Videregåendeelevers strategier i brøkoppgaver

Hvilke deler av brøkbegrepet er synlige i strategiene?

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Helen Bringeland

Matematisk institutt, Universitet i Bergen,

Veileder: Trond Stølen Gustavsen

3. Desember 2018

Forord

Å levere denne masteravhandlingen betyr at en femårig lektorutdanning ved UiB er ved veis ende. Nå venter arbeidslivet og muligheten til å utprøve all den kunnskapen jeg har fått gjennom utdanningen.

Arbeidet med denne oppgaven har vært krevende, men også svært givende. Jeg har virkelig satt pris på muligheten til å fordype meg i noe som er så relevant for læreryrket. Underveis har jeg fått støtte og hjelp fra mange kanter. Spesielt vil jeg takke veilederen min Trond Stølen Gustavsen for konstruktive tilbakemeldinger, lånte bøker, nyttig veiledning og inspirerende diskusjoner underveis i prosjektet. Det har vært lærerikt og hjulpet meg til å finne ny motivasjon til å fortsette arbeidet.

En stor takk til Jorunn Antun for inspirerende samtaler, god støtte og hjelp ved datainnsamling. Uten henne hadde dette arbeidet kanskje sett veldig annerledes ut. Takk til elevene som deltok i kartleggingsprøven. Takk til Desirée Elise Baraas Myhrer for korrekturlesing og oppmuntrende ord underveis i prosjektet. Takk til Trine Storheim for mange inspirerende samtaler og hjelp til å sortere tanker.

Og sist, men ikke minst: En stor takk til min mann, Lars, som gjennom hele prosessen har vært min klippe og hjulpet meg til å koble av når jeg har trengt det som mest. Takk for at du alltid er tålmodig med meg og for at du gir meg en liten dytt når det trengs.

Haugesund, 2018

Helen Bringeland

Sammendrag

Behr, Lesh, Post & Silver (1983) mener at rasjonale tall er blant de mest komplekse og viktigste matematiske idéene barn i grunnskolen skal lære og jeg ønsket derfor å se nærmere på brøkkunnskapene til elever etter endt grunnskole. I denne oppgaven har jeg undersøkt hvilke oppgavespesifikke strategier elever har i et sett med brøkoppgaver og hvilke deler av brøkbegrepet som er synlige i dem. Jeg har også fått muligheten til å sammenligne 1P- og 1T-elevers strategier og de ulike delene av brøk som synliggjøres i dem. Oppgaven bygger på Behr et al. (1983) sin modell med de fem delene av brøkbegrepet: Del-hele, måling, operator, kvotient og forhold.

42 elever har gjennomført en kartleggingsprøve med brøkoppgaver fra nasjonale prøver. Elevene hadde akkurat startet på videregående skole, etter å ha gått på ulike ungdomsskoler spredt over hele landet. En slik kartleggingsprøve er i utgangspunktet kvantitativ og gir mulighet til å sammenligne elevenes besvarelser. Etter gjennomlesing av elevbesvarelsene ble strategiene sortert, navngitt og beskrevet. Hver oppgave ga meg 3-5 ulike strategier som jeg deretter kunne analysere kvalitativt og se hvilke deler av brøkbegrepet som er synlige i elevenes tenkning.

Undersøkelsen min viser at elever benytter ulike oppgavespesifikke strategier i møte med brøkoppgaver. Likevel er det ofte en eller to strategier som majoriteten av elevene velger å bruke. Dette er blitt presentert i en profil med oversikt over majoritetens strategier og brøkdelene i dem. I mange strategier blir flere deler av brøkbegrepet synlig, noe som viser at det ikke nødvendigvis går an å skille de fem brøkdelene fra hverandre i strategiene. Alle deler av brøkbegrepet er representert i elevstrategiene, noen oftere enn andre. Det er store likheter blant 1T- og 1P-elevers strategier og brøkdelene i dem, men med noen antydninger til at 1P-elever oftere benytter såkalte backup-strategier.

Innholdsfortegnelse

Tabelloversikt

Figuroversikt

1 INNLEDNING

1.1 Bakgrunn for tema

Regning med brøk og desimaltall byr på mange utfordringer for mange barn og voksne (Siegler & Lortie-Forgues, 2017). Dette er et stort problem fordi elevers brøkkunnskap i femte klasse forutsier deres generelle matematiske kunnskaper og algebraferdigheter i tiende klasse (ibid.). Behr, Lesh, Post & Silver (1983) mener at rasjonale tall er blant de mest komplekse og viktigste matematiske idéene barn i grunnskolen skal lære. Brøk, sammen med forhold og proporsjonalitet, er også omtalt som et av de mest kognitivt krevende, matematisk komplekse og utfordrende emnene å undervise i skolematematikken (Lamon, 2007).

Jeg har alltid vært spesielt interessert i matematikk i skolen og et av de spørsmålene jeg ofte stiller meg er: Hvorfor er det så mange mennesker som synes matematikk er krevende? Jeg har ikke tatt tak i dette store spørsmålet, men etter å ha lært litt mer om brøk og brøkens kompleksitet har jeg ønsket å undersøke brøkkunnskaper hos elever. Er det brøkkunnskap eller mangel på det som skaper problemer for elevene? Hvilke brøkkunnskaper kommer til syne i strategiene til elevene? Dette ønsket jeg å undersøke nærmere i denne masteravhandlingen.

1.2 Formål med oppgaven

Målet med denne oppgaven er å få større innsikt i hvilke strategier elevene har i brøkoppgaver etter endt grunnskole og en oversikt over hvilke deler av brøkbegrepet som er mest synlige i strategiene. Dette er hovedmålet, men jeg håper også at prosjektet kan bevisstgjøre andre på kompleksiteten til brøk og hvorfor elever kanskje sliter med dette.

Jeg er nysgjerrig på elevenes brøkkunnskaper. Benytter mange seg bare av en del av brøkbegrepet? Lamon (2012) mener del-hele er den delen av brøk som er blitt mest fokusert på i undervisningen og for mange har brøk og del-hele nesten blitt synonymt. Gray og Ånestad (2016) påstår også at det er den delen av brøkbegrepet som elever oftest henter strategier fra når de skal løse brøkoppgaver. Stemmer dette eller benytter elever seg av flere deler av brøkbegrepet (underkonstrukter) i strategiene sine? Ensidig fokus på del-hele kan gi mangelfull forståelse blant elever (Bjerke, Eriksen, Rodal & Ånestad, 2013). Med de påstandene fra forskerne forventer jeg at del-hele skal være det underkonstruktet som oftest er synlig i strategiene til elevene.

1.3 Forskningsspørsmål

I arbeidet med denne oppgaven har følgende forskningsspørsmål vært utgangspunktet mitt:

- Hvilke strategier velger videregåendeelever å bruke i møte med brøkoppgaver?
- Hvilke underkonstrukter kommer til syne i strategiene til elevene?
- Er det noe forskjell på 1P- og 1T-elevenes strategier og underkonstrukter?

Jeg har altså fokusert på de oppgavespesifikke strategiene til elevene. Hvilke løsningsstrategier velger de å bruke når de skal løse gitte brøkoppgaver? Hvilke underkonstrukter eller deler av brøkbegrepet er fremtredende eller synlige i elevenes strategivalg? Ikke alle strategier faller naturlig inn i en del av brøkbegrepet. I de tilfellene har jeg diskutert de ulike delene som kommer til syne eller eventuelt hvorfor det er vanskelig å fastslå noe fremtredende underkonstrukt.

1.4 Oppbygging av oppgaven

I denne masteravhandlingen har jeg seks kapitler, i tillegg til litteraturliste og vedlegg.
I innledningskapittelet har jeg blant annet forklart hvorfor jeg ønsker å gå dypere inn i strategiene til elever i brøkoppgaver. Jeg har også presentert problemstillingen min og formålet med denne masteravhandlingen.

I kapittel 2 definerer jeg sentrale begrep som brøk, underkonstrukt og strategi og presenterer relevant teori for problemstillingen, analysen og drøftingen av resultatene. Tredje kapittel er metodekapittelet hvor jeg begrunner valg av forskningsmetode, beskriver utvalget i studie, hvordan kartleggingsprøven ble planlagt og gjennomført og hvordan jeg analyserte datamaterialet fra kartleggingsprøven. Til slutt skriver jeg litt om reliabilitet og validitet i undersøkelsen, samt etiske refleksjoner knyttet til forskningen.

Som det fjerde kapittelet kommer analysekapittelet hvor resultatene blir presentert og analysert. Disse analyseresultatene drøftes opp mot presentert teori i kapittel 5 og det blir tydeligere hvilke funn som kommer frem fra undersøkelsen. Til slutt kommer et eget kapittel som oppsummerer og avslutter forskningsprosjektet, der også forslag til videre forskning presenteres.

2 TEORI

Problemstillingen min ble valgt blant annet fordi jeg ønsket å forske på både brøk og strategier. Noe av den teoretiske referanserammen rundt strategier er fra Ostad (1996; 1997; 2010), som omhandler addisjonsstrategier på barneskolen og ikke brøkstrategier på høyere klassetrinn. Det er også noen artikler som tar for seg strategier innen brøksammenligning (Fazio, DeWolf & Siegler, 2016; Sidney, Thalluri, Buerke & Thompson, 2018; Rinne, Ye & Jordan, 2017), men Gray og Ånestad (2016) er de eneste som kobler strategibruk til underkonstruktene i Behr et al. sin modell (avsnitt 2.2.3). Jeg ønsker å forske på hvilke deler av brøkbegrepet eller underkonstrukter som er prevalente i de oppgavespesifikke strategiene til elevene og kanskje bygge litt videre på Gray og Ånestad (2016) sitt arbeid. Selv om strategibegrepet er viktig i problemstillingen min er utgangspunktet mitt brøk og brøkoppgaver. Brøkens oppbygning er kompleks og hovedvekten av teorien er derfor knyttet til den. Også i analysen av elevenes strategier er oppbygningen viktig for å finne ut hvilke deler av brøkbegrepet som kommer til syne i strategiene. Viktige begreper og teori om strategier blir også presentert.

Denne masteren er gjennomført med et konstruktivistisk læringssyn til grunn. Derfor starter teorikapittelet med å beskrive dette læringssynet før vi går videre til brøk og strategier.

2.1 Konstruktivistisk læringssyn

Ulike læringsteorier tar for seg forskjellige deler av læringsprosessen og disse perspektivene på læring har hatt innflytelse på undervisning og læring i skolen gjennom mange år (Säljö, 2013). Et eksempel er nevrovitenskapelige perspektiver på læring, som blant annet er blitt anvendt på problemer som angår lese- og skrivevansker, lærevansker i matematikk og lærevansker hos barn med nevropsykiatriske diagnoser (Säljö, 2013). Behaviorismen, som handler om at læring blir styrt utenfra og læreren er den som skal formidle kunnskap til elever (ibid.), er et annet eksempel. Et tredje er de kognitive læringsteoriene, med hovedfokus på de indre tankeprosessene til elevene (Imsen, 1998). En av disse kognitive læringsteoriene er konstruktivismen, som er det læringssynet jeg kommer til å ta utgangspunkt i.

Innen konstruktivismen er Jean Piaget (1896-1980) en viktig filosof og psykolog. Han mener at vi ikke lærer eller opplever et speilbilde av den ytre verden, men at all stimulering blir tolket gjennom preeksisterende forestillinger og kunnskaper (ibid.). Læring er et resultat av hva mennesket gjør med stimuleringen, og ikke hva stimuleringen gjør med mennesket (ibid.). Man skiller ofte mellom to former for konstruktivisme: Den kognitive konstruktivismen og den sosiale konstruktivismen. I den kognitive konstruktivismen ligger hovedvekten på hva som skjer i personens indre under læringen (Imsen, 1998). Drivkraften i læringen er den indre motivasjonen til å prøve å forstå og forklare omverdenen (ibid.) En lærer kan ikke overføre kunnskap til en elev, men kan legge til rette for aktiviteter som kan stimulere til læring. Den andre retningen kalles sosial konstruktivisme og her er drivkraften i læringen det å være et sosialt vesen. Det å delta i et fellesskap er kjennetegnet av å kunne noe (ibid.). Læring er et sosialt fenomen som skjer i en sosial situasjon, der både språk og sosiale forhold med å bidrar til å utforme kunnskapen (ibid.).

Min analyse og tolkning av elevbesvarelsene baserer seg på den kognitive konstruktivismen. Modellen til Behr et al. (1983) ble til på en konstruktivistisk tid i matematikkdidaktikken, noe som er tydelig når modellen handler om hvordan elever konstruerer brøkbegrepet. Denne modellen ligger til grunn for oppgaven og analysen min og det er derfor naturlig at jeg har det kognitive konstruktivistiske læringssynet som utgangspunkt.

2.2 Brøk

2.2.1 Hva er brøk

Brøk er et utrykk av to tall, a og b, på formen: $^{a}/_{b}$, ofte to heltall med en brøkstrek imellom, hvor $b \neq 0$ og rekkefølgen på tallene er viktig, for eksempel $^{3}/_{7} \neq {}^{7}/_{3}$. Mange tenker på brøk nettopp som dette, to uavhengige heltall med brøkstrek imellom, men et rasjonalt tall er egentlig en ekvivalensklasse av brøker og denne forvekslingen er en kilde til problemer for mange elever spesielt når de skal bedømme størrelsen til brøken (Siegler & Lortie-Forgues, 2017). Ni & Zhou (2005 i Bjerke et al., 2013) mener det er et kognitivt sprang mellom heltall og rasjonale tall, noe som gir regneutfordringer (Siegler & Lortie-Forgues, 2017). Heltall har unike forgjengere og etterfølgere, mens mellom to desimaltall eller brøker er det uendelig mange tall (ibid.). Heltall er ofte representert med et unikt symbol, rasjonale tall derimot kan bli representert på mange forskjellige måter. Heltall med flere sifre er større enn heltall med færre sifre, dette stemmer ikke med desimaltall eller brøk: $^{9}/_{15}$ er mindre enn $^{2}/_{3}$ (Siegler & Lortie-Forgues, 2017).

Rasjonale tall kan blir representert med tre relaterte, men forskjellige notasjoner: Brøk, desimaltall og prosent (Tian & Siegler, 2018). Prosent betyr hundredel og 25% betyr 25 hundredeler, derfor kan 25% gjøres om til desimaltallet 0,25 som igjen kan gjøres om til brøken $^{25}/_{100}$. Siden rasjonale tall er en ekvivalensklasse av brøker er $^{25}/_{100} = {}^{250}/_{1000} = {}^{5}/_{20}$. To brøker $^{a}/_{b}$ og $^{c}/_{d}$ er likeverdige eller ekvivalente hvis det finnes et tall k slik at $a \cdot k = c$ og $b \cdot k = d$ (Hinna, Rinvold & Gustavsen, 2011, s. 130). Ekvivalente brøker som $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{4}$ og $^{3}/_{6}$ har samme verdi og er i samme ekvivalensklasse, men er tre forskjellige brøker.

Jeg har valgt analysere alle strategier elever bruker også de som involverer prosent og desimaltall siden dette bare er forskjellige notasjoner for rasjonale tall (Tian & Siegler, 2018). Noen av oppgavene bruker enkle desimaltall i stedet for brøk, men de inviterer likevel elevene inn i de ulike delene av brøk.

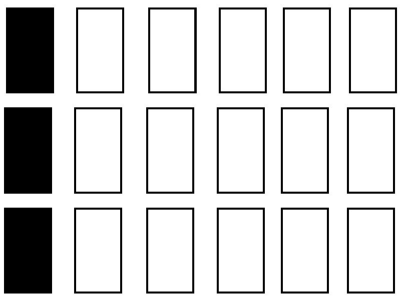
2.2.2 Underkonstruktene

Brøk er et komplekst begrep (Lamon, 2007, 2012; Siegler & Lortie-Forgues, 2017; Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) og flere studier viser at hovedårsaken til dette er at en brøk kan representere flere ulike betydninger (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Forskere har prøvd å kategorisere og systematisere disse, men det har vært uenigheter i hva kategoriene skal kalles. På engelsk bruker både Lamon (2007 & 2012) og Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) begrepet «Subconstructs», mens på norsk er det større variasjon: Noen bruker begrepet personligheter, andre delbegreper og Grey & Ånestad (2016) kaller det aspekter. Jeg velger å oversette begrepet fra engelsk og bruke begrepene konstrukt og underkonstrukt. Disse begrepene blir også brukt i psykologien. Det er fem underkonstrukter: Del-hele, måling, operator, kvotient og forhold, og til sammen utgjør disse konstruktet brøk. Forståelse for de ulike underkonstruktene av brøk er nødvendig for et solid brøkbegrep (Bjerke et al., 2013).

Videre vil jeg gå nærmere inn på de ulike underkonstruktene og forklare dem nærmere.

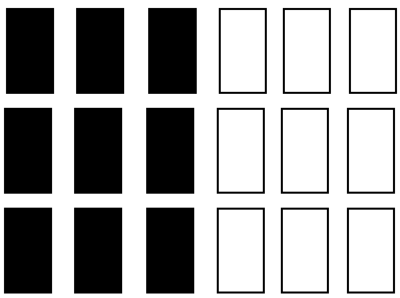
2.2.2.1 Del-hele

I del-hele-konstruktet angir en brøk et antall like deler av en kontinuerlig størrelse eller et sett av diskrete objekter (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Del-hele-konstruktet representerer en brøk $^{a}/_{b}$ hvor *b* er antall like deler enhetene er delt opp i og *a* er antall like deler vi ønsker å undersøke (Lamon, 2012). For eksempel kan b være totalt antall pizzastykker vi har delt pizzaen opp i, si 8, mens a kan være antall pizzastykker en person får – 4 hvis de er to personer som deler pizzaen. Da er brøken $^{4}/_{8}$ eller man kan bruke brøken $^{1}/_{2.}$ Dette fordi $^{4}/_{8}$ og $^{1}/_{2}$ er i samme ekvivalensklasse. En del trenger ikke å bety en bit eller et kort. For eksempel kan det være 18 kort og da betyr $^{1}/_{6}$ en del ut av seks like deler, hvor hver del består av 3 kort (se figur 1), eller 4 pizzastykker hvis vi bruker forrige eksempel med brøken $^{1}/_{2}$.



Figur 1: $^{1}/_{6}$ *av kortene er lik 3 kort.*

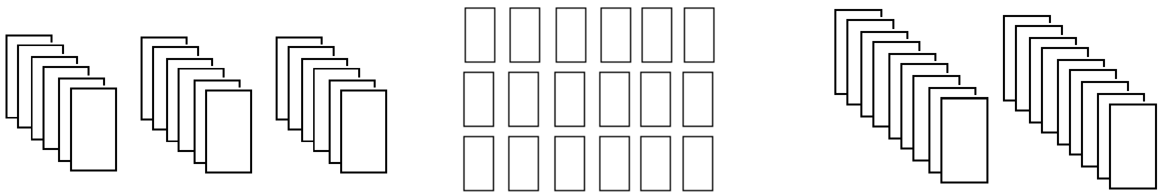
Hvor mange kort en del består av er avhengig av hvor mange kort det er og hvor mange deler det blir delt opp i. Jo flere kort og jo færre deler vi deler opp i, dess mer består hver del av. For eksempel kunne vi delt opp i to deler i stedet for seks, da ville ½ representert 9 kort slik som figur 2 viser.



Figur 2: ½ av kortene fargelagt.

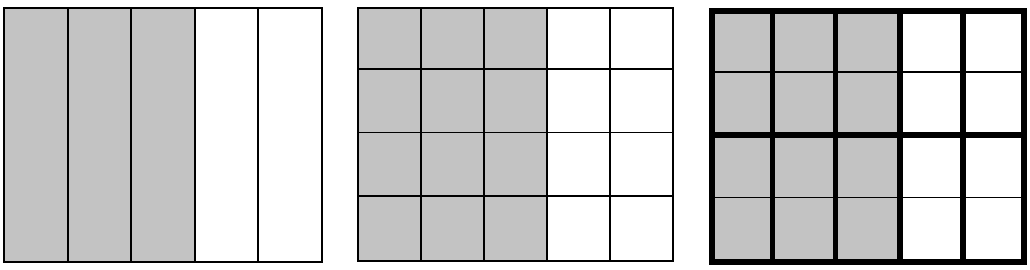
Enheten vi deler opp i kan være et objekt, som for eksempel en pizza vi ønsker å dele opp i b like store deler, eller flere objekter slik at tallet b representerer antall pizzaer. Dette kan være forvirrende og det er derfor viktig at eleven lærer seg å identifisere enheten og forstå at delene må være av lik størrelse eller av likt antall (Lamon, 2012). Det er også viktig at hver brøk som omhandler samme problem blir tolket ut ifra samme enhet.

Partisjonering er både en visualiseringsprosess og en metode eller strategi elever bruker for å dele opp enheten (pizzaen eller kortene) på forskjellige måter. Kortene kan for eksempel deles opp i tre bunker med seks kort i hver, to bunker med ni kort i hver eller som 18 forskjellige bunker med et kort i hver (figur 3).



Figur 3: 3 bunker med 6 kort, 18 bunker med 1 kort og 2 bunker med 9 kort.

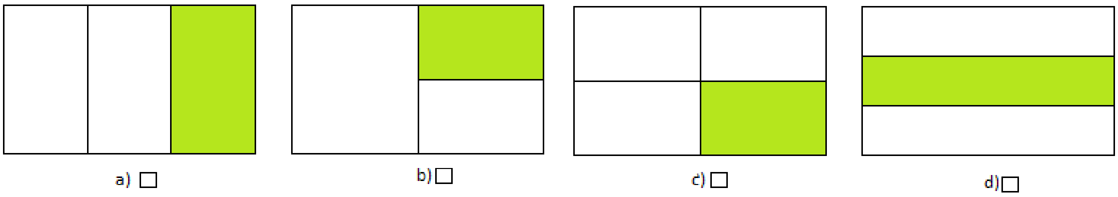
Et annet eksempel kan være en firkant med et område fargelagt. Hvordan man deler området opp og hvilken brøk det representerer kan variere (figur 4). Det er egentlig samme brøk som er blitt utvidet og forkortet igjen og brøkene er med i samme ekvivalensklasse. Først har vi brøken $^3/_5$ hvor teller og nevner blir multiplisert med 4 og blir $^{12}/_{20}$, deretter blir $^{12}/_{20}$ dividert med 2 i teller og nevner og den nye brøken blir $^6/_{10}$, se figur 4 (Lamon, 2012).



Figur 4: $^3/_5$ fargelagt, $^{12}/_{20}$ fargelagt og $^6/_{10}$ fargelagt.

Partisjonering er et viktig konsept for utvikling av forståelsen for brøk og det er et par aspekter som er nødvendig for å forstå hvordan man bruker det (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Først må man forstå at antall deler til sammen må utgjøre hele enheten som er blitt oppdelt. For det andre at jo flere deler enheten blir oppdelt i, dess mindre er hver del. I tillegg er det viktig at relasjonen mellom delene og enheten må være konservert, uavhengig av størrelse, form, arrangement og orientering av de ulike delene. Dette kan skape utfordringer for elever som ikke forstår denne relasjonen mellom delene og enheten. For å avsløre hvem som sliter med dette er det mulig å lage diagnostiske oppgaver som avslører om eleven har forstått viktigheten av at delene er like store. Et eksempel på en slik diagnostisk oppgave (laget selv) kan være (figur 5):

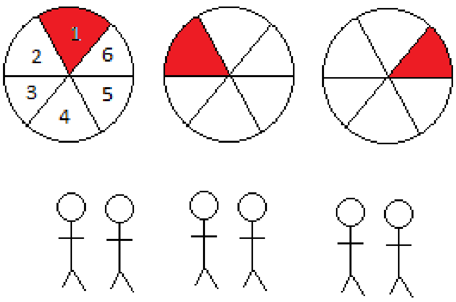
Kryss av i boksene under figurene som har 1/3 fargelagt:



Figur 5: I hvilke av firkantene er $^{1}/_{3}$ fargelagt.

Andre ganger kan elever tenke at to enheter er like store når virkeligheten er at «pizzaene» er forskjellig størrelse og $^{1}/_{8}$ på den ene pizzaen er ikke like mye som $^{1}/_{8}$ på den andre. Denne misforståelsen kan oppstå på grunn av tegninger som er upresise og misvisende. Lamon (2012) tror at elever ofte strever med del-hele-instruksjon fordi instruksjonen spiller opp under elevens svakheter i stedet for dens styrker.

