom hele oppgaven. Således kan andre lærere ha nytte av studiens funn og konklusjoner som et tankeredskap for utvikling av egen undervisningspraksis.

4 Resultat og analyse

I dette kapittelet presenteres dataene fra undersøkelsen og analysen av disse. I kapittel 4.1 har jeg valgt å samle funn fra de ulike faktorene som påvirket elevenes forståelse av den andrederiverte[10]. Denne delen tar for seg forskningsspørsmål én og to. Disse forskningsspørsmålene vil også gå noe inn i kapittel 4.2. Her tar jeg for meg hvordan hver enkelt av elevenes begrepsforståelse ble påvirket i løpet av prosjektet. Årsaken til at jeg ønsker å presentere funnene slik, er at jeg også ønsker å kunne si noe om hvordan modelleringsarbeidet påvirket hver enkelt elevs forståelse, og ikke bare fokusere på gruppen som en helhet. Som en del av hver av elevenes påvirkning på begrepsforståelsen, vil det i kapittel 4.2 gjøres rede for funn i tilknytning til forskningsspørsmål tre; om elevenes vekkede begrepsbilder i møte med nye oppgaver om den andrederiverte.

De presenterte samtaleutdragene i kapittelet nummereres i kronologisk rekkefølge. Hvert enkelt utsagn blir også nummerert, men her i kronologisk rekkefølge fra datainnsamlingen og ikke fra oppgavens kronologi. På den måten kan en få et visst innblikk i når de aktuelle samtalene skjedde i forhold til hverandre. I teksten henvises det også tilbake til konkrete utsagn ved at utsagnsnumrene skrives i parentes. Modelleringsoppgavene som det blir henvist til, finner en i Vedlegg 1.

4.1 Faktorer som påvirker forståelsen av den andrederiverte i modelleringsprosjektet

Det vil gjøres rede for funn som er knyttet til de ulike faktorene som etter min tolkning påvirker forståelsen; Samtalen, det autentiske, bruk av GeoGebra som digital graftegner og arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit (Tabell 2). I de fleste samtaleutdragene var det flere av faktorene som sammen så ut til å påvirke forståelsen av den andrederiverte. Funnene kunne derfor blitt presentert ved å ta for seg en samtale om gangen, og at disse ble diskutert opp mot hvilke faktorer som så ut til å påvirke begrepsforståelsen. Jeg har likevel valgt å presentere de ulike samtaleutdragene under den faktoren som ser ut til å påvirke elevenes forståelse mest. Hvilke andre faktorer som i vesentlig grad påvirket elevenes forståelse i de ulike samtaleutdragene, er vist i Tabell 3. Jeg vil ikke gå nærmere inn på hvordan alle disse faktorene påvirket elevenes forståelse for hver av utdragene.

[10] Når det videre i oppgaven skrives "begrepsforståelse", henviser dette til "forståelsen av begrepet den andrederiverte".

Tabell 3: Oversikt over hvilke faktorer som ser ut til å påvirke forståelsen av den andrederiverte i vesentlig grad, for hver av de ulike samtaleutdragene. Den faktoren som ser ut til å påvirke elevenes forståelse mest i den gitte samtalen er markert med grått. Forkortelsene for underkategoriene fra Tabell 2 er her benyttet (SH= snakke høyt, LAF= lære av andre som forklarer, SL= støtte fra lærer, HOA= hverdagslige ord; akselerasjon, RPTKF= realistisk problemstilling; tidspunkt for klimamessig forbedring, V= virkelige tall og data om CO_2, RPJ= realistisk problemstilling; journalist, SG= sammenligne grafene, IFr= ingen framgangsmetode, IFa= ingen fasit).

	Samtalen	**Det autentiske**	**GeoGebra**	**Arbeid uten framgangsmåte eller fasit**
Utdrag 1	SH, LAF	HOA		IFr,IFa
Utdrag 2	SH, SL		SG	
Utdrag 3	SH, SL	HOA		
Utdrag 4	SH, SL		SG	
Utdrag 5	SH, LAF			
Utdrag 6	SH, LAF	HOA		
Utdrag 7	SH, LAF	RPTKF, V	SG	IFr, IFa
Utdrag 8	SH	RPTKF, RPJ		
Utdrag 9	LAF		SG	
Utdrag 10	SH, LAF, SL			IFr, IFa

4.1.1 Samtalen

I modelleringsarbeidet viste det seg at samtalene mellom elevene, og mellom elev og lærer påvirket elevenes forståelse av den andrederiverte.

<u>Samtaler mellom elevene</u>

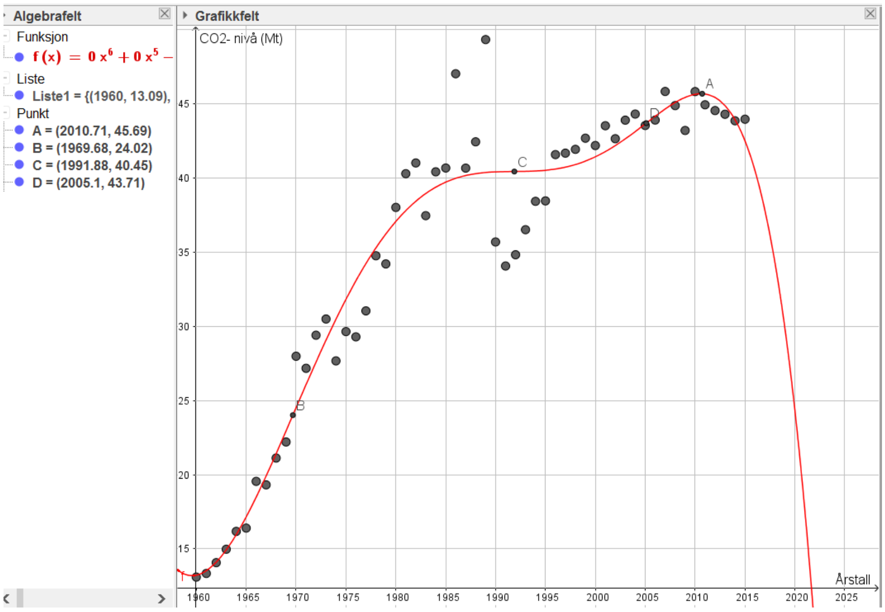
I intervjuet framhevet elevene at de i diskusjonene fikk tips fra medelever om forskjellige tolkninger og metoder som de selv ikke hadde tenkt på. De sa også at dersom de sa noe feil, kunne medelevene korrigere dem. På den måten kunne de hjelpe hverandre til å oppdage potensielle konfliktfaktorer (kap. 2.3.2)[11] som ikke nødvendigvis ville blitt oppdaget alene. Kristian framhevet også blant annet nytten av å forklare for andre:

> "Dette vil jo på en måte bli en slik vinn-vinn situasjon for både de som ikke kan det, de kan få det forklart av de andre. Og de som kan det, får også øve seg på å forklare til andre. Og det er jo og en god måte å jobbe på. Jeg merker i hvert fall at det er når jeg har prøvd å forklare det til de andre, så skjønner jeg om jeg skjønner det selv.[…] Så det økte og min egen forståelse." (Kristian, utsagn 563 og 565)

Disse momentene viser at elevene hadde flere bevisste overflateoppfatninger om hvordan samtalen påvirket deres begrepsforståelse. Fra selve modelleringsarbeidet er det identifisert flere dialoger som viser hvordan samtalen påvirket begrepsforståelsen. I oppgave 4b på del

[11] Her har jeg henvist til kapittelet begrepet "potensielle konfliktfaktorer" er hentet fra. Dette vil bli gjort for de begrepene som blir brukt i analysearbeidet, men bare første gangen de blir benyttet.

A[12] skulle elevene forklare i hvilke perioder en kan snakke om akselerasjon i utslippene. På dette tidspunktet hadde elevene laget en modell av CO_2- nivået (Figur 4) ved å gjennomføre regresjonsanalyse i GeoGebra. Denne modellen ble brukt i hele oppgave 4, og når det i løpet av kap. 4.1 henvises til $f(x)$, menes det med dette funksjonen i Figur 4. For å prøve å svare på oppgave 4b, nevnte Kristian at gjennomsnittlig endring per tid er høyere lenger til venstre på grafen enn til høyre. Deretter ble det stille en stund.



Figur 4: Modell for CO2- utslipp, laget ved regresjonsanalyse i GeoGebra. For større versjon av figuren, se Vedlegg10. Punktet A viser toppunktet til f(x). Punktene B-D viser vendepunktene til grafen. Koordinat-aksene er "festet til kanten" for å kunne lese av verdiene på aksene.

<u>Utdrag 1:</u>

21. Eili:	Hva tenker du, Tora?
22. Tora:	Nei, jeg er ikke helt sikker (stille i over to minutt).
23. Tora:	Kan det ha noe med vendepunkt å gjøre?
24. Siri:	Ja, jeg tenkte på det.
25. Tora:	Det er jo da akselerasjonen endrer seg.
26. Siri:	Ja, akkurat i det den endrer seg.
27. Kristian:	Ja, det var en god idé. Da kan vi finne ut når den snur, og da vet vi at vi har en positiv akselerasjon på (...).

Her nevner Tora begrepet vendepunkt, uten at noen i gruppen tidligere hadde sagt noe som konkret koblet akselerasjon til den andrederiverte. Muligens ble hun her påvirket av Kristian sitt utsagn i forkant av samtaleutdraget, da han nevnte noe om gjennomsnittlig endring.

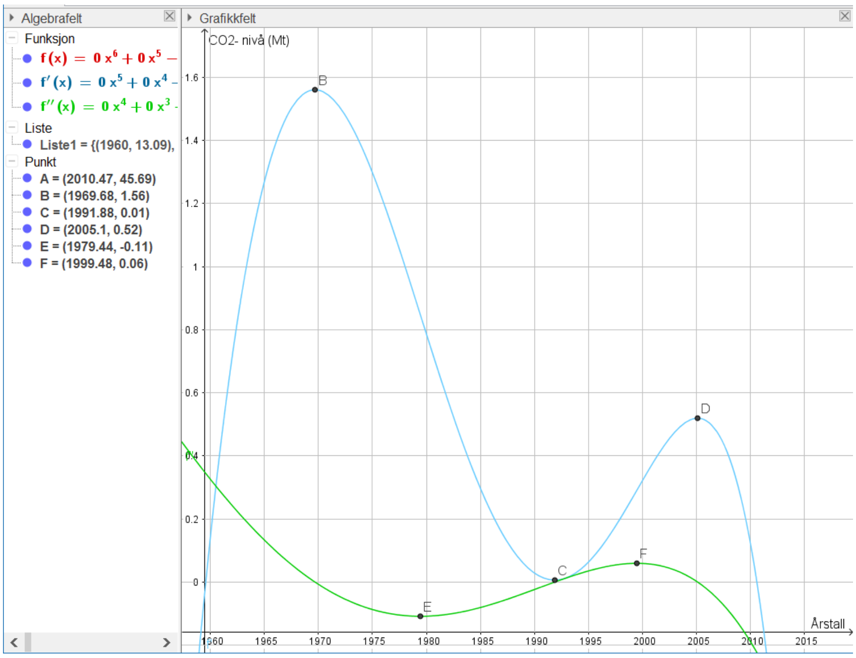
[12] Når det senere blir henvist til oppgave 4, er dette oppgave 4 i del A (Vedlegg 1).

I intervjuet med Siri viste jeg videoopptaket av denne samtalen. Hun fortalte at hun hadde tenkt at det kanskje kunne ha noe med vendepunktet å gjøre, men at hun ikke hadde sagt det. Da Tora tenkte høyt (23) ble Siri trolig mer sikker på seg selv, siden hun like etter bekreftet det Tora sa (24, 26). Videre ble også Kristian engasjert over denne tanken (27), og slik kom gruppen inn på temaet om derivasjon og den andrederiverte. Utdraget viser at bidrag fra flere i gruppen, med tanke på å tenke høyt, kan hjelpe gruppen som en helhet å komme videre i prosessen. På bakgrunn av utdraget viste elevene at de forsto at de kunne forklare det dagligdagse utsagnet ved å benytte det matematiske begrepet vendepunkt. Dette blir således det første steget i matematiseringen (Figur 1).

<u>Samtaler mellom lærer og elev</u>

Lærerens innbringende dialog i modelleringsarbeidet hadde trolig også stor innvirkning på elevenes begrepsforståelse. Da elevene arbeidet med oppgave 4a og b fant de grafene til $f'(x)$ og $f''(x)$ (Figur 5) fra grafen i Figur 4. Kristian prøvde å beskrive hvordan akselerasjonen utviklet seg:

> "En ser jo at den har negativ akselerasjon helt til 1979 faktisk. Så begynner den å akselerere fram til ca. 1999, men at det ikke er særlig rask akselerasjon. (Peker på grafen til $f''(x)$ (grønn graf)."
> (Kristian, utsagn 66)



Figur 5: Den deriverte grafen (blå) og den andrederiverte grafen (grønn) til grafen i Figur 4. For større versjon av figuren, se Vedlegg 10. Når det henvises til $f'(x)$ og $f''(x)$ i løpet av kapittel 4.1, menes det da grafene som er vist i denne figuren. Punktene B-F viser ekstremal-punktene for den første- og andrederiverte. Begge koordinataksene er fortsatt "festet til kanten" etter at dette ble gjort for $f(x)$ (Figur 4). Det at X- koordinataksen ikke er plassert i y=0, ser ut til å være noe som kan ha ført til problemer da elevene skulle forklare grafene.

Her påstår Kristian at det er negativ akselerasjon fra 1960 til bunnpunktet, og akselerasjon fra bunnpunktet til toppunktet på grafen til den andrederiverte. Denne tolkningen av den grafiske framstillingen av den andrederiverte blir en billedlig tolkning, i samsvar med hvordan Doorman (2005, s. 20-25) og Brekke (2002, s. 11) forklarer billedlige tolkninger (kap. 2.3.4). Kristians vekkede begrepsbilde (kap. 2.3.2) om at en nødvendigvis vil få negativ akselerasjon når den tilhørende akselerasjonsgrafen synker, stemmer ikke overens med den formelle begrepsdefinisjonen (kap. 2.3.1).

Like etter kom læreren inn på grupperommet og Kristian forklarte det han hadde tenkt. Videre stilte læreren viktige utfordrende spørsmål som skulle vise seg å utløse en kognitiv konflikt (kap. 2.3.2).

<u>Utdrag 2:</u>

72. Lærer:	Hvordan passer dette overens med det dere ser i grafen av utslippene? Altså den opprinnelige modellen? (Henviser til modellen i Figur 4)
73. Kristian:	Ehh... Altså, i 1960 området så... Ehh.. Det ser ut som.. Ut fra den ($f''(x)$).. Ser det ut som at den sakker ned.. Hmmm… (Stille i ett minutt)
74. Eili:	Hva tenker dere andre om dette? (Fikk ingen svar)
76. Kristian:	Nei herregud, vent nå. Må bare se litt mer skikkelig på disse verdiene... Åååh! Ja! Vent da, så lenge… Her er den jo 1,21.[13] Det vil si at akselerasjonen er positiv fortsatt. Det går jo oppover (her mener han at det er grafen i Figur 4 som går oppover). Vi kan ikke se på den. Vi må begynne herfra (peker på 1960). I 1960 er det akselerasjon på 0,33, og den vil deakselerere helt til vi har en negativ akselerasjon på -0,11 (bunnpunktet til $f''(x)$). Så vil den akselerere opp igjen til 0,06 (toppunktet til $f''(x)$).

Her ser en at lærerens utfordrende spørsmål gjør at Kristian ser tilbake til modellen i Figur 4. Det å studere denne modellen fungerer her som en kognitiv konfliktfaktor (kap. 2.3.2). Kristian oppdager en inkonsistens mellom modellen og det han tenkte, noe som fører til en kognitiv konflikt (73). Videre prøver han å se sammenhengen mellom modellene, siden de skal representere det samme problemet. Deretter er det tydelig at han har gjort viktige korrigeringer i sitt begrepsbilde (kap. 2.3.1), slik at sammenhengen gir mer mening (76). Han forstår nå at selv om grafen synker, betyr det ikke at en snakker om negativ akselerasjon siden det fortsatt er positive verdier. Denne samtalen ble vist til Kristian i intervjuet, og det han sa her understøttet tolkningen min; at de i begynnelsen var opphengt i å se på formen til grafen, men da han la merke til verdiene skjønte han sammenhengen bedre.

[13] Kristian sa verdien 1,21, fordi dette var verdien til funksjonen der grafen til den andrederiverte krysset y-koordinataksen i hans skjermbilde. Senere i utsagn 76 påpekte han også at de burde tilpasse skjermbildet, slik at x- koordinataksen starter på 1960. Det er fra denne tiden vi har datamateriale om CO_2– utslipp.

I utsagn 76 benyttet Kristian imidlertid fortsatt begrepene "deakselerere" og "akselerere" på en ukorrekt matematisk måte. For det første ser det ut til at han skilte mellom deakselerasjon og negativ akselerasjon. I tillegg beskrev han grafen på en billedlig måte; at det var deakselerasjon der grafen sank, og akselerasjon der grafen steig. Det kan være at han ikke var bevisst på hvordan han her benyttet begrepene. Det så ut til at han derimot fokuserte på verdiene til ekstremalpunktene til $f''(x)$; at det var positiv akselerasjon i 1960 og i 1999 (toppunktet), og at det var negativ akselerasjon i 1979 (bunnpunktet). Oppsummert ser det ut til at Kristian har gjort noen korrigeringer i begrepsbildet sitt, slik at det i større grad stemmer overens med den formelle begrepsdefinisjonen. Imidlertid benyttet han noen begreper i strid med den formelle begrepsdefinisjonen (76). Det ser derfor ut til at han ikke har sterke nok koblinger i begrepsnettverket sitt (kap. 2.3.3).

Videre kom læreren med flere spørsmål som så ut til å påvirke Kristians begrepsforståelse ytterligere:

Utdrag 3:

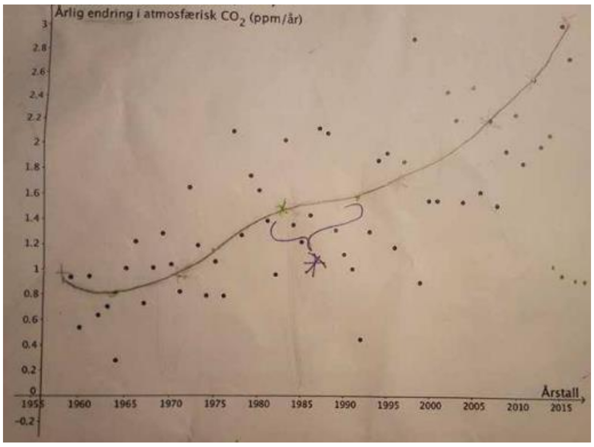
77. Lærer	Du sa noe i sted Kristian, du sa positiv akselerasjon. Hva vil dere si akselerasjon er i dagligtalen?
78. Tora	I positiv retning, på en måte?
79. Lærer	Ja, jeg vet ikke... Men hvis jeg sier at noe akselererte, hvis en sitter i en bil og sier "også akselererte han"?
80. Tora	Da øker en farten. Det er altså når det er positiv akselerasjon.
81. Kristian	Det vil si at det ikke er akselerasjon der da (peker der grafen til $f''(x)$ er negativ). Fordi der er den minus. Så lenge akselerasjonen er positiv, så er det en akselerasjon der (peker der $f''(x)$ er positiv).
82. Lærer	Det er altså det vi i dagliglivet kaller akselerasjon. Det er viktig å skille mellom det vi i dagligtalen kaller akselerasjon og hva en i fysikken kaller akselerasjon. For i fysikken kan en snakke om negativ akselerasjon også.

Denne samtalen så ut til å virke oppklarende for elevene. Det ser ut til at Kristian så sammenhengen mellom grafen og det som ble sagt av læreren og Tora (79, 80). Han forsto nå hvor det var (positiv) akselerasjon for grafen til $f''(x)$ (81). Siden Kristian trolig gjorde viktige koblinger i sitt begrepsnettverk i Utdrag 2 og 3, kan dette ha bidratt til at begrepsbildet hans ble utvidet og mer i overensstemmelse med den formelle begrepsdefinisjonen. Trolig så også Tora og Siri denne sammenhengen, men de sa ingenting som kan bekrefte at de forsto dette. Imidlertid viser Toras uttalelser at hun har en viss forståelse av hva positiv akselerasjon er (78, 80).

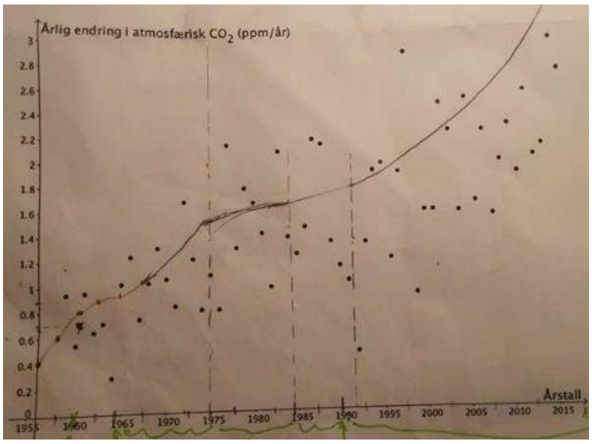
Samtaler i tilknytning til oppgave 1 i del B

I arbeidet med oppgave 1 i del B var samtalen mellom elevene og mellom meg som lærer og elevene viktig[14]. Spesielt ser det ut til at Tora oppdaget en viktig matematisk sammenheng.

I denne oppgaven fikk elevene presentert datapunkter for endringsraten av CO_2- innhold på Hawaii, fra 1960 til 2015. De skulle skissere en passende graf til punktene (Figur 6), og videre skissere hvordan modellen av CO_2- nivået ville se ut (Figur 7). I den tredje økten uttalte Kristian blant annet at siden grafen for endringsraten var omtrent horisontal i intervallet mellom 1985 og 1990 (Figur 6), ville dette bety at endringen var lik og at det derfor her måtte bli en rett linje i grafen for CO_2 – nivået (Figur 7). Her viser Kristian at han har en forståelse for sammenhengen mellom grafene, selv om grafen ikke var helt horisontal i intervallet han nevnte.



Figur 6: Skisse av regresjonsgraf for endringsraten av atmosfærisk CO_2.



Figur 7: Kristian og Siris skisse av grafen til CO_2 nivået.

Siden Tora var syk i den tredje arbeidsøkten, hadde hun ikke vært med på å skissere hvordan grafen for CO_2- innhold ville se ut. Derfor foreslo jeg at hun kunne prøve å skissere den selv. I samarbeid med de andre fant hun ut at det måtte være snakk om antiderivering og at det måtte være samme sammenhengen mellom grafene som i oppgave 4e (del A).

Utdrag 4

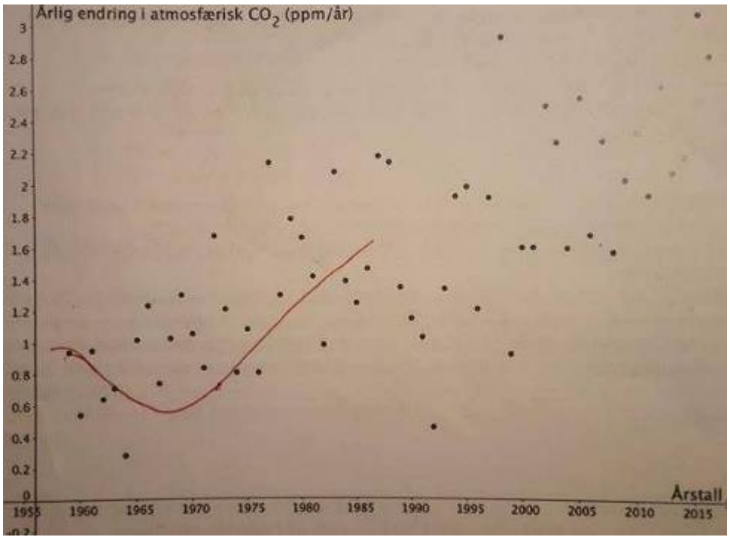
271. Tora	Hvis en ser på de grafene i A, så ser en jo at.. Når funksjonen bytter fra konveks til konkav, så får vi vendepunkt (peker på $f(x)$). I $f'(x)$ har vi da toppunkt, og i toppunktet til funksjonen vil $f''(x)$ bli null… Men her går ikke den deriverte.. under null en gang (peker på skissen i oppgave B) (stille)

[14] Jeg ser det som mest hensiktsmessig å presentere de følgende samtalene sammen, i stedet for å presentere dem under de tidligere overskriftene; "Samtaler mellom elevene" og "Samtaler mellom lærer og elev". Da ville innholdet blitt oppstykket og uoversiktlig.

272. Eili	Nei, men den har et bunnpunkt da, slik som du sa i sta.
273. Tora	Ja... det betyr jo at den… vender seg? Siden vi har et bunnpunkt så vil vi vel da ha et vendepunkt når den går fra å enten, fra å stige til å synke eller synke til å stige.
274. Eili	Ja, og hvordan kan du vite om den går fra å synke til å stige eller fra å stige til å synke?
274. Tora	Her ser vi jo at den synker, så da vil den vel gjøre det i funksjonen for CO_2 – nivået også (stille, hun ser nærmere på grafene i 4e).

Her ser en at Tora benyttet matematisk argumentasjon for å begrunne det hun valgte å gjøre. Først tok hun utgangspunkt i modellene i oppgave 4e, og forklarte hvordan sammenhengen var her. Hun la også merke til at det var en utfordring at det ikke var nullpunkt, trolig fordi hun da ikke kunne si noe om toppunktet i grafen for CO_2- nivå.

Tora uttalte at grafen til nivået ville synke når grafen for endringsraten synker (274), noe som kan sees som en billedlig tolkning. Denne tanken så ut til å virke som en kognitiv konfliktfaktor, da hun like etter så at dette ikke kunne stemme med systemet som hun så i oppgave 4e. Etter å ha studert grafen nærmere, ombestemte hun seg til å mene at grafen måtte gå fra konkav til konveks. Utdrag 5 skjer like etter at hun har prøvd å skissere nivå- grafen for CO_2 (Figur 8).



Figur 8: Toras begynnende skisse av grafen til CO2- nivået.

Utdrag 5

278. Tora	Sånn, hvis den går sånn fra konkav til konveks her, også stiger den mer oppover (peker på skissen sin i Figur 8). Kanskje den ikke skulle gå så langt her (peker på bunnpunktet i Figur 8). Hva synes du om dette Kristian?
279. Kristian	Altså, det blir jo... (ler)
280. Eili	Du hadde tegnet den litt annerledes?
281. Kristian	Ja, liksom..

282. Tora Det kan godt være at jeg har feil, bare si hva det er.

283. Kristian Det vi tenkte var at CO_2- nivået alltid vil gå oppover, på en måte. Endringen er fortsatt positiv, det betyr at de fortsatt øker.

284. Tora Ja… Selv om det går ned her, så går den aldri negativt (peker på grafen for endringsraten i Figur 6, der grafen går nedover). Nei, den blir ikke negativ, den går ikke under null (peker igjen på samme grafen).

285. Eili Ja, og hvordan påvirker det funksjonen?

286. Tora Da… Den stiger hele tiden, men den stiger ikke like mye da tror jeg.

Her prøvde elevene å sette ord på de matematiske relasjonene mellom grafene. Det ser ut til at Tora gjorde viktige koblinger i sitt begrepsnettverk etter at Kristian forklarte hva han hadde tenkt. Hun så nå at når grafen for endringsraten ikke går under null, vil heller ikke grafen for nivået synke (284). Lignende sammenhenger diskuterte også elevene i oppgave 4 (Utdrag 2). Erfaringene fra oppgave 4 er kanskje med å gi mening til Kristians utsagn (283), slik at Tora nå forstår det bedre.

4.1.2 Det autentiske aspektet

I intervjuet sa alle elevene at de autentiske dataene i oppgaven hadde betydning for deres forståelse av den andrederiverte. Tora mente at det var lærerikt å bruke begrepene i en annen kontekst enn slik de tidligere hadde gjort:

> "Det var data som hadde betydning på en måte. At det ble satt i en litt annen sammenheng liksom, det er ikke bare: Okei, når den andrederiverte er lik null og alt det der, eller vendepunkt og sånn, som bare er tall liksom, men dette var noe med betydning. Da ble det litt enklere å sette dette i en sammenheng, som ga mening på en måte." (Tora, 763)

Elevene mente også at det senere ville bli lettere å huske de matematiske begrepene når de nå hadde satt det inn i en bestemt sammenheng som var ekte. Kristian og Tora dro i tillegg fram at det var motiverende at oppgavene handlet om CO_2, fordi temaet er aktuelt i dagens samfunn. De mente at det var spennende å jobbe med oppgavene, fordi de kunne finne ut hva som skjer i verden ved å gjøre matematikkoppgaver, i stedet for å finne tall som noen har funnet opp.

Hverdagslige begreper

I modelleringsoppgavene ble den andrederiverte konkretisert ved hjelp av hverdagslige begreper som elevene kunne forholde seg til; akselerasjon og oppbremsing. Alle elevene uttalte i intervjuet at dette bidro til at de forsto mer av hva den andrederiverte betydde, fordi de knyttet det til dagligtalen. Fra Utdrag 6 ser det ut til at det hverdagslige begrepet skaper trygghet for Siri, siden dette er noe hun kan forholde seg til. Her diskuterte de oppgave 4a.

Utdrag 6:

297. Siri:	"Utslippene akselererte raskt, forklar det matematisk" (henviser til oppgaveteksten). Altså, nå har ikke jeg hatt fysikk, men akselerasjon er når ting går fortere. Men er det ikke et begrep for.. Per tid. Endring per tid, er det rett?
298. Kristian	Endring per tid per tid. Nei, endring per tid (...). Med akselerasjon i dagligtalen så tenker en som regel på det en snakker om som positiv akselerasjon. For eksempel farten i en bil, når farten øker så har en akselerasjon.
299. Siri	Det er noe til og med jeg vet om akselerasjon! (Her brukte hun et tonefall og kroppsspråk på en slik måte at hun virket engasjert).

Fra utsagn 299 ser det ut til at Siri ble engasjert fordi akselerasjon som et hverdagslig begrep er noe hun kan forholde seg til. Selv om den andrederiverte er et abstrakt begrep og vanskelig å forstå, kan en holde fast ved de konkrete sidene av begrepet. Dette vil jeg komme tilbake til i kapittel 4.2.3.

Realistiske problemstillinger

I modelleringsprosjektet var det flere problemstillinger som var realistiske. I oppgave 4c skulle elevene blant annet bestemme om modellen viste et tydelig tidspunkt for starten av en klimamessig forbedring. De skulle også begrunne hvilket tidspunkt dette var. Her kom det fram flere tolkninger om hvordan en skulle svare på denne problemstillingen:

Utdrag 7:

90. Siri:	Forbedring er vel at CO_2 – utslippet blir mindre igjen. Er ikke det? (Peker på toppunktet til $f(x)$) (Stille i ett minutt)
91. Kristian:	Hmmm… Den eneste klimamessige forbedringen vi kan ta hensyn til nå er den fra 1999 (toppunktet til $f''(x)$) til 2005 (nullpunktet til $f''(x)$). Men etter 2005 og... Fra 1999 til 2015 så har vi en forbedring (peker på $f''(x)$). Da akselererer den saktere og saktere og til slutt blir det null også går den nedover til 2015. Fra 1999 til 2005 så slutter det å akselerere, og så blir den negativ. Så det kan sees som en klimamessig forbedring.
92. Eili:	Men de spurte vel om ett spesifikt punkt da, og ikke en tidsperiode?
93: Kristian:	Det spesielle tidspunktet er i 1999. Da har vi en nedgang som fortsetter på en måte. Det er etter 1999 at det virkelig begynner å krumme inn mot en skikkelig nedgang. Altså: når akselerasjonen går nedover, så får vi en klimamessig forbedring.
[…]	
98. Tora:[15]	Men vi må huske å se på det her og da (peker på der den andrederiverte har nullpunkt, x=2005)
99: Kristian:	Vi må diskutere det om vi enten skal velge 1999 som punkt for forbedring eller 2005. Jeg ville sagt 1999 da. I 1999 går fortsatt økningen opp.

[15] Utsagn 98 kom noe senere enn 93. Det var noen mindre relevante utsagn i mellom.

100: Tora	Men aller klarest ser en at i 2005, det er der en ser først.
101. Kristian:	Ja, der er jo utviklingen på vei nedover igjen, andre veien. For i 1999 fortsetter samme tendensen, ved at det (ble avbrutt av Tora)
102: Tora	Men den har mindre akselerasjon, lavere..
103: Kristian	Akselerasjonen blir jo mindre, men ikke negativ ja…

I løpet av samtalen kom det fram tre forskjellige tolkninger av hvor på grafen starten av en klimamessig forbedring var; toppunktet til den opprinnelige modellen (Figur 4), toppunktet til den andrederiverte og nullpunktet til den andrederiverte (Figur 5). I denne diskusjonen måtte elevene begrunne argumentene sine ut fra matematiske begreper og resonnement, i tillegg til å ta hensyn til betydningen i den virkelige konteksten. Blant annet forklarte Kristian hvordan nedgangen i den andrederiverte etter 1999 vil være det første tegnet for starten av en klimamessig forbedring (91). En slik anvendelse av matematikken er trolig fruktbart for forståelsen av den andrederiverte.

Ut fra Kristians forklaringer i utdraget ser det ut til at han har oversikt over begrepsbildet sitt. Samtidig ser en at hverken han eller de andre benyttet begrepet vendepunkt, selv om Kristian forklarte at det ville snu fra positiv til negativ akselerasjon (91). Dette kan være tilfeldig. Eventuelt kan det være at han enda ikke har gjort nødvendige koblinger i begrepsnettverket for å kunne benytte begrepet vendepunkt i forklaringen.

Oppgave 4e var også en realistisk problemstilling, men i større grad semi- autentisk (kap. 2.4.2) sammenlignet med oppgave 4d. Elevene skulle her forklare utviklingen av CO_2- utslipp til en "journalist". De skulle ta utgangspunkt i sammenhengen mellom modellene for CO_2-utslipp, utslippsraten av CO_2 og akselerasjon av CO_2- utslipp. Alle elevene kommenterte i intervjuet at de lærte mye om den andrederiverte i denne oppgaven. Det å måtte forklare det på en enklere og mer hverdagslig måte var hovedbegrunnelsen for dette. Hver av elevenes argument er vist under:

> "Når vi prøvde å liksom forklare det på en enklere måte, da blir du på en måte tvunget til å liksom måtte forstå det bedre. For i boken så kan en lese akkurat hvordan det.. Pugge hvordan og hva den betyr, men når en må forklare det på en enkel måte så blir det på en måte.. Øker det egentlig … Så følte jeg at jeg økte min egen forståelse på en måte." (Kristian, utsagn 503)

> "Det som skjer er jo at vi måtte gjøre det enkelt og forståelig, og det gjorde jo at vi forsto mer selv og av det. Det blir på en måte lettere å forklare det og mindre komplekse ting er lettere å huske og lettere å forstå." (Tora, utsagn 781)

> "For at vi skulle forklare dette til journalisten, så måtte vi tenke litt mer over det, i stedet for å bare si det vi hadde lært rent teoretisk eller matematisk. Også forklarer en på en måte litt til seg selv og" (Siri, utsagn 1009)

Elevenes utsagn indikerer at de realistiske problemstillingene i denne oppgaven hadde stor påvirkning på forståelsen deres. Det å forklare på en hverdagslig og enklere måte ser ut til å ha bidratt til å gi det abstrakte begrepet innhold. Utdrag 8 viser et eksempel på hvordan elevene måtte ta hensyn til det hverdagslige språket mens de prøvde å forklare sammenhengen til en "journalist":

Utsagn 8:

200. Kristian:	Endringene i CO_2 skjer fortere og fortere fram til det punktet (peker på toppunktet til $f'(x)$). Så begynner det å gå seinere... Det blir en raskere endring før punktet enn etter punktet på en måte (peker nå på $f(x)$). Vi kan se at i vendepunktet (blir avbrutt av Siri).
201. Siri:	Vi kan ikke bruke "vendepunktet"?
202. Kristian	Nei... Akkurat i 1970, der snur trenden.
203. Eili:	Hva mener du med trenden?
204. Kristian	Det er fra når det begynner å gå fortere og fortere, til det vil gå saktere.

