

# Akustiske bølger i periodiske medier

av

**Tor Atle Wicklund**



Cand. Scient oppgave

Institutt for geovitenskap

Universitetet i Bergen

Bergen, juni 2003

# Forord

Denne hovedfagsoppgaven er utført og avlagt ved Institutt for geovitenskap, Universitetet i Bergen.

Først og fremst vil jeg takke min veileder, professor dr. philos. Einar Mæland ved Universitetet i Bergen, for god hjelp og støtte under arbeidet med hovedfagsoppgaven.

Videre vil jeg takke alle medstudenter og ansatte ved instituttet for en flott og trivelig studietid.

Til slutt vil jeg takke familie og venner for oppmuntring og støtte gjennom hele studietiden.

Tor Atle Wicklund

Bergen, juni 2003

# Innledning

Målet med denne oppgaven er å belyse de ulike aspektene ved bølgepropagering i periodiske medier, og gi en detaljert analyse av den seismiske responsen til slike medier. Jeg vil benytte en såkalt binær modell av det periodiske mediet i de numeriske simuleringene, og analysen vil avsluttes med å betrakte tilfeller der bølgene er ikke-normalt innfallende.

Kapittel 1 gir en introduksjon til oppgaven. Her blir det gitt en kort historisk bakgrunn og en beskrivelse av periodiske medier. I tillegg inneholder kapitlet en oppsummering av hva andre har gjort tidligere. Til slutt gies en kort beskrivelse av oppgaven.

Kapittel 2 gir en matematisk og teoretisk innføring i metoden som benyttes til å modellere den seismiske responsen til det periodiske mediet. Hastigheter i periodiske medier, dispersjonsrelasjonen og den såkalte “Bloch phase” blir også belyst.

Kapittel 3 omhandler dynamikk og numeriske simuleringer. Temaer som stråleteori og effektiv medium teori blir diskutert, samt overgangen mellom disse. Modelleringen tar utgangspunkt i normalt innfallende bølger. Andre parametre, ulike innfallsvinkler inkludert, varieres også.

I kapittel 4 gies en oppsummering av oppgaven og konklusjoner.

En del av de matematiske utregningene er lagt til tillegg A. De fleste figurene er laget ved hjelp av programvaren MATLAB. Tillegg B inneholder noen av disse programmene som er laget i forbindelse med oppgaven.

# Innhold

<b>1</b>	<b>Introduksjon</b>	<b>1</b>
1.1	Historikk . . . . .	1
1.2	Periodiske medier . . . . .	2
1.3	Bølgeforplantning i periodiske medier . . . . .	2
1.4	Oppgaven . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Bølgepropagering i periodiske medier</b>	<b>8</b>
2.1	Hastigheter . . . . .	8
2.2	Bølgepropagering i en celle (lagperiode) . . . . .	12
2.2.1	Refleksjons- og transmisjonskoeffisienter . . . . .	13
2.2.2	Snells lov . . . . .	14
2.2.3	“Stack-matrisen” . . . . .	14
2.3	N-celle medium . . . . .	15
2.3.1	Over- og underliggende medium . . . . .	16
2.3.2	Eigenverdier . . . . .	17
2.3.3	Egenvektorer og diagonalisering . . . . .	18
2.3.4	Chebyshev-polynomer . . . . .	19
2.4	“Bloch phase” . . . . .	21
2.4.1	Dispersjonsrelasjonen . . . . .	22
2.4.2	Approximasjoner fra “Bloch phase” . . . . .	23

<b>3</b>	<b>Dynamikk</b>	<b>27</b>
3.1	Transmisjon . . . . .	27
3.2	Refleksjon . . . . .	29
3.3	Signal . . . . .	30
3.4	Mediet . . . . .	33
3.5	Numerisk simulering, normalt innfallende bølger . . . . .	36
3.5.1	Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori . . . . .	44
3.5.2	Mediet som filter . . . . .	50
3.5.3	“Bloch phase” . . . . .	55
3.5.4	Det reflekterte bølgefeltet . . . . .	59
3.5.5	Parameterskifte - lavere kontrast i akustisk impedans . . . . .	65
3.5.6	Endret sammensetning (materialforhold) . . . . .	69
3.6	Numerisk simulering, ikke-normalt innfallende bølger . . . . .	73
3.6.1	Snudd sekvens for større innfallsvinkler . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Oppsummering og konklusjon</b>	<b>98</b>
	<b>Bibliografi</b>	<b>101</b>
<b>A</b>	<b>Utledninger</b>	<b>103</b>
A.1	Forholdet mellom gjennomsnittshastigheten og den effektive mediumhastigheten . . . . .	103
A.2	Unimodularitet . . . . .	104
A.3	Eigenverdier . . . . .	105
A.4	Eigenvektorer . . . . .	106
A.5	Diagonalisering . . . . .	108
A.6	Parameteren $\xi$ . . . . .	109

---

<b>B</b>	<b>MATLAB programmer</b>	<b>111</b>
B.1	Numerisk simulering, transmitterte bølgefelt . . . . .	111
B.2	Kausalt signal . . . . .	122
B.3	Chebyshev polynom (second kind) . . . . .	123

# Kapittel 1

## Introduksjon

### 1.1 Historikk

Studiet av bølgeforplantning i periodiske medier startet da Rayleigh (1887 og 1917) skulle forklare lysbrytning i fjærdrakten hos visse fugler. Resultatet ble det som i dag er kjent som “stoppbånd” for bølger i periodiske medier, det vil si spesielt stor refleksivitet for visse bølgelengder og innfallsvinkler. Temaet har fått mye oppmerksomhet innen flere forskjellige disipliner, som optikk, akustikk (seismikk) og elektromagnetisme.

I elementær fysikk betrakter en generelt to typer bølgebevegelse; *travelling waves*, som kan ha enhver frekvens, og *standing waves*, som kun opptrer for diskrete “tillatte” frekvenser. Den samme dikotomien følger gjennom kvantemekanikken. Men i periodiske medier opptrer en tredje type bølgebevegelse, hvor frekvensene faller inn i kontinuerlige bånd, separert av forbudte “gaps”. I kvante kontekst ble dette først oppdaget av Kronig & Penney (1931).

Den første tilfredsstillende teoretiske og matematiske behandlingen av multi-lagdelte medier i seismologi ble introdusert av Haskell (1953). Dette arbeidet var basert på Thomson (1950), og sammen danner de grunnlaget for å kunne modellere den seismiske responsen til lagdelte medier ved hjelp av propageringsmatriser. Thomson-Haskell metoden er et spesialtilfelle av propageringsmatrise metoden som senere ble introdusert i seismologien av Gilbert & Backus (1966). En detaljert beskrivelse av metoden er gitt av Aki & Richards (1980).

Periodiske optiske medier, og da spesielt lagdelte periodiske strukturer, spiller i dag en stor rolle i en rekke anvendelser. Disse inkluderer multilags-anretninger for superreflektivitet og perfekt transmisjon. Denne anvendelsen er mye takket være analysen til Abelès (1950).

## 1.2 Periodiske medier

Et periodisk medium er generelt bygget opp av såkalte celler som gjentar seg periodisk et visst antall ganger. En slik celle består av to eller flere lag, og blir dermed en lagperiode i det periodiske mediet. Et av de enkleste periodiske mediene er binært, der lagperioden består av to lag med ulike fysiske egenskaper (se figur 1.1).

I denne oppgaven vil jeg anta horisontale, homogene og isotrope lag. At et lag er homogent betyr at P-bølgehastigheten er uavhengig av posisjonen i laget, mens et isotropt lag medfører at fasehastigheten til den propagerende bølgen er uavhengig av retningen til bølgen i laget. De fysiske egenskapene til mediene beskrives dermed ved lagtykkelser, lyd hastigheter og tettheter. Det er klart at slike modeller er rent matematiske, men lagdelte medier finnes, og da særlig i sedimentbassenger. Studier av akustiske brønnlogger fra Mexico-gulven viser at en stor del av den stratigrafiske søylen i dette området består av en slags binær sekvens av alternerende sandstein- og skiferlag (Velzeboer, 1981).

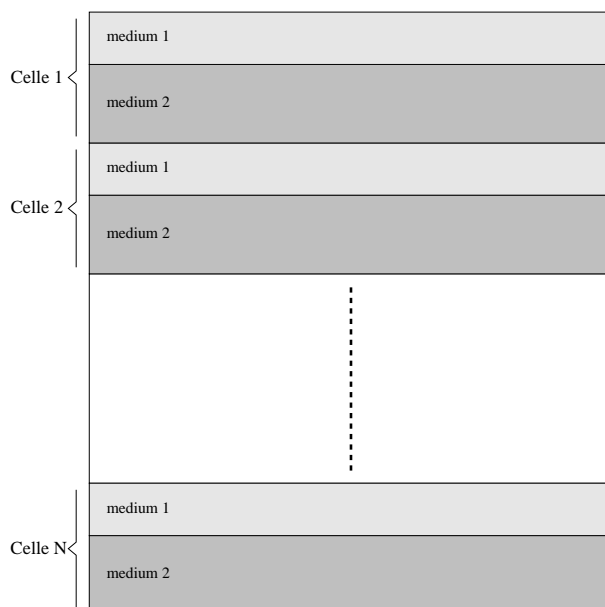
For lagdelte medier, som finnes i sedimentbassenger, kan en generelt skille mellom to typer serier. Den første er såkalte progressive serier, mens den andre typen er sykliske eller kvasi-sykliske serier (Morlet et al., 1982a). Det er de sykliske seriene som i stor grad påvirker seismiske signaler, og disse er også av stor interesse innen petroleumsleting. Et binært periodisk medium er et eksempel på en syklisk serie.

## 1.3 Bølgeforplantning i periodiske medier

De siste tiår har det vært gjort en rekke teoretiske, numeriske (modellering) og eksperimentelle studier av bølgeforplantning i lagdelte medier. Morlet et al. (1982a, 1982b) genererte syntetiske null-offset VSP<sup>1</sup> seismogrammer ved bruk

<sup>1</sup>VSP - Vertikal Seismisk Profilering





Figur 1.1: *Et binært periodisk medium bestående av  $N$  lagperioder (celler). Lagperioden består av to lag, medium 1 og medium 2, med tykkelser  $h_1$  og  $h_2$ ,  $P$ -bølgehastigheter  $c_1$  og  $c_2$ , og tettheter  $\rho_1$  og  $\rho_2$ , henholdsvis.*

av Goupillaud-Kunetz algoritmen. Dette er en klassisk algoritme for å beregne syntetiske seismogrammer fra en modell av horisontale lag med konstant gangtid. Mediet var av den binære typen, med et homogent overliggende og underliggende medium. Den periodiske strukturen var bygget opp av et stort antall lagperioder (128), med lik gangtid i de 256 lagene og stor kontrast i akustisk impedans. Ved tolkning og analyse av de syntetiske trasene, konkluderte de med at det periodiske mediet er transparent for lave frekvenser, mens superreflektivitet forekommer for høye frekvenser. De fant også at hastighetsdispersjon forekommer mellom de høye og lave frekvensene.

Helbig (1984) studerte anisotropi<sup>2</sup> og dispersjon<sup>3</sup> i periodiske lagdelte medier. Utgangspunktet var at transvers isotropi oppstår i lagdelte periodiske medier når elastiske bølger propagerer i dem, forutsatt at den dominerende bølgelengden til det seismiske signalet er stor i forhold til tykkelsen til lagperioden. Da kan en i teorien erstatte det lagdelte mediet med et homogent transvers isotropt medium hvis bølgelengdene er lange nok. De elastiske konstantene til dette langbølge-

<sup>2</sup>Anisotropi: fasehastigheten avhenger av retningen på bølgetallsvektoren.

<sup>3</sup>Dispersjon: fasehastigheten er frekvensavhengig.

ekvivalente transverse isotrope mediet kan beregnes på flere måter, hvorav alle er basert på grensen av lave frekvenser. Men teknikker for høy seismisk oppløsning, bruk av skjærbølger og betydningen av stratigrafiske detaljer krever en kartlegging av hva som er tilstrekkelig lang bølgelengde i forhold til tykkelsen av lagperioden. I tillegg er det både interessant og viktig å forstå hva som skjer mellom denne grensen og grensen for seismisk oppløsning. Helbig (1984) søkte denne informasjonen gjennom numerisk evaluering av den generelle dispersjonsligningen, og anvendte denne metoden på SH-bølger i periodiske lagdelte medier. Han konkluderte blant annet med at tilnærmingen til de lange bølgelengdene, hvor det lagdelte mediet kan erstattes med et ikke-dispersivt og transvers isotropt medium, er gyldig for bølgelengder lenger enn tre ganger tykkelsen til mediets lagperiode.

Carcione et al. (1991) brukte numerisk modellering i undersøkelsen av anisotropi i lagdelte medier for lange bølgelengder. I likhet med mange andre studier på denne tiden, var målet å fastslå den minste verdien av  $\lambda/h$  hvor et periodisk lagdelt medium kan erstattes med et homogent transvers isotropt medium. Bølgelengden  $\lambda$  må her tolkes som den dominerende bølgelengden til det seismiske signalet, mens  $h$  er tykkelsen til lagperioden i mediet.

Analysen til Carcione et al. (1991) ble utført ved å simulere bølgepropagering gjennom en sekvens av epoksy (en plasttype) og glass, samt en sekvens av kalkstein og sandstein (binære medier). Begrunnelsen for valget av disse mediene var at de er representative innen materialvitenskapen og for lagdelte formasjoner i jorden. I tillegg har de forskjellige grader av anisotropi og impedanskontraster. Simuleringene ble utført ved å løse bølgeligningene numerisk for både PL-mediet (periodisk, isotropt, lagdelt medium) og TIE-mediet (transverst isotropt, langbølge-ekvivalent medium) i 1-D og 2-D modeller. Deretter ble minimum verdien av  $R = \lambda/h$  fastslått kvantitativt ved å sammenligne bølgefeltene gjennom å måle koherens. Evalueringen ble gjort for forskjellige materialforhold og for forskjellige dominerende frekvenser i input signalet.

Resultatene tydet på at tilnærmingen til de lange bølgelengdene er gyldig for  $R = 8$  for epoksy-glass, og når  $R$  ligger mellom  $R = 5$  og  $R = 6$  for kalkstein-sandstein. Dette ble tolket som at tilnærmingen til de lange bølgelengdene avhenger av impedanskontrastene, altså av refleksjonskoeffisientene. Impedanskontrasten er mindre for kalkstein-sandstein sekvensen enn for epoksy-glass sekvensen, hvilket

tilsier at den lange bølgelengde approksimasjonen finner sted for mindre verdier av  $R$  ved svakere refleksivitet.

Marion & Coudin (1992) gjorde et eksperiment hvor målet var å undersøke hvordan hastigheten oppfører seg i overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori i lagdelte medier. Når  $\lambda/h \ll 1$  kan bølgepropagering i lagdelte periodiske medier beskrives ved stråleteori. Er derimot  $\lambda/h$  stor ( $\lambda/h \gg 1$ ), kan effektiv medium teori brukes til å beskrive bølgepropageringen.

Hastighetsmålinger ble utført ved frekvensene 50 og 500 kHz på et periodisk binært medium av tynne stål- og plastikkskiver. Forholdet mellom bølgelengden og tykkelsen av lagperioden,  $\lambda/h$ , varierte mellom 0.1 og 50, og mengden av stål varierte mellom 9 og 89% i volum. Resultatene fra eksperimentet bekreftet at hastigheter i lagdelte medier avhenger av sammensetningen og kontrolleres av forholdet mellom bølgelengden og tykkelsen til lagperioden ( $\lambda/h$ ). De fant også at overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer ved  $\lambda/h = 10$ , uavhengig av sammensetningen til det lagdelte mediet.

Senere ble det eksperimentelle studiet av Marion & Coudin (1992) kombinert med teoretiske studier (Marion et al., 1994). Propageringsmatriser ble brukt for å modellere bølgepropageringen gjennom det lagdelte mediet som ble studert i laboratoriet. Normalt innfallende plane bølger og lag med uendelig lateral utstrekning ble antatt. De modellerte trasene var i godt samsvar med de eksperimentelle, og studiet støttet opp om resultatene fra Marion & Coudin (1992). Dog gav den numeriske modelleringen en overgang fra stråleteori til effektiv medium teori ved  $\lambda/h \approx 7$ . Denne verdien er mindre enn den fra eksperimentet, men den er konsistent med studiet til Carcione et al. (1991).

Hovem (1995) gjorde også en numerisk simulering av eksperimentet til Marion & Coudin (1992). Propageringsmatriser ble brukt for å modellere den seismiske responsen til det periodiske systemet. Motivasjonen var de signifikante forskjellene i verdiene av  $\lambda/h$  for overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori, funnet i andre studier. Konklusjonene bekreftet at bølgepropagering i lagdelte medier avhenger av bølgelengden til signalet. Analysen hans viser at for frekvenser lavere enn en viss overgangsfrekvens, så finnes det en udempet bølge som propagerer med en hastighet som nærmer seg den effektive mediumhastigheten ved null frekvens. For høyere frekvenser propagerer bølgen med gjennomsnittshastigheten og dempes på grunn av transmisjonstap ved hver grenseflate. Hovem (1995) utledet et

uttrykk for denne overgangen fra høy hastighet (gjennomsnittshastigheten) til lav hastighet (effektiv mediumhastighet). I uttrykket avhenger overgangsfrekvensen av impedanskontrastene, og han konkluderte med at det ikke er mulig å beskrive denne overgangen med et  $\lambda/h$  forhold.

## 1.4 Oppgaven

I denne oppgaven vil jeg belyse de ulike aspektene ved bølgepropagering i periodiske medier. Selv om lagdelinger i realistiske situasjoner innen petroleumleting ikke er perfekt periodiske, kan de ofte sees på som en superponering av forskjellige lagperioder (Marion et al., 1994). Derfor er det viktig å forstå effektene av ulike geologiske skalaer i periodiske medier, da dette vil danne grunnlaget for å undersøke effektene av skalaen i mer komplisert geologi. I tillegg er bestemming av passende gjennomsnittsverdier av seismiske hastigheter for de forskjellige enhetene som utgjør et reservoar svært viktig innen reservoar-karakterisering. Derfor er det viktig å kunne skille mellom de to domenene; stråleteori (korte bølgelengder) og effektiv medium teori (lange bølgelengder), og forstå overgangen mellom dem.

For å avgrense oppgaven har jeg benyttet en binær modell i de numeriske simuleringene. Propageringsmatriser (Haskell, 1953; Gilbert & Backus, 1966; Aki & Richards, 1980) er benyttet for å beskrive bølgepropageringen, og modelleringen er utført ved bruk av programvaren MATLAB.

Matematikken og prinsippene bak metoden med propageringsmatriser vil bli gjennomgått i detalj før de numeriske simuleringene. Modelleringen vil ta utgangspunkt i normalt innfallende bølger, og jeg vil her gå inn på temaer som stråleteori og effektiv medium teori, samt overgangen mellom disse. Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori har vært mye i fokus siden begynnelsen av 90-tallet, mye på grunn av betydelige variasjoner i resultater og konklusjoner. Som mange andre før meg, vil jeg forsøke å definere overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori ved et  $\lambda_d/h$  forhold, hvor bølgelengden ( $\lambda_d$ ) er den dominerende bølgelengden til det transmitterte signalet, mens  $h$  er tykkelsen til lagperioden i det binære mediet. Andre studier tyder på at denne overgangen mellom stråleteori og effektiv medium teori er avhengig av impedanskontrasten

(reflektiviteten) i mediet (Carcione et al., 1991; Hovem, 1995). Derfor vil jeg også endre på noen av de fysiske egenskapene til det binære mediet, for å undersøke hvordan dette påvirker overgangen mellom stråleteori og effektiv medium teori. Jeg vil også undersøke hvorvidt denne overgangen avhenger av materialforholdet, det vil si av den relative andelen av de to komponentene i det binære mediet.

Modelleringen benyttes til en analyse av den seismiske responsen til det binære mediet, og analysen vil avsluttes ved å studere ikke-normalt innfallende bølger.

# Kapittel 2

## Bølgepropagering i periodiske medier

### 2.1 Hastigheter

Bølgepropagering i lagdelte periodiske medier kan i hovedsak forklares ved hjelp av stråleteori, effektiv medium teori, eller scattering teori avhengig av forholdet mellom bølgelengden ( $\lambda$ ) og tykkelsen ( $h$ ) til lagperioden (Marion et al., 1994). Fra eksperimenter og numeriske forsøk er det blitt slått fast at når bølgelengden til det seismiske signalet er mye større enn tykkelsen til lagperioden ( $\lambda \gg h$ ), oppfører mediet seg som et homogent og transverst anisotrop medium. I slike tilfeller vil lydbølgehastigheten nærme seg den effektive mediumhastigheten. I det andre ekstreme tilfellet, hvor  $\lambda$  er mye mindre enn  $h$  ( $\lambda \ll h$ ), vil lydbølgene forplante seg med mediets gjennomsnittshastighet. For et binært medium med lagtykkelser  $h_1$  og  $h_2$ , P-bølgehastigheter  $c_1$  og  $c_2$ , og bulk tettheter  $\rho_1$  og  $\rho_2$  henholdsvis, er de to hastighetene definert som

Gjennomsnittshastighet:

$$\frac{1}{c} = \frac{h_1}{h} \frac{1}{c_1} + \frac{h_2}{h} \frac{1}{c_2} \quad (2.1)$$

Denne hastigheten gir en total vertikal gangtid som er lik summen av gangtidene i hvert lag.

Effektiv mediumhastighet:

$$c_e = \sqrt{\frac{K_e}{\rho_e}} \quad (2.2)$$

der  $K_e$  og  $\rho_e$  er mediets effektive bulkmodul og effektive tetthet. Begge disse er gitt som et vektet gjennomsnitt:

$$\frac{1}{K_e} = \frac{h_1}{h} \frac{1}{K_1} + \frac{h_2}{h} \frac{1}{K_2} \quad (2.3)$$

$$\rho_e = \frac{h_1}{h} \rho_1 + \frac{h_2}{h} \rho_2$$

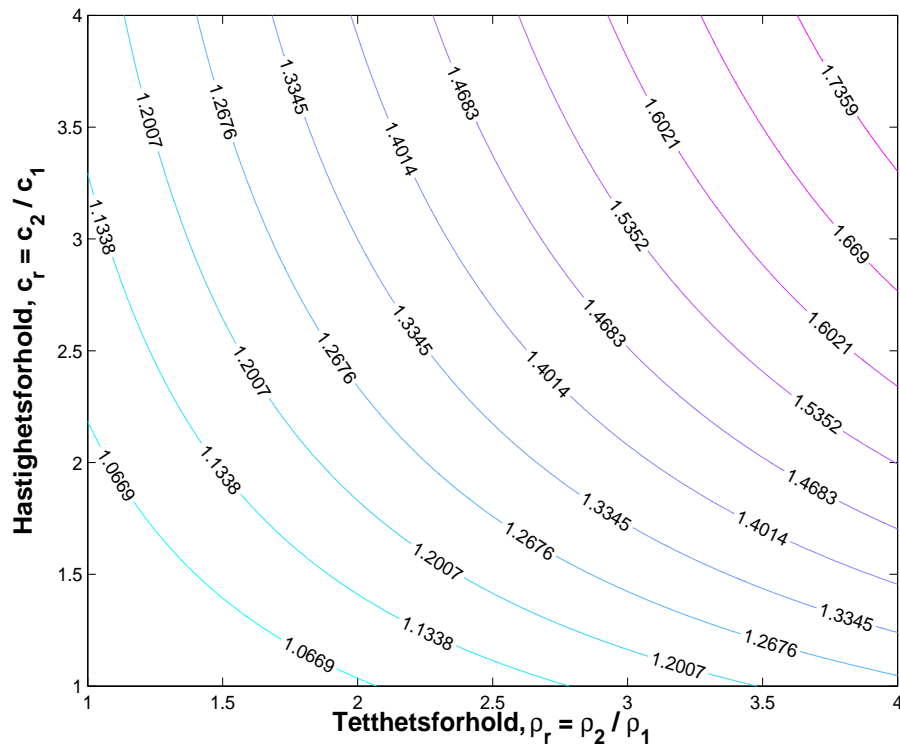
Disse to hastighetene er som oftest betydelig forskjellige for sedimentære bergarter (Hovem, 1995). I tillegg vil også hastighetsdispersjon forårsaket av scattering-effekter kunne opptre i slike lagdelte medier. Alle disse fenomenene opptrer i standard seismisk prospektering, selv om de ikke alltid er like synlige.

For et binært medium der lagtykkelsene  $h_1$  og  $h_2$  er like, kan en utlede en enkel og nyttig formel som relaterer forholdet mellom gjennomsnittshastigheten og den effektive mediumhastigheten,  $c/c_e$ , med hastighets- og tetthetsforholdet i mediet (Marion et al., 1994). Denne kan gies på formen

$$c/c_e = \frac{1}{(1 + c_r)} \sqrt{\frac{(1 + \rho_r)(1 + \rho_r c_r^2)}{\rho_r}} \quad (2.4)$$

der  $c_r = c_2/c_1$  (forholdet mellom de to P-bølgehastighetene) og  $\rho_r = \rho_2/\rho_1$  (forholdet mellom de to bulk tetthetene). Utledningen er gitt i tillegg A, avsnitt A.1.

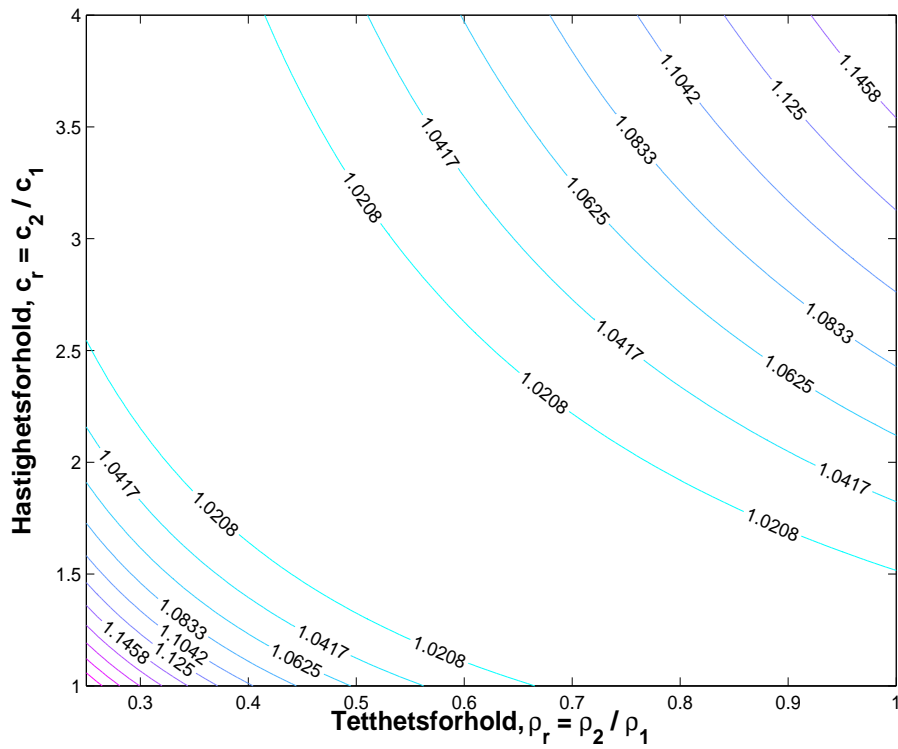
Figur 2.1 viser et konturplott av ligning 2.4 for ulike hastighets- og tetthetskontraster, og med  $c_2 \geq c_1$  og  $\rho_2 \geq \rho_1$ . Figuren indikerer den skala-avhengige hastighetsdispersjonen som kan forventes for ulike materialkontraster. Figuren viser også at forskjellen mellom gjennomsnittshastigheten ( $c$ ) og den effektive mediumhastigheten ( $c_e$ ) øker med økende impedanskontrast.



Figur 2.1: Konturplott av ligning 2.4. Kurvene angir konstante verdier av forholdet mellom det binære mediets gjennomsnittshastighet ( $c$ ) og den effektive mediumhastigheten ( $c_e$ ),  $c/c_e$ , for ulike hastighets- og tetthetskontraster. Lagtykkelsene er like ( $h_1 = h_2$ ), tetthetene  $\rho_2 \geq \rho_1$  og hastighetene  $c_2 \geq c_1$ . Forskjellen mellom  $c$  og  $c_e$  øker når kontrasten i hastighetene  $c_1$  og  $c_2$  og tetthetene  $\rho_1$  og  $\rho_2$  øker.

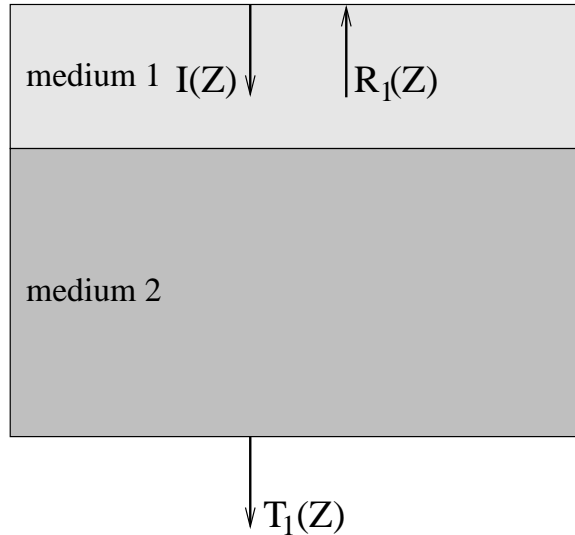
Figur 2.2 viser også et konturplott av ligning 2.4. Forskjellen her er at bulk-tetthetene i det binære mediet nå tilfredsstillers  $\rho_2 \leq \rho_1$ . Det kan være interessant å legge merke til at  $c/c_e = 1$  når tetthetsforholdet  $\rho_r$  og hastighetsforholdet  $c_r$  er inverse størrelser.





Figur 2.2: Konturplott av ligning 2.4. Kurvene angir konstante verdier av  $c/c_e$  for ulike materialkontraster. Lagtykkelsene er like ( $h_1 = h_2$ ), tetthetene  $\rho_2 \leq \rho_1$  og hastighetene  $c_2 \geq c_1$ . Figuren viser at  $c/c_e = 1$  når tetthetsforholdet ( $\rho_r$ ) og hastighetsforholdet ( $c_r$ ) er inverse størrelser.

## 2.2 Bølgepropagering i en celle (lagperiode)



Figur 2.3: En celle (lagperiode) i det binære mediet, bestående av to horisontale lag (medium 1 og medium 2) med ulike fysiske egenskaper.

Vi starter med å betrakte en celle som vist i figur 2.3. Den seismiske kilden er tenkt plassert like over toppen av det øverste laget, hvor det også er en mottaker. I tillegg er det plassert en mottaker like under det nederste laget. Metoden med propageringsmatriser gir da sammenhengen mellom det innfallende bølgefeltet  $I(Z)$ , det reflekterte bølgefeltet  $R_1(Z)$  og det transmitterte bølgefeltet  $T_1(Z)$  ved

$$\begin{bmatrix} R_1(Z) \\ I(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_1(Z) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

hvor  $Z = \exp(-i\omega\Delta t)$ . Her er  $\omega$  den angulære frekvensen, og  $\Delta t$  er forsinkelsen i lagperioden.

La matrisene  $\mathbf{L}_1$  og  $\mathbf{L}_2$  representere faseskiftet (forsinkelsen) i lagene, såkalte “layer propagation matrices”, og matrisene  $\mathbf{H}_{12}$  og  $\mathbf{H}_{21}$  refleksjoner og transmisjoner ved grenseflatene (“interface transition matrices”). Matrisen  $\mathbf{S}$  i ligning 2.5 er da gitt som produktet av matrisene

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}_1 \mathbf{H}_{12} \mathbf{L}_2 \mathbf{H}_{21}, \quad (2.6)$$

som skrevet ut gir

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_1^{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{t_{12}} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_2 & 0 \\ 0 & Z_2^{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{t_{21}} \begin{bmatrix} 1 & r_{21} \\ r_{21} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

der  $r_{12}$  og  $r_{21}$  er refleksjonskoeffisientene på grenseflaten mellom medium 1 og medium 2, og på grenseflaten mellom medium 2 og medium 1, henholdsvis, mens  $t_{12}$  og  $t_{21}$  er transmisjonskoeffisientene på de samme grenseflatene. Eksponentialfunksjonene  $Z_1$  og  $Z_2$  er gitt ved  $Z_j = \exp(-i\theta_j)$ ,  $j = 1, 2$  der

$$\theta_j = \omega \Delta t_j, \quad j = 1, 2 \quad (2.8)$$

og forsinkelsen  $\Delta t_j$  er forholdet mellom lagtykkelsen ( $h_j$ ) og den tilsynelatende vertikale hastighet ( $c_{jz}$ ), det vil si  $\Delta t_j = h_j/c_{jz}$ . Dette gir fasevinklene

$$\theta_j = \frac{\omega h_j \cos(\alpha_j)}{c_j}, \quad j = 1, 2 \quad (2.9)$$

hvor  $\alpha_j$  er vinkelen lydbølgen danner med innfallsloddet (vertikalen) i medium  $j$ , der  $j = 1, 2$ .

## 2.2.1 Refleksjons- og transmisjonskoeffisienter

Refleksjonskoeffisienten  $r_{12}$  i ligning 2.7 er gitt ved

$$r_{12} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \quad (2.10)$$

der  $Y_1$  og  $Y_2$  er den akustiske admittans i medium 1 og medium 2, henholdsvis. Den akustiske admittans er definert som

$$Y_j = \frac{1}{\rho_j c_{jz}} = \frac{\cos(\alpha_j)}{\rho_j c_j}, \quad j = 1, 2 \quad (2.11)$$

og det er kun fortegnet som skiller de to refleksjonskoeffisientene  $r_{12}$  og  $r_{21}$ , slik at  $r_{21} = -r_{12}$ .

Refleksjonskoeffisientene varierer med innfallsvinkelen, og det gjør også transmisjonskoeffisientene  $t_{12}$  og  $t_{21}$ , som er gitt ved  $t_{12} = 1 + r_{12}$  og  $t_{21} = 1 + r_{21} = 1 - r_{12}$ . Det presiseres at disse definisjonene er basert på trykkfeltet. Når kritisk vinkel overskrides, blir refleksjonskoeffisientene komplekse størrelser og konstant lik én i absoluttverdi. Rent fysisk medfører dette faseendringer i det reflekterte signalet.

### 2.2.2 Snells lov

For en bestemt innfallsvinkel ( $\alpha_1$ ) er utfallsvinkelen ( $\alpha_2$ ) til den transmitterte bølgen bestemt ved Snells lov. Snells lov er gitt ved

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{c_1} = \frac{\sin(\alpha_2)}{c_2} = p, \quad (2.12)$$

det vil si at stråleparameteren ( $p$ ) er konstant. En vertikalt innfallende bølge ( $\alpha_1 = 0$ ) vil ikke brytes i forhold til innfallsloddet ved en plan (horisontal) grenseflate. I et horisontalt lagdelt og periodisk medium vil da bølgebevegelsen kun være vertikal, og en kan se bort i fra modekonverteringer. Dette vil ikke være tilfelle dersom  $\alpha_1 \neq 0$ . Hvordan bølgen brytes i forhold til innfallsloddet, avhenger om hastigheten øker eller minker over grenseflaten. Utfallsvinkelen ( $\alpha_2$ ) er gitt ved

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{c_2 \sin(\alpha_1)}{c_1}\right) \quad (2.13)$$

og det er klart at kritisk vinkel kun eksisterer når  $c_2 > c_1$ .

Med ikke-vertikalt propagerende bølger vil noe av P-bølgeenergien konverteres til skjærbølger. Dette vil bli neglisjert for enkelhets skyld.

### 2.2.3 “Stack-matrisen”

Multipliserer vi matrisene i ligning 2.7 får vi

$$\mathbf{S} = \frac{1}{t_{12}t_{21}} \begin{bmatrix} (Z_1 \cdot 1) & (Z_1 \cdot r_{12}) \\ (Z_1^{-1} \cdot r_{12}) & (Z_1^{-1} \cdot 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Z_2 \cdot 1) & (Z_2 \cdot r_{21}) \\ (Z_2^{-1} \cdot r_{21}) & (Z_2^{-1} \cdot 1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{t_{12}t_{21}} \begin{bmatrix} (Z_1Z_2 + r_{12}r_{21}Z_1Z_2^{-1}) & (r_{21}Z_1Z_2 + r_{12}Z_1Z_2^{-1}) \\ (r_{12}Z_1^{-1}Z_2 + r_{21}Z_1^{-1}Z_2^{-1}) & (r_{12}r_{21}Z_1^{-1}Z_2 + Z_1^{-1}Z_2^{-1}) \end{bmatrix}$$

Med  $r_{21} = -r_{12}$ ,  $t_{12} = 1 + r_{12}$  og  $t_{21} = 1 - r_{12}$ , blir nå

$$\mathbf{S} = \frac{1}{1 - r_{12}^2} \begin{bmatrix} (Z_1Z_2 - r_{12}^2Z_1Z_2^{-1}) & (r_{12}Z_1Z_2^{-1} - r_{12}Z_1Z_2) \\ (r_{12}Z_1^{-1}Z_2 - r_{12}Z_1^{-1}Z_2^{-1}) & (Z_1^{-1}Z_2^{-1} - r_{12}^2Z_1^{-1}Z_2) \end{bmatrix}$$

og med  $Z_j = \exp(-i\theta_j)$  får vi til slutt

$$\mathbf{S} = \frac{1}{1 - r_{12}^2} \begin{bmatrix} e^{-i(\theta_1+\theta_2)} - r_{12}^2e^{-i(\theta_1-\theta_2)} & r_{12}[e^{-i(\theta_1-\theta_2)} - e^{-i(\theta_1+\theta_2)}] \\ r_{12}[e^{i(\theta_1-\theta_2)} - e^{i(\theta_1+\theta_2)}] & e^{i(\theta_1+\theta_2)} - r_{12}^2e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Matrisen  $\mathbf{S}$  i ligning 2.14 er den såkalte “stack matrix”. Den er unimodulær, det vil si karakterisert ved at  $\det(\mathbf{S}) = \pm 1$ . Beviset for at  $\mathbf{S}$  er unimodulær er gitt i tillegg A, avsnitt A.2. Matrisen  $\mathbf{S}$  er imidlertid ikke unitær som hevdet av Hovem (1995).

