

En studie av Letterplace- og
Co-letterplace-idealener over et poset P , når
 $|P| = 2, 3$

Nils Petter Storset

November 20, 2017



UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Innhold

1	Monomiale idealer	7
1.1	Simplisielle komplekser	8
1.2	Letterplace- og Co-letterplace-idealene	10
2	Resolusjoner	15
2.1	Hilberttrekker	16
3	Cohen-Macaulay- og Gorenstein-ringer	19
3.1	Trappeidealet	21
4	$\text{Hom}(\circ\circ, [n])$	23
5	$\text{Hom}([2], [n])$	31
6	$\text{Hom}(\circ\circ\circ, [n])$	37
7	$\text{Hom}([3], [n])$	49
8	$\text{Hom}(V, [n])$	57
9	$\text{Hom}(\Lambda, [n])$	61
10	$\text{Hom}(L, [n])$	63
11	Programmering i Macaulay2	65

Forord

Denne oppgaven viser en utforskning som startet i januar 2017 og varte fram til 20. november samme året.

Som lærerstudent ligger kanskje ikke ren matematikk nærmest kallet, og jeg har derfor til tider vært betenkt over både omfanget og utseendet til en slik oppgave, i motsetning til en fagdidaktisk versjon. Motivasjonen min for dette valget var kort og greit; nysgjerrighet. Det er utrolig hvor kompleks matematikken kan bli når man starter med å tegne strekfigurer og begynner å fargelegge.

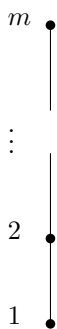
Jeg ble positivt overrasket over hva dette emnet, kombinatorisk kommutativ algebra, rommet og hvor mye av dette som kan presenteres for elever i videregående skole (figurene vi får i seksjon 6 er et godt eksempel på dette), og jeg tror mye også kan presenteres som utfordrende oppgaver i grunnskolen.

Jeg er derfor evig takknemlig til min veileder, Gunnar Fløystad, som har introdusert meg til dette emnet og for de uvurderlige tilbakemeldingene underveis, hvilket foruten denne oppgaven ville vært et blankt A4-ark.

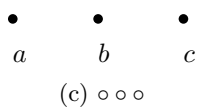
En utenlandsk journalist uttalte engang at Norge hadde en rik takkekultur, dog den kanskje ikke overgår den amerikanske. Vi takket for alt, takket for sist, og takket i like måte. Derfor er det på sin plass at jeg også takker mine gode venner som har vist engasjement for oppgaven min, deriblant Ivo Berghoef, Einar Klingøy, Svein Nedrebø jr., Johan Nordvik, m. fl. og såklart familien min.

Følgende notasjon vil bli brukt gjennom denne oppgaven:

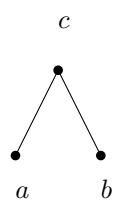
- k , en vilkårlig kropp
- S , stort sett polynomringen $k[x_1, \dots, x_n]$ eller $k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n]$
- Med et monom vil vi mene et produkt av variabler (m.a.o et polynom med bare ett ledd)
- \mathcal{I}, \mathcal{J} , posetidealer
- M en S -modul, stort sett S/I for et ideal $I \subset S$
- Navn på forskjellige poset:



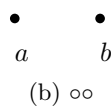
(a) $[m]$



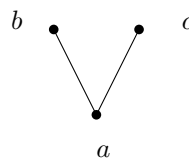
(c) $o \ o \ o$



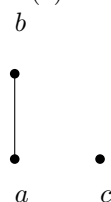
(e) Λ



(b) $o \ o$



(d) V



(f) L

- σ, τ , undermengder av $\{1, 2, \dots, n\}$

Introduksjon

I denne oppgaven presenteres det noen teoremer, men mest formodninger, knyttet til en interessant klasse av monomiale idealer kalt letterplace- og co-letterplace-idealene introdusert i artikkelen [4]. Disse fås ved å se på alle ordningsbevarende avbildninger mellom to poset, og store deler av denne oppgaven handler om å se på resolusjonen av disse. Letterplace-idealene, $L(n, P; \mathcal{J})$, har den egenskapen at de er Cohen-Macaulay, med kodimensjon $|P|$, og disse er Alexanderduale til co-letterplace-idealene, $L(P, n; \mathcal{J})$. Et naturlig spørsmål en da kan stille er:

- Hvilke Betti-tall er det mulig å få i resolusjonene? Eller er det lettere å finne en øvre og nedre skranke for Betti-tallene?

Dette spørsmålet blir stilt for de fleste poset av størrelse 3, men også for enkelte poset av størrelse 4. I hovedsak ser vi på de ekstreme posetene av størrelse 2 og 3, dette er posetene $\text{Hom}(\circ\circ, [n])$, $\text{Hom}([2], [n])$, $\text{Hom}(\circ\circ\circ, [n])$ og $\text{Hom}([3], [n])$. Disse er ekstreme i den forstand at vi har, av størrelse 3, størst frihet til å lage posetidealene i $\text{Hom}(\circ\circ\circ, [n])$ og minst frihet i $\text{Hom}([3], [n])$. Vi gir de mulige Betti-tallene til resolusjonen av Alexanderduale av co-letterplace-idealene tilhørende disse posetene.

Geometri spiller en sentral rolle i mange av argumentene, og vi vil derfor ofte snakke om kroker og spisser, og i tillegg gi en geometrisk tolkning av Alexanderduale til forskjellige co-letterplace-ideal med disse uttrykkene. I tillegg viser vi eksplisitt relasjonen mellom generatorene til disse idealene for de ekstreme posetene av størrelse 2. I noen tilfeller reduseres spørsmålet om mulige Betti-tall til et spennende geometrisk problem, som er tilfellet for posetidealene $\mathcal{J} \subset \text{Hom}(\circ\circ\circ, [n])$.

I artikkelen [1] introduseres et nytt ideal, kalt trappeidealet $B(P, n; \mathcal{J})$. $L(P, n; \mathcal{J})^A + B(P, n; \mathcal{J})^A$ viser seg å være et Gorenstein-ideal, og det simplisielle komplekset, korresponderende til idealet, viser seg å være randen til en sfære. Vi formoder hvordan resolusjonen til dette idealet ser ut for prinsipale posetidealene, og formoder, for enkelte poset, hvordan generatorene til idealet ser ut. Resolusjonen av Gorenstein-idealet ser gjerne finere ut, da vi kommer til å se en del symmetri. Hver seksjon videre i denne oppgaven vil være relatert til et poset, og vi starter hver seksjon, tilhørende et poset, med å beskrive hvordan posetet ser ut.

1 Monomiale idealer

I underseksjonen om simplisielle komplekser jobber vi over polynomringen $S = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ i n variabler. Senere, siden geometri spiller en stor rolle i argumentene når vi beskriver avbildninger mellom poset, vil vi heller jobbe over $k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n]$ (da det blir lettere å beskrive geometrien).

Med et monom vil vi mene et produkt av variabler i ringen vi jobber over. F. eks er $x_1 x_3^2 x_8$ et monom, mens $x_2 x_3 + x_5^2$ er ikke det¹. Har vi et ideal generert

¹M.a.o. er et monom et polynom med kun ett ledd

av monomer vil vi kalle dette idealet et *monomialt ideal*. Kanskje enda oftere vil vi snakke om et *kvadratfritt* monom. Dette er et monom hvor potensen til hver variabel, i monomet, er enten 0 eller 1. $x_1x_2x_5$ er et kvadratfritt monom, men $x_1x_2^3x_5$ er ikke det.

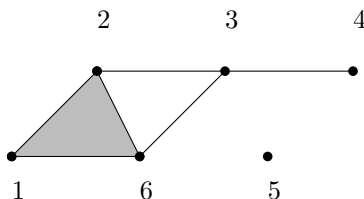
Vi starter med å se på såkalte simplisielle komplekser, som har en naturlig kobling til kvadratfrie monomer. Gjennom simplisielle komplekser vil vi definere et slags dualideal til kvadratfrie monomialidealene kalt *Alexanderdualet*, som vil spille en sentral rolle i utforskningen.

1.1 Simplisielle komplekser

Definisjon 1.1. La $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ være en mengde med hjørner. Et simplisielt kompleks over denne mengden er en samling undermengder, slik at $\tau \in \Delta$ og $\sigma \subseteq \tau$ medfører $\sigma \in \Delta$.

En undermengde $\sigma \in \Delta$ kalles et *fjes*, og vi kan la dimensjonen til et fjes σ være $|\sigma| - 1$. Da stemmer dette bra med at, f. eks, en linje har dimensjon 1, og en flate dimensjon 2. Det blir da naturlig å la dimensjonen til hele det simplisielle komplekset, $\dim(\Delta)$, være $\max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in \Delta\}$; den største dimensjonen som forekommer blant fjesene.

Eksempel 1.1. I fig. 2 er hjørnemengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og det simplisielle komplekset Δ er samlingen av undermengdene $\{1, 2, 6\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 6\}$, $\{3, 4\}$ og $\{5\}$.



Figur 2: Det simplisielle komplekset Δ

Simplisielle komplekser er bestemt av de maksimale undermengdene kalt *fasetter*. I eksempelet over bestemte vi det simplisielle komplekset bare ut fra disse (det er f. eks ikke nødvendig å nevne $\{1, 2\}$ siden undermengden er inneholdt i fasetten $\{1, 2, 6\}$). En vanlig måte å strukturere informasjon om de forskjellige dimensjonene som forekommer er gjennom en vektor:

Definisjon 1.2. La Δ være et simplisielt kompleks av dimensjon $d - 1$, og la f_i være antall fjes i Δ av dimensjon i . f -vektoren er da $f(\Delta) = (f_0, \dots, f_{d-1})$

Eksempel 1.2. For Δ som i fig. 2 er $f(\Delta) = (6, 6, 1)$, vi har m.a.o. 6 punkter, 6 linjer og 1 flate.

Elementer i et simplisielt kompleks kan sendes til monomer på en naturlig måte ved å representere $\sigma \in \Delta$ med det kvadratfrie monomet $\prod_{i \in \sigma} x_i \stackrel{\text{def}}{=} x^\sigma$.

De maksimale fasettene i forrige eksempel korresponderer da til de kvadratfrie monomene $x_1x_2x_6$, x_2x_3 , x_3x_6 , x_3x_4 og x_5 . For å få et bilde av hele figuren kunne vi ha definert et ideal $I_\Delta = (x^\sigma \mid \sigma \in \Delta)$ over $k[x_1, \dots, x_n]$, men dette er meningsløst da $I_\Delta = (x_1, \dots, x_n)$ når Δ har hjørnemengde $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Et bedre forsøk er *Stanley-Reisner-idealet*:

Definisjon 1.3. Hvis Δ er et simplisielt kompleks over hjørnemengden $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ kalles

$$I_\Delta = (x^\sigma \mid \sigma \notin \Delta)$$

det tilhørende *Stanley-Reisner-idealet*

Stanley-Reisner-idealet er generert av de minimale ikke-fasettene til Δ siden $\tau, \sigma \notin \Delta$ og $\tau \subseteq \sigma$ medfører at x^τ deler x^σ . Kvotientringen $k[\Delta] = S/I_\Delta$ kalles *Stanley-Reisner-ring*. Det flotte med Stanley-Reisner-ring er at x^σ , med $\sigma \in \Delta$, utgjør en k -basis for ringen.

Eksempel 1.3. La Δ være som i fig. 2. For å finne generatorene til idealet I_Δ ser vi at de minimale ikke-fasettene er $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$, $\{5, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$. Dermed er

$$I_\Delta = (x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_4x_6, x_5x_6, x_2x_3x_6)$$

Hvis $\bar{\sigma} = \{1, 2, 3, \dots, n\} \setminus \sigma$ er komplementet til σ kan vi lage et nytt simplisielt kompleks:

Definisjon 1.4. $\Delta^\vee = \{\bar{\sigma} \mid \sigma \notin \Delta\}$ er et simplisielt kompleks og kalles *Alexanderdualet* til Δ . Det følger også at $(\Delta^\vee)^\vee = \Delta$

Eksempel 1.4. Med Δ som i fig. 2 er Δ^\vee generert av fasettene $\{2, 4, 5, 6\}$, $\{2, 3, 5, 6\}$, $\{1, 3, 5, 6\}$, $\{2, 3, 4, 6\}$, $\{1, 3, 4, 6\}$, $\{1, 2, 4, 6\}$, $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$ og $\{1, 2, 3, 4\}$. Vi kan også regne ut det tilhørende Stanley-Reisner-idealet, og får da

$$I_{\Delta^\vee} = (x_1x_2x_4x_5, x_3x_4x_5, x_1x_2x_3x_4x_6, x_1x_2x_5x_6, x_1x_4x_5x_6)$$

Senere i oppgaven vil vi ofte gå direkte fra et kvadratfritt monomialideal I til Alexanderdualet av dette, som vi vil skrive I^A , gjennom prosedyren vi brukte i eksempelet:

1. Gitt et kvadratfritt monomialideal I , finn det simplisielle komplekset Δ slik at $I = I_\Delta$
2. Beregn Δ^\vee
3. Beregn $I_{\Delta^\vee} = I^A$

En egenskap det er verdt å merke seg er at hvis I er et kvadratfritt monomialideal generert av monomer m_1, \dots, m_r så er I^A generert av m'_1, \dots, m'_s slik at $\gcd(m_i, m'_j) \neq 1$. Dette følger av følgende proposisjon:

Proposisjon 1.1. $x^\tau \in I_{\Delta^\vee}$ hvis og bare hvis $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ for alle σ slik at $x^\sigma \in I_\Delta$

Bevis. Å bevise proposisjonen er det samme som å vise at $\tau \notin \Delta^\vee$ hvis og bare hvis $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ for alle $\sigma \notin \Delta$.

- Anta at $\tau \notin \Delta^\vee$, siden $\Delta^\vee = \{\bar{\tau} \mid \tau \notin \Delta\}$ må $\bar{\tau} \in \Delta$. Hvis $\sigma \cap \tau = \emptyset$, så vil $\sigma \subseteq \bar{\tau} \in \Delta$, så $\sigma \in \Delta$; en selvmotsigelse! Så $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$.
- Anta $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ for alle $\sigma \notin \Delta$. Hvis $\bar{\tau} \notin \Delta$ så vil $\bar{\tau} \cap \tau \neq \emptyset$; enda en selvmotsigelse! Dermed er $\bar{\tau} \in \Delta$, og $\tau \notin \Delta^\vee$.

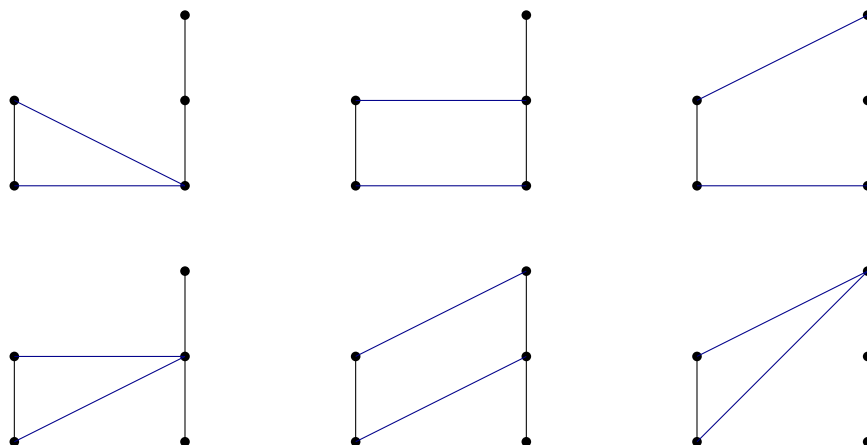
□

1.2 Letterplace- og Co-letterplace-ideal

Gitt to poset P og Q kan vi snakke om avbildninger $\phi : P \rightarrow Q$ mellom disse. En avbildning det snakkes om i denne oppgaven er såkalte *isotone* avbildninger².

Definisjon 1.5. En avbildning $\phi : P \rightarrow Q$, mellom to poset P og Q , kalles *isoton* hvis $p \leq p'$ medfører $\phi(p) \leq \phi(p')$

Som et eksempel kan vi se på de forskjellige avbildningene fra posetet [2] til posetet [3]. Disse vises i fig. 3.

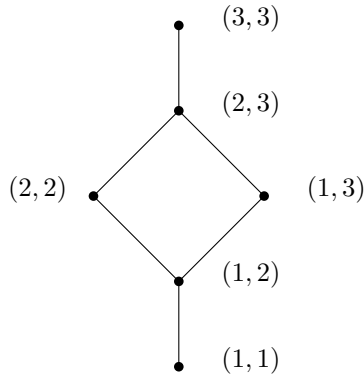


Figur 3: Alle isotone avbildninger $\phi : [2] \rightarrow [3]$

Vi kan også se på hver avbildning som et element $(\phi(1), \phi(2))$ og ordne elementene slik at $\phi \leq \psi$, for to avbildninger ϕ og ψ , hvis $\phi(1) \leq \psi(1)$ og $\phi(2) \leq \psi(2)$. Vi får da et nytt poset, hvor de forskjellige avbildningene er elementer. Dette posetet kan vi skrive som $\text{Hom}([2], [3])$ og dette posetet kan visualiseres som i fig. 4

Dette motiverer en ny definisjon:

²Også kalt *ordningsbevarende*



Figur 4: $\text{Hom}([2], [3])$ hvor elementene i posetet er på formen $(\phi(1), \phi(2))$ for $\phi \in \text{Hom}([2], [3])$

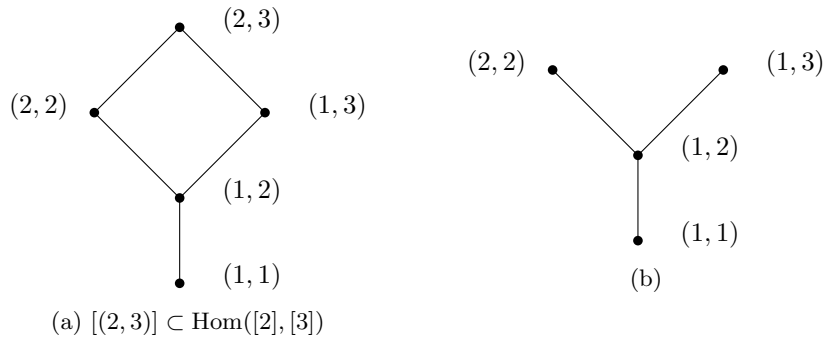
Definisjon 1.6. Mengden av alle isotone avbildninger mellom poset P og Q utgjør et poset, med ordningen $\phi \leq \psi$ hvis $\phi(p) \leq \psi(p)$ for alle $p \in P$. Dette posetet skrives $\text{Hom}(P, Q)$.

Gitt et poset P kan vi også se på mindre poset ved å snakke om posetideal:

Definisjon 1.7. La P være et poset. En undermengde $\mathcal{J} \subseteq P$, er et posetideal hvis $p' \leq p$ fører til at $p' \in \mathcal{J}$ for alle $p \in \mathcal{J}$.

Et posetideal er prinsipalt hvis det finnes én $p \in \mathcal{J}$ slik at $p' \leq p$ for alle $p' \in \mathcal{J}$. Hvis dette er tilfellet vil vi skrive $\mathcal{J} = [p]$, for det prinsipale posetidealet generert av p .

Eksempel 1.5. Posetidealet i fig. 5a er prinsipalt, da alle elementene er mindre eller lik $(2, 3)$. Posetidealet i fig. 5b er derimot ikke prinsipalt, da elementene $(2, 2)$ og $(1, 3)$ ikke kan sammenlignes.