Her prøvde Kristian å forklare vendepunktet ved å benytte andre ord til å beskrive dette punktet (200, 202, 204). På samme måte benyttet elevene i andre samtaler også hverdagslige ord for å forklare andre matematiske begreper. I stedet for å bruke "toppunkt til $f(x)$", forklarte de dette som "der det var høyest CO_2- utslipp". I tillegg beskrev de toppunktet til den deriverte slik: "der endringen er størst i forhold til tidligere og senere". Dette er trolig lærerikt fordi elevene slik kan skape koblinger mellom de teoretiske begrepene og det dagligdagse språket. Dette krever at en tenker nøyere gjennom hva begrepet faktisk betyr og en kan således utvikle en mer relasjonell forståelse.

4.1.3 GeoGebra som hjelpemiddel

Alle elevene uttalte i intervjuet at GeoGebra var et svært nyttig verktøy for å støtte opp om begrepsforståelsen. Ved hjelp av GeoGebra kunne de enkelt finne sentrale punkter for å sammenligne og analysere modellene. De kunne også zoome inn og ut der det var ønskelig. Elevene mente også at det ved hjelp av programmet var enklere å kunne veksle mellom de ulike representasjonene[16]. Dette er ikke enkelt dersom en ikke har en dynamisk graftegner. Samtidig påpekte Kristian at GeoGebra noen ganger gikk treigt, fordi programmet hengte seg opp på grunn av store datamengder. I tillegg var det uheldig at de i oppgave 4e ikke kunne få grafene til $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$ i samme grafikkvindu. Likevel kunne de sammenligne de to

[16] De ulike representasjonene elevene arbeidet med var verdier i en tabell og ulike regresjonsgrafer til verdiene i tabellen. I algebrafeltet i GeoGebra hadde de også representert den tilhørende ligningen for grafen.

grafikkvinduene (Figur 4 og Figur 5) og på denne måten studere sammenhengen mellom alle tre grafene.

Til tross for den sistnevnte utfordringer så det ut til at Kristian raskt forsto sammenhengen mellom de tre grafene i oppgaveløsningen[17]. Utdrag 9 viser hvordan Kristian prøvde å få Siri til å forstå sammenhengen som han akkurat hadde sett.

Utdrag 9:

138. Eili:	Ser dere noen sammenheng mellom grafene?
139. Siri:	Jaa.. Punktene står på en måte på linje i forhold til hverandre (peker, og viser at toppunktet til $f'(x)$ har samme x- verdi som nullpunktet til $f''(x)$. Peker også på vendepunktet til $f'(x)$ som har samme x- verdi som bunnpunktet til $f''(x)$).
140. Kristian:	Også er det når vi deriverer og setter lik null. Så altså, her blir det den deriverte til den deriverte da, men ja. Men når en setter den andrederiverte lik null så har vi,.. det er..?
141. Siri:	Hva? Et toppunkt?
142. Kristian:	Ja. Mhmm (peker på toppunktet til $f'(x)$). Det er når den andrederiverte er lik null sant. Samme sammenhengen vil det jo bli mellom den deriverte og funksjonen vi har i utgangspunktet. Sant? (Stille). Nullpunktet på den deriverte vil være ekstremalpunktene på..?
143. Siri:	Den andrederiverte?
144. Kristian	Nei, det blir motsatt. Det blir funksjonen her (peker på $f(x)$ og viser sammenhengen).

I dette utdraget ser en at GeoGebra var et nyttig hjelpemiddel for å visualisere funksjonene og for å prøve å se sammenhengen mellom dem. Siri så at det var en sammenheng (139), men det virket som hun var noe usikker på hvorfor denne sammenhengen eksisterte (141,143). Kristian prøvde å forklare henne sammenhengen ved å peke på de sentrale punktene på grafen i tillegg til å forklare sammenhengen matematisk. Imidlertid ser det ut til at Siri fortsatt ikke helt forsto sammenhengen som Kristian forklarte, ut fra en senere samtale da hun fikk det samme spørsmålet på nytt (Utdrag 12). Dette vil nærmere diskuteres i kapittel 4.2.3.

Funnene fra samtaleutdrag i modelleringsarbeidet og fra elevenes bevisste overflateoppfatninger om bruken av GeoGebra, antyder at programmet har hatt en betraktelig betydning for elevenes begrepsforståelse. Visualiseringen som støtte under innlæringen ser ut til å ha vært hovedårsaken til dette. Ved å studere sammenhengen mellom grafene, kunne elevene bruke dette som støtte samtidig som de prøvde å bedre sin forståelse av den deriverte og den andrederiverte representert grafisk. Dette vil trolig være med på å utvide og styrke begrepsbildet av den andrederiverte.

[17] I kapittel 4.2.1. er det presentert utsagn som viser dette.

4.1.4 Arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit

Alle elevene i gruppen sa i intervjuet at de tidligere i hovedsak hadde arbeidet med funksjonsdrøfting i tilknytning til den andrederiverte. Her kunne de følge en bestemt framgangsmåte. Derfor ble det uvant å måtte benytte kunnskap om den andrederiverte slik det krevdes i modelleringsoppgavene.

> "(…)Det var jo ingen oppgaver der en fikk liksom "finn den andrederiverte". Det var jo "finn akselerasjonen". Altså, meningen bak det ble så mye tydeligere fordi, ja, det var ikke en spesiell framgangsmåte sånn sett da, og da blir det litt lettere å forstå hva det egentlig betyr […]. (…) Jeg tenkte at den andrederiverte har jeg vel kontroll på. Også kom jeg her og skulle bruke det i en annen situasjon, og da, liksom måtte jeg komme fram til hvordan jeg skulle bruke det selv. Da måtte jeg på en måte forstå mer hva det egentlig betydde." (Kristian, utsagn 545 og 547)

> "Det ble litt mer åpent og det gjorde at vi kunne diskutere oss litt mer fram til hva vi mente var den beste (her mente hun den beste metoden), i stedet for å gi så lett opp og heller sjekke fasit. Siden en ikke har sjans til å sjekke svarene, må en forsikre seg om at det er rett. Det er egentlig en god trening til eksamen. […] Det blir i hvert fall mye mer diskusjoner, mer forslag fra andre om hva som kan gjøres, og diskusjoner om de forskjellige forslagene." (Tora, utsagn 783 og 787)

> "Det var vanskelig i starten, fordi vi alltid før har fått det forklart i en teoretisk sammensetning og alt det der. Mens nå skjønte jeg at det stemte jo… Det var liksom at en måtte tenke tilbake på når en fant toppunktene; sette den deriverte lik null. Og når en skal finne vendepunktene, så setter vi den andrederiverte lik null. Og hvordan jeg så på den da. […] Altså, en må sette seg litt mer kritisk på en måte da. Vi har jo ikke en fasit, så det vi finner ut er ikke nødvendigvis rett. Så en må jo tenke hva som er mest logisk, på en måte. […] Ja, en må liksom sette seg nærmere inn i hva den andrederiverte er. Om det gir mening det vi gjør og om det da blir rett. Og om det gir mening om hva den andrederiverte er og hva den har sammenheng med" (Siri, utsagn 1085, 1091 og 1097)

Elevenes bevisste overflateoppfatninger som her kom fram i utsagnene, antyder at arbeidet uten en kjent framgangsmåte eller fasit var sentralt for at elevene kunne utvikle en mer relasjonell forståelse av den andrederiverte. Elevene poengterer blant annet at det å arbeide uten en kjent framgangsmåte, førte til at de måtte være mer selvstendige og kritiske. Siri framhevet også at det tok litt tid før hun skjønte sammenhengen mellom det teoretiske hun hadde lært om den andrederiverte. Det ser ut til at det for henne var uvant å benytte begrepet på den måten som modelleringsarbeidet krevde. Videre poengterte Kristian at det å skulle bruke de matematiske begrepene til å beskrive uvante situasjoner, førte til at det matematiske innholdet ga mer mening. Dette krevde at han måtte forstå mer av hva det egentlig betydde. De momentene som elevene trekker fram gir rom for faglige diskusjoner som videre kan støtte opp om hver enkelt elevs begrepsforståelse.

Like i etterkant av Utdrag 1 oppsto en samtale som viser hvordan elevene prøvde å sette ord på hvordan de kunne finne akselerasjonen. Elevene arbeidet her med oppgave 4b. Selv om elevene hadde brukt begrepet vendepunkt (Utdrag 1), så det ut til at de i det videre arbeidet ikke helt forsto hvordan de kunne finne akselerasjonen ut fra grafen i Figur 4. Det var ikke gitt at de måtte bruke den andrederiverte, noe som krevde at elevene måtte begrunne og diskutere seg fram til hvordan de skulle løse problemet.

Utdrag 10:

42. Lærer:	Hva er akselerasjon da, sånn normalt sett? Hva betyr ordet akselerasjon?
43. Kristian:	Sånn normalt sett? Strekning per tid per tid.
44. Lærer:	Så for at du skal få akselerasjon slik som du sa, helt riktig, strekning per tid per tid, hvordan kan du få det her?
45. Kristian:	Da må vi jo få.. For å få strekning per tid i hvert fall, først, så må vi jo ha.. Ehm.. En lineær (Kristian ble avbrutt av Tora)
46.Tora:	Hva med å finne gjennomsnittlig?
47. Kristian:	Ja, mmhm..
48. Lærer:	Ja, der sa du noe bra Tora. Hvis vi har lineær da er det gjennomsnittlig. Hvis jeg hadde spurt dere hva strekning per tid er i 1980, hva ville dere gjort da?
49. Kristian:	Da er det jo.. Ehh. Da er det jo tangenten.
50. Lærer:	Ja, nettopp. Og hva bruker vi for å finne tangenten?
51. Kristian:	Ehh.. Da bruker vi derivasjon! (Læreren nikker. Stille i ett minutt)
52. Kristian:	Når vi først har fått den deriverte som representerer strekning per tid. Så er jo, når vi da skal få akselerasjon, så må vi jo da, ja… Derivere den igjen! Selvfølgelig!
53. Lærer:	Ja, kjempebra! Nå har dere på en måte knekt dere gjennom.
54. Kristian:	Ja, det var bare at det sto litt stille der. Jeg vet ikke helt hvorfor.

Det var tydelig at elevene møtte utfordringer med å finne ut hvordan de matematisk skulle finne akselerasjonen. Kristian uttalte også at det sto litt stille i denne prosessen (54). Det at elevene ikke hadde en fasit eller en kjent framgangsmåte å følge, førte trolig til at de måtte tenke mer selvstendig. I arbeidet med å forklare hva akselerasjon faktisk betyr, benyttet de begreper som lineær, gjennomsnittlig (vekstfart) og tangent, for så å komme fram til derivasjon.

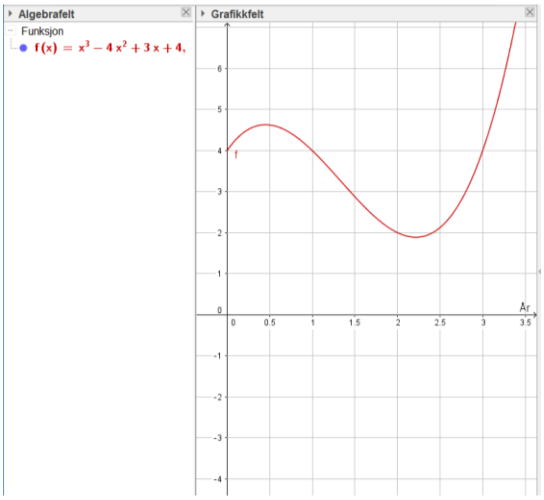
Fra utdraget ser det ut til at Kristian gjør viktige koblinger i sitt begrepsnettverk. Den informasjonen vi får om Kristians kognitive enhet (kap. 2.3.3) knyttet til akselerasjon, inkluderer i utgangspunktet ikke den andrederiverte. Det at akselerasjon kan sees som strekning per tid per tid (43) var derimot inkludert i hans kognitive enhet. På slutten av samtalen ser det ut til at Kristian gjør viktige koblinger mellom kognitive enheter, da han forstår at den deriverte representerer strekning per tid og at den andrederiverte representerer akselerasjon (51, 52). Dette er viktige koblinger som tilsynelatende styrker og utvider Kristians begrepsbide om den andrederiverte.

4.2 Elevenes begrepsforståelse i løpet av prosjektet

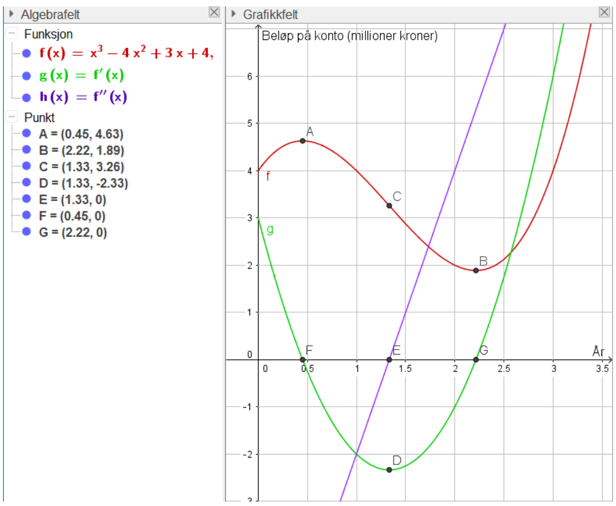
I dette underkapittelet vil det fokuseres på hver av elevenes begrepsforståelse i løpet av datainnsamlingen. Først vil jeg diskutere hvordan forståelsen til hver av elevene ble påvirket i løpet av selve modelleringen. Deretter vil jeg gjøre rede for funn og analyse av elevenes møte med nye oppgaver.

Det kan ikke sies noe sikkert om hvordan elevene har endret sin forståelse i løpet av prosjektet. Imidlertid kan en si noe om hvilken forståelse de satt igjen med i etterkant og om de tydelig nyttet seg av det de hadde lært i modelleringsarbeidet. En kan også få innsyn i om elevene i møte med disse oppgavene kan matematisere horisontalt eller vertikalt. Sammen vil dette gi noen indikasjoner på hvordan modelleringsarbeidet påvirket elevenes forståelse av den andrederiverte.

<u>Oppgavene som ble gitt til elevene i intervjuet:</u>
Den første oppgaven som ble gitt handlet om en bedrifts økonomiutvikling. Elevene fikk presentert grafen i Figur 9 og ble bedt om å forklare utviklingen ved hjelp av matematiske begreper. Alle elevene fant etter hvert grafen til den deriverte og andrederiverte til funksjonen fra Figur 9, med tilhørende nødvendige punkter (Figur 10).

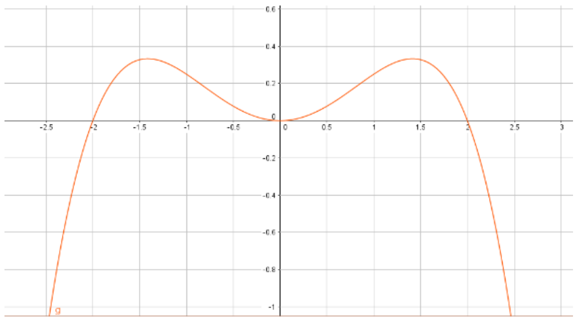


Figur 9: Grafen viser utviklingen av økonomien til en bedrift. Elevene fikk også oppgitt funksjonsuttrykket for grafen i algebrafeltet



Figur 10: Grafene til den deriverte og andrederiverte av funksjonen i Figur 9, inkludert nullpunkt, ekstremalpunkt og vendepunkt for hver av grafene.

Den andre oppgaven var at elevene skulle skissere den første- og andrederiverte til grafen som er vist i Figur 11. Se også Vedlegg 6 for utfyllende informasjon om begge oppgavene og intervjuguiden.



Figur 11: Grafen som ble gitt til elevene i den andre oppgaven.

4.2.1 Kristians begrepsforståelse i løpet av modelleringsprosjektet

I løpet av hele modelleringsprosjektet prøvde Kristian å benytte matematiske begreper til å forklare og begrunne det som ble gjort. Han kom flere ganger med uttalelser som viste at han hadde vekkede begrepsbilder som ikke var matematisk korrekt. For eksempel i utsagn 66, i forkant av Utdrag 2, forklarte han at det måtte være negativ akselerasjon der grafen til den andrederiverte synker. Det at han satt ord på hva han tenkte, ser ut til å ha vært viktig. Læreren kunne da stille han utfordrende spørsmål som videre så ut til å utløse en kognitiv konflikt. I etterkant av Utsagn 2 og 3 viste Kristian at han hadde gjort korrigeringer i sitt begrepsbilde.

> "Selv om akselerasjonen synker her så er den ikke negativ. Akselerasjonen blir bare mindre positiv (Henviser til grafen til $f''(x)$)"
>
> "Det vil være positiv akselerasjon der grafen er over null, og oppbremsing der grafen er under null" (her peker han på de ulike delene av grafen til $f''(x)$)".

Etter hvert i prosjektet benyttet Kristian relevante begreper mer i tråd med den formelle begrepsdefinisjonen. Han kommenterte også stadig observasjoner som viste at han gjorde koblinger i begrepsnettverket sitt. De følgende utsagnene viser eksempler på dette. Elevene arbeidet her med oppgave 4e.

> "Når $f'(x)$ har toppunkt, så har den samme verdi som nullpunktet til akselerasjonen (mener $f''(x)$ med akselerasjonen). Ehhh.. Det samme blir det for bunnpunktet på $f'(x)$ som gir nullpunktet til akselerasjonen. Det samme blir det også for det siste toppunktet på $f'(x)$. (..) Ja, det blir egentlig samme sammenhengen mellom $f(x)$ og $f'(x)$ som det er mellom $f'(x)$ og $f''(x)$, for begge er jo den deriverte liksom (ler). $f'(x)$ er derivert av $f(x)$ og $f''(x)$er derivert av $f'(x)$."
>
> "Det er konveks når vi har positiv akselerasjon (peker først på $f(x)$, deretter på $f''(x)$). Og det er vendepunkt når vi har et nullpunkt på $f''(x)$. Når vi får negativ akselerasjon (peker på $f''(x)$) får vi en konkav krumming på grafen (peker på $f(x)$."
>
> "En kan jo også snakke om vendepunkt på $f'(x)$. Det vendepunktet vil jo ha samme verdi som bunnpunktet til $f''(x)$. Men hvis vi deriverer denne igjen ($f''(x)$), da får vi $f'''(x)$. Når den er lik null så får vi ekstremalpunkt (tolker dette som at nullpunktet til $f'''(x)$gir samme verdi som ekstremalpunktet til $f''(x)$). Den tredjederiverte lik null vil da være den andrederiverte til den deriverte. Dette ble kanskje litt komplisert!"

Det første utsagnet antyder at Kristian her har forstått at en finner samme sammenheng mellom $f(x)$ og $f'(x)$ som mellom $f'(x)$ og $f''(x)$. Han viser også i det andre utsagnet at han kan bruke sentrale begreper om den andrederiverte til å forklare sammenhengen mellom grafene. I det siste utsagnet forklarer han hvordan en kan se på sammenhengen han fant i det første utsagnet, til å generalisere denne også til å gjelde for den tredjederiverte. Det er tydelig at Kristian har gjort viktige refleksjoner tenke høyt.

I intervjuet framhevet Kristian særlig at han etter modelleringsprosjektet forsto bedre sammenhengen mellom $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$, enn han tidligere gjorde. GeoGebra, som hjelpemiddel, var trolig her en viktig påvirkningsfaktor sammen med det å skulle forklare til en "journalist". I tillegg framhevet han at han nå skjønte at den andrederiverte hadde med akselerasjon å gjøre og at med positiv akselerasjon, vil endringen bli større og større. Han mente også at han kom til å huske godt det han nå hadde lært om den andrederiverte i møte med nye oppgaver. Han begrunnet dette med at de hadde diskutert mye, brukt mye tid på arbeidet og at han hadde den konkrete situasjonen om CO_2- problematikken å referere til. Det autentiske og samtalen var trolig derfor sentrale faktorer som også påvirket begrepsforståelsen. Fra Utdrag 7 og 10 ser en også at arbeidet uten framgangsmåte antakelig har vært en viktig påvirkningsfaktor for Kristians begrepsforståelse.

Oppsummert kan en si at Kristian var svært verbal gjennom hele prosjektet, noe som har gitt meg mulighet til å få innsyn i hans vekkede begrepsbilder. Han har ofte satt ord på det han har tenkt; enten det var noe han ikke forsto helt eller om han plutselig så en sammenheng. Det er tydelig at han hele tiden har vært trygg både faglig og sosialt i gruppen.

Det at Kristian satt ord på hva han tenkte, har trolig hjulpet han til å kunne identifisere kognitive konfliktfaktorer. Videre har han tilsynelatende gjennomgått viktige kognitive konflikter og gjort koblinger mellom kognitive enheter. Han har også korrigert deler av begrepsbildet som ikke var i tråd med den formelle begrepsdefinisjonen. Det er i tillegg tydelig at han har klart å komprimere de bildene han har om den andrederiverte til en enhet. Dette har han trolig klart fordi han har gjort så mange koblinger i begrepsnettverket sitt, slik at han har fått oversikt over begrepsbildet. Med en slik komprimert enhet ble det antakelig enklere for han å kunne argumentere på en korrekt matematisk måte i modelleringsarbeidet. Dette er noe som ser ut til å ha vært en fordel i møte med nye oppgaver om den andrederiverte.

4.2.1.1 Kristians møte med nye oppgaver om den andrederiverte

Den første oppgaven (Figur 9 og 10)

I møte med den første oppgaven begynte Kristian, ved å se på krummingen til grafen, å forklare hvor det var positiv og negativ akselerasjon (Figur 9). Videre forklarte han den matematiske sammenhengen mellom grafene i en praktisk kontekst:

> "(…) Det er negativ akselerasjon (peker på der $f''(x)$ er negativ). Så da vil vi da ha den krumningen her som vil si at pengebeholdningen gradvis snur (peker på $f(x)$), trenden snur fra at vi tjener mer og mer penger til at.. Ehh, endringene blir først mindre og mindre, så går de under null (henviser til $f'(x)$), også vil pengebeholdningen minke (peker på $f(x)$). Siden akselerasjonen er under null (mener her $f''(x)$) så er det fordi endringen synker (peker på $f'(x)$). […] (…)Etter punktet E (nullpunktet til $f''(x)$) så får vi positiv akselerasjon hele tiden. Da vil endringen av endringen øke hele tiden (peker på $f'(x)$)." (Utsagn 631og 637)

På spørsmålet om hvor han trodde det var satt i gang tiltak for bedriften, svarte han:

> " (…) Altså, dette blir jo litt det samme som den vi hadde på den om den klimamessige forbedringen. Enten kan vi si at det er punkt B eller C (toppunktet eller vendepunktet på $f(x)$). Men jeg vil si at det er i punkt C, at en begynner å gjøre endringer da og den endringen de da gjør fører til at reduksjonen i pengebeholdningen begynner å gå litt senere (tolker dette som at reduksjonen blir mindre) og det kan jo, hvis vi ser på den andrederiverte så er jo den lik null i det punktet, og den går over til det positive og her ser vi at den begynner med krummingen som vil føre til en positiv utvikling, for pengebeholdningen til selskapet (…) Det er jo kanskje litt urealistisk at det blir gjort tiltak her (peker på bunnpunktet) og at det plutselig begynner å gå bedre med økonomien sånn over natten (…)". (Utsagn 645)

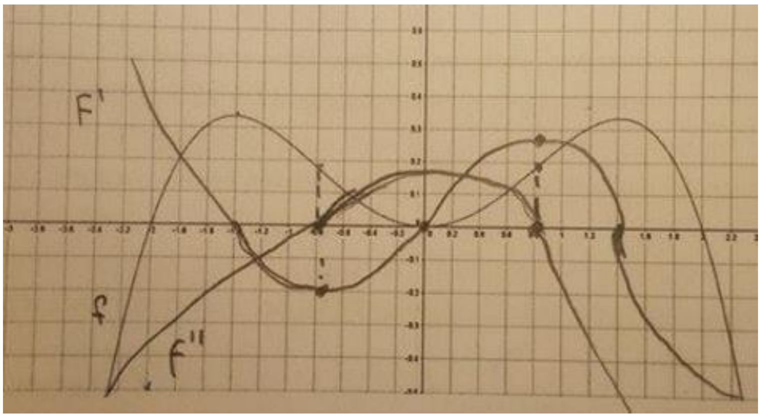
Ut fra disse to utdragene ser det ut til at Kristian har tydelig oversikt over begrepsbildet sitt. I det andre utsagnet viste han også at han koblet at spørsmålet hadde likhet med det de hadde gjort i modelleringsarbeidet (se Utdrag 7). I tillegg argumenterte han her for det han svarte, både ut fra matematisk argumentasjon og med praktiske refleksjoner. Utsagnene indikerer at Kristian har klart å komprimere de ulike delene av begrepsbildet inn i en kognitiv enhet. Generelt viste Kristian at han i møtet med denne oppgaven klarte å gjøre en horisontal matematisering[18].

Den andre oppgaven (Figur 11)

I møte med den andre oppgaven forklarte og begrunnet Kristian i stor grad hvordan han skulle skissere $f'(x)$ og $f''(x)$. Han forklarte at nullpunktene til $f'(x)$ ville ha samme x- verdi som ekstremalpunktene til $f(x)$. For å finne formen på $f'(x)$ forklarte han at $f(x)$ økte fram til toppunktet, så da måtte $f'(x)$ være positiv fram til denne x- verdien og deretter bli negativ fordi $f(x)$ her sank. På samme måte forklarte han hvordan resten av $f'(x)$ ville se ut. Da han skisserte $f''(x)$ forklarte han her samme sammenhengen mellom denne og $f'(x)$ som det han tidligere hadde forklart for $f(x)$ og $f'(x)$. Han kontrollerte også at han hadde gjort riktig ved å

[18] Flere uttalelser som understøtter dette er å finne i Vedlegg 9 (blant annet utsagn 615, 617, 619, 627, 649-651).

markere at x- verdien til vendepunktene til $f(x)$ var de samme som for ekstremalpunktene til $f'(x)$, som igjen hadde samme x- verdi som nullpunktene til $f''(x)$ (Figur 12).



Figur 12: Kristians skisse av f '(x) og f ''(x)

Kristian kommenterte imidlertid at han var usikker på hvordan han skulle tegne $f'(x)$ og $f''(x)$ når de fikk høyere negative verdier for y. Slik det ble tegnet var noe ukorrekt, men dette har en mindre vesentlig betydning for hans forståelse av den andrederiverte.

I møte med denne oppgaven viste Kristian igjen at han hadde en komprimert kognitiv enhet, slik at han klarte å ha oversikt over begrepsbildet sitt. Ut fra hvordan han forklarte og skisserte grafene, vil jeg påstå at han her klarte å gjøre en vertikal matematisering.

4.2.2 Toras begrepsforståelse i løpet av modelleringsprosjektet

Etter min oppfatning så det ut til at Tora var sosialt trygg i gruppen. Hun var mindre muntlig aktiv enn Kristian, men prøvde i flere samtaler å forklare det hun tenkte. Ellers prøvde hun aktivt å finne sammenhenger, og å bruke dem i andre situasjoner. Dette kommer fram i arbeidet med del B (Utdrag 4 og 5). Her prøvde hun å bruke sammenhengen som hun så fra oppgave 4e til å forstå hvordan hun skulle tegne grafen for CO_2- nivået. Imidlertid ser det ut til at Tora så en del sammenhenger på en instrumentell måte. I intervjuet spurte jeg Tora hvordan hun brukte grafene fra oppgave 4e til å skjønne hvordan hun skulle tegne grafen i del B. Hun begrunnet dette med:

> "((…) Jeg sammenlignet jo med oppgaven tidligere (altså oppgave 4e og grafene i Figur 4 og Figur 5). […] (…) En ser jo at den er konveks her (peker på $f(x)$), og den her er på en måte motsatt vei- altså konkav (peker på $f'(x)$). Konkav er jo det motsatte av konveks. Så det vil vel stemme her også. At det blir motsatt (altså motsatt konkavitet mellom $f(x)$ og $f'(x)$. Hun peker på tegningen sin)." (Utsagn 751 og 755)

Tora mente altså at grafen til $f'(x)$ ville ha motsatt krumning sammenlignet med $f(x)$. Denne sammenhengen som Tora så fra A gjaldt kun for deler av grafene i oppgave 4, men hun generaliserte likevel dette til å gjelde for alle situasjonene. Dette kan sees i sammenheng med Brekkes (2002) utsagn om at overgeneralisering ofte er årsaken til at misoppfatninger oppstår. Trolig kan derfor denne sammenhengen som Tora uttaler, utvikles til en misoppfatning dersom hun ikke oppdager hennes potensielle konfliktfaktor sett i lys av den formelle begrepsdefinisjonen.

Selv om noen av Toras uttalelser, blant annet utsagn 751 og 755, antyder at hun har en noe instrumentell forståelse, ser det ut til at Utdrag 5 kan hå påvirket henne til å gjøre viktige koblinger i sitt begrepsnettverk. Denne samtalen kan ha påvirket henne til å utvikle en mer relasjonell forståelse av den andrederiverte. Samtalen som påvirkningsfaktor ser derfor ut til å ha vært sentral for Toras begrepsforståelse. Det autentiske aspektet ser også ut til å ha vært viktig for Toras begrepsforståelse. Hun uttalte at noe av det som påvirket hennes forståelse mest, var å forklare på en enklere måte til en "journalist".

Oppsummert ser vi at Toras forståelse i løpet av modelleringsprosjektet virker noe instrumentell. Samtidig prøver hun å finne sammenhenger og det ser ut til at hun er på vei mot en mer relasjonell forståelse. Det at hun var syk den ene dagen gjorde at hun ikke fikk deltatt i faglige diskusjoner som kan ha vært viktige for å skape flere koblinger mellom kognitive enheter.

4.2.2.1 Toras møte med nye oppgaver om den andrederiverte

Den første oppgaven (Figur 9 og 10)

I møte med den første oppgaven kom det fram at Tora hadde vekkede begrepsbilder som ikke stemte med den formelle begrepsdefinisjonen. Hun forklarte at det var negativ akselerasjon fra toppunktet til bunnpunktet (Figur 9), noe som kan sees som en billedlig tolkning. Da hun senere fant grafen for $f'(x)$ og $f''(x)$, sa hun at det måtte være negativ akselerasjon helt fra begynnelsen til nullpunktet til grafen for $f''(x)$. Dette utsagnet kan sees som en potensiell konfliktfaktor til det hun tidligere forklarte. Umiddelbart la hun ikke merke til at her var en motsigelse, noe som tyder på at hun hadde svake forbindelser i begrepsnettverket sitt. Derfor stilte jeg henne et spørsmål, slik at hun kunne oppfatte hennes eget utsagn som en kognitiv konfliktfaktor:

Utdrag 11:

860. Eili:	Ja, og hvordan ser du sammenhengen med den første grafen vi hadde ($f(x)$)? For du tenkte jo at når vi så på den første grafen så ville det være negativ akselerasjon fra toppunktet til bunnpunktet.
861. Tora:	Ja, men det var litt.. Det skulle heller vært nærmere her, rundt vendepunktet.

862. Eili: Og hva med tiden før toppunktet? (henviser til f(x))

863. Tora: Den er jo negativ her og. Akselerasjonen blir jo mindre hele tiden her. Så endringen blir jo mindre og (peker på $f(x)$). Det ser en her og (peker på f '(x))

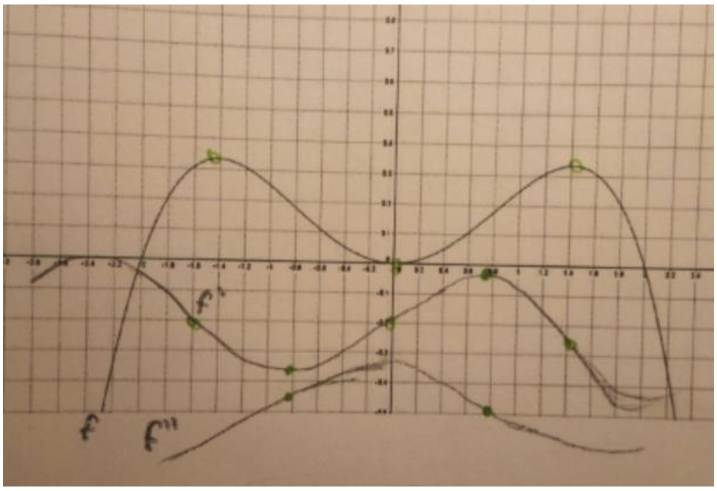
I utsagn 861 og 863 prøvde Tora å forklare sammenhengen mellom grafene på en annen måte enn tidligere. Det virket derfor som om hun skjønte at det hun først hadde sagt ikke kunne være korrekt. Ved å argumentere ut fra de andre grafene om hvor det var negativ akselerasjon, kan dette ha bidratt til at hun gjorde viktige korrigeringer i hennes vekkede begrepsbilder. Hun forklarte videre at dersom hun hadde satt en linjal (tangent) inntil $f(x)$, kunne hun sett at stigningen ble mindre helt fram til vendepunktet. Hun sa også at det var i vendepunktet at akselerasjonen snudde, når $f(x)$ går fra å være konkav til konveks. Disse delene av begrepsbildet så ut til å bli vekket fordi hun nå sammenlignet de tre grafene. Nå klarte hun å forklare på en mer korrekt matematisk måte ved hjelp av relevante begreper.

Videre i oppgaven forklarte hun flere sentrale momenter for hvordan den matematiske sammenhengen kunne forklares praktisk for økonomisituasjonen. På spørsmålet om hun som leder for bedriften ville vært stresset i tiden 0,2 år, svarte hun at hun så at akselerasjonen her ble mindre og at en ikke sparer opp like mye. Derfor mente hun at hun her ville vært litt stresset og vurdert å gjennomføre tiltak. I tiden 1,8 mente hun at hun ikke ville vært stresset, fordi hun så at $f(x)$ hadde hatt mer negativ stigning før og at grafen nå begynte å flate ut. Hun mente at siden akselerasjonen steig så var det ikke krise, selv om økonomien fortsatt sank. Hun sa også at det så ut til at det var gjort tiltak i vendepunktet på grafen, fordi akselerasjonen her ble endret fra negativ til positiv. Her viste Tora at hun klarte å argumentere ved hjelp av den andrederiverte i en praktisk kontekst.

Oppsummert ser en at Tora i starten hadde noen vekkede begrepsbilder som ikke stemte med den formelle begrepsdefinisjonen. Det ser ut til at hun trengte å se de tre grafene samtidig for å få vekket begrepsbildene som stemte overens med den formelle begrepsdefinisjonen. I tillegg kan mitt spørsmål ha vært viktig (860). Disse to momentene bidro trolig til at hun i denne oppgaven klarte å bruke den kunnskapen hun hadde fra modelleringsarbeidet. Etter å ha studert sammenhengen mellom grafene til $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$, ser det ut til at flere relevante deler av begrepsbildet ble vekket. På den måten klarte hun å forklare og argumentere for hvordan økonomisituasjonen utviklet seg. Jeg vil påstå at Tora i møte med denne oppgaven i stor grad klarte å gjøre en horisontal matematisering.

Den andre oppgaven (Figur 11)

I møte med den andre oppgaven forklarte Tora at bunnpunktet til den deriverte måtte ha lik x-verdi som vendepunktet til den andrederiverte. Dette vekkede begrepsbildet benyttet hun for å skissere den første- og andrederiverte til grafen (Figur 13)[19]. Det ser ut til at hun her husket at det var en sammenheng mellom ekstremalpunkt på den ene grafen og vendepunktene på den andre grafen. Den sammenhengen som hun forklarte ut fra sitt vekkede begrepsbilde, er motsatt av det som stemmer med den formelle begrepsdefinisjonen. Siden Tora på en måte har tenkt motsatt når det gjelder hvordan sammenhengen er mellom $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$ for vendepunkt og toppunkt, tyder dette på at Tora har en instrumentell forståelse. Dersom hun hadde forstått hvorfor sammenhengen er slik den er, hadde hun trolig ikke blandet denne sammenhengen.



Figur 13: Toras skisse av f '(x) og f'' (x)

Jeg spurte Tora om hun kunne forklare hvorfor grafene var plassert slik de var, med tanke på y- verdiene. Da sa hun at hun ikke hadde tenkt på y- verdiene, men bare tenkt på sammenhengen mellom vendepunkt og ekstremalpunkt. I tillegg var hun usikker på hvordan de skulle bli plassert riktig dersom hun skulle ta hensyn til y- verdier. Dette, i tillegg til at sammenhengen mellom grafene ikke ble matematisk riktig, bidrar til at Tora i møte med denne oppgaven i ikke klarer å gjøre en vertikal matematisering.