Partisjonering kan som nevnt brukes som en strategi for å løse oppgaver. Strategien går ofte ut på å prøve å se for seg svaret ved hjelp av å tegne opp oppgaven slik at man lettest mulig kan «se» svaret. For eksempel: Hvor mye pizza får hver person dersom seks personer deler tre pizzaer (se figur 6)? Da kan eleven dele opp hver pizza i seks deler (se figur 6), like mange som personer, og deretter se at hver person får 3 slike $^{1}/_{6}$-dels stykker hver til sammen som utgjør en halv: $3 \cdot {}^{1}/_{6} = {}^{1}/_{2}$.

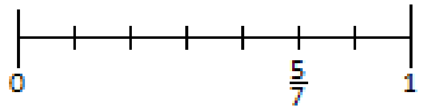


Figur 6: Seks personer deler tre pizzaer og får $^{1}/_{2}$ hver.

Del-hele er det underkonstruktet som elever ofte er mest kjent med fordi det har blitt fokusert mest på i undervisningen (Lamon, 2012). I tillegg er det det underkonstruktet som elever ofte henter strategier fra når de skal løse brøkoppgaver (Gray & Ånestad, 2016).

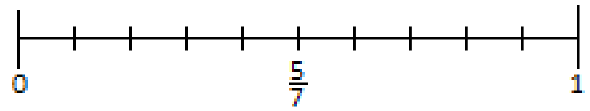
2.2.2.2 Måling

Underkonstruktet måling handler først og fremst om størrelsen til brøken. For eksempel: Hvilken brøk er størst av $^{7}/_{11}$ og $^{8}/_{13}$? Det er også knyttet til måling på et intervall, hvor lang en enhet er på en tallinje (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). En slik enhetsbrøk blir definert og brukt gjentatte ganger for å bestemme en distanse fra et bestemt startpunkt (ofte null). Et eksempel kan være brøken $^{5}/_{7}$: Den kan defineres som 5 ($^{1}/_{7}$-enheter) på tallinjen mellom 0 og 1, eller $^{1}/_{7}$-del av lengden 5, se figur 7.



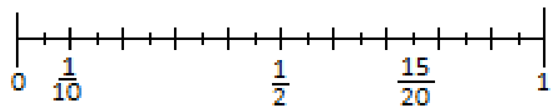
Figur 7: $^{5}/_{7}$ plassert riktig på tallinjen.

Til tross for at tallinjen er blitt akseptert som en god representasjon for å vurdere i hvilken grad elevene har utviklet målingsforståelse for brøk og for å undervise additive operasjoner av brøk, viser tidligere forskning at elever har problemer med å plassere tall på tallinjen (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). De teller strekene på tallinjen i stedet for å se på hvordan enheten er delt opp og om det stemmer overens med nevnere på brøken de har (Figur 8). Da kan det gå galt for eksempel når 0 til 1 er delt opp i 10 enheter og brøken de skal plassere er $^{5}/_{7}$.



Figur 8: Elever teller punktene til de kommer til 5 og glemmer å sjekke hvordan tallinjen er oppdelt.

Hvis vi vil være mer presise kan vi dele opp enhetene i mindre og mindre deler for å finne ut avstanden til et punkt eller for å klare å plassere en brøk riktig sted. For eksempel plassere $^{15}/_{20}$ på en tallinje som i utgangspunktet bare er delt opp i ti deler. Da må man halvere hver enhet for å klare å plassere den nøyaktig, se figur 9.



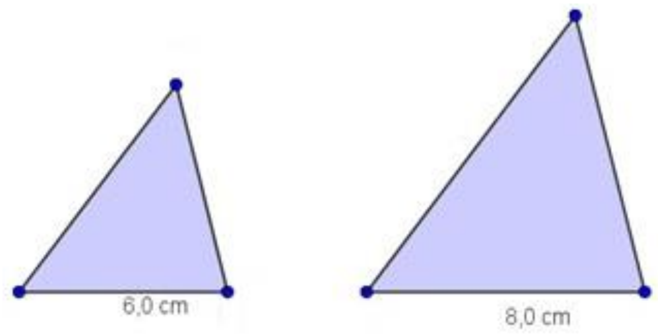
Figur 9: $^{15}/_{20}$ plassert riktig på tallinjen.

Rasjonale tall blir ofte assosiert med punkter på tallinjen og vi snakker om dem som om de er disse punktene og mål på avstand fra startpunktet 0.

Lamon (2012) foreslår at en god forståelse for underkonstruktet måling krever at elevene forstår egenskapen av tetthet i rasjonelle tall: Mellom to brøker er det et uendelig antall av andre brøk og tall. Dette er noe elevene sliter med å forstå (Siegler & Lortie-Forgues, 2017). Antun (2015) påpeker i sin masteravhandling at elever som blir spurt om hvor mange tall det er mellom 0,25 og 0,26 ofte svarer uendelig, men at de samme elevene mener det ikke er noe tall mellom $^2/_5$ og $^3/_5$.

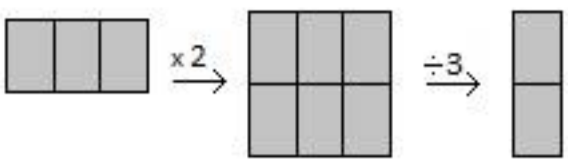
2.2.2.3 Operator

Når vi snakker om brøk som operator tenker vi ofte på rasjonale tall som funksjoner som forstørrer/utvider eller forminsker/komprimerer en enhet. Det forlenger eller korter ned på linjer, øker eller minker på antall enheter eller gjør en trekant større eller mindre (Lamon, 2012).



Figur 10: Forstørring av trekant med operatoren $^4/_3$.

Operator kan også defineres som en regel eller et sett med instrukser for å gjennomføre en operasjon på en enhet eller et tall, ofte ved bruk av multiplikasjon og divisjon (Lamon, 2012, s. 191). For eksempel kan $^2/_3$ bety multiplisere med 2 og dele på 3 (figur 11) eller kort og godt multiplisere med $^2/_3$, for dem som er fortrolig med $^2/_3$ som et tall. Dette er egentlig akkurat samme operasjon.



Figur 11: Boks som blir forminsket av operatoren $^2/_3$.

Hvilken rekkefølge man velger å gjennomføre operasjonen er vilkårlig, noen ganger kan det være lettere å dividere før man multipliserer. For eksempel: Kari har $1^2/_5$ flere kort enn jeg har. Jeg har 55 kort. Hvor mange kort har Kari? Her er det lettere å dividere med 5 først før man multipliserer med syv: $^{55}/_{5}$ = 11, 11 · 7 = 77. Det betyr ikke at vi ikke kan multiplisere først med 7 og så dividere med 5. Dette går an å gjøre fordi multiplikasjon er kommutativ, nemlig at hvis vi har to tall a og b så spiller det ingen rolle hvilken rekkefølge vi multipliserer i, a · b = b · a alltid, i vårt tilfelle: 55 · $^{1}/_{5}$ · 7 = 55 · 7 · $^{1}/_{5}$.

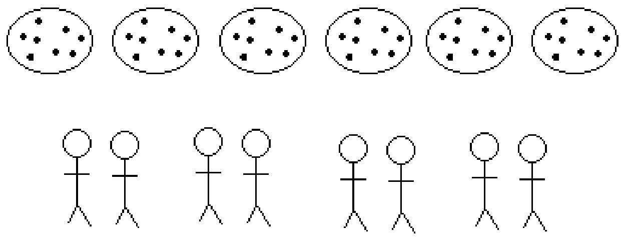
For at en elev skal forstå brøk som operatorer må eleven kunne oversette en brøk som multiplikator på forskjellige måter (Lamon, 2012): ¾ betyr 3(¼ av en enhet) og ¼ (3 ganger). I tillegg må den forstå at to operasjoner (multiplikasjon og divisjon) er uavhengige av hva man gjør først. Hvis en skal multiplisere med ¾ kan man først multiplisere med 3 og så dividere med 4 eller dividere med 4 og deretter multiplisere med 3. I tillegg bør eleven kunne bruke modeller for å identifisere en enkelt sammensetning som karakteriserer en sammensetning av komposisjoner (ibid.): $^{2}/_{3}$ av $^{3}/_{4}$ = $^{1}/_{2}$. Til sammen utgjør dette en god forståelse for brøk som operator.

2.2.2.4 Kvotient

En brøk kan sees på som en kvotient, altså som et resultat av divisjon. Man har at x:y = $^{x}/_{y.}$ Her representerer x og y heltall hvor x er dividend, y er divisor og $^{x}/_{y}$ kvotient. Et eksempel kan være $^{5}/_{7}$ som kan tolkes som den mengden pizza hver person får hvis 7 personer deler 5 pizzaer og er en numerisk verdi (Lamon, 2012, s. 171). Hvis vi sammenligner kvotient-konstruktet med del-hele ser vi at det er en vesentlig forskjell. I del-hele er det det hele som deles, men i kvotient er det dividend som deles.

For å mestre brøk som kvotient, må elever forstå at det er snakk om lik og rettferdig deling og at det ikke finnes begrensninger på størrelsen på brøken. Telleren kan være mindre, lik eller større enn nevneren og svaret kan være større, lik eller mindre enn utgangspunktet. I tillegg må eleven kunne kjenne igjen brøk ved divisjon og forstå de to modellene for divisjon: Delingsdivisjon og målingsdivisjon (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Delingsdivisjon (partitive division) handler om rettferdig fordeling. Hvor mye får hver person hvis det er delt rettferdig (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007)? For eksempel hvis åtte personer deler seks pizzaer likt, hvor mye pizza får hver av dem (figur 12)? $^{6}/_{8}$ pizza, som også kan forkortes til $^{3}/_{4}$ pizza.



Figur 12: 8 personer deler 6 pizzaer.

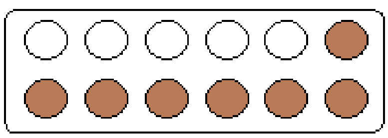
Målingsdivisjon (quotitive division) legger vekt på hvor mange det er som deler enheten dersom man deler opp en størrelse i like store deler (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). For eksempel: Seks pizzaer skal deles mellom venner, hvis hver person får ¾ av pizzaen, hvor mange venner er det da?

Å forstå brøk som kvotient handler om å kunne svare på følgende spørsmål uten store problemer eller å måtte tegne det opp: 1) hvor mye er en del? 2) hvor mye av helheten er en del (Lamon, 2012, s. 179)?

2.2.2.5 Forhold

Brøk som forholdstall (ratio) handler om en sammenligning mellom to tall og regnes derfor mer som en komparativ indeks enn et tall (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). For eksempel står $^3/_5$ for en relasjon mellom to ulike enheter som kan være 3 gutter som står i en multiplikativ relasjon til 5 jenter, dersom det er 5 jenter for hver tredje gutt.

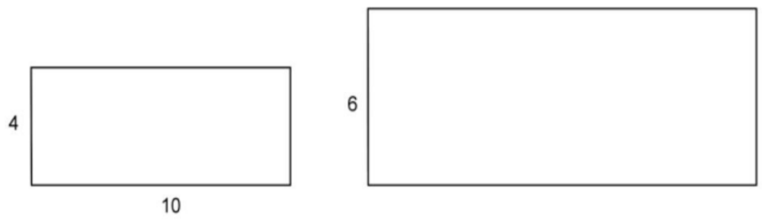
Det er to typer forhold der man sammenligner størrelser av samme type: Del-hele og del-del-sammenligninger (Lamon, 2012). Del-hele-sammenligninger er forhold der vi sammenligner størrelsen av en del av en mengde med størrelsen til hele mengden. Mens del-del-sammenligning ser på størrelsen til en del av en mengde mot størrelsen til en annen del av mengden (ibid.). For eksempel kan man ha en eggekartong med 12 egg der 5 av dem er hvite og 7 er brune. Da er 5 til 7 en hvit til brun del-del-sammenligning, mens 7 til 12 er en brun del-hel-sammenligning, se figur 13 (Lamon, 2012).



Figur 13: Eggekartong med 5 hvite egg og 7 brune.

Når et forhold sammenligner størrelser av forskjellige typer og beskriver en kvalitet som er vanlig for mange situasjoner, blir det en rate (Lamon, 2012, s.226). For eksempel kan 30kr per kvadratmeter, $30kr/m^2$, være en rate fordi det beskriver et forhold mellom pris i kr og antall kvadratmeter: 60kr for 2 kvadratmeter, 120kr for 4 kvadratmeter, osv. Begrepene forhold og rate er ofte brukt om en annen, men de betyr ikke det samme. Hvordan man skiller dem er ikke alltid like lett å forstå. Forhold regnes som en sammenligning mellom like kvantiteter eller størrelser: Vekt mot vekt, kg mot kg, eller pris mot pris, men i det man sammenligner vekt og pris som to ikke-konstante størrelser blir det en rate. For eksempel 2:5 forhold i en hvetemel- og rugmelsblanding, her er ikke hvetemel og rugmel det samme, men de har samme enheten (g:g eller dl:dl) og derfor regnes 2:5 som et forhold. Mens 20:5 regnes som en rate hvis det koster 20kr per 5dl hvetemel, for her sammenlignes pris med dl.

For å virkelig forstå begrepet brøk som forholdstall trenger elever å forstå ideen om relative størrelser. De trenger å forstå at et 1:4 forhold i en saftblanding ikke er avhengig av hvor mye saft og vann du blander så lenge det er fire ganger så mye vann som saft i blandingen. I tillegg må de forstå at hvis størrelsene har et multiplikativt forhold, så er forholdstallet det samme. En oppgave som illustrerer dette multiplikative forholdet er (Brekke & Tinnes, 2001): *Eit databilete er 4cm høgt og er 10cm breitt. Lise kopierer og forstørrar dette bilete i prosjektoppgåva si. I prosjektoppgåva er bilete 6cm høgt. Kor breitt er det* (figur 14)*?*



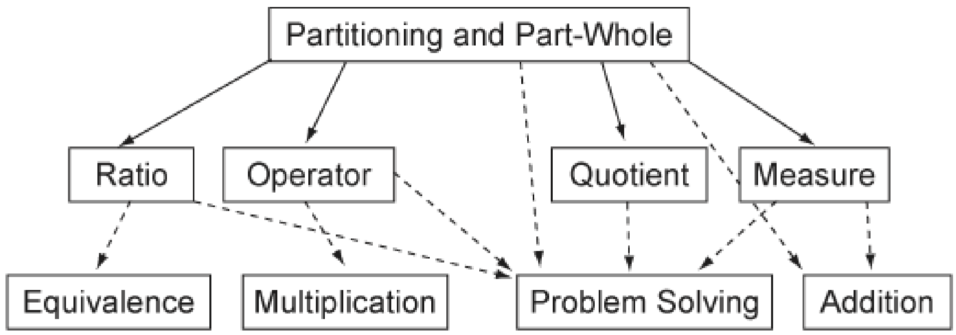
Figur 14: Oppgave om multiplikative forhold: Hvor bredt er databilde til høyre?

Med tanke på notasjon blir del-hele, operator, kvotient og måling stort sett alltid skrevet på brøkform, mens forholdstall derimot kan skrives på flere forskjellige måter. Forholdstallet mellom a og b kan blant annet skrives som: ${}^{a}/_{b}$, $a \rightarrow b$ eller a:b. Hvis man benytter seg av vanlig brøknotasjon, ${}^{a}/_{b}$, uten noen kontekst eller enheter kan det være vanskelig å vite hvilket underkonstrukt brøken skal tolkes til. Da kan de konseptuelle og operasjonelle forskjellene mellom del-hele og forhold kollidere og skape utfordringer (Lamon, 2012, s. 227). Derfor er det viktig å være oppmerksom på dette og eventuelt bruke andre notasjoner dersom det er nødvendig.

2.2.3 Modellen

Kieren (1976) kom med en hypotese om at brøk bestod av fire underkonstrukter som henger sammen: Måling, operator, kvotient og forhold (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Senere ble dette videreutviklet og utvidet av Behr et al. (1983), hvor det ble anbefalt at brøk skulle bli forstått som et konstrukt med fem underkonstrukter: Del-hele, måling, operator, kvotient og forhold. De var uenige om del-hele skulle bli regnet som et eget underkonstrukt eller ikke. Kieren (1976) anså det som en del av måling og ikke som et eget underkonstrukt (Lamon, 2007), mens Behr et al. (1983) mente del-hele var sitt eget underkonstrukt og var selve fundamentet for de andre underkonstruktene.

Behr et al. kom i 1983 med en teoretisk modell (figur 15) som kobler sammen de ulike underkonstruktene, brøkekvivalens, multiplikasjon, addisjon og problemløsning. Denne modellen er blitt mye brukt, sitert og forsket på, blant annet av Charalambous & Pitta-Pantazi (2007).



Figur 15: Teoretisk modell der de fem underkonstruktene ved brøk blir relatert til ulike operasjoner på brøk og problemløsning (Behr et al., 1983, figur 4.1).

I modellen er det noen heltrukne piler som viser tydelig sammenheng mellom partisjonering og del-hele og de andre underkonstruktene. Behr et al. (1983) mente del-hele var fundamentet for forståelse for de andre underkonstruktene (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det er også noen stiplede piler som viser mindre avklarte sammenhenger mellom underkonstruktene og ulike operasjoner. For eksempel ansees det at underkonstruktet forhold er den mest naturlige inngangsporten til brøkekvivalens (ibid.). Dette virker naturlig fordi brøken i forhold-konstruktet refererer til forholdet mellom to størrelser (Gray & Ånestad, 2016). Ved å forstå at det er et forhold mellom teller og nevner kan det være lettere å sammenligne brøkers størrelse og forstå hvorfor to brøker er i samme ekvivalensklasse.

De stiplede linjene viser også en mulig sammenheng mellom alle underkonstruktene og problemløsning. Forståelse for alle fem underkonstrukter vil naturligvis gi eleven et bedre utgangspunkt for å løse alle typer brøkproblemer.

2.2.4 Forståelse for brøk

Brøkbegrepet er komplekst og ikke nødvendigvis så lett å forstå (Behr et al., 1983; Lamon, 2007; 2012). Flere matematiske begreper kan tenkes å inneholde to forskjellige aspekter, et strukturelt og et operasjonelt. Anna Sfard (1991) snakker om en dualitet eller dobbelsidighet ved matematiske begreper. Elever bør ha forståelse for begge aspekter for å virkelig forstå et matematisk begrep.

Strukturell forståelse handler om å se på et matematisk begrep som et objekt eller en tidløs struktur (Sfard, 1991). Mellin-Olsen (1984) kaller det strukturoppfatning og mener det handler om å forstå strukturen til et begrep, den matematiske sammenhengen det er satt inn i og hvorfor regler som omhandler begrepet er slik de er. Operasjonelle begreper er mer dynamiske og detaljerte og operasjonell forståelse gir kunnskap om regler og prinsipper for hvordan man kan bruke begrepet i praksis, i en prosess. Dette kaller Mellin-Olsen (1984) for regeloppfatning, mens andre matematikkdidaktikere kaller det for prosedyrekunnskap.

Ifølge Anna Sfard (1991) kan en brøk representere en operasjon, et resultat av divisjon med heltall, eller et objekt. Hvis elever skal ha et solid brøkbegrep bør de ha forståelse for alle fem underkonstrukter (Bjerke et al, 2013), både operasjonelt og strukturelt.

2.2.5 Brøk sin historie

Det har tatt lang tid i historien å utvikle tallbegrepet slik vi har det i dag. Ved å ta et historisk tilbakeblikk kan vi kanskje få en større forståelse for hvorfor det er utfordringer med brøkbegrepet. Både Mayaene og egypterne var opptatt av forhold og brøk (Hinna et al., 2011, s 119). Historisk sett finner vi former for brøkregning tilbake til oldtidens Egypt. Egypterne foretrakk stambrøker, altså brøk med 1 i teller (ibid.). De utarbeidet tabeller som hjelp til regning med stambrøker, og Rhind-papyrusen har for eksempel en tabell over brøker på formen $^{2}/_{n}$ for oddetall n, mellom 5 og 101, uttrykt som sum av stambrøker der $^{2}/_{5}$ ble skrevet som $^1/_3$ + $^1/_{15}$ (Antun, 2015, s. 16). Grunnen til at egypterne foretrakk stambrøker forblir ukjent.

Etter hvert utviklet Babylonerne et 60-tallssystem, et posisjonssystem med 60 som grunntall, men med et element av titallsystem. Noe som har stor innvirkning på hvordan vi lever i dag og deler inn dagene våre. Allerede da ble dagen delt inn i 24 timer, hver time i 60 minutter og hvert minutt i 60 sekunder (Hinna et al., 2011, s. 119). Det var ikke før i renessansen at 60-delene ble erstattet med desimaler og brøker slik vi bruker dem i dag.

Allerede år 300 f.kr begynte grekernes lære om proporsjoner, noe som fortsatt er et viktig tema i dag når vi snakker om forholdstall og for eksempel hvordan man skal blande ut saft. Dette ble forløperen til ideen vi i dag kaller likeverdige brøker, men det tok lang tid før likeverdige brøker ble utviklet i Vesten (Hinna et al., 2011, s. 120).

Brøk har altså vært en del av matematikken i flere tusen år, men symbolbruken har endret og utviklet seg med tiden. På 1600-tallet oppstod den moderne algebraen og mer abstrakte symbol ble tatt i bruk i stedet for ord og setninger. Simon Stevin (1548-1620) var den første som formulerte at et tall representerer en kvantitet og ikke bare en samling av enere (Gjone, 1998). Det var han som introduserte desimaltallene i Europa og i læreboken De Thiende innfører han desimaltall og en notasjon slik at vi kan regne med dem (ibid.)

2.2.6 Brøk i norsk skole

Kompetansemålene i «Læreplan i matematikk fellesfag», gitt i Kunnskapsløftet av 2006, viser at brøk er et gjennomgående tema i grunnskolen helt fra 2. trinn, hvor elever skal kunne doble og halvere (Utdanningsdirektoratet, 2006). Etter 4. trinn skal elevene kunne bruke enkle brøker som en halv, en kvart og en tredjedel i praktiske sammenhenger. Etter 7. trinn skal elevene kunne regne med brøker: Finne sammenhenger og utføre addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av brøker. I tillegg skal de kunne se sammenheng mellom brøk, prosent og desimaltall og kunne plassere brøk på en tallinje. Etter endt grunnskole skal elevene kunne: *«Samanlikne og rekne om mellom heile tal, desimaltal, brøkar, prosent, promille og tal på standardform, uttrykkje slike tal på varierte måtar og vurdere i kva for situasjonar ulike representasjonar er formålstenlege.»* I tillegg: «R*ekne med brøk, utføre divisjon av brøkar og forenkle brøkuttryk*» (Utdanningsdirektoratet, 2006). Siden elevene i min undersøkelse akkurat hadde startet med videregående var det kompetansemålene over jeg testet, sammen med strategiene deres fra grunnskolen.

TIMSS er en internasjonal komparativ studie i matematikk og naturfag på 4. og 8. trinn i grunnskolen (Grønmo & Onstad, 2009). Et av de mest sentrale fagområdene som elever testes i er tall og tallregning, inklusiv brøk og desimaltall. 50% av oppgavene er fra dette fagområdet (Grønmo & Hole, 2017). Det regnes som det mest grunnleggende som elevene skal lære i matematikk problematisk at det er her norske elever skårer dårligst (Grønmo, Bergem, Kjænsli, Lie & Turmo, 2004) og at prestasjonen har gått ned på dette området i motsetning til den generelle positive utviklingen i matematikk (Grønmo & Hole, 2017).

Nasjonale prøver er det nasjonale systemet for vurdering av kvaliteten i grunnopplæringen (Seland, Vibe & Hovdhaugen, 2013). Nasjonale prøver har vært avholdt siden 2004. Noe evaluering og justering har blitt gjort etter dette, men det testes både lesing, regning og engelskkunnskaper på 5. og 8. trinn for å gi et grunnlag til underveisvurdering og kvalitetsutvikling (ibid.). Det blir også gjennomført nasjonal prøve på 9. trinn i lesing og regning slik at skoler kan sammenligne resultatene fra 8. trinn året før. I undersøkelsen min har jeg brukt åpne oppgaver fra nasjonal prøve i regning fra 2011, 2016 og 2017.

