

Modellering av Antropogenisk Allee Effekt (AAE)



Lucio Skeie-Rubio
Mathematics Department
Universitet i Bergen

13. november 2017

Innhold

1	Introduksjon:	2
1.1	Problemstilling	2
1.2	Bakgrunn	2
1.3	Allee-effekt	3
2	Analyse av Dynamiske System	6
2.1	Ikkje-Dimensionalisering	6
2.2	Analyse av dynamiske system	7
2.3	Numerisk løysning av Ode 45 ved hjelp av Matlab	12
3	Metode: Modellar, Oppbygging og Analyse	13
3.1	Antropogenisk Allee Effekt (AAE)	13
3.2	Antropogenisk Allee Effekt (AAE) med tidsforseinking	17
3.3	Nedre Allee-terskel med grense mot utrydding	25
4	Diskusjon	30
5	Konklusjon	32
A	Program listing	34

Kapittel 1

Introduksjon:

1.1 Problemstilling

Det klassiske synet på populasjonsdynamikk fastset at ein populasjon blir påverka av biologiske faktorar som fødselsrate, dødsrate og abiotiske faktorar. Det vil alltid vere eit dynamisk system og bestanda vil stort sett vekse eksponentielt til den grensa for kor mykje plass eller næring som er tilgjengeleg, og deretter vil veksten flate ut etter kvart som dødsraten stig som eit resultat av svolt og plassmangel, og/eller fødselsraten søkk på grunn av det same. Så dette vil seie at bestandet vil klare seg betre og overleve med lav tettheit. Men det skjer motsatt i røynda. Med stor tettheit minkar vanlegvis fødselsraten og dødsraten momentant, og aukar når ein populasjon er mindre og dette stemmer med den logistiske kurva og Malthus-likninga [4], men samarbeid og ei tett samling av individ gjer bestandet ein større sjanse til å overleve. Men kva vil skje når bestandets tettheit er lav? Me vil tru at bestandet får større sjanse til å overleve sidan det er færre individ per arealeining, men det skjer motsatt. Då innfører me Allee-effekt-omgrepet. I denne oppgåva skal me studere og analysere den menneskeskapte Allee-effekten i forhold til dei klassiske Lotka-Volterra-likningane. Deretter skal me legge til tidsparameter for å undersøkje kva som skjer med byttebestandet etter ein pause uten jakt. Til slutt legg me Allee-terkel med grense mot utrydding til vår Allee-effekt likning.

1.2 Bakgrunn

Analyse av ikkje-linære system har vore eit studieobjekt i matematikken, og har vore i bruk av teoretisk økologi sidan 1900 tallet. Innanfor teoretisk økologi, har forholdet rovdyr/bytte-tilhøve vore hovedtemaet. I utviklinga av den matematikken innanfor økologien har me dei to mest kjende grunnleggarane : Alfred John Lotka (1880-1949) og Vito Volterra(1860-1946). Dei er kjende for Lotka-Volterra-Likningane som er ein økologisk matematisk modell, som samtidig speglar tilstandane til to ulike bestand. Lotka-Volterra-likninga for rovdyr/bytte-tilhøve, som ofte berre vert kalla Lotka-Volterra-likninga, tek for seg forholdet mellom byttedyr og rovdyr, og korleis det verkar inn på bestanddynamikken [2]. Her tyder x byttedyr-bestand og y rovdyr-bestand, medan a er leite- og åtaks-effektiviteten til predatoren :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + \gamma x) \end{cases} \quad (1.1)$$

x , y er byttebestandet og rovdyrbestandet[3].

- Når det ikkje finst nokon rovdyr, veks byttebestandet ax som er bestandstilvekst gonger bestandstorleik :

$$\frac{dx}{dt} = xa$$

gjer som loysning eksponensiell vekst:

$$x = Ae^{ax}$$

her er $a > 0$, A er ein konstant, og ingen rovdyr påverker, d.v.s. at $y = 0$

- Når det ikkje finst noko bytte-tilbøve ($x = 0$), vil rovdyr-bestandet dø ut i mangel på mat. Det vil seie :

$$\frac{dy}{dt} = -cy$$

gjer som løysning eksponensiell reduksjon:

$$y = Be^{-cy}$$

her er $c > 0$ (c er dødsraten til rovdyr-bestandet) og B er ein konstant.

- αy viser at byttedyr-bestandet minkar proporsjonelt med rovdyr-bestandet y . γ står for kor gode rovdyra er til å omsetja inntekte føde. Antall trefningar mellom rovdyr og byttedyret er proporsjonal med multiplikasjonen av deira populasjonar. Kvar gong dei møtest, vil bestandet til rovdyr vekse γxy , og bestandet til byttedyret vil minke $-\alpha y$. Derfor stig vekstraten til rovdyr γxy mens vekstraten til byttedyret minkar $-\alpha y$ ($\gamma, \alpha > 0$, er konstantar).

Rovdyr/byttedyr-modellen er ein ganske grei modell, og den er særleg avgrensa i sitt bruksområde. Bestanda vil ofte ikkje følgje denne modellen med stor og låg tettleik, og ein av dei enkle grunnane er at rovdyr/bytte-tilhøve berre er ein del av eit større økosystem og både bestanda er påverka av konkurranse, andre rovdyr, sjukdom, fysiske tilhøve og så vidare [4]. Og ein hovedårsak som spelar mot bestanda si overleving er Allee-effekt.

1.3 Allee-effekt

Allee-effekt var i bruk for fyrste gong på 50-talet etter Warder Clyde Allee's forskning. Warder Clyde Allee (1885-1955) ga namn til effekten i læreboka i økologi utgitt i 1949 (Principles of animal ecology) [1]. Allee viste at gullfisk hadde større momentan relativ vekstrate dersom det var mange fisk i akvariet, samanlikna med eit akvarium med lav tettleik av individ per arealeining. Det er ikkje store aggregerte ansamlingar av individ og store populasjonar som gjer liten vekst, men derimot i små populasjonar med stor avstand mellom individa [1]. Dette betyr at gullfiskbestandet veks fortare i akvarium med fleire individ enn i ein dam med færre individ. Då konkluderte han med at aggregeringa og samhaldet var viktig for at ein art overlever og for at eit samfunn blir utvikla. Allee-Effekt var innført på 50-talet når ein begynte å forske i konkurranse blant, og innanfor artar som ein del av økologien.

Allee-effekt er avgrensing i vekst som oppstår i små populasjonar med låg tettleik av individ per arealeining. M.a.o er den negative bestandsveksten observert ved låge bestandstettleikar. Allereie Charles Darwin observerte at store populasjonar er betre beskytta mot rovdyr og utrydding. Individua konkurrerer om mat og ikkje minst, plass (ressursane); men det er også ein fin assosiasjon og samheng mellom populasjonsstorleik, overleving, reproduksjon, levedyktigheit, og risikoen for å bli tatt av rovdyr er mindre i ein flokk. Det er samarbeidsforsvar, til dømes kan fleire augo og øyre varsle om fare, og samarbeid om for-rasjering som gjer enkeltindividua meir tid til å ete [1]. I motsetning til store populasjonar, i område med små populasjonar med store avstandar mellom individ, kan begrense den reproduktive prosessen, og då vil det oppstå innavl med dødeleg effekt som gjer Allee-effekt.

I motsetning til naturleg Allee-effekt, har menneske forårsaka ein kunstig Allee-effekt p.g.a. menneskas grådighet for rare, eksotiske artar, og dermed aukar prisen. Denne effekten blir kalla Antropogenisk Allee Effekt (AAE).

Antropogenisk Allee-effekt (AAE) : Antropogenisk Allee-effekt (AAE) er henta frå *Rarity Value and Species Extinction : The Anthropogenic Allee Effect* [3]. Allee-effekt skapt av menneske: Antropogenisk Allee-effekt (AAE) er ein kunstig effekt kor menneskas grådighet driv artane til utrydding. For å setje AAE opp som ei likning, må me ha to hypotesar: (i) Det er den positive korrelasjonen mellom artens raritet og verdi. (ii) denne korrelasjonen sørger for at det er ein stor etterspørsel og at det lønner seg å jakte eller å avle arten [3]. Byttedyr-bestandet x veks i samsvar med den logistiske likninga med rate r og berevne k når det er verken avling eller jakt. Byttedyr-bestandet er jakta på ein rate som er proporsjonal til populasjonen x og jakt-innsats E . Jakt-innsats E er antatt å vere proporsjonal til økonomisk rente eller gevinst, som er lik differansen mellom prisen for jaktens kostnad .

Me ser at[3]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - qEx \\ \frac{dE}{dt} = \alpha(-cE + pqEx) \end{cases} \quad (1.2)$$

kor q er fangeferdigheit, α er mål for kor fort jegeren reagerer på endringar i gevinsten, p er prisen som er betalt per stykke som er avla eller jakta, c er kostnaden av eit stykke som er jakta, og k er den økologiske bæreevna.

I *Rarity Value and Species Extinction : The Anthropogenic Allee Effect* [3]-artikkel finn me at $pqk > c$, og når dette skjer, då har systemet eit globalt stabilt likevektspunkt (d.v.s. asymptotisk stabilt likevektspunkt).

Byttedyr-bestandet blir aldri utdødd dersom kostnaden per jakta individ i tidseining ($\frac{c}{qx}$) blir veldig høg når x går mot null.

Me legg om likninga (1.2) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(r - \frac{rx}{k} - qE) \\ \frac{dE}{dt} = E\alpha(-c + pqx) \end{cases} \quad (1.3)$$

Her har me fått likninga til vår fyrste modell(AAE). Då ser me at for at (1.3) stemmer med Lotka-Volterra-likninga (3.2) må: $y = E$, $C = \alpha c$, $\gamma = \alpha pq$. I tillegg har me $\frac{-rx}{k}$ som tyder på at det er konkurranse for tilværet blant individ av same art x . Denne konkurransen er negativ for bestandets vekst. Ut frå det kan me seie at $-\frac{rx}{k}$ har ein hemmande effekt over x . Prisen stig med sjeldenheita (d.v.s lav x). Dette fører til at det er fleire på jakt, så dyrebstanden søkk. Dette fører dyrebstanden til utrydding. I vår modell i denne oppgåva held me p konstant.

Antropogenisk Allee-effekt (AAE) med tidsforskyving. Kva vil skje om jakta vil bli stoppa for å gje litt tidsrom til byttebestandet til å ta seg opp igjen? Av den grunn legg me til ein ny parameter Δt som representerer tidsforskyving, tidsforseinking, eller ei lita forstyring for det tidsintervallet. For å nå det målet brukar me Taylors rekkeutvikling kor me legg tidsforskyvingsdelen :

$$x = x(t - \Delta t) \quad (1.4)$$

for x i delen $\frac{dE}{dt}$ av likninga (1.2) :

$$\frac{dE}{dt} = \alpha E[-c + pqx(t - \Delta t)] \quad (1.5)$$

V.h.a. Taylor rekkeutvikling, blir likninga (1.4):

$$x(t - \Delta t) = x(t) + \Delta t \frac{dx}{dt} + o(\Delta t^2) \quad (1.6)$$

Så blir likninga 1.3:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - qEx \\ \frac{dE}{dt} = E\alpha(-c + pqx[1 + \Delta t(r - \frac{rx}{k} - qE)]) \end{cases} \quad (1.7)$$

me antek at den kvadratiske termen er for liten. Her har me fått likninga til vår andre modell(Antropogenisk Allee-effekt (AAE) med tidsforskyving).

Allee-terskel med grense mot utrydding. Her skal me legge inn Allee-terskelen :

$$\frac{x}{A} - 1 \quad (1.8)$$

s.a. likninga 1.7 blir :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k})(\frac{x}{A} - 1)qEx \\ \frac{dE}{dt} = E\alpha(-c + pqx) \end{cases} \quad (1.9)$$

der A er eit kritisk punkt for storleik. Byttedyr-bestandet veks når A er mindre enn x og k er større enn x , dvs $A < x < k$. Byttedyr-bestandet søkk når A er større enn x , dvs $0 < x < A$. I dette siste tilfellet blir byttedyr-bestandet utrydda. Her har me fått likninga til vår tredje modell.

Til saman har me tre modellar i denne masteoppgåva:

1.- *Antropogenisk Allee-effekt (AAE)* :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(r - \frac{rx}{k} - qE) \\ \frac{dE}{dt} = E\alpha(-c + pqx) \end{cases}$$

2.- *Antropogenisk Allee-effekt (AAE) med tidsforskyving*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - qEx \\ \frac{dE}{dt} = E\alpha(-c + pqx[1 + \Delta t(r - \frac{rx}{k} - qE)]) \end{cases}$$

3.- *Allee-terskel med grense mot utrydding*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k})(\frac{x}{A} - 1)qEx \\ \frac{dE}{dt} = E\alpha(-c + pqx) \end{cases}$$

Kapittel 2

Analyse av Dynamiske System

2.1 Ikkje-Dimensionalisering

Me kan lære om ei eining for ein fysikalsk storleik ved å forstå forholdet til eininga med andre fysikalske storleikar, og det er viktig å hugsa på at einingene er pålagt naturlovene. I dette tilfellet har me ganske mange variablar i våre likningar, og det kan vere lurt å gjere desse likningene dimensjonallause og å nytta forholdet blant einingar og fysikalske storleikar. For å forstå dette skal me nytte Bechingsham- π teorem .

Buckingham- π teorem

I anvendt matematikk er dette teoremet eit viktig punkt i dimensjonal analyse. Dette teoremet fastset at ei likning med antall n fysikalske variablar kan bli skriva om i ei likning med $p = n - k$ dimensjonallause parametrar $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ som er bygd frå dei opprinnelege variablane (kor k er antall fysikalske dimensjonar). Antall dimensjonallause termar som me kan få, er lik nulliteten for den dimensjonale matrisa, og k er rank. Matematisk sagt, for at me har ein fysikal meningsfull likning så

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0; \quad (2.1)$$

kor q_j er dei n -fysikalske variablane, og dei er uttrykte i k -uavhengige fysikalske einingar. Me kan omskrive likninga (2.1) som :

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) = 0; \quad (2.2)$$

kor π_j er dimensjonallause parametrar som er bygd frå q_j er ved $p = n - k$ dimensjonallause likningar. Dei er kalt for π -grupper av forma :

$$\pi_i = \pi_1^{a_1}, \pi_2^{a_2}, \dots, \pi_n^{a_n}, \quad (2.3)$$

kor disse potensstala a_i er rasjonelle tal(\mathbb{Q}) [6].

Me kan ta Lokta-Volterra-likninga(3.2) som døme, for ikkje-dimensjonalisering av likninga :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + \gamma x) \end{cases} \quad (2.4)$$

Så kan me kome til følgande dimensjonal analyse: a som karakteristisk eining av $x(x = a\bar{X})$, T som karakteristisk eining av $t(t = T\tau)$, Υ som karakteristisk eining av $y(y = \Upsilon\bar{Y})$, og kor \bar{X} , τ og \bar{Y} er dimensjonallause parametrar. Så blir vår likning (2.4) redusert til:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{X}}{d\tau} = T\bar{X}(a - \alpha\Upsilon\bar{Y}) \\ \frac{d\bar{Y}}{d\tau} = T\bar{Y}(-c + \gamma a\bar{X}) \end{cases} \quad (2.5)$$

Me vel at den karakteristiske tidsskalaen: $T = \frac{1}{c}$, at den karakteristiske Υ -skalaen: $\Upsilon = \frac{c}{\alpha}$, og at a -skalaen: $a = \frac{c}{\gamma}$. For å forenkle vår likning (2.5), er det lurt å få eit dimensjonlaust tal:

$$\psi = \frac{1}{\gamma} \quad (2.6)$$

Så ser vår likning (2.5) ut slik:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{X}}{d\tau} = \bar{X}(\psi - \bar{Y}) \\ \frac{d\bar{Y}}{d\tau} = \bar{Y}(-1 + \bar{X}) \end{cases} \quad (2.7)$$

Me ser at likninga (2.7) er dimensjonlaus og redusert til ein parameter.

2.2 Analyse av dynamiske system

Eit dynamisk system har ein bestemt tilstand som er avhengig av ei innsamling av reelle tal eller av eit bestemt intervall. Dette betyr at når tal-innsamlinga forandrar seg, så forandrar tilstanden seg. Me ser at dette systemet er deterministisk. I matematikken er **autonome system** eit system av ordinære differensiallikningar som ikkje er eksplisitt avhengig av tid.:

$$\frac{d}{dx}X(t) = F(X(t)), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (2.8)$$

kor X tek verdier i n -dimensjonale euklidiske rom, og t er tida i dette tilfellet. I følge Eksistens og Eintidighet - teorem [2], vil systemet (2.8) ha ei løysning og den løysninga er unik så lenge $F(X(t))$ er ein kontinuerlig funksjon og har kontinuerlege partielle deriverte i eit opent interval R i x -aksen, og \underline{x}_0 er eit punkt i R -interval. Dei autonome systema er nær forbunde med dei dynamiske systema. Dei autonome systema kan bli omforma til dynamiske system og omvendt.

Jakobimatrise : Let funksjonen $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, kor ($m > n$)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Så lenge $F(x(t))$ er kontinuerleg og har kontinuerlege partielle deriverte. Jakobimatrisen ser slik ut:

$$J = \frac{d}{dx_j} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

kor $i = 1, 2, \dots, n$

Det er alltid like mange rader i matrisa som vektorfeltet har komponentar og like mange kolonner som det er frie variablar i vektorfeltet. **Jakobmatrisa** er den deriverte til vektorfeltet $F(x)$ der $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($m > n$). Sidan vektorfeltet er derivert komponentvis, følger det at føresetnadene for deriverbarheit av skalarfelt er direkte overførbare til vektorfelt. For at eit vektorfelt skal vere deriverbart i eit punkt er det tilstrekkeleg at alle vektorfeltas komponentar, som er funksjonar av fleire variablar, eksisterer i ein åpen ball om punktet og at alle partielle deriverte til samtlege av vektorfeltets komponentar er kontinuerlege i punktet.

I ikkje-lineære system er det nesten umogleg å finne eksplisitte eller implisitte løysningar, men likevel er det ei

kvalitativ numerisk tilnærming [7].

Likevektspunkt og stabiliteten let det fyrste ordens ordinære differensiale likning :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

x_j nullcliner er ei gruppe av punkt s.a. $f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Det tangentskjæringspunktet av alle nullklinene er kalla for likevektspunkt eller fikspunkt. Dvs :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Nær ved eit fiksert punkt $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, liknar det ikkje-lineære systemets dynamikk på det lineære systemets dynamikk (kvalitativ) med Jakobimatrise $J(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ som gjer eigenverdier λ_j s med ikkje-null reell del. For **Det autonome ikkje-lineære systemet** i $2D$, let

$$\begin{cases} x'(t) = F(x, y) \\ y'(t) = G(x, y) \end{cases} \quad (2.11)$$

med det fikserte punktet (x^*, y^*) . Me vil finne det næraste lineære systemet når (x, y) er i nærleik av (x^*, y^*) . Då treng me å tilnærme funksjonane $F(x, y)$, $G(x, y)$ om likevektspunktet (x^*, y^*) ved tangenten rundt det fikserte punktet. Frå Calculus, veit me at når (x, y) er i nærleiken av (x^*, y^*) , blir det ikkje-lineære systemet :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(x(t)) = F(x, y) \approx F(x^*, y^*) + \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \frac{d}{dx}(y(t)) = G(x, y) \approx G(x^*, y^*) + \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \end{cases} \quad (2.12)$$

Sidan (x^*, y^*) er eit fiksert punkt, så har me at $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$. Så blir likninga 2.13:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(x(t)) = F(x, y) \approx \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \frac{d}{dx}(y(t)) = G(x, y) \approx \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \end{cases} \quad (2.13)$$

Og dette er eit lineær system. Så blir Jakobimatrisa i det fikserte punktet (x^*, y^*) :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Så blir likninga (2.11):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix}$$

Eigenverdier og egenvektorer Viss me søker ei løysning av likninga (2.11) på forma:

$$y = \underline{v}e^{\lambda t} \quad (2.14)$$

kor \underline{v} er egenvektor og λ er eigenverdi, fører dette til eigenverdiproblem:

$$\tilde{J}\underline{v} = \lambda\underline{v}, \quad (2.15)$$

og denne gjer den generelle løysninga:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v}_2. \quad (2.16)$$

Eigenvektorar og eigenverdiar blir nytta i stabilitetsanalyse av differensiallikningar via Jakobimatriza med partiellderiverte, i prinsipalkomponentanalyse ved multivariabel statistikk, eller i generelle likevektsstudier. Ut frå om eigenverdiane er reelle eller komplekse tal, og forteikna på eigenverdiane så kan ein seie noko om stabiliteten ved likevektspunkta [6].

