

Verifisering av ein tredimensjonal bølgeomodell
ved hjelp av eksperimentelle data.

Lars Inge Enstad
Matematisk Institutt, Universitet i Bergen

08.11.01

Innhold

1	Innledning	4
2	Grunnleggende likningar	7
2.1	Schrödinger likninga	9
2.2	Stabilitetsanalyse	11
2.3	MNLS og BMNLS	12
3	Eksperiment	16
3.1	Oppsett	16
3.2	Justering og feil ved eksperiment	17
4	Integrering og initialisering	20
4.1	Numerisk metode	20
4.2	Fourier analyse	23
4.3	Initialisering.	25
5	Klassifisering og analysering av eksperimenter	28
5.1	Parameter plan	28
5.2	Energi	29
5.3	Tidsvindu	32

5.4	Sammenlikning med tidligere resultater	33
5.5	Sammenlikning mellom eksperiment	36
5.6	Aliasing	41
5.7	Stasjonære stående bølger	44
6	Simulering	47
6.1	Variasjon av modulering for eksperiment	47
6.2	Gyldighetsområdet	48
6.3	Mode energier	52
6.4	Frekvensnedskift	54
6.5	Frekvensnedskift i eksperiment og simulering	57
6.6	Konklusjon	59
A	Pertubasjons Analyse	61
A.1	Første ordens resultat	66
A.2	Andre ordens resultat	67
A.3	Tredje ordens resultat	67
B	Resultat simulering for tre dimensjoner	69
C	Programkode	74

Forord

Eg vil med dette takke veileder Kristian B. Dysthe som har vore til stor hjelp og støtte gjennom hovedfaget. Samtidig vil eg også takke Karsten Trulsen ved Sintef i Oslo. I tillegg til å ha laga simulerings programmet brukt i denne oppgåva har han svart på mange e-mailer og ellers gitt god hjelp og mange tips. Eg vil også takke Daniel Nugyen og Tom Watkins for diskusjoner. Til slutt vil eg takke familie for støtte gjennom hovedfaget og spesielt min far for å ha lest korrektur.

”Vi er omgitt og påverka av overalt av bølger. Frå strålinga av lys og farger, til lyden som vibrerer gjennom atmosfæren, til syklusen av tidevatnet, natt og dag, og rørsla av våre liv - det verkar som at alt kommer i bølger, eller som sykler som rører seg som bølger.

Det er klart at bølger er den fundamentale måten som energi er transportert og transmittert på i verden. Bølger er eit uttrykk for den universale rytmen som styrer og gjer kraft til all skapelse og utvikling av liv på jorda. Kanskje dette er årsaka til at det er så spennande å studere havbølger. Dette fenomenet som er eit av dei mest kompliserte naturlige fenomen på jorda.”

Fritt etter ”The Book of waves” av Drew Kampion.

Kapittel 1

Innledning

Dei siste tiåra har ikkje-lineær bølgeevolusjon vorte intensivt utforska. Det starta med eit resultat av Lighthill (1965) som viste at eit uniformt bølgetog var ustabil for perturbasjonar. Fleire andre fant samme resultat med andre utgangspunkt, blant andre Benjamin & Feir (1967). I 1968 kom Zakharov likninga (Zakharov (1968)) som skildrer den ikkje-lineære bølgeevolusjonen. Av denne er det mogeleg å utlede andre asymptotiske tilnærmingar som er mindre kostbare å bruke til numeriske eksperiment. Den første som vart funnen var NLS (Non-Linear Schrödinger) likninga. (Zakharov (1968)). Andre brukte eit anna utgangspunkt og fekk samme likning. Hasimoto & Ono (1972) brukte ein multipel skala metode og kom fram til samme likning. Benney & Roskes (1969) utleda likninga for endelig dybde.

Steilheten er definert til å vere lik ka der k er det karakteristiske bølgetallet til bølga og a er amplituden. I utledninga av NLS er ka satt til $O(\epsilon)$ og båndbredden $\frac{\Delta k}{k}$ er også av orden ϵ . NLS likninga er ei utvikling til $O(\epsilon^3)$. I 1979 gjekk Dysthe eit steg lenger og utleda ei likning til ein orden høgare ($O(\epsilon^4)$). Denne likninga er kalla MNLS (Modified Non-Linear Schrödinger). For å få ein modell som egna seg bedre til simulering av havbølger vart BMNLS (Broader bandwidth Modified Non-Linear Schrödinger) publisert. (Trulsen & Dysthe (1996)) Forskjellen mellom denne og MNLS likninga er at båndbredden $\frac{\Delta k}{k}$ er av orden $O(\epsilon^{1/2})$. I det siste er ELMNLS (Exact Linear part Modified Non-Linear Schrödinger) lansert av Trulsen et al. (2000). Denne har som namnet seier eksakt lineær del og har blant anna bedre stabilitets eigenskapar enn dei andre asymptotiske likningane.

Av andre teoretiske resultat kan nemnast McLean et al. (1981) og McLean (1982) som blant anna kom med eksakte resultat for stabilitet til eit

bølgetog.

På den eksperimentelle sida kan det nemnast arbeidet til Lake et al. (1977). Dei var dei første til å finne frekvens nedskift. Dei starta med eit tilnærma uniformt bølgetog med bærefrekvens ω_c . Dette gjekk inn i ein modulert fase der sidebåndene $\omega_c \pm \delta\omega$ vokste seg store. I den neste fasen var bølgetoget meir uniformt igjen, men det dominerande frekvensbåndet var $\omega_c - \delta\omega$ dersom steilheten i starten var tilstrekkelig stor. Andre har bekrefta resultatet til dømes Su et al.(1982) og Melville(1981). Felles for desse eksperimenta var at dei hovedsakelig studerte to dimensjonal bølgeevolusjon med målepunkt langs midten av bølgetanken.

På slutten av 70 tallet og på 80 tallet vart det gjort ei rekke numeriske eksperiment med dei asymptotiske likningane. Den to dimensjonale evolusjonen til NLS likninga vart undersøkt av Yuen & Ferguson 1978. Dei fann ei rekke modulerings og demodulerings faser utan frekvens nedskift. Dette stemmer kvalitativt overens med eksperimenta for bølger med lav steilhet. Simuleringer for tre dimensjoner vart gjort av Martin & Yuen (1980). Dei fann at energien vart fordelt over høgare og høgare moder slik at NLS likninga ikkje er brukande til tre-dimensjonal simulering. MNLS likninga vart simulert for det to-dimensjonale tilfellet i 1985 (Lo & Mei) og det tre-dimensjonale tilfellet i 1987 (Lo & Mei). Dei fann at MNLS likninga ga bedre resultat enn NLS sammenlikna med eksperiment for det to dimensjonale tilfellet, og at MNLS modellen ikkje lekker energi til høgare moder for tre dimensjoner. Eit permanent frekvensnedskift vart ikkje funne. Dette fann derimot Trulsen & Dysthe (1989) ved å legge til brytning i til MNLS modellen. Seinare i 1997 fann Trulsen og Dysthe at tre-dimensjonal effekter i MNLS og BMNLS likninga også ga eit permanent frekvensnedskift. Forskjellen til Lo & Mei sine arbeider på 1980 tallet var at Trulsen & Dysthe perturberte med ei større frekvens bredde.

Ein anvendelse av dei asymptotiske likningane kan vere deterministisk bølgevarsel. Tidligere har Trulsen og Stansberg (2001) funne at ein kan varsle havbølger med ein halvtimes varsel med EMNLS likninga for det to dimensjonale tilfellet.

I 1998 vart det gjennomført eit eksperiment på Marintek i Trondheim finansiert av Norsk Hydro. Det spesielle med dette eksperimentet var at ein plasserte fleire målepunkt på tvers ved kvar stasjon nedover i tanken. Vi bruker dette eksperimentet i denne oppgåva til å verifisere BMNLS likninga.

I det følgande vil vi søke å finne det kvantitative gyldighets området til BMNLS likninga for tredimensjonal simulering. Vi vil dessutan undersøke

spesielt kor godt modellen gjenskaper moduleringa på tvers i tanken. Vi byrjer med å vise korleis ein kan komme fram til NLS likninga ved ein perturbasjons metode, og viser kva som må gjerast for å komme fram til MNLS likninga og BMNLS likninga. Vi går kort igjennom den numeriske implementasjonen av simulerings programmet. Initialiseringa blir gjennomgått og ein analyse metode for å sammenlikne dei tre-dimensjonale effektane i eksperiment og simulering vert presantert. Eksperimentet blir presentert og vi ser på tester med like initialbetingelser for å sjå kor godt eksperimenta blir reproduisert, og sammenlikner med tidligere resultat. I litteraturen er det introdusert ein parameter som seier noko om når eit bølgetog vil modulere. Vi ser nærmare på denne parameteren som vi kaller η_m . Vi finn gyldighetsområdet med omsyn på η_m for modellen for forskjellige ka og T_c (bølgeperioder) og sammenlikner simulering og eksperiment. Til slutt ser vi om modellen gjev eit varig frekvensnedskift for perturbasjonane i eksperimentet og sammenlikner tre dimensjonalt spekter i eksperiment og simulering.

Kapittel 2

Grunnleggande likningar

Vi skal i det følgjande sjå på sakte varierende gravitasjons bølger på djupt vatn med fri overflate.

Vi legg inn eit rettvinkla kartesisk koordinatsystem der x og y er horisontale aksar, medan z er den vertikale aksa og har positiv retning oppover. Nullnivået er sett til å vere i overflata ved likevekt, og t står for tida. $\mathbf{v}(x,y,z,t)$ er hastighets feltet. Djupna er satt til å vere konstant lik h . x -aksen har uendelig utstrekning. y varierer mellom 0 og b .

Vi ser bort frå viskositeten til væska slik at væska kan reknast som ideell. Vi går i tillegg ut ifrå at ho er homogen, og antar dessutan at væska er inkompressibel. I følge kontinuitetslikninga er då $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. I tillegg antar vi at væska også er rotasjonsfri, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Dette kan vi gjere fordi vi går ut ifrå at vi perturberer ei væske som er i ro. I følge Kelvins teorem vil ei ideell homogen væske som er rotasjonsfri på eit tidspunkt alltid vere rotasjonsfri. Når vi antar at væska er rotasjonsfri kan vi innføre hastighetspotensialet $\phi(x, y, z, t)$ slik at $\nabla\phi = \mathbf{v}$. I tillegg antar vi at bølgelengda λ er så stor at vi kan sjå vekk i frå overflatekrefter. Dette gjer seg gjeldande for bølgelengder kortare enn omlag 7 cm. Dei kortaste bølgene vi ser på har bølgelengde 1.3 meter.

Vi antar at trykket er kontinuerlig, og det same på overflata som i overflata, sidan vi ser bort frå overflate krefter. Vi kan då bruke Bernoullis likning for å få det dynamiske grenseflate vilkåret:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 = F(t), z = \zeta(x, y, t) \quad (2.1)$$

Det kinematiske grenseflate vilkåret er

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \zeta = \frac{\partial \phi}{\partial z}, z = \zeta(x, y, t) \quad (2.2)$$

ζ er forskyvninga av overflata frå likevektsnivå og g er gravitasjonsakselerasjonen. Det kinematiske grenseflate vilkåret foruset at ein væske parikkel i overflata blir verande i overflata. På grunn av at væska er divergens og rotasjonsfri kan vi skrive opp Laplace likninga.

$$\nabla^2 \phi = 0, -h \leq z \leq \zeta(x, y, t) \quad (2.3)$$

Vi definerer ϕ slik at $F(t)$ blir tatt med i $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, og total deriverer det dynamiske grenseflate vilkåret.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla \phi \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \zeta \right) + \nabla \phi \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla (\nabla \phi)^2 = 0$$

Når vi trekker sammen og substituerer for det kinematiske grenseflate vilkåret får vi følgende ligning:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla (\nabla \phi)^2 = 0, z = \zeta(x, y, t) \quad (2.4)$$

For botnen har vi vilkåret at den vertikale farts komponenten er null ved botnen.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, z = -h \quad (2.5)$$

Vi skal sjå på bøger der djupna er mykje større enn ei typisk bølgelengde. Vi kan derfor seie at $kh \rightarrow \infty$.

Randkravet for y er at farts komponenten i y retning er null ved $y = 0$ og $y = b$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, y = 0, y = b$$

Av Bernoulli likninga ser vi at då vil randkravet med omsyn på ζ for y vere:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, y = 0, y = b$$

Vi definerer ein parameter ϵ som står for steilheten til bølga, slik vi gjorde i innledinga. Steilheten kan teoretisk sett bli så stor som ca 0.41, og for ei vanlig havbølge er den av størrelses orden 0.1. Jo større steilheten er jo meir ustabil er bølga og desto vanskeligere og modellere. Bryting av bølga starter når den lokale steilheten er ca $\epsilon = 0.3$.

2.1 Schrödinger likninga

Ei kjend løysing av likningane ovanfor er såkalla Stokes bølger. Det er slike bølger vi skal sjå på. Vi kan skriva hastighetspotensialet og overflatehevinga på følgjande måte for Stokes utvikling.

$$\phi = \bar{\phi} + Ae^{(kz+i\theta)} + A_2e^{2(kz+i\theta)} + \dots + c.c. \quad (2.6)$$

$$\zeta = \bar{\zeta} + Be^{i\theta} + B_2e^{2i\theta} + \dots + c.c. \quad (2.7)$$

θ står for $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_c t)$ der \mathbf{k} er bølgetallsvektoren $\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j}$ der normen av \mathbf{k} er satt lik k og ω_c er bærefrekvensen. $\bar{\phi}$ og $\bar{\zeta}$ er reelle funksjoner skapt av strålingstrykket til bølga. B blir kalla den første harmoniske til overflatehevinga, B_2 den andre harmoniske og så bortetter. På samme måte blir A og A_n kalla dei harmoniske til hastighetspotensialet.

Vi skal no sjå på utledninga av NLS likninga for tre dimensjoner. Den bygger på antakelser om at steilheten $ka \ll 1$ og at båndbredden $\Delta \mathbf{k}/k \ll 1$. Då vil A, A_2, \dots og B, B_2, \dots sammen med $\bar{\phi}$ og $\bar{\zeta}$ vere funksjoner av variablane $\epsilon \mathbf{x}$ og ϵt . $\bar{\phi}$ vil dessutan også vere funksjon med omsyn på ϵz medan A, A_2, \dots er funksjon av berre z . Dette medfører at derivasjon med omsyn på \mathbf{x} og t av desse storleikane, fører til at orden av likningane vert auka med ein. Samtidig vil $A, B = O(\epsilon)$ og $A_n, B_n = O(\epsilon^n)$.

Vi starter med å taylor utvikle likning (2.4) og (2.2) til $O(\epsilon^3)$ om $z = 0$. Vi seier at $L = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g\frac{\partial}{\partial z})$. For 2.4 får vi

$$L\phi + L\frac{\partial\phi}{\partial z}\zeta + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi) \cdot \nabla(\nabla\phi)^2 = 0, \quad z = 0 \quad (2.8)$$

Vi innfører ein horisontal gradient operator $\nabla_h = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$. 2.2 vert då:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z} + \nabla_h \cdot (\zeta\nabla_h\phi) + \nabla_h \cdot (\frac{1}{2}\zeta^2\nabla_h\frac{\partial\phi}{\partial z}) = 0, \quad z = 0 \quad (2.9)$$

Vidare vert uttrykka for ζ og ϕ i (2.7) og (2.6) sett inn i likningane ovanfor. Detaljane for utledninga er så lang at dei er gjeven i Appendix A1. Dei tredje ordens resultatata vert på forma:

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z} = 2\frac{k^2}{\omega_c}\frac{\partial}{\partial x}|A|^2 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z} = 2\omega_c\frac{\partial}{\partial x}|B|^2 \quad (2.11)$$

NLS likninga blir med omsyn på den første harmoniske av hastighetspotensialet vert:

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega_c}{2k}\frac{\partial A}{\partial x}\right) - \frac{1}{8}\frac{\omega_c}{k^2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\frac{\omega_c}{k^2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2\frac{k^4}{\omega_c}A|A|^2 = 0 \quad (2.12)$$

Med omsyn på den første harmoniske til overflatehevninga er NLS:

$$i\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\omega_c}{2k}\frac{\partial B}{\partial x}\right) - \frac{1}{8}\frac{\omega_c}{k^2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\frac{\omega_c}{k^2}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - 2\omega_c k^2|B|^2 B = 0 \quad (2.13)$$

Vi ser at evolusjonen av A og B er uahengige av $\bar{\zeta}$ og $\bar{\phi}$ dersom ein berre rekner til 3. orden. Løysinga av likningane til $\bar{\zeta}$ og $\bar{\phi}$ vil gje kun den trivielle løysinga som sannsynlig løysing av likningane dersom energi tettleiken er konstant. ($|B|^2$ er proporsjonal med energi tettleiken til bølga.)

2.2 Stabilitetsanalyse

Ved å følgje Dysthe(1979) kan vi gjere likning (2.12) og (2.13) dimensjonslaus på følgande måte

$$\begin{aligned}\omega_c t &\rightarrow t \\ k\mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x} \\ \frac{1}{2}kB &\rightarrow B\end{aligned}$$

Vi vil i det følgande sjå på stabiliteten til overflatehevninga ζ . Derfor skriv vi NLS uttrykt ved den første harmoniske til overflate hevninga: B . Med dette resultatet og med dei dimensjonslause parameterane får vi følgande likning

$$2i\frac{\partial B}{\partial t} + i\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - B|B|^2 = 0 \quad (2.14)$$

Ei mulig løysing av (2.14) er $B = B_0 e^{-i\frac{1}{2}B_0^2 t}$. Her er $|B|^2$ konstant slik at vi har det tilfellet som er diskutert i forrige kapittel og det følger at $\bar{\zeta} = \bar{\phi} = 0$. Dette er ei andre ordens Stokes bølge. For å sjå på stabiliteten til løysingar av NLS så perturberer vi denne i frekvens og amplitude $B = (1 + a) B_0 e^{-i(1-\theta')\frac{1}{2}B_0^2 t}$. Denne perturbasjonen kan vi linearisere til $(1 + a + i\theta) B_0 e^{-i\frac{1}{2}B_0^2 t}$. B_0 er steilheten ka til bølga. Vi antar så løysingar på formen

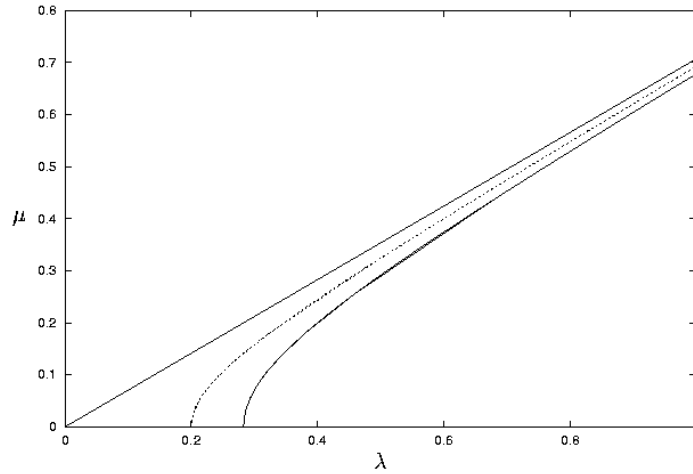
$$\begin{aligned}a &= \sum_{\lambda} a'_{\lambda} e^{i(\lambda x + \mu y - \Omega t)} \\ \theta &= \sum_{\lambda} \theta'_{\lambda} e^{i(\lambda x + \mu y - \Omega t)}\end{aligned}$$

Dette set vi inn i likning (2.14). Likninga kan vi dele inn i ein real del og ein imaginær del. Vi får då eit likningsystem som ser slik ut

$$\begin{pmatrix} 2\Omega - \lambda & \frac{1}{2}i\mu^2 - \frac{1}{4}i\lambda^2 \\ 2iB_0^2 + \frac{1}{2}i\mu^2 - \frac{1}{4}i\lambda^2 & -2\Omega + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{\lambda} \\ \theta'_{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Hvis vi skal ha andre løysingar enn den trivielle må determinanten til koeffisient matrisa vere null. Vi får dermed dispersjons relasjonen

$$\Omega = \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{8}\lambda^2 - \frac{1}{4}\mu^2\right) \left(\left(\frac{1}{8}\lambda^2 - \frac{1}{4}\mu^2\right) - B_0^2\right)} \quad (2.16)$$



Figur 2.1: Ustabilitetsområdet for NLS likninga. Mellom dei to heiltrukne linjene ligg ustabilitetsområdet. Stipla linje viser perturbasjon med størst ustabilitet. Berekningane er gjort for $B_0 = 0.1$

Dersom summen under rottegnet er mindre enn null så vil Ω verte imaginær. Dermed vil amplituden og fassen vokse i tid og vi har ei ustabil løysing. Som vi ser av figur (2.1) så er ustabilitets området mellom hyperbolane $\frac{1}{2}\lambda^2 = \mu^2$ og $\frac{1}{8}\lambda^2 - \frac{1}{4}\mu^2 = B_0^2$. Marginal vekstrate blir langs desse hyperbolane. Dei verdier for μ og λ som gjev maksimal vekstrate er dei som fell langs hyperbolen $\frac{1}{8}\lambda^2 - \frac{1}{4}\mu^2 = \frac{1}{2}B_0^2$. Der er absolutt verdien av den negative verdien under rottegnet størst. Maksimal vekstrate vert då $\frac{1}{2}B_0^2$.