2.3 Strategier

2.3.1 Hva er en strategi?

Strategi er definert av språkrådets bokmålsordbok (u. å.) som en «*fremgangsmåte for å nå et mål*». Ifølge Wilats (1990 i Ostad, 2010) er strategi en organisert aktivitet som er rettet mot et mål: Å løse en matematikkoppgave. Det er en organisert aktivitet eller en målrettet prosedyre som ifølge Siegler & Jenkins (1989) må være ikke-obligatorisk, man må ha et valg. Det er det som skiller en løsningsmetode fra en strategi. For eksempel er det å skifte gir når man kjører bil en fremgangsmåte, ikke en strategi, fordi det finnes kun en måte å skifte gir på. I åpne matematikkoppgaver kan elever velge hvordan de skal løse oppgaven og da må de også velge hvilken løsningsstrategi de ønsker å bruke. For eksempel er det flere måter å løse denne matematikkoppgaven: «*Mormor skal strikke en genser. I oppskriften står det at hun må beregne 350g. Hvert nøste er 50g. Hvor mange nøster må mormor kjøpe* (fra nasjonal prøve i 2017)?» En løsningsstrategi kan være å regne ut $^{350}/_{50} = 7$ uten hjelpemidler. En annen strategi er å addere 50 + 50 + 50 + 50… til man kommer til 350g og telle antall ganger man måtte addere 50. Det er også mulig å tenke at $50 \cdot 2 = 100$ og derfor trengs det $2 \cdot 3 + 1 = 7$ nøster.

Goldman (1989) skiller mellom to hovedkategorier av strategier: Generelle strategier og oppgavespesifikke strategier. Generelle strategier, også omtalt som metakognitive strategier, handler om hvordan elever kan styre sin egen læringsprosess og være bevisst på metoder man lærer i lærebøkene og opplæringen (ibid.). Oppgavespesifikke strategier viser til de fremgangsmåtene elevene har til disposisjon når de løser matematikkoppgaver (ibid.). Som i matematikkoppgaven i forrige avsnitt. Jeg ønsker å se på hvilke oppgavespesifikke strategier elevene har når de løser brøkoppgaver.

2.3.2 Oppgavespesifikke strategier

Det handler altså om hvilke strategier elevene bruker for å løse spesifikke matematikkoppgaver. For eksempel refererer oppgavespesifikke strategier i addisjon til de strategiene elevene velger å benytte når de skal løse en bestemt addisjonsoppgave (Ostad, 1996), enten det er å telle på fingrene, legge sammen litt etter litt eller ta hele regnestykket i hodet. Oppgavespesifikke strategier deles ofte inn i backup- og retrievalstrategier (Ashcraft, 1992). En retrievalstrategi handler om at eleven kan svaret eller finner svaret uten å bruke ytre objekter eller konkreter (Siegler, 1987 i Ostad, 1997). Det kan også sees på som et uttrykk for en prosess: Lokalisere og få tilgang til et fleksibelt lagret og meningsbærende informasjon i hukommelsen (Ashcraft, 1992). Når elever går rett til kunnskapslageret eller langtidsminnet sitt og henter frem informasjon benytter de seg av retrievalstrategier, dette er foretrukket fordi det tar kortere tid å bruke og frigjør kognitiv kapasitet hos elevene (Siegler, 1987 i Ostad, 1997). En backup-strategi er alt annet, for eksempel manipulering av objekter som fingre eller andre konkreter (ibid), eventuelt benytte en mer tungvint oppskrift for å finne svar. Retrievalstrategier er ofte foretrukket fremfor backup-strategier, men alle har behov for backup-strategier til å falle tilbake på når man ikke har retrievalstrategier.

Jeg har ikke funnet noe litteratur som kommer med konkrete eksempler på backup-strategier i brøkoppgaver. Lamaire & Siegler (1995, s. 86) mener at gjentatt addisjon er den mest brukte back-up strategien i multiplikasjon. På samme måte mener jeg at elever som bruker en oppskrift for å løse oppgaver som er mer tidkrevende og tungvint enn nødvendig (Ashcraft,

1992) benytter seg av en backup-strategi. I oppgaver der man kan bruke en brøk som operator til å løse oppgaven vil jeg si at en «gjentatt addisjon»-strategi er en backup-strategi.

I Ostad (1996) gjengis det resultater fra en longitudinell undersøkelse med formål å måle strategiforskjeller mellom elever med matematikkvansker og elever uten matematikkvansker. Elevene er med på undersøkelsen fra 1. til 7. klasse. Undersøkelsen viser at elevene uten matematikkvansker danner nye strategier med årene, både backup-strategier og retrievalstrategier. Det foregår i tillegg en gradvis forskyvning i strategivalget, ikke bare bort fra backup-strategier og til retrievalstrategier, men også innen backup-strategier: De mest primitive tellestrategiene blir byttet ut med verbal telling. Elevene er preget av det Ostad (1996) kaller *strategifleksibilitet*: Elever har utviklet kunnskap innen strategibruk som har resultert i større fleksibilitet i forhold til å kunne tilpasse strategibruken til ytre og indre (kognitive) variasjoner fra situasjon til situasjon under oppgaveløsning. Vi kan også si at utviklingsmønsteret til en typisk elev kjennetegnes av *strategirikdom*, altså av omfattende strategikunnskaper. Elever med matematikkvansker har ikke like god strategiutvikling og Ostad (1996) mener oppgaveløsningen deres er preget av *strategirigiditet.* Når de skal løse enkle oppgaver i addisjon, subtraksjon eller multiplikasjon, benytter de relativt få forskjellige tellestrategier. Samme elev benytter ofte samme strategien på samme type problem fra en situasjon til en annen.

Den «normale» elev gjennomgår altså en strategiutvikling, som er en utvikling fra strategifattigdom til strategirikdom, fra primitive backup-strategier til større strategifleksibilitet med både retrievalstrategier og mer utviklede backup-strategier. Alibali & Sidney (2015) mener også at strategiene man bruker til å løse problemer endres med tiden eller fra problem til problem i samme tidsrom, og at strategivariabilitet eller strategifleksibilitet er en viktig faktor i matematikk og problemløsning med brøk. Det gir elever en større verktøykasse de kan bruke i møte med matematikkoppgaver.

Selv om Ostad (1996; 1997; 2010) bruker begrepene backup-strategier, retrievalstrategier og strategifleksibilitet i en sammenheng der elever har matematikkvansker, ser vi at det er andre forskere innen psykologien som også benytter de samme begrepene: Siegler (1987 i Ostad, 2010), Lamaire & Siegler (1995), Goldman (1989) og Ashcraft (1992). I tillegg diskuterer Ostad (1996) strategiutvikling hos normale elever på barnetrinnet, jeg kommer derfor til å benytte disse begrepene i videre analyse og diskusjon.

3 METODE

I dette kapittelet ønsker jeg å gjøre greie for hvordan jeg har gått frem for å få svar på forskningsspørsmålene mine. Først presenteres og begrunnes metode, før jeg går videre og beskriver hvordan kartleggingsprøven ble til. Deretter beskriver jeg utvalget i studiet mitt og hvordan datainnsamlingen ble gjennomført og analysert. Til slutt gjør jeg greie for reliabilitet og validitet i undersøkelsen min og gjør meg noen etiske refleksjoner knyttet til å forskningen.

3.1 Innsamlingsmetode

Hovedmålet med dette prosjektet var å få større innsikt i hvilke strategier elevene har i brøkoppgaver og hvilke underkonstrukter som er mest fremtredende i deres strategier. For å studere dette mer systematisk ønsket jeg å benytte en kartleggingsprøve både med matematikkoppgaver og et par oppfølgingsspørsmål. I utgangspunktet regnes dette som en kvantitativ metode. Det er en form for spørreskjema og regnes til å være mindre fleksibel enn kvalitative metoder (Christoffersen & Johannessen, 2012). Dette fordi deltagerne får de samme oppgavene og spørsmålene i samme rekkefølge. Det er ikke er mulig å stille oppfølgingsspørsmål og få større innsikt i hvordan eleven tenkte når de løste oppgaven. Samtidig vil en slik kartleggingsprøve gjøre at det er lettere å sammenligne besvarelser og strategier på tvers av deltagere (ibid.). Dermed har jeg kunnet presentere noen av resultatene i flere tabeller. Ved å velge en slik metode gir det meg også mulighet til undersøke flere elever enn ved oppgaveintervju hvor tid blir en begrensende faktor (Kvale & Brinkmann, 2015). Jeg har ved bruk av kartleggingsprøve fått muligheten til å analysere 42 besvarelser. Videre begrunnelse for dette blir tydeliggjort i 3.2.3 der jeg skriver om mine erfaringer fra piloten.

I samfunnsforskning dukker det raskt opp et skille mellom kvantitative og kvalitative metoder. Det betyr ikke at forskningen enten er kvantitativ eller kvalitativ. Det kan være ulike grader av hvor kvalitativ eller kvantitativ forskningen er, og det går også an å kombinere begge i samme undersøkelse (Christoffersen & Johannessen, 2012). Når man kombinerer flere metoder for å undersøke et fenomen, kaller vi det metodetriangulering eller «mixed method» (Creswell, 2012). Kvalitative metoder handler om *hva slags* (Kvale & Brinkmann, 2015) og blir benyttet fordi man ønsker å gå i dybden. De er mer fleksible og tillater større grad av spontanitet og tilpasning i interaksjonen mellom forsker og deltaker (Christoffersen &

Johannessen, 2012). Relasjonen mellom forsker og deltaker er også mindre formell enn i kvantitativ forskning, noe som gir rom for å svare mer utfyllende (ibid.). Metoden min er i utgangspunktet kvantitativ, men det er gitt åpne oppgaver og åpne spørsmål slik at deltageren kan svare med egne ord. Dette ble gjort i håp om at jeg kunne analysere svarene på en kvalitativ måte. 42 besvarelser er kanskje for mange til å analyseres kvalitativt, men etter systematisering og sortering av strategiene var det fullt mulig å analyse 3-5 strategier per oppgave i dybden.

Ved å ha bruke «mixed method» vil jeg få både en bredere og dypere forståelse for strategiene til elevene. Flere elever kan gjennomføre en kartleggingsprøve og den gir det meg et bredere bilde av hvilke strategier elever benytter. Jeg har ikke bare strategiene til 10-12 elever, men en oversikt over to hele klasser sine strategier. Dette gir også muligheten til å sammenligne de to klassene og gjør at jeg også kan besvare forskningsspørsmål 3. Samtidig kan jeg ved å sortere strategiene gå dypere inn i strategiene og analysere hvilke underkonstrukter som blir synlig, mer kvalitativt. Videre begrunnelser for kartleggingsprøven kommer i avsnitt 3.3.

3.2 Pilot

I juni 2018 gjennomførte jeg et lite prosjekt i anledning masteravhandlingen min. I første omgang med håp om å kunne bruke dette som eneste datainnsamling til masteren, men grunnet lite tid til forberedelse ble dette heller en pilot. Dette viste seg å ikke være bortkastet tid fordi det ga erfaringer som påvirket videre arbeid og den nye datainnsamlingen.

3.2.1 Utvalg

Ved utvelgelse av informanter bør man tenke gjennom hva som er tjenlig for formålet ved forskningen, og Creswell (2012) mener man bør ha en utvelgesesstrategi. Jeg ønsket å ha en «maximal variation sampling» i piloten min (ibid.), men i en kvalitativ studie er det ofte ikke et stort nok utvalg til å få en god spredning i utvalget. Likevel prøvde jeg ved å velge informanter med forskjellige faglig nivå og kjønn for å få en viss variasjon og se om de hadde ulike strategier i møte med brøkoppgaver. Dette var de to hovedkriteriene jeg hadde når jeg sammen med faglærer valgte ut elever til oppgaveintervju. Faglig nivå ble bestemt med utgangspunkt i karakter i matematikkfaget, men også med faglige vurdering av matematikklæreren til elevene. I tillegg måtte elevene ønske å være med på et slikt intervju. Med disse tre faktorene valgte vi ut 8 elever fra to forskjellige tiende-klasser med samme matematikklærer: Fem gutter og tre jenter. Fra læreren fikk jeg også høre at elevene var begynt å komme i sommerferiemodus, siden skriftlig eksamen var overstått og det eneste som gjenstod før ferien var muntlig eksamen.

3.2.2 Oppgaveintervjuet

Prosjektet ble meldt inn til og godkjent av Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste, NSD. Elevene ga sitt samtykke både muntlig og skriftlig. Oppgaveintervjuene ble gjennomført over to dager og hvert intervju varte i 20-30 minutter. Elevene fikk fem brøkoppgaver som de skulle løse på papir mens de forklarte hva de gjorde. Det ble i tillegg stilt spørsmål der ting var uklart eller jeg ønsket videre utdypning. Intervjuene ble tatt opp på taleopptak og video til senere transkribering og anonymisering (ble ikke gjennomført).

Fire av fem oppgaver var brøkoppgaver fra årets eksamen som gjorde at noen av elevene hadde gjort oppgavene før deres skriftlige matematikkeksamen. Håpet var at hvis de hadde sett oppgavene før ville det ta kortere tid å gjennomføre uten at det burde gå utover framgangsmåte og valg av strategier. Det var kun halvparten av elevene som hadde denne eksamen, men likevel mente flere elever som ikke hadde hatt eksamen at de hadde gjennomført lignende oppgaver før. Siste oppgaven lagde jeg selv i full fart da jeg innså at intervjuene ble kortere enn forventet. Dette var en enkel addisjon og multiplikasjonsoppgave for å sjekke om elevene kunne helt enkel brøkregning.

3.2.3 Mine erfaringer fra piloten

Piloten ble ikke slik som jeg hadde tenkt, de fleste elever brukte den samme fremgangsmåten og jeg ble usikker på om det var nok valgmuligheter innen strategi og om oppgavene inviterte nok inn i ulike underkonstrukter. I stedet for å bruke mye tid på å transkribere og finne ut hva jeg eventuelt kunne bruke, valgte jeg å ta med meg erfaringene til å gjennomføre en bedre datainnsamling. Jeg fant ut at det var nødvendig å jobbe mer med problemstilling, hva ønsket jeg å finne ut av? Selv om jeg allerede da ville se på strategier i brøkoppgaver hadde jeg ikke utarbeidet alle forskningsspørsmålene mine like godt. Jeg visste også at jeg ønsket å se på underkonstruktene som ble synliggjort i strategiene, men oppgavene viste seg å ikke være gode nok.

To ting måtte jeg endre på: Utvalget mitt og oppgavene. Det ble for få informanter og oppgavene inviterte ikke til nok underkonstrukter. I tillegg ble undersøkelsen gjennomført i slutten av tiende klasse rett etter klassen hadde hatt skriftlig eksamen, og jeg følte at elevene hadde øvd inn nesten de samme fremgangsmåtene. Jeg valgte i stedet ha lage en kartleggingsprøve slik at jeg fikk tid til å analysere flere elevers strategier. Jeg søkte til NSD og hadde en kodeliste i tilfelle jeg senere ønsket å stille noen elever oppfølgingsspørsmål til kartleggingsprøven. Dette viste seg å ikke være nødvendig. Jeg endret oppgavene og valgte oppgaver fra nasjonal prøve heller enn eksamensoppgaver, både fordi jeg vurderte dem som mer åpne og elevene hadde større avstand til oppgavene tidsmessig. Utvalget og tidspunkt ble endret slik at elevene ikke hadde hatt samme matematikklærer og undervisning før gjennomført datainnsamling.

3.3 Kartleggingsprøve

Målet med å utvikle en kartleggingsprøve var å finne oppgaver og spørsmål som kan gi svar på problemstillingen min: Hvilke strategier har elevene og hvilke underkonstrukter blir synliggjort i dem? Jeg ønsket å se på strategivalg til flere elever enn jeg hadde klart med intervju, og samtidig analysere oppgavene kvalitativt. Dette mener jeg er en styrke og gir en større bredde til å svare på forskningsspørsmålene mine. Så lenge kartleggingsprøven klarer å få frem hvilken fremgangsmåte elevene bruker, og oppgavene er åpne nok til at elevene kan velge hvordan de kan løse dem, kan jeg bruke det til å finne ut hvilke løsningsstrategier elevene velger å bruke (Siegler & Jenkins, 1989). Intervju kan gi en dypere innsikt i hvordan elever tenker når de løser oppgavene og det er fordelen med oppgaveintervju og grunnen til at jeg benyttet den metoden i piloten. Jeg forsker på hvilke strategier elevene har, og dette er mulig å få svar på i kartleggingsprøven. Hadde jeg forsket på de generelle strategiene til elevene (Goldman, 1989), og hvorfor de bruker strategiene som de gjør, hadde jeg fortsatt brukt oppgaveintervju som metode. Så lenge strategiene kommer tydelig nok frem i besvarelsene på oppgaven og oppfølgingsspørsmålene kan jeg likevel si noe om hvilke strategier elevene bruker. Kartleggingsprøven er lagt ved i vedlegg 3.

Oppgavene i en kartleggingsprøve bør være gode og åpne for at jeg kan besvare problemstilling og analysere dataene kvalitativt, jeg har derfor sett i litteraturen etter andre som har gjort lignende undersøkelser. Gray og Ånestad (2016) har analysert brøkoppgaver gitt i nasjonal prøve i matematikk og oppgavene virket bedre enn de jeg brukte i piloten. De har sett på hvilke underkonstrukter oppgavene inviterer til og mulige strategier som går an å bruke for å løse disse oppgavene. Jeg har valgt å bruke fire av de oppgavene som Gray og Ånestad (2016) har analysert i tillegg til fire andre tilsvarende brøkoppgaver gitt i nasjonal prøve. Oppgavene Gray og Ånestad (2016) analyserte var fra 2011, mens tilleggsoppgaven er fra nasjonal prøve 2016 og 2017. Alle oppgavene er standardisert og kontrollert i forbindelse med nasjonal prøve. Utvelgelsen baserte jeg på hvor mange underkonstrukter de ulike oppgavene inviterte til. Jeg ønsket at oppgavene skulle være åpne nok til at elevene fikk velge selv og kunne vise ulike underkonstrukter i tenkningen sin. Jeg valgte ikke diagnostiske oppgaver fordi en diagnostisk oppgave skal ideelt sett være konstruert slik at det bare er ved å bruke «rett tenkemåte» at en vil komme frem til rett svar (Brekke, 2002). Jeg er ikke ute etter «rett tenkemåte», men å gi rom for flere tenkemåter og strategier.

Noen av oppgavene har desimaltall i seg, men som nevnt i avsnitt 2.2.1 er det en relatert, men annen notasjon for brøk (Tian & Siegler, 2018). Det er fortsatt en struktur som inviterer elever inn i de ulike underkonstruktene, og derfor har jeg valgt å bruke disse oppgavene i kartleggingsprøven.

For å få større innsikt i hvorfor og hvordan de velger løsningsstrategiene sine har jeg stilt noen oppfølgingsspørsmål til oppgavene. Etter hver oppgave ble elevene spurt om: «*Hvorfor valgte du å løse det på denne måten?*». I tillegg hadde jeg to spørsmål på slutten av kartleggingsprøven: *«Kunne du løst oppgavene over på andre måter?»* og: *«Hvordan velger du løsningsmetode når du ser en oppgave?»* Dette i håp om at det gir meg et større bilde av hvordan elevene tenker når de løser oppgavene. Om jeg ikke kunne bruke det til noe annet så håpte jeg at det ville hjelpe meg når jeg analyserte strategiene. Noen av elevsvarene er også sitert i 5.3 der jeg diskuterer hva som påvirker elevenes strategivalg.

3.4 Utvalg

Informanter må velges ut fra problemstilling og hva som er formålet med datainnsamlingen (Creswell, 2012). Jeg ønsket å se på hvilke brøkstrategier elever har etter å ha fullført grunnskolen. Derfor valgte jeg å samle inn data på VG1 helt i begynnelsen av skoleåret før elevene var kommet godt i gang med matematikkundervisningen. Jeg ønsket ikke at pågående undervisning skulle påvirke strategivalgene til elevene. Informantene er 42 VG1-elever, 30 jenter og 12 gutter, 18 fra 1T (1 av dem tar R1) og 24 fra 1P. Dette er et større utvalg enn hva som er vanlig for kvalitative undersøkelser (Christoffersen & Johannessen, 2012). Elevene kommer fra 11 ulike fylker i Norge og har derfor gått på mange ulike ungdomsskoler gir validitet til funnene mine. Selv om utvalget er en homogen gruppe da elevene går på musikk/dans/drama og har et karaktersnitt i matematikk fra ungdomsskolen på 4,15. Jeg burde kanskje hatt med elever fra andre studieprogram hvis utvalget skulle vært representativt for alle elever. Ofte blir det et «bekvemmelighetsutvalg» fordi man velger elever man kan få tilgang på. Det ble derfor dette utvalget, med den studieretningen, på grunn av bekjentskap til faglærer i 1T-klassen.

3.5 Gjennomføring

Kartleggingsprøven ble gjennomført 3. september 2018 fra 8.00-9.20, 8.00-8.50 i den ene klassen og 8.30-9.20 i den andre. Elevene fikk beskjed på forhånd om at jeg var ute etter hvordan de løste oppgavene og at de derfor måtte skrive så utfyllende som mulig om hva de tenkte når de løste oppgavene. De ble også informert om at de kom til å bli anonymisert i masteravhandlingen min og at det ikke ville påvirke deres karakter i matematikkfaget da faglærer heller ikke kom til å få vite hvordan elevene hadde gjort det på kartleggingsprøven.

Siden dette var helt i begynnelsen av skoleåret hadde kun den ene klassen så vidt begynt med repetisjon av brøk i undervisningen. Elevene brukte fra 30 - 50 minutt på kartleggingsprøven. Det var ro i klasserommet gjennom hele testsituasjonen og ingen gikk ut av klasserommet før alle hadde levert. Kartleggingsprøven inneholdt også et samtykkeskjema som elevene skrev under på før de fikk svare på oppgavene og spørsmålene. Samtykkeskjema (se vedlegg 2) var eneste sted med navn på og dette ble separert fra kartleggingsprøven rett etter timen når jeg lagde en kodeliste til faglærer. Kodelisten er min koblingsnøkkel der navnene, som muliggjør identifisering av enkeltpersoner, blir erstattet med en kode eller nummer. Denne er viktig å holde adskilt fra datamaterialet, i mitt tilfelle kartleggingsprøvene. Kodelisten ble laget i tilfelle jeg ikke skulle få nok datamateriale til å svare på forskningsspørsmål og måtte gjennomføre intervju i tillegg. Skulle jeg ikke hatt den muligheten hadde elevene levert kartleggingsprøvene uten navn på og de ville vært helt anonymisert fra første stund. Da hadde jeg heller ikke trengt å søke til NSD.

3.6 Videre arbeid med resultatene

Kartleggingsprøvene ble oppbevart i to permer, en med 1T-besvarelsene og en med 1P-klassen sine besvarelser. Først gikk jeg gjennom oppgavene en etter en og så kjapt på hva elevene hadde gjort. Elever som hadde gjort det samme på oppgaven ble sortert sammen i en kategori og dette ble presentert i en tabell for å få oversikt over dette. Elevene er ikke identifisert med navn, men de er gitt en kode fra kodelisten. Disse elevkodene ble tatt med i tabellen slik at jeg enkelt kunne gå tilbake å se nøyere på oppgavesettene med samme strategi. I begynnelsen var de ulike løsningsmetodene bare beskrevet med en kort oppsummering av regnestykket/metoden som ble brukt.

Etter første oversikt gikk jeg på nytt gjennom tabellene og løsningsmetodene jeg hadde funnet. Jeg ønsket å ha en åpen tilnærming til datamaterialet og valgte å finne egne navn på de strategiene jeg fant (Creswell, 2012). Da ønsket jeg ikke å innblande underkonstruktene i navnene, men heller noe kort som beskrev metoden de brukte. Noen strategier inneholder likevel underkonstrukter i navnet der dette passet best, men dette er langt fra alle. Jeg gikk også på nytt gjennom de oppgavesettene jeg hadde plassert i usikker-kategorien for å se om de kunne plasseres i en av de eksisterende strategiene eller i en ny hvis strategien var tydelig og annerledes fra de andre. Jeg lagde en liste under hver tabell med navnene på strategiene, det var en tabell for hver oppgave, der jeg beskrev kort hva denne strategien gikk ut på. Denne oversikten med tabellene og beskrivelsene av strategiene er lagt ved i vedlegg 4. Denne har jeg tatt vare på til senere bruk slik at jeg lett kunne finne tilbake til oppgavesett jeg har lyst å se nærmere på.

