Å OMSETJE MELLOM ULIKE REPRESENTASJONAR AV FUNKSJONAR

EI KVALITATIV UNDERSØKING AV ELEVAR SINE LØYSINGSSTRATEGIAR I MATEMATIKKFAGET 1P

Kine Renate Floen

ERFARINGSBASERT MASTER I UNDERVISNING

MED FORDJUPING I MATEMATIKK

MATEMATISK INSTITUTT

UNIVERSITETET I BERGEN

HAUSTEN 2018

Samandrag

I denne studien har løysingsstrategiar for å omsetje mellom ulike representasjonar av lineære funksjonar vore i fokus. Følgande forskingsspørsmål har vore grunnlag for arbeidet:

1. *Kva løysingsstrategiar brukar elevar i matematikkfaget 1P når dei skal omsetje mellom ulike representasjonar av lineære funksjonar.*
2. *Kva kjenneteiknar ulike strategiar på ulike nivå?*

Det har i denne studien blitt gjennomført eit semistrukturert intervju med ni elevar. Bakgrunn for utvalet er gjort ut i frå ein diagnostisk test som undersøkjer kva strategiar elevar bruker for å omsetje mellom ulike representasjonar av lineære funksjonar. Under arbeidet med analysen blei det funnet ei rekke strategiar der kjenneteikn på desse strategiane er brukt for å utvikle tre nivå. Nivå A (imitativ) finn ein kjenneteikn som bruk av *omvegar, prøve- og feilemetode* og *imitative tilnærmingar*. For nivå B (hybrid) er også eit kjenneteikn bruk av omvegar, men med færre steg enn på nivå A. Andre kjenneteikn vil vere *mønstersniffing* og ei *hybrid tilnærming.* For nivå C (kreativ) finn ein kjenneteikn som å omsetje *direkte, tolke* og *kreative tilnærmingar*.

Studien viser at på nivå A vil ein finne strategiar som tar i bruk ei imitativ tilnærming der ein leiter etter kjente prosedyrar og formlar. Dette kjem fram ved bruk av omvegar der ein . Ved mangel på kjente prosedyrar vil strategiar på nivå A ta i bruk ein prøve- og feilemetode der ein gjerne bruker aritmetikk og ikkje algebra for å finne svaret. Strategiar på nivå B vil ta i bruk ei hybrid tilnærming med kjenneteikn som både imitativ, men også kreativ tilnærming. Imitative tilnærmingar kjem fram ved bruk av omvegar, men med færre steg enn nivå A. Samtidig vil strategiane vere meir kreative ved at ein brukar strategiar der ein leiter etter mønster for å løyse ei oppgåve. Strategiar på nivå C vil bruke ei kreativ tilnærming ved å bruke lærte prosedyrar til å vurdere, noko som saman med å tolke kan gjere strategiane meir effektive. Ei slik kreativitet gjer at elevar kan omsetje direkte.

Kjennskap til ulike strategiar vil vere nyttig for lærarar å bruke i undervisninga. Ved å ha eit slikt verktøy kan ein lettare kjenne igjen dei ulike kjenneteikn for strategiar på ulike nivå og dermed hjelpe elevar til å utvikle sine strategiar.

Forord

Våren 2012 fullførte eg utdanninga «integrert adjunkt» på Universitet i Bergen med ein plan om å kome tilbake for ei mastergrad på eit seinare tidspunkt. Lite visste eg då at eg allereie to år seinare skulle vere i gang med studiet erfaringsbaser master med fordjuping i matematikk. Som lærar har eg frå starten av vore opptatt av å få eit innblikk i elevar sine tankar og prosessar for å løyse ei oppgåve. Det falt difor naturleg å ta ei mastergrad i eit matematikkdidaktisk emne der eg undersøkjer nettopp dette.

Å studere ved sidan av jobb har vore ein tøff prosess, men også veldig lærerikt. Det å møte utfordringar og kjenne ein på ein frustrasjon, noko som elevar ofte gjer i eit klasserom, er kanskje noko eg etter dette tenkjer alle lærarar kan ha godt av å oppleve. I tillegg ser eg nytta av å sette av tid til å snakke med elevar for å gripe fatt i deira tankar i større grad enn ein får gjort i løpet av ei undervisningsøkt.

Når eg no ser tilbake på desse åra er det mange som fortener ei takk;

Tusen takk til min rettleiar Ove Gunnar Drageset for den hjelpa eg har fått med å finne vegen til målet. Utan dine konkrete tilbakemeldingar tør eg ikkje tenkje på kor i prosessen eg hadde vore i dag. Takk til mine medstudentar for fine år. Eg kjem til å sakne det sosiale og dei faglege samtalane. Takk til min avdelingsleiar som har tilrettelagt min arbeidskvardag slik at eg har kunne gjennomført dette studiet ved sidan av jobb. Ein stor takk til elevane som velvillig stilte opp til intervju.

Eg vil også takke min familie som har støtta, og ikkje minst heia på meg. Det har betydd mykje.

Og ikkje minst, Kåre. Du er rett og slett gull verd.

Innhaldsliste

1 Introduksjon

1.1 Bakgrunn for oppgåva

I media kjem det stadig nye debattar om matematikkunnskapen til elevar i den norske skulen. Noko av kritikken som er retta mot dagens system, er at matematikkundervisninga har for mykje fokus på pugging av reglar og for lite arbeid slik at elevane for ei forståing av matematikken. I dagens arbeid med nye læreplanar i matematikkfaga er dei sentrale momenta at elevar skal lære kritisk tenking og refleksjon, med eit ønske om meir kreativitet og det å lære på nye måtar (Utdanningsdirektoratet, 2018a). I forslag til nye læreplanar er nokon av kompetansemåla formulert på følgjande måte; «...diskutere dei med andre» og «...presentere og grunngje eigne løysningar». Med dette kan det sjåast ut til at det å bli meir bevisst på eigne strategiar blir ein større del av matematikkfaga. Med dei nye kjerneelmenta skal det altså leggast større vekt på ulike strategiar og framgangsmåtar, og mindre fokus på sjølv svara (Utdanningsdirektoratet, 2018b).

Eg har i mine 6 år som lærar, alltid undervist i matematikkfaget 1P. På denne måten har eg lært faget å kjenne og utvikla ei interesse for korleis elevar vel å løyse oppgåver. I mitt yrke møter eg ofte på elevar som er opptatt av å finne svaret og i mindre grad tenkjer gjennom kva ein gjer for å kome fram til svaret. I samtalar med ulike elevar kjem det fram strategiar som blir brukt fordi det er ein trygghet og noko kjent med metoden, utan at ein nødvendigvis tenkjer gjennom kvifor denne strategien fungerer. I desse samtalane kjem det også fram kreative og nytenkjande idear. Det å hjelpe elevar med å bevisstgjere kva strategiar som blir brukt for å løyse ei oppgåve, gjer at eg lettare kan stille dei rette spørsmåla for å vidareutvikle deira oppgåveløysing. I denne prosessen opplever eg at elevar ofte får ei framgang i faget, noko som eg trur vil vere med å auke motivasjonen.

Matematikkfaget 1P er eit fellesfag for elevar på den vidaregåande skulen. Faget er sett på som eit praktisk retta matematikkfag der elevar i større grad må kunne sjå på praktiske tydingar av funksjonar. Eit av kompetansemåla i 1P er at dei skal kunne «omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Å kunne omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar er viktig for å få ei større forståing av kva ein gjer ved problemløysing (Mason, Graham, & Johnston-Wilder, 2005). Janvier (1978) ser på fire ulike måtar å representere ein funksjon på; bruk av *situasjon, tabell, graf* og *uttrykk*. Sjølv om det blir arbeida med desse representasjonane i timane opplever eg at elevar i stor grad vel éin måte å representere funksjonar på. Gjerne den som blei brukt sist. Spesielt gjeld dette når elevar skal teikne grafen til ein lineær funksjon der elevane tradisjonelt sett først blir introdusert til å bruke verditabell og deretter stigningstal og konstantledd. Dersom elevar i ei oppgåve får problem med å bruke konstantledd og stigningstal verkar det som om dei ikkje tenker på at dei også kan bruke verditabell for å gjere prosessen lettare.

Som ein del av matematikkfaget i den norske skulen er kjenneteikna på matematikk-kompetanse *omgrep og ferdighetar*, *problemløysing* og *modellering* samt *kommunikasjon* (Utdanningsdirektoratet, udatert). Dette er alle kjenneteikn som kan trekkjast inn når ein skal sjå på ulike løysingsstrategiar elevane vel å bruke. Kva har dei av ferdighetar som er nødvendig for å gjere utrekningar? Korleis grip dei fatt i ei oppgåve? Korleis vel dei å presentere si løysing? Det å bli kjent med ulike strategiar som elevar vel å bruke når dei løyser ei oppgåve, ser eg på som ein stor del av min jobb for å kunne hjelpe elevar å vidareutvikle desse strategiane.

Med dette blir forskingsspørsmåla lagt til grunn for oppgåva:

1. *Kva løysingsstrategiar brukar elevar i matematikkfaget 1P når dei skal omsetje mellom ulike representasjonar av lineære funksjonar.*
2. *Kva kjenneteiknar ulike strategiar på ulike nivå?*

1.2 Oppbygging av oppgåva

Denne oppgåva er bygd opp av seks overordna kapittel. Det påfølgjande kapittelet tar føre seg tidlegare forsking og litteratur for å kunne forankre oppgåva i eit teoretisk rammeverk. Vidare blir val av metode presentert i kapittel 3 for å kunne svare på forskingsspørsmåla. I dette kapittelet blir vala eg har tatt, frå planlegging av studien til gjennomføring, samt vurdering av kvalitet og etikk knytt til studien presentert. I kapittel 4 blir det gjort greie for mine funn.

Sentrale utsegn frå elevar blir kategorisert etter nivå basert på intervjua. Kapittelet har blitt delt opp etter oppgåvetypar og kva omsetjing elevane skulle gjennomføre. Funna som har blitt presentert i analysekapittelet blir drøfta i kapittel 5. Der blir kjenneteikn for strategiar på ulike nivå knytt mot teori og tidlegare forsking. I kapittel 6 kjem ein konklusjon for oppgåva basert på drøftinga, og forslag til vidare forsking innan fagfeltet.

2 Teori

I denne oppgåva er det undersøkt kva strategiar som blir brukt for å omsetje mellom ulike representasjonar av lineære funksjonar. I tillegg er desse strategiane kategorisert etter ulike nivå. I dette kapittelet vil det bli presentert forsking og omgrep frå teorien som vil vere med på å belyse forskingsspørsmålet for denne oppgåva. I første del av teorien blir det fokusert på matematisk forståing. Sjølv om det ikkje er dette som blir undersøkt i denne oppgåva, vil forståing kunne vere med å påverke korleis ein løyser oppgåver og kva strategiar ein vel å bruke.

2.1 Matematisk forståing

I litteraturen finn ein ulike forklaringar på kva matematiske forståing er. Ein av dei mest brukte modellane for matematisk forståing er i følgje Nosrati og Wæge (2015) todelinga til Skemp (1978), *instrumentell* og *relasjonell forståing*. *Instrumentell forståing* gjer at ein kan løyse ei oppgåve ved å kunne bruke ein algoritme, utan å nødvendigvis forstå den (Skemp, 1978). Ved bruk av instrumentell matematikk kan ein raskt kome fram til rette dei svara. Det er noko som kan vere med på å auke mestringkjensla til elevar då dei etter kort tid kan sjå eit resultat av det dei gjer (Skemp, 1978). I tillegg kan instrumentell matematikk i spesielle kontekstar vere lettare å forstå, som det å multiplisere to negative tal. Ved *relasjonell forståing* er det, i motsetning til instrumentell forståing, ikkje nok å kunne løyse oppgåva, men ein skal også forstå kva ein gjer (Skemp, 1978). Her kan elevane bruke ein algoritme, så lenge dei forstår kva dei har gjort. Ved relasjonell forståing veit ein korleis og ein skal løyse ei oppgåve og kvifor denne metoden fungerer, og ein vil lettare kunne overføre forståinga til nye oppgåver. I tillegg vil det vere lettare å hugse kva ein skal gjere for å løyse gitte problem dersom ein har relasjonell forståing samanlikna med ein instrumentell forståing (Skemp, 1978). Sjølv om Skemp (1978) ser på fordelar ved bruk av instrumentell matematikk, er det relasjonell matematikk som vil gjere at elevane har ei matematisk forståing.

Hiebert & Lefevre (1986) har også ein todelt modell for matematisk forståing. Dei deler matematisk kunnskap inn i *prosedyrekunnskap* og *konseptuell kunnskap.* Prosedyrekunnskap blir delt inn i to underkategoriar. Den første delen dreier seg om å bruke eit formelt matematisk språk. Ein skal her kunne presentere matematiske idear ved hjelp av eit korrekt språk og bruk av symbol, utan å nødvendigvis måtte forstå betydinga. Til dømes kan ein føre opp bevis ved bruk av matematiske symbol utan å nødvendigvis forstå den matematiske ideen bak beviset. Den andre delen av prosedyrekunnskap går ut på å kunne løyse oppgåver ved hjelp av algoritmar, reglar eller prosedyrar (Hiebert & Lefevre, 1986). Denne andre delen av prosedyrekunnskap kan samanliknas med det Skemp (1978) viser til som instrumentell forståing der elevar kan bruke ein algoritme utan å nødvendigvis forstå matematikken bak.

Konseptuell kunnskap kan sjåast på som eit nettverk av informasjon, der samanhengande relasjonar mellom informasjon er like viktig som dei ulike informasjonsdelane (Hiebert & Lefevre, 1986). Utvikling av konseptuell kunnskap skjer ved at ein konstruerer eit forhold mellom ulike bitar av informasjon. Dette kan vere eit forhold mellom kunnskap som er lagra i minne, eller mellom kunnskap ein allereie har og kunnskap ein endå ikkje har lært. Hiebert og Lefevre (1986) viser til eit primært nivå, og eit refleksjonsnivå innan konseptuell kunnskap. Innan det primære nivået vil relasjonar mellom kunnskapen innehalde det same abstrakte nivået som informasjonen sjølv er presentert på. Eit høgare abstraksjonsnivå viser kunnskap som er meir fri frå den konteksten informasjonen er henta frå. Dersom relasjonane mellom kunnskap er på eit høgare nivå enn det informasjonen sjølv er presentert på, blir dette kalla eit refleksjonsnivå. Eit refleksjonsnivå inneber at relasjonane er mindre knytt til spesifikke kontekstar.

Matematisk kompetanse kan i følgje Kilpatrick (2001) sjåast på som fem komponent; *konseptuell forståing, prosedyreflyt, strategisk tankegang, resonnering* og *engasjement*. Desse fem komponentane er alle avhengig av kvarandre og det er ikkje nok å berre fokusere på ein, to eller tre av desse ferdighetane for å lære matematikk (Kilpatrick, 2001). Komponentane støttar kvarande, og for at ein skal kunne utvikle ein matematisk kompetanse er det viktig å arbeide med alle fem komponentane samtidig (Valenta, 2015). *Konseptuell forståing* er ferdighetar innan matematiske konsept, operasjonar og relasjonar. Det handlar om å kunne tolke, forstå og nytte seg av ulike representasjonar (Valenta, 2015). Det er ikkje nok å kunne isolerte fakta og metodar, men forstå kvifor matematiske idear er viktige og i kva kontekstar dei kan brukast i. Ved *prosedyreflyt* vil ein ha ferdighetar i å utføre prosedyrar med ein fleksibilitet, nøyaktighet, effektivitet og på ein eigna måte. Konseptuell forståing er ei støtte for læring av prosedyreflyt, då det blir lettare å lære seg matematiske ferdighetar når ein forstår dei. Det går også andre vegen, fordi utan prosedyreflyt vil elevar ha problem med å løyse matematiske problem då dei ikkje kan utdjupe deira forståing og matematiske idear (Kilpatrick, 2001). Dette kan samanliknas med Hiebert og Lefevre (1986) som meiner at det er ein relasjon mellom prosedyrekunnskap og konseptuell kunnskap der det er lettare å bruke prosedyrar når ein forstår dei, og det er lettare å formidle det ein kan når ein har lært eit matematisk språk og prosedyrar. *Strategisk tankegang* er evna til å formulere, representere og løyse matematiske problem. Det å ha kapasitet til å tenke logisk, reflektere, forklare og grunngje er *resonnering.* Dette blir brukt til å navigere mellom ulike fakta, prosedyrar, konsept og metodar for å løyse ei oppgåve. I tillegg er det denne ferdigheten som gjer at elevar kan vurdere eige resonnement. *Resonnering* er ferdigheten som heldt alt saman og som kan lede elevar mot læring. Ferdigheten *engasjement,* er å kunne sjå på matematikken som noko fornuftig, noko ein har nytte av. At det å arbeide med jamn innsats lønner seg og det å sjå på seg sjølv som ein effektiv og flink utøvar i matematikk (Kilpatrick, 2001).

I avsnitta over er det beskrive ulike kunnskapstypar i matematikk, men det er også ulike modellar som beskriv arbeidsmåtar i matematikk. Ein modell for korleis ein kan arbeide med matematikk er Lithner (2017) sin modell for *imitativ resonnering* og *kreativ matematisk resonnering. Imitativ resonnering* handlar om å løyse oppgåver der elevar bruker memorerte algoritmar og prosedyrar. Her vil ein imitere ein prosedyre gitt av lærar eller andre (Lithner, 2017). Imitativ resonnering kan sjåast på som to hovudtypar. *Memorert resonnering* handlar om å bruke ein strategi der ein kjenner igjen svara, som å kjenne igjen ein pytagoreisk trippel. Her kan ein også skrive ned ein prosedyre, som eit bevis direkte avskrive frå ei lærebok. Denne metoden kan føre til at ein oppnår Hiebert og Lefevre (1986) sin første del av prosedyrekunnskap som går ut på å kunne bruke eit matematisk språk. Ein kan også bruke ei *algoritmisk resonnering* ved å kjenne igjen ein bestemt algoritme. Som å kjenne igjen algoritmen for å løyse ei andregradslikning. Når ein bruker algoritmisk resonnering kan ein liten reknefeil gjere at ein får feil resultat (Lithner, 2008). Algoritmisk resonnering kan føre til at ein oppnår Hiebert og Lefevre (1986) sin andre del av prosedyrekunnskap der elevar kan skrive ned ein prosedyre utan å forstå matematikken bak. Ved å arbeide med ein imitativ metode i eit klasserom vil ein truleg byggje opp det Skemp (1978) kallar instrumentell forståing og Hiebert og Lefevre (1986) kallar prosedyrekunnskap som handlar om å kjenne igjen prosedyrar utan å forstå dei.

Ei motsetning til imitativ resonnering er ei *kreativ matematisk resonnering.* Kreativ matematisk tenking skjer dersom ein oppfyller følgjande krav; (1) *nyskapande og fleksibel,* (2) *truverdighet* og (3) *eit matematisk fundament* (Lithner, 2008). *Nyskapande* er når ein sjølv må lage ei resonnering som ikkje er brukt tidlegare eller sjølv komme fram til ein prosedyre som er gløymt. Her vil ein vere fleksibel og bruke ulike tilnærmingar for å løyse ei oppgåve utan å vere knytt til ein bestemt strategi. Ved *truverdighet* må ein kunne argumentere for val av strategi og gjennomføring. Ein må også kunne seie noko om konklusjonen er plausibel. Dei argumenta ein gjer må ein forankre i *matematiske fundament* (Lithner, 2008). Her er det ikkje nok med eit logisk resonnement ved å sjå svaret, ein må vise dette med matematikk. Kreativ matematisk resonnering vil i følgje Lithner (2017) gje ei større forståing av matematisk problemløysning enn det ein imitativ metode vil gjere. Ein av hypotesane er at det å streve for å komme fram til svaret gjer at ein hugsar metoden som er brukt betre. Ved å arbeide med oppgåver som krev kreativ resonnering, vil ein lettare kunne overføre metoden til nye oppgåver enn ved ein imitativ resonnering (Lithner, 2017). Fordi eit arbeid med kreativ matematisk resonnering handlar om å sjå samanhengar mellom prosedyre og argumentasjon forankra i matematiske fundament, er det sannsynleg at ein ved kreativ matematisk resonnering vil utvikle det Skemp (1978) kallar relasjonell forståing og det Hiebert og Lefevre (1986) kallar konseptuell forståing. Til tross for likskapen mellom relasjonell forståing og kreativ matematisk tenking vil det vere ei skilnad. For Skemp (1978) si relasjonell forståing kan ein bruke algoritmar der ein forstår matematikken bak. Ved kreativ matematisk resonnering er eit av krava at ein skal resonnere seg fram på måtar ein ikkje har gjort tidlegare eller som ein har gløymt. Her skal ein altså ikkje bruke algoritmar.

Sjølv om det er den kreative matematiske resonneringa som vil gje størst forståing av matematikken, vil det vere tilfelle der bruk av imitativ resonnering vil vere nyttig. Dersom elevar skal oppdage matematikken sjølv er det noko som kan ta langt tid for elevar (Lithner, 2008). Å starte med ei imitativ resonnering kan difor vere til hjelp. Men det er den kreative resonnerande matematikken som vil gjere at elevane forstår kva som blir gjort og kvifor. Sidan ein kan bruke ei imitativ resonnering utan å forstå kva som blir gjort, vil denne metoden vise eit lågare nivå av forståing enn ein kreativ resonnerande matematikk (Lithner, 2017).

Både Lithner (2017) og Skemp (1978) viser til fordelar ved imitativ og instrumentell matematikk. Dei ser begge på dette som ein kortsiktig tenkemåte som kan gjere problemløysing effektivt og gje elevar ei mestringskjensle. Samtidig er dei tydeleg på at denne måten å arbeide på ikkje er ideell då det å memorere prosedyrar vil i liten grad kunne overførast til nye oppgåver. Ei memorert prosedyre er noko som ikkje skal vere nødvendig å bruke dersom ein har opparbeida seg ei forståing av dei matematiske fundamenta (Lithner, 2017; Skemp, 1978). Dette er noko som skil seg frå Hiebert og Lefevre (1986) som meiner at matematisk forståing er ein relasjon mellom prosedyrekunnskap og konseptuell kunnskap. Kilpatrick (2001) meiner som Hiebert og Lefevre (1986) at matematisk kunnskap avhengig av komponentane konseptuell forståing og prosedyreflyt. Elevar kan ha ein intuitiv kjensle for matematikk, men likevel ikkje kunne løyse eit matematisk problem. Eller dei kan løyse eit matematisk problem utan å forstå kva dei gjer. Det å bruke både konseptuell forståing og prosedyrekunnskap gjer at ein kan hugse og gjennomføre prosedyrar på ein effektiv måte (Hiebert & Lefevre, 1986).

2.2 Arbeide med algebra

Kieran (1996) har utarbeida ein modell, *GTG-modellen*, basert på ein idé om algebra som ein aktivitet. GTG-modellen blir delt inn i tre kategoriar; *generaliserande, transformerande* og *global/meta.* Sjølv om modellen skaper eit teoretisk skilje mellom kategoriane, kan ein oppleve at aktivitetar kan innehalde både to og alle tre kategoriane frå modellen (Kieran, 2004a).

Generaliserande aktivitetar involverer å forme uttrykk og likningar ved bruk av symbol (Kieran, 1996). Det kan gjerast på fleire måtar. Ein av dei er å arbeide med likningar som inneheld ukjente eller variablar, og som representerer ein problemsituasjon. Å generalisere handlar også om å finne uttrykk for generaliserte geometriske mønstre eller numeriske sekvensar og det å lage eit uttrykk for reglar som styrer numeriske forhold (Kieran, 1996). I eit klasserom vil elevar som skal lage uttrykk og likningar ved bruk av symbol arbeide med generaliserande aktivitetar.

Å kjenne igjen mønstre og uttrykke det generelle er eit av grunnelementa for å introdusere algebra for elevar (Radford, 2010). Men i følgje Radford (2010) er ikkje all generalisering algebra. Det å tenkje algebraisk vil seie elevane må kunne operere med ukjente, variablar og parametrar. For å kunne bruke variablar og parametrar må ein kunne tenke analytisk og ved å tenke analytisk ser ein på det ukjente som om det er spesifikke tal (Radford, 2014). I tillegg meiner Radford (2010) som Kieran (1996) at ein må kunne bruke symbol. Symbola er i dag i stor grad bruk av bokstavar (Radford, 2010). Det å formulere algebraiske likningar for eit matematisk problem, og det å manipulere symbol viser seg ofte å vere krevjande for elevar (Stacey & MacGregor, 1999).

Radford (2010) skil mellom to ulike måtar å generalisere på; *aritmetisk generalisering* og *algebraisk generalisering*. Det Radford (2010) kallar algebraisk generalisering handlar om å kunne utarbeide reglar for kva som helst tal, der ein identifiserer generelle objekt i figurmønster. Ein skal her kunne generere eit uttrykk som kan finne kva som helst nummer i rekkja av eit figurmønster (Radford, 2006). Algebraisk resonnering er delt inn i tre undernivå; *faktabasert, kontekstbasert* og *symbolsk generalisering.* Ved *faktabasert generalisering* vil ikkje dei generelle objekta vere namngitt, men implisitt, og kan komme til uttrykk ved bruk av ord, handlingar eller fakta (Radford, 2010). Det er gjerne her mange elevar startar og kan vere med på å danne eit grunnlag for vidare arbeid med generalisering. Det at eit ikkje vil bruke symbol til å uttrykke generaliseringa gjer at faktabasert generalisering kan sjåast på som ein aktivitet på global/meta-nivå i Kieran (1996) sin GTG-modell.

Ved *kontekstbasert generalisering* bruker ein ei blanding av ord og symbol for å uttrykke variablane. Her bruker ein eit naturleg språk som «det neste talet» eller «den øvste rekkja». Dersom elevar er i stand til å omskrive reglar og uttrykke dei ved bruk av symbol, eller å beskrive regelen for kva som eit helst tal med full symbolsk likninga er *symbolsk generalisering* (Radford, 2010). Både ved konseptuell og symbolsk generalisering er dei generelle objekta uttrykt språkleg eksplisitt. I følgje Kieran (1996) sin GTG-modell vil ein ved kontekstbasert og symbolsk generalisering arbeide med generaliserande aktivitetar då ein kan her uttrykke seg ved hjelp av symbol, og uttrykka er ein omforming av reglar og figurmønster.

Å beskrive eit forhold der ein bruker ukjente og kjente storleikar, utleier ekvivalente forhold og på denne måten kjem fram til svara, er *algebraisk resonnering* (Stacey & MacGregor, 1999). Som Radford (2010) deler Stacey og MacGregor (1999) algebraisk resonnering i undernivå, men ser på to ulike nivå; *overflatisk algebraisk resonnering* og *algebraisk resonnering*. Overflatisk algebraisk resonnering er når elevar skriv opp ein formel som blir løyst ved at ein bruker kjent informasjon i frå ei oppgåve. Det kan vere ein formel eleven kjenner til, som å bruke andregradsformelen utan å vite kvifor den fungerer. Når ein bruker overflatisk algebraisk resonnering er det sannsynleg at eleven har opparbeida seg det Skemp (1978) kallar instrumentell forståing og det Hiebert og Lefevre (1986) kallar prosedyrekunnskap der eleven kan bruke ein algoritme utan å forstå dei matematiske ideane bak algoritmen. Ved overflatisk algebraisk resonnering bruker eleven det same resonnementet som ved aritmetisk resonnering der det ikkje blir brukt ei algebraisk tilnærming, men den inneheld symbol. Bruk av *algebraisk resonnering* for å løyse eit problem, må ein sjå på likning som ein likskap og ikkje ein formel. Det viser seg i følge Stacey & MacGregor (1999) at mange elevar kan setje opp ei likning, men i staden for å løyse likninga går dei bort i frå den og løyser oppgåva ved hjelp av logisk aritmetisk resonnering eller ein prøve- og feile metode. For å bruke ein algebraisk metode må elevane forstå ekvivalensen av uttrykk og dei underliggande metodane for algebraisk problemløysing.

Transformerande aktivitetar blir ofte sett på som aktivitetar basert på ferdighetar som handlar om å kunne faktorisere, utvide, sette inn eit uttrykk for eit anna, addere og multiplisere polynomuttrykk, løyse likningar, arbeide med ekvivalente uttrykk og likningar (Kieran, 1996). Transformasjon i algebra er ein avgjerande prosess for å kunne handtere algebra på ein betre måte ved å forenkle eit matematisk problem (Boero, 2001). Kieran (1996) beskriv transformerande aktivitetar som eit arbeid med algebra der ein bruker symbol. Dette skil seg frå Boero (2001) som seier at å transformere kan skje etter at ein har ei algebraisk formulering, men også utan å bruke algebra. Før ein har ei algebraisk formulering kan ein utføre ulike utrekningar, samanlikne ulike aspekt og omsetje matematiske problem for å forenkle oppgåva. Etter ein har eit algebraisk uttrykk handlar det om å manipulere algebraiske uttrykk der ein treng spesifikke ferdighetar. Som å transformere $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$, eller forenkle uttrykket $\frac{x^2-1}{x+1}$. Uavhengig om transformasjonen skjer før eller etter, må ein ha ein forventing til uttrykket som skal formulerast (Boero, 2001). For å kunne transformere på ein effektiv måte, må ein kunne sjå for seg nokre aspekt ved den endelege forma og kva moglegheiter ein har ved transformering. Det å ha forventningar gjer at ein kan planlegge og sjå kva konsekvensar dei ulike transformeringane har.

Global/meta er aktivitetar er der algebra blir brukt som eit verktøy, men som ikkje er eksklusivt for algebra (Kieran, 1996). Aktivitetane involverer problemløysing, modellering, grunngje, bevise, kunne føresjå og kome med gjettingar. Dette er matematikk ein kan gripe fatt i utan bruk av symbol, noko som skil seg frå dei generaliserande og transformerande aktivitetane. Ved å arbeide med aktivitet på global/meta-nivå er det ikkje ein bestemt måte å kome fram til svaret på. Det kan gjerne vere det å avdekke eit problem som å vurdere det ein har gjort (Kieran, 2004b). Global/meta-aktivitet gjer at ein kanskje kan engasjere elevar generelt, spesielt i algebra (Kieran, 1996).

Dersom ein skal finne kor mange element ein treng i figur nummer 100 og forklarar dette ved å summere eit gitt tal til ein kjem fram til svara, er det brukt ein praktisbasert løysingsstrategi som Radford (2010) kallar aritmetisk generalisering. Elevar vil kunne identifisere kjenneteikn og fellestrekk for eit mønster utan å kunne bruke informasjonen til å gje eit eksplisitt uttrykk for dei generelle objekta (Radford, 2010). Det å løyse problem ved hjelp av aritmetikk går ut på å bruke tal og å rekne seg fram til svara, noko Stacey og MacGregor (1999) kallar for *ikkje-*

algebraisk resonnering. Ved å summere seg fram til svara bruker ein ikkje symbol og ein kan sjå på aritmetisk generalisering og ikkje-algebraisk resonnering som ein aktivitet på global/meta-nivå i Kieran (1996) sin GTG-modell. Ikkje-algebraisk resonnering kan skje ved ein *logisk aritmetisk resonnering*, eller ein *prøve- og feilemetode* (Stacey & MacGregor, 1999). Ved logisk aritmetisk resonnering vil elevane klare å resonnere seg fram til korleis ein kan løyse ein situasjon. Ved ein prøve- og feilemetode er det i følge Stacey og MacGregor (1999) tre ulike strategiar. Elevane kan tilfeldig gjette svara på ei oppgåve og håpe at eit av alternativa vil passe. Ein kan også prøve seg fram på ein meir systematisk måte, men der ein ikkje vurderer svarar sine for å kunne bruke dette til å gjette vidare. Ein systematisk måte kan vere å prøve Den siste metoden innan prøve- og feile, er å gjette svara, kontrollere dette og tilpasse neste forsøk (Stacey & MacGregor, 1999). Forskjellen på logisk resonnering og prøve- og feile metoden er at ved logisk resonnering vil ein rekne seg tilbake der ein bruker subtraksjon og divisjon, medan med ein prøve- og feile metode vil rekne seg framover ved hjelp av multiplikasjon og addisjon. I ein prosess der ein løyser problem ved hjelp av algebra, kan elevar gå vekk i frå ein algebraisk retning og gå over på ein meir aritmetisk metode for å løyse oppgåver, sjølv for dei enklaste problema (Stacey & MacGregor, 1999).