2.3 MNLS og BMNLS

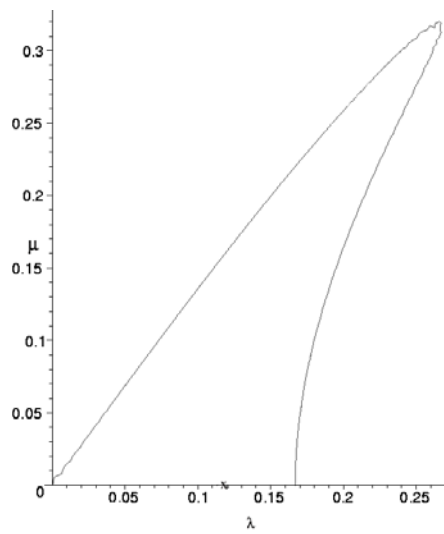
For $ka < 0.1$ stemmer NLS kvalitativt bra overens med eksperiment. (Yuen & Lake (1975)). Men teorien stemmer dårlig overens kvantitativt med målte verdier, sjøl for korte avstander både i tid og rom. For ka større enn 0.15 stemmer dei kvalitative eigenskapane til NLS også dårlig overens med eksperiment og eksakte verdier. (McLean (1981)). Dette har blitt forbetra gjennom MNLS Dysthe(1979). MNLS (Modified NonLinear Schrödinger equation) er

utleda på samme måte som NLS, men Taylor utviklinga av likningane (2.4) og (2.2) er gjort til ein orden høgare enn i likningane (2.8) og (2.9). Resultatet er skreve med omsyn på den første harmoniske til hastighetspotensialet:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega_c}{2k} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{i}{2\omega_c} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i \frac{k^4}{\omega_c} A |A|^2 + 8 \frac{k^3}{\omega_c} |A|^2 \frac{\partial A}{\partial x} + ikA \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.17)$$

På denne måten får vi ei likning som er riktig til orden $O(\epsilon^4)$ for både ikkje linearitet ka og båndbredde $\frac{\Delta \mathbf{k}}{k}$. Som det går fram av likning (2.17) er ikkje evolusjonen av A uavhengig av $\bar{\phi}$ lenger slik som tilfellet var for NLS. Derfor tar denne likninga omsyn til fleire fysiske effekter enn NLS. Med denne likninga stemmer ustabilitets området betre overeins med eksakte løysingar og maksimal vekstrate fell ikkje lenger langs ein hyperbol, men er eit fast punkt med $\mu = 0$. MNLS deler ustabilitetsområdet inn i to, I for $\Delta \mathbf{k} < 1.5k$ og II for $\Delta \mathbf{k} > 1.5k$. Gyldighetsområdet ligger innanfor området I, men både området I og II strekker seg utanfor gyldighetsområdet til likningane. Dessutan er dei mest ustabile frekvensbånda av $O(\epsilon)$ i følge dei eksakte løysingane til McLean (1981).

Eit mål for desse likningane er å kunne lage ein "rimeleg" numerisk modell for havbølger. Typiske havbølger har om lag ein steilhet på $ka = 0.12$ og ei båndbredde på $\frac{\Delta \mathbf{k}}{k} = 0.4$. Desse bølgene set altså eit større krav til gyldighetsområdet til båndbredda enn for steilheten. Med utgangspunkt i dette kom Dysthe og Trulsen (1996) med BMNLS (the Broader bandwidth Modified NonLinear Schrödinger equation). I denne likninga er båndbredden utvida til $\Delta \mathbf{k}/k = O(\epsilon^{1/2})$. Den dekker framleis ikkje heile området I, men har eit større gyldighetsområde for $\Delta \mathbf{k}/k$ enn NLS og MNLS. Dersom heile området I skal dekkast må Zakharov likninga brukast, men denne er mykje tyngre å bruke numerisk. BMNLS er utleda på tilsvarande måte som MNLS, men her må ein ta omsyn til at A, A_2, \dots og B, B_2, \dots i tillegg til $\bar{\zeta}$ er funksjoner av dei litt raskare modulasjonsvariablane $\epsilon^{1/2} \mathbf{x}$ og $\epsilon^{1/2} t$. $\bar{\phi}$ er i tillegg til desse to variablene også funksjon av variabelen $\epsilon^{1/2} z$. Denne likninga er korrekt opp til $O(\epsilon^{7/2})$ og gjev betre samsvar mellom ustabilitetsområdet til eksakte løysingar og eksperiment. Sjå figur (2.2)



Figur 2.2: Ustabilitets området til BMNLS likninga ligg innanfor området av den lukka kurva. Det mest ustabile frekvensen er merka med ein X. Beregningane er gjort for $B_0 = 0.15$.

BMNLS likninga er:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \eta} + i \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + |B|^2 B + \frac{\partial^3 B}{\partial \xi \partial y^2} + 8|B|^2 \frac{\partial B}{\partial \xi} + 2B^2 \frac{\partial B^*}{\partial \xi} \quad (2.18) \\ + 4iB \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \xi} + \frac{3i}{2} \frac{\partial^4 B}{\partial \xi^2 \partial y^2} + \frac{i}{8} \frac{\partial^4 B}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial^5 B}{\partial \xi^3 \partial y^2} - \frac{3}{4} \frac{\partial^5 B}{\partial \xi \partial y^4} = 0 \quad \text{Ved } z = 0 \end{aligned}$$

saman med

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = \frac{\partial |B|^2}{\partial \xi} \quad \text{ved } z = 0 \quad (2.19)$$

$$4 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{for } -h < z < 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{ved } z = -h \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \quad \text{ved } y = 0 \text{ og } y = b \quad (2.22)$$

Likninga for bølge evolusjon er her presentert ved den første harmoniske for overflatehevninga. Randkrava gjeld for bølgeevolusjon i ein kanal sidan det er det vi skal sjå på i denne oppgåva. Likninga (2.18) er skreven med omsyn på dei to transformerte koordinatane $\frac{x}{C_g} - t = \xi$ og $\eta = x$. ξ er ein koordinat som seier noko om kva for tidspunkt ei gruppe passerer eit gitt punkt eller kor lenge sidan det er gruppa passerte det gitte punktet. Transformasjonen fører til at vi kan integrere over x-koordinaten slik at det er den romlige utviklinga vi ser på. Det er denne likninga som blir brukt for å finne bølgeutviklinga i denne oppgåva.

Kapittel 3

Eksperiment

Eksperimenta som skal brukast for verifisering av BMNLS, vart utført ved Marintek i Trondheim med finansiering av Norsk Hydro, og er rapportert av Stansberg (1999). Tanken som eksperimenta vart utført i, er 260 m lang og 10.5 m brei. I den eine enden er det ein bølgegenerator, ein datastyrt lem, i den andre enden ei skrånande strand. Djupna i tanken varierer. Inntil 80 meter i frå bølgegeneratoren er tanken 10 meter djup, resten er 5 meter djup. I simuleringa er djupna sett til $h = 10$ overalt, men dette skal ikkje føre til noko avvik.

3.1 Oppsett

I eksperimentet vart det brukt 20 måleprober. Desse var plassert på mobile bruer som gjekk på tvers av tanken. Det vart gjort 27 testar. Data for dei forskjellige testane er vist nedanfor i tabell 3.1. For dei 18 første testane var det plassert fem prober på kvar stasjon ved 10 meter, 40 meter, 80 meter og 120 meter. For dei ni siste testane vart dei tre siste stasjonane flytta til 80 meter, 120 meter og 160 meter. Probane på kvar stasjon var plassert med lik avstand mellom seg, det vil seie 1.75 meter. Det var også 1.75 meter avstand mellom veggen på bølgetanken og næraste probe. Probe nummer 3, 8, 13 og 18 var plassert langs senterlinja av tanken. Nummerering framgår av figur (3.1). Koordinataksane x og y er lagt inn som vist i figur (3.1). Det kontinuerlige bølgetoget blir målt med små tidssteg mellom kvar måling.

Dette tidssteget vert kalla samplings perioden, og var i eksperimenta 0.05 sekund. Kvar måling er kalla eit scan. I tillegg til målinger vart det også teke film og foto av eksperimenta. Måleseriane vart gjort med ulik lengde i tid alt etter kor fort bølga forplanta seg nedover i tanken. Måletida for alle testane vart valgt liten nok til at ikkje refleks frå stranda skulle kunne nå tilbake til målepunkta i måleperioden. Pausen mellom kvar test er omlag ein time. Dette skulle vere nok til at perturbasjonane tilnærma hadde dødd ut før neste test vart kjørt.

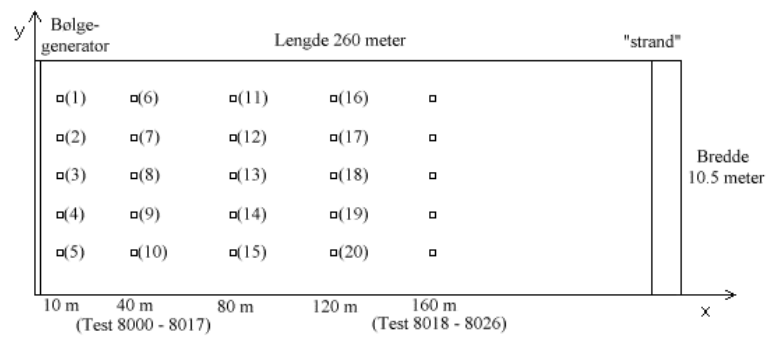
3.2 Justering og feil ved eksperiment

Dataene vi har er rådata. Derfor må dei justerast etter anvisning i Rapporten. Marintek gjorde ein analyse av dataene og fann at data frå probe 15 må justerast opp med 5% medan data frå probe 20 må justerast ned 20%. Grunnen til dette var forskjeller mellom tester med samme initialbetingelser og med siste stasjon på forskjellig avstand. Etter simulering er det eit spørsmål om desse justeringane skal gjelde alle testane og dessutan om andre målepunkt også skulle vore justert. For dei tre første testane ser det ut for at probe 16 måler for liten amplitude. For test 8009 og 8010 stemmer simulering og eksperiment bedre overeins dersom probe 20 ikkje vert justert.

I tillegg må resultatata frå test 8000 og 8014 høgpass filtrerast på grunn av lange ståande bølger i tanken. Problema med lange ståande bølger i tanken skulle ikkje spele noko rolle for resultatet. Effekter i oppstart fasen kan gjere at vi får desse sakte varierende overflatehevningane. I initialseringane er desse lengste svingningane filtrert vekk. For test 8008, 8015, 8018 og 8019 måtte probe 17 høgpassfiltrerast på grunn av ustabile middelværdier. Til tross for nøyaktig kalibrering vart det ved nærmare ettersyn funne at probe 17 hadde forskyvd nullpunktverdi for test 8014 og 8015. Høgpass filtrering skal effektivt fjerne dette.

Test nr	$T(\text{sek})$	$H(\text{m})$	ka	$\Delta\mu$	Tid(sek)
8000	1.00	0.05	0.109	0.0743	400
8001	1.00	0.08	0.172	0.0743	400
8002	1.00	0.10	0.211	0.0743	400
8003	1.00	0.13	0.268	0.0743	400
8004	2.50	0.10	0.03	0.465	134
8005	2.00	0.10	0.042	0.297	148
8006	3.00	0.10	0.022	0.669	138
8007	0.82	0.04	0.125	0.050	500
8008	0.82	0.06	0.195	0.050	500
8009	1.24	0.11	0.153	0.114	300
8010	1.24	0.15	0.211	0.114	300
8011	1.24	0.19	0.257	0.114	300
8012	1.24	0.24	0.296	0.114	300
8013	1.00	0.16	0.311	0.0743	400
8014	0.82	0.03	0.095	0.050	500
8015	0.82	0.04	0.122	0.050	500
8016	0.82	0.05	0.163	0.050	500
8017	0.82	0.08	0.258	0.050	500
8018	1.00	0.03	0.061	0.0743	400
8019	1.00	0.08	0.175	0.0743	400
8020	1.43	0.15	0.164	0.152	312
8021	1.43	0.20	0.211	0.152	300
8022	1.43	0.25	0.264	0.152	300
8023	1.43	0.31	0.307	0.152	300
8024	1.43	0.225	0.233	0.152	300
8025	1.43	0.31	0.311	0.152	300
8026	1.00	0.10	0.215	0.0743	400

Tabell 3.1: Alle eksperimenta med dei to variablane T og H . ka er målt steilhet ved ti meter. $\Delta\mu$ vert definert seinare i oppgåva.



Figur 3.1: Bølgetanken på Marintek.(Forholda mellom lengde og bredde er ikkje rett)

Kapittel 4

Integrering og initialisering

4.1 Numerisk metode

Vi har likning (2.18) som skal integrast opp. Den numeriske metoden bygger på ein pseudospektral split step metode utvikla av Lo og Mei (1985, 1987). Den første som brukte tilsvarende metode var Tappert (1974). Ein integrerer dei lineære ledda som inneheld dei høgre ordens deriverte, eksakt i Fourier området, og dei ikkje lineære i det fysiske området. Vi må derfor Fourier transformere den første harmoniske. Dette blir gjort ved å dele inn området i ξ og y som ein vil sjå på, i eit $M \times N/2$ rutenett. Dette er diskretiseringa av B . Overflatehevninga ζ har ei anna disretisering som vi kjem tilbake til. Vi har den transformerte koordinaten $\xi = t - \frac{x}{C_g}$ og koordinaten y på tvers av tanken. Vi diskretiserer desse som

$$\xi_m = \frac{T}{M}m, \quad y_n = \frac{2b}{N}n \quad (4.1)$$

T er tidsintervallet vi initialiserer med og M er antall diskretiserings punkt. På samme måte er $2b$ det dobbelte av bredda av tanken og N er antall diskretiserings punkt for denne. M og N skal vere 2 opphøgd i ein potens slik at det kan nyttast fast Fourier transform. Kravet ved den langsgående tankveggen er at $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ slik at ingen partikler kan gå gjennom tankveggen. Ved å bruke Bernoulli likninga i overflata viste vi i kapittel 2 at dette medfører at $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$ ved $y = 0$ og $y = b$. Den lengste bølga ein kan ha på tvers som oppfyller desse krava, har ei bølgelengde lik $2b$. Dette gjer at ϕ og ζ ikkje er b periodisk med omsyn på y , men $2b$ periodisk og vi har symmetri om

tankveggen. Det let seg gjere å vise at B også vil vere $2b$ periodisk. Sidan vi nyttar Fourier transform treng vi spektralkomponentane som svarer til ξ_m og y_n . Desse er λ_i og μ_j med diskretisering

$$\lambda_i = \frac{2\pi}{T}i, \mu_j = \frac{2\pi}{2b}j = \frac{\pi}{b}j \quad (4.2)$$

Sidan ξ_m er ein tidskoordinat så er λ_i ein frekvens. Den diskrete Fourier transformen er gjeven som

$$\widehat{B}(\lambda_i, \mu_j, \eta) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} B(\xi_m, y_n, \eta) e^{-i(\lambda_i \xi_m + \mu_j y_n)} \quad (4.3)$$

og den inverse som

$$B(\xi_m, y_n, \eta) = \sum_{-\frac{M}{2} < i \leq \frac{M}{2}} \sum_{-\frac{N}{2} < j \leq \frac{N}{2}} \widehat{B}(\lambda_i, \mu_j, \eta) e^{i(\lambda_i \xi_m + \mu_j y_n)} \quad (4.4)$$

Fourier dekomponeringa i tid gjer at B blir T periodisk.

Randkravet ved tankveggen impliserer symmetri om tankveggen. Dette gjev at Fourier komponent for positiv indeks j vil vere Fourier komponenten med negativ indeks $-j$.

$$\widehat{B}(\lambda_i, \mu_j, \eta) = \widehat{B}(\lambda_i, \mu_{-j}, \eta) \quad (4.5)$$

Dette vil bli vist i neste kapittelet om Fourier analyse.

For å vise ei skisse over split step integrasjonen følger vi framgangsmåten til Trulsen (1989). Vi deler likning (2.18) inn i ein lineær del : $L(B)$ og ein ikkje lineær del: $N(B)$. Desse skal så integrerast opp kvar for seg. Vi integrerer først den ikkje lineære delen med ein andre ordens midtpunkt metode, og så blir dette resultatet brukt til å integrere opp den lineære delen. Etter dette steget har vi ein første ordens metode. I neste integrasjonssteg snur ein rekkefølgen slik at integrasjons rekkefølgen etter to steg er NLLN. Dette blir gjort for å bli kvitt det første ordens leddet slik at vi har ein andre ordens metode etter to steg.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \eta} &= L(B) \\ \frac{\partial B}{\partial \eta} &= N(B) \end{aligned}$$

I den første integrasjonen bruker vi den andre ordens midtpunkt regelen for den ikkje lineære delen:

$$\begin{aligned}\tilde{B}(\xi_m, y_n, \eta + \frac{\Delta\eta}{2}) &= B(\xi_m, y_n, \eta) + \frac{\Delta\eta}{2}N(B(\xi_m, y_n, \eta)) \\ B^N(\xi_m, y_n, \eta + \Delta\eta) &= B(\xi_m, y_n, \eta) + \Delta\eta N(\tilde{B}(\xi_m, y_n, \eta + \frac{\Delta\eta}{2}))\end{aligned}$$

Dette estimatet blir så brukt som startkrav til å integrere opp den lineære delen. Her finner vi dei høigare deriverte med omsyn på y og ξ . Dette blir algebraisk i Fourier domenet ved bruk av derivasjonsegenskapen til Fourier transformen. For eksempel vil leddet $(i\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2})$ i Fourier domenet vere $i(i\lambda_i)^2 \widehat{B}(\lambda_i, \mu_j, \eta)$. For å generalisere for alle dei lineære ledda set vi

$$S_{i,j} = \sum_{o \geq 0} \sum_{p \geq 0} c_{p,o} (i\lambda_i)^p (i\mu_j)^o$$

der vi har summert opp alle koeffisientane framfor dei lineære ledda i Fourier domenet. Dermed får vi følgande differensial likning.

$$\frac{\partial \widehat{B}(\lambda_i, \mu_j, \eta)}{\partial \eta} = S_{i,j} \widehat{B}(\lambda_i, \mu_j, \eta)$$

Når vi intergrerer opp denne får vi

$$\widehat{B}^L(\lambda_i, \mu_j, \eta) = e^{S_{i,j} \Delta\eta} \widehat{B}(\lambda_i, \mu_j, \eta)$$

Vi kan no fortsette der vi slapp i integrasjonen.

$$\widehat{B}^{NL}(\lambda_i, \mu_j, \eta + \Delta\eta) = e^{S_{i,j} \Delta\eta} \widehat{B}^N(\lambda_i, \mu_j, \eta + \Delta\eta)$$

Vi har no gått eit steg fram og det let seg vise at dette så langt er ein første ordens metode. (Sjå Trulsen (1989)). I fortsettelsen snur vi om på integrasjons rekkefølgen og byrjar med den lineære delen.

$$\widehat{B}^{NLL}(\lambda_i, \mu_j, \eta + 2\Delta\eta) = e^{S_{i,j} \Delta\eta} \widehat{B}^{NL}(\lambda_i, \mu_j, \eta + \Delta\eta)$$

$$\tilde{B}^{NLL}(\lambda_i, \mu_j, \eta + \frac{3}{2}\eta) = B^{NLL}(\lambda_i, \mu_j, \eta + 2\Delta\eta) + \frac{\Delta\eta}{2}N(B^{NLL}(\eta + 2\Delta\eta))$$

$$B^{NLLN}(\lambda_i, \mu_j, \eta+2\Delta\eta) = B^{NLL}(\lambda_i, \mu_j, \eta+2\Delta\eta) + \Delta\eta N(\tilde{B}^{NLL}(\lambda_i, \mu_j, \eta + \frac{3}{2}\Delta\eta))$$

Etter dette viser det seg at det andre ordens leddet faller vekk slik at vi har ein andre ordens metode. Leddet der $\bar{\phi}$ inngår vert funne av likningssystemet frå (2.19) til (2.21).

4.2 Fourier analyse

Som skreve i kapittelet om numerisk metode, er randkravet ved den langsgåande tankveggen at $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$ og $\frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0$ ved veggen. Dette gjer at vi får ei kvantifisering av bølgetallet på tvers. Vi kaller Fourier komponentene til dei kvantifiserte bølgetalla på tvers for moder. Dette er ein vanlig konvensjon for ståande bølger. Vi vil no finne dei fem lågaste modene frå null til fire. Dette er så godt som eksperimentet ved Marintek tillet. For overflatehevninga ζ bruker vi t som tidskoordinat. Denne skil seg frå ξ berre med konstantleddet $\frac{x}{c_g}$. Vi diskretiserer t og y som

$$t_k = \frac{T}{K}k, y_l = \frac{2b}{L}l$$

Vi diskretiserer ζ forskjellig frå B fordi ζ varierer raskere enn B slik at $K > M$. Diskretiseringa av ζ er dessuten bestemt av samplingsintervallet i eksperimentet.

Vi treng den diskrete Fourier transformen av overflatehevninga. Vi kaller Fourier komponentane til t_k og y_l for ω_r og μ_q . Desse er gitt som

$$\omega_r = \frac{2\pi}{T}r, \mu_q = \frac{2\pi}{2b}q = \frac{\pi}{b}q$$

Den teoretiske Fourier transformen av overflatehevninga på tvers er: (For å skille to måter å skrive transformen på bruker vi $\tilde{\cdot}$ og $\hat{\cdot}$ på Fourier komponentene)

$$\zeta(y) = \frac{1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{\zeta}_q(x, t) e^{i(\mu_q y)}$$

Der $\mu_q y_n = 2\pi j n/N$. Vi kan no vise at kravet $\frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0$ for $y = 0, y = b$ fører til at negative og positive komponenter i Fourier transformen til ζ er like. Vi set $\tilde{\zeta}_0 = \frac{1}{2}\hat{\zeta}_0$ og $\tilde{\zeta}_q = \frac{1}{2}(\hat{\zeta}_{-q} + \hat{\zeta}_q)$.

$$\zeta(y) = \tilde{\zeta}_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_q(y) e^{i(\mu_q y)}$$

Kravet om at $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$ for rendene gjer at vi må stille samme krav til $\tilde{\zeta}_q$: $\frac{\partial \tilde{\zeta}_q}{\partial y} = 0$ og $\frac{\partial \tilde{\zeta}_0}{\partial y} = 0$ ved $y = 0, y = b$.