I runde tre med oppgavesettene lagde jeg nye tabeller for bedre oversikt. Her var radene de samme med navn på strategiene, med unntak av de strategiene jeg etter hvert slo sammen. Jeg tok vekk kolonnene med hvilke elever som hadde løst oppgaven fordi antall elever, sortert etter klasse, var nok. Til slutt la jeg en ekstra kolonne med kategorien underkonstrukter slik at man lettere kunne se hvilke underkonstrukter som er synlige i de ulike strategiene. I utgangspunktet var det tenkt at jeg skulle knytte en strategi til ett underkonstrukt, men med videre arbeid av strategiene ble det tydelig at noen løsningsstrategier inneholdt elementer eller tenkning innen flere av underkonstruktene. Da ble det mer naturlig og heller beskrive hvordan de ulike underkonstruktene ble synlige i strategiene. Dette har vært en lengre prosess der jeg igjen og igjen har gått gjennom strategiene og leitet etter litteratur som omhandler både strategier og underkonstruktene.

Etter alle disse rundene med analysering av strategiene ble det tydelig at en eller to strategier var mer dominerende enn de andre og jeg ønsket derfor å presentere en profil med «den «typiske» elevs strategier». Jeg valgte derfor ut strategien eller strategiene som flest elever valgte å bruke. I fire av oppgavene var det bare en strategi som skilte seg ut, men i de andre oppgavene var det gjerne to som var dominerende. Derfor samlet jeg disse strategiene på nytt, med hvilke underkonstrukter som ble synlige og hvor mange prosent av elevene som benyttet seg av dem. Jeg sjekket også om det var noe forskjell mellom 1T- og 1P-klassen til senere diskusjon. Disse opplysningene ble oppsummert i tabell 9 for en lett og god oversikt, men ble også utdypet i avsnitt under tabellen, oppgave for oppgave. Der ble det også kort diskutert om strategien eller strategiene var naturlige i forhold til oppgaveteksten. Dette ønsket jeg å diskutere fordi noen underkonstrukter er mer synlige i en oppgave enn andre oppgaven også inviterer til. Er det noe sammenheng med formuleringen av oppgaven og underkonstruktene som blir synlige i strategiene?

3.7 Reliabilitet og validitet

I forskning står kravene om validitet og reliabilitet sentralt. Reliabilitet handler om hvor troverdig forskningen er (Kvale & Brinkmann, 2015). Begrepet kommer fra det engelske ordet *reliability*, som betyr pålitelighet (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 23), og er knyttet til nøyaktigheten av undersøkelsen. Hvordan blir data samlet inn, hvilke data brukes og hvordan blir data bearbeidet (ibid)? For at forskningen skal være reliabel må det begrunnes at de samme resultatene hadde oppstått hvis forskningen var gjennomført på en annen lignende gruppe i samme kontekst. Validitet derimot handler om hvor relevant datamaterialet som representerer fenomenet er (Kvale & Brinkmann, 2015). Begrepet er fra det engelske ordet *validity*, som betyr gyldighet (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 24). Det knyttes til ærligheten, grundigheten og objektiviteten til forskeren.

For å sikre mest mulig reliabilitet i dette prosjektet må elevene være motiverte nok til å gjøre en ærlig innsats på kartleggingsprøven. Elevene ble derfor informert muntlig og skriftlig om at det var frivillig å delta, om at de skulle gjøre sitt beste og skrive utfyllende hvordan de tenkte når de løste oppgavene på kartleggingsprøven. Slik at elevbesvarelsene ble mest mulig nøyaktig og jeg kunne forstå hvordan elevene hadde løst oppgavene. Kartleggingsprøven ble laget slik at oppgavene ikke skulle ta lengre tid enn at elevene kunne holde konsentrasjonen og motivasjonen oppe gjennom hele prøven. I tillegg har jeg gått gjennom analysen og datamaterialet gjentatte ganger for å sikre at tolkningen min av dataene er mest mulig nøyaktig. Dette minsker risikoen for at elevbesvarelsene tolkes til feil strategi. Jeg har også støttet meg på litteratur i analysen når jeg begrunner hvilke underkonstrukter som blir synlige i strategiene.

For å sikre mest mulig validitet i undersøkelsen har jeg gjort ulike tiltak. Jeg har benyttet «mixed method» og en kartleggingsprøve som i utgangspunktet er en kvantitativ metode. Da kan jeg samle inn flere elevers besvarelser enn hvis jeg gjennomførte et oppgaveintervju. Det gjør at jeg kan sjekke flere elevers strategier, noe som gir meg en større bredde i datamaterialet. Oppgaver og spørsmål er i samme rekkefølge og dette gir en mindre fleksibilitet enn intervju, men til gjengjeld blir det lettere å sammenligne elevers besvarelser også på tvers av klassene. Samtidig kan jeg analysere hver strategi mer kvalitativt når jeg sorterer elevenes løsningsstrategier inn i 3-5 strategier på hver oppgave. Dette gir meg muligheten til å dykke dypere ned i hver strategi og undersøke hvilke underkonstrukter som kommer til syne i de ulike strategiene. Alle oppgaver benyttet på kartleggingsprøven var standardiserte oppgaver fra nasjonal prøve. Der fire av oppgavene er også analysert av Gray og Ånestad (2016), noe som gir meg mulighet til å sammenligne mine funn med deres analyse. I tillegg kommer elevene fra 11 ulike fylker og mange forskjellige ungdomsskoler. Dette gjør at elevenes strategier ikke er påvirket av en lærer, en lærebok eller en skole, og gir validitet til profilen av den «typiske» elevs strategier.

Det er viktig å være oppmerksom på og reflektere rundt faktorer som kan påvirke reliabilitet og validitet. Selv om målet er å minimere faktorer som reduserer validiteten så mye som mulig kan ikke prosjektet sies å være absolutt valid eller ikke (Christoffersen & Johannessen, 2012).

3.8 Etiske refleksjoner

Som forsker må man forholde seg til forskningsetiske retningslinjer (NESH, 2018), både ved planlegging og gjennomføring av et forskningsprosjekt. Alle informanter skal gi frivillig informert samtykke før prosjektstart. De skal ha informasjon om forskningsprosjektet, overordnet mål og hovedtrekkene i designet. De må vite at det er frivillig å delta, og at de når som helst kan trekke seg fra prosjektet uten å oppgi grunn. Eleven skal forstå at deltagelse i prosjektet ikke vil få noe konsekvens for skolehverdagen hans eller hennes verken om han eller hun deltar eller ikke. Dette ble elevene informert om muntlig og skriftlig i et samtykkeskjema (vedlegg 2). Alle som deltok i undersøkelsen var over 15 år og siden det ikke ble samlet inn noe sensitive opplysninger kunne elevene selv samtykke. Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste, NSD, ble informert og de godkjente prosjektet.

Elevene som deltar har i utgangspunktet krav på at personlig informasjon blir behandlet konfidensielt eller med fortrolighet (NESH, 2018). De skal ikke kunne avsløres. Derfor ble det lagd en kodeliste der navnene til elevene ble koblet sammen med en kode. Samtykkeskjema med navn ble adskilt fra resten av kartleggingsprøven hvor kun en kode stod igjen. Kodelisten eller koblingsnøkkelen ble oppbevart langt vekke fra kartleggingsprøvene, hos faglærer, til jeg eventuelt ville trenge den til senere intervju. Dette ble ikke aktuelt.

Forskeren har også et ansvar for egen forsknings troverdighet (NESH, 2018). Fabrikkering, forfalskning, plagiering og andre lignende alvorlige brudd på god vitenskapelig praksis er ikke forenlig med slik troverdighet (ibid.). Dette har jeg prøvd å unngå ved å bruke direkte sitat fra elevene, jeg har gjennomgått strategiene så nøyaktig som mulig og lest besvarelsene flere ganger for å se om jeg har misforstått eller oversett noe. Jeg har også benyttet litteratur så ofte jeg kan, både når det stemmer overens med mine funn og ikke, for å begrunne valg og gi resultatene en teoretisk kontekst.

4 RESULTAT OG ANALYSE

I dette kapittelet går jeg gjennom resultatene fra kartleggingsprøven oppgave for oppgave og presenterer strategiene i tabeller med antall elever som har benyttet seg av de ulike strategiene. Jeg har valgt å ha en åpen tilnærming til datamaterialet og har beskrevet strategiene ut ifra hva elevene har gjort (Creswell, 2012). Deretter beskriver jeg de ulike strategiene og diskuterer hvilke underkonstrukt som kommer til syne i strategiene til elevene. Noen strategier mener jeg kan kategoriseres som backup-strategi, da har jeg også begrunnet dette. De andre strategiene tenker jeg er retrievalstrategier, men dette har jeg ikke begrunnet. Til slutt presenteres majoritetens strategier i en profil, der det også diskuteres om strategiene er naturlig i forhold til oppgaveformuleringen.

4.1 Analyse av kartleggingsprøven: oppgave for oppgave

Her er en oversikt over hvilke strategier elevene bruker når de løser oppgavene på kartleggingsprøven (hele kartleggingsprøven kan man finne i vedlegg 3). Dette har jeg satt opp i tabeller med egenproduserte navn på strategiene nedover og antall elever som har brukt strategier og hvilke underkonstrukter som er synlige bortover. Elevene er delt inn etter hvilken klasse de går i for å se om det er store forskjeller på 1T-klassen og 1P-klassen. Under tabellene står en beskrivelse av hver strategi med liten analyse av hvilke underkonstrukter som er synlige i strategien. Hvilke underkonstrukter som er synlige argumenteres ut fra definisjonene og hva Gray og Ånestad (2016) har gjort i sin analyse. Jeg er ikke alltid enig med dem og da begrunner jeg dette. Noen elever har brukt en strategi som skal gi riktig svar, men eleven har gjort noe galt underveis slik at svaret blir feil, da står antall elever med riktig svar først og totalt elever i parentes inkludert de med galt svar. På noen oppgaver er det flere elever som har valgt en strategi som gir galt svar da er strategien <u>understreket</u>.

4.1.1 Oppgave 1

Hvor mange ruter er $^{1}/_{5}$ *av rutene under? Løs oppgaven og forklar hvordan du tenker.*

Figur 16: Figur 4.4 i Gray og Ånestad (2016, s. 70).

Tabell 1: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 1 på kartleggingsprøven og underkonstruktene knyttet til strategiene

Strategi	**1T antall**	**1P antall**	**Totalt**	**Underkonstrukter**
Dele antall ruter på fem	12	12 (13)	25	Del-hele, operator, kvotient
Via prosent	1	1	2	Operator, forhold
Ekvivalens $^{1}/_{5} = {}^{2}/_{10}$	3	2	5	Forhold
Dele inn i fem deler	1	4	5	Del-hele
Usikker	1	3 (4)	5	Vanskelig å si
Totalt	18	24	42	Alle underkonstrukter representert, men i ulik grad.

Dele antall ruter på fem: «*Jeg regner at det er 100 ruter med å ta 10 · 10. Deretter tar jeg* $^{100}/_{5}$ *som blir 20*».

Dette er den strategien som flest elever brukte. Det er ikke mulig å finne det mest fremtredende underkonstruktet i strategien, men det er flere underkonstrukter som er synlige. Det å dele antall ruter på fem for å finne ut hvor mye en del er kan minne om del-hele-tenkning, fordi de ønsker å se på en del av helheten (Lamon, 2012). Hvor bevisst eleven er på at det er dette de gjør i regnestykket er uvisst. Samtidig vil regnestykket se helt likt ut hvis man bruker lar $^{1}/_{5}$ operere på helheten 100 ruter (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007): $100 \cdot {}^{1}/_{5} = {}^{100}/_{5} = 20$. Ingen av elevene skrev den første delen av regnestykket, men skrev kun $^{100}/_{5} = 20$. Det kan være elevene har tenkt dette, men ikke tatt seg tiden til å skrive det ned. Språket i oppgaveformuleringen kan også være med å kreve litt operator-tenkning når de spør etter «$^{1}/_{5}$ av rutene». I tillegg kan elevene ha vært innom kvotient-tenkning ved å stille spørsmålet:

Hvor mange ruter blir det når man skal dele 100 ruter på fem? Dette er kvotient-tenkning fordi det minner om delingsdivisjon (Lamon, 2012).

Denne strategien inneholder tenkning fra tre underkonstrukter som elevene bruker fleksibelt til å løse oppgaven. Løsningsstrategien er ikke beskrevet i Gray og Ånestad (2016, s. 70), men kan knyttes til både del-hele og operator-strategien de beskrev der. Vi ser altså at underkonstruktene overlapper litt og ikke er lett å separere i denne strategien. Dette bare bekrefter at underkonstruktene ikke kan isoleres fra hverandre, men at de henger sammen slik som modellen til Behr et al. (1983) viser (avsnitt 2.1.3). Spesielt er del-hele knyttet tett på de andre underkonstruktene. Behr et al. (1983) mener del-hele er grunnlaget for å utvikle forståelse i de andre underkonstruktene, mens Kieren mener del-hele gjennomsyrer de andre underkonstruktene (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Via prosent: Elevene gjør om brøken til prosent: «*$^{1}/_{5}$ = $^{2}/_{10}$ =20%. Dette er $^{1}/_{5}$ av rutene, fordi at $^{1}/_{5}$ er like mykje som 20%. 20% av 100 ruter er 20 ruter.*» Prosentregning er en annen representasjonsform enn brøk (Tian & Siegler, 2018), men jeg har valgt og inkludere dette. Selv om eleven velger å bruke prosentregning kan dette minne om operator-tenkning ved at eleven tar 20% av 100 ruter og dermed opererer det på rutene og forminsker antall ruter med 80%. Oppgaveformuleringen inviterer til operator-konstruktet da den bruker «$^{1}/_{5}$» som tydelig operator i teksten. I tillegg viser eleven antydning til ekvivalens-tenkning ved å skrive «*$^{1}/_{5}$ = $^{2}/_{10}$*» og det igjen litt forståelse for forhold-konstruktet (Gray & Ånestad, 2016). Denne strategien er ikke beskrevet i Gray og Ånestad (2016).

Ekvivalens $^{1}/_{5}$ = $^{2}/_{10}$: Å finne $^{1}/_{5}$ av 100 er det sammen som å finne $^{2}/_{10}$ av 100, elevene bruker dette til å finne antall ruter/rekker. Dette viser forståelse for ekvivalens og at brøkene er i samme ekvivalensklasse, som er knyttet spesielt til forhold i Behr et al (1983) sin modell (avsnitt 2.1.3). Dette fordi elevene forstår at det er forholdet mellom teller og nevner som er viktig og at et 1:5 forhold er det samme som 2:10 forhold (Gray & Ånestad, 2016). *«Så tenker jeg at 1 av 5 er 1 så da må det bli 2 av 10»*. Dette skriver eleven som har fargelagt 2 av de 10 rekkene.

Dele arealet inn i fem deler: Elevene deler rutene inn i fem like store bokser for så å se/finne ut hvor mange ruter det er i en boks: *«Jeg fant ut dette ved å bare se på det og dele inn i 5 bokser»*. Dette er en tydelig del-hele-strategi og en tolkning som er nærliggende på grunn av illustrasjonen i oppgaven ifølge Gray og Ånestad (2016, s. 70) som har allerede beskrevet denne strategien. Ingen andre underkonstrukter er synlige i strategien. Dette vil jeg klassifisere som en backup-strategi fordi elevene manipulerer illustrasjonen (Siegler, 1987 i Ostad, 1997). Det er flere i 1P-klassen som bruker denne strategien enn i 1T.

Usikker: Ulike strategier som ikke er tydelig for meg. For eksempel har en for lite forklaring til at jeg klarer å se strategien tydelig, og knytte det til noe underkonstrukt.

4.1.2 Oppgave 2

Fredrik bruker denne oppskriften når han lager riskrem:

Riskrem til 6 personer
4dl ris
7dl melk
0,5dl kremfløte
2ss sukker

Han skal lage til 15 personer. Hvor mye kremfløte skal Fredrik bruke? Skriv utfyllende hvordan du tenker når du løser oppgaven.

Tabell 2: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 2 på kartleggingsprøven og underkonstruktene knyttet til strategiene.

Strategi	**1T antall**	**1P antall**	**Totalt**	**Underkonstrukter**
$^{15}/_{6}$ som operator	3	5	8	Operator og kvotient
$^{5}/_{2}$ som operator	4		4	Operator, kvotient, forhold
2,5 som operator	3		3	Operator
Gjentatt addisjon	8	16	22	Operator
Multiplisert med 3		1	1	Operator
Blank/ikke løst		2	2	Vanskelig å si
Totalt	18	24	42	Operator, men litt kvotient og forhold også.

$^{15}/_{6}$ som operator: Dividere på 6 og multiplisere med 15: «*Jeg ganger alle ingrediensene med $^{15}/_{6}$*». Her forstørrer eleven oppskriften med $^{15}/_{6}$ og brøken opererer på kremfløten og øker mengden (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Dette er en tydelig operator-tenkning og strategien faller derfor inn under det underkonstruktet. Samtidig er det noen elever som deler det opp og tar 0,5:6 = 8,33ml før de regner ut 8,33ml · 15 = 1,25: «*Eg fant ut kor mykje fløte 1 person trengte. Så multipliserte det meg 15*». Dette kategoriserer Gray og Ånestad (2016, s. 74) som kvotient-tenkning. Når elevene først finner en persons mengde kremfløte er det litt delingsdivisjon i bildet som gjør at elevene bruker kvotient-tenkning (Lamon, 2012). Likevel kan man si at elevene har brukt samme operator når de etterpå multipliserer med 15. Elevene har delt opp operatoren i to operasjoner, divisjon først og så multiplikasjon, men det er fortsatt operasjonstenkning (Lamon, 2012) og multiplikasjon er kommutativ så hvilken rekkefølge man gjør det i spiller heller ingen rolle.

$^5/_2$ som operator: Elevene dividerer 0,5dl med 2 og så multipliserer med 5. Dette er samme tenkemåte som i «$^{15}/_6$ som operator» bare det at de har forkortet brøken med 3: Fra $^{15}/_6$ til $^5/_2$. Det betyr at det også her er operator-tenkning og litt kvotient-tenkning. I tillegg viser elevene forståelse for ekvivalens når de bruker den ekvivalente brøken $^5/_2$ og dermed også forhold-konstruktet (begrunnelse i avsnitt 2.1.3). Jeg vil også kalle det en mer fleksibel strategi enn «$^{15}/_6$ som operator» fordi elevene bruker ekvivalensforståelsen til å ta en god snarvei i utregningen og det gjør dem mer fleksible i strategien. Det er lettere å dividere med 2 i stedet for 6 og multiplisere med 5 og ikke 15. Denne strategien var det kun 1T-elever som brukte. En av elevene svarer på hvorfor han eller hun valgte å løse det med denne strategien: «*Fordi det var det første jeg kom på, og jeg vet ikke hvordan jeg eller kunne gjort det. Jeg kunne delt på 6 og ganget med 15, men det er mer tungvint.*» En av de fire elevene kategorisert med denne strategien gjorde det motsatte: Multipliserte først med 5 og fikk kremfløte til 30 personer og så dividerte med 2. Denne eleven viser likevel forståelse for de samme underkonstruktene som de tre andre.

2,5 som operator: Elevene multipliserer kremfløte med 2,5 som er lik $^{15}/_6$ og $^5/_2$, men det kommer ikke alltid frem hvordan de fant 2,5. Når de multipliserer med 2,5 opereres kremfløten med dette desimaltallet og det er per definisjon operator-konstruktet (Charalamous & Pitta-Pantazi, 2007). En av elevene har multiplisert alle ingrediensene med 2,5 før han eller hun skriver at det trengs 1,25dl kremfløte. Eleven sier: «*Jeg hadde bare trengt å gange kremfløten med 2,5, men her har du hvertfall prinsippet. En enkel og oversiktlig metode*.» Det ser ut til at eleven ikke brukte nok tid til å tenke igjennom strategien før den ble utført. Denne strategien eller operator-varianten er ikke tatt med i Gray og Ånestad (2016) sin analyse.

Gjentatt addisjon: Elevene adderer ingrediensene enten ved å ta: 6 + 6 + 1 + 1 + 1 eller 6 + 6 + 3, jeg kaller derfor denne strategien for gjentatt addisjon. I flere av oppgavene mener jeg at elevene raskere finner den additive forskjellen enn den multiplikative sammenhengen, for eksempel når de løser denne oppgaven. En elev begrunner valget av denne strategien og sier: «*Det virka som de enklaste, men eg ser at det hadde vert enklare å dele på to (0,25dl) også gange med 5 som også ville blitt 1,25.*» Eleven ønsket å bruke den enkleste strategien, men mener også at «$^5/_2$ som operator»-strategien i ettertid virker lettere. Dette er den strategien som flest elever har valgt å bruke. I strategien blir operator-konstruktet synlig fordi multiplikasjon kan sees på som gjentatt addisjon: $5 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$. Dette er en back-up strategi fordi elevene manipulerer tallene på en mer tungvint måte, bruker en oppskrift (Ashcraft, 1992) og strategien bruker mer plass i arbeidsminnet (Siegler, 1987 i Ostad, 1997). Lamaire & Siegler (1995, s. 86) mener at gjentatt addisjon er den mest brukte back-up strategien i multiplikasjon, og i analogi til det er dette også en backup-strategi innunder operator-konstruktet.

<u>Multiplisert med 3</u>: En elev har multiplisert kremfløten med 3, men da får man kremfløte til 18 personer og ikke 15 som ble spurt etter. Hva som gjør at eleven har gjort det slik er ikke tydelig, eneste forklaring var: «*0,5dl · 3 = 1,5dl*». Kanskje regnet eleven feil og tenkte at $3 \cdot 6 = 15$ eller så tok eleven en snarvei og later som om han eller hun ikke vet at det er feil. Tenkningen ligger mest innenfor operator-konstruktet, der operatoren er heltallet 3 og ikke en brøk.

Blank/ikke løst: Elever som ikke har løst oppgaven, kan stille oss spørsmål om hvorfor. Er oppgaven for vanskelig eller gir elevene opp for fort?

Det er mulig å løse oppgaven med en forhold-strategi der elevene ikke bruker ekvivalens, men heller selve forholdet mellom 6 og 15 mer direkte. Dette kan gjøres ved å si at 6:15 = 2:5 = 1:2,5 = 0,5:1,25. Denne strategien ser ikke til å ha blitt brukt direkte når jeg ser på besvarelsene til elevene. Alle strategiene som ble brukt inneholdt operator-tenkning i forskjellig grad, men dette er ikke rart når det matematiske innholdet inviterer så tydelig til det. Forhold-strategien som ikke ble brukt er nesten den eneste strategien uten operator-tenkning. Gray og Ånestad (2016) mente oppgaven også inviterte tydelig inn til kvotient-tenkning, dette ble mindre brukt blant elevene i denne undersøkelsen.

4.1.3 Oppgave 3

Johanna skal fylle 36 liter saft på flasker. Hver flaske rommer 0,5 liter. Hvor mange flasker trenger Johanna? Løs oppgaven og forklar utfyllende hvordan du tenker.

Tabell 3: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 3 på kartleggingsprøven og underkonstruktene knyttet til strategiene.

Strategi	**1T antall**	**1P antall**	**Totalt**	**Underkonstrukter**
Antall liter delt på 0,5	7 (8)	7 (9)	17	Kvotient
Antall liter multiplisert med 2	8	9 (10)	18	Kvotient, forhold og del-hele
Antall liter delt på 2	2	5	7	Kvotient, forhold
Totalt	18	24	42	Inviterer ikke til operator

Antall liter delt på 0,5: Antall liter er $^{36l}/_{0,5l}$ fordi: «*Når eg veit kor mange liter saft ho skal ha og kor mykje ei flaske rommer, vil eg berre dividere antall liter saft ho skal ha med antall liter kvar flaske rommer*.» Dette er klassisk målingsdivisjon (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007): Hvor mange flasker blir det når vi deler antall liter (36l) opp i like store deler/flasker på 0,5l? I denne løsningsstrategien er det derfor kvotient-konstruktet som er fremtredende. Så lenge eleven tenker at helheten her er 1 liter så kan ikke denne strategien falle innenfor del-hele-konstruktet. Hvis det hadde vært helheten (1l) som ble delt opp kunne dette falt innenfor del-hele-konstruktet, men når det er dividend (26l) som ble delt og da er dette kvotient (ibid.). I de tilfeller der helheten og dividend er det samme vil begge underkonstrukter være synlige.