[19] Først tegnet hun ikke grafen til den deriverte helt ferdig. Jeg spurte henne hvordan hun ville ta hensyn til toppunktene til $f(x)$ når det gjaldt grafene til $f'(x)$ og $f''(x)$. Hun sa at det var der vendepunktet til den deriverte var, også tegnet hun denne (Figur 13). Her ble jeg så fokusert på å forstå hva hun tenkte, at jeg ikke fikk spurt om hun kunne fullføre skissen av den andrederiverte også. Derfor er nok ikke denne skissert fullstendig. Den skulle trolig hatt fem ekstremalpunkter etter hennes tankegang.

Før Tora fikk de nye oppgavene, forklarte hun flere ganger sammenhengen som hun brukte til å løse denne oppgaven om den andrederiverte. Hun forklarte her hva hun hadde skjønt om den andrederiverte:

> "Toppunktet på den deriverte er også vendepunktet på den andrederiverte. Dette er faktisk en sammenheng som jeg ikke visste om tidligere." (Utsagn 823)

Siden det samme vekkede begrepsbildet har kommet fram to ganger når hun har forklart hva hun har forstått, ser det ut til at hun brukte denne sammenhengen nokså konsekvent. En kan da anta at dette etter hvert kan utvikle seg til en misoppfatning (Brekke, 2002, s. 10). Dersom hun ikke opplever en kognitiv konflikt, vil hun trolig derfor fortsette å benytte dette vekkede begrepsbildet i møte med nye oppgaver. Imidlertid ville trolig det Tora gjorde i sammenheng med den første oppgaven i intervjuet og blant annet i Utdrag 4, fungere som potensielle konfliktfaktorer. Her forklarte hun sammenhengen mellom grafene i samsvar med den formelle begrepsdefinisjonen. En annen potensiell konfliktfaktor kan være at grafene ifølge Toras tankegang fikk flere ekstremalpunkt med økt "derivasjonsgrad" (Figur 13). Dette blir en omvendt sammenheng av det som er matematisk korrekt. Til tross for disse momentene, ser det ikke ut til å ha oppstått en kognitiv konflikt i Toras begrepsbilde.

Det som er kritisk med Toras vekkede begrepsbilder er at modelleringsarbeidet trolig har påvirket henne til å utvikle en misoppfatning som ikke ble oppdaget. Etter intervjuet kom jeg til å tenke på at hun kanskje hadde misforstått hele oppgaven i del B; at det handlet om å gå fra den deriverte til den andrederiverte. Dette kunne ha forklart hvordan misoppfatningen hadde oppstått. Derfor spurte jeg henne om dette dagen etter, men hun kunne bekrefte at hun hadde riktig oppfatning av oppgaven. Videre forklarte jeg henne hvilken sammenheng hun hadde sett og hvorfor dette ikke ble riktig. Hun sa da at hun tydeligvis hadde blandet litt hvordan sammenhengen var. Det at hun husket sammenhengen motsatt understøtter tolkningen min om at hun instrumentelt hadde sett en sammenheng. Samtidig kan en være kritisk til at hun ikke nødvendigvis husket tolkningen sin helt korrekt, fra det som skjedde dagen før.

4.2.3 Siris begrepsforståelse i løpet av modelleringsprosjektet

I selve modelleringsarbeidet benyttet Siri i liten grad matematiske begreper i samtalene. De gangene hun deltok i samtaler om matematiske begrep, virket hun lite trygg på sin egen matematiske kompetanse. I Utdrag 1 ser en for eksempel at Siri i stor grad gjentok det samme matematiske innholdet som Tora uttrykte. Dette kan tyde på at hun ikke var faglig trygg nok til å bruke egne ord til å forklare. I det følgende utdraget (Utdrag 12) virket hun også faglig usikker. Det ser ut som hun hadde noe svak bakgrunnsforståelse for den andrederiverte. I forkant av denne samtalen hadde Kristian forklart henne hvordan han så sammenhengen mellom grafene (Utdrag 9).

<u>Utdrag 12:</u>

154. Eili:	Siri, du sa jo tidligere at du så at punktene sto parallelt.
155. Siri:	Ja, ser at toppunktet (peker på $f'(x)$) har samme verdi som her (peker på nullpunktet til $f''(x)$)
156. Eili	Hvorfor får disse punktene samme verdi?
157. Siri	Jeg er litt usikker.
158. Kristian	Jo, det blir jo det samme som at når en har et funksjonsuttrykk og hvis en skal finne toppunktet, hva gjør en da?
159. Siri	Ehh.. Jeg husker ikke den formelen nå.
160. Kristian	Ehh.. Det har med derivasjon å gjøre. Hvis du tenker på det når du ser på disse grafene. Her har jeg gjennomført derivasjonen.
161. Siri	Hæ? Tenke på hva?
162. Kristian	Nå har vi jo funksjonen og den deriverte framstilt grafisk. Da kan en se det ut fra grafene hvordan en kan finne ekstremalpunktene.

Siris uttalelse i utsagn 159 og 161 antyder at hun virket forvirret og stresset i situasjonen. Fra utdraget virket begrepsbildet hennes om den andrederiverte segmentert. Trolig koblet hun ikke at det var en sammenheng mellom de grafiske framstillingene av den første- og andrederiverte og det hun kunne fra før om derivasjon. I intervjuet forklarte Siri at hun skjønte mer da hun så at det var en sammenheng mellom det hun hadde gjort i boken og det de arbeidet med i oppgave 4e. Hjemme så hun over noen av de oppgavene hun tidligere hadde gjort om funksjonsdrøfting, og etter dette mente hun at modelleringsoppgavene ga mer mening. Trolig klarte hun å koble to kognitive enheter; algebraisk derivasjon og den grafiske framstillingen av den første- og andrederiverte. Fra Utdrag 13 ser det ut til at Siri mente at hun nå forsto den andrederiverte bedre: [20]

<u>Utdrag 13:</u>

1087. Siri	Jeg kommer til å huske det veldig godt nå, når en kan knytte det til en sammenheng med noe. Ikke bare en regneoppgave hvis du skjønner. Og det vi gjorde før måtte vi pugge, dette her går mer på forståelsen da, for min del.
1088. Eili	Ja. Så hva var det som gjorde at det gikk mer på forståelsen da?
1089. Siri	At jeg fikk se på de ulike; å se sammenheng mellom $f'(x)$, og se sammenheng mellom bunn og toppunkt på ene grafen i forhold til vendepunkt og nullpunkt på de andre grafene. Se hvordan det henger sammen. Og få det vist da, ut i fra oppgaven som vi holdt på med. Det gjorde at jeg så det på en litt annen måte da.

[20] Se også utsagn 1085 (kapittel 4.1.2). Dette utsagnet var like før Utdrag 13.

GeoGebra som hjelpemiddel har trolig vært sentralt for at Siri kunne gjøre viktige koblinger i begrepsnettverket sitt. I de følgende utsagnene fra intervjuet ser en at Siri her benyttet matematiske begreper i større grad enn i modelleringsarbeidet. Her uttalte hun blant annet:

> "Ehm… Altså, vendepunktet er jo der den begynner å snu fra konveks til konkav.[…] Når den er konveks da er den smilende, da vokser den, går den oppover. Da kan en si noe om når den akselererte mest. Mens når den er konkav så er det når den minker igjen. Vendepunktene er det som styrer de, om hva som skjer." (1021, 1023)
>
> " Når en fant toppunktene; sette den deriverte lik null. Og når en skal finne vendepunktene, så setter vi den andrederiverte lik null." (Deler av utsagn 1085 fra kap. 4.1.4)

Det er tydelig at Siri benyttet flere begreper i tilknytning til den andrederiverte i forklaringene sine i intervjuet, sammenlignet med i modelleringsprosjektet. Samtidig virket hun her i stor grad regelfokusert. Likevel kan uttalelsene tyde på at hun har utviklet en bedre begrepsforståelse. En alternativ tolkning, eller kombinasjon av begge, er at hun i intervjusituasjonen opplevde mer sosial trygghet enn i gruppesamarbeidet. Dette kan ha påvirket henne til å tørre å benytte faglige begreper og sammenhenger i det hun forklarer. I intervjuet fortalte Siri hva hun tenkte om det å snakke høyt i gruppen:

> "Ehh ja si det. Nei jeg vet ikke. Kristian han er jo veldig smart holdt jeg på å si. Han er veldig flink til å ta ordet, sånn til vanlig i klassen og alt sant. Mens jeg, jeg vet ikke.. Det kan jo ha litt med det at jeg sier ikke alltid mine meninger. Og det kan jo ha en påvirkning. Eller det og at jeg tenkte det, men jeg var usikker på om det var rett. Og det å si det hvis det var feil, liksom. […] Så det er jo bedre å prøve og feile, men det er vanskelig å tenke det også i en sånn situasjon." (utsagn 1113 og 1115)

Fra Utdrag 1 og 12 samt utsagn 1113 og 1115, ser det ut til at Siri er utrygg både faglig og sosialt. Dette har trolig ført til at hun i liten grad har deltatt i de faglige diskusjonene i gruppen. Siden Siri ikke gikk på den samme skolen forrige skoleår, var hun kanskje ikke like trygg på den nye klassen og læreren som de to andre elevene. I intervjuet sa hun også at den forståelsen en har i forkant av modelleringen, vil påvirke begrepsforståelsen underveis. Her tolker jeg utsagnet hennes som at hun her tenkte på at hun selv ikke hadde god nok forkunnskap og at hun derfor kanskje ikke følte seg faglig trygg. Samtidig er det vanskelig å si noe sikkert, da dette er min tolkning. Her skulle jeg muligens stilt noen utdypende spørsmål, for å få mer nøyaktig informasjon om hva hun egentlig mente.

I intervjuet nevnte hun at hun spesielt ikke hadde gode kunnskaper i GeoGebra, da hennes tidligere lærer fokuserte i liten grad på denne programvaren i undervisningen. Hun hadde blant annet aldri benyttet regresjonsanalyse i GeoGebra, noe som var sentralt i modelleringsarbeidet. Dette hadde de to andre elevene gjort før. Trolig kan dette også ha påvirket Siris trygghet.

Oppsummert ser det ut til at Siri har følt seg noe faglig og sosialt utrygg i modelleringsarbeidet. Til tross for dette, ser det ut til at Siri har utvidet sitt begrepsbilde om den andrederiverte, spesielt ved å kunne se på den andrederiverte representert grafisk. Bruken av GeoGebra ser derfor ut til å ha hatt en vesentlig rolle for påvirkningen av hennes forståelse av den andrederiverte. Fra Utdrag 6 og 8 ser det ut til at det også var viktig å kunne relatere den andrederiverte til autentiske ord og problemstillinger. Dette aspektet ser ut til å ha bidratt til en trygghet fordi dette var noe hun kunne forholde seg til.

4.2.3.1 Siris møte med nye oppgaver om den andrederiverte

Den første oppgaven (Figur 9 og 10)

I den første oppgaven mente Siri at det var oppbremsing fra toppunktet til bunnpunktet for $f(x)$. Her ser en at Siri, i likhet med Tora, har en billedlig tolkning av grafen. Imidlertid kom det også fram gjennom hennes vekkede begrepsbilder at hun ikke hadde gjort koblinger i sitt begrepsnettverk om at oppbremsing var det samme som negativ akselerasjon[21]. Da Siri i møte med den første oppgaven skulle forklare sammenhengen mellom grafene, sa hun at det var negativ akselerasjon når den andrederiverte var under null. Det virket som at hun hadde generalisert denne sammenhengen til også å gjelde for både funksjonen og den deriverte til funksjonen. En slik overgeneralisering kan føre til at det oppstår en misoppfatning (Brekke, 2002, s. 10). I hennes vekkede begrepsbilder hadde både $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$ positiv akselerasjon der grafen var over x- aksen og negativ akselerasjon der grafen var under x-aksen. Hun mente derfor at $f(x)$ ikke hadde negativ akselerasjon, siden grafen ikke gikk under null. Samtidig mente hun at det var oppbremsing fra toppunktet til bunnpunktet. Disse vekkede begrepsbildene ville fungert som potensielle konfliktfaktorer dersom en så på oppbremsing og negativ akselerasjon som det samme.

På bakgrunn av Siris argumentasjon, ble det tydelig at hun ikke hadde gjort koblinger mellom hverdagsbegrepet *oppbremsing* og begrepet *negativ akselerasjon*, inn i en kognitiv enhet. Det autentiske aspektet ved modelleringsoppgavene ser derfor ut til å ha bidratt til å skape vekkede begrepsbilder som ikke stemmer med den formelle begrepsdefinisjonen. Disse begrepsbildene kan utvikles til en matematisk misoppfatning (Brekke, 2002).

Da Siri skulle forklare grafen i den praktiske konteksten, ble det også vekket begrepsbilder som ikke var matematisk korrekt. Hun forklarte at dersom hun var leder i bedriften, ville hun

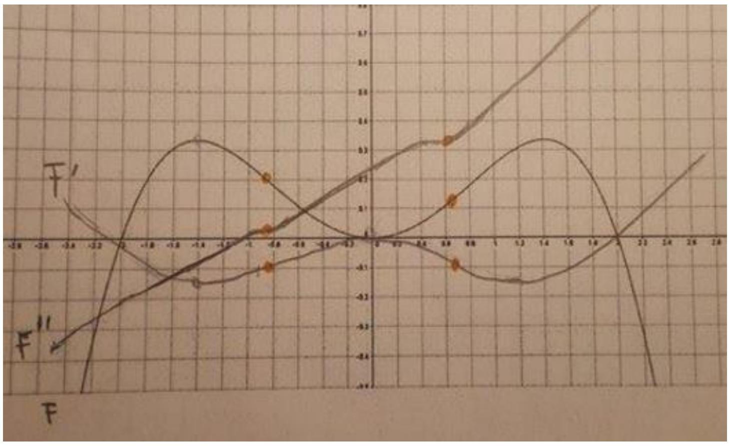
[21] I Utdrag 3 så vi på akselerasjon i modelleringskonteksten som det som beskrives som positiv akselerasjon i fysikken. Her så vi også på oppbremsing som negativ akselerasjon.

satt i gang tiltak både i tiden 0,2 år og i tiden 1,8 år (se Figur 10). For tiden 1,8 år mente hun at det var krise. Hun mente også at det så ut som at det var satt i gang tiltak i bunnpunktet. Her har hun altså ikke benyttet kunnskap om den andrederiverte i argumentasjonen.

Oppsummert ser en at Siri har flere vekkede begrepsbilder som ikke stemmer med den formelle begrepsdefinisjonen. Hun klarte derfor ikke å gjøre en horisontal matematisering.

<u>Den andre oppgaven (Figur 11)</u>

I møtet med den andre oppgaven mente Siri at der grafen til $f(x)$ var konveks, skulle grafen til $f'(x)$ være konkav (Figur 1). I tillegg skulle grafene møtes i ekstremalpunktene. Dette ble begrunnet med at de brukte å være motsatte av hverandre. Dette vekkede begrepsbildet hadde trolig en sammenheng med det hun observerte i den første oppgaven. Da hadde hun kommentert at $f(x)$ og $f'(x)$ i Figur 10 var omvendte av hverandre. Der $f(x)$ begynte å stige, så hun for eksempel at $f'(x)$ sank. Denne sammenhengen gjaldt imidlertid bare for den første delen av grafene. Likevel ser det ut til at denne sammenhengen i stor grad påvirket hvordan hun nå skisserte den deriverte. Muligens har hun kanskje også blitt påvirket av Tora, siden det virker som at de har omtrent samsvarende oppfatninger om hvordan denne sammenhengen er.



Figur 14: Siris skisse av $f'(x)$ og $f''(x)$

Det var imidlertid interessant at da hun skulle tegne den andrederiverte, benyttet hun ikke samme sammenhengen mellom $f'(x)$ og $f''(x)$, som mellom $f(x)$ og $f'(x)$. Hun skisserte derimot $f''(x)$ som en rett linje. Her antar jeg at dette vekkede begrepsbildet var preget av at hun husket tilbake til hvordan $f''(x)$ så ut i den første oppgaven. Her var $f''(x)$ en rett linje (Figur 10). Hun lagde også en bøy på grafen til $f''(x)$ to steder (Figur 14). Disse beskrev hun som vendepunkt. Hun begrunnet dette med at alle grafene skulle få sammenfallende verdier for vendepunkt.

Oppsummert virker det som at Siris forståelse av den andrederiverte var situert til den konkrete modelleringsoppgaven. Analysene i studien viser at hun hadde begrensede og fragmenterte vekkede begrepsbilder om den andrederiverte. Videre ser dette ut til å føre til at både den horisontale og vertikale matematiseringen blir vanskelig. Det så ut til at hun enda ikke hadde gjort nødvendige komprimeringer og koblinger mellom kognitive enheter. I utsagn 1021, 1023 og 1085 (kap. 4.2.3) viste hun imidlertid at hun hadde kognitive enheter med matematisk informasjon som samsvarer med den formelle begrepsdefinisjonen. Denne forståelsen var trolig noe instrumentell, siden de vekkede begrepsbildene hennes viste at hun hadde utfordringer med å anvende kunnskapen i møte med nye oppgaver.

5 Oppsummerende refleksjoner og diskusjon

På bakgrunn av funn fra kapittel 4, vil jeg her trekke noen linjer mellom de presenterte funnene og knytte dette nærmere opp til teori og forskning.

Jeg vil først ta for meg de mest sentrale funnene om elevenes vekkede begrepsbilder (kap. 5.1). I kapittel 5.2 vil jeg så ta for meg og diskutere hvordan de fire faktorene påvirket forståelsen av den andrederiverte og hvordan de påvirket elevenes trygghet. Det som ser ut til å være gjennomgående felles for de fire påvirkningsfaktorene, er at de er tett knyttet til elevenes faglige og sosiale trygghet. Variasjon i trygghet har antakelig bidratt til at de fire faktorene i ulik grad har påvirket de tre elevenes begrepsforståelse. I kapittel 5.3 vil jeg, på en kritisk måte, diskutere noen av studiens sentrale funn, analytiske valg og valg av datainnsamlingsmetoder.

5.1 Elevenes vekkede begrepsbilder

Ved å gi elevene nye oppgaver om den andrederiverte, har jeg fått innsyn i hvordan elevene klarte å overføre det de kunne om begrepet til en ny situasjon. Analysene som er gjort viser at elevene i ulik grad klarte å overføre denne kunnskapen. Kristian klarte å gjøre både en horisontal og vertikal matematisering. Tora klarte ved støtte en horisontal matematisering, men ikke en vertikal matematisering. Siri klarte hverken å gjøre en horisontal eller vertikal matematisering.

Et interessant funn er at Kristian henviste tilbake til hvordan han løste et lignende problem i modelleringsprosjektet (utsagn 645, kap. 4.2.1.1). Således kunne han bruke disse erfaringene for å forstå nye problemer. Dette kan sammenlignes med funnene i studien til Blomhøj og Kjeldsen (2010), om at studentene også i deres studie henviste tilbake til modelleringsarbeidet for å forstå nye oppgaver. Trolig brukte også Tora og Siri det de hadde lært, men dette kom ikke like tydelig fram. Spesielt kom dette i liten grad fram for Siri. Tora derimot, brukte mange av de samme argumentene i den første oppgaven som det de hadde argumentert med i modelleringsarbeidet (kap. 4.2.2.1). Dette kan tyde på at hun brukte det hun hadde lært for å kunne forklare.

Til tross for at flere faktorer i modelleringsarbeidet har påvirket til en bedre begrepsforståelse, ser det ut til at det også ble utviklet begrepsbilder som ikke stemte med den formelle begrepsdefinisjonen. Dette kan en se fra funnene av de vekkede begrepsbildene til Siri og Tora. Tora viste et vekket begrepsbilde om at det var en sammenheng mellom verdien for toppunktet til den deriverte og vendepunktet til den andrederiverte (kap. 4.2.2.1). I tillegg hadde hun, i modelleringsarbeidet, generalisert en sammenheng som kun gjaldt for deler av grafene i modelleringsprosjektet: at $f'(x)$ og $f(x)$ hadde motsatt konkavitet (utsagn 751 og 755, kap. 4.2.2). Denne sammenhengen kom også til syne i Siris møte med den andre oppgaven i intervjuet (kap. 4.2.3.1). I tillegg hadde Siri overgeneralisert en sammenheng som stemmer for den andrederiverte, slik at dette også gjaldt for $f'(x)$ og $f(x)$ (kap. 4.2.3.1). Disse vekkede begrepsbildene til Tora og Siri kan potensielt utvikle seg til misoppfatninger.

Et interessant funn er at alle de tre elevene tolket grafene billedlig (Brekke, 2002, s. 11; Doorman, 2005, s. 20-25). I både Kristian og Toras tilfelle ble disse misoppfatningene utfordret i modelleringsarbeidet (Utdrag 2 og 4). De fikk trolig justert begrepsbildene sine, slik at de i større grad stemte overens med den formelle begrepsdefinisjonen. Likevel ser en at Tora fortsatt tolket grafen billedlig i møte med den første oppgaven (kap 4.2.2.1), noe som stemmer med Aspinwall et al. (1997) og Vinners (1992) empiri om at studenter har utfordringer med å fjerne ukorrekte begrepsbilder. Imidlertid så det ut til at hun klarte å gjøre korrigeringer i de vekkede begrepsbildene sine, etter at det ble stilt henne utfordrende spørsmål. Da så det ut til at hun klarte å gjøre nødvendige koblinger mellom kognitive enheter, slik at hennes vekkede begrepsbilde stemte med den formelle begrepsdefinisjonen.

Når det gjelder Siri, var hun som nevnt lite aktiv i de faglige diskusjonene i modelleringsarbeidet. Hun hadde ingen utsagn som kunne si om hun tolket grafene billedlig. Likevel ser en at hun tolket grafen billedlig i den første oppgaven som ble gitt (kap. 4.2.3.1). Tilsynelatende hadde hun enda ikke gjort nødvendige koblinger i begrepsnettverket sitt.

Et moment som kan ha ført til at alle de tre elevene gjorde en billedlig tolkning av grafene, er at koordinataksene i GeoGebra var "festet til kanten" (Figur 4 og 5). Trolig er elevene vant til å ha et grafikkfelt der koordinataksene er plassert i y = 0 og x = 0. Dette kan muligens ha ført til at det ikke var så lett å legge merke til hvor grafen gikk fra positive til negative y- verdier. Denne forklaringen kan også gi mening, dersom en ser på Toras skisse i den andre oppgaven (kap. 4.2.2.1). Hun var usikker på hvordan hun skulle ta hensyn til y- verdiene da hun tegnet, og tegnet $f'(x)$ og $f''(x)$ under $f(x)$ uten å ha en spesiell begrunnelse for dette (Figur 13). Samtidig skulle en tro at elevene visste at grafene i modelleringsarbeidet hadde både positive og negative verdier, siden de i flere samtaler hadde diskutert dette (Utdrag 3, 4, 5 og 7). En mulig forklaring kan være at elevene kanskje ikke reflekterte nok over dette, slik at de ikke fikk gjort nødvendige koblinger i begrepsnettverket. Dette kan ha ført til at de senere fortsatt tolket grafen billedlig.

5.2 De fire påvirkningsfaktorene

Samtalen

Funn fra modelleringsarbeidet indikerer at samtalen hadde et stort læringspotensial, noe også teori og forskning viser (Brøyn, 2009; Dysthe, 1995; Kaiser & Schwarz, 2006, 2010; Zbiek & Conner, 2006). Studiens resultat viser at elevene var verbale i ulik grad, noe som trolig også fikk innvirkning på i hvilken grad de klarte å gjøre seg nytte av læringspotensialet i samtalen. Elevenes trygghet, faglig og sosialt, så ut til å påvirke hvordan de framstod verbalt. Dette understøttes også av Dysthe (1995). Når elevene var trygge i situasjonen, så det ut til at de i større grad turte å sette ord på det de tenkte og slik bidra til faglig diskusjon. Analyser fra funnene indikerer at Kristian var trygg både faglig og sosialt. Dette kan ha ført til at han turte å sette ord på det matematiske, uten at han måtte være helt sikker på om det holdt helt faglig mål. Tora prøvde å forklare hva hun tenkte i mange situasjoner. Det så ut til at hun var sosialt trygg, men kanskje ikke like faglig trygg. Siri, derimot, virket lite trygg både faglig og sosialt (kap. 4.2.3.1), noe som kan være en forklaring på at hun i liten grad deltok i de faglige diskusjonene.

Ifølge Dysthe (1995, s. 63) vil den enkelte elevs opplevelse av hvordan det er å delta i diskusjoner, påvirke selvtilliten og tilliten en får til andre. Dette kan ha innvirkning på om en velger å ta steget ut i dialogsituasjoner (ibid., s. 63). Fra funnene ser en blant annet at i ett av tilfellene da Siri deltok i diskusjoner, fikk hun lite respons på det hun sa (Utdrag 7, kap. 4.1.2), og de to andre diskuterte ikke Siris forslag som et mulig alternativ. Dette kan muligens ha ført til at Siri opplevde at hennes bidrag ikke ble tatt på alvor, noe som igjen kan påvirke både den faglige og sosiale tryggheten. Situasjonen kan således ha gitt henne en følelse av å ikke mestre, noe som da påvirker hennes mestringsforventning (Bandura, 1977). Dette kan videre få følger for den faglige tryggheten. Det er grunn til å regne med at den sosiale tryggheten også ble svekket fordi hun kan ha opplevd å ikke bli regnet med. Dette kan igjen ha påvirket selvtilliten hennes samt tilliten til de andre.

Et annet moment er at manglende trygghet i tilknytning til dialog, kan kobles til elevenes motstand mot lærerens ønske om å etablere en ny didaktisk kontrakt (Brousseau, 2002; Jensen, 2005). Det kan være at Tora og Siri ikke er vant med å snakke matematikk. Kanskje har de i sin matematikkbakgrunn hovedsakelig en skriftlig praksis, noe som ser ut til å være vanlig (Brøyn, 2009). Det ser derimot ut til at Kristian er mer vant med å bruke det matematiske språket. Mine observasjoner, fra ordinær undervisning i forundersøkelsen, understøtter denne antagelsen. Kristian samarbeidet da med medelever om matematikkoppgaver, mens Tora og Siri arbeidet som regel individuelt. Dersom dette er arbeidsvaner de ofte benytter seg av, kan dette forklare at Kristian er mer trent med å benytte matematiske begreper i diskusjon. Denne øvelsen kan også ha lært ham å respondere slik en samtalepartner forventer. Dermed blir kommunikasjonen mer effektiv (Sfard & Kieran, 2001). Således kan dette også forklare at han tilsynelatende ikke gjør motstand mot en didaktisk kontrakt der det å snakke matematikk inngår.

Det at Siri i liten grad benyttet matematiske begreper da hun snakket, gjorde at det var vanskelig å støtte hennes begrepsforståelse gjennom dialog, jamfør "Stillas"- metaforen (Bruner, referert i Dysthe (1995, s. 55)). Siden Kristian derimot i stor grad benyttet matematiske begreper i forklaringene, ble det enklere for læreren å "bygge stillas" rundt hans begrepsforståelse. Han kunne få direkte tilbakemelding på det han tenkte, og videre gjøre viktige korrigeringer og koblinger i begrepsbildet sitt (Utdrag 2, 3 og 10). Det så også ut til at det å tenke høyt bidro til at Kristian klarte å gjøre viktige refleksjoner, slik at han kunne lage koblinger i begrepsnettverket (Utdrag 2 samt utsagn i kap. 4.2.1). Etter hvert viser Kristian større selvstendighet og forståelse, og trenger ikke det "støttende stillaset" fra hverken læreren eller medelever.

Et annet interessant funn er at Siri og Tora sjelden spurte andre i gruppen dersom det var noe de ikke forsto. Trolig var ingen av dem faglig og sosialt trygge nok til å kunne si hva de ikke forsto. De uttalte også få refleksjoner om sammenhenger knyttet til den andrederiverte, sammenlignet med Kristian. Viktigheten av refleksjon kan sees i sammenheng med Blomhøj og Kjeldsens (2010) funn om at refleksjon i tilknytning til egen begrepsforståelse underveis i modelleringsarbeidet er avgjørende for læringspotensialet. En konsekvens av at Tora og Siri tilsynelatende gjorde få begrepsmessige refleksjoner, er at de ikke fikk gjort viktige komprimeringer og koblinger mellom kognitive enheter, slik at deres begrepsbilde heller kunne bli noe diffust og segmentert (Barnard & Tall, 2001). Dette ser en i ulik grad igjen i de vekkede begrepsbildene deres (kap. 4.2.2.1 og kap. 4.2.3.1).

Til tross for at Kristian i stor grad var muntlig aktiv, ble samtalene ofte ikke *effektive* (Sfard & Kieran, 2001, s. 49) uten at læreren var tilstede. Siri og Tora ga i liten grad respons på Kristians uttalelser i modelleringsprosjektet. Kristian brukte også i mye større grad matematiske begreper i sine forklaringer, sammenlignet med Siri og Tora. Min tolkning av datamaterialet er derfor at elevenes diskurser var noe forskjellige. Det vil si at når Tora eller Siri svarte Kristian, var kanskje ikke disse svarene nok i samsvar med den diskursen som Kristian forventet. Samtalen vil da ikke bli effektiv (ibid). Siden Tora og Siri som mottakere sjelden kom "budskapet" i møte med en respons, er det heller ikke sikkert at de forsto det Kristian sa (Dysthe, 1995, s. 63).

Det ser ut til at de fleste dialogene som var effektive, var når læreren deltok som en samtalepartner. Lærerens innbringende dialog blir sett på som sentral for begrepsutviklingen også i andre modelleringsprosjekt (Blomhøj, 1993; Blomhøj & Kjeldsen, 2010). Læreren kan fungere som "stillas" for elevene i deres utvikling av begrepsforståelse (Bruner, referert i Dysthe (1995, s. 55)). Imidlertid ser en at Kristian i flere tilfeller tar på seg rollen som en "mer kompetent" og prøver å forklare de andre hvordan sammenhengen er (Samtale 5 og 9). På den måten prøvde han å støtte de andres forståelse av den andrederiverte. Det må likevel understrekes at det ser ut som lærerens støtte var det som så ut til å hjelpe mest.

Det autentiske aspektet

Analysen av datamaterialet indikerer at det autentiske aspektet har hatt en viktig rolle for påvirkningen av elevenes begrepsforståelse. Det mest sentrale ser ut til å være at elevene kunne koble den andrederiverte til en konkret situasjon og at de arbeidet med realistiske problemstillinger med kjente hverdagslige ord. Således kunne det abstrakte begrepet få en mer konkret betydning. Denne påvirkningen på begrepsforståelsen understøttes av funn fra Blomhøj (1993), Blomhøj og Kjeldsen (1993) og Zbiek og Conner (2006). Elevenes begrepsforståelse ble bygget på situerte læringsaktiviteter, noe som er i tråd med det konstruktivistiske synet og teorien om realistisk matematikkundervisning (kap. 1.4.2.1).

Konkretiseringen så i hovedsak ut til å skape trygghet for elevene. Selv om de ikke nødvendigvis forsto alt det matematiske, kunne de forholde seg til det autentiske (Utdrag 6 og 8). Det å ta utgangspunkt i de trygge hverdagslige begrepene, kan således gjøre at de opplevde de matematiske begrepene som mindre vanskelige.

På den andre siden ser det ut til at det autentiske aspektet var en faktor som også kunne skape forvirring og utrygghet. Ut fra Siris vekkede begrepsbilder i møte med den første oppgaven, ser en at hun skilte mellom "negativ akselerasjon" og "oppbremsing" (kap. 4.2.3.1). En mulig forklaring er at hun kanskje enda ikke hadde gjort nødvendige koblinger i begrepsnettverket sitt. En skulle imidlertid kunne anta at elevene gjorde denne koblingen etter Utdrag 3, da de diskuterte den hverdagslige bruken av begrepet akselerasjon. Det må imidlertid understrekes at for å gjøre en vertikal matematisering fra det situerte nivået til "referanse- nivået", kreves det at en gjør nødvendige refleksjoner om matematiske relasjoner (Gravemeijer & Stephan, 2002). Dette kan igjen kobles tilbake til funnene fra Blomhøj og Kjeldsen (2010) om viktigheten av refleksjon i modelleringsarbeidet for å bedre begrepslæring. Det er tydelig at refleksjon ser ut til å være helt essensielt for at elevene skal gjøre nødvendige koblinger i sitt begrepsnettverk.

En alternativ tolkning av Siris forvirring i tilknytning til de to begrepene, er at begrepenes hverdagslige betydning kan ha forvirret henne. Ifølge Vygostky, referert i Skott et al. (2008, s. 102), vil hverdagslige begreper utvikles fra konkrete hverdagslige sammenhenger. På et senere tidspunkt kan en bli bevisst den formelle betydningen. Etter min tolkning, kan en her dra en parallell til Siris forvirring. I hverdagslivet møter en begrepene akselerasjon og oppbremsing, og en tenker kanskje at disse begrepene ikke har så mye til felles. I et slikt tankesett kan en anta at oppbremsing og negativ akselerasjon ikke intuitivt skulle vært koblet til det samme begrepet "negativ andrederivert". Dette kan være en forklaring på Siris forvirring i tilknytning til begrepene.

En litt annen vinkling på den diskuterte problemstillingen, er at hverdagsbegrepene kan tolkes som å være en visualisering av det abstrakte begrepet "negativ andrederivert". Siris forvirring som kom fram i hennes vekkede begrepsbilder, kan da sees i sammenheng med funnene til Aspinwall et al. (1997) og Hollenberg (1970). Ifølge forfatterne kan visualisering påvirke begrepsforståelsen på en ukontrollert måte og det kan føre til vanskeligheter ved begrepslæringen. I et slikt lys kan en si at de hverdagslige begrepene noen ganger kan påvirke til et begrepsbilde som ikke stemmer overens med den formelle begrepsdefinisjonen.

Til tross for noen kritiske blikk på Siris forvirring om de to begrepene, må jeg understreke at det autentiske med modelleringsoppgavene i all hovedsak ser ut til å ha hatt en positiv påvirkning på begrepsforståelsen og på elevenes trygghet.

Arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit

De tre elevene var, i varierende grad, vant med å arbeide uten en kjent framgangsmåte eller fasit. Tora og Kristian hadde, i motsetning til Siri, erfaring med lignende modelleringsprosjekt. Fra forundersøkelsen fikk jeg informasjon om at læreren benyttet omvendt undervisning og generelt hadde fokus på å øve opp elevene til refleksjon og selvstendig tenkning. Læreren la også vekt på å vise elevene at matematikk ikke alltid har et fasitsvar og at prosessen i matematisk tenkning er det viktigste. Siri var forholdsvis ny i klassen, så de to andre hadde derfor i større grad fått muligheten til å bli vant med den didaktiske kontrakten (Brousseau, 2002) som læreren ønsket å etablere.

I intervjuet sa Siri at hun var vant med å ha en fasit tilgjengelig, og det virket som at hun var avhengig av støtte fra boken. Derfor var det trolig uvant for henne å måtte argumentere og diskutere seg fram til mulige løsningsmetoder. Antakelig var hun heller vant med å følge en kjent framgangsmåte. Det at elevene i ulik grad var vant med å arbeide uten en kjent framgangsmåte eller fasit, er noe som derfor ser ut til å ha påvirket til at Siri opplevde en større utrygghet sammenlignet med Tora og Kristian.

Til tross for at arbeidet uten en kjent framgangsmåte eller fasit ser ut til å ha påvirket elevenes trygghet i variabel grad, ser det ut til at arbeidet har vært fruktbart for begrepsforståelsen. Ved at de for eksempel måtte argumentere og begrunne det de valgte å gjøre, kunne dette styrke deres relasjonelle forståelse. Imidlertid kom det fram flere vekkede begrepsbilder fra både Siri og Tora som antyder at de hadde en instrumentell forståelse, både under modellerings-prosjektet og i møtet med nye oppgaver (kap. 4.2.4). Dersom de hadde forstått hvorfor sammenhengene var slik de var, ville ikke disse vekkede begrepsbildene ha oppstått. Funnene antyder derfor at det utforskende arbeidet med de autentiske modelleringsoppgavene kanskje ikke påvirket til at elevene utviklet en mer relasjonell forståelse, slik som ønsket. Det ser derimot ut til at både Tora og Siri har gjort generaliseringer som ikke er gjort på holdbart grunnlag (kap. 5.1). Dette kan i neste omgang føre til misoppfatninger (Brekke, 2002, s. 10), og en ser derfor at modelleringsarbeidet har hatt en uheldig påvirkning på begrepsforståelsen.