## 2.3 N-celle medium

For et binært periodisk medium med et gitt antall celler (lagperioder), bestemmes propageringen ved å multiplisere sammen “stack-matriser”. La oss si at vi har  $N$  slike celler som vist i figur 2.3. Da kan vi sette opp ligningen

$$\begin{bmatrix} R_N(Z) \\ I(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_N(Z) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

der  $R_N(Z)$  er det totale bølgefeltet som reflekteres tilbake fra den binære sekvensen, mens  $T_N(Z)$  er det totale bølgefeltet som transmitteres gjennom mediet. Matrisen  $\mathbf{Q}$  i ligning 2.15 er gitt ved

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{S}^N \quad (2.16)$$

### 2.3.1 Over- og underliggende medium

Det over- og underliggende medium har de samme fysiske egenskapene som medium 1 i det binære mediet. Kilden er tenkt plassert i det overliggende medium, like over det øverste laget (medium 1) i den første lagperioden. Når bølgene faller inn ovenfra, vil vi derfor ikke få refleksjoner fra toppen av det øverste laget i det periodiske mediet. Det vil heller ikke genereres multipler i dette laget. Det overliggende medium er ikke spesifisert direkte, men er altså i utgangspunktet det samme som medium 1. Årsaken til dette er lett å se dersom vi betrakter bølgepropageringen gjennom et vilkårlig antall lagperioder. Bølgepropageringen er da bestemt ved matrisen  $\mathbf{Q}$ , som vi kan skrive

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} \cdots \mathbf{S} \\ &= (\mathbf{L}_1 \mathbf{H}_{12} \mathbf{L}_2 \mathbf{H}_{21}) \cdot (\mathbf{L}_1 \mathbf{H}_{12} \mathbf{L}_2 \mathbf{H}_{21}) \cdots (\mathbf{L}_1 \mathbf{H}_{12} \mathbf{L}_2 \mathbf{H}_{21}) \\ &= \mathbf{I} \cdot (\mathbf{L}_1 \mathbf{H}_{12} \mathbf{L}_2 \mathbf{H}_{21} \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{H}_{12} \mathbf{L}_2 \mathbf{H}_{21} \cdots \mathbf{L}_1 \mathbf{H}_{12} \mathbf{L}_2) \cdot \mathbf{H}_{21}\end{aligned}\quad (2.17)$$

Lar vi nå  $\mathbf{H}_{01}$  være den “interface transition matrix” som beskriver refleksjoner og transmisjoner ved grenseflaten mellom det overliggende medium og det første laget i det periodiske mediet, ser vi fra ligning 2.17 at  $\mathbf{H}_{01} = \mathbf{I}$  (identitetsmatrisen). Matrisen  $\mathbf{H}_{01}$  er generelt gitt ved

$$\mathbf{H}_{01} = \frac{1}{t_{01}} \begin{bmatrix} 1 & r_{01} \\ r_{01} & 1 \end{bmatrix}\quad (2.18)$$

og denne blir lik identitetsmatrisen ( $\mathbf{I}$ ) når  $r_{01} = 0$  (og transmisjonskoeffisienten  $t_{01} = 1 + r_{01} = 1$ ). Det er altså ingen grenseflate mellom det overliggende medium og det første laget i det periodiske mediet; det overliggende medium har de samme fysiske egenskapene som medium 1.

Den siste matrisen i ligning 2.17 representerer refleksjoner og transmisjoner ved grenseflaten mellom det nederste laget (medium 2) i det periodiske mediet og det underliggende medium. Dette er matrisen  $\mathbf{H}_{21}$ , altså overgangen fra medium 2

til medium 1. Det underliggende medium har de samme fysiske egenskaper som medium 1.

Selvsagt kan det over- og underliggende medium spesifiseres hvis det er ønskelig. Dette gjøres ved å legge til slike “interface transition matrices”. Ved å la matrisene  $\mathbf{H}_{01}$  og  $\mathbf{H}_{23}$  representere refleksjoner og transmisjoner ved grenseflaten mellom det overliggende medium og det øverste laget i det periodiske mediet, og ved grenseflaten mellom det nederste laget i det periodiske mediet og det underliggende medium, henholdsvis, kan vi sette

$$\mathbf{Q}_2 = (\mathbf{H}_{01})(\mathbf{Q}\mathbf{H}_{21}^{-1})(\mathbf{H}_{23}) \quad (2.19)$$

der  $\mathbf{Q} = \mathbf{S}^N$  ( $N$  lagperioder). Alternativt kunne vi erstattet matrisen  $\mathbf{H}_{21}$  i den siste “stack-matrisen”  $\mathbf{S}$  med matrisen  $\mathbf{H}_{23}$ , altså

$$\mathbf{Q}_2 = (\mathbf{H}_{01})(\mathbf{S}^{N-1})(\mathbf{L}_1\mathbf{H}_{12}\mathbf{L}_2\mathbf{H}_{23})$$

### 2.3.2 Egenverdier

Før vi går videre med å finne analytiske uttrykk for elementene i matrisen  $\mathbf{Q}$ , finner vi egenverdiene til “stack-matrisen”  $\mathbf{S}$ . Egenverdiene er gitt ved løsningen av det karakteristiske polynomet til  $\mathbf{S}$ , det vil si  $\det(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ . Løsningen er gitt ved

$$\lambda_{1,2} = \xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.20)$$

der  $\xi$  er en reell størrelse og definert som

$$\xi = \frac{\text{trace}(\mathbf{S})}{2} = \frac{S_{11} + S_{22}}{2} = \frac{S_{11} + S_{11}^*}{2} = \Re(S_{11})$$

De to egenverdiene er inverse størrelser fordi matrisen  $\mathbf{S}$  er unimodulær. Utregningen av egenverdiene er gitt i tillegg A, avsnitt A.3.

### 2.3.3 Egenvektorer og diagonalisering

Egenvektorene  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  tilhørende de to egenverdiene finnes som ikke-trivielle løsninger ( $\mathbf{x}$ ) av det homogene ligningsystemet

$$(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

hvor løsningen er gitt ved

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} S_{12} \\ \lambda_1 - S_{11} \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} S_{12} \\ \lambda_2 - S_{11} \end{bmatrix}$$

Utledningen er gitt i tillegg A, avsnitt A.4.

Nå kan “stack-matrisen”  $\mathbf{S}$  diagonaliseres. Det vil si at  $\mathbf{S}$  skrives som produktet av en matrise  $\mathbf{P}$  som består av egenvektorene til  $\mathbf{S}$ , en diagonalmatrise  $\mathbf{D}$  med de korresponderende egenverdiene og den inverse matrisen til  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}^{-1}$ ), altså  $\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ . Hensikten med diagonaliseringen er at matrisen  $\mathbf{Q} = \mathbf{S}^N$  blir lett å beregne, fordi

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}\mathbf{D}^N\mathbf{P}^{-1} \text{ der } \mathbf{D}^N = \begin{bmatrix} \lambda_1^N & 0 \\ 0 & \lambda_2^N \end{bmatrix}$$

Etter litt algebra (se tillegg A, avsnitt A.5 for utledning) får vi et analytisk uttrykk for matrisen  $\mathbf{Q}$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} \frac{\lambda_2^N - \lambda_1^N}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\lambda_2^{N-1} - \lambda_1^{N-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} & S_{12} \frac{(\lambda_2^N - \lambda_1^N)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ S_{21} \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2} & S_{22} \frac{(\lambda_2^N - \lambda_1^N)}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\lambda_2^{N-1} - \lambda_1^{N-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}$$

Videre benytter vi at egenverdiene kan skrives som

$$\lambda_{1,2} = \xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2} = e^{\pm i\gamma}$$

hvor  $\gamma$  i dette tilfellet blir  $\gamma = \arccos(\xi)$ . Dette gir matrisen



$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} \frac{\sin(N\gamma)}{\sin(\gamma)} - \frac{\sin((N-1)\gamma)}{\sin(\gamma)} & S_{12} \frac{\sin(N\gamma)}{\sin(\gamma)} \\ S_{21} \frac{\sin(N\gamma)}{\sin(\gamma)} & S_{22} \frac{\sin(N\gamma)}{\sin(\gamma)} - \frac{\sin((N-1)\gamma)}{\sin(\gamma)} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.3.4 Chebyshev-polynomer

Chebyshev-polynomer (second kind) (Rivlin, 1990) er definert ved rekursjonsformelen

$$U_n(\xi) = 2\xi U_{n-1}(\xi) - U_{n-2}(\xi) \quad (2.22)$$

for  $n = 2, 3, 4, \dots$  med startverdiene  $U_0(\xi) = 1$  og  $U_1(\xi) = 2\xi$ , eller eksplisitt

$$\begin{aligned} U_0(\xi) &= 1 \\ U_1(\xi) &= 2\xi \\ U_2(\xi) &= 4\xi^2 - 1 \\ U_3(\xi) &= 8\xi^3 - 4\xi \\ U_4(\xi) &= 16\xi^4 - 12\xi^2 + 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

De 5 første Chebyshev-polynomene (second kind) er vist i figur 2.4.

Med  $\xi = \cos(\gamma)$  får vi den enkle formen

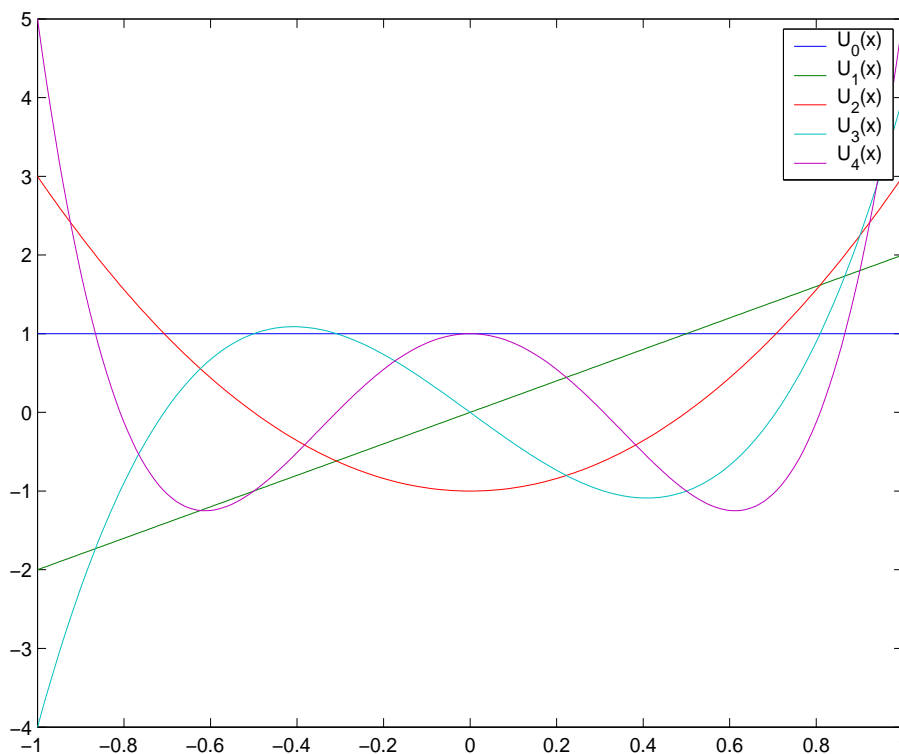
$$U_n(\cos(\gamma)) = \frac{\sin((n+1)\gamma)}{\sin(\gamma)} \quad (2.23)$$

som vi kjenner igjen i ligning 2.21. Ved innsetting får vi enkle analytiske uttrykk for elementene i propageringsmatrisen  $\mathbf{Q}$  for et vilkårlig antall  $N$  celler og vilkårlige fysiske parametre. Matrisen  $\mathbf{Q}$  er da gitt ved

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}U_{N-1}(\xi) - U_{N-2}(\xi) & S_{12}U_{N-1}(\xi) \\ S_{21}U_{N-1}(\xi) & S_{22}U_{N-1}(\xi) - U_{N-2}(\xi) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Matrisen ( $\mathbf{Q}$ ) i ligning 2.24 inneholder den totale responsen, inkludert den direkte ankomsten og alle multipler. Hovem (1995) sammenlignet trasene fra den numeriske simuleringen hvor han brukte propageringsmatriser med de eksperimentelle trasene fra Marion & Coudin (1992), og konkluderte med at simuleringen gav tilstrekkelig samsvar med eksperimentet. Også Marion et al. (1994) benyttet propageringsmatriser da eksperimentet til Marion & Coudin (1992) ble gjentatt numerisk. Ved sammenligning slo de fast at alle essensielle trekk var til stede på de syntetiske trasene.

*Merk:* I utgangspunktet kunne bare diagonalisering vært benyttet for å finne analytiske uttrykk for elementene i matrisen  $\mathbf{Q}$ . Men det vil oppstå situasjoner hvor det ikke finnes to distinkte egenverdier, med lineært avhengige egenvektorer som resultat. Da eksisterer ikke matrisen  $\mathbf{P}^{-1}$ , og en vil få problemer ved numeriske beregninger. Dette problemet har vi unngått ved å ta i bruk Chebyshev polynomer (second kind).



Figur 2.4: De fem første Chebyshev-polynomene  $U_n(x)$  for  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  og med  $-1 \leq x \leq 1$ .

## 2.4 “Bloch phase”

Størrelsen  $\gamma = \arccos(\xi)$  er kjent fra fysikken som “Bloch phase” til det periodiske systemet. Når  $|\xi| > 1$  og antall lagperioder  $N \rightarrow \infty$ , vil transmisjonen  $|T_N| \rightarrow 0$ . Frekvensbånd hvor  $|\xi| > 1$  er da karakterisert som stoppbånd. Da er egenverdiene til “stack-matrisen” ( $\mathbf{S}$ ) reelle og bølgene avtar eksponentielt med avstanden. Slike frekvensbånd er kjent fra teorien om bølgepropagering i krystaller, og omtales som forbudte bånd. Men når  $|\xi| < 1$  vil bølgene transmitteres gjennom det periodiske mediet. Egenverdiene er da komplekskonjugerte med  $\bar{\xi}$  i tallverdi, og beskriver propagerende bølger (Hovem, 1995). Grensen mellom de to regimene er derfor gitt ved  $|\xi| = 1$ .

Cayley-Hamilton teoremet sier at enhver matrise tilfredstiller sitt eget karakteristiske polynom, det vil si

$$\mathbf{S}^2 - 2\mathbf{S}\xi + \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Det kan da vises ved induksjon (Sprung et al., 2000) at

$$\mathbf{S}^N = U_{N-1}(\xi)\mathbf{S} - U_{N-2}(\xi)\mathbf{I}$$

Dette betyr at propageringsmatrisen ( $\mathbf{S}$ ) for en enkel celle sammen med “Bloch phase” ( $\gamma = \arccos(\xi)$ ) bestemmer scattering egenskapene til hele  $N$ -celle systemet.

Betrakter vi en celle, har vi sammenhengen

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_1 \end{bmatrix} \Rightarrow R_1 = S_{12}T_1$$

og tilsvarende for  $N$  celler:

$$\begin{bmatrix} R_N \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_N \end{bmatrix} \Rightarrow R_N = Q_{12}T_N$$

Det vil si at

$$\frac{R_N}{T_N} = Q_{12} = S_{12}U_{N-1}(\xi) = U_{N-1}(\xi)\frac{R_1}{T_1}$$

Med  $\xi = \cos(\gamma)$  og energikonservering ( $|R_N|^2 + |T_N|^2 = 1$ ) får vi

$$\begin{aligned} \frac{1 - |T_N|^2}{|T_N|^2} &= \frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2(\gamma)} \cdot \frac{1 - |T_1|^2}{|T_1|^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{|T_N|^2} - 1 &= \frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2(\gamma)} \left( \frac{1}{|T_1|^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Hvis da en enkel celle er transparent (perfekt transmisjon gjennom cellen:  $|T_1|^2 = 1$ ), blir

$$\frac{1}{|T_N|^2} - 1 = 0 \Rightarrow |T_N|^2 = 1$$

Dette betyr at dersom en celle er transparent, er også  $N$  celler transparent. I tillegg ser vi at ligning 2.25, med  $|T_N|^2 = 1$  ( $N$  celler transparente), også er oppfylt når  $\sin^2(N\gamma)/\sin^2(\gamma) = 0$ . Det har vi når  $\sin^2(N\gamma) = 0$  og  $\sin^2(\gamma) \neq 0$ . Fordi  $\gamma$  varierer med  $\pi$  innenfor ethvert “tillatt bånd” ( $\gamma = \arccos(\xi)$ , og  $\xi$  varierer mellom  $-1$  og  $+1$  innenfor hvert “tillatte bånd”), får vi at vi også har perfekt transmisjon når  $N\gamma = j\pi$ ,  $j = 1, 2, \dots, N - 1$ . Altså finnes det  $N - 1$  punkter  $\gamma_j = j\pi/N$  innenfor hvert tillatte frekvensbånd som gir perfekt transmisjon.

### 2.4.1 Dispersjonsrelasjonen

“Bloch phase” ( $\gamma$ ) kan tolkes som den “effektive” fasevinkelen til det periodiske systemet. Dette gir den en fysisk mening da den leder til definisjonen av en effektiv gangtid og en effektiv fasehastighet. Med  $\gamma$  gitt som  $\gamma = \arccos(\xi)$ , trenger vi et analytisk uttrykk for parameteren  $\xi$ . Det kan da vises (se tillegg A, avsnitt A.6) at  $\xi$  kan skrives som

$$\xi = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - P \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (2.26)$$

der  $\theta_1 = \omega \Delta t_1$  og  $\theta_2 = \omega \Delta t_2$  er de to fasevinklene, mens  $P$  er midlere impedanskontrast. Den midlere impedanskontrasten ( $P$ ) er gitt ved

$$P = \frac{1}{2} \left( \frac{Y_2}{Y_1} + \frac{Y_1}{Y_2} \right) = \frac{1 + r_{12}^2}{1 - r_{12}^2} \quad (2.27)$$

der  $Y_1$  og  $Y_2$  er de to akustiske admittansene og  $r_{12}$  er refleksjonskoeffisienten på grenseflaten mellom medium 1 og medium 2.

Ved normalt innfallende bølger, og innsetting for  $\xi = \cos(\gamma)$  og fasevinklene  $\theta_1$  og  $\theta_2$  i ligning 2.26, får vi dispersjonsrelasjonen på formen

$$\cos \left( \frac{\omega h}{c_p} \right) = \cos \left( \frac{\omega h_1}{c_1} \right) \cos \left( \frac{\omega h_2}{c_2} \right) - P \sin \left( \frac{\omega h_1}{c_1} \right) \sin \left( \frac{\omega h_2}{c_2} \right) \quad (2.28)$$

der  $h = h_1 + h_2$  er tykkelsen av lagperioden og  $\omega$  er den angulære frekvensen. Løsningen av dispersjonsrelasjonen gir fasehastigheten ( $c_p$ ) til den propagerende bølgen som funksjon av frekvensen, lagtykkelsene og de fysiske egenskapene til mediet.

Helbig (1984) utledet dispersjonsrelasjoner for periodiske medier med lagperioder bestående av diverse antall  $n$  komponenter. Han fant at uttrykkene er symmetriske i lag-indeksene for  $n = 2$  og  $n = 3$ . Dette ser en også i ligning 2.28 ( $n = 2$ , binært medium). Men i tilfellet med  $n = 4$  (4 lag i lagperioden), fant han at uttrykket avhenger av rekkefølgen på lagene. Det interessante med dette, er at det er et klart avvik fra langbølge-approksimasjonen, som er basert på en midling (uavhengig av komponentenes rekkefølge).

### 2.4.2 Approksimasjoner fra “Bloch phase”

Fra den “effektive” fasevinkelen ( $\gamma$ ) er det mulig å vise matematisk at bølgene, under visse forutsetninger, vil propagere med den effektive mediumhastigheten ( $c_e$ ) og gjennomsnittshastigheten ( $c$ ).

#### Effektiv mediumhastighet

Parameteren  $\xi$  kan også skrives som (se tillegg A, avsnitt A.6)

$$\xi = \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) - r_{12}^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{1 - r_{12}^2} \quad (2.29)$$

Dette gir da ligningen

$$\cos(\gamma) = \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) - r_{12}^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{1 - r_{12}^2}$$

I grensen av lave frekvenser, hvor fasevinklene er små, gir Taylor-rekken (de to første leddene) av de tre cosinus funksjonene ligningen

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\gamma^2}{2} &\approx \frac{1 - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)^2 - r_{12}^2 \left[1 - \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2\right]}{1 - r_{12}^2} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}[(\theta_1 + \theta_2)^2 - r_{12}^2(\theta_1 - \theta_2)^2]}{1 - r_{12}^2} \\ &\Rightarrow \gamma^2 = \frac{(\theta_1 + \theta_2)^2 - r_{12}^2(\theta_1 - \theta_2)^2}{1 - r_{12}^2} \end{aligned}$$

Ved å sette  $\gamma = \omega \Delta t_e$  (effektiv fasevinkel,  $\Delta t_e$  er den effektive gangtiden i en lagperiode), samt at  $\theta_1 = \omega \Delta t_1$  og  $\theta_2 = \omega \Delta t_2$ , får vi

$$\begin{aligned} \omega^2 \Delta t_e^2 &= \frac{\omega^2 [(\Delta t_1 + \Delta t_2)^2 - r_{12}^2 (\Delta t_1 - \Delta t_2)^2]}{1 - r_{12}^2} \\ \Delta t_e^2 &= \frac{(\Delta t_1 + \Delta t_2)^2 - r_{12}^2 (\Delta t_1 - \Delta t_2)^2}{1 - r_{12}^2} \end{aligned}$$

Med  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ , gir dette

$$\frac{\Delta t_e^2}{\Delta t^2} = \frac{1 - r_{12}^2 (\Delta t_1 - \Delta t_2)^2 / \Delta t^2}{1 - r_{12}^2}$$

og

$$\frac{\Delta t_e}{\Delta t} = \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2(\Delta t_1 - \Delta t_2)^2/\Delta t^2}{1 - r_{12}^2}}$$

Dette forholdet mellom den effektive gangtiden ( $\Delta t_e$ ) i en lagperiode og gangtiden ( $\Delta t$ ) fra stråleteorien er lik forholdet mellom gjennomsnittshastigheten ( $c$ ) og den effektive mediumhastigheten ( $c_e$ ). Dette viser at bølgens hastighet nærmer seg den effektive mediumhastigheten i grensen av lave frekvenser. I praksis vil dette kunne skje når bølgelengden til det seismiske signal er mye større enn tykkelsen til lagperioden i det periodiske mediet. Den effektive medium hastigheten kan dermed gies ved

$$c_e = \frac{c}{\sqrt{\frac{1 - r_{12}^2(\Delta t_1 - \Delta t_2)^2/\Delta t^2}{1 - r_{12}^2}}} \quad (2.30)$$

Den samme fremgangsmåten ble benyttet i Morlet et al. (1982b).

### Gjennomsnittshastighet

Det er også mulig å vise at bølgen vil propagere med gjennomsnittshastigheten når kontrasten i akustisk impedans er svært liten. Ved å benytte at

$$\cos \theta_1 \cos \theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

og sette inn i ligning 2.26, blir uttrykket som gitt i Hovem (1995):

$$\xi = \cos(\theta_1 + \theta_2) - (P - 1) \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (2.31)$$

I tilfeller med liten kontrast i akustisk impedans, kan en sette  $P \approx 1$  slik at  $\xi \approx \cos(\theta_1 + \theta_2)$ . Med  $\gamma = \arccos(\xi)$  får vi da

$$\cos(\gamma) = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\Rightarrow \gamma = \theta_1 + \theta_2$$

Med  $\gamma$  gitt som mediets “effektive” fasevinkel, får vi til slutt

$$\omega \Delta t_e = \omega \Delta t_1 + \omega \Delta t_2 = \omega(\Delta t_1 + \Delta t_2)$$

$$\Rightarrow \Delta t_e = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t$$

Altså er  $\Delta t_e / \Delta t = 1$ , som betyr at den effektive hastigheten i mediet er lik gjennomsnittshastigheten (stråleteori).



# Kapittel 3

## Dynamikk

Propageringsmatriser kan brukes til å modellere den seismiske responsen til et lagdelt periodisk medium, bestående av et antall  $N$  celler (se figur 3.1). Denne metoden, populært kalt Thomson-Haskell metoden, gir sammenhengen mellom det innfallende bølgefeltet  $I(Z)$ , det transmitterte bølgefeltet  $T_N(Z)$  og det reflekterte bølgefeltet  $R_N(Z)$  ved

$$\begin{bmatrix} R_N(Z) \\ I(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_N(Z) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Matrisen  $\mathbf{Q}$  inneholder den totale responsen, inkludert direkteankomsten, alle primære refleksjoner og alle multipler generert av det lagdelte mediet.

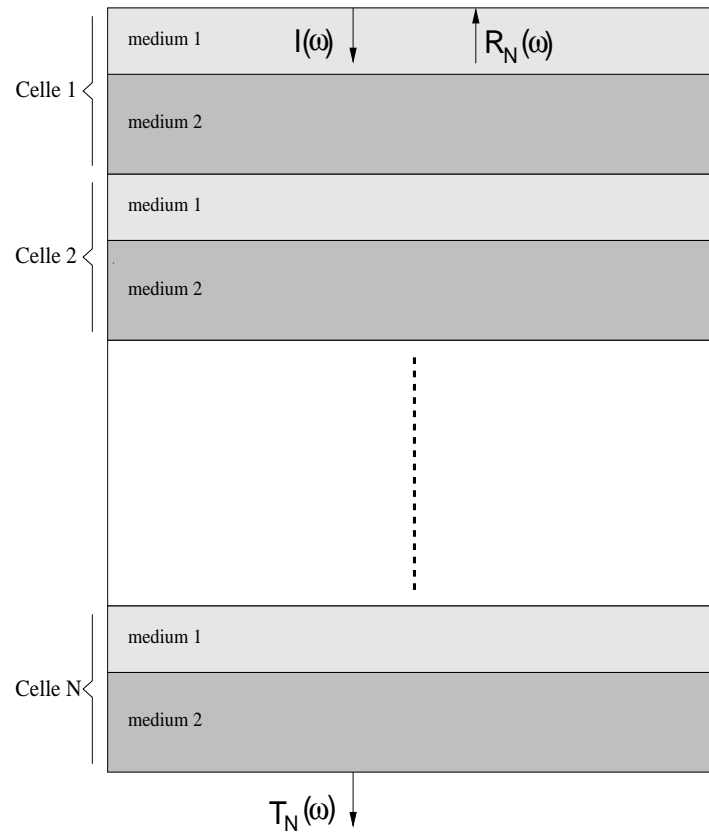
### 3.1 Transmisjon

Ved å skrive ut ligning 3.1 får vi et uttrykk for bølgefeltet  $T_N(Z)$ , det totale bølgefeltet som har blitt transmittert gjennom mediet, det vil si

$$T_N(Z) = \frac{I(Z)}{Q_{22}(Z)} \quad (3.2)$$

Med  $Z = \exp(-i\omega\Delta t)$  kan ligning 3.2 uttrykkes i frekvensdomenet

$$T_N(\omega) = \frac{I(\omega)}{Q_{22}(\omega)} \quad (3.3)$$



Figur 3.1: Et horisontalt binært periodisk medium, bestående av  $N$  lagperioder (celler). Hver lagperiode inneholder to lag, medium 1 og medium 2. De to lagene i hver celle er karakterisert ved lagtykkelsene  $h_1$  og  $h_2$ ,  $P$ -bølgehastighetene  $c_1$  og  $c_2$ , og bulk tetthetene  $\rho_1$  og  $\rho_2$ , henholdsvis.  $I(\omega)$  er det innfallende bølgefeltet, mens  $T_N(\omega)$  er det totale bølgefeltet som transmitteres gjennom de  $N$  lagperiodene (direkte bølgen og alle multipler).  $R_N(\omega)$  er det totale bølgefeltet som reflekteres tilbake. Over- og underliggende medium er det samme som medium 1 og kilden er tenkt plassert i det overliggende medium, like over toppen av den binære sekvensen. I tillegg er det plassert ut to mottakere: en i samme posisjon som kilden, og en like under den binære sekvensen.

Her er  $I(\omega)$  Fourier-spekteret til den innfallende bølgen (signalet), mens  $Q_{22}(\omega)$  er et element fra matrisen i ligning 3.1. Frekvensspekteret  $T_N(\omega)$  til det transmitterte bølgefeltet er altså lik frekvensspekteret  $I(\omega)$  til den innfallende bølgen, multiplisert med uttrykket  $1/Q_{22}(\omega)$ . Dette kan tolkes som en filtrering av det utsendte signalet, der filteret  $F_N(\omega)$  er gitt ved

$$F_N(\omega) = \frac{1}{Q_{22}(\omega)} \quad (3.4)$$

Ved å uttrykke  $T_N(\omega)$  i tidsdomenet som et signal vi kaller  $t_N(t)$ , altså at  $T_N(\omega)$  er Fourier-spekteret til signalet  $t_N(t)$

$$t_N(t) \longleftrightarrow T_N(\omega) \quad (3.5)$$

kan  $t_N(t)$  beregnes ved den inverse Fourier-transformasjonen. I tidsdomenet er da det transmitterte signalet  $t_N(t)$  gitt ved

$$t_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_N(\omega) I(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\omega)}{Q_{22}(\omega)} \exp(i\omega t) d\omega \quad (3.6)$$

Integralet kan løses ved hjelp av den diskrete Fourier-transformasjonen.

## 3.2 Refleksjon

Som for det transmitterte bølgefeltet, får vi også et uttrykk for det totale reflekterte bølgefeltet: summen av alle bølger som blir reflektert tilbake. Inkludert er alle primære refleksjoner, samt multiplene. Ligning 3.1 gir at

$$R_N(Z) = Q_{12}(Z) \cdot T_N(Z) = \frac{Q_{12}(Z)}{Q_{22}(Z)} \cdot I(Z) \quad (3.7)$$

Og med  $Z = \exp(-i\omega\Delta t)$  blir det reflekterte bølgefeltet uttrykt som en funksjon av den angulære frekvensen ( $\omega$ )

$$R_N(\omega) = \frac{Q_{12}(\omega)}{Q_{22}(\omega)} \cdot I(\omega) \quad (3.8)$$

Også her kan vi tolke det reflekterte bølgefeltet som en filtrert versjon av det innfallende bølgefeltet, med filteret  $G_N(\omega)$  gitt ved

$$G_N(\omega) = \frac{Q_{12}(\omega)}{Q_{22}(\omega)} \quad (3.9)$$

Med

$$r_N(t) \longleftrightarrow R_N(\omega) \quad (3.10)$$

er det reflekterte signal  $r_N(t)$  i tidsdomenet gitt ved den inverse Fourier-transformasjonen

$$r_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_N(\omega) I(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_{12}(\omega)}{Q_{22}(\omega)} I(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (3.11)$$

Dette integralet kan selvsagt også løses ved å benytte diskrete versjoner av input signalet og filteret representert av mediet.

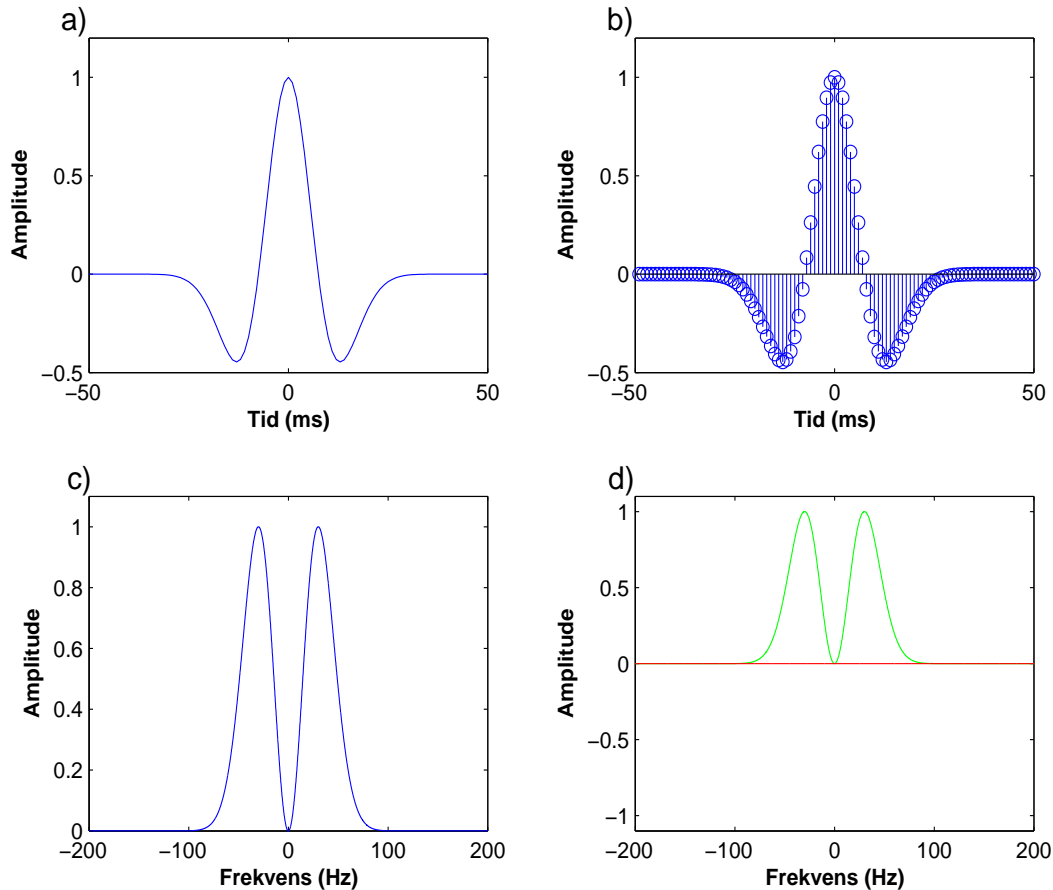
### 3.3 Signal

Hovem (1995) analyserte resultatene fra det eksperimentelle studiet av Marion & Coudin (1992), og simulerte bølgepropageringen gjennom det binære mediet av tynne stål- og plastikkskiver ved hjelp av propageringsmatriser. Den totale tykkelsen til det periodiske mediet var 52 mm, og Hovem (1995) benyttet et signal som var konstant i frekvensdomenet fra 0 til 400 kHz, noe som tilsvarer en smal  $\sin(x)/x$  type signal i tidsdomenet med en varighet av hovedloben på  $1.25\mu\text{s}$ . Selv har jeg har valgt å benytte medier av geologisk skala, og vil bruke en modifisert versjon av den kjente Ricker-waveleten i de numeriske simuleringene. Ricker-waveleten er nullfase, og uttrykkes i tidsdomenet som

$$s(t) = (1 - 2(\pi f_s t)^2) e^{-(\pi f_s t)^2} \quad (3.12)$$

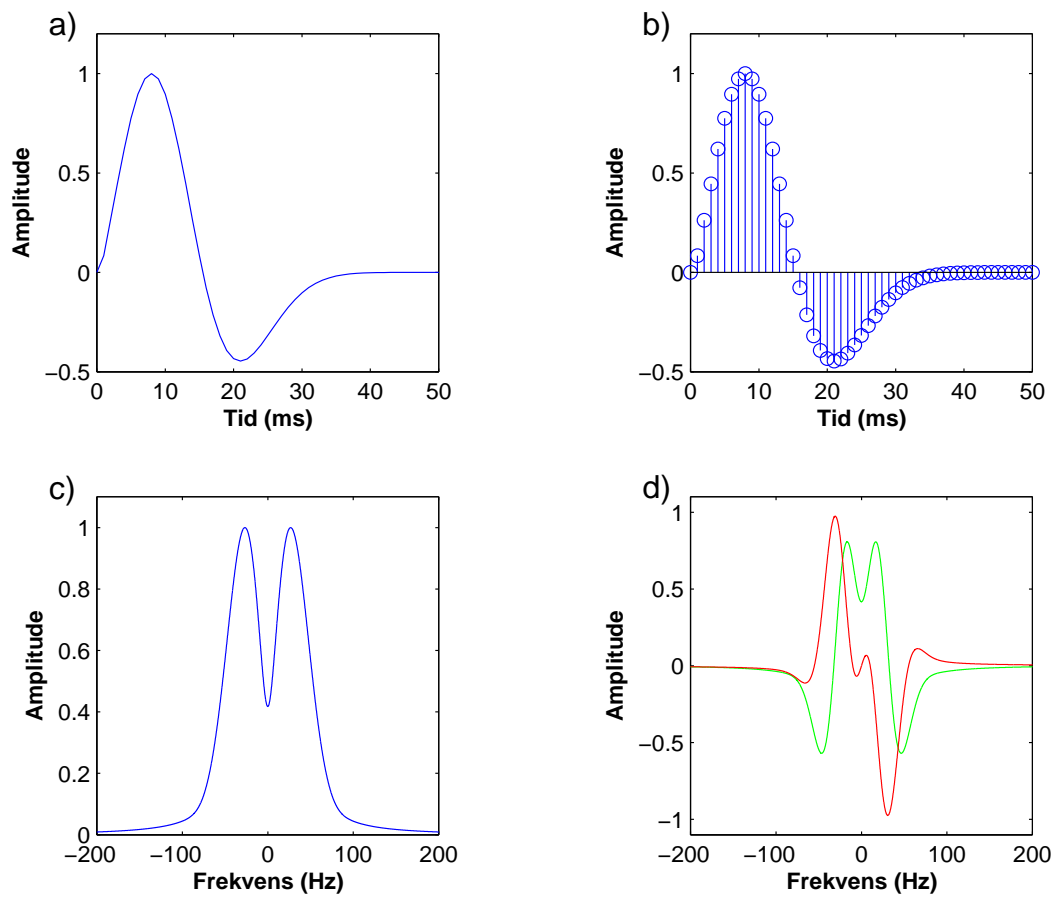
hvor  $f_s$  er senterfrekvensen (i Hz) til signalet. Sammenhengen mellom den lineære frekvensen ( $f$ ) og den angulære frekvensen ( $\omega$ ) er gitt ved relasjonen  $\omega = 2\pi f$ .

En Ricker-wavelet med senterfrekvensen  $f_s = 30$  Hz er vist i figur 3.2 med det kontinuerlige signalet i (a) og den samlede diskrete versjonen i (b). Fourier-spekteret er vist i (c) og (d), og er sentrert rundt senterfrekvensen  $f_s$ .



Figur 3.2: Ricker-wavelet med senterfrekvens  $f_s = 30$  Hz i tidsdomenet (a) og diskret samplet versjon (b). Absoluttverdien av Fourier-spekteret er vist i (c), mens realdelen (grønn kurve) og imaginærdelen (rød kurve) av Fourier-spekteret er vist i (d). Fourier-spekteret er beregnet ved FFT-algoritmen i MATLAB, og skalert slik at den maksimale amplituden er lik én i absoluttverdi.

Den modifiserte versjonen av den symmetriske og nullfase Ricker-waveleten (med senterfrekvens  $f_s = 30$  Hz) er vist i figur 3.3. Signalet er nå kausalt og dermed mer “reelt” med tanke på hvordan seismisk datainnsamling foregår i praksis. Den diskrete versjonen i (b) er “samplet” med et samplingsintervall  $\Delta t = 1$  ms. Denne samplingen gir Nyquist-frekvensene  $f_{ny} = \pm 1/(2\Delta t) = \pm 500$  Hz. Da signalet ikke lenger er nullfase, får vi introdusert en imaginærdel i frekvensspekteret (d), og fasespekteret er ulik null.