Antall liter multiplisert med 2: Antall liter: 36 multiplisert med 2 fordi det trengs to flasker per liter. Dette kan også regnes som en type målingsdivisjon med en litt annen utregningsmetode og kan derfor knyttes til kvotient-konstruktet (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Elevene kan også ha tenkt at det er et 2:1 forhold fordi man trenger 2 flasker per liter, da trengs det 36 · 2 flasker og underkonstruktet forhold blir synlig (Gray & Ånestad, 2016). En elev skriver: «*Siden 1 flaske er ½ liter, så betyr det at 1 liter saft kan fylle 2 flasker. Vi ganger da 2 med antall liter 36.*» Del-hele-tenkning kan også være innblandet hvis elever ser for seg de 36 literne som adskilte enheter. Eleven kan tenke at vi har 36 enheter og det trengs 2 flaske per enhet som også gir regnestykket: 36 · 2.

Antall liter delt på 2: Antall liter, 36, delt på 2. Dette gir galt svar ved utregning og spørsmålet er om alle 7 elever har bevisst brukt denne strategien eller om de hadde endret den hvis de hadde tenke seg litt mer om. Noen elever tror oppriktig på strategien og beskriver: *«Hun trenger 18 flasker ser vi, hvis vi deler antall liter hun skal fylle på med antall flasker hun trengte for å fylle 1 liter. Eller så kunne du også ha tatt 36l · 0,5 og fått det samme.»* Denne strategien inneholder tenkning innen kvotient-konstruktet og forhold på samme måte som forrige strategi.

4.1.4 Oppgave 4

Plasser brøkene i stigende rekkefølge: $^{2}/_{5}$ $^{1}/_{5}$ $^{1}/_{2}$ $^{2}/_{3}$ $^{1}/_{4}$. *Forklar hvordan du går frem for å finne ut dette.*

Tabell 4: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 4 på kartleggingsprøven og underkonstruktene knyttet til strategiene.

Strategi	1T antall	1P antall	Totalt	Underkonstrukter
Via prosent	6	5	11	Måling, del-hele
Via desimaltall	3	7	10	Måling, del-hele
Tegne bokser/pizzastykker	4	5	9	Del-hele
Felles nevner	1	3	4	Måling og forhold
Sammenligne brøker	4	3	7	Måling og forhold
Ikke fullført		1	1	Vanskelig å si
Totalt	18	24	42	Måling, del-hele, forhold

Via prosent: Elevene gjør om brøkene til prosent for å lettere kunne plassere på tallinje og/eller finne rekkefølgen. Måling-konstruktet handler om å forstå brøk som en tallstørrelse og kunne sammenligne størrelsen på ulike brøker (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), derfor inviterer denne oppgaven tydelig til dette underkonstruktet. Elevene bruker i denne strategien en annen representasjonsform for brøk – prosent (Tian & Siegler, 2018). En elev begrunner valget med: *«Eg gjorde det på denne måten fordi det er litt vanskelig å sjå kva som er størst av å berre sjå på brøkane. Det er mykje enklare å sjå kva som er størst i prosent.»* Elevene er nødt til å forstå hvor stor del av helheten hver brøk representerer for å kunne sammenligne dem, selv om elevene her har omgjort brøkene til prosent er denne forståelsen for hvor stor «delen» er likevel tilstede, derfor vil jeg si at det er noe del-hele-tenkning involvert.

Det har vært omdiskutert om måling og del-hele egentlig er to forskjellige underkonstrukter eller om del-hele burde vært tatt vekk (se avsnitt 2.1.3). Kieren presenterte i 1976 (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) fire underkonstrukt: Måling, operator, kvotient og forhold hvor del-hele var en del av måling. Vi ser at forståelsen for hvor stor del av helheten en brøk presenterer er nødt til å være tilstede for å kunne sammenligne brøker og disse to underkonstruktene er derfor tett knyttet sammen.

Via desimaltall: Elevene gjør om brøkene til desimaltall for å lettere kunne plassere på tallinje og/eller finne rekkefølge. Denne strategien minner veldig om den forrige bare det at elevene har valgt representasjonsformen desimaltall heller enn prosent (Tian & Siegler, 2018). Strategien inneholder derfor, med samme argumentasjon, både måling-tenkning og del-hele-tenkning.

Tegne bokser/pizzastykker: Elevene tegner bokser/pizzaer med pizzastykker for å sammenligne størrelsen på brøkene. Hvis elevene klarer å dele boksene/pizzaene i like store deler er det en visuell strategi og kan regnes som en backup-strategi (Siegler, 1987 i Ostad, 1997) for å finne rekkefølgen på brøkene. Del-hele-konstruktet er tydelig synlig i denne strategien (Gray & Ånestad, 2016, s. 72). En del av elevene argumenterte at de brukte denne strategien fordi «*det var lett*» og «*det lærte jeg på barneskolen*». En annen elev skrev: *«Å tegne det opp pleier og hjelpe meg når det er små brøker, selv om det finnes andre måter som kanskje er mer nøyaktige.»* Noen pizzaer var mer unøyaktig enn andre og da var det vanskeligere å se svaret. Det gjorde at en elev svarte feil (105 fra vedlegg 4).

Felles nevner: Elevene finner felles nevner for å sammenligne, noen finner fellesnevner kun mellom ${}^{1}/_{4}$ og ${}^{1}/_{5}$ for å finne rekkefølgen der. Andre bruker felles nevner mellom alle brøkene – enten 60 eller 100. Dette er også tenkning innen måling-konstruktet: Finne ut størrelsen på brøkene og vurdere om noen av brøkene er ekvivalente (Lamon, 2012). Dette er vurderinger som gjerne blir gjort uten at de nødvendigvis blir skrevet ned: *«Eg såg på brøkene og plasserte først de eg visste, som ${}^{1}/_{5}$ var minst, ${}^{2}/_{3}$ var størst og ${}^{1}/_{2}$ var nest størst. Så fant eg felles nemner til 4 og 5 som var 20. Så gange eg 4 med 5 og 5 med 4 så fant eg ut at ${}^{2}/_{5} > {}^{1}/_{4}$.»* I en slik strategi der flere vurderinger blir gjort, kan også forholdstenkning være innblandet siden ekvivalens og forhold er naturlig knyttet sammen (Behr et al., 1983). Forståelse for forhold-konstruktet, og at det er forholdet mellom teller og nevner som avgjør om to brøker er like, gir forståelse for ekvivalente brøker (Lamon, 2012).

Sammenligne brøker: Sammenligne brøkene ved å se hvilken som er minst, og jobbe seg oppover. Flere strategier blir brukt: Sammenligne med $^1/_2$, sammenligne to brøker de er usikre på ved å finne fellesnevnere osv. Denne strategien er også beskrevet i Gray og Ånestad (2016). De elevene som bruker ½ som bruker først og fremst tenkning innenfor måling-konstruktet (ibid.). Dette fordi Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) mener at måling er knyttet til kvantiteten eller størrelsen på brøken eller avstanden den utgjør fra 0 på en tallinje. Når elevene bruker $^1/_2$ som referansepunkt sammenligner de størrelsene på brøkene med størrelsen til $^1/_2$ eller hvor på tallinjen brøken bør plasseres i forhold til $^1/_2$. Her må eleven også forstå ekvivalente brøker og forhold-konstruktet for å plassere brøkene riktig. Noen drar inn strategien «felles nevner» også. Totalt blir underkonstruktene måling og forhold brukt fleksibelt til å finne en løsning.

Ikke fullført: Elev har ikke fullført oppgaven og det er vanskelig å si noe om strategivalg og synlige underkonstrukter.

4.1.5 Oppgave 5

Lise skal svømme 100m. En lengde i svømmebassenget er 12,5m. Hvor mange lengder må Lise svømme? Forklar utfyllende hvordan du kommer frem til dette.

Tabell 5: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 5 på kartleggingsprøven og underkonstruktene knyttet til strategiene.

Strategi	**1T antall**	**1P antall**	**Totalt**	**underkonstrukter**
Total distanse delt på en lengde	10	12	22	Kvotient og del-hele
Gjentatt subtraksjon	1		1	Kvotient og måling
Gjett og prøv	6	6	12	Kvotient og måling
Gjentatt addisjon	1	5	6	Kvotient og måling
Blank		1	1	Ingen underkonstrukt
Totalt	18	24	42	Kvotient, del-hele og måling

Total distanse delt på en lengde: Elevene har tatt total distanse: 100m og dividert det med en lengde: 12,5m og da funnet antall lengder som må svømmes. Dette er klassisk målingsdivisjon (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007): Hvor mange lengder blir det når vi deler helheten (100m) med 12,5m som er distansen til en lengde? For å forstå underkonstruktet kvotient må elever forstå de to modellene for divisjon: Delingsdivisjon og målingsdivisjon (ibid.). Derfor mener jeg at denne strategien bruker kvotient-konstruktet aktivt. Samtidig kan også noe del-hele-tenkning komme til syne hvis elever tenker at 100m er helheten. Elevene deler opp 100m i lengder på 12,5m, og da kan det argumenteres at del-hele blir synlig i strategien (ibid.). I stedet for å fysisk dele en totallengde på 100m inn i lengder på 12,5m og telle antall lengder kan man enkelt regne det ut med regnestykket ${}^{100m}/_{12,5m}$. Det er både kvotient og del-hele når dividend og helheten er den samme: 100m.

Gjentatt subtraksjon: Elevene subtraherer 12,5m fra 100m helt til de kommer til 0, slik finner de antall lengder Lise må svømme til hun har svømt 100m. En elev skriver: *«100 - 12,5 = 87,5, 87,5 - 12,5 = 75, 75 - 12,5 = 62,5, 62,5 – 12,5 = 50. Dette forteller at 4 lengder er 50 m. Det betyr at Lise må svømme 8 lengder for å svømme 100m.»* Dette er en form for målingsdivisjon og jeg vil si en backup-strategi innenfor kvotient-konstruktet (Siegler, 1987 i Ostad, 1997). Dette fordi gjentatt subtraksjon er en primitiv strategi innen divisjon (Mulligan & Mitchelmore, 1997). Tenkningen kan også minne litt om måling-konstruktet hvis elevene tenker på en tallinje når de løser det. Hvor mange ganger må man trekke fra 12,5m fra 100m, hvor mange hopp på tallinjen med lengde 12,5m?

Gjett og prøv: Elevene har ofte en intuisjon på hvilket tall som er riktig eller i nærheten av svaret og sjekker dette forslaget. Hvis det ikke er helt riktig gjør de det på nytt med det nye antallet de tror er svaret. For eksempel: «*Jeg tenker at jeg må finne ut hvor mange ganger 12,5 får opp i 100. Det synes jeg så litt vanskelig ut, så jeg skal prøve å gange 10 for seg og 2,5 for seg selv. 2,5 · 4 = 10, 10 · 4 = 40. 10 + 40 = 60. 2,5 · 8 = 20, 10 · 8 = 80. 20 + 80 = 100. Lise må svømme 8 lengder.* Denne eleven prøvde seg først på 12,5 · 4 og fant ut av at dette ble 50 (eleven skrev 60) og at da måtte svaret være 8. Dette bekreftet eleven ved å regne ut etterpå, men regnestykket var litt vanskelig så 12,5 ble delt opp i 10 + 2,5. Elevene fikk ikke bruke kalkulator under utregning så da måtte noen elever være kreative i utregningen.

Gjett og prøv strategien tror jeg er en vanlig strategi, spesielt når elevene ikke er sikker på hva de skal gjøre. I denne strategien på denne oppgaven er det kvotient-konstruktet som blir synlig fordi elevene vet hvor mye en del av helheten inneholder (12,5m), men de prøver å gjette seg frem til hvor mange deler helheten da må deles inn og det kalles målingsdivisjon (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Siden elevene prøver seg frem og gjetter i stedet for å regne det ut med regnestykket ${}^{100m}/_{12,5m}$ mener jeg dette er en backup-strategi. Elevene kan ha brukt litt måling-tenkning slik som i «gjentatt subtraksjon».

Gjentatt addisjon: Elevene adderer litt og litt og ser hvor mange ganger 12,5m må legges sammen for å få 100 meter. Noen bruker multiplikasjon for å sjekke når de ser et mønster eller hva svaret kan være. I multiplikasjon er gjentatt addisjon den mest brukte back-up strategien (Lamaire & Siegler, 1995, s, 86). I analogi til dette vil jeg si at denne strategien er en backup-strategi innen operator-konstruktet.

Her har vi to forskjellige elever:

Elev 1: *12,5 + 12,5 + 12,5 + 12,5 + 12,5 = 52,5 + 12,5 + 12,5 + 12,5 = 90 + 12,5 = 102,5*
102,5 ≈ 100m som gir 9 lengder.

Elev 2: *12,5 (en lengde) · 2 = 25 ($^1/_4$ av 100m)*
12,5 · 8 = 100m. Hun må svømme 8 lengder.

Elev 1 regner det ut så primitivt man kan og adderer litt etter litt til han eller hun kommer så nærme 100m som mulig, her er det skjedd en feil: 12,5 · 5 = 52,5 i stedet for 62,5 slik at eleven får galt svar. Noen elever velger å gjøre det slik, andre velger å ta noen snarveier slik som elev 2 og multipliserer heller litt og litt til de «ser» svaret. Elevene vet hvor mye en del av helheten er (12,5m), men de prøver å finne/addere seg frem til hvor mange deler helheten da må deles inn, dette er derfor målingsdivisjon og hører til underkonstruktet kvotient slik som i forrige strategi. Samtidig med lignende argument som Gray og Ånestad (2016) bruker i oppgave 2, kan man lure på om det er noe måling-tenkning til stede. Tenker elever på tallinje og hvor mange hopp opp på den det trengs for å komme til 100m hvis et «hopp» er 12,5m?

Blank: Ingen tegn til strategi eller løsning.

4.1.6 Oppgave 6

I en mat og helse-time skal Siri undersøke hvor mye ingrediensene i ett brød koster til sammen. I brødet er det blant annet 400g hvetemel. Siri finner ut at 1kg hvetemel koster 15kr. Hvor mye koster 400g hvetemel? Forklar hvordan du går frem når du løser oppgaven.

Tabell 6: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 6 på kartleggingsprøven og underkonstruktene knyttet til strategiene.

Strategier	1T antall	1P antall	Totalt	Underkonstrukter
Via en del	9	13 (14)	23	Forhold, kvotient og operator
Dividere med 2,5	1	3 (4)	5	Forhold
Gjør om til kilo	3		3	Operator, forhold, kvotient
$^2/_5$ som operator	5		5	Forhold og operator
Via 0,5 kilo		1	1	Forhold og operator
Blank/ikke fullført		5	5	Ingen underkonstrukt
Totalt	18	24	42	Forhold, kvotient og operator

Via én del: Elevene ønsker å finne ut hvor mye det koster med en «del» først: 1g, 10g eller 100g for så å finne ut hvor mye det koster med 400g. For eksempel: *«1000g:10 = 100g, 15:10 = 1,5, 100g = 1,5kr, 100 ·4 = 400, 1,5 ·4 = 6kr. 400g hvetemel koster 6kr.»* Her ser eleven på forholdet mellom pris og mel i gram, og prøver å finne ut hvor mye det koster med 100g først. Enheten til forholdet blir kr/kg og når et forhold sammenligner størrelser av forskjellige typer blir det en rate (Lamon, 2012, s. 226). Derfor er forhold et av de mest fremtredende underkonstruktene i denne strategien. I tillegg brukes både kvotient- og operator-konstruktet. Når Gray og Ånestad (2016, s. 74) analyserer vår oppgave 2 (fra kartleggingsprøven) skriver de at det å først finne en del (100g) for så å multiplisere kan tolkes som en kvotient-tenkning og det er akkurat det elevene gjør i denne oppgaven. Det er litt delingsdivisjon i den tekningen. I tillegg er det fortsatt operator-konstrukt som blir brukt selv når elevene deler opp operatoren i to operasjoner (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). I denne oppgaven deler eleven opp operatoren $^4/_{10}$ eller $^{40}/_{100}$.

Dividere med 2,5: Elevene finner forholdet mellom 1000g og 400g ved å ta $^{1000g}/_{400g}$ = 2,5, før de regner ut 15kr/2,5 = 6kr. En elev forklarer: *«Finn fyst ut kor mykje 400 av 1000 er. Får 2,5, deler då 15kr på 2,5. Utvidar brøken, primtallfaktoriserer, stryk og står igjen med 6kr.»* Eleven finner først ut at forholdet mellom 1kg og 400g er 2,5 før han eller hun bruker det videre. Derfor mener jeg at det er forhold-konstruktet som er fremtredende i strategien (Lamon, 2012).

Gjør om til kilo: Elevene omgjør 400g til 0,4kg multipliserer dette med 15kr som er prisen for 1kg. Regnestykket som elevene bruker, men ikke nødvendigvis skriver, er: $^{400g}/_{1000g}$ ·1kg = 0,4kg. 0,4kg blir så multiplisert med 15kr. Strategien ligner litt på via én del, eleven går via kilo i stedet for en mindre del. I denne strategien er operator det mest fremtredende underkonstruktet med 0,4kg som operator (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det er da forholdet mellom 1kg mel og mengden mel i et brød som blir brukt og derfor er også forhold-konstruktet med i tenkningen (Lamon, 2012). På samme måte som «via én del»-strategien inneholder noe kvotient-tenkning, går også denne strategien via én del (1kg) og Gray og Ånestad (2016) ville kanskje argumentert at kvotient-konstruktet er litt synlig i denne strategien også på grunn av delingsdivisjon-tenkningen.

$^2/_5$ som operator: Elevene prøver å finne letteste vei fra 1000g til 400g og da fra 15kr til 6kr. Dette gjør de ved å regne ut $^{1000g}/_5$ = 200g og 200g · 2 = 400g. Samme framgangsmåte bruker de på pengene: $^{15kr}/_5$ = 3kr og så multipliserer de svaret med 2 og får 3kr · 2 = 6kr. En elev skriver etter å ha regnet det ut: *«400 gram kveitemjøl kostar 6kr dersom ein kg kostar 15kr. Fordi at 6kr av 15kr = $^2/_5$ og 400g av 1000g (1kg) = $^2/_5$.»* Dette er en strategi som kan minne om «$^5/_2$ som operator» i oppgave 2. Elevene deler regnestykket opp og dividerer først på 5 og så multipliserer de med 2, og selv om operatoren er delt opp er det fortsatt operator-tenkning (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Likevel er det nok forhold-konstruktet som er mest fremtredende fordi eleven sier det er to størrelser som står i forhold til hverandre (Lamon, 2012). Forholdet mellom 15kr og 6kr er $^2/_5$ og forholdet mellom 1kg og 400g er $^2/_5$.

En annen elev regner ut: «*$^{400g}/_{1000g}$ = $^4/_{10}$ = $^2/_5$ og multipliserer 15kr med $^2/_5$ og finner at det koster 6kr*». Da bruker eleven en tydeligere operator-tenkning, men viser også forståelse for forkortning av brøker eller ekvivalente brøker som igjen viser noe forståelse for forhold-konstruktet.

Via 0,5 kilo: Eleven halverer prisen: «*1kg hvetemel = 15kr:2 => 0,5kg hvetemel =7,50kr, 0,4kg hvetemel = 7,50kr – 1,50kr = 6kr». 400g hvetemel koster 6kr.*» Eleven ser på forholdet mellom antall kilo og prisen og dividerer først begge deler med to og ser da at det kun mangler å trekke fra 100g som koster 1,5kr. Her bruker eleven forholdet mellom kilo og pris aktivt og forhold-konstruktet er derfor fremtredende (Gray & Ånestad, 2016). Operator-konstruktet er også synlig i halveringsprosessen der brøken $^1/_2$ opererer på melmengden og prisen (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Blank/ikke fullført: Elever som ikke har svart eller ikke fullført besvarelsen av oppgaven og gjør det da vanskelig for meg å forstå hvilke strategier de benytter.

4.1.7 Oppgave 7

Johanne skal bake ostehorn. Oppskriften gir 12 ostehorn. Johanne skal bake 20 ostehorn.

Ostehorn, 12stk

0,6l Lettmelk

120g smør

1 pakke gjær

0,5ts salt

Ca. 12dl mel

Revet ost

Hvor mange gram smør skal Johanne bruke? Løs oppgaven og forklar hvordan du går frem for å løse dette.

Tabell 7: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 7 på kartleggingsprøven og underkonstruktene knyttet til strategiene.

Strategi	1T antall	1P antall	Totalt	Underkonstrukter
$^{5}/_{3}$ eller $^{20}/_{12}$ som operator	14	9 (10)	24	Operator og forhold
Forhold	2		2	Forhold
Via et horn		4 (6)	6	Forhold og kvotient
Addere 12 + 8	1		1	Operator
Dobler oppskrift og trekker fra 4 horn		1	1	Operator
Usikker		2	2	Ikke lett å si, operator?
Blank/ikke løst	1	5	6	Ingen underkonstrukt
Totalt	18	24	42	Operator, forhold, kvotient

$^{5}/_{3}$ eller $^{20}/_{12}$ som operator: Dividere med 3 eller 12 og multiplisere henholdsvis med 5 eller 20 for å gjøre om oppskriften fra 12 til 20 ostehorn. Dette minner om strategien «$^{5}/_{2}$ som operator» fra oppgave 2, men brøken er annerledes og alle elevene har valgt å gjøre det i to operasjoner i stedet for å multiplisere med hele brøken. Det er tydelig at operator-konstruktet er synlig når brøken forstørrer oppskriften og mengden smør til 12 personer (Lamon, 2012). Elevene som har brukt $^{5}/_{3}$ har i tillegg forstått at $^{5}/_{3}$ og $^{20}/_{12}$ er i samme ekvivalensklasse og at det er lettere å bruke $^{5}/_{3}$: *«Jeg skulle dele alt på 12 og så gange med 20, men* i stedet *delte jeg 12 og 20 på 4 slik at jeg hadde litt enklere tall og jobbe med.»* Dette viser en forståelse for forhold-konstruktet fordi forståelse for ekvivalente brøker viser en mulig forståelse for deler av forhold-konstruktet (Behr et al., 1983).

Forhold: Elevene ser på sammenhengen/forholdet mellom ingredienser og horn. En bruker x og y for å illustrere tenkningen: «*Han må bruke 200g smør. Det er veldig lett å sjå når oppskrifta var til 12 og du må bruke 120g smør. Viss x er mengden ostehorn og y er mengden smør: y = 10x.*» I en slik tenkning er det forhold-konstruktet som er mest fremtredende fordi elevene sammenligner to tall (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007): Mengden smør med mengden ostehorn.

Via ett horn: Elevene finner hvor mye smør det er per horn før de regner ut hvor mye som trengs for 8 horn. Deretter adderer de smør til 12 og smørmengden til 8 som gir smør til 20. En elev løser oppgaven slik: *«120g = 12 horn, 80g = 8 horn. 120g + 80g = 200g, 12 horn + 8 horn = 20 horn. Johanne skal bruke 200g smør.»* Eleven har forstått hvor mye smør som trengs for et horn, men skriver ikke dette steget ned. Eleven bruker dette forholdet til å addere mengden smør til 12 personer med mengden smør til 8 personer. Derfor er forhold-konstruktet tydelig i strategien (Lamon, 2012). Andre elever tar med at det er 10g per horn og da er kvotient-konstruktet enda mer synlig enn eleven overfor fordi det minner da om delingsdivisjon (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Addere 12 + 8: For å finne hvor mye smør det trengs til 8 horn finner eleven ut at oppskriften må multipliseres med $^{2}/_{3} \approx 0{,}6$ og at oppskriften da må multipliseres med 1,6 for å finne mengde smør til 20. Eleven skriver: *«En oppskrift gir 12 horn. Da mangler vi 8 for å få 20.* $^{12}/_{3}$ *= 4 og 4 · 2 = 8, altså: (12:3) · 2 = de 8 vi mangler,* $^{2}/_{3}$. $^{2}/_{3}$ *= 0,6 så vi må ha oppskriften 1,6 ganger. 120g smør · 1,6 = 200g smør.»* Operator-konstruktet er det mest fremtredende selv om eleven ikke bruker en brøk som operator, men har funnet operatoren (1,6) i desimalform. Likevel ser vi tydelig at 1,6 opererer på oppskriften og øker mengden smør og horn (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Dobler oppskrift og trekker fra 4 horn: Elev dobler oppskriften: 12 + 12 = 24 og trekker fra mengden smør som trengs til 4 horn. Regnestykket blir da: 120g + 120g - $^{120g}/_{3}$ = 120 + 120 – 40 = 200g. Denne strategien bruker gjentatt addisjon adderer 2 og en tredjedel av 12. Dette er i utgangspunktet en backup-strategi for multiplikasjon (Lamaire & Siegler, 1995), og jeg vil også kategorisere det som en backup-strategi innen operatorkonstruktet.