En alternativ tolkning er at en kan se på Tora og Siris forståelse som å være situert i den konkrete erfaringen fra modelleringen. Det kan derfor være at elevene har utviklet en mer relasjonell forståelse til den andrederiverte, men at denne forståelsen fortsatt er delvis situert i modelleringssituasjonen. Imidlertid viser Tora, i motsetning til Siri, at hun i stor grad gjør en horisontal matematisering i møte med den første oppgaven. Dette antyder at hun har gjort nødvendige koblinger og komprimeringer i begrepsnettverket, slik at hun klarte dette. Det ser ut til at Tora er på vei mot en mer relasjonell forståelse. Hverken Tora eller Siri klarte imidlertid å gjøre den vertikale matematiseringen, noe som krever en høyere abstraksjon og derfor en mer relasjonell forståelse.

Det er også generelt vanskelig å unngå at elever gjør overgeneraliseringer som videre kan utvikles til misoppfatninger. Overgeneralisering og utvikling av misoppfatninger er en naturlig del av barns utvikling (Brekke, 2002, s. 11). Derfor kan en argumentere for at selv om det er gjort funn om at to av elevene har gjort generaliseringer som ikke er gjort på holdbart grunnlag, trenger ikke dette å bety at modellering har en uheldig påvirkning på begrepsforståelsen. Slike overgeneraliseringer vil trolig skje ofte, etter hvert som en utvikler sin matematiske forståelse. Det som derimot er kritisk, er dersom elevene ikke oppdager disse potensielle konfliktfaktorene.

En alternativ tolkning av Tora og Siris tilsynelatende instrumentelle forståelse, er å se dette i lys av den didaktiske kontrakten (Brousseau, 2002). Dersom elevene tidligere har arbeidet mye instrumentelt i matematikk, kan det bli en vane å finne sammenhenger på en instrumentell måte. I modelleringsarbeidet kunne ikke elevene bruke en innarbeidet framgangsmåte for å derivere. Når elevene kun skulle se på grafen uten å ha derivert algebraisk, kan dette ha ført til at de ikke visste hvordan de skulle angripe problemet. Dette kan stemme med Tall og Vinners (1981) antagelse om at elever som får en instrumentell innlæring, kan oppleve utfordringer med å arbeide med problemer der en ikke kan benytte rutineferdigheter.

Dersom elevene tidligere har arbeidet mye instrumentelt, kan det for dem oppleves som et brudd på den didaktiske kontrakten å arbeide slik læreren ønsker. Ifølge Jensen (2005, s. 130) kan det ta lang tid å bygge opp igjen den didaktiske kontrakten dersom den blir brutt, dette fordi en vil møte motstand dersom en gjør endringer i kontrakten. Det kan også tenkes at disse endringene i seg selv bidrar til å skape utrygghet, faglig og sosialt. Elevene kan oppleve at læreren går bort fra de forventede rammene og forventningene om hvordan matematikkfaget skal være. Det å gå fjerne seg fra det trygge, kan trolig oppleves som skremmende. Samtidig ser en at Tora i større grad enn Siri deltar i faglige diskusjoner om hvilke løsningsmetoder som kan brukes. En mulig forklaring kan være at hun, i større grad enn Siri, er på vei mot å bygge opp den didaktiske kontrakten mellom henne og læreren. Hun har som tidligere nevnt også hatt lenger tid enn Siri på å bygge opp denne kontrakten.

Bruk av GeoGebra

Visualisering ved hjelp av GeoGebra ser ut til å ha vært en viktig støtte for påvirkningen av begrepsforståelsen. Ved å studere grafene, kunne elevene reflektere over sammenhenger mellom $f(x), f'(x)$ og $f''(x)$. På den måten kunne elevene bli trent opp til å fokusere på relasjonene mellom grafene, i stedet for å se på dem hver for seg slik mange studenter gjør (Nemirovsky & Rubin, 1992). Det ser ut til at GeoGebra har vært sentral for å bedre den grafiske forståelsen av den første- og andrederiverte, noe som samsvarer med tidligere forskning (Asiala et al., 1997; Bayazit et al., 2010; David Tall, 1989; Ubuz, 2007).

Trolig hadde GeoGebra likevel en variabel påvirkning på elevenes trygghet. På den ene siden kunne det støtte den faglige tryggheten, fordi de kunne se på grafene som støtte samtidig som de skulle forklare sammenhengen mellom dem. På den andre siden ser det ut til at den grafiske framstillingen også bidro til faglig utrygghet. Funnene antyder at elevene i forkant hadde god kunnskap om metodiske framgangsmåter for å derivere. I starten av prosjektet hadde de tilsynelatende begrenset kunnskap om grafene for den første- og andrederiverte. Dette er noe som ser ut til å være en utbredt utfordring for studenter (Bayazit et al., 2010; Orton, 1983). Det så ut til at elevene opplevde vanskeligheter med å forstå de grafiske representasjonene av den første- og andrederiverte, noe som kan sees i sammenheng med tidligere forskning (Aspinwall et al., 1997; Baker et al., 2000; Bayazit et al., 2010; Ubuz, 2007). Dette har trolig ført til faglig utrygghet.

I tillegg til at visualiseringen ved hjelp av hverdagslige begrep kunne virke forvirrende, ser det ut til at visualisering ved hjelp av grafene også kunne ha samme påvirkning. For eksempel gjorde alle elevene, som tidligere nevnt, en billedlig tolkning av grafene. Det ser også ut til at GeoGebra har hatt en "Black box"- effekt på Siris forståelse, noe som kan sees i sammenheng med Ubuz (2007, s. 631) sin påstand om at en ikke nødvendigvis trenger å forstå alt en gjør i GeoGebra. En trenger bare trykke på riktige knapper. Det var tydelig at hun først ikke skjønte at den grafiske framstillingen av den deriverte hadde en sammenheng med det hun kunne fra før om derivasjon. I utsagn 159 i Utdrag 12 (kap. 4.2.3) uttalte Siri at hun ikke husket hvordan hun fant topp- og bunnpunkt. Dette er noe hun antakelig hadde visst dersom hun hadde et algebraisk uttrykk, men i denne situasjonen forsto hun ikke hvordan hun skulle håndtere problemet. Dersom Siri ikke forsto at hun kunne se på $f'(x)$ som en funksjon som kunne representeres grafisk, kan dette forklare at det var vanskelig for henne å se en logisk sammenheng mellom den grafiske framstillingen til $f(x), f'(x)\ og\ f''(x)$ (Baker et al., 2000, s. 576). Det at det tok en del tid før Siri skjønte at det var en sammenheng mellom den grafiske og algebraiske framstillingen av den deriverte, kan antakelig ha ført til at hun ble forvirret og utrygg. Trolig forsto hun ikke så mye av det de andre snakket om da de pekte på grafene i GeoGebra, før hun selv så denne sammenhengen.

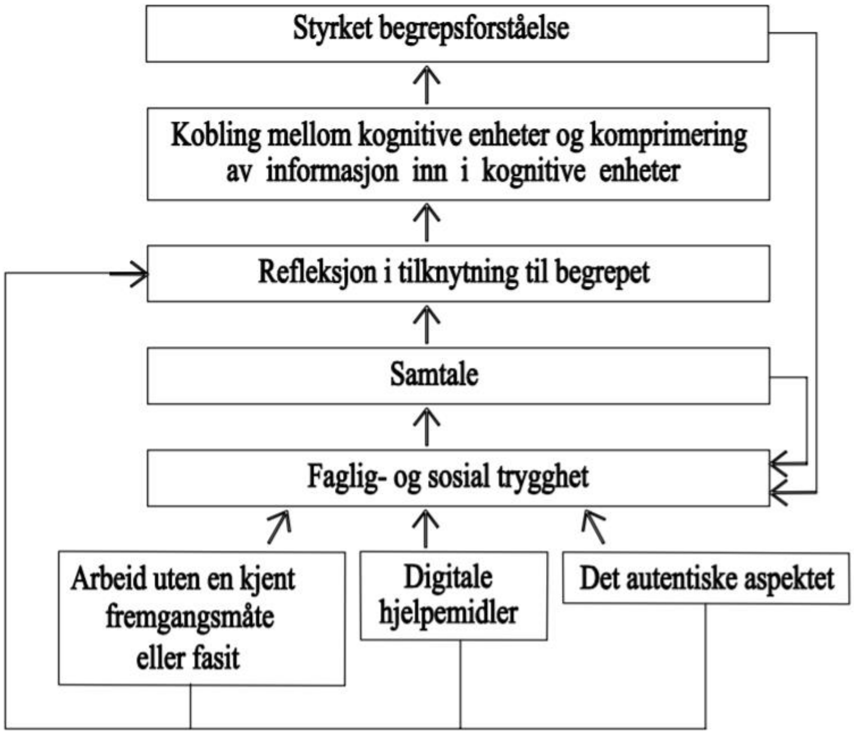
Det at visualiseringen i GeoGebra antakelig skapte forvirring for elevene, kan på den ene siden sees i sammenheng med Aspinwall et al. (1997) og Hollenberg (1970) som hevder at visualisering kan bidra til forvirring i stedet for å støtte begrepsforståelsen. På den andre siden vil jeg påstå at forvirringen som oppsto på bakgrunn av visualiseringen, er et helt sentralt element for påvirkningen av begrepsforståelsen. Det ser ut til at forvirringen bidro til å oppdage kognitive konfliktfaktorer. Tora og Kristians forvirring i forbindelse med de billedlige tolkningene av grafene, så ut til å gjøre at de fikk korrigert de vekkede begrepsbildene sine som ikke stemte med den formelle begrepsdefinisjonen. Forvirringen Siri opplevde i forbindelse med den grafiske og algebraiske representasjonen om den deriverte, var også et viktig moment for at hun senere gjorde koblinger mellom kognitive enheter.

Jeg vil likevel framheve at det ser ut til at GeoGebra spesielt har påvirket Siris utrygghet både faglig og sosialt. Hun gjorde både en billedlig tolkning av grafene og ble forvirret av grafene til den deriverte (kap. 4.2.3). I tillegg hadde hun ikke like mye erfaring med programmet som de to andre. Hun gjennomførte likevel alt i programmet og fikk god støtte fra de andre elevene. Likevel kan det være at hun ble usikker og at det kan ha ført til at hun i mindre grad deltok i samtaler der GeoGebra var sentralt. Et annet moment er at det kan tenkes at hun i modelleringsarbeidet har brukt mye oppmerksomhet på å forstå det som ble gjort i GeoGebra, slik at hun i mindre grad klarte å holde oppmerksomheten knyttet til begrepet den andrederiverte.

Oppsummert har elevene i modelleringsprosessen arbeidet grundig med grafiske representasjoner for den første- og andrederiverte. Dette ser ut til å ha bidratt til en variabel grad av trygghet. Jeg vil imidlertid påstå at selv om det ser ut til at bruken av GeoGebra kan ha bidratt til en svekket trygghet ved å skape forvirring, har dette også vært helt sentralt for å bedre begrepsforståelsen. På denne måten ble elevene dradd ut av "komfortsonen" og fikk utfordret sin forståelse. Dette er et viktig moment for å kunne utvikle begrepsbilder gjennom kognitive konflikter, slik at begrepsbildene i større grad kan samsvare med den formelle begrepsdefinisjonen.

Den komplekse påvirkningen på begrepsforståelsen

Fra diskusjonen over ser en at de ulike faktorene trolig har påvirket elevenes faglige og sosiale trygghet på ulike måter. Trygghet ser ut til å være en sentral faktor for om elevene tør å ta steget ut i samtalen. Dersom elevene ikke er trygge nok, kan de bli passive tilskuere. Da kan det være at de ikke får gjort nødvendige refleksjoner som videre kan bidra til en utvidet begrepsforståelse. For å bedre forståelsen av den andrederiverte, vil det derfor være essensielt at elevene opplever trygghet innenfor de fire faktorene; Samtalen, det autentiske aspektet, bruk av GeoGebra som digital graftegner og arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit. Jeg har samlet mine funn i en modell, der jeg har gjort et forsøk på å få fram den komplekse påvirkningen modelleringsarbeidet har på begrepsforståelsen (Figur 15). Funnene i studien kan som tidligere nevnt ikke generaliseres, siden studien kun er gjort på tre elever og at datainnsamlingen har vært begrenset. Likevel har jeg valgt å presentere modellen i Figur 15 på en generell måte, der "den andrederiverte" er blitt erstattet av "begrepet" og "GeoGebra" med "Digitale hjelpemidler". Dette er gjort fordi jeg antar at modellen kan være aktuell også for andre modelleringsprosjekt. Det er brukt "Digitale hjelpemidler" og ikke "Digital graftegner", fordi det ofte i modelleringsprosjekt blir brukt grafiske hjelpemidler som ikke nødvendigvis er en digital graftegner.



Figur 15:Sammenhengen mellom hvordan begrepsforståelsen ser ut til å bli påvirket av de fire faktorene; Samtalen, det autentiske aspektet, digitale hjelpemidler og arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit.

Elevenes samtale har i mine funn vist seg å ha en sentral rolle for påvirkningen av forståelsen av den andrederiverte. Derfor har "Samtale" en sentral plassering i modellen vist i Figur 15, noe som også kan understøttes av et sosialkonstruktivistisk syn. Samtidig kan også de ulike faktorene; digitale hjelpemidler, arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit, og det autentiske aspektet påvirke begrepsforståelsen mer direkte, uten nødvendigvis å gå gjennom påvirkningen av trygghet og samtalen. Dette kan begrunnes med at elevene kan gjøre viktige refleksjoner uten å måtte gjennomføre en samtale. Derfor går det også piler fra disse faktorene og direkte opp til "Refleksjon i tilknytning til den andrederiverte". Det er også laget piler fra den styrkede begrepsforståelsen og fra samtalen som går ned igjen til den faglige og sosiale tryggheten. Dette er fordi disse faktorene også ser ut til å påvirke den faglige tryggheten, på grunnlag av funn og teori.

5.3 Kritiske betraktninger

I dette underkapittelet vil jeg gjøre rede for noen kritiske betraktninger om studiens funn, analysevalg og innsamlingsmetoder.

En kan være noe kritisk til studiens funn om elevenes horisontale og vertikale matematisering[22]. Disse funnene kunne vært annerledes dersom en for eksempel hadde valgt andre oppgaver, da oppgaveformuleringen kan ha vært med å forvirre dem. Intervjusettingen i seg selv kan også virke stressende, noe som kan ha påvirket konsentrasjonen deres. Tidspunktet da intervjuet ble gjennomført vil også spille en viktig rolle for hvordan disse resultatene ble. Dersom jeg hadde intervjuet elevene dagen etter at de var ferdige med prosjektet, kunne kanskje elevene klart oppgavene bedre. På den andre siden kunne en fått svakere resultat dersom intervjuet hadde blitt gjort senere. Elevene ville da kanskje ha glemt moment som de lærte i modelleringsprosjektet. Det er derfor viktig å legge vekt på at funnene mine kun viser hvordan elevene klarte å anvende den kunnskapen de hadde lært for de spesifikke oppgavene som ble gitt, i den konteksten de ble gitt i.

En kan også forholde seg kritisk til studiens funn om de fire faktorene som påvirker forståelsen av den andrederiverte. Det at akkurat disse faktorene var sentrale i studien, kan ha en sammenheng med hvordan modelleringsoppgaven ble utformet. Dersom utformingen hadde vært annerledes, kunne kanskje andre faktorer blitt vektlagt. For min studie ble faktoren "GeoGebra" sentral fordi det var ønskelig å bedre forståelsen av den andrederiverte. Med et fokus på andre begreper, behøver ikke bruken av GeoGebra eller digitale hjelpemiddel å ha en like sentral påvirkning på forståelsen.

Trolig er det også flere faktorer som påvirker begrepsforståelsen, men som ikke har vært i fokus i denne studien. Det vil antakelig spille en rolle hvordan den enkelte elev lærer best og i hvilken grad de har ulike typer intelligenser (Davis, Christodoulou, Seider, & Gardner, 2011). Dette er også noe som kan påvirke læringsutbyttet til ulike elever i et modelleringsprosjekt. Alle elever trenger ikke å lære like godt av å arbeide med modellering og gruppearbeid.

Fokuset på de fire faktorene som påvirket elevenes begrepsforståelse, har vært sentralt i funnene mine. Siden "faglig og sosial trygghet" ser ut til å være en overordnet faktor, burde kanskje denne også vært inkludert som en egen hovedkategori i analysen, en femte kategori.

[22] Funnene viste at Kristian klarte å gjøre både en horisontal og vertikal matematisering. Tora klarte med støtte å gjøre en horisontal matematisering, men ikke en vertikal matematisering. Siri klarte hverken å matematisere horisontalt eller vertikalt.

På samme måte kan en argumentere for at "refleksjon" også kunne vært en slik faktor, da denne også har en sentral plassering i modellen i Figur 15. Videre kan en også argumentere for at "det matematiske aspektet" kunne vært en påvirkningsfaktor. Det å se på det matematiske aspektet som en faktor, kan sees i sammenheng med funn fra studien til Zbiek og Conner (2006). De har valgt å se på hvordan den matematiske forståelsen har endret seg innenfor; den ekte verden, *den matematiske verden*, og elevenes samarbeid. Begrunnelsen for å se på det matematiske aspektet som en faktor er at en i enkelte samtaleutdrag fra funnene ser at den viktigste påvirkningen på begrepsforståelsen ser ut til å være matematikken i seg selv. I min studie ser en at dette kan gjelde i Utdrag 4 og 5. Oppgave 4e kunne også vært en vanlig matematisk oppgave, dersom en ser bort fra at elevene skulle forklare modellene til en "journalist". I møte med denne oppgaven, måtte elevene først forstå sammenhengen rent matematisk, før de begynte å skulle forklare det mer praktisk. Det matematiske innholdet som ble lært, ser ut til å være frikoblet fra den autentiske situasjonen i stor grad. Jeg stiller meg likevel kritisk til at det som ble lært, vil være helt frikoblet fra den autentiske situasjonen. En ser for eksempel at elevene mente at det å skulle forklare sammenhengen mellom modellene til en "journalist" var svært lærerikt, fordi de da måtte bruke sitt eget vokabular til å beskrive det matematiske. Det autentiske ser derfor ut til å ha forsterket den matematiske forståelsen.

En felles argumentasjon for at "trygghet", "refleksjon" og "det matematiske aspektet" ikke behøver å være egne kategorier i analysen, er at de inngår i de fire andre faktorene. De kan ikke sees som en selvstendig påvirkningsfaktor i seg selv, slik som de fire faktorene kan. Jeg har tidligere diskutert hvordan tryggheten er tett knyttet til de fire faktorene. Refleksjon vil også være knyttet til disse, da det kommer fram at refleksjon generelt er helt nødvendig for å bedre begrepsforståelsen. Det matematiske aspektet vil også gå inn i de fire faktorene. Det vil naturlig inngå i modelleringsprosessen fordi "matematisk analyse" er en av delprosessene i modelleringsprosessen (Figur 1).

Når det gjelder datainnsamlingen, kunne denne vært gjort annerledes for å styrke kvaliteten i studien. Funnene viste at modelleringsarbeidet trolig hadde svært ulik påvirkning på begrepsforståelsen for de tre elevene. Dersom en kunne gjennomført datainnsamling med flere elever, kunne en fått mer informasjon og fått større mulighet til å se trender i funnene. Et annet moment er at det kunne vært interessant å følge de samme elevene i flere modelleringsprosjekt. På den måten kunne en i større grad fått et innsyn i hvordan begrepsforståelsen deres ble utviklet over tid.

En kunne også tatt hensyn til flere kilder i datainnsamlingen. Blant annet kunne en tatt mer hensyn til elevenes tidligere vurderinger i faget. Det kunne blitt samlet inn tidligere prøvebesvarelser for i større grad å få innsyn i elevenes forkunnskaper. Det å observere elevenes tidligere samarbeid i grupper, kunne også vært aktuelt for å vite hvordan elevene tidligere hadde interagert i en gruppesituasjon.

Et siste kritisk blikk på egne funn, er at oppgaven ikke går tilstrekkelig teoretisk i dybden for hver av de fire faktorene og om modellering. Med et bredere og dypere litteraturstudie, ville jeg sett på funnene gjennom andre "briller".

6 Avsluttende konklusjoner

Utgangspunktet for masterstudien var å nærmere studere elevers begrepsforståelse i arbeidet med autentiske modelleringsoppgaver. Problemstillingen var som følger: *"Hvordan kan arbeid med en autentisk modelleringsoppgave påvirke begrepsforståelsen i matematikk, eksemplifisert ved begrepet "den andrederiverte"?"*

For å svare på denne problemstillingen lagde jeg meg følgende forskningsspørsmål:

1. Hvilke faktorer som påvirker forståelsen av den andrederiverte, er det mulig å observere i modelleringsarbeidet? Hvordan foregår denne påvirkningen?
2. Hvilke bevisste overflateoppfatninger har elevene om hvordan deres forståelse av begrepet den andrederiverte ble påvirket i løpet av modelleringsarbeidet?
3. Hvilke begrepsbilder blir vekket i møte med nye oppgaver om den andrederiverte, i etterkant av modelleringsarbeidet?

Fra det teoretiske grunnlaget, forundersøkelsen og analysearbeidet, ble det fokusert på fire faktorer som ser ut til å ha påvirket forståelsen av den andrederiverte; Samtalen, det autentiske aspektet, arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit og bruk av GeoGebra som digital graftegner. For å undersøke hvordan disse faktorene påvirket forståelsen, er det gjort analyser av samtaleutdrag fra modelleringsarbeidet og av elevenes bevisste overflateoppfatninger som kom fram under intervjuet. Det er identifisert og analysert flere situasjoner der det ser ut til at begrepsforståelsen har blitt påvirket av de fire faktorene. Det å delta i samtaler ser ut til å kunne påvirke begrepsforståelsen dersom en gjør viktige refleksjoner i tilknytning til begrepene som omhandles. Det autentiske med modellering bidrar til en konkretisering, slik at de matematiske begrepene i større grad kan gi mening fordi de knyttes direkte til elevenes erfaringer. Den tredje faktoren, arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit, gjør at elevene i større grad må tenke over hvordan de skal løse problemet og derfor kreves det at en må forstå hva begrepene betyr. For den siste faktoren, bruk av digital graftegner, gir denne en spesiell mulighet til visualisering av begreper.

Funnene indikerer at de fire påvirkningsfaktorene har potensiale for å bedre forståelsen av den andrederiverte. Trolig er refleksjon underveis i modelleringsarbeidet helt essensielt for å utnytte dette læringspotensialet, noe som understøttes av funnene fra Blomhøj og Kjeldsen (2010). De tre elevene i studien har i ulik grad vist refleksjon i tilknytning til den andrederiverte i løpet av datainnsamlingen. Ved refleksjon kan en gjøre nødvendige koblinger mellom kognitive enheter og en kan komprimere informasjon inn i kognitive enheter. På den måten kan en få bedre oversikt over begrepsbildet sitt. Dette kan føre til at det senere vil bli enklere å hente fram relevant informasjon når dette er nødvendig (Barnard, 1998).

Et annet viktig resultat er at elevenes faglige og sosiale trygghet ser ut til å være en overordnet faktor for påvirkningen av begrepsforståelsen. For at elevene skal kunne ta steget ut i samtalen, er det essensielt at elevene er trygge innenfor de fire faktorene. På den måten kan de på best mulig måte utnytte læringspotensialene som dialogen har; blant annet å skape kollektive refleksjoner i gruppen.

Funnene fra elevenes møte med nye oppgaver, ga meg innsyn i elevenes evne til å anvende det de hadde lært i modelleringsprosjektet. Fra elevenes vekkede begrepsbilder, ser en at i hvert fall to av elevene klarte å benytte seg av de tidligere erfaringene i ulik grad (5.1). Det ser også ut til at den ene eleven (Kristian) i løpet av modelleringsprosjektet hadde gjort viktige korrigeringer i sitt begrepsbilde og komprimert informasjon inn i kognitive enheter som er koblet til andre slike. Det at han tilsynelatende har fått oversikt over sitt begrepsbilde, i møtet med de nye oppgavene, kan sees i sammenheng med at han i modelleringsprosjektet hele tiden reflekterte over sammenhenger i tilknytning til den andrederiverte.

De to andre elevene har ikke fått like god oversikt over sitt begrepsbilde som Kristian. I møtet med de nye oppgavene kom det fram flere vekkede begrepsbilder som ikke stemte overens med den formelle begrepsdefinisjonen. Dette er trolig fordi de enda ikke hadde gjort nødvendige koblinger i sine begrepsnettverk og komprimert informasjon inn i kognitive enheter. Forståelsen de viste, ser ut til å være situert til den konkrete erfaringen fra modelleringsoppgavene. Gjennom framtidig erfaring med nye problem om den andrederiverte, kan det utvikles flere koblinger og således kan elevene komprimere denne informasjonen inn i kognitive enheter. Ved å fortsette å komprimere informasjon og gjøre koblinger mellom enheter, kan en etter hvert utvikle en bedre struktur i tenkningen (Barnard & Tall, 1997).

På bakgrunn av analysen av datamaterialet, har det blitt identifisert noen "uheldige" påvirkninger på forståelsen av den andrederiverte. Det er identifisert noen vekkede begrepsbilder som kan utvikle seg til misoppfatninger. Disse funnene er diskutert, og et viktig moment er at det generelt i matematikkundervisningen kan være vanskelig å unngå at misoppfatninger utvikles (Brekke, 2002, s. 11). En annen "uheldig" påvirkning er at hverdagslige begreper og visualisering ved hjelp av GeoGebra kan føre til forvirring. Jeg har argumentert for at forvirringen i tilknytning til GeoGebra er noe som har vært viktig for å utfordre begrepsforståelsen, og som derfor har vært viktig for å utvikle denne. Med bakgrunn i mine funn vil jeg derfor mene at modellering åpner opp for gode muligheter for begrepslæring. Samtidig må en være bevisst på uheldige effekter og prøve å håndtere disse.

Uansett i hvilken grad elevenes forståelse av den andrederiverte har blitt påvirket i løpet av modelleringsprosjektet, har elevene fått en situert erfaring med begrepet, knyttet til en autentisk situasjon. Denne erfaringen kan brukes til videre å konstruere mer matematisk kunnskap om den andrederiverte. I møtet med begrepet i nye situasjoner, kan elevene gjøre koblinger til det de erfarte i modelleringsprosjektet. På den måten kan de videre styrke koblinger mellom kognitive enheter og opprette nye slike koblinger. Ved å komprimere informasjon om den andrederiverte inn i kognitive enheter, kan elevene i større grad klare å bruke det de har lært i møte med nye oppgaver. Dette arbeidet kan gjøres ved en interaksjon mellom horisontale og vertikale matematiseringer. Således kan elevene utvikle mer abstrakt kunnskap og de kan få en bedre forståelse av den andrederiverte. En kan anta at dette vil fungere på en lignende måte for andre matematiske begreper.

6.1 Implikasjoner for undervisning

Resultat og diskusjon viser at de tre elevenes begrepsforståelse ble påvirket på forskjellige måter og at påvirkningen var kompleks (Figur 17). Selv om modellering har et stort potensial for læring, trenger derfor ikke dette potensialet bli realisert i like stor grad for alle elever. En bør derfor være oppmerksom på at påvirkningen modelleringen har på begrepsforståelsen, kan variere betraktelig. Et viktig moment er derfor hvordan en som lærer kan legge til rette for å øke modelleringsarbeidets positive påvirkning på begrepsforståelsen.

Et viktig funn i denne sammenhengen er at lærerens innbringende dialog ser ut til å ha en sentral innvirkning for elevenes begrepsinnlæring. Læreren har en viktig rolle med å stille utfordrende spørsmål, slik at elevene kan oppdage kognitive konfliktfaktorer og slik at de kan gjøre koblinger i begrepsnettverket sitt.

Et annet moment som trolig kan påvirke begrepsforståelsen i positiv grad, er å bygge opp elevenes trygghet i forkant av et modelleringsprosjekt. Modelleringsoppgavene i studien var faglig utfordrende og mer utforskende enn det elevene var vant med. For å styrke elevenes trygghet, kunne elevene på forhånd arbeidet mer med å løse matematikkproblemer uten en kjent framgangsmåte eller fasit, fått flere erfaringer med autentiske matematikkproblem og øvd på relevant bruk av GeoGebra.

Det å trene på å benytte matematiske begreper i diskusjoner der elevene har faglig kontroll, kan også være med på å bygge trygghet i gruppediskusjoner. Her vil trolig elevene oppleve å mestre det faglige, noe som kan påvirke deres mestringsforventning (Bandura, 1977). Således kan den faglige tryggheten styrkes. Slike diskusjoner kan også styrke den sosiale tryggheten, dersom elevene opplever tillit og respekt i gruppen (Dysthe, 1995, s. 63). Et sentralt element i denne sammenhengen er å gjøre elevene trygge nok sosialt i ulike gruppesammensetninger. Dersom en øver på å snakke faglig i ulike grupper, kan dette trolig minimere utfordringene med sosial utrygghet. Elever med en viss porsjon faglig og sosial trygghet, vil sannsynligvis tørre å ta steget ut i diskusjoner. Dersom de da gir respons på det som blir sagt i diskusjoner, kan forståelse og mening oppstå etter Bakhtins synspunkt (Dysthe, 1995, s. 64).

Fra studiens funn ser en at elevene sjelden sa fra når det var noe de ikke helt forsto. Derfor ønsker jeg å legge fram et siste punkt læreren kan være bevisst på; nemlig å formidle at en setter pris på at elevene setter ord på det de ikke forstår. Det bør være rom for både å tenke og si feil. Det er nettopp det en gjør når en utforsker matematiske relasjoner. Elevene bør også lære at matematikk ikke alltid har et fasitsvar. Det kan også være et diskusjonsfag der det kan være rom for tolkning. Dersom elevene kan godta en slik didaktisk kontrakt (Brousseau, 2002), kan dette trolig hjelpe dem å ta steget ut i diskusjonene.

Dersom læreren fokuserer på de nevnte momentene, og integrerer dette i sin undervisning som en del av undervisningens didaktiske kontrakt, vil det trolig øke påvirkningen som autentiske modelleringsoppgaver kan ha på elevers begrepsforståelse. Dersom elevene kan oppleve en større trygghet innenfor de fire faktorene, kan dette bidra til at modelleringsarbeidet skiller seg mindre fra den ordinære undervisningens didaktiske kontrakt. Samtidig må en være oppmerksom på at det å endre den didaktiske kontrakten er noe som kan ta tid (Jensen, 2005).

6.2 Veien videre

I min studie er det gjort funn om hvordan de fire faktorene påvirket forståelsen av den andrederiverte; Samtalen, det autentiske aspektet, arbeid uten en kjent framgangsmåte eller fasit og bruk av GeoGebra som digital graftegner. For videre studier hadde det vært interessant å gå i dybden på de ulike faktorene. På den måten får en anledning til å gå mer i dybden teoretisk, i motsetning til denne studien som har et bredere teoretisk grunnlag.

Et annet moment som kunne vært interessant, er å benytte andre teorier som analyseverktøy. Analysen i denne studien er i hovedsak basert på et begrepsapparat fra Tall og Vinner (1981), Barnard (1998) og Barnard og Tall (1997). Ved for eksempel å benytte APOS- teorien og skjema- metaforen, slik som Baker et al. (2000), kunne dette gitt andre interessante analyser og synsvinkler på datamaterialet. Da kunne en for eksempel kategorisert elevenes begrepsforståelse.

For min del blir veien videre å starte opp i læreryrket. Her ønsker jeg å ta med meg det jeg har lært i masterprosjektet og inkludere autentisk modellering i undervisningen. Jeg ønsker å fokusere på momentene som jeg har lagt fram i kapittel 6.1 og undersøke hvordan dette kan påvirke begrepslæring. En mulighet er å forske på og stadig utvikle modellering som en del av undervisningspraksisen ved å gjennomføre aksjonsforskning. Med denne forskningen kan jeg også studere andre aspekt ved modelleringsprosjektet enn begrepsforståelse; for eksempel fokus på kritisk demokratisk kompetanse eller fokus på modellering i tverrfaglig sammenheng.

7 Litteraturliste

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2006a). Læring mellem dialog, intention, refleksion og kritik. In O. Skovsmose & M. Blomhøj (Eds.), *Kunne det tænkes?- Om matematiklæring* (pp. 127-138). Denmark: Forlag Malling Beck.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2006b). Undersøgende samarbejde i matematikundervisning-Udvikling af IC-modellen. *Kunne det tænkes?- Om matematiklæring* (pp. 110-126). Denmark: Forlag Malling Beck.

Andresen, M., & Lindenskov, L. (2009). New roles for mathematics in multi-disciplinary, upper secondary school projects. *ZDM Mathematics Education, 41*, 213-222. doi:10.1007/s11858-008-0122-z

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational studies in mathematics, 33*, 301-317.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 557-578.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review, 84*(2), 191-215. doi:10.1037/0033-295X.84.2.191

Barnard, T. (1998). Compressed units of mathematical thought. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 401-404.

Barnard, T., & Tall, D. (1997). Cognitive units, connections and mathematical proof. *2*, 2-41.

Barnard, T., & Tall, D. (2001). A comparative study of cognitive units in mathematical thinking.

Bayazit, İ., Aksoy, Y., & İlhan, O. A. (2010). *GeoGebra as an instructional tool to promote students' operational and structural conception of function.* Paper presented at the Proceedings of the First North American GeoGebra Conference.

Befring, E. (2012). *Skolen for barnas beste : kvalitetsvilkår for oppvekst, læring, utvikling* (Rev. utg. ed.). Oslo: Samlaget.

Blomhøj, M. (1993). Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber. *Nordisk matematikdidaktikk, 1*(1), 18-38.

Blomhøj, M. (2003). Modellering som undervisningsform. In O. Skovsmose & M. blomhøj (Eds.), *Kan Det Virkelig Passe?* København: L&R Uddannelse.

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. In O. Skovsmose & M. Blomhøj (Eds.), *Kunne Det Tænkes?* Denmark: Forlag Malling Beck.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, *22*(3), 123-139. doi:10.1093/teamat/22.3.123

Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2010). Learning mathematics through modelling—The case of the integral concept *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education* (Vol. 42, pp. 569-581). United States of America: Information Age Publishing Incorporated & The Montana Council of Theachers of Mathematics.

Blomhøj, M., & Skånstrøm, M. (2006). Matematik Morgener-matematisk modellering i praksis. In O. Skovsmose & M. Blomhøj (Eds.), *Kunne Det Tænkes?* Denmark: Forlag Malling Beck.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 37-68.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* Retrieved from http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/Bestillingstorg/PDF/59447_KAR_MAT_007_innmat.pdf

Brekke, M., & Tiller, T. (2013). *Læreren som forsker: innføring i forskningsarbeid i skolen*: Universitetsforlaget.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* N. Balacheff (Ed.) *Didactique des mathâematiques, 1970-1990* Retrieved from http://ebookcentral.proquest.com/lib/bergen-ebooks/reader.action?docID=3035563

Brøyn, T. (2009). Muntlige ferdigheter i matematikk- Å snakke seg til forståelse. *Bedre skole, 4*, 64-65.

Campus Inkrement. (u.å.). Krumming og vendepunkter [Videoklipp]. Retrieved from https://campus.inkrement.no/310728413/1059627

Davis, K., Christodoulou, J., Seider, S., & Gardner, H. (2011). The theory of multiple intelligences. *The Cambridge handbook of intelligence*, 485-503.

Doorman, L. M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*: CD-β Press, Center for Science and Mathematics Education.

Dysthe, O. (1995). *Det flerstemmige klasserommet: Skriving og samtale for å lære*. Oslo: Ad Notam Gyldendal

Erfjord, I. (2005). Matematisk modellering. Kirfel, C.(Red.), Tangenten: Inspirasjonsbok for matematikklærere.(s. 115-121). Bergen: Caspar Forlag.

Evenshaug, O., & Hallen, D. (2000). *Barne- og ungdomspsykologi* (4. utg. ed.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. *Mathematical Association of America*, 31-46.

Galbraith, P. (2007). Authenticity and goals—overview. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 181-184): Springer.

Global Carbon Atlas. (2016). CO2 Emissions. Retrieved from http://www.globalcarbonatlas.org/en/CO2-emissions

Gold, R. L. (1958). Roles in sociological field observations. *Social forces*, 217-223.

Gravemeijer, K., & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169): Springer.

Hall, J. L., Thomas. (2014). *Handbok för matematisk modellering med GeoGebra- Att undervisa mot förmågorna*. Spania: Studentlitteratur.

Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner*. Bergen: Caspar.

Hansen, R. (2010). Modeller, miljø og kritisk demokratisk kompetanse. *Tangenten, 3*, 2010.

Hashemi, N., Abu, M. S., Kashefi, H., & Rahimi, K. (2014). Undergraduate students' difficulties in conceptual understanding of derivation. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 143*, 358-366.