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{\zeta}_q(y) = \frac{1}{2} \mu_q \left(\hat{\zeta}_q e^{i\mu_q y} - \hat{\zeta}_{-q} e^{-\mu_q y} \right), (\mu_{-q} = -\frac{\pi}{b} q = -\mu_q)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{\zeta}_q(0) = \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\zeta}_q(b) = \frac{1}{2} \mu_j (\hat{\zeta}_q - \hat{\zeta}_{-q}) = 0$$

$$\hat{\zeta}_q = \hat{\zeta}_{-q}$$

Dette kravet gjer at vi får ein superposisjonering av cosinus bølger slik vi ser av det følgande.

$$\zeta(x, y_l, t_k) = \hat{\zeta}_0 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \left(\left(\hat{\zeta}_q(x, t_k) e^{-i(\mu_q y_l)} \right) + \hat{\zeta}_q(x, t_k) e^{i(\mu_q y_l)} \right)$$

$$\zeta(x, y_l, t_k) = \hat{\zeta}_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\hat{\zeta}_q(x, t_k) \cos(\mu_q y_l) \right)$$

Av dette ser vi at vi kan skrive Fourier transformen av overflatehevninga som

$$\zeta(x, y_l, t_k) = \sum_{q=0}^{\infty} \hat{\zeta}_q(x, t) \cos\left(\frac{\pi q y_l}{b}\right) \quad (4.6)$$

I eksperiment oppsettet er det plassert fem prober på tvers av tanken. Vi kan derfor finne ei god tilnærming av dei fem lågaste Fourier komponentene dersom ikkje dei høgare modene veks seg store nok til å skape aliasing. (Dette fenomenet opptrer når målingane ikkje har god nok oppløysing slik at høgare frekvenser vert oppfatta som lavare frekvenser. Når vi måler eit signal i tid kan vi til dømes ikkje måle høgare frekvenser enn opp til halvparten av målefrekvensen. Meir om dette under kapittel om aliasing).

$l = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ står her for målepunkt posisjonen på tvers. Δy_l i eksperimentet er som skreve over 1.75 meter og bredda på tanken er $b = 10.5$ meter. y_l/b vert lik $l/6$. For å bruke ein diskret Fourier transform må målepunkta stå med fast avstand frå og med, og til og med rendene. Desse posisjonane kallast kollokasjonspunkt. Dei fem probene står ikkje i kollokasjons punkta,

derfor kan vi ikkje bruke diskret Fourier transform. Vi kan sjå på (4.6) som eit likningsystem med $\zeta(x, y_l, t_k)$ som fem kjente for kvart tidssteg og Fourier komponentane til denne $\widehat{\zeta}_q(x, t_k)$ som fem ukjente for kvart tidssteg. Vi får dermed ei matriselikning:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\zeta}_0(t_k) \\ \widehat{\zeta}_1(t_k) \\ \widehat{\zeta}_2(t_k) \\ \widehat{\zeta}_3(t_k) \\ \widehat{\zeta}_4(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1(t_k) \\ \zeta_2(t_k) \\ \zeta_3(t_k) \\ \zeta_4(t_k) \\ \zeta_5(t_k) \end{bmatrix}$$

Sidan matrisa ikkje er singular eller dårleg kondisjonert kan vi invertere den og multiplisere den på høgre side. På denne måten kan vi finne Fourier komponentene frå null til og med fire. Men det er ei tilnærming av modene vi finn som det framgår av kapittelet om aliasing.

4.3 Initialisering.

For å initialisere bruker vi dataene frå dei fem probene på den stasjonen vi vil initialisere med. Vi får dermed fem tidsserier $\zeta_l(t_k)$, på kvar stasjon. Δt_k er samplingsperioden og $l = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Indeksen k går frå 0 til $K - 1$ og den totale tida det blir lest over er $T = K\Delta t_k$. I forrige kapittel såg vi korleis vi kan finne $\widehat{\zeta}_q$ frå dei eksperimentelle data. Vidare kan $\widehat{\zeta}_q$ også utviklast i ei Fourier rekke med omsyn på tida fordi vi seier at $\widehat{\zeta}_q$ er periodisk med periode T på samme måte som vi gjorde det for den første harmoniske B .

$$\widehat{\zeta}_q(x, t_k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \widehat{\zeta}_{q,r}(x) e^{-i\omega_r t_k} \quad (4.7)$$

Det er den Fourier transformerte av den første harmoniske som blir brukt som initialisering av simuleringsprogrammet. Vi treng altså å finne den transformerte av den første harmoniske i tid av modene frå null til fire. Dei høgare harmoniske blir generert av simuleringsprogrammet etter som dei er gitt av likningane. Overflatehevinga er gitt som funksjon av dei harmoniske i likning

(2.7). For simulerings programmet er ζ definert litt forskjellig ved å gange venstre i (2.7) side med ein halv. Dette er berre ein definisjons sak.

Sidan vi her har prober plassert i ein tank med fast x-posisjon, vil kx vere ein konstant og gje ei faseforskyvning vi kan sjå vekk i frå. Vi bruker metoden i forrige kapittel til å finne modene $\hat{\zeta}_j$. (Invertering av transformasjons matrise og matrisemultiplikasjon av signal, $j = \{0, 1, 2, 3, 4\}$). Vi ser på korleis vi finner den Fourier transformerte av den første harmonisk med omsyn på tida av mode null. Metoden for mode 1, 2, 3 og 4 er ekvivalent. Overflatehevinga for det kontinuerlige signalet for mode 0 er gitt som

$$\hat{\zeta}_0(t) = \frac{1}{2} \left(\hat{\zeta}_0 + \hat{B}_0 e^{-i\omega_c t} + \hat{B}_{2_0} e^{-2i\omega_c t} + \dots + \hat{\zeta}_0^* + \hat{B}_0^* e^{i\omega_c t} + \hat{B}_{2_0}^* e^{2i\omega_c t} + \dots \right) \quad (4.8)$$

Dersom vi multipliserar dette uttrykket med $e^{i\omega_c t}$ så får vi det følgande.

$$\hat{\zeta}_0(t) e^{i\omega_c t} = \frac{1}{2} \left(\hat{\zeta}_0 e^{i\omega_c t} + \hat{B}_0 + \hat{B}_{2_0} e^{-i\omega_c t} + \dots + \hat{\zeta}_0^* e^{i\omega_c t} + \hat{B}_0^* e^{2i\omega_c t} + \hat{B}_{2_0}^* e^{3i\omega_c t} + \dots \right)$$

Vi ser at den sakte varierende delen av bølga vil no vere den første harmoniske. Vi tar Fourier transformen av det foregåande uttrykket.

$$\begin{aligned} F.T.(\hat{\zeta}_0(t) e^{i\omega_c t}) &= \frac{1}{2} \left(\hat{\zeta}_0(\omega - \omega_c) + \hat{B}_0(\omega) + \hat{B}_{2_0}(\omega + \omega_c) + \dots \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\hat{\zeta}_0^*(\omega - \omega_c) + \hat{B}_0^*(\omega - 2\omega_c) + \hat{B}_{2_0}^*(\omega - 3\omega_c) + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Vi ser at dersom vi lavpass filtrerer Fourier transformerte av $\hat{\zeta}_0 e^{i\omega_c t}$ så vil vi stå igjen med den Fourier transformerte av den første harmoniske multiplisert med $\frac{1}{2}$. Vi har ikkje det kontinuerlige signalet av bølgetoget. Vi trenger derfor dei diskrete Fourier transformene

$$\hat{\zeta}_{0,r}(\omega_r) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \hat{\zeta}_0(t_k) e^{i\omega_r t_k} \quad (4.10)$$

og

$$\hat{B}_{0,i}(\lambda_i) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{B}_0(\xi_m) e^{i\lambda_i \xi_m} \quad (4.11)$$

$\widehat{B}_{0,i}(\lambda_i)$ er dermed gitt ved å lese inn M komponenter av $F.T(e^{i\omega_c t} \widehat{\zeta}_n(\omega_j))$. $M/2$ er frekvensbåndbredden vi les inn. Vi bruker egenskapen ved Fourier transform at $F.T.(\widehat{\zeta}_0 e^{i\omega_c t}) = \widehat{\zeta}_{0,r}(\omega_r - \omega_c)$

$$\widehat{B}_{0,i} = Lowpass((\widehat{\zeta}_{0,i}(\omega_i - \omega_c))) \text{ der } -M/2 < i = r \leq M/2$$

Det blir lest inn eit antall frekvensbånd som tilsvarer to opphøg i ein potens slik at det kan brukast fast Fourier transform.

Vi bør sjå til at ikkje eit for stort frekvensområde er teke med.

$$\omega_{M/2} < 2\omega_c \quad (4.12)$$

Båndbredden bør vere så stor at den stettar breddekravet for modellen.

$$\frac{\omega_{M/2}}{\omega_c} \geq \epsilon^{1/2} \quad (4.13)$$

Mellom desse krava har ein ein viss valfridom for kor stor båndbredde som skal bli teken med.

Kapittel 5

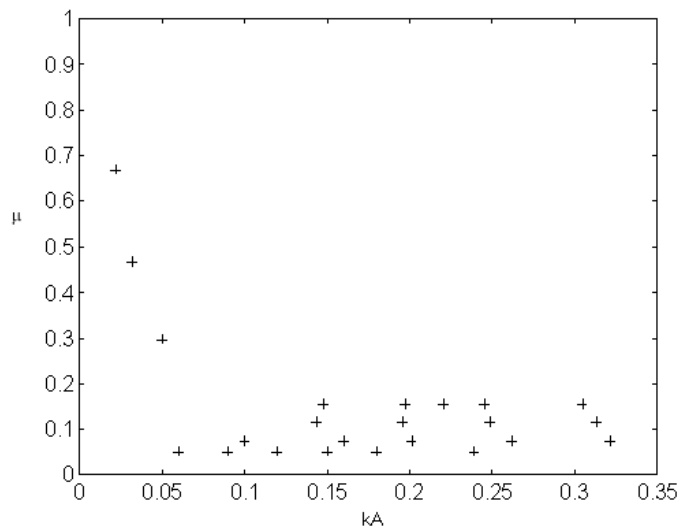
Klassifisering og analysering av eksperimenter

5.1 Parameter plan

For å seie noko om kor ustabil bølgetoget vil vere bruker vi to dimensjonslause parametre. Den første er steilheten ka definert tidlegare i oppgåva. Sidan $kh \rightarrow \infty$ kan vi bruke den lineære dispersjons relasjonen $\omega_c^2 = gk$. ka er dermed gjeven ved T_c og H som $ka = \frac{\omega_c^2 H}{g} = \frac{4\pi^2 H}{gT_c^2} = \frac{2\pi^2 H}{gT_c^2}$. Jo større steilheten er, jo raskere vil bølgetoget gå inn i den modulerte fasen.

Den andre parameteren er $\Delta\mu$. Vi følger definisjonen i Trulsen og Dysthe (1997). Den er definert med utgangspunkt i at bølgetallskomponenten på tvers vil vere kvantifisert, som skildra i forrige kapittel. På grunn av randkravet vil $k_y = \frac{q\pi}{b}$ der $q = 0, 1, 2, 3, \dots$. Vi definerer $k_\perp = \frac{\pi}{b}$, som er bølgetallets komponent i y retningen for mode ein. Dersom vi set $\Delta\mu = \frac{k_\perp}{k}$, så vil $\Delta\mu$ vere ein parameter for modulering på tvers. Dette kan vi sjå av figur (2.2). Den viser ustabilitets området for det uniforme bølgetoget. μ står oppover y -aksen, og som det går fram av figuren så er ustabilitets området nede til venstre i koordinatsystemet. $\Delta\mu$ vil vere kvantifiseringa av ustabile moder oppover μ aksen. Det kan vere verdt å merke seg at dersom ka vert større så vil ustabilitetsområdet også bli større. Jo mindre $\Delta\mu$ og jo større ka desto fleire ustabile moder eksisterer det.

Vi kan finne $\Delta\mu$ med omsyn på bølgeperioden T_c . Vi bruker den lineære dispersjonslikninga igjen og får $\frac{k_\perp}{k} = \frac{\pi q}{b\omega_c^2} = \frac{\pi g T_c^2}{4\pi^2 b}$ og dermed at $\Delta\mu = \frac{T_c^2 g}{4\pi b}$. I



Figur 5.1: Parameterplan med kor dei ulike testane plasserer seg.

Trulsen og Dysthe (1997) er $\Delta\mu$ satt til 0.1. I eksperimenta er typiske verdier for $\Delta\mu = 0.05$ og $\Delta\mu = 0.074$. Desse skulle vere låge nok til at vi får eksitering av høgare moder.

Vi definerer så eit parameterplan med ka langs x -aksen og $\Delta\mu$ langs y -aksen. Vi kan så plote dei ulike testane inn i parameter planet som vist i figur (5.1). Testane som plasserer seg oppe til venstre er venta å modulere minst medan testane nede til høgre er venta å modulere mest.

5.2 Energi

Vi er interessert i kor stor moduleringa på tvers det er både i eksperimenta og i simuleringane. Eit mål på denne moduleringa er kor stor energi dei høgare modene på tvers har. Vi treng derfor vite noko om energien til desse modene.

Ei bølge har energi på grunn av rørsla til væske partiklane og på grunn av deformasjonen av overflata. Vi vil finne energien midla over eit visst antall bølgeperioder. I følge Kundu (1977) er den midla energitetthet per overfla-

teening lik

$$E = 1/2\rho g\overline{\zeta^2} \quad (5.1)$$

der ρ er tettleiken til vatn, g er som definert tidligere og $\overline{\zeta^2}$ er midla kvadrat av overflatehevninga. Sidan bølga vil modulere i tid og rom må vi ta dette med i betraktningen. Dette kan føre til tidsvariasjoner i energitetthet per overflateeining, noko vi kjem tilbake til i kapitlet om tidsvidu. Hastigheten som bølgeenergien brer seg med er som kjent gruppehastigheten. Modene vil ha litt forskjellig gruppehastighet. Får å ta med denne effekten bruker vi energiflukt per lengdeeining. Den midla energi fluksen per lengdeeining er:

$$F = Ec_g$$

c_g er gruppehastigheten. F er eit mål på effekten som passerer ei gitt linje i tanken. Viss vi har eit langt nok tidsvindu skal energifluksen per lengdeeining vere konserverert. Sidan vi har oppløysing på tvers kan vi finne den totale energien som passerer ein målestsjon per tid. (Effekten).

Vi har frå før

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{q=0}^4 \widehat{\zeta}_q \cos\left(\frac{\pi q y}{b}\right) \quad (5.2)$$

Vi kan finne energien per lengdeeining av tanken. Likning (5.1) gir energien per overflate eining. Dersom vi intergrerer denne likninga over y frå 0 til b vil vi få energien per lengdeeining ved eit gitt tidspunkt t_k .

$$\begin{aligned} \int_0^b \zeta^2(x, y, t_k) dy &= \int_0^b \left(\sum_{q=0}^4 \widehat{\zeta}_q(t_k) \cos\left(\frac{\pi q y}{b}\right) \right)^2 dy \\ &= \sum_{p=0}^4 \sum_{q=0}^4 \left(\widehat{\zeta}_p(t_k) \widehat{\zeta}_q(t_k) \int_0^b \cos\left(\frac{\pi p y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi q y}{b}\right) dy \right) \\ &= \sum_{p=0}^4 \sum_{q=0}^4 \left(\widehat{\zeta}_p(t_k) \widehat{\zeta}_q(t_k) \int_0^b \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi y(p+q)}{b}\right) + \cos\left(\frac{\pi y(p-q)}{b}\right) \right) dy \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{p=0}^4 \sum_{q=0}^4 \left(\widehat{\zeta}_p(t_k) \widehat{\zeta}_q(t_k) \frac{1}{2} \left[\frac{b}{\pi(p+q)} \sin\left(\frac{\pi y(p+q)}{b}\right) + \frac{b}{\pi(p-q)} \sin\left(\frac{\pi y(p-q)}{b}\right) \right] \right)_0^b$$

Vi ser at dersom $p \neq q$ så vil dobbel summen bli null sidan sinus ledda blir null. Dersom $p = q > 0$ så vil det første sinus leddet gje null medan det siste vil gje ein grenseverdi. Vi lar $p - q = X$.

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{b \left[\sin\left(\frac{\pi y X}{b}\right) \right]_0^b}{2\pi X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{b \left[\frac{\pi y}{b} \cos\left(\frac{\pi y X}{b}\right) \right]_0^b}{2\pi} = \frac{1}{2}b$$

Når $p = q = 0$ får vi denne grense verdien for begge sinusledda og dermed blir energien $b\widehat{\zeta}_0^2$. Dersom vi set dette inn i uttrykket vi hadde ovanfor så får vi

$$\int_0^b \zeta^2(x, y, t_k) dy = b \left(\widehat{\zeta}_0^2(t_k) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^4 \widehat{\zeta}_q^2(t_k) \right)$$

Vi utvikler $\widehat{\zeta}_q$ i ei Fourier rekke med omsyn på tida

$$\widehat{\zeta}_q(x, t_k) = \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{\zeta}_{q,r}(x) e^{-i\omega_r t_k} \quad (5.3)$$

Parsevals relasjon viser sammenhengen mellom energien til signalet og Fourier koeffisientane. Den midla energien er lik summen av kvadratene av absolutt verdiane til Fourier modene. Derfor kan vi definere ein størrelse $e_{q,r}$ som er proporsjonal med energien til Fourier komponenten q, r .

$$e_{q,r}(x) = b \cdot \nu_q |\widehat{\zeta}_{q,r}|^2$$

$\nu_q = 1$ dersom $q = 0$ og $\frac{1}{2}$ ellers. Denne må vere med sidan vi integrerer kvadratet av cosinus bølger på tvers av tanken som vist ovanfor. Vi kan no finne energien til mode $q : E_q$. Ved å skrive ut Parsevals likning får vi

$$E_q = b \cdot \nu_q \sum_{r=0}^{K-1} |\widehat{\zeta}_{q,r}|^2 = b \cdot \nu_q \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \widehat{\zeta}_q^2(x, t_k)$$

Den totale midla energien per lengdeining blir,

$$E_T(x) = \sum_{q=0}^4 E_q(x)$$

Vi kan no finne effekten. For modene blir denne $P_q = E_q C g_{xq}$ der P_q er effekten til mode q og $C g_{xq}$ er gruppehastighetens komponent i x retningen for mode q . Vi treng altså å finne gruppehastighetens x komponent. Som tidligere skreve er bølgetallet i y retning kvantifisert som $k_{yq} = q\frac{\pi}{b}$. For å finne gruppehastigheten bruker vi den lineære dispersjonslikninga. Vi veit at $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$. Gruppehastigheten i x -retning for mode q er gjeven som

$$C g_{xq} = \frac{\partial}{\partial k_x} \omega(k_{xq}, k_{yq}) \quad (5.4)$$

Sidan vi bruker den lineære dispersjonslikninga får vi

$$\omega(k_{xq}, k_{yq}) = \sqrt{g} (k_{xq}^2 + k_{yq}^2)^{1/4} \quad (5.5)$$

Set vi 5.5 inn i 5.4 kjem vi fram til uttrykket

$$C g_{xq} = \frac{\sqrt{g}}{2} \frac{k_{xq}}{(k_{xq}^2 + (\frac{q\pi}{b})^2)^{3/4}} \quad (5.6)$$

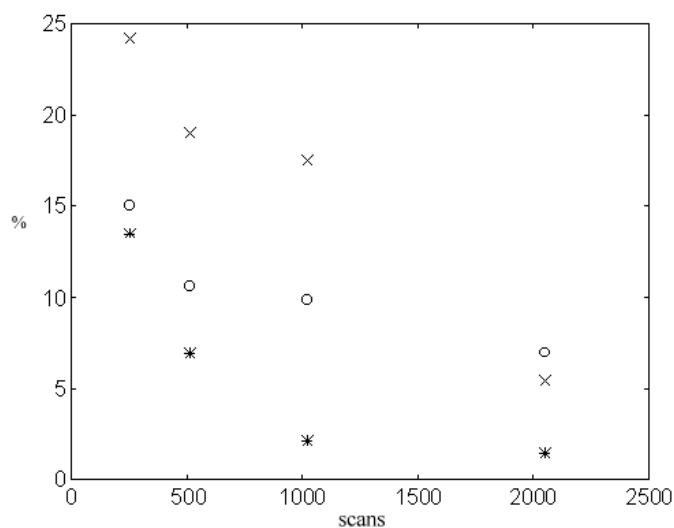
I utrekninga av energifluks ser vi bort frå enkelte konstante ledd slik at vi får ein størrelse proporsjonal med effekten.

5.3 Tidsvindu

Vi treng eit passende tidsvindu for å finne effekten. På grunn av moduleringa av bølgetoget i tid og rom så vil effekten variere i tid ved kvar stasjon. Det er også andre effekter som aliasing og variasjoner i bølgelemmen som vil føre til tidsvariasjon av effekten. For at desse effektane ikkje skal få påvirke resultatet så må vi bruke eit passende tidsvindu. For å finne eit slikt tidsvindu ser vi på standardavviket mellom effekten utrekna med forskjellige tidsvindu. For simuleringane skal energitettheten per overflateeining vere konserverv.

Vi deler tidsdomenet der vi har eit bølgetog uten transiente effekter, inn i mindre tidsvindu. For kvart slikt tidsvindu finner vi den midla effekten og ser så på det relative standardavviket mellom desse. Ved å variere lengda på tidsvinduene kan vi finne eit tidsvindu der tidsvariasjoner i eksperimentet får mindre å seie.