Usikker: Elever med løsningsmetode jeg ikke forstår eller skjønner hvor jeg skal plassere i tabell. For eksempel: *«120 ≈ 100 og 100 · 20 = 200g smør skal de bruke.»* Et hint av operator-konstruktet her?

Blank/ikke løst: Elever som ikke har løst eller stopper opp/gir opp før de har løst oppgaven ferdig.

4.1.8 Oppgave 8

Obi er i USA på ferie og skal kjøpe konfirmasjonsdress. I dressbutikken blir Obi spurt om hvor mange inches (in) høy han er. Obi er 150cm høy, og han vet at 1in er omtrent 2,5cm. Omtrent hvor mange inches høy er Obi? Løs oppgaven og forklar hvordan du finner svaret.

Tabell 8: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 8 på kartleggingsprøven og underkonstruktene knyttet til strategiene.

Strategi	1T antall	1P antall	Totalt	underkonstrukter
Antall cm delt på 2,5	9 (12)	12 (14)	26	Forhold, kvotient, del-hele
Forhold	3		3	Forhold
Antall cm multiplisert med 2,5	2	2 (3)	5	Operator
Finne x i 2,5 · x = 150	(1)	2 (3)	4	Operator, forhold
Blank/ikke løst		4	4	Ingen underkonstrukt
Totalt	18	24	42	Operator, forhold, kvotient og del-hele

Antall cm delt på 2,5: Totalt er Obi 150cm høy og elevene dividerer med 2,5cm for å finne ut hvor mye dette er i inches. En elev setter det opp som en ligning: *«2,5x = 150,* $^{2,5x}/_{2,5}$ = $^{150}/_{2,5}$*, x=60. Obi er 60in.»* Forholdet mellom cm og inches er 1:2,5, og eleven bruker dette forholdet ved å sette opp en ligning slik at det det bare er å løse for x. Her er derfor forhold-konstruktet synlig i strategien (Lamon, 2012). Det er kan også sees på som målingsdivisjon det elevene gjør: Hvor mange lengder (inches) blir det når vi deler helheten (150cm) med 2,5cm som er en lengde og antall cm per inches? Siden dette kan minne om målingsdivisjon faller tenkningen derfor inn under kvotient-konstruktet (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det er i tillegg noe del-hele-tenkning som kommer til syne når elevene deler opp helheten i lengder på 2,5cm: I stedet for å fysisk dele en totallengde på antall lengder kan man enkelt regne det ut med regnestykket $^{150cm}/_{2,5cm}$. Det er både del-hele og kvotient involvert hvis elevene mener helheten er det samme som dividend = 150cm.

Forhold: Elevene ser på forholdet mellom cm og inches, her er utregningen: *«1in = 2,5cm, 60in = 150cm.»* Eleven forklarer tenkningen: *«Eg tenkte at 2,5cm · 10 = 25cm. Og at 25 · 6 = 150cm. Så då veit eg at 10 · 6 = 60 og då vert 25 · 6 det same som 60.»* Dette er en rett frem strategi der man bruker forhold-konstruktet godt på samme måte som Gray og Ånestad (2016, s. 74) foreslår når de analyserer oppgave 2 (avsnitt 4.1.2). Dette vil klassifiseres som en del-del sammenligning mellom inches og cm (Lamon, 2012).

Antall cm multiplisert med 2,5: 150cm · 2,5cm, dette er en strategi som fører til galt svar. Elever glemmer hvilken regneoperasjon og viser en tankegang som ikke er rett. Her kan 2,5 sees på som en operator som opererer eller forstørrer antall cm (Lamon, 2012), problemet er at 1in er større enn 1cm og elevene får svaret til å bli større enn 150 når svaret skal bli mindre. Ved god forståelse for inches og omgjøring ville elevene sett at svaret de får ikke er riktig og at de har gjort noe feil.

Finne x i 2,5 · x = 150: Eleven bruker ikke nødvendigvis x, men de leter etter tallet som multiplisert med 2,5 blir 150. Her prøver de seg frem litt etter litt multipliserer de oppover til de finner svaret: *«2,5cm = 1in, 25cm · 4 = 150, 2,5cm · 40 = 150. Obi er 40in høy.»* Denne eleven får galt svar fordi selve utregningen blir gjort feil, men strategien er ganske lik «gjett og prøv-strategien» til oppgave 5. Eleven prøver seg frem og justerer utregningen etter hvert som den «ser» svaret. Eleven prøver altså å finne operatoren som forstørrer 2,5cm til 150cm (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), derfor er operator-konstruktet synlig i strategien. Samtidig bruker elevene forholdet mellom cm og inces for å regne ut høyden i inches, da er det naturlig at noe forholdstenkning er involvert (Lamon, 2012).

Blank/ikke løst: Besvarelser der eleven ikke er kommet langt nok til at det går an å se hvilken strategi de ønsker å bruke.

4.2 Profil av den «typiske» elevs strategier

Ved gjennomgang av besvarelsene på kartleggingsprøven og analysering av dem merket jeg at mange elever løste oppgavene på samme måte og det var en eller to strategier som dominerte. Dette kan du se i tabellene 1-8 over. Fordi denne tendensen var så stor ønsket jeg å bruke det til å presentere en slags profil med hvilke strategier den «typiske» elev velger å bruke i brøkoppgavene på kartleggingsprøven. Håpet var at dette kunne brukes som et godt verktøy videre til diskusjon. Dette har jeg samlet og presentert først i tabell 9, før jeg går gjennom oppgave for oppgave med strategien(e) som er dominerende. Her diskuterer jeg også kort om strategiene er naturlige i forhold til oppgaveformuleringen, både språket og det matematiske innholdet. Hvis jeg mener en strategi er en backup-strategi begrunnes dette, ellers er strategiene retrievalstrategier, dette er også tatt med i tabellen (B/R).

Tabell 9: Oversikt over profilens strategier i hver kartleggingsoppgave med hvor mange prosent av elevene som valgte denne strategien, om strategien er en backup-strategi (B) eller retrievalstrategi (R) og hvilke underkonstrukter som er synlige i strategiene.

Oppgave	Strategi	B/R	Antall elever	Underkonstrukter
1	Dele antall ruter på fem	R	60%	Del-hele, kvotient, operator
2	$^{15}/_{6}$, $^{5}/_{2}$, 2,5 som operator	R	35%	Operator, kvotient, forhold
	Gjentatt addisjon	B	52%	Operator
3	Antall liter delt på 0,5	R	40%	Kvotient
	Antall liter multiplisert med 2	R	43%	Kvotient, forhold, del-hele
4	Via prosent eller desimaltall	R	50%	Måling, del-hele
	Tegne bokser/pizzastykker	B	21%	Del-hele
5	Total distanse delt på en lengde	R	52%	Kvotient og del-hele
	Gjett og prøv	B	29%	Kvotient og måling
6	Via en del	R	60%	Forhold, operator og kvotient
7	$^{5}/_{3}$ eller $^{20}/_{12}$ som operator	R	57%	Operator og forhold
8	Antall cm delt på 2,5	R	57%	Forhold, kvotient og del-hele

Oppgave 1:

I denne oppgaven var det en klar dominerende strategi som 60% av elevene hadde brukt og det var «dele antall ruter på fem»-strategien. Dette er en strategi hvor elevene bruker flere underkonstrukter for å løse oppgaven. De prøver å finne ut hvor mange ruter en del er, de opererer på rutene med $^{1}/_{5}$ og samtidig er det noe delingsdivisjon i tenkningen til elevene. Derfor er det naturlig å tenke at del-hele, operator og kvotient er synlig i strategien (Lamon, 2012). Ser vi på tabell 1 (avsnitt 4.1.1) så er dette en strategi som både dominerer i 1T- og 1P-klassen. Oppgaven spør etter «hvor mange ruter $^{1}/_{5}$ av rutene er. På grunn av bruken av $^{1}/_{5,}$ som i denne sammenhengen lett kan tolkes som en operator som opererer på antall ruter, er det ikke unaturlig at elevene benytter underkonstruktet operator i strategien sin (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Det er også nærliggende å se del-hele-konstruktet i strategien da den geometriske modellen/figuren gjør det lett å tenke at man er ute etter å finne en del av en helhet (Gray & Ånestad, 2016, s. 70). Begge disse underkonstruktene er brukt i den dominerende strategien som gjør at det er en naturlig strategi å bruke ut ifra oppgaveformuleringen.

Oppgave 2:

Denne oppgaven har to dominerende strategier: «$^{15}/_{6}$, $^{5}/_{2}$, 2,5 som operator» og «gjentatt addisjon». I utgangspunktet var «$^{15}/_{6}$, $^{5}/_{2}$, 2,5 som operator» definert i tre ulike strategier, men siden strategien egentlig er den samme, med ulike brøk eller desimaltall som operator, har jeg valgt å slå dem sammen. Begge strategier inneholder operator-tenkning, men den første strategien inneholder også kvotient- og forhold-konstruktet, dette er begrunnet i avsnitt 4.1.2. Hvis vi skulle sammenlignet hvilke strategier som er dominerende i 1T-klassen og 1P klassen ser vi at i 1T klassen er begge strategiene dominerende, mens i 1P-klassen ville bare «gjentatt addisjon» vært presentert i deres strategiprofil. Det matematiske innholdet i oppgaveteksten inviterer mest til operator-konstruktet fordi man skal gjøre om oppskriften fra 6 personer til 15 personer og da må forstørre oppskriften (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Begge strategiene i profilen er naturlige fordi de bruker operator-konstruktet. «$^{15}/_{6}$, $^{5}/_{2}$, 2,5 som operator»-strategien bruker tenkning innen flere underkonstrukter, noe jeg mener gjør den mer fleksibel. «Gjentatt addisjon»-strategien kan klassifiseres som en backup-strategi fordi elevene benytter en mer tungvint oppskrift enn i «$^{15}/_{6}$, $^{5}/_{2}$, 2,5 som operator» (Ashcraft, 1992).

Oppgave 3:

Det er to strategier elevene brukte mest når de løste oppgave 3: «Antall liter delt på 0,5» og «antall liter multiplisert med 2». Begge strategier inneholder kvotient, men den siste har også innslag av forholdstenkning og del-hele-tenkning. Det var ikke stor forskjell på hvilke elever som valgte å løse oppgaven på hvilken måte, men begge klasser benyttet begge strategier. Oppgaven er formulert slik at den naturlig inviterer til målingsdivisjon: Hvor mange flasker trenger man hvis hver flaske rommer 0,5 liter (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007)? Derfor er begge strategier naturlige og benytter kvotient-konstruktet i tenkningen sin. Her er jeg og Gray og Ånestad (2016, s. 72) uenig fordi de argumenterer: «*Siden oppgaven har målingsdivisjonsstruktur, passer den* *ikke inn under kvotient-aspektet»*, og mener at den tilhører måling-konstruktet. Jeg er derimot enig med Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) som sier at en elev må beherske både delingsdivisjon og målingsdivisjon for å forstå kvotient-konstruktet fullt ut. Derfor mener jeg denne oppgaven leder elevene inn i kvotient og at alle strategiene bruker dette underkonstruktet i tenkningen sin.

Oppgave 4:

I oppgave 4 har elevene to strategier som er mest dominerende: «Via prosent eller desimaltall» med 50% og «tegne bokser/pizzastykker» med 21%. Den første har måling og del-hele-tenkning i seg mens i den andre er bare del-hele-konstruktet som blir synlig. Begge klasser bruker begge strategier like mye og separate profiler på denne oppgaven ville ikke gitt sett forskjellige ut. Oppgaven ber elever om å sortere brøkene i stigende rekkefølge, da tolkes brøkene gjerne som måltall og dette faller innunder måling-konstruktet (Gray & Ånestad, 2016, s. 72). Oppgaveformuleringen, både det matematiske innholdet og språket, inviterer derfor hovedsakelig til måling-konstruktet. I den første og mest dominerende strategien ser vi at elevene bruker dette underkonstruktet sammen med litt del-hele-tenkning. Den andre strategien inneholder ikke måling-konstruktet, men bruker en backup-strategi innen del-hele. Den første strategien er derfor naturlig, mens jeg vil si at den andre strategien er mindre naturlig. Elevene prøver å finne en måte å «fysisk» se størrelsen på brøkene slik at det lettere å sortere dem. De bruker en strategi for å finne størrelsene og selv om del-hele ikke er måling så argumenterer blant annet Kieren (1976 i Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) for at de kunne vært samme underkonstrukt. Strategien er derfor ikke helt unaturlig heller.

Oppgave 5:

Denne oppgaven har også to dominerende strategier: «Total distanse delt på en lengde» med 52% av elevene og «Gjett og prøv» med 29%. Begge strategier inneholder kvotient-konstruktet, men den første inneholder i tillegg del-hele og den andre har innslag av måling-konstruktet. Begge klasser har denne fordelingen av strategiene. Oppgaven gir en invitasjon til målingsdivisjon og siden den forståelsen er knyttet til kvotient-konstruktet (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) er det helt naturlig at begge strategier bruker dette underkonstruktet i løsningsmetoden sin. Den første strategien er også helt naturlig å bruke for å løse problemet, regne ut målingsdivisjonsproblemet direkte. «Gjett og prøv»-strategien er ikke like naturlig, men er en backup-strategi, en mer tungvint prøve-seg-frem oppskrift (Ashcraft, 1992), som ikke er unaturlig heller.

Oppgave 6:

Oppgave 6 har bare en fremtredende strategi og det er «via én del» som har underkonstruktene forhold, operator og kvotient synlig i løsningsmetoden. Både 1P-elever og 1T- elever bruker denne strategien mest. Oppgaveformuleringen inviterer hovedsakelig til forhold-konstruktet fordi det presenteres et forhold mellom kilo og pris (Lamon, 2012): 1kg hvetemel for 15kr. Dette forholdet må brukes på en eller annen måte for å finne ut hvor mye 400g hvetemel koster. Det kan også være naturlig å finne en operator for å finne riktig pris til mengden hvetemel, men det er et tilleggskonstrukt. Vi ser at «via én del»-strategien inneholder begge underkonstrukt sammen med kvotient. Strategien og underkonstruktene i den er derfor naturlig.

Oppgave 7:

«$^{5}/_{3}$ eller $^{20}/_{12}$ som operator»-strategien er den mest fremtredende i oppgave 7 med 57% med underkonstruktene operator og forhold. Begge klassene har dette som fremtredende strategien selv om det er mye tydeligere i 1T, med 78%, enn i 1P med 42%. Oppgaveteksten inviterer mest til operator-konstruktet fordi man skal gjøre om oppskriften fra 12 horn til 20 horn og da må oppskriften forstørres (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Dette gjøres lettest ved å finne en operator som opererer på smørmengden. Vi ser at «$^{5}/_{3}$ eller $^{20}/_{12}$ som operator»-strategien er en naturlig strategi fordi den går aktivt inn å forstørrer mengden smør. Det gjøres ved blant annet å bruke underkonstruktet operator som er naturlig da oppgaveformuleringen inviterer til det. Det er derfor ikke vanskelig å forstå at dette er den mest fremtredende strategien.

Oppgave 8:

Oppgave 8 har en fremtredende strategi og det er «antall cm delt på 2,5» som 26 elever (ca. 57%) har valgt å bruke. Det er underkonstruktene forhold, kvotient og del-hele som er synlig i denne strategien, og dette er begrunnet i avsnitt 4.1.8. Begge klasser har dette som den dominerende strategien. I oppgaveteksten blir det oppgitt et del-del forhold mellom inches og cm på 1:2,5, derfor inviteres elever spesielt inn i forhold-konstruktet (Lamon, 2012). Samtidig er det en åpen oppgave som gir rom for å bruke dette forholdet på flere måter. Derfor er strategien helt naturlig med tanke på oppgaveteksten, selv om den også inneholder del-hele og kvotient-tenkning.

4.3 Analyse av oppfølgingsspørsmålene

I tillegg til brøkoppgavene hadde jeg noen oppfølgingsspørsmål i kartleggingsprøven (vedlegg 3) for å finne ut hvordan elevene tenke når de valgte løsningsstrategier. Disse spørsmålene var jeg usikker på om jeg kom til å bruke til noe etterpå, men tenkte det er bedre å ha et par spørsmål for mye enn for lite. Jeg har ikke analysert svarene på spørsmålene med unntak av siste spørsmål: *«Hvordan velger du løsningsmetode når du ser en oppgave»*. Svarene på dette spørsmålet har jeg samlet i ett dokument og kategorisert dem etter hvilke ord og uttrykk de brukte. Jeg samlet sitatene som nevnte ordet «enklest», «raskest», «enklest» og «raskest» eller de som sa at de bare gjorde det første de kom på. Det var også noen sitater som ikke passet i disse kategoriene og fikk dermed stå for seg selv. Dette er blitt brukt hovedsakelig i avsnittet 5.1.4 der jeg diskuterer hva som påvirker elevenes strategivalg.

Jeg har også brukt enkeltsitater fra elever som beskrev hvorfor de valgte å løse oppgaven slik de gjorde, men jeg har ikke gått gjennom og analysert disse svarene. For det første var det en del elever som ikke har svart på spørsmålene eller bare veldig kort. For det andre er det opp til 42 elever som svarer på dette spørsmålet etter 8 ulike oppgaver, det blir mange svar å gå gjennom. Når jeg i min problemstilling er ute etter de oppgavespesifikke strategiene og ikke de generelle så ser jeg heller ikke behovet for å analysere disse svarene.

5 DISKUSJON

I dette kapittelet vil jeg diskutere forskningsspørsmålene i lys av funnene. I 5.1 diskuterer jeg det første: *Hvilke strategier velger videregåendeelever å bruke i møte med brøkoppgaver?* Med utgangspunkt i strategiprofilen vil jeg diskutere om det er fornuftig å lage en profil med den «typiske» elevs strategier, hvilke strategier profilen har og hva som påvirker elevenes strategivalg. I 5.2 vil jeg diskutere det andre forskningsspørsmålet: *Hvilke underkonstrukter kommer til syne i strategiene til elevene?* I dette underkapittelet ser jeg på alle strategiene elevene brukte og underkonstruktene i dem. Er alle underkonstrukter representert i strategiene og hva betyr i så fall det? Jeg diskuterer også om Behr et al. (1983) sin modell er et godt analyseverktøy. Det tredje forskningsspørsmålet er: *Er det noe forskjell på 1P- og 1T-elevenes strategier og underkonstrukter?* Forskjeller og likheter på strategiene deres og underkonstruktene som er synlige i dem diskuteres hovedsakelig i 5.1.3.

Til slutt, i 5.3, diskuteres metoden i dette prosjektet og hva som eventuelt kunne vært gjort annerledes.

5.1 Elevenes strategier

Strategiene som elevene har brukt i oppgavene er presentert i tabeller (avsnitt 4.1.1-4.1.8) og beskrevet under tabellene i analysekapittelet. Med utgangspunkt i dette ble det også presentert en profil av den «typiske» elevs strategier (avsnitt 4.2). Jeg ønsker i dette underkapittelet å diskutere profilens strategier.

5.1.1 Profilen av den «typiske» elevs strategier

I avsnitt 4.2 presenterer jeg profilen og hvorfor jeg ønsket å lage den. Den er analysert og laget av meg. To spørsmål man kan stille seg: Er det fornuftig å ha en slik profil og er den like presis på alle oppgaver? Oppgave 1,6,7 og 8 har bare én strategi som er dominerende, mens resterende elever har fordelt seg jevnt utover de andre strategiene. Derfor er det kun tatt med en strategi i profilen på disse oppgavene. I oppgave 2 og 3 er det to strategier som er nesten like store og det er derfor helt naturlig å ta med begge. I Oppgave 2 var det i utgangspunktet tre nesten like strategier og de ble derfor slått sammen til én strategi i profilen. Den sammenslåtte strategien ble da nesten like stor som «gjentatt addisjon» og er derfor tatt med. Begrunnelsen for at disse er slått sammen er presentert i analysen (avsnitt 4.2). Oppgave 4 og 5 har én hovedstrategi som dominerer, men strategi nummer to er større enn de resterende strategiene og jeg ønsket derfor å diskutere disse strategiene også. Jeg mener dermed at alle strategiene som er tatt med i profilen er velbegrunnet for alle oppgaver.

Å lage en profil er et viktig verktøy fordi jeg ikke har mulighet til å diskutere enkeltelevers besvarelser i oppgaven. Jeg ønsket å analysere dataene mine kvalitativt og da gir strategiprofilen en god mulighet til å kunne diskutere elevmajoritetens strategier uten å tvile på at de riktige strategiene diskuteres. Det er altså et verktøy til å fokusere diskusjonen og forhåpentligvis gi en bedre oversikt over funnene.

Hvorfor har jeg laget en samlet profil og ikke en for hver av klassene? Det kan tenkes at 1T-elevene og 1P-elevene bruker forskjellige strategier i brøkoppgavene og dermed at profilene deres ville vært ulike, men det er overraskende mange likheter og den største forskjellen i profilene ville vært i oppgave 2. Sammenligner vi de to største strategiene i oppgaven ser vi at 1T har «$^{15}/_{6}$, $^{5}/_{2}$, 2,5 som operator» som den mest dominerende strategien med 56% andel. Mens 1P har «gjentatt addisjon» som den mest dominerende med 67% andel og det er kun 20% av elevene som brukte «$^{15}/_{6}$, $^{5}/_{2}$, 2,5 som operator»-strategien. Her kunne profilene deres derfor vært annerledes og 1P-profilen kunne utelatt «$^{15}/_{6}$, $^{5}/_{2}$, 2,5 som operator»-strategien. Siden dette er den eneste oppgaven som gir et slikt utfall ser jeg for liten fordel med å lage og presentere egne profiler for hver av klassene.

5.1.2 Profilens strategier

Profilen har tydelig en eller to strategier som dominerer i oppgavene, men hvorfor er det slik? Hvorfor fordeler ikke elevene seg jevnere utover de ulike strategiene? På kartleggingsprøven er det valgt åpne oppgaver som gir rom for flere strategier innenfor ulike underkonstrukter. Elevene har akkurat begynt på videregående, de har gått på ulike ungdomsskoler fra hele landet og har ikke hatt samme matematikklærer. Oppgavene er valgt ut fra nasjonale prøver beregnet for 8. og 9. klasse som gjør at det kanskje er et par år siden de har gjort slike oppgaver. Nivået på oppgavene er lavere enn det elevene skal ha i brøk. Derfor er det ikke mange ytre faktorer som gjør at elevene tar de samme strategivalgene. Eneste ytre faktor som påvirker alle elever er at de ikke fikk bruke kalkulator under kartleggingsprøven.

En stor og viktig faktor som påvirker strategivalg og hvilke underkonstrukter som blir synlige er hvordan oppgavene er laget og formulert. For eksempel har alle elevenes strategier i oppgave 2 noe tenkning innen operator-konstruktet. Oppgaven handler om å gjøre om oppskriften fra 6 personer til 15 personer, altså forstørre oppskriften eller mengden smør som trengs. Da er det naturlig at strategiene inneholder operator-tenkning siden operator handler om å bruke brøk til for eksempel å forlenge eller korte ned på linjer, øke eller minke antall enheter eller gjøre en trekant større eller mindre (Lamon, 2012). I analysen har jeg kort diskutert eller kommentert om underkonstruktene og strategiene vi finner stemmer overens med de oppgavene Gray og Ånestad (2016) har analysert. Generelt er det flere underkonstrukter som er synlige i strategiene og dette har ikke Gray og Ånestad (2016) diskutert i sin analyse. I tillegg er vi uenige om målingsdivisjon tilhører kvotient-konstruktet (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) eller måling-konstruktet (Gray & Ånestad, 2016). Dette er nærmere diskutert i avsnitt 4.2. Jeg har også kommentert i forbindelse med profilen hvilke strategier som er naturlige med tanke på oppgaveformuleringen, både språket og det matematiske innholdet. Generelt ser vi fra 4.2 at strategiene er naturlige med tanke på oppgaveformuleringen. I oppgave 4 og 5 er den mest fremtredende strategien naturlig, mens den nest største strategien er mindre naturlig og er en backup-strategi (Ashcraft, 1992).

Generelt ser vi at elever bruker både backup-strategier og retrievalstrategier slik som elevene med normalutvikling i Ostad (1996). Elevene bruker varierte strategier og benytter ofte strategier som er naturlige i forhold til språket og det matematiske innholdet i oppgavene. Det er ofte flere underkonstrukter som er synlige i strategiene til elevene og de bruker tenkning innen de ulike underkonstruktene fleksibelt for å finne en løsning på oppgavene. I Ostad (1996) beskrev han elever med matematikkvansker som strategirigide. Med det mente han at de benyttet relativt få strategier, mens andre elever utvikler nye strategier med årene og strategivalg forskyves fra backup-strategier til retrievalstrategier, og fra primitive backup-strategier til mindre primitive backup-strategier. Slik utviklet de en strategirikdom (ibid.) og ble mer strategifleksible. Jeg mener elevene i min undersøkelse er strategirike og strategifleksible, men jeg har ikke noe å sammenligne med og kan heller ikke måle denne strategifleksibiliteten på noen måte.