Hollenberg, C. K. (1970). Functions of Visual Imagery in the Learning and Concept Formation of Children. *Child Development, 41*(4), 1003-1015. doi:10.2307/1127328

Jensen, A.-M. (2005). Mia- en taper i matematikk? In C. Kirfel (Ed.), *Tangenten-inspirasjonsbok for matematikklærere* (pp. 129-134.). Bergen: Caspar Forlag.

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Christoffersen, L. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. ed.). Oslo: Abstrakt forlag.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 196-208.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—Examples and Experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 51-76. doi:10.1007/s13138-010-0001-3

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302-310. doi:10.1007/BF02652813

Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2010). Mathematical modelling as goal in mathematics education-developing of modelling competency through project work *First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education* (Vol. 41, pp. 555-567). United States of America: Information Age Publishing Incorporated & The Montana Council of Theachers of Mathematics.

Kunnskapsdepartementet. (2006a). *Læreplan i fordypning i matematikk (MAT7-01)*. Oslo Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT7-01.

Kunnskapsdepartementet. (2006b). *Læreplan i matematikk 2P (MAT5-03)*. Oslo Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT5-03.

Kunnskapsdepartementet. (2006c). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Oslo Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT1-04.

Kunnskapsdepartementet. (2006d). *Læreplan i matematikk for realfag- Programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01)*. Oslo Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT3-01.

Kunnskapsdepartementet. (2006e). *Læreplan i matematikk for samfunnsfag- Programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT4-01)*. Oslo Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT4-01.

Kunnskapsdepartementet. (2006f). *Læreplan i matematikk X- programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT2- 01)*. Oslo Retrieved from https://www.udir.no/kl06/MAT2-01.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsinterview som håndværk* (3. ed.). Oslo: Gyldendal Akademisk Forlag.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning : legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mellin-Olsen, S. (1996). Oppgavediskursen i matematikk. *Tangenten, 2*.

Nemirovsky, R., & Rubin, A. (1992). Students' Tendency To Assume Resemblances between a Function and Its Derivative.

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforlaget.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). Matematiske kompetencer på det almene gymnasium. In M. Niss & T. H. Jensen (Eds.), *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. 18, pp. 241-270): Undervisningsministeriet.

NOAA. (u.å.). Annual Mean Growth Rate for Mauna Loa, Hawaii. Retrieved from https://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/gr.html

Norsk senter for forskningsdata. (u.å). Informasjon og samtykke. Retrieved from http://www.nsd.uib.no/personvernombud/hjelp/informasjon_samtykke/

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational studies in mathematics, 14*(3), 235-250.

Palm, T. (2002). *The realism of mathematical school tasks: Features and consequences.* Umeå universitet, Matematiska institutionen.

Palm, T. (2007). Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 201-208): Springer.

Pehkonen, E. (2003). Lærere og elevers oppfatninger som en skjult faktor i matematikkundervisningen (pp. 154-181). Bergen: Fagbokforlaget.

Personopplysningsloven. (2000). *Lov 14. april 2000 nr 31 om behandling av personopplysninger*.

Polya, G. (1957). *How to Solve it: A New Aspects of Mathematical Methods*. New Jersey: Princeton University Press.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. ed.). Oslo: Universitetsforlaget.

Rincon, L. F. (2009). *Designing dynamic and interactive applications using Geogebra software in the 6–12 mathematics curriculum.* Kean University.

Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76. doi:10.1207/S15327884MCA0801_04

Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, Learning, and Action- A Foundation for Theory and Practice in Education*. Chichester, New York, Brisbane, Toronto: John Wiley & Sons.

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95.

Skott, J., Hansen, H. C., & Jess, K. (2008). *Delta: fagdidaktik*. Denmark: Forlaget Samfundslitteratur.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. In O. Skovsmose & M. Blomhøj (Eds.), *Kan Det Virkelig Passe?* København: L&R Uddannelse.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap : best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

Tall, D. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics.* University of Warwick.

Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the learning of mathematics, 9*(3), 37-42.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *An International Journal, 12,* 151-169.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus *Learning Mathematics* (pp. 125-170). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis.* (3. ed.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Trelinski, G. (1983). Spontaneous mathematization of situations outside mathematics. *Educational studies in mathematics, 14,* 275-284.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(5), 609-637.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, pp. 195-213). United States of America: Mathematical Association of America.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society : The development of higher psychological processes* (M. Cole, J.-S. Vera, S. Sylvia, & S. Ellen Eds.). Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Wæge, K. (2008). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning.* Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, Trondheim.

Yerushalmy, M. (1997). Mathematizing verbal descriptions of situations: A language to support modeling. *Cognition and Instruction, 15*(2), 207-264.
Zakaria, E. (2012). The effect of GeoGebra on students' conceptual and procedural knowledge of function. *Indian Journal of Science and Technology, 5*(12), 104-109.
Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond Motivation: Exploring Mathematical Modeling as A Context for Deepening Students' Understandings of Curricular Mathematics. *An International Journal, 63*(1), 89-112. doi:10.1007/s10649-005-9002-4
Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (Vol. 19, pp. 127-137). United States of America: Mathematical Association of America.

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1: Modelleringsoppgavene som ble gitt til elevene

Kommentarer:

- Oppgave 1-3 på del A omhandler ikke den andrederiverte. I metodedelen ble disse oppgavene beskrevet som innledende oppgaver.
- Modelleringsoppgavene ble for tidkrevende i forhold til hvor mange timer elevene kunne arbeide med dem på skolen. Derfor ble deler av oppgavene ikke gjennomført. Elevene gjennomførte oppgave 4 på del A kun med en av modellene fra oppgave 3. I tillegg ble det ikke nok tid til å gjøre oppgave 2 på del B.

Problematikken med økt CO_2-utslipp og økt CO_2- innhold i atmosfæren

Figur 1: Bildet er tatt av Ian Britton https://flic.kr/p/t8Kifv

Figur 2: Bildet er tatt av Uwe Schwarzbach https://flic.kr/p/t8Kifv

Del A: CO_2-utslipp i Norge. Totalutslipp mellom 1960 og 2015

I det globale karbonatlaset (http://www.globalcarbonatlas.org/en/CO2-emissions) finnes det oversikter over mengde utslipp av karbon for ulike land i verden. De norske utslippene er samlet i regnearket (vedlegg).

Ved første øyekast viser datasettet oss at i Norge slippes det ut omtrent 45 millioner tonn (Mt) CO_2 hvert år de siste årene. Millioner tonn er et stort tall, så det er først og fremst viktig å sette dette inn i en sammenheng før vi begynner å jobbe mer med tallene. I følge Statistisk Sentralbyrå (SSB) er de største kildene for CO_2 utslipp i Norge: olje- og gassnæringen (14 Mt), industri (12 Mt) og trafikk (10Mt).

I denne oppgaven vil vi at dere skal bruke tallmaterialet i det vedlagte regnearket til å besvare følgende spørsmål. Bruk Geogebra som hovedverktøy for de matematiske prosessene:

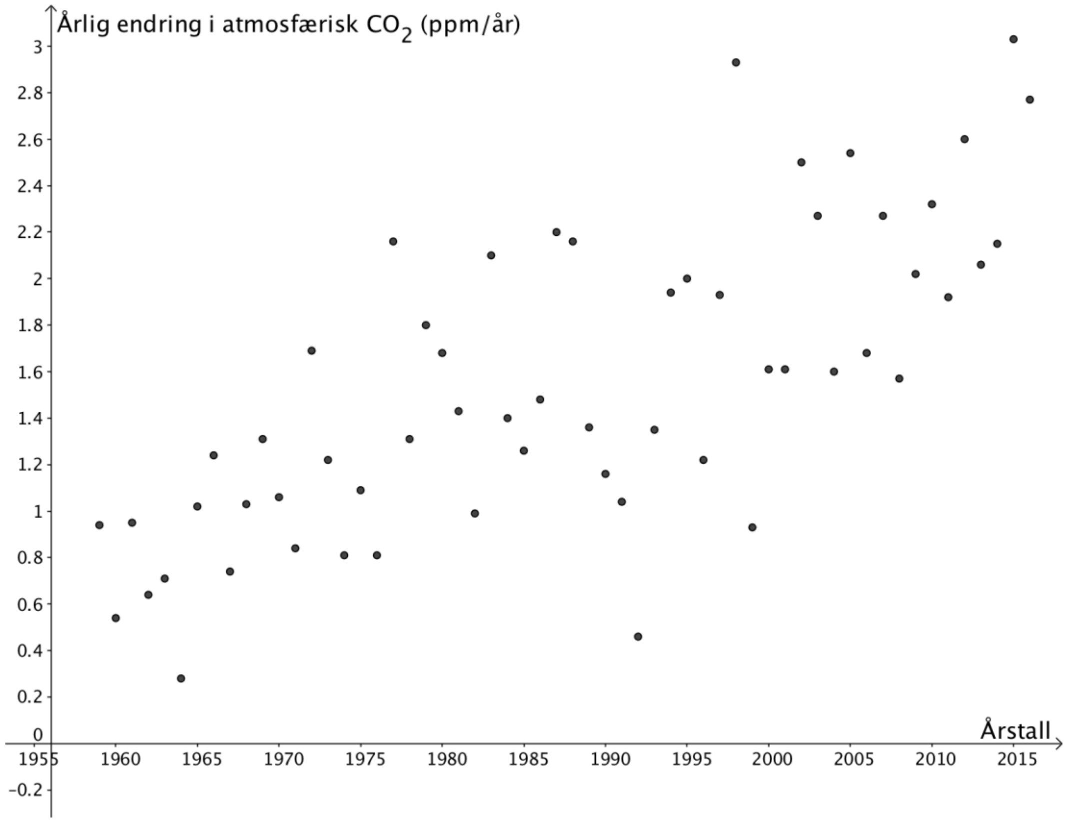
1. Gitt de historiske dataene dere har fått for norske CO_2-utslipp; hvilken matematisk modell passer best til å uttrykke Norges CO_2-utslipp de siste 50år?
2. Hvis dere også skal ta hensyn til mulige fremtidsscenarier; hvilken matematisk modell vil dere si passer best for å beskrive Norges CO_2-utslipp de siste 50 år OG som en fremtidsmodell (prognose)? Argumenter for valget ditt både med matematiske argumenter og kjennskap til hva dere tror vil skje i tiden fremover.
3. Lag 3 ulike modeller for utslipps-scenarier av CO_2, og definer gyldighetsområdet for hver av modellene. Argumenter for hvorfor dere velger disse tre ulike variantene.
4. Nå skal dere bruke de tre modellene dere har laget i deloppgave 3.

    a. Det snakkes innimellom om at «utslippene akselererte raskt» i dagligtalen. Hvordan kan du forklare utsagnet matematisk?
    b. I hvilke perioder kan vi snakke om en akselerasjon i utslippene? Begrunn metoden dere bruker.
    c. Viser noen av modellene et tydelig tidspunkt for starten av en klimamessig forbedring? Når er i så fall dette tidspunktet? Begrunn svaret.
    d. Kan vi snakke om oppbremsing av CO_2-utslipp?
    Finnes det perioder der utslippene har en oppbremsing?
    Begrunn svaret med matematisk formspråk.
    e. Ta utgangspunkt i grafiske representasjoner av modeller for CO_2-utslipp, utslippsrate av CO_2 og akselerasjon av CO_2-utslipp i Norge. Bruk disse grafene som utgangspunkt for å forklare sammenhengen mellom dem til en journalist som skal bruke dem i en artikkel om utviklingen av norske CO_2-utslipp siden 1960. Deres oppgave er å sørge for at journalisten skriver en artikkel som også stemmer matematisk.

Del B: Atmosfærisk CO_2 (=CO_2-nivå i atmosfæren)

Mauna Loa, Hawaii, er mest kjent for at observatoriet her har hatt verdens lengste måleserie av atmosfærisk CO_2. Her har de samlet data kontinuerlig siden 1956. Dataene som er samlet inn her er åpent tilgjengelig for alle som vil bruke dem i sine studier (iallfall inntil videre, USAs siste president jobber for å begrense denne tilgangen til åpenhet rundt klimaforskning).

Under ser dere en graf som viser **endringsraten** av atmosfærisk CO_2 på Mauna Loa, Hawaii:



Dataene til figuren over er hentet på https://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/gr.html

1. I 1959 var CO_2-nivået på Mauna Loa 316ppm.
   Forestill dere at dere skal lage en matematisk modell for det atmosfæriske CO_2-nivået målt på Mauna Loa for årene 1959 til 2016.
   Ta utgangspunkt i figuren over.
   a. Hvilken sammenheng vil det være mellom CO_2-nivå og figuren over?
   b. Skisser hvordan grafen til den matematiske modellen av CO_2–nivået vil se ut. Bruk vedlegget. (Penn og papir ☺)

2. Endringsraten kan brukes videre til å si noe om hvordan CO_2-nivået akselererer. Bruk dataene for endringsrate som dere finner på nettsiden til NOAA.
   Lag ulike modeller for endringsraten, med tilhørende modeller av akselerasjonen av CO_2-nivået.
   Diskuter forskjellene dere får i de ulike modellene, og gi en begrunnelse for hvorfor dere mener den ene modellen fungerer best, både for endringsraten av CO_2 og akselerasjonen av CO_2-nivået. Bruk matematisk argumentasjon sammen med den kunnskapen du har om den historiske utviklingen av atmosfærisk CO_2.

Bonus ☺
Har dere mye tid til overs?

Bruk data fra del A og det store internettet, og finn svar på følgende oppgave:

Hvor mange kilometer i personbil utgjør hver nordmanns gjennomsnittlige CO_2-utslipp per år?

8.2 Vedlegg 2: Intervjuguide

Brifing:

- Formålet med studien: Fokus på den andrederiverte
- Informasjon om oppgaver i slutten av intervjuet. De vil selvsagt ikke påvirke karakteren i faget.
- Anonymitet
- Informasjon om lydopptaker

Intervjuspørsmål:

1. Kan du huske en spesiell situasjon der du følte at du skjønte mer av den andrederiverte? Kan du i så fall beskrive denne situasjonen.
    1. Hva tror du det var med denne situasjonen som fikk deg til å skjønne mer?

Jeg vil nå spørre litt mer generelle spørsmål, men hvis de kan knyttes til eksempel er det bra:

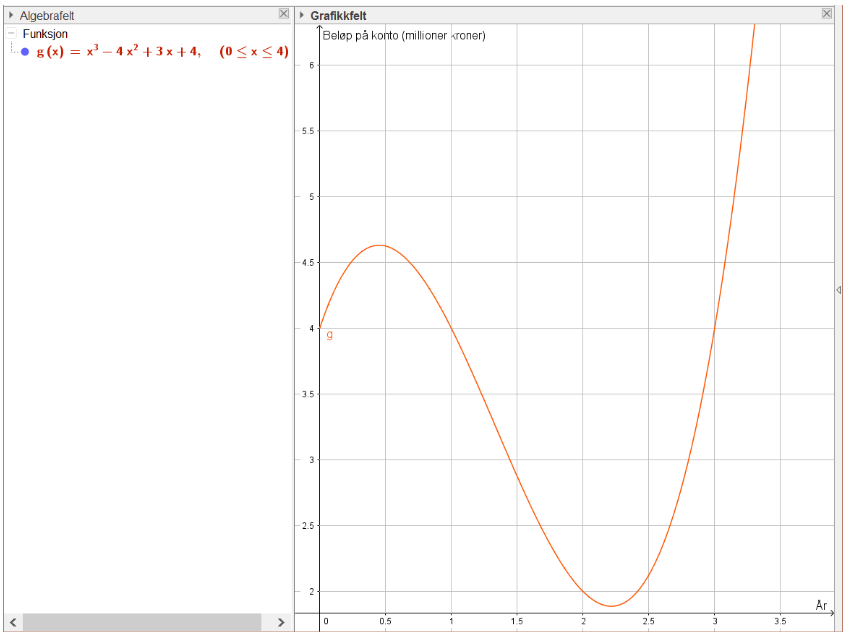
2. Virkeligheten: Hvordan synes du det er å jobbe med oppgaver fra virkelige situasjoner? Påvirket de virkelige dataene hvordan du forsto den andrederiverte? (Vis oppgaveteksten)
    i. Hva med bruken av hverdagslige ord: akselerasjon, oppbremsing
    ii. Virkelige problemstillinger:
        1. På hvilket tidspunkt ser vi et tydelig startpunkt for en klimamessig forbedring?
        2. Det å skulle forklare sammenhengen mellom modeller til en journalist?
3. Det at du ikke hadde en bestemt framgangsmåte, hvordan påvirket dette arbeidet deres og valg av matematiske metoder?
    1. Påvirket dette hvordan du nå forstår den andrederiverte? (Dersom de ikke kommer på noe, forklar at i boka brukes funksjonsdrøfting ofte i oppgaver med den andrederiverte)
    2. Dere hadde heller ikke en fasit tilgjengelig. Påvirket dette arbeidet? Påvirket det hvordan du forsto den andrederiverte?
    3. Hvordan synes du at dere klarte å bruke det dere kunne fra før om den andrederiverte i modelleringsprosjektet?
4. Samarbeid, dialog og diskusjoner: Hvordan synes du at diskusjonene kunne hjelpe deg å forstå mer, underveis?
    1. Hva synes du om det å måtte fortelle de andre om det du tenker/tenke høyt?
    2. Hjelper det å høre andre snakke og slik få innblikk i andres tanker eller forklaringer om et problem?
    3. Hjelp fra læreren: Hvordan påvirket dette deg i arbeidet? Påvirket dette til at du skjønte mer av den andrederiverte?
5. Bruken av GeoGebra- var det noe som gjorde det enklere eller vanskeligere å forstå den andrederiverte?
    1. Sammenligne grafene for f(x), f’(x) og f’’(x)
    2. Hadde du tilstrekkelige GeoGebra- kunnskaper i forkant av prosjektet?

6. Nå har vi snakket om mange ting som kan påvirke forståelsen av den andrederiverte.
    1. Er det andre ting som du mener påvirker forståelsen?
    2. Hva vil du si at du nå kan om den andrederiverte i ettertid av prosjektet?
        i. På hvilken måte har forståelsen utviklet seg?
        ii. Kan du se for deg i hvilke situasjoner eller fagfelt du kan ha nytte av den andrederiverte? (praktiske situasjoner, jobb, studier)

7. Tror du nå, med de erfaringene du har fra modelleringsprosjektet, at det vil bli lettere å kunne forstå nye oppgaver med den andrederiverte?

Gir oppgavene: Prøv å si hva du tenker og prøv å begrunne det du gjør underveis.

<u>A: Oppgaven om økonomisituasjon</u>
Her har vi en modell som viser utviklingen av økonomien for en bedrift (Figur 16). Denne ble vist til elevene i GeoGebra.



Figur 16: Grafen som ble vist for elevene ved introduksjon av den første oppgaven. Funksjonsuttrykket er her gitt.

Forklar utviklingen av den økonomiske situasjonen til bedriften ved hjelp av matematiske begrep som du har lært.

Mulige oppfølgingsspørsmål dersom elevene svarer lite:

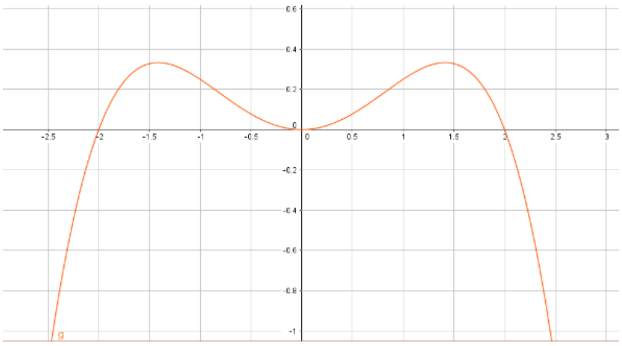
1. Dersom du skulle gi meg mer konkrete svar, hva ville du gjort da? og kan du gjøre det for meg?
2. Hvis vi ser på den første- og andrederiverte, hva kan det gi oss informasjon om?

    i. Hvordan kan vi ved hjelp av disse grafene lese av viktig informasjon om sentrale øyeblikk for økonomisituasjonen?

3. Se på hver av gafene f, f' og f'': hvor har vi en positiv akselerasjon? Hvor er det oppbremsing?
    i. Etter å ha spurt om grafene: Hva betyr det helt praktisk at økonomien har en positiv akselerasjon?
4. Hvis en er leder for denne bedriften, hadde du vært stresset i tiden 0,2 år? Hva med i punktet 1,8?
5. Kan en se et tydelig punkt for hvor den økonomiske situasjonen ble bedre for bedriften?
    i. Viss de svarer bunnpunkt: Når tror du de har satt i gang tiltak for å få denne endringen?

B: Oppgave:

Her er det gitt en funksjon, og du skal nå skissere f'(x) og f''(x) ut fra den informasjonen du får fra denne figuren.



Figur 17: Graf som ble gitt til elevene som oppgave nr 2. Her er ikke funksjonsuttrykket gitt.

Avslutning:

Da har jeg stilt de spørsmålene som jeg hadde planlagt og jeg føler at jeg har fått svar på mye. Er det noe mer du ønsker å si om det vi nå har pratet om? Noe du ønsker å ta opp eller nevne?

Alt som er sagt i dette intervjuet vil bli skrevet ned. Ønsker du å lese gjennom dette dokumentet? Da får du muligheten til å si i fra dersom du synes at noe bør fjernes, eller endre på noe du mener ikke har kommet fram på riktig måte.

Tusen takk for at du stilte opp til forskningsarbeidet mitt!

8.3 Vedlegg 3: Samtykkeskjema

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet «Autentiske modelleringsoppgaver i matematikk»

Et masterprosjekt i matematikkdidaktikk

Formål og bakgrunn

Formålet med masterstudien er å undersøke hvordan arbeid med autentiske modelleringsoppgaver kan bidra til læring i matematikk. Resultatene fra forskningen kan være med på å bidra til en større bevisstgjøring om hvordan elever arbeider med matematisk modellering, og hvilket læringspotensial arbeidet har.

Masterprosjektet vil bli gjennomført av meg, Eili Seljeset Ommedal, som studerer ved lektorutdanningen ved UiB. Hovedveilederen min er Christopf Kirfel ved Universitetet i Bergen. Gjennom han fikk jeg kontakt med læreren for klassen deres. Hun var positiv til å la meg gjøre datainnsamling i denne matematikklassen. Det er ønskelig at du kan delta i forskningsprosjektet, slik at det kan samles inn tilstrekkelig med data til prosjektet.

Hva innebærer deltagelse i studien?

I forkant av modelleringsarbeidet vil det bli gitt ut et spørreskjema med spørsmål som omhandler deres erfaringer fra modelleringsprosjektet som ble gjennomført i fjor.

Det vil bli benyttet hodekamera (GoPro) på noen elever for å samle inn data til prosjektet. Hodekamera vil kun bli benyttet i undervisningstimene under selve modelleringsprosjektet. Dette er for å samle inn data fra gruppediskusjoner i arbeidet med oppgavene. Det vil også bli gjennomført et intervju med noen elever i etterkant av selve prosjektet. Intervju vil bli gjennomført i ordinær undervisningstid og det vil bli brukt lydopptak under intervjuene. Spørsmålene i intervjuet vil omhandle hvordan du arbeidet med modelleringsoppgavene, og noen oppgaver vil også bli gitt.

Jeg vil være tilstede under hele modelleringsprosjektet og gjøre egne observasjoner og ta notater. Jeg er underlagt full taushetsplikt, og deltakingen i prosjektet vil ikke ha noe å si for karakter i faget eller ditt forhold til læreren.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. De som får tilgang til personopplysningene er undertegnede og veilederne mine. Personopplysninger, videoopptak og lydopptak vil lagres på eksterne harddisker som skal holdes innelåst ved Universitetet i Bergen. All bearbeiding av data vil skje via ekstern harddisk, og de vil derfor aldri bli lagt inn på private PC'er. Navneliste vil også lagres adskilt fra øvrige data.

Dersom informasjon om data skal publiseres, skal ingen data kunne knyttes direkte hverken til skole, lærer eller elev. I masteroppgaven skal det benyttes pseudonym. Studien er også meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 1. juni 2017. Video- og lydopptak vil etter dette fortsatt være innelåst på UiB og slettes 31.01.2018. Etter dette vil opptakene være slettet og alle opplysninger anonymisert slik at ingen kan koble datamaterialet til deg.

Frivillig deltagelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert.

Ved eventuelle spørsmål kan en ta kontakt med:
Eili.Ommedal@student.uib.no
Eller på tlf.: 94841379

Med vennlig hilsen
Eili Seljeset Ommedal

Samtykke til deltagelse i studien
«Autentiske modelleringsoppgaver i matematikk»

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

Navn på elev: ______________________________________

Navn på foresatt: ____________________________________

Signatur elev/ signatur foresatt/ dato:

____

8.4 Vedlegg 4: Godkjenning fra Norsk senter for forskningsdata AS (NSD)

NSD

Christoph Kirfel
Matematisk institutt Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 13.01.2017 Vår ref: 51959 / 3 / IJJ Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 06.01.2017. Meldingen gjelder prosjektet:

51959	*Autentiske modelleringsoppgaver i matematikk - Hvordan kan arbeid med autentiske modelleringsoppgaver i matematikk bidra til å støtte tilegnelsen av matematiske begreper? Hvilke utfordringer kan oppstå i arbeidet med autentiske modelleringsoppgaver?*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Christoph Kirfel*
Student	*Eili Seljeset Ommedal*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 31.01.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt

Ida Jansen Jondahl

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 51959

INFORMASJON OG SAMTYKKE
Utvalget informeres skriftlig og muntlig om prosjektet og samtykker til deltakelse. Det skal innhentes samtykke fra både elever og elevenes foreldre, samt lærer. Vi forutsetter at aktuell skole har godkjent at utvalget forespørres om deltakelse. Informasjonsskrivet er godt utformet.

Ved videoobservasjon eller (personidentifiserbare) lydopptak av fellesareal i klasserom må det sørges for et alternativt opplegg for elever som ikke skal delta i forskningen.

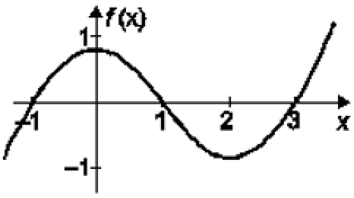
INFORMASJONSSIKKERHET
Personvernombudet legger til grunn at student og veileder følger Universitetet i Bergen sine rutiner for datasikkerhet. Dersom personopplysninger skal lagres på mobile enheter, bør opplysningene krypteres tilstrekkelig.

PROSJEKTSLUTT OG ANONYMISERING
Forventet prosjektslutt er 31.01.2018. Ifølge prosjektmeldingen skal innsamlede opplysninger da anonymiseres. Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:
- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette/omskrive indirekte personopplysninger (identifiserende sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f.eks. bosted/arbeidssted, alder og kjønn)
- slette digitale lyd-/bilde- og videoopptak

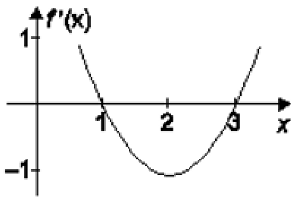
8.5 Vedlegg 5: Oppgave fra tidligere prøve om den andrederiverte

OPPGAVE 8

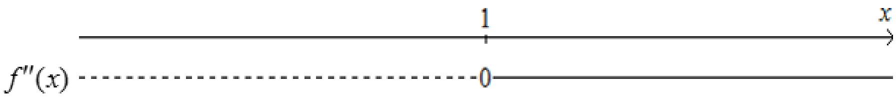
3 p **a)** Figuren nedenfor viser grafen til en funksjon f.
Tegn fortegnslinjene til $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$.



3 p **b)** Figuren nedenfor viser grafen til den deriverte av en funksjon f.
Bestem x-verdiene til topp-, bunn- og vendepunktet til f.



3 p **c)** Figuren under viser fortegnslinjen til den dobbeltderiverte av f.



I tillegg til fortegnsskjemaet får du oppgitt at $f'(-2) = 0$ og $f'(4) = 0$.

Skissér en graf som oppfyller opplysningene om f.

8.6 Vedlegg 6: Spørreskjema

Spørsmålene som ble gitt i spørreskjemaet om modelleringsprosjektet i 2016:

1. I arbeidet med modelleringsprosjekt arbeider en "utenfor" læreboken. Oppgavene har ingen typisk framgangsmåte og en må tenke forbi matematiske formler. Hvordan synes du det var å arbeide slik?

2. Normalt har du en fasit til matematikkoppgavene, noe en ikke har i modelleringsoppgavene. Hvordan påvirket dette deres arbeid med oppgavene?

3.
   a. Gjorde den virkelige situasjonen det enklere eller vanskeligere å forstå matematikken?

   b. Forklar nærmere hvordan den virkelige situasjonen påvirket forståelsen din av matematikk.

4. Hvordan synes du det var å samarbeide med andre i prosjektet? Lærte du noe av å diskutere?

5.
   a. Tror du selv at du forsto matematikken i 1T bedre fordi du var med i modelleringsprosjektet, enn du ellers ville gjort uten å delta?

   b. Forklar nærmere svaret ditt i a.

6. Har du noen idéer til hvordan man kunne gjennomført prosjektet for at du kunne lært mer matematikk?

7. Har du andre kommentarer som kan være relevante?

8.7 Vedlegg 7: Transkripsjonsnøkkel

1, 2, 3 osv	Hvert utsagn nummereres i kronologisk rekkefølge fra datainnsamlingen.
Siri, Kristian, Tora	Pseudonym for de tre elevene vil knyttes til utsagnene.
…	Stille i noen sekunder.
(stille i x minutter)	Dersom det er stille i et lenger tidsrom, vil dette skrives i parantes.
(Tekst i parantes)	Redegjørelse for relevant informasjon som bør være med, men som ikke kommer verbalt til uttrykk. For eksempel: (Her peker Tora på grafen for den andrederiverte).
(…)	Unødvendig del av transkripsjonen blir utelatt.
[…]	Henviser til at ett eller flere utsagn er utelatt.
!	Utrop
?	Spørrende tonefall

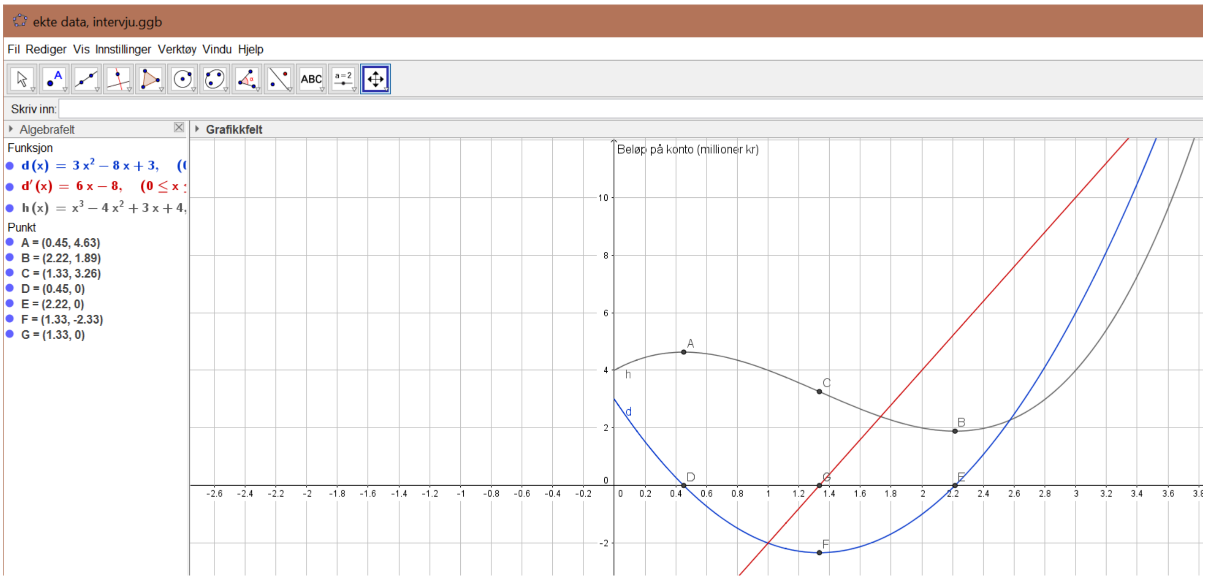
8.8 Vedlegg 8: Utvalgte deler av transkripsjoner fra intervjuene

I dette vedlegget vil noen utvalgte deler av transkripsjonene fra intervjuene bli presentert. Årsaken til dette er at jeg, som forklart i kapittel 3.8, ofte har presentert meningsfortettinger av det som ble sagt i intervjuene. Dersom leseren ønsker å nærmere studere disse transkripsjonene, kan disse leses i dette vedlegget. De utsagnene som er valgt ut er de som er mest relevante, i lys av det som er presentert i oppgaven. Jeg har valgt å ikke ta med alle utsagnene fra intervjuet for å unngå at dette vedlegget skulle bli svært mange sider.

Førtst vil intervjuet med Kristian presenteres, deretter intervjuet med Tora og til slutt intervjuet med Siri.

<u>Kristians intervju</u>

Figur 18 viser Kristians skjermbilde fra da han arbeidet med den første oppgaven i intervjuet. Det kan være nyttig å ha denne foran seg samtidig som en leser transkripsjonene.