Det er forskjellige typar *likevektspunkt*, og eit *ikkje-linear system* kan ha fleire likevektspunkt. Me klassifiserer likevektspunkt inn i følgande grupper:

- Senter, senteren er veldig sensitiv for ikkje-linearitetar, og me kan ikkje konkludera om stabilitet, så må andre metodar takast i bruk.
- Stabil Node
- Stabil Spiral
- Ustabil Node
- Ustabil Spiral
- Sadelpunkt
- Degenerert stabil node
- Degenerert ustabil node

For å finne ut kva slags likevektspunkt eit system har og sine eigenverdiar, er det tilstrekkeleg å rekne på Jakobi-matriza J :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^*}{\partial x} & \frac{\partial F^*}{\partial y^*} \\ \frac{\partial G^*}{\partial x} & \frac{\partial G^*}{\partial y^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Så rekner me ut følgande verdiar:

$$\begin{aligned} \tau &= \text{trace}(J) = a + d \\ q &= ad - cb \\ \Delta &= \tau^2 - 4q \end{aligned}$$

kor eigenverdiane me får av :

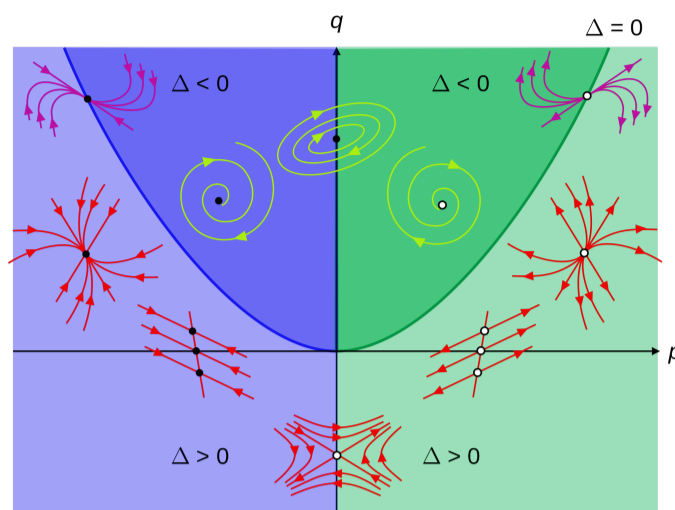
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\Delta}) \quad (2.17)$$

Ut frå dette kan me bestemme typen likevektspunkt via følgande tabell:

Senter	$\tau = 0$	$q > 0$	$\Delta < 0$	$Re(\lambda_{1,2}) = 0$
Stabil node	$\tau < 0$	$q > 0$	$\Delta > 0$	$(\lambda_{1,2}) < 0$
Stabil spiral	$\tau < 0$	$q > 0$	$\Delta < 0$	$Re(\lambda_{1,2}) < 0$
Ustabil node	$\tau > 0$	$q > 0$	$\Delta > 0$	$(\lambda_{1,2}) > 0$
Ustabil spiral	$\tau > 0$	$q > 0$	$\Delta < 0$	$Re(\lambda_{1,2}) > 0$
Sadelpunkt	$\tau > 0$	$q < 0$	$\Delta > 0$	$\lambda_{1,2}$ motsatte forteikn
Degenerert stabil node	$\tau < 0$	$q > 0$	$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$
Degenerert ustabil node	$\tau > 0$	$q > 0$	$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

Tabell 2.1: Klassifikasjon av Lineære system [4].

Vi kan sjå ei oversikt over alle mulighetene i følgande bilde:



(a)

Figur 2.1: Stabilitets område. Denne figuren er henta frå [5].

Etter at me har funne eigenverdiane $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, finn me eigenvektorane: Det vil seie:

$$(\tilde{J}(x^*, y^*) - \lambda_i \tilde{I}_n) \underline{v} = \underline{0} \quad (2.18)$$

kor \underline{v} er lik $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Me kan ta likninga (2.7) som døme for å få ein bedre oversikt over stabiliteten:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{X}}{d\tau} = \bar{X}(\psi - \bar{Y}) \\ \frac{d\bar{E}}{d\tau} = \bar{Y}(-1 + \bar{X}) \end{cases} \quad (2.19)$$

kor

$$\psi = \frac{1}{\gamma} \quad (2.20)$$

γ er fangeferdigheita av rovdyr. Her me får likevektspunkta : $(0, 0)$, $(1, \psi)$.

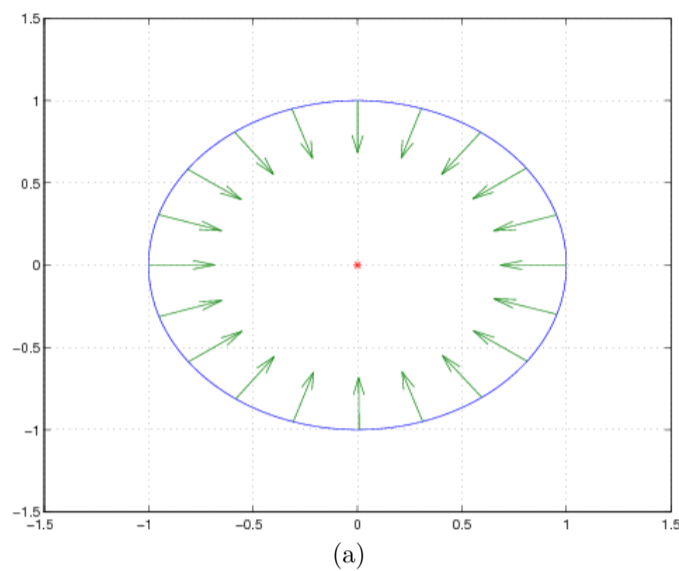
Likevektspunkt	Eigenverdier : λ_1, λ_2	Eigenvektorar: v_1, v_2	Stabilitet
$(0, 0)$	ψ	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	eit ustabil
	-1	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	sadelpunkt
$(1, \psi)$	$\sqrt{\psi}i$	$\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}$	eit senter
	$-\sqrt{\psi}i$	$\begin{bmatrix} -i \\ -i \end{bmatrix}$	

Kor $i = \sqrt{-1}$ (komplekst tal).

Grensesyklus og Poincaré-bendixson teorem

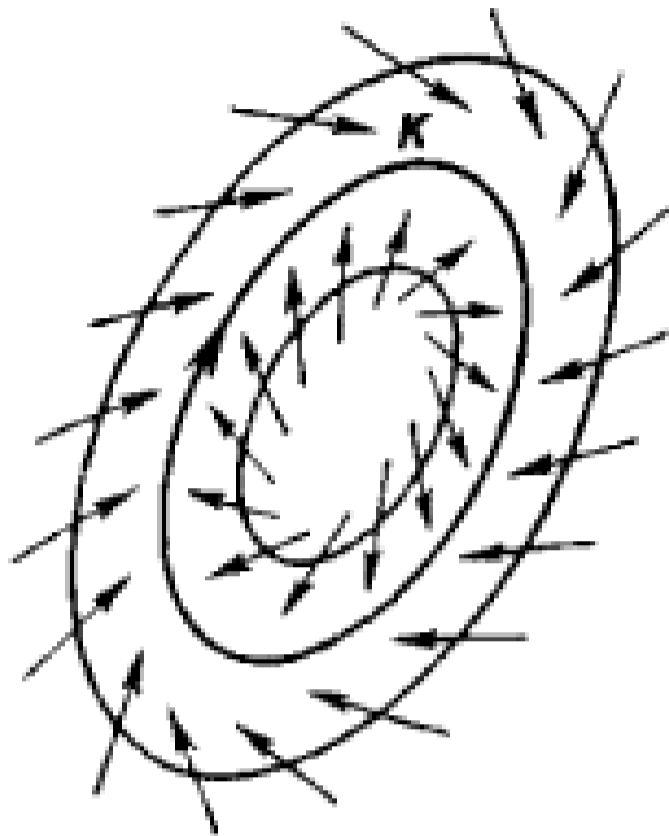
Studiet om **Grensesyklus** var innført av *Henri Poincaré* (1854 – 1912). I dynamiske system i eit todimensjonalt faserom er ein lukka syklus eller ein grensesyklus ('limit cycle') med eit lukka trajektorium i ein periodisk bane. *Poincaré – Bendixson*-teoremet kan brukast til å prediktere om det er ein lukka syklus kor naboløysningar ikkje

er lukka [2]. *Poincaré – Bendixson*-teoremet er det viktigaste teoremet i teksten. For å forklare teoremet, skal me opparbeide oss litt motivasjon og intuisjon rundt det, og denne forklaringa er oppbygd og basert på [2]. Det er ofte slik at me ynskjer å finne grensesyklus og/eller likevektspunkt til eit dynamisk system, men dette er vanskeleg direkte frå uttrykket for systemet. Ein måte me kan vise eksistens på, er ved følgande prosedyre: Finn fyrst eit lukka område Ω kor alle fasediagramvektorar peikar innover i området, som for eksempel vist i figuren under:



Figur 2.2: området Ω [5]

Me ser at alle faselinjer 'slutta' i området sidan alle faselinjer på tvers av grensa til området peiker innover. Ei vilkårleg faselinje i området har dermed tre moglege utfall: Konvergens mot ein grensesyklus, ein lukka syklus eller konvergens mot eit likevektspunkt. Me kan vidare spesifisere naturen av utfallet ved å prøve å finne ein annulus Γ i Ω bestemt av ein ny sirkelforma figur $\partial\Omega_2$ og $\partial\Omega$. Om alle faselinjer på tvers av grensa Ω_2 peiker inn mot annulusen Γ veit me av det føregåande argumentet at alle faselinjer inn i Γ må ende i eit av tre utfall. Men så blir grensene komprimerte $\partial\Omega$ og $\partial\Omega_2$ langs deira tverrliggande faselinjer heilt til faselinjene er parallelle med grensene. Viss me antek ein viss kontinuitet i fasediagrammet vårt, må no $\partial\Omega'$ og $\partial\Omega_2'$ vere samme kurve, kall den Γ' , og me har dermed komprimert Γ til ei lukka kurve, som også er ein grensesyklus. Merk at $\Gamma' \not\subset \Omega_2$, og kan dermed ikkje konvergere mot eit likevektspunkt. Dette følger av retninga på faselinjene over $\partial\Omega_2$. Diskusjonen vår ovanfor er nettopp teoremet til Poincaré-Bendixson [6]



(a)

Figur 2.3: I annulus ser me at løysninger frå likevektspunktet som ligg i sentrum, kjem til grensesyklusen og der er dei avgrensa, og at løysninger utanfrå er avgrensa av grensesyklusen og at dei ikkje kjem gjennom syklusen. Denne figuren er tatt frå [6]

No har me funne ein slik grensesyklus ('Limit Cycle'), då kan me seie at vårt system er robust og stabilt.

2.3 Numerisk løysning av Ode 45 ved hjelp av Matlab

I denne oppgåva får me ei numerisk løysning av våre difflikninger v.h.a. Matlab. Matlab er eit programmeringsspråk som blei brukt til å opprette ODE45 funksjon - løyse program. Ode45 har innebygd løysningsrutiner for nullpunktsbestemmelse. Ode45-funksjonen implementerer Runge-Kutta-metoden. Runge-Kutta-metoden er ein familie av numeriske metoder som gjer tilnærma løysninger på differensiallikninger.

Ode45 funksjon integrerer eit differensialliknings system $y' = f(t, x)$ frå initialtid t_0 til final tid t_f , med initialbetingelsen y_0 slik:

$$[t, y] = \text{ode45}(\text{differensiallikninga}, \text{tidsrom}, \text{initialbetingelse}, \text{options})$$

tidsrommet er denne tidsperioden mellom t_0 og final tid t_f . Her får me som løysning, t vektor på storleik $1 \times n$ og vector y på storleik $2 \times n$ i vårt tilfelle. I options har me brukt 'odeset' for å minimalisere feilen og å ikkje miste data :

$$\text{options} = \text{odeset}(\text{'RelTol'}, 1e^{-12}, \text{'AbsTol'}, 1e^{-12})$$

Kapittel 3

Metode: Modellar, Oppbygging og Analyse

3.1 Antropogenisk Allee Effekt (AAE)

Før me begynner med nokre analyser, er det lurt å få likninga (1.7) til å bli dimensjonlaus for å gjere jobben litt lettare:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - qEx \\ \frac{dE}{dt} = \alpha E(pqx - C) \end{cases} \quad (3.1)$$

kor x står for antal byttedyr, t står for tid (år), E står for jegerens innsats, r står for raten av x , k står for bæreevna, q står for fangeferdigheita, c står for kostnaden, p står for prisen, α står for raten av E .

Så kan me kome til følgande dimensjonal analyse: bæreevna k som karakteristisk (intrinsic) eining av x , T som karakteristisk eining av t , ε som karakteristisk av eining E .

Så blir vår likning (3.1) redusert til:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{X}}{d\tau} = \bar{X}(1 - \bar{X}) - \frac{(q\varepsilon\bar{X}\bar{E})}{r} \\ \frac{d\bar{E}}{d\tau} = \frac{\alpha}{r}pqk\bar{E}(\bar{X} - \frac{c}{pqk}) \end{cases} \quad (3.2)$$

For å gjere det litt enklare i vår analyse, vel me den karakteristiske tidsskalaren $T = \frac{1}{r}$, og at den karakteristiske innsatsskalaren $\varepsilon = \frac{r}{q}$ kor \bar{X} , τ og \bar{E} er dimensjonallause parametrar. For å forenkle vår likning (3.2), er det lurt å få nokre nye dimensjonlause tal:

$$\chi_1 = \frac{\alpha pqk}{r}, \quad \chi_2 = \frac{c}{pqk} \quad (3.3)$$

Så ser vår likning (3.2) ut slik:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{X}}{d\tau} = \bar{X}(1 - \bar{X} - \bar{E}) \\ \frac{d\bar{E}}{d\tau} = \chi_1\bar{E}(\bar{X} - \chi_2) \end{cases} \quad (3.4)$$

I denne modellen understrekar me at me held p , som beskriver prisen betalt per stykke som var jakta eller avla, konstant sidan χ_2 er konstant.

Analyse av likevektspunkt

Med tilhøyrande Jakobimatrissa :

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2\bar{X} - \bar{E} & -\bar{X} \\ \chi_1 \bar{E} & \chi_1(\bar{X} - \chi_2) \end{pmatrix}$$

så får me likevektspunkta : $(0,0)$, $(1,0)$, $(\chi_2, (1 - \chi_2))$.

Likevektspunkt	Eigenverdier : λ_1, λ_2	Eigenvektorar: v_1, v_2	Stabilitet
$(0,0)$	1	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$	eit ustabilt
	$-\chi_1\chi_2$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	sadelpunkt
$(1,0)$	-1	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$	eit ustabilt sadelpunkt
	$\chi_1(1 - \chi_2)$	$\begin{vmatrix} -1 \\ 1 + \chi_1(1 - \chi_2) \end{vmatrix}$	for $\chi_2 < 1$

Me vil nemne at når $\chi_2 > 1$, så blir likevektspunktet $(1,0)$ stabilt, og at når $\chi_2 = 1$, så samsvarer det siste likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2))$ til likevektspunktet $(1,0)$. Me må vere oppmerksom på at me bør ha $\chi_2 < 1$ s.a. våre løysninger og det neste likevektspunktet ligg i fyrste kvadrant. Då kan me bekrefte det som står i *Rarity Value and Species Extinction : The Anthropogenic Allee Effect* -artikkel [3] om at $pqk > c$ sidan $\chi_2 = \frac{c}{pqk}$

- for likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2))$: For å finne dei siste to eigenverdiane, bruker me andregradslikning s.a. me får :

$$\lambda_{5,6} = \frac{-\chi_2 \pm \sqrt{\chi_2^2 - 4\chi_2(\chi_1 - \chi_1\chi_2)}}{2} \quad (3.5)$$

Her er det tre moglege utslag som me kan få: Ustabilt sadle, stabilt node, stabilt spiral punkt.

- Ustabilt sadle punkt dersom:

$$\chi_2^2 < \chi_2^2 - 4\chi_2(\chi_1 - \chi_1\chi_2) \quad (3.6)$$

som gjer oss $\chi_2 > 1$. I dette tilfellet er likevektspunktet $(1,0)$ stabilt. I dette tilfellet fell vårt kritiske punkt utanfor i 4. kvadrant så me kan sjå bort frå dette.

- Stabilt node punkt får me når

$$4\chi_1(1 - \chi_2) < \chi_2 \quad (3.7)$$

som gjer oss $\chi_2 < 1$ (sidan $\chi_2 > 0$) og at

$$\chi_1 < \frac{\chi_2}{4(1 - \chi_2)} \quad (3.8)$$

- Ustabilt node punkt eller ustabilt spiral punkt , får me når

$$\chi_2 < 0 \quad (3.9)$$

og dette er umogeleg siden χ_2 er alltid eit positivt tal.