Arbeid med algebra bør innebere at elevar er *mønstersniffarar* (Nosrati & Wæge, 2015). Det å fremme ein glede hos elevar til å finne skjulte mønstre, kan gje elevar ein fordel i matematikken ved at ein leiter etter snarvegar og mønster i utrekningar som kan føre til meir effektiv problemløysing (Cuoco, Goldenberg, & Mark, 1996). Elevar bør også vere *utforskarar* der ein utforskar matematiske problem. I denne prosessen må dei bruke matematiske strategiar dei allereie har. Ved å vere utforskarar kan elevar øve seg på å sjå kva som skjer når ein endrar på ein idé ved å ta vekk noko av det ein først tenkte, eller sette saman tankane på nye måtar (Nosrati & Wæge, 2015). Når elevar er *beskrivande* kan dei bruke det matematiske språket til å gje presise forklaringar. Noko som er viktig for å kunne forstå det ein gjer (Cuoco mfl., 1996). Dei vil også kunne vere med på å finne på notasjon, noko som for mange kan vere nødvendig for å sjå nytteverdien av matematisk formalisme der det å skrive på det vanlege språket fort kan bli tungvindt og gjerne komme til kort (Nosrati & Wæge, 2015). Elevar bør vere i stand til å argumentere for dei vala dei gjer ved å kunne overtyde andre om at deira resultat er riktig ved presise beskrivingar. I tillegg bør elevar vere *oppfinnarar.* Ved å ha ein vane for å finne opp ting, kan eleven sjå etter ulike tilfelle av same matematiske struktur (Cuoco mfl., 1996).

2.3 Matematisk modellering

I 2004-2008 blei det gjennomført ei undersøking, PISA +, i Noreg. Undersøkinga var ei oppfølging av funn frå PISA-undersøkinga i 2000 som blei sett på som problematiske. Nokre av funna som blei gjort i denne undersøkinga er at det i norsk matematikkundervisning ofte er monotone arbeidsformer. Fokuset i undervisningstimane er ofte på teorigjennomgang og individuelt arbeid (Klette, Bergem, & Roe, 2016). Det at matematikklærarar ofte blir skulda for å levere framgangsmåtar, reglar og prinsipp i håp om at deira forståing skal «smitte over» på elevane er noko også Janvier (1978) viser til i si doktoravhandling. Ein vis-teori-og-øve-etterpå er i følge Janvier (1978) brukt i undervisning i matematikk og naturvitskap sidan skulen starta. Denne type tradisjonell undervisning blir ofte kalla lærar- og oppgåvestyrt undervisning (Alseth, Breiteig, & Brekke, 2003).

Føremålet med matematikk i den norske skulen er å bruke matematikk til å forstå og kunne påverke prosessar i samfunnet. For å opparbeide matematisk kompetanse, skal elevane arbeide med problemløysing og modellering til å analysere og omsetje eit problem til matematisk form (Utdanningsdirektoratet, 2013). Det å arbeide med matematisk problemløysing er noko som er forska mykje på i – både i Noreg og internasjonalt (Nosrati & Wæge, 2015). Polya (2009) ser på problemløysing som ein praktisk ferdighet og hevder at slike ferdighetar blir til ved å observere, og ved å imitere kva andre problemløysarar gjer. På denne måten vil ein etter kvart løyse problem på eigenhand. Dette skil seg frå Lithner (2017) som ser på ei slik imitativ tilnærming som unødvendig då det er ei kreativ resonnering som føre til ei matematisk forståing.

Problemløysing er å søkje bevisst etter ei handling for å kunne oppnå eit mål, eller fullføre ei oppgåve (Polya, 1981). Dersom problemløysaren kan sjå for seg ei handling som med ein gong vil føre til målet, vil det ikkje vere eit matematisk problem. For Schoenfeld (1993) vil det vere to kriterium for at ein kan kalle ei oppgåve eit matematisk problem:

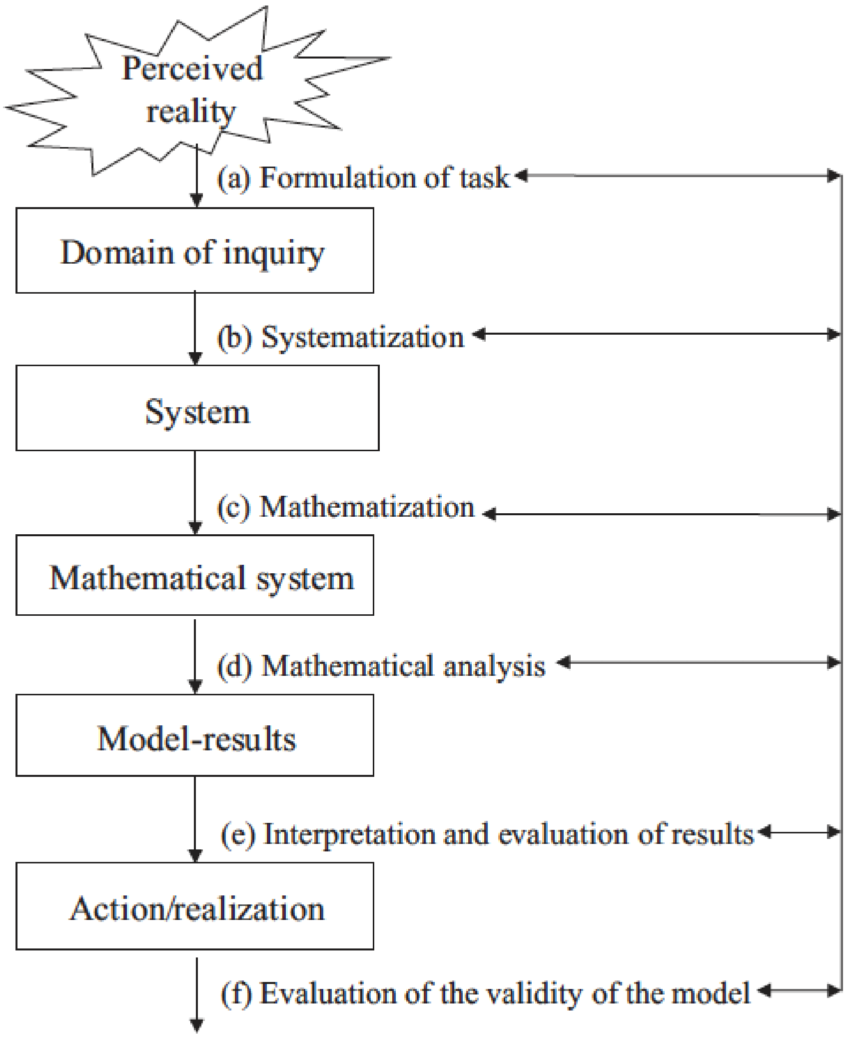
a) om eleven er interessert og engasjert, og har eit ønske om å finne ei løysing
b) at eleven ikkje har ein lett tilgjengeleg metode for å kome fram til løysninga

Fordi ei oppgåve først vil kunne kallast eit matematisk problem når ein elev har gjort den til sitt problem, vil ei oppgåve ikkje nødvendigvis vere eit problem for alle elevar. Eit matematisk problem skal vere vanskeleg for elevar å løyse. Ikkje i form av reknetekniske vanskar, men av intellektuelle. Å løyse oppgåver som ikkje tilfredstillar definisjonen av eit matematisk problem blir kalla ein øving (Schoenfeld, 1993). Når ein bruker det Janvier (1978) kallar vis-teori-øve-etterpå som ei oppskrift for undervisningstimar, vil dette vere det Schoenfeld (1993) kallar ei øving.

I matematikkfaget skal elevar opparbeide seg matematisk kunnskap gjennom modellering (Utdanningsdirektoratet, 2013). Blomhøj (2003) har utarbeida ein modell som illustrerer seks ulike stadier ved ein modelleringsprosess, viser til figur 2.1. Dei ulike stega i prosessen er delt inn i to kolonnar. Kolonnen til venstre viser ulike stadium i modelleringsprosessen. Stega a) – f) beskriv dei matematiske prosessane ein må gjennom for å kunne bevege seg mellom dei ulike stadium i modelleringsprosessen.

a) Ved å ta utgangspunkt frå den verkelege verda, *formulerer ein eit problem* som ein ønskjer å finne svaret på. Dette vil vere ein matematisk prosess ein må gjennom for å kunne gå til eit undersøkingsområde, den første boksen i venstre kolonne.

b) Etter å ha funnet eit undersøkingsområde, må ein *systematisere*. Her vel ein ut relevante objekt og relasjonar for å prøve å lage ein matematisk representasjon. Her skal ein velje ut den informasjonen som er relevant for det matematiske problemet. Denne matematiske prosessen vil føre til eit system som skal kunne beskrivast matematisk. Å systematisere kan føre til at ein arbeidar med aktivitetar som vil vere på Kieran (1996) sitt global/meta-nivå der ein skal gripe fatt i matematikken, men treng ikkje gjere det ved bruk av symbol.



Figur 2.1 Blomhøj (2003) sin modelleringsmodell der boksane til venstre viser kva steg ein er på i modelleringsprosessen. Punkt a) – f) viser kva matematiske prosessar ein må gjennomføre undervegs i modelleringa.

c) I steg c) *matematiserar* ein. Ved å presentere objekt og relasjonar frå systemet matematisk og på ein samanhengande måte, kjem ein fram til ein matematisk modell som er det neste stadiet i modelleringa. Å arbeide med steg c) handlar om å generalisere, noko som i følgje Radford (2010) kan skje på mange nivå, både aritmetisk og algebraisk. Å presentere ein matematisk modell under steg c) handlar om å bruke symbol til å uttrykke det generelle og vil difor vere det Radford (2010) kallar symbolsk generalisering og vil vere det Kieran (1996) kallar ein generaliserande aktivitet som handlar om å forme uttrykk og likningar.

d) Den matematiske modellen skal deretter analyserast matematisk for å kome fram til eit resultat, noko Blomhøj og Jensen (2003) kallar *matematisk analyse*. Dette for å kome framt il resultat ut i frå modell som blei utarbeida i steg c). Dei matematiske prosessane her handlar om å forme om uttrykk og løyse likningar noko som gjer at ein kan arbeide med transformerande aktivitetar i Kieran (1996) sin GTG-modell. Under denne delen av modelleringa treng ein ikkje berre arbeide med uttrykk, men også presentere modellen ved hjelp av ein graf (Blomhøj & Jensen, 2003).

e) Resultata blir deretter *vurdert og tolka* for å finne ut om den er klar til stadiet handling/realisering. Denne matematiske prosessen gjer at ein må estimere parametrar frå modellen ved bruk av numeriske løysningar (Blomhøj & Jensen, 2003). Etter ein har arbeida med modellen må ein tolke og validere resultata opp mot empiriske data og undersøkjer om resultata er gyldige.

f) I denne delen av modelleringsprosessen må ein evaluere og validere heile prosessen. Det inkluderer å sjå på omfang og validitet ved bruk av modellen. Både steg e) og f) vil vere aktivitetar der ein arbeidar på eit globa/meta-nivå i Kieran (1996) sin GTG-modell då ein vurderer modeller og det som ein har gjort.

Ved matematisk modellering vil det vere nyttig å gå gjennom dei ulike stega ovanfor der ein ikkje nødvendigvis føl rekkjefølgja slavisk frå a) til f) (Blomhøj & Jensen, 2003). Her vil det ofte vere hensiktsmessig å kunne gå tilbake til ulike stadium for å gjenta nokre av dei ulike matematiske prosessane. Under prosessen må ein på ein eller anna måte arbeida med alle dei ulike stega og vore innom dei ulike stadiane for å fullføre den matematiske modelleringa. Modelleringsmodellen kan brukast både som eit verktøy for å analysere matematiske modellar, sjølve prosessen bak ein matematisk modell, og som ein matematisk modelleringskompetanse (Blomhøj & Jensen, 2003).

Beskrivinga av modelleringssyklusen til Niss (2015) har mange likskapstrekk med Blomhøj (2003) sin modelleringsmodell. I begge modellane blir det tatt utgangspunkt i ein situasjon, eit reelt problem, som må overførast til eit matematisk problem. Niss (2015) kallar det å matematisere. Deretter må ein i følgje begge modellane snevre inn og spesifisere slik at ein har relevant informasjon til det gitte problemet. Ein skal også validere det ein gjer ved å samanlikne den matematiske modellen og resultata opp mot den verkelege situasjonen. Dette blir i følgje Niss (2015) sett på som å de-matematisere eller konkretisere. Modellane har likevel skilnadar då Blomhøj & Jensen (2003) er tydeleg på at matematisk modellering inneber at ein går gjennom heile prosessen, og at ein kan bevege seg mellom dei ulike stadiane. Denne fleksibiliteten er nødvendig for å vurdere, endre og kunne få modellen til å passe med den verkelege situasjonen. Det å bevege seg mellom stadiane er ulikt frå modellen til Niss (2015), der ein først går gjennom heile prosessen for så å kunne gjere den på nytt men med fokus på andre omsyn og faktorar som kan endre svaret.

2.4 Ulike funkjsonsrepresentasjonar

I læreplanen for matematikkfaget 1P står det eksplisitt at elevar skal kunne omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar (Utdanningsdirektoratet, 2013). Å arbeide med ulike måtar å representere matematikk på kan vere med på å bygge opp forståinga av matematiske relasjonar og redusere det elevar synst er vanskeleg med ulike matematiske konsept (Adu-Gyamfi & Bossé, 2014). Janvier (1978) viser til fire måtar å representere ein funksjon på; *situasjon*, *tabell*, *graf* og *uttrykk*.

Janvier (1978) har utarbeida følgande tabell, her vist som tabell 2.1, for å systematisere kva ein må gjere for å omsetje mellom dei ulike måtane å representere ein funksjon. Når ein omsett mellom ulike representasjonar er det forventa at ein både skal kunne lese av og tolke. Lese av og tolke er viktig å sjå på som to ulike aktivitetar (Janvier, 1978). I ein graf må ein tolke for å omsetje til situasjon og lese av for å omsetje frå graf til tabell. For å tolke må ein sjå på grafen som heilskap. Eit døme på å tolke er å undersøkje når grafen viser størst auke. Ved å stille spørsmål som inneheld ord direkte frå aksane, kva er x-verdien når y-verdien er, vil det vere nok å lese av grafen for å finne ein eksakt verdi.

Tabell 2.1 Oversikt over ulike måtar å omsetje mellom ulike måtar å presentere ein funksjon. Tabellen er henta frå avhandlinga til Janvier (1978) oversett til norsk.

Til Frå	Situasjon, verbal forklaring	Tabell	Graf	Uttrykk
Situasjon, verbal forklaring		Måle	Skissere	Modellere
Tabell	Tolke tabell		Plotte	Tilpasse
Graf	Tolke graf	Lese av		Tilpasse kurve
Uttrykk	Kjenne igjen (parametrar)	Rekne ut	Skissere	

2.4.1 Omsetje frå situasjon

Kvar enkelt elev vil sjå ein *situasjon* på sin måte. Ved å omsetje frå ein situasjon bør ein difor fokusere på mangfaldet av dei svara som kjem frå ulike personar si oppfatning av ein gitt situasjon. Det å sjå på ein situasjon krev evna til å abstrahere, noko som vil vere ein personleg bevegelse og dermed avhengig av korleis kvar enkelt ser situasjonen (Janvier, 1978). Det at eleven kan kjenne seg igjen i gitte situasjonar vil vere ein faktor som påverkar eleven si evne til å tolke situasjonen (Mason mfl., 2005). Janvier (1978) viser til elevar sine ulike erfaringar med å tolke korleis ein racerbil vil køyre. Ved å ha erfaring med bil kan ein lettare omsetje frå situasjon til andre representasjonar av funksjonar.

I steg a) og b) frå Blomhøj (2003) sin modelleringsmodell lagar ein eit matematisk problem henta frå den verkelege verda. I denne delen av modelleringa finn ein informasjon som er relevant for det gitte problemet for så å systematisere informasjonen. For å omsetje frå situasjon til tabell må ein gjere målingar. Dette kan samanliknast med steg b) i Blomhøj (2003) sin modelleringsprosessen der ein nettopp skal gjere målingar og sortere data. Omsetjinga frå situasjon til graf handlar om å generalisere i følgje (Wilkie, 2016). Dette er for mange ein krevjande prosess, og Janvier (1978) fann i si avhandling at mange her lager eit bilete direkte frå situasjonen. Å generalisere ved å teikne ein graf skil seg frå det Kieran (1996) ser på som ein generaliserande aktivitet, og Radford (2010) sine generaliseringsnivå, der ein skal bruke symbol for å uttrykke det generelle. I GTG-modellen til Kieran (1996) vil både det å omsetje frå situasjon til tabell og graf vere ein global/meta aktivitet der ein modellerer utan bruk av symbol.

Å lage eit uttrykk ut i frå ein situasjon handlar om å sjå samanhengen mellom ulike parametrar frå verkelegheita, som høgde og alder, tid og fart. Å omsetje frå situasjon til uttrykk er ifølge Mason et al. (2005), saman med det å lage eit mentalt bilete av situasjonen, ein vanleg måte å modellere på i matematikkfaget. I Blomhøj (2003) sin modelleringsprosess vil dette vere steg c) der ein lagar eit matematisk system ved å presentere objekt og relasjonar frå det ein tidlegare har systematisert. Det er her sjølve modellen blir laga i modelleringsprosessen. Å omsetje frå ein situasjon til eit uttrykk vil vere ein generaliserande aktivitet i Kieran (1996) sin GTG-modell der ein uttrykker situasjonen ved bruk av symbol. Frå Radford (2010) sine generaliseringsnivå, vil det å kunne omsetje frå situasjon til eit eksplisitt uttrykk ved bruk av symbol bli sett på som det høgaste nivået av generalisering, symbolsk generalisering.

2.4.2 Omsetje frå tabell

Bruk av *tabell* kan vere til hjelp for å sjå på spesifikke verdiar men kan vere vanskeleg å bruke dersom ein skal sjå på den generelle samanhengen (Mason mfl., 2005). Å omsetje frå ein tabell til ein situasjon krev at ein må kunne tolke tabellen. Ein vil her måtte konkretisere, eller kunne gjere det som Niss kallar for å de-matematisere (Niss, 2015). I Blomhøj (2003) sin modelleringsprosess vil dette vere steg e) der ein samanliknar dei teoretiske data opp mot det ein har erfart gjennom ein matematisk modell for å vurdere om data er gyldige. For å kunne omsetje frå tabell til graf må ein kunne plotte inn verdiar frå tabellen. Her er det ikkje nødvendig å tolke, men å lese av verdiar frå tabell og samtidig bruke aksane til grafen (Udir, 2012). Både det å omsetje frå tabell til situasjon og tabell til graf kan sjåast som ein aktivitet på global/meta-nivå i Kieran (1996) sin GTG-modell. Tabell til uttrykk krev ein generalisering av informasjon, noko som kan vere ei utfordring for elevar (Wilkie, 2016). I Kieran (1996) sin

GTG-modell, kan ein sjå på dette som ein generaliserande aktivitet som går ut på at ein formar uttrykk og likningar. Som ved andre aktivitetar der ein skal utforme eit uttrykk, vil dette vere det øvste av Radford (2010) sine generaliseringsnivå, symbolsk generalisering. I Blomhøj (2003) sin modelleringsmodell vil det å gå frå tabell til uttrykk vere steg c) der ein skal på ein skal kunne presentere ein matematisk modell ut frå målte verdiar og må tilpasse uttrykket ut i frå tabellen.

2.4.3 Omsetje frå graf

Den *grafiske* representasjonen har som eigenskap å kunne gje eit overblikk over dei store mønstra i samanhengen. Lesaren må her kunne sjå viktige element og korleis grafen representere desse (Mason mfl., 2005). Frå graf til situasjon viser det seg at elevar ofte får til å lese av ein graf, medan fleire får problem når dei skal til dømes sjå på kor mykje ein graf aukar då dei må tolke grafen (Utanningsdirektoratet, 2012). I ein læringsstøttande prøve for matematikk på 5. til 10. trinn, viser ei misoppfatning elevar kan ha er at størst auke betyr det høgaste punktet på grafen (Utanningsdirektoratet, 2012). Eit anna vanleg problem med å gå frå graf til situasjon, er at elevane kan henge seg opp i den grafiske framstillinga og ser på grafen som eit bilete av situasjonen (Janvier, 1978). I desse tilfella les ein ikkje den informasjonen som blir gitt, som det å vurdere tydinga av aksane (Selvik, Johnsen-Høines, & Rinvold, 2007). Å gå frå graf til situasjon vil vere steg d), e) og f) i Blomhøj (2003) sin modelleringsprosess der ein skal analysere den matematiske modellen noko som kan gjerast ved bruk av ein graf. I denne delen av modelleringsprosessen skal ein vurdere modellen opp mot empiriske data.

Omsetjinga frå graf til tabell vil elevane måtte lese av verdiar og plotte inn i ein verditabell. Det vil ikkje her vere behov for å tolke, men kunne lese av enkeltverdiar. Både det å omsetje frå graf til situasjon og graf til tabell handlar om aktivitetar på Kieran (1996) sitt global/meta-nivå der ein blant anna må tolke, vurdere og lese av utan nødvendigvis å bruke algebra. Å omsetje frå graf til uttrykk kan vere ein krevjande prosess utan bruk av digitale hjelpemidlar, avhengig av grafen. Ved enklare tilfelle som lineære funksjonar, har ein behov for kjenne igjen stigningstal og konstantledd noko som dei fleste elevar vil få til (Janvier, 1978). Å omsetje frå graf til uttrykk er ein genererande aktivitet i Kieran (1996) sin GTG-modell der målet er å formulere eit uttrykk der ein bruker symbol.

2.4.4 Omsetje frå uttrykk

Som ved ein graf, vil *uttrykk* vere ein representasjon som kan hjelpe å sjå den store samanhengen (Mason mfl., 2005). Det å formulere seg ved hjelp av uttrykk er å abstrahere, og det å abstrahere er for mange elevar vanskeleg (Wilkie, 2016). Ved å arbeide med uttrykk kan ein ofte fjerne konteksten, noko som kan i nokre tilfelle vere verdifullt og gjer at uttrykk kan vere både rikt og manipulerbart (Mason mfl., 2005). For å omsetje frå uttrykk til situasjon krev at ein har ei praktisk forståing av formelen. Her vil ein arbeide med punkt e) i Blomhøj (2003) sin modelleringsprosess der ein på same måte som ved å omsetje frå tabell til situasjon må samanlikne situasjonen opp mot teoretiske data. Niss (2015) kallar dette de-matemasering, eller konkretisering, ved at ein i modellering må samanlikne ein matematisk modell opp mot den verkelege verda eller ein situasjon.

Å omsetje frå uttrykk til tabell krev utrekning. Her sett ein inn kjente verdiar for variablar og kan på denne måten rekne ut den ukjente. I Kieran (1996) sin GTG-modell kan dette sjåast på som ein transformerande aktivitet som går ut på å løyse og rekne ut verdiar for likningar. Ved å omsetje frå uttrykk til graf arbeidar ein med steg d) i modelleringsmodellen til Blomhøj (2003) der ein kan analysere ein matematisk modell blant anna ved hjelp av ein graf. For å teikne grafen til lineære funksjonar er det nok å kjenne til stigningstal og konstantledd og ved enkle tilfelle av det å plotte ein graf er noko dei aller fleste elevane får til (Janvier, 1978). Samtidig viser læringsstøttande prøve i matematikk for 5. til 10. trinn at å teikne graf frå eit uttrykk kan vere krevjande då mange elevar tolkar uttrykket som eit punkt (Utanningsdirektoratet, 2012). For andre funksjonar enn lineære vil det ofte vere meir krevjande å teikne graf frå eit uttrykk utan å gå via tabell først der ein gjer utrekningar. Å bruke fleire steg for å gjennomføre ei omsetjing er noko som i denne oppgåva blir kalla omsetjingar.

2.4.5 Å omsetje ved bruk av omvegar

Å omsetje mellom ulike representasjonar er i delkapitla over vist som noko ein gjer direkte mellom to måtar å representere funksjonar på. Det kan også gjerast på ein indirekte måte der ein bruker omvegar for å omsetje frå det ein har som utgangspunkt til den representasjonen ein vil omsetje til. Å bruke omvegar er noko som er mykje brukt (Janvier, 1978) og kan vere eit nyttig hjelpemiddel for å fullføre omsetjinga. Samtidig kan ein ved å bruke omvegar miste evna til å utvikle det abstrakte som er behov for når ein skal generalisere.

For å omsetje frå uttrykk til graf kan ein først rekne ut verdiar. Dermed går ein frå uttrykk til tabell. Vidare kan ein bruke verdiar frå tabell til å plotte grafen. Ein har dermed brukt fleire omsettingar for å kome fram til sluttresultatet. Ved å gå slike omvegar kan ein miste generaliseringa ein har behov for å gjere når ein skal omsetje frå uttrykk direkte til graf. Her må ein vurdere og sjå på samanhengen mellom aksane. I staden bruker ein utrekningar til å finne presise punkt for så å plotte inn i eit koordinatsystem. Det å bruke utrekningar, noko som Kieran (1996) kallar ein transformerande aktivitet, er noko som kan vere nyttig for å forenkle prosessen ved å omsetje mellom ulike måtar å representere funksjonar på. Det å forenkle prosessen ved å nytte seg av omvegar, fann Janvier (1978) som ein vanleg måte for elevar å arbeide på i si avhandling.

I nokre av cellene, visert il tabell 2.1, er det ikkje beskrive kva som kan gjerast for å omsetje frå situasjon til situasjon, frå tabell til tabell, frå graf til graf og frå uttrykk til uttrykk . Det betyr ikkje at desse omsetjingane ikkje eksisterer. Ein kan til dømes skrive om uttrykk som $2x + y = 4$ til $y = -2x + 4$ for å forenkle. Ein går dermed frå uttrykk$_1$ til uttrykk$_2$. Det å bruke ekvivalente uttrykk handlar om nytte seg av det Kieran (1996) kallar for transformerande aktivitetar. Kieran (1996) kallar det for transformerande aktivitetar dersom det blir brukt symbol. Boero (2001) kallar transformerande aktivitetar der ein vil arbeide med transformeringar også før ein har forma eit algebraisk uttrykk. Med å bruke det Boero (2001) kallar transformasjon, vil alle omsetjingar innan dei same representasjonsformene vere handle om transformerande aktivitet.

2.5 Ulike nivå

TIMSS og PISA er begge undersøkingar som kategoriserer svara til elevar etter nivå. Det same gjer Utdanningsdirektoratet (Udir) når dei beskriv kjenneteikn for måloppnåing i matematikkfaget 1P. TIMSS si undersøking deler strategiar inn i fire nivå; *lågt, middels, høgt* og *avansert.* Dei beskrivingane som er tatt med frå TIMSS sine nivå er henta frå resultat av populasjon 2, noko som svarar til elevar i 9. klasse i det norske skulesystemet (Bergem, Kaarstein, & Nilsen, 2016). Ettersom beskrivingane til TIMSS er generelle og ikkje tema-spesifikke er dei relevante og eit godt supplement til nivåfordelinga òg for eldre elevar. PISA deler inn elevar i seks nivå, med tre overordna nivå. Desse nivåa blir presentert seinare i teorikapittelet. Udir deler sine kjenneteikn for måloppnåing inn i tre delar, *lågt, middels* og *høgt.* Kjenneteikna frå Udir er organisert for kvart hovudområde i læreplanen, der kvart hovudområde er delt inn i tre kategoriar; *ferdighetar, problemløysing* og *kommunikasjon.* I den generelle delen av kjenneteikn på måloppnåing er det forventa at elevar skal i varierande grad kunne utføre grunnleggande rekneoperasjonar (ferdighetar), kunne anvende desse på matematiske problem (problemløysing) og kunne presentere sine resultat både skriftleg og munnleg (kommunikasjon) (Utdanningsdirektoratet, udatert). I tillegg har Udir utarbeida meir konkrete kjenneteikn på måloppnåing for hovudområda *økonomi, tall og algebra, sannsyn, geometri* og *funksjonar*. Det er kjenneteikna for funksjonar og tal og algebra som vil bli brukt vidare i denne oppgåva då det er desse hovudområda som vil vere relevant for problemstillinga.

Sidan både Udir og PISA deler kjenneteikna inn i tre nivå er det i denne oppgåva tatt eit val om å gjere tilsvarande. Av PISA, TIMSS og Udir er det Udir som har den mest detaljerte inndelinga av ulike nivå der det er presisert kva elevar må kunne innan hovudområda funksjonar og tal og algebra, noko som er tatt med i beskrivinga vidare. For alle nivå av måloppnåing deler Udir inn kva elevar skal kunne av ferdighetar, problemløysing og kommunikasjon. Udir presiserer at kjenneteikna på måloppnåing må lesast kumulativt, der kjenneteikn på høg måloppnåing inneber også kjenneteikn som er beskrive på dei lågare nivå. Det vil seie at nivå 1 vil beskrive det lågaste nivået. Nivå 2 vil beskrive neste nivå, der elevar på dette nivået også skal kunne det same som elevar på nivå 1. Nivå 3 vil beskrive det mest avanserte nivået og det blir her sett på kva elevar skal kunne i tillegg til nivå 1 og nivå 2.

I beskrivinga av dei ulike nivåa er det tatt utgangspunkt i Udir som gjer den mest spesifikke beskrivinga av sine nivå. Dette blir deretter kopla opp mot kjenneteikn frå PISA og TIMSS. Vidare blir dette sett i lys av teori som er tatt med i denne oppgåva, og på denne måten er det utvikla eigne nivå frå teori kalla nivå A, nivå B og nivå C.

2.5.1 Nivå A

I følgje Udir (udatert) skal elevar på lågt nivå kunne løyse enkle oppgåver der metoden ofte er gitt eller kan lesast ut i frå gitt informasjon. Udir si beskriving av det lågt nivå blir presentert undervegs i delkapittel 2.5.1. Av PISA sine 6 nivåinndelingar, er nivå 2 eit minimum for at elevar skal kunne delta fullt ut i det moderne samfunn der matematikken ikkje vil vere problematisk i vidare utdanning eller i arbeidslivet (Kjærnsli & Jensen, 2016). Elevar som er på nivå 1 vil vere det PISA kallar *lågt presterande* elevar. Kjenneteikn på å vere ein lågt presterande elev vil i følgje PISA vere elvar som kan arbeide med matematikk i kjente kontekstar. Her kan elevane trekkje ut informasjon når ei oppgåve er klar og formulert på ein måte som dei er vane med (Kjærnsli & Jensen, 2016). TIMSS har ei nokså kort beskriving om kva dei ser på som det lågaste nivået av kompetanse der elevane skal ha noko kunnskap om heile tal og enkle grafar. Vidare i oppgåva blir det lågaste nivået omtalt som nivå A.

Innan ferdighetar skal eleven på nivå, i følgje Udir (udatert), kunne «*Fremstille en enkel funksjon ved hjelp av ulike representasjoner*». Udir (udatert) spesifiserer ikkje kva som er meint med «ein enkel funksjon». I denne oppgåva inneber ein enkel funksjon innan temaet lineære funksjonar at elevar på nivå A kan arbeide ut i frå uttrykk på den generelle forma $y = ax + b$, som $y = 2x + 3$. Her er det nok for eleven å kjenne igjen stigningstal og konstantledd, og vil vere enkle verdiar å rekne med. I frå Janvier (1978) sin tabell vil elevar på nivå A omsetje mellom ulike representasjonar der ein må lese av graf, rekne verdiar frå eit gitt uttrykk, plotte verdiar frå tabell til graf og lage uttrykk ut frå situasjonar der det kjem tydeleg fram frå oppgåva kva verdiar ein skal bruke.

Oppgåver der ein skal framstille ein funksjon ved hjelp av ulike representasjonar som er formulert slik at det er nok å lese av verdiar frå ein graf, vil bestå av spørsmål som inneheld ord direkte frå aksane (Janvier, 1978). Dette gjer at elevar ikkje treng å tolke grafar. Elevar på nivå A kan rekne ut verdiar og finne ukjente storleikar ved å sette inn i formel, noko som er ein transformerande aktivitet i Kieran (1996) sin GTG-modell. Her kan elevar ut i frå uttrykk, gitt på den generelle forma $y = ax + b$, rekne ut verdiar og presentere desse verdiane i form av tabell. Ein kan også bruke tabellen til å plotte verdiar og deretter teikne grafen til ein lineær funksjon. For å teikne ein graf direkte frå eit uttrykk krev det at ein kan generalisere (Wilkie, 2016). Dersom ein først lagar tabell går ein vekk frå denne prosessen og reknar ut verdiar i staden. Å rekne ut verdiar er ein ferdighet Janvier (1978) meiner dei fleste får til. Det å bruke omvegar for å teikne ein graf er noko ein kan anta elevar gjer for å forenkle prosessar der ein går vekk frå abstrakte tankar til kjente prosedyrar og vil difor vere eit kjenneteikn for elevar på nivå A.

Ved problemløysing skal elevar på nivå A, i følgje Udir (udatert), kunne *«løse enkle praktiske problemer ved å undersøke en gitt funksjon.».* Enkle problem kan tolkast som at elevar på dette nivået skal kunne løyse oppgåver i kjente kontekstar. I følgje Udir (udatert) krev slike oppgåver ofte få rekneoperasjonar, og for å kommunisere matematikk blir løysninga av oppgåver ofte presentert på ein enkel og upresis måte ved bruk av få matematiske omgrep og symbol. Problemløysing er ein global/meta-aktivitet i Kieran (1996) sin GTG-modell der elevane blant anna må avdekkje eit problem, kome med gjettingar og vurdere svarar sine. Til tross for dette vil elevar på nivå A i liten grad vurdere svarar sine i følgje Udir (udatert).