Vi ser på standard avviket for den effekten på 120 meter. For å samanlikne tar vi ulike tidsvindu på 256 scans (12.8 sekunder), 512 scans (25.6



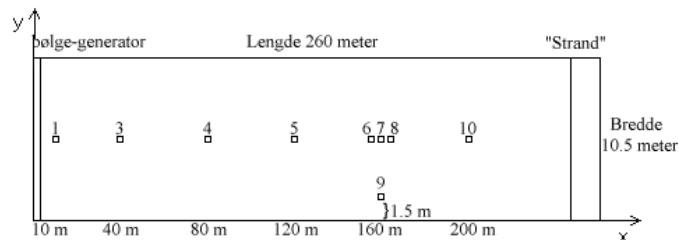
Figur 5.2: Viser korleis relativt standard avvik minkar med antall scans. X: 8008, O: 8007 og *: 8003.

sekunder), 1024 scans (51.2 sekunder), 2048 scans (102.4 sekunder). (Storleiken på tidsvindua må vere to opphøgd i ein potens for å kunne bruke Fast Fourier Transform) Testane som vart valgt ut var 8003, 8007 og 8008 som ligg spredt rundt midten av parameter planet. (Figur 5.1) Ein må passe på å starte det første tidsvindaugget ei stund etter at byrjinga på bølgetoget har passert. Dette er for å unngå transiente effekter. På grunn av avgrensa lese-tid varierer det noko med antall tidsvindaug ein får med i kvart overslag av standardavviket.

Som vi ser av figur (5.2) avtar standardavviket med antall scans. Vi har valgt å bruke tidsvindaug med 2048 scans så sant det lar seg gjere. I initialiseringa er det andre omsyn som teller ved valg av tidsvindu slik at desse vert ein god del lengre.

5.4 Sammenlikning med tidligere resultater

Av tidligere resultat kan vi sjå på Trulsen, Stansberg og Velarde (1998). Dei tar for seg eit eksperiment også utført ved Marintek i Trondheim. Dette



Figur 5.3: Målepunkt fordeling i gammelt eksperiment utført ved Marintek.

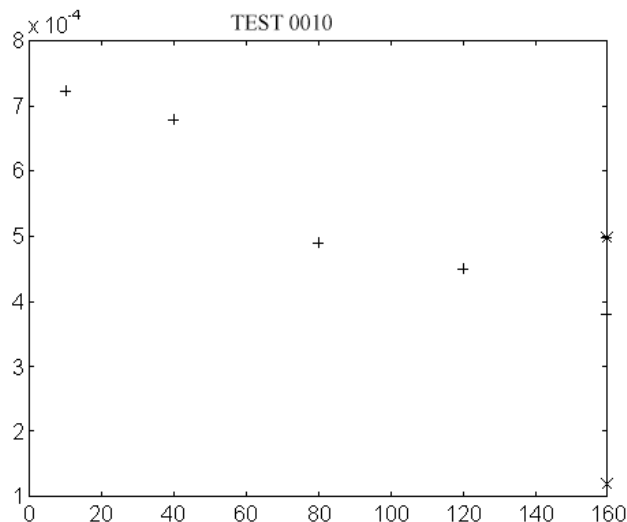
eksperimentet var egentlig meint til eit anna formål, men har ein probe ut frå midten slik at det lar seg gjere å seie litt om kva som skjer på tvers av tanken.

Vi legg inn eit koordinat system som i det nye eksperimentet med x langs tanken og y på tvers av tanken. $x = 0$ ved bølgegenerator og $y = 0$ ved den eine tankveggen. Dette eksperimentet har prober langs midten, probe 1, 3, 4, 5, 7 og 10 på 10, 40, 80, 120, 160 og 200 meter. Unntaket er probe 9 som står $y = 1.5$ meter frå tankveggen ved $x = 160$ meter (sjå figur(5.3)). Samplingsintervallet er det samme som i det nye eksperimentet (0.05 sekund).

Som tidligere har vi Fourier dekomponeringa på tvers av tank (4.6). Denne medfører at vi langs midten av tanken får ein superponering av jamne moder.

$$\zeta_{\parallel}(x, t) = \zeta(x, \frac{b}{2}, t) = \hat{\zeta}_0 - \hat{\zeta}_2 + \hat{\zeta}_4 - \dots$$

Probe 9 ved $x = 160$ meter og $y_0 = 1.5$ meter måler både jamne og odde moder. For å få eit overslag på grunnlag av probe 7 og probe 9 over energien



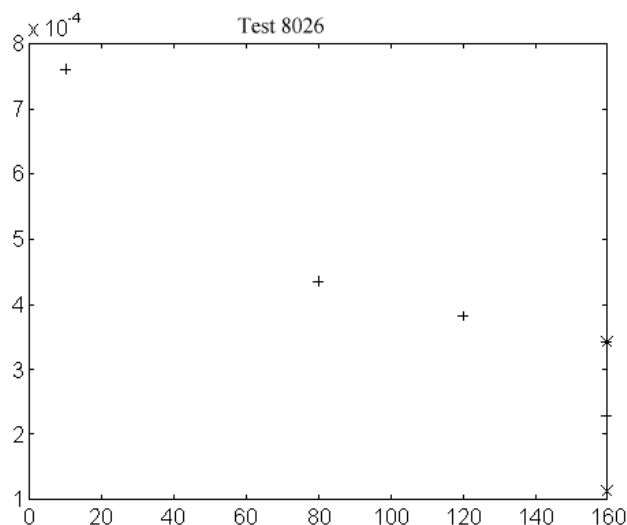
Figur 5.4: Energi utvikling for gammelt eksperiment. +: Midla energi for ζ_{\parallel} . X: Midla energi ζ_{\perp} , *: Total midla energifluks.

til høgare moder så kan vi gjere følgande

$$\zeta_{\perp}(x, t) = \frac{\zeta(x, y_0, t) - \zeta(x, \frac{b}{2}, t)}{\cos(\frac{\pi y_0}{b})} = \hat{\zeta}_1 + \frac{\cos(\frac{2\pi y_0}{b}) + 1}{\cos(\frac{\pi y_0}{b})} \hat{\zeta}_2 + \quad (5.7)$$

$$\frac{\cos(\frac{3\pi y_0}{b})}{\cos(\frac{\pi y_0}{b})} \hat{\zeta}_3 + \frac{\cos(\frac{4\pi y_0}{b}) - 1}{\cos(\frac{\pi y_0}{b})} \hat{\zeta}_4 + \dots$$

Trulsen, Stansberg og Velarde viste ved dette eksperimentet at dei høgare modene hadde energi. Vi kan no ta data frå det gamle eksperimentet og sammenlikne med resultat i frå det nye eksperimentet. Testen i det gamle eksperimentet har periode $T = 1.0$ s og bølgehøyde 0.10 m. I det nye eksperimentet har test 8002 og 8026 desse verdiane. Av desse to er det berre 8026 som har målepunkt på 160 meter. I motsetning til testen i det gamle eksperimentet har test 8026 fem prober på 160 meter. Vi kan derfor finne modene frå 0 til 4 og så sette desse inn i likning (5.7) for å finne ζ_{\perp} for 8026. Vi går ut i frå at høgare moder enn $\hat{\zeta}_4$ har neglisjerbar energi. På denne måten kan vi sammenlikne spekter og energi for ζ_{\parallel} og ζ_{\perp} for gammelt og nytt eksperiment.

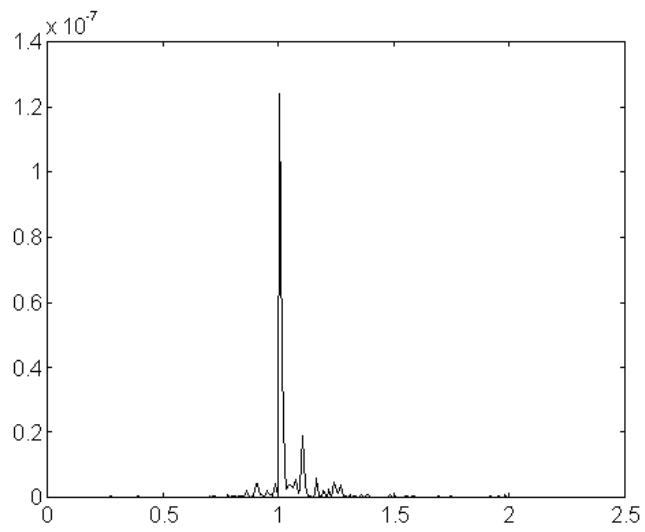


Figur 5.5: Energi utvikling for nytt eksperiment. Tegnforklaring som i 5.4.

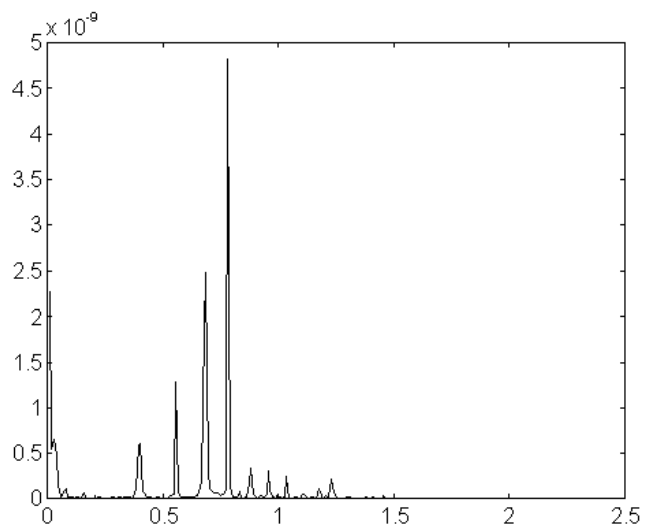
Som det framgår av sammenlikning mellom figur (5.4) og (5.5) er det eit avvik mellom gammelt og nytt eksperiment. Dette kan ha sin forklaring i at perturbasjonene før bølgetoget kommer i tanken er forskjellig. Som vi ser av figur (5.6) har den gamle testen perturbasjoner rundt bærefrekvensen. Tilsvarende finn ein ikkje for test 8026 (figur (5.7)). Desse perturbasjonane vil vekse eksponensielt med tida slik at vi vil få ein annan energifordeling ved dei forskjellige eksperimenta. Som det framgår av plotta i rapporten frå Marintek så er det ein del variasjon i genereringa av bølger frå bølgelemmen ved Marintek. I tillegg kan det hende at moder høgare enn fire ikkje er neglisjerbar, noko som gjer at resultatet blir forskjellig.

5.5 Sammenlikning mellom eksperiment

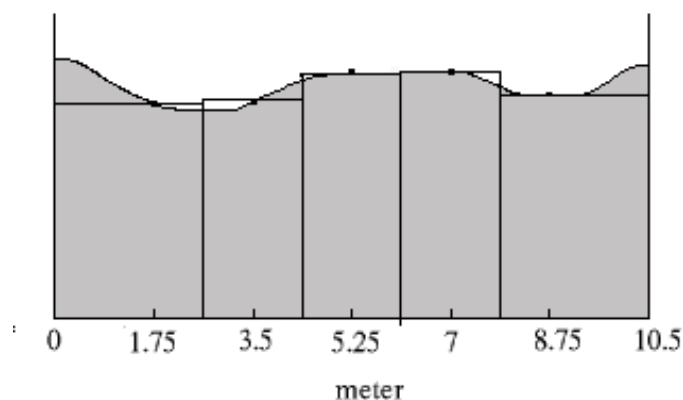
Som det vart vist i forrige kapittel er det ein del avvik mellom dette og tidligere forsøk. Det kan derfor vere interessant å få eit innblikk i kva grad det siste eksperimentet har reproducerbare resultat. Vi ser i det følgande på



Figur 5.6: Spektrum før starten på bølgetoget kommer for test 0010 (Gamelt eksperiment)



Figur 5.7: Spektrum før starten på bøgetoget kommer for test 8026 (Nytt eksperiment)



Figur 5.8: Tversnitt av tanken som viser plassering av prober og korleis energien per lengdeining vert summert opp.

eksperiment med same initialbetingelser. Det vil seie same bølgehøyde H og bølgeperiode T_c . Det er fire par tester som har same initialbetingelser. Av desse har test 8007 og test 8015 sammen med test 8023 og test 8025, fire sammenfallande stasjonar. Sett i lys av tidsvariasjonen innanfor same eksperiment (jamfør kapitell 5.3) er det viktig å ta same bølgeutsnitt frå dei to eksperimenta ein skal sammenlikne. Vi bruker første del av bølgetoget. Vi hopper over dei første 20 sekunda (400 scans) av bølgetoget (for å unngå transiente effekter) og bruker dei neste 102.4 sekundane (2048 scans) ved 10 meter. Dette utsnittet av bølga vert så fulgt nedover i tanken. Til å finne energien summerer vi opp energien frå kvar probe. Dette blir ei slags numerisk integrering på tvers med ein midtpunktsregel. Målepunkta står i midten som vist i figur 5.8, og målepunkta i ytterpunkta må vektast med 1.5.

Det minste ein skulle vente var då at totalenergien er den same for dei to eksperimenta som vert sammenlikna. Som det framgår av tabellen stemmer dette bra til og med 80 meter for dei første to par tester, men dårlig for 120 meter. Det siste par tester stemmer bra for 10 og 120 meter, og dårlig for 40 og 80 meter. Den relativt store forskjellen for testane 8001-8019 og testane 8002-8026 ved 120 meter er kommentert i datarapporten frå Marintek. Dei

seier der at denne variasjonen skyldast at probe 16-20 gir litt for lite utslag på grunn av målefeil. Målefeilen er satt til omlag 5%.

Test	10m, Δ %	40m, Δ %	80m, Δ %	120m, Δ %	160m, Δ %
8001-8019	0.64 %		2.4 %	13.1 %	
8002-8026	3.5 %		4.3 %	25.5 %	
8007-8015	3.8 %	13.4 %	6.3 %	2.0 %	
8023-8025	2.8 %		2.6 %	3.1 %	6.7 %

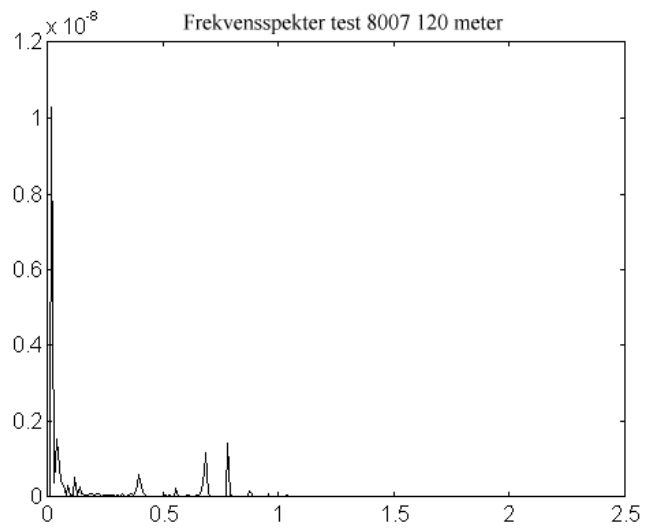
Tabell 4.1: Relativt avvik i effekt mellom tester med samme initialbetingelser.

Den store relative forskjellen mellom test 8007 og test 8015 ved 40 meter kan ha ei anna forklaring. Perturbasjonane i tanken før bølgetoget kommer har ein innverknig på fordelingane av modene. Det er sannsynleg at fordelinga av modene gjev ein lågare total energi for test 8007 for det tidsintervallet vi ser på. Dersom ein bruker eit lengre tidsintervall som er lenger inn i måleserien forsvinn forskjellane mellom dei to testane på 40 meter. For å undersøke dette kan det lønne seg å leite etter perturbasjonane i tanken før bølgene blir generert. Desse vil vekse eksponensielt med tida når bølgetoget kjem som forklart i forrige kapittel. Særleg er det perturbasjonane med frekvens i nærleiken til bærefrekvesen som spelar ei stor rolle. Spektra for test 8007 og test 8015 er vist i figur (5.9) og (5.10). Som det går fram av figuren så har test 8015 perturbasjonar i frekvens området til bærebølga $f_c = 1.21$ Hz medan test 8007 har ikkje det.

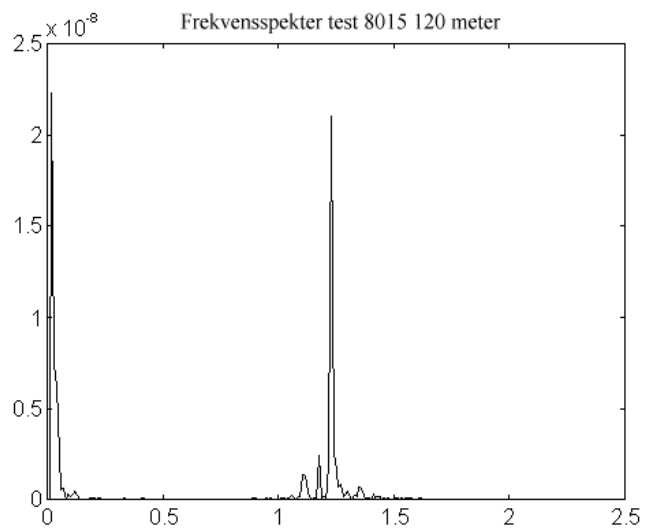
Det er påfallande at testane 8023 og 8025 har minst relativt avvik. Desse testane har lengst bølgelengde og størst amplitude. Derfor er dei minst påverka av perturbasjonane i tanken før bølgetoget kommer. Dette til tross for at desse testane er kanskje dei med dei største perturbasjonane i tanken før bølgetoget kommer. Det er også desse testane der moder > 0 veks minst i den modulerte fasen.

Det er også mulig at variasjoner i bølgelemmen kan skape forskjeller i mode bilde mellom test 8007 og 8015 på 40 meter. Dersom variasjoner i bølgelemmen skulle forklart forskjellen i total energi skulle ein venta større avvik ved 10 meter.

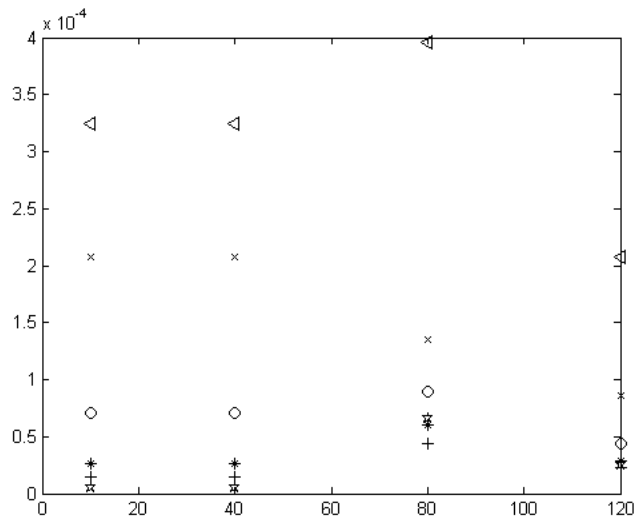
Simuleringane kan ikkje ta med den effekten nivået av perturbasjonane før start av bølgetoget har, og dette kan medføre større avvik mellom eksperiment og simulering enn ideelt sett. Bølger med mindre bølgeperiode og lav amplitude vil vere meir følsom for desse.



Figur 5.9: Spektrum før starten på bølgetoget for test 8007. Frekvensen rundt bærefrekvensen er mindre enn for spekteret til 8015.



Figur 5.10: Spekter for perturbasjoner i tank før bølgetog for test 8015.



Figur 5.11: Energier for moder til test 8008. Tegnforklaring: \triangleleft : Total energi , X : Nullte mode, \circ : Første mode, * : Andre mode, + : Tredje mode , Pentagram : Fjerde mode.

5.6 Aliasing

Ved energiflaks analyse av eksperimenta oppstod det problem. Det viste seg i fleire av eksperimenta ved at effekten vart større nedover i tanken enn den var ved starten. Sjå figur (5.11)

Det var særlig stasjoner der bølga hadde løst seg opp i høgare moder at dette skjedde. Tredje stasjon på test 8008 er eit godt eksempel på dette. Der steig effekten markert i forhold til effekten på 10 meter. Svaret ser ut til å vere ein form for aliasing. Ligningsettet skildra i kapittel om Fourier analyse gjev ikkje reine moder. Vi kan skrive ut ligningssystemet, men også ta med mode 5 og 6. Vi får då:

$$\zeta_l = \sum_{q=0}^6 \widehat{\zeta}_q \cos\left(\frac{\pi q y}{b}\right)$$

Ligningsettet vert:

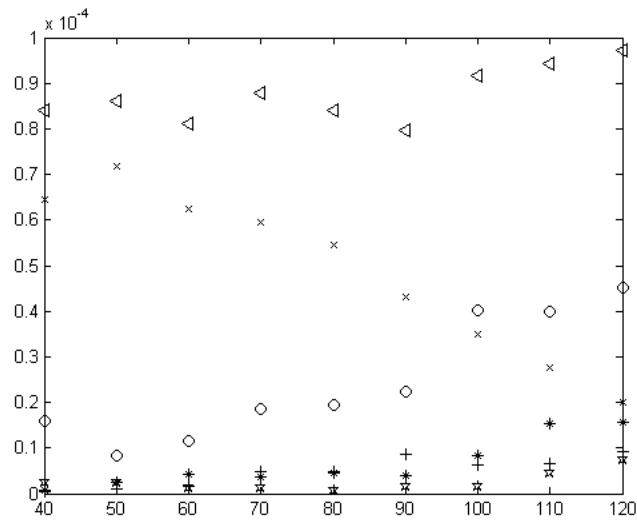
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\zeta}_0 \\ \widehat{\zeta}_1 \\ \widehat{\zeta}_2 \\ \widehat{\zeta}_3 \\ \widehat{\zeta}_4 \\ \widehat{\zeta}_5 \\ \widehat{\zeta}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Dersom vi løser dette likningsystemet med omsyn på Fourier komponentane får vi:

$$\begin{aligned} \widehat{\zeta}_0 &= \frac{1}{3}(\zeta_1 + \zeta_3 + \zeta_5) + t_2 \\ \widehat{\zeta}_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3}(\zeta_1 - \zeta_5) + t_1 \\ \widehat{\zeta}_2 &= \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_4 + \zeta_5) + 2t_2 \\ \widehat{\zeta}_3 &= \frac{\sqrt{3}}{6}(\zeta_1 - \sqrt{3}\zeta_2 + \sqrt{3}\zeta_4 - \zeta_5) + t_1 \\ \widehat{\zeta}_4 &= \frac{1}{6}(\zeta_1 - 3\zeta_2 + 4\zeta_3 - 3\zeta_4 + \zeta_5) + 2t_2 \\ \widehat{\zeta}_5 &= t_1 \\ \widehat{\zeta}_6 &= t_2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Vi ser at dersom moder større enn fire blir store nok vil dette skape komplikasjoner. I staden for mode $\widehat{\zeta}_1$ så får vi $\widehat{\zeta}_1 - \widehat{\zeta}_5 + \dots$. Når bølga utvikler seg nedover i tanken så vil dei høgare modene vokse og det er ikkje sikkert at mode $\widehat{\zeta}_5$ er neglisjerbar lenger. For å finne energifluksen vert resultatata frå likningsettet (5.9) kvadrert og midla. Viss vi ser bort frå moder høgare enn seks får vi til dømes $\widehat{\zeta}_1^2 - 2\widehat{\zeta}_1\widehat{\zeta}_5 + \widehat{\zeta}_5^2$ når det vi ville ha er $\widehat{\zeta}_1^2$. Det kvadratiske leddet $\widehat{\zeta}_5^2$ sammen med kryssleddet $-2\widehat{\zeta}_1\widehat{\zeta}_5$ kan føre til auke eller minkning i energi alt etter om $\widehat{\zeta}_1$ og $\widehat{\zeta}_5$ er i fase eller ikkje.