Figur 18: Skjermbildet som viser hvilke punkter Kristian snakket om i møtet med den første oppgaven

500	Eili	Vi begynne på det første spørsmålet, det er egentlig, hvis du prøver å huske tilbake, kan du huske en spesiell situasjon der du følte at det gikk opp et lys for deg eller der du følte at du skjønte mer av den andrederiverte? Hvis du prøver å huske tilbake
501	Kristian	Hmm.. (stille). Ja det var vel egentlig, mest når vi jobbet med den der, kanskje den oppgaven med journalisten og alt det der
502	Eili	mmmhm
503	Kristian	Når vi prøvde å liksom forklare det på en enklere måte, da blir du på en måte tvunget til å liksom måtte forstå det bedre. For i boken så kan en lese akkurat hvordan det.. Pugge hvordan og hva den betyr, men når en må forklare det på en enkel måte så blir det på en måte.. Øker det egentlig.. Så følte jeg at jeg økte min egen forståelse på en måte
504	Eili	Ja, men det forstår eg. Men hva var det med den situasjonen der som gjorde at du forsto den andrederiverte bedre? Det var det at en måtte forklare det på en enkel og forståelig måte, var det andre ting?
505	Kristian	Ja, det var på en måte data som faktisk hadde noe å si på ekte.
506	Eili	Mhm
507	Kristian	Det var ikke bare sann super- urealistisk, sann "Lisa gikk til skolen" og en eller annet oppdiktet matteoppgave.
508	Eili	Ja, altså det med at dataane er ekte da. Det er det du mener er bra?
509	Kristian	Ja, og da blir det litt enklere å sette dette i sammenheng, som ga mening på en måte
510	Eili	Ja, veldig bra. Vi kommer faktisk inn på en del av det du har sagt nå, litt senere. Er det fleire ting du tenker på som var viktig i denne situasjonen?
511	Kristian	Ehhh.. (stille)
512	Eili	Det ble jo brukt GeoGebra- var dette nyttig?
513	Kristian	Det er en veldig god å.. måte å framstille det på. Geogebra det, liksom, en får jo se sammenhengene grafisk på en måte, og det tar ikkje lang tid å få det inn, på en måte.
		[…] Her ga jeg en del informasjon om at jeg skulle vise en video (av utdrag 2 i oppgaven). Etter filmen spurte jeg om han kunne fortelle litt om det han så i videoen.
515	Kristian	Ja, emm. Hva skal jeg si da. Det tok jo litt tid før jeg klarte å ordlegge meg på rett måte. Ehh. Jeg trodde jo egentlig at jeg liksom forsto meg på den andrederiverte og sann i utgangpunktet før det, men i den situasjonen så måtte jeg tenke litt før jeg, for det kom i en ny sammenheng, så det tok litt tid før jeg klarte å se det da, å sjå sammenhengen. Så ja, det tok litt prøving og feiling, men etter hvert så gikk det bra.
516	Eili	Ja. Ja, men det er jo veldig logisk at når akselerasjonen synker, så tenker en at det er negativ akselerasjon. Så det er ganske. Ehh. Normalt å si. Men da var det det du sa at det var det med verdiene som sa om vi hadde negativ akselerasjon. Men, hva var det med den situasjonen her som gjorde at det gikk opp et lys her?
517	Kristian	Ehm.. Ja, ka ska eg sei? Ehm,.. Det var jo liksom atte.. Vi hadde diskutert litt før, og lenge før det og ja, vi holdt på ganske lenge med den oppgaven da, og i begynnelsen så så vi bare på formen til den andrederiverte og ikke fulgte med på verdiene. Det var, vi var opphengt i å se på formen ganske lenge, men når jeg først fikk øye på verdiene, så tenkte jeg at vi må jo forholde oss til de og. Da var det mye lettere å se sammenhengen da.
518	Eili	Også sa læreren at etter at du hadde forklart, så skulle du prøve å se hvordan denne stemte overens med det du hadde forklart.
519	Kristian	Ja
520	Eili	Hvordan påvirket det det som skjedde?
521	Kristian	Ja, jo. For da ville det ikke gitt mening at akselerasjonen var negativ når den gikk nedover. Fordi at den fortsetter jo å bli brattere og brattere. Så det var en liten pekepinn på en måte.
522	Eili	Ja, for det var det jeg tolket som at det var da du skulle se sammenhengen, at det var da du så at det ikke ga mening, det du sa.
523	Kristian	Ja, det er rett det. Jo for det blir jo..mmmhm. Det var da jeg så at det ikke ha mening.
524	Eili	(avsluttet denne delen, begynte på spørsmål om virkeligheten): Da begynner vi nettopp med det du sa at oppgavene er bygd på virkeligheten eller ekte data. Ja, hvordan synes du det er å jobbe med oppgaver, nettopp det at de er ekte?
525	Kristian	Ja, det blir jo mye gøyere da, at tallene en jobber med er ekte og har en mening da. I hvert fall når det handler om sanne viktige ting som f.eks. co2- utslipp og.. som er jo og reelle

		problem i samfunnet i dag. Det er også veldig frihet om hvordan du vil jobbe med dataane. Du får noen data og noen spørsmål som en skal finne svar på, men veldig lite bestemt framgangsmåte. Og ingen fasit.
526	Eili	Ja, akkurat det kjem vi inn på i neste tema- det går veldig inn i hverandre det vi snakker om nå. Men ja, det er bra du synes det er viktig!
527	Kristian	Ja, det gir en ekstra motivasjon.
528	Eili	Ja, du synes det? mhmm.. Hva er det som gir den motivasjonen?
529	Kristian	Ja, det er jo det at det er ikke barre ting som er funnet opp liksom. Det er ekte situasjoner, og da blir det litt mer spennende å jobbe med det fordi du kan faktisk finne ut hva som skjer i verden ved å gjøre matteoppgaver, i stedet for at en finner tall som noen har funnet opp på en måte
530	Eili	Mhmm. Og i oppgaven som vi jobbet med (peker i oppgaveteksten) så har vi jo brukt flere hverdagslige ord. Som akselerasjon og oppbremsing. Hva tenker du om det? Påvirket det hvordan du forsto den andrederiverte på en måte?
531	Kristian	Ja.. Ehh. Hvordan, liksom, forskjellen på det dagligdagse språk og ..vanlig. Som når en snakker om akselerasjon i dagligtalen så er jo det det vi kaller positiv akselerasjon. Det gjør at en må tenke litt på; hva er egentlig positiv akselerasjon? Det fikk oss til å tenke det og hva vil det da heter hvis, også tenkte vi på det med fysikk og sann. En blir jo opphengt i matematikken, og det fysiske er kanskje ikke det som handler om i dagligtalen. Men det er likevel viktig for å kunne forstå det for å kunne formidle matte på en forståelig måte.
532	Eili	Mmhm
533	Kristian	Og for å kunne kontrollere det aviser sier, om det er riktig. Hvis en tenker på hva de oppfatter som akselerasjon i forhold til..
534	Eili	Mhmm.. det er sant. Og det at en kan relatere den andrederiverte til akselerasjon, hadde det noe å si?
535	Kristian	Mmhm. Det ble egentlig det. Det ble på en måte litt mer handfast. Dette var jo noe en liksom kan forholde seg til.
536	Eili	Vi har også noen andre ting om det med virkeligheten. Vi har blant annet det med virkelige problemstillinger: «Viser noen av modellene et tydelig tidspunkt for en klimamessig forbedring?» Ja, har du noe du vil si om den situasjonen?
537	Kristian	Ja, det er jo egentlig. Det var en situasjon der vi måtte diskutere litt og. Vi kom fram til litt forskjellige vinklinger på ting. Enten om vi skulle velge 1999 eller 2005. Ja, det var når akselerasjonen ble, begynte å gå nedover eller om det var når den ble negativ då. Det var et av de to tidspunktene vi tenkte at vi skulle bruke då. For å si noe om en klimamessig forbedring, i hvert fall i forhold til nyere tid da.
538	Eili	Mhhm..
539	Kristian	Det ble også en diskusjon der vi måtte og trekke inn det vi tenkte, om situasjonen. Generelt om hva som skulle defineres som en klimamessig forbedring og da måtte en tenke litt på den måten, samtidig som en måtte finne en matematisk sammenheng som kunne gi støtte for det vi da. Det punktet vi hadde valgt.
540	Eili	Ja, det er nettopp det. En må både argumentere matematisk, men en må og tenke på hva det egentlig betyr sant. Hva er egentlig det første tegnet på en klimamessig forbedring? Det synes jeg at det var veldig fint at dere hadde forskjellige tolkninger av det, at dere diskuterte og det var jo forskjellige argument her sant. Så det synes jeg var veldig interessant. Jeg veit ikke om det er andre ting enn det… (Her var det noe urelevant snakking som jeg fjernet)
541	Kristian	ja
542	Eili	(Her var noe urelevant snakking som jeg fjernet) Ja, men da tror jeg vi har snakket nok om virkeligheten. Så da går vi litt over til å snakke om det du snakket om i sta. Det med framgangsmåte. Ja, vi hadde jo ikke en spesiell framgangsmåte, og hvordan synes du at det påvirket arbeidet deres og valg av matematiske metoder?
543	Kristian	Nei, det.. Det blir jo mye mer diskusjoner.. og mer forslag fra andre, om hva som kan gjøres og diskusjoner rundt de forskjellige forslagene. Da kan jo liksom alle, i stedet for at, folk har jo gjerne litt kunnskaper i forskjellige emner, så det går jo ann å.. ehh, få fram de på en bedre måte når det ikke er en bestemt framgangsmåte en skal bruke på en måte.
544	Eili	Ja, det er heilt sant.. Mmhm. Ja, synes du at det at du ikke hadde en spesiell framgangsmåte, påvirket det til at du forsto den andrederiverte på en anna måte, i forhold til (ble avbrutt av Kristian)

545	Kristian	Ja, for da måtte jeg jo.. Det var jo ingen oppgaver der en fikk liksom «finn den andrederiverte». Det var jo «finn akselerasjonen». Altså, meningen bak det ble så mye tydeligere fordi, ja, det var ikke en spesiell framgangsmåte sånn sett da, og da blir det litt lettere å forstå hva det egentlig betyr.
546	Eili	Ja, ja men det er jeg veldig enig i. For i boka, er det veldig ofte funksjonsdrøfting. Finn den deriverte, toppunkt, finn den andrederiverte også sette på fortegnskjema for å finne vendepunkt osv.
547	Kristian	Ja, for det var veldig det jeg hadde merka, at jeg tenkte at den andrederiverte har jeg vel kontroll på. Også kom jeg her og skulle bruke det i en annen situasjon, og da, liksom måtte jeg komme fram til hvordan jeg skulle bruke det selv. Da måtte jeg på en måte forstå mer hva det egentlig betydde
548	Eili	Ja
549	Kristian	Jeg tror i hvert fall at jeg kommer til å huske det bedre da.
550	Eili	Ja, men det er bra. Det er liksom det å pushe seg litt utafor comfort- sonen her, det var litt av poenget (ler). Så ja, det var heller ikke bruk av fasit ja, det var jo også noe du nevnte. Synes du at det var noe som påvirka- eller?
551	Kristian	Ja, liksom. Det er ofte sånn at hvis en ikke får det til så «ja, vi kan jo ta en liten kikk i fasiten», også finne ut hvordan en skal gjøre det på den måten. Men hvis en ikke har noen fasit, så åpner det også for at en må være mer, en må være mer, vi står mer på og prøver mer, i stedet for å gi så lett opp. Så er det det at når en ikke har fasit så, dette med at, en må være mer kritisk til de svarene du får.
552	Eili	Ja, det er helt sant.
553	Kristian	Det er ikke sånn at en kan komme med et forslag til et svar også sjekke i fasit og hvis det er feil så kan du gjøre oppgaven på nytt igjen. Du har ingen sjanse til å sjekke, en må forsikre seg om at det er rett første gangen
554	Eili	Ja, det var litt derfor det var interessant at dere hadde forskjellige tolkninger til den c-oppgava da. (Fjernet noe urelevant tekst. Jeg går nå tilbake til et spørsmål som jeg glemte): Den virkelighetsnære situasjonen er det at du skal forklare til en journalist, og det er jo for så vidt realistisk. Er det noe du vil si om den situasjonen?
555	Kristian	Det var veldig bra å forklare ting på en annen måte. Det er jo ingen fasit på det her heller eller hvordan en skal gjøre det. En må jo tenke litt på hvordan det hadde vært hvis ikke du hadde forstått så mye matte, hvordan hadde du ville blitt forklart ting, og få det til på en rett måte da. Så.. Det går jo veldig utenfor rammene til vanlige matematikkoppgaver.
556	Eili	Ja, det gjør det. men samtidig må dere bruke matten
557	Kristian	Det måtte vi, så det ble en veldig ny situasjon å bruke matten på. Det var jo veldig lærerikt.
558	Eili	Ja. Ja, jeg tror det er greit. Du sa jo og litt i starten, så jeg tror den er grei. Hvis vi går tilbake til det punktet med framgangsmåte og sånn. Synes du at du klarte å bruke det du kunne fra før på en måte, på en god måte i den nye situasjonen?
559	Kristian	Ja, altså det tok jo litt tid då av og til. Men som regel så gikk det jo greit. Det tok litt tid før jeg klarte å se det i den nye sammenhengen
560	Eili	Ja, den er grei. Ja, då er vi over på neste tema. Det handla om dialog, samarbeid og diskusjonar. Hvordan synes du at diskusjonene kunne hjelpe deg å forstå mer underveis?
561	Kristian	Nei, både det at de andre kom med sine forslag og at jeg kunne komme med mine forslag, samtidig som at hvis det var noe noken ikke forsto så kunne jeg eventuelt forklare det til de eller de kunne forklare det til meg hvis jeg ikke skjønte noe. Så det er på en måte. Det å samarbeide mer gjør at alle får ehh.. økt forståelse i og med at, alle får dele den kunnskapen de har, og som sagt forstår noen noen emner bedre enn andre.
562	Eili	mmmhm
563	Kristian	Dette vil jo på en måte bli en sann vinn- vinn situasjon for både de som ikke kan det, de kan få det forklart av de andre. Og de som kan det, får også øve seg på å forklare til andre. Og det er jo og en god måte å jobbe på. Jeg merker i hvert fall at det er når jeg har prøvd å forklare det til de andre, så skjønner jeg om jeg skjønner det selv.
564	Eili	Nettopp ja, det er typisk
565	Kristian	Så det økte og min egen forståelse.
566	Eili	Ja! Bra. Det å høre andre tenkte høyt da?

567	Kristian	Ja, det var veldig greit å høre på andre sine forslag. Det kan også være at jeg har låst meg fast på en måte å gjøre det på, men når en får innspill fra andre også samtidig som kanskje har en annen måte å gjøre det på
568	Eili	mmhm
569	Kristian	Kan det gjøre at en får du får en, kommer frem til løsningen på en bedre måte, og gjerne kombinerer de
570	Eili	Mhmm. Du kan ikke huske en spesiell situasjon der det skjedde?
571	Kristian	Det er veldig vanskelig å huske, men jeg tror jeg har hatt det i løpet av..
572	Eili	Mmhmm. Også det her med dialog, da kommer jo og en inn på det med læreren, det at hun stilte spørsmål, om hvordan det påvirket om du forsto den andrederiverte på en annen måte, eller?
573	Kristian	Ja, det var jo det vi snakket om i sta, om at, den oppgaven med der vi skulle forklare sammenhengen mellom de andre grafene. Det var jo da vi skulle se sammenhengen med den første modellen vi lagde. Den andrederiverte da. Da hjalp jo det veldig på, som vi har diskutert. Også, jeg vet ikke hva annet vi kan si om det. Hun var jo innom et par ganger og stilte spørsmål som hjalp oss på veien. Jeg husker ikke så mange konkrete tilfeller akkurat nå. I alle fall, jeg husker at det var et par ganger at det hjalp oss på veien.
574	Eili	Ja, så da var det litt over på det med GeoGebra. Vi har jo snakket om det tidligere, men vi går nå gjennom det punktet her. Var det noe som gjorde det enklere eller vanskeligere å forstå den andrederiverte? I den oppgava her?
575	Kristian	Nei, jeg synes det gjorde at det ble lettere å forstå. I stedet for å bare jobbe med de tallene vi fikk oppgitt i et excel- ark, så kunne vi få det inn i Geogebra som grafer. Det er jo et veldig, dynamisk program, en kan lett se sammenhenger, der en kan sette både den første- og andrederiverte og modellen sammen i et bilde, og vi kan lett markere ulike punkter i modellen. Vi kan markere bunnpunkter og vendepunkter og se sammenhengen mellom de. Så det hjalp jo å se hva den andrederiverte var da.
576	Eili	Ja, men samtidig så var det jo en utfordring med det at vi ikke fikk alle modellene inn i et bilde. Det var jo forså vidt litt dumt
577	Kristian	Ja, litt utfordringer blir det jo og da. Og det med at det gikk så treigt..
578	Eili	Ja det var jo veldig (ble avbrutt av Kristian)
579	Kristian	Det var veldig irriterende. Litt av tiden gikk jo på at det var så treigt, og i hvert fall når vi prøvde å få de i samme bilde, samtidig som at det var så treigt sant. Men alt i alt så synes jeg at GeoGebra er bra og for å få meg til å forstå den andrederiveree bedre da.
580	Eili	Ja, spesielt var det kanskje en fordel i den oppgava med journalisten, når en skulle forklare sammenhengen mellom den, den og den (peker på f, f' og f'')
581	Kristian	Ja, det var en..
582	Eili	Mmmhm. Ja også, var det, synes du at du hadde tilstrekkelig eller nok GeoGebra-kunnskap for å kunne jobbe med det her?
583	Kristian	Ja, det synes eg. Vi har jo brukt det veldig masse.
584	Eili	Ja, for dere hadde jo brukt regresjonsanalyse før og?
585	Kristian	Ja, for på det forrige prosjektet så brukte vi også, det var jo der vi brukte masse regresjon og mange av de samme framgangsmåtene på en måte. Så GeoGebra- kunnskapene fra før av tror jeg var bra nok
586	Eili	Ja. Nå har vi egentlig snakket om flere ting som kan påvirke forståelsen. Hvis vi skal ta en oppsummering da: det med virkeligheten og at det er bygd på ekte data, og det at en ikke har en spesiell framgangsmåte eller fasit, også har vi diskutert det med samarbeid og diskusjoner og det med lærens dialog, og det med GeoGebra. Ja.. Er det andre ting enn de punktene her, du synes har påvirket forståelsen din? Noe spesielt?
587	Kristian	Ehm. Det er litt vanskelig å komme på.. HVa var det du nevnte no igjen?
588	Eili	Repiterer det som ble sagt i samtalenr 586. (Stille i ca 1 minutt). Eventuelt så kan du sende meg en mail om du skulle komme på at «det» var noe som påvirker
589	Kristian	Ja, det var litt vanskelig å komme på noe nå.
590	Eili	Det vi har snakket om nå, er det jeg kan komme på som kan påvirke forståelsen. Men ja, så nå har vi snakket om mange ting som kan påvirke forståelsen, så hva vil du nå si at du nå kan om den andrederiverte i ettertid? Hva føler du at du nå kan?

591	Kristian	Ja, ehh.. Jeg tror at jeg, i forhold til sammenhengen mellom både den førstederiverte, andrederiverte og funksjonen da, så tror jeg at jeg forstår det en god del bedre nå enn jeg gjorde tidligere. Selv om det kanskje ikke gikk så bra på den presentasjonen så..
		[…] Urelevant samtale, diskuterte hvordan presentasjonen gikk.
596	Eili	Ja, det.. På hvilken måte, hva føler du at du kan bedre nå enn før? Klarer du å sette ord på det?
597	Kristian	Det var jo litt det vi snakket om, om positiv og negativ akselerasjon. Med positiv akselerasjon vil endringen bli større og større på en måte.
598	Eili	Ja..
599	Kristian	Når det er negativ akselerasjon, altså under null, eller oppbremsing som det kalles i dagligtalen, så er det altså at endringene av endringene vil bli mindre og mindre. Og det vil jo og, hvis vi ser det i sammenheng med krumming, der vil vi ha.. Ehh de begrepene.. Det er konveks når vi har positiv akselerasjon, og når det er vendepunkt altså når vi har et nullpunkt på den andrederiverte. Når vi får negativ akselerasjon får vi en konkav krumming på grafen. Så jeg så sammenhengen mellom konveks og konkav og hvordan den andrederiverte var.
600	Eili	Ja . Kan du, hvis du ser for deg i hvilke situasjoner eller fagfelt der du kan ha nytte av den andrederiverte, altså enten praktiske situasjoner, jobb eller studier, kan du se for deg andre situasjoner enn akkurat den co2- oppgaven? Kan du se for deg andre situasjoner?
601	Kristian	Ja, altså det kan jo brukes i veldig mange situasjoner. Alle sammenhenger der, eller endring av endringer. Altså fagfelt.. I forhold til, for eksempel biler; akselerasjon og bilder. Så lenge en har positiv akselerasjon så øker farten mer og mer. Jeg veit ikke hvilke andre eksempel jeg kan nevne?
602	Eili	Ja, hvis du tenker på naturlige fenomen?
603	Kristian	Ja, pff, endring i havnivå for eksempel?
604		Ja, det blir litt sann.
605	Kristian	Jeg vet ikke hvilke andre..
606	Eili	Det går bra. Tror du nå med de erfaringene du har fra ekte data prosjektet, at det vil bli lettere å kunne forstå nye oppgaver med den andrederiverte?
607	Kristian	Altså, det er jo, det som er bra med de oppgavene her og, er at når du jobber med dem, så må en sette det i en sammenheng, og det er lettere å huske hvordan en gjør ting når en har satt det i en bestemt sammenheng som det er lettere å huske. Disse dataene som har betydd noe og som er ekte, de fester seg bedre til hukommelsen. Og alle de tingene vi har nevnt (virkeligheten, framgangsmåte mm.) de gjør at en husker det bedre. En må diskutere mer, og en bruker såpass masse tid på det og samtidig får den situasjonen en kan referere til på en måte, som gjør at en , jeg tror at jeg kommer til å huske det bedre til en annen gang. Da kan en tenke tilbake til den situasjonen og hente det fram igjen. (fjernet noen urelevante utsagn. Avslutter denne delen av intervjuet og leter fram oppgavene som skulle bli gitt).

610	Eili	Skal vi se, hvis vi tar opp GeoGebra her. Dette er en tenkt situasjon da, her har vi altså utviklingen av en økonomisk situasjon til en bedrift. Her har vi altså beløp på konto i millioner kroner, her har vi altså 4 millioner kroner. Også her er det år bortover. Jeg dro litt på aksen, så det blei litt rare år, for eksempel 0,2 og ja.
611	Kristian	Det går bra
612	Eili	Så det som jeg lurte på det var om du kan bruke matematiske begrep til å forklare den økonomiske situasjonen til den bedriften her?
613	Kristian	Ehhh ja. Så.. I starten så får vi mer og mer penger på kontoen (ler)
614	Eili	Ja, ja!
615	Kristian	Det var litt vanskelig å se akkurat hvor det snur da, men. Hvis vi ser i forhold til den andrederiverte og akselerasjonen, så ser vi at akselerasjonen blir mindre og mindre fram til det punktet. Ja, for vi har en konkav krumning og da får vi et, så fram til et vendepunkt, det ligger ca her (peker på vendepunkt), så vil akselerasjonen være positiv…Nei negativ, ja. Hehe.
616	Eili	Jeg hørte faktisk ikke at du sa det. Men ja!
617	Kristian	Ja, ja. Og det betyr at endringen av endringen i forhold til hvor mye penger de får inn, den vil, ja.. bli negativ. Så da får vi då, etter vendepunktet så vil akselerasjonen bli positiv og vi får en konveks krumming og det ser ut som at den kommer til å være positiv framover. Det går egentlig bedre og bedre med den bedriften etter det altså.
618	Eili	Du kan bruke andre ord enn akkurat om den andrederiverte og altså.
619	Kristian	Ja, i begynnelsen så får de mer og mer penger fram til.. Ja, det punktet, en eller annen plass, på toppunktet her. Utviklingen av hvor fort de får penger går seinere og seinere, også får de færre og færre penger. Før de da når bunnpunktet, og da vil då de gradvis fortere og fortere øke pengebeholdningen
620	Eili	Mmhm. Ja det er et fint svar. Hvis du vil gi mer konkrete svar, hva ville du i så fall ha gjort da?... Og kan du i så fall gjøre det?
621	Kristian	Ja. Vi kan legge inn for eksempel ekstremalpunkter (han begynner å trykke på datamaskinen) Det var kanskje litt feil. Også har vi h. Det er og litt greit å ha.
		[…] (Kristian setter seg foran datamaskinen og finner ekstremalpunkt og den første- og andrederiverte.
627	Kristian	Ja, jeg tror vi tar den i en annen farge. Også kan jeg ta nullpunkter på d-en (han hadde navnsatt f' som d) sann at det blir litt enklere. Siden denne (f') sier noe om endringen, så siden den stiger så vil pengebeholdningen øke frem til punkt, etter ca 0,45 år. Etter dette vil pengebeholdningen gå nedover fram til rundt.. Endringen vil være negativ, så bedriften får mindre og mindre penger på konto, i millioner,.. fram til då sann ca i 2, 22 år. Og da vil pengebeholdningen øke så langt som det ser ut til at vi kan bruke modellen. Hvis vi ser på dette i forhold til den andrederiverte, så ser vi jo da at vi har en rett linje. Det gir jo mening, graden reduseres jo med en for hver gang vi deriverer. Den første har tredje grad, den deriverte har andre grad og den andredervierte har førstegrad. Det vi ser da er at vi har negativ akselerasjon, og at farten som endringene, ja endringene av endringene .. da skjer (Eili avbryter)
628	Eili	Ja, til den økonomiske situasjonen da?
629	Kristian	Ja, endringene av endringene til den økonomiske situasjonen (ler) blir jo, først er den jo negativ helt til punktet g, og det kjenner vi igjen på.. Ja, jeg kan jo kanskje forklare det i forhold til hva det faktisk vil si. Ja, så det vil si at de gradvis vil få.. Ehhm. Siden den akselerasjonen er negativ så vil den da, ehh.. pengebeholdningen, eller måten den endret seg på blir gradvis mindre og mindre
630	Eili	Ja, hvor er det du er nå?
631	Kristian	Fram til punktet g. Det er negativ akselerasjon. Så da vil vi då ha den krumningen her som vil si at pengebeholdningen gradvis snur, trenden snur fra at vi tjener mer og mer penger til at.. Ehh, endringene blir først mindre og mindre, så går de under null, også vil pengebeholdningen minke. Siden akselerasjonen er under null, så er det fordi endringen synker.
632	Eili	Mmmh. Hvis vi tar for oss hver enkelt av de grafene her, også, kan du prøve å si hvor på grafene akselerasjonen er positiv og hvor den er negativ? Hvis du prøver å argumentere for hvorfor den er positiv eller negativ ut i fra det vi ser?

633	Kristian	Ut i fra det vi ser her? (peker)
634	Eili	Ja, begynn med den der for eksempel. (peker på f(x))
635	Kristian	Ja, vi ser jo at den blir slakkere og slakkere. Ehhm.. Eller, den begynner å, det blir litt feil å si at den blir slakkere og slakkere. Den krummer mer og mer nedover, og det gjør den helt fram til rundt om punktet C der, så i 1, 33 år. Og, ka var det annet du spor om?
636	Eili	Kor det var positiv og negativ akselerasjon?
637	Kristian	Ja, og da vil det si at det er negativ akselerasjon fram til punktet c, for vi får en gradvis.. vi får krumningen da, der den.. ja—endringen av endringen blir mindre, fram til c, før endringen av endringen blir større igjen, fram til punktet b. Etter punktet b (har skrevet E i oppgaven, da dette stemmer med figuren som er vist der) så får vi positiv akselerasjon hele tiden. Da vil endringen av endringen øke hele tiden (peker på den deriverte).
638	Eili	Ja, og hvordan er det med den deriverte da- hvor er det positiv og negativ akselerasjon?
639	Kristian	Ehm.. Da ser vi det at.. Så lenge.. endringen… eller, endringen er på en måte.. blir mindre og mindre her, den blir jo mindre og mindre helt fram til punktet f, der den når bunnpunkt da. Og hvis vi ser på den andrederiverte, så er den på et nullpunkt, og det er fordi vi ikke har.. Endringen i det punktet, så.. endringen vil ikke endre seg. Endringen vil endre seg positivt etterpå fordi vi får en positiv akselerasjon.
640	Eili	Hvordan ser det ut for den andrederiverte om hvor det er positiv og negativ akselerasjon?
641	Kristian	Det er jo bare når den er under null og når den er over null.
642	Eili	Ja, fint. Nå har jeg to litt praktiske spørsmål. Hvis du er leder for den bedriften, vil du være redd eller tenke på å sette i gang tiltak ved tiden 0,2 år? Det vil være ca der (peker). Hvis du var leder for bedriften og du så at økonomien gikk oppover sånn, ville du då gjort i gang tiltak, eller? (peker)
643	Kristian	Altså, en ser.. Hvor fort en øker pengebeholdningen vil jo … sakke av.. men en vil jo, akkurat i punktet 0,2, så vil en jo. En kan jo ikke vite hva som skjer i framtiden likevel. Ehmm. Å sette i gang tiltak? Dette er jo bare en modell for de verdiene vi har og det som skjedde, men vi har jo fortsatt en økt pengebeholdning ut i fra det vi hadde i begynnelsen. Men kanskje hvor fort pengebeholdningen øker kanskje blir litt redusert på en måte? Men om det er en grunn til bekymring? Det kommer jo an på om..
644	Eili	Hvor vil du sei at det er grunn til bekymring da? Eller kor vil du sette i gang tiltak? (Stille) Eller kan du sei kor det er satt i gang tiltak?
645	Kristian	Ja, der det er satt i gang tiltak det er på. Hvis en ser på punkt c da kanskje, at de har begynt å satt i gang tiltak der vi har et vendepunkt, for der vil den.. Altså, dette blir jo litt det samme som den vi hadde på den om den klimamessige forbedringen. Enten kan vi si at det er punkt b eller punkt c. Men jeg vil si at det er i punkt c, at en begynner å gjøre endringer da og den endringen de da gjør fører til at reduksjonen i pengebeholdningen begynner å gå litt senere og det kan jo, hvis vi ser på den andrederiverte så er jo den lik null i det punktet, og den går over til det positive og her ser vi at den begynner med den krummingen som vil føre til en positiv utvikling, for pengebeholdningen til selskapet. Selve pengebeholdningen blir jo redusert fra c til b. Det er jo bare fra b at den begynner å øke igjen. Så en kan jo diskutere om det er gjort tiltak og, men at med en gang det er gjort tiltak så begynner pengebeholdningen og øke igjen. Det er jo kanskje litt urealistisk at det blir gjort tiltak her (peker på bunnpunktet), og at det plutselig begynner å gå bedre med økonomien sann over natten. Men de har sett at utviklingen har gått oppover til A, men med redusert hastighet, hvor fort de nådde mer og mer penger, men så ser en jo at endringen, at de taper penger fortere og fortere på en måte, men der (peker på c) tror jeg at de kommer til å gjøre en endring da, for der taper de ikke penger fortere og fortere lenger. Og etter b så øker en også pengebeholdningen fortere og fortere.
646	Eili	Ja, men det er sant. Så et tydelig punkt for en bedre økonomisk forbedring det er?
647	Kristian	Ja, altså du kan diskutere om det er c eller b, men eg vil si c.
648	Eili	Det er fint, aller siste spørsmål på den her no. Hvis du var leder for bedriften og du nå var i tiden 0,8. Ville du vært stresset for bedriften da? Da er du der, da ser du at økonomien går sann, og dit (peker)
649	Kristian	Ja, på same måte som da vi snakker om 0,2, da vi ser at, selv om den positive.. selv om endringen.. At hastigheten de får mer og mer penger i, reduseres. Så får de fortsatt mer og

		mer penger. Det same kan du argumentere for på 1,8. Hvor fort de taper penger går nedover. Såå..
650	Eili	Ja, hvor fort de taper penger går nedover.
651	Kristian	Ja, hastigheten. Det er litt vanskelig å ordlegge seg. Den blir redusert, sant. Til tross for det så har det fortsatt vert en reduksjon. De taper jo fortsatt penger, så en kan jo diskutere om de fortsatt er bekymra. Men hvis en ser på hvordan utviklingen har vært. Viss en tenker at det er gjort tiltak i c, som vi ser her. Ehh.. endrer da farten en taper penger på, så ville jeg ikke vært så bekymra hvis du tenker på den måten.
		[…] Avslutter den første oppgaven og starter på den andre.
654	Eili	Hvis vi har den funksjonen her, og skal tegne sjølv: den deriverte og andrederiverte. Hva vil du da gjøre? Dette er det siste. Du kan tenke at dette er funksjonen, så hvis du begynner her med funksjonen og begynner med å tegne den deriverte.
655	Kristian	Ja, det er jo bare å se her det da.
656	Eili	Hvis du vil ha noe å notere på så kan du få det, hvis du vil
657	Kristian	Hvis vi først markerer, sann som hvis vi tenker på den deriverte så vil den ha, når den deriverte er lik null så vil vi ha et ekstremalpunkt på funksjonen då. Og da kan vi markere den same x- verdien da, som gir et ekstremalpunkt på aksen, så en får da et nullpunkt. Også må vi se litt på formen til den (peker på at f øker fram til toppunktet), så det betyr jo at vi vil ha en økning fram til det punktet der, så det vil si at vi da har en, den andre, nei den deriverte vil være positiv fram til det punktet.
658	Eili	Mmhm.
659	Kristian	Så hvis jeg tegner et, det ble litt vanskelig dette her men.. noe sant noe da? Også vil den være.. ehhmm, negativ. Hele veien fram til vi kommer til enda et bunnpunkt, et ekstremalpunkt. Så viss vi, på en måte.. Også, noe sant?
660	Eili	mmhm
661	Kristian	Så etter det punktet her så vil jo den deriverte også være positiv igjen, for vi har en… Vi skal bygge oss opp til enda ett toppunkt da. Så vi vil jo få et.. sann ca. Der han er null igjen sann at det blir ett toppunkt. Sida den er negativ så vil den fortsette nedover, men jeg vet ikke helt hvordan jeg skal tegne den.
662	Eili	Det er bar en skisse, så det er ikke det som er viktigest
663	Kristian	Ja, okei. Noe sant da.
664	Eili	Hvis du bare markerer funksjonen med f' sann at jeg har det til etterpå? Okei, så nå kan du prøve å tegne den andrederiverte.
	Kristian	[…] Noen uinteressante utsagn
671		Vi kan markere der vi har nullpunkt for den andrederiverte, der vi har ekstremalpunkt for den deriverte, for det blir samme sammenheng.
672	Eili	Mmhm.
673	Kristian	Ehm… ja, og.. Her ser vi jo at då må vi ha en. Mmhm. Den vil vere positiv fram til. Så hvis vi begynner. Ja. Negativ ja. Den krummer, det blir konkav. Det betyr at vi begynner. Hmm ja, det blir fortsatt.. Jeg vet ikke hvor en skal begynne.
674	Eili	Nei, men det er litt vanskelig å si og, i forhold til den informasjonen du har, så det er ikke noe..
675	Kristian	Okei. Ehmm. Også, ehmm. Vil vi da ha..
676	Eili	Ja, hva tenker du nå?
677	Kristian	Nei, altså nå blir det jo sann at vi har.. Siden denne, den deriverte da går nedover mot ekstremalpunktet. Det vil jo si at den andrederiverte er negativ fram til når det er nullpunktet med samme x- verdi (peker på bunnpunktet til f'), på samme måte som denne vil gå nedover. Sant, og då, når en har kommet hit, så kan en gå til neste ekstremalpunkt, som vil gå her (peker på toppunktet til f'). Så en ser at den krummer og vil gå gradvis brattere og brattere… Men dette, nå har jeg gjort noe feil. Nei, joda joda. Dette tilsvarer ca vendepuntket på- ja det gir mening,
678	Eili	Mhmm
679	Krisitan	Det er litt vanskelig å skille de av og til
680	Eili	ja

681	Krisitan	Mhhh. Da vil vi ha en positiv akselerasjon fram til det neste vendepunktet, så da har vi ei linje som går, ja. Fortsatt veldig stygg. Ja.. sant, sann ca vendepunktet her og.
682	Eili	Ja, da fikk du på en måte sjekka, eller kontrollert at vendepunktet var der?
683	Kristian	Ja. Den ble litt stygg men ja.
684	Eili	Joda, men det er tankene her som er viktig
685	Kristian	Også har vi igjen då. Negativ akselerasjon etter det. Så den går nedover.
686	Eili	Ja. Så bra. Hvis du berre markera den og med f''. Det er kjempefint. (Avsluttet deretter intervjuet slik som forklart i Vedlegg 2)

Intervjuet med Tora:

700	Eili	Då begynner vi på første spørsmål: kan du huske en spesiell situasjon der du kanskje tenke at det gikk opp et lys for deg, eller at du forsto mer av den andrederiverte? Tror du at du kan huske en sånn situasjon nå, hvis du nå ser tilbake på hvordan oppgavene var og..
701	Tora	Det var jo når vi dreiv og diskuterte sammenhengen mellom den deriverte, den andrederiverte og selve funksjonen. Det hjalp veldig.
702	Eili	Mhmm. Hva var det som gjorde at dette hjalp?
703	Tora	Altså, Det hjalp kanskje det at vi måtte forklare på en enklere måte, til en sann avis..
704	Eili	Ja.
705	Tora	Ehh.. Han som skulle skrive om det. Det gjorde at vi måtte gjøre det enkelt og forståelig, og det gjorde jo at vi forsto mer selv og av det
706	Eili	Det er helt sant. Ja, så da tenker du at dere da måtte gjøre det enklere da, at det var en ting som påvirket. Er det andre ting enn det som påvirket? (stille) Så i det arbeidet er bruken av GeoGebra et hjelpemiddel da, ehmm… synes du det var nyttig å bruke GeoGebra her?
707	Tora	Ja, det var veldig nyttig. GeoGebra har jo en sann regresjonsgreie, der en kan gjøre om fra punktene vi hadde i regnearket, til grafen som vi fikk. Ellers kan en i GeoGebra dra i aksene sann som en vil og zoome inn på akkurat det en vil. En kan plotte inn for å få vendepunkt og toppunkt, og en kan se at det er felles der.
708	Eili	Mmmhm ja det er sant. Hva var det som var felles sa du?
709	Tora	Toppunktet i den deriverte er den same som vendepunktet i den andrederiverte
710	Eili	Mmhm… ja…Er det noen andre situasjoner her (peker på oppgaven om journalisten)?
711	Tora	Det at en kan knytte det til fysikken. Når vi har om den andrederiverte så kan en knytte det til akselerasjonen.
712	Eili	ja
713	Tora	Så her måtte vi og forklare det med bil. Det var en litt enklere versjon. I fysikken så tenke en jo på akselerasjon som både negativ og positiv. Det blir en litt vanskeligere måte å tenke på igjen. Men dette ble litt enklere.
714	Eili	Hva som ble enklere?
715	Tora	Det var enklere å tenke på som bil, at en knytter det til noe som er i dagliglivet
716	Eili	Ja, det at en knytter den andrederiverte til noe som faktisk er i dagliglivet. Ja, men det er nyttig. Hvorfor synes du det hjelper på forståelsen?
717	Tora	For eksempel når en øvelseskjører så tenker en må at en ikke må akselerere for mye, så da tenker jeg nå på den andrederiverte når jeg hører det.
718	Eili	Ja, ja men det er bra. Ja, vi kommer også litt tilbake til det der. (Fjernet en del av samtalen. Forklarte at jeg skulle vise en film (Utdrag 4 og 5). Vi så den ferdig og jeg spurte om hun kunne si litt om situasjonen).
719	Tora	Jeg drev jo og blandet litt her, tidligere. Menne.. jeg skjønte jo etter hvert at når den går under null så er den selvfølgelig negativ, men den er positiv hele tiden ellers. Så jeg måtte bare knytte det sammen, at selv om det ser ut som at den går nedover på tegningen, så…
720	Eili	Ja, skal vi se, du kan se på grafen.. Jeg har den på et ark her. Der er den!