- Stabilt spiral punkt får me når :

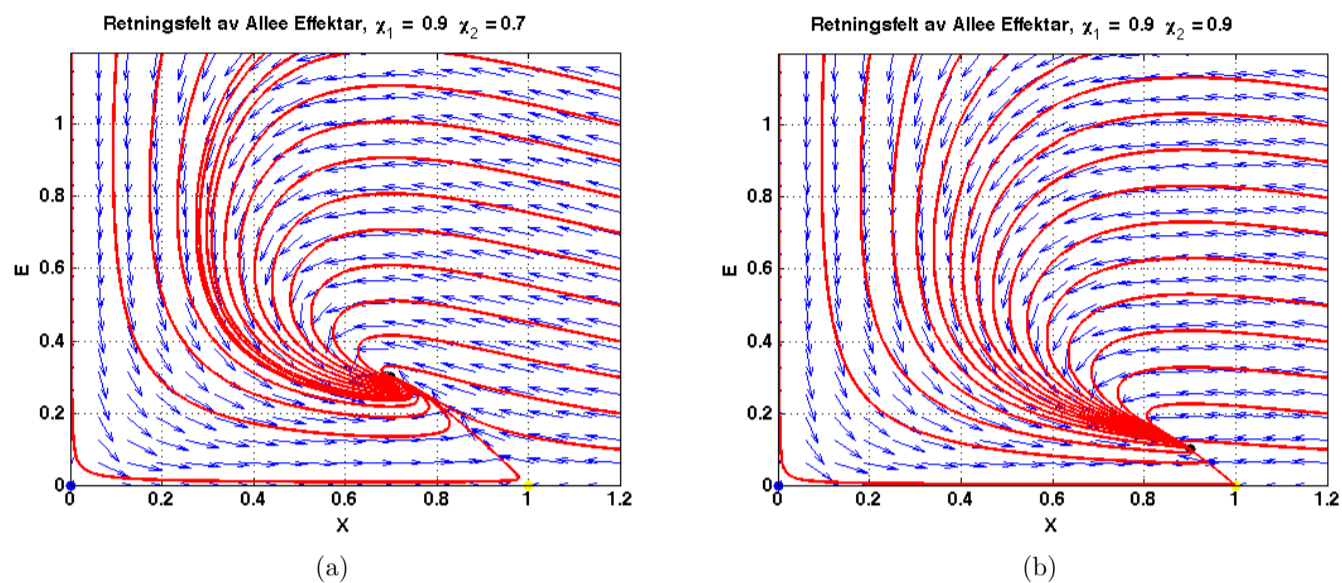
$$\chi_2^2 - 4\chi_2(\chi_1 - \chi_1\chi_2) < 0 \quad (3.10)$$

som gjer oss $\chi_2 < 1$.

$$\frac{\chi_2}{4(1 - \chi_2)} < \chi_1 \quad (3.11)$$

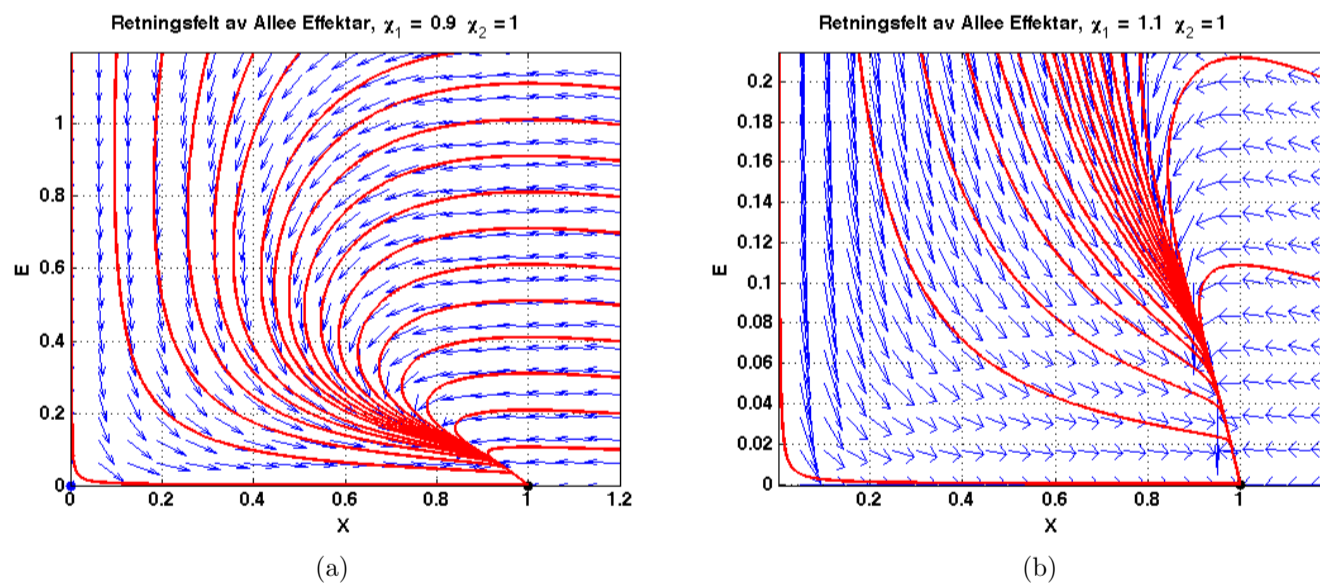
Då får me eit kompleks tal som løysning. Det ser ut slik $\gamma \pm i\Theta$. Om $\gamma < 0$ så får me eit asymptotisk stabilt spiral punkt sidan me har ein negativ real part (tabel 9.31 [4]).

Me kan gje nokre verdiar for χ_1 og χ_2 slik at me får nokre plot .



Figur 3.1: Plotting av fasediagram. Figur (a) $\chi_1 = 0.9, \chi_2 = 0.7$ og me får eit stabilt spiral punkt. Figur (a) $\chi_1 = 0.9, \chi_2 = 0.9$ og me får stabilt node.

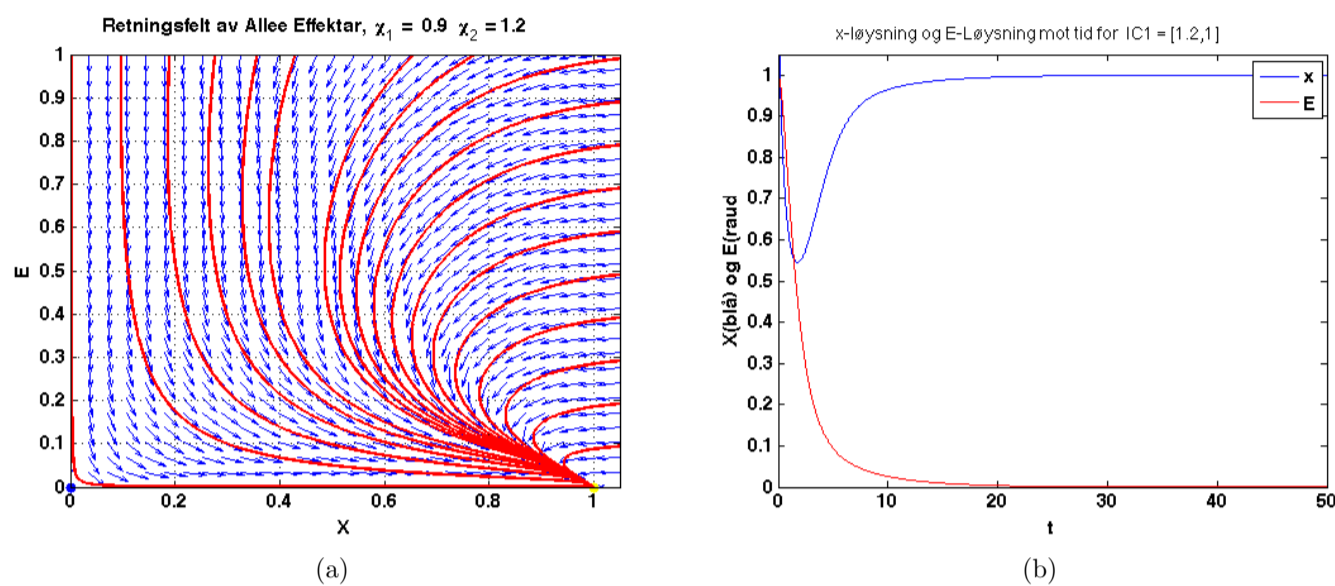
Frå figuren (3.1 a) har me fått eit stabilt spiral punkt når $\chi_2 = 0.7$ i likevektspunktet $(0.7, 0.3)$. Her ser me at stigningstala for \bar{X} og \bar{E} -løysningar blir aldri positive igjen i dette likevektspunktet. Dette betyr at byttedyr-bestandet og jakta ikkje vil vekse opp igjen samtidig. Rovdyr-bestandet blir kraftig redusert av ei stor jakt, sannsynlegvis ukontrollert jakt. På sikt vil det bli lite jakt p.g.a. at byttedyr-bestandet er liten. Frå figuren (3.1 b) har me fått eit stabilt node punkt når $\chi_2 = 0.9$ her i det likevektspunktet $(0.9, 0.1)$. Her får me nesten same forklaring som i forrige bortsett frå at me har i dette tilfellet eit stabilt node punkt. Forklaringa går ut på at ei stor jakt fører til ein kraftig byttedyr-bestand reduksjon, og i dette tilfellet har byttedyr-bestandet nærma seg null. For punktet $(1, 0)$ med grønn farge, har me eit ustabil saddle punkt som inneberer at både jakta og byttedyr-bestandet oscillerer. Det betyr at ei stor jakt fører til at byttedyr-bestandet, og sjølve jakta blir redusert til null, men etter ei lita stund vil jakta ta seg opp igjen til likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2))$ når byttedyr-bestanden framleis er liten. Vi ser her at $c < pqk$. Det innebærer at når prisen, fangeferdigheita og bæreevna, til saman, er høge i forhold til kostnaden, kan me ha ikkje-berekraftig drift som fører til at arten blir utrydda i ein viss grad.



Figur 3.2: Plotting av fasediagram. Figur (a) $\chi_1 = 0.9, \chi_2 = 1$. Figur (b) $\chi_1 = 1.1, \chi_2 = 1$. Me får eit node punkt i begge tilfella

Det er eit spesielt tilfelle når χ_2 er 1 (Fig 3.2). Her får me eigenverdiane $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 0$ til likevektspunktet $(1, 0)$ og eigenverdiane $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 0$ til likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2))$. Me ser at disse to likevektspunkta $(1, 0), (1, 0)$

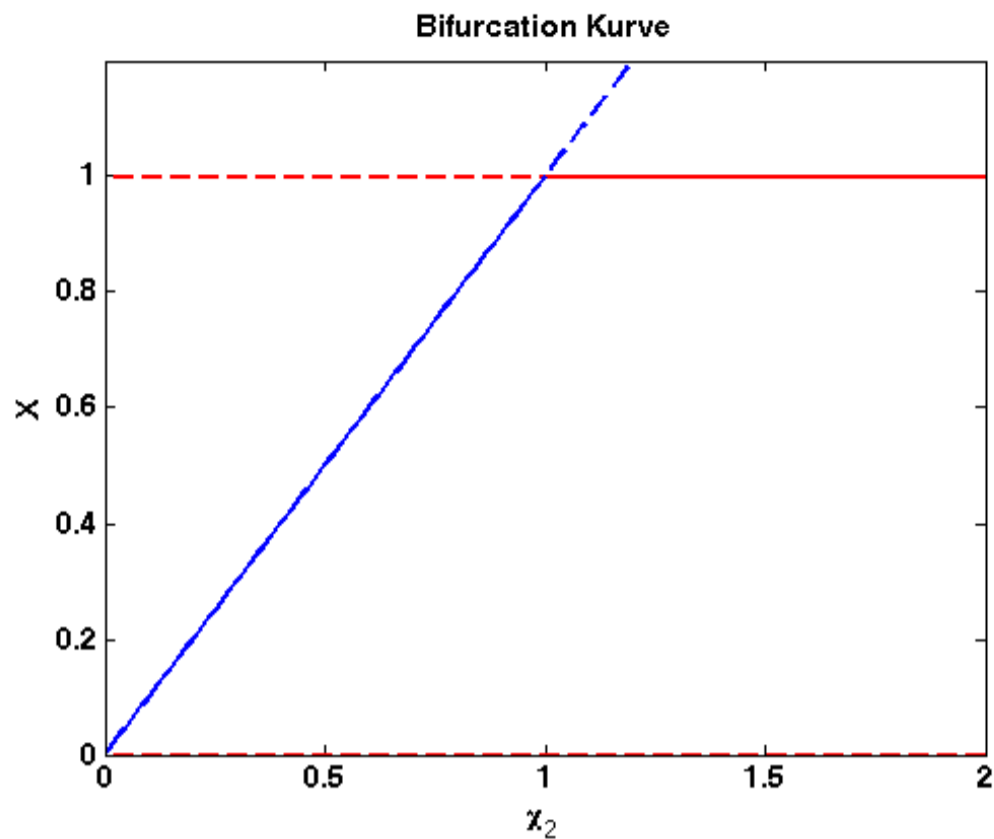
fell saman. Igjen ser me at stigningstala for \bar{X} og \bar{E} -løyninger blir aldri positive igjen i desse likevektspunkta. Ei stor jakt fører til ein kraftig reduksjon av byttedyr-bestandet. Me ser her òg at jakta stoppar til null sjølv om byttedyr-bestandet ikkje er null, men allikevel vil byttedyr-bestandet ikkje ta seg opp igjen. Det som me kan sjå her òg at $c = pqk$. sidan $\chi_2 = \frac{c}{pqk}$. Her ser me at det ikkje er lønsamt å jakta.



Figur 3.3: Plotting av X mot E. Figur (a) $\chi_1 = 0.9, \chi_2 = 1.2$. I figur (b) har me løysninga med initialbetingelse [1.2,1].

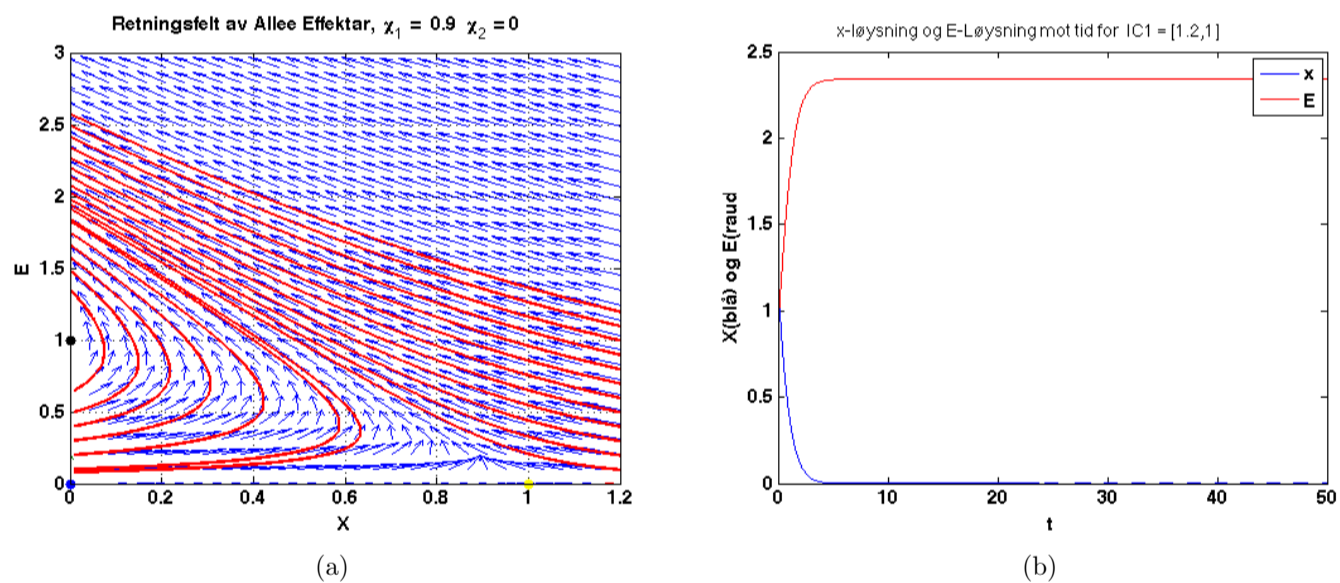
frå figuren (3.3), i punktet (1,0), kan me tolke at det ikkje er nokon som jaktar sidan byttedyr-bestandet er blitt så redusert, på vei til utrydding. Rett og slett kan arten blir utrydda i det punktet. I dette tilfellet har me plotta (i figur 3.3) når χ_2 er større enn 1 (me bruker χ_2 lik 1.2 i figur 3.3). Me ser at dei likevektspunkta (1.2, -0.2) og (1, 0) detter frå kvarandre (Me såg i forrige figur 3.2 at disse punkta fall saman). Me ser at likevektspunktet (1.2, -0.2) ikkje ligg i fyrste kvadrant, og at likevektspunktet (1, 0) er eit stabilt node punkt og at (1.2, -0.2) er eit ustabil saddle punkt (3.3).

Frå figuren (3.1) til figuren (3.3) kan me sjå at det har skjedd ei stor forandring i desse likevektspunkta. Denne forandringa blir kalla for Transcritical Bifurcation. I det likevektspunktet (1,0) ser me eit stabilt node punkt når χ_2 større enn 1. I det likevektspunktet (1,0) ser me eit ustabil saddle punkt når χ_2 mindre enn 1. Det skjer nokon forandringar også med det likevektspunktet $(\chi_2, 1 - \chi_2)$. Dette punktet er eit stabilt node/spiral punkt når χ_2 mindre enn 1. Dette punktet er eit ustabil saddle punkt når χ_2 større enn 1. Når χ_2 blir lik 1, skjer det ein kollisjon mellom disse punkta og deira stabilitet blir forandra. Punktet (1, 0) går over til å vere stabilt. Likevektspunktet $(\chi_2, 1 - \chi_2)$ går også over til å vere ustabil. Stabiliteten til punktet (0,0) vil forsetje å vere ustabil sjølv om χ_2 blir større eller mindre. Alt som me har sett, vil fortelje oss om eksistensen til ein transcritical bifurcation som inntreffer i $\chi_{2c} = 1$.



Figur 3.4: Plotting av X mot χ_2 for punkt (X, Y) . Raud linje står for punktet $(1, 0)$ og blå linje står for punktet $(\chi_2, 1 - \chi_2)$. Stipla linje for ustabilitet og heiltrukken linje for stabilitet

kan det skje eigentleg når $\chi_2 = 0$?



Figur 3.5: Figure (a) Plotting av X mot E , figure(b) Plotting av X , E mot t .

Her ser me at likevektspunktet $(0, 0)$ er ustabil, og at likevektspunktet $(1, 0)$ er eit sadle punkt, og at i det siste likevektspunktet er det ingen aktivitet. Her har me at $c \ll pqk$. Så kan me seie at når kostnaden er liten i forhold til lønnsmdet, så arten ikkje vil overleve. Når $\chi_2 = 0$, så får me eit degenert tilfelle.

3.2 Antropogenisk Allee Effekt (AAE) med tidsforseinking

Kva vil skje om jakta vil bli stoppa for å gje litt tidsrom til byttebestandet til å ta seg opp igjen eller me er på jakt etter ei berekraftig drift? Av den grunn legg me ein ny parameter Δt som representerer tidsforskyving, tidsforseinking, eller ei lita forstyring for det tidsintervallet. For å nå det målet, fyrst nyttar me ikkje-dimensjonallisering metoden for

Antropogenisk Allee Effekt (AAE) med tidsforskyvinga og då brukar me Taylors rekkeutvikling for \bar{X} . Då definerer me \bar{X} slik:

$$\bar{X}(t) = \bar{X}(t - \Delta t) \quad (3.12)$$

s.a.

$$\bar{X}(t - \Delta t) = \bar{X}(t) + \Delta t \frac{d\bar{X}}{dt} + O(\Delta t^2) \quad (3.13)$$

Her ser me bort frå den kvadratiske termen sidan den er antatt å vere liten. Så likning 3.4 blir:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{X}(1 - \bar{X} - \bar{E}) \\ \frac{d\bar{E}}{dt} = \chi_1 \bar{E}(\bar{X} - \chi_2 - \Delta t \bar{X}(1 - \bar{X} - \bar{E})) \end{cases} \quad (3.14)$$

kor :

$$\chi_1 = \frac{\alpha pqk}{r} \quad (3.15)$$

$$\chi_2 = \frac{c}{pqk} \quad (3.16)$$

og kor x er antal byttedyr, t er tid (år), E er jegerens innsats, r er raten av x , k er bæreevna, q er fangeferdigheita, c er kostnaden, p er prisen, α raten av E .

Ut frå det kan me evaluere stabiliteten. Så ser jakobimatrissa ut slik:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2\bar{X} - \bar{E} & -\bar{X} \\ \chi_1 \bar{E}(1 - \Delta t(1 - 2\bar{X} - \bar{E})) & \chi_1[\bar{X}(1 + \Delta t(\bar{X} + 2E - 1)) - \chi_2] \end{pmatrix}$$

Analyse av likevektspunkt

her me får dei same likevektspunkta som før: $(0,0)$, $(1,0)$, $(\chi_2, (1 - \chi_2))$.