Desverre er det ikkje mulig å finne dei høgare modene for eksperimentelle data. Derimot kan vi gjere dette for simuleringer. Der kan vi bruke metoden beskreve i Fourier kapitlet i tillegg til at vi kan bruke ein vanlig diskret

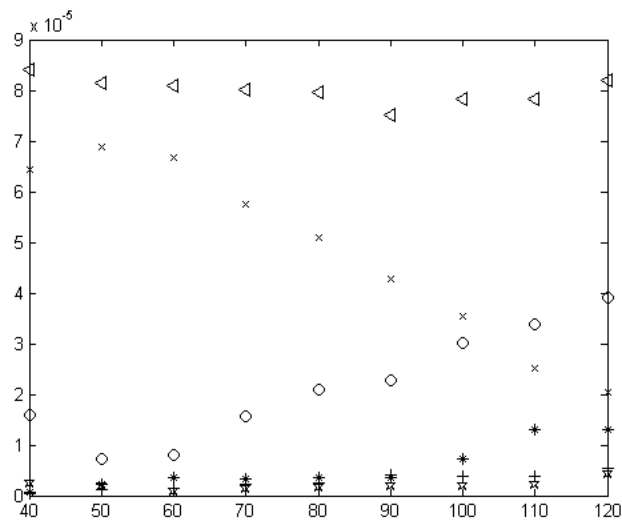


Figur 5.12: Energifluks utvikling med eksperimentell metode. Tegnforklaring sjå figur 5.11

Fourier metode til å finne moder høgare enn fire. På denne måten kan vi justere resultatet frå den eksperimentelle metoden slik at vi i det minste kan sannsynlig gjere at det er aliasing som forårsaker aukinga i energifluksen.

Vi bruker test 8014 som eksempel. Vi initialiserer med stasjonen på 40 meter. T og b deler vi opp i eit rutenett 512×16 . Vi hopper over dei 200 første sekunda og les så inn 4428 scans tilsvarende 221.4 sekund.

Vi finn først effekten ved 40 meter og opp til 120 meter med metoden der vi bruker transformasjonsmatrisa. Deretter finn vi mode 5 og 6 ved vanlig diskret Fourier transform, og justerer resultatata på den måten som er gitt i (5.9). Resultata er vist i figur (5.12) og (5.13). Forbedringa er lett å sjå mellom dei to figurane. I den første figuren har effekten ei markert stigning ved 100 meter og det er tilsvarende problem som dette som gjer seg gjeldande i analyse av eksperimentet. Ved 100 meter har modene ≥ 1 vokst seg store. Som vi ser er total effekten så og seie konservert i det siste tilfellet. At den ikkje er heilt konservert skyldast at vi berre har justert for mode 5 og 6. Endå høgare moder kan også gjere seg gjeldande. Men den totale energien nedover i tanken overstiger ikkje den totale energien ved 10 meter. Figurane skulle sannsynlig gjere at det er aliasing som forårsaker problemet.



Figur 5.13: Energifluks utvikling med justert eksperimentell metode. Tegnforklaring sjå figur 5.11

5.7 Stasjonære ståande bølger

Sett i lys av den store forskjellen mellom eksperiment som i starten er like og ei unormal energi utvikling for enkelte tester fann vi det rett å undersøke om det vart eksitert stasjonære ståande bølger. Dette kunne føre til at vi ikkje lenger har konservering av effekten. Ideen var at y -komponent av bølgene førte til ein eksitasjon av ei stasjonær ståande bølge på tvers av tanken. Dette kunne føre til at energien hopa seg opp enkelte stader i tanken noko som kunne forklare aukinga i effekten nedover i tanken.

For å prøve ut teorien er det beste å sjå på frekvens spekteret. Vi kan demonstrere metoden med test 8008. Den har ein bølgeperiode $T = 0.82$ sekund og bølgehøyde $H = 0.06$ meter. ka er dermed 0.180 og $\Delta\mu$ er 0.05. Denne testen plasserer seg slik i parameterplanet at ein skulle vente mykje modulasjon. Det er stasjonen på 80 meter som gjev markert auke, så det vil vere naturleg å sjå etter stasjonære ståande bølger her. Djupna er 5 meter.

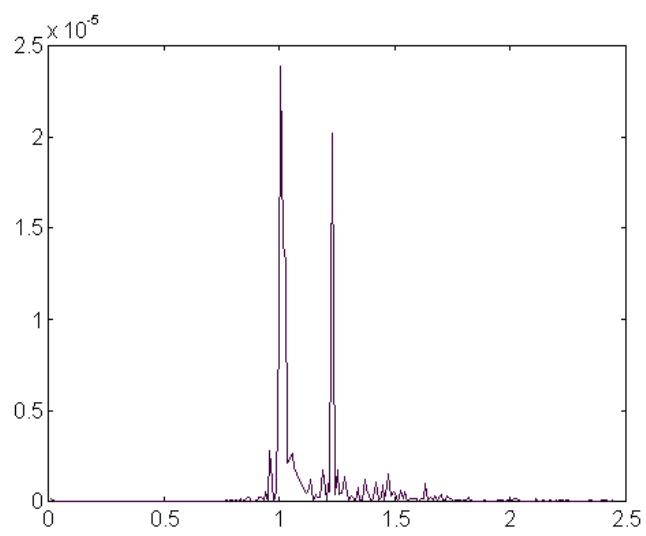
Vi bruker egenskapen om kvantifisering av bølgelengde. Den lengste bølga har bølgelengde dobbelt så stor som bredda på tanken. Derfor må vi bruke den lineære dispersjons relasjonen for endelig djupne for dei lengste bølgelengdene.

$$\omega_q = \sqrt{g \frac{q\pi}{b} \tanh\left(\frac{q\pi}{b}h\right)} \quad (5.10)$$

Vi finn kva frekvenser som skal vise utslag i energi spekteret.

q	$f(s^{-1})$
1	0.17
2	0.38
3	0.47
4	0.55

Figur 5.14 viser eit plott av frekvens spekteret for test 8008 med samme tidsvindu som gjev auking i energien. Dette plottet er for mode 1 og som det går fram av figuren er det ikkje noko auke i energien rundt 0.17 Hz. Det vart heller ikkje funne spor etter stasjonære ståande bølger i dei andre plotta.



Figur 5.14: Energi spekter for test 8008 for 80 meter. Spekteret er for mode ein.

Kapittel 6

Simulering

6.1 Variasjon av modulering for eksperiment

I litteraturen er det introdusert ein parameter som mål på ikkje lineær modulasjon (Sjå til dømes Lo & Mei 1985). Denne er avleidd av det ledande ikkje-lineære leddet $|B|^2 B$. Dette leddet balanserer med leddet $\frac{\partial B}{\partial x}$. Parameteren er kalla η (for å ikkje blande med η i BMNLS likninga kaller vi den her for η_m). Den er satt til $\eta_m = kx(ka)^2$. Størrelsane er definert ovanfor. Parameteren skal vere skalert slik at når $\eta_m = O(1)$ så skal modulasjons instabiliteten byrje å utvikle seg. Den maksimale romlige vekstraten for modulasjon er nettopp $(ka)^2 k$. η_m kan bli brukt for å slå fast eit gyldighetsområde for modellen og for å sette ei grense for kor tid bølga er frekvensnedskifta. I rapporten til Marintek (1998) er alle energi spektra til dei forskjellige målepunkta presentert. Vi ser i dette kapitlet korleis modulasjonen varierer med omsyn på η_m i forhold til bølgeperiode T_c og steilhet ka . Steilheten er målt i eksperimentet ved 10 meter og det er dette tallet vi bruker som karakteristikk til bølgetoget.

Bølger med låg steilhet (8000, 8014, 8018, $ka < 0.11$) får også ein låg η_m og blir heller ikkje modulert i nemneverdig grad. Det er derfor ikkje mogeleg å seie noko om for kva η_m desse vil modulere.

For tester med middels ka ($0.16 < ka < 0.26$) får vi frekvensnedskift for tester med dei kortaste bølgelengdene ($T_c = 0.82$, $T_c = 1$). Dei mest ustabile frekvensbånda har vokse seg store rundt $\eta_m = 14$. Testane med $T_c = 0.82$ kommer tidligere inn i den modulerte fasen ($\eta_m = 11$) enn tester med lengre bølgelengde ($T_c = 1.24$ $T_c = 1.43$) der η_m kan komme opp i større verdier

($\eta_m = 20$) før bølgetoget blir modulert. Forklaringa på dette kan vere at dei små perturbasjonane som er i tanken før bølgetoget har forplanta seg gjennom tanken, får meir å seie for tester med liten bølgelengde og amplitude, som vist i kapittel 5.5.

Så har vi tester med stor steilhet ($ka > 0.29$) Her skjer modulasjonen mykje seinere med omsyn på η_m . For test 8003 til dømes har dei mest ustabile frekvensbånda byrja å vokse seg store ved $\eta_m = 31$. For stor steilhet ser det ut for at bølgelengda spelar ei mindre rolle.

Eit poeng som kan vere verdt å nemne er at i spekter for bølger med høg steilhet så er ikkje det mest ustabile øvre frekvensbåndet representert i den modulerte fasen i eksperimentet. Dette kan komme av at denne delen av frekvens båndet forsvinn i dissipasjon på grunn av brytning som funne av Trulsen og Dysthe (1989). I bølger med lavare steilhet er det øvre mest ustabile frekvensbåndet framtrédande i moduljonsfasen.

6.2 Gyldighetsområdet

Vi bruker η_m til å bestemme gyldighetsområdet. Vi definerer gyldighetsområdet som den størrelsen av η_m der det er god kvantitativ sammenlikning mellom eksperiment og simulering. På grunn av at modulasjonen avhenger av steilhet og bølgelengde er det naturleg å tru at det samme gjeld for gyldighetsområdet. I bølgemodellen er ikkje brytning tatt med. Dette gjer at det ikkje er sannsynleg at bølger med ein steilhet som gjev brytning i moduljonsfasen vil gje god kvantitativ sammenlikning. Vi bør derfor i første omgang sjå på bølger med låg steilhet. Det er sannsynleg at bølger med kort bølgelengde og liten amplitude blir påverka av perturbasjonane i tanken som er der før bølgetoget kommer, noko som kan gje mindre gyldighetsområde for desse.

Vi kan initialisere på kva stasjon vi vil, men vi bruker stasjon ein og to etter som det passer. På stasjon to vil perturbasjonane ha vokse slik at initialisering ved denne stasjonen ikkje vil vere like sårbar for måleavvik som stasjon ein.

Ein anvendelse av bølgemodellen er deterministisk bølgevarsel. Ei havbølge har ein steilhet på omlag 0.12. Test 8000 har ein målt steilhet på 10 meter på 0.109. Δu er 0.0743. Denne testen ligger nede til venstre i parameterplanet. Vi ser derfor først på denne testen. Vi initialiserer på stasjon ein ved 10 meter og setter $\eta_m = 0$ her. Vi diskretiserer tidsdomenet i $M = 512$ punkt og

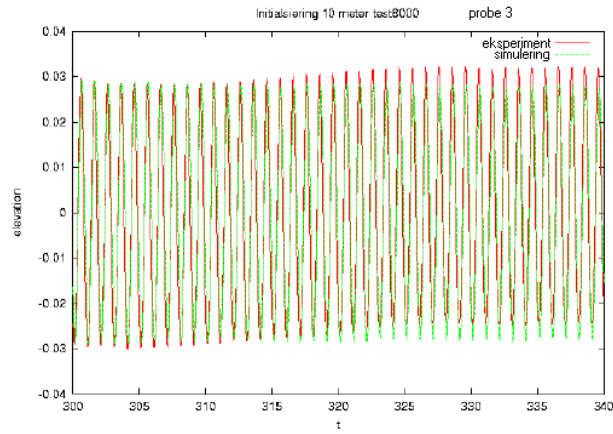
bredda i $N/2 = 16$ punkt. Vi initialiserer med 270 bølgelengder som tilsvarer 270 sekund ($K = 5400$), og starter å lese frå 100 sekund etter bølgelemmen har starta. Dette skulle vere nok til at transiente effekter ved oppstart av bølgetoget skal ha passert.

Ved å initialisere med eit antall bølgelengder (270) større enn båndbredden ($M/2 = 256$) filterer vi vekk dei lågfrekvente svingningane. Vi kan sjå dette av det følgande: $\omega_r = \frac{2\pi}{T}r$, samtidig er $T = M_0T_c$ der M_0 er talet på bølgelengder i initialiseringa og T_c er bølgeperioden. Set vi dette inn i den første likninga får vi $\omega_r = \frac{2\pi}{M_0T_c}r$. Når $r = M_0$ så er $\omega_{M_0} = \omega_c$. Sidan vi les inn 256 frekvensbånd rundt denne frekvensen får vi ikkje med dei lavfrekvente svingningane i initialiseringa. (Dei 14 lavaste frekvensbånda blir trunkert bort.)

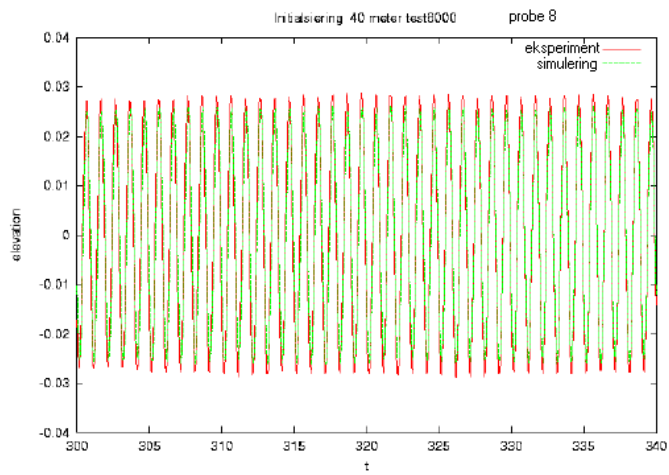
Figur (6.1) viser initialisering av midtproben på ti meter. Det går fram av figuren at initialiserings rutina virker som den skal, og at dei lågfrekvente svingningane vert effektivt filtrert vekk. I dei neste figurane ser vi sammenlikning mellom målepunkta på midten av tanken og simulering for dei tre neste stasjonane. Resultatet for dei andre målepunkta er vist i appendix. Dei eksperimentelle dataene er høgpasfiltrert på dei tre siste stasjonane for å få ei meir relevant sammenlikning. Vi ser av figur 6.4 at det framleis er likhet mellom eksperiment og simulering ved 120 meter. Her er $\eta_m = 5.28$. Avviket i amplitude kan forklarast med dissipasjon i eksperimentet og/eller målefeil for målepunkt 18. Det er påfallande at avviket i amplitude er så konstant.

Av andre tester med lav steilhet har vi til dømes test 8014 ($ka = 0.095$). Denne har kortere bølgelengde og amplitude (sjå tabell), noko som gjer at den er meir følsom for perturbasjonane i tanken. Dette må vere forklaringa på at denne testen gjev dårleg resultat. Også test 8007 og test 8015 har lav steilhet, men kort bølgelengde. Forskjellane mellom testane som skal ha like startvilkår, illustrerer at desse testane er påverka av perturbasjonane. Ein annan test med steilhet i den nedre delen av skalaen er test 8009 ($ka = 0.153$). Denne har lengre bølgeperiode og god overenstemmelse til og med 120 meter ($\eta_m = 4.98$) ved initialisering på 40 meter.

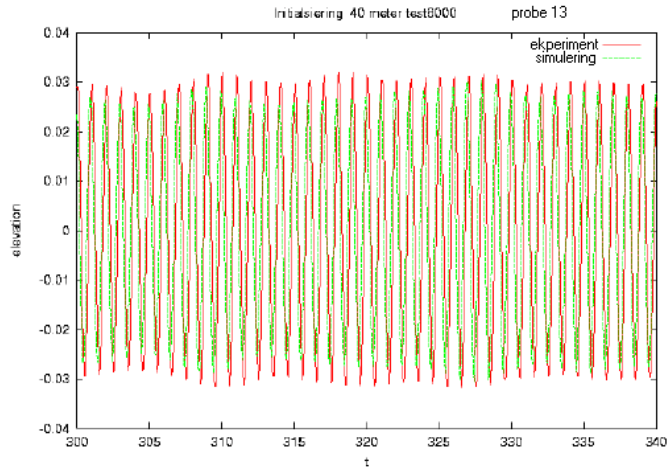
Av kvantitativ sammenlikning mellom dei ulike testane ser det ut som steilheten spelar ei rolle for grensa η_m der modellen er gyldig. Større steilhet gjev mindre gyldighetsområde. For kort bølgeperiode ser ut til å begrense gyldighetsområdet. Det ser også ut til at grensa går der dei ustabile frekvensbånda byrjer å vokse. Bølger med steilhet som likner på steilheten til havbølger og tilstrekkelig stor bølgelengde har eit gyldighetsområde som i alle fall strekker seg til $\eta_m = 5$, mogleg også lenger. Trulsen og Stansberg



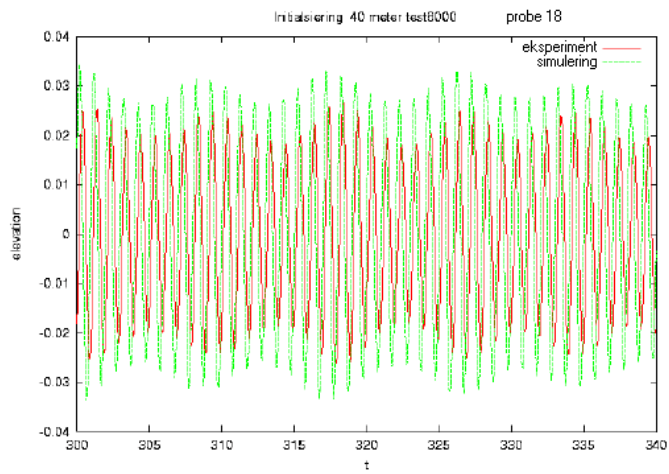
Figur 6.1: Utsnitt av initialiseringa av midt proben på 10 meter. Rødt er eksperimentelle data medan grønt er rekonstruert overflatehevning frå modellen.



Figur 6.2: Sammenlikning mellom eksperiment og simulering ved 40 meter. Farge kode som i figur (6.1)



Figur 6.3: Sammenlikning mellom eksperiment og simulering ved 80 meter. Farge kode som i figur (6.1)



Figur 6.4: Sammenlikning mellom eksperiment og simulering ved 120 meter. Farge kode som i figur (6.1).

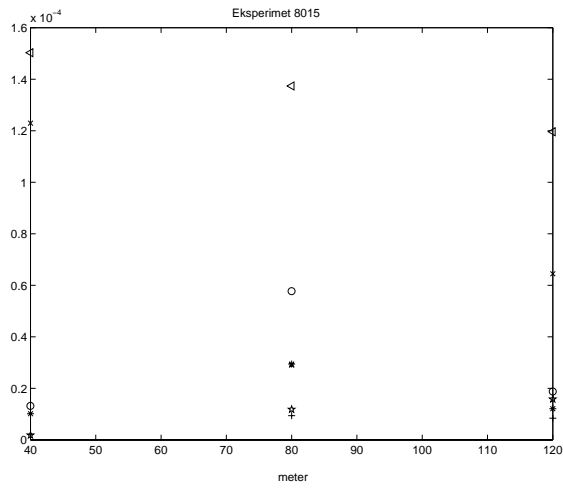
(2001) fant gyldighetsområdet til ELMNLS likninga til $\eta_m = 5$ for det todimensjonale tilfellet.