Å formulere eit uttrykk ut i frå ein gitt situasjon til ein lineære funksjon, kan elevar på nivå A gjennomføre dersom det kjem tydleg fram i situasjonen kva som vil vere stigningstal og konstantledd. Det å lage eit uttrykk frå ein situasjon ser Kieran (1996) på som ein generaliserande aktivitet og vil vere steg c) i Blomhøj (2003) sin modelleringsprosess. Dermed skal elevar på nivå A generalisere ut frå kjente kontekstar. Radford (2010) ser på generalisering som eit av grunnelementa for å introdusere algebra for elevar. Likevel nemner korkje PISA, TIMSS eller Udir at elevar på eit lågt nivå skal kunne generalisere. I følgje Radford (2010) treng ikkje all generalisering vere algebraisk, den kan også vere aritmetisk. Ved aritmetisk generalisering kan ein bruke ein prøve- og feilemetode for å kome fram til svara (Stacey &

MacGregor, 1999), og for elevar på nivå A kan det tenkjast at ein vil bruke ein prøve- og feilemetode utan å nødvendigvis vurdere svara sine. Elevar på nivå A ser ikkje fellestrekk ved figurmønstre, eller korleis ein kan kome fram til eit uttrykk som beskriv kva som helst figurtal. Mange vil likevel kunne rekne seg fram til kor mange element eit gitt figurtal vil ha, der dei forklarar framgangsmåten ved hjelp av eit uformelt og munnleg språk (Radford, 2010). I følgje Kieran (1996) er ikkje dette generaliserande aktivitet då elevar ikkje vil kunne forme eit uttrykk eller likningar, men at denne type aktivitet kan skje på eit global/meta-nivå der elevar kan rekne seg fram til svara utan å bruke algebra.

2.5.2 Nivå B

I følgje Udir (udatert) vil elevar på *middels måloppnåing* kunne løyse meir samansette oppgåver, utan at løysningsmetoden direkte er gitt i oppgåva. I PISA sine 6 nivå blir det ikkje nemnt noko om nivå 3, medan kjenneteikn på elevar som vil vere på nivå 4 i PISA-undersøkinga er at dei kan løyse komplekse oppgåver i kjente situasjonar (Kjærnsli & Jensen, 2016). På eit *middels nivå* i TIMSS er det forventa at elevar skal ha grunnleggande matematisk kunnskap som dei kan bruke i ulike situasjonar, og elevar skal ha noko kunnskap om lineære uttrykk og lese og tolke data i diagram og tabell (Bergem mfl., 2016).. Middels nivå blir vidare kalla nivå B.

Innanfor ferdighetar på nivå B skal elevar, i følgje Udir (udatert), kunne «Fremstille en funksjon ved hjelp av ulike representasjoner». Det som skil nivå B frå nivå A er at elevar på nivå A skal «fremstille en enkel funksjon». Som på nivå A er det ikkje presisert kva «en funksjon» betyr, men i denne oppgåva inneber det at nivå B kan løyse oppgåver der lineære funksjonar er gitt på andre formar enn $y = ax + b$. Dette kan vere uttrykk som består av stigningstal og ikkje konstantledd, eller enkle desimaltal og brøk. Elevar på nivå B skal ikkje lenger berre lese av verdiar frå ein gitt graf, men skal også kunne «lese av stigning og vekst frå ein graf» (Utdanningsdirektoratet, udatert). Omgrepet «lese av» blir i denne oppgåva tolka som at elevar skal finne stigningstalet ved å lese av grafen, der det er enkelt å lese av ei eining langs x-aksen. Elevar kan her bruke metodar som å «gå ein bort og så mange opp eller ned» for å finne stigningstalet. Dersom det ikkje kjem tydeleg fram i grafen kor mykje ei eining langs x-asken er, vil elevar på nivå B kunne ha problem med å finne stigningstalet.

Som ved nivå A er det forventa at elevar vil kunne gå omvegar for å omsetje mellom ulike måtar å representere funksjonar på. Ved å omsetje direkte frå situasjon til graf krev det at elevar kan i stor grad tenkte abstrakt, der ein må kunne sjå ei større samanheng av bruk av aksar enn det ein må dersom ein teiknar grafen frå eitt gitt uttrykk (Mason mfl., 2005). Det å bruke omvegar der ein går via uttrykk for å teikne graf frå ein situasjon, eller det å rekne ut verdiar til tabell for å teikne graf frå eit uttrykk er noko som både elevar på nivå A og nivå B vil kunne gjere. Det som skil elevar på nivå B frå nivå A her vil i større grad vere måten dei kommuniserer på der måten dei presenterer løysninga si, om dei kan grunngje kva dei gjer og velje metodar.

På nivå B er det forventa at elevar skal «finne ukjente størrelser ved å forme om enkle uttrykk» (Utdanningsdirektoratet, udatert). Elevar må her kunne arbeide med transformerande aktivitetar i Kieran (1996) sin GTG-modell ved å løyse likningar og sjå ekvivalente uttrykk. Dette vil svare til steg d) i Blomhøj (2003) sin modelleringsmodell der ein må gjere utrekningar for å kunne analysere ein matematisk modell. Sjølve prosessen ved å gjere om på enkle uttrykk kan vere det Skemp (1978) ser på som instrumentell forståing og Hiebert og Lefevre (1986) kallar prosedyrekunnskap der elevar bruker algoritmar for å kome fram til svaret, noko som allereie er forventa av elevar på nivå A. Det å gjere om på uttrykk blir likevel sett på som eit høgare nivå enn nivå A, fordi ein kan sjå samanhengar mellom det uttrykket ein har og det uttrykket ein vil ende opp med. Elevar vil i større grad kunne føresjå kva moglegheiter ein har og vil i følge Boero (2001) difor kunne transformere på ein meir effektiv måte.

Innanfor problemløysing på nivå B skal elevar, i følgje Udir (udatert), kunne «løse praktiske problem ved å undersøke en gitt funksjon». Dette skil seg frå nivå A ved at dei praktiske problema ikkje treng å vere direkte oppgitt i teksten. På nivå B skal elevar kunne presentere løysningane på ein samanhengande måte ved bruk av korrekt matematiske omgrep og symbol. Som på nivå A, blir det ikkje sagt noko om at elevar på nivå B skal kunne generalisere.

Med utgangspunkt i at elevar på nivå B skal kunne bruke symbol, blir det i denne oppgåva forventa at elevar skal kunne generalisere på det lågaste nivået innan algebraisk generalisering som Radford (2010) kallar for faktabasert. Ved faktabasert generalisering vil elevar kunne kjenne igjen fellestrekk og forklare desse ved hjelp av eit munnleg språk. At elevar på nivå B kan kjenne igjen fellestrekk ved generalisering skil seg frå elevar på nivå A som vil bruke aritmetisk tilnærming. Som på nivå A, vil ikkje faktabasert generalisering vere ein generaliserande aktivitet i GTG-modellen til Kieran (1996), då generaliseringa vil skje utan symbol. Utan bruk av symbol vil denne aktiviteten skje på eit global/meta-nivå.

2.5.3 Nivå C

For å oppnå høg måloppnåing vil ein i følgje Udir (udatert) løyse samansette oppgåver, der ein må gjennomføre fleire rekneoperasjonar for å kome fram til svaret. PISA ser på elevar som høgt presterande dersom dei ved ukjente kontekstar kan finne løysing på komplekse oppgåver. Desse elevane vil ha god omgrepsforståing og kjennskap til metodar og prosedyrar, samtidig som dei er gode på kommunikasjon. Elevar må her kunne resonnere og argumentere ved å knytte informasjon frå fleire kjelder (Kjærnsli & Jensen, 2016). I TIMSS vil desse elevane kome under *høgt* og *avansert* nivå. Elevar på a*vansert nivå* kan anvende matematikk og resonnere matematisk når dei blir konfrontert med ulike typar problem. Her skal elevar kunne grunnleggande prosedyrar for å behandle algebraiske uttrykk og analysere data ut frå grafiske framstillingar. I tillegg skal elevar kunne løyse førstegradslikningar og uttrykke generaliseringar (Bergem mfl., 2016). Høgt nivå blir vidare kalla nivå C.

Innanfor ferdighetar skal elevar på nivå C, i følgje Udir (udatert), kunne *«fremstille en mer kompleks funksjon ved hjelp av ulike representasjoner».* Kva Udir (udatert) legg i «mer kompleks funksjon» er ikkje spesifisert, men i denne oppgåva inneber det ein lineær funksjon som på både kan bestå av desimaltal, brøk og fomulert på andre måter enn den generelle forma $y = ax + b$. I tillegg er det forventa at elevar på nivå C kan omsetje direkte mellom dei ulike måtane å representere ein funksjon på, utan å ta omvegar. Å omsetje direkte frå situasjon til graf er noko som krev at ein elev skal kunne generalisere (Janvier, 1978). Det å generalisere krev å kunne tenkte abstrakt noko som er krevjande for mange elevar (Wilkie, 2016).

Udir (udatert) sett ferdigheten å kunne «bestemme stigning og vekst ut fra en graf» til eit høgt nivå. Dette skil seg frå nivå B der det er nok å «lese av». Å bestemme stigning blir her tolka som at elevar kan finne stigningstalet til kva som helst graf, både ved å lese av og med og rekne seg fram. Andre ferdighetar elevar på eit høgt nivå har er å løyse symbolske likningar, faktorisere, og arbeide med ekvivalente uttrykk. Her arbeider ein med transformerande aktivitetar i GTG-modellen til Kieran (1996). Dersom elevar viser eit høgt nivå av transformasjon kan dei sjå ulike måtar ein kan transformere på og i tillegg har forståing av prosedyrane bak transformeringa. Eleven bør også ha forventningar til kva sluttresultatet skal bli, noko som i følgje Boero (2001) er ein del av å effektivisere transformeringa. I tillegg til ferdighetar er det å bruke eit matematisk språk noko som kan knytast til det Udir (udatert) beskriv som kommunikasjon for elevar på høgt nivå: «å *presentere løsninger på en sammenhengende, oversiktlig og systematisk måte ved bruk av korrekte og presise matematiske begreper og symboler.*»

Innan problemløysing skal elevar på nivå 3, i følgje Udir, kunne«tolke og vurdere praktisk informasjon knyttet til stigning og vekst ut fra en graf» og «tolke og vurdere gyldigheten av svaret.» (Utdanningsdirektoratet, udatert). Janvier (1978) ser på det å tolke ein graf der ein skal sjå på samanhengar mellom aksane. Her er det ikkje lenger nok å lese av verdiar knytt direkte mot aksane for å løyse oppgåver slik som ein kan gjere på nivå A og nivå B. Nivå C er det einaste nivået for hovudområdet funksjonar der Udir spesifiserer at ein skal tolke, ikkje berre lese av, og vurdere gyldigheita av svaret. I Kieran (1996) sin GTG-modell vil dette vere ein aktivitet på global/meta nivå der ein skal blant anna tolke svara sine. Å tolke og vurdere gyldigheita av svaret kan sjåast på som steg e) og f) i Blomhøj (2003) sin modelleringsprosess, der ein skal evaluere svara ein får opp mot empiriske data.

Som ved nivå A og nivå B nemner ikkje PISA eller Udir at elevar på høgt nivå skal kunne generalisere, men i TIMMS sitt avanserte nivå skal elevar kunne løyse førstegradslikningar og generalisere (Bergem mfl., 2016). Kieran (1996) sin generaliserande aktivitet handlar om å kunne forme uttrykk og likningar, noko som ein kan finne igjen i Blomhøj (2003) sin modelleringsproesess som steg c). Radford (2010) deler generalisering inn i to hovudformer, aritmetisk og algebraisk. For nivå C vil det i denne oppgåva brukast algebraisk generalisering. Algebraisk generalisering blir delt inn i tre undernivå der faktabasert generalisering vil vere det lågaste nivå og eit kjenneteikn for elevar på nivå B. Det nest høgaste nivået vil vere kontekstbasert generalisering. Her vil ein bruke ei blanding av ord og symbol for å beskrive fellestrekk ved reglar for å finne uttrykk. Det høgaste nivået av generalisering vil vere symbolsk generalisering der ein kan omskrive reglar og uttrykke dei ved bruk av full symbolsk likning. Då det ikkje blir nemnt noko om generalisering frå Udir, vil det i denne oppgåva bli sett på som eit høgt nivå både ved kontekstbasert og symbolsk generalisering.

3 Metode

I dette kapittelet vil det bli gitt ei grunngjeving for val av metode. Det blir også gjort greie for utval av informantar og kva som er gjort for å kunne svare på problemstillinga i denne studien. Vidare vil det sjåast på kvaliteten ved studien ved å seie noko om validitet og reliabilitet samt forskingsetiske betraktningar og eit kritisk innblikk av eigne metodeval.

3.1 Læringssyn

For å kunne seie noko om val av metode blir det først sett på ulike læringssyn. Det vil vere relevant for ein studie som undersøkjer læring og val av løysingsstrategiar, noko som ofte har bakgrunn i undervisninga. Læringssyn er noko som har blitt via stor plass til psykologien og det finns fleire ulike syn på kva læring er og korleis me lærer. Nokre av hovudteoriane innanfor området læringssyn er *behavioristisk, kognitiv, konstruktivistisk* og *sosiokulturelt læringssyn.*

I det behavioristiske læringssynet er den menneskelege åtferda i sentrum der læring er ein medfødt refleks som kan bli vidareutvikla gjennom erfaring (Engh, 2011). For at læring skal skje må ein påverke individet eksternt for at det skal skje ein endring i åtferd, og det er desse eksterne hendingane som vil vere i fokus (Woolfolk, 2004). Ved å ha fokuset på åtferd vil behavioristane vere mindre opptatt av mentale prosessar og refleksjonar (Skaalvik & Skaalvik, 2013) noko som ein kan sjå på som ei motsetning av det kognitive læringssynet der dei mentale prosessane står i fokus. I det kognitive læringssynet deltar ein aktivt, ein øver seg og reflekterer i staden for å bli påverka av hendingar på ein passiv måte der både kunnskap og ferdighetar vil vere avgjerande for eit godt kunnskapsgrunnlag (Woolfolk, 2004).

I det konstruktivistiske læringssynet ser ein på kunnskap som noko kvart enkelt individ sjølv konstruerer og vil på mange måtar ha fellestrekk med det kognitive læringssynet. Piaget har hatt stor påverknad på det konstruktivistiske læringssynet, kognitiv konstruktivisme, med fokus på det kognitive som skjer under læring. I likskap med Piaget vil Vygotsky også vere opptatt av at kunnskap er noko ein må konstruere sjølv og er ein sentral person i det sosiokulturelle læringssynet. Samtidig skil det konstruktivistiske læringssynet seg frå det sosiokulturelt læringssyn ved at ein er opptatt av det som skjer i sosiale og kulturelle kontekstar vil vere avgjerande for læring (Engh, 2011). At menneske samhandlar og kommuniserer ved bruk av språk og sosiale er med på å skape våre mentale prosessar.

Konstruktivistisk og sosiokulturelt læringssyn vil begge passe under mitt læringssyn der læring skjer ved at kvart enkelt individ konstruerer sin kunnskap, men som også skjer ved samhandling i sosiale og kulturelle kontekstar. Bruk av eit fagleg språk og det å dele erfaringar med kvarandre er ein måte å endre på den kunnskapen ein allereie har.

3.2 Val av metode

Forskingsspørsmåla for denne oppgåva er:

1. *Kva løysingsstrategiar brukar elevar i matematikkfaget 1P når dei skal omsetje mellom ulike representasjonar av lineære funksjonar.*
2. *Kva kjenneteiknar ulike strategiar på ulike nivå?*

For å svare på det første spørsmålet må ein ha eit datamateriale som gjer at ein kan analysere ulike elevar sine løysningsstrategiar. Det vil vere større sannsyn for at elevar som arbeider med temaet funksjonar og det å omsetje mellom ulike representasjonar vil vere meir bevisst og klar over kva løysingsstrategiar dei bruker. Eg fann det difor hensiktsmessig å dra ut i skulen og møte elevar der dei er, og finne elevar som arbeider med dette temaet. Prosjektet eg har gjennomført, og data eg har samla inn, er langt større enn det eg har tatt med i denne oppgåva. Kapittel 3.11 omskriv mitt prosjektet samt kvifor ikkje all data er brukt vidare i analysen.

For å undersøkje mitt forskingsspørsmål måtte det takast eit val om bruk av kvantitativ eller kvalitativ studie. Ved ei kvantitativ studie vil ein ofte undersøkje eit større utval, gjerne for å kunne generalisere (Cohen, Manion, & Morrison, 2011). Ein kvantitativ metode som ofte er brukt er spørjeskjema med kategoriar eller svaralternativ, der deltakaren kryssar av det som passar. På denne måten vil ein kunne få eit innblikk i kva eleven kan, og ein kan anta kva eleven har tenkt for å løyse dei ulike oppgåvene. For å unngå å måtte anta kva elevar har tenkt, kan ein bruke spørjeundersøking med opne spørsmål. Ulempa med dette er at det kan vere vanskeleg å forstå kva elevar har tenkt ved skriftlege formuleringar, då ikkje alle elevar kan forklare tydeleg kva ein har gjort ved bruk av matematiske symbol, utrekningar, ord eller teikningar. I tillegg vil ein ved spørjeskjema miste moglegheita til å stille oppfølgingsspørsmål og ein kan risikere at elevar unngår å svare slik at ein kan miste tilgang på enkelte løysningsstrategiar.

I denne oppgåva var eg opptatt av å sjå på ulike typar løysingsstrategiar elevar brukar og ikkje kor mange som bruker dei ulike metodane. Det blei difor tatt eit val om ein kvalitativ metode. Vanlege måtar å samle inn kvalitativ data er å observere eller intervjue. Ved å observere elevar i eit klasserom får ein tilgang på å studere elevar i ein setting der dei løyser oppgåver og der ein ved oppfølgingsspørsmål kan få elevar til å forklare kva dei tenkjer når dei løyser ulike oppgåver. Ved observasjon kan ein observere eit individ eller ei gruppe (Creswell, 2012), og på denne måten få mange ulike løysningsstrategiar. Samtidig kan det vere krevjande å observere fleire individ eller større grupper med elevar når dei løyser ei oppgåve.

Formålet med eit intervju er å forstå korleis verda er frå intervjupersonen sitt perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2009). I ei kvalitativ analyse med intervju som metode, var sjansen større for å få eit innblikk i korleis elevane tenkjer når dei løyser ulike oppgåver. Samtidig opnar intervju opp for å kunne stille spørsmål ved uklarleikar, eller for å kunne gå i djupa, noko ein mister ved bruk av spørjeskjema. Valet falt difor på ein kvalitativ analyse med intervju som metode.

Ved intervju som metode kan ein gjennomføre eit fokus-gruppeintervju. Her vil det vere mogleg å undersøkje forståing frå fleire individ (Creswell, 2012) og det kan kome fram ulike løysningsmetodar ved at elevane støtter seg til kvarandre. Samtidig kan dette vere ei utfordring for den som intervjuar og skal styre dialogen då det kan bli mange som vil dele på ei og same tid. Ein kan også risikere at enkelte elevar ikkje vil dele sin strategi då ein er usikker på om strategien vil vere rett eller gal. Det blei difor tatt eit val om å gjennomføre ein-til-ein intervju.

Det andre forskingsspørsmålet mitt var ikkje eit spørsmål eg stilte i utgangspunktet, men som kom fram under arbeid med datamaterialet. Dette spørsmålet har difor ikkje påverka nokre av dei vurderingane som er gjort for å gjennomføre studien.

3.3 Intervju som metode

Forskingsintervju er i følgje Kvale & Brinkmann (2009) er ein konstruksjon av kunnskap der det blir utveksla synspunkt mellom den som intervjuar og intervjupersonen. Konversjonen føregår ikkje mellom likeverdige partar, då er den som intervjuar som definerer og styrer samtalen noko som vil føre til eit asymmetrisk maktforhold. Dette kan også vise seg ved at den som intervjuar kan tolke og rapportere det intervjupersonen har sagt (Kvale & Brinkmann, 2009).

Korleis intervjuguiden vil vere for eit intervju vil variere. Ein kan på førehand av intervjuet bestemme seg for spørsmål og stille desse i gitt rekkjefølge ved å følgje ein struktur, eit strukturert intervju. I den motsette enden av skalaen finn ein ustrukturerte intervju der ingen av spørsmåla er planlagt. Ved å bruke planlagde spørsmål med ein fleksibilitet til å endre på rekkefølga, eller stille andre spørsmål, bruker ein eit semistrukturert intervju. Eit semistrukturert intervju er i følgje Kvale & Brinkmann (2009) verken ein open samtale eller eit lukka spørjeskjema.

Hensikta med denne oppgåva var å undersøkje elevar sine løysingsstrategiar der det blei tatt utgangpunkt i oppgåver frå ein test elevane hadde gjennomført. Ved å bruke oppgåver frå ein test, var utgangspunktet det same for alle elevane der tema og dei fleste spørsmåla bestemt før intervjuet blei gjennomført. For å gripe fatt i elevane sine tankar, måtte eg til tider stille spørsmål der det blei tatt utgangpunkt i svara intervjupersonen gav. Dette for å klargjere dei ulike strategiane. Ved å ta utgangspunkt i forhandsbestemte spørsmål men med ein viss fridom til å stille spørsmål for å utdjupe, er det i denne studien gjennomført eit semistrukturert intervju.

3.4 Testoppgåver

Som eit utgangpunkt for samtale i intervjua blei det bestemt å gjennomføre ein test med oppgåver som handla om å omsetje mellom ulike måtar å representasjonar funksjonar. På denne måten hadde elevane allereie sett i gang ein tankeprosess der eg kunne få eit innblikk i ulike løysingsstrategiar elevar ville bruke for å kunne løyse ulike oppgåver. Testen blei også eit utgangspunkt for utval, noko som presentert i avsnitt 3.5.1. For å avgrense oppgåva blei det fokusert på omsetjing mellom lineære funksjonar.

Inspirasjon til oppgåvene i testen som blei brukt, er henta frå masteroppgåva «Misoppfatninger rundt funksjonsbegrepet» etter godkjenning frå forfattaren, Kristin Rønningstad (2009). Stort sett alle oppgåvene blei endra litt på etter samråd med kollega for å gjere dei meir diagnostiske. Ei diagnostisk oppgåve vil vere ei oppgåve elevane ideelt sett ikkje vil kunne svare rett på dersom dei har feilaktige idear knytt til omgrepet. Dette vil vere ein måte å sjå på ulike løysningsstrategiar elevar har og dermed kunne utvikle dei eksisterande løysningsstrategiane (Brekke, 2002). Ifølgje Brekke (2002) er diagnostiske oppgåver blir også brukt for å undersøkje kva misoppfatningar elevar har, og vil difor vere eit godt verktøy å ta i bruk før ein undervisningsperiode. Ein misoppfatning er ikkje ein tilfeldig feil eleven gjer, men det er ein ufullstendig tanke ein har om eit omgrep (Brekke, 2002). Det at elevar har misoppfatningar tyder på at elevar har ein løysningsstrategi for gitte oppgåver, og vil difor vere nyttig for denne oppgåva. Sjølv om det eleven seier ikkje alltid er korrekt, er det alltid ein logisk tanke bak det som blir sagt (Kazemi & Hintz, 2014).

Testane bestod av ni fleirvalsoppgåver og ei open oppgåve. Det blei tatt eit val om å bruke fleirvalsoppgåver då det var større sannsyn for at elevane ville svare sjølv om dei var usikker samanlikna med opne oppgåver. Den opne oppgåva handla om generalisering av figurtal. Ved å ha eit opent spørsmål kunne elevane i større grad velje om dei ville teikne, rekne eller bruke formel. Dei ulike svaralternativa blei laga med tanke på ulike misoppfatningar elevar kunne ha i forbindelse med lineære funksjonar. Dette er misoppfatningar eg har møtt på i den tida eg har arbeida som lærar. Det å bruke anteke misoppfatningar som svaralternativ gjer det meir sannsynleg at elevane ikkje eliminerer dei gale svara, men tenkjer gjennom kva dei gjer.

For kvar oppgåve var det eitt rett alternativ. Ved å ha fleire rette alternativ til ei oppgåve kan ein risikere at ikkje alle dei rette alternativa blir sett av elevane. Det kan tenkjast at elevar vil gå vidare til neste oppgåva så snart ein har funnet det alternativet som vil passe best, utan å vurdere om det er fleire som kan vere riktig. I ei oppgåve frå testen om generalisering ville eg at elevane skulle kome fram til eit svar sjølv, utan påverknad frå svaralternativ. Her fekk elevane linjer til å skrive kort kva dei har tenkt.

Det vil her bli tatt for seg ei av oppgåvene med forklaring av svaralternativa. Resten av oppgåvene frå testen ligger ved som vedlegg 8.3, og nokre av oppgåvene vil bli tatt for seg i analysen.

Oppgåve 9

Tabellen viser en oversikt over kor mykje ei solsikke veks ein periode. Kor mange cm veks solsikka per veke i denne perioden?

Veke	2	4	8
Høgda i cm	9	13	21

☐ 12 cm ☐ 2 cm ☐ 4,5 cm ☐ 6 cm

Det første alternativet, 12 cm, kan undersøkjer om elevane ser på differansen mellom kor høg planten er i veke 2 og i veke 8. Ved å velje dette alternativet tar sannsynlegvis ikkje eleven omsyn til at det er gått 6 veker. Alternativet 2 cm, som vil vere det rette, ser på forholdet mellom kor mykje planten veks og tal på veker det har gått. Dersom eleven vel alternativet 4,5 cm kan det tenkjast at elevar bruker tal frå første kolonne og dividere høgda på planten med kva veke det vil vere. Her kan eleven tenkje at planten har vakse 9 cm sidan den blei planta, og deretter funnet gjennomsnittet med å dividere på 2 som er veketalet. Alternativet 6 cm er eit alternativ der eleven kan ha tenkt at planten veks 12 cm denne perioden og dividerer 2 som er veketalet for den første målinga.

3.5 Gjennomføring

3.5.1 Utval

Sidan eg med denne oppgåva ville undersøkje ulike løysingsstrategiar, trengte eg tilgang på elevar som kunne forklare meg sine framgangsmåtar. Det blei tidleg tatt eit val om å undersøkje elevar i matematikkfaget 1P der eit av læreplanmåla er å skulle omsetje mellom ulike representasjonar for funksjonar. Ved å bruke elevar frå eigen klasse, visste eg at elevane hadde arbeida med å finne ulike løysingsstrategiar der dei skal omsetje ulike måtar å representere funksjonar på. Det å bruke elevar ein har tilgang på vil vere eit bekvemmelighetsutval (Cohen mfl., 2011). Ein konsekvens av å bruke elevar ein har tilgang gjer at studien ikkje utan vidare kan samanliknast med andre, eller generaliserast. Samtidig var eg i denne studien opptatt av å forstå korleis elevar tenkjer der ein ser etter ulike typar, og ikkje generalisere.

Mitt datamateriale er ein del av eit større prosjekt, presentert i delkapittel 3.11. Elevane e i dette prosjektet gjennomførte den same testen før og etter eit undervisningsopplegg. Av totalt 20 elevar i 1P-gruppa, var det 17 elevar tok begge testane. Det blei difor naturleg å ta utgangspunkt i desse 17 for intervju. Av dei 17 elevane var det ni elevar som i liten grad hadde svart rett på den første testen, men som endra svaret sitt på den siste testen. Då eg var opptatt av å kunne seie noko om kjenneteikn på nivå ved dei brukte løysingsstrategiane og ikkje misoppfatningar elevar kan ha om lineære funksjonar tok eg utgangspunkt i dei 9 elevane som hadde svart meir rett på den siste testen samanlikna med den første. Av ni elevar som blei intervjua var det åtte jenter og ein gut. Det blei ikkje tatt omsyn til kjønn under val av intervjuobjekt, då eg i denne studien ikkje hadde hensikt å undersøke forskjellar mellom kjønn.

Ei utfordring med kvalitativ analyse vil vere å bestemme kor mange ein skal intervjue. Her vil det ikkje vere eit fasitsvar då designa ikkje er universelle (Fusch & Ness, 2015). Det er likevel gjort studiar som viser at ved eit gitt tal vil ein oppnå ei metting der ein ikkje får nye kodingar eller kategoriar. Med dette kan ein sjå på metting som ei form for generalisering. Enkelte studiar viser eit mettingspunkt på tolv personar dersom ein intervjuar ei relativt homogen gruppe (Guest, Bunce, & Johnson, 2006). Andre studiar viser at det å nå eit mettingspunkt ikkje berre kjem an på kor mange ein intervjuar, men òg kor lenge og kor i djupna ein går (Rowley, 2012). Ein tommelfingerregel på kor mange ein skal intervju er ifølgje Rowley (2012) at intervju med varigheit på omtrent 30 minutt krev 12 intervju, medan ein varigheit på omtrent 60 minutt krev 6 – 8 intervju. Mine intervju varte i over 30 minutt og ved å intervjue 9 elevar vil dette vere eit passande tal på informantar då dei 9 informantane vil kunne belyse ulike tankemåtar blant elevar som vel matematikkfaget 1P og valt emne. Det kan derimot ikkje seie noko om kor vanlege dei ulike strategiane er, noko som heller ikkje er hensikta å undersøkje i denne studien.

Før prosjektet starta blei gruppa informert om testane og at eit utval ville få spørsmål om å bli intervjua på bakgrunn av testen. Klassen fekk utlevert informasjon om prosjektet og at dei når som helst kunne trekkje seg frå å bli intervjua, eller å trekkje intervjua i etterkant. Her måtte kvar enkelt signere for å godkjenne å bli intervjua og godkjenne bruk av test og intervju til denne oppgåva. Prosjektet er meldt inn og godkjent av Personverntenester for forsking, Norsk senter for forskingsdata, NSD.

3.5.2 Intervju

Med utgangspunkt i testen blei elevane stilt det same spørsmålet for kva oppgåve: *Kva har du gjort for å løyse denne oppgåva?* På denne måten opna eg opp for at eleven skulle kunne forklare sine tankar. Dersom eleven stoppa opp, eller blei usikker viste eg til testen og gav dei litt tid til å tenkje gjennom oppgåva på nytt.

Målet med intervjua var å få elevane til å forklare sine løysingsstrategiar, og sjølv om dei elevane som hadde svart mest rett var dei som skulle bli intervjua, visste ikkje dei på førehand om dei hadde svart rett eller galt. Det blei difor før kvart intervju presisert at det ikkje ville bli lagt vekt på kva som var dei rette svara, men framgangsmåten som blei brukt. Dersom elevar blei usikker på sin strategi og om svara dei hadde gitt var rette, kunne eg til tider nikke bekreftande. Under forklaring av løysingsstrategiane måtte derimot elevane forklare utan direkte hjelp frå meg. Her kunne eg stille spørsmål ved dei gjorde, og gjenta elevar sine forklaringar for å undersøkje om eg hadde forstått deira strategiar rett.

Intervjua blei gjennomført i veke 50 og 51 der det blei sett av 60 minutt til kvart intervju. Intervjua blei gjennomført på lukka grupperom for å unngå å bli forstyrra av andre. Intervjua blei tatt opp som lyd opptak og som på eit seinare tidspunkt blei transkribert. Varigheit av intervjua var på mellom 31 og 47 minutt.

3.6 Datamateriale og transkripsjon

Mitt datamateriale består av testane til dei ni elevane som blei intervjua samt transkripsjon av intervjua. Å transkribere eit intervju er å omsetje frå eit munnleg til eit skriftleg språk (Kvale & Brinkmann, 2009). Ved å transkribere kan ein risikere å miste mykje informasjon som tonefall, lange og korte pausar (Cohen mfl., 2011). Det er difor viktig å vere nøye i denne prosessen. Eg har sjølv transkribert intervjua i perioden januar – februar 2018. I intervjua blei det transkribert uttaler som «ehm» og «mmm». Elles det ikkje blitt skrive ned lydar då eg ikkje såg det som nyttig for mitt forskingsspørsmål. Ved lengre pausar har det blitt markert som (…) og avbrote setningar med ... For å bevare anonymiteten til elevane har kvar enkelt fått tildelt pseudonym og dei ulike dialektene er skrive på nynorsk.

3.7 Analyse

Å arbeide med transkribert data skjer gjerne over fleire steg der det første steget handlar om å lese over transkripsjonane fleire gonger (Creswell, 2012). Ved å lese gjennom fleire gonger skaffa eg meg ei oversikt over resultata, og ved hjelp av notatar til kvar oppgåve kunne eg markere kjenneteikn. Det neste steget i analysen er å kode data ved å sette namn på noko som kan innehalde ein idé (Cohen mfl., 2011). Ved koding kan ein knytte eitt eller fleire nøkkelomgrep til eit tekstavsnitt (Kvale & Brinkmann, 2009). I denne prosessen er det vanleg å først lage eit bilete over heile situasjonen og deretter velje ut ei oppgåve, gjerne den mest interessante som utgangspunkt.