Likevektspunkt	Eigenverdier : λ_1, λ_2	Eigenvektorar: v_1, v_2	Stabilitet
$(0,0)$	1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	eit ustabil
	$-\chi_1\chi_2$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	sadle punkt
$(1,0)$	-1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	eit ustabil sadle punkt
	$\chi_1(1 - \chi_2)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \chi_1(1 - \chi_2) \end{bmatrix}$	for $0 < \chi_2 < 1$

$0 < \chi_2 < 1$ bør me ha for at løysningar ligg i 1.kvadrant. Her får me same verdi som før.

- For å finne dei siste to eigenverdiane i likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2))$, bruker me andregradslikning for :

$$\lambda^2 - B\lambda + C \quad (3.17)$$

Kor B er

$$B = -\chi_2 + \chi_1\chi_2\epsilon(1 - \chi_2) \quad (3.18)$$

og C er

$$C = \chi_2[\Delta t[4\chi_1\chi_2(\frac{\chi_2}{4} - 1) + 2\chi_1^2 + \chi_2^2] + \chi_1(1 - \chi_2)] \quad (3.19)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (3.20)$$

Me kan gjere nokre observasjonar her :

- når $B > 0$, får me eit ustabil spiral punkt eller eit ustabil node punkt.
- når $B < 0$ får me enten eit stabil node punkt eller eit stabil spiral punkt.
- når $B = 0$ får me eit stabil senter.

Når $B > 0$, då har me enten eit ustabil spiral punkt eller eit ustabil node punkt. Og når me ser etter systemets sjølvforsyning eller etter robustheit av systemet, dvs at *Poincaré – Bendixson* er tilfredstilt, så er me interessert i å ha ein grensesyklus i nærleiken av punktet $(\chi_2, (1 - \chi_2))$ kor naboløysningar ikkje er lukka. Så bør me ha $B > 0$. Då må me finne Δt s.a. me får enten eigenverdiar med negative real part for ustabil spiral punkt eller eigenverdiar som er negative for eit ustabil node punkt i likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2))$. M.a.o. er me interessert i at likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2))$ er ustabil. På den måten får me likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2))$ til å støyte bort frå sentrum mot grensa til syklusen. I tillegg må me vere sikre på at alle løysningane som kjem utanfrå syklusen, må peike mot syklusen og at dei må vere avgrensa av syklusen. For å sjekka at *Poincaré – Bendixson* er tilfredstilt, har me kartlagt i *Poincaré – Bendixson* Kart-plot. Frå utrekninga av eigenverdiar for punktet $(\chi_2, 1 - \chi_2)$ av (3.20), må me ha at :

$$B > 0 \quad (3.21)$$

for at det støytast bort frå det punktet (ustabil). Dette inneberer at :

$$-\chi_2 + \chi_1 \chi_2 \Delta t (1 - \chi_2) > 0 \quad (3.22)$$

Så får me at:

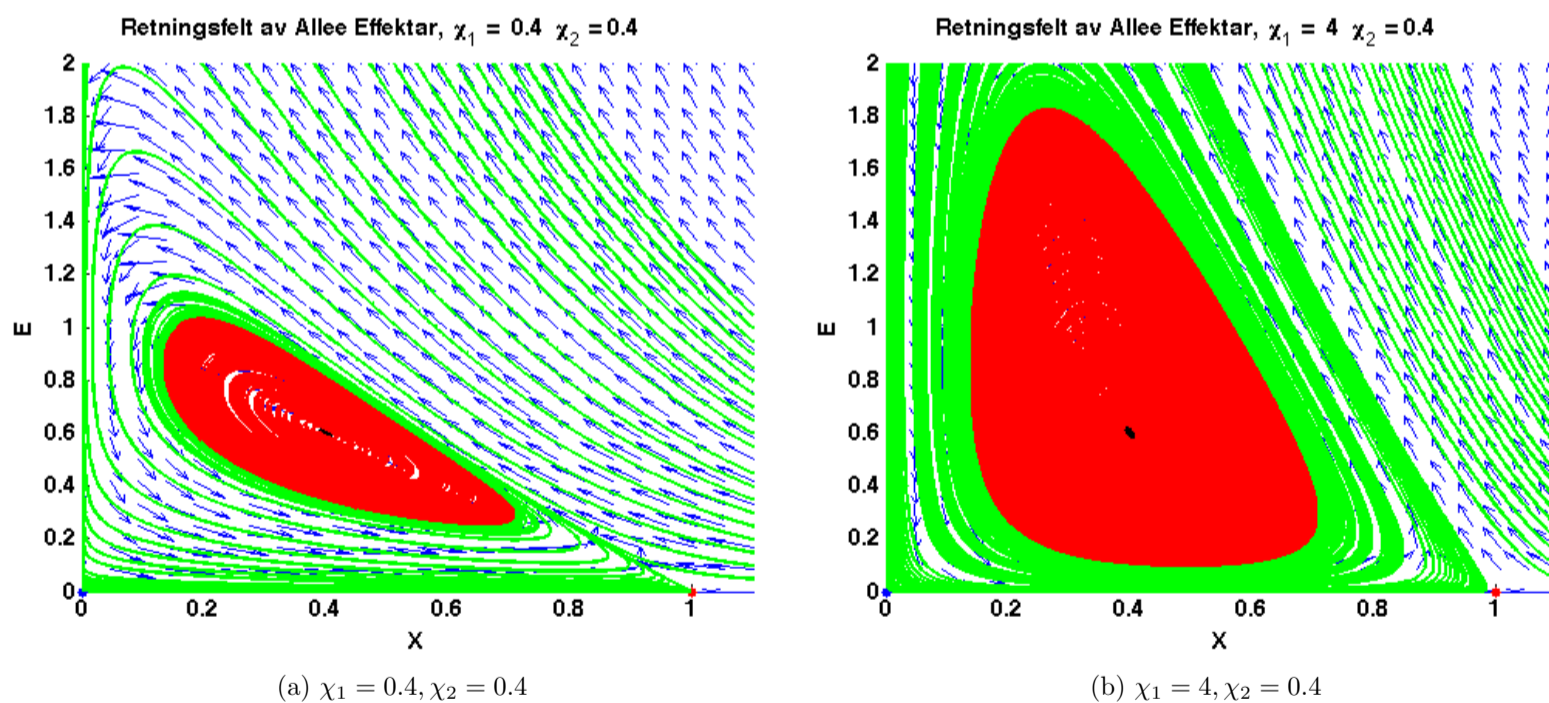
$$\Delta t > \frac{1}{\chi_1 (1 - \chi_2)} \quad (3.23)$$

for at *Poincaré – Bendixson* teorem er tilfredstilt [5].

Til og med no, for at systemet skal vere liggande i fyrste kvadrant bør me ha :

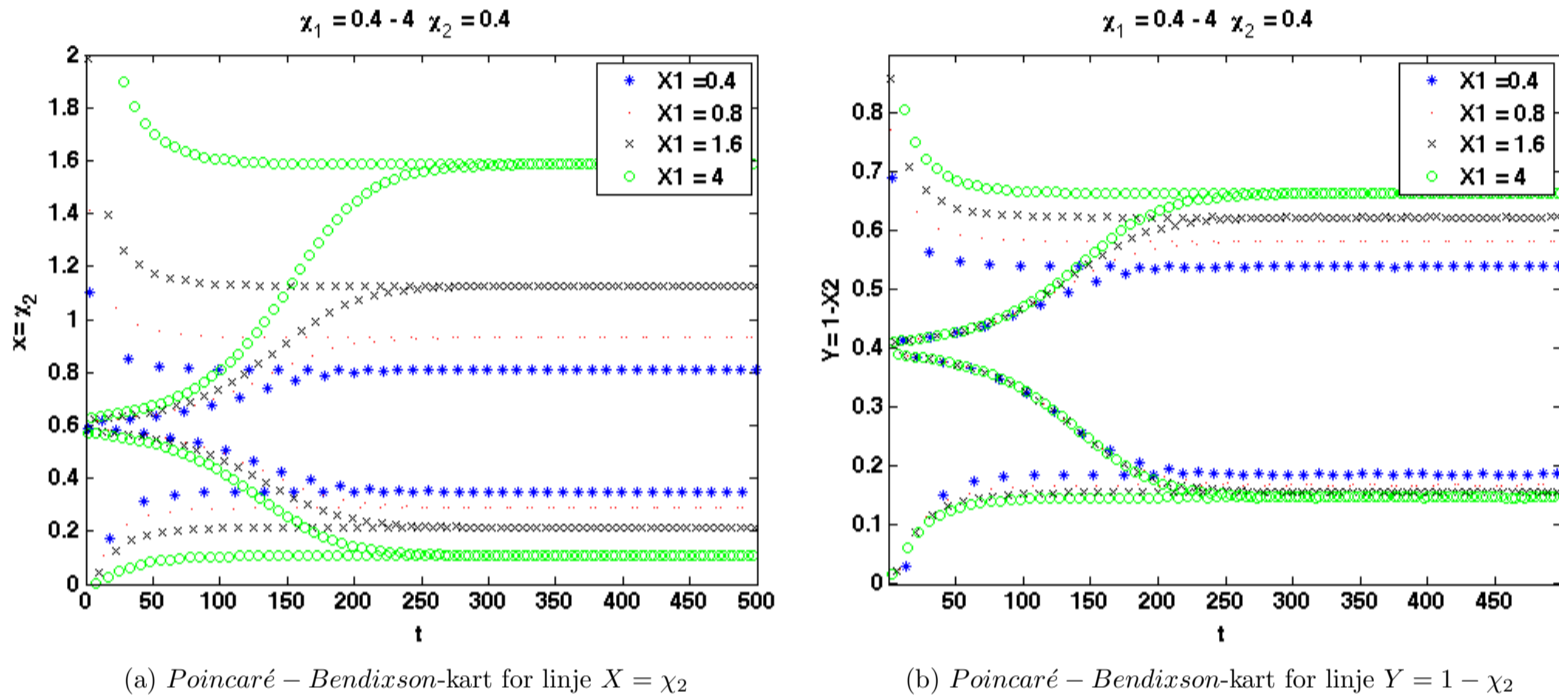
$$0 < \chi_2 < 1 \quad (3.24)$$

Frå no av kallar me den høgre delen av likninga (3.23) for ζ . Me begynner med å analysere forskjellige verdiar av χ_2 , av χ_1 og av Δt i forhold til føresetnaden vår. Fyrst begynner me med når føresetnaden (3.2) blir tilfredstilt s.a. me får ein grensesyklus som er stabil, der denne impliserer at løysningane er oscillatoriske (sjølvunderhaldande oscillasjonar). Dei lukka kurvene er perfekte periodiske system kor nokon små forstyrringar frå disse kurvene, medfører at systemet blir stabil igjen (systemet held seg til den grensesyklusen.).

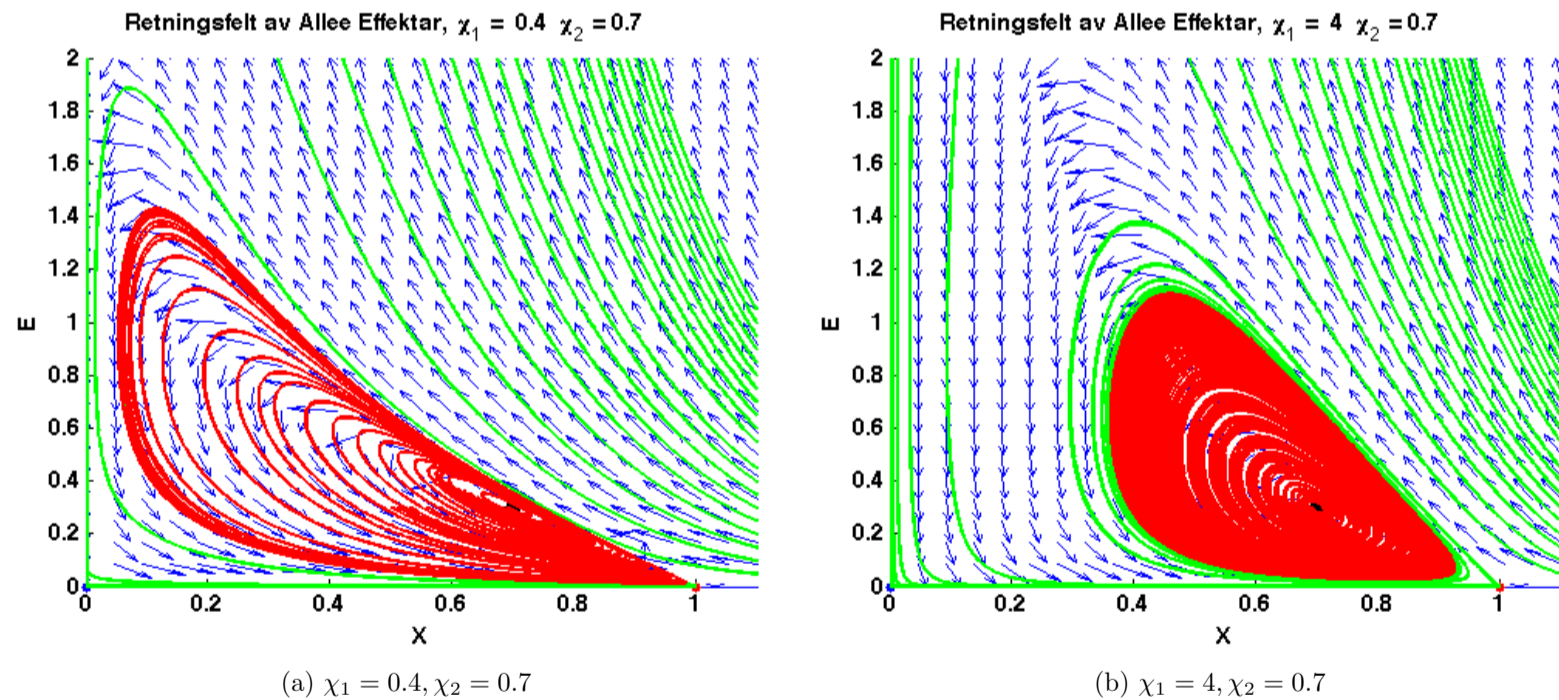


Figur 3.6: Her er *Poincaré – bendixson* teorem tilfredstilt når Δt er lik 1.1 gonger større enn ζ . I figuren (a) har me at $\chi_1 = 0.4$ og $\chi_2 = 0.4$ og I figuren (b) har me at $\chi_1 = 4$ og $\chi_2 = 0.4$.

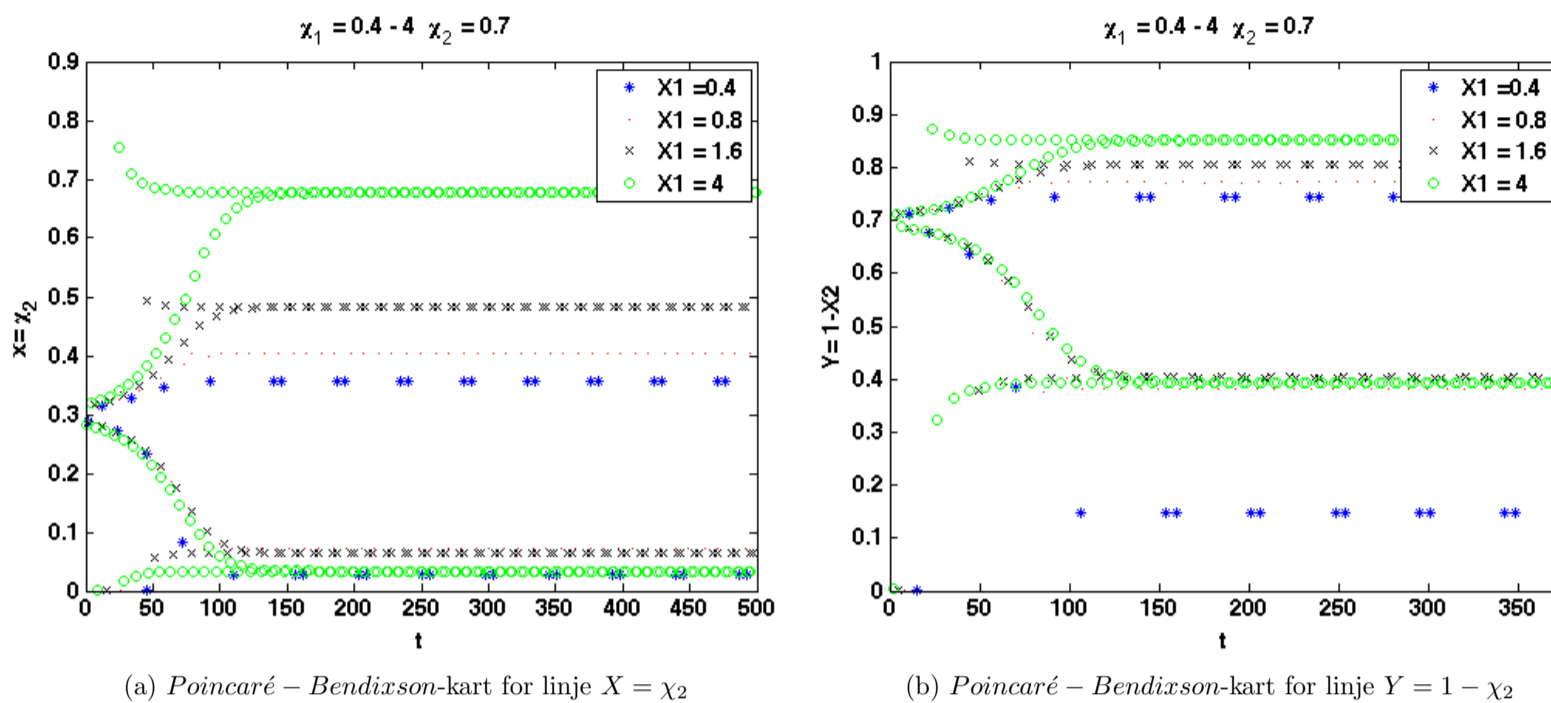
Her ser me at fyrst blir jakta stadig større, og denne medfører ein kraftig reduksjon av byttedyr-bestandet, og på den andre sida ser me at jakta fell kraftig ei stund og dette medfører at byttedyr-bestandet tek seg opp igjen utan at det har stoppa å jakta (jakta er ikkje så stor). Til slutt kjem løysningane av \bar{X} og til \bar{E} mot grensesyklusen kor me kan ha ei berekraftig jakt utan at byttedyr-bestandet blir utrydda. Frå figurane ser me at syklusen blir stadig større når χ_1 blir større. For å sjå at *Poincaré – Bendixson* teorem er tilfredstilt, m.a.o at grensesyklusen er danna s.a. alle løysningane kjem utanfrå mot sentrum og dei blir avgrensa av syklusen og same prinsipp for løysningar som kjem innanfrå sentrum, har me dratt to linjer både frå x-aksen ($X = \chi_2$) og Y-aksen ($Y = 1 - \chi_2$). Tanken bak dette er at kvar gong ei løysning går forbi X-linja eller Y-linja, blir det registrert på øvre og nedre punkt. Me ser til slutt at løysningane blir avgrensa av syklusen, og det er danna ein fast avstand mellom eit fast øvre punkt og eit fast nedre punkt som tilnærmar seg til diameteren til den grensa syklusen. Då kan me bekrefte at det er blitt danna ein syklus Her er det nokre døme:



Figur 3.7: Her er *Poincaré – Bendixson* teorem tilfredstilt når Δt er 1.1 gonger større enn ζ . I begge plota kan me sjå at det er danna ein fast avstand mellom øvre og nedre punkt i begge linjene. Den faste avstanden er danna av løysningane av \bar{X} og til \bar{E} som går forbi mellom øvre og nedre punkt av linjene . Her har me plotta med forskjellige verdiar av χ_1



Figur 3.8: Her er *Poincaré – Bendixson* teorem tilfredstilt når Δt er 1.1 gonger større enn ζ . Her har me grensesyklusen. I figuren (a) ser me at $\chi_1 = 0.4$ og $\chi_2 = 0.7$ og I figuren (b) ser me at $\chi_1 = 4$ og $\chi_2 = 0.7$. Her ser me at syklusen blir redusert når χ_1 blir større



Figur 3.9: Her er *Poincaré – Bendixson* teorem tilfredstilt når Δt er 1.1 gonger større enn ζ .