6.3 Mode energier

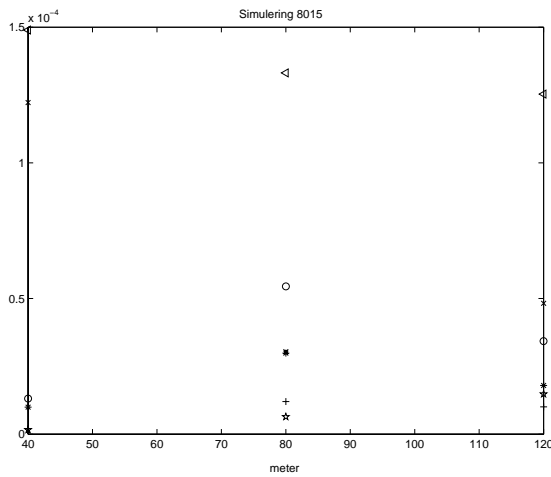
Numeriske kjøringar (Trulsen og Dysthe (1997)) har tidligere forutsagt at det vil vokse fram moder på tvers i modulerings fasen. Sidan eksperimentet på Marintek gjev oppløysing på tvers kan det vere interessant å sjå kor godt modellen gjev samsvar med eksperiment for modene. For å undersøke bedre modeutviklinga på tvers kan vi bruke metoden skildra i kapitlet om Fourier analyse. For eksperimentet gjelder det at vi har fem målepunkt på tvers av tanken, men for simuleringa kan vi plassere ut så mange prober som det trengs. I dei simulerte resultatane kan vi derfor bruke ein diskret Fourier transform sidan vi her kan sette målepunkt i kollokasjonspunktene. Som det følger av kapitlet om aliasing skal det vere mulig å sammenligne desse to dersom moder > 4 ikkje veks seg store.

Tester som skal gje mykje modulering på tvers er dei med kort bølgeperiode og liten $\Delta\mu$. Det vil seie tester som ligg lavt i parameter planet. Test 8015 er ein test med lav $\Delta\mu$ og test 8009 er ein test med større $\Delta\mu$. Test 8015 har ein bølgeperiode på $T = 0.82$ sekund og ei bølge høyde $H = 0.04$ meter. Derfor er $\Delta\mu = 0.05$ og $ka = 0.12$. Når vi initialiserer denne på 40 meter vert $\eta_m = 3.6$ ved 80 meter og 7.2 ved 120 meter. Vi skulle derfor få samsvar iallefall ved 80 meter. Vi diskretiserer tidsdomenet med $M = 512$ og vi les inn 270 bølgelengder. På tvers deler vi kanalen inn $N/2$ i 16 punkt.

Figur (6.5) og (6.6) viser sammenlikning mellom eksperiment og simulering. Som vi ser er sammenlikninga god ved 80 meter og ikkje fullt så god ved 120 meter. Det lille avviket på 40 meter skyldast at i initialiseringa vert ein del frekvensbånd trunkert bort. Som det går fram av figur (6.6) ser det ut som vi har hatt dissipasjon i simuleringa. Dette kommer av at vi berre summerer opp energien til dei lavere modene. Her har energien gått over til høgare moder slik at energien ikkje er konservert i dei lavere modene. Dette kan og forklare energi minkinga i eksperimentet. Mellom 80 og 120 meter er det brytning i eksperimentet og dette kan forklare litt av det dårlige samsvaret mellom teori og praksis på 120 meter sidan modellen ikkje gjeld for bølger som bryter.



Figur 6.5: Mode energier for test 8015 med eksperimentelle data. Tegnforklaring: \triangleleft : Total energi , X : Nullte mode, O : Første mode, * : Andre mode, + : Tredje mode , Pentagram : Fjerde mode.



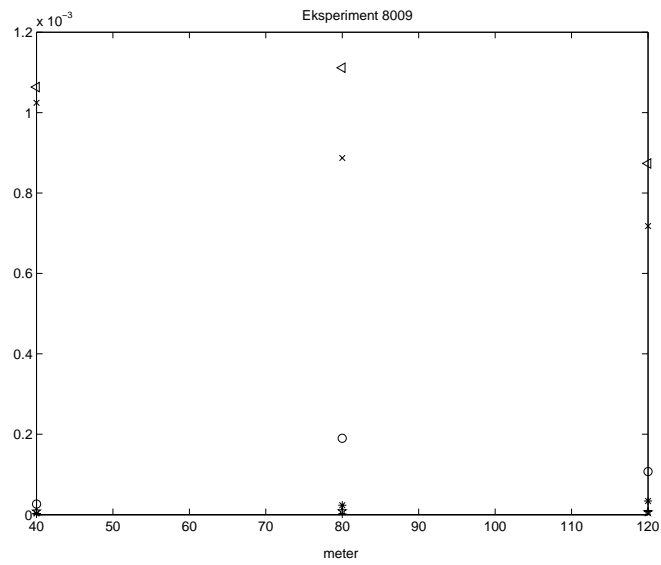
Figur 6.6: Mode energier for test 8015 med simulerte data. Tegnfoklaring sjå figur 6.5

Test 8009 har ein $T_c = 1.24$ og ein $H = 0.11$. Denne testen har derfor ein $ka = 0.153$ og $\Delta\mu = 0.114$. Vi initialiserer med 140 bølgelengder og har ei båndbredde på $M/2 = 128$. Oppløysinga på tvers er $N/2 = 16$. Vi har derfor eit rutenett av T og b på 256×16 . Resultatet er vist i figur (6.7) og (6.8). Den viser godt samsvar mellom simulering og eksperiment både for 80 og 120 meter. For 120 meter er $\eta_m = 4.89$. Energi aukinga for dei eksperimentelle data skyldast mest sannsynleg variasjoner i bølgelemmen sidan vi her ikkje har sett på det samme bølgeutsnittet, men har valgt det samme tidsdomenet for kvar stasjon.

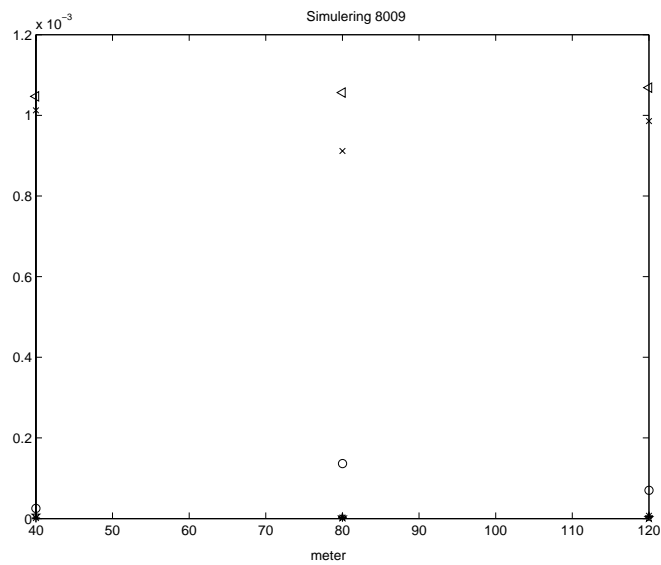
Som venta viser resultata ein mindre modulasjon på tvers for bølger med stor $\Delta\mu$. Det ser og ut som modellen gir eit godt bildet av det som skjer på tvers, i alle fall for tester med η_m mindre enn 5, og ikkje for høg steilhet.

6.4 Frekvensnedskift

Vi vil sjå på om modellen gjev eit varig nedskift av frekvens og på samme måte om det er varig nedskift av frekvens i eksperimentet. Den første som fant frekvens nedskift var Lake et al. (1977). Dei hadde ein bølgelem som lagde eit tilnærma uniformt bølgetog. Med eksperimentet søkte dei å finne kva slutttilstanden for eit slikt bølgetog er. Det viste seg at bølgetoget gjekk inn i ein fase med sterk modulering der sidebåndene $\omega_c \pm \delta\omega$ vokste eksponentsielt i modulerings fasen. Dette stemte med dei teoretiske resultata til Benjamin og Feir (1967). Lenger ned i tanken var bølgetoget igjen uniformt, men frekvensbåndet med mest energi viste seg å vere $\omega_c - \delta\omega$. Lake et al. konkluderte med at eit uniformt bølge tog ville veksle mellom å vere uniformt og modulert. Dette er kalla Fermi-Pasta-Ulam gjentaking. Frekvensnedskiftet kunne dei derimot ikkje finne forklaring for i rådande teorier på den tida. Liknande forsøk har seinare blitt gjentatt, og andre som Su et al. (1982), Melville (1981) har funne det samme frekvensnedskiftet. Su et al. slo fast at frekvensnedskift var ein av dei viktigaste egenskapane for gravitasjons bølger for djupt vatn. I tillegg meinte dei at eit uniformt bølgetog enda opp som eit bølgetog inndelt i grupper med ein lavere bærefrekvens og steilhet enn ved starten, gjerne gjennom fleire faser med større og mindre modulering. Det samme konkluderte Melville med som meinte at Fermi-Pasta-Ulam gjentaking derfor ikkje gjev eit godt bildet av bølgevolusjon sidan bølgespekteret



Figur 6.7: Mode energier for eksperimentelle data for test 8009. Tegnforklaring sjå figur (6.5).



Figur 6.8: Mode energier for simulerte data for test 8009. Tegnforklaring sjå figur (6.5).

etterkvart blir meir komplisert. Det vart og funne eksperimentelt at avstanden det tok før modulering starta, avheng av steilheten til bølgetoget. I den modulerte fasen vil steilheten til dei største bølgene vere større enn steilheten til det initielle uniforme bølgetoget. Det er observert at i den mest steile delen av bølgetoget skjer det brytning i dei tilfellene der vi får frekvensnedskift.

Korleis takler så dei teoretiske modellene frekvensnedskiftet. NLS likninga er symmetrisk rundt ω_c og gjev derfor ikkje frekvensnedskift. Martin og Yuen (1980) brukte NLS likninga i eit tredimensjonalt numerisk eksperiment. Dei fann ei rekke moduleringsfaser og demoduleringsfaser, men ikkje noko frekvensnedskift. Dessverre vart energien etterkvart delt ut over høgare og høgare frekvensbånd, noko som gjer NLS ubrukelig til tredimensjonal simulering sidan den smale frekvensbånd antakelsen er brutt. MNLS likninga er asymmetrisk og gjev derfor eit frekvensnedskift. Lo & Mei (1985 og 1987) utførte numeriske simuleringer av MNLS i to dimensjoner (1985) og tre dimensjoner (1987). Dei fant eit midlertidig frekvensnedskift, men også at bølgetoget gjekk tilnærma tilbake til den initielle tilstanden. I tillegg fann dei at frekvensbånd antakelsen ikkje var brutt sjøl for lange simuleringer.

Fleire har tatt andre fysiske effekter med i MNLS modellen enn dei reint ikkje-lineære for å få til ein modell som gjev eit permanent frekvensnedskift. På grunn av at frekvensnedskift skjer i dei tilfellene der ein har brytning i den modulerte fasen, tok Trulsen og Dysthe (1989) med eit ledd som tok omsyn til bølgebrytning i MNLS modellen. Dei fann at brytninga skjedde i den mest høgfrequente delen av frekvensområdet, og derfor gav denne modellen eit permanent frekvensnedskift. Fleire andre har lagt effekter som dissipasjon på grunn av kapillær krefter og andre ting til MNLS modellen og funne permanent frekvensnedskift.

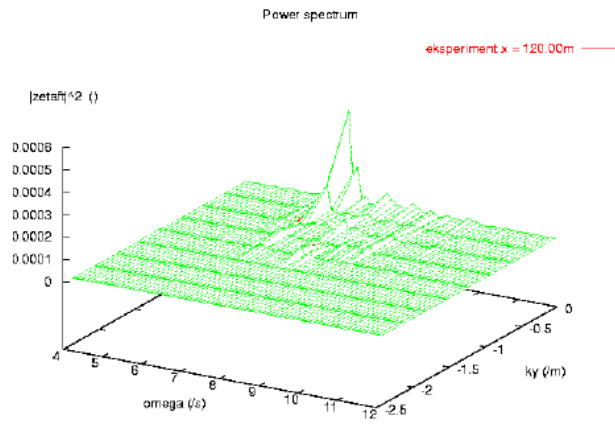
I 1997 gjorde Trulsen og Dysthe numeriske kjøringar med både MNLS og BMNLS. Dei fant at for det to-dimensjonale tilfellet gjekk bølgetoget gjennom ein serie av modulasjon og demodulasjon. Men for det tre-dimensjonale tilfellet fant dei eit permanent frekvensnedskift både for MNLS likninga og BMNLS likninga, utan innblanding av andre fysiske effekter enn dei ikkje-lineære. Dei forklarte at grunnen til at Lo og Mei ikkje fann tilsvarende resultat i 1987, var at dei hadde valgt eit initialiserings spektrum med berre fire ustabile frekvensbånd. Bredde forholdet i Trulsen og Dysthe 1997 gjev $\Delta\mu = 0.1$ slik at dei tredimensjonale effektane funne her, også gjorde seg gjeldande i eksperimentet til Lake et al og Su et al. Dei fann at frekvensnedskift skjer etter omlag $\eta_m = 7$. Frekvens nedskift kan forklarast som ein effekt på grunn av tredimensjonale ikkje-lineære interaksjoner, bølgebrytning

og dissipasjon.

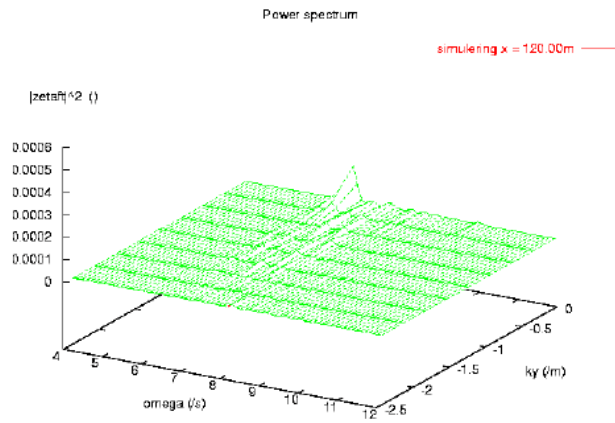
6.5 Frekvensnedskift i eksperiment og simulering

På grunn av at avstandene nedover i tanken er kort må vi bruke tester med kort bølgeperiode og middels til høg steilhet for å finne frekvensnedskift. Dessverre er disse testane ikkje i det kvantitative gyldighetsområdet. Det einaste vi kan vente oss er ein viss kvalitativ likhet mellom trendane i eksperiment og simulering. Testane som peiker seg ut som naturleg å sjå på er test 8007, 8015 og 8016 sidan desse har lågast steilhet av dei bølgene som har frekvensnedskift. Desse er også dei testane med lågast bølgeperiode slik at dei er sårbare for perturbasjonar i tanken før bølgetoget kommer. Vi kan velge ut test 8007. Frå denne testen velger vi eit tidsdomene frå 315 sekund til 372.4 sekund tilsvarande 70 bølgelengder. Dette deler vi opp i $M = 128$ punkt. $N/2$ er satt til 16. I motsetning til dei andre simuleringane bruker vi likninger transformert til å følge gruppehastigheten. Det vil seie at vi set den transformerte parameteren ξ lik ein konstant. Vi kan finne energien til kvar Fourier komponent $e_{q,r}$ som vist i kapitlet om Fourier metode. Dette kan vi plote i eit tre-dimensjonalt energispekter. Figur 6.9 viser dette spekteret for dei eksperimentelle dataene ved 120 meter for test 8007 for tidsdomenet 440 til 497.4. Den opprinnelige bærefrekvensen $\omega_c = 7.66$ er nedskifta til $\omega_n = 6.68$. Figur 6.10 viser det simulerte resultat for samme x koordinat og tidsdomene. Her er energien fordelt over fleire Fourier komponenter, men det er tydelig at det lågaste, mest ustabile frekvensbåndet er det dominerande. Den opprinnelige bærefrekvensen er nedskifta til $\omega_n = 6.79$. Modellen gjev eit frekvensnedskift utan å ta med andre effekter enn dei ikkje-linjære.

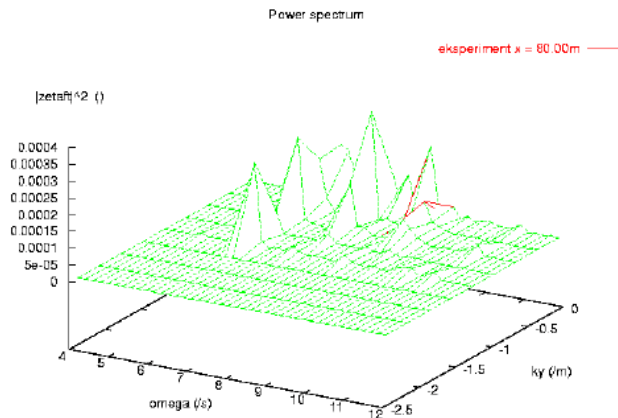
Ein annan test med samme bølgeperiode, men med større steilhet er test 8016. Figur 6.11 viser det tredimensjonale spekteret til denne testen ved 80 meter for tidsdomenet 350 til 407.4 sekund. Det kan vere verdt å merke seg at ein stor del av energien i frekvensnedskiftet er samla i ståande bølger på tvers av tanken. Tilsvarande resultat fant Trulsen og Dysthe (1997) i numerisk kjøring.



Figur 6.9: Tre dimensjonalt spekter for eksperimentelle data for test 8007.



Figur 6.10: Tre dimensjonalt spekter for simulerte data for test 8007.



Figur 6.11: Tre dimensjonalt spekter for eksperimentelle data for test 8016 ved 80 meter.

6.6 Konklusjon

Vi har funne at gyldighetsområdet til BMNLS modellen er minst $\eta_m = 5$ for bølger med steilhet lik havbølger. Vidare har vi funne at utviklinga av modene stemmer bra innanfor dette området. Perturbasjoner i tanken og målefeil kan ha forårsaka større feil i resultatata. Det ser ikkje ut for at ein kan prøve ut modellen for større η_m ved å gjere bølgetoget steilere, sidan steilheten endrar dei fysiske prosessane i bølgeevolusjonen.

I tillegg har vi funne at modellen gjev frekvensnedskift utan å ta med effekter som overflate krefter, viskøse krefter og bølge brytning. Sammen med analysen av dei høgare modene bekrefter dette resultatene til Trulsen og Dythe (1997) at tre-dimensjonale effekter kan vere med å forklare frekvensnedskift.

I eit vidare arbeid med sikte på å bruke modellen til determinitisk bølgevarsel hadde det vore ein fordel med eksperiment med låg steilhet for å komme nærmare steilheten til havbølger. Modellen ser ut til å stemme best for denne steilheten. Det hadde også vore interessant og sett på bølger i breiare tank

med større bølgelengde for å sjå på modulering på tvers for større bredde, for å få eit meir realistisk eksperiment. I eit vidare arbeid kunne også effekter som bølgebrytning og vind koblast inn i modellen. Med desse forbedringane og vidare utesting kunne ein kanskje prøvd ut modellen der dei verkelege bølgene er: på havet.

Tillegg A

Pertubasjons Analyse

Vi forsetter der vi slapp i kapittel 2.1. Ligning 2.3 kan bli brukt til å bli kvitt z-deriverte av A og A_n .