5.1.3 1T- og 1P-elevers strategier

Hvis vi skal sammenligne strategiene til 1P- og 1T-klassen er det som tidligere nevnt mange likheter. Likevel ser vi noen tendenser til at 1P-klassen har flere elever som bruker backup-strategier enn 1T-klassen. I avsnitt 5.1.1 nevnte vi at 1P-klassen har «gjentatt addisjon» som eneste dominerende strategi i oppgave 2 og Lamaire & Siegler (1995, s. 86) mener at gjentatt addisjon er den mest brukte back-up strategien i multiplikasjon. Jeg mener derfor at «gjentatt addisjon» er en backup-strategi innenfor operator-konstruktet i analogi til dette. 44% av 1T-klassen brukte også denne strategien, men det var ikke den mest fremtredende strategien (avsnitt 4.2), mens det var 1P-klassens eneste fremtredende strategi. I oppgave 5 var det også betraktelig flere 1P-elever enn 1T-elever som brukte «gjentatt addisjon»-strategien. I oppgave 1 var det en strategi som het: «Dele arealet inn i fem deler» som 4 1P-elever brukte og bare 1 1T-elev (avsnitt 4.1.1). Denne strategien er også en backup-strategi fordi det å tegne opp fem like bokser og telle eller regne ut antall ruter er manipulering av rutene (Siegler, 1987 i Ostad, 1997) og en primitiv strategi (Ashcraft, 1992). Vi ser i disse tilfellene at både 1P- og 1T-elever bruker strategiene, men at det er flere 1P-elever som benytter backup-strategiene.

I tillegg ser vi i oppgave 2 (avsnitt 4.1.2) at det er kun 1T-elever som bruker «${}^{5}/_{2}$ som operator», og dette er en mer fleksibel strategi enn «${}^{15}/_{6}$ som operator» fordi elevene bruker ekvivalensforståelsen til å ta en snarvei i utregningen. Det er lettere å dividere med 2 i stedet for 6 og multiplisere med 5 og ikke 15. Det er også flere 1P-elever som svarer blankt eller gjør feil på oppgavene. Det er altså en liten tendens til at flere 1P-elever benytter backup-strategier, gjør feil på utregningene eller svarer blankt på oppgavene. Jeg tror likevel ikke at tendensen er så stor at vi kan konkludere med noe her. Funnene er ikke tydelige nok til å si at 1P-elever er mindre strategifleksible. Det er selvfølgelig mulig at vi hadde sett en tydeligere forskjell med et større utvalg enn vi har i denne undersøkelsen.

5.1.4 Hva påvirker elevenes strategivalg?

Det er flere ting som påvirker elevens strategivalg, både bevisste og ubevisste faktorer. Ved å velge kartleggingsprøve i stedet for intervju som datainnsamlingsmetode har jeg ikke muligheten til diskutere med elevene hva de mener påvirker deres strategivalg. Likevel har jeg prøvd med et par oppfølgingsspørsmål (avsnitt 4.3 og vedlegg 3) for å kompensere for dette. Et av spørsmålene var: *Hvordan velger du løsningsmetode når du ser en oppgave?*

Flere elever skriver at de velger det enkleste eller som tar kortest mulig tid: *«Raskest, enklest og mest oversiktlig»*. En elev skriver: *«Eg gjer det som er minst arbeid eller tar så lite tid som mogleg. Desse oppgåvene i denne prøven gjekk ganske automatisk i hovudet og eg tenkte ikkje så mykje på korleis eg gjorde dei før eg måtte forklare det.»* Det virker som om flere elever ikke er like bevisste på hvilke løsningsstrategier de velger, men gjør det første og beste som de kommer på: *«Jeg bare gjør det jeg har lært uten å tenke meg om.»* En elev som ble sitert tidligere i analysen (avsnitt 4.1.2) skriver: «*Det virka som de enklaste, men eg ser at det hadde vert enklare å dele på to (0,25dl) også gange med 5 som også ville blitt 1,25.»* Selv om elevene ønsker å gjøre det enkleste er det ikke sikkert at den første metoden de kommer på er den enkleste og mest effektive. Hvis de ikke bruker tid eller er bevisste på strategivalg blir det gjerne slik at de tar en liten omvei i utregningen og bruker unødvendig tid. Andre elever prøver å være mer bevisste: *«Det skjer automatisk tror jeg. Kanskje ser jeg litt på avstand for å se hvilke regnemåter jeg må bruke, hvilket tema det er innenfor. På den måten ser jeg fort hva som er enklest.»*

En ytre faktor som kan ha spilt inn på strategivalgene til elevene er at de ikke hadde mulighet til å bruke kalkulator. Ikke alle elever er like komfortabel med å regne uten kalkulator og det kan gjøre at de må ta omveier i utregningene sine eller revurdere strategiene sine hvis de ikke klarer utregningen uten kalkulator. En elev skriver: *«Eg prøve å tenke på metodene me har lært i mattetimen. Så ser eg hva metode eg synes er enklast og kva som vil gi meg enklast tall og rekna med.»* Denne eleven er sikkert ikke den eneste som mener enkle tall å regne med er en faktor i utvelgelsen av strategier. Dette kommer i tillegg til andre vurderinger elevene må ta når de skal velge strategi.

5.2 Underkonstruktene

I hver strategi presentert i analysekapittelet kommer det minst ett underkonstrukt til syne i tenkningen til elevene. Jeg ønsket å se på hvilke underkonstrukter som forkommer mest og om det eventuelt var noen underkonstrukt som var mindre synlige i elevenes tenkning. Jeg ønsker derfor å diskutere dette og hva vi eventuelt kan si om forståelse for underkonstruktene. Til slutt diskuterer jeg Behr et al. (1983) sin teoretiske modell som jeg har brukt som analyseverktøy i denne oppgaven.

5.2.1 Underkonstruktene i strategiene

Forståelse for ulike underkonstrukter av brøk er nødvendig for et solid brøkbegrep (Bjerke et al., 2013). Behr et al. (1983) mente del-hele var fundamentet for forståelse for de andre underkonstruktene (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007), mens Lamon (2012) mener del-hele er det underkonstruktet som er blitt mest fokusert på i undervisningen, og for mange har brøk og del-hele-konstruktet nesten blitt synonymt. Det er klart at elever burde kunne hele brøkbegrepet etter grunnskolen, men etter at norske elevers prestasjon på tall- og brøkoppgaver i TIMSS har gått ned (Grønmo & Hole, 2017) og flere forskere mener brøkbegrepet er så komplekst og utfordrende (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2007; Lamon, 2012; Behr et al., 1983), er mine forventninger senket. Derfor antok jeg at del-hele skulle være det mest synlige underkonstruktet i strategiene, men langt flere underkonstrukt er synlige i strategiene enn forventet. Spesielt dukker operator, kvotient og forhold oftere opp enn antatt. Det er trolig fordi oppgavene inviterer oftere til disse underkonstruktene enn de andre. Gray og Ånestad (2016) påstod at del-hele er det underkonstruktet som elever oftest henter strategier fra når de skal løse brøkoppgaver, dette finner jeg ikke i min undersøkelse. Jeg ser likevel at del-hele-tenkning dukker opp i tillegg til de naturlige underkonstruktene i noen strategier.

Kvotient forekommer mye i strategiene til elevene, underkonstruktet er med i strategiprofilen i 6 av 8 oppgaver, og er det underkonstruktet som forekommer mest i profilens strategier uten at oppgaveformuleringen inviterer spesielt til det. At elever bruker kvotient-tenkning i strategiene viser at de i hvert fall delvis forstår underkonstruktet. Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) mener elever bør forstå lik og rettferdig deling, og at det ikke finnes begrensninger til størrelsen på brøken. I tillegg bør elevene beherske både delingsdivisjon og målingsdivisjon (ibid.). At elevene velger strategier der kvotient-konstruktet er synlig må bety at det faller dem naturlig å bruke kvotient-tenkning i sin utregning. I profilen med elevenes «typiske» strategier ser vi at elevene behersker både delingsdivisjon og målingsdivisjon i strategiene sine, men det er alltid uekte brøker, brøker med verdi større enn 1, i utregningene og oppgavene. Dermed vil jeg si at elevene får vist en god del av kvotient-konstruktet, men ikke alt. Oppgavene har ikke invitert elevene til å vise at de tydelig forstår at det ikke finnes begrensninger til størrelsen på brøken. Derfor vil jeg heller ikke konkludere med at de behersker hele underkonstruktet.

Hvert underkonstrukt, som jeg har definert i teorikapittelet (avsnitt 2.2.2.1-2.2.2.5), inneholder flere elementer som elevene må forstå før man kan si at de behersker hele underkonstruktet. Jeg tror ikke oppgavene er gode nok til at elevene får vist dette. Det er for få oppgaver og skulle man sett etter dette burde man kanskje fokusere på ett underkonstrukt og ikke gi ulike oppgaver som inviterer til forskjellige underkonstrukter. Det vi kan si er at flere underkonstrukter enn forventet er synlig i strategiene og elevene behersker dem i hvert fall delvis.

Bjerke et al. (2013) mener forståelse for ulike underkonstrukter av brøk er nødvendig for et solid brøkbegrep. Selv om jeg mener elevene benytter flere underkonstrukter enn jeg antok og at de da har et mer solid brøkbegrep enn jeg forventet vet vi ikke i hvilken grad de har forståelse for underkonstruktene. Dette har jeg heller ikke sett på i forskningsspørsmålene mine. Antun (2015) konkluderer, etter å ha forsket på brøkforståelse i en lignende elevgruppe, med at: *«Mange elevar viser prosedyreforståing ved at dei reint teknisk meistrar ulike prosedyrar; fokus ligg på reglar og algoritmar dei har pugga. Den strukturelle forståinga er ikkje like godt utvikla.»* Altså at elevene viser operasjonell forståelse, men ikke har like utviklet strukturell forståelse for brøkbegrepet (Sfard, 1991).

5.2.2 Er underkonstruktene naturlige i forhold til oppgaveformuleringen?

I avsnitt 5.1.2 diskuterte vi om strategiene til elevene er naturlige, på samme måte kan vi her stille oss spørsmålet om underkonstruktene i strategiene er naturlige. I avsnitt 4.2 presenterer jeg strategiprofilen og diskuterer om underkonstruktene er naturlige i forhold til oppgaveformuleringen. Der ser vi at de synlige underkonstruktene har tydelig sammenheng med hvilke underkonstrukter som oppgaveformuleringen, språket og det matematiske innholdet, inviterer til. For eksempel inviterer oppgave 7 til å bruke operator-konstruktet fordi oppgaven spør om elevene kan gjøre om oppskriften fra 12 horn til 20 horn. For å øke mengden smør må oppskriften forstørres og det gjøres lettest ved å finne en brøk som opererer på mengden smør (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Samtidig kan det også være naturlig å bruke forholdet mellom antall horn og mengde ingredienser til å øke mengden smør, da blir forhold-konstruktet synlig i strategien (Lamon, 2012). Den mest fremtredende strategien i oppgave 7 bruker både operator-tenkning og forholdstenkning, derfor mener jeg underkonstruktene er naturlige i denne strategien. Underkonstruktene i profilens strategier er stort sett naturlige, men det er noen mindre brukte strategier som inneholder andre underkonstrukter. I oppgave 1 er det en strategi som kun inneholder forholdstenkning når oppgaven inviterer mest inn i operator og del-hele. I oppgave 8 er det også en strategi som kun inneholder operator-tenkning når oppgaveformuleringen hovedsakelig inviterer til forhold-konstruktet. Det viser bare at oppgavene inviterer til flere underkonstrukter enn de jeg mener er mer tydelige i oppgaveformuleringen (se avsnitt 4.2). Gray og Ånestad (2016) analyserer oppgavene (1–4, vedlegg 3) for å finne alle underkonstruktene oppgavene inviterer til, og det er ikke bare dem jeg nevner som naturlige.

Når en oppgave inviterer mest til en strategi eller et underkonstrukt kan det være lett for elevene å gå for den mest synlige strategien i stedet for å bruke litt tid på å tenke igjennom alle valgmulighetene. Vi ser fra sitatene i 5.1.3 at elevene ikke nødvendigvis bruker nok tid til å vurdere hvilken strategi de skal velge. En elev skriver: *«Er ikke alltid jeg velger engang. Mange ganger regner jeg bare med den metoden som dukker opp i hodet mitt når jeg ser oppgaven.»* Når flere elever beskriver det slik at de gjør det første de kommer på, og elevene ender opp med underkonstrukter og strategier som er naturlige kan det tyde på at oppgaveformuleringen har mye å si for strategivalgene til elevene. Dette trenger på ingen måte å være negativt. Vi ser at de benytter flere ulike strategier i møte med kartleggingsprøven. Noen strategier som: «$^{15}/_{6}$, $^{5}/_{2}$, 2,5 som operator» og «$^{5}/_{3}$ eller $^{20}/_{12}$ som operator» er ganske like. Dette er ikke så rart når oppgave 2 og oppgave 7, som strategiene er fra, også er ganske like.

5.2.3 Behr et al. (1983) sin teoretiske modell som analyseverktøy

Jeg har valgt Behr et al. (1983) sin teoretiske modell som analyseverktøy i oppgaven (avsnitt 2.2.3). Den har vært lyskasteren som har synliggjort elevenes brøkbegrep og dets kompleksitet. Den fungerer bra som verktøy til å vise at det er flere aspekter ved brøkbegrepet. Uten modellen hadde det vært fort gjort å fokusere på en mindre del av brøkbegrepet, del-hele-konstruktet for eksempel eller bare brøkoperasjonene.

Det er mulig at det er andre aspekter ved brøk som ikke er like tydeliggjort: Hvorfor trenger vi for eksempel felles nevner når vi skal addere brøk? Modellen viser en mulig overgang mellom måling-konstruktet og brøkaddisjon (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Forståelse for at brøk er en tallstørrelse eller en enhet og hvordan brøk skal plasseres på en tallinje kan gi større forståelse for brøkaddisjon (ibid.). På lignende måte som at $10 + 3 \neq 40$, fordi man må ta hensyn til titallssystemet, kan man heller ikke legge sammen $^{1}/_{10} + ^{1}/_{3}$ og si at det blir $^{1}/_{13}$. Dette er kanskje lettere å se og forstå på en tallinje, ved å se på hvordan man må dele opp tallinjen for å finne riktig plass til $^1/_{10}$ + $^1/_3$. Felles nevner blir ikke direkte adressert i modellen, men en utvidet forståelse for måling-konstruktet kan hjelpe eleven når brøkaddisjon skal læres.

Modellens begrensninger ligger ikke nødvendigvis i selve modellen, men heller i operasjonaliseringen av den. Man ønsker gjerne å teste elevens brøkforståelse ved hjelp av modellen, men det er ikke alltid så lett å måle. Her trengs det gjerne en lyskaster til som sier noe om forståelse. For eksempel går det an å skille mellom strukturell forståelse og operasjonell forståelse for brøkbegrepet (Sfard, 1991). I min undersøkelse har ikke forståelse for brøkbegrepet vært en del av problemstillingen og jeg kan ikke si noe om i hvilken grad elevene viser brøkforståelse i min undersøkelse. Om en kartleggingsprøve ville vært god nok, med andre oppgaver, eller om oppgaveintervju ville vært nødvendig er jeg usikker på. Jeg tror ikke modellen i seg selv ville vært begrensningen for å måle brøkforståelse, men heller eventuelt metoden.

5.3 Metodekritikk

I dette forskningsprosjektet har målet vært å få oversikt over elevers strategier og underkonstruktene i dem etter endt grunnskole. Kartleggingsprøven har gitt meg en god oversikt over dette, og jeg mener at den er egnet for formålet. Begrunnelsen for at kartleggingsprøven er god nok til å besvare forskningsspørsmålene er nærmere begrunnet i metodekapittelet, men det er noen svakheter med den også. Jeg valgte kartleggingsprøve foran oppgaveintervju for å kunne analysere flere elevers strategier enn det jeg hadde klart med intervju, men hvordan elevene tenker kommer ikke like godt frem i en kartleggingsprøve. Det gjør at jeg må beskrive hva som er gjort og diskutere mulige tenkemåter. Noen strategier gir for eksempel rom for at elevene kan vurdere ekvivalente brøker når de skal løser oppgaven, i så fall er forholdstenkning involvert (Behr et al., 1983), men jeg vet ikke om alle elever har tatt hensyn til dette. Jeg kan derfor bare beskrive mulighetene uten å konkludere hvordan elevene har tenkt. I tillegg er strategiene sortert etter likhetstrekk, men det betyr ikke at to elever jeg sier har løst oppgaven med samme strategi nødvendigvis har tenkt likt. Kanskje benyttet den ene ekvivalente brøker og den andre ikke eller begge vurderte brøkekvivalens, men ingen fikk det tydelig fram i besvarelsen sin. Alt dette gir noe usikkerhet og variasjon innad i strategiene.

Oppgavene i kartleggingsprøven skulle invitere til flere ulike strategier og underkonstrukter. Det gjorde de også, men det viser seg at noen strategier og underkonstrukter er mer naturlig å benytte enn andre. Hvis jeg skulle ha sagt noe om hvilke underkonstrukter som er mest synlig i strategiene burde jeg ikke bare valgt oppgaver basert på om det er mulig å hente strategier fra de ulike underkonstruktene, men også sett på hvilke underkonstrukter oppgaveformuleringen inviterer spesielt til. Mine oppgaver inviterer mest til operator, forhold og kvotient, selv om alle underkonstrukter er representert i strategiene. Da er det ikke mulig for meg å konkludere med at elevene er minst komfortable med å bruke måling-tenkning selv om dette er det minst synlige underkonstruktet i strategiene.

Alle mennesker møter verden med en forforståelse, både kunnskaper og oppfatninger om virkeligheten som vi bruker til å tolke det som skjer rundt oss (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 22). Forskerens forforståelse vil påvirke hva forskeren observerer og hvordan disse vektlegges og tolkes (ibid.). Min forforståelse og konstruktivistiske læringssyn er med å påvirke hvordan jeg har analysert og tolket strategiene til elevene. Jeg har brukt definisjoner og litteratur til å støtte meg i analysen av strategiene, men det er fortsatt jeg som tolker datamaterialet.

I tillegg kan jeg påpeke at når jeg diskuterer forskjeller blant 1T- og 1P-elever så handler det om ulikheter blant elevene som har valgt 1P og 1T. Datainnsamlingen ble gjort i begynnelsen av skoleåret og elevene har ikke hatt mye undervisning enda på videregående. Årsakene bak klassevalget er selvfølgelig med å påvirker valg av strategier. Mulige årsaker kan være grad av motivasjonen i matematikkfaget, i hvilken grad elevene opplever mestring i faget og eventuelt om eleven tror det påvirker videre utdannelse og yrke.

6 AVSLUTNING

6.1 Konklusjon

Hensikten med studiet var å få en oversikt over videregåendeelevers oppgavespesifikke strategier og underkonstruktene som er synlige i dem. Utvalget mitt er rekruttert fra ungdomsskoler fra hele Norge med et karaktersnitt godt over landsgjennomsnittet. Det gir oss en god spredning i strategier, men er kanskje ikke helt representativt nivåmessig. Vi ser at de aller fleste elevene bruker strategier som leder til riktig svar og benytter tenkning innen flere av underkonstruktene for å løse matematikkoppgavene. Noen strategier er mer brukt enn andre og det er ofte en eller to strategier som de fleste elevene velger. Dette er presentert i en profil for å gi en oversikt over majoritetens strategier. Elevmajoriteten bruker både retrieval- og backup-strategier for å løse oppgavene, men det er bare en fjerdedel av strategiene som er backup-strategier.

Gray og Ånestad (2016) påstår at del-hele er det underkonstruktet som elever oftest henter strategier fra når de skal løse brøkoppgaver. Derfor forventet jeg at del-hele skulle være det underkonstruktet som var mest synlig i strategiene, men vi ser i undersøkelsen min at alle fem underkonstrukt er synlig i strategiene. I mange strategier blir flere underkonstrukter synlige, og ikke bare ett, det viser at det ikke nødvendigvis går an å skille de fem underkonstruktene fra hverandre i strategiene. I elevmajoritetens strategier er alle underkonstrukter representert, men det er kvotient som er synlig i flest strategier og måling som er synlig i færrest. Del-hele er dermed ikke det underkonstruktet som elevene hentet flest strategier fra. Dette kan ha med at det bare er en av åtte oppgaver som inviterer spesielt til del-hele. Ved at et underkonstrukt er synlig i en strategi må det bety at elevene har en viss forståelse for dette underkonstruktet, i det minste operasjonell forståelse (Sfard, 1991). Jeg vil derfor konkludere med at elevene har et mer solid brøkbegrep enn jeg forventet (Bjerke et al., 2013), selv om vi ikke kan si i hvilken grad brøkbegrepet er solid.

Undersøkelsen ble gitt til både 1P- og 1T-elever med en kartleggingsprøve som var helt lik i begge klasser. Derfor er det mulig å sammenligne resultatene i klassene. Elevene bruker de samme strategiene og det er de samme underkonstruktene som er synlige i dem. Egne strategiprofiler for klassene ville sett nesten helt like ut. Derfor har det ingen hensikt å lage separate profiler. Vi ser likevel en antydning til at flere elever i 1P-klassen enn 1T-klassen benytter backup-strategier i noen oppgaver.

6.2 Videre forskning

I denne undersøkelsen har jeg hatt en åpen tilnærming til datamaterialet for å se hvilke oppgavespesifikke strategier elevene velger å benytte. Resultatene kan ikke generaliseres, siden utvalget ikke er representativt. For å generalisere resultatene kunne det vært gjennomført en lignende undersøkelse med flere elever fra andre studieretninger, eventuelt med flere oppgaver. Selv åpne brøkoppgaver inviterer ofte mer til ett underkonstrukt enn de andre. Med flere oppgaver som også inviterer spesielt til del-hele og måling-konstruktet kan man også lettere se om det er noen underkonstrukter elever velger oftere å hente strategier fra enn andre. Kanskje det da ville vært mulig å si noe om hvilke underkonstrukter elever etter grunnskolen er mer komfortable med å hente strategiene sine fra.
Det kunne også vært interessant å tatt for seg ett underkonstrukt for å sjekke om elever bruker strategier fra hele underkonstruktet. Eventuelt teste om elever forstår hele underkonstruktet når de henter strategiene sine fra det. Dette kunne vært gjort ved å gi forskjellige oppgaver som inviterer til ulike deler av et underkonstrukt. For eksempel i kvotient-konstruktet måtte oppgavene testet både delingsdivisjon og målingsdivisjon med forskjellige størrelser på brøkene. Ved å finne konkrete svakheter i brøkbegrepet til elevene kan det gi oss en pekepinn på hva vi bør fokusere mer på i undervisningen.

7 LITTERATURLISTE

Alibali, M. W. & Sidney P. G. (2015). Variability in the natural number bias: Who, when, how, and why. *Learning and instruction, 37*, 56-61. Doi: 10-1016/j.learninstruc.2015.01.003

Antun, J. (2015). *Brøkforståing hjå elevar som startar i den vidaregåande skulen.* (Mastergradavhandling, Universitetet i Bergen). Hentet fra: Http://bora.uib.no/bitstream/handle/1956/9949/132056828.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ashcraft, M. A. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. *Cognition, 44*(1-2), 75-106.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. A. (1983). Rational Number Concepts. I R. L. M. Landau (red.), *Acquisition of mathematics Concepts and Processes* (s. 91-125). New York: Academic Press.

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er tall. Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I I. Pareliussen, B. B. Moen, A. Reinertsen & T. Solhaug (Red.), *Fo i Praksis 2012 conference proceedings* (s. 20-27). Trondheim: Tapir akademisk forlag.

Brekke, G. (2002). *Kartlegging av matematikkforståelse. Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Hentet fra http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/Bestillingstorg/PDF/59447_KAR_MAT_007_innmat.pdf

Brekke, G & Tinnes, M. N. (2001). *Kartlegging av matematikkforståing. Rettleiing til ta log talrekning. Grunnkurs Videregående opplæring.* Oslo: Læringssenteret (LS).