Figur 5

I artikkel [4] defineres, for en isoton avbildning, grafen til en avbildning:

Definisjon 1.8. La $\phi : P \rightarrow Q$ være en isoton avbildning mellom to poset. Da er

$$\Gamma\phi = \{(p, \phi(p)) \mid p \in P\} \subseteq P \times Q$$

grafen til ϕ

Ved å se på $P \times Q$ som en mengde lar vi $k[x_{P \times Q}]$ bety polynomringen med variabler $x_{p,q}$, hvor p går over alle elementer i P og q går over alle elementer i Q . Vi kan da representere $\text{Hom}(P, Q)$ ved hjelp av monomer i polynomringen $k[x_{P \times Q}]$ ved å la hver $\phi \in \text{Hom}(P, Q)$ korrespondere til det kvadratiske monomet

$$m_{\Gamma\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p \in P} x_{p, \phi(p)}$$

Monomialidealet $L(P, Q) = (m_{\Gamma\phi} \mid \phi \in \text{Hom}(P, Q)) \subseteq k[x_{P \times Q}]$ vil da representere posetet. Hvis $P = [n]$ kalles dette idealet et *letterplace-ideal*, og skrives $L(n, P)$, likeledes hvis $Q = [n]$ kalles idealet et *co-letterplace-ideal* og skrives $L(Q, n)$.

Det viser seg å være en nær kobling mellom letterplace-idealet $L(n, P)$ og co-letterplace-idealet $L(P, n)$. La $L(P, Q)^\tau$ bety at vi bytter om indeksene i monomene i idealet, f. eks hvis $x_{p,q} x_{p',q'} \in L(P, Q)$ er $x_{q,p} x_{q',p'} \in L(P, Q)^\tau \subseteq k[x_{Q \times P}]$, da vises det i [4] (proposisjon 1.2) at

Proposisjon 1.2. *Idealet $L(n, P)$ og $L(P, n)^\tau$ er Alexanderduale i $k[x_{[n] \times P}]$*

Eksempel 1.6. I posetet $\text{Hom}([2], [3])$ er

$$L([2], [3]) = (x_{1,1}x_{2,1}, x_{1,1}x_{2,2}, x_{1,1}x_{2,3}, x_{1,2}x_{2,2}, x_{1,2}x_{2,3}, x_{1,3}x_{2,3})$$

Og i posetet $\text{Hom}([3], [2])$ er

$$L([3], [2]) = (x_{1,1}x_{2,1}x_{3,1}, x_{1,1}x_{2,1}x_{3,2}, x_{1,1}x_{2,2}x_{3,2}, x_{1,2}x_{2,2}x_{3,2})$$

Vi finner at

$$L([3], [2])^A = (x_{1,1}x_{1,2}, x_{1,1}x_{2,2}, x_{1,1}x_{3,2}, x_{2,1}x_{2,2}, x_{2,1}x_{3,2}, x_{3,1}x_{3,2})$$

Og dette idealet er identisk med $L([2], [3])$ hvis vi bytter om alle indeksene.

Vi kan også begrense letterplace og co-letterplace-idealene til å bare ta for seg avbildningene innenfor et posetideal, istedet for hele posetet. Har vi et posetideal $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(P, [n])$ skriver vi co-letterplace-idealet $(m_{\Gamma\phi} \mid \phi \in \mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(P, [n]))$ som $L(P, n; \mathcal{J})$. Vi definerer $L(n, P; \mathcal{J})$ til å være $L(P, n; \mathcal{J})^A$.

Eksempel 1.7. La \mathcal{J} være posetidealet i fig. 5a, da er

$$L([2], [3]; \mathcal{J}) = (x_{1,1}x_{2,1}, x_{1,1}x_{2,2}, x_{1,2}x_{2,2}, x_{1,1}x_{2,3}, x_{1,2}x_{2,3})$$

Med mengden $\Gamma\phi$ kan vi generere co-letterplace-idealet $L(P, n; \mathcal{J})$. En annen mengde, introdusert i artikkel [3], som spiller noe av den samme rollen for letterplace-idealene er stigningen til en isoton avbildning:

Definisjon 1.9. La $\phi : P \rightarrow [n]$ være en isoton avbildning. Stigningen til ϕ er mengden

$$\Lambda\phi = \{(p, i) \mid \phi(q) \leq i < \phi(p) \text{ for alle } q < p\}$$

Vi kommer tilbake til denne mengden senere (kanskje først i seksjonen om $\text{Hom}([3], [n])$).

2 Resolusjoner

Frie resolusjoner ble introdusert av Hilbert, som en måte for å beskrive strukturen til en modul, f. eks hvor langt den er fra å være et vektorrom. Hvis vi lar $I = (x_1^3, x_1x_2, x_2^2)$, og ser på idealet som en S -modul, har vi en surjektiv homomorfi ϕ slik at

$$I \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1x_2 & x_2^2 \\ \leftarrow \end{pmatrix} S^3$$

Men det er ikke en isomorfi, siden kjernen er

$$\ker(\phi) = \left\langle \left(\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right) \right\rangle_S$$

Kjernen er endelig generert og igjen har vi en surjektiv homomorfi ψ slik at

$$\ker(\psi) \leftarrow S^2$$

Vi kan sette sammen begge disse avbildningene slik at vi får en kjede

$$I \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1x_2 & x_2^2 \\ \leftarrow \end{pmatrix} S^3 \begin{pmatrix} -x_2 & 0 \\ x_1^2 & -x_2 \\ 0 & \leftarrow x_1 \end{pmatrix} S^2$$

Siden $\ker(\psi) = 0$ kan vi avslutte kjeden og skrive den opp som følger:

$$0 \leftarrow I \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1x_2 & x_2^2 \\ \leftarrow \end{pmatrix} S^3 \begin{pmatrix} -x_2 & 0 \\ x_1^2 & -x_2 \\ 0 & \leftarrow x_1 \end{pmatrix} S^2 \leftarrow 0$$

Dette kalles en fri resolusjon av I , og gir følgende definisjon

Definisjon 2.1. *La M være en gradert S -modul. En fri resolusjon av M er en eksakt sekvens*

$$\mathbf{F} : \cdots \rightarrow F_m \xrightarrow{d_m} F_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$$

Hvor alle F_i er frie S -moduler.

Senere, når vi snakker om resolusjonen til et ideal (spesielt Alexander-ualet av co-letterplace-idealer), vil vi ofte mene resolusjonen til polynomringen modulo idealet. S har en naturlig \mathbb{N} -gradering slik at $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S_i$, hvor S_i er k -modulen (vektorrommet) generert av monomer i grad i . Ofte vil vi at differensialene, d_m, \dots, d_0 , i definisjonen bevarer graden. Ser vi f. eks på homomorfien

$$\phi : S \xrightarrow{x_2} S$$

vil $\deg(\phi(f)) = \deg(f) + 1$ for $f \in S$. Graden øker med 1 under homomorfin og er ikke bevart. Derfor defineres $S(-d)$ til å være den graderte modulen S forskjøvet med grad d , altså $S(-d)_i = S_{i-d}$. Homomorfin har grad 0 hvis vi modifierer

$$\phi : S(-1) \xrightarrow{x_1^2} S$$

Med denne endringen kan vi for hver F_i skrive $F_i = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S^{\beta_{i,j}}(-j)_i$. $\beta_{i,j}$ kalles det *graderte Betti-tallet*³, og vi har da at det i 'te Betti-tallet er $\beta_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_{i,j}$.

Definisjon 2.2. En fri resolusjon av en gradert S -modul M er minimal hvis

$$d_{i+1}(F_{i+1}) \subseteq \mathfrak{m}F_i$$

For alle $i \geq 0$, hvor $\mathfrak{m} \subset S$ er det maksimale idealet (x_1, \dots, x_n)

Lengden til en minimal fri resolusjon av en gradert S -modul M , kalt den *projektive dimensjonen* $\text{pd}_S(M)$, er $\max\{i \mid F_i \neq 0\}$ eller $\max\{i \mid \beta_i \neq 0\}$.

Eksempel 2.1. Med $I = (x_1^3, x_1x_2, x_2^2)$ er resolusjonen til S -modulen $M = S/I$

$$0 \leftarrow M \leftarrow S \leftarrow S(-3) \oplus S^2(-2) \leftarrow S(-3) \oplus S(-4) \leftarrow 0$$

med $\text{pd}_S(M) = 2$.

2.1 Hilberttrekker

Definisjon 2.3. La M være en gradert S -modul. Rekken $H_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_k(M_i)t^i$ er Hilberttrekken til M .

Eksempel 2.2. Med $M = S/I$ hvor $S = k[x_1, x_2]$ og $I = (x_1^3, x_1x_2, x_2^2)$, er $H_M(t) = 1 + 2t + t^2$.

Proposisjon 2.1. Hvis

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

er en eksakt sekvens av S -moduler så er $H_M(t) = H_L(t) + H_N(t)$

Bevis. For hver grad j har vi den eksakte sekvensen $0 \rightarrow L_j \rightarrow M_j \rightarrow N_j \rightarrow 0$, og fra *Rank-Nullity-teoremet* er $\dim_k(M_j) = \dim_k(L_j) + \dim_k(N_j)$. Å gange med t^j og summere over alle j gir resultatet. \square

Proposisjon 2.2.

$$H_{S(-d)}(t) = \frac{t^d}{(1-t)^n}$$

Bevis. $\dim(S_i) = \binom{n+i-1}{i}$ og induksjon på $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} t^i = \frac{1}{(1-t)^n}$, ved å derivere begge sider, gir $H_S(t) = \frac{1}{(1-t)^n}$. I tillegg er $H_{S(-d)}(t) = t^d H_S(t)$. \square

³Etter den italienske matematikeren Enrico Betti

Fra begge disse proposisjonene kan vi regne ut Hilbertrekken til enhver S -modul M gitt den minimale frie resolusjonen:

Korollar 2.1. *La \mathbf{F} være en minimal fri resolusjon av en gradert S -modul M . Da er*

$$H_M(t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^i \beta_{i,j} t^j}{(1-t)^n}$$

Eksempel 2.3. Med samme oppsett som i eksempel 2.7 blir

$$H_M(t) = \frac{1 - t^3 - 2t^2 + t^3 + t^4}{(1-t)^2} = 1 + 2t + t^2$$

som stemmer bra med det vi fikk i eksempel 2.9.

Med f -vektoren, som definert i seksjon 1.1, og definisjonen $f_{-1} = 1$ (for å ta høyde for $\emptyset \in \Delta$) viser Herzog og Hibi [5] (proposisjon 6.2.1, s. 101) følgende

Proposisjon 2.3. *La Δ være et simplisielt kompleks av dimensjon $d - 1$, og $k[\Delta]$ den tilhørende Stanley-Reisner-ring. Da er*

$$H_{k[\Delta]}(t) = \frac{\sum_{i=0}^d h_i t^i}{(1-t)^d} = \sum_{i=0}^d \frac{f_{i-1} t^i}{(1-t)^i}$$

Fra dette resultatet defineres h -vektoren

Definisjon 2.4. *La Δ være et simplisielt kompleks av dimensjon $d - 1$. $h(\Delta) = (h_0, \dots, h_d)$ hvor h_i er gitt ved*

$$\sum_{i=0}^d f_{i-1} t^i (i-t)^{d-i} = \sum_{i=0}^d h_i t^i$$

kalles h -vektoren.

Bruns og Herzog finner h -vektoren eksplisitt gitt f -vektoren [2] (lemma 5.1.8, s. 205)

Proposisjon 2.4. *La Δ være et simplisielt kompleks av dimensjon $d - 1$ med f -vektor $f(\Delta) = (f_{-1}, f_0, \dots, f_d)$ og h -vektor $h(\Delta) = (h_0, \dots, h_d)$. Da er*

$$h_j = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{d-i}{j-i} f_{i-1}$$

hvor $j = 0, \dots, d$

3 Cohen-Macaulay- og Gorenstein-ringer

Definisjon 3.1. La M være en S -modul. Et element $f \in S$ er M -regulært hvis homomorfin $\phi : M \xrightarrow{f} M$ er injektiv. M.a.o f er ikke en nulldivisor.

Hvis $f \in S$ er regulær og $M/fM \neq 0$ kan vi fortsette og se om vi finner et M/fM -regulært element.

Definisjon 3.2. En sekvens $\mathbf{f} = f_1, \dots, f_m$ er en M -regulær sekvens hvis $M/(f_1, \dots, f_m)M \neq 0$ og homomorfin

$$\phi : M/(f_1, \dots, f_{i-1})M \xrightarrow{f_i} M/(f_1, \dots, f_{i-1})M$$

er injektiv for $i = 1, \dots, m$.

Eksempel 3.1. For $S = k[x_1, \dots, x_n]$ er $\mathbf{f} = x_1, \dots, x_n$ en regulær S -sekvens av lengde n .

Definisjon 3.3. Lengden av den lengste M -regulære sekvensen, for en S -modul M , kalles dybden til M og skrives $\text{depth}(M)$.

Vi kan nå gi definisjonen av en Cohen-Macaulay-ring. Generelt gjelder det for en S -modul M at $\text{depth}(M) \leq \dim(M)$.

Definisjon 3.4. En S -modul M er Cohen-Macaulay hvis $\text{depth}(M) = \dim(M)$. En ring R er en Cohen-Macaulay-ring hvis den er Cohen-Macaulay som en modul over seg selv.

Letterplace-idealene, $L(n, P)$, er eksempler på Cohen-Macaulay-ringer av kodi-mensjon $|P|$ (artikkel [4] i introduksjonen).

For å komme videre ser vi på det kjente Auslander-Buchsbaum-teoremet, som Peeva beviser i [6] (The Auslander-Buchsbaum Formula 15.3, s. 56):

Teorem 3.1. La M være en gradert og endelig generert S -modul. Da er

$$\text{pd}_S(M) + \text{depth}(M) = n$$

For Cohen-Macaulay-ringer får vi da enda et nyttig resultat:

Korollar 3.1. Hvis M er Cohen-Macaulay så er $\text{pd}_S(M) = \text{codim}(M)$

Bevis. Fra Auslander-Buchsbaum-teoremet er $\text{pd}_S(M) + \text{depth}(M) = n$. Siden M er Cohen-Macaulay er $\text{depth}(M) = \dim(M)$, dette gir resultatet! \square

En annen type ring, som også er Cohen-Macaulay, er Gorenstein-ringer. Disse ringene ser ofte "finere" ut, i det at de har mange symmetriske egenskaper. Disse egenskapene kommer vi til å se på Betti-tallene, og h -vektoren.

Eksempel 3.2. Enhver artinsk ring R er Cohen-Macaulay da $\dim(R) = \text{depth}(R) = 0$ (alle elementene er enten enheter eller nulldivisorer).

Definisjon 3.5. En ring $R = S/I$ er Gorenstein, hvis R er Cohen-Macaulay og $\beta_{\text{pd}_S(R)} = 1$

Peeva viser i [6] (teorem 25.6, s. 100) følgende:

Proposisjon 3.1. Hvis $R = S/I$ er en Gorenstein-ring av dimensjon d , så er

$$\beta_i(R) = \beta_{n-d-i}(R)$$

De graderte Betti-tallene er symmetriske.

Eksempel 3.3. Resolusjonen til

$$I_{\Delta^\vee} = (x_1x_2x_4x_5, x_3x_4x_5, x_1x_2x_3x_4x_6, x_1x_2x_5x_6, x_1x_4x_5x_6)$$

fra eksempel 2.5 er:

$$S^1 \leftarrow S^5 \leftarrow S^5 \leftarrow S^1$$

Betti-tallene er symmetriske men I_{Δ^\vee} er ikke Gorenstein, da $\text{codim}(I_{\Delta^\vee}) = 2$ og $\text{pd}_S(I_{\Delta^\vee}) = 3$.

Eksempel 3.4. Fra eksempel 1.6 er

$$L([2], 3)^A = (x_{1,1}x_{1,2}x_{1,3}, x_{1,1}x_{1,2}x_{2,3}, x_{1,1}x_{2,2}x_{2,3}, x_{2,1}x_{2,2}x_{2,3})$$

med resolusjon

$$S^1 \left(\begin{array}{cccc} x_{1,1}x_{1,2}x_{1,3} & x_{1,1}x_{1,2}x_{2,3} & x_{1,1}x_{2,2}x_{2,3} & x_{2,1}x_{2,2}x_{2,3} \end{array} \right) \leftarrow S^4 \begin{pmatrix} -x_{2,3} & 0 & 0 \\ x_{1,3} & -x_{2,2} & 0 \\ 0 & x_{1,2} & -x_{2,1} \\ 0 & 0 & x_{1,1} \end{pmatrix} S^3$$

Monomene i $L([2], 3)^A$ er på formen $x_{p,\phi(p)}x_{p',\phi(p')}x_{p'',\phi(p'')}$ hvor $p, p', p'' \in P = [2]$, og $\phi \in \text{Hom}([2], [3])$. Hvis vi "glemmer" andrekoordinaten, altså sender monomet $x_{p,\phi(p)}$ til monomet x_p får vi et nytt ideal

$$L^p([2], 3)^A = (x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3)$$

i polynomringen $S' = k[x_1, x_2] = k[x_{[2]}]$ med resolusjon

$$S'^1 \left(\begin{array}{cccc} x_1^3 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_2^3 \end{array} \right) \leftarrow S'^4 \begin{pmatrix} -x_2 & 0 & 0 \\ x_1 & -x_2 & 0 \\ 0 & x_1 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} S'^3$$

Både $L([2], 3)^A$ og $L^p([2], 3)^A$ har de samme graderte Betti-tallene. Det å glemme andrekoordinaten kan vi tenke på som en projeksjon $[3] \times [2] \xrightarrow{p} [3]$ på førstekoordinaten. Dette er grunnen til at vi markerer det nye idealet med en p (for projeksjon). Legg merke til at det nye idealet er artinsk, og er derfor

også Cohen-Macaulay. Hele prosessen med projeksjonen kan tenkes på som en de-polarisering, og det er vist i [5] (korollar 1.6.3) at en slik prosess bevarer de graderte Betti-tallene og Cohen-Macaulay-egenskapen for resolusjonen av monomiale idealer som er Cohen-Macaulay. I konteksten av regulære sekvenser kan vi også tenke på denne prosessen som å starte med modulen $M = S/L([2], 3)^A$ og deretter dele ut med den regulære sekvensen $\mathbf{f} = x_1 - x_2, x_2 - x_3, y_1 - y_2, y_2 - y_3$ slik at vi får modulen $M/(\mathbf{f})$ med de samme Betti-tallene. Dette kommer vi til å gjøre i seksjon 7.

3.1 Trappeidealet

I artikkelen [1] introduseres, til et co-letterplace-ideal $L(P, n)$, et nytt ideal $B(P, n)$ i $k[x_{P \times [n]}]$ som i denne oppgaven kalles trappeidealet. Dette idealet er generert av monomer $x_{p, \phi(p)} x_{p', \phi(p')}$ slik at $p < p'$, men $\phi(p) > \phi(p')$.

Eksempel 3.5. La oss se på $\text{Hom}([2], [3])$ (fig. 3), da er

$$B([2], 3) = (x_{1,2}x_{2,1}, x_{1,3}x_{2,1}, x_{1,3}x_{2,2})$$

Ved en liten modifisering kan trappeidealet også beregnes for posetidealer $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(P, [n])$. Dette oppnås ved å la

$$B(P, n; \mathcal{J}) = L(P, n; \bar{\mathcal{J}}) + B(P, n)$$

Hvor $\bar{\mathcal{J}}$ er komplementet til \mathcal{J} i $\text{Hom}(P, [n])$. I artikkelen [1] (teorem 5.2) vises det at idealet $L(P, n; \mathcal{J})^A + B(P, n; \mathcal{J})^A$ er Gorenstein av kodimensjon $|P| + 1$. Senere i oppgaven utforsker vi resolusjonen til disse Gorenstein-idealene for prinsipale poset.