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x}, \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial y}, \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z}\right) + \left(ikA + \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, kA + \frac{\partial A}{\partial z}\right)e^{kz+i\theta} + (2ikA_2, 0, 2kA_2)e^{2(kz+i\theta)} + c.c. + O(\epsilon^3)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial z^2} + \left(2ikA\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. 2kA\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right)e^{kz+i\theta} + \left(2ik\frac{\partial A_2}{\partial x} + 2k\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)e^{2(kz+i\theta)} + \\ c.c. + O(\epsilon^4) &= 0\end{aligned}$$

Det følger av likninga ovanfor at:

$$\nabla^2\bar{\phi} = 0 \tag{A.1}$$

$$2ik\frac{\partial A}{\partial x} + 2k\frac{\partial A}{\partial z} + \nabla^2 A = 0 \tag{A.2}$$

$$i\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Likning A.2 kan bli brukt til iterasjon. Ledd lavare enn orden $O(\epsilon^3)$ gir $\frac{\partial A}{\partial z} = -i\frac{\partial A}{\partial x}$. Dette medfører

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-i\frac{\partial A}{\partial x} \right) = -i\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) = -i\frac{\partial}{\partial x} \left(-i\frac{\partial A}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

Når vi set dette inn i likninga igjen får vi

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2k}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + O(\epsilon^4) \quad (\text{A.4})$$

Vi kan no sette i gang med å regne ut leddene i 2.8 og 2.9.

$$\begin{aligned} L\phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g\frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = g\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + \left(-\omega_c^2 A - 2i\omega_c \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + g \left(\frac{\partial A}{\partial z} + kA \right) \right) \\ &e^{kz+i\theta} + \left(-4\omega_c^2 A_2 - 4i\omega_c \frac{\partial A_2}{\partial t} + g \left(\frac{\partial A_2}{\partial z} + 2kA_2 \right) \right) e^{2(kz+i\theta)} + \\ &(-9\omega_c^2 A_3 + 3gkA_3) e^{3(kz+i\theta)} + c.c. + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

Første ordens bidrag til ligning 2.8 vert då

$$(gk - \omega_c^2) A e^{i\theta} + c.c. = 0$$

Denne er oppfylt når $gk = \omega_c^2$. Dette er den lineære dispersjonsrelasjonen. Vi setter dette inn i likninga ovanfor og eliminerer dei z-deriverte ved å bruke A.4.

$$\begin{aligned} L\phi &= \frac{\omega_c^2}{k} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + \left(-2i\omega_c \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\omega_c^2}{k} \left(-i\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) \right) e^{kz+i\theta} + \\ &(-2\omega_c^2 A_2 - 4i\omega_c \frac{\partial A_2}{\partial t} - i\frac{\omega_c^2}{k} \frac{\partial A_2}{\partial x}) e^{2(kz+i\theta)} + (-6\omega_c^2 A_3) e^{3(kz+i\theta)} + c.c. + \\ &O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

Forsetter med dei andre ledda i 2.8.

$$L \frac{\partial \phi}{\partial z} = (-2ik\omega_c \frac{\partial A}{\partial t} - i\omega_c^2 \frac{\partial A}{\partial x}) e^{kz+i\theta} - 4k\omega_c^2 A_2 e^{2(kz+i\theta)} + c.c. + O(\epsilon^3)$$

$$\begin{aligned} \zeta L \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \left(4k\omega_c \operatorname{Im} \left(\frac{\partial A}{\partial t} B^* \right) + 2\omega_c^2 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial A}{\partial x} B^* \right) \right) + \\ &(-4k\omega_c^2 A_2 B^*) e^{i\theta} + \left(-i\omega_c^2 \frac{\partial A}{\partial x} B - 2ik\omega_c \frac{\partial A}{\partial t} B \right) e^{2i\theta} + \\ &(-4k\omega_c^2 A_2 B) e^{3i\theta} + c.c. + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$(\nabla \phi)^2 = \left(4k^2 |A|^2 + 8k \operatorname{Im} \left(A^* \frac{\partial A}{\partial x} \right) \right) e^{2kz} + (8k^2 A^* A_2) e^{3kz+i\theta} + c.c. + O(\epsilon^4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi)^2 \Big|_{z=0} = 4k^2 \frac{\partial}{\partial t} |A|^2 - 8ik^2 \omega_c A^* A_2 e^{i\theta} + c.c. + O(\epsilon^4)$$

$$\nabla (\nabla \phi)^2 = (0, 0, 8k^3 |A|^2) e^{2kz} + c.c. + O(\epsilon^3)$$

$$\nabla \phi \cdot \nabla (\nabla \phi)^2 \Big|_{z=0} = (4k^4 A |A|^2) e^{i\theta} + c.c. + O(\epsilon^4)$$

Vi forset så med ledda i frå likning 2.9.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + (-i\omega_c B + \frac{\partial B}{\partial t}) e^{i\theta} + (-2i\omega_c B_2 + \frac{\partial B_2}{\partial t}) e^{2i\theta} - 3i\omega_c B_3 e^{3i\theta} + c.c. + O(\epsilon^4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + \left(kA - i \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) e^{kz+i\theta} + \left(2kA_2 - i \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) e^{2(kz+i\theta)} + \\ & 3kA_3 e^{3(kz+i\theta)} + c.c. + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_h \phi &= \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \right) + \left(ikA + \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y} \right) e^{kz+i\theta} + \left(2ikA_2 + \frac{\partial A_2}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial y} \right) \\ & e^{2(kz+i\theta)} + (3ikA_3, 0) e^{3(kz+i\theta)} + c.c. + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta \nabla_h \phi &= \left(2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial A^*}{\partial x} B \right) + 2k \operatorname{Im}(A^* B), 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial A^*}{\partial y} B \right) \right) e^{2kz} + \\ & (ikA\bar{\zeta} + 2ikA_2 B^* e^{kz} - ikB_2 A^*, 0) e^{kz+i\theta} + \\ & \left(\left(\frac{\partial A}{\partial x} + ikA \right) B, \frac{\partial A}{\partial y} B \right) e^{kz+2i\theta} + (ikAB_2 + 2ikA_2 B e^{kz}) e^{kz+3i\theta} + \\ & c.c. + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_h \cdot (\zeta \nabla_h \phi)|_{z=0} &= 2k \operatorname{Im} \left(\frac{\partial A^*}{\partial x} B + A^* \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \\ & (-k^2 A\bar{\zeta} - 2k^2 A_2 B^* + k^2 B_2 A^*) e^{i\theta} + \left(3ik \frac{\partial A}{\partial x} B - 2k^2 AB + ikA \frac{\partial B}{\partial x} \right) e^{2i\theta} \\ & + (-3k^2 AB_2 - 6k^2 A_2 B) e^{3i\theta} + c.c. + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$\zeta^2 = 2|B|^2 + (2\bar{\zeta}B + 2B_2 B^*) e^{i\theta} + B^2 e^{2i\theta} + 2BB_2 e^{3i\theta} + c.c. + O(\epsilon^4)$$

$$\begin{aligned} \nabla_h \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \left(ik^2 A + 2k \frac{\partial A}{\partial x} - i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, k \frac{\partial A}{\partial y} - i \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \right) e^{i\theta} + \\ & \left(2k^2 \frac{\partial A_2}{\partial x} + 2ik^2 A_2 + 2k \frac{\partial A_2}{\partial x}, 2k \frac{A_2}{\partial y} \right) e^{2i\theta} + 9ik^2 A_3 e^{3i\theta} + \\ & c.c. + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\zeta^2\nabla_h\frac{\partial\phi}{\partial z} = \left(ik^2A|B|^2 - \frac{1}{2}ik^2A^*B^2, 0\right)e^{i\theta} + (3ik^2AB^2, 0)e^{3i\theta} + c.c. + O(\epsilon^4)$$

$$\nabla_h \cdot \left(\frac{1}{2}\zeta^2\nabla_h\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (-k^3A|B|^2 + \frac{1}{2}k^3A^*B^2)e^{i\theta} - k^3\frac{3}{2}AB^2e^{3i\theta} + c.c. + O(\epsilon^4)$$

No kan vi sette alle desse ledda inn i likning 2.8 og 2.9. Sidan A og A_n sammen med B og B_n er sakte varierende, medan $e^{n(kz+i\theta)}$ er raskt varierende kan vi skrive opp separate likningar for $n = 0, 1, 2, 3$ der n er den n-te harmoniske. Vi starter med likning 2.8.

n = 0:

L1

$$\frac{\omega_c^2}{k}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z} + 4k\omega_c\text{Im}\left(\frac{\partial A}{\partial t}B^*\right) + 2\omega_c^2\text{Im}\left(\frac{\partial A}{\partial x}B^*\right) + 4k^2\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 = 0$$

n = 1:

L2

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\omega_c^2}{k}\left(-i\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2k}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right) - 2i\omega_c\frac{\partial A}{\partial t} - 4k\omega_c^2A_2B^* - 8ik^2\omega_cA^*A_2 + 4k^4A|A|^2 = 0$$

n = 2:

L3

$$-2\omega_c^2A_2 - 4i\omega_c\frac{\partial A_2}{\partial t} - i\frac{\omega_c^2}{k}\frac{\partial A_2}{\partial x} - i\omega_c^2\frac{\partial A}{\partial x}B - 2ik\omega_c\frac{\partial A}{\partial t}B = 0$$

n = 3:

L4

$$-6\omega_c^2A_3 - 4k\omega_c^2A_2B = 0$$

For likning 2.9 får vi:

n = 0:

L5

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + 2k \operatorname{Im}\left(\frac{\partial A^*}{\partial x} B + A^* \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0$$

n = 1:

L6

$$-i\omega_c B + \frac{\partial B}{\partial t} - kA + i\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - k^2 A \bar{\zeta} - 2k^2 A_2 B^* + k^2 B_2 A^* - k^3 A |B|^2 + \frac{1}{2} k^3 A^* B^2 = 0$$

n = 2:

L7

$$-2i\omega_c B_2 + \frac{\partial B_2}{\partial t} + i\frac{\partial A_2}{\partial x} - 2kA_2 + 3ik\frac{\partial A}{\partial x} B - 2k^2 AB + ikA\frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

n = 3:

L8

$$-3i\omega_c B_3 - 3kA_3 - 3k^2 AB_2 - 6k^2 A_2 B - \frac{3}{2} k^3 AB^2 = 0$$

A.1 Første ordens resultat

Likning L6 gir første ordens resultat.

$$B = i\frac{k}{\omega_c} A$$

Det andre første ordens resultat var dispersjons likninga for djupt vatn
 $\omega_c^2 = gk$

A.2 Andre ordens resultat

Likning L2 gjev

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega_c}{2k} \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

Vi ser lett at dette sammen med første ordens resultat gjev

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\omega_c}{2k} \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

Legg merke til at $\frac{\omega_c}{2k}$ er gruppe farten for djupt vatn og dette medfører at envelope kurva vil forplante seg med gruppehastigheten.

Likning L6

$$B = \frac{ik}{\omega_c} A + \frac{1}{2\omega_c} \frac{\partial A}{\partial x}$$

Som ovanfor medfører dette sammen med første ordens resultat at

$$A = -\frac{i}{k} \omega_c B + \frac{\omega_c}{2k^2} \frac{\partial B}{\partial x}$$

L3 og L7 gjev

$$A_2 = 0$$

$$B_2 = -\frac{k^3}{\omega_c^2} A^2$$

$$B_2 = kB^2$$

A.3 Tredje ordens resultat

Vi kan no få NLS frå likning L2 når vi kombinerer denne med resultatet frå L3 og bruker andre ordens resultat.

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega_c}{2k} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{1}{8} \frac{\omega_c}{k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\omega_c}{k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2 \frac{k^4}{\omega_c} A |A|^2 = 0$$

Sammen med dei første og andre ordens resultatata vert NLS likninga med omsyn på B :

$$i \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\omega_c}{2k} \frac{\partial B}{\partial x} \right) - \frac{1}{8} \frac{\omega_c}{k^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{\omega_c}{k^2} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - 2k^2 \omega_c B |B|^2 = 0$$

Dei andre tredje ordens resultatata er :

Frå L1

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = -4 \frac{k^3}{\omega_c^2} \frac{\partial}{\partial t} |A|^2$$

Frå dette resultatet sammen med det andre ordens resultatet gjev:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = 2\omega_c \frac{\partial}{\partial x} |B|^2$$

Frå L3, L4 og L5 følgjer

$$A_2 = 0$$

$$A_3 = 0$$

$$\bar{\zeta} = O(\epsilon^3)$$

Frå L6 får vi:

$$B = i \frac{k}{\omega_c} A + \frac{1}{2\omega_c} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{8} i \frac{1}{k\omega_c} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{2} i \frac{k^5}{\omega_c^3} A |A|^2$$

$$A = -i \frac{\omega_c}{k} B + \frac{1}{2} \frac{\omega_c}{k^2} \frac{\partial B}{\partial x} + i \frac{3}{8} \frac{\omega_c}{k^3} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - i \frac{1}{4} \frac{\omega_c}{k^3} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + i \frac{1}{2} k \omega_c B |B|^2$$

L7 gjev:

$$B_2 = -\frac{k^3}{\omega_c^2} A^2 + 2i \frac{k^2}{\omega_c^2} A \frac{\partial A}{\partial x}$$

Sammen med første og andre ordens resultat får vi:

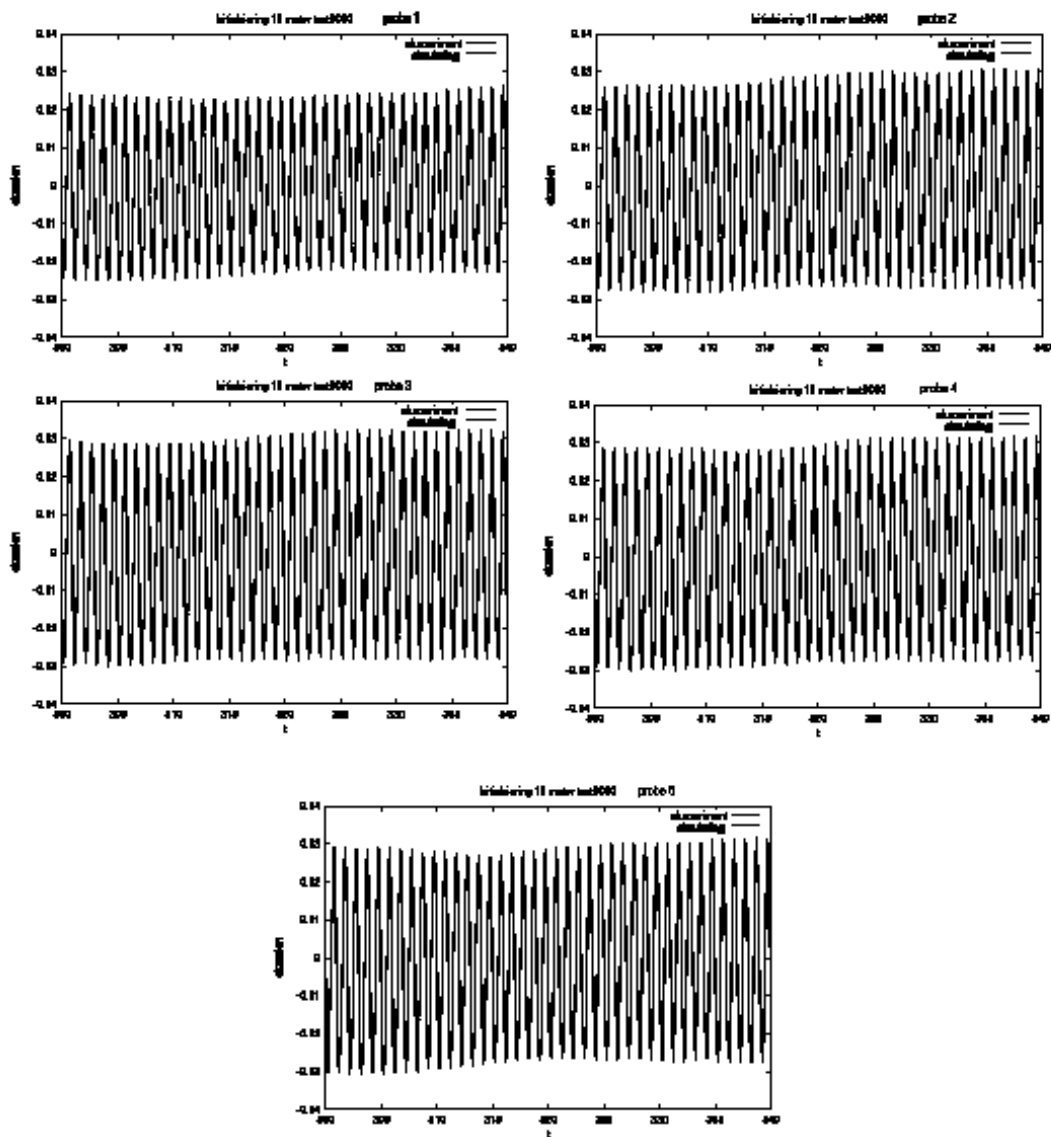
$$B_2 = kB^2 - iB \frac{\partial B}{\partial x}$$

L8 gjev:

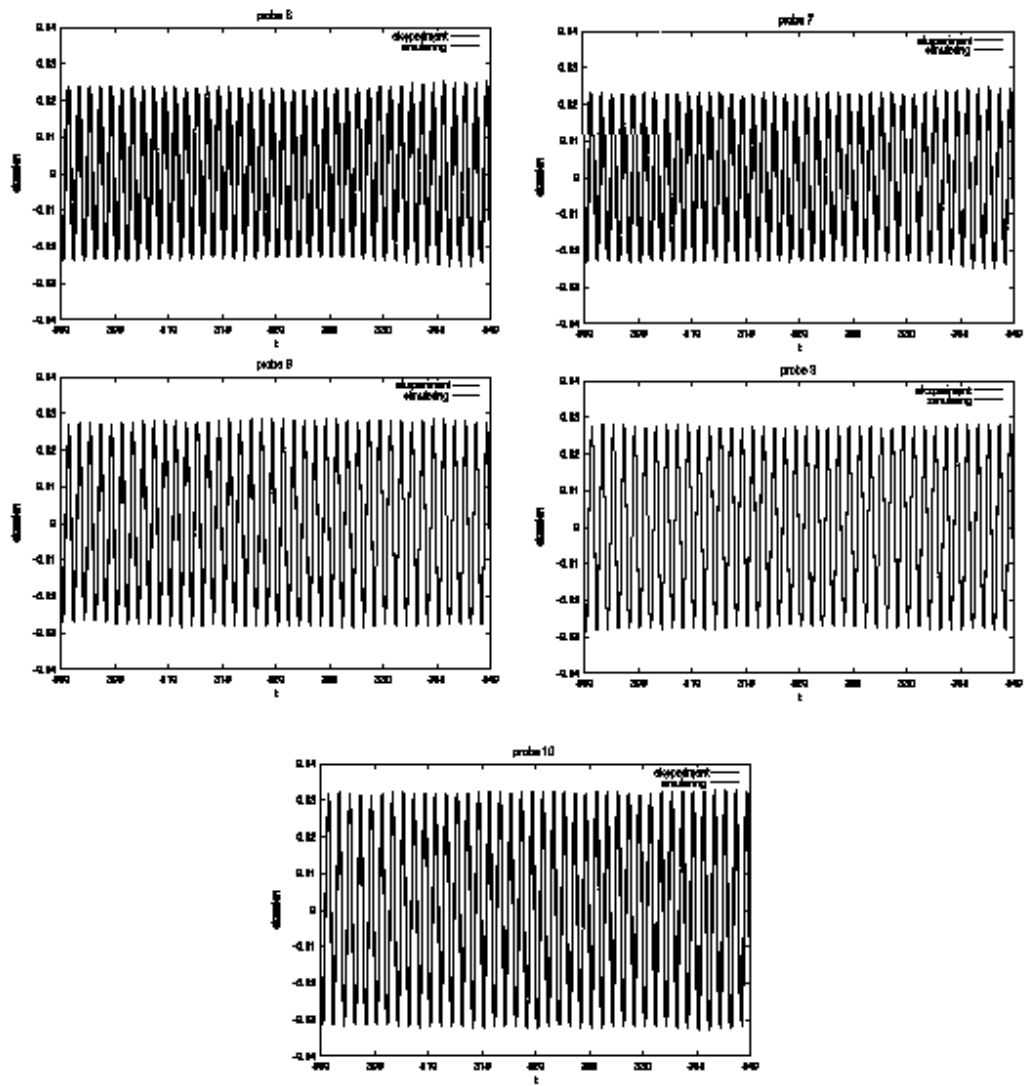
$$B_3 = -\frac{3}{2} i \frac{k^5}{\omega_c^3}$$