Å bruke transkribert data vil vere ei innhaldsanalyse som Hsieh og Shannon (2005) delar i tre ulike tilnærmingar; *konvensjonell, summativ* og *teoridrevet innhaldsanalyse*. Ved konvensjonell innhaldsanalyse ser ein på datamateriale som heilheit og blir ofte brukt der eksisterande tilgang på teori er avgrensa (Fauskanger & Mosvold, 2015). Ved summativ innhaldsanalyse har ein fokus på kor ofte eit ord eller innhald kjem fram i ein bestemt kontekst (Fauskanger & Mosvold, 2015) Dette kan ein gjere ved å telje kor ofte bestemte ord førekjem. Ved teoridrevet innhaldsanalyse har ein utarbeida kategoriar og nøkkelord frå tidlegare forsking og teori (Fauskanger & Mosvold, 2015). Konvensjonell innhaldsanalyse passer når ein skal få ein djup kunnskap til sine data, summativ for å utvikle hypotesar medan teoridrevet for å teste hypotesar i form at teori (Fauskanger & Mosvold, 2015).

I løpet av intervjua og under arbeidet med transkripsjonane kom det fram ulike forklaringar på strategiar som blei brukt for å omsetje mellom ulike representasjonar. Det var i denne prosessen det opna seg for å kunne seie noko om strategiar på ulike nivå. At det i denne studien er brukt datamateriale til å kategorisere nivå, er det brukt ein konvensjonell innhaldsanalyse. Under arbeidet med teori i etterkant av analysen blei det deretter brukt Udir, PISA og TIMSS sine eksisterande nivåinndelingar. Med desse nivåinndelingane som utgangspunkt, blei nivå A, B og C konkretisert. Konkretiseringa er gjort med bakgrunn i funna frå analysen. At det er brukt Udir, PISA og TIMSS som utgangspunkt for nivå A, B og C, er det også brukt teoridriven innhaldsanalyse. Ved å bruke mest konvensjonell, men også teoridrevet innhaldsanalyse kan ein få eit rikare innblikk i eiget datamateriale.

3.8 Kvaliteten ved studien

Det vil vere vanskeleg å gjennomføre ein studie utan trussel mot enten det å vere ein påliteleg studie, eller det ein kan seie er ein gyldig studie (Cohen mfl., 2011). Det er difor viktig at ein gjennom studiar undersøkjer om datamateriale og tolking av funna i analysen er nøyaktige (Creswell, 2012). Dette kan ein gjere ved å undersøkje validiteten til studien, der ein ser på om studien undersøkjer det den er meint å skulle undersøkje (Kvale & Brinkmann, 2009). Det er ikkje nok å berre sjå på validiteten til studien, ein må også undersøkje reliabiliteten som har med forskingsresultata sin truverdigheit å gjere, og blir ofte behandla i samanheng med spørsmålet om resultata kan reproduserast av andre forskarar (Kvale & Brinkmann, 2009).

3.8.1 Validitet

I metodekapittelet er det gjort greie for eit kvalitativt intervju som metodeval og kvifor dette vil vere ein eigna metode til å finne ulike løysingsstrategiar. Det er også i metodekapittelet gjort greie for korleis analysen er gjennomført. På denne måten kan også andre få eit innblikk og vurdere om det datamateriale eg har kan svare på mitt forskingsspørsmål noko som vil auke validiteten på studien.

Utvalet i denne studien er grensa til ni personar frå ei gruppe elevar noko som kan gjere det vanskeleg å overføre til andre grupper. Ulike elevar vil ha ulike måtar å løyse oppgåver på. I tillegg vil oppgåver med svaralternativ gjer at elevane har ei forventning til korleis dei trur eg vil dei skal løyse ei oppgåve. Elevane kan også bruke alternativa til å svare, noko dei ikkje ville kunne gjere med oppgåver utan alternativ. Samtidig var ikkje hensikta med denne studien å finne ut kva elevar kan eller finne ut kor mange som vel å løyse oppgåva på ein bestemt måte. Hensikta var å få eit innblikk i korleis oppgåver kan løysast og sjå på ulike typar løysingsstrategiar. For å gjere dett vil ein test med svaralternativ gjere at flest mogleg elevar svara. Ved å bruke diagnostiske svaralternativ kan dette gje eit innblikk i kva strategiar elevane har brukt. Under eit kvalitativt, semistrukturert intervju vil løysingsstrategiane kunne belysast der ein i tillegg kan stille oppfølgingsspørsmål.

Å ikkje oppnå ei metting vil vere negativt for validiteten til ein studie (Fusch & Ness, 2015). Når ein har oppnådd ei metting, vil variere frå studie til studie og ein kan seie at ein har oppnådd metting dersom ein kan vise til at fleire av intervjupersonane seier det same. Noko som vil vere viktig dersom ein skal undersøkje personar si meining om eit emne. Dette kan eg ikkje vise til i min studie, der eg har undersøkt kva strategiar som blir brukt. Eg vil tørre å påstå at dette ikkje vil vere med på å svekke validiteten til mitt forskingsspørsmål då eg er ute etter ulike typar løysingsstrategiar. Ein kan då risikere å berre få eit døme på bruk av ein gitt strategi utan at det betyr at resultatet er mindre gyldig.

3.8.2 Reliabilitet

Ved å gjennomføre ein test som er lagt ved, vedlegg 8.3, vil det kunne vere mogleg for ein anna forskar å gjennomføre den same testen. I tillegg er det ein openheit om kva som er gjort og på denne måten kan andre gjennomføre det same. Dette er med på å auke reliabiliteten til oppgåva.

Med intervju som metode vil det vere større reliabilitet dersom ein gjennomfører eit strukturert intervju (Cohen mfl., 2011). Ved å bruke semistrukturerte intervju har intervjupersonane fått ulike spørsmål ut frå svara dei har gitt. At det i denne studien er brukt eit semistrukturert intervju kan dermed føre til at andre som gjennomfører intervjua vil få andre svar. Samtidig har utgangspunktet vore likt der elevane har måtte forklare sine løysingsstrategiar for kvar oppgåve. Eventuelle oppfølgingsspørsmål har vore for å presisere uklarhetar i det som har blitt sagt. Eg tør difor å påstå at intervjua skal kunne gjennomførast av andre og at dei same kjenneteikna for strategiar vil kome fram.

Å registrere intervju kan gjerast på fleire måtar; lydopptak, videoopptak, notatskriving og bruk av hukommelsen (Kvale & Brinkmann, 2009). Det blei under intervjua brukt lydopptak for å kunne registrere intervjua. På denne måten var fokuset vere på sjølve intervjuet, og ikkje i å ta notat. Ved å bruke lydopptak vil fleire kunne gå gjennom råmaterialet og transkribere. Det er viktig å sørge for at datamaterialet inneheldt minst mogleg feil. Under transkripsjonen blei difor korte sekvensar av opptaka spelt av fleire gonger før det blei skriven ned. Det er eg sjølv som har laga test, gjennomført intervju og transkribert intervjua. Desse grepa gjer at risikoen for misforståing eller tap av informasjon er minka i desse prosessane.

Ved å transkribere intervju og kode ut frå transkripsjonar vil det å kunne la fleire personar gjennomføre både transkripsjon og koding auke reliabiliteten. På denne måten kan man sørge for at ulike strategiar blir koda på same nivå. Som student var ikkje dette noko som let seg gjere. Koding av transkripsjonane for å plassere dei ulike strategiane vil kunne vere objektive meiningar som gjer at andre forskarar vil kunne få andre resultat. Samtidig trur eg at hovudnyansane vil kunne gå igjen dersom andre utfører den same studien.

3.9 Etiske vurderingar

I eit prosjekt som involverer andre har forskingsdeltakarane rett på å få så mykje informasjon som mogleg. Informasjonen skal gjerast på ein nøytral måte slik at deltakarane ikkje blir utsett for eit press om å delta. For elevar i eiga klasse kan det vere vanskeleg å seie nei til å delta eller trekkje seg undervegs då dei kan vere redd for å bli straffa. Elevane i denne studien fekk informasjon om kva føremålet med oppgåva var, kven som ville ha tilgang på datamateriale som blei samla inn, og korleis datamaterialet kom til å bli brukt. Det blei deretter levert ut eit informasjonsskriv der elevane måtte krysse av om dei ville la seg intervju og godkjenning til bruk av test og intervju. Her blei det presisert at dei når som helst kunne trekkje seg utan grunngjeving.

I denne studien er det forsøkt så godt som mogleg å behalde deltakarane sin anonymitet ved å bruke pseudonym for deltakarane. I tillegg er det munnlege språket skriven på nynorsk. Intervjua og transkripsjonane blei koda, der kodane som kunne identifisere elevane blei oppbevart ein annan stad enn intervjua. Det største problemet med å halde informantane anonyme, er at eg har forska på min eigen klasse. På denne måten kan ikkje elevane vere heilt anonyme. I den informasjonen eg har samla inn er det derimot ingen sensitive opplysingar.

3.10 Kritisk blikk på metodeval

Under sjølve intervjua hadde eg med oppgåvene frå den siste testen elevane gjennomførte. Dette for å ha eit utgangspunkt i det elevane hadde gjort, og der eg brukte testen som intervjuguide. I intervjua burde det ha vore klart andre typar oppgåver som handla om det same for å sjå korleis elevar ville løyse desse oppgåvene. Nokre synst det var vanskeleg å hugse nøyaktig kva dei hadde gjort, eller dei kunne bruke svara sine frå testen til å forklare sin løysingsstrategi. Ved å ha andre oppgåver tilgjengeleg kunne eg ha undersøkt om elevane kunne overføre det dei har gjort til andre oppgåver. Gjerne oppgåver som var meir utfordrande enn dei som blei gitt på testen. På denne måten kunne det ha vore endå lettare å sjå kjenneteikn på strategiar som kunne seie noko om ulike nivå.

Som uerfaren intervjuar er det nokre fallgruver å gå i. I dei første intervjua plasserte eg meg i ei lærarrolle der eg var opptatt av at elevane skulle forstå. Dette kunne vere situasjonar der eg ville avklare det eleven sa og der eg var opptatt av at eleven skulle forstå dersom dei hadde misoppfatningar eller gjorde andre feil. Etter kvart blei eg flinkare til å la eleven forklare kva strategiar dei sjølv hadde brukt der eg stilte oppfølgingsspørsmål for å forstå kva dei hadde gjort. Sjølv om det blei under alle intervjua presisert at det i denne studien var ein fokus på korleis dei løyste oppgåver og ikkje kva som var rett eller galt, merkast det på elevar at dei etter kvart blei meir trygg på å forklare utan å søke om bekreftelse.

3.11 Opphavleg plan

I planleggingsfasen av denne oppgåva var fokuset på å undersøkje om det skjer ei endring i kva løysingsstrategiar elevar vil bruke før og etter ein undervisningsperiode. Ein måte å undersøkje ei tilnærming til ulike læringsstrategiar er ved å bruke aksjonsforsking som design (Cohen mfl., 2011). Aksjonsforsking er eit design der ein lærarar gjerne forskar på eigen klasse for å hente informasjon om, endre på si undervisning, forske på sjølve undervisinga eller elevar si læring (Creswell, 2012). Å undersøkje ulike løysingsstrategiar handlar om elevar si læring, og det blei tatt eit val om å bruke aksjonsforsking i denne studien.

For at elevane i denne studien på best mogleg måte skulle kunne forklare kva strategiar dei ville bruke under eit intervju, såg eg det som hensiktsmessig å gjennomføre eit undervisningsopplegg der dei fekk øve seg på nettopp dette. Med eit konstruktivistisk og sosiokulturelt læringssyn som bakgrunn blei undervisningsøktene lagt opp til eit samarbeid mellom elevar. Ved å samarbeide om oppgåver kan ein dele erfaringar og ein må forklare sine løysingsstrategiar til andre. Då elevar allereie kjem inn med eigne løysingsstrategiar, uavhengig om dei vil vere rette, gale eller presise, kan det å dele vere med på å utvikle og effektivisere eksisterande løysingsstrategiar. Det blei sett av totalt fem økter der kvar økt varte i 90 minuttar. Oppgåvene elevane skulle arbeid med var undersøkjande oppgåver der elevane sjølv kome fram til ulike løysingsstrategiar. Ingen av løysingsstrategiane som blei brukt blei presentert av lærar, men utarbeida av elevar. Ved behov kunne eg som lærar stille spørsmål ved det elevane hadde gjort slik at dei måtte gjere vurderingar om brukt strategi. Oppgåvene til undervisningsopplegget er vedlagt som vedlegg 8.4.

I desse øktene blei verktøyet Five Practices brukt der eg under planlegging av timane *antok* kva strategiar som kom til å bli brukt av elevar, både rette og gale. Deretter *observerte* eg elevane medan dei løyste oppgåvene, først individuelt og deretter i grupper. Eg noterte ned ulike løysingsstrategiar som elevane *valte* å bruke samt kva for *rekkjefølge* desse skulle presenterast i. På denne måten fekk elevane eit innblikk i ulike måtar å løyse oppgåver på, samt ein diskusjon der elevane *kopla* saman dei ulike strategiane, kvifor dei ulike metodane fungerte og kva som var likt og ulikt mellom dei.

For å kunne undersøkje ei endring i bruk av løysingsstrategiane blei testen, viser til delkapittel 3.4 Testoppgåver, gjennomført både før og etter undervisningsopplegget presentert over. Det blei sett av 45 minutt til testane for at elevane skulle ha god tid til å lese spørsmåla og tenkje gjennom kva dei gjorde.

I intervjua hadde elevane vanskar med å forklare når dei hadde forstått noko nytt, og vanskar med å knytte den nye forståinga mot det som var blitt gjort i dei ulike øktene. Under analysen av transkripsjonane endra forskingsspørsmålet seg frå å sjå på ei endring av ulike løysingsstrategiar til å sjå på ulike løysingsstrategiar og kjenneteikn på ulike nivå.

4 Analyse

Forskingsspørsmålet for denne oppgåve er:

1. *Kva løysingsstrategiar brukar elevar i matematikkfaget 1P når dei skal omsetje mellom ulike representasjonar av lineære funksjonar.*
2. *Kva kjenneteiknar ulike strategiar på ulike nivå?*

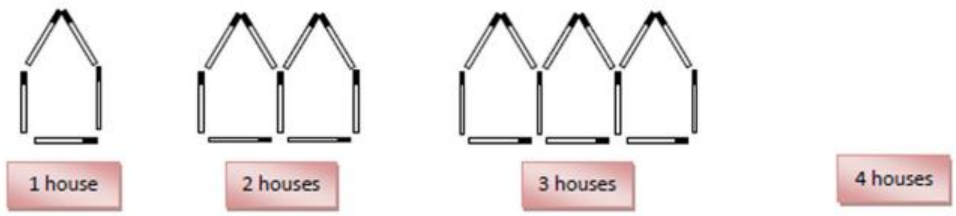
I analysen blir det lagt til rette for å seinare kunne svaret på desse forskingsspørsmåla. Analysen er delt inn i fem delar der det blir sett på strategiar for fem ulike omsetjingar. Det er også i denne oppgåva eit ønske om å undersøkje kjenneteikn på nivå for dei strategiane som blir brukt. Desse nivåa bli presentert undervegs for kvar omsetjing.

Av ti oppgåver frå testen og intervjua, er det i analysen tatt med seks oppgåver. Det er her tatt utgangspunkt i dei oppgåvene der elevar har vist størst variasjon i løysingsstrategiar og kan seie noko om kjenneteikn på ulike nivå for dei brukte strategiane Ved resten av oppgåvene hadde elevane i stor grad dei same forklaringane på korleis dei kom fram til svara. Eit døme på ei slik oppgåve er oppgåve 1 frå testen, viser til vedlegg 8.3, der elevar brukte grafen direkte til å finne stigningstalet ved å *«gå ein bort og to ned».*

4.1 Omsetje frå situasjon til uttrykk

Å omsetje frå situasjon til uttrykk handlar om å arbeide med det Kieran (1996) kallar generaliserande aktivitetar. For at det skal bli kalla algebraisk generalisering må ein bruke symbol som kan beskrive dei generelle objekta (Radford, 2014; Stacey & MacGregor, 1999). I denne oppgåva blir elevane bedt om å rekne ut kor mange fyrstikker dei treng til eit gitt tal hus og til slutt finne eit uttrykk som kan passe for tal på fyrstikker kva som helst tal på hus.

Oppgåve 7



a) *Teikn opp fire hus.*

b) *Kor mange fyrstikker trenger du for sju hus? Forklar eller vis korleis du kom fram til svaret.*

c) *Kor mange fyrstikker trenger du for 17 hus? Forklar eller vis korleis du kom fram til svaret.*

d) *For eit kva som helst tal på hus, korleis kan du finne det totale tal på fyrstikker som trengst? Vis eller forklar korleis du kom fram til svaret.*

e) *Skriv ned svaret frå 4) ved hjelp av symbol.*

Dette er den opne oppgåva frå testen. I deloppgåva b) – d) må elevane forklare kva dei har gjort for å løyse oppgåvene. På denne måten er det lettare å gripe fatt i kva for Radford (2010) sine generaliseringsnivå elevane vil bruke.

NIVÅ A – aritmetisk generalisering

Malin teiknar først opp fire hus i oppgåva a). Deretter bruker ho dette utgangspunktet for å svare på oppgåve b) ved å teikne opp tre hus til.

Figur 4.1 Henta frå Malin sin test der ho svarar på oppgåve 7 b). Malin vel å teikne opp 7 hus for så å telje kor mange fyrstikk ho treng.

Malin forklarar: «Eg berre teikna opp for sju hus og så talte eg». Malin sin løysingsstrategi vil vere ei ikkje-algebraisk resonnering der ein i følgje Stacey og MacGregor (1999) kan bruke ein logisk resonnering for å finne fram til kor mange fyrstikker eit gitt hus vil ha. Denne metoden blir i denne studien sett på som ein teikne-og-telle metode.

Det Stacey og MacGregor (1999) kallar ei ikkje-algebraisk resonnering kan samanliknast med Radford (2010) sitt lågaste generaliseringsnivå, aritmetisk generalisering. Ved aritmetisk generalisering seier ein ikkje noko om det generelle for objekta, men vil kunne rekne seg fram til element for eit gitt figurtal. Dette er ei generalisering utan bruk av symbol, og er ein aktivitet på global/meta-nivå i Kieran (1996) sin GTG-modell. Ved å teikne opp og telje kor mange element ein treng for eit gitt figurtal, framstiller ein svaret visuelt. Dette kan skape ein struktur og på denne måten kan ta eit steg vidare. Denne metoden vil fungere for å finne element for låge figurtal, som i denne oppgåva, men vil ikkje vere ein effektiv løysingsstrategi for større figurtal. Denne strategien vil vere på eit nivå A.

NIVÅ B – Algebraisk generalisering (faktabasert)

For å finne tal på 17 hus, bruker Malin det ho fann for sju hus som utgangspunkt og finn ut kor mange fyrstikker som trengst for 10 hus til.

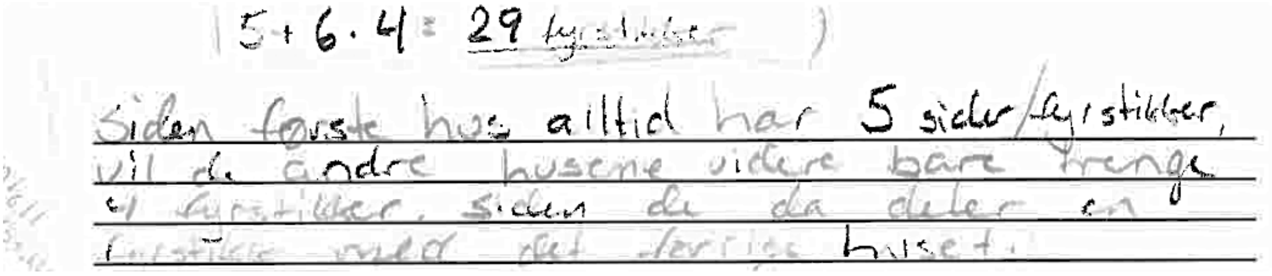
> «*For 17 hus treng du 69 fyrstikker. Fordi 7 hus treng 29 og då må du plusse på 10 hus. Så* $10 \cdot 4 = 40$ *og* $40 + 29 = 69$ *fyrstikker.*»

Malin forklarar vidare at for å finne tal på fyrstikker for kva som helst tal på hus: *«må du legge på fire fyrstikker på for kvart hus, og du startar med 5 fyrstikker.»*

Å bruke formuleringar som å legge til fire fyrstikker for kvart hus kan vere det Radford (2010) kallar aritmetisk generalisering. Ved denne strategien kan ein prøve seg fram for å finne tal på fyrstikker for eit gitt tal på hus. Samtidig ser eleven eit fellestrekk ved å sjå at for 17 hus treng ein $4 \cdot 10$ fleire fyrstikker enn for 7 hus. Dette fellestrekket blir presentert utan bruk av symbol og blir her sett på som Radford (2010) sitt lågaste nivå innan algebraisk generalisering. Sjølv om Radford (2010) ser på faktabasert generalisering som algebraisk, vil det i Kieran (1996) sin GTG-modell vere generalisering på eit global/meta-nivå, då generaliseringa skjer utan bruk av symbol. Faktabasert generalisering vil vere meir effektivt enn aritmetisk generalisering ved at ein kan seie noko om dei generelle objekta og er dermed ein løysingsstrategi på nivå B.

NIVÅ C – Algebraisk generalisering (symbolsk)

For å finne tal på fyrstikker for sju hus forklarar ein annan elev, Mia, seg på denne måten:


(5 + 6 · 4 = 29 fyrstikker)

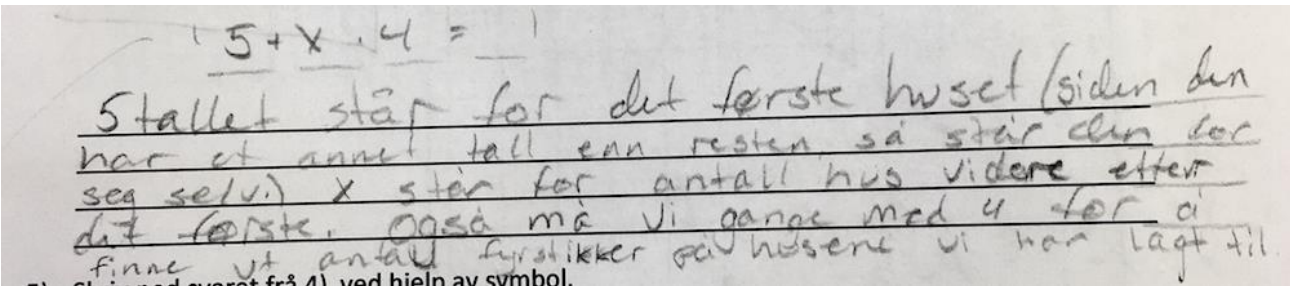
Siden første hus alltid har 5 sider/fyrstikker, vil de andre husene videre bare trenge 4 fyrstikker, siden du da deler en fyrstikk med det forrige huset.

Figur 4.2 Henta frå Mia sitt svar på oppgåva 7 b). Her har ho rekna ut og forklart kva metode ho har brukt får å finne kor mange fyrstikker ho treng for 7 hus.

For å forklare kva Mia har gjort seier ho:

> *«Då tok eg, sidan eg visste at for det første huset, liksom seier at denne her eg grunnen då, den har fem sider. Og så kjem resten som bygg seg på, altså desse deler jo vegger på ein vegg, så blir det fire fyrstikker for alle desse. Så då har eg berre tatt 5, som er det første og så tal på hus og så gonga med fire for å finne ut kor mange sider dei husa du har lagt til er.»*

For å finne tal på fyrstikker for kva som helst tal på hus, svarar Mia følgande på testen:


(5 + x · 4 = __)

5tallet står for det første huset (siden den har et annet tall enn resten, så står den for seg selv.) x står for antall hus videre etter det første. Også må vi gange med 4 for å finne ut antall fyrstikker på husene vi har lagt til

Figur 4.3 Henta frå Mia sitt svar på oppgåva 7 d). Her har ho forklart korleis ein kan finne tal på fyrstikker for kva som helst tal på hus ut i frå eit uttrykk.

I samtalen om kva Mia har gjort for å finne tal på fyrstikker for kva som helst tal på hus, forklarar Mia at x i formelen $5 + x \cdot 4$ står for kor mange hus ein legg til. For å vise med eit døme seier Mia viser ho utrekninga $5 + 2 \cdot 4$ for å finne tal på fyrstikker for tre hus.

Andre elevar skriv opp formelen $y = 4x + 1$ for å finne kor mange fyrstikker ein treng for kva som helst tal på hus. Denne formelen grunngjer dei som følgjande

> *«det er fordi at me eigentleg startar med ein fyrstikk, og så legg du på fire.»* (Kaia)

> *«Ehm, eg såg det ganske fort. Fordi eg fann ut av at eg måtte plusse på fire sånne fyrstikker for kvart nye hus du hadde. Men samtidig så hadde du eitt hus du hadde ein ekstra på. Det første huset var jo fem sånne, og då måtte du ha pluss ein for å få den med kvar gong»* (Andrea)

Desse elevane sett alle opp eit uttrykk for å finne tal på fyrstikker for eit kva som helst hus, Vidare bruker dei dette uttrykket til å rekne ut tal på fyrstikker for sju og 17 hus. Sjølv om det er oppgitt to ulike uttrykk grunngjev alle kvifor deira uttrykk vil passe med figurtala. Det at det her blir sett opp eit uttrykk ved hjelp av symbol, gjer at desse strategiane blir kategorisert under det Radford (2010) kallar symbolsk generalisering. Bruk av symbol gjer at denne generaliseringa vil vere ein generaliserande aktivitet i Kieran (1996) sin GTG-modell. Å generalisere krev at ein ser større samanhengar (Mason mfl., 2005) og at elevar her kan formulere eit uttrykk ved bruk av symbol kan tyde på at elevar har evna til å tenkje abstrakt. Symbolsk generalisering vil her vere ein løysningsstrategi på nivå C, og vil vere meir avansert enn aritmetisk og faktabasert generalisering.

4.2 Omsetje frå tabell til uttrykk

Å omsetje til eit uttrykk krev at ein kan sjå større samanhengar (Mason mfl., 2005). Det å sjå store samanhengar ut i frå ein tabell kan vere krevjande då ein kan bli opphengd i enkeltverdiar.

I første del av analysen om omgjering frå tabell til uttrykk, blir det tatt for seg oppgåve 4 frå testen som er gjennomført i forbindelse med denne studien, vedlegg 8.3. Her blir elevane bedt om å bruke ein tabell til å finne ein lineær samanheng og tilpasse til eit uttrykk. I den andre delen av analysen vil fokuset vere på oppgåve 9 frå den same testen. Her er også utgangspunktet ein tabell, men ein skal her finne stigningstal til ei meir praktisk retta oppgåve enn i oppgåve 4. Sidan oppgåvene er formulert ulikt vil dei bli sett på som to ulike delar. Beskriving av oppgåva vil bli gjort reie for undervegs i analysen.

FØRSTE DEL – finne uttrykk frå tabell

I følgjande oppgåve får elevane oppgitt tabell som presentert under. Elevane skal ut i frå denne tabellen finne kva lineært uttrykk som vil passe.

Oppgåve 4

Kva for funksjonsuttrykk passer til tabellen? (Sett eitt kryss)

x	0	1	3	4
y	-2	1	7	10

☐ $y = -2x$ ☐ $y = 3x - 2$ ☐ $y = 4x + 12$ ☐ $y = -2$

I oppgåva aukar ikkje x-verdiane jamnt frå 0 til 4 men utelet $x = 2$. Ved å først sjå på y-verdiane når $x = 0$ og $x = 1$, vil y-verdien auke frå -2 til 1. Etter eigen erfaring synst mange det er vanskeleg å sjå kor mykje y-verdien vil auke med når den går frå å vere negativ til positiv. Deretter viser tabellen x-verdiane $x = 1$ til $x = 3$. Ved å utelate $x = 2$ er tanken at elevane kan bli meir tvungen til å sjå på heile tabellen.

NIVÅ A – prøve- og feilemetode

Det første døme er eit utdrag henta frå Irmelin si forklaring på korleis ho har løyst oppgåve 4.

> «*Der satt eg, eg tenkte liksom at om eg satt inn i uttrykka* $x = 0$*, så viss eg gjorde det på den første* $2 \cdot 0 = 0$*, og her står det at om man sett inn 0 skal* y *vere* -2*. Så då visste eg at den ikkje var riktig, og det gjorde eg med alle dei andre og då fann eg ut at når eg tok det uttrykket og satt inn 0,* $3 \cdot 0 - 2$ *så blei det* -2*. Og så gjorde eg det med 1 og 3 og, og fann ut at det var den som var riktig.*»

Her har Irmelin prøvd seg fram ved å først sette inn for $x = 0$ i dei ulike uttrykka. Ved å bruke $x = 0$ kan ein raskt ekskludere uttrykk. I dette tilfelle berre er to uttrykk som gjer rett y-verdi når $x = 0$. Deretter prøver ho seg fram med x-verdiane 1 og 3, og konkluderer på denne måten $\mathrm{y} = 3\mathrm{x} - 2$ som rett alternativ.

Metoden som blir brukt her kan ein sjå på som det Stacey og MacGregor (1999) kallar ein prøve- og feilemetode ved at ein prøver dei ulike alternativa for å undersøkje kva som passar til tabellen. I følge Stacey & MacGregor (1999) vil dette vere ein systematisk prøve- og feilemetode der det kan sjå ut til at alternativa blir brukt i den rekkjefølgja som er oppgitt i oppgåva. Å starte med $x = 0$ vil vere ein effektiv metode for ekskludere andre uttrykk. Med $x = 0$ som det første alternativet, er det vanskeleg å seie om eleven sjølv hadde valt å undersøkje for $x = 0$ som eit første alternativ. Eller om det blei tatt eit val ut i frå rekkefølga frå verdiane i tabellen. I denne type oppgåver der ein får oppgitt dei ulike uttrykka, vil dette vere ein effektiv metode for å finne kva uttrykk som vil passe. Fire av ni elevar vel å bruke ein prøve- og feilemetode for å løyse denne oppgåva.

Ved å bruke ein prøve- og feilemetode vil ikkje eleven lenger gå frå tabell til uttrykk, men frå uttrykk til tabell. På denne måten endrar eleven tankegang der ein i utgangspunktet skal bruke det Kieran (1996) kallar ein generaliserande aktivitet som handlar om å forme eit uttrykk ved hjelp av symbol. I staden reknar ein ut verdiar og dermed bruker det Kieran (1996) kallar ein transformerande aktivitet. Ved å bruke ein prøve- og feilemetode vil ikkje elevar bruke algebra, men aritmetikk, og mange kan ofte komme til kort ved å bruke denne metoden for å løyse oppgåver (Stacey & MacGregor, 1999). Ein risikerer at ved ein prøve- og feilmetode vil elevar vere avhengige av svaralternativ for å kunne finne rett uttrykk til tabell. Det å bruke ein systematisk prøve- og feilemetode vil difor bli sett på som nivå A av løysingsstrategiar.

NIVÅ B – mønstersniffar (enkel)

I intervjuet får Irmelin spørsmål om denne oppgåva kan løysast på fleire måtar. Irmelin svarar at for ei rett linje vil ein ha x- og y-verdiar, og at ein kan setje inn x-verdiar i uttrykka for å rekne ut y-verdiar. Irmelin vil igjen bruke ein prøve- og feilemetode for å finne løysninga. Når Irmelin får spørsmål om kva ho vil gjere utan alternativ, blir ho usikker. I undervisningsperioden har det blitt arbeida med omgrepa stigningstal og konstantledd, og Irmelin får spørsmål om ho kan seie noko om dette. Ho blir igjen usikker og seier ting som: «*At det er det grafen stiger med. Kor mykje den liksom, ja, stigningstalet gjer at grafen liksom er enten bein eller skeiv eller... Ja, ut i frå kor mykje den aukar eller minkar*.» Irmelin blir deretter bedt om å forklare stigningstalet -2. Dette for å hjelpe ho med å sette ord på eit meir konkret tilfelle. Til det svarar ho:

> *«Mmm, visst stigningstalet er $-2x$, då må eg finne liksom eit punkt på grafen, og så går eg ein ut, ein til høgre ut og så går eg to ned. Eller om eg ikkje går to ned så finn eg ut kva liksom den stiger med.»*

Irmelin forklarar her kva ho ville gjort for å teikne ein graf med stigningstalet -2, men seier ikkje noko om kva som skjer med x-verdien. Etter spørsmål om kva som skjer med stigningstalet når x-verdien aukar med éin seier Irmelin: *«: Å, ja! Ehm, då blir.. då blir y 3 høgare, eller det blir pluss, eller ja.»*

Ved å føre Irmelin inn på ein samtale om stigningstal og konstantledd koplar Irmelin dette direkte mot ein graf. Dette kan tyde på at ho har knytt bestemte omgrep mot bestemte prosedyrar. Irmelin kan fortelje korleis stigningstalet til ein graf ser ut, men har vanskar med å overføre dette til tabell.