Figur 3.3: Figuren viser det kontinuerlige og kausale input signalet i tidsdomenet (a), den diskretiserte versjonen (b) og absoluttverdien av Fourier-spekteret (c). I (d) er Fourier-spekterets realdel (grønn kurve) og imaginærdel (rød kurve) vist. Signalet er generert fra en Ricker-wavelet med senterfrekvensen  $f_s = 30$  Hz. Fourier-spekteret er beregnet ved FFT algoritmen i MATLAB, og er skalert slik den maksimale amplituden er én i absoluttverdi.

### 3.4 Mediet

Det periodiske binære mediet defineres ved antall lagperioder ( $N$ ), lagtykkelser, P-bølgehastigheter og bulkthettheter. Med formelen for P-bølgehastighetene

$$c_j = \sqrt{\frac{K_j}{\rho_j}}, j = 1, 2 \quad (3.13)$$

er det antatt at bulkmodulene er gitt ved  $K_j = \rho_j c_j^2$ ,  $j = 1, 2$ . De fysiske egenskapene til de to bestanddelene i det binære mediet, medium 1 og medium 2, er oppgitt i tabell 3.1. Disse parametrene gir en svært stor kontrast i akustisk impedans, og representerer således et relativt ekstremt tilfelle. Likevel kan slikt forekomme i reservoarsoner, og da særlig i tilfeller med gass eller kull.

Den akustiske impedans til et medium med P-bølgehastighet  $c_j$  og bulkthetthet  $\rho_j$ , er definert ved

$$AI_j = \frac{1}{Y_j} = c_j \rho_j = \frac{c_j \rho_j}{\cos(\alpha_j)} \quad (3.14)$$

Den akustiske impedans ( $AI_j$ ) og den akustiske admittans ( $Y_j$ ) er altså inverse størrelser, og avhenger av bølgens vinkel med innfallsloddet. For normalt innfallende og propagerende bølger ( $\alpha_j = 0$ ), vil vi da med P-bølgehastigheter og bulkthettheter som i tabell 3.1, ha en impedanskontrast  $AI_2/AI_1 = 9$  mellom de to komponentene i det binære mediet. Dette gir store alternerende refleksjonskoeffisienter.

	P-bølgehastigheter	Bulkthettheter	Bulkmoduler
Medium 1	$c_1 = 2000 \text{ m/s}$	$\rho_1 = 2 \text{ kg/dm}^3$	$K_1 = \rho_1 c_1^2 = 8 \cdot 10^9 \text{ kg/s}^2\text{m}$
Medium 2	$c_2 = 6000 \text{ m/s}$	$\rho_2 = 6 \text{ kg/dm}^3$	$K_2 = \rho_2 c_2^2 = 2.16 \cdot 10^{11} \text{ kg/s}^2\text{m}$

Tabell 3.1: P-bølgehastigheter, bulkthettheter og bulkmoduler for de to komponentene i det binære mediet.

Den totale tykkelsen ( $H$ ) til mediet holdes konstant, mens antall lagperioder ( $N$ ) varierer. Lagperiodene består i hvert tilfelle av  $1/4$  medium 1 og  $3/4$  medium 2. Lagtykkelsene  $h_1$  og  $h_2$  kan da gies ved

$$h_1 = \frac{1}{4} \frac{H}{N} \quad \text{og} \quad h_2 = \frac{3}{4} \frac{H}{N} \quad (3.15)$$

Med en total tykkelse  $H = 384$  m, varierer da lagtykkelsene fra  $h_1 = 1$  m og  $h_2 = 3$  m ( $N = 96$ ) til  $h_1 = 96$  m og  $h_2 = 288$  m ( $N = 1$ ). For et stort antall lagperioder er da lagtykkelsene langt under den seismiske grensen for vertikal oppløsning, mens lagene er tykke og godt over denne grensen i tilfellene med få lagperioder. De forskjellige versjonene av mediet vist i tabell 3.2 med antall lagperioder ( $N$ ), de tilhørende lagtykkelser ( $h_1$  og  $h_2$ ) og celletykkelser ( $h = h_1 + h_2$ ). Det kan nevnes at denne modellen gir lik gangtid i hvert lag for vertikalt innfallende bølger.

	Antall celler $N$	Tykkelse lag 1 $h_1$ (meter)	Tykkelse lag 2 $h_2$ (meter)	Celletykkelse $h$ (meter)
<b>1</b>	96	1	3	4
<b>2</b>	72	1.33	4	5.33
<b>3</b>	48	2	6	8
<b>4</b>	36	2.67	8	10.67
<b>5</b>	24	4	12	16
<b>6</b>	18	5.33	16	21.33
<b>7</b>	15	6.4	19.2	25.6
<b>8</b>	12	8	24	32
<b>9</b>	10	9.6	28.8	38.4
<b>10</b>	9	10.67	32	42.67
<b>11</b>	8	12	36	48
<b>12</b>	7	13.71	41.14	54.85
<b>13</b>	6	16	48	64
<b>14</b>	5	19.2	47.6	76.8
<b>15</b>	4	24	72	96
<b>16</b>	3	32	96	128
<b>17</b>	2	48	144	192
<b>18</b>	1	96	288	384

Tabell 3.2: Antall celler (lagperioder), lagtykkelser og tilhørende celletykkelser. Mediets totale tykkelse er gitt ved  $H = N \cdot h = 384$  m (konstant), og den relative andelen av de to komponentene i mediet er i alle tilfellene  $1/4$  av medium 1 og  $3/4$  av medium 2.

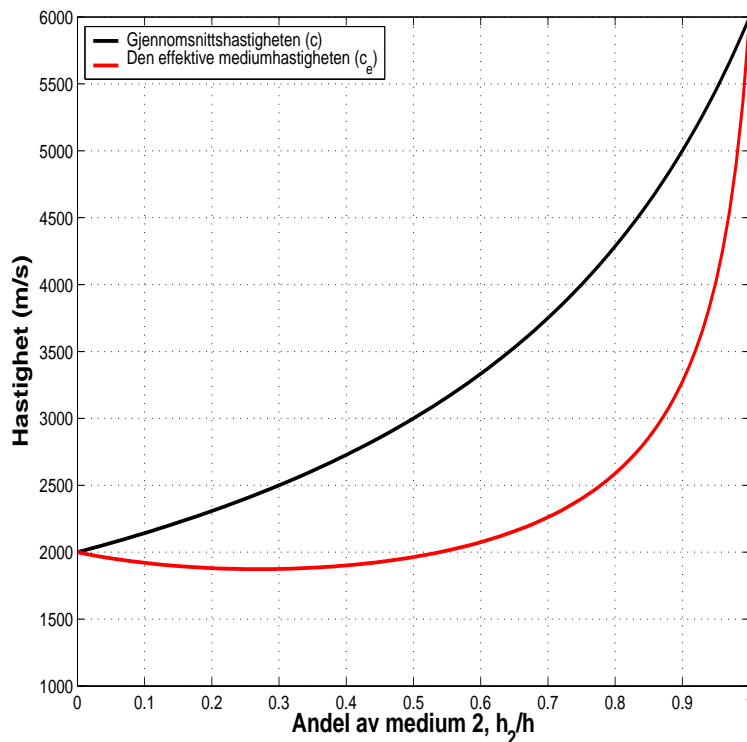
Nå kan vi beregne gjennomsnittshastigheten og de effektive mediumegenskapene til det binære mediet fra ligningene 2.1 - 2.3. Gjennomsnittshastigheten er gitt ved  $c = 4000$  m/s, mens de effektive mediumegenskapene er oppgitt i tabell 3.3.



For andre materialforhold (og normalt innfallende bølger), vil gjennomsnittshastigheten og den effektive mediumhastigheten variere som vist i figur 3.4.

Effektiv bulkmodul	Effektiv tetthet	Effektiv mediumhastighet
$K_e = 28.8 \text{ kg/s}^2\text{m}$	$\rho_e = 5.0 \text{ kg/dm}^3$	$c_e = 2400 \text{ m/s}$

Tabell 3.3: De effektive mediumegenskapene til det binære mediet med  $P$ -bølgehastigheter  $c_1 = 2000 \text{ m/s}$  og  $c_2 = 6000 \text{ m/s}$ , bulk tettheter  $\rho_1 = 2 \text{ kg/dm}^3$  og  $\rho_2 = 6 \text{ kg/dm}^3$  og lagperioder bestående av  $1/4$  medium 1 og  $3/4$  medium 2.



Figur 3.4: Kurvene representerer gjennomsnittshastigheten (svart kurve) og den effektive mediumhastigheten (rød kurve) for ulike materialforhold i det binære mediet med  $P$ -bølgehastigheter  $c_1 = 2000 \text{ m/s}$  og  $c_2 = 6000 \text{ m/s}$ , og bulk tettheter  $\rho_1 = 2 \text{ kg/dm}^3$  og  $\rho_2 = 6 \text{ kg/dm}^3$ . Andelen av medium 1 kan beregnes fra relasjonen  $\frac{h_1}{h} = 1 - \frac{h_2}{h}$ .

*Merk:* Lagtykkelsene varierer for å kunne studere hvordan den seismiske responsen avhenger av skalaen på geologien. Men dette må sees i sammenheng med varigheten eller perioden til det innfallende signalet. Mediet kunne like gjerne vært fiksert med hensyn på antall lagperioder og lagtykkelser, for deretter å variert frekvensinnholdet til signalet.

### 3.5 Numerisk simulering, normalt innfallende bølger

For å kunne tolke og forstå den seismiske responsen til lagdelte periodiske medier er det viktig å begynne med den enkleste situasjonen; normalt innfallende bølger. Dette vil også danne grunnlaget for senere sammenligning når bølgene har ulike innfallsvinkler.

De simulerte trasene av det transmitterte bølgefeltet er vist i figurene 3.5 - 3.6. I utgangspunktet er direktebølgen den første innsatsen på hver trase, da denne har minst gangtid. Deretter følger multiplene. De transmitterte bølgefeltene inneholder således bare en primær innsats, direktebølgen, de andre innsatsene er multipler som generelt betraktes som støy eller uønskede innsatser. Trasene viser at det periodiske lagdelte mediet endrer signalets form og amplitude. I tillegg er ankomsttiden til den første innsatsen forskjellig fra trase til trase, selv om tykkelsen til mediet er konstant.

#### Plukking av ankomsttider

Ankomsttidene til førsteinnsatsene er markert på trasene. Disse ble definert som tiden ved 1% av den maksimale amplituden og deretter bestemt numerisk. Da kan vi bestemme gjennomsnittshastigheten ( $c_a$ ) til bølgen i det binære mediet ved

$$c_a = H/t_1 \quad (3.16)$$

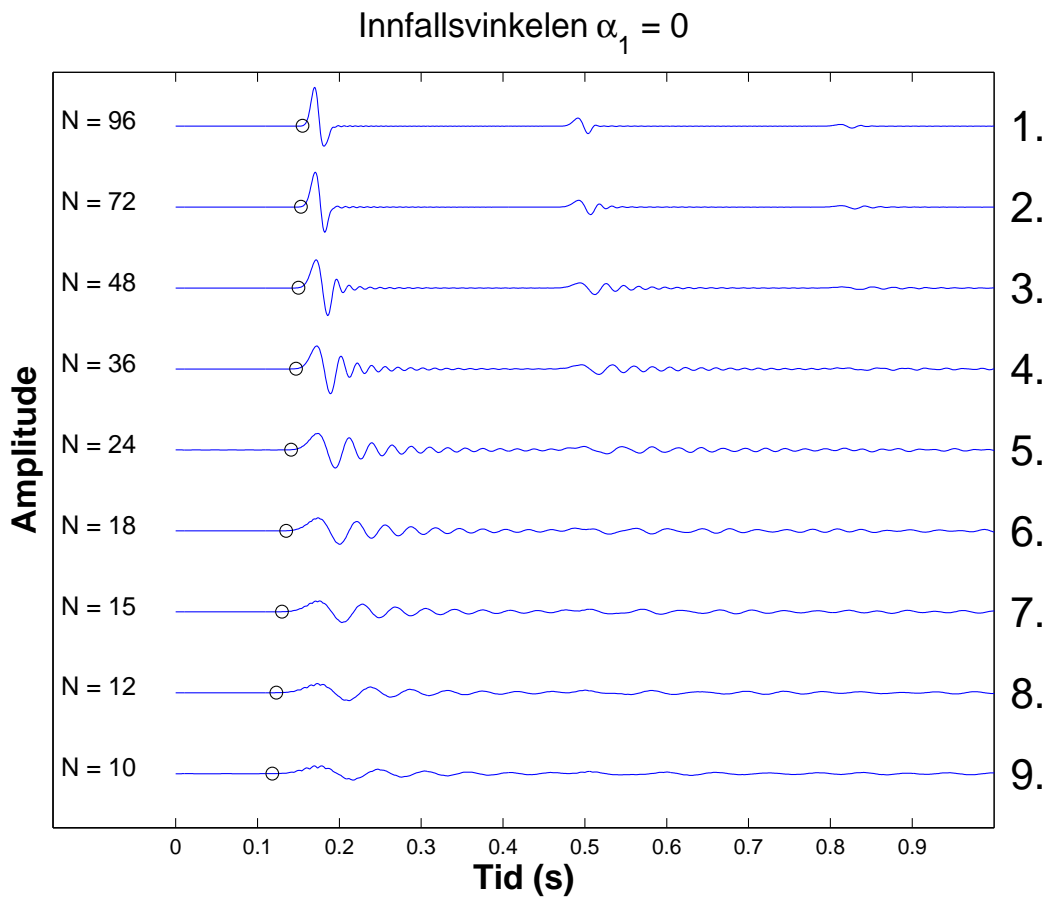
der  $H$  er mediets totale tykkelse og  $t_1$  er ankomsttiden til den første innsatsen. Videre kan vi definere den dominerende perioden til det transmitterte primære

signalet som tiden fra førsteinnsatsen til andre nullkrysning, altså

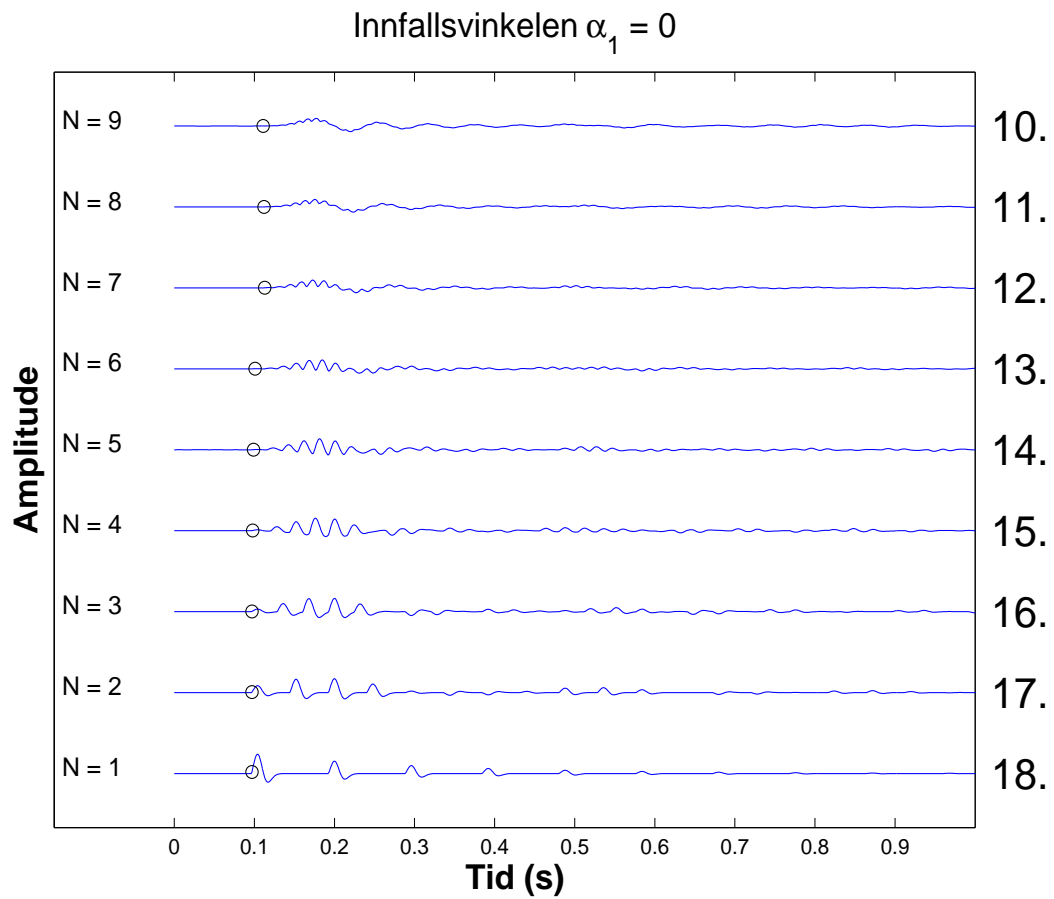
$$T_d = t_2 - t_1 \quad (3.17)$$

der  $t_2$  er tiden ved andre nullkrysning. Til slutt kan den dominerende bølgelengden til det transmitterte primære signalet beregnes som produktet av gjennomsnittshastigheten ( $c_a$ ) og den dominerende perioden ( $T_d$ ), det vil si

$$\lambda_d = c_a \cdot T_d \quad (3.18)$$



Figur 3.5: Figuren viser de transmitterte bølger for  $N = 96$  (trase 1) til  $N = 10$  (trase 9). Bølgene er normalt innfallende. Ankomsttidene ( $t_1$ ) til førsteinnsatsene er markert på trasene.



Figur 3.6: Figuren viser de transmitterte bølger for  $N = 9$  (trase 10) til  $N = 1$  (trase 18). Bølgene er normalt innfallende. Ankomsttidene ( $t_1$ ) til førsteinnsatsene er markert på trasene.

Trase 18 i figur 3.6 representerer tilfellet hvor det lagdelte mediet består kun av to lag (en lagperiode). Ankomsttiden til førsteinnsatsen er  $t_1 = 0.097 \text{ s} = 97 \text{ ms}$ , hvilket gir bølgens gjennomsnittshastighet  $c_a \approx 3960 \text{ m/s}$ . Denne hastigheten er rimelig nær den teoretiske gjennomsnittshastigheten til mediet ( $c = 4000 \text{ m/s}$ ), hvilket tilsier at stråleteorien gjør seg gjeldende der hvor bølgelengden til den innfallende bølgen er liten i forhold til lagtykkelsene.

Den første innsatsen på trase 18 er direktebølgen. Amplituden til denne er dempet som følge av transmisjonstap ved grenseflatene. Etter direktebølgen følger “peg leg” multiplene generert i lag 2. Disse dempes naturligvis for hver ekstra gangvei i laget, og dør til slutt ut. Som vi ser, er det ingen interferens mellom direktebølgen og multiplene når  $N = 1$ . Lagene er da relativt tykke, og multiplene genereres kun i det ene laget. Avstanden mellom dem er konstant i tid. Tynnere lagtykkelser vil gi mer kort-periodiske multipler. Med betegnelsen kort-periodiske multipler menes det at avstanden i tid mellom den primære “event” (direktebølgen eller den primære refleksjonen) og første multippel er mindre enn perioden til den propagerende bølgen. Da vil ikke multippelen stå frem som en egen “event”, men interferere med den primære “eventen”. Destruktiv interferens mellom den primære bølgen og kortperiodiske multipler er kjent for å dempe de høye frekvensene til det seismiske signalet og forsinke ankomsttiden. Spencer et al. (1977) kalte dette fenomenet stratigrafisk filtrering, som også er omtalt av blant andre O’Doherty & Anstey (1971), Banik et al. (1985a, 1985b) og White et al. (1990). Lignende effekter kan forårsakes av absorpsjon og den assosierte hastighetsdispersjonen. Men dempingen i stratigrafisk filtrering er på grunn av tap av koherens, ikke absorpsjon av energi (Banik et al., 1985a).

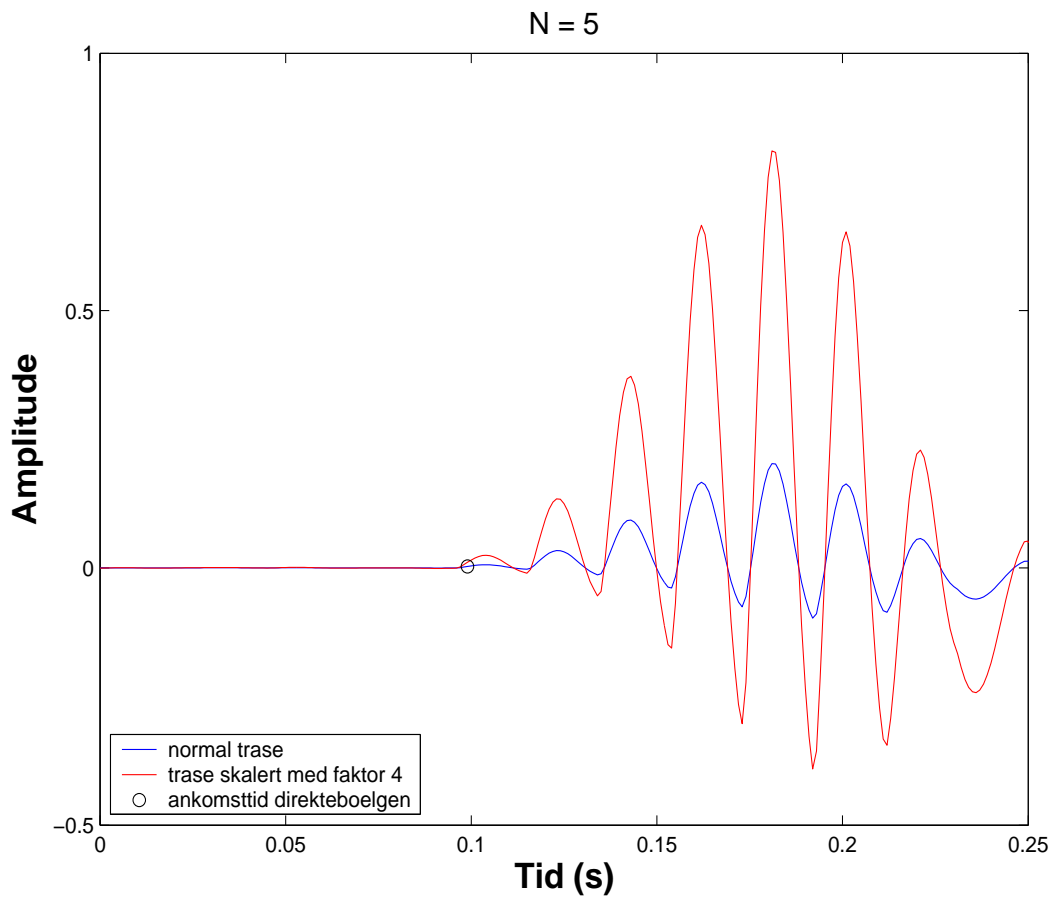
Når antall lagperioder øker, dempes amplituden til direktebølgen kraftig på grunn av transmisjonstap ved grenseflatene. I figur 3.7 er trase 14 ( $N = 5$ ) fra figur 3.6 vist i tidsintervallet  $0 - 250 \text{ ms}$ , sammen med en oppskalert versjon av trasen. Figuren viser at amplituden til direktebølgen er svært liten, mens multiplene har mye større amplituder. For et stort antall ( $N$ ) lagperioder går amplituden til direktebølgen mot null, og direktebølgen forsvinner helt. Resultatet blir at første registrering er multipler, og ikke direktebølgen som først forventet.

Den første multippelen i et  $N$ -celle medium hvor gangtiden er lik i hvert lag ( $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t$ ) ankommer ved tiden  $2\Delta t$  etter direktebølgen. Denne multippelen har propagert opp og ned en gang, i et av  $2N - 1$  nederste lagene i

mediet. For et binært medium bestående av  $N$  lagperioder ( $2N$  lag) vil det da være  $2N - 1$  multipler som har denne forsinkelsen i forhold til direktebølgen. “Peg leg” multipler med forsinkelsene  $4\Delta t$ ,  $6\Delta t$  og så videre vil det selvsagt være mange flere av, da det er mange flere gangvei-kombinasjoner i mediet som gir lik total gangtid. Er gangtiden forskjellig i de to lagene i lagperioden, ( $\Delta t_1 \neq \Delta t_2$ ), vil det være  $N - 1$  multipler som ankommer ved tiden  $2\Delta t_1$  etter direktebølgen og  $N$  multipler som ankommer med tidsforsinkelsen  $2\Delta t_2$  i forhold til direktebølgen. Når  $N$  øker (og lagtykkelsene blir mindre) øker antallet multipler med samme tidsforsinkelse i forhold til direktebølgen, samtidig som forsinkelsen blir mindre. For å ta et eksempel, vil vi i tilfellet med 96 lagperioder og normalt innfallende bølger ha 191 multipler som ankommer med en teoretisk tidsforsinkelse på 1 ms etter direktebølgen. I tillegg kommer alle de høyere ordens multiplene inn med forsinkelsene 2 ms, 3 ms og så videre.

I dette tilfellet forsvinner direktebølgen rundt  $N = 7$ . Amplituden til direktebølgen er da så liten at påvisning av denne blir umulig. For et større antall lagperioder (og dermed tynnere lag), blir samtidig multiplene mer kort-periodiske og flere multipler vil superponere. Den “effektive” bølgen som registreres er da en forsinket bølge, generert av interfererende kort-periodiske multipler. Dette forårsaker forsinkelsen og den dispersive oppførselen for høyere  $N$ -verdier; hastighetene bølgene propagerer med i mediet er blitt frekvensavhengige. De lave frekvensene kommer til syne i begynnelsen av bølgepakkene, mens de høyere frekvensene kommer inn senere. I konvensjonell seismikk vil dette kunne oppfattes som støy i dataene.

Angående ankomsttider er trenden klar. Når  $N$  øker (og lagtykkelsene minker), så øker forsinkelsen til førsteinnsatsen. Førsteinnsatsen i trase 1 (figur 3.5) ankommer ved tiden  $t_1 = 0.155 \text{ s} = 155 \text{ ms}$ . Bølgen har da propagert gjennom mediet med en gjennomsnittlig hastighet  $c_a \approx 2480 \text{ m/s}$ . Denne er nær mediets effektive hastighet ( $c_e = 2400 \text{ m/s}$ ) og “peg leg” multiplene er fraværende. I tillegg er signalet lite endret i form. Alt dette bekrefter at den effektive medium teorien gjør seg gjeldende; mediet oppfører seg som et transverst isotropt homogent medium.

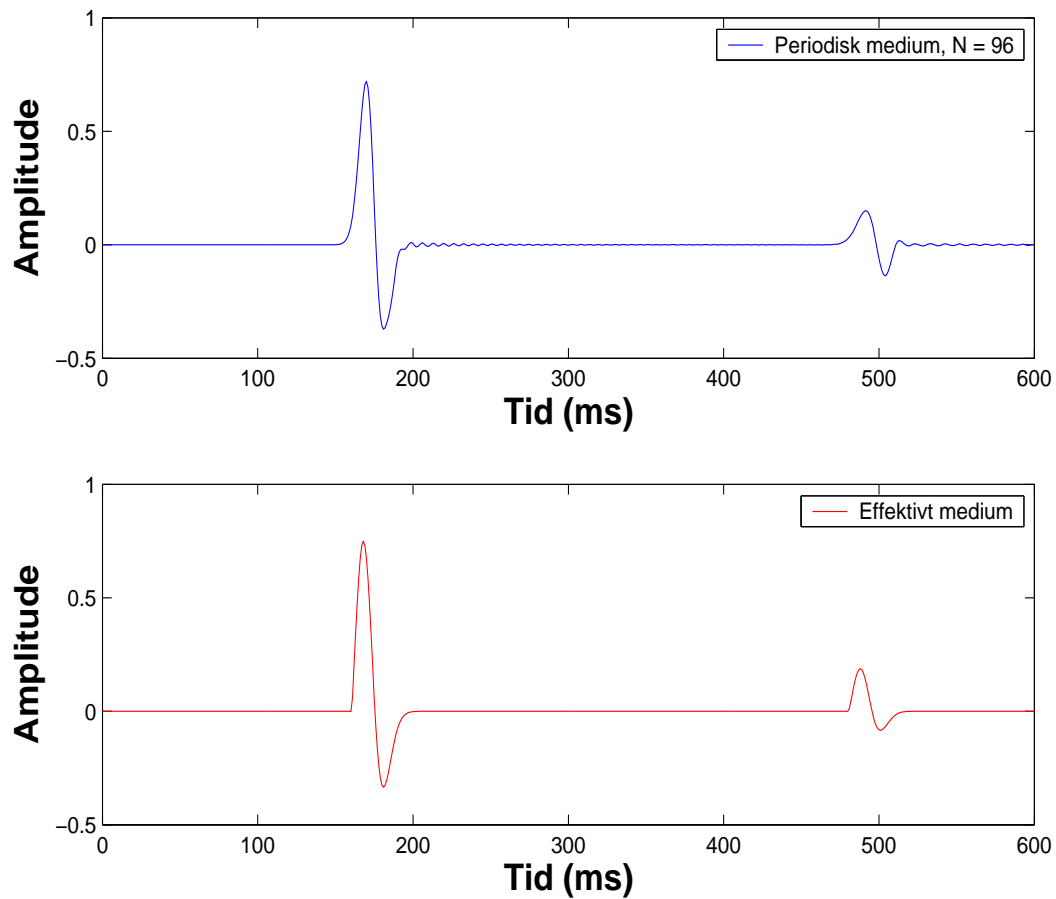


Figur 3.7: Trase 14 fra figur 3.6 i et kortere tidsvindu over første innsatsen (blå trase) og oppskalert versjon (rød trase). Amplituden til direktebølgen er svært liten, og denne går mot null når  $N$  øker. Multiplene har mye større amplituder enn direktebølgen. Resultatet blir en forsinket bølge bygget opp av interfererende multipler.

### Effektiv medium teori

I følge den effektive medium teorien kan det lagdelte periodiske mediet erstattes med et homogent transverst isotropt medium forutsatt at bølgelengden til det seismiske signalet er mye større enn tykkelsen til lagperioden i mediet. I figur 3.8 er trase 1 fra figur 3.5 reproduisert i tidsintervallet 0–600 ms (blå trase). Den røde trasen derimot, representerer tilfellet hvor det binære mediet er erstattet med et homogent lag av samme tykkelse som det periodiske mediet og med fysiske egenskaper lik de effektive mediumegenskapene (tabell 3.3). Over- og underliggende medium er selvsagt det samme i begge tilfellene (medium 1). Figuren viser at de to signalene er svært like i form og amplitude. I tillegg viser figuren at den andre ankomsten tilsvarer første ordens multippelen fra topp og bunn av det periodiske mediet. “Peg leg” multiplene fra de mange grenseflatene i det binære mediet er fraværende. Bølgen har propagert med en hastighet som er nær den effektive mediumhastigheten, og de registrerte innsatsene tilsvarer direktebølgen samt multiplene generert av mediets topp og bunn.





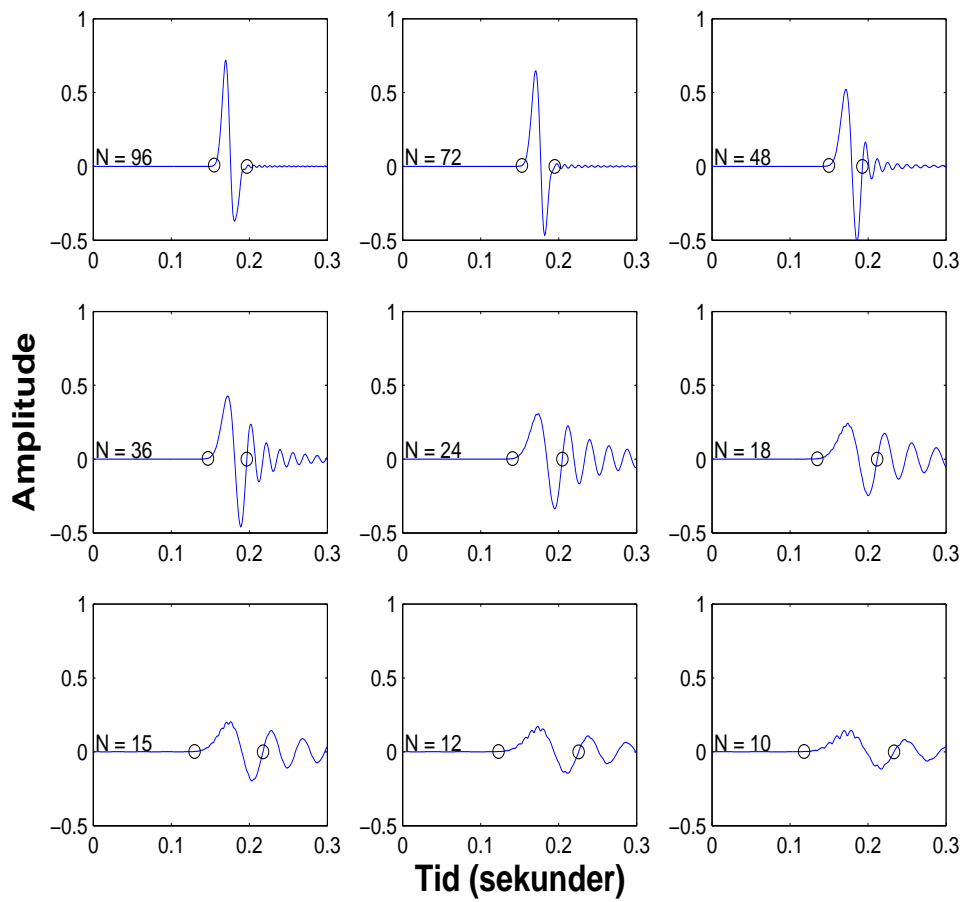
Figur 3.8: Den blå trasen representerer det transmitterte bølgefeltet fra det binære mediet bestående av 96 lagperioder (samme som trase 1 i figur 3.5 over et kortere tidsintervall). I den røde trasen er det binære mediet byttet ut med et homogent lag av samme tykkelse, tetthet  $\rho_e = 5.0 \text{ kg/dm}^3$  og  $P$ -bølgehastighet  $c_e = 2400 \text{ m/s}$ . Bølgene er normalt innfallende.

### 3.5.1 Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori

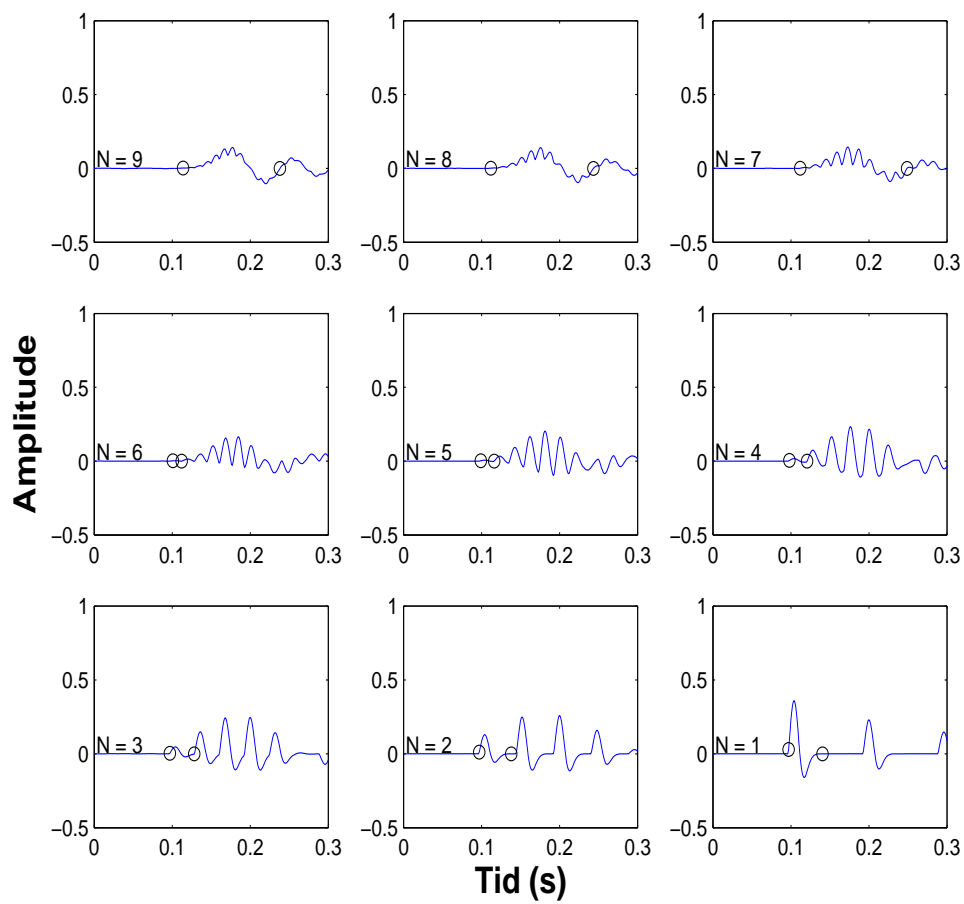
Som vi har sett vil bølgene propagere med forskjellig hastighet, avhengig av forholdet mellom bølgelengden til det seismiske signalet og tykkelsen til lagperioden i det periodiske mediet. Registrerte seismiske hastigheter vil derfor ikke bare avhenge av bergart- og fluidegenskaper, men også av skalaen på målingen relativ til skalaen på geologien. I den lange bølgelengde approksimasjonen, nærmer bølgenes hastighet seg den effektive mediumhastigheten ( $c_e$ ). Det har derfor vært mange forsøk på å fastslå den *minste* verdi av  $\lambda/h$ , hvor den lange bølgelengde approksimasjonen er gyldig. Konklusjonene har variert, og forskjellene har vært størst mellom teoretiske og praktiske studier. Noen eksempler er  $\lambda/h > 3$  (Helbig, 1984) fra teoretiske betraktninger,  $\lambda/h > 5 - 8$  fra numerisk modellering (Carcione et al., 1991) og  $\lambda/h > 10$  fra eksperimenter (Melia & Carlson, 1984) og (Marion & Coudin, 1992). Hovem (1995) konkluderte derimot med at den øvre frekvensgrensen for bølgepropagering i et lagdelt medium ikke kan uttrykkes ved et  $\lambda/h$  forhold, fordi denne grensen er sterkt avhengig av kontrasten i akustisk impedans. Også Carcione et al. (1991) konkluderte med at den lange bølgelengde approksimasjonen avhenger av kontrasten i akustisk impedans til komponentene i mediet, altså avhengig av refleksjonskoeffisientene. Han fant at ved svakere refleksivitet, så fant den lange bølgelengde approksimasjonen sted for lavere verdier av forholdet  $h/\lambda$ .