Eksempel 3.6. La oss igjen se på $\text{Hom}([2], [3])$. I forrige eksempel fant vi $B([2], 3)$, og vi får at $B^A([2], 3) = (x_{1,2}x_{2,2}, x_{2,1}x_{1,3}, x_{1,2}x_{1,3})$. Vi regner ut co-letterplaceidealet $L([2], 3) = (x_{1,1}x_{2,1}, x_{1,1}x_{2,2}, x_{1,1}x_{2,3}, x_{1,2}x_{2,2}, x_{1,2}x_{2,3}, x_{1,3}x_{2,3})$ og vi får Alexanderdualet $L([2], 3)^A = (x_{1,1}x_{1,2}x_{1,3}, x_{1,1}x_{1,2}x_{2,3}, x_{1,1}x_{2,2}x_{2,3}, x_{2,1}x_{2,2}x_{2,3})$. Gorenstein-idealet blir da

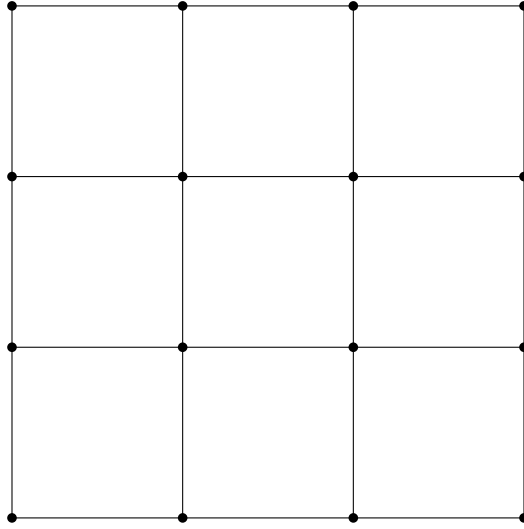
$$L([2], 3)^A + B([2], 3)^A = (x_{2,1}x_{2,2}, x_{2,1}x_{1,3}, x_{1,2}x_{1,3}, x_{1,1}x_{1,2}x_{2,3}, x_{1,1}x_{2,2}x_{2,3})$$

Resolusjon til idealet er

$$S^1 \leftarrow S^5 \leftarrow S^5 \leftarrow S^1$$

Med kodimensjon $|P| + 1 = 2 + 1 = 3$ (som er lik den projektive dimensjonen siden alle Gorenstein-ringer er Cohen-Macaulay).

4 $\mathbf{Hom}(\circ\circ, [n])$



Figur 6: $\mathbf{Hom}(\circ\circ, [4])$

I denne seksjonen ser vi på posetidealene i $\text{Hom}(\circ\circ, [n])$ og stiller bl.a spørsmålene:

- Hvordan ser posetidealene ut?
- Kan vi finne et generelt uttrykk for $L(\circ\circ, n; \mathcal{J})^A$ gitt $L(\circ\circ, n; \mathcal{J})$?
- Kan vi forutsi resolusjonen til $L(\circ\circ, n; \mathcal{J})^A$ gitt et vilkårlig posetideal $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ\circ, [n])$?
- Kan vi forutsi matrisene i resolusjonen til $L(\circ\circ, n; \mathcal{J})^A$?

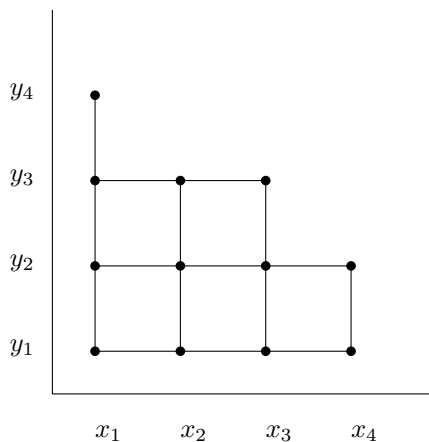
Vi starter med å få et fint geometrisk bilde av $\text{Hom}(\circ\circ, [n])$. Kall de to elementene i posetet $\circ\circ$ for a og b . En avbildning $\phi : \circ\circ \rightarrow [n]$ er isoton hvis den bevarer ordningen, men a og b er uavhenige! Dette betyr at vi kan sende a til n forskjellige verdier, og det samme for b . Vi har dermed vist:

Proposisjon 4.1. $\text{Hom}(\circ\circ, [n]) \cong [n] \times [n]$, og $|\text{Hom}(\circ\circ, [n])| = n^2$

Hver isotone avbildning $(\phi(a), \phi(b))$ er et punkt i nettet $[n] \times [n]$. For å gjøre livet litt lettere, når vi regner ut co-letterplace-idealet, kan vi sende $(\phi(a), \phi(b))$ til monomet $x_{\phi(a)}y_{\phi(b)}$. Vi nærmer oss da kjent farvann med det kartesiske koordinatsystemet.

Eksempel 4.1. La $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ\circ, [4])$ være som i fig. 7. Da er

$$L(\circ\circ, 4; \mathcal{J}) = (x_1y_1, x_2y_1, x_3y_1, x_4y_1, x_1y_2, x_2y_2, x_3y_2, x_4y_2, x_1y_3, x_2y_3, x_3y_3, x_1y_4)$$



Figur 7: $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ\circ, [4])$

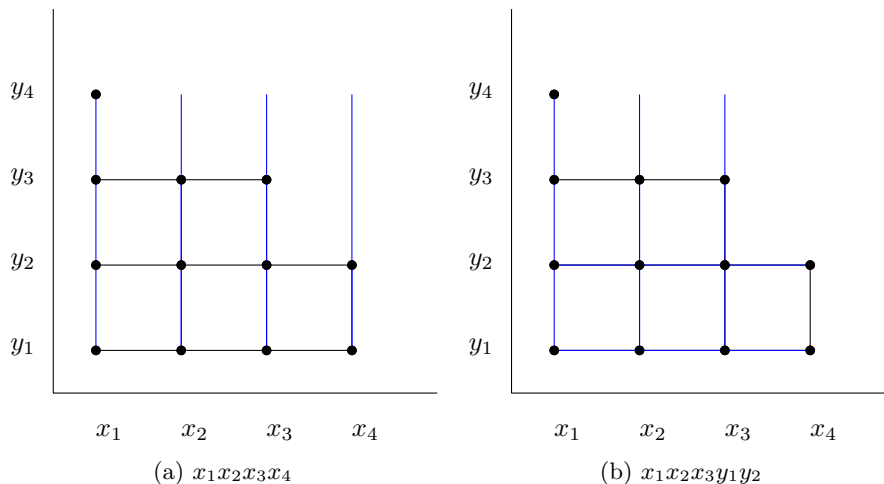
dette kan også skrives

$$L(\circ\circ, 4; \mathcal{J}) = (x_1) \cap (y_1, y_2, y_3, y_4) + (x_2, x_3) \cap (y_1, y_2, y_3) + (x_4) \cap (y_1, y_2)$$

hvor hvert ledd representerer en søyle i diagrammet. Alexanderdualet er

$$L(\circ\circ, 4; \mathcal{J})^A = (x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_3y_1y_2, x_1y_1y_2y_3, y_1y_2y_3y_4)$$

I hva som følger gir vi intuisjonen bak hvordan vi kan finne Alexanderdualet til $L(\infty, n; \mathcal{J})$. Alexanderdualet til $L(\infty, n; \mathcal{J})$ er idealet generert av monomene som deler ikke-trivielle divisorer med alle monomene i $L(\infty, n; \mathcal{J})$. Grunnen til at $x_1x_2x_3x_4$ opptrer i Alexanderdualet i eks. 4.1 er at alle monomene (punktene) enten er delelig på x_1, x_2, x_3 eller x_4 . Likeledes opptrer $x_1x_2x_3y_1y_2$ da punktene enten er delelig på x_1, x_2, x_3 eller y_1, y_2 .



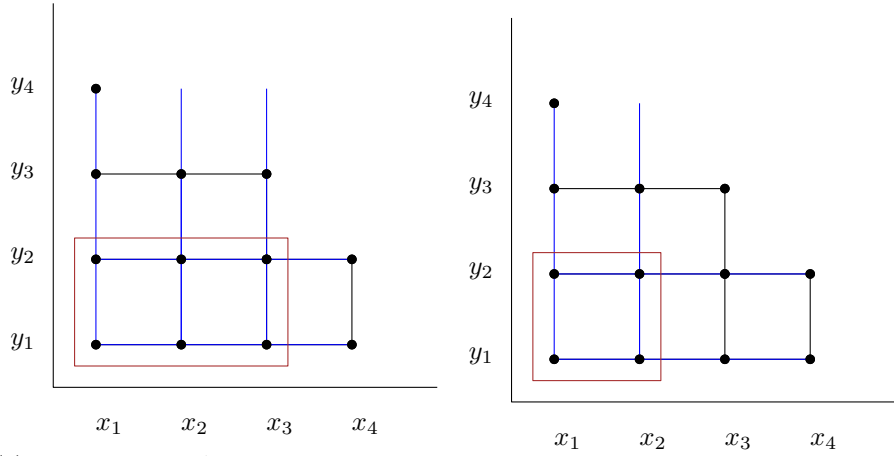
Figur 8: Generatorene til $L^A(\infty, n; \mathcal{J})$ korresponderer til linjer som dekker alle punktene i posetidealet

Vi kan tenke på x_1 (faktor i monomet $x_1x_2x_3x_4$) som en linje som går gjennom alle monomene (punktene) delelig på x_1 . Monomet $x_1x_2x_3x_4$ kan da tenkes på som en mengde med 4 linjer som strømmer gjennom alle monomene (punktene) delelig på enten x_1, x_2, x_3 eller x_4 (de blå linjene i fig. 8a)

Hvert sett med linjer kan representeres med et rektangel som inneholder skjæringspunktene mellom linjene (gitt at det finnes skjæringspunkt). Linjene tilhørende monomet $x_1x_2x_3y_1y_2$ kan representeres som i fig. 9a.

Legg merke til at hele rektangelet er bestemt av hvor hjørnet øverst til høyre plasseres, kall dette punktet C_i (vi bruker indeksen her, fordi vi straks skal legge ut flere bokser), siden resten av rektangelet må treffe x - og y -aksen. Dette rektangelet er minimalt i den forstand at noen punkter i posetidealet ikke vil bli dekket av de utstrålende linjene hvis vi gjør rektangelet kortere langs enten x - eller y -aksen. De eneste monomene det er værre å representere⁴ som rektangler er de trivielle $x_1x_2x_3x_4$ og $y_1y_2y_3y_4$ siden linjene til de individuelle faktorene ikke skjærer hverandre. Dermed er det nok å finne ut hva som karakteriserer C_i . På fig. 10 ser vi at C_i er der i posetidealet vi får en "krok" k_i , og at disse oppstår mellom to nærliggende maksimale element. Påstanden er at $k_i = C_i$, m.a.o., rektangelets hjørne må være på en krok.

⁴En kan dog tenke på disse som rektangler hvor den ene sidelengden er 0. Dette er konsistent med at rektangelets dimensjoner er "antall x -er i monomet" \times "antall y -er i monomet"



(a) Linjene som stråler ut av det røde rektangelet er linjene som korresponderer til monomet $x_1x_2x_3y_1y_2$
 (b) Gjøres rektangelet kortere dekkes ikke lenger alle punktene i posetidealet

Figur 9: Et sett med linjer som dekker posetidealet kan representeres med et rektangel

Hvis de r maksimale elementene i posetidealet er gitt ved $m_i = (a_i, b_i)$, $1 \leq i \leq r \leq n$ så er $k_i = (a_i, b_{i+1})$. Vi kan da finne generatorene til Alexanderdualet til $L(\circ\circ, n; \mathcal{J})$

Teorem 4.1. *La $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ\circ, [n])$ være et posetideal med maksimale elementer m_1, \dots, m_r . Da er $L(\circ\circ, n; \mathcal{J})^A = (m'_0, \dots, m'_r)$ hvor*

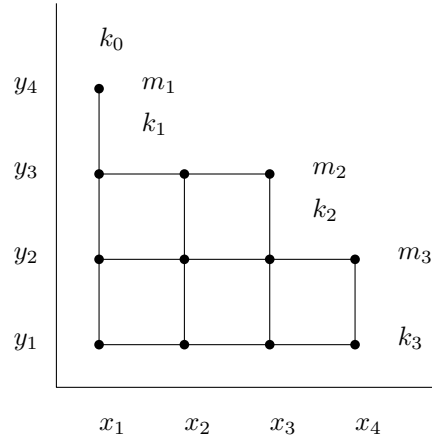
$$m'_k = \prod_{i=1}^{a_k} x_i \prod_{i=1}^{b_{i+1}} y_i$$

med konvensjonen at det tomme produktet er 1

Bevis. Vi viser først at hvis vi har et rektangel, så må dens øvre høyre hjørne ligge på en krok. Anta at dette hjørnet, $C = (c_x, c_y)$, ikke ligger på en krok. Da er $C \neq (a_i, b_{i+1})$ for alle $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Det er da to muligheter for plasseringen til C :

- $c_x = a_j$ og $c_y > b_{j+1}$, eller $c_y = b_{j+1}$ og $c_x > a_j$ for en $j \in \{1, \dots, r-1\}$, dvs., C ligger på randen til \mathcal{J} . I begge disse tilfellene vil ikke rektangelet være minimalt, da rektangelet med $C = k_j$ er inneholdt i begge.
- C ligger innenfor randen til \mathcal{J} . Hvis dette er tilfellet vil også $(c_x + 1, c_y + 1) \in \mathcal{J}$, og dette punktet blir ikke dekket av om boksen har øvre høyrehjørne $C = (c_x, c_y)$.

Rektangelets øvre høyrehjørne må dermed ligge på en krok $k_i = (a_i, b_{i+1})$. Linjene som strømmer ut normal på x -retningen er representert ved monomet



Figur 10: $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ\circ, [4])$, med de maksimale element m_1, m_2, m_3

$\prod_{j=1}^{a_i} x_j$, likeledes er linjene normal på y -retningen representert ved monomet $\prod_{j=1}^{b_{i+1}} y_j$. Dette gir generatorene

$$m'_i = \prod_{j=1}^{a_i} x_j \prod_{j=1}^{b_{i+1}} y_j$$

□

Merk at de trivielle generatorene til $L(\circ\circ, n; \mathcal{J})^A$ har en plass, som kroker, på fig. 10. Disse burde, fra teorem 4.1, ha koordinatene $(a_0, 4)$ og $(4, b_4)$, men a_0 og b_4 er ikke definert. Definerer vi $a_0 = b_5 = 0$ vil $(0, 4)$ og $(4, 0)$ være to kroker som ligger på hver sin akse (dette blir krokene k_0 og k_3).

Eksempel 4.2. Med posetidealet \mathcal{J} i fig. 11 trenger vi bare de maksimale elementene for å finne generatorene til $L(\circ\circ, 5; \mathcal{J})^A$. Disse er $m_1 = (1, 5)$, $m_2 = (2, 4)$, $m_3 = (3, 3)$, og $m_4 = (5, 2)$.

Det gir

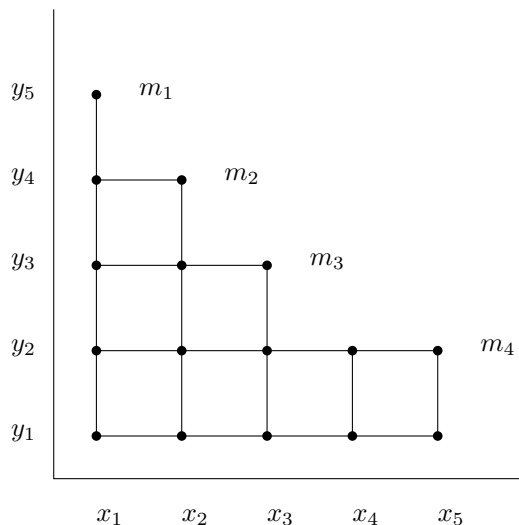
$$L(\circ\circ, 5; \mathcal{J})^A = (y_1 y_2 y_3 y_4 y_5, x_1 y_1 y_2 y_3 y_4, x_1 x_2 y_1 y_2 y_3, x_1 x_2 x_3 y_1 y_2, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$$

Resolusjonen til $L(\circ\circ, 5; \mathcal{J})^A$ er

$$S \xleftarrow{\mathbf{L}} S^5 \xleftarrow{\mathbf{D}} S^4$$

hvor $\mathbf{L} = (y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 \quad x_1 y_1 y_2 y_3 y_4 \quad x_1 x_2 y_1 y_2 y_3 \quad x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 \quad x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$ og

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -y_5 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -y_4 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 & x_4 x_5 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1 y_2 \end{pmatrix}$$



Figur 11: $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ\circ, [5])$

Monomene i matrisen \mathbf{D} ligger på en diagonal, og det ser ut til at disse også kan bestemmes direkte utifra de maksimale elementene i posetidealet. Dette er tilfellet:

Teorem 4.2. *La $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ\circ, [n])$ med maksimale elementer m_1, \dots, m_r , der $m_i = (a_i, b_i)$. $L(\circ\circ, n; \mathcal{J})^A$ har resolusjon*

$$S \xleftarrow{L} S^{r+1} \xleftarrow{P} S^r$$

Og

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -d'_1 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d'_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & d_{r-2} & 0 \\ \vdots & & & -d'_{r-1} & d_{r-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -d'_r \end{pmatrix}$$

Hvor $d'_{i+1} = \prod_{j=b_{i+2}+1}^{b_{i+1}} y_j$ og $d_i = \prod_{j=a_i+1}^{a_{i+1}} x_j$.

Bevis. For å oppføre matrisen \mathbf{D} må vi finne $f, g \in S$ slik at $fm'_k + gm'_{k+1} = 0$. Fra teorem 3.1 har vi at

$$m'_k = \prod_{i=1}^{a_k} x_i \prod_{j=1}^{b_{k+1}} y_j, \quad m'_{k+1} = \prod_{i=1}^{a_{k+1}} x_i \prod_{j=1}^{b_{k+2}} y_j$$

Dermed er $(\prod_{i=a_k+1}^{a_{k+1}} x_i) m'_k - (\prod_{i=b_{k+2}+1}^{b_{k+1}} y_i) m'_{k+1} = d_k m'_k - d'_{k+1} m'_{k+1} = 0$, dette viser at $\text{im}(\mathbf{D}) \subseteq \text{ker}(\mathbf{L})$. For å vise at $\text{ker}(\mathbf{L}) \subseteq \text{im}(\mathbf{D})$ la:

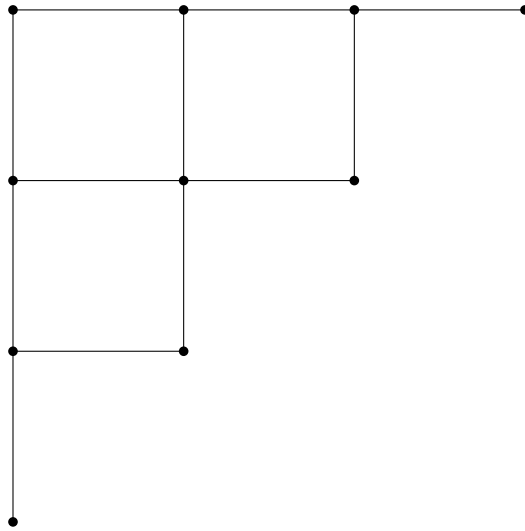
$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} \in \text{ker}(\mathbf{L})$$

Da er $\mathbf{D}\vec{f} = \sum_{i=0}^r f_i m'_i = 0$. For å vise at $\vec{f} \in \text{im}(\mathbf{D})$ må vi vise at

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} d_0 g_0 \\ -d'_1 g_0 + d_1 g_1 \\ -d'_2 g_1 + d_2 g_2 \\ \vdots \\ -d'_{r-1} g_{r-2} + d_{r-1} g_{r-1} \\ -d'_r g_{r-1} \end{pmatrix}$$

for en vektor $\vec{g} \in A^r$. Legg merke til at $f_0 m'_0 = -(f_1 m'_1 + f_2 m'_2 + \dots + f_r m'_r)$, og at $d_0 | m'_i$ for alle $i > 0$. Dette medfører at $d_0 | f_0$, så la $f_0 = g_0 d_0$. Ved å bruke relasjonen $d_k m'_k = d'_{k+1} m'_{k+1}$ får vi $m'_1 (g_0 d'_1 + f_1) = -(f_2 m'_2 + \dots + f_r m'_r)$. Igjen vil d_1 dele høyresiden, men ikke m'_1 . Vi kan da velge g_1 slik at $f_1 = -d_1 g_0 + d_1 g_1$, som gir oss $m'_2 (d'_2 g_1 + f_2) = -(f_3 m'_3 + \dots + f_r m'_r)$. Slik kan vi fortsette helt til vi kommer til $m'_{r-1} (d'_{r-1} g_{r-2} + f_{r-1}) = -f_r m'_r$, dette gir oss den siste oppføringen i vektoren $f_r = -d_r g_{r-1}$. Dermed er $\text{im}(\mathbf{D}) = \text{ker}(\mathbf{L})$. \square

5 $\text{Hom}([2], [n])$



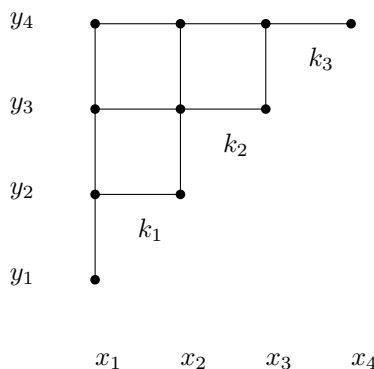
Figur 12: $\text{Hom}([2], [4])$

Mange av resultatene vi kom fram til i seksjon 4 om $\text{Hom}(\circ, [n])$ kan overføres til $\text{Hom}([2], [n])$ med små endringer. Den største endringen er kanskje at de maksimale elementene i posetidealene vi ser på spiller en mindre rolle, dette skyldes tildels at posetene kommer automatisk med noen kroker selv med kun ett maksimalt element. Vi starter med et geometrisk bilde av posetet. For enhver $\phi \in \text{Hom}([2], [n])$ må $\phi(1) \leq \phi(2)$. Sender vi $\phi(1) \mapsto x_{\phi(1)}$ og $\phi(2) \mapsto y_{\phi(2)}$ vil $\text{Hom}([2], [n])$ være alle punktene større enn $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$. Størrelsen på posetet er

Proposisjon 5.1. $|\text{Hom}([2], [n])| = \binom{n+1}{2}$

Bevis. La $\phi(1) = a \in [n]$, siden $\phi(1) \leq \phi(2)$ kan $\phi(2)$ sendes til $n - a + 1$ verdier. For alle $a \in [n]$ er det da $\sum_{i=1}^n n - a + 1 = \binom{n+1}{2}$ mulige ϕ . \square

Vi starter med å finne Alexanderdualet til hele posetet $\text{Hom}([2], [n])$. Som i seksjon 3 kan vi finne generatorene ved å finne ut hvor i posetet vi kan legge ut rektangler hvis utstrålende linjer treffer alle punktene.