Her er grensesyklusen eit viktig punkt. Når føresetnaden ζ er tilfredstilt, vil det forsikre eit godt samliv mellom desse artane (jegerar og dyr). Det betyr at byttedyr-bestandet ikkje er i risiko til å bli utrydda, og me kan ha ei berekraftig jakt. Når det ikkje finst ein grensesyklus, vil ei stor jakt true byttedyr-bestandet til utrydding, og dette medfører at byttedyr-bestandet ikkje vil ta seg opp igjen. Dette skjer ofte når me driv ei ikkje-berekraftig drift og samtidig som det ikkje finst ein grensesyklus, og i tillegg inntreffer det forandringar i miljø eller habitet til byttedyr-bestandet, eller nokre andre forstyrningar.

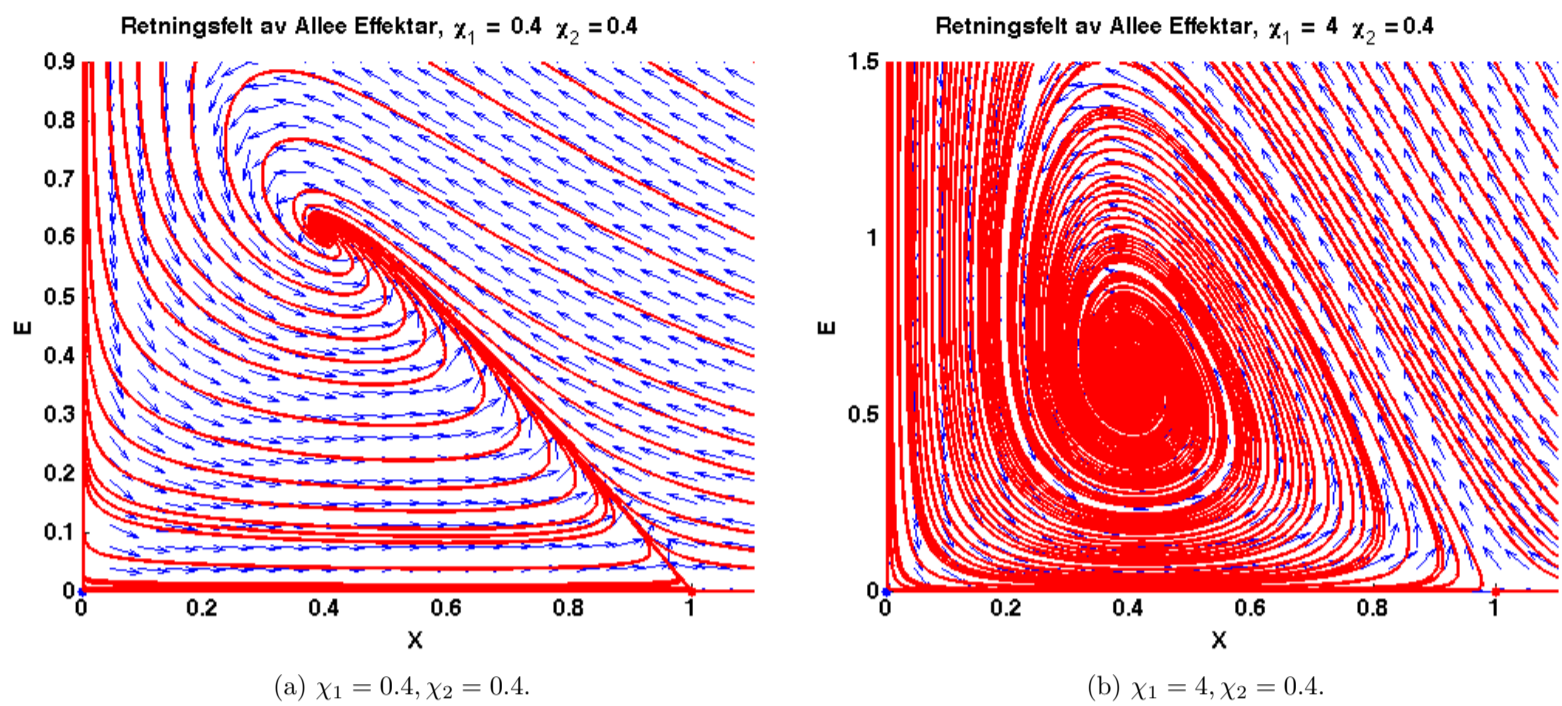
Me har også to andre tilfelle når $B < 0$ og når $B = 0$. Når $B < 0$, då kan me ha at begge eigenverdiane har negativ reell del. Då får me eit tiltrekkande kritisk punkt (stabilt) som kan vere node eller spiral, og dette inneberer at :

$$-\chi_2 + \chi_1\chi_2\Delta t(1 - \chi_2) < 0 \quad (3.25)$$

Me ser at:

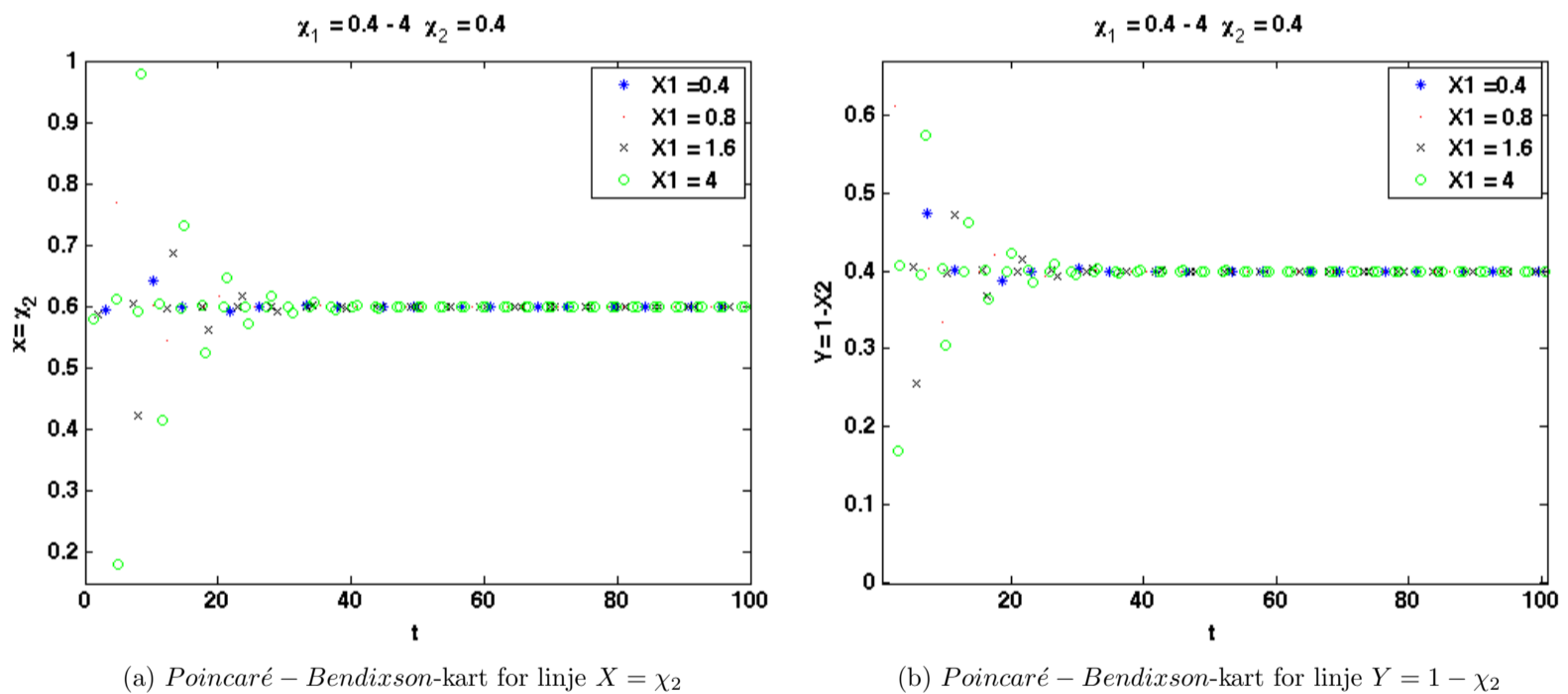
$$\Delta t < \frac{1}{\chi_1(1 - \chi_2)} \quad (3.26)$$

Av føresetnaden (3.26) får me eit stabilt spiral punkt eller eit stabilt node punkt. Her teiknar me nokre døme med føresetnaden 3.26 :

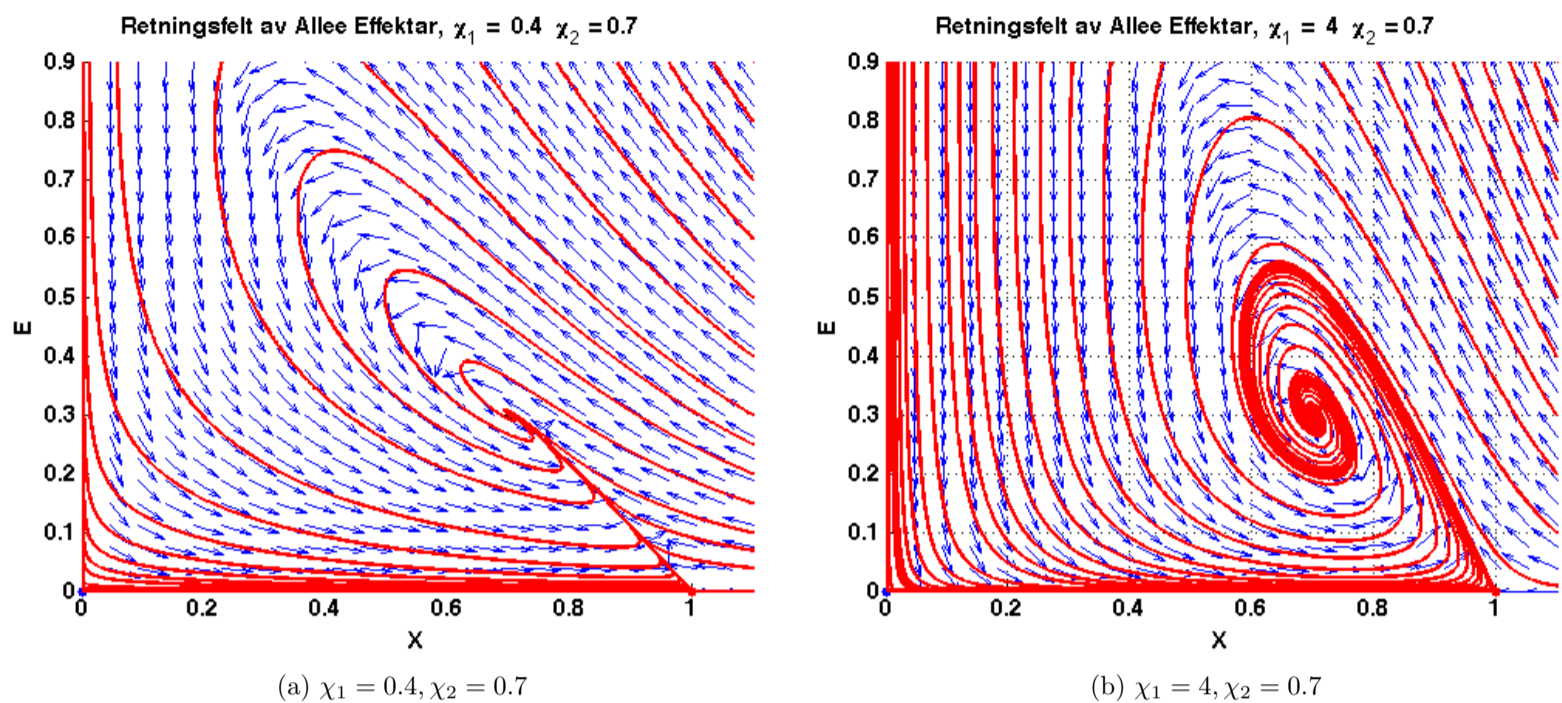


Figur 3.10: Δt er ein fjerde del av ζ . Ingen grensesyklus. I figuren (a) har me eit stabilt node punkt og løysningene går mot likevektspunktet $(0.4, 0.6)$ langs linja $y = 1 - x$ (ei tilnærming linje). I figuren (b) har me at eit stabilt spiral punkt og at løysningene går mot likevektspunktet $(0.4, 0.6)$.

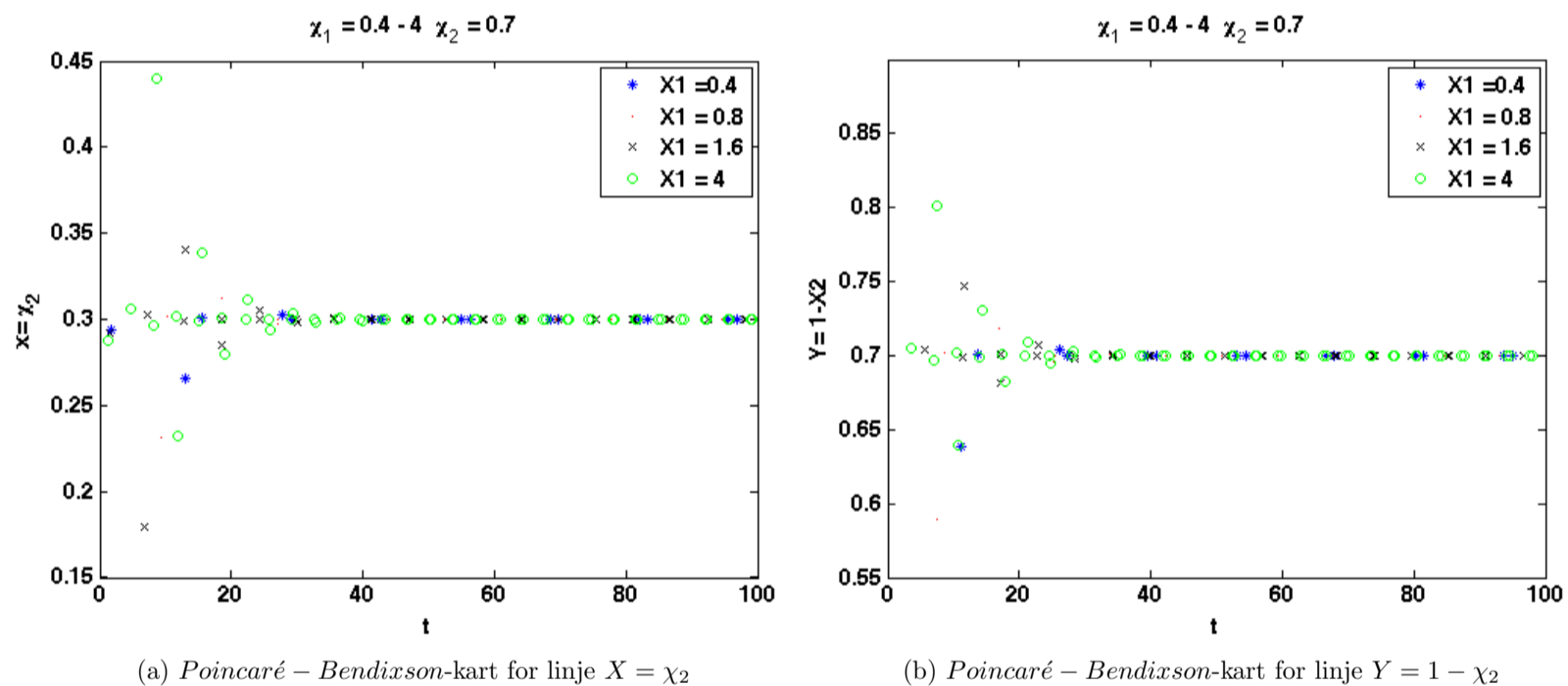
I begge plota ser me fyrst at stigningstala til løysningane er positive i begynnelsen, men plutsleg fell løysningane og stigningstalet blir negativt. Og til slutt ser me at stigningstala aldri blir positive igjen. Alle løysningane ender i likevektspunktet $(\chi_2, 1 - \chi_2)$ i begge plota. Dette betyr at jakta veks fram til byttedyr-bestandet blir veldig redusert, liten, m.a.o, og etter det, tek verken jakta eller byttedyr-bestandet seg opp igjen.



Figur 3.11: Her er *Poincaré - bendixson* teorem ikkje tilfredtilt når Δt er ein fjerde del av ζ . I begge plota kan me sjå at det ikkje er danna ein fast avstand mellom øvre og nedre punkt i begge linjene. I staden for det, har det danna ei rett linje som viser at alle løysningane ender i likevektspunktet $(\chi_2, 1 - \chi_2)$. M.a.o har me ingen grensesyklus. Her har me plotta med forskjellige verdiar av χ_1



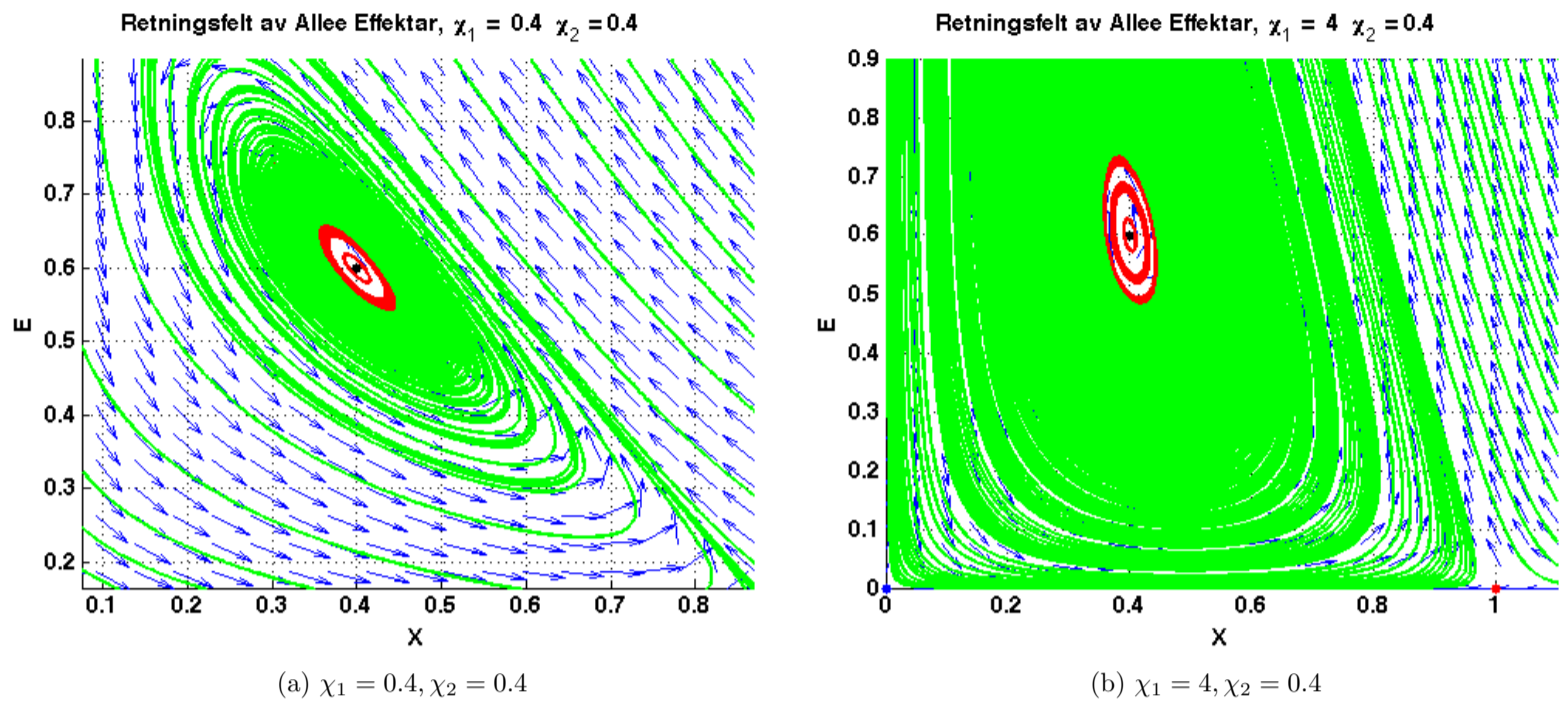
Figur 3.12: Δt er halvparten av ζ . Ingen grensesyklus. i figuren (a) har me eit stabilt node punkt i $(0.7, 0.3)$. i figuren (b) har me eit stabilt spiral punkt i $(0.7, 0.3)$.