Ankomsttidene  $t_1$  til førsteinnsatsene ble definert som tiden ved 1% av amplitudemaksimum på trasene og bestemt numerisk, mens tiden  $t_2$  ved andre nullkryssning ble plukket manuelt. Resultatet er vist i figurene 3.9 - 3.10. Deretter ble den gjennomsnittlige hastigheten ( $c_a$ ), den dominerende perioden ( $T_d$ ) og den dominerende bølgelengden ( $\lambda_d$ ) til det transmitterte signalet beregnet fra ligningene 3.16 - 3.18. Til slutt ble verdien av  $R$  (forholdet mellom den dominerende bølgelengden ( $\lambda_d$ ) til det transmitterte signalet og tykkelsen av lagperioden ( $h$ ),  $\lambda_d/h$ ) beregnet. Resultatet er vist i tabell 3.4, der alle verdiene av  $h$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $T_d$ ,  $c_a$ ,  $\lambda_d$  og  $R$  er oppgitt.

Figur 3.11 viser  $R$  plottet mot bølgens gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ) for de ulike tilfellene. Figuren viser at overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer rundt  $R = 10$ . Dette er konsistent med resultatene fra det eksperimentelle forsøket til Marion & Coudin (1992).



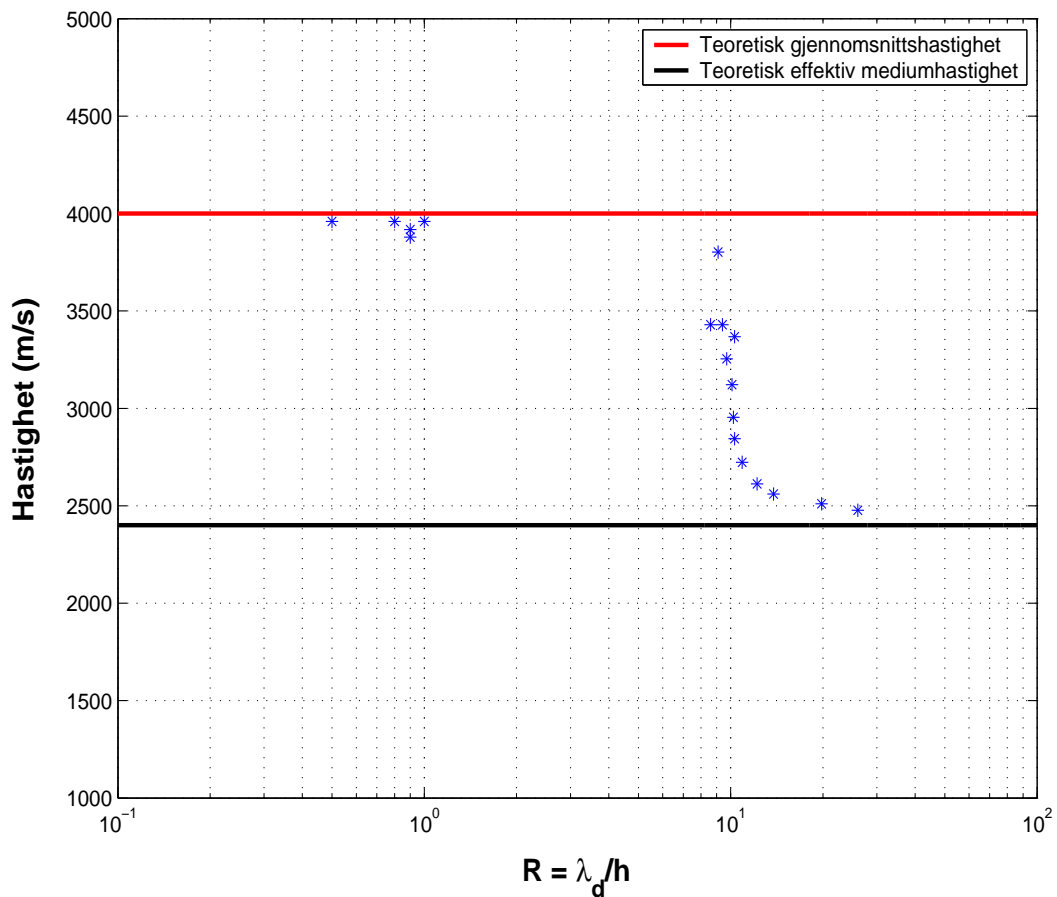
Figur 3.9: Førsteinnsatsene fra trasene i figur 3.5. Ankomsttidene  $t_1$  og tiden  $t_2$  ved andre nullkrysning er markert på trasene.



Figur 3.10: Førsteinnsatsene fra trasene i figur 3.6. Ankomsttidene  $t_1$  og tiden  $t_2$  ved andre nullkrysning er markert på trasene.

	$h$ (m)	$t_1$ (ms)	$t_2$ (ms)	$T_d$ (ms)	$c_a$ (m/s)	$\lambda_d$ (m)	$R = \lambda_d/h$
<b>1</b>	4	155	197	42	2477	104	26
<b>2</b>	5.33	153	195	42	2510	105.4	19.8
<b>3</b>	8	150	193	43	2560	110.1	13.8
<b>4</b>	10.67	147	197	50	2612	130.6	12.2
<b>5</b>	16	141	205	64	2723	174.3	10.9
<b>6</b>	21.33	135	212	77	2844	219	10.3
<b>7</b>	25.6	130	218	88	2954	260	9.4
<b>8</b>	32	123	226	103	3122	321.6	10.1
<b>9</b>	38.4	118	233	115	3254	374.2	9.7
<b>10</b>	42.67	114	238	124	3368	417.6	10.3
<b>11</b>	48	112	243	131	3429	449.2	9.4
<b>12</b>	54.85	112	249	137	3429	469.8	8.6
<b>13</b>	64	101	112	11	3802	41.8	0.7
<b>14</b>	76.8	99	116	17	3879	65.9	0.9
<b>15</b>	96	98	121	23	3918	90.1	0.9
<b>16</b>	128	97	128	31	3959	122.7	1
<b>17</b>	192	97	138	41	3959	162.3	0.8
<b>18</b>	384	97	141	44	3959	174.2	0.5

Tabell 3.4: Tykkelsen ( $h$ ) til lagperioden, ankomsttiden ( $t_1$ ) til førsteinnsatsen, førsteinnsatsens andre nullkrysning ( $t_2$ ), den dominerende perioden ( $T_d$ ) til den transmitterte bølgen, bølgens gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ), den dominerende bølglengden ( $\lambda_d$ ) til den transmitterte bølgen og verdien av forholdet  $R = \lambda_d/h$ .



Figur 3.11: Plott av  $R$  versus  $c_a$ .  $R$  er forholdet mellom den dominerende bølglengden ( $\lambda_d$ ) til det transmitterte signalet og tykkelsen til lagperioden ( $h$ ), mens  $c_a$  er gjennomsnittshastigheten til bølgen i det binære mediet. Bølgene er normalt innfallende. Den røde horisontale linjen markerer det binære mediets gjennomsnittshastighet ( $c = 4000$  m/s) og den svarte horisontale linjen angir den effektive mediumhastigheten ( $c_e = 2400$  m/s). Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer for  $R = 10$ . Logaritmisk skala er benyttet på 1. aksen.

*Merk:* For å beskrive overgangen fra høy hastighet (stråleteori) til lav hastighet (effektiv medium teori) har jeg benyttet den dominerende bølgelengden ( $\lambda_d$ ) til det *transmitterte* signalet, fremfor den dominerende bølgelengden ( $\lambda$ ) til det *innfallende* signalet. Dette falt naturlig da det er lagtykkelsene i mediet som varierer, mens frekvensinnholdet i det innfallende signalet er konstant. Og det periodiske mediet endrer signalets form, amplitude og frekvensinnhold forskjellig, avhengig av skalaen på lagdelingen i mediet. Det samme har vært gjort i de fleste andre studier av bølgeforplantning i periodiske medier.

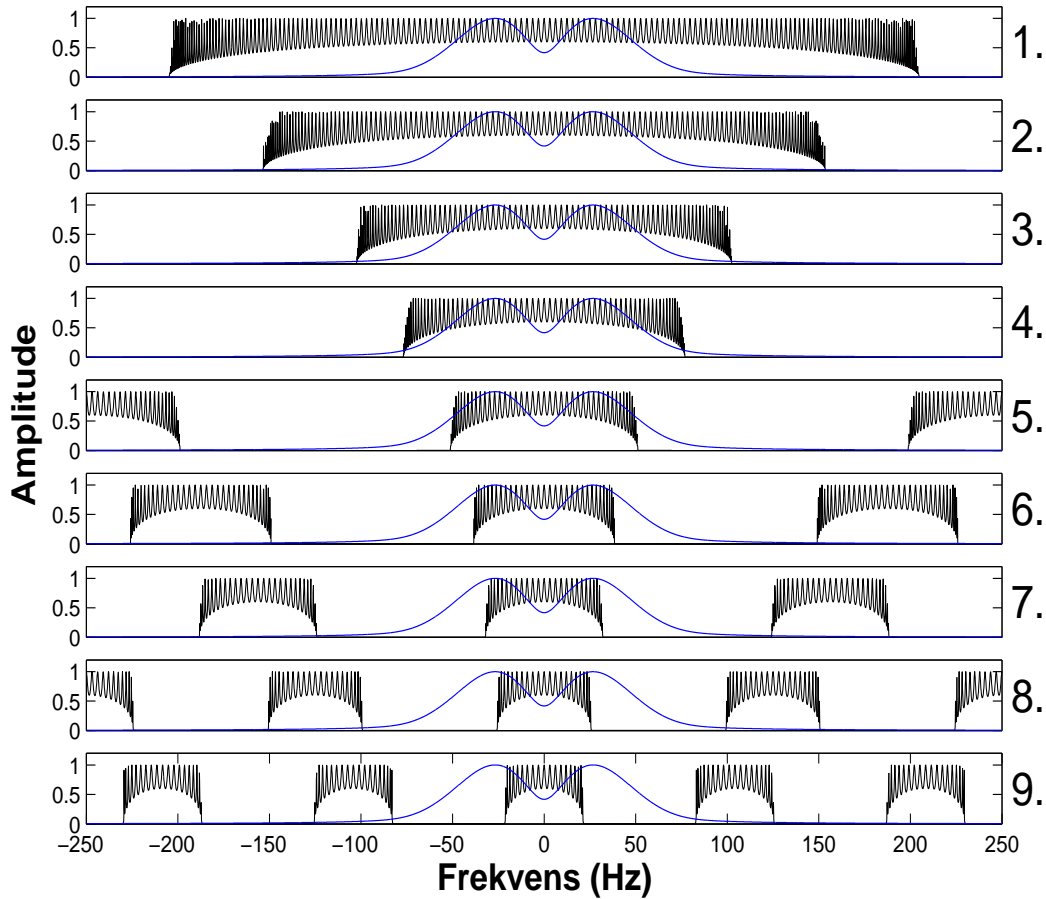
### 3.5.2 Mediet som filter

Periodiske medier opptrer som filtre på bølger som propagerer i dem. Utvalgte frekvenser i det innfallende signalet transmitteres, mens andre frekvenser reflekteres tilbake. Denne tuning-effekten bidrar til endringen av frekvensinnholdet i det registrerte signalet. Med det binære mediet som benyttes her, er disse filtrene gitt ved ligningene 3.4 og 3.9, det vil si  $F_N(\omega)$  og  $G_N(\omega)$  for det transmitterte og det reflekterte bølgefeltet, henholdsvis. I figurene 3.12 - 3.13 er filteret  $F_N(\omega)$  plottet som funksjon av den lineære frekvensen ( $f$ ) for de forskjellige antall lagperioder og tilhørende lagtykkelser. Figurene viser tydelig at filtrene blir mer aggressive når  $N$  blir mindre og lagtykkelsene øker. Samtidig blir forholdet mellom den dominerende bølgelengden til *input signalet* og tykkelsen til lagperioden mindre.

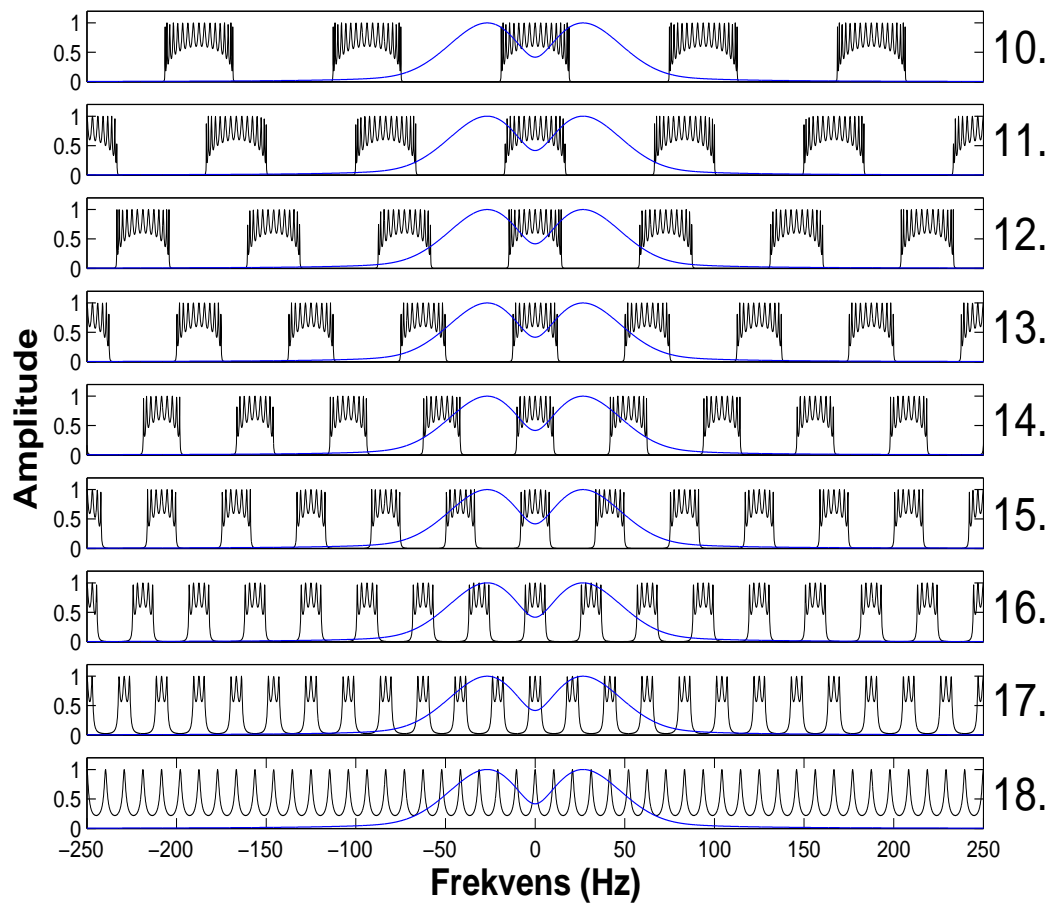
Filtrene er periodiske fordi gangtiden er lik i hvert lag. Med frekvensinnholdet til det innfallende signalet tatt i betraktning, kan vi i dette tilfellet si at filtrene  $F_N(\omega)$  fungerer som et slags lavpassfilter når tykkelsen ( $h$ ) til lagperioden er liten. Når  $h$  øker blir "cut-off" frekvensen mindre, og lavere og lavere frekvenser filtreres bort. Til slutt opptrer filtrene som båndpass filtre, der kun visse frekvensbånd av input signalet vil transmittere gjennom mediet. Figuren viser også at filtrene oscillerer hurtig innenfor "passbåndene", slik at frekvensene vil dempes noe ulikt der.

Resultatet av "filtreringen", det vil si frekvensspekteret til det transmitterte bølgefeltet, er vist i figurene 3.14 - 3.15. Figuren viser at frekvensinnholdet til det transmitterte bølgefeltet går mot lavere frekvenser når  $N$  blir mindre og lagene tynnere i mediet. Mediet er transparent når tykkelsen til lagperioden er liten, mens lavere og lavere frekvenser filtreres bort når tykkelsen til lagperioden øker.

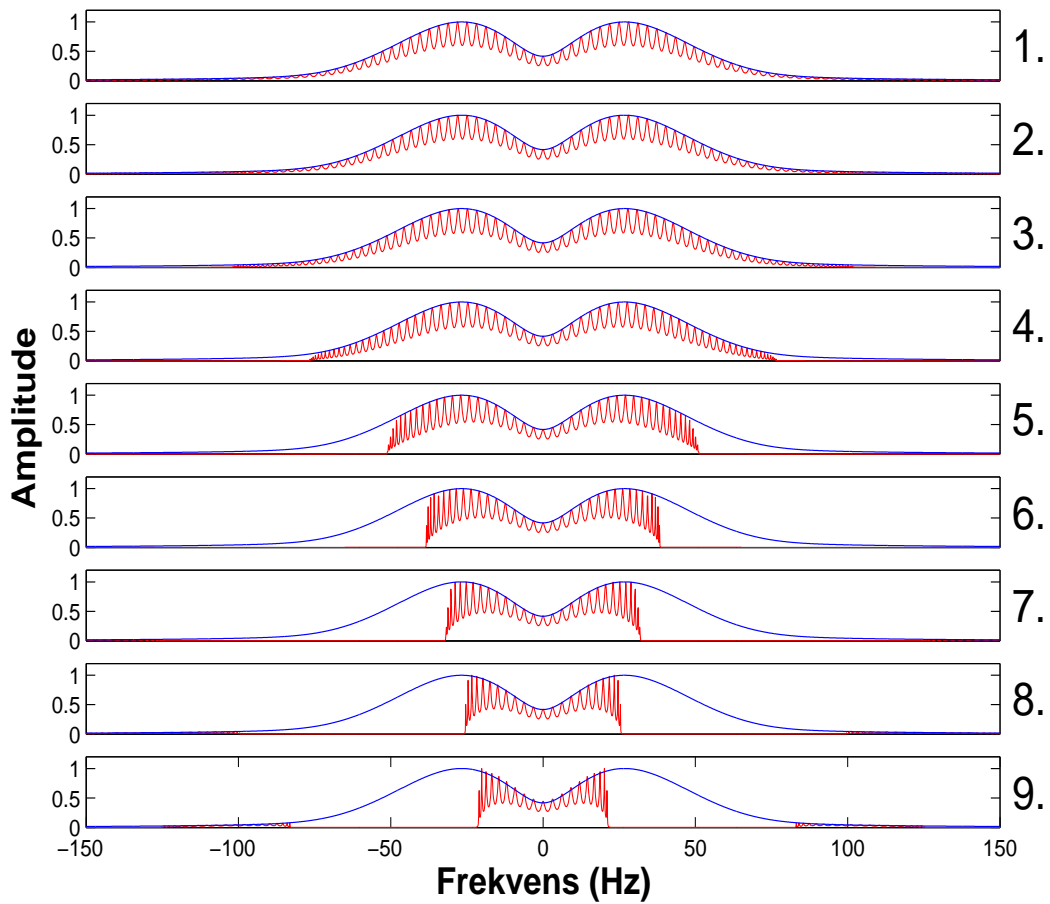




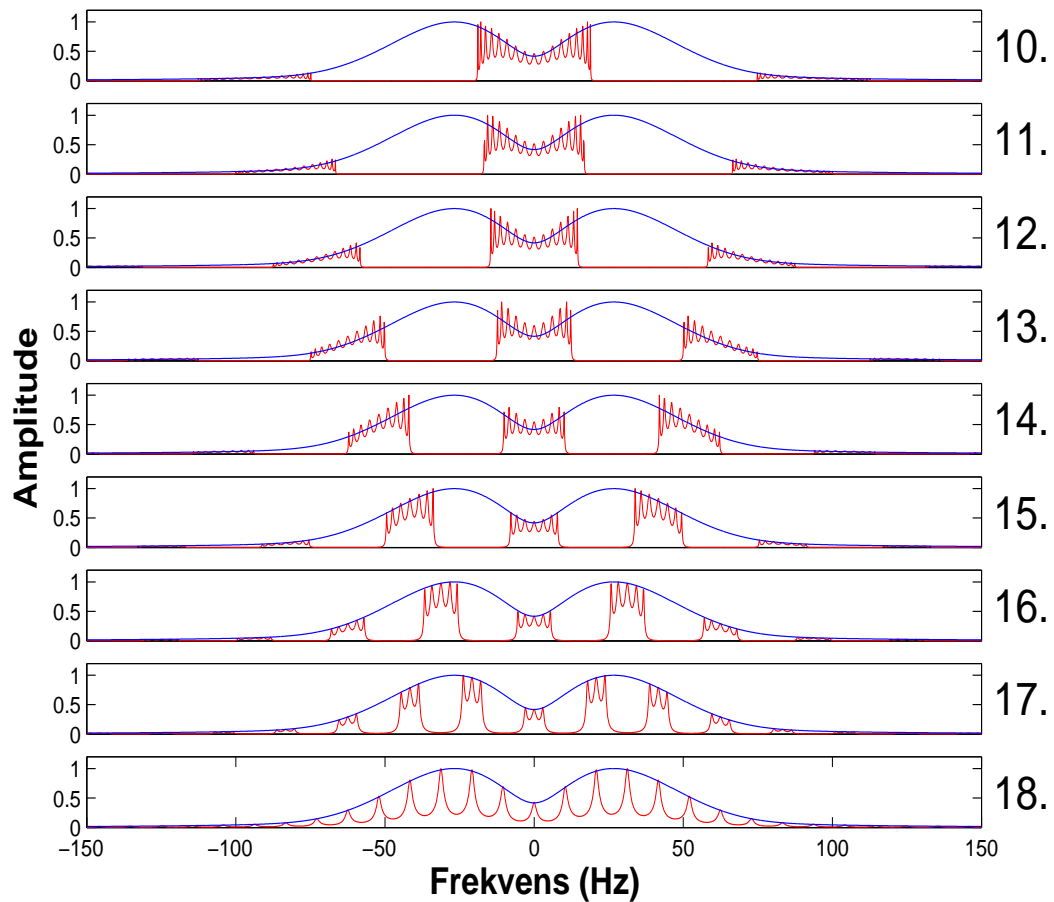
Figur 3.12: De svarte kurvene er filtrene  $F_N(\omega)$  som representerer det binære mediet med  $N = 96$  (øverst) til  $N = 10$  (nederst). De blå kurvene er absoluttverdien av Fourier-spekteret til det innfallende signalet, som er skalert slik at maksimum amplituden er lik én i tallverdi. Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 0$ .



Figur 3.13: De svarte kurvene er filtrene  $F_N(\omega)$  for  $N = 9$  (øverst) til  $N = 1$  (nederst), mens de blå kurvene representerer absoluttverdien av Fourier-spekteret til det innfallende signalet. Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 0$ .



Figur 3.14: Figuren viser frekvensspekteret til det innfallende signalet (blå kurver) og frekvensspekteret til det transmitterte bølgefeltet (røde kurver) for  $N = 96$  (øverst) til  $N = 10$  (nederst). Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 0$ .



Figur 3.15: Figuren viser frekvensspekteret til det innfallende signalet (blå kurver) sammen med frekvensspekteret til det transmitterte bølgefeltet (røde kurver) for  $N = 9$  (øverst) til  $N = 1$  (nederst). Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 0$ .

### 3.5.3 “Bloch phase”

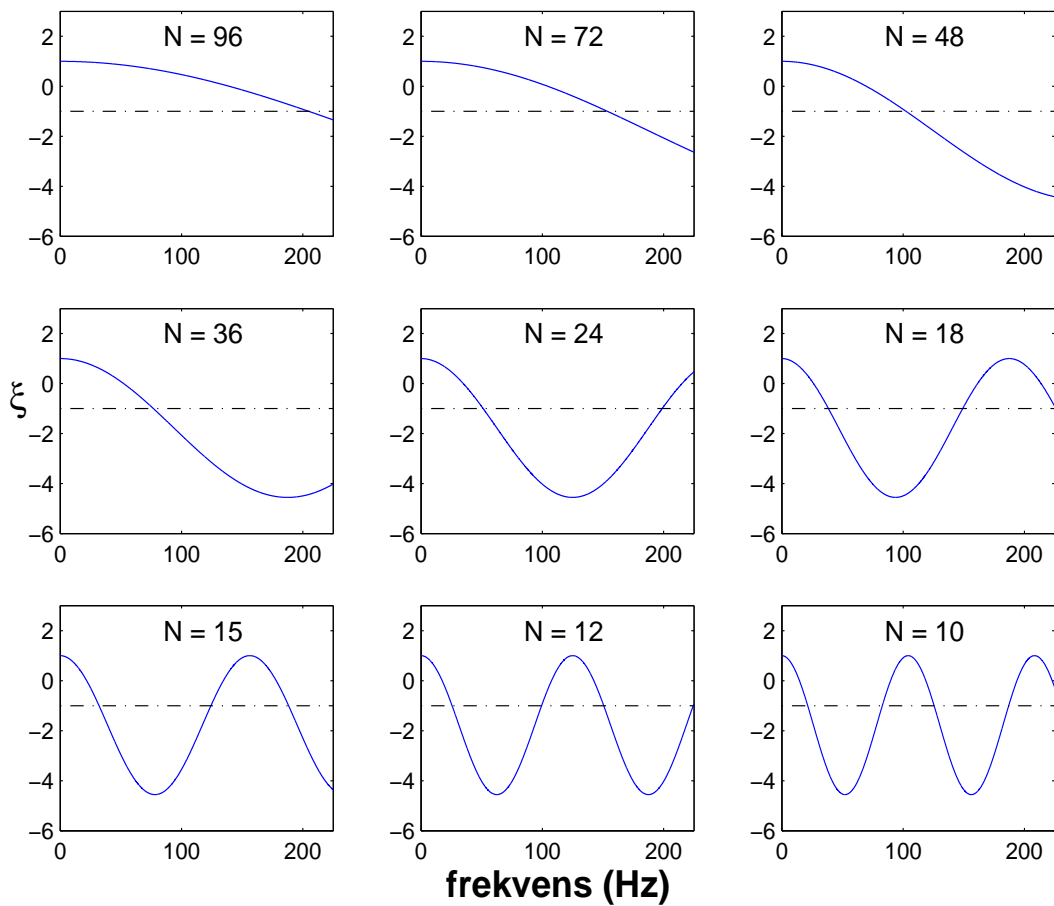
I figurene 3.16 - 3.17 er parameteren  $\xi = \text{trace}(\mathbf{S})/2$  (kapittel 2, avsnitt 2.4) plottet som funksjon av frekvensen for lagtykkelser tilsvarende  $N = 96$  til  $N = 1$ . Frekvensbånd hvor  $\xi < -1$  er karakterisert som forbudte bånd, og resulterer i flyktige (evanescent) bølgefelt som avtar eksponentielt med propageringsavstanden. Det transmitterte bølgefeltet går mot null når  $N$  går mot uendelig. De tillatte frekvensbånd hvor  $|\xi| < 1$  korresponderer med passbåndene til filtrene i figurene 3.12 - 3.13. I likhet med filtrene er også  $\xi$  periodisk nå som gangtiden er lik i hvert lag.

Morlet et al. (1982b) antydte at side-passbåndene ikke vil være til noen praktisk nytte i seismisk sammenheng, på grunn av ustabiliteten som oppstår når små anomalier introduseres i periodisiteten i mediet. Men til gjengjeld slo de fast at det lavfrekvente passbåndet er relativt stabilt med hensyn på anomalier i periodisiteten.

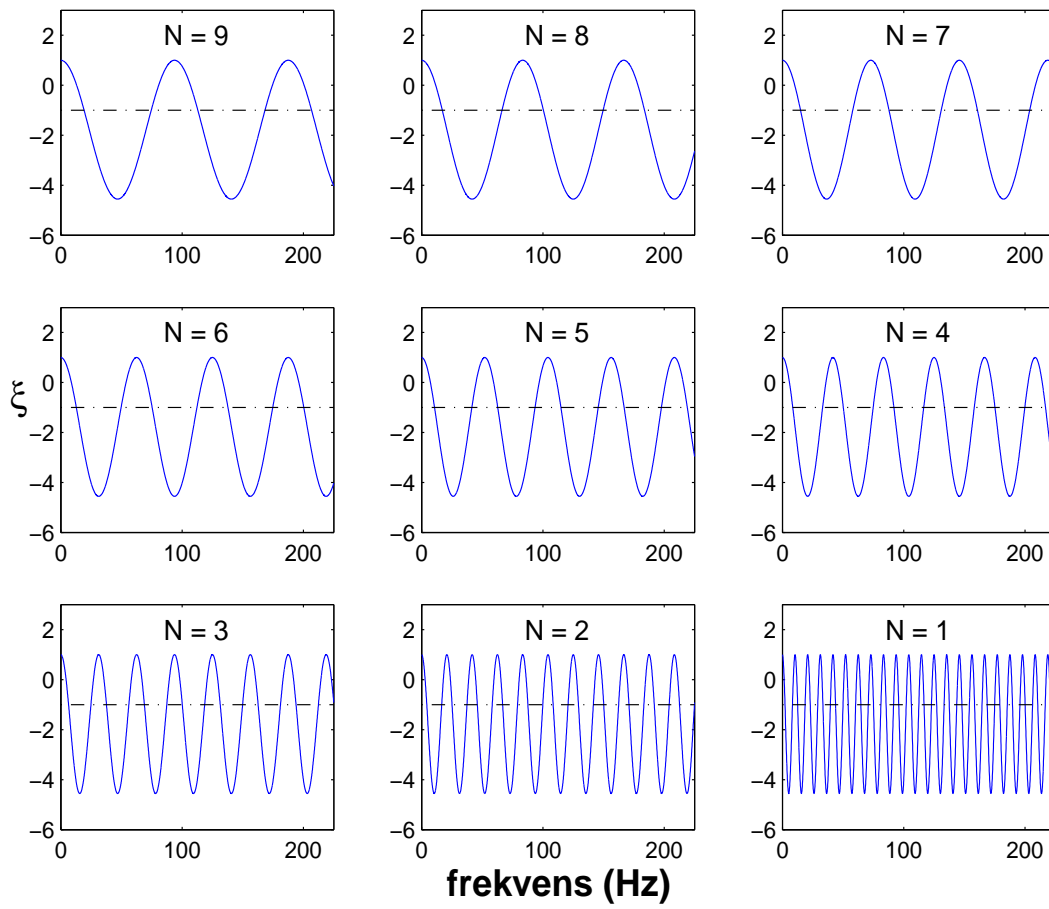
Dispersjonsrelasjonen (ligning 2.28) var gitt på formen

$$\cos\left(\frac{\omega h}{c_p}\right) = \cos\left(\frac{\omega h_1}{c_1}\right) \cos\left(\frac{\omega h_2}{c_2}\right) - P \sin\left(\frac{\omega h_1}{c_1}\right) \sin\left(\frac{\omega h_2}{c_2}\right)$$

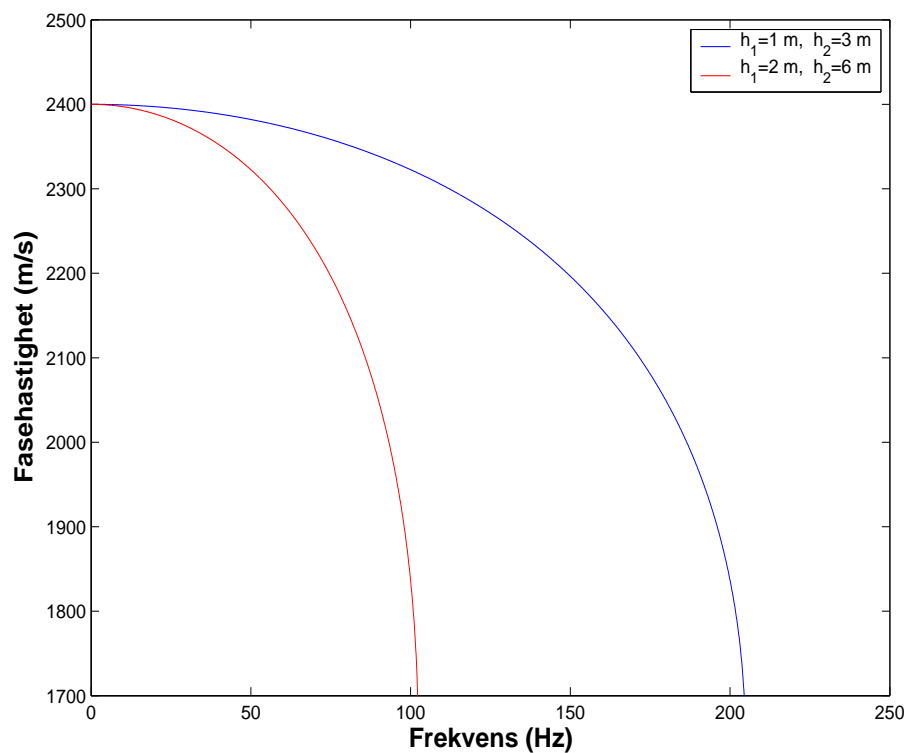
Løsningen av denne ligningen er vist i figur 3.18, det vil si fasehastigheten ( $c_p$ ) til den propagerende bølgen som funksjon av frekvensen i det binære mediet med lagtykkelser tilsvarende  $N = 96$  (blå kurve) og  $N = 48$  (rød kurve). Figuren viser at hastigheten er lik den effektive mediumhastigheten ( $c_e = 2400$  m/s) ved null frekvens, og avtar monotont mot null ved grensefrekvensen (frekvensen ved  $\xi = -1$ ).



Figur 3.16:  $\xi$  plottet som funksjon av frekvensen når lagtykkelsene tilsvarer de ved  $N = 96$  til  $N = 10$ . Frekvensbånd hvor  $\xi < -1$  er karakterisert som “forbudte bånd”, og det transmitterte bølgefeltet går mot null innenfor disse båndene når antall lagperioder går mot uendelig.



Figur 3.17:  $\xi$  plottet som funksjon av frekvensen når lagtykkelsene tilsvarer de ved  $N = 9$  til  $N = 1$ .



Figur 3.18: Løsningen av dispersjonsrelasjonen (ligning 2.28). Denne gir fasehastigheten til den propagerende bølgen som funksjon av frekvensen. De fysiske egenskapene til mediet er som i tabell 3.1, mens lagtykkelsene er gitt ved  $h_1 = 1$  m og  $h_2 = 3$  m (blå kurve) og  $h_1 = 2$  m og  $h_2 = 6$  m (rød kurve). Hastigheten er lik den effektive mediumhastigheten ( $c_e$ ) ved  $f = 0$ , og avtar monotont mot null ved grensefrekvensen (frekvensen ved  $\xi = -1$ ).

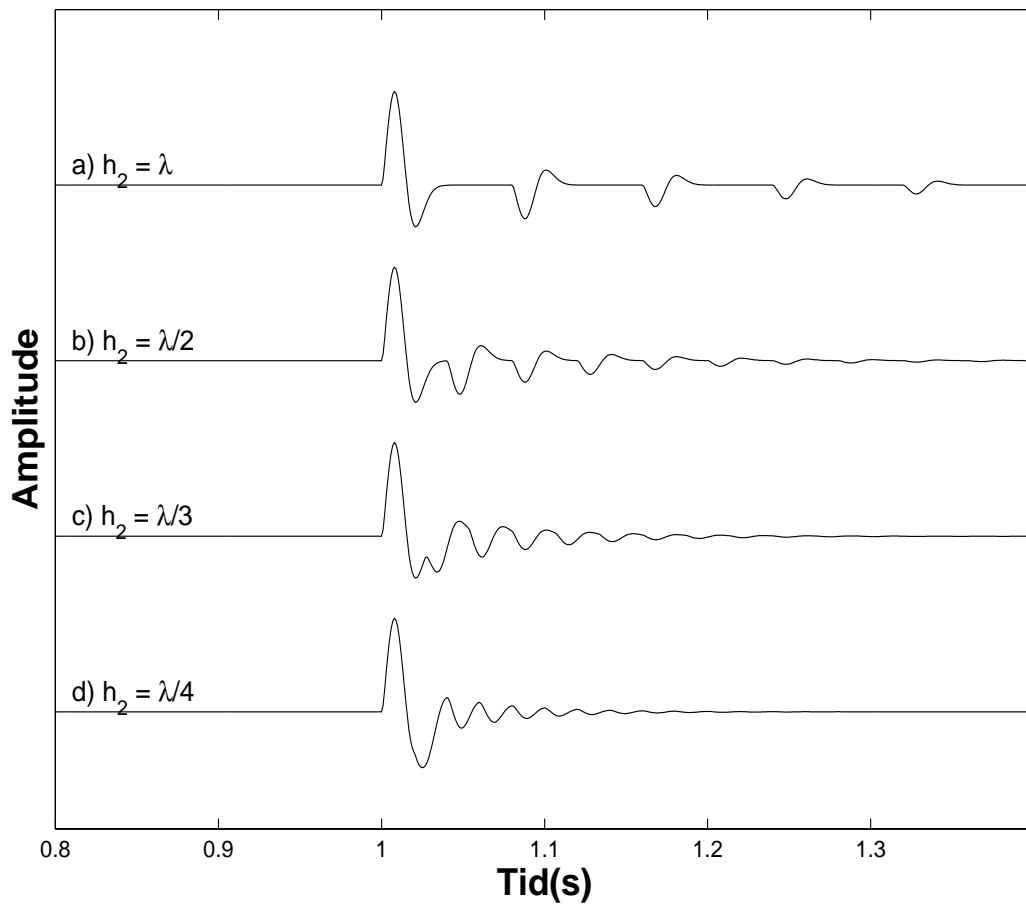


### 3.5.4 Det reflekterte bølgefeltet

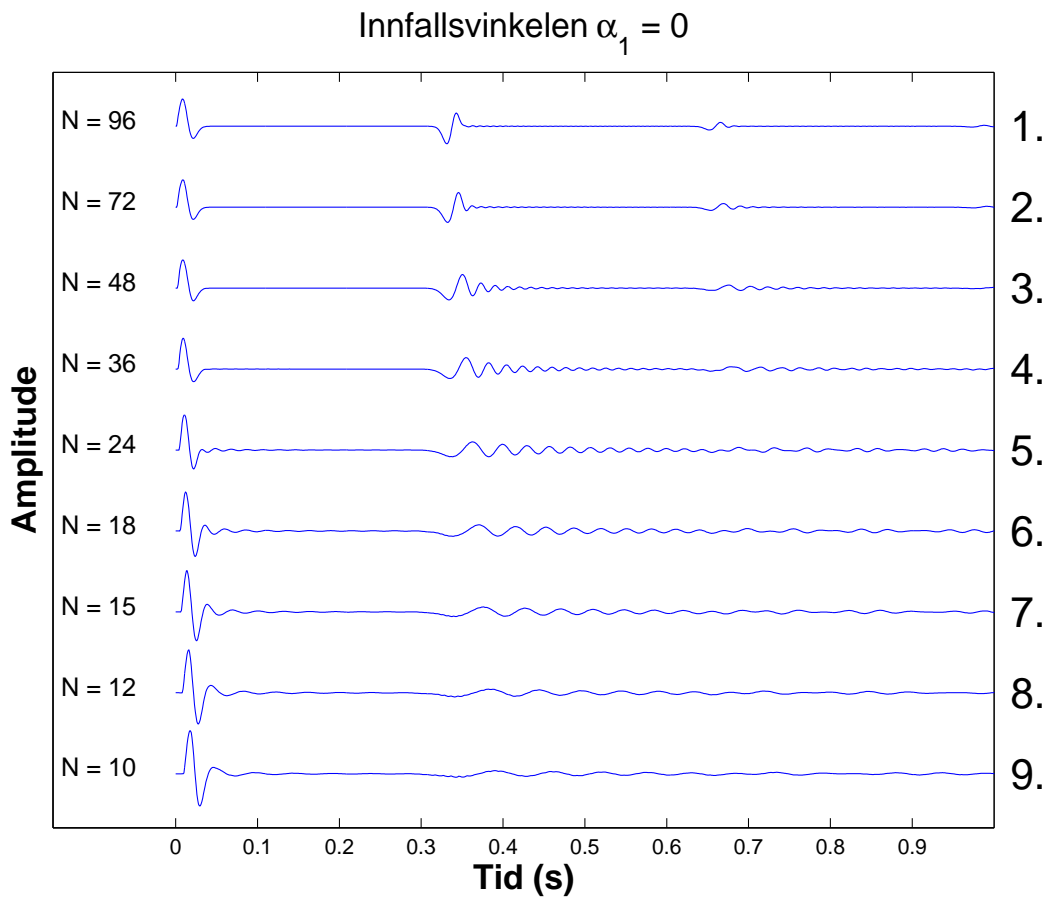
De numeriske simuleringene av det reflekterte bølgefeltet er vist i figurene 3.20 - 3.21. Den første refleksjonen kommer fra grenseflaten mellom de to lagene i den første lagperioden. Da lagtykkelsene øker når  $N$  blir mindre, øker også ankomsttiden til førsteinnsatsen når  $N$  blir mindre. Refleksjonene fra de øvrige grenseflatene og multiplene er selvsagt også inkludert i algoritmen.