Figur 13: $\mathcal{J} = \text{Hom}([2], [4])$

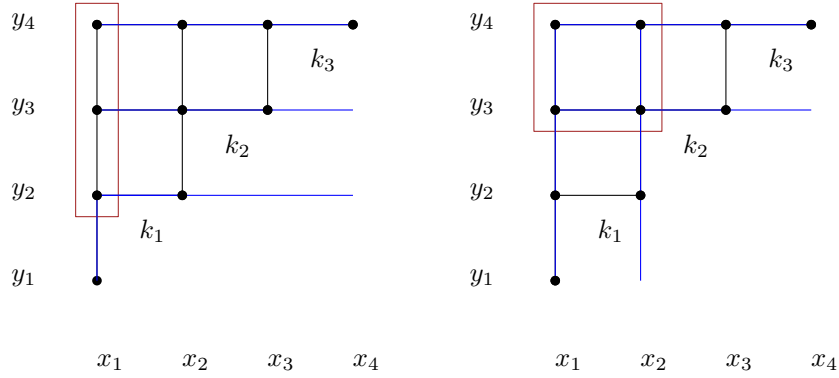
Hvert rektangel (og dermed hver generator til Alexanderdualet) er bestemt av k_i , som også er ”kroker” på figur 13. Generatorene til Alexanderdualet, korresponderende til k_i , blir som i seksjon 4

$$m'_i = \prod_{j=1}^i x_j \prod_{j=i+1}^n y_j$$

Men vi må ta noen ekstra hensyn om vi ser på posetidealer som ikke er generert av ett element⁵. La oss se på posetidealet i fig. 15a

Plasseringen til rektanglene er fortsatt gyldig, men de er strukket oppover. Sammenligner vi fig. 14b med fig. 15b er rektangelet strukket opp til en ”krok”. En annen måte å beskrive dette på er å si at rektangelet, som starter i $k_2 = (2, 3)$ strekkes opp til $(2, y(3))$ hvor $y(3)$ er den største andrekoordinaten til punkter

⁵Alle poset $\text{Hom}([2], [n])$ er prinsipale, og er generert av (n, n)



(a) Linjene som stråler ut av det røde rek- (b) Linjene som stråler ut av det røde rek-
 tangelet er linjene som korresponderer til tangelet er linjene som korresponderer til
 monomet $x_1 y_2 y_3 y_4$ monomet $x_1 x_2 y_2 y_3$

Figur 14: Et sett med linjer som dekker posetidealet kan representeres med et rektangel

med førstekoordinat 3 i posetidealet. Denne definisjonen er nødvendig for å beskrive posetet i denne seksjonen, og vil ikke bli brukt videre.

Definisjon 5.1. For et posetideal $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}([2], [n])$ la $y(i) = \max\{j \mid (i, j) \in \mathcal{J}\}$ (hvis mengden er tom, la $y(i) = 0$). En mengde $m_i = \{(i, y(i)) \mid (i, y(i)) \in \mathcal{J}\}$ kalles taket til \mathcal{J} .

Med denne lokale definisjonen kan vi påstå:

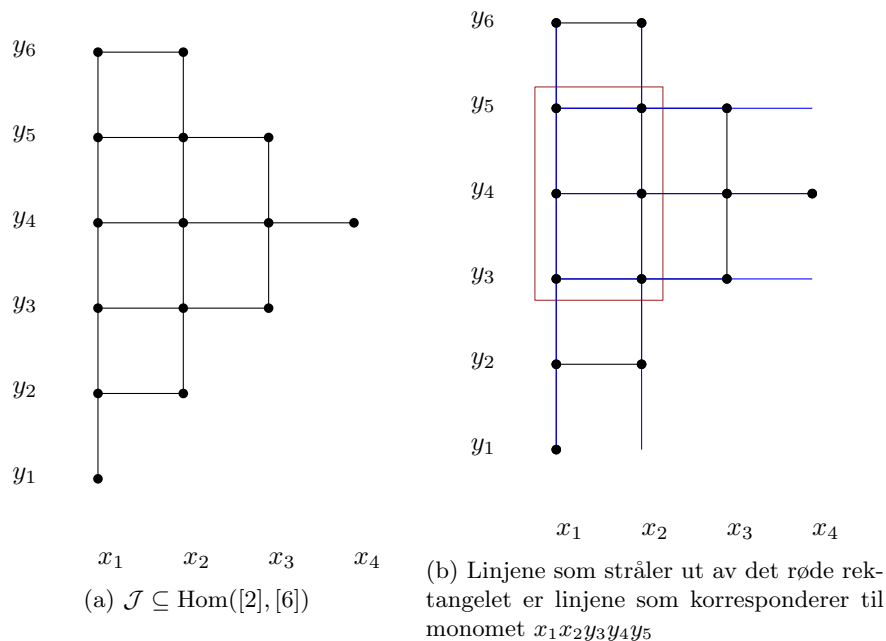
Teorem 5.1. La $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}([2], [n])$ være et posetideal, med tak m_1, \dots, m_r . Da er $L([2], n; \mathcal{J})^A = (m'_0, \dots, m'_r)$ hvor

$$m'_k = \prod_{i=1}^k x_i \prod_{i=k+1}^{y(k+1)} y_i$$

Med konvensjonen at det tomme produktet er lik 1.

Bevis. Beviset er essensielt det samme som for teorem 4.1; greier vi å finne ut hvor hvert rektangel skal plasseres har vi automatisk generatorene til $L([2], n; \mathcal{J})^A$. La oss gjøre det for de ikke-trivielle rektanglene. Rektangelet må røre y -aksen for å ta med $(1, 1)$, så det er nok å bestemme rektanglets nedre høyrehjørne $C' = (c'_x, c'_y)$ og dens øvre høyrehjørne $C = (c_x, c_y)$. Vi påstår at $C' = (i, i + 1)$ for en $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Anta at dette ikke er tilfellet. Det er da to muligheter for plasseringen av C' :

- $C' = (j, j)$ for $j \in \{1, \dots, n\}$. Er dette tilfellet så er ikke rektangelet minimalt, da rektangler med nedre høyrehjørne $(j - 1, j)$ eller $(j, j + 1)$ er inneholdt i rektangelet med nedre høyrehjørne $C' = (j, j)$.



Figur 15: Et sett med linjer som dekker posetidealet kan representeres med et rektangel

- $C' \neq (j, j)$ for $j \in \{1, \dots, n\}$. Dette betyr at C' ikke ligger på randen fra $(1, 1)$ til (n, n) . Er dette tilfellet så vil ikke rektangelet dekke punktet $(c'_x + 1, c'_y - 1) \in \mathcal{J}$.

Dermed må $C' = (i, i+1)$ for $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Fra dette vet vi at førstekoordinaten til C er i . Vi påstår at $C = (i, y(i+1))$. Anta igjen at dette ikke er tilfellet, da er det to muligheter:

- $c_y < y(i+1)$. Hvis dette er tilfellet dekker ikke rektangelet punktet $(i+1, y(i+1))$.
- $c_y > y(i+1)$. Hvis dette er tilfellet vil ikke rektangelet være minimalt, da rektangelet med øvre høyrehjørne $(i, y(i+1))$ er inneholdt i rektangelet tilhørende C .

Fra dette må $C = (i, y(i+1))$ for $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Vi har nå bestemt rektangelet for hver $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Gitt C' , C og i er linjene som strømmer ut av rektangelet representert ved monomet:

$$m'_i = \prod_{j=1}^i x_j \prod_{j=i+1}^{y(i+1)} y_j$$

De trivielle generatorene for Alexanderdualet får vi med $i = 0$ og $i = r$, som benytter konvensjonen om det tomme produktet. \square

Eksempel 5.1. La $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}([2], [6])$ være posetidealet i fig. 15a. $L([2], n; \mathcal{J})^A$ er

$$(x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_3y_4, x_1x_2y_3y_4y_5, x_1y_2y_3y_4y_5y_6, y_1y_2y_3y_4y_5y_6)$$

og har resolusjon

$$S \xleftarrow{\mathbf{L}} S^5 \xleftarrow{\mathbf{D}} S^4$$

med $\mathbf{L} = (y_1y_2y_3y_4y_5y_6 \quad x_1y_2y_3y_4y_5y_6 \quad x_1x_2y_3y_4y_5 \quad x_1x_2x_3y_4 \quad x_1x_2x_3x_4)$ og

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -y_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -y_2y_6 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3y_5 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -y_4 \end{pmatrix}$$

Teorem 5.2. La $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}([2], [n])$ være et posetideal med tak m_1, \dots, m_r . Da har $L([2], n; \mathcal{J})^A$ resolusjon

$$S \xleftarrow{\mathbf{L}} S^{r+1} \xleftarrow{\mathbf{D}} S^r$$

Og

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -d'_1 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d'_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & d_{r-2} & 0 \\ \vdots & & & -d'_{r-1} & d_{r-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -d'_r \end{pmatrix}$$

Hvor $d'_{i+1} = y_{i+1} \prod_{j=y(i+2)+1}^{y(i+1)} y_j$ og $d_i = x_{i+1}$.

Bevis. Dette beviset er identisk med beviset for teorem 4.2. For å oppføre matrisen \mathbf{D} må vi finne $f, g \in S$ slik at $fm'_k + gm'_{k+1} = 0$. Fra teorem 5.1 har vi at

$$m'_k = \prod_{i=1}^k x_i \prod_{j=k+1}^{y(k+1)} y_j, \quad m'_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} x_i \prod_{j=k+2}^{y(k+2)} y_j$$

Dermed er $(x_{k+1})m'_k - (y_{k+1} \prod_{i=y(k+2)+1}^{y(k+1)} y_i)m'_{k+1} = d_k m'_k - d'_{k+1} m'_{k+1} = 0$, dette viser at $\text{im}(\mathbf{D}) \subseteq \ker(\mathbf{L})$. For å vise at $\ker(\mathbf{L}) \subseteq \text{im}(\mathbf{D})$ la:

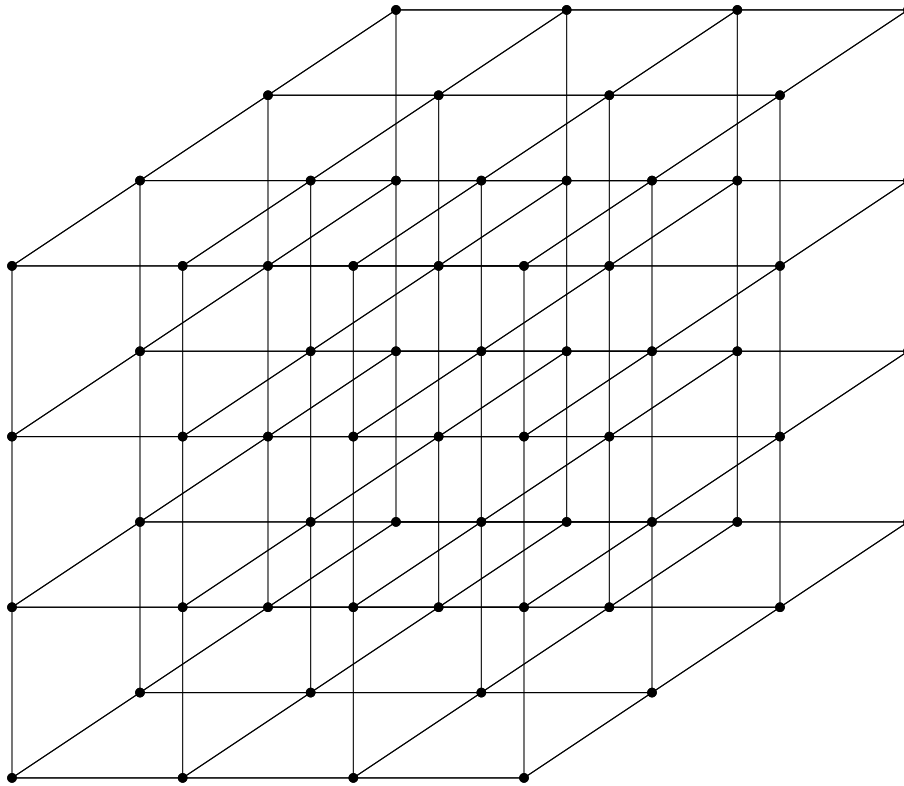
$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} \in \ker(\mathbf{L})$$

Da er $\mathbf{D}\vec{f} = \sum_{i=0}^r f_i m'_i = 0$. For å vise at $\vec{f} \in \text{im}(\mathbf{D})$ må vi vise at

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} d_0 g_0 \\ -d'_1 g_0 + d_1 g_1 \\ -d'_2 g_1 + d_2 g_2 \\ \vdots \\ -d'_{r-1} g_{r-2} + d_{r-1} g_{r-1} \\ -d'_r g_{r-1} \end{pmatrix}$$

for en vektor $\vec{g} \in A^r$. Legg merke til at $f_0 m'_0 = -(f_1 m'_1 + f_2 m'_2 + \dots + f_r m'_r)$, og at $d_0 | m'_i$ for alle $i > 0$. Dette medfører at $d_0 | f_0$, så la $f_0 = g_0 d_0$. Ved å bruke relasjonen $d_k m_k = d'_{k+1} m'_{k+1}$ får vi $m'_1 (g_0 d'_1 + f_1) = -(f_2 m'_2 + \dots + f_r m'_r)$. Igjen vil d_1 dele høyresiden, men ikke m'_1 . Vi kan da velge g_1 slik at $f_1 = -d_1 g_0 + d_1 g_1$, som gir oss $m'_2 (d'_2 g_1 + f_2) = -(f_3 m'_3 + \dots + f_r m'_r)$. Slik kan vi fortsette helt til vi kommer til $m'_{r-1} (d'_{r-1} g_{r-2} + f_{r-1}) = -f_r m'_r$, dette gir oss den siste oppføringen i vektoren $f_r = -d_r g_{r-1}$. Dermed er $\text{im}(\mathbf{D}) = \ker(\mathbf{L})$. \square

6 $\text{Hom}(\circ \circ \circ, [n])$

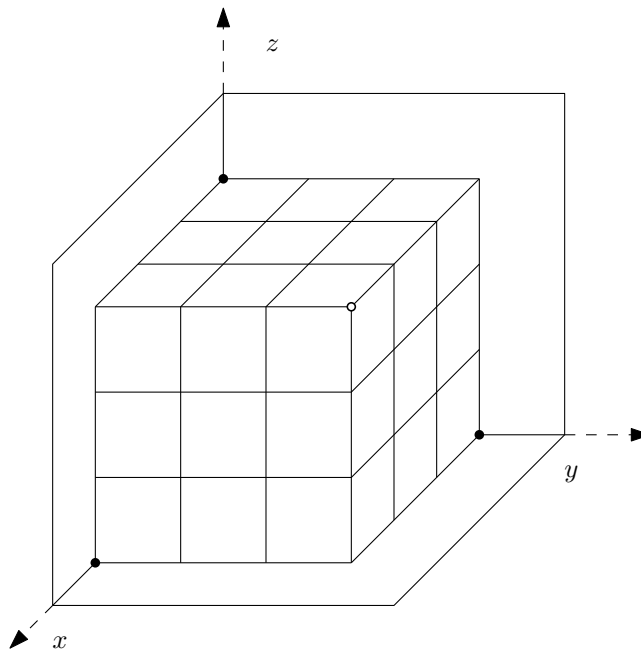


Figur 16: $\text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$

Vi øker dimensjonen med 1 og ser på det første ekstreme posetet av kardinalitet 3. Dette posetet er ekstremt i den forstand at vi har tre uavhengige elementer, og har størst frihet når vi ser på mulige isotone avbildninger. Som alltid starter vi med et geometrisk bilde av posetet $\text{Hom}(\circ \circ \circ, [n])$. Kaller vi elementene i posetet $\circ \circ \circ$ for a, b og c må disse sendes til punkter $(\phi(a), \phi(b), \phi(c)) \in [n] \times [n] \times [n]$ slik at ϕ bevarer ordningen i $\circ \circ \circ$. Men $\circ \circ \circ$ har ingen ordning, så $(\phi(a), \phi(b), \phi(c))$ kan sendes til alle mulige punkter i $[n] \times [n] \times [n]$. Vi har dermed vist

Proposisjon 6.1. $\text{Hom}(\circ \circ \circ, [n]) \cong [n] \times [n] \times [n]$, og $|\text{Hom}(\circ \circ \circ, [n])| = n^3$

For å gjøre livet lettere sender vi $(\phi(a), \phi(b), \phi(c))$ til $x_{\phi(a)}y_{\phi(b)}z_{\phi(c)}$, slik at det blir kjappere å regne ut $L(P, n; \mathcal{J})$. Geometri spiller, som vanlig, en sentral rolle i mange av argumentene her så vi vil ofte ikke tegne inn alle punktene i et posetideal (som f. eks fig. 16), men heller understreke punktene som genererer posetidealet. Fig. 16 vil heller bli visualisert som



Figur 17: $\text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$, med én spiss markert med en hvit sirkel, og de 3 trivielle krokene markert med en svart sirkel

som viser randen til posetidealet. Alle figurene i denne seksjon vil ha samme koordinatoppsett (ha aksene på samme plass) som fig. 17, og vi velger derfor å ikke tegne inn aksene på de senere figurene.