Tillegg B

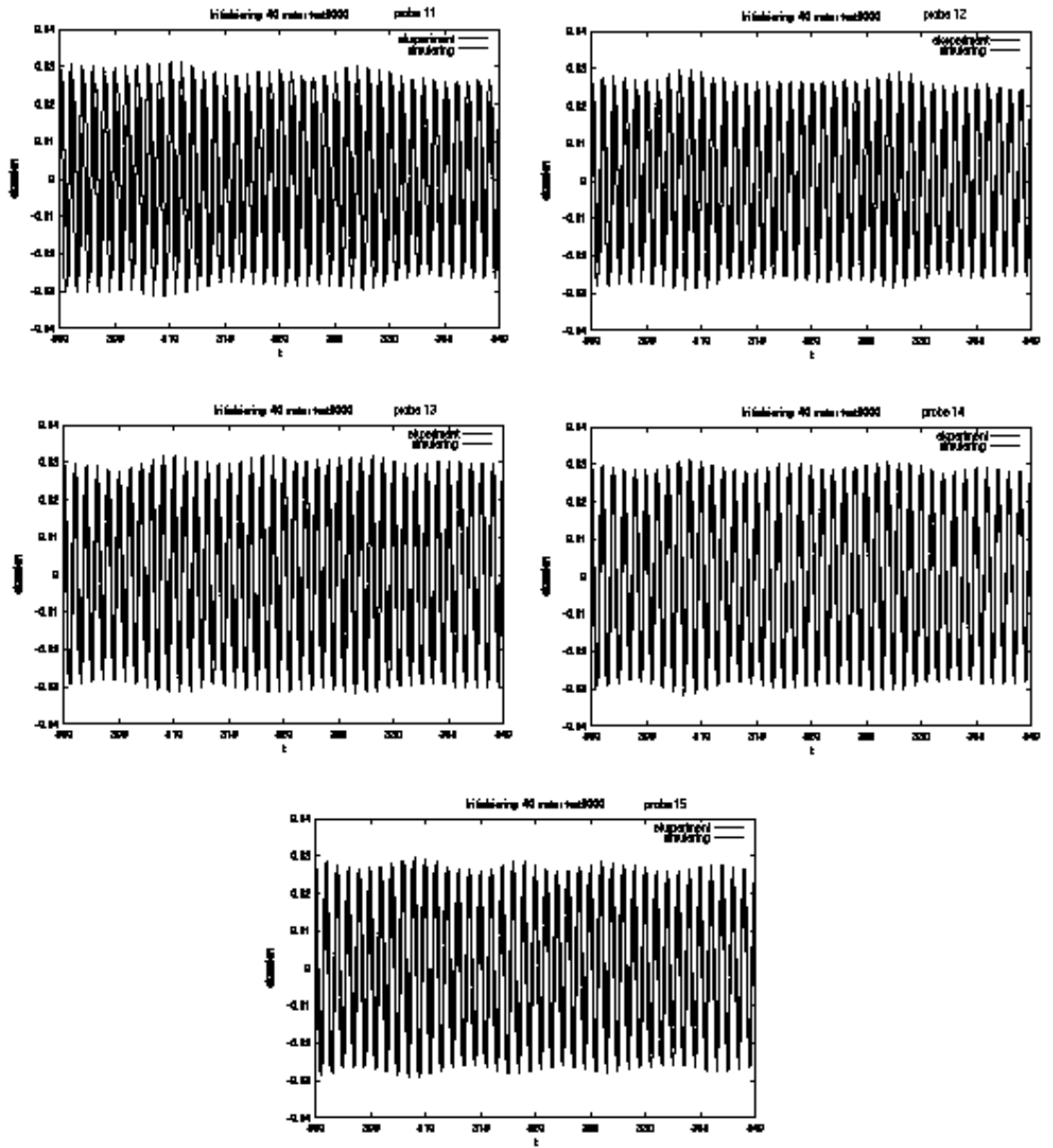
Resultat simulering for tre dimensjoner



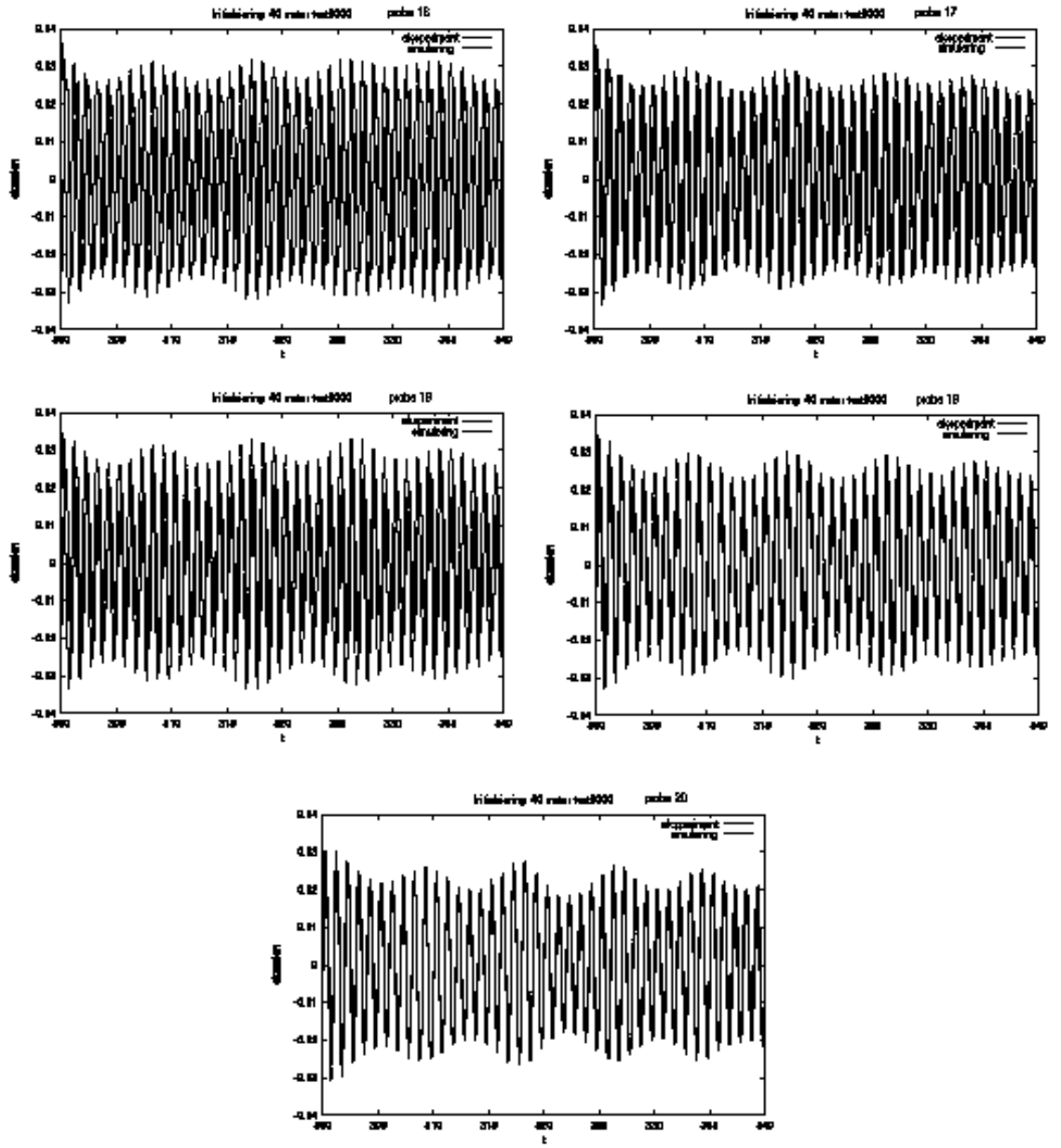
Figur B.1: Initialisering ved 10 meter.



Figur B.2: Stasjon ved 40 meter.



Figur B.3: Stasjon ved 80 meter.



Figur B.4: Stasjon ved 120 meter.

Tillegg C

Programkode

Dette programmet initialiseringa av bølgetoget. Det er ein del av det større simulerings programmet. Den bruker derfor ein del rutiner og variabler deklarerert der. Programmet vert kompilert i C.

```
/* File written by Lars Inge Enstad. */
#include nls.h"
void ic_file_5 (int number_of_arguments, menu_function_argument arguments[])
/* input format: char *filename */ {
typedef double doublearray[6];
doublearray *B, *zn;
char jump[10], s[20], text[14], test[6];
int scans, j, skip, m0, sta, number, ignore;
int i, ix, iy, n, nr, k, t, f,teller;
float time, diff, weight;
double increment = 0.05 /*Sampling interval*/, Matr[5][5];
double d, temp, *zeta = 0, sum;
double_complex *zetaft = 0;
FILE *file, *outfile;
for (iy = -KY;iy <= KY;iy++)
for (ix = -KX;ix <= KX;ix++)
i = AINDEX(ix, iy); Aft[i] = 0;
if (number_of_arguments != 6) {
puts ("ic File_5 requires 6 arguments");
exit (1);
```

```

}
if (KY < 4 ){
    printf("KY must be larger or equal to 4 it is %i NY is %i\n",KY,NY);
    exit(1);
}
file = open_file (arguments[0].s, 0, "", "r");
strcpy(text,arguments[0].s);
for (j = 0;j < 5;j++)
    test[j] = text[j+4];
test[5] = 0;
k = sscanf(test, "%d", &number);
if (k == 0){
    puts("File_5 is not implemented for this type of file");
    exit(0);
}
if (number == 8013)
    ignore = 73;
else if(number >= 8000 && number < 8018)
    ignore = 74;
else if(number >= 8018 && number < 8026)
    ignore = 114;
else if(number == 8026)
    ignore = 115;
else{
    puts("File_5 is not implemented for this type of file");
    exit(0);
}
for (j = 1;j < ignore; j++)
    fscanf(file,"%s",jump);
time = arguments[3].r;
sta = arguments[4].i;
weight = arguments[5].r;
if (sta < 1 || sta > 4){
    puts("The number of the station must be 1, 2, 3, or 4");
    exit(1);
}
x_start += time;
n = arguments[1].i;

```

```

scans = arguments[1].i;
skip = (int) ((time+0.1*increment)/increment);
printf ("scans = %d, skip = %d\n", scans, skip);
B = (doublearray *) malloc (n*sizeof (doublearray));
zn = (doublearray *) malloc (n*sizeof (doublearray));
for (i = 0;i < skip*21;i++)
    fscanf(file,"%s",s);
teller = 0;
for (i = 0;i < scans ;i++){
    fscanf(file,"%le",&B[i][0]);
    for (j = 0; j < 5*(sta-1); j++)
        fscanf(file,"%s",s);
    fscanf(file,"%le",&B[i][1]);
    fscanf(file,"%le",&B[i][2]);
    fscanf(file,"%le",&B[i][3]);
    fscanf(file,"%le",&B[i][4]);
    fscanf(file,"%le",&B[i][5]);
    for (j = 0;j < 15-(sta-1)*5;j++)
        fscanf(file,"%s",s);
}
increment = B[1][0] - B[0][0];
if (feof (file)) {
    puts ("read past end of file");
    exit (1);
}
fclose(file);
outfile = fopen ("out.dat", "w");
for (i = 0;i < scans ; i++)
    fprintf (outfile, "%g %g\n", B[i][0], B[i][1]);
fclose(outfile);
if (sta == 3)
    for (j = 0;j < scans ;j++)
        B[j][5] = 1.05*B[j][5];
if (sta == 4)
    for (j = 0; j < scans; j++)
        B[j][5] = 0.8*B[j][5];

```

```

Matr[0][0] = 0.33333333; Matr[1][0] = 0; Matr[2][0] = 0.33333333; Matr[3][0] = 0; Matr[4][0] = 0.33333333; Matr[0][1] = 0.57735027; Matr[1][1] = 0; Matr[2][1] = 0; Matr[3][1]=0; Matr[4][1] = -0.57735027; Matr[0][2] = 0.5; Matr[1][2] = -0.5; Matr[2][2] = 0; Matr[3][2] =-0.5; Matr[4][2] = 0.5; Matr[0][3] = 0.28867513; Matr[1][3] = -0.5; Matr[2][3] = 0; Matr[3][3] = 0.5; Matr[4][3] = -0.28867513; Matr[0][4] = 0.16666667; Matr[1][4] = -0.5; Matr[2][4] = 0.66666667; Matr[3][4] = -0.5; Matr[4][4] = 0.16666667;

```

```

temp = 0;
for(i = 0; i < n; i++){
  for(j = 0; j < 5; j++){
    for(k = 0; k < 5; k++){
      temp += B[i][k+1]*Matr[k][j]; zn[i][j] = temp; temp = 0;
    }
  }
}
for (t = 0; t < 5; t++){
  free(zeta);
  free(zetaft);
  d = arguments[2].r;
  nr = n/2+1;
  zeta = (double *) malloc (n*sizeof (double));
  zetaft = (double_complex *) malloc (nr*sizeof (double_complex));
  for (j = 0; j < n; j++)
    zeta[j] = zn[n-j-1][t];
  rcdft (zeta, zetaft, n, NEG_SIGNS[0]);
  sum = 0;
  for (i = 0; i < nr; i++){
    zetaft[i] /= n;
    sum += norm(zetaft[i]);
  }
  diff = (rint)(1/dkx)-1/dkx;
  if (diff != 0){
    printf("LongitudinalWaves must be an integer\n");
    exit(0);
  }
  if (fabs (omega_c - (2*M_PI)/(d)) > 0.001) {
    printf ("omega_c = %g must correspond to the waveperiod = %f\n",
omega_c, d);

```

```

        exit (1);
    }
    if (rint(1/dkx) != rint(increment*scans/d)){
        printf("You must initialize with a number of waves equal to number of
LongitudinalWaves\n");
        printf("Number of waves is %f and LongitudinalWaves is %f\n",increment*scans/d,1/dkx);
        exit(0);
    }
    m0 = (int) (rint(1/dkx));
    if (t == 0){
        if (norm (zetaaft[0]) > 0.1*sum) {
            printf ("large DC component in input (%.2f/%.2f = %.2f)\n", norm
(zetaaft[0]), sum, norm (zetaaft[0])/sum);
            exit (1);
        }
    }
    f = -t;
    for (k = 1; k <= 2; k++){
        for (ix = -KX; ix <= KX; ix++) {
            i = AINDEX (ix, f);
            if (m0 + ix < nr && m0 + ix >= 0){
                if (f == 0){
                    if (ix == 0)
                        Aft[i] = 2*k_c*zetaaft[m0 + ix];
                    else
                        Aft[i] = 2*weight*k_c*zetaaft[m0 + ix];
                }
                else
                    Aft[i] = weight*k_c*zetaaft[m0 + ix];
            }
            else
                Aft[i] = 0; } f = t;
        }
    }
    free (zeta);
    free (zetaaft);
    cfftn (Aft, A, SIZES, HDIM, SIGNS);
}

```

Dette programmet vert brukt til å finne effekten ved dei forskjellige stasjonane nedover i tanken for eksperimentelle data. Programmet vert kompilert i matlab 6.0.

```
function[] = fun
filt = 5;
fra = input('Lese fra ');
til = input('lese til ');
start = fra*21/0.05;
sca = (til-fra)/0.05;
%Antall scans:
a = sca*21;

%pner fil og leser.
fid = fopen('test8023.asc','r');
%Den neste linjen er med for "skippe" teksten i headeren til eksperiment
fila.
%For tester < 8013 er den 73. %For 8013 er den 74.
%For 8013< >8018 er den 73. %For 8017< >8026 er den 113.
%For 8026 er den 114.
fscanf(fid,'%s',113);
fscanf(fid,'%f',start);
Y = fscanf(fid,'%f',a);
fclose(fid);
%Legger data fra frste linje inn i matrise za. Frste rad
%gir data fra frste probe, andre rad andre probe osv.
%Tilsvarende skjer i de andre matrisene.
za = [];
zb = [];
zc = [];
zd = [];

for j = 2:6
    za = [ za Y(j:21:a)];
end
%Filtrering.
zaf = [];
for k = 1:5
```



```

temp = ifft(za(:,k));
for j = 1:filt
    temp(j) = 0;
    temp(sca+1-j) = 0;
end mid = fft(temp);
zaf = [zaf mid];
end
za = [];
za = zaf;
n = length(za(:,3));

for j = 7:11
    zb = [ zb Y(j:21:a)];
end

%filtrering
zbf = [];
for k = 1:5
    temp = ifft(zb(:,k));
    for j = 1:filt
        temp(j) = 0;
        temp(sca+1-j) = 0;
    end
    mid = fft(temp);
    zbf = [zbf mid];
end
zb = [];
zb = zbf;
for j = 12:16
    zc = [zc Y(j:21:a)];
end

%Justerer opp 5 prosent p probe nummer 15.
for j = 1:n
    zc(j,5) = zc(j,5)*1.05;
end

%filtrering

```

```

zcf = [];
for k = 1:5
    temp = ifft(zc(:,k));
    for j = 1:filt
        temp(j) = 0;
        temp(sca+1-j) = 0;
    end mid = fft(temp);
    zcf = [zcf mid];
end
zc = [];
zc = zcf;
for j = 17:21
    zd = [ zd Y(j:21:a)];
end
%Justerer ned 20 prosent på probe nummer 20.
for j = 1:n
    zd(j,5) = zd(j,5)*0.8;
end

%filtrering
zdf = [];
for k = 1:5
    temp = ifft(zd(:,k));
    for j = 1:filt
        temp(j) = 0;
        temp(sca+1-j) = 0;
    end
    mid = fft(temp);
    zdf = [zdf mid];
end
zd = [];
zd = zdf;

%Leser inn matrise.
for j = 1:5
    for p = 1:5
        B(j,p) = cos((j-1)*pi/6*(p));
    end
end

```

```

end
%Inverterer denne for finne Fourier koefisientene.
D = inv(B)

%Finner dei fem laveste Fourier modene.
%Lagrer disse i matrisen Va for 10m, Vb for 40m osv. Desse matrisene
har dimensjon 5 x n.
for k = 1:n
  for j = 1:5
    z(j) = za(k,j);
  end
  zn = z*D;
  for t = 1:5
    Va(t,k) = zn(t);
  end
end

for k = 1:n
  for j = 1:5
    z(j) = zb(k,j);
  end
  zn = z*D;
  for t = 1:5
    Vb(t,k) = zn(t);
  end
end

for k = 1:n
  for j = 1:5
    z(j) = zc(k,j);
  end
  zn = z*D;
  for t = 1:5
    Vc(t,k) = zn(t);
  end
end

for k = 1:n

```

```

for j = 1:5
    z(j) = zd(k,j);
end
zn = z*D;
for t = 1:5
    Vd(t,k) = zn(t);
end
end

%Finner Fourier koefisientene til dei ulike frekvensene
%ved bruke invers fast Fourier transform algoritme.
Vas=[];
Vbs=[];
Vcs=[];
Vds=[];

for k = 1:5
    Temp = Va(k,:);
    mid = ifft(Temp);
    Vas = [Vas ;mid];
end
for k = 1:5
    Temp = Vb(k,:);
    mid = ifft(Temp);
    Vbs = [Vbs ;mid];
end

for k = 1:5
    Temp = Vc(k,:);
    mid = ifft(Temp);
    Vcs = [Vcs ;mid];
end

for k = 1:5
    Temp = Vd(k,:);
    mid = ifft(Temp);
    Vds = [Vds ;mid];
end

```

```

%Finner kvadratet av absolutt verdien til utslagene.
K = [];
Ma = [];
Mb = [];
Mc = [];
Md = [];
for j = 1:5
    for k = 1:n
        K = [K (abs(Vas(j,k)))^2];
    end Ma = [Ma ; K];
    K = [];
end

for j = 1:5
    for k = 1:n
        K = [K (abs(Vbs(j,k)))^2];
    end Mb = [Mb ; K];
    K = [];
end

for j = 1:5
    for k = 1:n
        K = [K (abs(Vcs(j,k)))^2];
    end
    Mc = [Mc ; K];
    K = [];
end

for j = 1:5
    for k = 1:n
        K = [K (abs(Vds(j,k)))^2];
    end
    Md = [Md ; K];
    K = [];
end

%Finner energien til dei ulike nodene nedover i tanken
%ved ta summen av kvadrata til utslagene. Ganger med

```

```

%faktoren 0.5 siden blgene p tvers er stande blger.
T = input('Blgeperiode?? ');
Cg = T*9.81/4/pi;

for q = 1:4
    kxq(q) = sqrt((16*pi^4/T^4-(q*pi/10.5)^2)/9.81^2);
end

%Beregner gruppehastighet til modene.
for q = 1:4
    Cgx(q) = sqrt(9.81)/2*kxq(q)/((kxq(q)^2 + ((q)*pi/10.5)^2)^(3/4))
end

Ea = [];
Eb = [];
Ec = [];
Ed = [];

for k = 1:5
    l = sum(Ma(k,:));
    Ea = [Ea l];
end
Eam = Cg*Ea(1);

for k = 2:5
    l = Cgx(k-1)*0.5*Ea(k);
    Eam = [Eam l]
end

for k = 1:5
    l = sum(Mb(k,:));
    Eb = [Eb l];
end
Ebm = Cg*Eb(1);

for k = 2:5
    l = Cgx(k-1)*0.5*Eb(k);
    Ebm = [Ebm l];
end

```

```

for k = 1:5
    l = sum(Mc(k,:));
    Ec = [Ec l];
end
Ecm = Cg*Ec(1);

for k = 2:5
    l = Cgx(k-1)*0.5*Ec(k);
    Ecm = [Ecm l];
end

for k = 1:5
    l = sum(Md(k,:));
    Ed = [Ed l];
end
Edm = Cg*Ed(1);

for k = 2:5
    l = Cgx(k-1)*0.5*Ed(k);
    Edm = [Edm l];
end

%Finner total energien nedover i tanken.
g = sum(Eam)
h = sum(Ebm)
i = sum(Ecm)
j = sum(Edm)

figure
plot(10,Ecm(1),'kx',10,Ecm(2),'ko',10,Ecm(3),'k*',10,Ecm(4),'k+',10,Ecm(5),'kp'),hold
on
plot(40,Ecm(1),'kx',40,Ecm(2),'ko',40,Ecm(3),'k*',40,Ecm(4),'k+',40,Ecm(5),'kp'),hold
on
plot(80,Ecm(1),'kx',80,Ecm(2),'ko',80,Ecm(3),'k*',80,Ecm(4),'k+',80,Ecm(5),'kp'),hold
on
plot(120,Edm(1),'kx',120,Edm(2),'ko',120,Edm(3),'k*',120,Edm(4),'k+',120,Edm(5),'kp'),
hold on
plot(40,h,'k<',80,i,'k<',120,j,'k<'), hold on %80,i+i/10,'kx'), hold on

```

Bibliografi

- [1] Benjamin, T. B. & Feir, J. E. "The disintegration of wave trains in deep water. Part 1. Theory," *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967)
- [2] Dysthe, K. B. "Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **369**, 105 (1979).
- [3] Lake, B. M., Yuen, H. C., Rungaldier, H. & Ferguson, E. "Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train," *J. Fluid Mech.* **83**, 49 (1977).
- [4] Lo, E. Y. & Mei, C. C. "A numerical study of water-wave modulation based on a higher-order nonlinear Schrödinger equation," *J. Fluid Mech.* **150**, 395 (1985).
- [5] Lo, E. Y. & Mei, C. C. "Slow evolution of nonlinear deep water waves in two horizontal directions: A numerical study," *Wave Motion* **9**, 245 (1987).
- [6] Martin, D. U. & Yuen, H. C. "Quasi-recurring energy leakage in the two-space-dimensional nonlinear Schrödinger equation" *Phys. Fluids* **23**, 881 (1980).
- [7] Mclean, J. W. "Instabilities of finite-amplitude water waves," *J. Fluid Mech.* **114**, 315 (1981).
- [8] Melville W. K. "The instability and breaking of deep water-waves," *J. Fluid Mech.* **115**, 165 (1982).
- [9] Stansberg, C. T. "Laboratory verification of nonlinear Schrödinger model," *Eksperimentell Data Rapport Marintek* (1999).

- [10] Su, M. Y., Bergin, M., Marler, P. & Myrick, R. "Experiment on nonlinear instabilities and evolution of steep gravity-wave trains," *J. Fluid Mech.* **124**, 45 (1982)
- [11] Tappert, F. "Numerical solutions of the Kort-de Vries equations and its generalization by the split-step Fourier method," *Lect. Appl. Math* **15**, 215 (1974).
- [12] Trulsen, K. "Frequency down-shift trough self modulation and breaking, a numerical study," *Hovedoppgave ved Universitet i Tromsø* (1989).
- [13] Trulsen, K. & Dysthe, K. B. "A modified nonlinear Schrödinger equation for broader bandwidth gravity waves on deep water," *Wave Motion* **24**, 281 (1996).
- [14] Trulsen, K. & Dysthe, K. B. "Frequency downshift in three-dimensional wave trains in a deep basin," *J. Fluid Mech.* **352**, 359 (1997).
- [15] Trulsen, K., Gudmestad, O. T. & Velarde M. G. "The nonlinear Schrödinger method for water wave kinematics on finite depth," *Wave Motion* **33**, 379 (2001).
- [16] Trulsen, K., Kliakhandler, I., Dysthe, K. B. & Velarde, M. G. "On weakly nonlinear modulation of waves on deep water," *Phys. Fluids* **12**, 2432 (2000).
- [17] Trulsen, K. & Stansberg, C. T. "Spatial evolution of water surface waves: numerical simulation and experiment of bichromatic waves," *Proceedings of ISOPE 2001* **3**, 71 (2001)
- [18] Trulsen, K., Stansberg, C. T. & Velarde, M. G. "Laboratory evidence of three dimensional frequency downshift of waves in a long tank," *Phys. Fluids* **11**, 235 (1999).
- [19] Yuen, H. C. & Lake, B. M. "Nonlinear deep-water waves: Theory and experiment," *Phys. Fluids* **18**, 956 (1975)
- [20] Zakharov, V. E. "Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).