#### Oppløsning

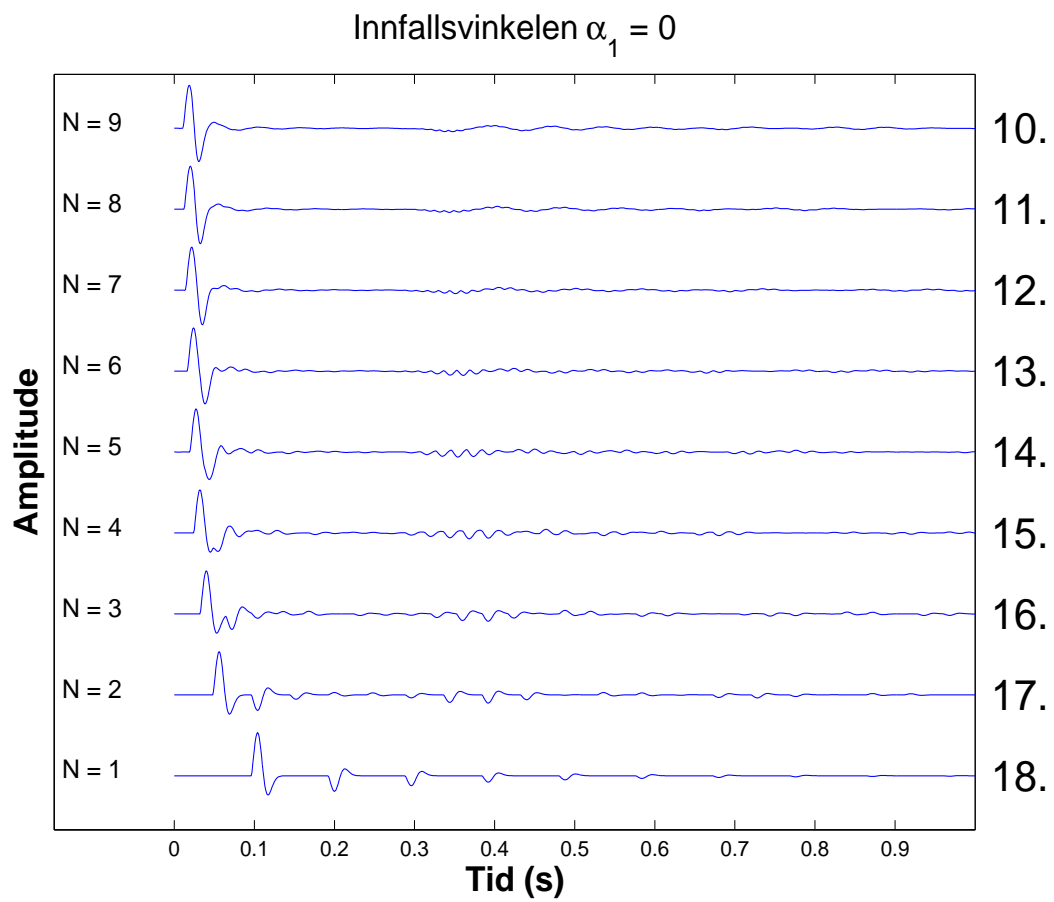
Det kan være nyttig å ha en oppfatning av hvordan den seismiske oppløsningen avhenger av lagtykkelser og bølgelengden til det utsendte signal. Den vertikale seismiske oppløsning er den minste avstand det må være mellom to reflektorer for å kunne identifisere to grenseflater istedenfor en. Denne ligger mellom en kvart og en halv bølgelengde, avhengig av den akustiske impedansen i lagene over og under. Som et eksempel tar vi for oss et tynt lag innbakt i et annet medium. Det tynne laget har P-bølgehastigheten  $c_2 = 6000$  m/s og bulk tettheten  $\rho_2 = 6$  kg/dm<sup>3</sup>, mens det omliggende mediet har P-bølgehastigheten  $c_1 = 2000$  m/s og tettheten  $\rho_1 = 2$  kg/dm<sup>3</sup>. Det innfallende signalet har en periode  $T = 40$  ms, som gir bølgelengden i det tynne laget ved  $\lambda = 240$  m. Refleksjonen fra topp og bunn av laget, samt multiplene er vist i figur 3.19. I tilfellet a) er tykkelsen  $h_2$  til det innbakte laget lik bølgelengden til det innsendte signal ( $h_2 = 240$  m). Refleksjonene fra topp og bunn har motsatt polaritet, og det er ingen interferens mellom disse. Når lagtykkelsen blir mindre blir avstanden mellom refleksjonen fra topp og bunn kortere i tid og multiplene blir mer kortperiodiske. I b) er lagtykkelsen  $h_2 = 120$  m, noe som tilsvarer halve bølgelengden til input signalet. Refleksjonen fra topp og bunn er fortsatt separert, men for mindre lagtykkelser vil disse interferere. Dette ser en tydelig i c), hvor det ikke vil være mulig å identifisere de to grenseflatene ut fra refleksjonen fra topp og bunn. Lagtykkelsen  $h_2$  er her 80 m. I det siste tilfellet (d) er  $h_2 = 60$  m ( $\lambda/4$ ) og vi får maksimum konstruktiv interferens mellom refleksjonen fra topp og bunn. Det må selvsagt nevnes at destruktiv interferens mellom refleksjonen fra topp og bunn vil kunne forekomme for mindre lagtykkelser.



Figur 3.19: Simulerte refleksjoner fra normalt innfallende bølger på et tynt lag med  $P$ -bølgehastighet  $c_2 = 6000$  m/s og bulktetthet  $\rho_2 = 6$  kg/dm<sup>3</sup> innbakt i et homogent medium med  $P$ -bølgehastighet  $c_1 = 2000$  m/s og bulktetthet  $\rho_1 = 2$  kg/dm<sup>3</sup>. Tykkelsen  $h_2$  til det innbakte laget er  $h_2 = 240$  m (a),  $h_2 = 120$  m (b),  $h_2 = 60$  m (c) og  $h_2 = 30$  m (d).



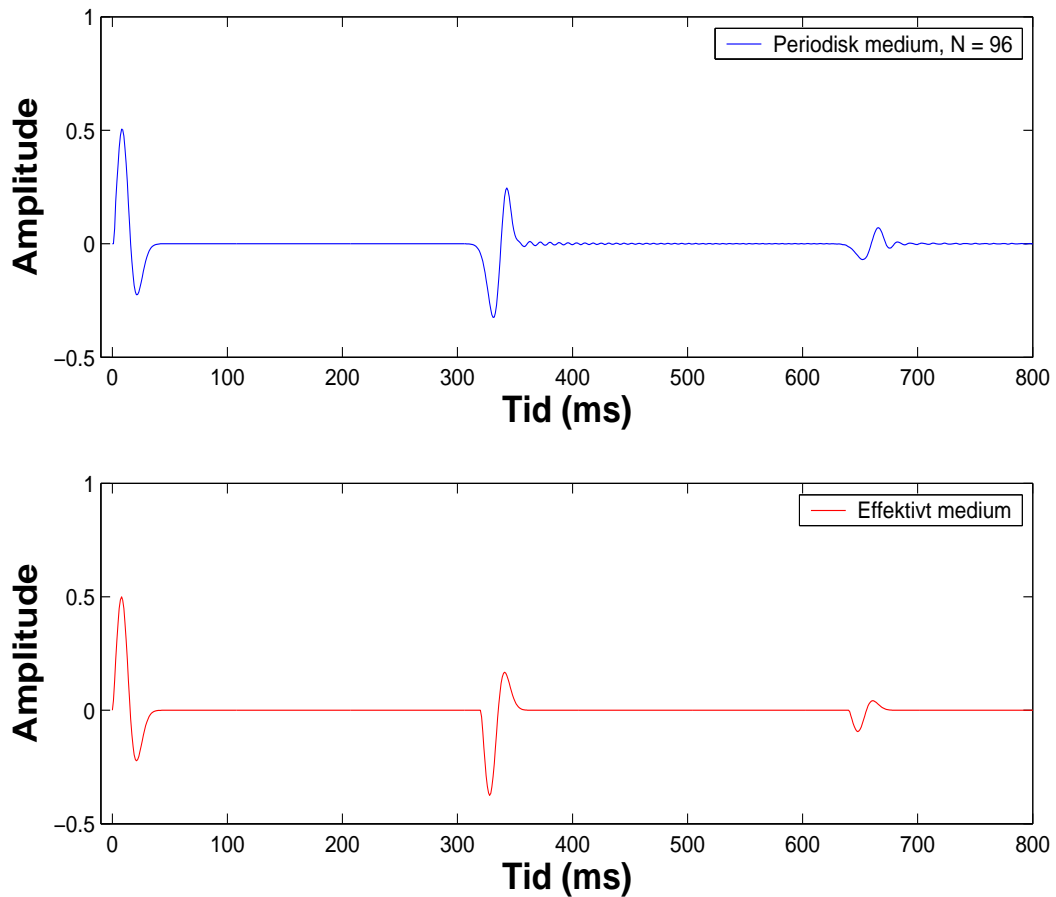
Figur 3.20: Simulerte traser av det reflekterte bølgefeltet. Antall lagperioder varierer fra  $N = 96$  (trase 1) til  $N = 10$  (trase 9). Bølgene er normalt innfallende.



Figur 3.21: Simulerte traser av det reflekterte bølgefeltet med  $N = 9$  (trase 10) til  $N = 1$  (trase 18). Bølgene er normalt innfallende.

I tilfellene med flere lagperioder vil refleksjonene fra de dypere delene av det periodiske mediet forsvinne på grunn av transmisjonstap ved grenseflatene. Amplitudene dempes og går mot null ved transmisjon over tilstrekkelig antall grenseflater. Dette skjer relativt hurtig, da de reflekterte bølgene krysser de samme grenseflatene to ganger (ned og opp). I trase 17 ( $N = 2$ ) er den første innsatsen den primære refleksjonen fra grenseflaten mellom medium 1 og medium 2 i den første lagperioden. Deretter følger den primære refleksjonen fra grenseflaten mellom de to lagperiodene. Denne har motsatt polaritet og er betydelig dempet i forhold til den første innsatsen. Den tredje innsatsen på trasen er vanskeligere å identifisere. Den primære refleksjonen fra grenseflaten mellom medium 1 og medium 2 i den andre lagperioden kommer inn her. Denne vet vi er kraftig dempet på grunn av transmisjonstap. I tillegg kommer den første multippelen fra medium 2 i den første lagperioden inn her. Den har lik gangtid, motsatt polaritet og interfererer destruktivt med den primære refleksjonen fra grenseflaten under.

Trase 1 (figur 3.20) er reproduisert i figur 3.22 (blå trase) sammen med den simulerte trasen av det reflekterte bølgefeltet fra det effektive mediet (rød trase), hvor det binære mediet er erstattet med et homogent lag av samme tykkelse. P-bølgehastigheten og bulk tettheten i laget er satt lik den effektive mediumhastigheten ( $c_e = 2400$  m/s) og den effektive tettheten ( $\rho_e = 5$  kg/dm<sup>3</sup>), henholdsvis. Over- og underliggende medium er selvsagt det samme i begge tilfellene. De to trasene viser svært godt samsvar, noe som igjen bekrefter at den effektive medium teorien gjør deg gjeldende i det periodiske mediet.



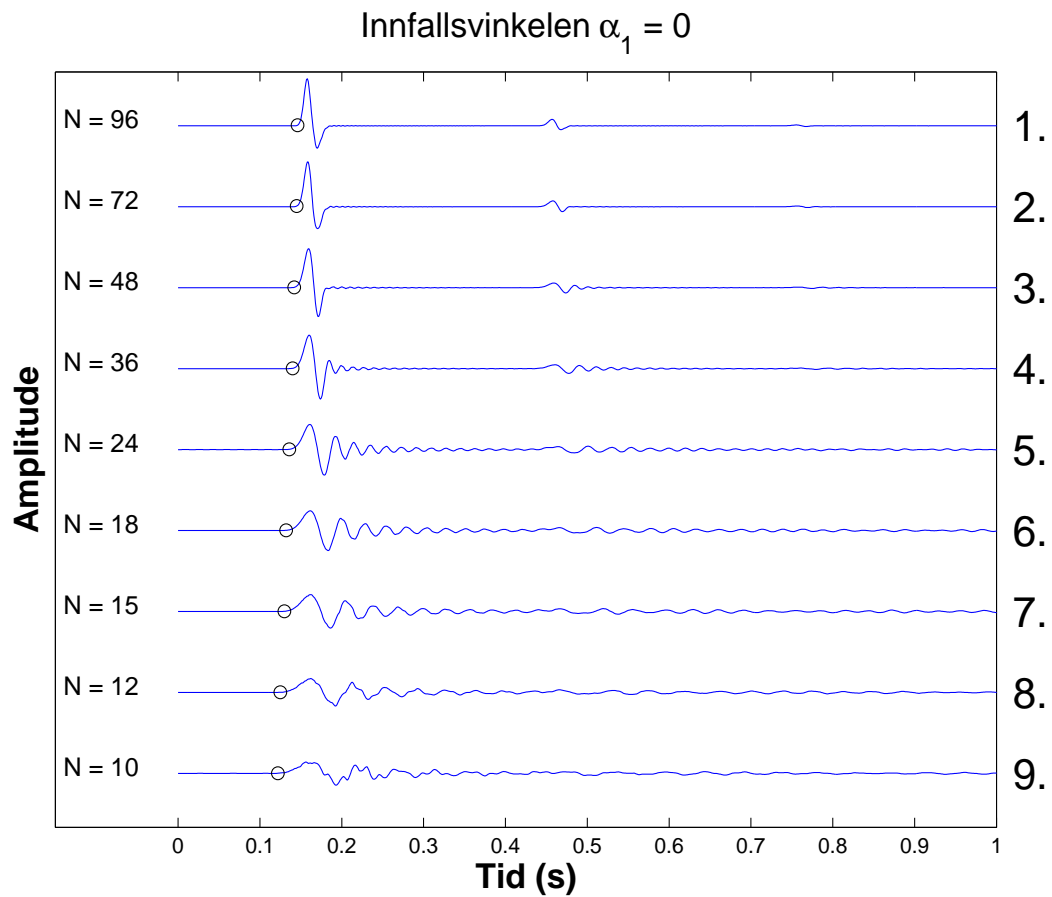
Figur 3.22: Den blå trasen er det reflekterte bølgefeltet fra det binære mediet med 96 lagperioder, mens den røde trasen er det reflekterte bølgefeltet fra et homogent medium av samme tykkelse hvor  $P$ -bølgehastigheten  $c_e = 2400$  m/s og tettheten  $\rho_e = 5$  kg/dm<sup>3</sup>. Over- og underliggende medium er det samme i begge tilfellene. Bølgene er normalt innfallende.

### 3.5.5 Parameterskifte - lavere kontrast i akustisk impedans

Før vi går videre med å utvide analysen til ikke-normalt innfallende bølger kan det være interessant å endre noen av de fysiske egenskapene til det periodiske mediet. Mange har forsøkt å bestemme overgangen mellom stråleteori og effektiv medium teori ved et  $\lambda/h$ -forhold. Men resultatene er ikke konsistente, og både Hovem (1995) og Carcione et al. (1991) har hevdet at denne overgangen avhenger av kontrasten i akustisk impedans. Marion et al. (1994) undersøkte effekten av ulike impedanskontraster numerisk, og konkluderte derimot med at overgangen mellom stråleteori og effektiv medium teori bare har en svak avhengighet av materialegenskapene til lagene.

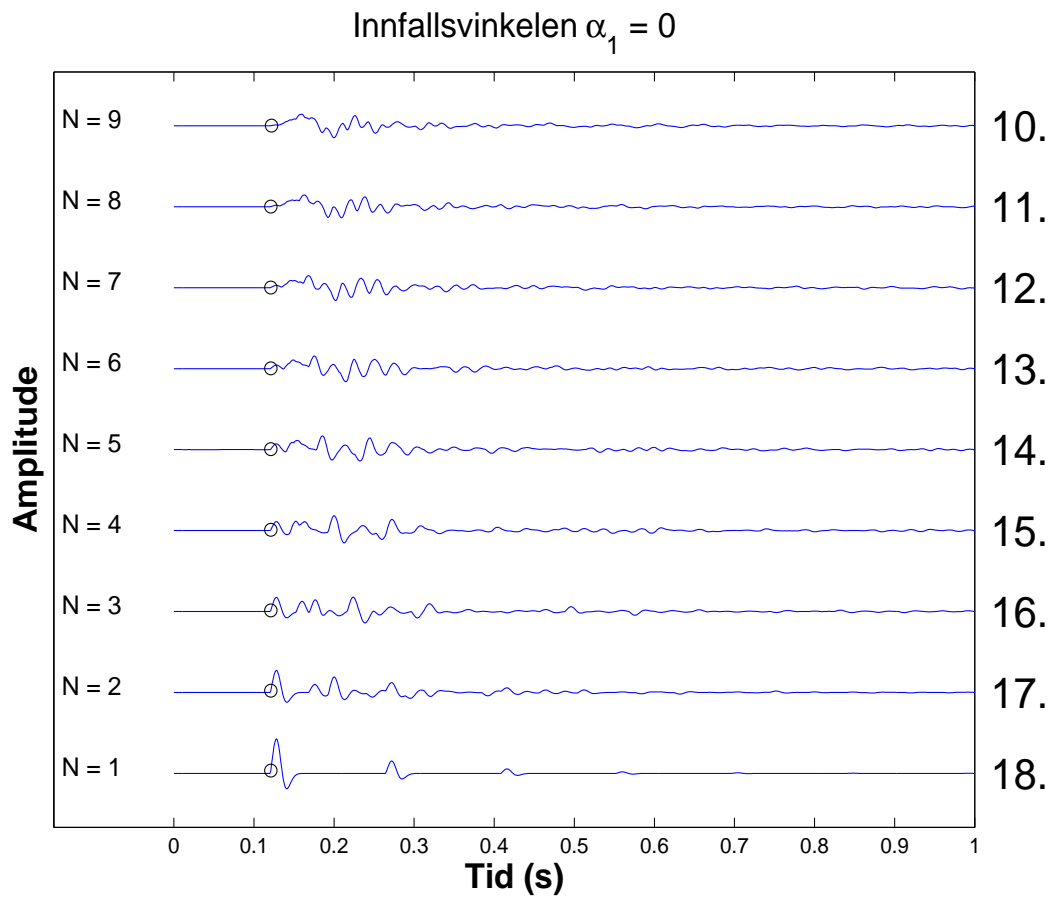
Ved å sette P-bølge hastigheten  $c_2 = 4000$  m/s og bulk tettheten  $\rho_2 = 4$  kg/dm<sup>3</sup>, blir kontrasten i akustisk impedans  $AI_2/AI_1 = 4$  (normalt innfallende bølger). Lagtykkelsene og de fysiske egenskapene til medium 1 er de samme. Det binære mediets gjennomsnittshastighet ( $c$ ) og effektive medium hastighet ( $c_e$ ) vil dermed endres, og disse er nå gitt som  $c = 3200$  m/s og  $c_e \approx 2580$  m/s, henholdsvis.

De numerisk simulerte trasene av de transmitterte bølgene er vist i figurene 3.23 - 3.24. Ankomsttidene ble plukket som før som tiden ved 1% av den maksimale amplituden. Deretter ble den dominerende perioden ( $T_d$ ), gjennomsnittshastigheten ( $c_a$ ) og den dominerende bølgelengden ( $\lambda_d$ ) til de transmitterte bølgene beregnet. Forholdet mellom bølgenes dominerende bølgelengde og celletykkelsen,  $R = \lambda_d/h$ , ble plottet mot bølgenes gjennomsnittshastighet. Resultatet er vist i figur 3.25. Figuren viser at overgangen mellom stråleteori og effektiv medium teori skjer rundt  $R \approx 7 - 8$ . Dette tyder på at overgangen mellom stråleteori og effektiv medium teori er avhengig av impedanskontrasten. Resultatet støtter også opp om konklusjonen til Carcione et al. (1991), og da særlig med tanke på at overgangen finner sted for lavere verdier av  $R$  ved svakere refleksivitet.

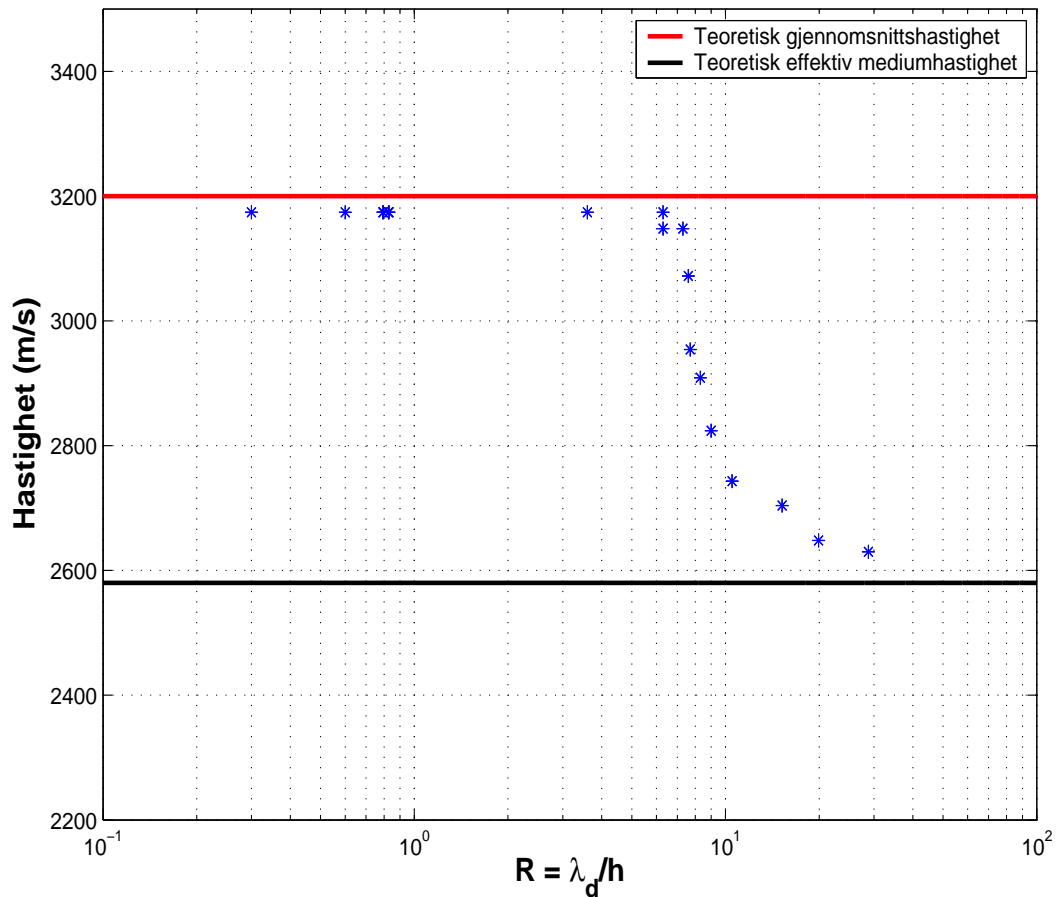


Figur 3.23: Simulerte traser av de transmitterte bølgefeltene fra det binære mediet med  $N = 96$  (trase 1) til  $N = 10$  (trase 9). Bølgene er normalt innfallende.  $P$ -bølgehastigheten og bulk tettheten i medium 2 er endret, slik at  $c_2 = 4000$  m/s og  $\rho_2 = 4$  kg/dm<sup>3</sup>. Ankomsttidene til førsteinnsatsene er markert på trasene.





Figur 3.24: Simulerte traser av de transmitterte bølgefeltene fra det binære mediet med  $N = 9$  (trase 10) til  $N = 1$  (trase 18). Bølgene er normalt innfallende.  $P$ -bølgehastigheten og bulk tettheten i medium 2 er endret ( $c_2 = 4000$  m/s og  $\rho_2 = 4$  kg/dm<sup>3</sup>). Ankomsttidene til førsteinnsatsene er markert på trasene.

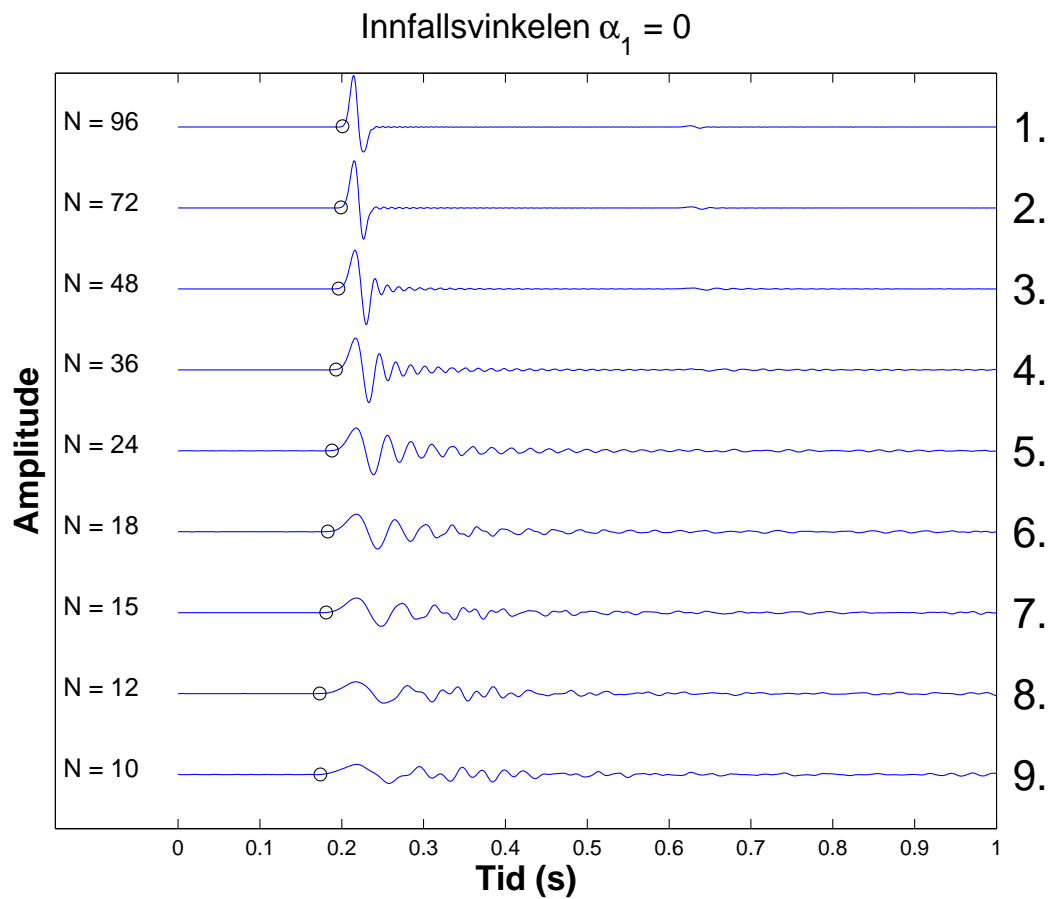


Figur 3.25:  $R = \lambda_d/h$  plottet mot bølgenes gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ) i mediet.  $P$ -bølgehastigheten og tettheten i medium 2 er endret, slik at  $c_2 = 4000$  m/s og  $\rho_2 = 4$  kg/dm<sup>3</sup>. Bølgene er normalt innfallende. Den røde horisontale linjen markerer det binære mediets gjennomsnittshastighet ( $c = 3200$  m/s), mens den svarte angir den effektive mediumhastigheten ( $c_e \approx 2580$  m/s). Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer rundt  $R \approx 7 - 8$ . Denne verdien av  $R$  er lavere enn i tilfellet med den opprinnelige kontrasten i akustisk impedans, noe som tyder på at overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori er avhengig av kontrasten i akustisk impedans. Første-aksen har logaritmisk skala.

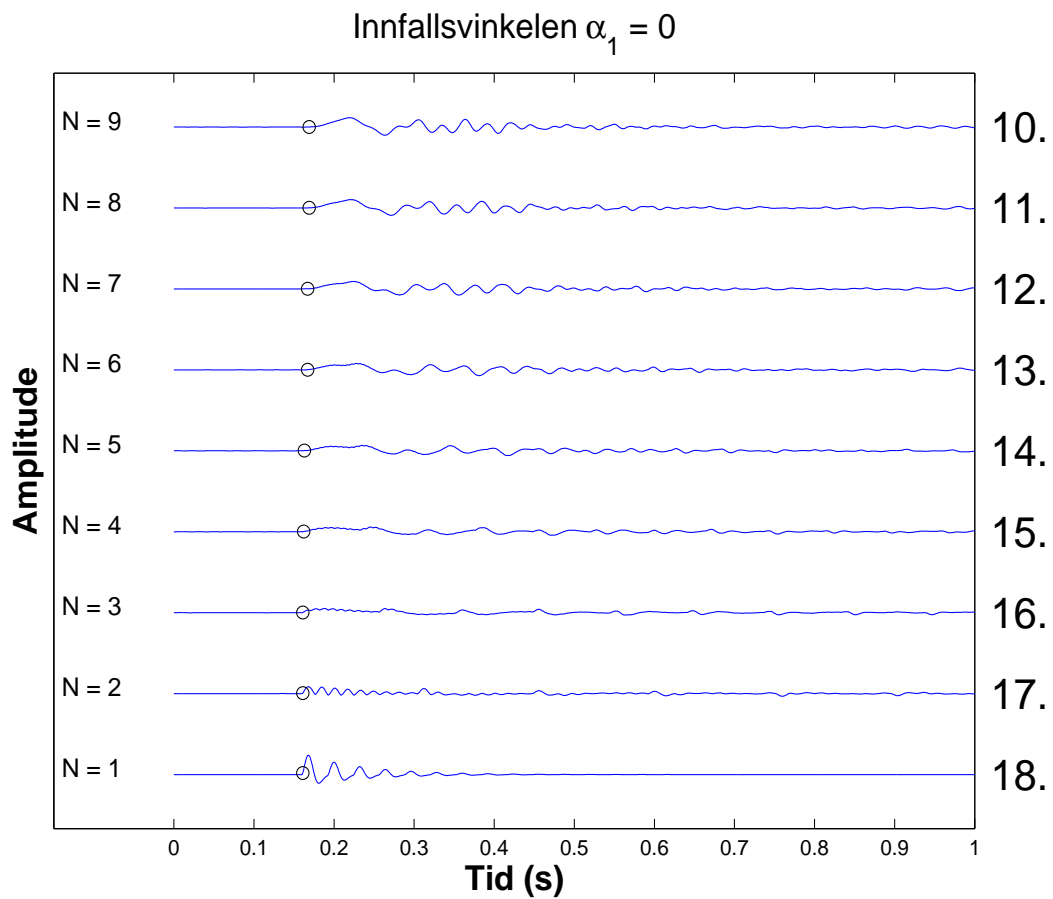
### 3.5.6 Endret sammensetning (materialforhold)

Marion et al. (1994) konkluderte med at overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori nesten er uavhengig av volumandelen av de to komponentene i det binære mediet. For å teste dette, lot jeg det binære mediet bestå av  $3/4$  medium 1 og  $1/4$  medium 2. De fysiske egenskapene til de to komponentene i mediet er fortsatt som i tabell 3.1, med  $c_1 = 2000$  m/s,  $c_2 = 6000$  m/s,  $\rho_1 = 2$  kg/dm<sup>3</sup> og  $\rho_2 = 6$  kg/dm<sup>3</sup>. En konsekvens av dette er at både gjennomsnittshastigheten ( $c$ ) og den effektive mediumhastigheten ( $c_e$ ) blir betraktelig lavere fordi komponenten med lavest hastighet, medium 1, blir dominerende i mediet (75 % av mediet består nå av medium 1). De to hastighetene blir nå  $c = 2400$  m/s og  $c_e = 1874$  m/s, henholdsvis.

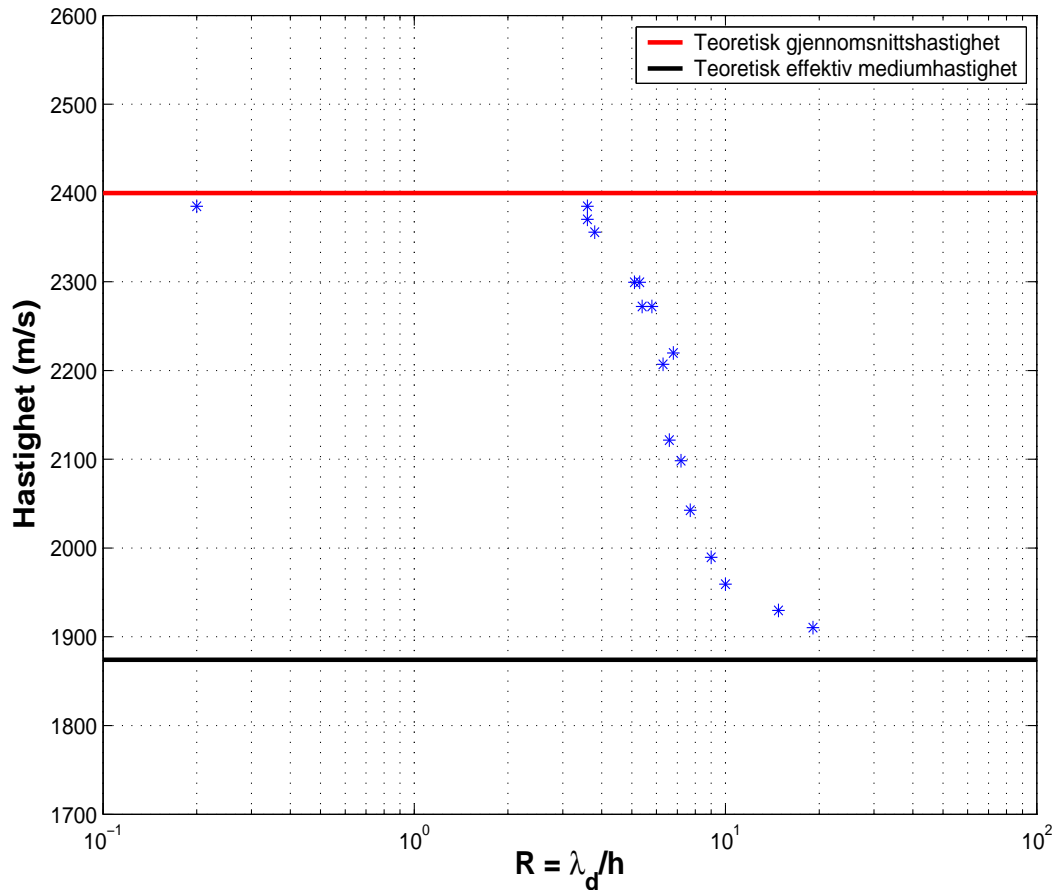
De simulerte trasene er vist i figurene 3.26 - 3.27, mens i figur 3.28 er verdien av  $R = \lambda_d/h$  plottet mot bølgenes gjennomsnittlige hastighet ( $c_a$ ) i mediet. Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer for  $R = 6 - 7$ , som er noe lavere enn for utgangsmodellen med lagperioder bestående av  $1/4$  medium 1 og  $3/4$  medium 2. I tillegg er overgangen mindre markant, noe som vi også kunne se i tilfellet med lavere kontrast i akustisk impedans (figur 3.25).



Figur 3.26: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet med  $N = 96$  (trase 1) til  $N = 19$  (trase 9). Sammensetningen er endret; lagperioden består av  $3/4$  medium 1 og  $1/4$  medium 2. Bølgene er normalt innfallende.



Figur 3.27: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet med  $N = 9$  (trase 1) til  $N = 1$  (trase 18). Sammensetningen er endret; lagperioden består av  $3/4$  medium 1 og  $1/4$  medium 2. Bølgene er normalt innfallende.



Figur 3.28:  $R = \lambda_d/h$  plottet mot bølgenes gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ). Sammensetningen i mediet er endret, slik at mediet nå består av  $3/4$  medium 1 og  $1/4$  medium 2. Bølgene er normalt innfallende. Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer for  $R = 6 - 7$ , en verdi som er lavere enn i tilfellet med den opprinnelige sammensetningen av mediet. Dette tyder på at overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori er avhengig av det relative materialforholdet av de to komponentene i det binære mediet. Overgangen er også mindre markant, noe vi også så i tilfellet med lavere kontrast i akustisk impedans (figur 3.25). Første-aksen har logaritmisk skala.

### 3.6 Numerisk simulering, ikke-normalt innfallende bølger

Når bølgene har en innfallsvinkel  $\alpha_1 \neq 0$ , må vi tolke P-bølgehastighetene  $c_1$  og  $c_2$  i det binære mediet som tilsynelatende vertikale hastigheter, det vil si

$$c_{jz} = c_j / \cos(\alpha_j), \quad j = 1, 2 \quad (3.19)$$

For en gitt innfallsvinkel ( $\alpha_1$ ), er utfallsvinkelen ( $\alpha_2$ ) bestemt ved Snells lov (ligning 2.12). Tabell 3.5 viser tre ulike innfallsvinkler ( $\alpha_1$ ) med korresponderende utfallsvinkler ( $\alpha_2$ ) i det binære mediet med P-bølgehastighetene  $c_1 = 2000$  m/s og  $c_2 = 6000$  m/s. Disse vinklene angir da vinkelen som den propagerende bølgen danner med innfallsloddet i medium  $j$  i det binære mediet, der  $j = 1, 2$ . Dette gir bølgene tilsynelatende bølgelengder,  $\lambda_{jz} = \lambda_j / \cos(\alpha_j)$ ,  $j = 1, 2$ . En kan også tolke dette som at bølgene nå “ser” tilsynelatende lagtykkelser, det vil si  $h_{jz} = h_j \cos(\alpha_j)$ .