Eksempel 6.1. Co-letterplace-idealet til posetet i fig. 17 er

$$L(\circ \circ \circ, 4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cap (y_1, y_2, y_3, y_4) \cap (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Alexanderdualet er $L^A(\circ \circ \circ, 4) = (x_1x_2x_3x_4, y_1y_2y_3y_4, z_1z_2z_3z_4)$ og har resolusjon

$$S^1 \leftarrow S^3 \leftarrow S^3 \leftarrow S^1$$

En lettere måte å se dette på er ved å observere at $L^A(\circ \circ \circ, 4) = L(4, \circ \circ \circ)$, og at det bare er 3 isotone avbildninger $\phi : [4] \rightarrow \circ \circ \circ$; $\phi(i) = a$, $\phi(i) = b$ eller $\phi(i) = c$ for alle $i \in [4]$.

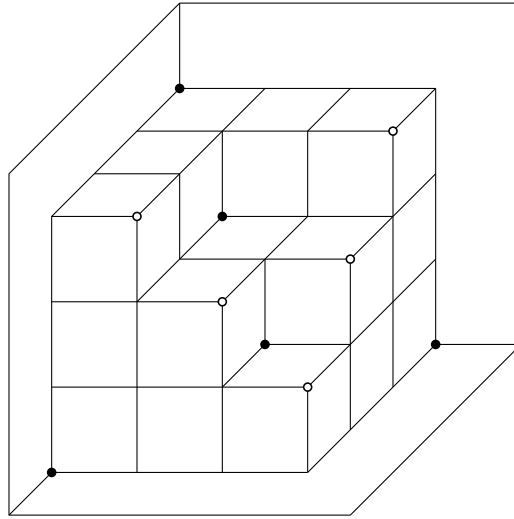
La oss se på et mindre trivielt posetideal:

Eksempel 6.2. La \mathcal{J} være som i fig. 18. $L(\circ \circ \circ, n; \mathcal{J})^A$ er

$$(x_1x_2x_3x_4, y_1y_2y_3y_4, x_1x_2x_3y_1y_2y_3z_1z_2, x_1x_2y_1y_2z_1z_2z_3, z_1z_2z_3z_4)$$

og har resolusjon

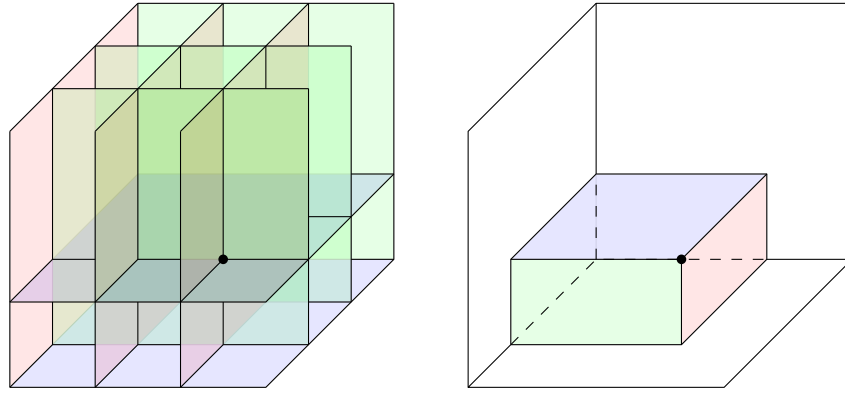
$$S \leftarrow S^5 \leftarrow S^9 \leftarrow S^5$$



Figur 18: $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$, med kroker markert med svarte prikker

Bortsett fra de trivielle generatorene til $L(\circ \circ \circ, n; \mathcal{J})^A$ i eks. 6.2 kan det se ut som generatorene kan bestemmes av krokerne i \mathcal{J} . Dette var tilfellet i de tidligere seksjonene hvor vi så på linjer som strømmet ut av rektangler. Her vil derimot alt som er delelig på, f. eks, x_1 være et plan istedet for en linje. Hvert monom i Alexanderdualet vil korrespondere til plan som dekker alle punktene i et posetideal \mathcal{J} . Skjæringspunktene mellom disse planene (i x -, y - og z -retning), hvis det finnes, vil forme en boks (fig. 19b). Vi ser med engang at et av hjørnene må være i origo (som også var tilfellet for $\text{Hom}(\circ \circ, [n])$), ellers er det minst ett punkt på ytteraksene vi ikke får dekt.

I likhet med de forrige seksjonene har vi også her følgende teorem:



(a) Planene korresponderende til monomet $x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3 z_1 z_2$ (b) Skjæringspunktene mellom hver tripplett av plan former en boks

Figur 19

Teorem 6.1. La $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ \circ \circ, [n])$ være et posetideal med kroker k_1, k_2, \dots, k_r og la $k_i = (a_i, b_i, c_i)$. Da er de ikke-trivielle generatorene til $L(\circ \circ \circ, n; \mathcal{J})^A$

$$m'_i = \prod_{j=1}^{a_i} x_j \prod_{j=1}^{b_i} y_j \prod_{j=1}^{c_i} z_j \mid 1 \leq i \leq r$$

Bevis. Idéen til dette beviset burde ikke komme som noen overraskelse; boksens dimensjoner er bestemt av to punkter: origo og et punkt C . Greier vi å finne C har vi generatorene til Alexanderdualet. Anta at $C \neq k_i$ for alle $i \in \{1, \dots, r\}$ og at C ikke genererer en av de trivielle boksene. Da er det to muligheter:

- C ligger på randen til \mathcal{J} . Da finnes en $j \in \{1, \dots, r\}$ slik at $c_z = c_j$, m.a.o. C ligger på samme z -plan som en krok. Siden $c_x \geq a_j$, $c_y \geq b_j$ og $(c_x, c_y, c_z) \neq (a_j, b_j, c_j)$ vil boksen med hjørne C alltid inneholde boksen med hjørne k_j . Boksen er derfor ikke minimal.
- $C = (c_x, c_y, c_z)$ ligger på en punkt innenfor (og ikke på) randen, men da vil også $(c_x + 1, c_y + 1, c_z + 1) \in \mathcal{J}$, så planene ut av boksen dekker ikke alle punktene.

Dermed må $C = k_i$ for en $i \in \{1, \dots, r\}$. De trivielle boksene er gitt ved $\prod x_i$ hvor i går over alle førstekoordinatene som opptrer i \mathcal{J} , det samme gjelder analogt for $\prod y_j$ og $\prod z_k$. □

Tar vi resolusjonen av $L(\circ \circ \circ, n; \mathcal{J})^A$ vil den være på formen

$$S^1 \leftarrow S^a \leftarrow S^{a+b-1} \leftarrow S^b$$

Her vil a og b ha en geometrisk tolkning. a er som kjent antall kroker i figuren vi får av posetidealet (når vi tar med de trivielle). En kan mistenke at b er antall spisser i figuren (skal en skrive posetidealet som en unionen av prinsipale posetidealer, er det spissene som er generatorene). Dette er litt mer eksotisk å vise, og vi tar derfor turen gjennom funktoren Ext .

Proposisjon 6.2. *La $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ\circ\circ, [n])$ være et posetideal og la $L(\circ\circ\circ, n; \mathcal{J})^A$ ha minimal fri resolusjon*

$$F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow F_2 \leftarrow F_3$$

Hvor $F_i = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S^{\beta_i, j}(-j)$. Da er β_3 antall spisser i posetidealet \mathcal{J}

Bevis. Fra eksempel 3.4 har $L^p(\circ\circ\circ, n; \mathcal{J})^A$ de samme Betti-tallene. Kall dette idealet I' . Dette idealet er nå i polynomringen $S' = k[x, y, z]$, med det maksimale idealet $\mathfrak{m} = (x, y, z)$. Dualiserer vi komplekset får vi

$$\text{Ext}_{S'}^3(S'/I', S'(-3)) \leftarrow F_3^\vee \leftarrow F_2^\vee \leftarrow F_1^\vee \leftarrow F_0^\vee$$

Hvor $F_i^\vee = \text{Hom}_{S'}(F_i, S'(-3))$. Fra [6] (proposisjon 25.3, s. 99) er dette en minimal fri resolusjon av $\text{Ext}_{S'}^3(S'/I', S'(-3))$ og fra [2] (korollar 3.5.9, s. 133) er

$$\text{Ext}_{S'}^3(S'/I', S'(-3)) \cong \text{Hom}_k(S'/I', k) \cong k^{|\mathcal{J}|}$$

Vi viser først at generatorene til $\text{Hom}_k(S'/I', k)$, som en S' -modul, korresponderer én-til-én med $\{\bar{m} \neq \bar{0} \in S'/I' \mid \bar{m}\mathfrak{m} = \bar{0}\}$, altså monomene i størst grad som annihileres av det maksimale idealet $\mathfrak{m} \subset S'$.

La oss se dette. $\text{Hom}_k(S'/I', k)$ har en S' -modul struktur ved å definere $\bar{n}^\vee \cdot \bar{m}$ som en komposisjon av avbildninger: (med $\bar{n}^\vee \in \text{Hom}_k(S'/I', k)$) mener vi avbildningen som sender $\bar{n} \mapsto \bar{1}$, og alle andre monomer til $\bar{0}$)

$$S'/I' \xrightarrow{\bar{m}} S'/I' \xrightarrow{\bar{n}^\vee} k$$

Vi viser:

- \bar{n}^\vee er en minimal generator $\Rightarrow \bar{n}\mathfrak{m} = \bar{0}$.

Anta at $\bar{n}\mathfrak{m} \neq \bar{0}$. Da finnes et minste monom $\bar{l} \in S'/I'$ slik at $\bar{n}\bar{l}\mathfrak{m} = 0$. Vi får da avbildningen

$$\bar{n} \mapsto \bar{n}\bar{l} \xrightarrow{(\bar{n}l)^\vee} 1$$

Dette betyr at $(\bar{n}l)^\vee \bar{l} = \bar{n}^\vee$, og $\bar{l} \neq \bar{1}$. Dette er en selvmotsigelse, så $\bar{n}\mathfrak{m} = \bar{0}$.

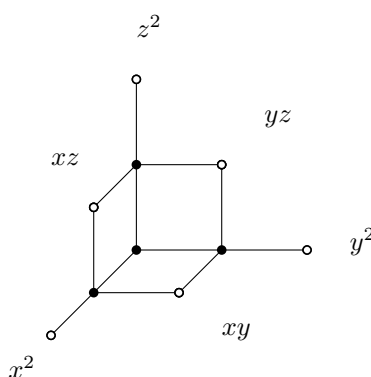
- $\bar{n}\mathfrak{m} = \bar{0}$, $\bar{n} \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{n}^\vee$ er en minimal generator.

Anta \bar{n}^\vee ikke er en minimal generator. Da finnes det monomer $\bar{l}, \bar{p} \in S'/I'$ slik at $\bar{l}^\vee \bar{p} = \bar{n}^\vee$ og $\bar{p} \neq \bar{1}$. Det er kun ett monom $\bar{x} \in S'/I'$, per definisjon av k -modulhomomorfien, som er slik at $\bar{n}^\vee(\bar{x}) = \bar{1}$, og dette er $\bar{x} = \bar{n}$. Vi

har også at $\bar{n}^\vee(\bar{x}) = \bar{l}^\vee \bar{p}(\bar{x}) = \bar{l}^\vee(\bar{p}\bar{x}) = \bar{1}$. Likeledes for avbildningen \bar{l}^\vee er det kun for monomet $\bar{l} \in S'/I'$ at $\bar{l}^\vee(\bar{l}) = \bar{1}$. Dermed må $\bar{l} = \bar{p}\bar{x} = \bar{p}\bar{n}$.

Men dette betyr at $\bar{l} = \bar{0}$ (siden $\bar{n} \neq \bar{0}$ og $\bar{n}\mathbf{m} = \bar{0}$) og derfor er $\bar{n} = \bar{0}$ (siden $\bar{0}^\vee \bar{p} = \bar{n}^\vee$ er 0-avbildningen); en selvmotsigelse! Så $\bar{p} = \bar{1}$ og \bar{n}^\vee er en minimal generator.

Disse monomene (som annullerer det maksimale idealet) korresponderer til spissene i \mathcal{J} , siden ingen punkter er større enn spissene (f. eks fig. 20). Antall generatorer til $\text{Hom}_k(S'/I', k)$, og dermed antall spisser i \mathcal{J} , får vi ved å se på F_3^\vee som har samme Betti-tall, β_3 , som F_3 .



Figur 20: S'/I' med $I' = (x, y, z)^3$. Spissene er hvite sirkler, med monomet, \bar{m} , de korresponderer til ved siden. Legg merke til at $\bar{m}(x, y, z) = \bar{0}$ over S'/I' .

□

Siden vi for alle posetideal \mathcal{J} i $\text{Hom}(\circ \circ \circ, [n])$ får 3 (trivielle) kroker, og minst 1 spiss kan vi skrive resolusjonen til $L(\circ \circ \circ, n; \mathcal{J})^A$ som

$$S^1 \leftarrow S^{a+3} \leftarrow S^{a+b+3} \leftarrow S^{b+1}$$

Den enkleste resolusjonen opptrer når $a = b = 0$ (fig. 17) og er gitt av Koszul-komplekset. En kan da spørre om det finnes en sammenheng mellom a og b , eller øvre- og nedre skranker for b gitt en a . Resultatet viser seg å være to overraskende nydelige ulikheter: $a \leq 2b$ og $b \leq 2a$. Vi viser disse to ulikhetene ved å konstruere et topplag på \mathcal{J} og resten følger via induksjon.

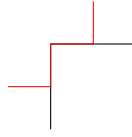
Teorem 6.2. *La $\mathcal{J} \subset \text{Hom}(\circ \circ \circ, [n])$ være et posetideal, og la $L(\circ \circ \circ, n; \mathcal{J})^A$ ha resolusjon*

$$S^1 \leftarrow S^{a+3} \leftarrow S^{a+b+3} \leftarrow S^{b+1}$$

Da er $b \leq 2a$

Bevis. La oss se på topplaget til \mathcal{J} og anta at vi vil lage et nytt lag hvor forholdet mellom nye spisser til nye kroker, $S' : K'$, er størst mulig.

La S_A^B være randen til det nye laget og L_A^B være randen til det gamle laget (fig. 21). Det er to tilfeller å utforske:

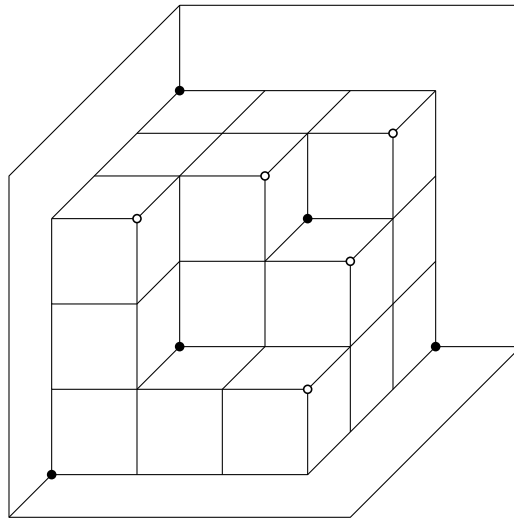


Figur 23

som begge starter og slutter trivielt, men som kanskje fortsatt rører L_A^B ikke-trivielt. Vi kan kjøre akkurat det samme argumentet for begge disse nye lagene, og fortsette til vi har delt opp S_A^B i mange lag, hvor hvert lag enten alternerer (mellom nye spisser og nye kroker), eller rører L_A^B kun trivielt. Denne oppdelingen må slutte, siden vi startet med et endelig lag S_A^B . Hvis vi tilsutt får et minste lag, som vi ikke kan dele opp videre, men fortsatt rører L_A^B minst én gang ikke-trivielt gir dette laget ingen nye spisser og kroker.

For å konkludere: lager vi et nytt lag er det optimale forholdet mellom nye spisser til nye kroker $S' : K' = 2 : 1$, dette gir $b \leq 2a$. \square

Fig. 18 er et eksempel på et posetideal med $a = 2$ og $b = 4$. Posetidealet er ikke unikt, da fig. 24 er et annet posetideal med $a = 2$ og $b = 4$.



Figur 24: $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$

Vi viser nå en relatert ulikhet:

Teorem 6.3. *La $\mathcal{J} \subset \text{Hom}(\circ \circ \circ, [n])$ være et posetideal, og la $L(\circ \circ \circ, n; \mathcal{J})^A$ ha resolusjon*

$$S^1 \leftarrow S^{a+3} \leftarrow S^{a+b+3} \leftarrow S^{b+1}$$

Da er $a \leq 2b$

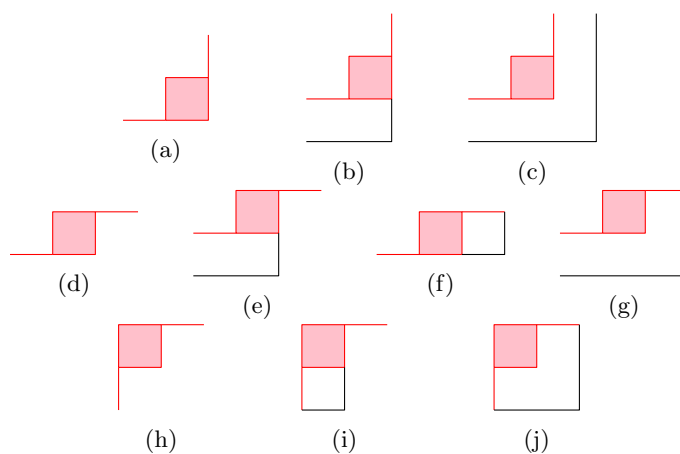
Bevis. En skulle tro at vi kunne adoptere bevisstrategien fra teorem 6.2 - dette trodde forfatteren for en stund også, men det viser seg at det er flere tilfeller å ta hensyn til. Derfor bruker vi en litt annen strategi.

La K være antall kroker totalt i \mathcal{J} , og S være det totale antallet spisser i det samme posetidealet. Vi introduserer to nye hjelpe-parametre r_t og s_t , hvor r_t er antall spisser som bare er på topplaget, og s_t er alle nye spisser som rører topplaget.

Vi påstår at ulikheten

$$K \leq 2S + 2 - r_t - s_t$$

holder, og sjekker hva som skjer med ulikheten når vi legger en kopi av topplaget opp på topplaget og fjerner en "kloss". Dette beviset er mindre elegant og er heller en rutinesjekk. Det er 10 tilfeller å sjekke (om vi ikke regner med symmetriske tilfeller). Vi sjekker om $\Delta K \leq 2\Delta S - \Delta r_t - \Delta s_t$ stemmer, hvor Δ betyr endringen etter at vi fjerner en kloss. Klossen vi fjerner er markert med et rosa kvadrat (se på fig. 26 for hjelp til visualisering).



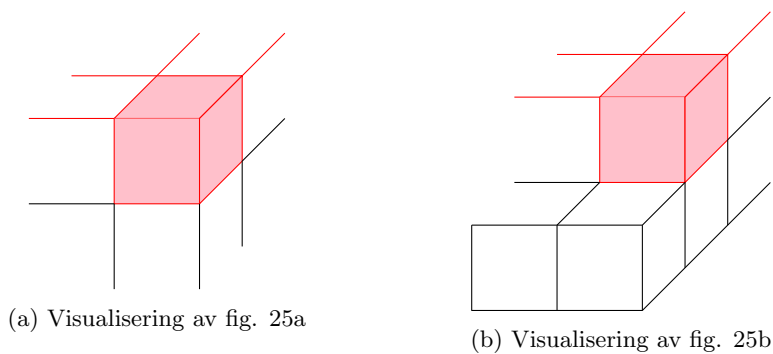
Figur 25: De forskjellige topplagene sett ovenfra. Topplaget er i rødt, og laget rett under er i svart

Vi sjekker ulikhetene for hvert av topplagene i fig. 25.