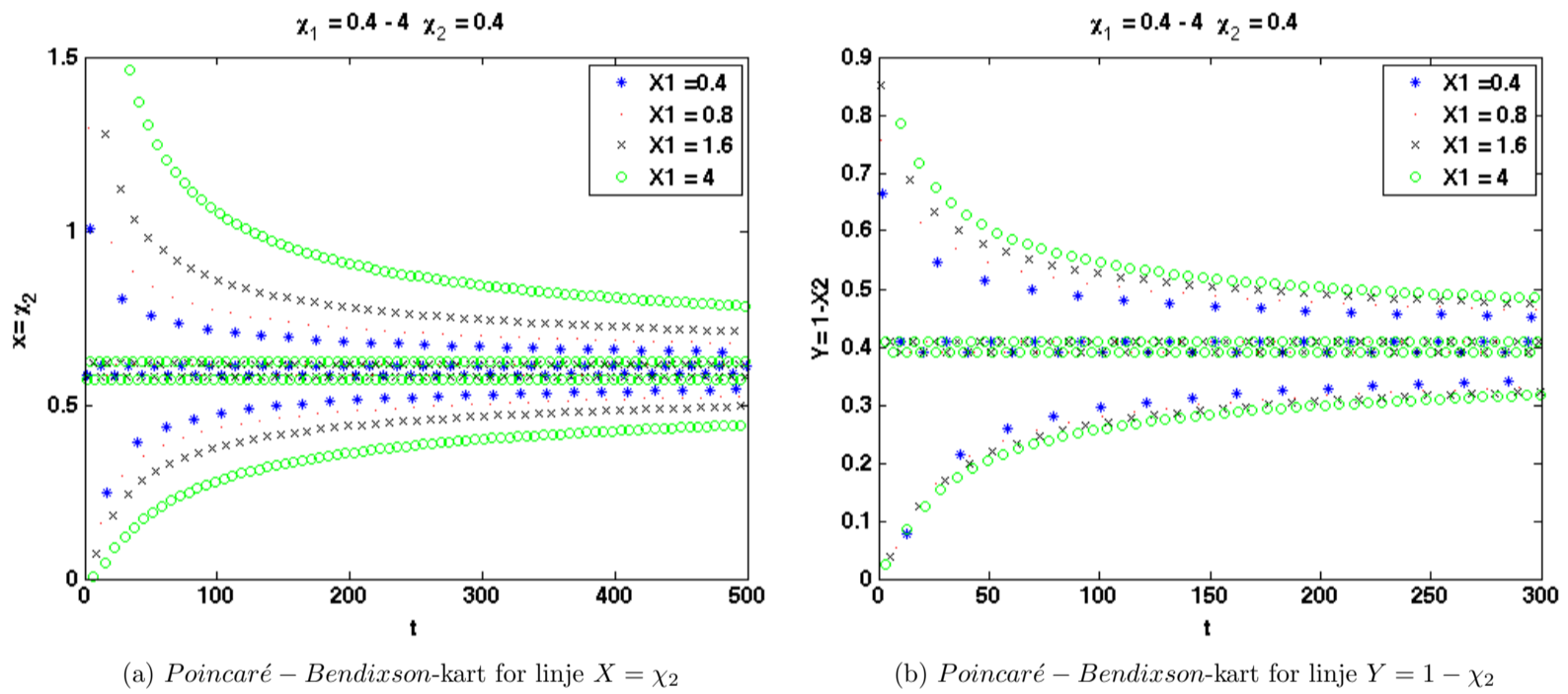
Figur 3.13: Δt er ein halv del av ζ . I begge plota kan me sjå at det ikkje er danna ein fast avstand mellom øvre og nedre punkt i både linjene. I staden for det, har det danna ei rett linje som viser at alle løysningane ender i likevektspunktet $(\chi_2, 1 - \chi_2)$. M.a.o har me ingen grensesyklus. Her har me plotta med forskjellige verdiar av χ_1

Når $B = 0$, då har me nøytrale stabile sentre der eigenverdiene er utelukkande imaginært tal. Når me får eit senter, då er det ingen grensesyklus i følge Corollary 5 i avsnittet 10.6 i Differential Equations, Dynamical Systems and Introduction to Chaos-bok [7] sidan Liapunov funksjon som me kan rekne utfrå systemet vårt, er konstant i likevektspunktet $(\chi_2, 1 - \chi_2)$. Så får me at:

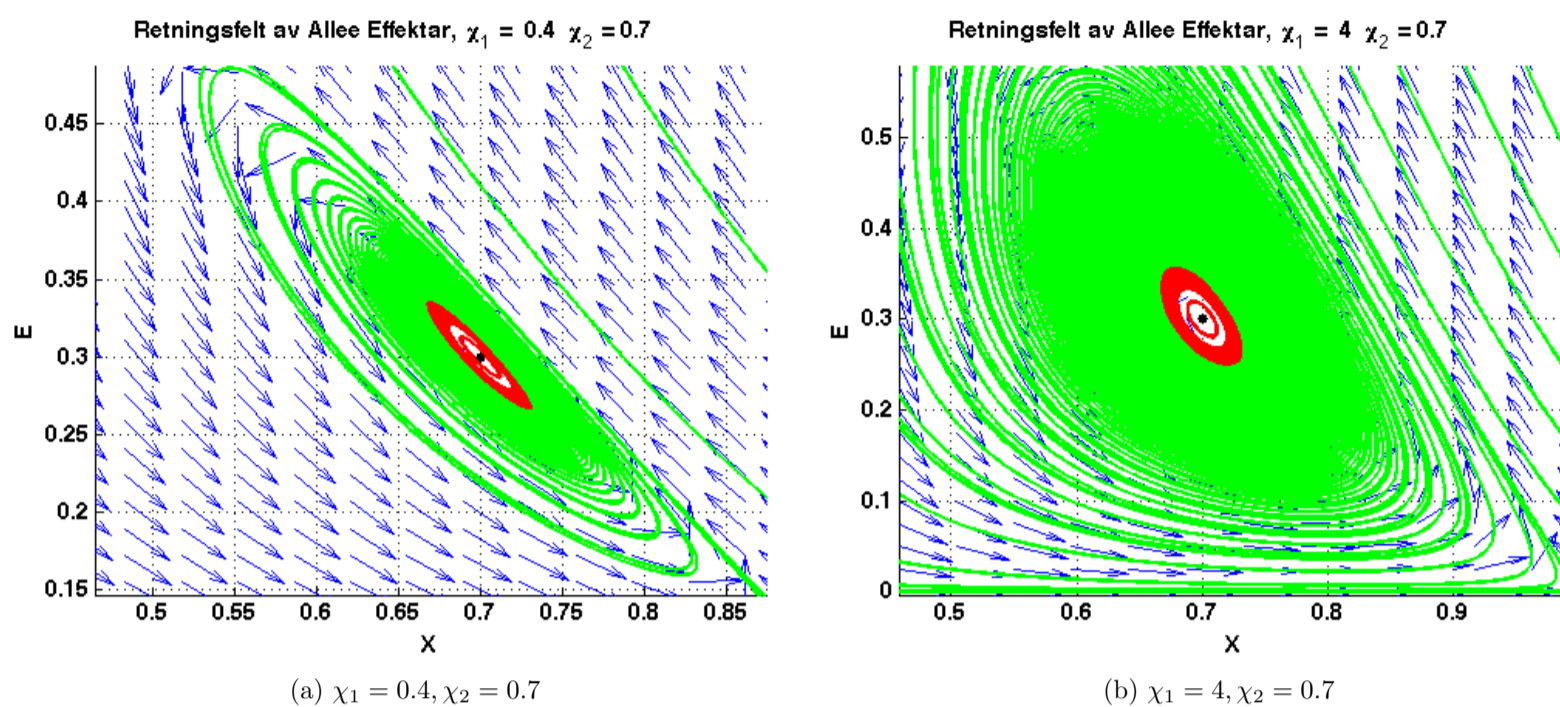
$$\Delta t = \frac{1}{\chi_1(1 - \chi_2)} \quad (3.27)$$



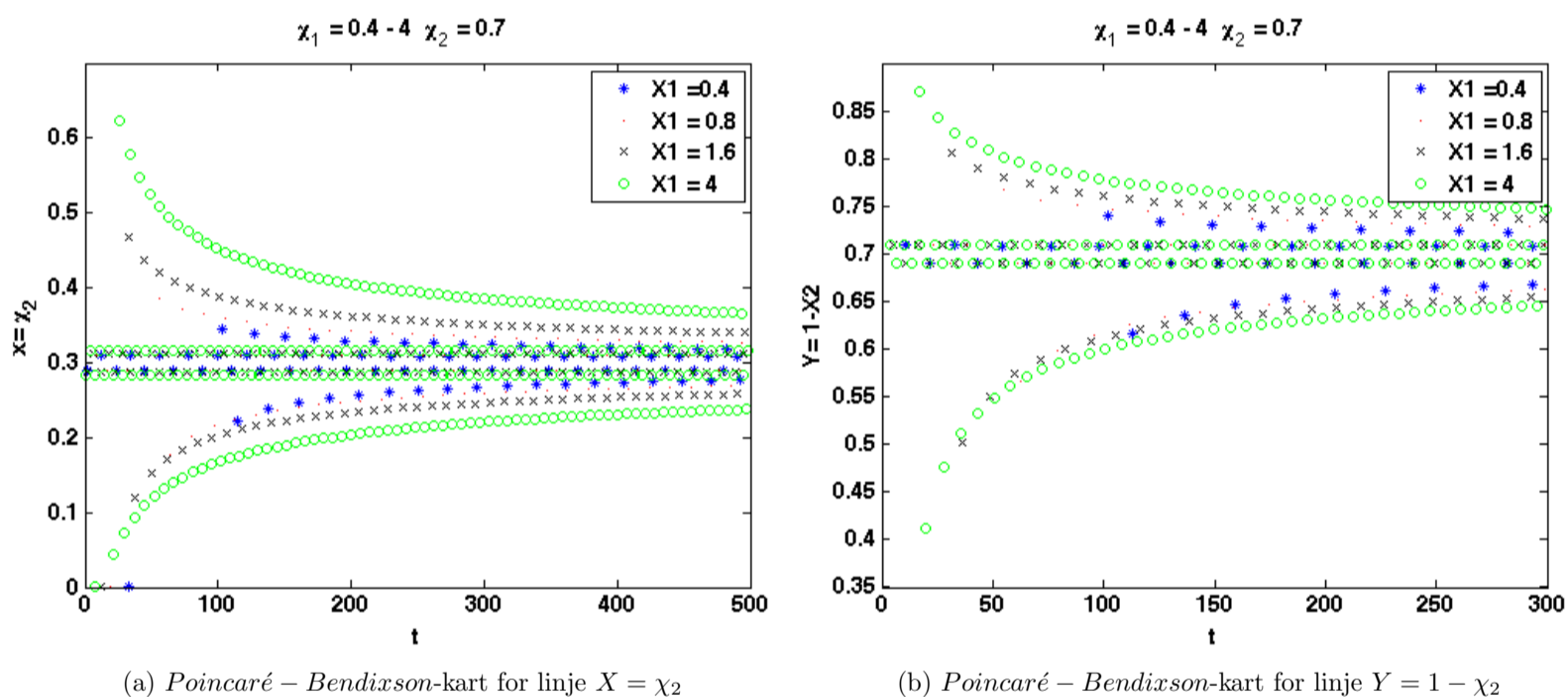
Figur 3.14: Δt er lik ζ . Ingen grensesyklus. I figuren (a) og (b) har me eit stabilt senter punkt i $(0.6, 0.4)$.



Figur 3.15: Δt er lik ζ .



Figur 3.16: Δt er lik ζ . Ingen grensesyklus. I figuren (a) og (b) har me eit stabilt senter punkt i (0.7, 0.3).



Figur 3.17: Her er *Poincaré - bendixson* teorem ikkje tilfredtilt når Δt er lik ζ . Ingen grensesyklus, berre eit senter. I begge plota kan me sjå at det er danna ein smal, fast avstand mellom øvre og nedre punkt i begge linjene som tilsvarer til senteret. Dette betyr at løysningane utanfå endar i senteret og ingen løysning kjem innanfrå. Senteret går rundt i likevektspunktet $(\chi_2, 1 - \chi_2)$ og held seg frå likevektspunktet. M.a.o har me ingen grensesyklus, berre eit senter. Her har me plotta med forskjellige verdiar av χ_1

3.3 Nedre Allee-terskel med grense mot utrydding

Her har me likninga (1.9) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k})(\frac{x}{A} - 1) - qEx \\ \frac{dE}{dt} = \alpha E(pqx - C) \end{cases} \quad (3.28)$$

der A er eit kritisk punkt for storleik. Dette vil seie at når bestandet som er større enn A , vil vekse mot k , men når

bestandet som er mindre enn A, er på vei mot uttrydding :

$$\begin{cases} A < x < k, \text{ positive vekst,} \\ 0 < x < A, \text{ negative vekst} \end{cases} \quad (3.29)$$

kor $0 < A < k$, k er bereevne.

No nyttar me dimensjonlaus formulering av (3.28)

$$\begin{cases} \frac{d\bar{X}}{d\tau} = \bar{X}[(1 - \bar{X})(\bar{X}\chi_3 - 1)] - \bar{E} \\ \frac{d\bar{E}}{d\tau} = \chi_1\bar{E}(\bar{X} - \chi_2) \end{cases} \quad (3.30)$$

der

$$\chi_3 = \frac{k}{A} \quad (3.31)$$

Ut frå det kan me evaluere stabiliteten. Så ser jakobimatrissa ut slik:

$$J = \begin{pmatrix} \chi_3(-3\bar{X}^2 + 2\bar{X}) + 2\bar{X} - 1 - \bar{E} & -\bar{X} \\ \chi_1\bar{E} & \chi_1(\bar{X} - \chi_2) \end{pmatrix}$$

Analyse av likevektspunkt

Me får likevektspunkt : $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{\chi_3}, 0)$, $(\chi_2, (1 - \chi_2)(\chi_3\chi_2 - 1))$.

Likevektspunkt	Eigenverdier : λ_1, λ_2	Eigenvektorar: v_1, v_2	Stabilitet
$(0, 0)$	-1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	Snp
	$-\chi_1\chi_2$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	
$(1, 0)$	$1 - \chi_3$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	Snp: $\chi_3 > 1, \chi_2 > 1$. Unp : $\chi_3 < 1, \chi_2 < 1$ Usp : $\chi_3 < 1, \chi_2 > 1; \chi_3 > 1, \chi_2 < 1$.
	$\chi_1(1 - \chi_2)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 - \chi_3 + \chi_1(1 - \chi_2) \end{bmatrix}$	
$(\frac{1}{\chi_3}, 0)$	$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{\chi_3}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	Snp : $\chi_3 < 1, \chi_3 > \frac{1}{\chi_2}$. Unp: $\chi_3 > 1, \chi_3 < \frac{1}{\chi_2}$ Usp: $\chi_3 > 1, \chi_3 > \frac{1}{\chi_2}; \chi_3 < 1, \chi_3 < \frac{1}{\chi_2}$.
	$\lambda_2 = \chi_1(\frac{1}{\chi_3} - \chi_2)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\chi_3} \\ 1 - \chi_3 + \chi_1(1 - \chi_2) \end{bmatrix}$	

Tabell 3.1: Snp = stabilt node punkt, Unp = ustabil node punkt, Usp = ustabil sadle punkt

For likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2)(\chi_3\chi_2 - 1))$ For å finne dei siste to eigenverdiane, bruker me andregradslikning for :

$$\lambda^2 - B\lambda + C \quad (3.32)$$

der

$$B = -2\chi_2^2\chi_3 + \chi_2\chi_3 + \chi_2 \quad (3.33)$$

og

$$C = \chi_2\chi_1(1 - \chi_2)(\chi_2\chi_3 - 1) \quad (3.34)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (3.35)$$

For at systemet skal vere stabilt rundt dette siste likevektspunktet, må det skje at :

$$B < 0 \quad (3.36)$$

Dette inneberer at :

$$\chi_3 > \frac{1}{2\chi_2 - 1} \quad (3.37)$$

Kva ville skje om $C < 0$? Då skulle me fått eit sadle punkt i det siste likevektspunktet. Dette ville skje om $\chi_2 > 1$ eller om $\chi_2 < \frac{1}{\chi_3}$. I begge tilfella ville det siste likevektspunktet ikkje ha falle i fyrste kvadrant.

Ein liten bemerkning her. For at betingelse (3.37) stemmer (sidan $\chi_3 > 0$), og for at likevektspunkt $(\frac{1}{\chi_3}, 0)$, $(\chi_2, (1 - \chi_2)(\chi_3\chi_2 - 1))$ ligg i fyrste kvadrant, må me ha at:

$$\chi_2 > \frac{1}{2} \quad (3.38)$$

for at systemet skal vere realistisk, dvs. alle punkta ligg i 1.Kvadrant og føresetnaden (3.37) stemmer har me at :

$$\begin{cases} \chi_1 > 0 \\ \frac{1}{2} < \chi_2 < 1 \\ 1 < \chi_3 < \infty \end{cases} \quad (3.39)$$

I denne delen kan me konkludere at :

- Likevektspunktet $(0, 0)$ skal vere eit stabilt node uansett kva verdi χ_1 og χ_2 kan ha så lenge dei to held seg innanfor sine intervall.
- Likevektspunktet $(1, 0)$ har me at $\lambda_1 < 0$ sidan føresetnaden (4.4) og at $\lambda_2 > 0$. Så får me eit sadle punkt.
- Likevektspunktet $(\frac{1}{\chi_3}, 0)$, har me at $\lambda_1 > 0$ og at λ_2 kan variere frå negativ verdi til positiv verdi. Så kan me ha enten eit sadle punkt eller ustabil node punkt. Så skal dette kritiske punktet vere ustabil uansett kva verdi λ_2 får.
- Likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2)(\chi_3\chi_2 - 1))$ skal me ha enten eit stabilt node eller stabilt spiral punkt ut frå føresetnaden (3.39).
- Her kan me sjå at det finst ein terskel på kor linjene til løysningane kan gå forbi eller det blir tiltrukke til likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2)(\chi_3\chi_2 - 1))$.
- Disse linjene som har klart å gå forbi denne terskelen, vil falle kraftig til likevektspunktet $(0, 0)$. I dette tilfelle kan me merke at løysningane vil falle kraftig nedover mot $(0, 0)$.D.v.s. at byttedyret vil dø ut og jakten vil gi seg. Det som skjer, er at kurvene til løysningane får negative stigningstal. Dette skjer når A (kritisk punkt for storleik) blir altfor stor i likninga (3.30) s.a.