Charalambous, C. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Student's understandings of fraction. *An International Journal*, *64*(3), 293-316.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag.

Creswell, J. W., (2012). *Educational research: Planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative reasearch* (4. utg.). Boston: Pearson.

Fazio, L. K., DeWolf, M. & Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, *42*(1), 1-16.

Gjone, G. (1998). Simon Stevin (1548-1620) og desimaltallene. *Tangenten*, (2), 15-18.

Goldman, S. R. 1989. Strategy instruction in mathematics. *Learining Disability Quarterly*, *12*(1), 43-55.

Gray, J. & Ånestad, G. (2016). Aspekter ved brøk i en nasjonal prøve. I E. K. Hovik & B. Kleve (Red.), *Undervisningskunnskap i matematikk* (s. 61-77). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Bergem, O.K., Kjænsli, M., Lie. & Turmo, S. (2004). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers presentasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003.* Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Grønmo, L.S. & Hole, A. (red.). (2017). *Prioritering og Progresjon i skolematematikken. En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L.S. & Onstad, T. (red.) (2009). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo: Unipub. Hentet fra http://www.timss.no/rapport2007/Hele_TIMSS2007.pdf

Hinna, K. R. C., Ringvold, R. A. & Gustavsen, T. S. (2011*). QED 5-10, matematikk for grunnskolelærerutdanningen.* Kristiansand: Høyskoleforlaget AS – Norwegian Academic Press.

Imsen, G. (1998). *Elevenes verden: Innføring i pedagogisk psykologi* (3. utg.). Oslo: Tano Aschehoug.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. I R. Lesh (Red.), *Number and measurement: Papers from a research workshops* (s. 101-144). Colombus: ERIC/SMEAC.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk forlag.

Lamaire, P. & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General, 124*(1), 83-97.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a Theoretical Framwork for Research. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (s. 629-668). North Carolina: Information Age Publishing.

Lamon S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios four Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (3. utg.). New York: Routledge.

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet. En undervisningslære.* Oslo:

NKI. Hentet fra https://www.nb.no/items/URN:NBN:no-nb_digibok_2008060504001

Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for research in mathematics education, 28*(3), 309-330.

NESH. (2018, 7. november). Generelle forskningsetiske retningslinjer. Hentet fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/fek_generelle_retningslinjer.pdf

Ostad, S. (1996). Addisjonsstrategier i et longitudinelt perspektiv. Sammenligning mellom elever med og uten matematikvansker. I S. Ostad (Red.), *matematikkvansker i strategi-teoretisk perspektiv (Del-rapp MUM.).* Oslo: Universitetet i Oslo.

Ostad, S. A. (1997). Developmental differences in addition strategies: A comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. *British Journal of Educational Psychology, 67*, 345–357.

Ostad, S. A. (2010). *Matematikkvansker: En forskningsbasert tilnærming*. Oslo: Fagbokforlaget.

Rinne, L. F., Ye, A. & Jordan, N. C. (2017). Development of fraction comparison strategies: A latent transition analysis. *Developmental Psychology, 53*(4), 713 – 730.

Seland, I., Vibe, N. & Hovdhaugen, E. (2013). *Evaluering av nasjonale prøver som system.* (4). Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/280397/NIFUrapport2013-4.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides on the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-26.

Sidney, P. G., Thalluri, R., Buerke, M. L. & Thompson, C. A. (2018). Who uses more strategies? Linking mathematics anxiety to adults' strategy variability and performance on fraction magnitude tasks. *Thinking & Reasoning.* https://doi.org/10.1080/13546783.2018.1475303

Siegler, R. S. & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, S. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current Directions in Psychological Science,* 26(4), 346-351. Doi: 10.1177/0963721417700129

Språkrådet. (u. å.) Strategi. *Bokmålsordboka,* hentet 03. oktober 2018 fra https://ordbok.uib.no/perl/ordbok.cgi?OPP=strategi&ant_bokmaal=5&ant_nynorsk=5&begge=+&ordbok=begge

Säljö, R. (2013). Støtte til læring – tradisjoner og perspektiver. I R. J. Krumsvik & R. Säljö (Red.), *Praktisk-pedagogisk utdanning: En antologi.*(s. 53-79). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Tian, J. & Siegler, R. S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first? *Educational Psychological review, 30*(2), 351-372.

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Hentet fra: Https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

8 VEDLEGG

8.1 Godkjenning fra NSD

8.2 Samtykkeskjema

8.3 Kartleggingsprøven

8.4 Tabelloversikt over kartleggingsprøven med hvilke elever som har brukt hvilke strategier.

Vedlegg 1

8.1 Godkjenning fra NSD

NSD

Trond Stølen Gustavsen

5008 BERGEN

Vår dato: 03.07.2018 Vår ref: 61275 / 3 / OOS Deres dato: Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 24.06.2018 for prosjektet:

61275	*Elevers løsningsstrategier i møte med brøkoppgaver*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Trond Stølen Gustavsen*
Student	*Helen Bringeland*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:

- opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
- vår prosjektvurdering, se side 2
- eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Ved prosjektslutt 31.12.2019 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

personopplysninger.

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Dag Kiberg

Øyvind Straume

Kontaktperson: Øyvind Straume tlf: 55 58 21 88 / Oyvind.Straume@nsd.no

Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Helen Bringeland, hebringeland@gmail.com

8.2 Samtykkeskjema for deltakelse i forskningsprosjekt

I forbindelse med min mastergrad ved matematisk institutt på UiB i matematikkdidaktikk ønsker jeg å gjennomføre en kartleggingsprøve med elever fra vg1. Oppgavene vil omhandle brøk og jeg ønsker å undersøke hvordan elevene tenker og hvilke strategier de har når de løser oppgaver om brøk.

Deltakelse vil innebære en kartleggingsprøve med noen brøkoppgaver og vil vare i ca 30 minutt. Oppgavene vil omhandle brøk og forhåpentligvis få frem ulike strategier som elevene bruker. Deltagelse vil ikke påvirke karakter i faget, men eleven får repetert litt brøk.

Det er frivillig å delta i studien, og siden det ikke blir registrert noen sensitive opplysninger i prosjektet kan elever over 15 selv samtykke til å delta. Du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn.

På kartleggingsprøven vil elevene bli identifisert med et kodenummer. Det vil være en kodeliste som kan identifisere hvilken elev som har løst hvilke oppgaver. Denne kodelisten vil faglærer ha liggende til jeg eventuelt trenger det slik at kartleggingsprøvene og kodelisten er adskilt. Opplysningene vil bli holdt konfidensielt og eleven vil bli anonymisert. Kodeliste og personopplysninger vil bli slettet ved endt master og prosjektslutt 31. desember 2019.

Dersom du har noen spørsmål kan du ringe meg på tlf. 97 65 96 71, eller sende en e-post til Hebringeland@gmail.com. Du kan også ta kontakt med veilederen min, Trond Stølen Gustavsen professor ved universitetet i Bergen, Matematisk institutt, på tlf. 55 58 48 55.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Med vennlig hilsen

Helen Bringeland

Lektorstudent ved Universitet i Bergen

8.3 Kartleggingsprøven

Når du løser oppgavene under er jeg mest interessert i hvordan du tenker når du løser de.

Skriv så utfyllende du kan og forklar hva du gjør og hvorfor.

Oppgave 1:

Hvor mange ruter er $^{1}/_{5}$ *av rutene under? Løs oppgaven og forklar hvordan du tenker.*

Hvorfor valgte du å løse det på denne måten?

Oppgave 2:

Fredrik bruker denne oppskriften når han lager riskrem:

Riskrem til 6 personer

4dl ris

7dl melk

0,5dl kremfløte

2ss sukker

Han skal lage til 15 personer. Hvor mye kremfløte skal Fredrik bruke? Skriv utfyllende hvordan du tenker når du løser oppgaven.

Hvorfor valgte du å løse det på denne måten?

Oppgave 3:

Johanna skal fylle 36 liter saft på flasker. Hver flaske rommer 0,5 liter. Hvor mange flasker trenger Johanna? Løs oppgaven og forklar utfyllende hvordan du tenker.

Hvorfor valgte du å løse det på denne måten?

Oppgave 4:

Plasser brøkene i stigende rekkefølge: $^{2}/_{5}$ $^{1}/_{5}$ $^{1}/_{2}$ $^{2}/_{3}$ $^{1}/_{4}$. *Forklar hvordan du går frem for å finne ut dette.*

Hvorfor valgte du å løse det på denne måten?

Oppgave 5:

Lise skal svømme 100m. En lengde i svømmebassenget er 12,5m. Hvor mange lengder må Lise svømme? Forklar utfyllende hvordan du kommer frem til dette.

Hvorfor valgte du å løse det på denne måten?

Oppgave 6:

I en mat og helse-time skal Siri undersøke hvor mye ingrediensene i ett brød koster til sammen. I brødet er det blant annet 400g hvetemel. Siri finner ut at 1kg hvetemel koster 15kr. Hvor mye koster 400g hvetemel? Forklar hvordan du går frem når du løser oppgaven.

Hvorfor valgte du å løse det på denne måten?

Oppgave 7:

Johanne skal bake ostehorn. Oppskriften gir 12 ostehorn. Johanne skal bake 20 ostehorn.

Ostehorn, 12stk

0,6l Lettmelk

120g smør

1 pakke gjær

0,5ts salt

Ca. 12dl mel

Revet ost

Hvor mange gram smør skal Johanne bruke? Løs oppgaven og forklar hvordan du går frem for å løse dette.

Hvorfor valgte du å løse det på denne måten?

Oppgave 8:

Obi er i USA på ferie og skal kjøpe konfirmasjonsdress. I dressbutikken blir Obi spurt om hvor mange inches (in) høy han er. Obi er 150cm høy, og han vet at 1in er omtrent 2,5cm. Omtrent hvor mange inches høy er Obi? Løs oppgaven og forklar hvordan du finner svaret.

Hvorfor valgte du å løse det på denne måten?

Spørsmål:

Kunne du løst oppgavene over på andre måter?

Hvordan velger du løsningsmetode når du ser en oppgave?

Tusen takk for at du var villig til å gjennomføre denne kartleggingsprøven!

8.4 Tabelloversikt over strategier

Her har jeg tatt for meg kartleggingsprøven og gått gjennom oppgave for oppgave. Hvilke strategier bruker elevene når de løser oppgavene? Dette har jeg satt opp i tabeller med egenproduserte navn på strategiene nedover og fordelt hvilke elever som har brukt hvilke strategier bortover. Elevene er delt inn etter hvilken klasse de går i for å se om det er store forskjeller på klassene. Under tabellene står en beskrivelse av hver strategi. De elevene som er understreket i tabellen har gjort en eller annen feil og fått galt svar. Mange av dem har brukt en god strategi, men feilet i utregningen. På noen oppgaver er det flere elever som har valgt en strategi som gir galt svar da er strategien understreket i stedet. Obs! Disse tabellene er ikke oppdaterte, men foreløpige tabeller brukt tidligere i prosessen.

Oppgave 1

Tabell 8.1: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 1 på kartleggingsprøven.

Strategi	**1T**	**1T antall**	**1P**	**1P antall**	**Totalt**
Dele antall ruter på fem	101, 102, 103, 105, 107, 110, 111, 113, 114, 115, 118, 108?	12	121, 123, 124 (?), 128, 129, 131, 132(?), 135, 136, 138, 140, 141, 126	13	25
Via prosent	104	1	120	1	2
Ekvivalens $^1/_5 = {}^2/_{10}$	109, 116, 117(?)	3	133, 139 (?)	2	5
Dele arealet inn i fem deler	106	1	125, 134, 137, 119	4	5
Usikker	112,	1	122, 127, 130, 142	4	5
Totalt		18		24	42

Dele antall ruter på fem: Antall ruter: 100 / 5 = 20 ruter – Operator eller del-hele?

Via prosent: Elevene gjør om brøken til prosent: $^1/_5$ = 20% og bruker dette til å finne hvor mange ruter 20% utgjør.

Ekvivalens $^1/_5$ = $^2/_{10}$: Å finne $^1/_5$ av 100 er det sammen som å finne $^2/_{10}$ av 100, elevene bruker dette til å finne antall ruter/rekker. Dette er ekvivalens i hvert fall som er vanligvis koblet til forhold.

Dele arealet inn i fem deler: Tegne 5 like store bokser som inneholder rutene, for så å se hvor mange ruter det er i en boks – Del-hele.

Usikker: Ulike strategier som ikke er tydelig for meg. For eksempel har 112 for lite forklaring til at jeg klarer å se strategien tydelig.

Oppgave 2

Tabell 8.2: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 2 på kartleggingsprøven.

Strategi	1T	1T antall	1P	1P antall	Totalt
$^{15}/_6$ som operator	106, 117, 118	3	138 (2.5 som operator?), 120, 126, 130, 136	5	8
$^5/_2$ som operator	103, 107 (?), 109, 114	4			4
2,5 som operator	101, 102, 105,	3			3
Gjentatt addisjon	104, 110, 111, 112, 113, 115, 116, 108?	8	137, 119, 121, 122,124, 125, 127, 128, 129, 131, 132, 133, 139, 140, 141, 134,	16	22
Multiplisert med 3			135	1	1
Blank/ikke løst			123, 142	2	2
totalt		18		24	42

15/6 som operator: Multiplisere med $^{15}/_{6}$ (= 2,5) – Tydelig operator.

$^{5}/_{2}$ som operator: Elevene tar 6dl dividerer med 2 og så multipliserer med 5 er det det samme tenkemåte som å multiplisere med $^{5}/_{2}$? For da er dette operator, slik som forrige bare at elevene bruker $^{5}/_{2}$ i stedet for $^{15}/_{6}$.

2,5 som operator: Elevene multipliserer ingrediens med 2,5, men det kommer ikke tydelig frem hvordan de fant 2,5 som operator. Skal jeg slå sammen alle tre strategier?

Gjentatt addisjon: Elevene adderer ingrediensene enten ved å ta: 6 + 6 + 1 + 1 + 1 eller 6 + 6 + 3, kaller derfor denne strategien for gjentatt addisjon. H

Multiplisert med 3: Elev nummer 135 har multiplisert kremfløten med 3, men da får man kremfløte til 18 personer og ikke 15 som det var meningen.

Blank/ikke løst: Elever som ikke har løst oppgaven, kan stille oss spørsmål om hvorfor.

Oppgave 3

Tabell 8.3: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 3 på kartleggingsprøven.

Strategi	**1T**	**1T antall**	**1P**	**1P antall**	**Totalt**
Antall liter delt på 0,5	101, 103, 106, 111, 112, 113, 117, 118	8	119, 120, 122, 125, 127, 130, 134, 136, 137	9	17
Antall liter multiplisert med 2	102, 104, 105, 107, 110, 114, 115, 116,	8	121, 123, 124, 129, 132, 133, 135, 138, 139, 140	10	18
Antall liter delt på 2	108. 109,	2	126, 128, 131, 141, 142	5	7
Totalt		18		24	42

Antall liter delt på 0,5: Antall liter: $^{36l}/_{0,5l}$ fordi hver flaske rommer 0,5l. Dette er målingsdivisjon og strategien faller innenfor kvotient-konstruktet.

Antall liter multiplisert med 2: Antall liter: 36 multiplisert med 2 fordi det trengs to flasker per liter. Dette er også målingsdivisjon – Kvotient.

Antall liter delt på 2: Antall liter: 36 delt på 2. Dette gir galt svar, og det virker som elevene blander utregningsmetode – Kvotient?

Oppgave 4

Tabell 8.4: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 4 på kartleggingsprøven.

Strategi	**1T**	**1T antall**	**1P**	**1P antall**	**Totalt**
Via prosent	101, 102, 104, 108, 110, 113	6	120, 122, 124, 129, (131),141	5	11
Via desimaltall	111, 112, 118	3	121, 123, 128, 130, 133, 136, 138	7	10
Tegne bokser/pizzastykker	103, 109, 105, 115	4	134, 125, 132, 135, 140, (141)	5	9
Felles nevner	106,	1	126, 131, 137	3	4
Sammenligne brøker	107, 114, 116, 117	4	127, 139, 142(?)	3	7
Ikke fullført			119	1	1
Totalt		18		24	42

Via prosent: Elevene gjør om brøkene til prosent for å lettere kunne plassere på tallinje og/eller finne rekkefølgen– Måling-konstruktet?

Via desimaltall: Elevene gjør om brøkene til desimaltall for å lettere kunne plassere på tallinje og/eller finne rekkefølge – Måling-konstruktet.

Tegne bokser: Elevene tegner areal/bokser for å sammenligne størrelsen på brøkene – Del-hele.

Tegne pizzastykker: Ser ut som samme strategi som med boksene bare at de tegner pizzastykker i stedet for bokser. Noen pizzaer var vanskeligere å se svaret på enn andre, dette gjør at noen kanskje svarer feil (105) - Del-hele. *Slå sammen med den over?*

Felles nevner: Elevene finner felles nevner for å sammenligne, noen finner fellesnevner kun mellom $^1/_4$ og $^1/_5$ for å finne rekkefølgen der. Andre bruker felles nevner mellom alle brøkene – enten 60 eller 100 (ligner på via prosent strategien) – Måling-konstruktet

Sammenligne med $^1/_2$: Elevene bruker ½ som referansepunkt – Måling-konstruktet.

Diverse: Strategier som er forskjellige fra de andre og der elever gjerne har brukt flere strategier for å komme til svaret.

Ikke fullført: Elev har ikke fullført oppgaven og det er vanskelig å si noe om strategivalg.

Oppgave 5

Tabell 8.5: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 5 på kartleggingsprøven.

Strategi	1T	1T antall	1P	1P antall	Totalt
Total distanse delt på en lengde	101, 102, 103, 104(?), 107, 110, 114, 116, 117, 118	10	120, 123, 125, 126, 130, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 141	12	22
Gjentatt subtraksjon	105	1			1
Gjett og prøv	106, 112, 115, 108, 109, 113	6	119, 122, 124, 127, 129, 139	6	12
Gjentatt addisjon	111	1	121, 131, 138, 140, 142	5	6
Blank			128	1	1
Totalt		18		24	42

Total distanse delt på en lengde: Elevene har tatt total distanse: 100m dividert med en lengde: 12,5m og funnet antall lengder som må svømmes. Dette er klassisk målingsdivisjon og vi regner denne strategien innenfor kvotient-konstruktet. *Sammenheng med del-hele?*

Gjentatt subtraksjon: Dette er en lignende strategi til den første, men en mer umoden målingsdivisjon/kvotient-tenkning. *Litteratur*?

Gjett og prøv: Elevene har ofte en intuisjon på hvilket tall som er svaret eller i nærheten av svaret og sjekker svaret med dette forslaget. Hvis det ikke er helt riktig gjør de det på nytt med det nye antallet de tror er svaret.

Gjentatt addisjon: Elevene adderer litt og litt og ser hvor mange ganger 12,5 må legges sammen for å få 100 meter. Noen bruker multiplikasjon for å sjekke når de ser et mønster eller hva svaret kan være.

Blank: Ingen tegn til strategi eller løsning.

Oppgave 6

Tabell 4.6: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 6 på kartleggingsprøven.

Strategi	1T	1T antall	1P	1P antall	Totalt
Via én del	101, 105, 107, 109, 112, 113, 114, 115, 117,	9	120, 121, 124, 126, 127, 129, 130, 131, 132, 133, 136, 137, 138, 140	13 (14)	23
Dividere med 2,5	103,	1	122?, 134, 135, 139	4	5
Gjør om til kilo	102, 106, 110?	3			3
$^2/_5$ som operator	104, 111, 116, 118, 108,	5			5
Via 0,5 kilo			141	1	1
Blank/ikke fullført			119, 123?, 125, 128, 142	5	5
Totalt		18		24	42

Via én del: Elevene ønsker å finne ut hvor mye det koster med en «del» først: 1g, 10g eller 100g for så å finne ut hvor mye det koster med 400g. For eksempel tar de: $^{15kr}/_{100g} \cdot 40g$ eller $^{15kr}/_{10g} \cdot 4g$. Forhold-konstruktet?

Dividere med 2,5: Elevene finner forholdet mellom 1000g og 400g ved å ta $^{1000}/_{400} = 2,5$, før de regner ut $^{15kr}/_{2,5} = 6kr$

Gjør om til kilo: Eleven omgjør 400g til 0,4kg multipliserer dette med 15kr som er prisen for 1kg.

$^2/_5$ som operator: Elevene prøver å finne letteste vei fra 15 til 6, og tar $^{15kr}/_5 = 3kr$ og så multipliserer de svaret med 2:3kr · 2 = 6kr - Operator?

Via 0,5 kilo: Eleven halverer prisen: 1kg = 15kr, 0,5kg = 7,5kr, dette gir at 0,4kg = 7,5kr – 1,5kr = 6kr. – Forhold og subtraksjon.

Blank/ikke fullført: Elever som ikke har svart eller ikke fullført besvarelsen av oppgaven og gjør det vanskelig for meg å forstå hvordan de tenker.

Oppgave 7

Tabell 4.7: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 7 på kartleggingsprøven.

Strategi	**1T**	**1T antall**	**1P**	**1P antall**	**Totalt**
$^{5}/_{3}$ eller $^{20}/_{12}$ som operator	102, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 118	14	121, 130, 132, 134, 145, 136, 137, 138, 126, 131	10	24
Forhold	110, 107,	2			2
Via ett horn			125, 127, 129, 133, 140, 141	6	6
Addere 12 + 8	116	1			1
Dobler oppskrift og trekker fra 4 horn			124	1	1
Usikker			139, 142	2	2
Blank	101	1	119, 120, 122, 123, 128	5	6
Totalt		18		24	42

$^{5}/_{3}$ eller $^{20}/_{12}$ som operator: Dividere med 3 eller 12 og multiplisere med 5 eller 20 for å gjøre om oppskriften fra 12 til 20 ostehorn – Operator.

Forhold: Elevene ser på sammenhengen/forholdet mellom ingredienser og horn.

Via ett horn: Elevene finner hvor mye smør det er per horn før de regner ut hvor mye der er for 8 horn. Deretter adderer de smør for 12 + smør til 8 = smør til 20.

Addere 12 + 8: For å finne hvor mye smør det trengs til 8 horn finner eleven ut at oppskriften må multipliseres med $^{2}/_{3} \approx 0{,}6$ og at oppskriften da må multipliseres med 1,6 for å finne mengde smør til 20.

Dobler oppskrift og trekker fra 4 horn: Elev dobler oppskriften: 12 + 12 = 24 og trekker fra mengden smør som trengs til 4 horn. Regnestykket blir da: 120g + 120g - $^{120g}/_{3}$ = 120 + 120 – 40 = 200g.

Usikker: Elever med løsningsmetode jeg ikke forstår eller skjønner hvor jeg skal plassere i tabell.

Blank/ikke løst: Elever som ikke har løst eller stopper opp/gir opp før de har løst oppgaven ferdig.

Oppgave 8

Tabell 4.8: Oversikt over elevenes strategier i oppgave 8 på kartleggingsprøven.

Strategi	**1T**	**1T antall**	**1P**	**1P antall**	**Totalt**
Antall cm delt på 2,5	102, 103, 104, 105, 106, 107, 112, 114, 116, 117, 118, 101?	12	124, 125, 127, 131, 132, 133, 134, 135, 138, 139, 140, 141, 129?, 130	14	26
Forhold	108, 111, 113,	3			3
Antall cm multiplisert med 2,5	109, 110	2	136, 137, 142	3	5
Finne x i 2,5 · x = 150	115?	1	122, 123?, 126,	3	4
Blank/ikke løst			119, 120, 121, 128	4	4
Totalt		18		24	42

Antall cm delt på 2,5: Totalt er Obi 150cm høy og elevene dividerer med 2,5 for å finne ut hvor mye dette er i inches.

Forhold: Elevene ser på forholdet mellom cm og inches, 2,5cm = 1 in, så multipliserer de litt og litt på begge sider av likhetstegnet til de får 250cm på venstre side og 60 på høyre. Dette er klassisk bruk av forhold-konstruktet.

Antall cm multiplisert med 2,5: 150cm · 2,5cm, dette er en strategi som fører til galt svar. Elever glemmer hvilken regneoperasjon som er lur å bruke i denne sammenhengen.

Finne x i 2,5 · x = 150: Eleven bruker ikke nødvendigvis x, men de leter etter tallet som multiplisert med 2,5 blir 150. Her prøver de seg frem litt etter litt multipliserer de oppover til de finner svaret.

Blank/ikke løst: Besvarelser der eleven ikke er kommet langt nok til at det går an å se hvilken strategi de ønsker å bruke.