Ein annan elev, Aina, får òg spørsmål om ho kan komme med løysningsforslag til oppgåve 4, utan alternativ. Som Irmelin vil denne eleven bruke uttrykka og rekne seg fram til kva svar som vil vere rett. Etter ein dialog om konstantledd svarar Aina: «*Å, ja! Du kan få null på den sant, på x-aksen, det blir minus to.*» Vidare får Aina spørsmål om korleis ein finn stigningstalet. Til dette svarar Aina:

> «*Sjå kor mange det går opp? Nei, eg veit ikkje. Minus to, det blir 3…* $1 + 3$, *då blir jo ikkje sju… Oi, dei hoppa over eit tal! Kanskje då visst det hadde stått 2 der, ja! Det blir jo 3…*»

Aina ser sjølv ei løysning der ho kan utvide tabellen slik at den aukar jamt frå $x = 0$ til $x = 4$. Ved å gjere dette ser Aina at for kvar auke av x-verdi, vil y-verdien auke med 3 og finn dermed stigningstalet. Som Irmelin, koplar Aina først omgrepet konstantledd opp mot ein graf der ho ser for seg y-verdien når x-aksen er null. Vidare utvidar Aina tabellen frå oppgåva og ser eit system der det er ei jamn auke for x-verdiane.

Å utvide tabellen slik at den viser ei jamn auke for oppgitte x-verdiar, vil vere eit høgare nivå enn ein prøve- og feilemetode som brukt på nivå A. Ved å utvide tabell ser eleven etter eit mønster, noko som kan føre til meir effektiv løysing av matematiske problem (Cuoco mfl., 1996). Det å utvide tabellar vil i større grad kunne løysast utan å ha svaralternativ, og vere ei meir solid tilnærming enn ein direkte prøve- og feilemetode. Å leite etter mønster ved å utvide tabell, er noko som kan vere effektivt ved bruk av tabellar som gitt i oppgåva med enkle tal. På denne måten vil ein kunne formulere eit uttrykk ved å kjenne igjen stigningstal og konstantledd, ein generaliserande aktivitet i Kieran (1996) sin GTG-modell. Å formulere eit uttrykk ved symbol er det høgaste generaliseringsnivået i følgje Radford (2010). Samtidig kan det vere utfordrande for elevar å utvide tabellar ved bruk av større tal, desimaltal eller brøk, noko som Janvier (1978) diskuterer i si avhandling. Det å utvide tabell handlar om å leite etter mønster og vil i denne oppgåva sjåast på som nivå B.

NIVÅ C – mønstersniffar (avansert)

Benjamin seier han løyser oppgåve 4 ved å bruke tabellen direkte, og at han ut i frå tabellen ser at «den» må auke med 3 for kvar gong. I samtalen blir Benjamin bedt om å utdjupe korleis han har brukt tabellen direkte.

> «*Nei, altså når det er, når den går gjennom 0, så er* $y = -2$, *så når den er, når* x *er 1 så er* $y = 1$, *så då veit eg at den steig med 3. Så då veit eg at det skal stige med 3 for kvar gong.*»

Benjamin forklarar vidare at han på denne måten ekskluderer dei andre uttrykka då det berre er eitt alternativ som har stigningstalet 3. Vidare blir Benjamin bedt om å forklare -2 i uttrykket, $y = 3x - 2$. Til dette svarar han: «*Då veit eg jo det at det er der den går igjennom* y*, og der står det jo og at* $y = -2$*, at det er der den startar*.»

Benjamin bruker tabellen direkte og ser kva funksjonsuttrykket må auke med for kvar x-verdi. Dette er det same som Aina gjer når ho utvidar tabellen. Forskjellen mellom det Aina og Benjamin gjer, er at Benjamin bruker berre dei to første tala i tabellen til å finne stigningstalet og har ikkje behov for å undersøkje ved å bruke heile tabellen. I dette tilfellet kan han gjere det då berre eitt av alternativa inneheld eit uttrykk med stigningstalet 3. Her kunne det vore interessant å undersøkje kva Benjamin ville gjort dersom fleire alternativ viste stigningstal 3. Sjølv om han bygger opp under svaret med å forklare kva konstantleddet vil vere ut i frå tabellen. Benjamin grunngjer ikkje kvifor det må vere ei rett linje med konstant stigningstal ut i frå dei to verdiane han bruker frå tabellen. Det kan tenkjast at det er noko han antar då heile undervisningsperioden, samt testane, handlar om lineære funksjonar.

Det å gå frå tabell til uttrykk er å generalisere noko som i ofte er svært krevjande for elevar (Wilkie, 2016). Ved å bruke tabellen direkte ser eleven eit system ut i frå tabellen, og finn stigningstalet ved å rekne seg fram i staden å prøve seg fram. Eleven vil i større grad kunne overføre dette til andre typar oppgåver enn ved bruk av ein prøve- og feilemetode eller måtte utvide gitt tabell for å kunne sjå samanhengar. Som på nivå B, vil også denne strategien vere det Kieran (1996) ser på som ein generaliserande aktivitet og på det høgste av Radford (2010) sine algebraiske generaliseringsnivå, symbolsk. Å lage eit uttrykk der ein bruker tabellen direkte, slik som oppgitt i oppgåva, vil i denne oppgåva vere eit nivå C.

ANDRE DEL – finne stigningstal

I oppgåve 9 får elevane oppgitt tabell som viser kor høg ei solsikke er etter 2, 4 og 8 veker.

Oppgåve 9

Tabellen viser ei oversikt over kor mykje ei solsikke veks ein periode. Kor mange cm veks solsikka per veke i denne perioden?

Veke	2	4	8
Høgda i cm	9	13	21

☐ 12 cm ☐ 2 cm ☐ 4,5 cm ☐ 6 cm

I denne oppgåva blir elevane bedt om å finne kor mykje ein solsikkeplante veks per veke. Oppgåva viser ikkje ein tabell der x-verdien aukar jamt frå 0 – 8 veker, men kor høg planten er etter 2, 4 og 8 veker. Erfaring tilseier at det at å bruke ein tabell som viser kor høg planten er etter ei gitt tid, og ikkje kor høg planten er ved start, gjer oppgåva meir utfordrande. Dersom elevane får oppgitt kor høg planten er ved start og etter éi veke vil det ofte vere nok for elevane å bruke denne informasjonen til å svare på oppgåva. Ved å utelate kor høg planten er etter null veker og der det ikkje viser ei jamn auke for x-verdiane, er tanken at elevane må sjå på tabellen som heilhet.

NIVÅ A – prøve- og feilemetode

Aina vel å løyse oppgåva på denne måten:

> *«Så begynte eg med at det ikkje var 12 i alle fall, og så tenkte eg okei,* $9 + 2$ *det blir 11. Og* $11 + 2$ *blir 13, okei då passer det. Og så tenkte eg sånn okei, kva skal eg gjere no, så berre sette eg inn dei så tenkte eg liksom* $13 + 2$ *blir 15, og* $15 + 2$ *blir 17, og* $17 + 2$ *blir 19 og* $19 + 2$ *blir 21. Og då passa det med 2, og det passa ikkje med nokon av dei andre.»*

Her bruker Aina alternativa som er oppgitt i oppgåva, og undersøkjer kva som alternativ som vil passe til tabellen. Det at Aina seier at *«det passa ikkje med nokon andre»* blir her sett på som bruk av ein prøve- og feilemetode, der ho prøvar dei ulike alternativa for å sjå kva som kan passe.

Det at Aina har prøvd fleire alternativ tyder på at ho har vurdert svara sine og det å vurdere svara sine er i følgje Udir (udatert) noko elevar på nivå A i liten grad vil gjere. Likevel vil val av løysningsstrategi plasserast under nivå A, fordi det blir brukt ein prøve- og feilemetode der ein tar utgangspunkt i svaralternativa og bruker desse til å sjå kva som kan passe med modellen. Den vurderinga som blir gjort her er med informasjon som kan hentast direkte i frå oppgåva.

Ein prøve- og feilemetode er i følgje Stacey & MacGregor (1999) ein ikkje-algebraisk generalisering som Radford (2010) kallar aritmetisk. Dette kjem fram ved at eleven plussar på to for kvar veke som går. Eleven vil her i større grad gjere utrekningar for å sjå kva alternativ som passar med tabellen og ikkje generalisere ut i frå informasjonen tabellen gjer. Med å gå vekk frå generaliseringa er dette vere ein strategi der ein arbeidar med aktivitet på global/meta-nivå aktivitet i Kieran (1996) sin GTG-modell. Her kan ein resonnere seg fram til kva som vil vere rett utan bruk av algebra.

NIVÅ 2 – mønstersniffar (enkel)

Neste forklaring er henta frå Irmelin si forklaring:

> *«Fordi at eg satt inn då, eigentleg på begge to men der skreiv eg det ned, eg satt inn for at det skal stå 2, 4, 8 og så satt eg inn nokre tal i mellom for å finne ut kor mykje den veks i veka. For frå to til tre går det jo ei veke og då vaks den 2 cm og det gjer den og oppover.»*

Veke	2 3	4 5 6 7	8
Høgda i cm	9 11	13 15 17 19	21

☐ 12 cm ☒ 2 cm ☐ 4,5 cm ☐ 6 cm

Figur 4.4 Henta frå Irmelin sitt svar på oppgåva 9. Her har Irmelin utvida tabellen for å finne eit system.

Irmelin har her valt å sette inn verdiar i tabellen slik at det blir ei jamn auke frå $x = 2$ til $x = 8$. Dette er ein utviding av tabell der det blir brukt gjentatt addisjon, noko som er ein effektiv metode så lenge verdiane er små nok og det er lett å sjå eit system.

Det at tabellen ikkje viser ei jamn auke for høgda per veker vil her bli sett på som å løyse eit «praktisk problem» og ikkje eit «enkelt praktisk problem». Skilnaden mellom desse er at for eit «enkelt praktisk problem» kan ein lese informasjon direkte frå oppgåva. Når eleven tar i bruk tabellen direkte i staden for å prøve seg fram ved hjelp av dei ulike alternativa vil dette vere ein løysningsstrategi på eit høgare nivå enn nivå A då eleven leiter etter mønster noko som i følgje Cuoco mfl. (1996) kan vere ein effektvisering av det å løyse problem. Samtidig er eleven avhengig av å utvide tabellen, og som ved oppgåve 4 vil det å utvide tabellen kunne skape avgrensingar dersom det er oppgitt store tal, eller ved bruk av desimaltal og brøk.

NIVÅ C – mønstersniffar (avansert)

Benjamin forklarar kva han har gjort for å løyse oppgåva på denne måten;

> *«Nei, då tenkte eg at andre veka var planten på 9 cm og så fjerde veka var den på 13, så då var den fire cm lengre. Og så tenkte eg sånn mellom der, så tenkte eg at då var 3 då auka den med 2, og visst eg då tar med tredje veka, at tredje veka den er 11 så blir jo då 4, 13. Og då stemmar jo det at den aukar med 2.»*

Benjamin bruker dei to første verdiane frå tabellen, og reknar seg fram til at planten vil vakse 2 cm per veke. Deretter testar han ved å ved å rekne ut kor høg planten må vere etter 3 veker for å sjå om dette passar med tabellen. Benjamin undersøkjer ikkje om dette vil stemme for resten av tabellen, men det kan sjå ut som han antar at auka er konstant noko som vil vere naturleg då det er lineære funksjonar elevane har arbeida med før test og intervju.

Janvier (1978) viser til eiga forsking der det å blant anna bruke desimaltal ofte gjer oppgåver vanskelegare for elevar. Her kunne det vore interessant å la Benjamin få ein tabell med to x-

verdiar og tilhøyrande y-verdiar med nettopp desimaltal for å undersøkje korleis Benjamin grip fatt i ei oppgåve som er forventa å vere meir avansert. Dette for å sjå om han kan sjå eit system på same måte som i testen, eller om desimaltal vil hindre han i sjå eit system på same måte som i oppgåve 9.

Som nemnt under nivå B, vil denne oppgåva sjåast på som «praktisk problem» og ikkje eit «enkelt praktisk problem» . Likevel vil denne løysningsstrategien vere på eit nivå C då eleven bruker tabellen direkte og kan sjå generaliseringa ved å bruke dei to første verdiane i tabellen.

Oppgåve 9 vil vere det Kieran (1996) kallar generaliserande aktivitet der dei kan uttrykkje det generelle ved bruk av symbol. Det at ingen av elevane vel å uttrykke seg ved bruk av symbol kjem truleg av at dei ikkje blir spurt om å gjere dette, korkje på testen eller i intervjua. Ut i frå det som blir sagt, kan ein sjå på generaliseringa under nivå B og nivå C som det Radford (2010) kallar faktabasert generalisering. Her blir dei generelle objekta uttrykt ved bruk av ord, og ikkje symbol. For denne oppgåva kunne det vore interessant å undersøke om elevane kunne finne eit uttrykk ut i frå tabellen.

4.3 Omsetje frå uttrykk til graf

Ifølgje Janvier (1978) er det vanleg å bruke omvegar, spesielt når ein skal gå frå eit uttrykk til ein graf. Spesielt for andre uttrykk enn lineære funksjonar. I denne oppgåva er uttrykka gitt slik at dei skal kunne teiknast ved å bruke konstantledd og stigningstal og dermed bruke direkte omsetjing.

Oppgåve 3

a) $y = 2x$
b) $y = 5$
c) $y = -3x + 1$
d) $2x + y = 4$

I denne oppgåva fekk elevane oppgitt fire uttrykk, som vist over. Dei tre første uttrykka er oppgitt på den generelle forma $y = ax + b$, der dei to første alternativa manglar høvevis konstantledd og stigningstal. Det siste uttrykket blei gitt for å undersøkje korleis elevar vil løyse ei oppgåve som ikkje er oppgitt på den generelle forma.

FØRSTE DEL – uttrykk på den generelle forma $y = ax + b$

I den første delen av analysen blir det sett på deloppgåvene a), b) og c) då desse uttrykka er oppgitt ved den generelle likninga for lineære funksjonar, $y = ax + b$. Sjølv om det er berre c) som kan direkte overførast til det generelle uttrykket for ei rett linje.

NIVÅ A – imitativ tilnærming

Silje har teikna grafen til $y = 2x$ rett, men når ho får spørsmål om kva det er ho har gjort svarar ho: «*Det veit eg ikkje, sikkert fordi at den stiger med 2?*» Ho viser deretter tilbake til ei tidlegare oppgåve der elevane blir bedt om å finne stigningstalet til ei rett linje. *«Eg gjorde det same som der».* Under samtalen om den tidlegare oppgåva har ho vanskar med å forklare kva ho har gjort og seier ting som: «*Eg fann der den kryssa og så tok eg eigentleg berre ein ut til høgre*.» Vidare i samtalen om å teikne grafen til $y = 2x$, seier Silje at sidan det ikkje var nokre andre tal i uttrykket, starta ho i null og peikar på origo i koordinatsystemet. Når Silje får spørsmål om kvifor ho teikna grafen gjennom origo, svara ho: *«Sidan det ikkje var andre tal?»*

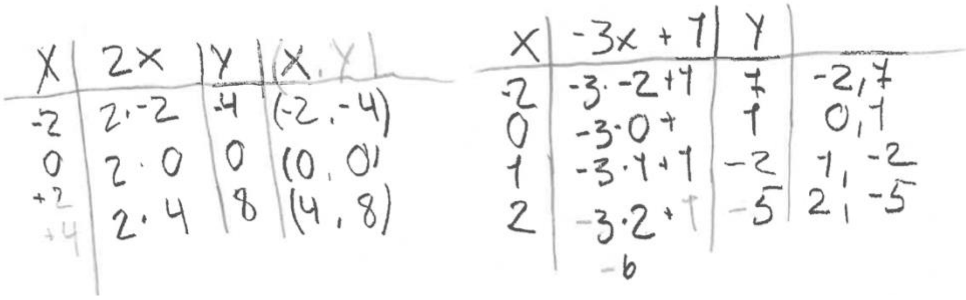
Silje har òg teikna $y = 5$ og $y = -3x + 1$ rett. Kvar gong Silje skal forklare sin framgangsmåte svarar ho spørjande som *«den stig ikkje?»* til $y = 5$ og *«at den søkk?»* til $y = -3x + 1$. Det blir her tolka som at Silje snakkar om stigningstal til dei ulike grafane, utan at ho bruker omgrepet direkte. På slutten av intervjuet om oppgåve 3, får Silje spørsmål om ho kan forklare kvifor grafane ser ut som dei gjer for dei ulike uttrykka. Til dette svarar ho: «*Eg berre hugsar den frå klassen.*»

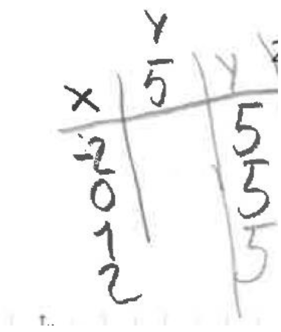
Silje har teikna grafen til dei lineære uttrykka rett. Det at ho ikkje har skrive opp ein verditabell kan tyde på at ho bruker uttrykket direkte for å teikne dei ulike grafane. Å teikne graf til eit uttrykk utan konstantledd eller stigningstal vil kunne sjåast på som eit høgare nivå enn nivå A. Dette fordi det ikkje er gitt at ein elev som brukar strategiar på nivå A vil kjenne igjen uttrykk dersom den er oppgitt på ein anna måte enn $y = ax + b$. Samtidig kan det at ho ikkje formulerer seg på ein tydeleg måte, tyde på at ho har funnet ein algoritme som gjer at ho kan løyse denne type oppgåver. Utsegna «*Eg berre hugsar den frå klassen*» byggjer opp under at det her blir brukt ein memorert metode, noko som blir tolka som ein strategi på nivå A. Imitativ metode er eit omgrep brukt av Lithner (2017) der elevar bruker memorerte metodar vist av lærar eller andre i eit klasserom. Slike memorerte prosedyrar er i følgje Lithner (2017) unødvendig for å løyse ei oppgåve. Bruk av memorerte prosedyrar kan sannsynligvis tyde på at eleven har det Skemp (1978) kallar instrumentell forståing ved at ein veit korleis, men ikkje kvifor ein prosedyre fungerer.

NIVÅ B – bruk av omveg

Aina forklarer sin framgangsmåte slik: «*Eg tenkte at eg måtte finne noko som eg kunne setje inn som x, så eg kan få liksom koordinatar i koordinatsystemet til å lage ein graf.*» Med dette kjem det fram i samtalen at Aina lager verditabell for å teikne grafane til dei ulike uttrykka. Det kjem også fram i samtalen at Aina kan forklare korleis ho teiknar grafen til $y = 2x$ og $y = -3x + 1$ utan å lage verditabell. Ho får difor spørsmål om kvifor ho bruker verditabell når ho skal teikne.

> « *Nei, men på ungdomsskulen hadde me ein lærar som sa at uansett når du skal, visst ikkje du forstår det eller berre skal teikne ein graf, så vil du, så er det lurast å lage ein verditabell uansett kva du gjer.*»





Figur 4.5 Henta frå Aina sitt svar på oppgåve 3. Aina har teikna verditabell for å kunne teikne grafen til dei ulike uttrykka.

Aina vel å teikne verditabell til tross for at ho kan forklare korleis teikne grafen ved bruk av stigningstal og konstantledd. I staden for å gå direkte frå uttrykk til graf, går Aina frå uttrykk til tabell og deretter til graf. Å teikne ein graf frå eit uttrykk vil vere det Kieran (1996) kallar ein generaliserande aktivitet. Ved å først gjere utrekningar er eleven også innom transformerande aktivitetar. Eleven arbeider med fleire aktivitetar og bruker det som Janvier (1978) kallar ein indirekte omsetjing, ein omveg. Det å gå omveg via verditabell er i følgje Janvier (1978) ein meir vanleg måte blant elevar enn det å teikne grafen direkte frå uttrykket.

Å bruke verditabell der ein reknar ut verdiar som ein plotter i eit koordinatsystem, kan føre til at ein mister det å sjå på grafen som heilhet. Samtidig vil denne prosedyren vere eit høgare nivå enn det å bruke ein imitativ metode, då det her blir forklart at verditabellen blir brukt til å plotte inn koordinatar i koordinatsystemet. Å gå vegen om tabell er ikkje nødvendigvis ein memorert prosedyre ein gjer utan å tenkje gjennom hensikta bak. Det å gå vegen om å rekne ut verdiar til tabell blir sett på som nivå B.

NIVÅ C – direkte omsetjing

For å teikne grafen til $y = 2x$ fortel tre ulike elevar følgjande

Kaia: «*Sidan det ikkje var noko konstantledd, så tenkte eg at den måtte gå gjennom null. Ehm, så steig den med to så då gjekk eg ein bort og to opp på eitt punkt*.»

Mia: *«Fordi at eg forstår når det står eit tal og så* x*, så er det stigningstalet. Så tok eg frå null sidan det ikkje er noko konstantledd, og så tok eg* $2x$ *som stigningstal.»*

Benjamin: *«Då tenkte eg at den måtte auke med 2 for kvar gong, og då tok eg ein bort og to opp... Fordi at det ikkje står noko om konstant, og då går den alltid gjennom origo.»*

Desse elevane bruker omgrep som konstantledd og konstant når dei skal forklare korleis dei teiknar grafen til $y = 2x$. Tilsvarande blir gjort for å teikne grafen til $y = 5$ og $y = -3x + 1$. Totalt fem av ni elevar som blei intervjua fortel at dei bruker konstantledd og stigningstal når dei skal teikne grafen til dei gitte uttrykka. Det at desse elevane vel å gå direkte frå uttrykk til graf er i følgje Janvier (1978) noko dei alle fleste elevar får til ved enklare tilfelle av uttrykk som lineære funksjonar. Det kan derimot bli meir utfordrande ved til dømes andregradsuttrykk.

Det at elevane bruker eit munnleg språk som *«ein bort og to opp»,* kan i følgje Kieran (1996) tyde på ei misoppfatning der elevane ser på stigningstal som ein forskjell mellom to storleikar og ikkje eit forhold. Eit munnleg språk kan vere mekanisk tilnærming der elevar har pugga ein algoritme. Sjølv om elevar på det høgaste nivået bruker omgrep som stigningstal og konstantledd, kan ein ikkje ut i frå desse data seie om dette er det Skemp (1978) kallar instrumentell forståing der elevane kjenner til matematiske omgrep, eller om det vil vere relasjonell forståing og dei verkeleg forstår matematikken bak. Det er i denne oppgåva tatt utgangspunkt i det at elevane kan grunngje sin strategi og forklare framgangsmåten. Dette kan tyde på at det er ein tanke bak strategien, utan at ein her kan seie noko om den matematiske forståinga bak det å teikne ein graf. Det at elevar bruker matematiske omgrep som konstantledd samt at dei teiknar grafen direkte frå eit uttrykk blir her sett på som nivå C, det høgaste nivået av løysingsstrategiar.

ANDRE DEL – uttrykk som ikkje er på den generelle forma $y = ax + b$

I andre del av analysen blir det sett på kva elevane gjer for å teikne grafen til $2x + y = 4$. Denne oppgåva blir sett på separat frå oppgåve a), b) og c) då uttrykket ikkje er oppgitt på den generelle forma $y = ax + b$.

NIVÅ A – imitativ metode

For å løyse denne oppgåva seier Silje: *«eg har gjort det til ein likning, der»* og peikar på testarket som viser ho har omgjort uttrykket $2x + y = 4$ til $y = -2x + 4$. Når Silje får spørsmål om kva ho meiner med å gjere om til likning svarar ho ting som: *«for at eg skulle forstå det betre»* og *«eg berre hugsa det frå timen».* Silje har teikna grafen til $y = -2x + 4$ rett.

Her har Silje brukt det Kieran (1996) kallar ein transformerande aktivitet ved å sjå på ekvivalente uttrykk der ho endrar på uttrykket til den generelle forma $y = ax + b$. Det å transformere uttrykk kan i følgje Boero (2001) tyde på at eleven planlegg kva ein vil gjere med det uttrykket ein endar opp med. Samtidig kan det at Silje seier «eg berre hugsa det frå timen» motseie at transformeringa er gjort med ein plan om å ende opp på uttrykt $y = -2x + 4$. Det kan derimot tyde meir mot bruk av det Lithner (2017) kallar for ein imitativ metode der ein memorerer prosedyrar, men ikkje nødvendigvis forstår kvifor metoden fungerer. Det å bruke ein imitativ metode utan å kunne grunngje svara sine blir i denne oppgåva sett på som nivå A.

NIVÅ C – teiknar grafen direkte

Aina forklarar kva ho har gjort på denne måten: *«me kunne berre gjere det om til ein vanleg likning, og få x åleine og y på éi side.»* Når ho får spørsmål om kvifor ho vil ha x åleine og y på ei side, endrar Aina svaret sitt til at x skal vere på ei side og y på den andre sida av likskapsteiknet utan å kunne utdjupe kvifor. Vidare vel Aina å bruke konstantledd og stigningstal for å teikne uttrykket til grafen. Dei elevane som har fått til å teikne uttrykket $2x + y = 4$, har alle gjort om på uttrykket i oppgåva til eit nytt uttrykk, $y = -2x + 4$. Dette for å gjere om til noko ein kjenner frå før, noko som i følgje Janvier (1978) kan forenkle prosessen ved å teikne graf til eit uttrykk der ein lettare kan kjenne igjen konstantledd og stigningstal frå uttrykk.

Samlege av dei som har teikna rett graf til uttrykket $2x + y = 4$ har endra på uttrykket til den generelle forma $y = ax + b$. Ved å endre på ekvivalente uttrykk, arbeidar elevane med det Kieran (1996) kallar transformerande aktivitet, noko som gjer at ein forenklar prosessen for å kunne teikne ein graf til det gitte uttrykket (Boero, 2001; Janvier, 1978; Kieran, 1996). For å kunne teikne graf til eit gitt uttrykk er det seks av ni elevar som etter å ha transformert uttrykket, vel å teikne grafen direkte ved hjelp av konstantledd og stigningstal. Sjølv om det i følge Janvier (1978) vil i større grad vere vanleg å bruke ein omveg der ein teiknar graf ved hjelp av verditabell, vil det å bruke konstantledd og stigningstal likevel vere noko mange elevar får til. Både strategiar brukt på nivå A og nivå C har først transformert uttrykket for så å bruke uttrykket direkte til å teikne grafen. Det som skil desse elevane, er at elevar med strategiar på nivå C vil kunne grunngje val av sine strategi, noko som er ein av tre krav Lithner (2017) har for at resonneringa eleven gjer skal kallast kreativ matematisk resonnering og som vil vere ei motsetning til imitativ resonnering.

4.4 Omsetje frå situasjon til graf

Det å omsetje frå situasjon til graf handlar om å kunne generalisere der ein graf vil kunne vise ein større samanheng (Mason mfl., 2005). Å teikne ein graf frå ein situasjon kan ein gjere direkte, eller ved omvegar som å første lage eit uttrykk og eventuelt ein tabell før ein teiknar grafen.

Oppgåve 6

På eit treningssenter kostar det 100 kr i fast avgift. I tillegg må ein betale 20 kr per gong ein trener.

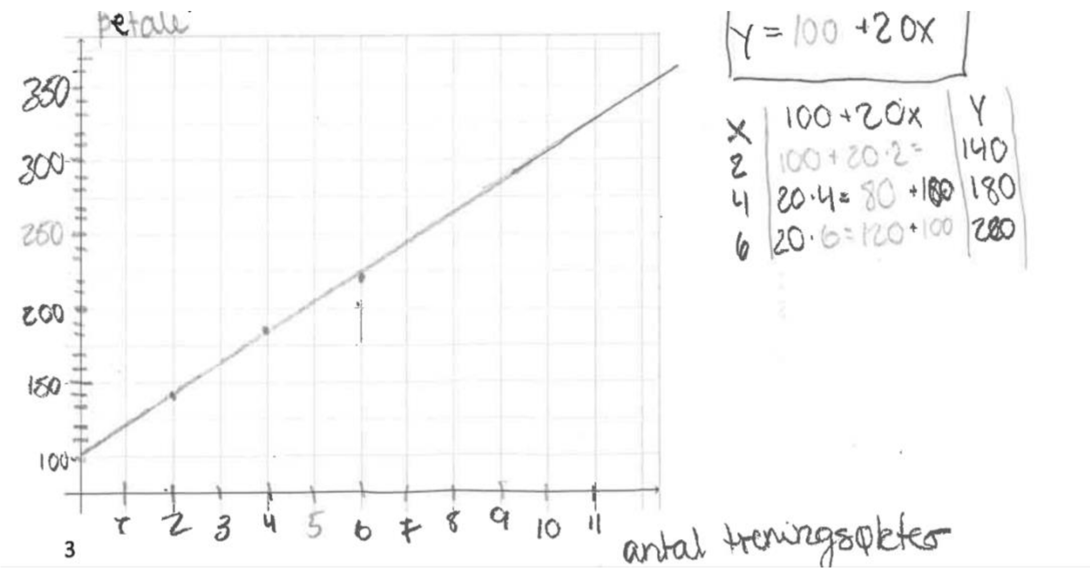
Bruk koordinatsystemet til å teikne opp samanhengen mellom tal på treningsøkter og kostnad for å trene. Skriv namn på aksane.

Etter eigen erfaring bruker elevar tid på å teikne eit koordinatsystem og treng ofte hjelp til å finne ut kor stort koordinatsystemet skal vere. Då hensikta er å undersøkje om elevane kan teikne ein graf vil det å gje elevane eit ferdig koordinatsystem kunne bidra til at fleire svarar på oppgåva. Ein del av oppgåva er at elevane sjølv må skrive namn på aksane. Heile oppgåva finn ein som vedlegg 8.3.

NIVÅ A – bruk av omveg (uttrykk og verditabell)

I samtale med Aina forklarar ho: «*Eg laga eit uttrykk for det, og så sett eg opp ein verditabell og så teikna eg grafen.*» I samtalen får Aina spørsmål om ho kan forklare kva uttrykket betyr.

> «*Det betyr at du må betale 100 kroner uansett, og at ho må betale 20 kroner for kvar gong og sidan me ikkje veit kor mange gongar ho går, så er det x som er den ukjente. Og så har eg laga eit koordinatsystem, så visst ho trenar fem gonger kan du enkelt finne ut kor mykje det kjem til å koste.*»



Figur 4.6 Henta frå Aina sitt svar på oppgåve 6. Aina har laga uttrykk frå teksten for deretter lage verditabell. For å teikne grafen bruker ho verdiane frå tabellen. .

Aina har ikkje gått direkte frå ein situasjon til graf men brukt omveg. Frå situasjon til uttrykk, frå uttrykk til tabell og frå tabell til graf. Det å lage eit uttrykk frå ein situasjon er noko som mange elevar vil få til i enkle samanhengar. Samtidig er det vanleg for elevar å bruke omvegar for å omsetje mellom ulike representasjonar (Janvier, 1978). Det å skrive opp eit uttrykk frå ein situasjon handlar om å generalisere, og generaliseringa som er brukt i denne oppgåva blir kategorisert som det Radford (2010) kallar symbolsk generalisering. Dette fordi eleven bevisst bruker symbol i uttrykket utan å forklare ved hjelp av eit munnleg språk. Det munnlege som kjem fram under intervjuet er for å kunne forklare kva som er tenkt. Sjølv om eleven bruker det Radford (2010) ser på som det høgast nivået innan algebraisk generalisering, vil situasjonen vere det Udir (udatert) kallar ein «enkel praktisk situasjon»

Det å omsetje frå situasjon til graf krev at elevane kan generalisere (Mason mfl., 2005), og det å generalisere kan vere ein krevjande prosess (Wilkie, 2016). Å lage eit uttrykk ut i frå ein situasjon krev òg at eleven kan generalisere, men det å lage graf direkte kan krevje ein høgare grad av abstrakte tankar (Janvier, 1978). Å lage eit uttrykk er det Kieran (1996) kallar ein generaliserande aktivitet og når ein reknar ut verdiar for uttrykket går ein over til ein transformerande aktivitet. Vidare blir verdiane plotta i eit koordinatsystem, noko som dei fleste elevar ifølgje Janvier (1978) får til ved enkle tilfelle(Janvier, 1978)(Janvier, 1978). Elevar vil dermed generalisere ved å lage uttrykk, men går bort frå det meir abstrakte ved å unngå å teikne graf direkte. Det å lage både uttrykk og verditabell kan tyde på at ein vil ha eit større behov for å kontrollere ved hjelp av uttrekningar, enn dersom ein teiknar grafen direkte. Det å bruke omvegar der ein skriv opp eit uttrykk, òg har behov for utrekningar, blir i denne oppgåva sett på som eit nivå A.