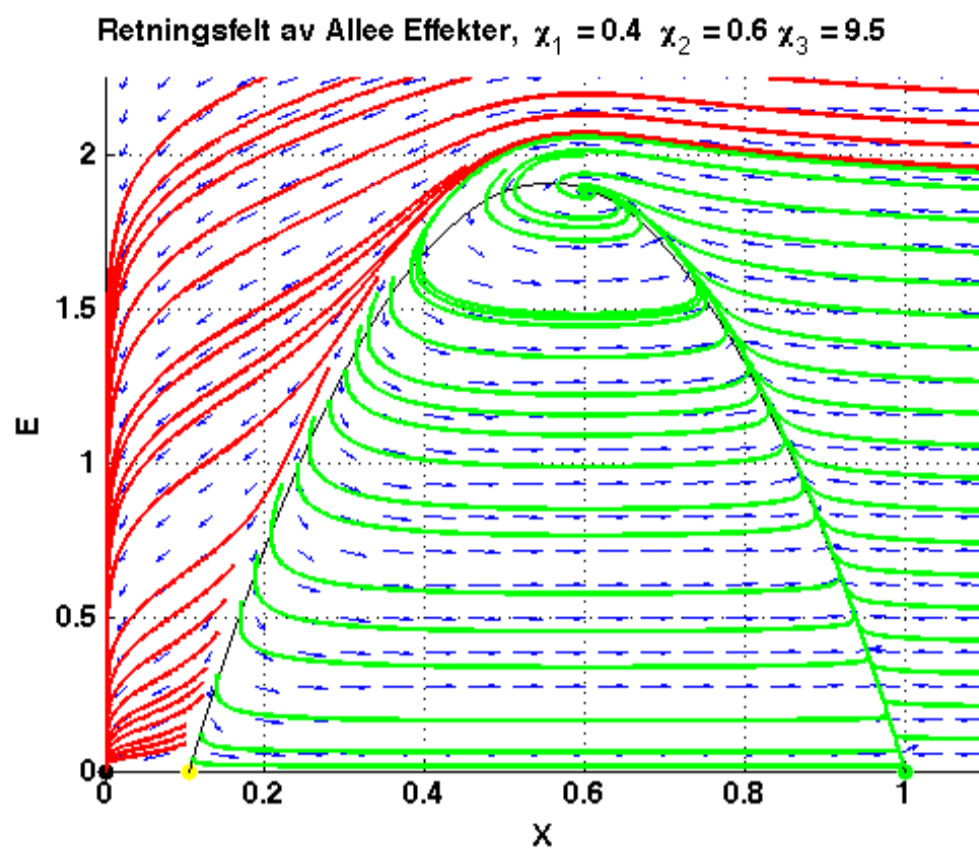
$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k})(\frac{x}{A} - 1) - qEx \quad (3.40)$$

blir negative. Og dette skjer når:

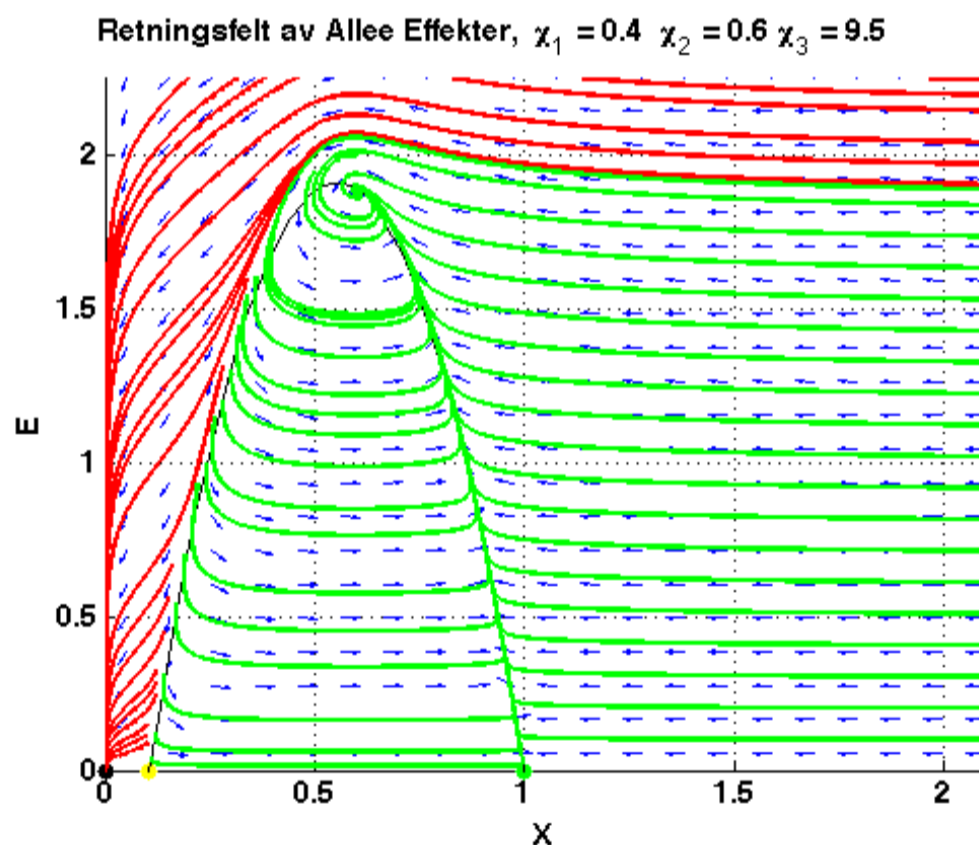
$$\frac{x}{A} - 1 < 0 \quad (3.41)$$

Eit godt døme er når systemet blir overlatt til seg sjølv og som konsekvens døyr byttedyr-bestandet ut. Då kan byttedyr-bestandet gå mot utrydding med mindre at E blir mindre og mindre s.a stiningstalet til E blir eit negativt tal så lenge k er konstant. Dvs. at me legg til ei lita forstyrning i $\frac{dE}{dt}$ s.a. denne blir mindre enn ein, då kan me redde byttedyr-bestandet.

- Me kan sjå at stabiliteten er skapt i det området som blir danna av dei likevektspunkta: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{\chi_3}, 0)$, og $(\chi_2, (1 - \chi_2)(\chi_3\chi_2 - 1))$.
- Me kan også sjå at alle linjene som kjem frå høgre side av figuren (3.19) mot det stabile området blir tiltrukke til dette området.



Figur 3.18: Fasediagram Verdiane til $\chi_1 = 0.4, \chi_2 = 0.6$ og $\chi_3 = 9.5$. $\chi_3 > \frac{1}{2\chi_2 - 1}$



Figur 3.19: Fasediagram. Verdiane til $\chi_1 = 0.4, \chi_2 = 0.6$ og $\chi_3 = 9.5$. $\chi_3 > \frac{1}{2\chi_2 - 1}$

Her kan me sjå at stabilitet er skapt i det området som blir danna av desse likevektspunkta: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{\chi_3}, 0)$, og $(\chi_2, (1 - \chi_2)(\chi_3\chi_2 - 1))$. I dette området kan \bar{X} -byttedyr-bestandet og \bar{E} -rovdyr-bestandet ha eit godt samliv s.a. byttebestandet ikkje er trua til utrydding. Men når jakta eller depredasjonen blir større og går over det grensa området, då vil \bar{X} -byttedyr-bestandet synke kraftig til null. Då A (kritisk Punkt for storleik) er blitt altfor stort s.a. føresetnaden (3.41) blir tilfredstilt, og då finst det ingen dyr som rovdyr-bestandet kan utnytte. Då er byttebestandet på vei til å bli utdøydd. Me har vist at sjølv om me stoppar å jakte, så vil ikkje byttebestandet ta seg opp igjen

sidan kurvene til løysningane har tatt eit negativt stigningstal. Då vil byttedyr-bestandet dø ut. Dette skjer når A (kritisk punkt for storleik) blir altfor stor i likninga (3.30). Då er me for seint ute til å redde byttedyr-bestandet. Men dersom dette skjer før å stoppe utryddingsprosessen ($x < A$), bør me innføre nye x og prøve å redusere A s.a. byttedyr-bestandet blir større igjen og s.a x og E kjem til det trygge området som er danna mellom likevektspunkta: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{\chi_3}, 0)$, og $(\chi_2, (1 - \chi_2)(\chi_3\chi_2 - 1))$.

Kapittel 4

Diskusjon

Frå ikkje-dimensjonalisering av Antropogenisk Allee Effekt (AAE) får me at :

$$\chi_1 = \frac{\alpha pqk}{r}, \quad \chi_2 = \frac{c}{pqk} \quad (4.1)$$

kor : c er kostnaden per dyr, p er prisen per dyr, q er fangeferdigheit, og k er berevnen. M.a.o. er $[\chi_2]$ einingar lik 1. Og frå denne modellen har me funne ut at :

$$0 < \chi_2 < 1 \quad (4.2)$$

og dette vil seie at kostnaden er mindre enn prisen og jakta vil svare seg. Som konsekvens av dette, vil dyrebestandet ikkje bli redusert til utrydding. Antropogenisk Allee Effekt (AAE) er ikkje så opplysende som dei to andre modellane. Denne modellen (AAE) gjer veldig lite informasjon om kortid me kan stoppa å jakta for at dyrebestandet kan ta seg opp igjen som i den andre modellen (Antropogenisk Allee Effekt (AAE) med tidsforskyvinga Δt). M.a.o. får me aldri informasjon om det finst ein grensesyklus som påpeiker at me kan få ei berekraftig jakt som ikkje representerer ein trussel for byttedyr-bestandets eksistens. Me får aldri informasjon om eit område eller funksjon i fasediagrammet s.a jakta ikkje driv dyrebestandet mot utrydding som i den tredje og siste modellen (Nedre Allee-terstel med grense mot utrydding). Kva skjer om me driv ei ukontrollert jakt eller drift? Jo, på ei kort tid kan det vere veldig lønsamt sidan byttedyr-bestandet er stort nok og den ikkje er så vanskeleg å få tak i, men etterkvart vil byttedyr-bestandet begynne å bli redusert, og sidan me ikkje har noko informasjon om kortid me kan stoppa før byttedyr-bestandet er trua til utrydding (grensesyklus), begynner drifta å bli redusert. Om me har drive ei ikkje-berekraftig drift, så blir byttedyr-bestandet utrydda. Frå eit økonomisk synspunkt, er det ikkje lønsamt. Eit godt eksempel kan me finne i fiskeindustri eller fiskerinæringa når det er drive ei ikkje-berekraftig utnytting av ressursane i havet. Plutselig forsvinn artane frå havet, og det blir stadig mindre havfiske, færre fiskarar og færre arbeidsplasser. Antropogenisk Allee Effekt (AAE) med tidsforskyvinga Δt - modellen tek hensyn til tidsforskyving. Her får me ein berekraftig modell når *Poincaré – Bendixson* teoremet er tilfredstilt [5]. I denne modellen får me ei tilnærmingstid i forhold til χ_1 og χ_2 s.a. me har grensesyklusen når:

$$\Delta t > \frac{1}{\chi_1(1 - \chi_2)} \quad (4.3)$$

V.h.a. Δt kan me bestemme kortid me kan stoppa å jakta for at dyrebestanden (byttebestanden) tek seg opp igjen. Dette er ei god hjelp for å drive ei langsiktig berekraftig jakt s.a. at vårt økosystem ikkje blir skada. Her har me forsatt at :

$$0 < \chi_2 < 1 \quad (4.4)$$

Dette betyr at når jakta er stor (p.g.a kostnaden er mindre enn prisen, er jakta lønsam), vil dyrebestandet bli redusert kraftig så lenge grensesyklusen ikkje er danna (så lenge *Poincaré-Bendixson*-teoremet ikkje er tilfredstilt). M.a.o er byttebestandet trua til utrydding. Dette inneberer at føresetnaden (ulikhetslikning 4.3) ikkje er tilfredstilt. Men når føresetnaden (ulikhetslikning 4.3) er tilfredstilt, m.a.o er grensesyklusen danna, har vi vel bærekraftig jakt for liten Δt óg. Det me har funne er at dersom Δt er stor nok, finnes det ei svingande løysning i form av ein grensesykel. Faren ligg i om denne svinginga blir for stor og byttedyr likevel går mot utrydding. Om me ser dette frå eit økonomisk perspektiv, er det lurt å drive ei berekraftig drift s.a. me kan halde drifta lenge og arbeidsplassar kan behaldast (som fiskeindustri til døme.).

I den siste modellen får me eit nytt tal χ_3 kor $\chi_3 = \frac{k}{A}$ og kor k står for berevna og A står for Allee-tersekelen. Og intervallet for χ_3 er: $1 < \chi_3 < \infty$. I tillegg får me eit kortare intervall for χ_2 : $\frac{1}{2} < \chi_2 < 1$. Me kan seie litt meir

nøyaktig for χ_2 -verdi. Denne modellen er ganske opplysende i forhold med den fyrste. I denne modellen får me verdi for χ_2 og for χ_3 opp i ein føresetnad :

$$\chi_3 > \frac{1}{2\chi_2 - 1} \quad (4.5)$$

slik at me kan ha eit stabilt område og ha ei berekraftig drift.

Når den føresetnaden er tilfredstilt, blir det danna eit stabilt område i likevektspunktet $(\chi_2, (1 - \chi_2)(\chi_3\chi_2 - 1))$ kor løysningene til \bar{X} og \bar{E} aldri blir null. Me ser her igjen at ei stor og ukontrollert jakt kan føre eit byttebestand til utrydding. Dette ser me når jakta er stor s.a. løysningane går forbi det stabile området som medfører at byttedyr-bestandet går mot null (utrydding), og sjølvstakt jakta fell kraftig nedover mot null og byttebestandet blir utrydda. Då seier me at føresetnaden (4.5) ikkje er tilfredstilt. Men når denne føresetnaden er tilfredstilt og det stabile området dannast, då kan me innanfor dette området ha ei berekraftig jakt. Økonomisk sett er denne modellen ganske god og lønnsam. Om me klarer å stadfeste det stabile området, då kan me drive ei stor drift. Det vil seie at me begynner å jakta eller å utnytte byttedyr-arten endå høgare enn terskelen , og på ein eller annan måte reduserer me jakta s.a. me kjem nedover mot det stabile området s.a. byttedyr-bestandet ikkje blir trua til utrydding. Om me har gått forbi det området og byttedyr-bestandet nærmer seg null, då kan me leggje nokre nye x (nye individ) til byttedyr-bestandet og redusere jakta kraftig samtidig s.a. løysningene kjem i det stabile området og då har me redda byttedyr-bestandet frå utrydding. Til vidare studier, er det lurt å byggje vidare på at ved å leggje tidsforskyving Δt til i likninga (3.30) med tanke på eit djuparegåande studie. Desse to siste modellane er meir omfattande og opplysende angående ei berekraftig drift.

Kapittel 5

Konklusjon

Økosystemet er kompleks med vekselvirkning mellom mange artar som ein kan jakte på. Her har me prøvd å illustrere ein forenkla beskrivelse av den vekselvirkninga /systemet som involverer eit byttedyr og jakt. Sjølv om dette er eit enkelt system, er det ei føremon å lære oss om dynamikken i systemet. Ut frå denne oppgåva kan me dra nokre avgjerande slutningar. Menneskas grådighet til å fange sjeldne artar, kan føre desse artane til utrydding. Det såg me når me løyste den Antropogenisk Allee Effekt- likninga(3.4). Det såg lysare ut når me løyste Antropogenisk Allee Effekt- likninga med tidsforskyvning Δt , og v.h.a. føresetnadenen (3.23) fekk me grensesyklusen kor me kunne drive ei fornuftig og berekraftig drift. For å drive ei berekraftig jakt eller drift kan me ha den tredje modellen s.a. me aldri fører jakta av byttebestandet under utryddingsterskel. Det som me kan sjå i denne modellen, er at sjølv om me stoppar å jakte på eit visst nivå kor det finst nokre individ igjen, og det har oppnådd eit stort A (Allee-terskel), er det nesten umogleg å få byttebestanden til å vekse igjen. Då er det ingen veg tilbake med mindre at me legg til nokre individ s.a det blir fleire individ i byttedyr-bestandet, og jakta må bli redusert for at me kjem inn i eit berekraftig system. Det som kan vere lurt og som vil vere temaet til vidare studier i den andre modellen, er å finne ein funksjon som tilbakelegg eller dannar det stabile området mellom desse kritiske punkta til kvar art i naturen sidan ein art kan påvirke ein annan art, for at me kan drive ei berekraftig utnytting av artane i naturen. Etter at me har funne den funksjonen, då kan me drive med ein holdbar og fornuftig utnytting av naturens ressursar. Dei to siste modellane er veldig greie og gode angående å finne eit stabilt område kor me kan drive ei berekraftig jakt eller drift s.a byttedyr-bestandet ikkje er trua til utrydding, og økonomisk sett er dei fornuftige s.a. at me kan drive drifta lenge. Eit viktig punkt er at me bør drive ei berekraftig jakt og aldri føre ein art til utrydding. Husk at me lever i eit organisert tilkopl system kor eins handling kan påvirke alle. Me lever på ein klode der alt heng saman. Det vil seie at om me driv ein art til utrydding, vil me øydeleggje føda og habitatet for nokre andre artar. Og dette er ein dominoeffekt; før eller seinare vil vår eigen art få det tilbake. Til vidare studier kan det vere positivt og lurt å leggje Δt (tidsforskyvinga) i likninga (3.30) s.a. me får ein grensesyklus for ei berekraftig drift i tillegg til ei lang og sikker verksemd.

Litteratur

- [1] Halvor Aarnes. *Allee-effekt*. StoreNorske leksikon, <https://snl.no/Allee-effekt>. Besøk: 2017
- [2] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. NY:, 1994. ISBN 0-2012-54344-3
- [3] Franck Courchamp, Elena Angulo, Phillippe Rivalan, Richard J. Hall, Laetitia Signoret, Leigh Bull, Yves Meinard *Rarity Value and Species Extinction : The Anthropogenic Allee Effect* . Universite Paris-Sud, Orsay, France:, 2006.
- [4] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems*. NY:, 2010.
- [5] *Differensialligninger og Dynamiske Systemer*. Wikipendium. <https://www.wikipendium.no/TMA4165DifferensialligningerogDynamiskeS>
Besøk: 2017
- [6] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen. *Fluid Mechanics, 6th Edition*. Utgave 5. London, 2016. ISBN 978-0-12-382100-3.
- [7] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney *Differential Equations, Dynamical Systems and Introduction to Chaos*. Utgave 2. USA:, 2004. ISBN -13: 978-0-12-349703-1.