Innfallsvinkel $\alpha_1$	$10^\circ$	$15^\circ$	$19^\circ$
Utfallsvinkel $\alpha_2$	$31.4^\circ$	$50.9^\circ$	$77.6^\circ$

Tabell 3.5: *Utfallsvinkler ( $\alpha_2$ ) beregnet fra Snells lov (ligning 2.12) for diverse innfallsvinkler ( $\alpha_1$ ).*

Når innfallsvinkelen ( $\alpha_1$ ) øker, så øker også de tilsynelatende vertikale hastighetene (ligning 3.19). Dette gjør at “intercept”-tidene til førsteinnsatsene blir mindre med økende innfallsvinkel. Samtidig blir multiplene mer kort-periodiske enn i tilfellet med normalt innfallende bølger. Bølgene “ser” tynnere lag enn hva de egentlig er.

Gjennomsnittshastigheten ( $c_z$ ) blir også en funksjon av de tilsynelatende vertikale hastighetene  $c_{1z}$  og  $c_{2z}$ , og kan skrives som

$$\frac{1}{c_z} = \frac{h_1}{h} \frac{1}{c_{1z}} + \frac{h_2}{h} \frac{1}{c_{2z}} \quad (3.20)$$

der  $c_{1z}$  og  $c_{2z}$  er de tilsynelatende vertikale P-bølgehastighetene (ligning 3.19). Tilsvarende er den effektive bulkmodulen ( $K_{ez}$ ) og den effektive bulk tettheten ( $\rho_e$ ) gitt ved

$$\frac{1}{K_{ez}} = \frac{h_1}{h} \frac{1}{K_{1z}} + \frac{h_2}{h} \frac{1}{K_{2z}} \quad (3.21)$$

$$\rho_e = \frac{h_1}{h} \rho_1 + \frac{h_2}{h} \rho_2$$

der  $K_{1z}$  og  $K_{2z}$  antas å være gitt ved  $K_{jz} = \rho_j c_{jz}^2$ ,  $j = 1, 2$ . Den effektive tettheten ( $\rho_e$ ) er forøvrig gitt som i ligning 2.3. Dette gir den effektive mediumhastigheten ( $c_{ez}$ ) ved

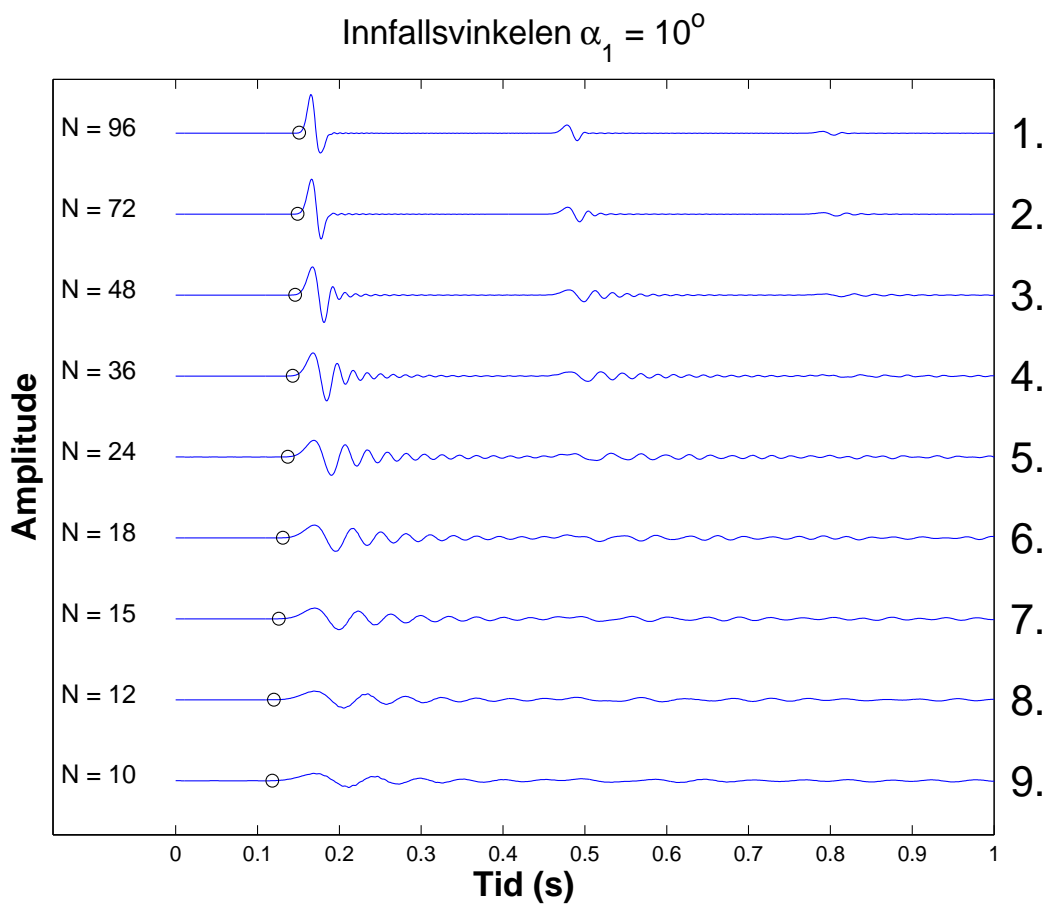
$$c_{ez} = \sqrt{\frac{K_{ez}}{\rho_e}} \quad (3.22)$$

**Innfallsvinkelen**  $\alpha_1 = 10^\circ$

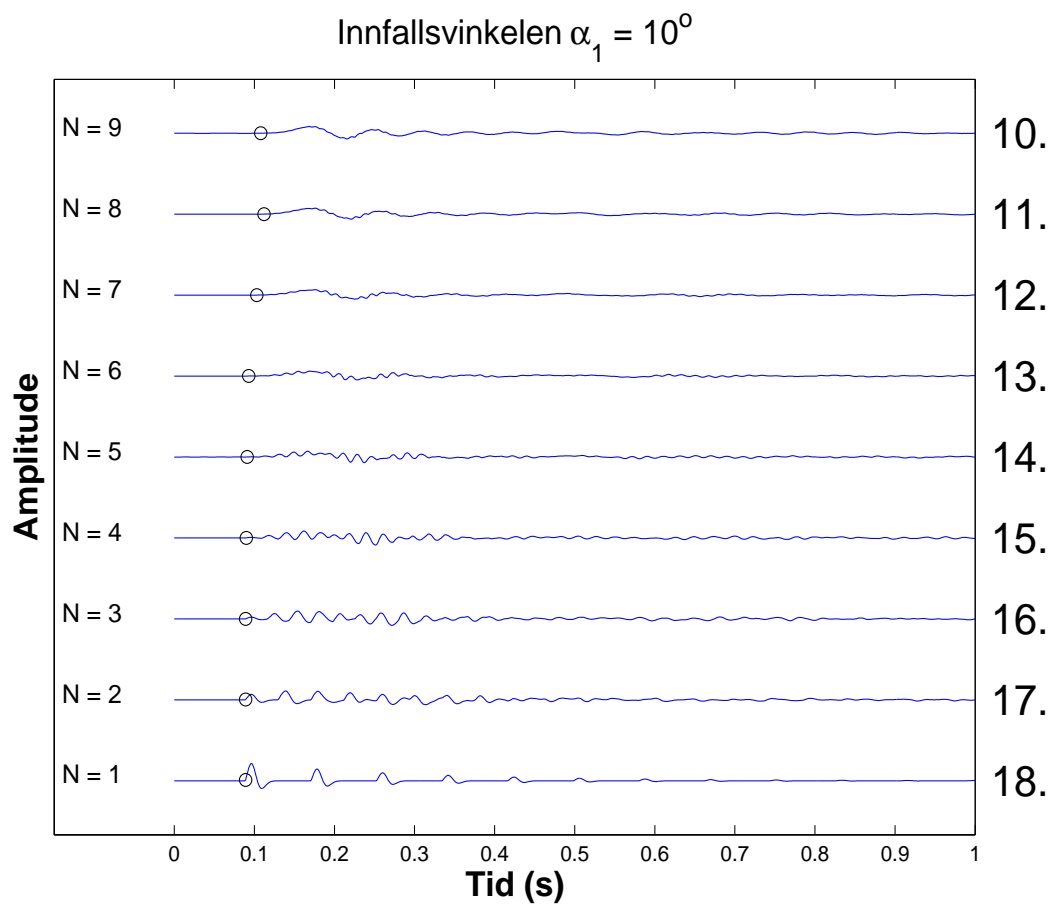
Den numeriske simuleringen av de transmitterte bølgefeltene når innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 10^\circ$  er vist i figurene 3.29 - 3.30. Denne innfallsvinkelen gir en utfallsvinkel  $\alpha_2 = 31.4^\circ$ , og de tilsynelatende vertikale P-bølgehastighetene i medium 1 og medium 2 blir nå  $c_{1z} \approx 2031$  m/s og  $c_{2z} = 7029$  m/s, henholdsvis. Ligning 3.20 - 3.22 gir gjennomsnittshastigheten  $c_z \approx 4352$  m/s og den effektive mediumhastigheten  $c_{ez} \approx 2468$  m/s. Ankomsttidene til førsteinnsatsene er markert på trasene. Som i tilfellet med normalt innfallende bølger, ble bølgenes gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ), dominerende periode ( $T_d$ ) og dominerende bølgelengde ( $\lambda_d$ ) beregnet for de ulike tilfellene.

Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori er vist i figur 3.31, hvor verdien av forholdet  $R = \lambda_d/h$  er plottet mot bølgenes gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ) i det binære mediet. Figuren viser at overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer for  $R = 10$ . Den samme verdien ble funnet i tilfellet med normalt innfallende bølger (figur 3.11).

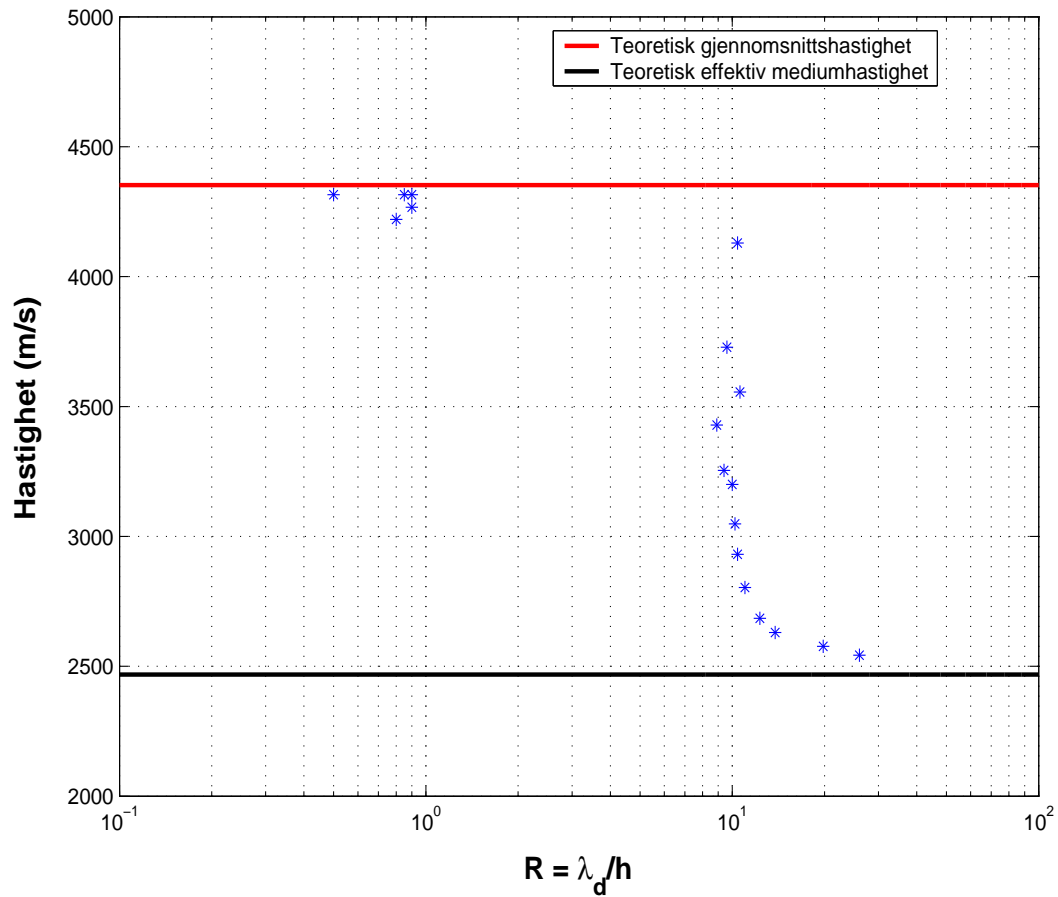




Figur 3.29: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet med  $N = 96$  (trase 1) til  $N = 10$  (trase 9). Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 10^\circ$ .



Figur 3.30: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet med  $N = 9$  (trase 10) til  $N = 1$  (trase 1). Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 10^\circ$ .

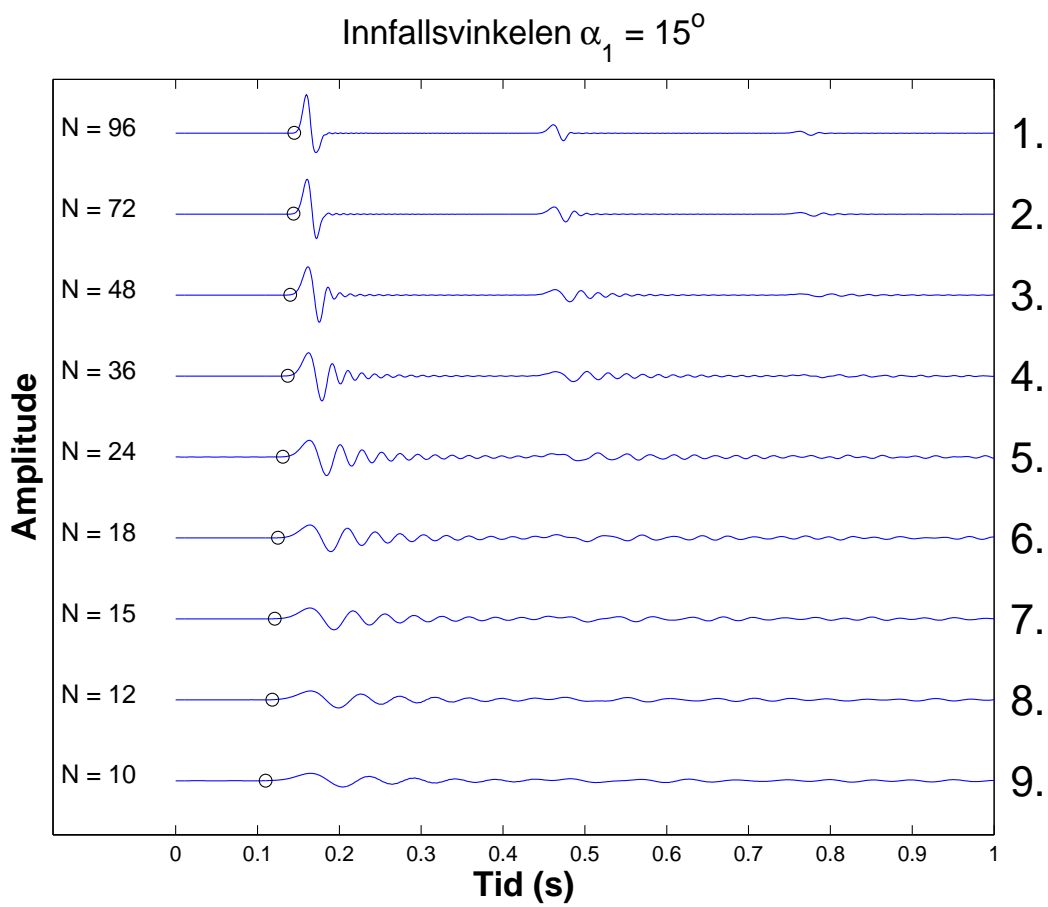


Figur 3.31: Plott av  $R = \lambda_d/h$  versus bølgenes gjennomsnittlige hastighet ( $c_a$ ). Bølgenes innfallsvinkel  $\alpha_1 = 10^\circ$ . Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer rundt  $R = 10$ . Første-aksen har logaritmisk skala.

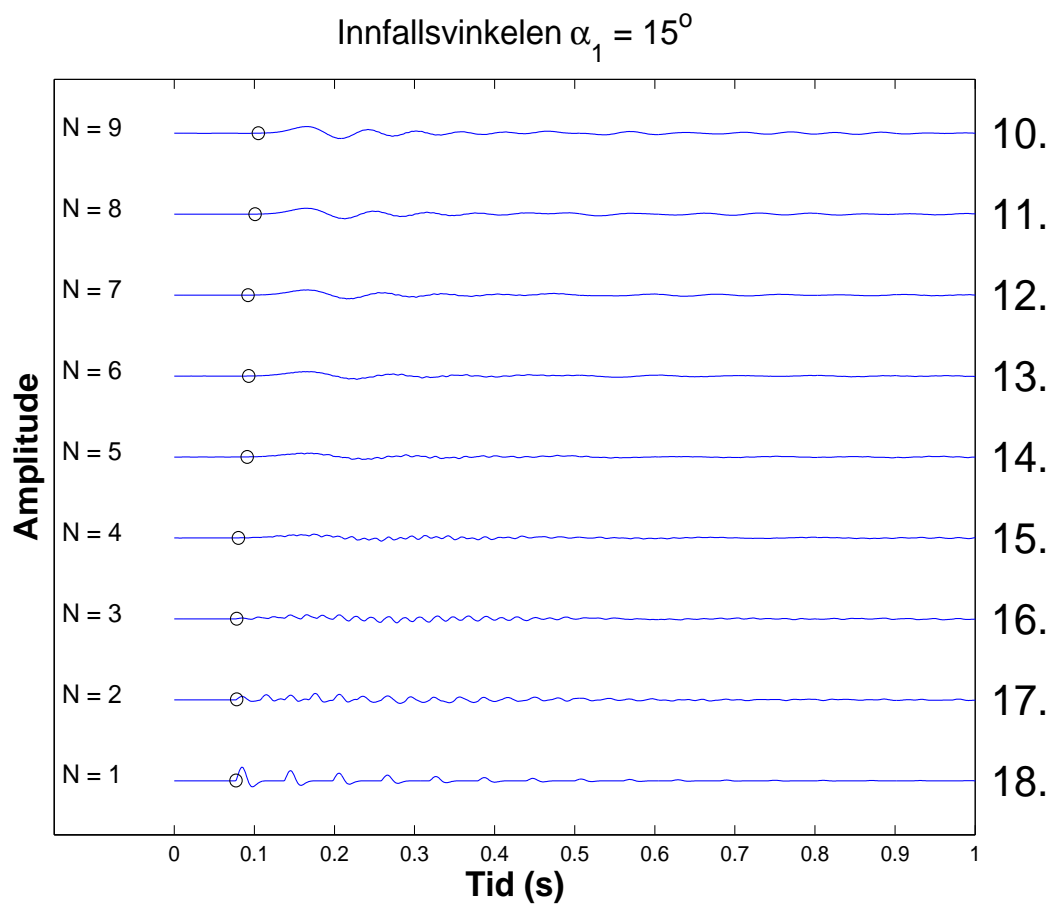
**Innfallsvinkelen**  $\alpha_1 = 15^\circ$ 

I figurene 3.32 - 3.33 er innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 15^\circ$ . Vinkelen som den propagerende bølgen danner med vertikalen i medium 2 i det binære mediet er da gitt ved  $\alpha_2 = 50.9^\circ$ . Disse vinklene gir de tilsynelatende vertikale hastighetene i medium 1 og medium 2 ved  $c_{1z} \approx 2071$  m/s og  $c_{2z} = 9514$  m/s, henholdsvis. Gjennomsnittshastigheten blir i dette tilfellet  $c_z \approx 5011$  m/s, mens den effektive mediumhastigheten er gitt ved  $c_{ez} \approx 2560$  m/s.

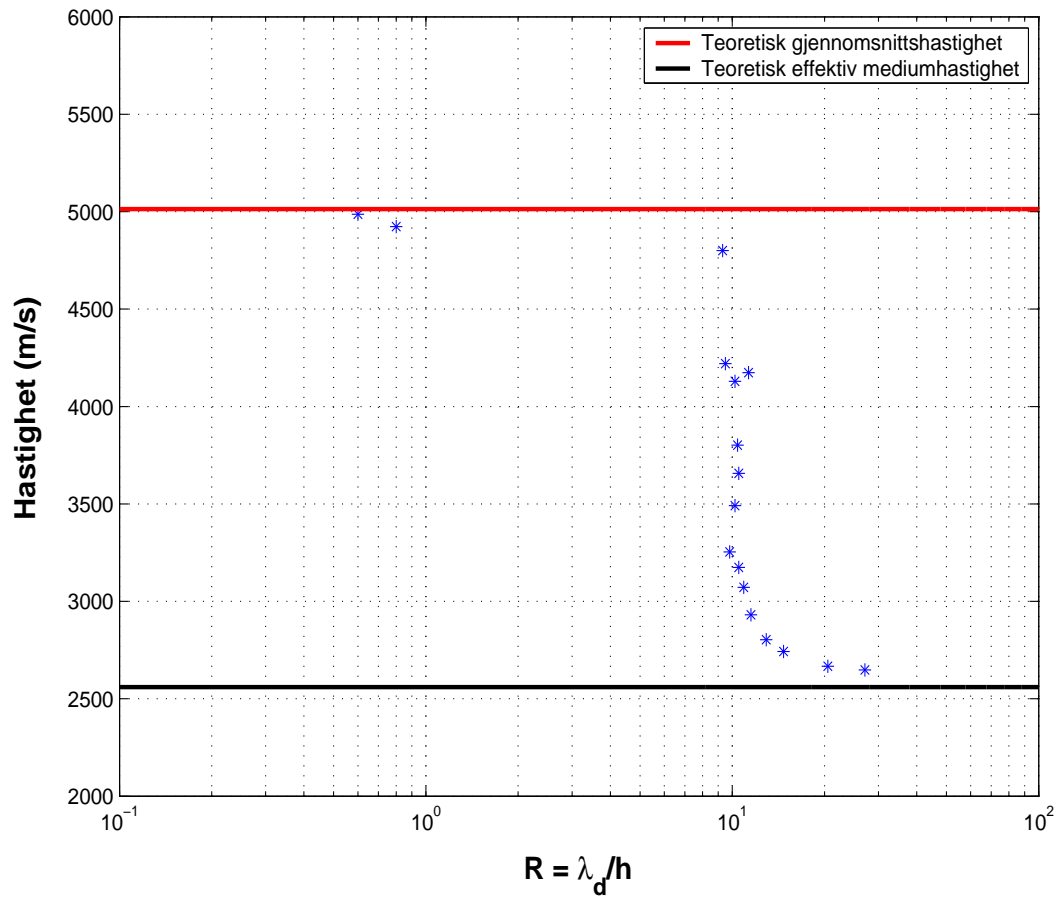
Ankomsttiden til førsteinnsatsene er som før definert ved 1% av maksimum amplituden på trasen, og bestemt numerisk. Deretter ble andre nullkrysning plukket, og de transmitterte bølgenes gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ), dominerende periode ( $T_d$ ) og dominerende bølgelengde ( $\lambda_d$ ) ble beregnet. Resultatet er vist i figur 3.34, der verdien av  $R = \lambda_d/h$  er plottet mot bølgenes gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ) i det binære mediet. Figuren viser at overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer noe i overkant av  $R = 10$ , noe som er i rimelig likhet med resultatene fra tilfellet med normalt innfallende bølger (figur 3.11) og  $\alpha_1 = 10^\circ$  (figur 3.31).



Figur 3.32: De simulerte trasene representerer de transmitterte bølgefeltene når innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 15^\circ$ .  $N$  varierer fra  $N = 96$  (trase 1) til  $N = 10$  (trase 9).



Figur 3.33: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet når innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 15^\circ$ .  $N$  varierer fra  $N = 9$  (trase 10) til  $N = 1$  (trase 18).

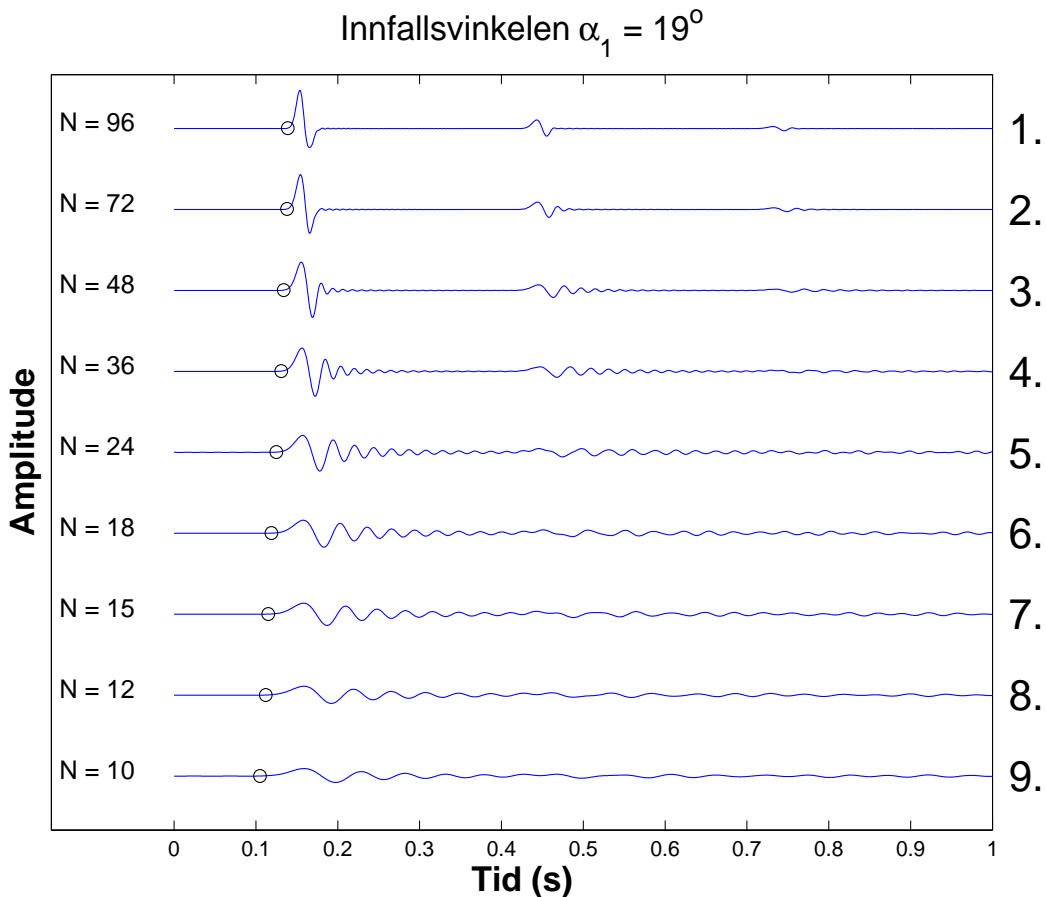


Figur 3.34:  $R = \lambda_d/h$  versus bølgenes gjennomsnittlige hastighet ( $c_a$ ). Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 15^\circ$ . Overgangen fra stråleteori skjer rundt  $R = 10$ . Første-aksen har logaritmisk skala.

### Innfallsvinkelen $\alpha_1 = 19^\circ$ (nær kritisk vinkel)

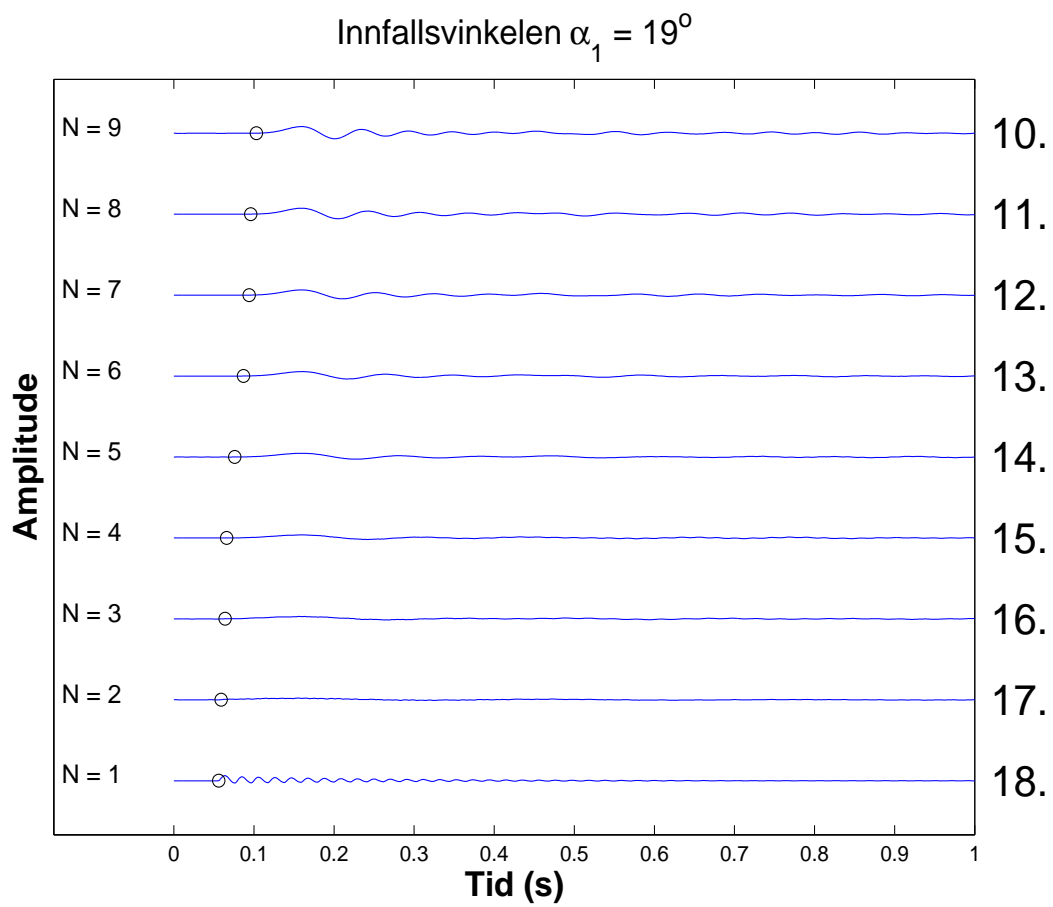
De simulerte trasene av det transmitterte bølgefeltet når innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 19^\circ$  er vist i figurene 3.35 - 3.36. Denne innfallsvinkelen er nær den kritiske vinkelen ( $\alpha_c \approx 19.5^\circ$ ), og gir således en svært stor utfallsvinkel ( $\alpha_2 = 77.6^\circ$ ). Disse vinklene gir de to tilsynelatende vertikale hastighetene  $c_{1z} \approx 2115$  m/s og  $c_{2z} \approx 27941$  m/s, henholdsvis. Gjennomsnittshastigheten blir  $c_z \approx 6894$  m/s og den effektive mediumhastigheten er gitt ved  $c_{ez} \approx 2668$  m/s.

Figur 3.37 viser et plott av  $R = \lambda_d/h$  mot bølgenes gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ) i det periodiske mediet når innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 19^\circ$ . Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer litt i overkant av  $R = 10$ , men det er kun snakk om en liten forskjell fra tilfellene med de øvrige innfallsvinklene.

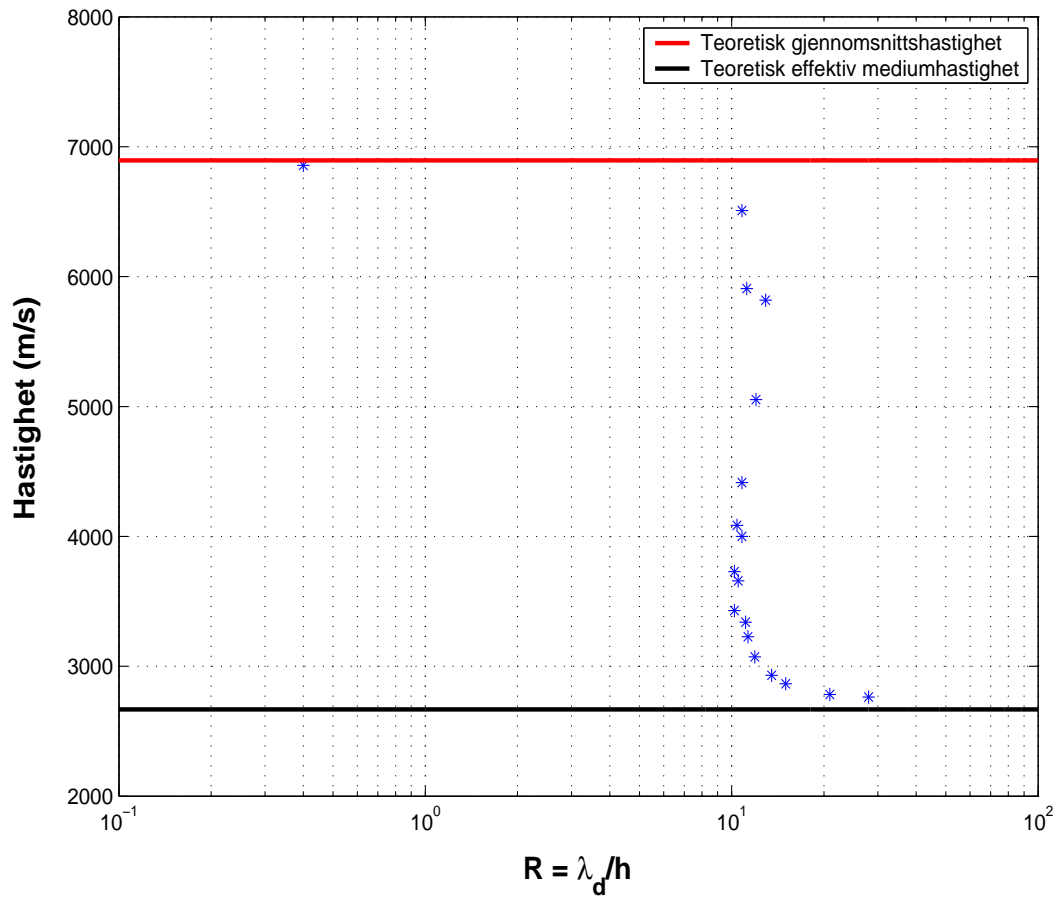


Figur 3.35: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet når  $N = 96$  (trase 1) til  $N = 10$  (trase 9). Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 19^\circ$ .





Figur 3.36: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet når  $N = 9$  (trase 10) til  $N = 1$  (trase 18). Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 19^\circ$ .



Figur 3.37:  $R = \lambda_d/h$  plottet mot bølgenes gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ). Bølgenes innfallsvinkel  $\alpha_1 = 19^\circ$  (nær kritisk vinkel). Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer rundt  $R = 10$ . Første-aksen har logaritmisk skala.

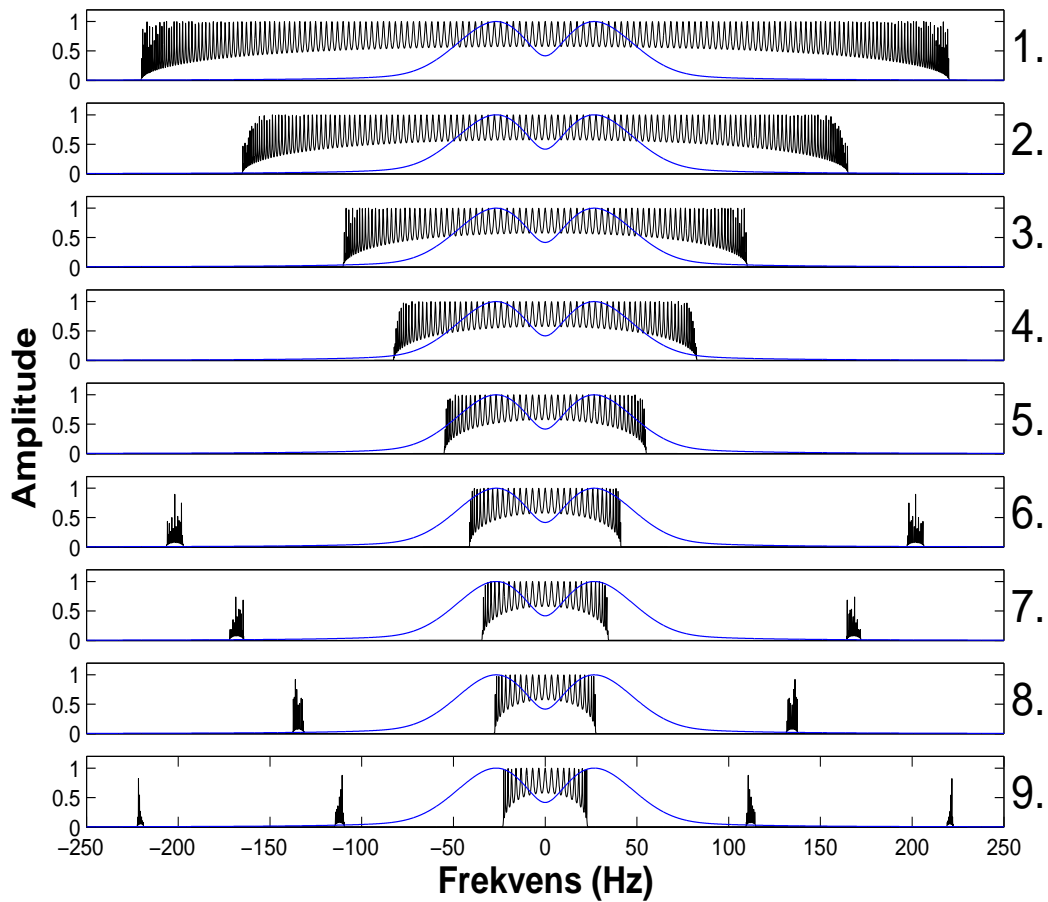
Sammenligner en trasene fra den numeriske simuleringen med normalt innfallende bølger (figur 3.5 - 3.6) med trasene fra de numeriske simuleringene hvor bølgene har ulike innfallsvinkler, ser en at det er lite som skiller dem i tilfellene med mange lagperioder (tynne lag). Riktignok vil der være en viss forskjell, da refleksjons- og transmisjonskoeffisientene varierer med innfallsvinkelen. I tillegg avhenger gangtiden til de ulike "eventene" av innfallsvinkelen, slik at eventuell interferens også vil kunne variere. Men, som for normalt innfallende bølger, så bygges det opp en "effektiv" bølge når  $N$  er stor nok og lagene er tilstrekkelig tynne (se trase 1 i de numeriske simuleringene). Denne bølgen består av multippelenergi, og er generert av interfererende kort-periodiske multipler fra de mange grenseflatene i det periodiske mediet. Direktebølgen har forsvunnet på grunn av transmisjonstap over grenseflatene, og den "effektive" bølgen er en forsinket bølge. Den propagerer med en hastighet som er nær den effektive mediumhastigheten, og er lite endret i form i forhold til det innfallende signalet. Den effektive medium teorien gjør seg gjeldene; det binære mediet oppfører seg som et transverst isotropt og homogent medium.