- Fig. 25a. $\Delta K = +1$, $\Delta S = +2$, $\Delta r_t = +1$, $\Delta s_t = +1$
- Fig. 25b. $\Delta K = +1$, $\Delta S = +1$, $\Delta r_t = +1$, $\Delta s_t = 0$
- Fig. 25c. $\Delta K = +1$, $\Delta S = +1$, $\Delta r_t = +1$, $\Delta s_t = 0$
- Fig. 25d. $\Delta K = +1$, $\Delta S = +1$, $\Delta r_t = 0$, $\Delta s_t = 0$
- Fig. 25e. $\Delta K = +1$, $\Delta S = 0$, $\Delta r_t = 0$, $\Delta s_t = -1$
- Fig. 25f. $\Delta K = 0$, $\Delta S = 0$, $\Delta r_t = 0$, $\Delta s_t = 0$

- Fig. 25g. $\Delta K = 0, \Delta S = 0, \Delta r_t = 0, \Delta s_t = 0$
- Fig. 25h. $\Delta K = +1, \Delta S = 0, \Delta r_t = -1, \Delta s_t = -1$
- Fig. 25i. $\Delta K = 0, \Delta S = -1, \Delta r_t = -1, \Delta s_t = -1$
- Fig. 25j. $\Delta K = -1, \Delta S = -1, \Delta r_t = -1, \Delta s_t = 0$

Og hvert tilfelle tilfredsstiller ulikheten.



Figur 26: Visualisering

Fjerner vi enda en kloss, vil vi alltid være i et av tilfellene i fig. 25. Vi har alltid minst én spiss på topplaget for alle posetideal \mathcal{J} , så $r_t \geq 1$ og $s_t \geq 0$. Sammen med disse to ulikhetene kan vi skrive:

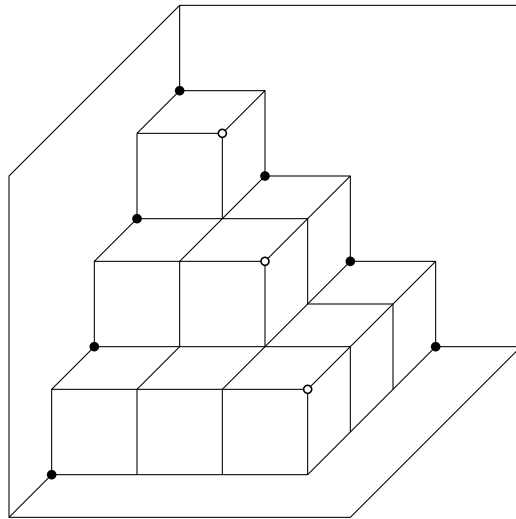
$$K \leq 2S + 1$$

Med $K = a + 3$ og $S = b + 1$ blir denne ulikheten:

$$a \leq 2b$$

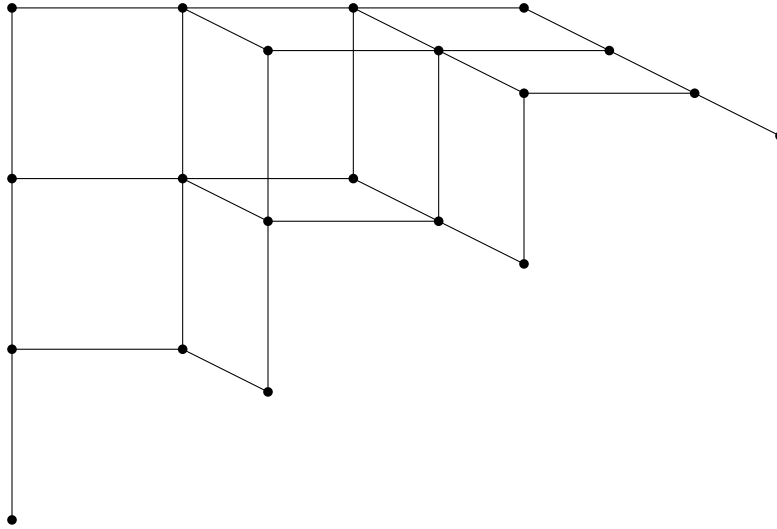
□

Et eksempel på et posetideal som er minimalt i forhold til antall spisser er fig. 27.



Figur 27: $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$

7 $\text{Hom}([3], [n])$



Figur 28: $\text{Hom}([3], [4])$

Da vi så på posetidealer i $\text{Hom}(\circ \circ \circ, [n])$ hadde vi stor frihet i å lage posetidealene, her ser de derimot mer eksotiske ut. Vi starter igjen med å danne oss et geometrisk bilde. Hvis $\phi \in \text{Hom}([3], [n])$ er en isoton avbildning må $\phi(1) \leq \phi(2) \leq \phi(3)$. I co-letterplace-idealet kan vi sende en slik avbildning til monomet $x_{\phi(1)}y_{\phi(2)}z_{\phi(3)}$. Tenker vi på kontinuerlige funksjoner i \mathbb{R}^3 vil $\text{Hom}([3], [n])$ være punktene med heltall som ligger innenfor pyramiden $1 \leq x \leq y, 1 \leq y \leq z, 1 \leq x \leq z$. Størrelsen på dette posetet er

Proposisjon 7.1. $|\text{Hom}([3], [n])| = \binom{n+2}{3}$

Bevis. La $\phi \in \text{Hom}([3], [n])$ og fiks $\phi(1) = a \in [n]$. Fra proposisjon 5.1 er det $\binom{n-a+2}{2}$ mulige avbildninger for en gitt a . Går vi gjennom alle a er det $\sum_{a=1}^n \binom{n-a+2}{2} = \binom{n+2}{3}$ mulige avbildninger. \square

For å beskrive resolusjonen til posetidealer i $\text{Hom}([3], [n])$ går vi gjennom mengden $\Lambda\phi$ (fra seksjon 1.2). For en isoton avbildning $\phi : P \rightarrow [n]$ var denne mengden

$$\Lambda\phi = \{(p, i) \mid \phi(q) \leq i < \phi(p) \text{ for alle } q < p\}$$

Siden vi her bruker $P = [3]$ vil $\Lambda(\phi(1), \phi(2), \phi(3))$ være $(\phi(1) - 1, \phi(2) - \phi(1), \phi(3) - \phi(2))$. Som i eks. 3.4 kan vi projisere idealet $L([3], n; \mathcal{J})^A$ til $L^p([3], n; \mathcal{J})^A \subseteq S' = k[x, y, z]$ på akkurat samme måte. Dette har den effekt at vi sender $x_i \mapsto x, y_i \mapsto y$ og $z_i \mapsto z$ for alle $i \in [n]$. Her kommer Λ til nytte, da det i artikkelen [3] (korollar 3.5) vises at generatorene til $S'/L^p([3], n; \mathcal{J})^A$ er

$$x^{\phi(1)-1}y^{\phi(2)-\phi(1)}z^{\phi(3)-\phi(2)}$$

Eksempel 7.1. For $\text{Hom}([3], [4])$ er $S'/L^p([3], [4])^A$

$$\langle 1 \rangle_k \oplus \langle x, y, z \rangle_k \oplus \langle x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz \rangle_k \oplus \langle x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, xy^2, y^2z, xz^2, yz^2, xyz \rangle_k$$

Vi kan representere denne k -basisen som punkter i $[4] \times [4] \times [4] \cong \text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$ slik at punktene langs x -aksen er $1, x, x^2, x^3$. Fra fig. 29a ser vi at punktene former et posetideal $[4, 1, 1] \cup [1, 4, 1] \cup [1, 1, 4] \cup [3, 2, 1] \cup [2, 3, 1] \cup [1, 3, 2] \cup [1, 2, 3] \cup [3, 1, 2] \cup [2, 1, 3] \cup [2, 2, 2] \subset \text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$ (husk at unionen er av prinsipale posetidealer). Antall kroker i dette posetidealet er 15, og antall spisser er 10 (fig. 29b). Resolusjonen til $L^A([3], 4)$ burde da være

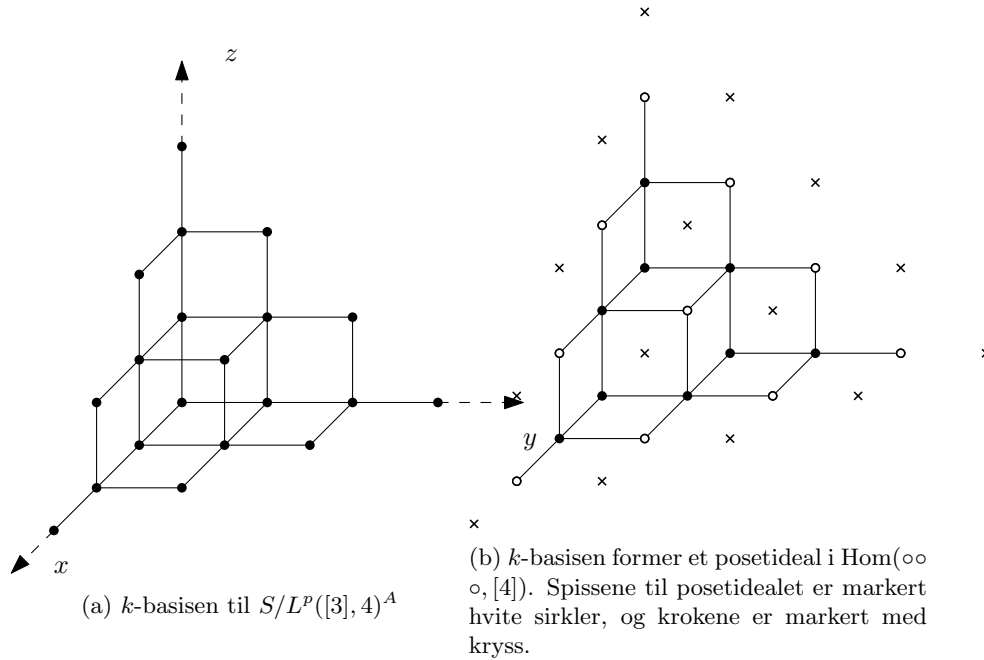
$$S^1 \leftarrow S^{15} \leftarrow S^{24} \leftarrow S^{10}$$

Og dette stemmer bra!

Fra fig. 29b kan vi mistenke, siden kryssene og de hvite sirklene former trekant, at antall spisser og kroker alltid er trekanttall for $\mathcal{J} = \text{Hom}([3], [n])$. Dette viser seg å være en god mistanke:

Teorem 7.1. $L([3], n)^A$ har resolusjon

$$S^1 \leftarrow S^{\binom{n+2}{2}} \leftarrow S^{n^2+2n} \leftarrow S^{\binom{n+1}{2}}$$



Figur 29

Bevis. La $L^P([3], n)^A$ være bildet under projeksjonen $[3] \times [n] \xrightarrow{P} [3]$ av generatorene. Da er

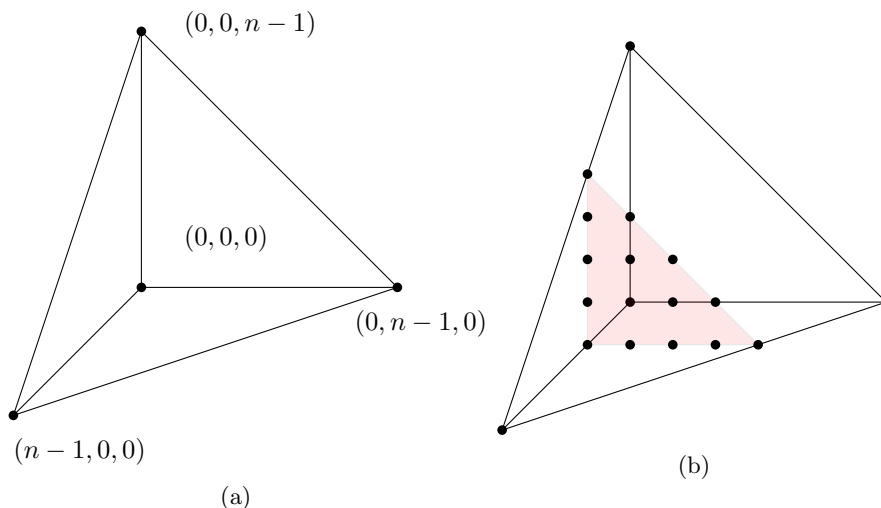
$$S'/L^P([3], n)^A = \left\langle x^{\phi(1)-1} y^{\phi(2)-\phi(1)} z^{\phi(3)-\phi(2)} \mid \phi \in \text{Hom}([3], [n]) \right\rangle_k$$

Den høyeste graden en generator kan ha er $\phi(1) - 1 + \phi(2) - \phi(1) + \phi(3) - \phi(2) = \phi(3) - 1 \leq n - 1$. Tre av disse generatorene er $x^{n-1}, y^{n-1}, z^{n-1}$. De andre generatorene må dermed ligge innenfor en pyramide med hjørner $(0, 0, 0), (n - 1, 0, 0), (0, n - 1, 0), (0, 0, n - 1)$ som på fig. 30a.

La oss vise at punktene innenfor og på pyramiden kun består av elementene i $\text{Hom}([3], [n])$. Fra proposisjon 7.1 vet vi at $|\text{Hom}([3], [n])|$ er $\binom{n+2}{3}$. For å finne antall punkter i pyramiden kan vi legge sammen alle punktene i et gitt plan, for så å summere over alle planene (fig. 30b). Denne summen blir

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1-i}{2} = \binom{n+2}{3}$$

Generatorene former derfor et poset i $\text{Hom}([3], [n])$ hvor spissene er alle generatorene med grad $n - 1$. Disse ligger på trekanten med hjørner $(n - 1, 0, 0), (0, n - 1, 0), (0, 0, n - 1)$. Antall slike punkt er $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$. Hver krok korresponderer til generatorene i komplementet til posetet, som betyr at punktene korresponderende til krokene ligger på trekanten med hjørner $(n, 0, 0), (0, n, 0), (0, 0, n)$.



Figur 30: Punkter på formen (x, y, z) ligger innenfor en pyramide

Dermed er antall kroker $\binom{(n+1)+1}{2} = \binom{n+2}{2}$. Dette gir Betti-tallene til resolusjonen.

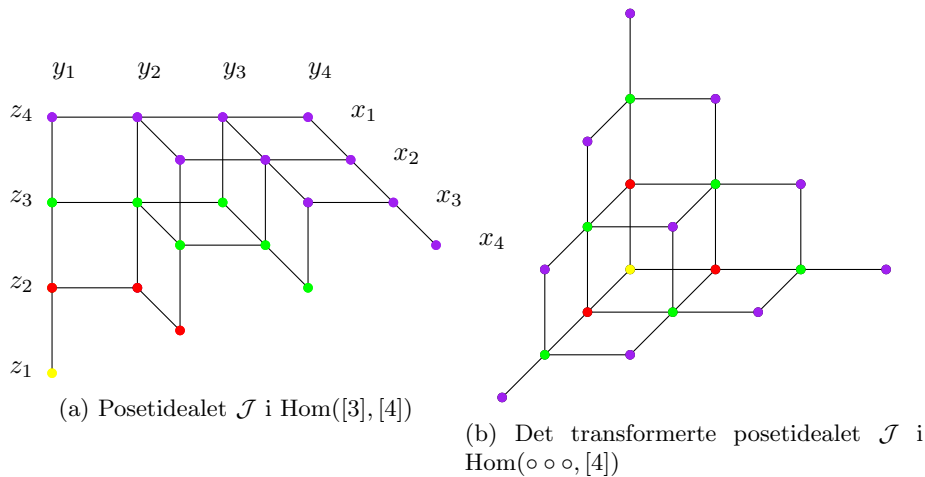
□

For å se hva som skjer med resolusjonen for vilkårlige posetideal $\mathcal{J} \subset \text{Hom}([3], [n])$ er det lurt å tenke på hele prosessen som en transformasjon. Vi startet med et posetideal i $\text{Hom}([3], [n])$ og endte opp med et i $\text{Hom}(\circ \circ \circ, [n])$ (som var formet av generatorene til $S'/L^p([3], n)^A$). Videre, når vi snakker om transformerte posetidealer, vil vi sikte til denne transformasjonen.

Med litt fargelegging kan det se ut som punktene i hvert fargelag i fig. 31a, punktene med fikset z -koordinat, alle ligger på en trekant (fig. 31b). Dette kan vi lett se fra Λ :

Alle punkter som ligger på lag nr. m ($z = m$) er på formen (x, y, m) slik at $1 \leq x \leq y \leq m$. Etter Λ blir disse punktene sendt til $(x-1, y-x, m-y)$. Legg merke til at for alle disse punktene er $x-1+y-x+m-y = m-1$, som betyr at alle punktene ligger på trekanten med hjørner $(m-1, 0, 0)$, $(0, m-1, 0)$, $(0, 0, m-1)$.

Det kan derfor se ut til at resolusjonen til $\mathcal{J} \subset \text{Hom}([3], [n])$ er kun bestemt av topplaget, som også var tilfellet for posetidealer i $\text{Hom}([2], [n])$. Antall punkter på det øverste laget (punktene i lilla, fig. 31a) korresponderer til spisser i det transformerte posetidealet (punktene i lilla, fig. 31b).



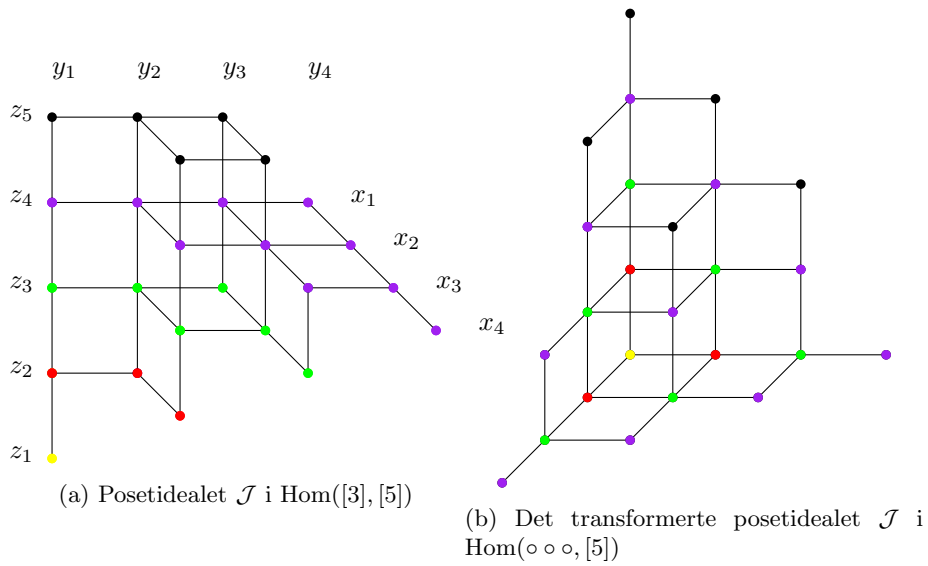
Figur 31: Transformasjon av posetidealer

Legger vi på et nytt lag, i det opprinnelige posetet, som er inneholdt i det største laget (z -plan) blir ikke Betti-tallene endret. F. eks, se på det ekstra laget med svarte punkter (fig. 32a). Disse er inneholdt i det lilla laget, i den forstand at de deler x - og y -koordinater med de lilla punktene. Transformasjonen resulterer i at vi bare strekker noe av fig. 31b til fig. 32b.

En annen måte å se dette på er at punktene på det lilla laget som har x -koordinat 1 er punkter på formen $(1, y, 4)$, hvor $1 \leq y \leq 4$. Etter transformasjonen sendes disse til punkter $(0, y - 1, 4 - y)$. Når y varierer ser vi at disse punktene ligger på en "trapp". Har vi et lag over det lilla, f. eks det svarte laget (fig. 32a), vil punktene med x -koordinat 1 være på formen $(1, y', 5)$ med $1 \leq y' \leq y$. Etter transformasjonen sendes disse til $(0, y' - 1, 5 - y')$. Dette betyr at vi de svarte punktene bare legges oppå de lilla, så vi har fortsatt den samme "trappen", bare at den er strukket. Dette gjelder for alle x -koordinatene.

La oss se på et lag, z_k (alle punktene med z -koordinat k), for et posetideal $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}([3], [n])$. Med diagonalen, mener vi alle punktene $(i, i, k) \in \mathcal{J}$, med $i \leq k$, som ligger på dette laget.