Tillegg A

Program listing

Matlab Code

- AlleLimitCycle.m . Denne koden bruker me i den fyrste modellen.

```
1 close all;
2 clear all;
3 clc;
4
5 %verdiar for \chi_{1} og \chi_{2}
6 X_1= .4;
7 X_2=.7;
8 betingelse = 1/(X_1*(1-X_2));
9
10 % Her er tau st{\o}rre enn f{\o}resetnad
11 %tau=1.1 *1/(X_1*(1-X_2));
12 tau = 1*betingelse;
13
14 %Allee-likning
15 RHS= alleeTauDimLausEq( X_1,X_2,tau );
16
17 %% Teigner fasediagram
18 xlim=1;
19 ylim=.5;
20
21 hold on
22 xInterval= [0, xlim];
23 yInterval= [0, ylim];
24 t=0;
25
26 %xIntervall,yIntervall er intervaller til grafen
27 %xx,yy, er punkter der pilane til fase diagram starter(origen)
28 %u, v er stigningstall for pilane(alt er lin{\ae}rsert).
29 tetthet =30;
30 [ xx,yy,u,v ] = quiverElementer( RHS, xInterval,yInterval,t,tetthet );
31 %scale= 1;
32 quiver(xx,yy,u,v)% ,scale);
33 %title(['\chi_1 = ', num2str(X_1),' ', '\chi_2 = ', num2str(X_2) ]);
34
35 %% Plotter kristiske punkter.
36 hold on
37
38 %% Plotter kristiske punkter.
39 kritiskPunktPlotting( X_2 )
40
41 %% L{\o}yser likninga v.h.a ode45-funksjon.
42
43 minTid = 0;
44 maxTid = 1000;
45 tidsrom =[minTid,maxTid];
46
```

```

47 %RHS er diff. likning
48 %Tidsrom er [0 maxTid]
49 % IC er initial betingelse.
50 %T er tidsintervall.
51 %X er l{\o}ysning X(x,y)
52 %initialBetingelse(1,X_2) er IC1
53 %initialBetingelse(2,X_2) er IC2.IC er Initial Condition
54 %odetall for gulle linjer. partall for raude linjer
55 %% for spiral
56 % [T1,X1] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(1,X_2) );
57 % [T2,X2] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(2,X_2) );
58 % [T3,X3] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(3,X_2) );
59 % [T4,X4] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(4,X_2) );
60 % [T5,X5] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(5,X_2) );
61 % [T6,X6] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(6,X_2) );
62 % [T7,X7] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(7,X_2) );
63 % [T8,X8] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(8,X_2) );
64 % [T9,X9] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(9,X_2) );
65 % [T10,X10] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(10,X_2) );
66 % [T11,X11] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(11,X_2) );
67 % [T12,X12] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(12,X_2) );
68 % [T13,X13] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(13,X_2) );
69 % [T14,X14] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(14,X_2) );
70 % [T15,X15] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(15,X_2) );
71 % [T16,X16] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(16,X_2) );
72 % [T17,X17] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(17,X_2) );
73 % [T18,X18] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(18,X_2) );
74 % [T19,X19] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(19,X_2) );
75 % [T20,X20] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(20,X_2) );
76 % [T21,X21] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(21,X_2) );
77 % [T22,X22] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(22,X_2) );
78 % [T23,X23] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(23,X_2) );
79 % [T24,X24] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(24,X_2) );
80 % [T25,X25] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(25,X_2) );
81 % [T26,X26] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(26,X_2) );
82 % [T27,X27] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(27,X_2) );
83 % [T28,X28] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(28,X_2) );
84 %%
85 % [T29,X29] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(29,X_2) );
86 % [T30,X30] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(30,X_2) );
87 % [T31,X31] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(31,X_2) );
88 % [T32,X32] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(32,X_2) );
89 % [T33,X33] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(33,X_2) );
90 % [T34,X34] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(34,X_2) );
91 % [T35,X35] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(35,X_2) );
92 % [T36,X36] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(36,X_2) );
93 % [T37,X37] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(37,X_2) );
94 % [T38,X38] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(38,X_2) );
95 % [T39,X39] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(39,X_2) );
96 % [T40,X40] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(40,X_2) );
97 % [T,X] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(,X_2) );
98
99 %% Plotting av l{\o}ysninger i fasediagram
100 %for spiral
101 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X1,X2 )
102 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
103 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X5,X6 )
104 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X7,X8 )
105 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X9,X10 )
106 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X11,X12 )
107 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X13,X14 )
108 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X15,X16 )
109 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X17,X18 )
110 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X19,X20 )
111 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X21,X22 )
112 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X23,X24 )
113 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X25,X26 )
114 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X27,X28 )
115 %% Reserve punkt

```

```

116
117 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X25,X26 )
118 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X27,X28 )
119 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X29,X30 )
120 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X31,X32 )
121 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X33,X34 )
122 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X35,X36 )
123 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X37,X38 )
124 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X39,X40 )
125
126 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X1,X2 )
127 % % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
128 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X5,X6 )
129 % % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X7,X8 )
130 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X9,X10 )
131 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X11,X12 )
132 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X13,X14 )
133 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X15,X16 )
134 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X17,X18 )
135 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X19,X20 )
136 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X21,X22 )
137 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X23,X24 )
138 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X25,X26 )
139 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X27,X28 )
140 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X29,X30 )
141 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X31,X32 )
142 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X33,X34 )
143 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X35,X36 )
144 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X37,X38 )
145 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X39,X40 )
146
147
148
149 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
150 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
151 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
152 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
153 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
154 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
155 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
156
157 %% For senteret
158 % %Innenfor senter
159 [T1,X1] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(1,X_2) );
160 [T2,X2] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(2,X_2) );
161 [T3,X3] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(3,X_2) );
162 [T4,X4] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(4,X_2) );
163 %
164 %
165 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X1,X2 )
166 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
167 % % % %loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
168 % % % %loysningPlotting( xInterval,yInterval,X5,X6 )
169 % % % % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
170 % % % % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
171 % % % % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
172 % % % % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
173 % % %
174 %Utenfor senter
175 %initialBetingelseUtenforSemtrum( numer)
176 % loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X1,X2 )
177 [T3,X3] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(1) );
178 [T4,X4] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(2) );
179 [T5,X5] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(3) );
180 [T6,X6] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(4) );
181 [T7,X7] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(5) );
182 [T8,X8] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(6) );
183 [T9,X9] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(7) );
184 [T10,X10] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(8) );

```

```

185 [T11,X11] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(9) );
186 [T12,X12] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(10) );
187 [T13,X13] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(11) );
188 [T14,X14] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(12) );
189 [T15,X15] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(13) );
190 [T16,X16] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(14) );
191 [T17,X17] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelseUtenforSemtrum(15) );
192 %
193 loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X3,X4 )
194 loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X5,X6 )
195 loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X7,X8 )
196 loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X9,X10 )
197 loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X11,X12 )
198 loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X13,X14 )
199 loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X15,X16 )
200 % % % % loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X17,X18 )
201 % % % % loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X19,X20 )
202 % % % % loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X21,X22 )
203 % % % % loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X23,X24 )
204 % % % % loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X25,X26 )
205 % % % % loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X27,X29 )
206 % % % % loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X1,X30 )
207 % % % % loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X1,X2 )
208 % % % % loysningPlottingGreen( xInterval,yInterval,X1,X2 )
209
210 y = ylabel('E');
211 x = xlabel('X');
212 set([x,y],'fontsize',15,'FontWeight','bold')
213 set(gca,'FontWeight','bold')% st{\o}rre tall
214 axis([0 1 0 .5])
215 set(gca,'fontSize',15)
216 t = title(['Retningsfelt av Allee Effektar, \chi_{1} = ',num2str(X.1),' \chi_{2} = ...
           ',num2str(X.2)]);
217 set(t, 'FontSize', 15,'FontWeight', 'bold');
218 hold off %Release the figure to be overwritten.

```

- alleeTauDimLauEq

```

1 function [ RHS ] = alleeTauDimLauEq( X.1,X.2,tau )
2
3 %verdiar for \chi_{1} og \chi_{2}
4 %Allee-difflikning
5 RHS= @(t,y) [y(1)*(1 - y(1)-y(2));...
6             y(2)*X.1*(y(1)-tau*(y(1)*(1 - y(1)-y(2)))-X.2)];
7
8
9 end

```

- quiverElementer.m

```

1 function [ xx,yy,u,v ] = quiverElementer( RHS, xInterval,yInterval,t,tetthet )
2
3 %xIntervall, yIntervall er intervaller til grafen
4 %xx, yy, er punkter der pilane til fase diagram starter (origen)
5 %u, v er stigningstal for pilane(alt er lin{\ae}rsert).
6 x0 = xInterval(1);
7 xlim = xInterval(2);
8 y0 = yInterval(1);
9 ylim = yInterval(2);
10
11 % Lagar punkt og retning til vektorane
12 x=linspace(x0,xlim,tetthet);%linspace(-xlim,xlim,22);
13 y=linspace(y0,ylim,tetthet);%linspace(-ylim,ylim,22);
14
15 [xx,yy]=meshgrid(x,y);
16 u = zeros(size(xx));
17 v = zeros(size(xx));

```

```

18
19
20 for i = 1:numel(xx)
21     dx = RHS(t, [xx(i); yy(i)]);
22     ll= sqrt(dx(1)*dx(1)+dx(2)*dx(2)); % Scaling of the length
23     u(i) = dx(1)/ll;
24     v(i) = dx(2)/ll;
25 end
26
27
28 end

```

- initialBetingelse.m
- kritiskPunktPlotting.m
- loyserDimLauTau.m

```

1 function [ T,X] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, IC )
2 % l{\o}yser Allee-difflikning
3 %RHS er diff. likning
4 %Tidsrom er [0 maxTid]
5 % IC er initial betingelse.
6 %T er tidsintervall.
7 %X er l{\o}ysning X(x,y)
8 options = odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
9
10 [T,X] = ode45(RHS,tidsrom,IC,options ); % This solves the problem.

```

- loysningPlottingGreen
- loysningPlotting

```

1 function [ ] = loysningPlotting( xInterval,yInterval,X1,X2 )
2 % Plotter X1 og X2 er l{\o}ysninger
3 %X1 og X2 er l{\o}ysninger
4 x0 = xInterval(1);
5 xlim = xInterval(2);
6 y0 = yInterval(1);
7 ylim = yInterval(2);
8 plot(X1(:,1),X1(:,2),'r','DisplayName','Sentre','LineWidth',2) %det dukker ikkje opp ...
9     n{\aa}r chi2 = chi1 =0.9.
10 det er raudt bare for senteret.
11 plot(X2(:,1),X2(:,2),'r','LineWidth',2)
12
13 axis([0 xlim 0 ylim])
14 %for senter
15 xlabel('t,x')
16 ylabel('y')
17 grid
18
19 ax = gca;
20 ax.XAxisLocation = 'origin';
21 ax.YAxisLocation = 'origin';
22 end

```

- AlleLimitCycle2.m (å finne grensesyklus)

```

1 % denne koden brukes til {\aa} finne grensesyklusen
2
3 close all;
4 clear all;
5 clc;
6
7

```

```

8 X_1= 4;
9 X_2=.7;
10 betingelse = 1.1*1/(X_1*(1-X_2));
11 % Her er tau st{\o}rre enn f{\o}resetnad.
12 %tau=1.1 *1/(X_1*(1-X_2));
13 tau = betingelse;
14
15 %Allee likning
16 RHS= alleeTauDimLausEq( X_1,X_2,tau );
17
18 %% Teigner fase diagram
19 xlim=1.1;
20 ylim=2;
21
22 hold on
23 xInterval= [0, xlim];
24 yInterval= [0, ylim];
25 t=0;
26
27 %xIntervall,yIntervall er intervaller til grafen
28 %xx,yy, er punkter der pilane til fase diagram starter(origen)
29 %u, v er stigningstall for pilane(alt er lin{\ae}rsert).
30 tetthet = 25;
31 [ xx,yy,u,v ] = quiverElementer( RHS, xInterval,yInterval,t,tetthet );
32 %scale= 1;
33 quiver(xx,yy,u,v)% ,scale);
34 %title(['\chi_1 = ', num2str(X_1),' ', '\chi_2 = ', num2str(X_2) ]);
35
36 %% Plotter kristiske punkter.
37 hold on %hold on % Assure that we draw solutions in the same figure.
38 kritiskPunktPlotting( X_2 )
39
40 %% L{\o}yser likninga v.h.a ode45-funksjon.
41
42 minTid = 0;
43 maxTid = 1000;
44 tidsrom =[minTid,maxTid];
45 %RHS er diff. likning
46 %Tidsrom er [0 maxTid]
47 % IC er initialbetingelse.
48 %T er tidsintervall.
49 %X er l{\o}ysning X(x,y)
50 %initialf{\o}resetnad (1,X_2) er IC1
51 %initialf{\o}resetnad (2,X_2) er IC2.IC er Initial Condition
52 %odetall for gulle linjer. partall for raude linje
53 [T1,X1] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(1,X_2) );
54 [T2,X2] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(2,X_2) );
55 [T3,X3] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(3,X_2) );
56 [T4,X4] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(4,X_2) );
57 [T5,X5] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(5,X_2) );
58 [T6,X6] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(6,X_2) );
59 [T7,X7] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(7,X_2) );
60 [T8,X8] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(8,X_2) );
61 [T9,X9] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(9,X_2) );
62 [T10,X10] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(10,X_2) );
63 [T11,X11] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(11,X_2) );
64 [T12,X12] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(12,X_2) );
65 [T13,X13] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(13,X_2) );
66 [T14,X14] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(14,X_2) );
67 [T15,X15] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(15,X_2) );
68 [T16,X16] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(16,X_2) );
69 [T17,X17] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(17,X_2) );
70 [T18,X18] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(18,X_2) );
71 [T19,X19] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(19,X_2) );
72 [T20,X20] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(20,X_2) );
73 [T21,X21] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(21,X_2) );
74 [T22,X22] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(22,X_2) );
75 [T23,X23] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(23,X_2) );
76 [T24,X24] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(24,X_2) );

```



```

77 [T25,X25] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(25,X_2) );
78 [T26,X26] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(26,X_2) );
79 [T27,X27] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(27,X_2) );
80 [T28,X28] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(28,X_2) );
81 [T29,X29] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(29,X_2) );
82 [T30,X30] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(30,X_2) );
83 [T31,X31] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(31,X_2) );
84 [T32,X32] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(32,X_2) );
85 [T33,X33] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(33,X_2) );
86 [T34,X34] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(34,X_2) );
87 [T35,X35] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(35,X_2) );
88 [T36,X36] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(36,X_2) );
89 [T37,X37] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(37,X_2) );
90 [T38,X38] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(38,X_2) );
91 [T39,X39] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(39,X_2) );
92 [T40,X40] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse2(40,X_2) );
93 %[T,X] = loyserDimLauTau(RHS,tidsrom, initialBetingelse(X_2) );
94
95 %% Plotting av l{\o}ysninger i fase diagram
96 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X1,X2 )
97 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
98 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X5,X6 )
99 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X7,X8 )
100 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X9,X10 )
101 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X11,X12 )
102 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X13,X14 )
103 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X15,X16 )
104 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X17,X18 )
105 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X19,X20 )
106 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X21,X22 )
107 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X23,X24 )
108 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X25,X26 )
109 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X27,X28 )
110 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X29,X30 )
111 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X31,X32 )
112 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X33,X34 )
113 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X35,X36 )
114 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X37,X38 )
115 loysningPlotting( xInterval,yInterval,X39,X40 )
116
117
118
119 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
120 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
121 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
122 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
123 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
124 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
125 % loysningPlotting( xInterval,yInterval,X3,X4 )
126 y = ylabel('E');
127 x = xlabel('X');
128 set([x,y], 'fontSize',15,'FontWeight', 'bold')
129 set(gca, 'FontWeight', 'bold')
130 set(gca, 'fontSize',15)
131 t = title(['Retningsfelt av Allee Effektar, \chi_{1} = ',num2str(X_1),' \chi_{2} = ...
           ',num2str(X_2)]);
132 set(t, 'FontSize', 15,'FontWeight', 'bold');
133 hold off

```

- initialBetingelse2.m
- loysningPlotting.m
- AlleeEkteLimitCycle.m (for siste modell)
- alleeDimLausEkteEq.m

```

1 % Denne koden bruker me i den tredje modellen

```

```

2 clear all;
3 close all;
4 clc;
5
6 X_2=.6;
7 X_1=.4;
8
9 betingelse = 1/(2*X_2-1);
10
11 critical=1.9 *betingelse;
12
13 X_3=critical;
14
15 %Allee likning
16 RHS= alleeDimLausEkteEq( X_1,X_2,X_3 );
17
18 %% Teigner fase diagram
19 xlim=2.1;
20 ylim=2.25;
21 hold on
22 xInterval= [-xlim, xlim];
23 yInterval= [-ylim, ylim];
24 t=0;
25
26 %xIntervall,yIntervall er intervaller til grafen
27 %xx,yy, er punkter der pilane til fase diagram starter(origen)
28 %u, v er stigningstall for pilane(alt er lin{\ae}rsert).
29 %[ xx,yy,u,v ] = quiverElementer( RHS,xInterval,yInterval,t );
30 tetthet =42;
31 [ xx,yy,u,v ] = quiverElementer( RHS, xInterval,yInterval,t,tetthet );
32
33 scale= .3;
34 quiver(xx,yy,u,v,scale);
35 t = title(['Retningsfelt av Allee Effekter, \chi_1 = ', num2str(X_1),' ', '\chi_2 ...
           = ', num2str(X_2),' \chi_3 = ', num2str(X_3) ]);
36
37 %% Plotter kritiske punkter.
38 hold on
39 kritiskPunktPlottingekte( X_2 ,X_3)
40 %%
41 minTid = 0;
42 maxTid = 10000;
43 tidsrom = [minTid,maxTid];
44 %RHS er diff. likning
45 %Tidsrom er [0 maxTid]
46 % IC er initial betingelse.
47 %T er tidsintervall.
48 %X er l{\o}ysning X(x,y)
49 % Plotting av l{\o}ysninger i fase diagram
50 %dette er aktuelt.
51 loyserMedAlleInitialCondition( RHS,tidsrom, xInterval,yInterval) %p{\aa} venstre side ...
           av linja (asymptotet) asymptote( X_3 )
52
53 %%
54 loyserMedAlleInitialConditionInnenfor( RHS,tidsrom, xInterval,yInterval)%p{\aa} ...
           venstre side av linja (asymptotet)
55 y = ylabel('E');
56 x = xlabel('X');
57 set([x,y], 'fontSize',15, 'FontWeight', 'bold')
58 set(gca, 'FontWeight', 'bold')
59 set(gca, 'fontSize',15)
60 %t = title(['Direction field of AlleeFunction equation , \chi_{1} = ',num2str(X_1),' ...
           \chi_{2} = ',num2str(X_2)]);
61 set(t, 'FontSize', 15, 'FontWeight', 'bold');
62 hold off

```

- kritiskPunktPlottingekte.m
- loyserMedAlleInitialCondition.m

- loyserMedAlleInitialConditionInnenfor.m
- linjeXLikChi2.m (*Poincaré – Bendixson* kartlagning)
- poincareX.m
- finnKonvergenceX.m
- linjeY1MinusChi2.m (*Poincaré – Bendixson* kartlagning)
- poincarey.m
- finnKonvergenceY.m
- bifurcation1.m (bifurcation kurve)