Når antall lagperioder ( $N$ ) blir færre og lagene blir tykkere, får vi den dispersive oppførselen hos de transmitterte bølgene. De lave frekvensene kommer til syne i begynnelsen av bølgepakkene, mens de høyere frekvensene kommer inn senere. Amplituden og ankomsttiden til førsteinnsatsen blir mindre, og det er umulig å identifisere de øvrige innsatsene. Selv om innfallsvinklene varierer relativt kraftig i de ulike simuleringene, er det bare små forskjeller i de transmitterte bølgefeltene.

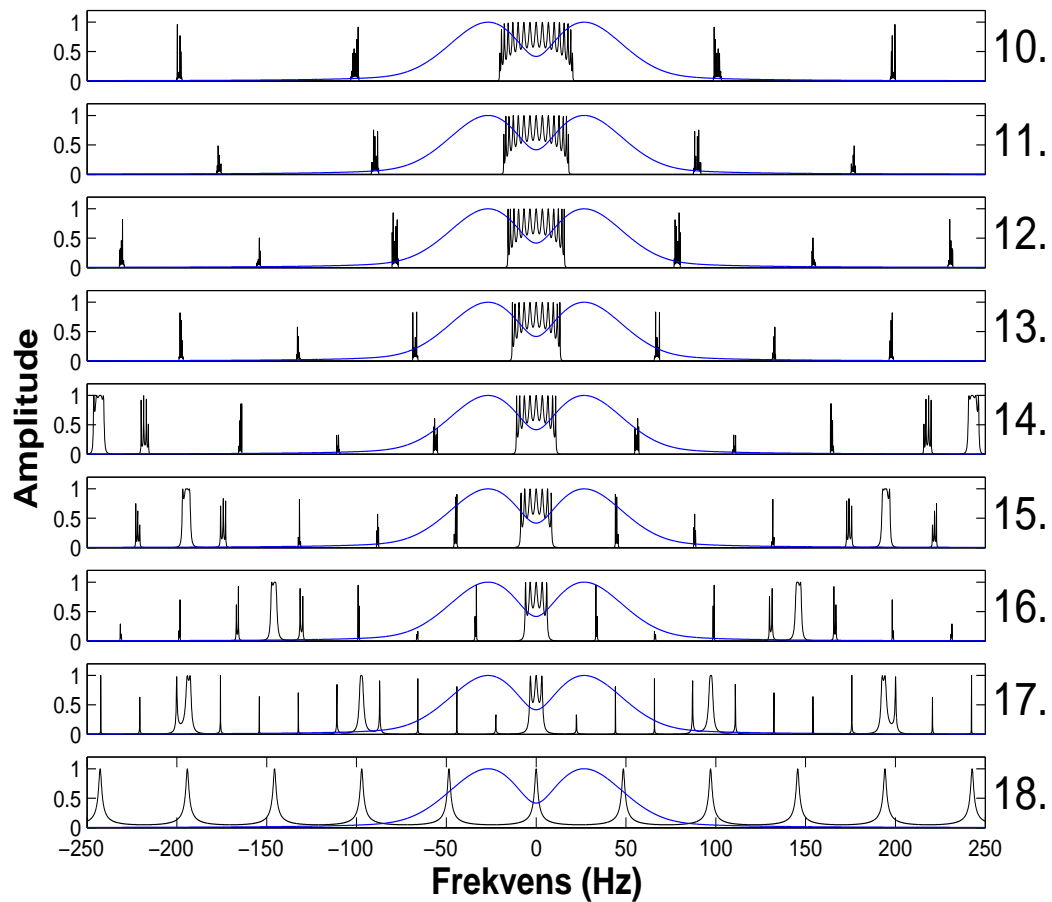
Men der hvor direktebølgen forsvinner ved normalt innfallende bølger ( $N = 7$ ), begynner forskjellene å komme til syne. I trase 13 ( $N = 6$ ) til trase 17 ( $N = 2$ ) i figurene 3.30, 3.33 og 3.36, hvor innfallsvinkelen er  $10^\circ$ ,  $15^\circ$  og  $19^\circ$  (nær kritisk vinkel), henholdsvis, ser en at betydelig mindre energi transmitteres gjennom mediet enn i tilfellet med normalt innfallende bølger (figur 3.6). Og transmisjonen blir mindre ved økende innfallsvinkel. I disse tilfellene varierer lagtykkelsene fra  $h_1 = 16$  m og  $h_2 = 48$  m ( $N = 6$ ) til  $h_1 = 48$  m og  $h_2 = 144$  m ( $N = 2$ ). Det periodiske mediet er altså relativt upåvirket av økende innfallsvinkel når mediet består av et stort antall tynne lag. Men i tilfellene med et lite antall tykke lag, så har innfallsvinkelen en stor effekt på transmisjonen i mediet. Årsaken til dette, at økende innfallsvinkel gir betydelig mindre transmisjon for tykke lag og få lagperioder, ser en ved å studere figur 3.38 og 3.39. I figurene er filteret  $F_N(\omega)$ , repre-

sentert av det binære mediet, plottet som funksjon av frekvensen og amplituden (svarte kurver). Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 19^\circ$ . De blå kurvene er absoluttverdien av Fourier-spekteret til den innfallende bølgen. En sammenligning med figur 3.38 og 3.39 viser at i forhold til normalt innfallende bølger, så har side-passbåndene i det binære mediet “kollapset”. For store  $N$  (og tynne lag) gir ikke dette noen effekt, da frekvensinnholdet til den innfallende bølgen ligger innenfor det lavfrekvente passbåndet. Men for små  $N$  (og tykke lag), ligger det lavfrekvente passbåndet og opptil flere av side-passbåndene innenfor frekvensbåndet til den innfallende bølgen. Dette forklarer den reduserte transmisjonen i det binære mediet hvor  $N$  er liten (lagene tykke) og innfallsvinkelen nærmer seg kritisk vinkel.

Resultatene fra de numeriske simuleringene med ulike innfallsvinkler, tyder på at overgangen fra stråleteori (høy hastighet) til effektiv medium teori (lav hastighet) er relativt uavhengig av bølgenes innfallsvinkel i det periodiske mediet. Som i tilfellet med normalt innfallende bølger, er overgangen ganske markant. Dog synes overgangen å finne sted for noe høyere verdier av  $R$  ved økende innfallsvinkel, men kun i svært liten grad.

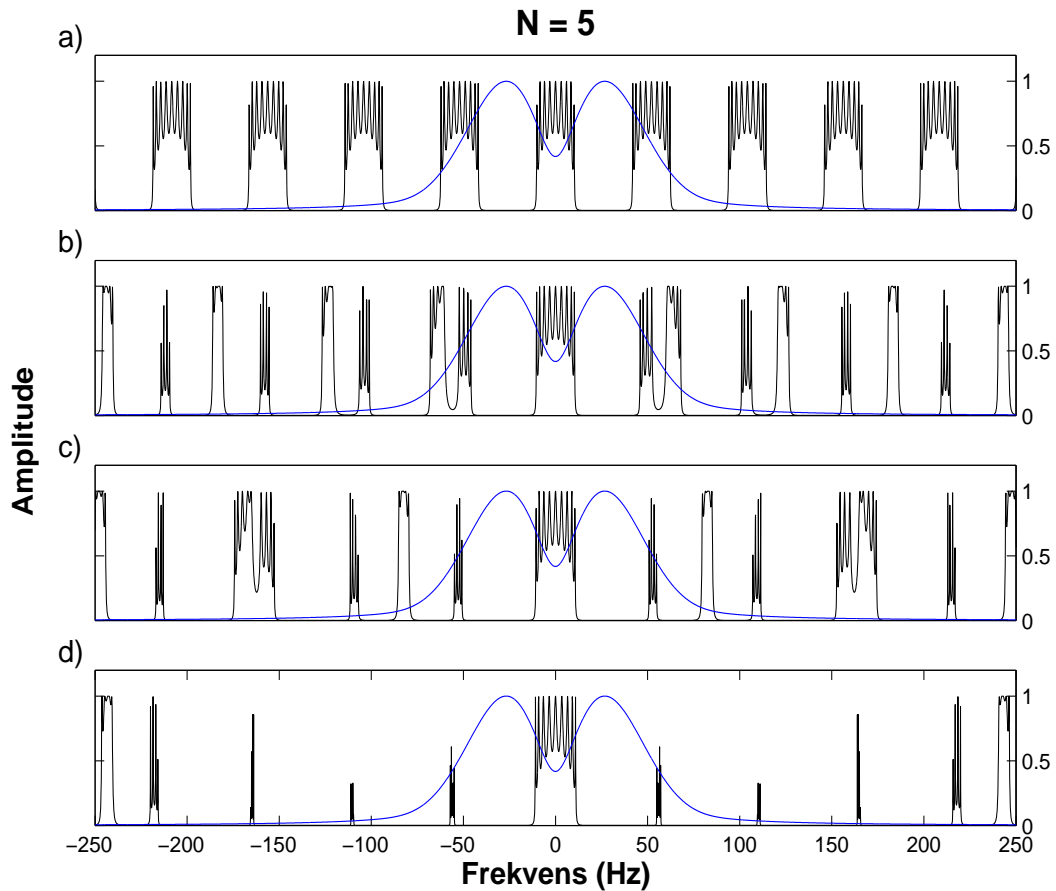


Figur 3.38: De svarte kurvene er filtrene  $F_N(\omega)$  med  $N = 96$  (1.) til  $N = 10$  (9.). De blå kurvene er Fourier-spekteret til den innfallende bølgen. Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 19^\circ$ . I forhold til normalt innfallende bølger (figur 3.12), ser vi at sidepassbåndene nesten har forsvunnet. Kun det lavfrekente passbåndet står igjen, hvilket gjør at mediet fungerer som et lavpassfilter.



Figur 3.39: De svarte kurvene er filtrene  $F_N(\omega)$  med  $N = 9$  (10.) til  $N = 1$  (18.). De blå kurvene er Fourier-spekteret til den innfallende bølgen. Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 19^\circ$ . I forhold til normalt innfallende bølger (figur 3.13), ser vi at sidepassbåndene nesten har forsvunnet. Kun det lavfrekente passbåndet står igjen, hvilket gjør at mediet fungerer som et lavpassfilter.

Figur 3.40 viser Fourier-spekteret til den innfallende bølgen (blå kurver) og filteret  $F_N(\omega)$  (svarte kurver) i frekvensdomenet. Det binære mediet består av 5 lagperioder, og innfallsvinkelen varierer som  $\alpha_1 = 0^\circ$  (a),  $\alpha_1 = 10^\circ$  (b),  $\alpha_1 = 15^\circ$  (c) og  $\alpha_1 = 19^\circ$  (d). Figuren viser at det lavfrekvente passbåndet er svært stabilt når innfallsvinkelen øker, i motsetning til side-passbåndene. Disse “brytes opp” og blir smalere når innfallsvinkelen øker. Nær kritisk vinkel ( $\alpha_1 = 19^\circ$ ) er det bare tynne “notcher” igjen av side-passbåndene. Side-passbåndene har “kollapset”.



Figur 3.40: De svarte kurvene er filteret  $F_N(\omega)$  med  $N = 5$  for 4 ulike innfallsvinkler;  $\alpha_1 = 0^\circ$  (a),  $\alpha_1 = 10^\circ$  (b),  $\alpha_1 = 15^\circ$  (c) og  $\alpha_1 = 19^\circ$  (d). De blå kurvene er Fourier-spekteret til den innfallende bølgen. Når innfallsvinkelen øker, ødelegges de høyfrekvente side-passbåndene.

### 3.6.1 Snudd sekvens for større innfallsvinkler

P-bølgehastighetene i medium 1 og medium 2 ved  $c_1 = 2000$  m/s og  $c_2 = 6000$  m/s gir en kritisk vinkel  $\alpha_c \approx 19.5^\circ$ . Da kun P-bølger er inkludert i modelleringen, er det klart at ingen energi vil transmitteres for større innfallsvinkler enn kritisk vinkel. For å se på noen tilfeller med litt ekstreme innfallsvinkler, kan vi unngå dette ved å bytte de fysiske egenskapene til lagene i det binære mediet. Ved å la det binære mediet bestå av 3/4 medium 1 og 1/4 medium 2 med hastigheter og tettheter som i tabell 3.6, får vi en modell som er ekvivalent med en snudd sekvens av den binære utgangsmodellen.

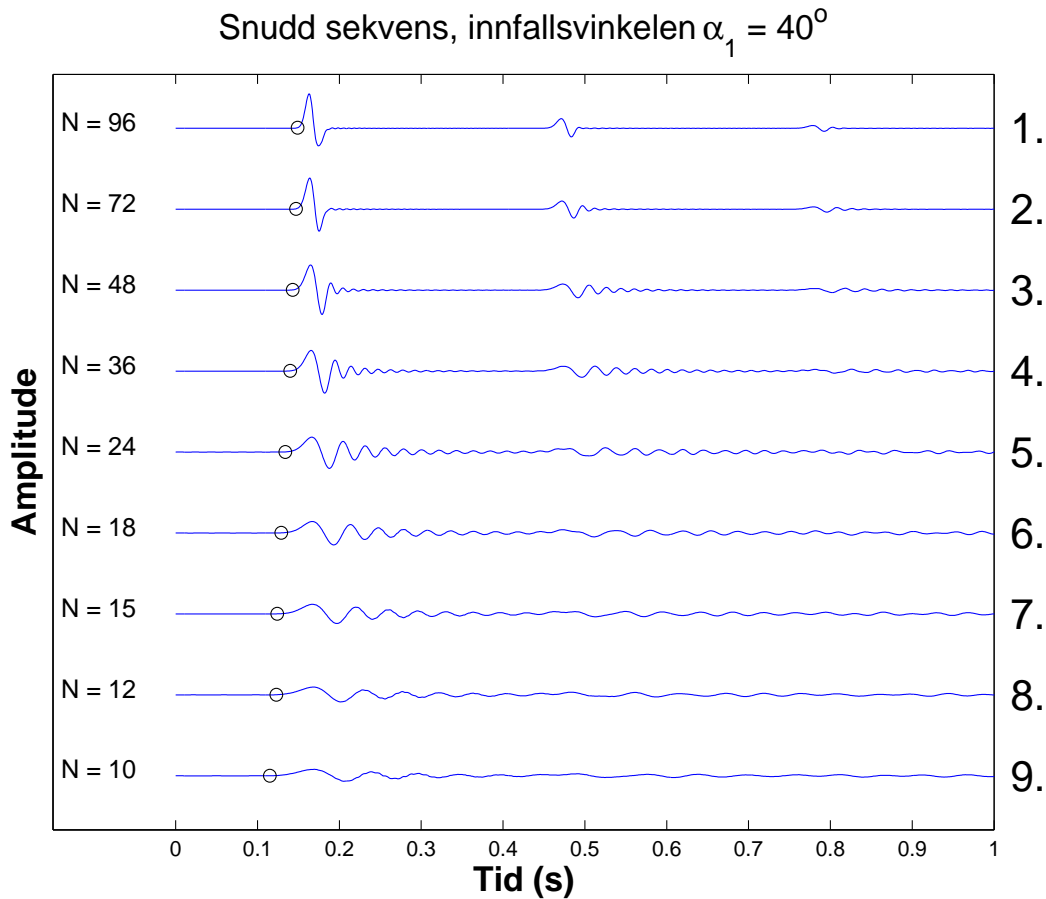
	P-bølgehastigheter	Bulktettheter
Medium 1	$c_1 = 6000$ m/s	$\rho_1 = 6$ kg/dm <sup>3</sup>
Medium 2	$c_2 = 2000$ m/s	$\rho_2 = 2$ kg/dm <sup>3</sup>

Tabell 3.6: *P-bølgehastigheter og bulktettheter til de to komponentene i det binære mediet der de fysiske egenskapene til lagene er byttet om.*

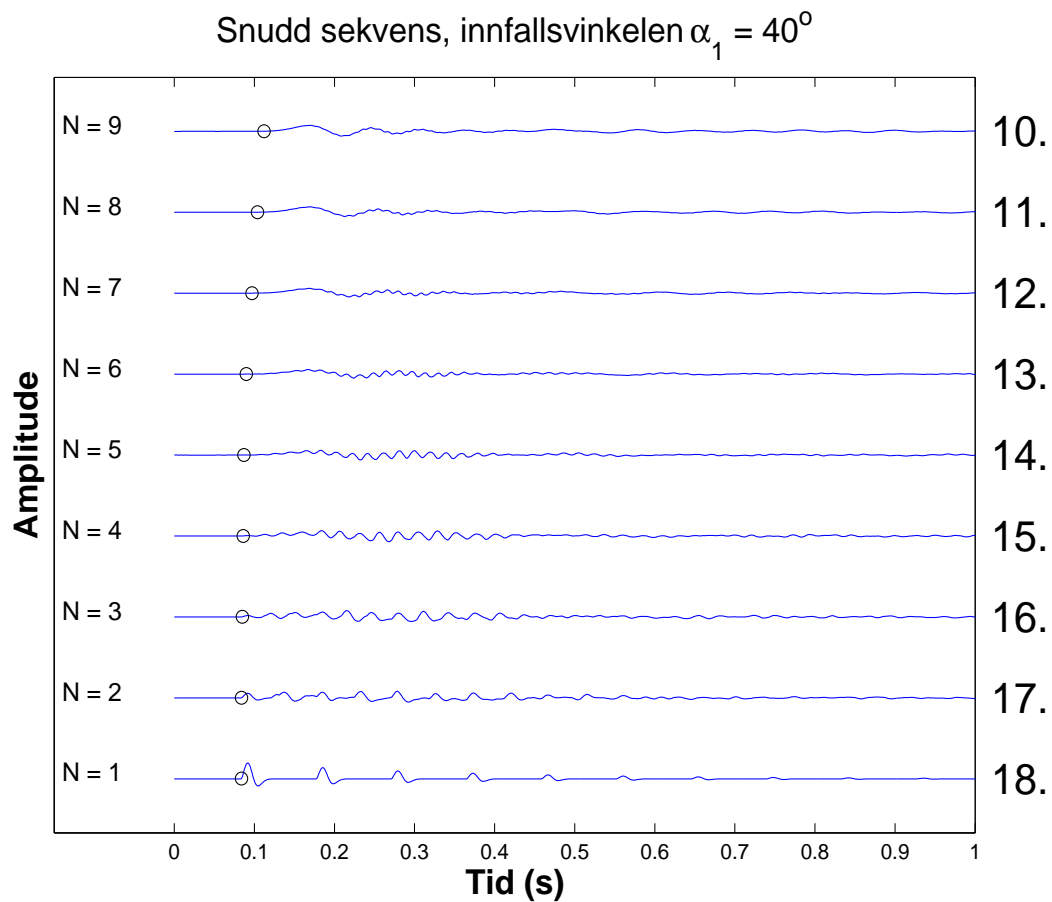
#### Innfallsvinkelen $\alpha_1 = 40^\circ$

I figurene 3.41 - 3.42 er innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 40^\circ$ . Bølgene brytes nå mot innfallsloddet i overgangen fra medium 1 til medium 2, fordi P-bølgehastigheten minker over grenseflaten. Utfallsvinkelen er gitt ved  $\alpha_2 \approx 12.4^\circ$ . Disse vinklene gir de tilsynelatende hastighetene i medium 1 og medium 2 ved  $c_{1z} \approx 7832$  m/s og  $c_{2z} \approx 2048$  m/s, henholdsvis. Gjennomsnittshastigheten ( $c_z$ ) og den effektive mediumhastigheten ( $c_{ez}$ ) beregnes fra ligningene 3.20 - 3.22, og er gitt ved  $c_z \approx 4591$  m/s og  $c_{ez} \approx 2506$  m/s.

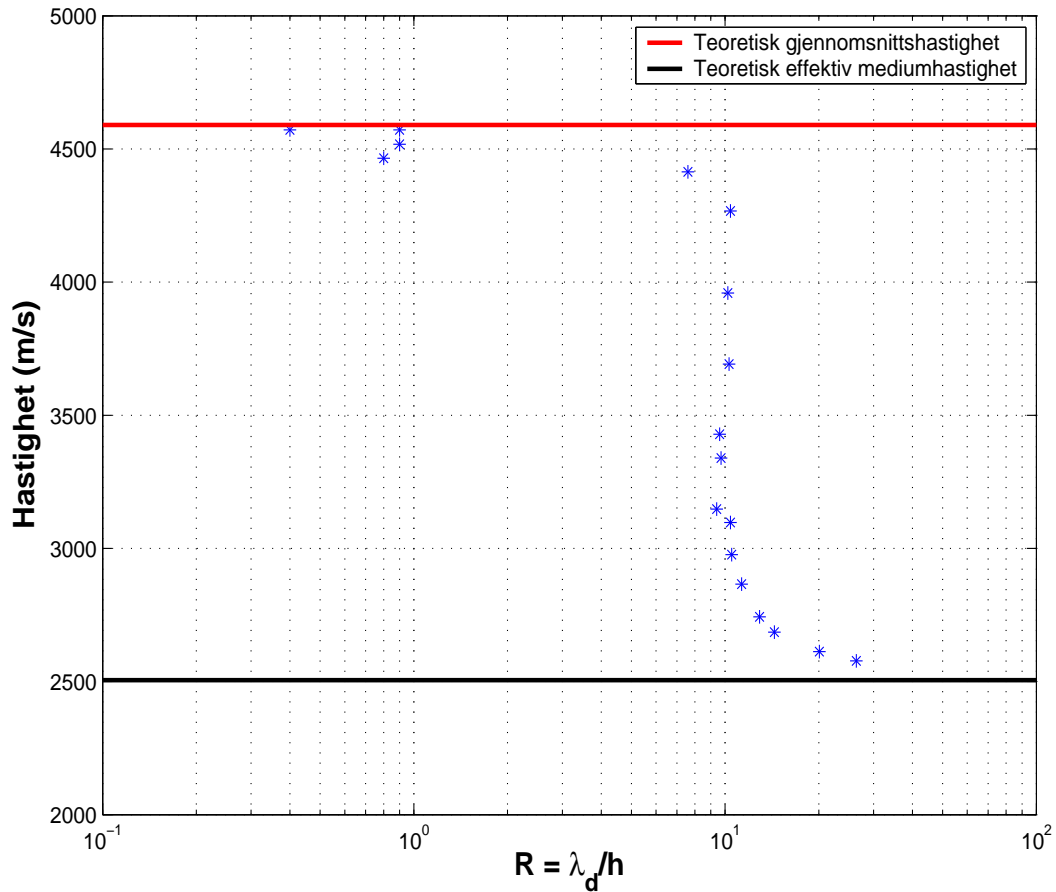




Figur 3.41: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet med  $N = 96$  (trase 1) til  $N = 10$  (trase 9) når innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 40^\circ$ . De fysiske egenskapene til lagene i det binære mediet er byttet om, slik at  $c_1 = 6000 \text{ m/s}$ ,  $c_2 = 2000 \text{ m/s}$ ,  $\rho_1 = 6 \text{ kg/dm}^3$  og  $\rho_2 = 2 \text{ kg/dm}^3$ . Det binære mediet består nå av  $3/4$  medium 1 og  $1/4$  medium 2.



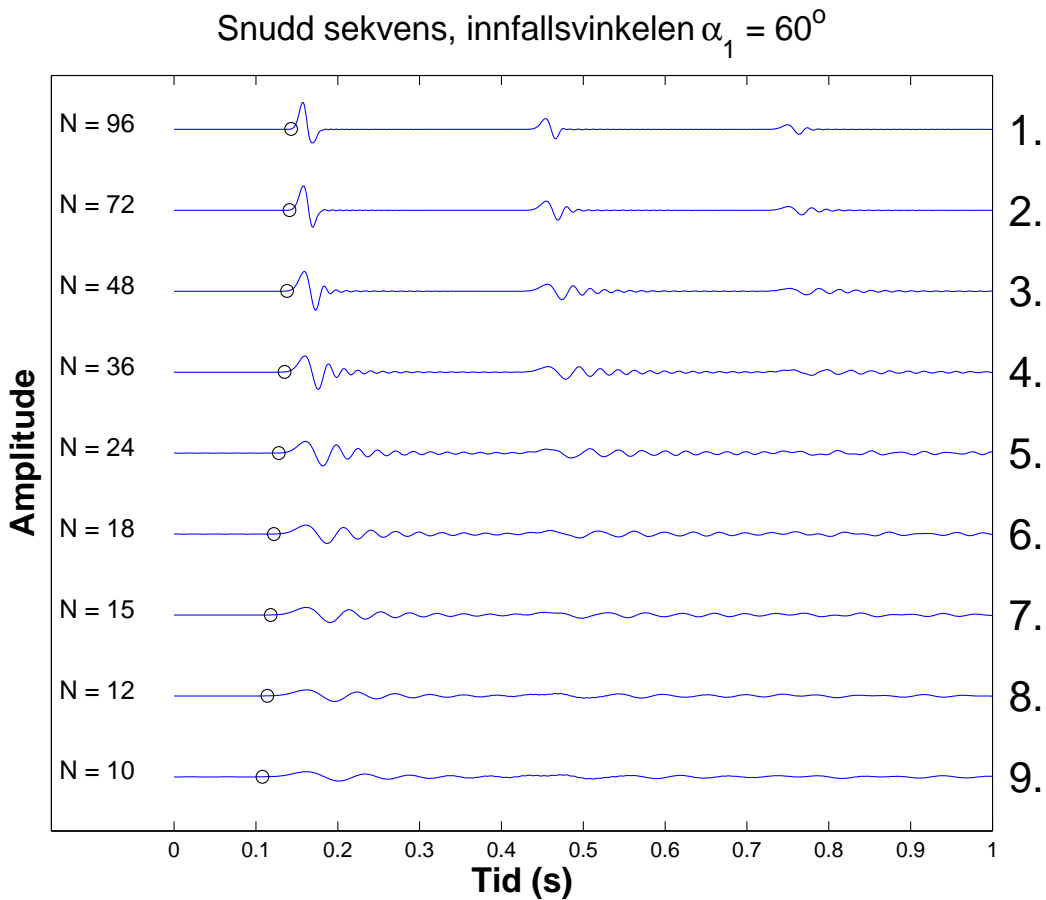
Figur 3.42: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet med  $N = 9$  (trase 10) til  $N = 1$  (trase 18) når innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 40^\circ$ . De fysiske egenskapene til lagene i det binære mediet er byttet om, slik at  $c_1 = 6000$  m/s,  $c_2 = 2000$  m/s,  $\rho_1 = 6$  kg/dm<sup>3</sup> og  $\rho_2 = 2$  kg/dm<sup>3</sup>. Det binære mediet består nå av 3/4 medium 1 og 1/4 medium 2.



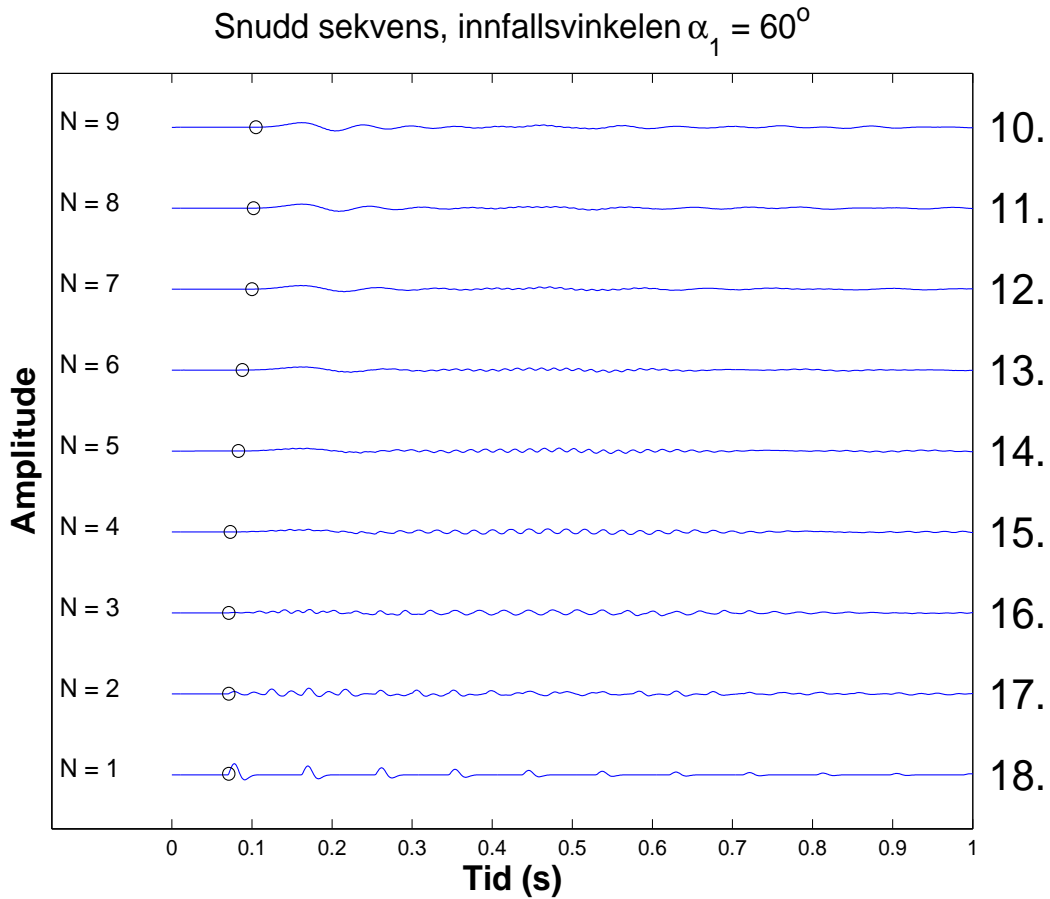
Figur 3.43: Forholdet  $R = \lambda_d/h$  plottet mot bølgenes gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ) i det binære mediet som tilsvarer en snudd sekvens. Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 40^\circ$ . Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer ved  $R \approx 10$ . Første-aksen har logaritmisk skala.

**Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 60^\circ$** 

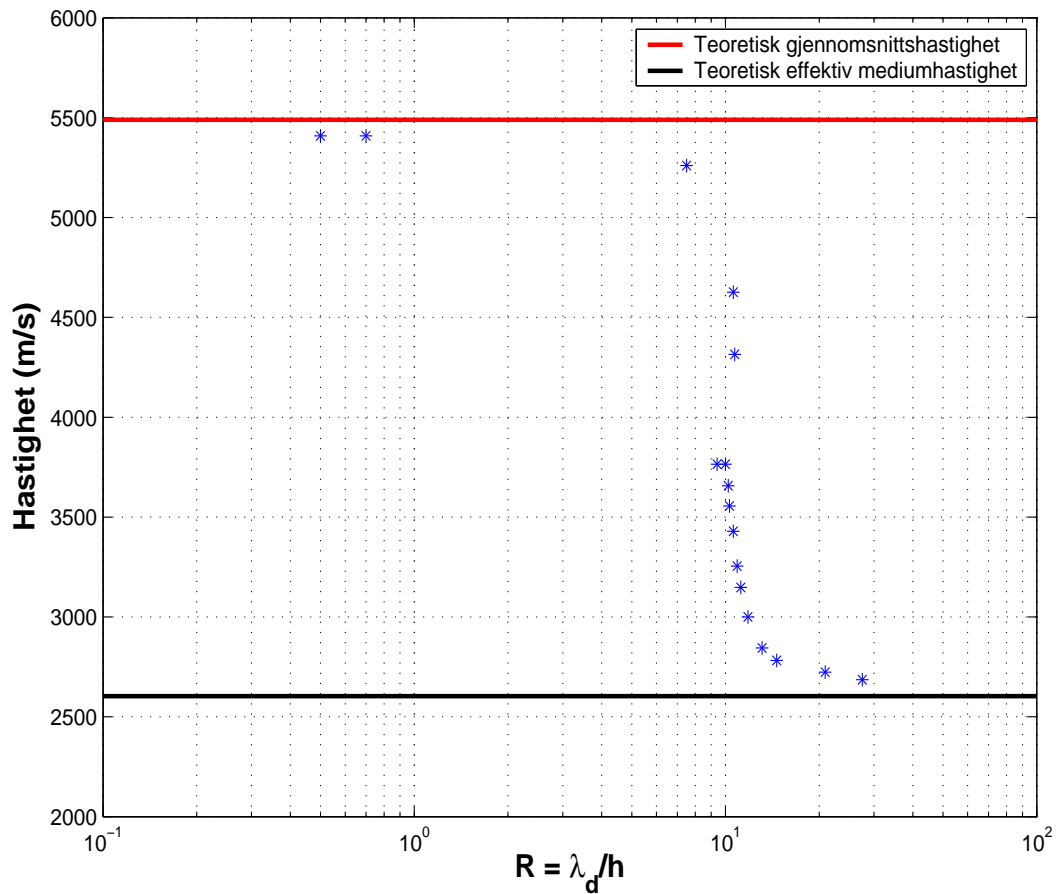
Figurene 3.44 - 3.45 viser den numeriske simuleringen av det transmitterte bølgefeltet når innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 60^\circ$ . Utfallsvinkelen  $\alpha_2$  er gitt ved  $\alpha_2 \approx 16.8^\circ$ . De tilsynelatende vertikale P-bølgehastighetene ( $c_{1z}$  og  $c_{2z}$ ), gjennomsnittshastigheten ( $c_z$ ) og den effektive mediumhastigheten ( $c_{ez}$ ) blir nå  $c_{1z} = 12000$  m/s,  $c_{2z} \approx 2089$  m/s,  $c_z \approx 5489$  m/s og  $c_{ez} \approx 2604$  m/s, henholdsvis.



Figur 3.44: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet for  $N = 96$  (trase 1) til  $N = 10$  (trase 9) når innfallsvinkelen er  $60^\circ$ . Egenskapene til medium 1 og medium 2 i det binære mediet er nå byttet, slik at  $c_1 = 6000$  m/s,  $\rho_1 = 6$  kg/dm<sup>3</sup>,  $c_2 = 2000$  m/s og  $\rho_2 = 2$  kg/dm<sup>3</sup>, henholdsvis. Lagperiodene består i hvert tilfelle av  $3/4$  medium 1 og  $1/4$  medium 2.



Figur 3.45: Simulerte traser av det transmitterte bølgefeltet for  $N = 9$  (trase 10) til  $N = 1$  (trase 18). Egenskapene til medium 1 og medium 2 i det binære mediet er nå byttet, slik at  $c_1 = 6000 \text{ m/s}$ ,  $\rho_1 = 6 \text{ kg/dm}^3$ ,  $c_2 = 2000 \text{ m/s}$  og  $\rho_2 = 2 \text{ kg/dm}^3$ , henholdsvis. Lagperiodene består i hvert tilfelle av  $3/4$  medium 1 og  $1/4$  medium 2. Innfallsvinkelen er  $\alpha_1 = 60^\circ$ .



Figur 3.46: Forholdet  $R = \lambda_d/h$  plottet mot bølgenes gjennomsnittshastighet ( $c_a$ ) i det binære mediet som tilsvarer en snudd sekvens. Innfallsvinkelen  $\alpha_1 = 60^\circ$ . Overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori skjer litt i overkant av  $R = 10$ . Første-aksen har logaritmisk skala.

Resultatene av de numeriske simuleringene med innfallsvinkelene  $\alpha_1 = 40^\circ$  og  $\alpha_2 = 60^\circ$  er ikke uventet relativt like de numeriske simuleringene med mer moderate innfallsvinkler. Dette har sammenheng med at når vi bytter de fysiske egenskapene til lagene i det binære mediet, så brytes bølgene mot innfallsloddet (vertikalen) ved grenseflaten mellom mellom 1 og medium 2. En moderat innfallsvinkel i laget med lav hastighet gir en stor utfallsvinkel i laget med høy hastighet, mens en stor innfallsvinkel i laget med høy hastighet da gir en moderat utfallsvinkel i laget med lav hastighet. Men simuleringene og resultatene er med på å bekrefte at overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori er lite påvirket av bølgenes innfallsvinkel ( $\alpha_1$ ). I figurene 3.43 og 3.46, hvor innfallsvinkelen er  $40^\circ$  og  $60^\circ$ , henholdsvis, skjer overgangen fra stråleteori litt i overkant av  $R = 10$ . Dette er det samme resultatet som fra situasjonen med normalt innfallende bølger og innfallsvinkler opp mot kritisk vinkel i den binære utgangsmodellen. I tillegg viser de simulerte trasene at transmisjonen reduseres betraktelig i tilfellene med få lagperioder (tykke lag) når innfallsvinkelen øker.

## Kapittel 4

# Oppsummering og konklusjon

Hastigheten til akustiske bølger som propagerer i et horisontalt lagdelt, periodisk medium er sterkt avhengig av skalaen på geologien i mediet. Det har blitt slått fast at når den dominerende bølgelengden ( $\lambda$ ) til det innfallende signalet er mye større enn tykkelsen ( $h$ ) til lagperioden i det periodiske mediet,  $\lambda \gg h$ , så nærmer hastigheten seg den effektive mediumhastigheten ( $c_e$ ). I det andre ekstreme tilfellet, når  $\lambda \ll h$ , så er hastigheten til den propagerende bølgen svært nær mediets gjennomsnittshastighet ( $c$ ). Dette er også bekreftet i de numeriske simuleringene i denne oppgaven. Begge hastighetene varierer både med hensyn på materialforholdet (den relative volumandelen) og de fysiske egenskapene til komponentene i det periodiske mediet.

Når den effektive medium teorien gjør seg gjeldende, finnes det en udempet bølge som transmitterer gjennom det periodiske mediet. Den er lite endret i form i forhold til den innfallende bølgen, og propagerer med en hastighet som er nær den effektive mediumhastigheten ( $c_e$ ). Denne “effektive” bølgen består utelukkende av multippelenergi, fordi direktebølgen har forsvunnet som følge av transmisjonstap over grenseflatene. Den “effektive” bølgen er en forsinket bølge, bygget opp av interfererende kort-periodiske multipler fra de mange lagene i mediet.