NIVÅ B –bruk av omveg (uttrykk)

Mia forklarar si løysning på denne måten: «*Då har eg gått på det konstantleddet der som er 100 kroner, og så aukar den med 20 kroner per gong. Fordi det kostar jo 20 kroner kvar gong ho trener.»*

Når Mia får spørsmål om ho har brukt uttrykket ho har skrive på oppgåvearket sitt; $20x + 100$, svarar ho: *«Ja, for då var det litt lettare å skjønne for meg sjølv.»*

Fem av ni elevar som har blitt intervjua, vel å lage uttrykk frå teksten for deretter å teikne grafen ved hjelp av uttrykket. Når desse elevane får spørsmål om dei kunne gått direkte frå teksten til å teikne graf utan skrive opp uttrykket, er det ei som seier at det er noko ho ikkje kunne fått til. Andre elevar seier:

> *«Ehm, du kunne vel eigentelg berre sett på tala i oppgåva og funnet ut man skulle ha kryssa den, men sidan det ikkje er noko tal så måtte du setje det opp sjølv, så. Man måtte, eg fann liksom ut kva uttrykket, ja, kva formelen var først for å vite kva tal eg skulle sette inn.»* (Silje)
>
> *«Eg veit ikkje. Eg kunne heilt sikkert ha gjort det, men eg ville vere heilt sikker på det så då berre hadde eg nok teikna opp uttykket uansett kva eg hadde gjort.»* (Benjamin)
>
> *«Det kunne eg òg, men eg hadde lyst å vere sikker. Men eg kan jo sjå 100 kroner fast avgift, okei då veit eg den går gjennom y og så 20 kroner per gong så då veit eg det aukar med 20 per gong. Så eg kunne og berre teikna ut i frå det.»* (Irmelin)

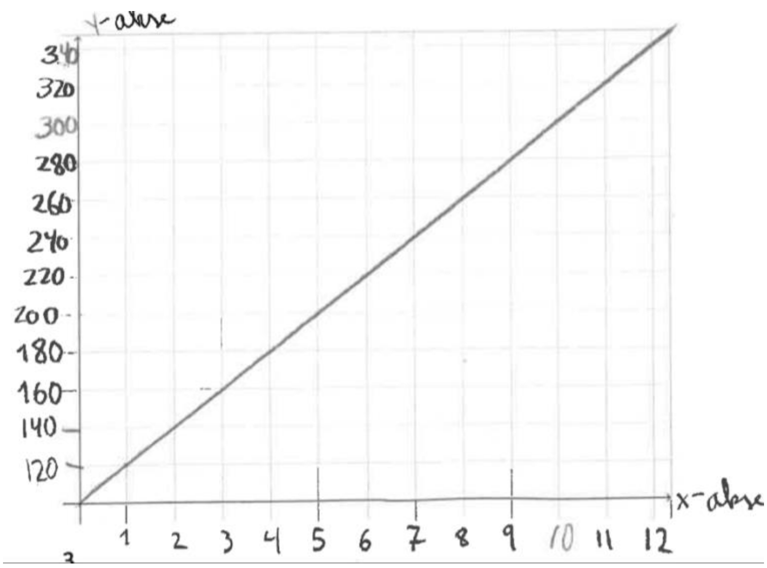
Fleirtalet av elevane vel å teikne graf ut frå gitt situasjon ved bruk av omvegar, der dei først vel å lage eit uttrykk ut i frå situasjonen. Ut i frå det elevane svarar her kan det sjå ut til at nokre kan teikne graf til gitt situasjon, men at elevane vel å lage uttrykket som ein form for sikkerhet. Her kunne det vore interessant å gje elevane ein ny situasjon og deretter be dei teikne opp grafen utan å lage uttrykk først. Dette for å sjå om elevane kan gå direkte frå situasjon til graf, eller om det å ha teikna grafen først ved hjelp av uttrykk gjer at dei kan forklare korleis ein kan teikne grafen direkte frå situasjon.

Som på nivå A blir det brukt omvegar for å teikne graf til ein situasjon. Strategiane som er presentert her har tatt i bruk færre omvegar ved å unngå verditabell. Både det å lage uttrykk og teikne ein graf er ulike måtar å sjå store samanhengar på (Mason mfl., 2005). Teikne ein graf og forme eit uttrykk vil begge vere ein form for generalisering (Wilkie, 2016). Sjølv om det i følgje Kieran (1996) er berre det å lage eit uttrykk som vil vere ein generaliserande aktivitet, vil det å teikne ein graf òg vere generalisering, men på eit global/meta-nivå. Å lage eit uttrykk frå ein situasjon kan sjåast på som steg c) i Blomhøj (2003) sin modelleringsmodell der ein presenterer objekt og relasjonar frå ein situasjon. Det å teikne ein graf frå eit uttrykk vil vere steg d) der ein er i gang med å analysere. I oppgåveteksten for den gitte situasjonen, skal det vere enkelt for elevar å hente ut relevant informasjon. Det at elevar vel å lage eit uttrykk, før dei teiknar grafen, blir her sett på som eit nivå B. Sjølv om det å lage uttrykk og teikne graf er generalisering, vil det å teikne graf direkte frå ein situasjon kunne krevje at ein i større grad kan tenkje abstrakt.

NIVÅ C – teikne graf direkte

I ein dialog med Malin forklarar ho si metode på denne måten:

> *«...og det er vel eigentleg på grunn av at det kostar uansett når du skal trene ein gong, så kostar det 120 kroner. For det du må betale 100 kroner i fast avgift, og så er det 20 kroner per gong du trener. Så då tenkte eg at første gongen då er det jo 120, og så blir det pluss 20 kvar gong du trener.»*



Figur 4.7 Henta frå Malin sitt svar på oppgåva 6. Malin har teikna grafen direkte frå situasjonen ved å hente ut nødvendig informasjon.

Malin har her teikna ein lineær graf der ho har brukt rett stigningstal, men startar i origo. For at grafen skal ha rett stigningstal tenkjer ho at y-verdien i origo startar på 100, for så auke med 20 kroner kvar gong ein trener. For å undersøkje om Malin sjølv ser endringar ein bør gjere for å teikne grafen meir rett, får ho spørsmål om kva som skjer dersom du ikkje trener i heile tatt. Malin svarar først at ein då må betale null kroner, men etter litt rettar ho seg sjølv om kjem fram til at ein då betalar 100 kroner. Malin nemner ikkje noko om at grafen ho har teikna startar i origo, eller at ho vil endre på det ho har gjort på testen.

Ut i frå det Malin fortel, ser ho kva stigningstalet vil bli ut i frå situasjonen og etter ein samtale endrar ho på kva prisen ved start vil vere i gitt situasjon. Malin nemner ikkje bruk av aksane i samtalen, og endrar heller ikkje på korleis grafen vil sjå ut etter ho har forstått at ein må betale 100 kroner sjølv om ein ikkje trener. Dette, i tillegg til at Malin skriv «x-akse» og «y-akse» på sin graf, viser til figur 4.7, kan tyde på at aksane ikkje blir brukt bevisst.

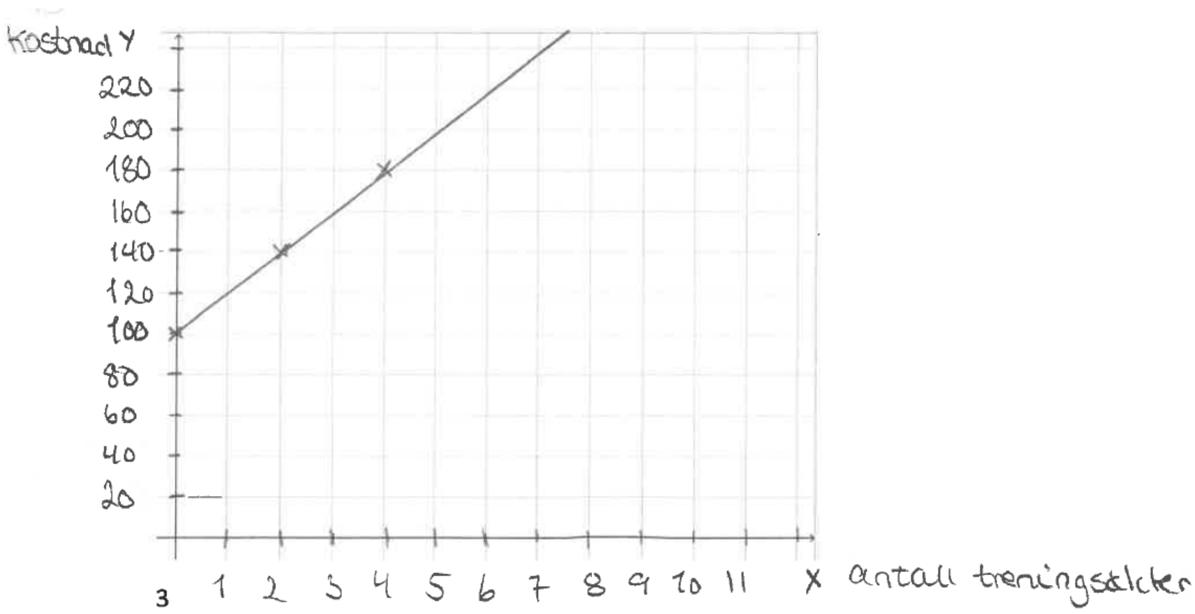
Det at Malin bruker ein strategi med at ein må legge til 20 kroner for kvar gong ein trener, kan tyde på at ho bruker ein generalisering som Radford (2010) kallar aritmetisk. Ved aritmetisk generalisering blir det ofte brukt logisk resonnering der ein kan sjå samanhengar og vil resonnere seg fram til korleis løyse ein situasjon (Stacey & MacGregor, 1999).

Ein annan elev, Andrea, forklarar løysninga si på denne måten:

> *«Eg har funnet ut at det er 100 kroner i fast avgift og då vil jo den vere det som er konstant. At du får 100 kroner, eller at det kostar 100 kroner liksom. Og så har eg, at det vil jo, at me må betale 20 kroner for per gong og då vil jo, så veit du jo ikkje kor mange gonger du trener, så då blir det 20 gonge, 20 gonge x.»*

Andrea får spørsmål om ho har laga eit uttrykk for å teikne grafen. Til det svarar ho: *«Nei, men det kunne eg sikker ha gjort.»* Vidare blir Andrea spurt om kva ho gjorde for å teikne grafen.

> *«Eg har jo tenkt at det var, eg har jo tatt 100 kroner som konstantledd, og så har eg då, eg skulle jo finne samanhengen mellom det at liksom når eg har hatt, ja... ja, så har eg tatt 100 så har eg plussa på 20 ekstra kvar gong.»*



Figur 4.8 Henta frå Andrea sitt svar på oppgåva 6. Andrea har teikna graf direkte frå gitt situasjon. I koordinatsystemet er det også skrive namn på aksane.

Andrea startar her med å finne ut kva ein må betale uansett eller om ein trener eller ikkje, og identifiserer dette som konstantleddet. Deretter finn ho ut i frå teksten kva av dei to tala som vil vere avhengig av tal på treningsøkter. På denne måten identifiserer ho stigningstalet. Å forklare det generelle her ved at ein ikkje veit kor mange gonger ein skal trene og difor må ta 20 gonge x, kan tyde på at generaliseringa vil vere det Radford (2010) ser på som kontekstbasert eller symbolsk. Dette fordi det blir brukt symbol for å uttrykke det generelle. Dette skil seg frå Malin der det ut i frå samtalen blir tolka som bruk av aritmetisk generalisering.

Når det gjeld generaliseringa desse to elevane har gjort, kan ein plassere dei under ulike nivå. Ved å legge til 20 for kva treningsøkt kan dette tyde på aritmetisk generalisering, medan bruk av $20x$ kan tyde på algebraisk generalisering. Samtidig har begge brukt situasjonen direkte for å teikn graf. Det å teikne ein graf direkte frå ein situasjon krev større grad av å abstrahere enn det å lage uttrykk og rekne ut verdiar. Ved å teikne graf direkte frå situasjon må eleven sjå den store samanhengen i situasjonen og kunne teikne denne (Mason mfl., 2005) og strategiane her blir begge plassert under nivå C.

Som ein del av oppgåva blir elevane bedt om å skrive namn på aksane. Dette for å undersøkje om elevane bruker den praktiske situasjonen når dei løyser oppgåva. Også for å undersøkje om dei bruker aksane bevisst. Av ni elevar er det sju som namngjer aksane som x og y, slik som elev har gjort i figur 4.7. Av desse sju elevane, er det fem elevar som teiknar grafen rett. To av ni elevar namngjer aksane slik at dei passar til den praktiske situasjonen gitt i oppgåva. Ingen av elevane som blir intervjua grunngjer val av aksane, eller bruker desse bevisst når dei forklarar kva dei har gjort.

4.5 Omsetje frå graf til situasjon

Å omsetje frå graf til situasjon handlar om å kunne konkretisere, det som Niss (2015) kallar for de-matematisering. Ved å bruke ein graf til å tolke ein situasjon, kan ein til dømes analysere ein matematisk modell. I denne oppgåva får elevane oppgitt ein graf knytt til ein situasjon. Her skal dei både lese av og tolke grafen. Oppgåva er formulert slik at ein enten må lese eller tolke. Denne oppgåva skil seg frå resten av analysen ved at formulering av oppgåvene er med på å avgjere om ein skal lese av eller tolke. Samtidig er dette interessante funn ved at ein kan sjå kva ein gjer når ein *les av* samanlikna med å *tolke*.

I denne oppgåva er det ikkje vist grafen til ein funksjon, men eit diagram. Eit diagram vil kunne gje informasjon om korleis elevar beherskar eit koordinatsystem og om dei kan seie noko om samanhengen mellom tal på minutt med surfing og kostnad. Med utgangspunkt i koordinatsystemet fekk elevane følgjande spørsmål;

Kva for ein elev har surfa mest? ______________________

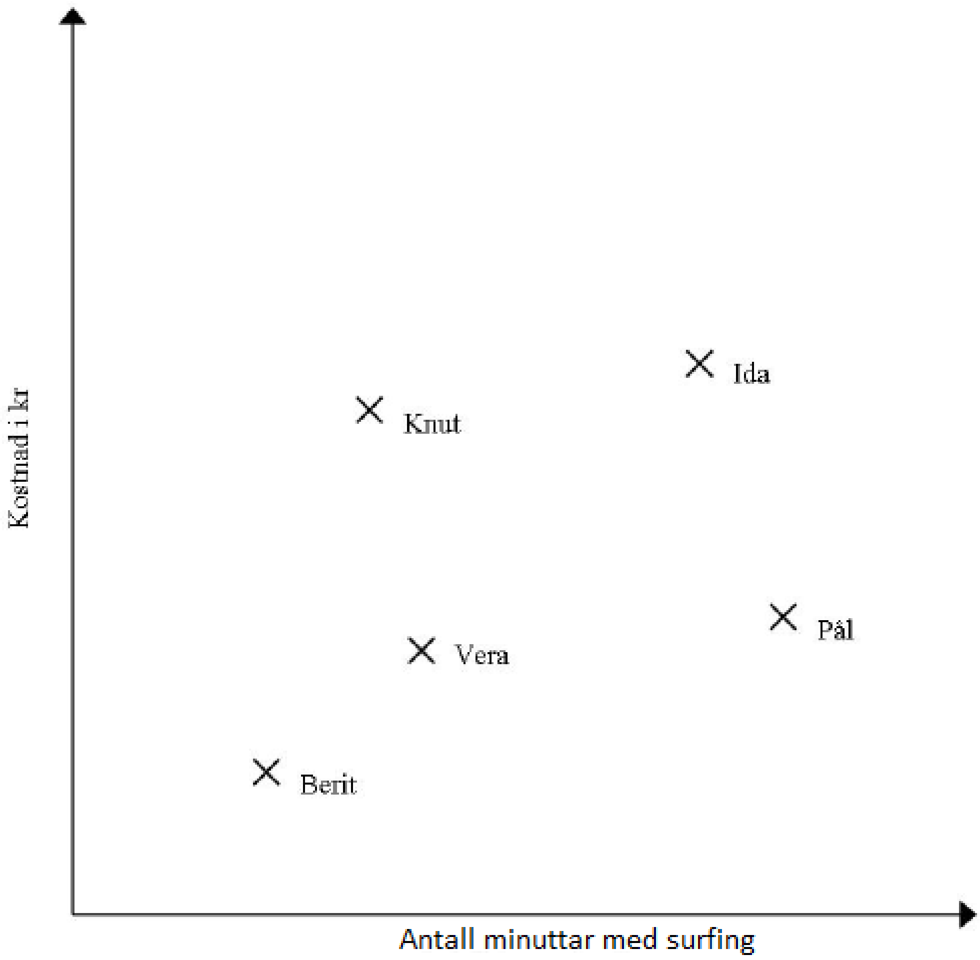
Kva for ein elev har den største kostnaden? _________________

*Kva for elevar betalar det same per minutt med surfing?*__________________

Kva for ein elev betaler mest per minutt med surfing? _________________

Oppgåve 8

Fem elevar har ulike mobilabonnement. Etter å ha brukt opp datapakken som høyrer med dei ulike abonnementa betalar dei ulike prisar for å surfe.



På spørsmåla *«Kva for ein elev har surfa mest?»* og *«Kva for ein elev har den største kostnaden?»* kan eleven lese av grafen. Dette så lenge eleven forstår omgrepet *«mest»* og *«størst»*. På spørsmåla *«Kva for elevar betaler det same per minutt med surfing?»* og *«Kva for ein elev betaler mest per minutt med surfing?»* må elevar tolke. Her må elevane forholda seg til begge aksane og fleire punkt i koordinatsystemet på ei og same tid.

NIVÅ A – lese graf (enkel)

Under ein samtale med Malin forklarar ho at Pål må vere den eleven som har surfa mest. *«Då tenkte eg mest på grunn av kostnadane... Ja, han har liksom. Nei, fordi han er lengst ute sjølvsagt.»* Malin får spørsmål om kva ho meiner med *«lengst ute»*. Til dette svarar ho: *«Han er lengst borte her.»* Malin forklarer vidare at Ida er den som vil betale mest fordi *«ho er lengst oppe.»*

Samlege av dei ni elevane som blir intervjua, svarar at Pål er den eleven som har surfa mest, og Ida er den som har hatt størst kostnad. Det kan sjå ut til at det å lese av grafen er noko elevane får til. Når Malin skal forklare kva ho har gjort, blir ordet kostnad nemnt, men blir ikkje brukt som ein del av grunngjevinga for svaret. Det at formuleringar *«lengst ute»* og «*lengst oppe»* her blir brukt, kan tyde på at eleven har bite seg merke i kva tyding aksane har, men at ho ikkje bruker dette for å argumentere svara sine. Samtidig vil eit munnleg språk, slik som her, i følgje Kieran (1996) tyde på at eleven ikkje ser på stigningstal som eit forhold mellom to storleikar, men ein forskjell. Det at elevar her kan lese av òg bruker eit munnleg språk blir sett på som nivå A.

NIVÅ B – lese graf (praktisk)

For å finne ut kven som har surfa mest svarar Benjamin: *«Då berre følgde eg koordinatsystemet og så ser eg at det for tal på minutt med surfing at då er det Pål som er lengst ute på aksen.»*

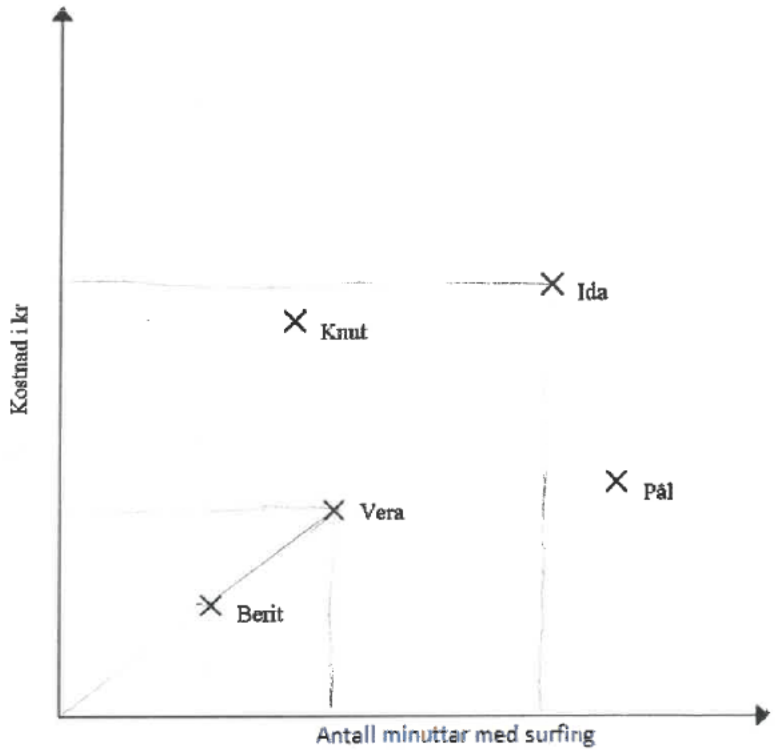
Benjamin brukar den informasjonen som er gitt, som namn på aksane, for å løyse oppgåva. Nivået på sjølve oppgåva vil kunne plasserast på nivå A, der det er nok å lese av verdiar på ein gitt graf. Likevel er det skilnad mellom det Benjamin og det Malin gjer. Benjamin forklarar også med å seie «lengst ute», men bruker samtidig omgrep som «koordinatsystem» og «akse» der det kjem tydeleg fram at namnet på aksen er noko han har sett på. Det er framleis ei oppgåve der det er nok å lese av, men ved bruk av eit meir matematisk språk vil dette vere nivå B.

NIVÅ C – tolke graf

For å finne ut kva elevar som betalar det same per minutt med surfing forklarer Silje at det må vere Vera og Berit, då *«det ser litt likt ut... Det ser ut som om ho er like langt på ein måte opp som bort.»* Silje får spørsmål om ho kan vise på grafen kva ho har tenkt. *«Å ta ein bein strek... Liksom sånn, frå null på ein måte og så beint bortover.»*

Ein anna elev, Irmelin, forklarar kvifor Berit og Vera må betale det same slik:

> *«Fordi at eg teikna opp dei strekane der først for å finne ut at det liksom var like mykje mellomrom. Så prøvde eg å finne ut om det gjekk ein strek gjennom begge to, og då antok eg at dei hadde det same stigningstalet, eller at dei auka med det same så dei vil betale det same.»*



Figur 4.9 Henta frå Irmelin sitt svar på oppgåve 8. Irmelin har teikna rette linjer mellom ulike punkter på grafen for å finne ut kven som må betale det same.

Både Silje og Irmelin ser på kven av elevane som vil ligge på ei rett linje gjennom origo. Det som er ulikt mellom Silje og Irmelin, er måten dei formulerer seg på. Det kan virke som om Silje har ei oppfatning om kvifor Berit og Vera må betale det same, og grunngjer dette med å teikne ei rett linje gjennom origo og dei to punkta som representerer Vera og Berit. Silje bruker få matematiske omgrep og forklarar tenkjemåten ved å bruke eit meir munnleg språk som «like langt borte» og «like langt oppe». Irmelin bruker matematiske omgrep som stigningstal, og verkar litt meir bevisst på at det vil ha ei tyding for kven som skal betale det same. Bruk av matematiske omgrep er noko av det som er med på å skilje elevar på ulike nivå i følgje Udir. Samtidig går oppgåva ut på å tolke ein graf, noko som gjer at ein må sjå store samanhengar (Mason mfl., 2005) og som vil gjere at desse strategiane vil vere på eit nivå C.

Samlege elevar har svart at Knut er den som må betale mest per minutt med surfing. Som grunngjeving svarar elevane:

> *«Fordi han er så langt oppe på y-aksen og ikkje så langt på ein måte på x-aksen.»* (Silje)
>
> *«Ja, fordi han er liksom lengst bak med minutt med surfing og lengst oppe med kostnad i kroner.»* (Iselin)
>
> *«Fordi han er høgast oppe, eller han er ikkje høgast på kostnaden, men i forhold til kor langt ute på x-aksen han er..»* (Irmelin)

Her brukar elevane ulik argumentasjon på kvifor dei meiner *Knut* er den som må betale mest per minutt med surfing. Silje bruker aksane for å grunngje svaret sitt, men bruker ikkje den praktiske tydinga under samtalen. Iselin er meir bevisst på bruk av aksane når ho skal grunngje *Knut* som den som må betale mest per minutt med surfing. Av dei som bli intervjua er Irmelin den einaste som bruker omgrepet «forhold» for å grunngje kven som må betale mest per minutt med surfing. Alle desse elevane bruker eit munnleg språk som «langt oppe», og er noko av det som kan skilje elevar på ulike nivå. Elevar på nivå C skal ha eit meir presist språk enn elevar på nivå B og nivå A. Samtidig krev oppgåva at ein ikkje berre kan lese av verdiar, men tolke ein graf noko det ikkje er forventa at elevar på nivå A og B skal kunne. Det at oppgåva krev at ein må tolke er det som gjer at det her blir sett på som nivå C.

4.6 Kommentar til oppgåvene

Etter å ha analysert transkripsjonane og arbeida med analysen er eg gjort merksam på nokre av oppgåvene og endringar som kan gjerast for å gjere studien betre.

For oppgåve om situasjon til uttrykk, delkapittel 4.1, kan deloppgåva a) ha påverka korleis ein løyser oppgåve b). Ved å be elevane teikne i første deloppgåve er det ein lett måte å fortsette med å teikne for neste deloppgåve også. På denne måten kan elevane ha blitt styrt ved val av metode.

For oppgåve om tabell til uttrykk, delkapittel 4.2, kan det tenkjast at tabellane kan vere for lette. Her kunne det ha vore interessant å hatt med ein tabell der det er større avstandar mellom x-verdi og y-verdi. Også oppgåver med brøk og desimaltal kunne vore interessant her. Dette då Janvier (1978) skriv i si avhandling om utfordringar med ein gong det er brøk og desimalatal involvert. Spesielt for å undersøkje om brukt strategi på nivå C også fungerer der.

For oppgåve om graf til situasjon, delkapittel 4.5, burde Knut og Ida, eller Vera og Pål, vore plassert slik at dei låg på ei horisontal linje. To av namna, til dømes Vera og Knut, burde vere plassert på ei loddrett linje for å undersøkje om nokre av elevane ville svart dette. Dette vil vore eit betre alternativ som ei diagnostisk oppgåve. Nokre av elevane svarte at Berit, Vera og Ida måtte betale det same. Det kan sjå ut som dei tre vil ligge på ei rett linje dersom utskrifta ikkje er god nok.

5 Diskusjon

I denne delen av oppgåva blir det sett på dei overordna funna frå analysen der kjenneteikn som går igjen for elevar på nivå A, B og C vil bli diskutert mot det teoretiske rammeverket. Det er her fokusert på kva kjenneteikn ein kan finne igjen for strategiar på ulike nivå, og ikkje kva enkeltelevar har gjort. Dette fordi det i denne studien er lagt vekt på ulike typar strategiar.

Tabell 5.1 viser ei oversikt der dei markerte rutene viser kva omsetjingar som er undersøkt i denne oppgåva. Markeringane er for direkte omsetjingar då bruk av omvegar vil føre til andre omsetjingar. Til dømes vil omsetjinga frå graf til situasjon handle om å tolke. Å omsetje frå situasjon til graf handlar om å skissere.

Tabell 5.1 Oversikt over direkte omsetjingar henta frå Janvier (1978) sin tabell. Dei gule felta viser kva omsetjingar som er undersøkt i denne studien.

Til Frå	Situasjon, verbal forklaring	Tabell	Graf	Uttrykk
Situasjon, verbal forklaring		Måle	Skissere	Modellere
Tabell	Tolke tabell		Plotte	Tilpasse
Graf	Tolke graf	Lese av		Tilpasse kurve
Uttrykk	Kjenne igjen (parametrar)	Rekne ut	Skissere	

Tabell 5.1 vil vidare bli brukt som eit samanlikningsgrunnlag for å vise kva omsetjingar som er undersøkt i denne studien opp mot dei omsetjingane elevar på nivå A, B og C faktisk har brukt.

5.1 Nivå A

Tabell 5.2 Omsetjingar som elevar med strategiar på nivå A bruker er markert med grøne felt. Gule felt er omsetjingar som er undersøkt i denne studien, men som ikkje blir brukt på nivå A.

Til Frå	Situasjon, verbal forklaring	Tabell	Graf	Uttrykk
Situasjon, verbal forklaring		Måle	Skissere	Modellere
Tabell	Tolke tabell		Plotte	Tilpasse
Graf	Tolke graf	Lese av		Tilpasse kurve
Uttrykk	Kjenne igjen (parametrar)	Rekne ut	Skissere	

Eit kjenneteikn ved strategiar på nivå A, er å ta i bruk omvegar. Ved å ta i bruk omvegar bruker ein fleire steg for å løyse ei oppgåve enn ved direkte omsetjing. I tillegg til fleire steg, unngår ein å bruke enkelte omsetjingar. Når elevar skulle omsetje frå situasjon til graf, gjorde dei det ved å først lage eit uttrykk for så å rekne ut verdiar og plotte grafen. Her unngår elevar å skissere ein graf frå situasjon, markert med gult i tabell 5.1. Ved å samanlikne tabell 5.1 og 5.2 kan me i tillegg sjå at denne strategien fører til fleire omsetjingar der ein går frå uttrykk til tabell og tabell til graf, markert med grønt i tabell 5.2. Både å omsetje til graf og uttrykk frå ein situasjon handlar om å generalisere, men å teikne graf direkte krev at ein i større grad kan tenke abstrakt (Janvier, 1978). Ved å bruke omvegar vil elevar unngå den mest krevjande generaliseringa.

Det er i tabell 5.2 markert at strategiar på nivå A ikkje brukar omsetjinga frå situasjon til uttrykk. Dette til tross for at ein av omvegane som blir brukt er å formulere eit uttrykk frå gitt situasjon. At elevar her formulere eit uttrykk ved bruk av symbol vil vere Radford (2010) sitt øvste generaliseringsnivå, symbolsk generalisering. I teorikapittelet er symbolsk generalisering sett på som ein strategi på nivå C. Dette fordi å generalisere krev at ein kan tenkje abstrakt, og at ein kan sjå større samanhengar. I oppgåva der elevane skulle omsetje frå situasjon til graf, er den gitte situasjonen det Udir (udatert) kallar ein *«enkel praktisk situasjon»* der elevar kan trekkje nødvendig informasjon direkte frå oppgåva. I denne situasjonen kan ein identifisere og kjenne igjen kva som vil vere stigningstal og konstantledd. Her vil det vere nok å kjenne til den generelle formelen $y = ax + b$ for eit lineært uttrykk og sette inn nødvendig informasjon. Å skrive opp ein formel der ein bruker kjent informasjon frå ei oppgåve kallar Stacey og MacGregor (1999) overflatisk algebraisk resonnering. At ein kan skrive opp den generelle formelen til ein lineære funksjon og trekkje ut tal direkte frå oppgåva, gjer at strategien vil vere på eit nivå A, til tross for bruk av symbolsk generalisering. Med dette kan ein seie at Radford (2010) sitt øvste generaliseringsnivå ikkje nødvendigvis treng å vere så vanskeleg. Dermed vil ikkje dei ulike generaliseringsnivå alltid vere like beskrivande for strategiar, og må sjåast ut i frå oppgåver som er gitt.

Eit anna kjenneteikn ved strategiar på nivå A er bruk av prøve- og feilemetode. Det er i denne studien sett på to strategiar der ein prøve- og feilemetode blir brukt. Den eine metoden er der elevar teiknar for å visualisere når dei skal finne eit gitt figurtal. Ved å bruke denne metoden kan ein prøve seg fram til ein figur som har eit mønster som passar dei førre figurane, og deretter telje seg fram til tal på element. Den andre metoden av prøve- og feilemetode er når elevar bruker svaralternativa gitt i ei oppgåve for å undersøkje kva som kan passe til oppgåveinformasjonen. I denne studien er det sett på elevar som bruker uttrykk gitt som svaralternativ, og reknar seg fram til kva uttrykk som kan passe oppgitt tabell. Det at elevar her vel å bruke svaralternativa i den rekkjefølga som gitt, kallar Stacey og MacGregor (1999) ein systematisk prøve- og feilmetode. Når elevar går vekk i frå omsetjinga frå tabell til uttrykk, og i staden bruker omsetjinga frå uttrykk til tabell, går dei også vekk frå å arbeide med det Kieran (1996) kallar generaliserande aktivitetar og arbeider i staden med transformerande aktivitetar. Å transformere er ein avgjerande prosess for å kunne handtere algebra på ein betre måte ved å forenkle problem (Boero, 2001). Samtidig kan transformerande aktivitetar i følgje Kieran (1996) sjåast på som ferdighetar der ein kan lære seg algoritmar for å til dømes løyse ei likning.

Det å bruke ein prøve- og feilemetode kallar Stacey og MacGregor (1999) for ikkje-algebraisk resonnering. Her vil ein ofte bruke rekning og ikkje algebra for å kome fram til svara. Dette ser me når elevar bruker uttrykka oppgitt som svaralternativ til å rekne seg fram til kva det rette svaret er. At elevar går vekk i frå bruk av algebra kjem også fram i denne studien ved at elevar bruker ei praktiskbasert løysingsstrategi. Med ein slik strategi vil ein teikne opp gitt figurtal og telje kor mange element det gitte figurtalet vil ha. Ei slik praktiskbasert løysingsstrategi kallar Radford (2010) for aritmetisk generalisering som vil vere hans lågaste generaliseringsnivå. Når elevar uttrykker det generelle utan bruk av symbol, arbeider dei ikkje lenger med det Kieran (1996) kallar generaliserande aktivitetar men med generalisering på eit global/meta-nivå. I Blomhøj (2003) sin modelleringsmodell, handlar steg c) om å presentere objekt og relasjonar frå eit matematisk system på ein samanhengande måte. Ved å bruke aritmetisk generalisering, der ein reknar set fram eit steg om gongen, kan ein bli hindra i å arbeide med steg c) i modelleringsprosessen ved at ein ikkje vil kunne uttrykke dei generelle objekta. At strategiar på nivå A ikkje inneheld omsetjinga frå situasjon til uttrykk, er markert i tabell 5.2.