721	Tora	Ja, hvis en ser. Selv om det går ned her, så går den aldri negativt. Nei, den blir ikke negativ, den går ikke under null.
722	Eili	Ja, og hvordan påvirker det for funksjonen?
723	Tora	Den stiger hele tiden, men den stiger ikke like mye hele tiden.
724	Eili	Ja, ja det er nettopp det. Men hva var det med den situasjonen som gjorde at du skjønte det, følte du?
725	Tora	Ehh.. Jeg skjønte jo at det var ett eller annet gale når jeg begynte med den der, det føltes litt gale ut og (pekte på der hun hadde tegnet at grafen gikk nedover)
726	Eili	Ja, du nevnte jo det, at du trudde ikke den skulle gå så langt ned, sa du. Men vet du hvorfor du tenkte det?
727	Tora	Jeg tenkte bare at den skulle gå fra konkav til konveks, men at det heller skulle være sann at den fremdeles steg, at det kanskje skulle være sann at det ble som et terassepunkt, heller enn at den steg ned igjen.
728	Eili	Mhmm.. men var det en spesiell grunn til at du tenkte at den ikke skulle gå nedover da? Eller?
729	Tora	Jeg er ikke heilt sikker.
730	Eili	Nei, det går fint. Det er ikkje så enkelt å tenke tilbake på alt en tenkte. Men du sa jo at du trodde den ikke gikk så langt ned.
731	Tora	Jaa..
732	Eili	Men synes du at denne situasjonen påvirket det du forsto av den andrederiverte, på en måte?
733	Tora	Ja, jeg sammenlignet jo med den oppgaven i 4e.. ehh, toppunktet på den deriverte var jo vendepunktet på den andrederiverte.
734	Eili	Jaa, skal vi se… Si det en gang til.
735	Tora	Toppunktet på den deriverte var jo vendepunktet på den andrederiverte
736	Eili	Mhmm.
737	Tora	Jeg sa at den måtte i hvert fall ha toppunkt og bunnpunkt et sted. Og da tenkte jeg i forhold til den andrederiverte, om hvor mye den akselererte.
738	Eili	Mmhm
739	Tora	Og på grunn av at den deriverte aldri var negativ, så vil jo heller ikke den andrederiverte være negativ heller.
740	Eili	Okei, hva var det du sa nå? Nå datt jeg litt av her. Det her er jo den deriverte da egentlig, mens dette her er jo funksjonen?
741	Tora	ja
742	Eili	Ja okei, men kan du berre gjenta det du sa nå, jeg datt litt av jeg. Si det en gang til
743	Tora	Jeg tenkte jo at der med toppunktet og bunnpunktet, der med vendepunktet. For siden den deriverte går jo aldri under null. Og vi kan jo tenke, hvordan vil funksjonen se ut, hvis en tenker.. Så den vil jo stige, men den stiger jo ikke like mye heile tiden.
744	Eili	Ja, jeg skjønner.
745	Tora	ja
746	Eili	For det blir jo litt. For vi snakker jo egentlig ikke om den andrederiverte her.
747	Tora	Ja
748	Eili	En går jo fra den deriverte til funksjonen.
749	Tora	Ja, men det å gå fra andrederivert, til derivert, til funksjonen, en har jo sammenhengen mellom de.
750	Eili	Ja, det er nettopp det. Ehhh.. For i A, så skulle en jo se sammenhengen mellom funksjonen, den deriverte og den andrederiverte, sant? Mens her begynne en jo fra den deriverte og går til funksjonen? Og det er jo litt merkelig på en måte, det er jo nesten integrering på en måte, sant? Kan du sei noe mer om det å prøve å bytte mellom funksjonane?
751	Tora	Det er jo på en måte å snu litt på hvordan en tenker og, jeg sammenlignet jo med oppgaven tidligere (altså oppgave A), og tenkte at hvis jeg ikke hadde hatt funksjonen der, jeg visste jo hvordan funksjonen så ut da, så det hjalp å se på den deriverte der, for å finne funksjonen.
752	Eili	Ja. Hvordan gjorde du det?
753	Tora	Jeg så på hvordan det var i forhold til konkav og konveks særlig, og i forhold til vendepunktet
754	Eili	Og hva var det du så av sammenhengen da da?

755	Tora	Jeg husker ikke helt, men jeg tror det var at når den gikk fra å være konkav til konveks. En ser jo at den er konveks her (peker på f), og den her er på en måte motsatt vei, altså konkav (peker på f '). Konkav er jo det motsatte av konveks. Så det vil vel stemme her også. At det blir motsatt (altså motsatt konkavitet mellom f og f '. Peker på tegningen)
756	Eili	Ja okei. Men då tror jeg at vi sier og ferdige med dette her. Hvis vi prøver å tenke litt tilbake her, hva var det med den situasjonen her som påvirket til at du forstår den situasjonen her? Og du sa jo du at det å sammenligne med den forrige oppgava var en ting, er det mer enn det?
757	Tora	Det er jo litt det å høre på andre sine vinklinger om det en snakker om. De har jo kanskje tenkt på ting på andre måter enn jeg selv ville sett. Høre hva de tenker
758	Eili	Mhmm. Det er jo og litt det som skjedde på filmen her i sta, at han sa hva han tenkte om oppgaven. At det kan ha gjort noe med hva du forsto?
759	Tora	Ja, det gjorde det.
760	Eili	Ja, forstår. Men det er fint. Da tror jeg at vi går over på litt mer sann, nå har jeg litt mer sanne tema da, som vi skal snakke om. Ja, her er det og en fordel om vi klarer å knytte det til konkrete eksempel då. Så vi får se. Først og fremst vil jeg si at oppgavene er bygd på virkeligheten eller ekte data. Og da lurte jeg på hvordan du synes det er å jobbe med ekte data eller ekte tall?
761	Tora	Jeg synes det er spennende, det er jo problem med CO2 i Bergen og. Så tenker jeg, kan en kanskje ha.. Dette er jo andre steder da, men en kan kanskje ha sanne situasjoner i Bergen og, for å få det enda mer nærliggende. Men det var veldig fint at det var mer realistisk slik det var.
762	Eili	Ja, og hva er det med den realistiske situasjonen (ble avbrutt av Tora)
763	Tora	Det var data som hadde betydning på en måte. At det ble satt i en litt annen sammenheng liksom, det er ikke bare: Okei, når den andrederiverte er lik null og alt det der, eller vendepunkt og sånn, som bare er tall liksom, men dette var noe med betydning. Da ble det litt enklere å sette dette i en sammenheng, som ga mening på en måte.
764	Eili	Det er helt sant!
765	Tora	ja
766	Eili	Ja, skjønner. Det er sant. På hvilken måte synes du.. påvirket det her forståelsen din, om hvordan du forsto den andrederiverte- det at det var ekte data?
767	Tora	Det var vel et.. I forhold til den andrederiverte så.. Før har jeg bare tenkt på det som en tegning på et grafikkfelt, men å kunne knytte det til noe konkret. Det var jo endringen i tiden. Vi kunne se på tallene at det hadde skjedd noe.
768	Eili	Ja, det er nettopp det å kunne knytte det til noe som faktisk har skjedd. Vi kommer over på det vi nettopp snakka om tidligere, om akselerasjon og oppbremsing. Hva synes du om det å knytte den andrederiverte til de orda? Det var litt det vi snakka om tidligere, egentlig.
769	Tora	Det er enklere fordi en kan visualisere det og, og for å knytte det til en mer hverdagslig tale kanskje.
770	Eili	Mmhmm. Ja, det er heilt sant. På en måte, det blir litt mer, en forstår det litt bedre.. Ja, også har vi: vi har jo flere virkelige problemstillinger her, vi har blant annet: når er et tydelig tidspunkt for starten av en klimamessig forbedring?
771	Tora	Ja, da måtte en jo se på den andrederiverte når akselerasjonen var negativ, hvor det faktisk gikk nedover slik at det ble en forbedring. Det var veldig greit for å knytte til den andrederiverte.
772	Eili	Ja, her var dere inne på flere alternativ, og diskuterte forskjellige ting.
773	Tora	Ja, det var enten når akselerasjonen begynte å bli lavere eller når akselerasjonen ble negativ. Men det klareste punktet for klimamessig forbedring, da tenkte vi på der den ble negativ. For det var det som var mest tydelig.
774	Eili	Ja, for her må en både diskutere i forhold til matematikken, hvorfor mener du at det var mest tydelig akkurat der den ble negativ?
775	Tora	Fordi at det var der x- aksen krysser den andrederiverte, da kan vi ha et bestemt punkt
776	Eili	Mmhm.. Hva viser det sann praktisk, mener jeg?
777	Tora	Praktisk. Det er jo at det synker. At det blir mindre.
778	Eili	Akselerasjonen da som er den andrederiverte? (Tora nikker)
779	Tora	Ja.
780	Eili	Ja, også har vi den andre. Det med at vi skulle fortelle til en journalist. Det er jo for så vidt en realistisk situasjon. Kan du si noe mer om det, i forhold til den andrederiverte?

781	Tora	Det som skjer er jo at vi måtte gjøre det enkelt og forståelig, og det gjorde jo at vi forsto mer selv og av det. Det blir på en måte lettere å forklare det og mindre komplekse ting er lettere å huske og lettere å forstå.
782	Eili	Ja, du sa litt om det i sta og, så jeg tror det er greit. Da går vi inn på neste tema, det med at en i ekte data- oppgavene ikke har en gitt framgangsmåte. Hvordan vil du si at det påvirket arbeidet deres, og på en måte valg av metoder og sanne ting?
783	Tora	Det ble litt mer åpent og det gjorde at vi kunne diskutere oss litt mer fram til hva vi mente var den beste (metoden), i stedet for å gi så lett opp og heller sjekke fasit. Siden en ikke har sjans til å sjekke svarene, må en forsikre seg om at det er rett. Det er egentlig en god trening til eksamen. Vi hadde jo gjort noe lignende i fjor da, men det hadde ikke hun ene på gruppen. Så vi måtte jo forklare det til hun, og det gjorde jo at vi måtte repetere litt der. Det var og bra.
784	Eili	Det er sant. Det er godt poeng egentlig.Og hvis vi skal snakke litt mer konkret inn mot den andrederiverte da, påvirket det at dere ikke hadde en spesiell framgangsmåte hvordan du forsto den andrederiverte? Kan du si noe om det?.. (stille). For det som er, i boka, så har en ofte en veldig framgangsmåte om funksjonsdrøfting og sann som det. Mens her blei det litt annerledes
785	Tora	Vi fikk jo ordlegge oss selv, og lage vår egen definisjon, men fremdeles at den forklarte godt men fremdeles sann at vi forsto det.
786	Eili	mmhm
787	Tora	Og at den., når vi ordla oss selv så ble det bedre forståelse, og at vi kunne forklare dette videre til andre igjen som vil gjøre sin vri på det. En kan omformulere det. Det blir i hvert fall mye diskusjoner, mer forslag fra andre om hva som kan gjøres, og diskusjoner om de forskjellige forslagene.
788	Eili	Ja, det er sant. Det er nettopp det. Det var ikke gitt at «finn den deriverte eller andrederiverte». Det sto jo heller, finn akselerasjonen. Det var på ingen måte gitt hva dere skulle gjøre, så det måtte dere finne selv, og tolke den situasjonen og den problemstillingen, til at en skulle bruke derivasjon og den andrederiverte.
789	Tora	Ja.
790	Eili	Ja, er det noe mer enn det du vil si?
791	Tora	Nei jeg tror ikke det
792	Eili	Jaa, også var det det at du ikke hadde noe fasit tilgjengelig?
793	Tora	Ja, vi måtte være mye mer kritisk til oss selv. Vi måtte tenke gjennom om det vi gjorde var riktig, og kan det være noe feil her? Og samtidig så kan noen oppgaver ha flere mulige svar, for eksempel de drøftingsoppgavene. «Når er det en klimamessig forbedring?» Så da må en selv finne en definisjon på det.
794	Eili	Det er sant. Også argumentere ut fra det da. Da måtte dere selv bestemme hva det betyr og diskutere matematisk og praktisk. Men synes du at du klarte å bruke det du kunne fra før om den andrederiverte i møte med dissa oppgavene?
795	Tora	Ja, for jeg husket jo at den andrederiverte hadde med akselerasjon å gjøre. Men jeg husket ikke helt hvordan den andrederiverte var knyttet til den deriverte og til funksjonen. Så det hjalp å gjøre det her sann at jeg husket det.
796	Eili	Ja, det er bra. Da går vi over på neste tema her, det som er om samarbeid, dialog og diskusjoner. Ehhm.. Altså ja, hvordan synes du at diskusjonene kunne bidra til at du forstår mer underveis?
797	Tora	Jo, det var det at en får andre sine synspunkter. Det er jo alltid flere sider av en sak. Så forskjellige fremgangsmetoder kan forskjellige personer komme opp med, og da får en utvidet hvilke metoder en kan bruke og at en da forstår mer.
798	Eili	Ja, det er sant. Og hva synes du om det å.. Nå snakker du litt om det å høre hva andre tenke. Hva synes du om det å fortelle andre om det du tenker?
799	Tora	Det er en veninne av meg som sier at når hun forklarer andre så synes hun at hun lærer det godt selv fordi hun da repeterer det så mange ganger at det sitter enda bedre. Når en sier det så mange ganger selv og repeterer det, så sitter det enda bedre.
800	Eili	Mhmm… Ja, synes du det gjelder for din del og eller?
801	Tora	Ja
802	Eili	Ja, men det er typisk det. Det er når en prøver å forklare selv at en finner ut om en har skjønt det, ofte. Så det er bra. Og synes du det hjelper når læreren kom inn og stilte spørsmål?
803	Tora	Ja, altså det er det med kritisk tenkning, også må vi tenke om dette kanskje ikke er riktig likevel? Kanskje vi heller skal prøve oss mer i den veien?

804	Eili	Er det en konkret situasjon du snakker om nå eller?
805	Tora	Ehh, det var i den oppgaven da vi snakket om sammenhengen mellom f, f' og f''. Da ga hun oss noen pekere på hvordan vi skulle se, og da var det lettere å kunne forstå det.
806	Eili	Ja, hva var det hun sa da? Jeg kan ikke huske akkurat det.
807	Tora	Nei jeg husker det ikke helt jeg heller
808	Eili	Nei.
809	Tora	Ja, hun spurte hva er den deriverte og hva er den andrederiverte? Hun fikk oss til å tenke over hva er akkurat de.
810	Eili	Mhmm. Det er flott. Da går vi over på bruken av GeoGebra, er det noe som gjør det vanskeligere eller enklere å forstå den andrederiverte?
811	Tora	Jeg synes det er enklere. For når en tegner for hand så blir det masse unøyaktigheter, og å se det visuelt i GeoGebra så hjelper det jo.
812	Eili	Ja, kanskje spesielt på den oppgave A, 4e. Synes du at du hadde nok kunnskaper om GeoGebra når du jobbet med de oppgavene her?
813	Tora	Ja, vi har jobbet en del med GeoGebra ellers. Vi gjorde for eksempel regresjonsanalyse i modelleringsprosjektet i fjor også.
		[…] (Urelevant samtale. Snakker om det de gjorde i fjor)
816	Eili	Men da fikk du litt innsyn i det der ja. Også hadde du jo brukt det med regresjonsanalyse før. Ja, men nå har vi snakka om flere ting som kan påvirke forståelsen av den andrederiverte. (Repeterer punkta vi har snakket om.) Er det flere ting som du mener påvirker forståelsen av den andrederiverte?
817	Tora	Ja, jeg tror ikke det er så mye mer…
818	Eili	Okei, det er greit. Nå har vi jo snakket om flere ting som påvirket forståelsen. Så hvis du klarer å ordlegge deg, hva vil du si at du nå forstår av den andrederiverte i ettertid av prosjektet? Eller, hva kan du?
819	Tora	Altså, jeg kan jo definisjonen på den andrederiverte, det er jo endring per tid. Og jeg vet hvordan toppunktene og bunnpunktene knyttes til den andrederiverte og til selve funksjonen
820	Eili	Ja, og hvordan er det, vil du si?
821	Tora	Ja, det er når vendepunktet, når akselerasjonen blir negativ, da går den fra å være konkav til konveks (tolker dette som at funksjonen går fra konkav til konvekst og at vendepunktet derfor blir her). Eller en av delene. Slik at akselerasjonen blir negativ, bilen kjører saktere. Den, ja..
822	Eili	Ja, og andre ting i forhold til den deriverte eller andrederiverte, om hvordan det henger sammen?
823	Tora	Toppunktet på den deriverte er også vendepunktet på den andrederiverte. Dette er faktisk en sammenheng som jeg ikke visste om tidligere.
824	Eili	Så det var en ting du følte at du skjønte mer nå. Ja men det er bra.
825	Tora	Ja.
826	Eili	Ja. Ja, vi skal sjå på noen oppgaver nå straks, sann at det blir litt mer konkret. Men jeg har et spørsmål til: Kan du se for deg i hvilke situasjoner du kan ha nytte av den andrederiverte? Enten praktiske situasjoner, jobb, studier eller naturfenomener
827	Tora	Ja, altså særlig bil og øvelseskjøring. En må ikke akselerere så mye for å holde jevn fart osv.
828	Eili	Er det andre eksempel og?
829	Tora	Ehh jeg vet ikke helt.
830	Eili	Altså, nå hadde jo vi om co2- for eksempel, er det andre naturfenomen for eksempel?
831	Tora	Øhhf.. Det eneste, vi har jo fysikk og, det har vi om akselerasjon og. Det har vi om fritt fall. Det har vi om akselerasjon. Så der kunne en ha satt opp den andrederiverte og regnet ut akselerasjonen i fritt fall.
832	Eili	Ja, men der har du et eksempel.. Så neste spørsmål er om du tror at du nå, med de erfaringene du har fra ekte data- prosjektet, at det vil bli lettere å kunne forstå nye oppgaver med den andrederiverte?
833	Tora	Ja, det tror eg.
834	Eili	Ja, vi skal i hvert fall se på en oppgave nå. Så skal vi se. Dette her skal være en situasjon. Det viser altså økonomien til ei bedrift, der vi altså har beløpet på konto i millioner kroner, her har vi altså først 4 millioner kroner. Og her har vi år bortover her.
835	Tora	Ja.

836	Eili	Så hvis en skal se på den økonomisituasjonen her. Kan du prøve å beskrive den ved hjelp av matematiske begrep?
837	Tora	Ja, det er jo at den i starten går fra et relativt høyt forbruk, der den går fra å være konkav til konveks.
838	Eili	Men hva er det du mener med forbruk?
839	Tora	Ja, eller, beløp.. Åja, det er motsatt. Akselerasjonen her er høyere her enn her, så da blir den lavere. Også sparer han her, så da får vi en negativ akselerasjon.
840	Eili	Hvor blir det negativ akselerasjon? Hvis du peker på hvor det er negativ akselerasjon da?
841	Tora	Ehh.. Det er jeg ikke heilt sikker, jeg tror jeg bare tenkte litt sann, nei jeg tenkte. Jeg må se. Først tenkte jeg jo motsatt, at det var som i et forbruk, men det er jo det vi egentlig har
842	Eili	Ja, det blir riktig. Ja?
843	Tora	Så har vel kanskje negativ akselerasjon her? (peker fra toppunktet til bunnpunktet)
844	Eili	Hvor mener du? Hvis du sier et årstall?
845	Tora	Ca her.
846	Eili	Ja, 0,5 ca,
847	Tora	Men så begynner den å flate ut her ved bunnpunktet.
848	Eili	Ja, så du mener det blir negativ akselerasjon fra 0,5 og bort på her en plass da? Til 2,3 eller noe sant.
849	Tora	Ja.
850	Eili	Ja, ser den. Men hvis du forklarer helt vanlig på en måte, hvordan økonomien utvikler seg?
851	Tora	Ja.. Det er spart opp en stund, nesten et år, men så begynte en å bruke en del, så beløpet ble mindre igjen, også begynte de å spare opp igjen.
852	Eili	Ja, hvor begynner de å spare opp igjen?
853	Tora	Han begynner å spare opp igjen her.
854	Eili	Fra 2,2 da. Ja, men det var for så vidt en grei beskrivelse, men hvis du skal gi litt mer konkrete svar på det spørsmålet her. Hva ville du gjort då? Altså, viktige tidspunkt for den økonomiske situasjonen for bedriften?
855	Tora	Viktige tidspunkt vil jo være toppunkt og vendepunkt til funksjonen.
856	Eili	Ja, så du kan bare finne det viss du vil? Ja, der har vi ekstremalpunkta, a og b ja. Ja, der har vi vendepunktet og. Kan du gjøre noe mer for å si mer om bedriften?
857	Tora	Det er jo å finne den deriverte og andrederiverte.
858	Eili	Ja, vi kan gjøre det. (ho gjør det). Ja, nå kan vi si litt mer tenker jeg?
859	Tora	Vi har jo negativ akselerasjon her. Så den var negativ til rundt her, før den begynte å bli positiv. Så akselerasjonen økte og økte etter der. Så da ble det spart opp mer etter hvert.
860	Eili	Ja, og hvordan ser du sammenhengen med den første grafen vi hadde (f)? For du tenkte jo at når vi så på den første grafen så ville det være negativ akselerasjon fra toppunktet til bunnpunktet
861	Tora	Ja, men det var litt.. Det skulle heller vært nærmere her, rundt vendepunktet.
862	Eili	Og hva med tiden før toppunktet? (snakker om f)
863	Tora	Den er jo negativ her og (peker på f). Akselerasjonen blir jo mindre hele tiden her. Så endringen blir jo mindre og. Det ser en her og (peker på f')
864	Eili	Okei. Skjønner
865	Tora	Ja, det blir nok sann ja.
866	Eili	Ja. Jeg tenkte at vi ser på hver enkelt av grafene, også kan du prøve å si hvor det er positiv og hvor det er negativ akselerasjon. Du kan velge hvilken du vil begynne med.
867	Tora	Det enkleste er å begynne med den andrederiverte, det er jo når den er over og under null. Positiv er jo når y er positiv og negativ når y er negativ.
868	Eili	Ja. Da kan vi gå videre på den neste.
869	Tora	Det er jo og at. Det her er jo sånn… Bunnpunktet var knyttet til vendepunktet. Bunnpunktet er knyttet til når den krysser x- aksen(peker på den andrederiverte). Så det er der den går fra negativ til positiv.
870	Eili	Ja, for den deriverte, hva er det den viser?
871	Tora	Den viser endringen. Endringen blir her mindre også blir den igjen større.

872	Eili	Ja. Det er sant. Og hvordan ser vi det her igjen i funksjonen i seg selv?
873	Tora	Det ser vi jo at.. Han har jo aldri en veldig bratt kurve.
874	Eili	Ja?
875	Tora	Skal vi se.
876	Eili	Ja, det var litt det du sa i sta, hvor er det positiv og negativ akselerasjon på den grafen?
877	Tora	Jeg trodde jo først at det var negativt rundt her, men det er jo egentlig rundt hele.
878	Eili	Og hvordan kan du argumenterer for hvorfor det er det? Altså, du kan jo forklare det, ut i fra å se på den, og ikke bare med å se på den andrederiverte.
879	Tora	Altså, det blir jo mindre hele tiden. Viss en hadde satt en linjal inntil hele tiden, så ser en at det blir mindre hele tiden
880	Eili	Ja, hva er det som blir mindre egentlig?
881	Tora	Stigningen er det som blir mindre.
882	Eili	Det er sant. Ja. Så det gjelder selv om funksjonen stiger, så blir endringen mindre. Så nå var du kommet hit, så viss du forklara resten?
883	Tora	Det er tydelig at her blir den mindre og mindre. Men når den kommer ut i her så blir den større igjen.
884	Eili	Ja, det var en god måte å tenke sann med tangenten. Kor er det ut i fra det her at akselerasjonen snur?
885	Tora	Det er i vendepunktet, når den går fra å være konkav til konveks.
886	Eili	Ja, der har du ordet sant, når de går fra å være konkav til konveks. Veldig bra. Så, hva vil det helt praktisk, når vi tenker tilbake til økonomisituasjonen, hva vil det si at vi har en positiv akselerasjon i økonomisituasjonen?
887	Tora	Det vil si at vi sparer opp mer hvert år. Så en blir jo flinkere til å spare opp når det er positiv akselerasjon.
888	Eili	Hvis du nå hadde vært leder for den bedriften her og vi var i tida 0,2. Hadde du vært stresset da som en leder i bedriften, eller ville du da satt i gang tiltak?
889	Tora	Hvis en bare ser fram til det punktet, så ser en jo at akselerasjonen blir mindre og at en ikke sparer opp like mye. Så en bør kanskje gjøre noen tiltak da
890	Eili	Og, viss en nå var i tida 1, 8 eller 2. Hadde du vært stressa da?
891	Tora	Nei, for da ser en at den har vært mye brattere, men nå begynner den å flate ut mer. Den begynner å stige mer
892	Eili	Ja, eller, selve økonomien stiger ikke, den synke jo
893	Tora	Nei, men akselerasjonen stiger
894	Eili	Og hva kan det si oss, på en måte?
895	Tora	At de.. Det var jo det med at de taper mindre..
896	Eili	Ja, det er fint. Og hvis du skulle sagt, hvor ser det ut som at de har gjort et tiltak her?
897	Tora	Det vil jo være vendepunktet på grafen?
898	Eili	Og hvorfor tenker du det?
899	Tora	Det er jo fordi at da en ser på akselerasjonen og, det er når en går fra negativ til positiv.
900	Eili	Ja, men du tenker ikke at det er i bunnpunktet at det er gjort tiltak?
901	Tora	Det er kanskje mest tydelig på den. Men hvis en ser på f ' og f '' så er det mer tydelig at en ser at endringen går fra å synke til å stige.
902	Eili	Ja.
903	Tora	Mhhm..
904	Eili	Ja men det er bra argumentert. Så hvis en skulle sett etter et tydelig tidspunkt der den økonomiske situasjonen ble bedre, hva ville du sagt da?
905	Tora	Helt tydelig.. Det blir jo…
906	Eili	Eller, et tydelig tidspunkt for starten av en økonomisk forbedring?
907	Tora	Det er jo når akselerasjonen går fra negativ til positiv.
908	Eili	Jeg tror det er greit. Nå skal vi over på en annen oppgave som ikke er med GeoGebra. Her tenker jeg at en rett og slett skal tegne selv. Prøv å tegn f ' og f '' når du har den. Du kan også få flere farger hvis du vil. Og forklar det du tenker

909	Tora	Fra konkav til konveks. Da går jo endringen nedover. Endringen blir mindre. Også stiger den her igjen, omtrent i vendepunktet.
910	Eili	Ja, du skal tegne både den deriverte og andrederiverte.
911	Tora	Sann, også, i vendepunktet tror jeg det er omtrent, at den stiger igjen. Men så igjen her så blir den vel sann?
912	Eili	Ja, det er den deriverte?
913	Tora	Ja, så da blir det bunnpunkt i den deriverte blir vendepunkt i den andrederiverte. Ja, den går vel litt nedafor. Rundt her egentlig. Ja. Så der blir vendepunktet sann omtrent.
914	Eili	Ja, så der er toppunktet der den har vendepunktet. Ja. Hvis du setter på f, f ' og f ''(hun skriver). Er det noe mer du vil si om den?
915	Tora	Jeg tror ikke det?
916	Eili	Men hvorfor at du tegnet grafene slik at de står når en tenker på y- verdier?
917	Tora	Ehh.. Egentlig har jeg ikke tenkt så mye på de verdiene. Jeg har egentlig bare fokusert på sammenhengen mellom vendepunktene og toppunktene og bunnpunktene.
918	Eili	Ja, nei men da.. tror jeg det er i orden ja… Ja… nei men da var vi egentlig ferdig.. mhmm.. Ehmm.. ja. Eller, jeg bare kom til å tenke på. Jeg skal bare spørre om en liten ting før vi gir oss. Hva skjer med toppunktet her (på f), har du tatt hensyn til det? Når du har den deriverte og den andrederiverte? Hva tenker du om hvordan den deriverte er når vi har topp og bunnpunkt på funksjonen?
919	Tora	Er ikke det der den går fra å være konkav til konveks i den deriverte, eller?
920	Eili	Der funksjonen har ett toppunkt der vil den deriverte ha et vendepunkt, er det det du sier?
921	Tora	Ja, jeg tror det.
922	Eili	Men hva med det toppunktet og det toppunktet? Hva vil du si om det?
923	Tora	Det vil vel bli vendepunkt her og (tegner)
924	Eili	Okei… Ehh.. Men da tror jeg det er greit. Vi kan si oss fornøyde her. (Avslutter deretter intervjuet intervjuet slik som forklart i Vedlegg 2)

Intervjuet med Siri:

1000	Eili	Ja, nå er vi i gang. Første spørsmål, jeg bare tok med oppgavene og, hvis du vil se litt på de. Første spørsmål er: var det noe som gjorde at du følte at du skjønte mer av den andrederiverte enn du gjorde før i modelleringsarbeidet? Og kan du i så fall huske en sånn situasjon?
1001	Siri	Ehmm. Det med den andrederiverte?
1002	Eili	Ja.
1003	Siri	Ehmm. Det var jo den situasjonen da vi skulle si hva som var sammenhengen mellom de grafene og hvordan jeg fant de og hvordan jeg kunne se de .
1004	Eili	Ja, det var vel den oppgava her (peker på oppg. 4e). Da en skulle forklare det til en journalist.
1005	Siri	Mhmm. Da måtte en sette seg litt mer inn i det. Hva det gikk ut på. Det var det jeg følte.
1006	Eili	Hva var det med den situasjonen som gjorde at du følte at du kanskje forsto mer?
1007	Siri	Det var liksom at en måtte tenke tilbake på når en fant nullpunktene, sette den deriverte lik null og når en skal finne vendepunktene så setter vi den andrederiverte lik null. Og hvordan jeg så det på den da.
1008	Eili	Mmhm, nettopp. Ja, men vi kan se litt mer tilbake på det konkrete etterpå. Så det, ja men det er veldig bra. Også var det jo det at en skulle forklare det til en journalist, synes du at det påvirka noe?
1009	Siri	For at vi skulle forklare dette til journalisten, så måtte vi tenke litt mer over det, i stedet for å bare si det vi hadde lært rent teoretisk eller matematisk. Også forklarer en på en måte litt til seg selv og.
1010	Eili	Ja, det er nettopp det. Det er jo utfordrende.
1011	Siri	Ja, en må liksom tenke i andre baner da.
1012	Eili	Mhmmm. Ja det er sant. Hva mener du? Med å tenke i andre baner? Hvordan i andre baner?
1013	Siri	Hva tenker du?
1014	Eili	Ehh, du sa at en må tenke i andre baner, hva mener du med det?

1015	Siri	Ehh.. Du skal jo, for en skal jo tenke at en snakker med en som aldri har hørt om derivasjon for eksempel, og en skal jo forklare hvordan en ser det, uten å snakke reint matematisk.
1016	Eili	Ja, supert. (Nå forklarte jeg henne at vi skulle se på en video fra modelleringsprosjektet (Utdrag 1)). Så da lurte jeg først på om det var noe du ville si om den situasjonen der?
1017	Siri	Om situasjonen?
1018	Eili	Ja, det som skjedde her.
1019	Siri	Ja, altså det vi diskuterte var jo hvordan vi så at akselerasjonen akselerte raskt. Så vi måtte prøve å finne en forklaring på det, matematisk. Så kom vi inn på vendepunkt, om det kunne ha noe med det å gjøre.
1020	Eili	Ja, når det akselererte raskt ja. Mhmm. Hvorfor tenker du at vendepunktet kunne si noe om når den akselererte raskt, på en måte?
1021	Siri	Ehm.. Altså, vendepunktet er jo der den begynner å snu fra konveks til konkav.
1022	Eili	Ja, det stemmer.
1023	Siri	Når den er konveks da er den smilende, da vokser den, går den oppover. Da kan en si noe om når den akselererte mest. Mens når den er konkav så er det når den minker igjen. Vendepunktene er det som styrer de, om hva som skjer.
1024	Eili	Ja, og i samtalen med Tora så bekreftet jo du at det stemmer at det er akkurat når den snur, og det er riktig. Ja, så hva kan du si om akselerasjonen jeg entlig, og oppbremsing, ut ifra vendepunktet?
1025	Siri	Ja, altså oppbremsing er når den er negativ, når den er under null da.
1026	Eili	Hva er det som er under null forresten? Er det funksjonen eller?
1027	Siri	Jaa, det er vel den deriverte? (ser litt usikker ut)
1028	Eili	Ja, når den deriverte er.. negativ, da har vi oppbremsing?
1029		Ja.
1030	Eili	Ja, så hva kan du si om oppbremsing og akselerasjon ut i fra vendepunktet?
1031	Siri	Hva den viser?
1032	Eili	Ja, du var inne på det her i sta
1033	Siri	Det med konkav og konveks?
1034	Eili	Ja, og når er det oppbremsing og når er det akselerasjon, i forhold til konkav og konveks?
1035	Siri	Når den er konkav så er det akselerasjonen da. Nei da den er konveks så er den smilende, og på den deriverte så gikk den jo under null og var negativ. Akkurat når den begynner å bli konveks så stiger den over igjen.
1036	Eili	Ja, vi kan jo se på et eksempel for å se litt mer konkret (Ser på funksjonen fra A). Her er den konveks og her er den konkav. Så hvor er det oppbremsing her nå?
1037	Siri	Altså den går jo aldri under null. Altså den er jo konveks og akselerer her, også er det en oppbremsing her en plass da.
1038	Eili	Så akselerasjon der den er konveks og oppbremsing der den er konkav. Var det noe med den situasjonen her som gjorde at dere tenkte på vendepunkt i den situasjonen fra filmen?
1039	Siri	Når du deriverer den, så kommer det litt tydeligere når den er konveks og når den er konkav. Og da ser du på den..
1040	Eili	Mhmm. Ja, nei men det er fint. Nå går vi litt inn på litt mer generelle tema, men jeg vil gjerne at vi prøver å knytte det vi snakker om til konkrete eksempel. Så hvis vi tenker på de to eksemplene vi har, den ene med journalisten og den andre fra filmen og da dere nevnte vendepunkt- så ja, Ja, oppgava er jo bygd på ekte data eller virkeligheten på en måte. Hvordan synes du det er å jobbe med oppgaver med ekte data eller ekte tall?
1041	Siri	Altså jeg synes det var veldig interessant. Det er jo noe som dere ikke bare har lagd ut fra fantasien på en måte, det er jo lagd ut fra virkelighet. Og noe som skjer. Vi fikk jo vite sanne historiske data og alt sant, som at det i Norge blir slept ut 40 millioner eller megatonn co2 hvert år, eller de siste årene, ifølge de årene dere har valgt. Og det er ganske mye.
1042	Eili	Ja, det har jo en faktisk betydning.
1043	Siri	Ja, og du får litt meir forståelse av hva som faktisk skjer.
1044	Eili	Ja, det er jeg heilt enig i. Men hvis vi fokuserer litt mer på den andrederiverte nå da. Påvirket det noe på forståelsen av den andrederiverte at det var ekte data? Ehh, skal vi se. For vi brukte jo ord som akselerasjon og oppbremsing, hva synes du om å bruke sanne hverdagslige ord?