La d er antall punkter på den det laget som har lengst diagonal. Fra fig. 29b ser vi at antall spisser er antall kroker pluss $d + 1$ (på fig. 29b skyv alle spissene ett hakk opp, slik at de overlapper med kryssene. Antall kryss som mangler på det nederste laget er $d + 1$). Med dette kan vi finne resolusjonen for et vilkårlig posetideal $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}([3], [n])$:



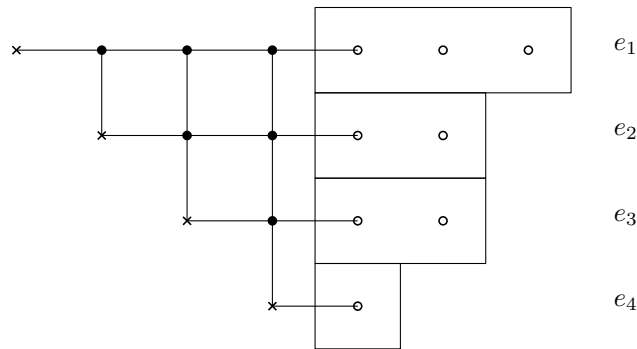
Figur 32: Transformasjon av posetidealer

Teorem 7.2. La $\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}([3], [n])$ være et posetideal hvor lengden av den lengste diagonalen er d . Da har $L([3], n; \mathcal{J})^A$ resolusjon

$$S^1 \leftarrow S^{\binom{d+2}{2}+m} \leftarrow S^{d^2+2d+2m} \leftarrow S^{\binom{d+1}{2}+m}$$

Hvor $m \geq 0$

Bevis. Har vi et topplag og legger på et mindre lag vil ikke Betti-tallene endre seg, så la oss kun se på topplaget sett ovenfra.

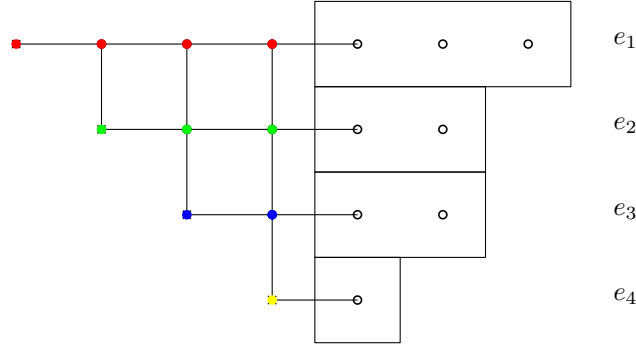


Figur 33: Kryssene på figuren er diagonalen ($d = 4$), og vi legger på noen ekstra hvite punkter

Antall punkter på diagonalen er d , og vi legger til ekstra punkter e_1, \dots, e_d slik at $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_d$. Antall punkter på topplaget er da $\binom{d+2}{2} + \sum_{i=1}^d e_i$.

Men alle e_i er ikke-negative heltall, så $\sum_{i=1}^d e_i$ kan ta hvilken som helst ikke-negativ verdi. Kall $\sum_{i=1}^d e_i = m$, da er antall punkter på topplaget $\binom{d+2}{2} + m$ som er det første Betti-tallet. Antall spisser er $(\binom{d+2}{2} + m) + (d+1) = \binom{d+1}{2} + m$.

Alternativt kan vi fargelegge fig. 33, slik at vi får:



Figur 34

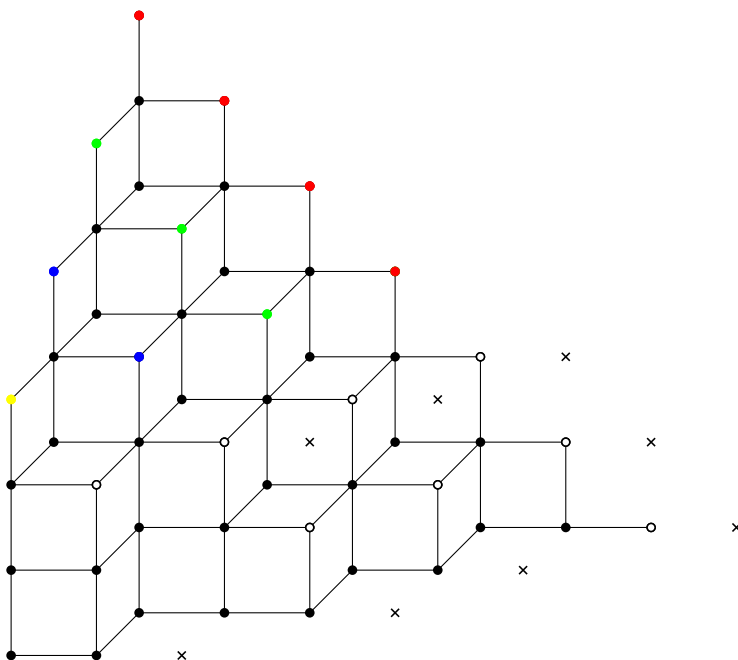
Etter transformasjonen (med Λ og generatorene til Alexanderdualet) får vi fig. 35.

Etter transformasjonen blir disse punktene $(a-1, y-a, c-y)$, som betyr at punktene blir en "trapp" som har fast x -verdi. Det samme gjelder også for de grønne, blå, og gule lagene. Fra fig. 35 ser vi at de ekstra spissene vi får er $\sum_{i=1}^d e_i = m$, som gir antall totale spisser: $\binom{d+1}{2} + m$. Samtidig ser vi at de nye krokene vi får er $\sum_{i=1}^d e_i = m$. Dermed er det totale antall kroker $\binom{d+2}{2} + m$. □

Fra seksjon 3.1 om trappeidealet, husker vi at idealet $L(P, n; \mathcal{J})^A + B(P, n : \mathcal{J})^A$ ble vist å være et Gorenstein-ideal. La $I(\mathcal{J})$ være idealet $L([3], n; \mathcal{J})^A + B([3], n; \mathcal{J})^A$. Gjennom kjøring i programmet *Macaulay2* har vi beregnet resolusjonen til $I(\mathcal{J})$ for prinsipale posetideal $[(a, b, c)] \subseteq \text{Hom}([3], [n])$ over den minste polynomringen som inneholder variablene i $I(\mathcal{J})$, altså $S = k[x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_b, z_1, \dots, z_c]$. Fra dette formoder vi:

Formodning 7.1. *La $[(a, b, c)] \subseteq \text{Hom}([3], [n])$ være et prinsipalt posetideal med $a \leq b \leq c$. Resolusjonen til $I([(a, b, c)])$ er*

$$\begin{aligned}
& S^1 \leftarrow S^1(-a) \oplus S^a(-b) \oplus S^{\binom{b+1}{2} - \binom{b-a}{2}}(-c) \oplus S^{\binom{b+1}{2} - \binom{b-a}{2}}(-a-b+2) \\
& \leftarrow S^a(-b-1) \oplus S^{2\binom{b+1}{2} - 2\binom{b-a}{2}}(-a-b+1) \oplus S^{2\binom{b+1}{2} - 2\binom{b-a}{2}}(-c-1) \oplus S^a(-a-c+1) \\
& \leftarrow S^{\binom{b+1}{2} - \binom{b-a}{2}}(-c-2) \oplus S^{\binom{b+1}{2} - \binom{b-a}{2}}(-a-b) \oplus S^a(-a-c) \oplus S^1(-b-c) \leftarrow S^1(-a-b-c)
\end{aligned}$$



Figur 35: Det transformerte posetet, med nye kroker markert som kryss

Formodning 7.2. La $[(a, b, c)] \subseteq \text{Hom}([3], [n])$. Hvis $I([(a, b, c)])$ er Stanley-Reisner-idealet korresponderende til et simplisielt kompleks Δ , så er h -vektoren

$$h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_{a+b+c-4})$$

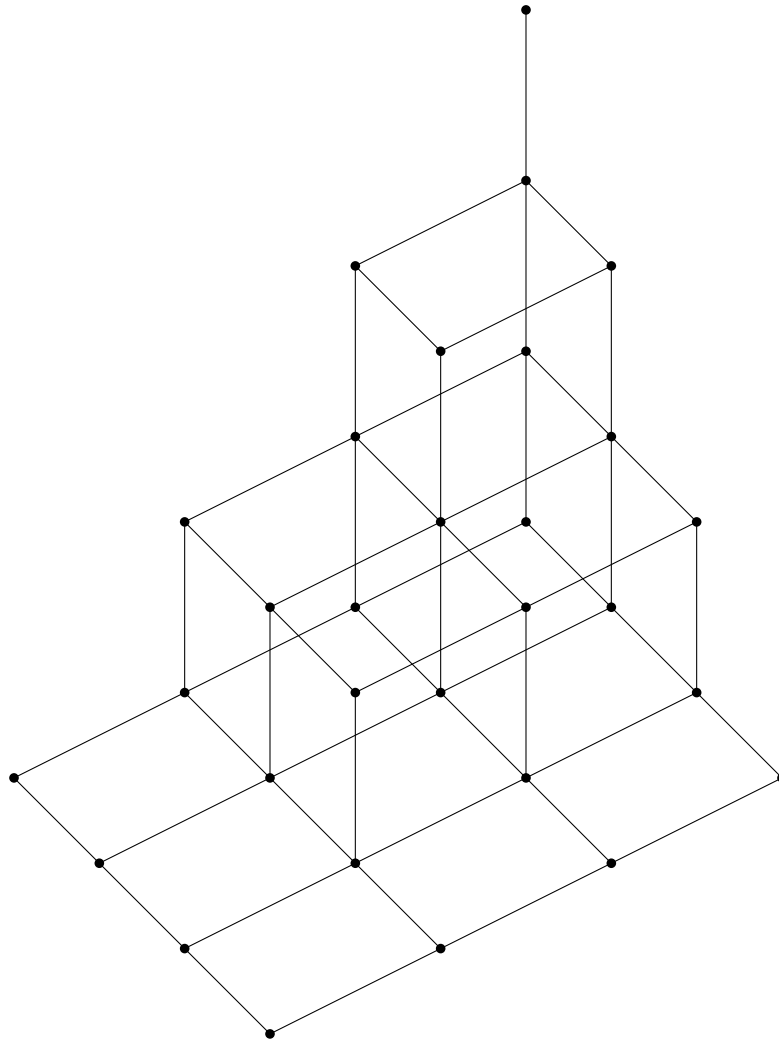
hvor $h_l = \sum_{i+j=l} \sum_{j=0}^{a-1} \sum_{i=0}^{b-2-j} \binom{i+2}{2}$, $h_l = h_{a+b+c-4-l}$ for $0 \leq l \leq b-2$. For l når $b-1 \leq l \leq a+c-3$ er $h_l = \binom{b+1}{2}$

Eller ekvivalent:

Formodning 7.3. La $[(a, b, c)] \subseteq \text{Hom}([3], [n])$, $a \leq b \leq c$. Da er Hilbertrekken

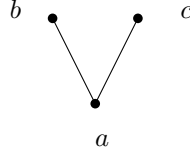
$$H_{I([(a, b, c)])}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{a-1} \sum_{i=0}^{b-2-j} \binom{i+2}{2} (t^{i+j} + t^{a+b+c-4-i-j}) + \sum_{i=b-1}^{a+c-3} \binom{b+1}{2} t^i}{(1-t)^{a+b+c-4}}$$

8 $\mathbf{Hom}(V, [n])$



Figur 36: $\mathbf{Hom}(V, [4])$

I denne seksjonen ser vi veldig kjapt på posetet $\text{Hom}(V, [n])$, og kommer med noen formodninger.



Figur 37

For en $\phi \in \text{Hom}(V, [n])$ må $\phi(a) \leq \phi(b)$ og $\phi(a) \leq \phi(c)$. Vi kan bytte om rollene på b og c så posetet burde være symmetrisk. For en fikset verdi av $\phi(a)$ er det $(n - \phi(a) + 1)^2$ muligheter for b og c . Posetet vil da se ut som i fig. 36, hvor vi har latt $\phi(a)$ være et z -plan.

Proposisjon 8.1. $|\text{Hom}(V, [n])| = \sum_{i=1}^n i^2$

Bevis. For hver $\phi(a)$ er det $(n - \phi(a) + 1)^2$ muligheter for b og c . Å summere over alle $\phi(a)$ fra 1 til n gir resultatet. \square

V -posetet kalles noen ganger et korolla med 2 blader, og vi kan se, med et identisk argument, at hvis K_m er et korolla med m blader så er

$$|\text{Hom}(K_m, [n])| = \sum_{i=1}^n i^m$$

Fra nå av sender vi $\phi(a)$ til $x_{\phi(a)}$, $\phi(b)$ til $y_{\phi(b)}$ og $\phi(c)$ til $z_{\phi(c)}$. Vi ser på Gorenstein-idealet $L(P, n; \mathcal{J})^A + B(P, n; \mathcal{J})^A$ fra seksjon 2.5, med P lik V -posetet. La $I(\mathcal{J})$ være idealet $L(V, n; \mathcal{J})^A + B(V, n; \mathcal{J})^A$. Gjennom kjøring i programmet *Macaulay2* har vi beregnet resolusjonen til $I(\mathcal{J})$ for prinsipale pose-tideal $[(a, b, c)] \subseteq \text{Hom}(V, [n])$ over den minste polynomringen som inneholder variablene i $I(\mathcal{J})$, altså $S = k[x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_b, z_1, \dots, z_c]$. Fra dette for-moder vi:

Formodning 8.1. For et prinsipalt posetideal $[(a, b, c)] \subseteq \text{Hom}(V, [n])$ er reso-lusjonen til $I([(a, b, c)])$

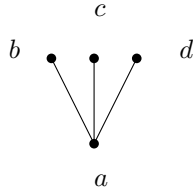
$$\begin{aligned} S^1 &\leftarrow \bigoplus_{i=1}^a S^1(-a+2-i) \oplus S^a(-b) \oplus S^a(-c) \\ &\leftarrow \bigoplus_{i=1}^{a-1} S^1(-a-i) \oplus S^a(-b-1) \oplus S^a(-c-1) \oplus S^a(-a-b+1) \oplus S^a(-a-c+1) \bigoplus_{i=1}^{a-1} S^1(-b-c+a-i) \\ &\leftarrow S^a(-a-b) \oplus S^a(-a-c) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-c-b+a-1-i) \leftarrow S^1(-a-b-c) \end{aligned}$$

I tillegg kan det se ut til at

Formodning 8.2. *Generatorene til $I([(a, b, c)])$ er*

$$m_k = \prod_{i=k+1}^a x_i \prod_{i=1}^{k-1} y_i z_i, \quad m'_k = \prod_{i=1}^{a-k} x_i \prod_{i=1}^{c-a+k} z_i, \quad m''_k = \prod_{i=1}^{a-k} x_i \prod_{i=1}^{b-a+k} y_i$$

Vi har også prøvd å se på posetet i fig. 38 som vil bli kalt W -posetet. La $I(\mathcal{J})$ være idealet $L^A(W, n; \mathcal{J}) + B^A(W, n; \mathcal{J})$. Vi har sett på resolusjonen til $I([(a, b, c, d)])$ over den minste polynomringen, $k[x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_b, z_1, \dots, z_c, w_1, \dots, w_d]$, som inneholder variablene i $I([(a, b, c, d)])$. Vi formoder:



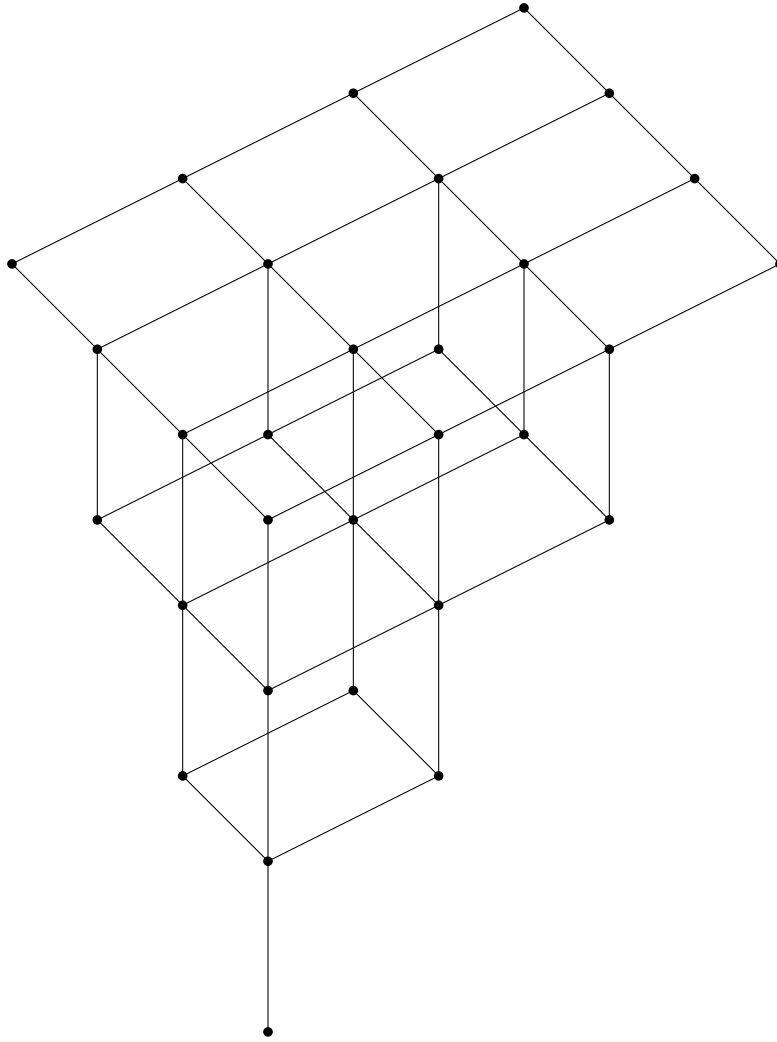
Figur 38

Formodning 8.3. *La $[(a, b, c, d)] \subseteq \text{Hom}(W, [n])$ være et prinsipalt posetideal. Da er resolusjonen til $I([(a, b, c, d)])$*

$$\begin{aligned} S^1 &\leftarrow \bigoplus_{i=1}^a S^1(-a+3-2i) \oplus S^a(-b) \oplus S^a(-c) \oplus S^a(-d) \\ &\leftarrow \bigoplus_{i=1}^{a-1} S^1(-a-2i) \oplus S^a(-b-1) \oplus S^a(-c-1) \oplus S^a(-d-1) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-b-i) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-c-i) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-d-i) \\ &\quad \bigoplus_{i=1}^a S^1(-b-c+2-i) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-b-d+2-i) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-c-d+2-i) \\ &\quad \leftarrow \bigoplus_{i=1}^a S^1(-b-1-i) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-c-1-i) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-d-1-i) \\ &\quad \bigoplus_{i=1}^a S^1(-b-c+1-i) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-b-d+1-i) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-c-d+1-i) \\ &\oplus S^a(-a-b-c+1) \oplus S^a(-a-b-d+1) \oplus S^a(-a-c-d+1) \bigoplus_{i=1}^{a-1} S^1(-b-c-d+a-2i) \\ &\leftarrow S^a(-a-b-c) \oplus S^a(-a-b-d) \oplus S^a(-a-c-d) \bigoplus_{i=1}^a S^1(-b-c-d+2a-1-2i) \leftarrow S^1(-a-b-c-d) \end{aligned}$$

De totale Betti-tallene er $1, 4a, 10a-1, 10a-1, 4a, 1$. Her, som også var tilfellet med V -posetet, kan det se ut som Betti-tallene bare er bestemt av det minste elementet i W -posetet.

9 $\mathbf{Hom}(\Lambda, [n])$



Figur 39: $\mathbf{Hom}(L, [4])$

Posetet $\text{Hom}(\Lambda, [n])$ har mye til felles med $\text{Hom}(V, [n])$. Med samme n er begge posetene like store.