Eit tredje kjenneteikn på strategiar ved nivå A, er bruk av *imitativ tilnærming* som handlar om å leite etter reglar for å løyse ei oppgåve. Dette kan vere memorerte prosedyrar eller kjente formlar, noko som Lithner (2017) kallar for ein imitativ metode. Bruk av memorerte prosedyrar kan ein i denne studien sjå der elevar teiknar ein graf frå eit gitt uttrykk. Strategien som blir brukt her er å gå ein eining bort på x-aksen og så mange opp/ned som stigningstalet viser. Å bruke eit munnleg språk, «*så mange opp*» eller «*så mange ned»,* kan i følgje Kieran (1996) tyde på ei mekanisk tilnærming som å pugge ein algoritme. Dette munnlege språket kjem også fram når elevar skal gå frå ein graf til ein situasjon der elevar leser av ein graf. Ved å lese av er ein opptatt av enkeltverdiar og kan seie noko om kva verdiar som er *«høgast oppe»* eller *«lengst borte».* Å bruke omvegar er ein annan måte å bruke ei imitativ tilnærming ved at elevar leiter etter kjente prosedyrar for bestemte omsetjingar. I den norske skulen er det vanleg at elevar blir introdusert for graf ved å lære å plotte verdiar i eit koordinatsystem. Deretter skal dei rekne ut verdiar frå eit uttrykk og plotte desse i eit koordinatsystem. For lineære funksjonar vil dei etter dette lære å bruke stigningstal og konstantledd. På denne måten blir det å teikne graf frå eit uttrykk eller tabell også ein naturleg måte å tilnærma seg ei oppgåve på, då dei har i større grad arbeida med dette samanlikna med å teikne graf frå situasjon.

Med dette kan ein sjå på tre kjenneteikn for strategiar på nivå A. Eit kjenneteikn vil vere å bruke omvegar der ein bruker fleire steg for å omsetje mellom funksjonsrepresentasjonar. På denne måten vil ein unngå enkelte omsetjingar. Det andre kjenneteiknet er bruk av ein systematisk prøve- og feilemetode der ein prøver seg fram med alternativ i den rekkjefølga dei er oppgitt, utan å vurdere kva som kan passe. Det tredje kjenneteiknet for nivå A vil vere imitativ tilnærming der ein leitar etter reglar og prosedyrar som kan passe den gitte oppgåva. På denne måten vil ein leite etter omsetjingar ein er vane med å bruke.

5.2 Nivå B

Tabell 5.3 Omsetjingar som elevar med strategiar på nivå B bruker er markert med grøne felt. Gule felt er omsetjingar som er undersøkt i denne studien, men som ikkje blir brukt på nivå B.

Til Frå	Situasjon, verbal forklaring	Tabell	Graf	Uttrykk
Situasjon, verbal forklaring		Måle	Skissere	Modellere
Tabell	Tolke tabell		Plotte	Tilpasse
Graf	Tolke graf	Lese av		Tilpasse kurve
Uttrykk	Kjenne igjen (parametrar)	Rekne ut	Skissere	

Eit kjenneteikn ved strategiar på nivå B er å bruke omvegar, slik det også er ved strategiar på nivå A. Her bruker ein fleire steg for å løyse ei oppgåve, i tillegg at ein unngår enkelte omsetjingar. Det er likevel skilnader. Når nokre elevar skulle teikne grafen til eit uttrykk, gjorde dei det ved å først rekne ut verdiar for punkt på grafen og bruke desse punkta til å plotte grafen. Ved å sjå på tabell 5.1 er det å omsetje frå tabell til ein graf ikkje undersøkt i denne studien. At strategiar på nivå B likevel har brukt omsetjinga frå tabell til graf, viser til at dei bruker omvegar og dermed fleire steg enn ved direkte omsetjing. Når elevar med ein strategi på nivå B skulle omsetje frå situasjon til graf, laga dei først eit uttrykk frå situasjonen og teiknar deretter grafen frå uttrykket. På denne måten unngår ein å omsetje frå situasjon til graf, markert som gul i tabell 5.3. Denne omvegen der ein lagar eit symbolsk uttrykk frå ein enkel praktisk situasjon, kan me kjenne igjen som ein strategi på nivå A. På denne måten kan dei gjere ein kjent omsetjing som å teikne graf frå eit uttrykk, ei omsetjing som elevar har arbeida meir med å enn å teikne graf frå ein situasjon. Det som skil desse strategiane er at nivå B vel å teikne grafen direkte frå uttrykket i staden gå vegen om verditabell. Strategiar på nivå B vil dermed unngå å bruke det Kieran (1996) kallar for transformerande aktivitetar som ein måte å kontrollere det ein gjer, og i staden halde seg innanfor det Wilkie (2016) kallar generalisering ved å gjere omsetjingar som inneber å bruke uttrykk og graf. Å bruke omvegar er eit fellestrekk for strategiar på nivå A og B, der strategiar på nivå B vil bruke færre omvegar og dermed færre steg for å løyse ei oppgåve.

Eit anna kjenneteikn for strategiar på nivå B, er å vere det Cuoco mfl. (1996) kallar *mønstersniffarar*. Ved å vere mønstersniffarar leitar elevar aktivt etter system for å finne snarvegar og mønster som gjer utrekningar meir effektive (Cuoco mfl., 1996). Når elevar i denne studien skulle omsetje frå situasjon til uttrykk, der dei skulle finne dei generelle objekta for eit figurtal, kunne dei bruke eit munnleg språk og utrekningar for å finne tal på element for eit gitt figurtal. Her har elevar brukt det Radford (2010) kallar for faktabasert generalisering, det lågaste nivået for algebraisk generalisering. I motsetning til aritmetisk generalisering vil ein her bruke algebra, men utan symbol. Å arbeide med faktabasert generalisering ser Radford (2010) på som eit godt grunnlag for vidare arbeid med generalisering der elevar etter kvart kan kome opp på eit symbolsk generaliseringsnivå. At elevar med strategiar på nivå B leitar etter mønster kan ein også finne igjen i omsetjinga frå tabell til uttrykk. Til dømes har elevar utvida ein tabell for å finne eit mønster for kor mykje y-verdien aukar for kvar x-verdi. Dei kan då trekkje ut nødvendig informasjon og sette inn for det generelle uttrykket $y = ax + b$. Det å bruke ein kjent formel der ein kan hente informasjon frå oppgåva kallar Stacey og MacGregor (1999) for overflatisk algebraisk resonnering. Ved overflatisk resonnering vil elevar bruke same resonnement som aritmetisk resonnering. Når elevar vel å utvide tabell for å finne uttrykk kan dei her bruke aritmetikk for å enten rekne seg fram, eller prøve seg fram med verdiar som kan passe.

Eit tredje kjenneteikn for strategiar på nivå B er å vere hybrid mellom imitativ tilnærming og kreativ tilnærming. Ei imitativ tilnærming kjem fram ved bruk av omvegar der ein leitar etter kjente prosedyrar for å gjennomføre ein omsetjing. Samtidig leitar elevar med strategiar på nivå B etter mønster og system som har eit meir kreativt preg enn ved bruk av imitativ tilnærming. Lithner (2017) har tre krav for at matematisk resonnering skal kunne kallast kreativ; (1) nyskapande, (2) truverdig og (3) matematisk forankring. Strategiar på nivå B vil oppfylle krav (3) med å forankre argument i eit matematisk fundament. Med dette er det meint at det er ikkje nok å sjå det logikken, men også bruke matematikk til å omskrive den. Ei slik matematisk forankring blir brukt av strategiar på nivå B når ein leitar etter eit system ved å bruke faktabasert generalisering og kan rekne ut kor mange element eit gitt figurtal vil ha. I følgje Radford (2010) vil elevar på dette generaliseringsnivået arbeide med algebra. Sjølv om dei her arbeidar med algebra, vil strategiar på nivå B også bruke aritmetikk. Dette viser dei i utrekningar frå tabell til uttrykk. Det er vanleg for elevar å kunne setje opp ei likning, men i staden for å løyse likninga går dei bort i frå denne og løyser oppgåve ved hjelp av logisk aritmetisk resonnering eller ein prøve- og feilemetode (Stacey & MacGregor, 1999). På denne måten vil elevar bruke ei samansetting av både algebra og aritmetikk.

Ein vil med dette ha tre kjenneteikn for strategiar på nivå B, omvegar, mønstersniffarar og hybrid tilnærming. Det første kjenneteiknet, omvegar, er eit kjenneteikn ein også kan finn hos strategiar på nivå A. For strategiar på nivå B vil det bli brukt færre omvegar, og dermed færre steg for å løyse ei oppgåve. Det andre kjenneteiknet ved strategiar på nivå B er å leite etter eit system og mønster. Denne strategien gjer at ein arbeidar mot å sjå større samanhengar, noko som kjem fram som faktabasert generalisering. Eit tredje kjenneteikn er at elevar bruker ei hybrid tilnærming. Her blir det brukt både ei imitativ tilnærming, men også meir kreativitet ved at ein leiter etter mønster.

5.3 Nivå C

Eit kjenneteikn ved strategiar på nivå C, er å bruke direkte omsetjing. Ved å bruke direkte omsetjingar vil ein bruke så få steg som mogleg for å løyse ei oppgåve, og ikkje ha eit behov for enkelte omsetjingar slik som strategiar på nivå A og B. Når enkelte elevar skulle omsetje frå situasjon til graf, teikna dei grafen direkte frå den gitte situasjonen. I følgje Wilkie (2016) må ein i generalisering ved bruk av graf kunne tenkje meir abstrakt samanlikna med generalisering ved bruk av symbol. Det å omsetje direkte frå situasjon til graf vil difor vere meir krevjande enn å bruke eit uttrykk som omveg. Dette fordi ein skal beskrive ein samanheng mellom to parametrar (Janvier, 1978; Mason mfl., 2005).

Eit anna kjenneteikn for strategiar på nivå C er å tolke. Å tolke er i denne samanhengen sett på som omsetjingar der ein går frå tabell til situasjon og frå graf til situasjon, viser til tabell 5.1. Det å tolke ein graf skil seg frå det å lese av, der å lese av betyr å finne enkeltverdiar. For å lese av ein graf er det nok å forholda seg til ein av aksane om gongen. Ved å tolke krev det at ein må sjå større samanhengar (Janvier, 1978), som å seie noko om kvar ein graf aukar mest. I analysen, delkapittel 4.5, skal elevar tolke ved at dei må forholda seg til begge aksane samtidig. Ved å sjå på tabell 5.2 og 5.3 kjem det fram at å tolke er noko berre strategiar på nivå C har gjort. Å tolke, saman med det å vurdere svaret sitt, vil i Blomhøj (2003) sin modelleringsmodell handle om steg e) der ein skal vurdere og tolke resultat frå ein matematisk modell, og steg f) der ein skal tolke modellen opp mot dei empiriske data. Ved å tolke og vurdere vil elevar med strategiar på nivå C difor ha ei evne til kritisk tenking.

Eit tredje kjenneteikn ved strategiar på nivå C er kreativitet. For Lithner sine tre krav til kreativ matematisk tenking; (1) nyskapande og fleksibel, (2) truverdig og (3) matematisk forankring, kan ein finne igjen element av dette for strategiar på nivå C. Ved å vere kreativ vil ein finne eigne vegar der ein bruker metodar på ein hensiktsmessig måte. Det at elevar bruker ei direkte omsetjing er eit teikn på kreativitet ved at ein bruker lærte metodar og ser desse i nye samanhengar. Med dette vil strategiar på nivå C oppfylle delar av kravet, (1) nyskapande og fleksibel, ved at ein kan tilpasse tilnærmingar til bestemte oppgåver utan å vere for knytt til ein bestemt strategi. For å oppfylle krav (1) fullstendig, må ein i følgje Lithner (2017) lage ei resonnering som ikkje er gjort før ved å vere nyskapande. At strategiar på nivå C bruker metodar tilpassa oppgåver, kan tyde på at dei har funnet eit mønster som kan effektivisere utrekningar. Strategiar på nivå C er med dette, som på nivå B, det Cuoco mfl. (1996) vil bruke mønstersniffing. Når elevar skulle omsetje frå tabell til uttrykk, har dei her gjort nødvendige utrekningar for å finne stigningstal. Med denne strategien er ein klar over at tabellen viser eit system og gjer nødvendige utrekningar for å finne dette systemet. Ikkje berre vil elevar leite etter mønster for å vere meir effektive, dei kan også presentere mønsteret dei finn ved bruk av symbol. Når elevar skulle omsetje frå situasjon til uttrykk, finn dei først eit symbolsk uttrykk og bruker dette til å rekne seg fram til kor mange element eit gitt figurtal må ha. Ved å bruke symbolsk uttrykk brukar elevar det Radford (2010) ser på som det øvste nivået innan generalisering. I intervjua vart det presentert fleire uttrykk, der alle blei argumentert for. Ein slik argumentasjon vil oppfylle kravet (2) truverdig. Det å bruke eit matematiske objekt for å argumentere gjer at strategiar på nivå C vil oppfylle punkt (3) for Lithner (2017) sin kreativ matematisk resonnering.

For strategiar på nivå C vil ein finne kjenneteikn som å bruke ei direkte omsetjing, å tolke og kreative tilnærmingar. Ved å bruke direkte omsetjing vil elevar bruke så få steg som mogleg. I tillegg vil dei kunne gjennomføre omsetjinga frå situasjon til uttrykk. Eit anna kjenneteikn for strategiar på nivå C er å tolke. Å tolke krev at ein kan sjå større samanhengar i motsetning til å lese av. Eit tredje kjenneteikn for strategiar på nivå C er ein kreativitet der ein i større grad vil gjere eigne vurderingar. Ved å vere kreativ kan ein finne eit system som gjer utrekningar enklare og meir effektive.

5.4 Oppsummering

I tabell 5.5 er det skrive ei oppsummering over dei ulike kjenneteikna for nivå A, B og C.

Tabell 5.4 Oversikt over kjenneteikn for strategiar på nivå A, B og C.

Nivå A (imitativ)	Nivå B (hybrid)	Nivå C (kreativ)
Omvegar	Omvegar (færre steg)	Direkte
Prøve- og feil (aritmetisk)	Mønstersniffar (algebra og aritmetikk, faktabasert)	Mønstersniffar (algebra, symbolsk)
Lese av (enkelt språk)	Lese av (praktisk)	Tolke
Imitativ	Hybrid (imitativ og kreativ)	Kreativ

Noko som skil dei ulike strategiane er i kor stor grad det blir brukt omvegar eller direkte omsetjing. For nivå A er eit kjenneteikn at det blir brukt omvegar, noko som tyder på ei imitativ tilnærming ved å bruke kjente prosedyrar. Å bruke omvegar er også eit kjenneteikn for strategiar på nivå B, men då med færre steg enn på nivå A. Strategiar på nivå C inneheld direkte omsetjingar i den grad det kan gjerast, og på denne måten bruke så få steg som mogleg.

Ei anna skilnad mellom strategiane er bruk av algebra. Strategiar på nivå A bruker ein prøve- og feilemetode som er prega av aritmetikk. Også strategiar på nivå B kan ta i bruk aritmetikk men også algebra. Bruk av algebra kjem fram ved faktabasert generalisering der ein bruker strategiar som går ut på å søke etter mønster. På nivå C vil det også bli brukt strategiar som går ut på å søke etter mønster, men der desse mønstera blir presentert ved bruk av symbol.

Kjenneteiknet å tolke finn ein berre for strategiar på nivå C. Med dette blir det brukt strategiar der ein vurderer den informasjonen som er gitt. For å tolke ein graf må ein bruke aksane og på denne måten bruke strategiar som gjer at ein kan sjå større samanhengar. Å tolke kan også handle om å vurdere svara sine. Strategiar på nivå A vil bruke strategiar som å lese av grafar ved bruk av eit enkelt munnleg språk. Også strategiar på nivå B vil bruke strategiar som å lese av, men bruke eit meir matematisk språk enn strategiar på nivå A.

Strategiar på nivå A vil bruke ei imitativ tilnærming ved å kjenne igjen prosedyrar frå tilsvarande oppgåver. Strategiar på nivå B vil også bruke ei imitativ tilnærming ved å både bruke kjente prosedyrar, men også ha meir kreative trekk kreativ som mønstersniffar. På denne måten kan strategiar på nivå B vere ein hybrid mellom nivå A og C. Kreative tilnærmingar finn ein hos strategiar på nivå C ved at ein bruker prosedyrar ein har lært til å velje effektive strategiar, samt forankre strategiar i matematisk argumentasjon.

Det er i denne studien sett på strategiar og kva som vil vere kjenneteikn for strategiar på ulike nivå. Ein elev vil for ulike oppgåver kunne bruke strategiar på ulike nivå. Samtidig vil det for kvar enkelt oppgåve som krev ei bestemt omsetjing, vere mogleg å seie noko om nivået på strategi som blir brukt. At ein og same elev kan bruke strategiar på ulike nivå, kjem fram i analysen, men som ikkje har vore eit fokus i denne oppgåva.

6 Konklusjon

I denne oppgåva er det undersøkt kva strategiar elevar brukar for å omsetje mellom Janvier (1978) sine fire måtar å representere ein lineær funksjon; situasjon, tabell, graf og uttrykk. For å undersøkje dette er det gjennomført ein diagnostisk test på elevar på vidaregåande skule i matematikkfaget 1P. Oppgåvene frå testen handla om å omsetje mellom ulike representasjonar, som er eit av kompetansemåla i faget 1P. Diagnostiske oppgåver gjer eit innblikk i kva løysingsstrategiar elevar vel å bruke. Ut i frå denne testen er det deretter intervjua ni elevar som grunngjer sine val av strategiar.

I arbeidet med analysen er det funnet ei rekke strategiar som er brukt for å omsetje mellom ulike representasjonar av lineære funksjonar. Som kjenneteikn for desse strategiane er det sett på bruk av omvegar, å omsetje direkte, at ein prøver seg fram, leser av, tolkar, bruker imitative tilnærmingar og kreativitet. Desse kjenneteikna frå analysen er brukt for å utvikle nivå på strategiar. Å bruke eigne data for å utvikle nivå kallar Fauskanger & Mosvold (2015) for konvensjonell innhaldsanalyse. Nivå som er beskrive i teorien er eit utgangspunkt i Udir, PISA og TIMSS som ser på kva elevar skal kunne på eit lågt, middels og høgt nivå. Desse nivå er konkretisert til mitt datamateriale, der tidlegare forsking er knytt mot nivåa utvikla frå analysen i denne studien. Ved å bruke nivåinndelinga til Udir, PISA og TIMSS er det også brukt teoridrevet innhaldsanalyse.

Kjenneteikn for strategiar på nivå A er å bruke omvegar. Her unngår ein enkelte omsetjingar, samtidig som ein bruker fleire steg for å løyse ei oppgåve. Eit anna kjenneteikn er å bruke ein prøve- og feilemetode og med dette bruke aritmetikk og ikkje algebra. Strategiar på nivå A blir kalla ei imitativ tilnærming fordi ein her leiter etter kjente prosedyrar og formlar, noko som kjem fram ved bruk av omvegar og aritmetikk. For strategiar på nivå B vil ein også finne bruk av omvegar, men med færre steg enn nivå A. Strategiar på nivå B blir kalla ei hybrid tilnærming. Dette fordi bruk av omvegar, som strategiar på nivå A, kan tyde på ei imitativ tilnærming. Samtidig har dei kreative tilnærmingar som mønstersniffarar der ein søkjer etter system. For strategiar på nivå B kan det å leite etter mønster bere preg av aritmetikk, men også algebra der generelle objekt blir presentert ved eit munnleg språk. Kjenneteikn for strategiar på nivå

C er, i motsetning til strategiar på nivå A og B, å bruke direkte omsetjingar. Strategiar vil også her leite etter mønster, men i større grad enn strategiar på nivå B, kunne sjå dei store samanhengane. Desse samanhengane kan også presenterast ved bruk av symbol og difor oppfylle fleire av Lithner (2017) sine krav til kreativ matematisk tenking.

Som lærar er det lettare å utvikle elevar sine strategiar dersom ein har eit innblikk i korleis elevar tenkjer. Denne studien har gitt eit slikt innblikk, der strategiane er kategorisert etter nivå. Det at ein lærar har eit verktøy med kjenneteikn for strategiar på ulike nivå, gjer at det kan vere lettare å sette inn tiltak som kan hjelpe elevar vidare.

6.1 Vidare arbeid

Det er i denne studien laga eit system for å kjenne igjen elevane sine strategiar og vite kva strategiar som vil vere på eit høgare nivå. Med nye læreplanar, der eit større fokus vil vere på strategiar og argumentasjon, er det behov for eit slikt verktøy som kan vere til hjelp for lærarar i eit klasserom. Både under planlegging av timar, men også under samtaler og rettleiing i undervisninga. Ved å bruke resultata frå denne studien kan ein raskt kjenne igjen kva nivå strategiane til elevar vil vere for ulike oppgåver, noko som er ein fordel for å vite korleis ein skal hjelpe elevar vidare. Som ei vidare studie kunne det vore interessant å ha eit tilsvarande verktøy der strategiar er kategorisert etter nivå med kjenneteikn for andre emne også. Ikkje berre i matematikkfaget 1P, men også i andre matematikkfag.

Det er i denne studien undersøkt kva strategiar elevar bruker, og ikkje nødvendigvis kva elevar kan. For enkelte oppgåver i testen, kan elevar ha brukt svaralternativa for å prøve seg fram til det rette svaret. Ein prøve- og feilemetode er sett på som ein strategi på nivå A, men det kan vere at eleven vel å løyse oppgåva på ei anna måte dersom oppgåva er formulert annleis. Ein strategi på nivå A er sett på som ei imitativ tilnærming, noko som i det teoretiske rammeverket er knytt mot det Skemp (1978) kallar instrumentell forståing. Kan val av strategiar for meir opne oppgåver, der strategiar er mindre styrt, seie noko om elevar si matematiske forståing?

Dette er noko som fanga mi interesse under analysen, men som eg med mi datainnsamling ikkje har grunnlag for å seie noko om.

Det å bruke ein test med diagnostiske oppgåver har gjort at elevar har svart på alle oppgåvene, og på denne måten kan ein få eit innblikk i løysingsstrategiar og eventuelle misoppfatningar elevar har. Samtidig kan svaralternativ leie elevar mot svara, eller gjere at dei løyser oppgåver på ein måte dei trur er forventa. Eit alternativ kan vere å gje elevar opne oppgåver og undersøkje kva strategiar som blir brukt her. Ei erfaring eg sjølv har med dette, er at elevar som bruker strategiar på nivå A ofte har vanskar med å løyse enkelte oppgåver der dei ikkje har eit svar som dei kan bruke som utgangspunkt. Ein må då finne ut om det er oppgåveformuleringa, eller det matematiske fundamentet som stoppar dei. Det kunne også vore eit alternativ å observere elevar i eit klasserom der dei løyser oppgåver. Ved å analysere samtalar i klasserommet kan ein finne fleire døme på strategiar på ulike nivå. På denne måten vil ein kunne finne fleire dømer som kan underbyggje kjenneteikn for dei ulike nivå.

7 Referansar

Adu-Gyamfi, K., & Bossé, M. J. (2014). Processes and Reasoning in Representations of Linear Functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(1), 167–192. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9416-x

Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering. *Notodden: Telemarksforskning*.

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag. Resultater og analyser fra TIMMS 2015.* Universitetsforlaget.

Blomhøj, M. (2003). Modellering som undervisningsform. I O. Skovsmose & M. Blomhøj (Red.), *Kunne det tænkes? - Om matematikklæring.* (s. 80–109). København: L&R Uddanelse.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, *22*(3), 123–139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Red.), *Perspectives on school algebra* (s. 99–119). Springer Netherlands.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Utdanningsdirektoratet.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7th utg.). New York: Routledge.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. *Educational Research* (Bd. 4). https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 375–402. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17462.x

Engh, R. (2011). *Vurdering for læring i skolen. På vei mot en bærekraftig vurderingskultur*. Høyskoleforlaget.

Fauskanger, J., & Mosvold, R. (2015). En metodisk studie av innholdsanalyse – med analyser av matematikklæreres undervisningskunnskap som eksempel. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(2), 79–96.

Fusch, P. I., & Ness, L. R. (2015). Are we there yet? Data saturation in qualitative research. *The qualitative report*, *20*(9), 1408–1416.

Guest, G., Bunce, A., & Johnson, L. (2006). How many interviews ar enough? An experiment wtih data saturation and variability. *Fields methods*, *18*(1), 59–82.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics. I *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 328). https://doi.org/10.4324/9780203063538

Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research*, *15*(9), 1277–1288. https://doi.org/10.1177/1049732305276687

Janvier, C. (1978). *The Interpretation of Complex Cartesian Graphs Representing Situations - Studies and Teaching Experiments*. University of Nottingham.

Kazemi, E., & Hintz, A. (2014). *Intentional Talk. how to structure and lead productive mathematical discussions.* Stenhouse Publishers.

Kieran, C. (1996). LEARNING AND TEACHING ALGEBRA AT THE MIDDLE SCHOOL THROUGH COLLAGE LEVELS Building Meaning for Symbols and Their Manipulation, 707–762.

Kieran, C. (2004a). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kieran, C. (2004b). The core of algebra: Reflections on its main activities. I *The future of the teaching and learning of algebra the 12 th ICMI study* (s. 21–33). Springer.

Kilpatrick, J. (2001). The strands of mathematical proficiency. I *Adding it up: Helping children learn mathematics* (s. 115–155). Washington DC: National Acqdemies Press. https://doi.org/10.17226/9822

Kjærnsli, M., & Jensen, F. (2016). *Stø kurs. Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015*. Universitetsforlaget.

Klette, K., Bergem, O. K., & Roe, A. (2016). *Teaching and learning in lower secondary schools in the era of PISA and TIMSS*. *Teaching and Learning in Lower Secondary Schools in the Era of PISA and TIMSS*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17302-3

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*. Gyldendal Akademisk.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM - Mathematics Education*, *49*(6), 937–949. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0867-3

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). Developing Thinking in Algebra. *Sage Publications Inc.*, (1), 309 – 314.

Niss, M. (2015). Prescriptive Modelling - Challenges and Opportunities. I *Mathematical Modelling in Education Research and Practice Cultural, Social and Cognitive Influences.* (s. 67–80). Springer.

Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. *http://www.matematikksenteret.no/content/4879/Sentrale-kjennetegn-pa-god-laring-og-undervisning-i-matematikk*, 15.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* New York: John Wiley & sons, Inc.

Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective*. *PME-NA 2006 Proceedings* (Bd. 1). Henta frå http://www.luisradford.ca/pub/60_pmena06.pdf

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *Pna*, *4*(2), 37–62. Henta frå http://digibug.ugr.es/handle/10481/3505

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257–277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Rønningstad, K. (2009). *Misoppfatninger rundt funksjonsbegrepet - en undersøkelse blant elever i videregående skole.* Universitetet i Oslo.

Rowley, J. (2012). Conducting research interviews. *Management Research Review*, *35*(3/4), 260–271.

Schoenfeld, A. H. (1993). Teaching mathematical thinking and problem solving. I *Sånn, ja! Rapport fra en konferanseom matematikk-didaktikk og kvinne ri matematiske fag.* (s. 67–89). Oslo: Norges forskingsråd.

Selvik, B. K., Johnsen-Høines, M., & Rinvold, R. A. (2007). *Matematiske sammenhenger: Algrebra og funksjonslære*. Bergen: Caspar forlag.

Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2013). *Skolen som læringsarena. Selvoppfatning, motivasjon og læring*. Universitetsforlaget.

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9–15. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149–167. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00026-7

Utanningsdirektoratet. (2012). Læringsstøttende prøver: ressurshefte.

Utdanningsdirektoratet. (udatert). Utkast til veiledende nasjonale kjennetegn på måloppnåelse i fellesfag i matematikk (1P og 1T) i videregående opplaering. Henta 28. august 2018, frå https://www.udir.no/globalassets/upload/vurdering/5/utkast_til_nasjonale_kjennetegn_med_forklaring_i_matematikk_fellesfag_vg1.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag, 15. https://doi.org/papers3://publication/uuid/4D162CAB-5725-4B13-81F0-B76F009E0503

Utdanningsdirektoratet. (2018a). Hva er fagfornyelsen? Henta 9. november 2018, frå https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/hva-er-fornyelse-av-fagene/

Utdanningsdirektoratet. (2018b). Matematikk fellesfag. Henta 9. november 2018, frå https://hoering.udir.no/Hoering/v2/286?notatId=573

Valenta, A. (2015). Tallforståelse. Henta 9. september 2018, frå https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Valenta Tallforståelse.pdf

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 333–361. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9703-x

Woolfolk, A. (2004). *Pedagogisk psykologi*. Tapir Akademisk Forlag.

8 Vedlegg

8.1 Godkjenning frå NSD

Ove Gunnar Drageset

5008 BERGEN

Vår dato: 13.11.2017	Vår ref: 56600 / 3 / BGH	Deres dato:	Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 14.10.2017 for prosjektet:

56600	*Korleis forstår elevar i 1P lineære funksjonar*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Ove Gunnar Drageset*
Student	*Kine Renate Floen*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:
• opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
• vår prosjektvurdering, se side 2
• eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

8.2 Samtykkeskjema

Førespurnad om deltaking i forskingsprosjekt

"Lineære funksjonar i 1P"

Bakgrunn og formål

Formålet med studien er å undersøkje elevar si forståing av lineære funksjonar i 1P.
Dette er ei masteroppgåve ved det matematiske institutt, Universitetet i Bergen.

Utvalet er basert på undervisningsopplegg i eigen klasse.

Kva inneber deltaking i studien?

Undersøkinga starter med ein test om lineære funksjonar. Etter eit undervisningsopplegg på 5 x 90 minutt gjennomfører elevane ein sluttest. Elevane blir deretter intervjua basert på start- og sluttesten.

Spørsmåla vil omhandle grunngjeving av svar etter sluttesten, og om elevane kan grunngje ev. endringar i svara dei har gitt på dei to testane.

Intervjuet vil bli tatt opp på lyd og vil vare omlag i 30-60 minutt.

Kva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysningar vil bli behandla konfidensielt.

Masterstudent og rettleiar vil ha tilgang til lydopptak samt start- og sluttest.

Lydopptaka vil bli koda der koplingsnøkkel vil bli skilt frå data.

Deltakarane vil ikkje kunne gjenkjennast i publikasjonen.

Prosjektet skal etter planen avsluttast 20. november 2018.

Opptak , start- og sluttest vil ved prosjektslutt anonymiserast.