1045	Siri	Det blir jo litt lettere å sjå på den deriverte og andrederiverte, om hvor det er og hva som skjer på en måte. Og prøve å forklare det og jobbe matematisk ut fra det.
1046	Eili	Ja, for en kan jo prøve å knytte det her til noe som en har erfaring med da, som akselerasjon. Det husker jeg at du og nevnte, når en snakket om bilen.. mmhm
1047	Siri	Ja, når en sitter i bilen og det akselererer, så tenke en at den går fortere da. At den går i positiv retning. Det er jo når en skal se etter det etterpå, så ser vi etter det. Når det er oppbremsing, så ser vi etter det.
1048	Eili	Ja. Hadde disse ordene noe å si for hvordan du forstår den andrederiverte? Det at vi snakket om akselerasjon og oppbremsing i den sammenhengen?
1049	Siri	Ja, det gjør vel for så vidt det. Med tanke på akselerasjonen. En ser jo at den stiger ganske fort.
1050	Eili	Hvor hen?
1051	Siri	Det blir på en måte her, også synke han veldig. Jeg ser jo ikke for meg at co2- utslippene vil bremse opp så kraftig
1052	Eili	Ja. Mhmm, i og ellers så, når vi snakket om dette med virkeligheten så har vi jo snakket om det med virkelige ord, som akselerasjon og oppbremsing. Men så har vi og litt virkelige problemstillinger, for eksempel her en spør om «er det et tydelig tidspunkt for en klimamessig forbedring?» Hva synes du om det? Husker du da dere diskuterte den situasjonen?
1053	Siri	Jeg husker ikke akkurat da vi diskuterte den situasjonen. Ehhm.. men, hva jeg synes om det?
1054	Eili	Ja, for her diskuterte dere mange forskjellige løsninger? Husker du at dere hadde forskjellige tolkninger av hva som var første tidspunkt for starten av en klimamessig forbedring?
1055	Siri	Altså vi så jo litt på de forskjellige funksjonene vi hadde, og så ut i fra dem om det var i vendepunktet, eller der- akkurat når den flatet ut. Og om hvor det stoppet og hvor det endte,ååhh, jeg kommer ikke på ordet. Jo, intervall.
1056	Eili	Ja. Men viss en skulle sagt et spesielt punkt der en ser starten på en klimamessig forbedring, Hva sier du da?
1057	Siri	Ifølge den? (peker på grafene (Figur 4 og 5))
1058	Eili	Ja enten den, den eller den (f, f'. f'')
1059		Fra 1970 til 1992. og videre fra 2005 og utover.
1060	Eili	Hvorfor tenker du at det er akkurat der?
1061	Siri	Det er fordi det er der en har den oppbremsingen da.
1062	Eili	Hvilken funksjon ser du på, er det den eller den?
1063	Siri	Nå ser jeg i forhold til den. (den andrederiverte)
1064	Eili	Ja, nettopp.
1065	Siri	Men du ser det på den og (peker på der den deriverte går nedover)
1066	Eili	Ja, du ser på den deriverte at den går nedover?
1067	Siri	Mhmm. Og det samme gjelder jo for 2005, da synker jo den betraktelig. Men det er fordi vi ikke har flere data. Så sannsynligvis så vil den ikke synke så kraftig ned.
1068	Eili	Ja, jeg ser det. Og det at her kan en bruke, her har vi jo funksjonen til den deriverte og den andrederiverte, og det å kunne bruke det til å løse et sant praktisk problem da, hva synes du om det på en måte? Var det noe som økte forståelsen?
1069	Siri	Ehh, altså å bruke grafene?
1070	Eili	Nå tenkte jeg på måten en stiller spørsmål, viss enn tenker i sammenheng med sånn som en stiller spørsmål i boken, der er det ofte at en skal finne topp- og bunnpunkt, vendepunkt mm. Mens her stiller en spørsmål på en anna måte. Det står jo ikke her at en skal bruke den andrederiverte.
1071	Siri	Ja, det må en finne ut selv da. Ja, altså.. jeg vet ikke hva jeg skal si. En må tenke litt, en må prøve å bruke det en kan for å finne det. Også må en jo.. jeg vet ikke helt hvordan jeg skal forklare det
1072	Eili	Joda, bare prøv å forklar det du tenker
1073	Siri	Altså, for å skjønne hva den klimamessige forbedringen er, så må en jo skjønne hva eller når det er klimamessig forbedring.
1074	Eili	Mmhm. Ja det er jo en tolkning i seg selv.
1075	Siri	Nei, en må liksom vite hva som gjør at det er en klimamessig forbedring, om det er når den synker eller bremser opp eller.
1076	Eili	Ja

1077	Siri	Ja, det spørs litt hvordan du ser på det og hva du tenker. Men liksom, spørsmålet er jo: starten på en klimamessig forbedring. Det er jo ikke at det synker helt, men det er en liten forbedring i de utslippene som var da.
1078	Eili	Ja, det var det spørsmålet. Da går vi over til det med journalisten. Du sa jo tidligere at det var lærerikt å forklare på en enklere måte til en journalist. Er det noe mer du vil si?
1079	Siri	Ehmm. Altså, når vi skal legge om fra matematisk til hverdagslig språk som du skal forklare til journalisten. Så forklarer du på en måte litt til deg selv også. En får da litt mer forståelse i det og ikke bare det matematiske. Men også det at det er realitet. Ja, jeg vet ikke, det er jo.. ja jeg vet ikke.
1080	Eili	Ja, det er fint. Nå går vi over på neste tema, på en måte. Og det er jo at vi hadde jo ikke en bestemt framgangsmåte her, og synes du at det påvirket hvordan dere jobbet og hvilke metoder dere valgte? Det er jo ikke gitt hvilke dere skulle velge sant.
1081	Siri	Nei det er jo ikke det. Så en må jo samarbeide veldig, snakke og finne ut løsninger. En må jo prøve seg fram og finne ut hva som er best. En må diskutere hva en skal gjøre og hvorfor skal vi gjøre det og sanne ting. Så vi ble litt, det var jo gruppearbeid og vi måtte jo jobbe sammen som en gruppe
1082	Eili	Ja, det er sant. Det måtte dere. Og det her er jo en litt annerledes måte å jobbe med matte på. Ja, nei så det er sant, og påvirket det at det ikke var en spesiell framgangsmåte, hvordan du nå forstår den andrederiverte? I sammenheng med sånn som i boka om andrederiverte, så står det jo veldig ofte, sånn som med funksjonsdrøfting, hvis du husker at dere hadde det. Der sto det jo sånn finn den deriverte …..osv.
1083	Siri	Mhmm..
1084	Eili	Så her var det en litt annerledes måte å jobbe på enn det. Hva vil du si om det?
1085	Siri	Det var vanskelig i starten, fordi vi alltid før har fått det forklart i en teoretisk sammensetning og alt det der. Mens nå skjønte jeg at det stemte jo… Det var liksom at en måtte tenke tilbake på når en fant toppunktene; sette den deriverte lik null. Og når en skal finne vendepunktene, så setter vi den andrederiverte lik null. Og hvordan jeg så på den da.
1086	Eili	Ja det er nettopp det. Det å se sammenhengen med det en har gjort før, det som var før veldig steg for steg.
1087	Siri	Ja. Jeg kommer til å huske det veldig godt nå, når en kan knytte det til en sammenheng med noe. Ikke bare en regneoppgave hvis du skjønner. Og det vi gjorde før måtte vi pugge, dette her går mer på forståelsen da, for min del.
1088	Eili	Ja. Så hva var det som gjorde at det gikk mer på forståelsen da?
1089	Siri	At jeg fikk se på de ulike, å se sammenhengen mellom den deriverte, og se sammenheng mellom bunn og toppunkt på ene grafen i forhold til vendepunkt og nullpunkt på de andre grafane. Se hvordan det henger sammen. Og få det vist da, ut i fra oppgaven som vi holdt på med. Det gjorde at jeg så det på en litt anna måte da.
1090	Eili	Ja, men det er bra. Det er jo heller ikke en fasit tilgjengelig her. Hvordan synes du det påvirket arbeidet? Eller hvordan du forsto den andrederiverte?
1091	Siri	Altså, en må sette seg litt mer kritisk på en måte da. Vi har jo ikke en fasit, så det vi finner ut er ikke nødvendigvis rett. Så en må jo tenke hva som er mest logisk, på en måte.
1092	Eili	Ja
1093	Siri	Også må en jobbe mer sammen siden en ikke har fasit.
1094	Eili	Ja, for i boken så er det jo ofte sånn at når en setter seg fast så kan en sjekke fasiten
1095	Siri	Ja, det er det. Men vi har ikke noen fasit.
1096	Eili	Det gjør jo på en måte at en må jobbe litt grundigere
1097	Siri	Ja, en må liksom sette seg inn i hva den andrederiverte er. Om det gir meining det vi gjør og om det da blir rett. Og om det gir mening om hva den andrederiverte er og hva den har sammenheng med.
1098	Eili	Mhmm! … Da var det et punkt til her: hva synes du om, klarte du å bruke det du kunne fra før i den situasjonen her?
1099	Siri	Ja, altså. Da jeg så at det var en sammenheng med det vi gjorde i GeoGebra og det vi tidligere hadde gjort i boken, så sjekket jeg mer opp i det som sto i boken, hjemme. Og etter det tror jeg at jeg skjønte litt mer. Når jeg husker litt tilbake igjen, så klarte jeg mer å skjønne alt bedre. Sette det i en bedre sammenheng.
1100	Eili	Så det var litt viktig det kanskje da for å forstå hva vi dreiv med?
1101	Siri	Ja, det var det. For å sette meg litt inn i det på en måte.

1102	Eili	Ja, skjønner. Nå kommer vi over på det som vi allerede har snakket litt om: det med samarbeid, dialog og diskusjoner. Det har vi allerede vært litt innpå. Hvordan synes du at diskusjonene kunne hjelpe deg å forstå mer underveis?
1103	Siri	Det har hjulpet meg ganske mye. For hvis du sitter fast holdt jeg på å si, så kan en spør andre, så må de prøve å forklare og.. Vi diskuterer jo hele tiden. Jeg har lært utrulig mye, for eksempel så var jo ikke jeg her i fjor. Så de er kanskje vant med å jobbe med hverandre i matten, på en helt annen måte enn hvordan jeg er vant med å jobbe med andre i matten. Jeg er mer vant med å jobbe med boken jeg. Og at en kan sjekke fasit, det kunne vi jo ikke akkurat her. Men jeg synes at jeg har jo egentlig fått med meg mye mer i forhold til regning og i forhold til GeoGebra og sant, enn hva jeg kunne før.
1104	Eili	Det er veldig bra. Du har jo sikkert lært litt av å samarbeide med andre da. Men synes du det hjalp å høre hvordan andre snakket, eller tenke høyt?
1105	Siri	Ja, selvfølgelig. Vi har jo forskjellige tanker og meninger om ting, og når en sier det så kan en jo ta det i betraktning hva du selv tenker. Da kan en tenke «kanskje det blir litt feil», eller.. det blir jo diskusjon.
1106	Eili	Mhmm. Har du noen eksempel på det her?
1107	Siri	Ja, for eksempel da Tora tok opp vendepunkt og det der. Jeg tenkte det jo, men sa det ikke.
1108	Eili	Ja.
1109	Siri	Jeg tenkte jo på det, men jeg ..
1110	Eili	Også, hva synes du om det å fortelle andre om det du tenke eller tenke høyt?
1111	Siri	Ja… Altså hvis jeg sier noe jeg tenker, så får jeg jo tilbakemelding på det om det kan være rett eller.. Akkurat sånn som jeg følte når Tora sa det da. Eller så kan en komme med tilbakemelding om at det ikke vil funke på grunn av det og det.
1112	Eili	Ja. Det ser jeg. Det er veldig lurt. Husker du jeg kommenterte det at dere jentene måtte prøve å være litt mer aktive? Hvis du skulle prøvd å sagt hvorfor, eller.. for Kristian var jo den som heilt klart snakket mest. Kan du prøve å si noe om hvorfor du ikkje deltok meir i diskusjonene, for eksempel?
1113	Siri	Ehh ja si det. Nei jeg vet ikke. Kristian han er jo veldig smart holdt jeg på å si. Han er veldig flink til å ta ordet, sånn til vanlig i klassen og alt sant. Mens jeg, jeg vet ikke.. Det kan jo ha litt med det at jeg sier ikke alltid mine meninger. Og det kan jo ha en påvirkning. Eller det og at jeg tenkte det, men jeg var usikker på om det var rett. Og det å si det hvis det var feil, liksom.
1114	Eili	Ja, det kan være litt skummelt egentlig.
1115	Siri	Så det er jo betre å prøve og feile, men det er vanskelig å tenke det også i en sånn situasjon.
1116	Eili	Ja, men det skjønner jeg veldig godt. Selv om en kan tenke at det beste er å snakke så er det noe med den situasjonen at hvis andre skjønner mer. Det er ikke alltid så enkelt.
1117	Siri	Vi ble litt bedre etter hvert. Det var liksom verst i begynnelsen
1118	Eili	Ja, men det skjønner jeg. Og disse oppgavene her er laget for å utfordre dere, så det var meningen at det skulle være vanskelig. Det å sette om språket fra det hverdagslige språket her, til matematikken, det er jo en utfordring fordi det ikke sto hva en skulle gjøre. Så en setter seg litt fast, og det var jo på en måte litt meningen også… Jaa, også er det i forhold til dette med hjelp fra læreren, synes du det påvirket arbeidet deres?
1119	Siri	Hjelp frå læreren?
1120	Eili	Det at han kom jo inn av og til, og jeg og var jo for så vidt som en lærer.
1121	Siri	Jo, altså dere fikk ikke sagt så mye, men dere kom med stikkord. Eller mmhh? da får en liksom, vi hadde jo ikke fasit, så hvis dere er enige så hjelper det litt å vite at vi er på riktig bane og at vi ikke er helt på villspor.
1122	Eili	Læreren var jo inne her et par ganger, så da hadde han en del innslag.
1123	Siri	Ja, han hjalp oss jo i riktig vei.
1124	Eili	Nettopp. Det er bra. Da kommer vi litt inn på GeoGebra. Var det noe som gjorde det enklere eller vanskeligere å forstå den andrederiverte, synes du?
1125	Siri	Ehhh jeg synes det var enklere.
1126	Eili	Hvorfor det, på en måte?
1127	Siri	Det er jo, tilbake igjen her da (peker på oppg 4e). Det gjorde at jeg fikk se de sammenhengene og alt det der. Og at jeg etter hvert forsto det i forhold til det som står i boken då.
1128	Eili	Ja, det hadde ikke vært så enkelt uten GeoGebra. Da måtte en jo tegnet det på en måte.

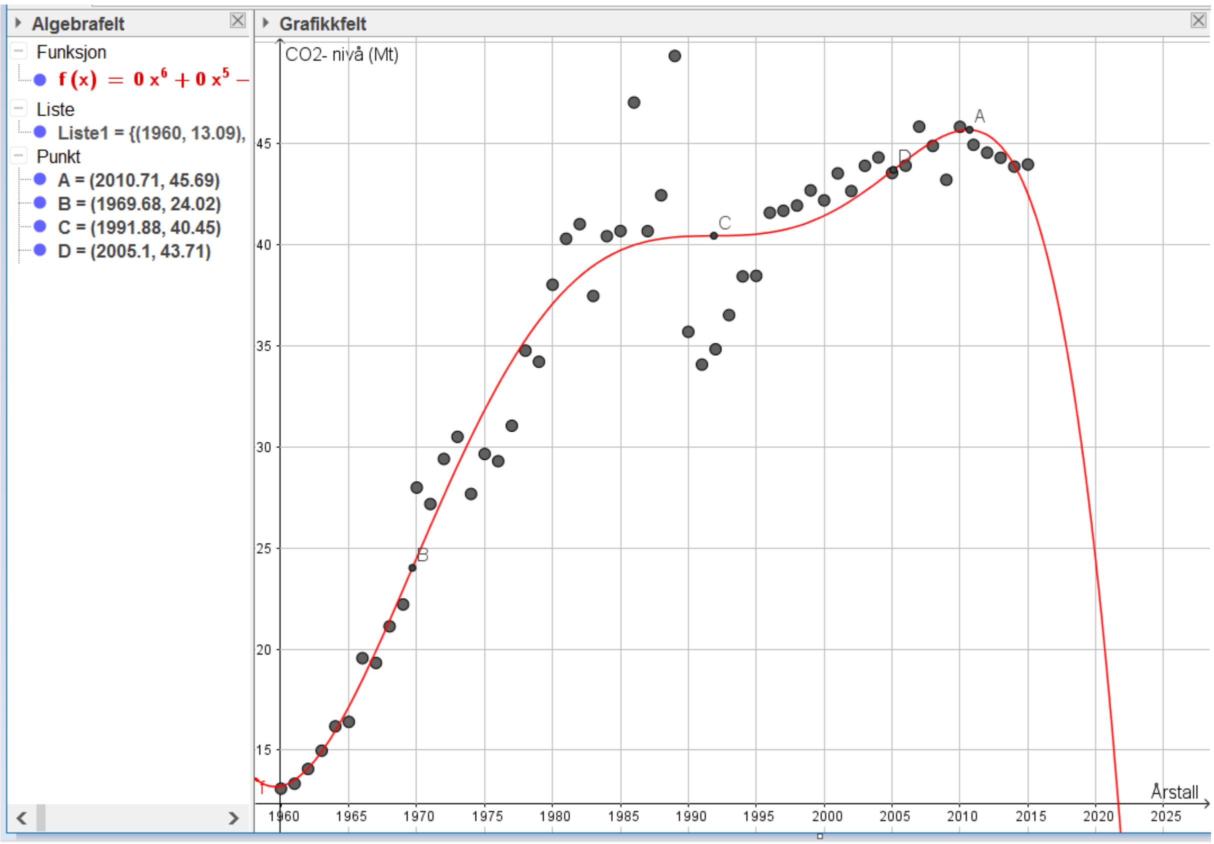
1129	Siri	Ja, det hadde blitt litt vanskelig.
1130	Eili	Og det blir jo veldig eksakt og når du får dei punkta.
1131	Siri	Ja. Du kunne se akkurat hvor det er.
1132	Eili	Samtidig var det litt utfordringer med at en ikke fikk disse grafene (peker) i samme bilde. Det var jo noe vi egentlig ønskte. Så det var jo litt irriterende sånn sett. Ja, nei så det var jo litt dumt sånn sett da. Men ja, synes du at du hadde nok GeoGebrakunnskaper? Du sa jo i sta at du lærte mykje GeoGebra underveis.
1133	Siri	Ja, nei jeg føle jeg ikke har lært så mye. Eller i vg1 hadde vi lite GeoGebra, mens her hadde de kun GeoGebra med den læreren som klassen har. Så det er veldig forskjellig med hvordan det er i forhold til hvor en er hen. Så jeg tror det påvirket meg litt. Men regresjonsanalyse har jeg aldri gjort før, det har jeg aldri vært borti før. Jeg følte jeg har lært mye mer nå, for eksempel i CAS har jeg og lært meir. Det hadde jeg jo aldri hørt om før.
1134	Eili	Men synes du at du kunne nok i GeoGebra for å klare desse oppgavene?
1135	Siri	Nei, jeg hadde nok ikke klart det uten hjelp fra Kristian og Tora.
1136	Eili	Men de forklarte jo deg, så det gikk jo fint.
1137	Siri	Ja, for det er jo det med gruppen, at en skal hjelpe hverandre. Og etter hvert fikk jeg jo mer kunnskap og da var det lettere å se det.
1138	Eili	Ja… Nå har vi egentlig snakket om mange ting som kan påvirke forståelsen. Kan du tenke deg andre ting som kan påvirke forståelsen? (oppsummerte det vi hadde snakket om)
1139	Siri	Ja. Jeg vet ikke heilt. Det er litt vanskelig å tenke utenom det, for nå har vi snakket om det. Ja, kanskje det jeg kunne fra før da. Det påvirket forståelsen litt. Ellers kommer jeg ikke på noe spesielt.
1140	Eili	Ja, det går fint. Hvis du skulle komme på noe mer så får du sende meg en melding. Ja, nå har vi snakket om mange ting som påvirker forståelsen av den andrederiverte. Så hva vil du sei at du nå kan om den andrederiverte?
1141	Siri	hva jeg kan?
1142	Eili	Jaa?
1143	Siri	Ehh, jeg har funnet ut hvordan jeg kommer fram til han. Med regning. Og hvordan jeg fant han i GeoGebra. Altså f '' så får en fram grafen. Også hva han henger sammen med, i forhold til den deriverte og med vendepunkt, topp, bunnpunkt, ekstremalpunkt.
1144	Eili	Vil du fortelle litt mer konkret, har du et eksempel der?
1145	Siri	Ehh ja. Vendepunktene er de samme som toppunktet, til den deriverte, og det er det samme som nullpunkt til andrederiverte. Og vendepunktet til den deriverte henge sammen med bunnpunktet. (ser på grafene fra oppgave 4 i del A mens hun forklarer).
1146	Eili	Hvorfor er det en sammenheng mellom de? hva er det den deriverte viser her, og hvorfor vil det bli same punktet?
1147	Siri	Ehhh.. Altså
1148	Eili	Hvis en begynner med den her da (der det er toppunkt i f'). Men hva er egentlig den deriverte, sånn praktisk sett?
1149	Siri	Altså definisjonen.. jeg vet ikke helt
1150	Eili	Altså, når vi snakket om funksjonen, den deriverte og den andrederiverte. Med den andrederiverte så snakket en jo om akselerasjon sant.
1151	Siri	Ja, det var jo… endringen da?
1152	Eili	Ja.. Og vordan utviklet endringen seg her?
1153	Siri	Når den er på sin høyeste, så er det vendepunktet i den andrederiverte da, når den begynner å snu og gå fra konkav til konveks. Ehmm. Ja. Og, når vendepunktet i den deriverte, når den begynne å bli konveks, så begynner den andrederiverte å gå mot konkav da, eller nullpunktet.
1154	Eili	Okei. Vi skal se på en konkret oppgave nå straks. Men du føler i hvert fall at du har skjønt mer sammenhengen mellom funksjonene? Hva du synes du har skjønt mer nå enn før?
1155	Siri	Ja. Ehh altså jeg husker ikke så mye fra før vi begynte, jeg måtte liksom bla tilbake og huske mer. Jeg kommer til å huske det masse bedre nå, når jeg har sett det i andre sammenhenger.
1156	Eili	Ja, skjønner. Kan du se for deg andre situasjoner der du kan ha nytte av den andrederiverte ellers? Enten i praktiske situasjoner, i jobb, studie, naturfenomen eller?
1157	Siri	Den andrederiverte?

1158	Eili	Ja, når kan det være snakk om den andrederiverte?
1159	Siri	Mhhm.. Nei si det. Ehmm.. jeg vet ikke hvordan jeg skal tenke meg fram til det.
1160	Eili	For her har vi jo om co2- utvikling.
1161	Siri	Ja, akselerasjon. Den andrederiverte viser akselerasjonen der da
1162	Eili	Kan du tenke deg andre situasjoner?
1163	Siri	Befolkningsvekst?
1164	Eili	Mhmm. Ja, for da kan en snakke om en (ble avbrutt av Siri)
1165	Siri	Økning ja, og akselerasjon.
1166	Eili	Mhmm.. Fint! En ser liksom det at så lenge en snakker om vekst, bakterievekst bl.a. når er den store endringen av noe…Og tro du nå med de erfaringene du har gjort deg med ekte data-prosjektet, at det vil bli enklere å møte nye problem som handler om den andrederiverte?
1167	Siri	Ja, selvfølgelig. Jeg har jo lært mye, som sagt, i GeoGebra og sant. Jeg kan selvfølgelig bruke det videre hvis det oppstår lignende oppgaver så kan jeg tenke tilbake og «åå, der gjorde vi jo sånn og sann». Det kan jeg bruke.
1168	Eili	Så bra. Da skal vi se på en liten oppgave nå. Ehmm… Her. Og nå er det litt viktig at du prøver å sette ord på hva du tenker underveis. Denne situasjonen her den viser den økonomiske situasjonen til en bedrift. Her har vi beløp på konto i millioner kr. Så her har vi 4 mill. og her har vi år. Så da lurte jeg på om du kan prøve å forklare den økonomiske situasjonen til bedriften ut fra den grafen her, med bruk av matematiske begrep og da.
1169	Siri	Ja, de starter med 4 millioner på konto. Også vokser det litt mer, før det kommer til vendepunkt i, etter 1 år kanskje. Ca rundt 1 år, der de har et betydelig fall i beløp.
1170	Eili	Men hva var det du sa? At det vokser til vendepunktet?
1171	Siri	Nei, altså det vokser jo her da, så synker det gradvis.
1172	Eili	ja
1173	Siri	Jeg tenker vendepunktet er rundt der (peker på ca etter 1 år)
1174	Eili	Også?
1175	Siri	Og toppunktet blir vel rundt her da (peker på toppunkt). Også har vi bunnpunkt på litt over to år. Der de har laveste beløpet før det stier kraftig.
1176	Eili	Ja, altså en kan jo snakke om hvor gyldig den modellen er her (ler). Hvis du kan si noe litt mer konkret da, om viktige økonomiske tidspunkt for den bedriften, hva vil du gjøre da?
0177	Siri	Ehhh.. finne nøyaktig? Skal jeg bare vise? Ehmm.. toppunkt blir rundt der.
1178	Eili	Ja, om du kan finne toppunktet da på en måte?
1179	Siri	Okei. En kan bruke ekstremalpunkt til h. (bruker GeoGebra) Så høyeste beløp blir her og minste beløp blir her. Også kan vi finne vendepunktet.
1180	Eili	Ja.
1181	Siri	Ja, vi kan finne det. (bruker GeoGebra)
1182	Eili	Er det noe mer du kan gjøre for å snakke om bedriften? (stille) Du kan se på den første- og andrederiverte for eksempel?
1183	Siri	Åja… (skriver inn på GeoGebra)
1184	Eili	Ja, supert. Så ja, nå kan du forklare litt mer sånn som i sta. (henviser til da vi diskuterte grafene i oppgave A). Hvordan er det vi ser sammenhengen her nå?
1185	Siri	Ehm.. ser sammenhengen. En må kanskje finne punktene på den deriverte da. (gjør dette). Ellers er de litt omvendt av hverandre. Funksjonen i forhold til den deriverte
1186	Eili	Ja, skjønner. Her har vi f, f' og f''. Ja, men hvis vi tar for oss en og en funksjon her nå, hvor er det det er positiv og kor er det negativ akselerasjon?
1187	Siri	På?
1188	Eili	Du kan velge hva slags du vil begynne med, enten f, f' eller f''. Hvor er det positiv og hvor er det negativ akselerasjon?
1189	Siri	Altså den er negativ når den er under null. (peker på f'')
1190	Eili	Ja.
1191	Siri	Og positiv når den er over null
1192	Eili	Og hvordan kan en forklare hvor det er positiv og negativ akselerasjon for den deriverte?
1193	Siri	Altså, det går jo litt på det samme. Der den er negativ. Altså under null

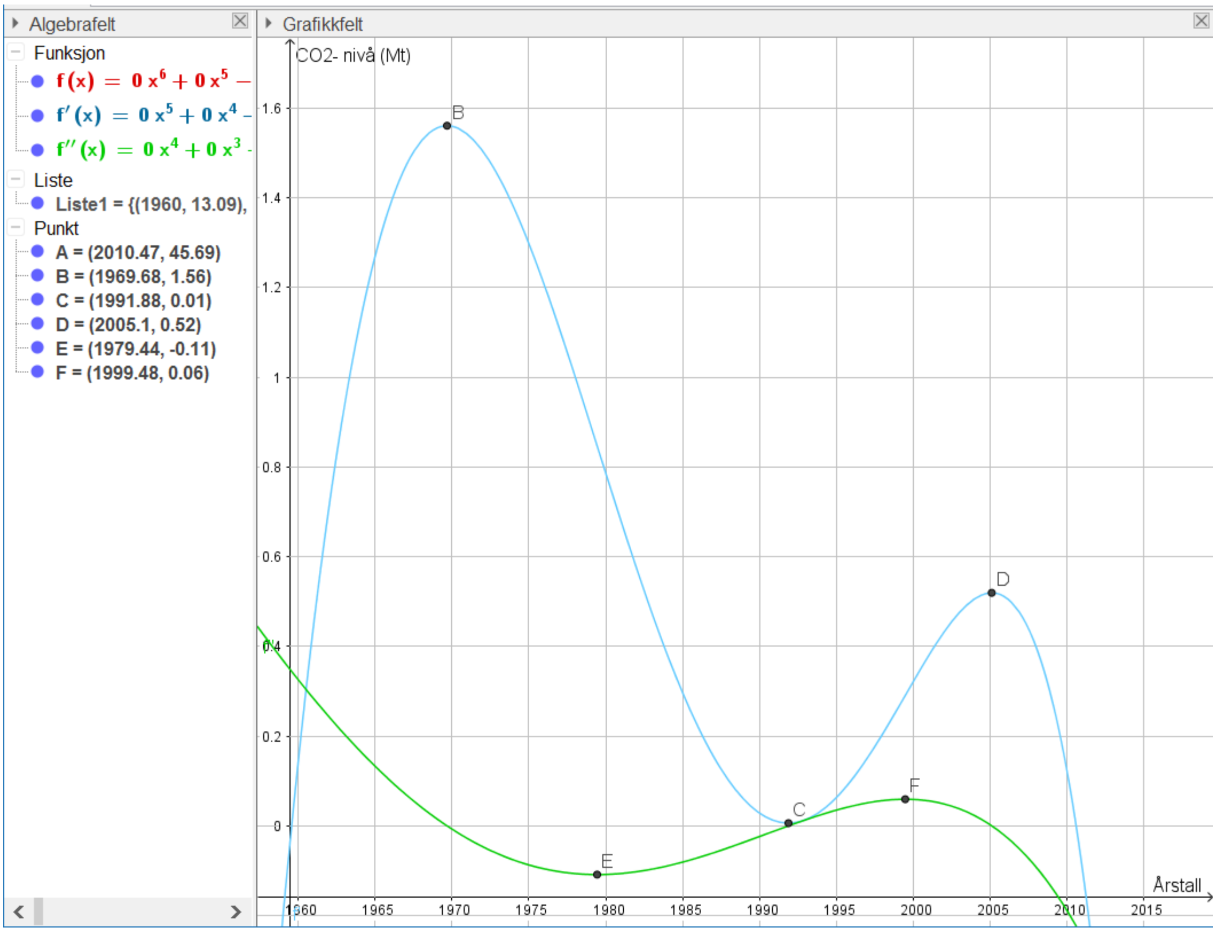
0194	Eili	Er akselerasjonen negativ derfra til dit? Er det det du mener?
1195	Siri	Ja, i det intervallet.
1196	Eili	Kor? Fra 0,5 til 2,2 eller noee sant? Er det der det blir negativ akselerasjon?
1197	Siri	Ja? (Stille)
1198	Eili	Okei.
1199	Siri	Snakker vi om akselerasjon på alle nå?
1200	Eili	Ja, nå snakker vi om hvor det er positiv og negativ akselerasjon.
1201	Siri	Ja, når en snakker om negativ akselerasjon er når den er under null?
1202	Eili	Ja, hva er det som er under null?
1203	Siri	Akselerasjonen. Og det er den jo i det intervallet.
1204	Eili	Ja. Så hvordan blir det da for funksjonen, den første funksjonen vi hadde?
1205	Siri	Den har ikke noe negativ akselerasjon
1206	Eili	Så den har bare positiv akselerasjon hele veien?
1207	Siri	Ja.
1208	Eili	Jaa, okei.
1209	Siri	Eller, den har ikke negativ akselerasjon.
1210	Eili	Hva mener du?
1211	Siri	Det er oppbremsing på en måte, fra toppunktet til bunnpunktet til funksjonen.
1212	Eili	Okei? Så du mener at den ikke har negativ akselerasjon, men at den har oppbremsing der du sier nå?
1213	Siri	Mhmm..
1214	Eili	Men hva er oppbremsing i forhold til det med negativ akselerasjon?
1215	Siri	Oppbremsing?
1216	Eili	Ja.
1217	Siri	Er oppbremsing og negativ akselerasjon det samme?
1218	Eili	Ja! Det er det.
1219	Siri	Ååå..
1220	Eili	Ja, da skjønner jeg hvorfor du ble forvirret.
1221	Siri	Ehhh.. Ja.
1222	Eili	Okei, men da gir vi oss med den delen nå. Mmhm. Hvis vi heller spør helt praktisk, hva betyr det jeg egentlig at en snakker om en positiv akselerasjon i økonomi?
1223	Siri	En akselerasjon i økonomi? Da tenker jeg på økning i beløp.
1224	Eili	Oppbremsing i beløp da?
1225	Siri	Det er vel at det er dårlige tider da.
1226	Eili	Ja, dårlige tider ja. Ja, jeg ser den. Og hvis du nå hadde vært leder for bedriften, hadde du vært redd i tiden 0,2? Hva ville du tenkt da? Ville det påvirket om du hadde satt i gang tiltak der? I tid 0,2?
1227	Siri	Det er jo tiden før det stabiliserer før det synker. Så ja, jeg ville kanskje satt i gang tiltak for å holde det jevnt. Sånn at det ikke begynner å synke så kraftig.
1228	Eili	Ja, men samtidig så synker det jo ikke, det stiger jo. Men det som en ser er jo at den stiger mindre, den flater jo ut. (stille)
1229	Siri	Ja, det er ikkje mye vekst. Så det er litt vanskelig å si.
1230	Eili	I punktet 1,8 da, hva ville du tenkt der?
1231	Siri	Som sjef? Da ville jeg tenkt at det var krise. Da har det bare sunket og sunket, så da må en gjøre noe for at det skal gå oppover igjen.
1232	Eili	Ja. Og hvis du ser på den grafen her, hvor tenker du at det er gjort et tiltak for å øke økonomien til bedriften?
1233	Siri	Åjj.. Kanskje i bunnpunktet? Litt før det kanskje?
1234	Eili	Ja, hvor tenke du det?

1235	Siri	Det er der det er lavest. Etter det stiger det bare. De må ha gjort noe der.
1236	Eili	Ja, men det er sant. Og hvis en skulle, kan en se et tydelig punkt for ei økonomisk forbedring for den bedriften her?
1237		En forbedring?
1238	Eili	ja
1239	Siri	Det blir jo på en måte i bunnpunktet da. Det er der det er forbedring da, før det synker det bare. Jeg ville ikke si at det er forbedring å si det. .
1240	Eili	Okei. Bra. Nå er det siste oppgaven, hvis du prøver å tenke, nå skal du tegne den deriverte og den andrederiverte. Hvordan vil du gå fram da?
1241	Siri	Ehhh den deriverte.?
1242	Eili	Hva er det vi vet om den deriverte i forhold til funksjonen?
1243	Siri	Dette er funksjonen sant?
1244	Eili	Ja, også skal vi tegne den deriverte.
1245	Siri	Altså. Når den er på en måte da, konveks(funksjonen), så vil den være konkav (den deriverte). Så vil de på en måte møtes her.
1246	Eili	Ja.
1247	Siri	Før an synke igjen, så stige.
1248	Eili	Ja, bare prøv å tegn du (hun tegner)
1249	Siri	Ja, altså. Jeg vet ikke jeg.
1250	Eili	Mmhmm.. Hvorfor tenker du at det blir sånn?
1251	Siri	Nei, altså. Toppunktet i den, vil møte bunnpunktet her. Fordi de er motsatte av hverandre. Og vendepunktene (peker og tegner oransj prikk på vendepunktene).. og her blir nullpunkt.
1252	Eili	Hvis du bare markerer det med f'. og hvis du nå skal tegne f'', hvordan blir det?
1253	Siri	Hmmm.. Altså når endringen begynner å flate ut så vil jo den andrederiverte ha stigning. Vere lineær.
1254	Eili	hva sa du nå, lineær?
1255	Siri	Altså når endringa, hva skal jeg si, når den er jamn da. Jeg vet ikke om jeg har det her. Men da vil den på en måte stige jevnt.
1256	Eili	Ja, hvis du prøver å tegne den da.
1257	Siri	Ja.. hmmm.. Tenke på vendepunktene. (lenge stille) Jeg vet ikke helt hvordan jeg skal begynne
1258	Eili	Nei…
1259	Siri	Nei jeg aner ikke. (hun prøver likevel)
1260	Eili	Kan jeg bare sehva du har gjort? Ja, okei, kan du forklare de ulike tinga du har gjort her
1261	Siri	Jeg tenkte den steig, sakte men sikkert.
1262	Eili	Hvorfor tenker du at den ska stige sann?
1263	Siri	Ehh, nei jeg vet ikkje?
1264	Eili	Ja, og her har du laga en liten sann? (peker på de små bøyene hun laget på f '')
1265	Siri	Ja, det er vendepunktet
1266	Eili	Åja, ja på same plass som vendepunktene her? Men så tenkte du at den ville bli jevnt oppover sånn som du sa i sta?
1267	Siri	Ja, det var det jeg tenkte. Så vil den vel gå videre. Men jeg tenkte at der, i vendepunktene, så vi den ha de samme vendepunkt.
1268	Eili	Ja, den er grei. Da tenker jeg egentlig at vi er ferdig for i dag. Er det noe mer du vil ta opp?
1269	Siri	Nei, jeg egentlig ikke. Jeg synes det har være veldig kjekt å være med.
1270	Eili	Det er flott! (Avsluttet deretter intervjuet slik som forklart i Vedlegg 2)

8.9 Vedlegg 10: Større versjon av Figur 4 og Figur 5



Figur 19: Større versjon av Figur 4



Figur 20: Større versjon av Figur 5