Figur 40: Posetet Λ

Proposisjon 9.1. $|\text{Hom}(\Lambda, [n])| = \sum_{i=1}^n i^2$

Bevis. For en fikset $\phi(c)$ er det $(n - \phi(c) + 1)^2$ muligheter for $\phi(a)$ og $\phi(b)$. Å summere over alle $\phi(c)$ fra 1 til n gir resultatet. \square

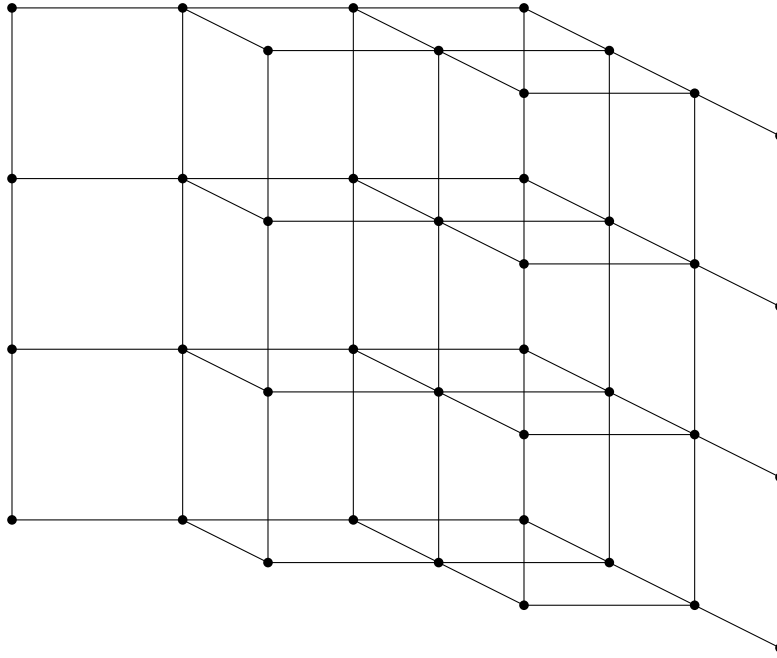
Vi sender $\phi(a)$ til $x_{\phi(a)}$, $\phi(b)$ til $y_{\phi(b)}$, og $\phi(c)$ til $z_{\phi(c)}$, og ser igjen på Gorensteinidealet $L(\Lambda, n; \mathcal{J})^A + B(\Lambda, n; \mathcal{J})^A$. Skriv dette idealet som $I(\mathcal{J})$. Gjennom programmet *Macaulay2* beregner vi $I(\mathcal{J})$ for prinsipale posetidealer $[(a, b, c)] \subseteq \text{Hom}(\Lambda, [n])$ over polynomringen $S = k[x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_b, z_1, \dots, z_c]$. Vi formoder:

Formodning 9.1. La $[(a, b, c)] \subseteq \text{Hom}(\Lambda, [n])$ være et prinsipalt posetideal. Da er resolusjonen til $I([(a, b, c)])$

$$\begin{aligned} S^1 &\leftarrow S^1(-a) \oplus S^{b-a+1}(-b+1) \oplus S^2(-b) \bigoplus_{i=1}^{a-2} S^1(-b-i) \oplus S^{a+b-2}(-c) \\ &\leftarrow S^{b-a}(-b) \bigoplus_{i=1}^{a-2} S^1(-b-i) \oplus S^{a+b+1}(-a-b+1) \oplus S^{a+b+1}(-c-1) \bigoplus_{i=1}^{a-2} S^1(-c-1-i) \oplus S^{b-a}(-a-c) \\ &\leftarrow S^{a+b-2}(-a-b) \bigoplus_{i=1}^{a-2} S^1(-c-1-i) \oplus S^2(-a-c) \oplus S^{b-a+1}(-a-c-1) \oplus S^1(-b-c) \leftarrow S^1(-a-b-c) \end{aligned}$$

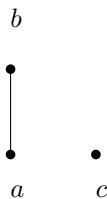
De totale Betti-tallene er $1, a + 2b, 2a + 4b, 2a + 4b, a + 2b, 1$. Igjen kan det se ut til at de totale Betti-tallene kun er avhengig av de minste elementene i Λ -posetet.

10 $\text{Hom}(L, [n])$



Figur 41: $\text{Hom}(L, [4])$

Vi gir et geometrisk bilde av posetet. For $\phi \in \text{Hom}(L, [n])$ har vi at $\phi(a) \leq \phi(b)$ og $\phi(c)$. $\phi(c)$ kan ta alle mulige verdier i $[n]$ og er uavhengig av $\phi(a), \phi(b)$. For en fikset verdi av $\phi(c)$ vil posetet se ut som $\text{Hom}([2], [n])$. Sender vi, som vanlig, $\phi(a)$ til $x_{\phi(a)}$, $\phi(b)$ til $y_{\phi(b)}$ og $\phi(c)$ til $z_{\phi(c)}$ vil hvert z -plan se ut som $\text{Hom}([2], [n])$, og vi får fig. 41.



Figur 42: L -posetet

Vi har vist:

Proposisjon 10.1. $|\text{Hom}(L, [n])| = n|\text{Hom}([2], [n])| = n \binom{n+1}{2}$

Også for dette posetet har vi sett på Gorenstein-idealet $L(L, n; \mathcal{J})^A + B(L, n; \mathcal{J})^A = I(\mathcal{J})$, igjen over den minste polynomringen $S = k[x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_b, z_1, \dots, z_c]$. Vi formoder:

Formodning 10.1. La $[(a, b, c)] \subseteq \text{Hom}(L, [n])$ være et prinsippalt posetideal. Da er resolusjonen til $I([(a, b, c)])$

$$\begin{aligned} S^1 &\leftarrow S^a(-a+1) \oplus S^{a-1}(-b) \oplus S^1(-c) \\ &\leftarrow S^{a-1}(-a) \oplus S^a(-b-1) \oplus S^a(-a-c+1) \oplus S^{a-1}(-b-c) \\ &\leftarrow S^1(-a-b) \oplus S^{a-1}(-a-c) \oplus S^a(-b-c-1) \leftarrow S^1(-a-b-c) \end{aligned}$$

Det totale Betti-tallene er $1, 2a, 4a-2, 2a, 1$.

Formodning 10.2. Generatorene til $I([(a, b, c)])$ er

$$m_c = \prod_{i=1}^c x_i, \quad m_k = \prod_{i=1}^{k-1} y_i \prod_{k+1}^a x_i, \quad m'_l = \prod_{i=1}^l x_i \prod_{i=l+1}^b y_i$$

Hvor $1 \leq k \leq a$ og $1 \leq l \leq a-1$, og det tomme produktet er 1

11 Programmering i Macaulay2

I denne oppgaven ble de fleste beregningene gjort gjennom et fantastisk dataprogram kalt *Macaulay2* [7]. Det er mange måter å kjøre programmet, men jeg valgte å installere Linux (Ubuntu), for å så kjøre programmet gjennom *GNU Emacs*. Med dette programmet kan man bl. a regne ut minimale frie resolusjoner, beregne Hilberttrekker, dimensjon og kodimensjoner (og ellers mye mere som ikke er blitt brukt i denne oppgaven). Macaulay2 tillater også en viss grad av programmering, kalt *method*, for å lage rutiner. Her vil jeg gi et eksempel på slike prosedyrer som er blitt brukt i denne oppgaven.

Eksempel 11.1. I seksjon 7 så vi på posetet $\text{Hom}(V, [n])$. Vi startet med et prinsipalt posetideal $[(a, b, c)] \subseteq \text{Hom}(V, [n])$ med $n = \max\{b, c\}$ og vi jobbet over den minste polynomringen hvor variablelene dukket opp. Denne ringen var $S = k[x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_b, z_1, \dots, z_c]$

```
-----  
V-poset  
-----  
k = QQ  
  
lpidealV = method(TypicalValue => ideal)  
lpidealV(ZZ,ZZ,ZZ) := (a,b,c) -> (  
    S = k[x_1..x_a,y_1..y_b,z_1..z_c];  
    I = ideal();  
    for i from 1 to a do  
        (for j from i to b do  
            (for k from i to c do  
                (I = I + ideal(x_i*y_j*z_k))));  
    return monomialIdeal(I));  
  
I = lpidealV(2,3,4)  
■
```

Figur 43: Rutine for å finne co-letterplace-idealet til det prinsipale posetidealet $[(a, b, c)]$

Deretter ble rutinen for å finne $L(V, n; [(a, b, c)])$ laget slik (fig. 43):

1. Vi startet med å kalle rutinen *lpidealV* som tar input (a, b, c) . *TypicalValue* og *ideal* betyr at vi starter med tall, og rutinen skyter ut en ideal.
2. Deretter definerte vi hva denne rutinen skulle gjøre med disse heltallene (a, b, c) . Først bestemte tripletten at polynomringen S , skulle være

$k[x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_b, z_1, \dots, z_c]$ hvor k er satt til å være \mathbb{Q} før. Dette sørger for at vi jobber innenfor den minste polynomringen som inneholder variablene.

3. Deretter definerer vi et ideal som stadig vokser ved $I = I + \text{ideal}(x_i y_j z_k)$ (hele tiden legges idealet $(x_i y_j z_k)$ til når visse kriterier for i, j, k er tilfredsstilt).
4. Så det vanskeligste, som er å spesifisere hvordan i, j, k skal oppføre seg. Dette gjøres med såkalte *for-løkker* (*for loops*). j og k må hele tiden være større eller lik i (p.g.a. hvordan posetet ser ut). i starter fra 1 og går helt opp til vår a , mens det skjer skal hele tiden j og k være større eller lik i , men j må stoppe på b og k må stoppe ved c . Dette føres inn som på bildet (fig. 43).
5. Rutinen avsluttes med å vise oss hvordan idealet ser ut. Dette gjøres med `return monomialIdeal(I)`. Hvert steg i rutinen avsluttes med et semi-kolon.

Å kjøre denne rutinen for det prinsipale posetidealet $[(2, 3, 4)]$ gir

```
i4 : I = lpidealV(2,3,4)
o4 = monomialIdeal (x y z , x y z , x y z , x y z , x y z , x y z , x y z , x y z , x y z , x y z , x y z , x y z , x y z , x y z ,
1 1 1 1 2 1 1 3 1 1 1 2 1 2 2 2 2 2 2 1 3 2 2 3 2 1 1 3 1 2 3 2 2 3 1 3 3 2 3 3 1 1 4
-----
x y z , x y z , x y z , x y z )
1 2 4 2 2 4 1 3 4 2 3 4
o4 : MonomialIdeal of 5
```

Figur 44: Rutinen kjøres for $[(2, 3, 4)]$

Neste på listen er å lage $B(V, n; [(a, b, c)])$:

1. Vi startet med å kalle rutinen `lpidealV` og sørget for at den tar samme input som (a, b, c) . Vi definerer ikke polynomringen inni denne rutinen, i motsetning til `lpidealV`. Dette fordi det ser ut som *Macaulay2* tror det er to forskjellige ringer, selv med samme (a, b, c) . Dette vil ikke føre til noe problem videre.
2. Vi legger in to for-løkker, siden monomene i trappidealet er generert av er produktet av to variabler.

På fig. 46a har vi tegnet trappeidealet for $[(3, 4, 3)]$ med det laveste elementet i V -posetet i midten. Vi ser at j starter i 1 og rett under det i (altså opp til $i - 1$). i kan variere fra alt mellom 1 til a . Akkurat det samme gjelder for k som med j . Dette gir for-løkken i fig. 45.

Nå som vi har laget $L(V, n; [(a, b, c)])$ og $B(V, n; [(a, b, c)])$ lager vi en rutine som gir Betti-tallene til Gorenstein-idealet. Vi husker at Gorenstein-idealet, $I([(a, b, c)])$, var $L(V, n; [(a, b, c)])^A + B(V, n; [(a, b, c)])^A$, så i rutinen bergener vi først Alexanderdualet til $L(V, n; [(a, b, c)])$ og $B(V, n; [(a, b, c)])$ for å deretter legge de sammen. Tilslutt får vi rutinen til å sende ut Betti-tallene til resolusjonen av dette idealet.

```

staircaseV = method(TypicalValue => ideal)
staircaseV(ZZ,ZZ,ZZ) := (a,b,c) -> (

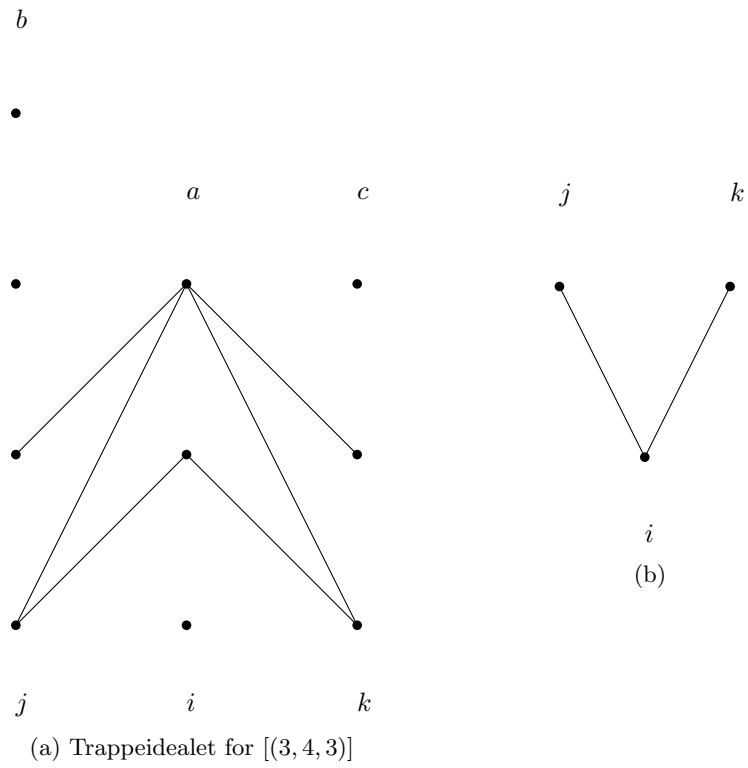
    B = ideal();
    for i from 1 to a do
      (for j from 1 to i-1 do
        (B = B + ideal(x_i*y_j)));
    for i from 1 to a do
      (for k from 1 to i-1 do
        (B = B + ideal(x_i*z_k)));
    return monomialIdeal(B));

B = staircaseV(2,3,4)

```

Figur 45: Rutine for å finne trappeidealet til det prinsipale posetidealet $[(a, b, c)]$

1. Før vi lager rutinen trenger *Macaulay2* en pakke. Denne pakken gjør at vi kan regne ut Alexanderdualet. Pakken heter *SimplicialComplexes*, og vi henter denne ved å skrive `loadPackage "SimplicialComplexes"` (fig. 47)
2. Så definerer vi rutinen, men denne gangen, siden vi skal ha ut Betti-tall, skriver vi `TypicalValue=>BettiTally`, ellers er mye det samme.
3. Det første vi gjør er å be rutinen regne ut Alexanderdualet til $L(V, n; [(a, b, c)])$ (som vi kalte *lpidealV*). Dette er de 5 første linjene inne i rutinen (fig. 47). Alexanderdualet vi får ut kalles *ID1*.
4. Idéen er akkurat den samme for å regne ut Alexanderdualet til $B(V, n; [(a, b, c)])$ (*staircaseV*), og er de neste 5 linjene inne i rutinen. Alexanderdualet til dette idealet blir kalt *BD1*.
5. For å få Gorenstein-idealet (kalles *J* i rutinen) legger vi sammen *AD1* og *BD1*.



Figur 46

```

loadPackage "SimplicialComplexes"

bettiGorensteinV = method(TypicalValue => BettiTally)
bettiGorensteinV(ZZ,ZZ,ZZ) := (a,b,c) -> (
  I = lpidealV(a,b,c);
  I1 = monomialIdeal(I);
  D1 = simplicialComplex I1;
  AD1 = dual(D1);
  ID1 = monomialIdeal(AD1);

  B = staircaseV(a,b,c);
  B1 = monomialIdeal(B);
  D2 = simplicialComplex B1;
  AD2 = dual(D2);
  BD1 = monomialIdeal(AD2);

  J = ID1 + BD1;
  C = res J;

  return(betti C));

```

Figur 47: Rutine for å finne Betti-tallene til Gorenstein-idealet $I((a, b, c))$

Figurer

2	Det simplisielle komplekset Δ	8
3	Alle isotone avbildninger $\phi : [2] \rightarrow [3]$	10
4	$\text{Hom}([2], [3])$ hvor elementene i posetet er på formen $(\phi(1), \phi(2))$ for $\phi \in \text{Hom}([2], [3])$	11
5	11
6	$\text{Hom}(\infty, [4])$	23
7	$\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\infty, [4])$	24
8	Generatorene til $L^A(\infty, n; \mathcal{J})$ korresponderer til linjer som dekker alle punktene i posetidealet	25
9	Et sett med linjer som dekker posetidealet kan representeres med et rektangel	26
10	$\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\infty, [4])$, med de maksimale element m_1, m_2, m_3	27
11	$\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\infty, [5])$	28
12	$\text{Hom}([2], [4])$	31
13	$\mathcal{J} = \text{Hom}([2], [4])$	32

14	Et sett med linjer som dekker posetidealet kan representeres med et rektangel	33
15	Et sett med linjer som dekker posetidealet kan representeres med et rektangel	34
16	$\text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$	37
17	$\text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$, med én spiss markert med en hvit sirkel, og de 3 trivielle krokene markert med en svart sirkel	38
18	$\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$, med kroker markert med svarte prikker . . .	39
19	40
20	S'/I' med $I' = (x, y, z)^3$. Spissene er hvite sirkler, med monomet, \bar{m} , de korresponderer til ved siden. Legg merke til at $\bar{m}(x, y, z) = \bar{0}$ over S'/I'	42
21	Laget S_A^B er i rødt, og L_A^B er i svart	43
22	43
23	44
24	$\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$	44
25	De forskjellige topplagene sett ovenfra. Topplaget er i rødt, og laget rett under er i svart	45
26	Visualisering	46
27	$\mathcal{J} \subseteq \text{Hom}(\circ \circ \circ, [4])$	47
28	$\text{Hom}([3], [4])$	49
29	51
30	Punkter på formen (x, y, z) ligger innenfor en pyramide	52
31	Transformasjon av posetidealer	53
32	Transformasjon av posetidealer	54
33	Kryssene på figuren er diagonalen ($d = 4$), og vi legger på noen ekstra hvite punkter	54
34	55
35	Det transformerte posetet, med nye kroker markert som kryss . .	56
36	$\text{Hom}(V, [4])$	57
37	58
38	59
39	$\text{Hom}(L, [4])$	61
40	Posetet Λ	62
41	$\text{Hom}(L, [4])$	63
42	L -posetet	64
43	Rutine for å finne co-letterplace-idealet til det prinsipale pose- tidealet $[(a, b, c)]$	65
44	Rutinen kjøres for $[(2, 3, 4)]$	66
45	Rutine for å finne trappeidealet til det prinsipale posetidealet $[(a, b, c)]$	67
46	68
47	Rutine for å finne Betti-tallene til Gorenstein-idealet $I([(a, b, c)])$	69

Referanser

- [1] A. D'Alì, G. Fløystad & A. Nematbakhsh *Resolutions of Co-letterplace Ideals and Generalizations of Bier Spheres*, arXiv:1601.02793v3 [math.AC]
- [2] W. Bruns & J. Herzog *Cohen-Macaulay rings* 1993: Cambridge University Press
- [3] G. Fløystad *Poset Ideals of P-partitions and Generalized Letterplace and Determinantal Ideals*, arXiv:1710.07456v2 [math.AC]
- [4] G. Fløystad et al., Letterplace and co-letterplace ideals of posets, *J. Pure Appl. Algebra* (2016), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2016.09.007>
- [5] J. Herzog & T. Hibi *Monomial Ideals* 2011: Springer Verlag London Limited
- [6] I. Peeva *Graded Syzygies* 2011: Springer Verlag London Limited
- [7] Macaulay2 *a software system for research in algebraic geometry* <http://www2.macaulay2.com/Macaulay2/>