Frivillig deltaking
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke utan å grunngjeving. Dersom du trekker deg, vil alle opplysningar om deg bli anonymisert.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med

Prosjektansvarleg
Kine Renate Floen
Kine.renate.floen@hfk.no

Studien er meldt til Personvernombudet for forsking, NSD - Norsk senter for forskingsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

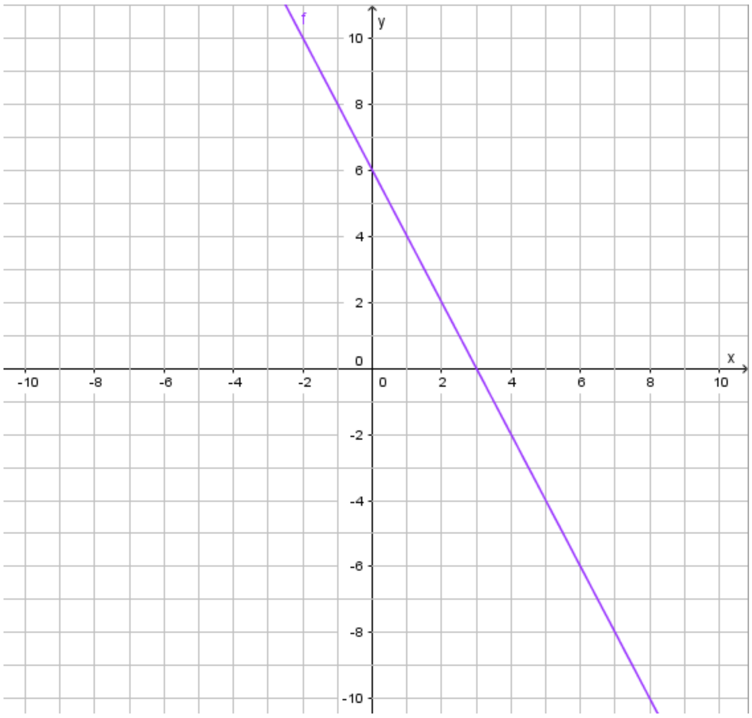
Jeg har mottatt informasjon om studien og godkjenner

- ☐ At mine tester kan brukes i studien
- ☐ Å bli intervjuet som kan brukes i studien

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

8.3 Testoppgåver

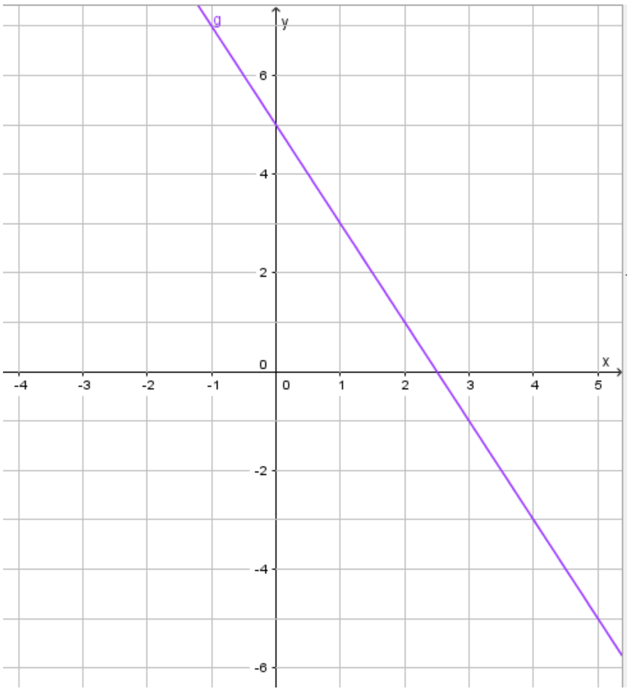
Oppgåve 1



Kva for eit funksjonsuttrykk passer til grafen? (Sett eitt kryss)

☐ $y = 3x + 6$ ☐ $y = -2x + 6$ ☐ $y = 6x + 3$ ☐ $y = 2x - 6$

Oppgåve 2



Kva vil vere stigningstalet a til denne grafen? (Sett eitt kryss)

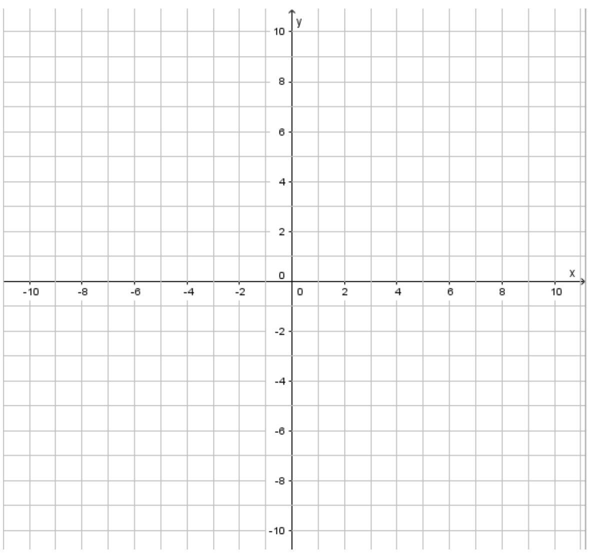
☐ $a = 2{,}5$ ☐ $a = 5$ ☐ $a = 2$ ☐ $a = -2$

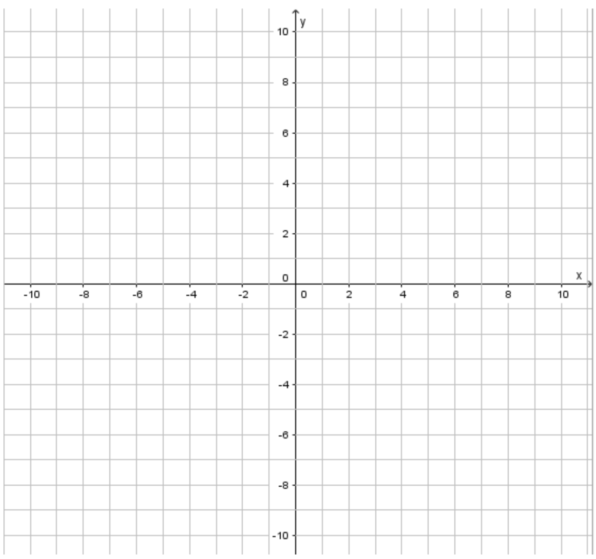
Oppgåve 3

Teikn grafen til kvart av funksjonsuttrykka nedanfor

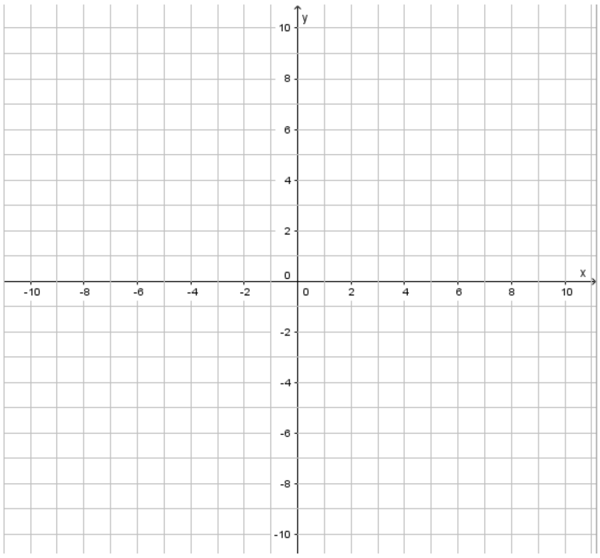
a) $y = -3x + 1$

b) $y = 5$

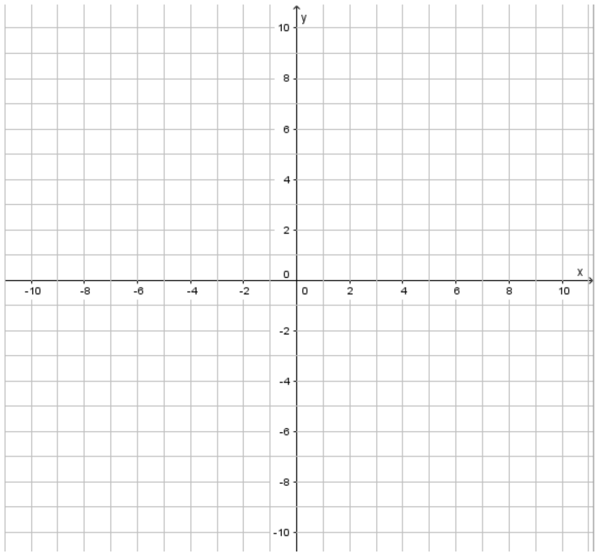




c) $y = 2x$



d) $2x + y = 4$



Oppgåve 4

Kva for funksjonsuttrykk passer til tabellen? (Sett eitt kryss)

x	0	1	3	4
y	-2	1	7	10

☐ $y = -2x$ ☐ $y = 3x - 2$ ☐ $y = 4x + 12$ ☐ $y = -2$

Oppgåve 5

Maria har 6000 kr som ho kan bruke i ferien. Ho reknar med å bruke 300 kr per dag. Finn eit funksjonsuttrykk for K kroner Maria har igjen etter x dagar.

Kva funksjonsuttrykk er korrekt? (Sett eitt kryss)

☐ $K(x) = 6300 + x$
☐ $K(x) = 6000 - 300x$
☐ $K(x) = 300x + 6000$
☐ $K(x) = 6000x - 300$

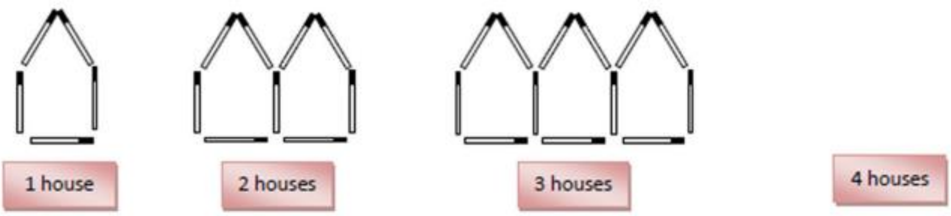
Oppgåve 6

På eit treningssenter kostar det 100 kr i fast avgift. I tillegg må ein betale 20 kr per gang en trener.

Bruk koordinatsystemet til å teikne opp samanhengen mellom tal på treningsøkter og kostnad for å trene.

Skriv namn på aksane.

Oppgåve 7



1) Teikn opp fire hus

2) Kor mange fyrstikker trenger du for 7 hus? Forklar eller vis korleis du kom fram til svaret.

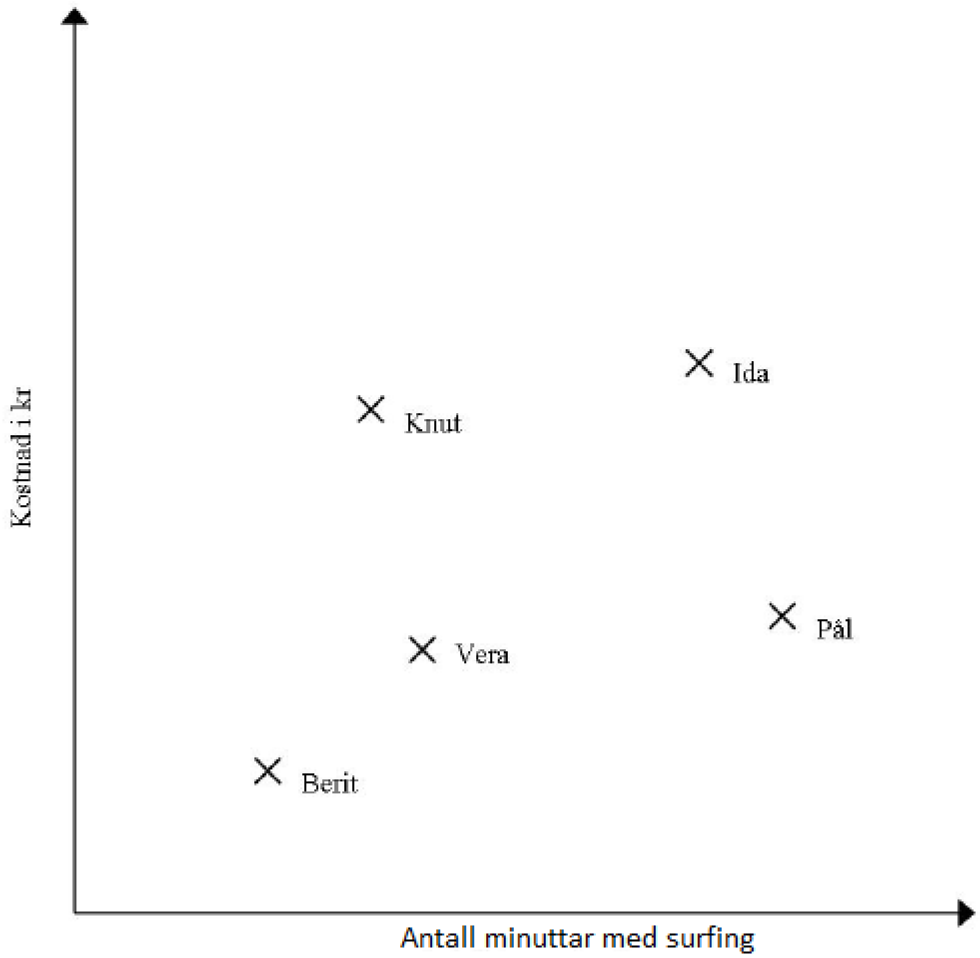
3) Kor mange fyrstikker trenger du for 17 hus? Forklar eller vis korleis du kom fram til svaret.

4) For eit kva som helst tal på hus, korleis kan du finne det totale tal på fyrstikker som trengst? Vis eller forklar korleis du kom fram til svaret.

5) Skriv ned svaret frå 4) ved hjelp av symbol.

Oppgåve 8

Fem elevar har ulike mobilabonnement. Etter å ha brukt opp datapakken som høyrer med dei ulike abonnementa betalar dei ulike prisar for å surfe.



Kva for ein elev har surfa mest? ______________________

Kva for ein elev har den største kostnaden? _________________

Kva for elevar betalar det same per minutt med surfing?__________________

Kva for ein elev betaler mest per minutt med surfing? _________________

Oppgåve 9

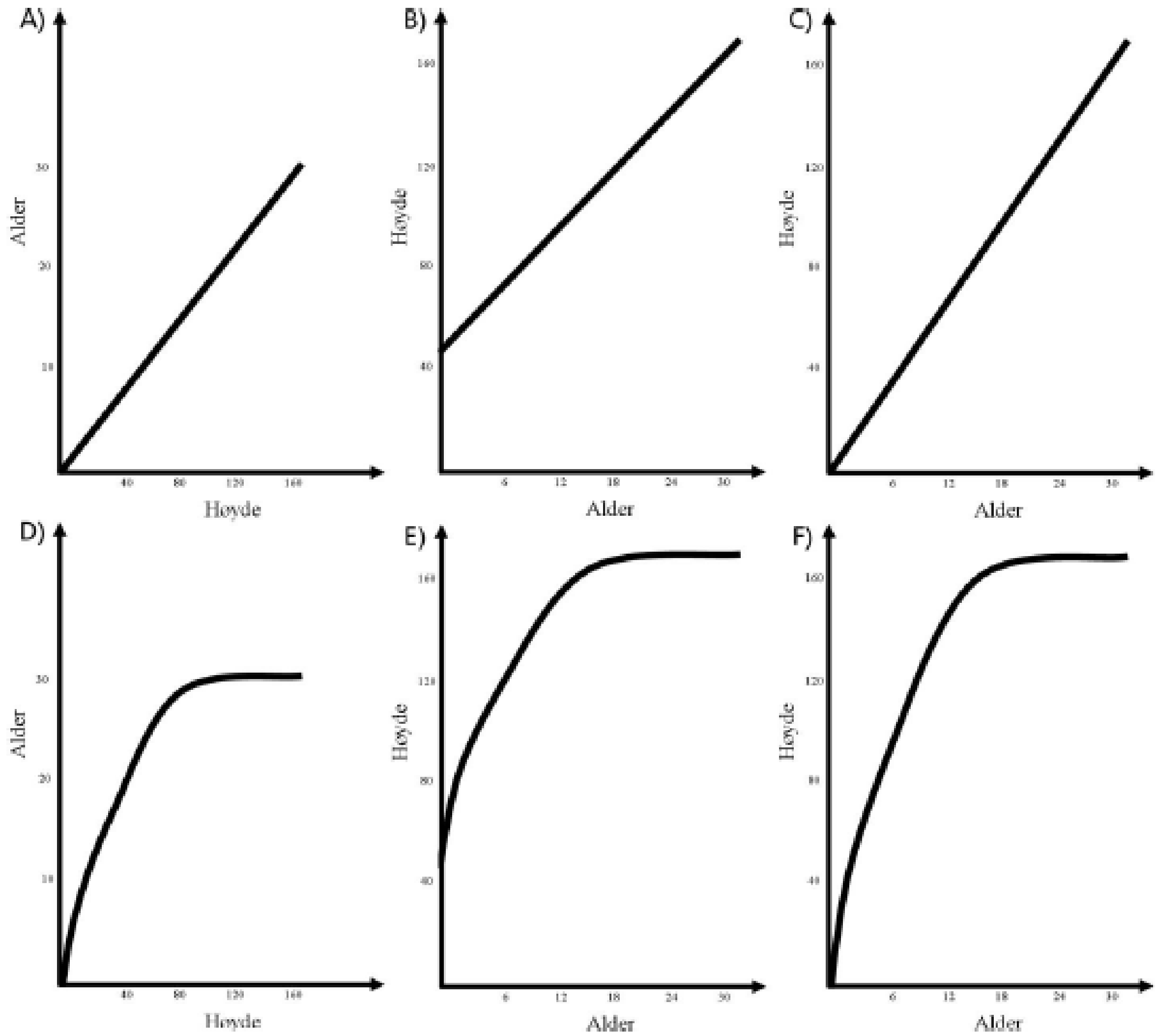
Tabellen viser en oversikt over kor mykje ei solsikke veks ein periode. Kor mange cm veks solsikka per veke i denne perioden?

Veke	2	4	8
Høgda i cm	9	13	21

- ☐ 12 cm
- ☐ 2 cm
- ☐ 4,5 cm
- ☐ 6 cm

Oppgåve 10

Kva for ein av grafane under meiner du best viser samanhengen mellom ein person si høgd og alder frå 0 til 30 år. Sett ring rundt det alternativet du meienar er rett.

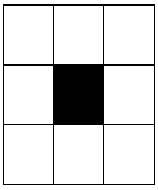


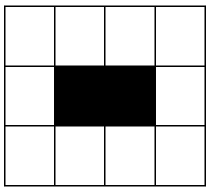
8.4 Undervisningsoppgåver

Økt 1: Generalisering (figurar) **onsdag 29/11**

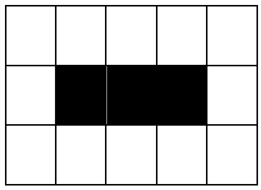
Informasjon	**Matematisk språk**
Seks meir enn x	
Seks mindre enn x	
Dobbelt så mykje som x	
Halvparten så mykje som x	

Oppgåve 1





1

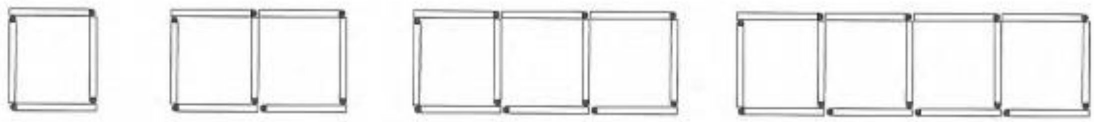


2

3

1) Teikn opp for figur nummer 4 og 5. Kor mage kvite ruter har figur 4? Figur 5?
2) Teikn og finn eit system som kan hjelpe deg å beskrive større figurar.
3) Beskriv ein metode for å finne tal på kvite ruter for figur 50, utan å teikne den.
4) Skriv ned ein regel som kan brukast for å bestemme tal på kvite ruter for kva som helst nummer på rad. Test ut om denne regelen stemmer.
5) Skriv ned ein formel som du kan bruke for å bestemme tal på kvite ruter for kva som helst nummer på rad. Test ut formelen.

Oppgåve 2



Figur 3: Mønster av fyrstikker

Antall kvadrater, K	1	2	3	4
Antall fyrstikker, F	4	7	10	13

Finn ein formel som du kan bruke for å finne tal på fyrstikker for kva som helst tal på kvadrat.

Oppgåve 3

1) Fargelegg ansikta rundt bordet for å vise kva du legg merke til ved bordplasseringa.
2) Forklar det du ser med ord.
3) Fyll inn tabellen som vise kva som skjer dersom ein legg til fleire bord

Tal på bord	Tal på personar
3	14
5	
6	
10	

4) Vel tal på bord og finn ut kor mange personar som sitt rundt borda Dersom du doblar tal på bord du tok utgangspunkt i, blir då talet på personar dobla? Forklar svaret ditt.
5) Korleis kan du finne ut kor mange personar du får plass til dersom du har n tal bord? Forklar med ord og formel.

Økt 2: Generalisering (tekst)　　　　　　fredag 1/12

Oppgåve 1

I ei undersøking blant gutar i alderen 5 år til 16 år kunne man tilnærma finne høgda i cm ved å gonge alderen med 5,0 og legge til 90.

a) Kor høg vil ein 10 år gamal gut vere?
b) Kor høg vil ein 15 år gamal gut vere?
c) Korleis kan ein finne alderen til kva som helst gut mellom 5 år og 16 år. Forklar med ord.
d) Sett opp eit uttrykk der du kan finne høgda til ein gut mellom 5 år og 16 år.

Oppgåve 2

På ein bil er det 48 L med bensin. Kvar dag går det med 3 L bensin.

Sett opp eit uttrykk der du kan finne kor mykje bensin det er etter x dagar.

Oppgåve 3

Lena legger fliser på golvet i gangen. Mønsteret har dobbelt så mange kvite som svarte fliser.

a) Forklar til samarbeidspartneren din kva som er innhaldet i oppgåva. Bli einige om innhaldet.
b) Kva er ukjente storleikar i den situasjonen som er omskriven?
c) Kva symbol vel de å gje den ukjente storleiken?
d) Skriv eit symboluttrykk for denne situasjonen ved å bruke dei symbola de valte i c).
e) Lag ein teikning av golvet med dei kvite og svarte flisene.
f) Tel opp tal på kvite og svarte flisar på teikninga. Er dette det same de får når de sett tal inn i uttrykket i d)?

Oppgåve 4

Ein fabrikk lagar to forskjellige storleikar av poser med seigmenn. Dei har bestemt at det skal vere fire gonger så mange raude som gule seigmenn i alle posane.

a) Beskriv med eigne ord kva som er innhaldet i situasjonen ovanfor.
b) Kva er ukjente storleikar i denne situasjonen?
c) Kva symbol vel de å bruke for dei ukjente storleikane?
d) Oversett denne situasjonen frå ord til matematiske symbol.
e) Vel nokre verdiar som de brukar til å sjekke om det uttrykket de har sett opp, stemmer.

Oppgåve 6

Eit stafettløp er 3900 m.

Den andre etappen skal vere 300 m lengre enn den første etappen.

Den tredje etappen skal vere dobbelt så lang som den andre etappen.

Kor lang er etappane?

Økt 3: Oppgitt formel **tysdag 5/12**

Oppgåve 1

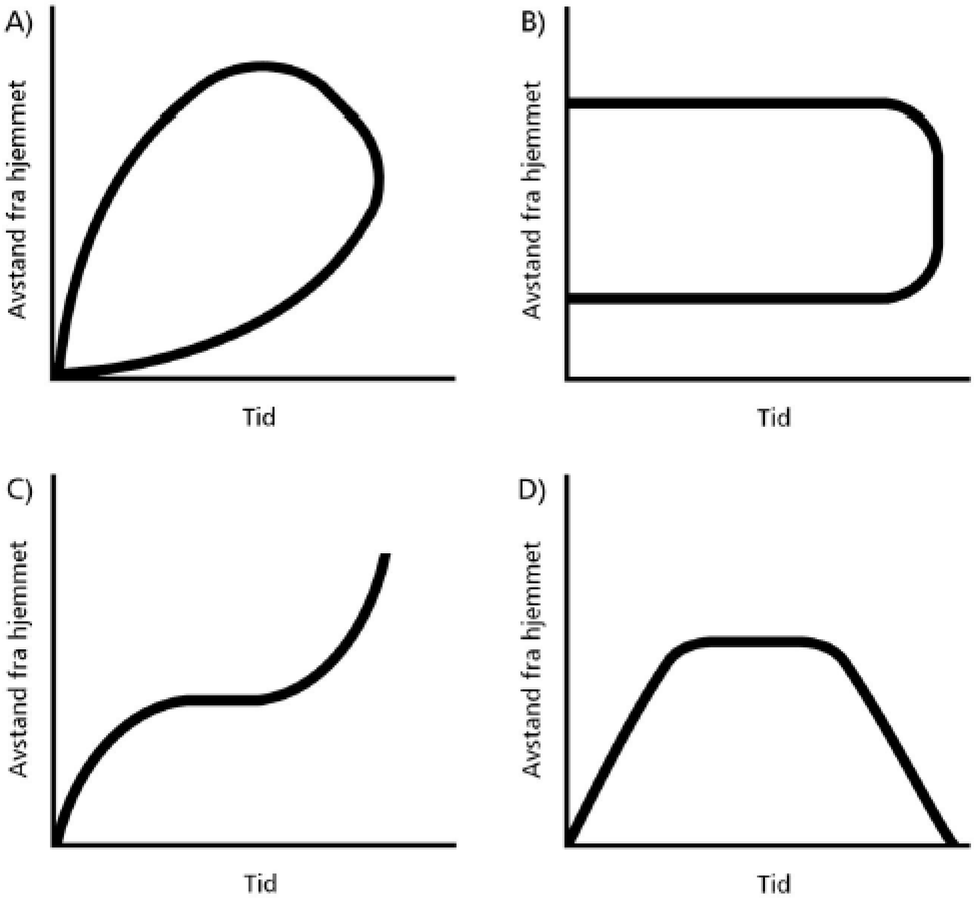
a) $y = 2x + 1$
b) $y = -4x + 3$
c) $y = 2x - 4$
d) $y = -1 - 4x$
e) $2y - 2 = -8x$
f) $y - x = -4$

1. Bruk verditabell og teikn a) – f) i eit koordinatsystem. Bruk ei heil side i boka di. Marker tydelig kva uttykk som høyrer til kvar linje
2. Samanlikn dei ulike uttrykka og grafane. Kan du sjå ein samanheng?
3. Forklar for partneren din kva du har funnet ut, og lytt til kva din partner har funnet ut.
4. Kom fram til ein felles forklaring.
   a. Bruk det du fann i punkt 4. til å teikne
      $y = 5x - 2$ $\quad y = -2x - 2$ $\quad y = 3 + 5x$

Økt 4: Oppgitt graf **fredag 8/12**

Oppgave 1

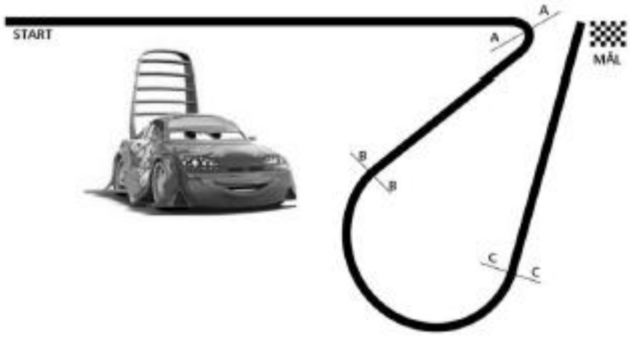
Hanne skal gå på postkontoret for å levere ein pakke. Ho går heime ifrå med jamn hastighet. På postkontoret må ho stå i kø før ho blir ekspedert. Deretter går ho heim med same hastighet.



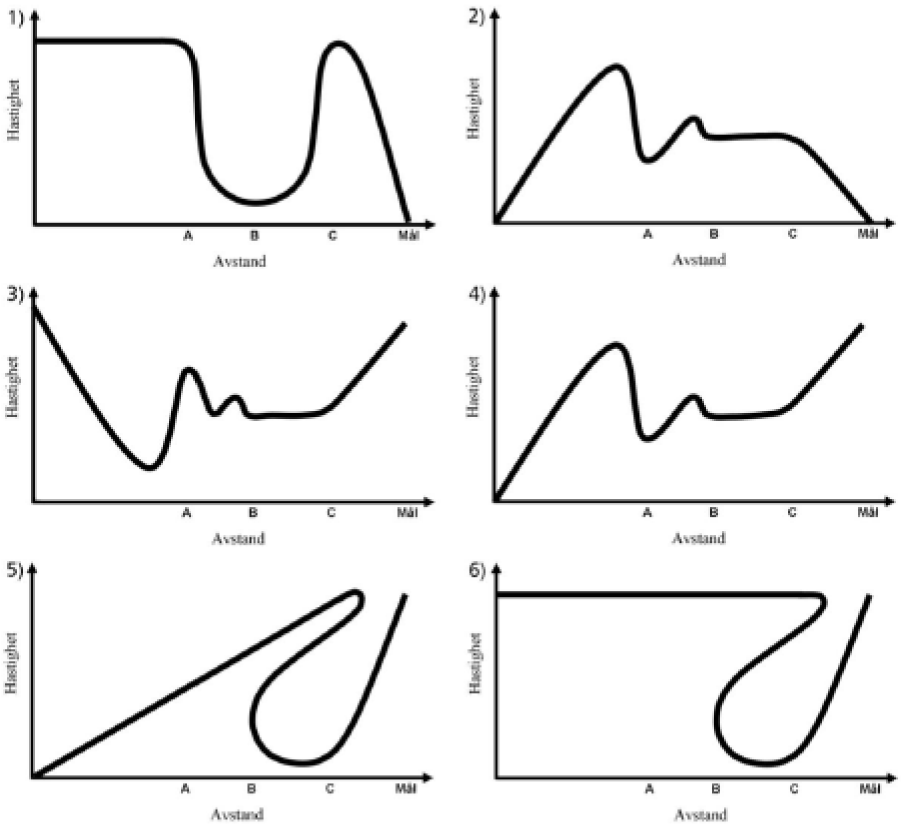
a) Kva for ein av grafane under meiner du beskriv turen til Hanne best?
b) Kva kan dei andre grafane beskrive?

Oppgåve 2

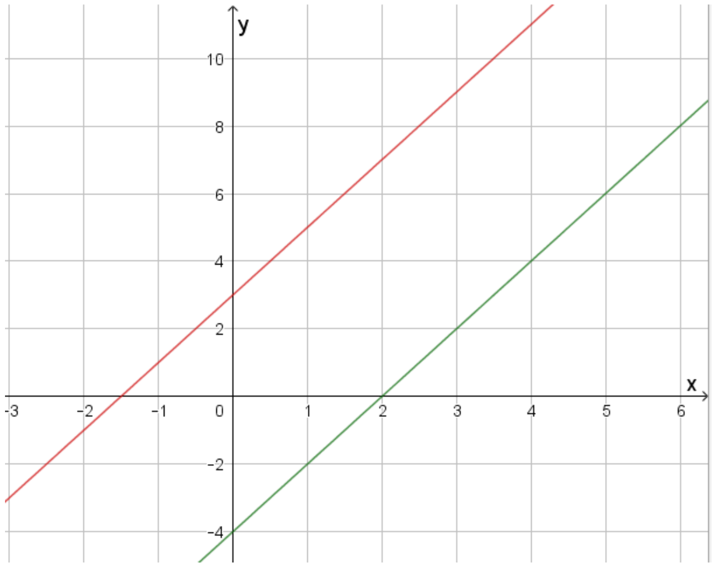
Figuren viser fartsbana til ei fartsetappe i rally.



Kva for ei av banene meiner du beskriv hastigheten til bilen best?



Oppgåve 3



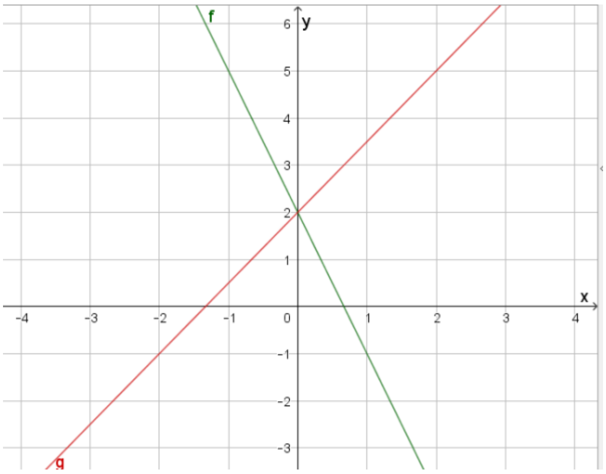
a) Kva kan du seie om stigningstalet til desse grafane?
Beskriv ein måte å finne stigningstalet til ein graf på.

b) Kva kan du seie om konstantleddet til desse grafane?
Beskriv ein måte å finne konstantleddet til ein graf på.

c) Skriv opp uttrykket for den raude og den grøne linja.

d) Teikn opp ei linje som er parallell med linje i koordinatsystemet og går gjennom $(2,4)$
Kva kan du seie om stigningstalet til denne linja.

Oppgåve 4



1. Finn uttrykket til dei to grafane
2. Forklar til partneren din kva du har gjort for å finne svaret.
3. Dersom de har ulike svar, lær din metode til partneren.

Økt 5: Samansett økt **tysdag 12/12**

Oppgåve 1

Mengd hektogram smågodt	3	5	10
Pris for påskeegg med smågodt (kr)	48	60	90

Stian vil kjøpe påskeegg. Han vil fylle påskeegget med smågodt. Tabellen ovanfor viser samanhengen mellom kor mykje smågodt han fyller i påskeegget, og kor mykje han må betale.

a) Teikn eit koordinatsystem som viser samanhengen mellom kor mykje smågodt han kjøper og prisen.
b) Bestem prisen for det tomme påskeegget og prisen per hektogram smågodt.
c) Kor mykje er det i eit påskeegg som kostar 81 kr.
Finn svaret ved to ulike metodar.

Oppgåve 2

Inngangsbilletten på eit tivoli er 60 kr. I tillegg kostar det 25 kr kvar gong du skal køyre ein karusell eller gjere ein annan aktivitet.

a) Teikn ein graf til å vise samanhengen mellom utgifter og talet på aktivitetar.
b) Bruk grafen til å finne kva utgiftene blir dersom du vel 8 aktivitetar.

Oppgåve 3

Dina arbeider i eit gatekjøkken som deltidsjobb. Når nokon er sjuke får ho tilbod om å vere vikar.

Sjefen gjer Dina to val for lønn.

Tilbod 1: 90 kr per time.

Tilbod 2: 600 kr fast i månaden og 75 kr per time.

a) Teikn ein graf for kvar av lønnstilboda i same koordinatsystem.
b) Kor mange timar må Dina arbeide for at tilbod 1 skal lønne seg?

Oppgåve 4

s står for tall på sjokoladar som Siri har, og t står for tal på sjokoladar som Tore har.

Forklar med eigne ord kvart av uttrykka nedanfor betyr.

Lag ein setning som forklarar kvart uttrykk

a) $s = t + 1$
b) $s = 2t$
c) $s = 2t + 1$
d) $t = s + 3$