For færre lagperioder (og tykkere lag) får vi dispersjon. Hastigheten som bølgene propagerer med blir frekvensavhengig. De lave frekvensene kommer da til syne i begynnelsen av bølgepakkene, mens de høyere frekvensene kommer inn senere. Dispersjonen er markant i skillet mellom de to regimene; den effektive medium teorien og stråleteorien. Amplitudene til førsteinnsatsene blir mindre når lag-



tykkelsene øker og  $N$  (antall lagperioder) blir mindre. Dette skyldes trolig mangel på eller utilstrekkelig konstruktiv interferens mellom multiplene som genereres i det periodiske mediet. Dette har igjen sammenheng med at multiplene blir mer lang-periodiske når  $N$  blir mindre og lagtykkelsene øker.

Periodiske medier opptrer som filtre på bølger som propagerer i dem. Bølgene kan kun propagere innenfor frekvensbånd hvor  $|\xi| < 1$ . Dette er de såkalte tillatte bånd. Frekvensbånd som korresponderer med  $|\xi| > 1$  er kjent fra teorien om bølgepropagering i krystaller som forbudte bånd. Frekvensbånd hvor  $|\xi| > 1$  resulterer da i flyktige (evanescent) bølgefelt, bølgefelt som avtar eksponentielt med propageringsavstanden. Transmisjonen  $|T_N| \rightarrow 0$  innenfor de forbudte frekvensbånd når antall lagperioder  $N \rightarrow \infty$ . Disse filtrene som representeres av det periodiske mediet består derfor følgelig av passbånd i frekvensbåndene hvor  $|\xi| < 1$  og stoppbånd der  $|\xi| > 1$ . En sammenligning og analyse av de numeriske simuleringene og filtrene representert av det binære mediet, for ulike innfallsvinkler, viser at det lavfrekvente passbåndet er svært stabilt når innfallsvinkelen øker opp mot kritisk vinkel. Men side passbåndene splittes opp og blir smalere ved økende innfallsvinkel. Når kritisk vinkel “kollapser” side-passbåndene, kun tynne “notcher” står igjen. For store  $N$  (og tynne lag) gir ikke dette noen merkbar effekt, fordi frekvensinnholdet til den innfallende bølgen ligger innenfor det lavfrekvente passbåndet. Men for små  $N$  (og tykke lag), ligger det lavfrekvente passbåndet og opptil flere av side passbåndene innenfor frekvensbåndet til den innfallende bølgen. Dette resulterer i kraftig redusert transmisjon i det binære mediet for små  $N$  (tykke lag) når innfallsvinkelen øker.

Jeg har prøvd å slå fast overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori ved  $R = \lambda_d/h$  forhold, hvor  $\lambda_d$  er den dominerende bølgelengden til det transmitterte signalet, mens  $h$  er tykkelsen til lagperioden i det periodiske mediet. Men overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori synes å være avhengig av både de fysiske egenskapene til komponentene i det periodiske mediet og materialforholdet (sammensetningen) mellom disse. I det binære mediet med P-bølgehastigheter  $c_1 = 2000$  m/s og  $c_2 = 6000$  m/s, bulktettheter  $\rho_1 = 2$  kg/dm<sup>3</sup> og  $\rho_2 = 6$  kg/dm<sup>3</sup> og lagperioder bestående av 1/4 medium 1 og 3/4 medium 2, henholdsvis, fant jeg at overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori ved normalt innfallende bølger skjer for  $R = 10$ . Denne verdien er konsistent med resultatet fra eksperimentet til Marion & Coudin (1992), hvor et binært medium med noe

høyere kontrast i akustisk impedans og et annet materialforhold ble benyttet. En endring av de fysiske egenskapene tilhørende medium 2 (satte  $c_2 = 4000$  m/s og  $\rho_2 = 4$  kg/dm<sup>3</sup>, henholdsvis) gav en lavere og mindre markant overgang ( $R \approx 7 - 8$ ) fra stråleteori til effektiv medium teori. Bølgene var normalt innfallende. Dette støtter arbeidet til Carcione et al. (1991) som konkluderte med at overgangen finner sted for lavere verdier av  $R$  ved lavere kontrast i akustisk impedans; overgangen er avhengig av reflektiviteten i mediet.

Det relative materialforholdet (sammensetningen) ble også endret, slik at lag-periodene bestod av 3/4 medium 1 og 1/4 medium 2. Denne situasjonen gav også en lavere og mindre markant overgang ( $R \approx 6 - 7$ ) fra stråleteori til effektiv medium teori. Dette strider mot konklusjonene til Marion et al. (1994), hvor de hevdet at overgangen er nesten uavhengig av volumandelen av de to komponentene i mediet.

Derimot synes overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori å være relativt upåvirket av innfallsvinkelen ( $\alpha_1$ ). Ulike innfallsvinkler ble testet, og gav overgangen fra stråleteori til effektiv medium teori rundt  $R = 10$ . Riktignok synes overgangen å skje for litt høyere verdier av  $R$  ved økende innfallsvinkel, men forskjellene er minimale.

# Bibliografi

- ABELÈS, F. (1950). Recherches sur la propagation des ondes électromagnétiques sinusoïdales dans le milieux stratifiés. *Ann. Phys. (Paris)*, **5**, 706–782.
- AKI, K. AND RICHARDS, P. G. (1980). *Quantitative Seismology, 1* (1 edition). W. H. Freeman and Co.
- BANIK, N. C., LERCHE, I., AND SHUEY, R. T. (1985a). Stratigraphic filtering, Part I: Derivation of the O’Doherty-Anstey formula. *Geophysics*, **50**, 2768–2774.
- BANIK, N. C., LERCHE, I., AND SHUEY, R. T. (1985b). Stratigraphic filtering, Part II: Model spectra. *Geophysics*, **50**, 2775–2783.
- CARCIONE, J. M., KOSLOFF, D., AND BEHLE, A. (1991). Long-wave anisotropy in stratified media: A numerical test. *Geophysics*, **56**, 245–254.
- GILBERT, F. AND BACKUS, G. E. (1966). Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, **31**, 326–332.
- HASKELL, N. A. (1953). The dispersion of surface waves in multilayered media. *Bull. Seis. Soc. Am.*, **43**, 17–34.
- HELBIG, K. (1984). Anisotropy and dispersion in periodically layered media. *Geophysics*, **49**, 364–373.
- HOVEM, J. M. (1995). Acoustic waves in finely layered media. *Geophysics*, **60**, 1217–1221.
- KRONIG, R. L. AND PENNEY, W. G. (1931). Quantum Mechanics of Electrons in Crystal Lattices. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **130**, 499–513.

- MARION, D., MUKERJI, T., AND MAVKO, G. (1994). Scale effects on velocity dispersion: From ray to effective medium theories in stratified media. *Geophysics*, **59**, 1613–1619.
- MARION, D. P. AND COUDIN, P. (1992). From ray to effective medium theories in stratified media: An experimental study. *62nd Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts*, 1341–1343.
- MELIA, P. J. AND CARLSON, R. L. (1984). An experimental test of P-wave anisotropy in stratified media. *Geophysics*, **49**, 374–378.
- MORLET, J., ARENS, G., FOURGEAU, E., AND GIARD, D. (1982a). Wave propagation and sampling theory-Part I: Complex signal and scattering in multilayered media. *Geophysics*, **47**, 203–221.
- MORLET, J., ARENS, G., FOURGEAU, E., AND GIARD, D. (1982b). Wave propagation and sampling theory-Part II: Sampling theory and complex waves. *Geophysics*, **47**, 222–236.
- O'DOHERTY, R. F. AND ANSTEY, N. A. (1971). Reflections on amplitudes. *Geophysical Prospecting*, **19**, 430–458.
- RIVLIN, T. J. (1990). *Chebyshev polynomials : from approximation theory to algebra and number theory* (2 edition). New York: Wiley.
- SPENCER, T. W., EDWARDS, C. M., AND SONNAD, J. R. (1977). Seismic wave attenuation in nonresolvable cyclic stratification. *Geophysics*, **42**, 939–949.
- SPRUNG, D. W. L., SIGETICH, J. D., WU, H., AND MARTORELL, J. (2000). Bound states of a finite periodic potential. *Am. J. Phys.*, **68**, 715–722.
- THOMSON, W. T. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Jour. Appl. Phys.*, **21**, 89–93.
- VELZEBOER, C. J. (1981). The theoretical seismic reflection response of sedimentary sequences. *Geophysics*, **46**, 843–853.
- WHITE, B., SHENG, P., AND NAIR, B. (1990). Localization and backscattering spectrum of seismic waves in stratified lithology. *Geophysics*, **55**, 1158–1165.

# Tillegg A

## Utleddninger

### A.1 Forholdet mellom gjennomsnittshastigheten og den effektive mediumhastigheten

Når lagtykkelsene  $h_1 = h_2$ , gir ligningene 2.1 og 2.3

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)$$

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)$$

$$\rho_e = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2)$$

Ved å sette inn for gjennomsnittshastigheten ( $c$ ) og den effektive mediumhastigheten ( $c_e = \sqrt{K_e/\rho_e}$ ), er forholdet mellom dem gitt ved

$$c/c_e = \frac{\left( \frac{2}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} \right)}{\sqrt{\frac{K_e}{\rho_e}}} = \frac{2\sqrt{\rho_e}}{\sqrt{K_e} \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)}}{\sqrt{\left( \frac{2}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}} \right)} \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(\rho_1 + \rho_2) \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)}}{\left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)} = \frac{\sqrt{\left( 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) \rho_1}}{\left( 1 + \frac{c_2}{c_1} \right) \frac{1}{c_2}}$$

Videre definerer vi hastighets- og tetthetskontrastene ved  $c_r = c_2/c_1$  og  $\rho_r = \rho_2/\rho_1$ , henholdsvis, slik at

$$\begin{aligned} c/c_e &= \frac{1}{(1 + c_r)} \sqrt{(1 + \rho_r) \left( \frac{\rho_1 c_2^2}{K_1} + \frac{\rho_1 c_2^2}{K_2} \right)} \\ &= \frac{1}{(1 + c_r)} \sqrt{(1 + \rho_r) \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)} \\ &= \frac{1}{(1 + c_r)} \sqrt{(1 + \rho_r) \left( c_r^2 + \frac{1}{\rho_r} \right)} \end{aligned}$$

Til slutt får vi uttrykket som er gitt i ligning 2.4

$$c/c_e = \frac{1}{(1 + c_r)} \sqrt{\frac{(1 + \rho_r) (1 + \rho_r c_r^2)}{\rho_r}}$$

## A.2 Unimodularitet

En kan vise at “stack-matrisen”  $\mathbf{S}$  er unimodulær ved å regne ut determinanten. Determinanten er gitt ved

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{S}) &= S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} \\ &= \frac{1}{(1 - r_{12}^2)^2} \left[ Z_1 \left( Z_2 - \frac{r_{12}^2}{Z_2} \right) \frac{1}{Z_1} \left( \frac{1}{Z_2} - r_{12}^2 Z_2 \right) - Z_1 \left( \frac{r_{12}}{Z_2} - r_{12} Z_2 \right) \frac{1}{Z_1} \left( r_{12} Z_2 - \frac{r_{12}}{Z_2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1 - r_{12}^2)^2} \left[ 1 - r_{12}^2 Z_2^2 - \frac{r_{12}^2}{Z_2^2} + r_{12}^4 - r_{12}^2 + \frac{r_{12}^2}{Z_2^2} + r_{12}^2 Z_2^2 - r_{12}^2 \right]$$

Til slutt får vi

$$\det(\mathbf{S}) = \frac{1}{(1 - r_{12}^2)^2} [1 - 2r_{12}^2 + r_{12}^4] = \frac{(1 - r_{12}^2)^2}{(1 - r_{12}^2)^2} = 1$$

som bekrefter at  $\mathbf{S}$  er unimodulær. Skulle derimot  $\mathbf{S}$  vært unitær, måtte den tilfredsstilt relasjonen  $\mathbf{S}^{-1} = (\mathbf{S}^*)^T$ . Disse kravene tilfredsstiller den ikke.

### A.3 Egenverdier

Egenverdiene til “stack-matrisen”  $\mathbf{S}$  er gitt ved løsningen av det karakteristiske polynomet.

$$\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (S_{11} - \lambda) & S_{12} \\ S_{21} & (S_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(S_{11} - \lambda)(S_{22} - \lambda) - S_{12}S_{21} = 0$$

$$S_{11}S_{22} - S_{11}\lambda - S_{22}\lambda + \lambda^2 - S_{12}S_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (S_{11} + S_{22})\lambda + (S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}) = 0$$

Sporet til en matrise er definert som summen av diagonalelementene. Vi bruker her betegnelsen  $\text{trace}(\mathbf{S})$ , og setter inn:

$$\lambda^2 - \text{trace}(\mathbf{S})\lambda + \det(\mathbf{S}) = 0$$

$$\lambda^2 - \text{trace}(\mathbf{S})\lambda + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{\text{trace}(\mathbf{S}) \pm \sqrt{(\text{trace}(\mathbf{S}))^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{\text{trace}(\mathbf{S})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{trace}(\mathbf{S})}{2}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{\text{trace}(\mathbf{S})}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{\text{trace}(\mathbf{S})}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Videre definerer vi

$$\xi = \frac{\text{trace}(\mathbf{S})}{2} = \frac{S_{11} + S_{22}}{2} = \frac{S_{11} + S_{11}^*}{2} = \Re(S_{11})$$

slik at egenverdiene blir

$$\lambda_{1,2} = \xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}$$

der  $\xi$  er en reell størrelse.

## A.4 Egenvektorer

Egenvektorene  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  tilhørende de to egenverdiene finnes som ikke-trivielle løsninger ( $\mathbf{x}$ ) av det homogene ligningsystemet

$$(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$



$$\begin{bmatrix} (S_{11} - \lambda) & S_{12} \\ S_{21} & (S_{22} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette ligningsystemet gir totalmatrisen med rekke-ekvivalens som angitt

$$\begin{bmatrix} (S_{11} - \lambda) & S_{12} & 0 \\ S_{21} & (S_{22} - \lambda) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} (S_{11} - \lambda) & S_{12} & 0 \\ 0 & (S_{22} - \lambda - \frac{S_{12}S_{21}}{S_{11} - \lambda}) & 0 \end{bmatrix}$$

Det er klart at uttrykket i element (2,2) må være lik null for at ikke-triviell løsning skal eksistere. Algebraisk sett er det trivielt å vise det, men vi tar det med her likevel.

$$\begin{aligned} S_{22} - \lambda - \frac{S_{12}S_{21}}{S_{11} - \lambda} &= \frac{(S_{22} - \lambda)(S_{11} - \lambda) - S_{12}S_{21}}{S_{11} - \lambda} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{11}\lambda - S_{22}\lambda + \lambda^2 - S_{12}S_{21}}{S_{11} - \lambda} \\ &= \frac{\det(\mathbf{S}) - \lambda(S_{11} + S_{22}) + \lambda^2}{S_{11} - \lambda} = \frac{1 - \lambda(S_{11} + S_{22}) + \lambda^2}{S_{11} - \lambda} = \frac{1 - 2\lambda\xi + \lambda^2}{S_{11} - \lambda} \\ &= \frac{1 - 2\xi(\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}) + (\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2})^2}{S_{11} - \lambda} \\ &= \frac{1 - 2\xi^2 \mp 2\xi i\sqrt{1 - \xi^2} + \xi^2 \pm 2\xi i\sqrt{1 - \xi^2} - (\sqrt{1 - \xi^2})^2}{S_{11} - \lambda} \\ &= \frac{1 - 2\xi^2 \mp 2\xi i\sqrt{1 - \xi^2} + \xi^2 \pm 2\xi i\sqrt{1 - \xi^2} - 1 + \xi^2}{S_{11} - \lambda} = 0 \end{aligned}$$

Dermed blir ligningsystemet (totalmatrisen) på følgende form

$$\begin{bmatrix} (S_{11} - \lambda) & S_{12} & 0 \\ S_{21} & (S_{22} - \lambda) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} (S_{11} - \lambda) & S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Når dette så skrives ut, får vi

$$(S_{11} - \lambda)x_1 + S_{12}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-S_{12}}{S_{11} - \lambda}x_2$$

Og løsningen er endelig gitt ved

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{-S_{12}}{S_{11} - \lambda} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} S_{12} \\ \lambda_1 - S_{11} \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} S_{12} \\ \lambda_2 - S_{11} \end{bmatrix}$$

## A.5 Diagonalisering

Nå kan “stack-matrisen”  $\mathbf{S}$  diagonaliseres. Det vil si at  $\mathbf{S}$  skrives som produktet av en matrise  $\mathbf{P}$  som består av egenvektorer til  $\mathbf{S}$ , en diagonalmatrise  $\mathbf{D}$  med de korresponderende egenverdiene og den inverse matrisen til  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}^{-1}$ ), altså

$$\mathbf{S} = \mathbf{PDP}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{12} & S_{12} \\ (\lambda_1 - S_{11}) & (\lambda_2 - S_{11}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\det(\mathbf{P})} \begin{bmatrix} (\lambda_2 - S_{11}) & -S_{12} \\ -(\lambda_1 - S_{11}) & S_{12} \end{bmatrix}$$

Her er determinanten til matrisen  $\mathbf{P}$  gitt ved

$$\det(\mathbf{P}) = S_{12}(\lambda_2 - S_{11}) - S_{12}(\lambda_1 - S_{11}) = S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Hensikten med diagonaliseringen er at  $\mathbf{Q} = \mathbf{S}^N$  blir lett å beregne, fordi

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}^N = \mathbf{PD}^N\mathbf{P}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{12} & S_{12} \\ (\lambda_1 - S_{11}) & (\lambda_2 - S_{11}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^N & 0 \\ 0 & \lambda_2^N \end{bmatrix} \frac{1}{\det(\mathbf{P})} \begin{bmatrix} (\lambda_2 - S_{11}) & -S_{12} \\ -(\lambda_1 - S_{11}) & S_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\det(\mathbf{P})} \begin{bmatrix} \lambda_1^N S_{12} & \lambda_2^N S_{12} \\ \lambda_1^N (\lambda_1 - S_{11}) & \lambda_2^N (\lambda_2 - S_{11}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda_2 - S_{11}) & -S_{12} \\ -(\lambda_1 - S_{11}) & S_{12} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{P})} \begin{bmatrix} S_{11} S_{12} (\lambda_2^N - \lambda_1^N) + S_{12} (\lambda_1^N \lambda_2 - \lambda_2^N \lambda_1) & S_{12}^2 (\lambda_2^N - \lambda_1^N) \\ (\lambda_1^N - \lambda_2^N) (\lambda_1 - S_{11}) (\lambda_2 - S_{11}) & \lambda_2^N (\lambda_2 - S_{11}) S_{12} - \lambda_1^N (\lambda_1 - S_{11}) S_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{S_{11} (\lambda_2^N - \lambda_1^N) - \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2^{N-1} - \lambda_1^{N-1})}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{S_{12} (\lambda_2^N - \lambda_1^N)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{(\lambda_1^N - \lambda_2^N) (\lambda_1 - S_{11}) (\lambda_2 - S_{11})}{S_{12} (\lambda_2 - \lambda_1)} & \frac{\lambda_2^N (\lambda_2 - S_{11}) - \lambda_1^N (\lambda_1 - S_{11})}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Setter vi inn for  $\lambda_1 \lambda_2 = \det(\mathbf{S}) = 1$  og benytter at  $\lambda_1 + \lambda_2 = S_{11} + S_{22}$  (fordi matrisene  $\mathbf{S}$  og  $\mathbf{D}$  er similære), og i tillegg

$$S_{21} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - S_{11})(\lambda_2 - S_{11})}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

får vi at

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{11} \frac{\lambda_2^N - \lambda_1^N}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{(\lambda_2^{N-1} - \lambda_1^{N-1})}{\lambda_2 - \lambda_1} & S_{12} \frac{(\lambda_2^N - \lambda_1^N)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ S_{21} \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\lambda_2^N (S_{22} - \lambda_1) - \lambda_1^N (S_{22} - \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_{11} \frac{\lambda_2^N - \lambda_1^N}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\lambda_2^{N-1} - \lambda_1^{N-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} & S_{12} \frac{(\lambda_2^N - \lambda_1^N)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ S_{21} \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2} & S_{22} \frac{(\lambda_2^N - \lambda_1^N)}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\lambda_2^{N-1} - \lambda_1^{N-1}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## A.6 Parameteren $\xi$

Parameteren  $\xi$  er definert ved  $\xi = \frac{1}{2}(S_{11} + S_{22})$ . Ved å sette inn for matriseelementene  $S_{11}$  og  $S_{22}$ , får vi

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - r_{12}^2)} \left[ e^{-i(\theta_1 + \theta_2)} - r_{12}^2 e^{-i(\theta_1 - \theta_2)} + e^{i(\theta_1 + \theta_2)} - r_{12}^2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \right]$$

$$= \frac{1}{2(1 - r_{12}^2)} [2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - 2r_{12}^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

Dette gir  $\xi$  som i ligning 2.29, det vil si

$$\xi = \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) - r_{12}^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{1 - r_{12}^2}$$

Videre omforming av uttrykket gir

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{(1 - r_{12}^2)} [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 - r_{12}^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - r_{12}^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2] \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \frac{1 + r_{12}^2}{1 - r_{12}^2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

Ved å sette inn for  $(1 + r_{12}^2)/(1 - r_{12}^2) = P$  (midlere impedanskontrast), får vi uttrykket som er gitt i ligning 2.26, altså

$$\xi = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - P \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

# Tillegg B

## MATLAB programmer

### B.1 Numerisk simulering, transmitterte bølgefelt

```
function[ ] = simulering(rho1,c1,rho2,c2,alfa);  
% function[ ] = simulering(rho1,c1,rho2,c2,alfa)  
% Algoritmen gir de transmitterte boelgefeltene fra det periodiske mediet.  
% Tetthetene rho1 & rho2 (kg/dm3), hastighetene c1 & c2 (m/s) og  
% innfallsvinkelen alfa (radianer) spesifiseres i input.  
% Antall lagperioder varierer fra N=96 (trase 1) til N=10 (trase 9).  
% Mediets totale tykkelse er konstant (384 m).  
% Lagperiodene består av 1/4 medium 1 og 3/4 medium 2.  
  
% diverse parametre, tid & frekvens:  
n = 8001; % antall samples  
T = 8; % varigheten til signalet  
dt = T/n; % samplingsintervall (tid);  
t = [0 : dt : T-dt]; % tidsaksen  
fn = 1/(2*dt); % Nyquist-frekvensen  
df = 1/T; % samplingsintervall (frekvens)  
f = [-fn+df/2 : df : fn-df/2]; % frekvensaksen  
w = 2*pi*f; % den angulaere frekvensen  
  
s = wavelet(30,n,T); % henter kausalt signal fra wavelet.m  
R = fft(s); % Fourier-spekteret til signalet
```

```

figure(1);
% -----
N = 96; % antall lagperioder
h1 = 96/N; h2 = 288/N; % lagtykkelser (i meter)
teta1 = w*h1*cos(alfa)/c1; % fasevinkel 1
gamma = asin(c2*sin(alfa)/c1); % utfallsvinkel
teta2 = w*h2*cos(gamma)/c2; % fasevinkel 2
Y1 = cos(alfa)/(rho1*c1); % akustiske admittanser
Y2 = cos(gamma)/(rho2*c2);
r1=(Y1-Y2)/(Y1+Y2); % refleksjonskoeffisienten
% matrise-elementer fra "stack-matrisen" S
S11 = (exp(-i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(-i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);
S22 = (exp(i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);
xi = .5*(S11 + S22); % parameteren xi
% Henter Chebyshev-polynomer fra algoritmen cheb.m
Q22 = S22.*cheb(xi,N-1) - cheb(xi,N-2); % matrise-element fra Q=S^N
F = 1./Q22; % filteret
F = ifftshift(F);
G = F.*R;
g = ifft(G);
g = fftshift(g);
n1 = (n-1)/2; g = [g(n1+1 : 1 : n) , g(1:1:n1)];
y = abs(g);
I = find(y>=0.01*max(y));
ankomstindex = I(1);
ankomsttid = t(ankomstindex);
g = g + 13*ones(1,length(g));
plot(t,real(g),'b',ankomsttid,real(g(ankomstindex)), 'ok'); hold on;
text(1.02,13,'1.', 'fontsize',20);
text(-0.14,13.12,'N = 96', 'fontsize',12);
clear y I ankomstindex ankomsttid
% -----

```

```

% -----
N = 72; % antall lagperioder

h1 = 96/N; h2 = 288/N; % lagtykkelser (i meter)

teta1 = w*h1*cos(alfa)/c1; % fasevinkel 1
gamma = asin(c2*sin(alfa)/c1); % utfallsvinkel beregnet fra Snells lov
teta2 = w*h2*cos(gamma)/c2; % fasevinkel 2

Y1 = cos(alfa)/(rho1*c1); % akustiske admittanser
Y2 = cos(gamma)/(rho2*c2);

r1=(Y1-Y2)/(Y1+Y2); % refleksjonskoeffisienten

% matrise-elementer fra "stack-matrisen" S
S11 = (exp(-i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(-i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);
S22 = (exp(i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);

xi = .5*(S11 + S22); % parameteren xi

% Henter Chebyshev-polynomer fra algoritmen cheb.m
Q22 = S22.*cheb(xi,N-1) - cheb(xi,N-2); % matrise-element fra Q=S^N

F = 1./Q22; % filteret
F = ifftshift(F);
G = F.*R;
g = ifft(G);
g = fftshift(g);
n1 = (n-1)/2; g = [g(n1+1 : 1 : n) , g(1:1:n1)];

y = abs(g);
I = find(y>=0.01*max(y));
ankomstindex = I(1);
ankomsttid = t(ankomstindex);

g = g + 11.5*ones(1,length(g));

plot(t,real(g),'b',ankomsttid,real(g(ankomstindex)),'ok'); hold on;
text(1.02,11.5,'2.', 'fontsize',20);
text(-0.14,11.62,'N = 72', 'fontsize',12);

clear y I ankomstindex ankomsttid
% -----

```

```

% -----
N = 48; % antall lagperioder

h1 = 96/N; h2 = 288/N; % lagtykkelser (i meter)

teta1 = w*h1*cos(alfa)/c1; % fasevinkel 1
gamma = asin(c2*sin(alfa)/c1); % utfallsvinkel beregnet fra Snells lov
teta2 = w*h2*cos(gamma)/c2; % fasevinkel 2

Y1 = cos(alfa)/(rho1*c1); % akustiske admittanser
Y2 = cos(gamma)/(rho2*c2);

r1=(Y1-Y2)/(Y1+Y2); % refleksjonskoeffisienten

% matrise-elementer fra "stack-matrisen" S
S11 = (exp(-i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(-i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);
S22 = (exp(i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);

xi = .5*(S11 + S22); % parameteren xi

% Henter Chebyshev-polynomer fra algoritmen cheb.m
Q22 = S22.*cheb(xi,N-1) - cheb(xi,N-2); % matrise-element fra Q=S^N

F = 1./Q22; % filteret
F = ifftshift(F);
G = F.*R;
g = ifft(G);
g = fftshift(g);
n1 = (n-1)/2; g = [g(n1+1 : 1 : n) , g(1:1:n1)];

y = abs(g);
I = find(y>=0.01*max(y));
ankomstindex = I(1);
ankomsttid = t(ankomstindex);

g = g + 10*ones(1,length(g));

plot(t,real(g),'b',ankomsttid,real(g(ankomstindex)),'ok'); hold on;
text(1.02,10,'3.', 'fontsize',20);
text(-0.14,10.12,'N = 48', 'fontsize',12);

clear y I ankomstindex ankomsttid
% -----

```



```

% -----
N = 36; % antall lagperioder

h1 = 96/N; h2 = 288/N; % lagtykkelser (i meter)

teta1 = w*h1*cos(alfa)/c1; % fasevinkel 1
gamma = asin(c2*sin(alfa)/c1); % utfallsvinkel beregnet fra Snells lov
teta2 = w*h2*cos(gamma)/c2; % fasevinkel 2

Y1 = cos(alfa)/(rho1*c1); % akustiske admittanser
Y2 = cos(gamma)/(rho2*c2);

r1=(Y1-Y2)/(Y1+Y2); % refleksjonskoeffisienten

% matrise-elementer fra "stack-matrisen" S
S11 = (exp(-i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(-i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);
S22 = (exp(i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);

xi = .5*(S11 + S22); % parameteren xi

% Henter Chebyshev-polynomer fra algoritmen cheb.m
Q22 = S22.*cheb(xi,N-1) - cheb(xi,N-2); % matrise-element fra Q=S^N

F = 1./Q22; % filteret
F = ifftshift(F);
G = F.*R;
g = ifft(G);
g = fftshift(g);
n1 = (n-1)/2; g = [g(n1+1 : 1 : n) , g(1:1:n1)];

y = abs(g);
I = find(y>=0.01*max(y));
ankomstindex = I(1);
ankomsttid = t(ankomstindex);

g = g + 8.5*ones(1,length(g));

plot(t,real(g),'b',ankomsttid,real(g(ankomstindex)),'ok'); hold on;
text(1.02,8.5,'4.', 'fontsize',20);
text(-0.14,8.62,'N = 36', 'fontsize',12);

clear y I ankomstindex ankomsttid
% -----

```

```

% -----
N = 24; % antall lagperioder

h1 = 96/N; h2 = 288/N; % lagtykkelser (i meter)

teta1 = w*h1*cos(alfa)/c1; % fasevinkel 1
gamma = asin(c2*sin(alfa)/c1); % utfallsvinkel beregnet fra Snells lov
teta2 = w*h2*cos(gamma)/c2; % fasevinkel 2

Y1 = cos(alfa)/(rho1*c1); % akustiske admittanser
Y2 = cos(gamma)/(rho2*c2);

r1=(Y1-Y2)/(Y1+Y2); % refleksjonskoeffisienten

% matrise-elementer fra "stack-matrisen" S
S11 = (exp(-i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(-i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);
S22 = (exp(i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);

xi = .5*(S11 + S22); % parameteren xi

% Henter Chebyshev-polynomer fra algoritmen cheb.m
Q22 = S22.*cheb(xi,N-1) - cheb(xi,N-2); % matrise-element fra Q=S^N

F = 1./Q22; % filteret
F = ifftshift(F);
G = F.*R;
g = ifft(G);
g = fftshift(g);
n1 = (n-1)/2; g = [g(n1+1 : 1 : n) , g(1:1:n1)];

y = abs(g);
I = find(y>=0.01*max(y));
ankomstindex = I(1);
ankomsttid = t(ankomstindex);

g = g + 7*ones(1,length(g));

plot(t,real(g),'b',ankomsttid,real(g(ankomstindex)),'ok'); hold on;
text(1.02,7,'5.', 'fontsize',20);
text(-0.14,7.12,'N = 24', 'fontsize',12);

clear y I ankomstindex ankomsttid
% -----

```

```

% -----
N = 18; % antall lagperioder

h1 = 96/N; h2 = 288/N; % lagtykkelser (i meter)

teta1 = w*h1*cos(alfa)/c1; % fasevinkel 1
gamma = asin(c2*sin(alfa)/c1); % utfallsvinkel beregnet fra Snells lov
teta2 = w*h2*cos(gamma)/c2; % fasevinkel 2

Y1 = cos(alfa)/(rho1*c1); % akustiske admittanser
Y2 = cos(gamma)/(rho2*c2);

r1=(Y1-Y2)/(Y1+Y2); % refleksjonskoeffisienten

% matrise-elementer fra "stack-matrisen" S
S11 = (exp(-i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(-i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);
S22 = (exp(i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);

xi = .5*(S11 + S22); % parameteren xi

% Henter Chebyshev-polynomer fra algoritmen cheb.m
Q22 = S22.*cheb(xi,N-1) - cheb(xi,N-2); % matrise-element fra Q=S^N

F = 1./Q22; % filteret
F = ifftshift(F);
G = F.*R;
g = ifft(G);
g = fftshift(g);
n1 = (n-1)/2; g = [g(n1+1 : 1 : n) , g(1:1:n1)];

y = abs(g);
I = find(y>=0.01*max(y));
ankomstindex = I(1);
ankomsttid = t(ankomstindex);

g = g + 5.5*ones(1,length(g));

plot(t,real(g),'b',ankomsttid,real(g(ankomstindex)),'ok'); hold on;
text(1.02,5.5,'6.', 'fontsize',20);
text(-0.14,5.62,'N = 18', 'fontsize',12);

clear y I ankomstindex ankomsttid
% -----

```

```

% -----
N = 15; % antall lagperioder

h1 = 96/N; h2 = 288/N; % lagtykkelser (i meter)

teta1 = w*h1*cos(alfa)/c1; % fasevinkel 1
gamma = asin(c2*sin(alfa)/c1); % utfallsvinkel beregnet fra Snells lov
teta2 = w*h2*cos(gamma)/c2; % fasevinkel 2

Y1 = cos(alfa)/(rho1*c1); % akustiske admittanser
Y2 = cos(gamma)/(rho2*c2);

r1=(Y1-Y2)/(Y1+Y2); % refleksjonskoeffisienten

% matrise-elementer fra "stack-matrisen" S
S11 = (exp(-i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(-i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);
S22 = (exp(i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);

xi = .5*(S11 + S22); % parameteren xi

% Henter Chebyshev-polynomer fra algoritmen cheb.m
Q22 = S22.*cheb(xi,N-1) - cheb(xi,N-2); % matrise-element fra Q=S^N

F = 1./Q22; % filteret
F = ifftshift(F);
G = F.*R;
g = ifft(G);
g = fftshift(g);
n1 = (n-1)/2; g = [g(n1+1 : 1 : n) , g(1:1:n1)];

y = abs(g);
I = find(y>=0.01*max(y));
ankomstindex = I(1);
ankomsttid = t(ankomstindex);

g = g + 4*ones(1,length(g));

plot(t,real(g),'b',ankomsttid,real(g(ankomstindex)),'ok'); hold on;
text(1.02,4,'7.', 'fontsize',20);
text(-0.14,4.12,'N = 15', 'fontsize',12);

clear y I ankomstindex ankomsttid
% -----

```

```

% -----
N = 12; % antall lagperioder

h1 = 96/N; h2 = 288/N; % lagtykkelser (i meter)

teta1 = w*h1*cos(alfa)/c1; % fasevinkel 1
gamma = asin(c2*sin(alfa)/c1); % utfallsvinkel beregnet fra Snells lov
teta2 = w*h2*cos(gamma)/c2; % fasevinkel 2

Y1 = cos(alfa)/(rho1*c1); % akustiske admittanser
Y2 = cos(gamma)/(rho2*c2);

r1=(Y1-Y2)/(Y1+Y2); % refleksjonskoeffisienten

% matrise-elementer fra "stack-matrisen" S
S11 = (exp(-i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(-i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);
S22 = (exp(i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);

xi = .5*(S11 + S22); % parameteren xi

% Henter Chebyshev-polynomer fra algoritmen cheb.m
Q22 = S22.*cheb(xi,N-1) - cheb(xi,N-2); % matrise-element fra Q=S^N

F = 1./Q22; % filteret
F = ifftshift(F);
G = F.*R;
g = ifft(G);
g = fftshift(g);
n1 = (n-1)/2; g = [g(n1+1 : 1 : n) , g(1:1:n1)];

y = abs(g);
I = find(y>=0.01*max(y));
ankomstindex = I(1);
ankomsttid = t(ankomstindex);

g = g + 2.5*ones(1,length(g));

plot(t,real(g),'b',ankomsttid,real(g(ankomstindex)),'ok'); hold on;
text(1.02,2.5,'8.', 'fontsize',20);
text(-0.14,2.62,'N = 12', 'fontsize',12);

clear y I ankomstindex ankomsttid
% -----

```

```

% -----
N = 10; % antall lagperioder

h1 = 96/N; h2 = 288/N; % lagtykkelser (i meter)

teta1 = w*h1*cos(alfa)/c1; % fasevinkel 1
gamma = asin(c2*sin(alfa)/c1); % utfallsvinkel beregnet fra Snells lov
teta2 = w*h2*cos(gamma)/c2; % fasevinkel 2

Y1 = cos(alfa)/(rho1*c1); % akustiske admittanser
Y2 = cos(gamma)/(rho2*c2);

r1=(Y1-Y2)/(Y1+Y2); % refleksjonskoeffisienten

% matrise-elementer fra "stack-matrisen" S
S11 = (exp(-i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(-i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);
S22 = (exp(i*(teta1+teta2)) - (r1^2)*exp(i*(teta1-teta2)))/(1 - r1^2);

xi = .5*(S11 + S22); % parameteren xi

% Henter Chebyshev-polynomer fra algoritmen cheb.m
Q22 = S22.*cheb(xi,N-1) - cheb(xi,N-2); % matrise-element fra Q=S^N

F = 1./Q22; % filteret
F = ifftshift(F);
G = F.*R;
g = ifft(G);
g = fftshift(g);
n1 = (n-1)/2; g = [g(n1+1 : 1 : n) , g(1:1:n1)];

y = abs(g);
I = find(y>=0.01*max(y));
ankomstindex = I(1);
ankomsttid = t(ankomstindex);

g = g + ones(1,length(g));

plot(t,real(g),'b',ankomsttid,real(g(ankomstindex)),'ok'); hold on;
text(1.02,1,'9.','fontsize',20);
text(-0.14,1.12,'N = 10','fontsize',12);

clear y I ankomstindex ankomsttid
% -----

```

```
axis([-0.15 1 0 14]);  
set(gca,'ytick',[ ],'xtick',[0:1:1]);  
xlabel('Tid (s)','fontSize',16,'FontWeight','bold');  
ylabel('Amplitude','fontSize',16,'FontWeight','bold');
```

## B.2 Kausalt signal

```
function[s] = wavelet(fs,n,T);  
% function[s] = wavelet(fs,n,T)  
% Algoritmen genererer et kausalt signal fra nullfase Ricker-wavelet.  
% Input parametre:  
% fs - senterfrekvensen (i Hz) til Ricker-waveleten.  
% n - antall samples i tid.  
% T - signalets varighet  
  
dt = T/n; % samplingsintervall  
t = [-T/2 + dt/2 : dt : T/2 - dt/2]; % tidsaksen  
a = (pi*fs)^2;  
h = (1 - 2*a*(t.^2)).*exp(-a*(t.^2)); % signalet h(t), nullfase Ricker-wavelet  
y = find(h>0);  
s = [zeros(1,1) , h(y(1):1:length(h)) , zeros(1,y(1)-2)]; % signalet s(t)  
t=[0 : dt : T-dt]; % ny tidsakse
```



### B.3 Chebyshev polynom (second kind)

```
function[Un] = cheb(x,n)
% function[Un] = cheb(x,n)
% Algoritmen gir Chebyshev-polynom (second kind) av grad n.
% Vektoren x og graden n av polynomet spesifiseres i input.
% Chebyshev-polynomet er definert rekursivt ved  $U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$ .
% Startverdiene er  $U_0(x) = 1$  og  $U_1(x) = 2x$ .
m = length(x); % lengden av vektoren x
U0 = ones(1,length(x)); % startverdier
U1 = 2*x;
for i = 1:1:n-1
    Un = (2*x.*U1) - U0;
    U0 = U1;
    U1 = Un;
end
Un = U1; % output: Chebyshev-polynom (second kind) av grad n
```